Fisica Generale 30 Giugno 2022

Tutte le equazioni devono essere esplicitate in forma analitica prima di inserire i valori numerici. Esplicitare l'analisi dimensionale della soluzione finale. L' esercizio deve essere svolto in maniera sequenziale e ben discussa.

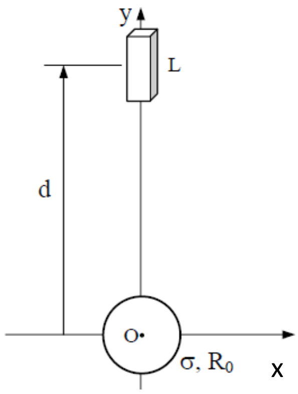
No 1) Una sfera conduttrice di raggio R0 e densità di carica superficiale σ, ha il centro fissato nel punto O.

a) Calcolare il campo elettrico (in funzione della distanza radiale) generato dalla sfera carica **in tutto** lo spazio e graficarlo in funzione della distanza dall'origine.

Ad una certa distanza d è posto un parallelepipedo di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di volume V e lunghezza L, sezione quadrata di lato B e costante dielettrica ϵr. Le dimensioni del parallelepipedo, così come il raggio della sfera, sono molto minori della distanza *d*. Dati: R0= 1mm, σ=10^3 C/m2, d= 2m, ϵr=2, V= 1 cm^3.

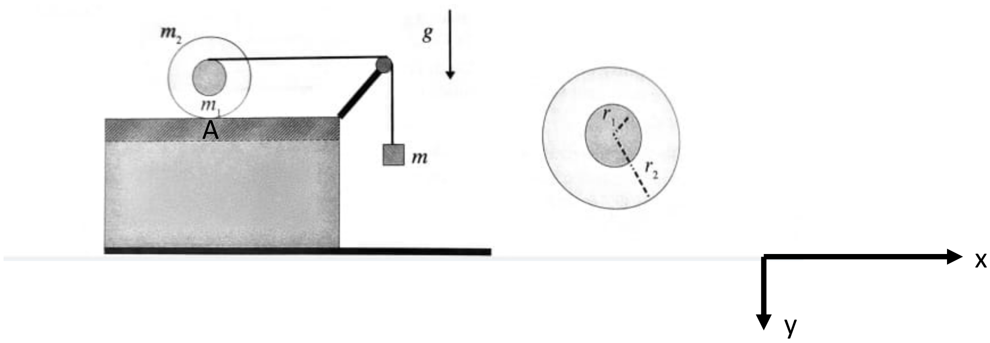
Calcolare (lungo l'asse y del sistema di riferimento dato):

b) La polarizzazione **P**, la densità e la carica superficiale di polarizzazione del dielettrico.
c) L'energia potenziale del dipolo generato dalla carica superficiale di polarizzazione.
d) La forza con cui il parallelepipedo è attratto o respinto dalla sfera (verso e modulo)



No. 2) Un corpo rigido è formato da due dischi concentrici di massa e raggio m1, R1 e m2, R2 con R2>R1. Una fune ideale è avvolta sul cilindro si raggio minore e passa su una carrucola di massa trascurabile ed è collegata ad un corpo puntiforme di massa m. Inizialmente il sistema è fermo. Poi si lascia libera la massa m e il corpo inizia a rotolare senza strisciare. Calcolare:

a) l 'accelerazione della massa m e la tensione della fune in funzione del momento di inerzia del corpo rispetto al punto A di contatto con il piano di appoggio.
b) La risultante delle forze che il piano esercita sul corpo rigido (modulo, direzione e verso) esplicitandone l'espressione analitica.
c) Il dominio dei valori del coefficiente di attrito statico tra il piano e il corpo rigido affinché il corpo rotoli senza strisciare.



ESERCIZIO 1

La sfera, che ha una carica totale $Q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R_0^2 = 4\pi \cdot 10^{-3}\, C$, si comporta come una carica puntiforme posta nell'origine O che genera (lungo l'asse y) un campo elettrico E.

Questo campo elettrico induce nel dielettrico delle cariche di polarizzazione che danno origine ad una forza di interazione tra il parallelepipedo e la sfera carica.

Per calcolare questa forza è necessario calcolare la polarizzazione del dielettrico, quindi le relative cariche di polarizzazione, l'energia potenziale del dielettrico dovuta alla presenza del campo E e la relativa forza di interazione.

Il campo elettrico generato dalla sfera carica nello spazio è:

$$E(\text{interno}) = 0$$

$$\bar{E}_0(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\,\hat{y}$$

All'interno del dielettrico il campo E sarà $\frac{1}{\varepsilon_r}$ volte il valore che aveva fuori. Il valore di E_d si calcola considerando che D non varia passando dall'esterno all'interno del dielettrico

La polarizzazione $\overline{P} = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \overline{E_d} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \cancel{\varepsilon_0} \frac{Q}{4\pi \cancel{\varepsilon_0} y^2} \hat{y}$

La densità superficiale $\sigma_p = \overline{P} \cdot \hat{n}$, negativa sulla faccia più vicina all'origine e positiva sulla faccia opposta.

La carica superficiale di polarizzazione

$$~~\sigma_p~~ \quad q_p = \sigma_p \cdot b^2 = |\overline{P}| \cdot b^2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi} \frac{Q\, b^2}{y^2}$$

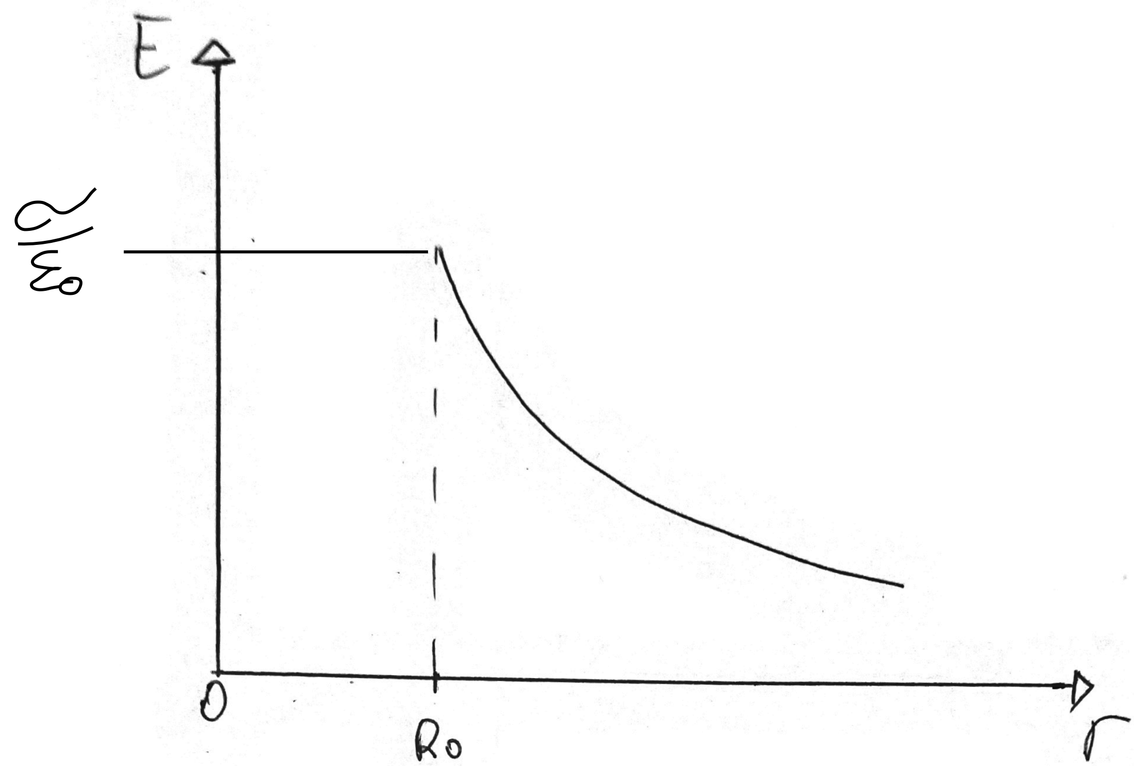
q_p ~~qa~~ darà origine a un dipolo $\overline{d} = q \cdot L \hat{y}$

$$= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{y^2} \cdot b^2 \cdot L\, \hat{y} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{y^2} \underbrace{V}_{\text{volume}} \hat{y}$$

L'energia potenziale del dipolo:

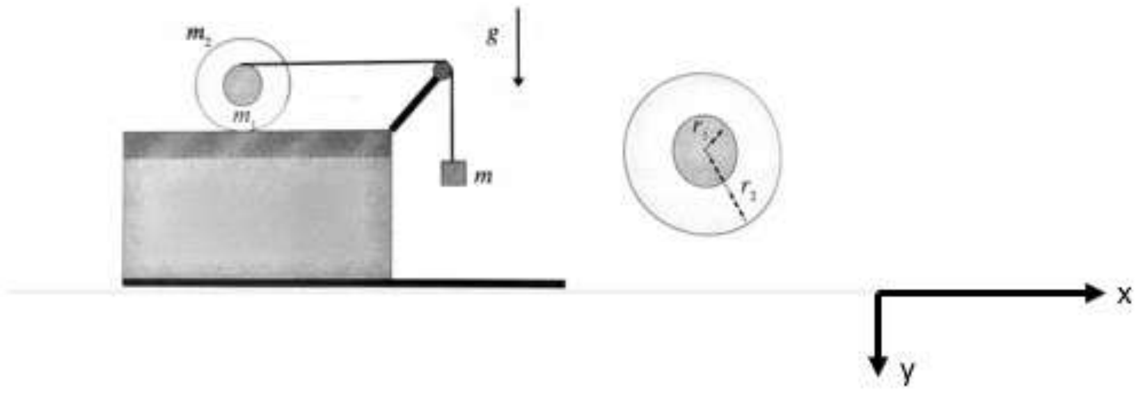
$$U = -\overline{E} \cdot \overline{d} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{Q^2 V}{y^4}$$

$$F_y = -\left.\frac{dU}{dy}\right|_L = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{4}{(4\pi)^2} \frac{Q^2 V}{L^5} = -7{,}1 \cdot 10^{-3}\, N \text{ (attrattiva)}$$

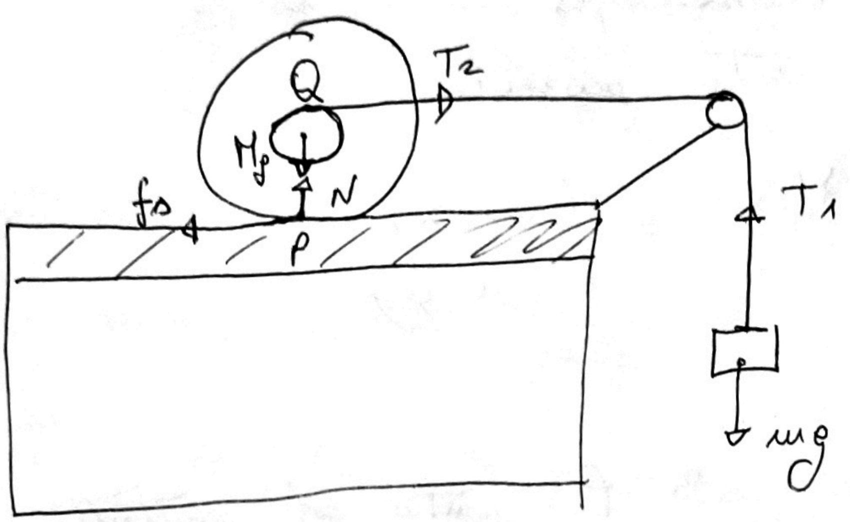

E
σ/ε0
0
R0
r

No. 2) Un corpo rigido è formato da due dischi concentrici di massa e raggio m1, R1 e m2, R2 con R2>R1. Una fune ideale è avvolta sul cilindro si raggio minore e passa su una carrucola di massa trascurabile ed è collegata ad un corpo puntiforme di massa m. Inizialmente il sistema è fermo. Poi si lascia libera la massa m e il corpo inizia a rotolare senza strisciare. Calcolare:

a) l 'accelerazione della massa m e la tensione della fune in funzione del momento di inerzia del corpo rispetto al punto di contatto il piano di appoggio.
b) La risultante delle forze che il piano esercita sul corpo rigido (modulo, direzione e verso) esplicitandone l'espressione analitica.
c) Il dominio dei valori del coefficiente di attrito statico tra il piano e il corpo rigido affinché il corpo rotoli senza strisciare.



Esercizio 2



a) Scriviamo le equazioni che servono per descrivere la dinamica del sistema.

II° legge di Newton per il corpo di massa m

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 = m\vec{a}$$

Tutte le forze sono // all'asse y, proiettando su tale asse:

$$mg - T_1 = ma$$

I° equazione cardinale del corpo rigido con $M = m_1 + m_2$

$$M\vec{g} + \vec{T}_2 + \underbrace{\vec{f}_s}_{\text{forza di attrito statico}} + \overbrace{\vec{N}}^{\text{reazione vincolare}} = M\vec{A} \rightarrow \text{accelerazione del centro di massa}$$

Il centro di massa per ragioni di simmetria si trova nel centro geometrico C

$$\begin{cases} T_2 - f_s = MA & (\text{asse } x) \\ Mg - N = 0 & (\text{asse } y) \end{cases}$$

Scegliamo come polo P, punto di contatto con il piano, allineato con C e Q.

T_2 è l'unica forza ad avere momento non nullo rispetto a P

$$\vec{PQ} \wedge \vec{T}_2 = \frac{d\vec{L}_P}{dt}$$

$|\vec{PQ}| = r_1 + r_2$. Scegliamo l'asse z passante per P, ortogonale al piano del disegno e con verso entrante

$$T_2(r_1 + r_2) = I_P \alpha$$

$$I_P = I_{CM} + M r_2^2$$

dove $I_{CM} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2$

$$I_P = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) r_2^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 r_2^2 + \frac{3}{2} m_2 r_2^2$$

Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ T_2 - f_s = MA \\ Mg - N = 0 \\ T_2(r_1 + r_2) = I_p \alpha \end{cases}$$

Fune ideale e massa della carrucola trascurabile dunque $T_1 = T_2 = T$

Il corpo è costituito dai due dischi che ruotano rigidamente intorno all'asse di rotazione istantaneo che passa per P. C e Q descrivono istantaneamente circonferenze centrate in P e raggi $\overline{PC} = r_2$ e $\overline{PQ} = r_1 + r_2$

$v_C = \omega r_2$ $\qquad$ $v_Q = \omega(r_1 + r_2)$

v_C è la velocità del centro di massa e v_Q è la velocità di m poiché la fune è inestensibile

$$A = \frac{dv_C}{dt} = \alpha r_2 \qquad a = \frac{dv_Q}{dt} = \alpha(r_1 + r_2)$$

$$\alpha = \frac{a}{r_1 + r_2} \qquad A = \frac{a r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - f_s = \dfrac{M r_2}{r_1+r_2}\, a \\ T(r_1+r_2) = \dfrac{I_P\, a}{r_1+r_2} \end{cases}$$

$$a = \frac{m}{\dfrac{I_P}{(r_1+r_2)^2} + m} \cdot g \qquad\qquad T = \frac{I_P\, m g}{I_P + m(r_1+r_2)^2}$$

b) $\vec{\Phi} = - f_s \vec{u}_x - N \vec{u}_y$

sostituendo a e T in $T - f_s = \dfrac{M r_2}{r_1+r_2}\, a$

ottengo $$f_s = \frac{m}{\dfrac{I_P}{r_1+r_2} + m(r_1+r_2)}\, g \left[\frac{I_P}{r_1+r_2} - M r_2\right]$$

c) affinché il corpo rotoli senza strisciare P deve essere istantaneamente fermo

$$f_s \le \mu_s M g \implies \mu_s \ge \frac{f_s}{Mg}$$