FISICA

By Edoardo

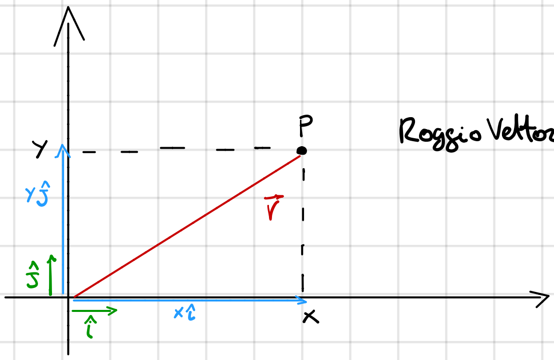
CINEMATICA (DEL PUNTO MATERIALE)

Studio del moto di un punto materiale SENZA CONSIDERARE LE CAUSE DEL MOVIMENTO

NB. con il punto materiale non è possibile schematizzare la pura rotazione ma solo la pura traslazione

Grandezze

- Spostamento $[L]$ m
- Velocità $[L, T^{-1}]$ m/s
- Accelerazione $[L, T^{-2}]$ m/s^2



Raggio Vettore $= \vec{r} = \vec{OP} =$ vettore origine - punto

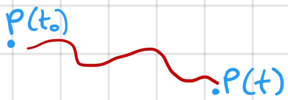
$\hat{i}$ = Versore : da il verso e la direzione $\Rightarrow$ $x\hat{i}$: vettore con modulo dato da x e direzione e verso dati da $\hat{i}$

la stessa cosa si può fare per la y: $y\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (teorema di Pitagora)

Essendo dipendenti dal tempo: $\vec{r}(t) = \underbrace{x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}}_{\text{moti componenti}} \left[+ \underbrace{z(t)\hat{k}}_{} \right]^{3D}$

\# moti componenti = \# gradi di libertà



Un altro approccio è quello della traiettoria ovvero nell'identificare il tipo di equazione della traiettoria.

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \quad \vee \quad y=f(x) \\ \text{legge oraria } S(t) \end{cases} \quad \text{NB il tempo scompare} \quad \left(= \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \text{equivalente al primo metodo} \right)$$

Nel caso 3D:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} = \begin{cases} \left.\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}\right\} \text{intersezione tra due superfici} \\ S(t) \end{cases}$$

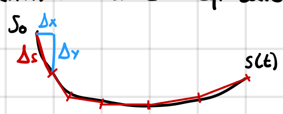
Dai moti alla traiettoria

ES.

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -3t + 1 \end{cases} \rightarrow \text{trovo un'equazione atemporale} : t = x + 1$$

$y(x) = -3(x+1) + 1 = -3x - 2$ eq. retta $\Rightarrow$ moto rettilineo

e la legge oraria?

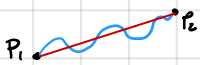


$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t^2}} \cdot \Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

$$\int_{S_0}^{S(t)} ds = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \rightarrow S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} \sqrt{\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}_{\text{derivate rispetto al tempo dei moti componenti}}} dt$$

$\Rightarrow s(t) = S_0 + \sqrt{10}(t - t_0) = \sqrt{10}\, t \quad (t_0 = 0,\ S_0 = 0)$

Vettore Spostamento :



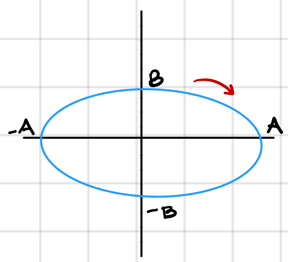
ES 2

$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) = B \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t) = y/B \end{cases} \rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1 \rightarrow 1 = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 \text{ traiettoria ellittica}$$

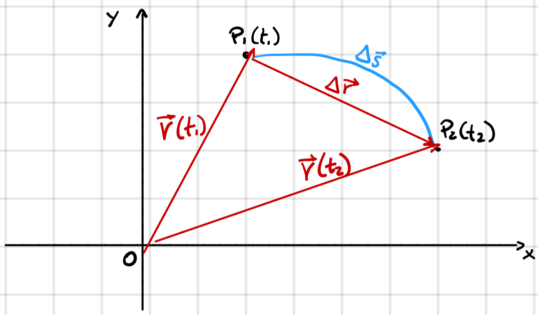
NB. il verso è dato dalla tabella oraria

$(t=0\ \ B,\ t=\pi/2\ \ A,\ t=\pi\ \ -B \ldots)$

$\rightarrow S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} \sqrt{(A\omega\cos(\omega t))^2 + (-B\omega\sin(\omega t))^2}\, dt$



Nel caso in cui A = B abbiamo una circonferenza $\rightarrow s(t) = s_0 + A\omega(t - t_0) = A\omega t$ $= 2\pi$



$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$

$\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$

VELOCITÀ

$\Delta s / \Delta t = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_{media}$

Questo però non ho nessuna informazione riguardo verso e direzione ...

$\Rightarrow \vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, ma commetto un errore poiché $\Delta\vec{r} \neq \Delta s$ che aumenta con il tempo quindi non va bene

Per ovviare a ciò si fa tendere Δt a zero e si parlerà di velocità istantanea.

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$ (derivata della legge oraria rispetto al tempo) $\Rightarrow \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ = velocità vettoriale (errore trascurabile)

In sostanza per un Δt molto piccolo $\Delta s = \Delta\vec{r}$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

$\vec{v}$ è la "vera" velocità, mentre v è il suo modulo! $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria e quindi moltiplicando v per un versore tangente alla traiettoria ottengo $\vec{v}$: $\vec{v} = v \cdot \hat{\tau} = \dfrac{ds}{dt} \cdot \hat{\tau}$

Poiché $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$:

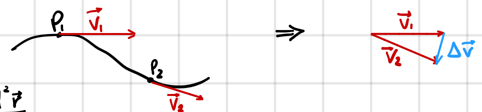
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right) = \dfrac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$ e ricordando che un vettore $\vec{v}$ può essere espresso secondo le sue componenti

$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x = dx/dt \\ v_y = dy/dt \\ v_z = dz/dt \end{array}\right\}$ componenti della velocità

ES

$\begin{cases} x(t) = 4t + 8 \\ y(t) = -5 \\ z(t) = -3t + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = dx/dt = 4 \\ v_y = dy/dt = 0 \\ v_z = dz/dt = -3 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5\ m/s$



ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$= d/dt\left(v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}\right) = d^2/dt^2\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\right)$

Poiché come ogni vettore a può essere scomposto nelle sue componenti : $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 \\ a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2 \\ a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2 \end{cases}$

MOTO RETTILINEO

Moto lungo un asse unico: l'asse x

$$\begin{cases} \text{Posizione: } x(t) \\ \text{Velocità: } v(t) = \dfrac{dx}{dt} \qquad \left(\Rightarrow \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \right) \\ \text{Accelerazione: } a(t) = \dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$

Se la velocità è costante si parla di moto rettilineo uniforme: $v(t) = v_0$ (costante) $\longrightarrow a(t) = 0$

$x(t) = ?$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} v_0\, dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \Rightarrow v_0(t - t_0) = x(t) - x_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)}$ NB. il grafico è una retta inclinata

ES

$v_1 = 0.2\ m/s \qquad v_2 = 0.4\ m/s \qquad d = 5\ m$

$$1\begin{cases} v(t) = v_1 + 0 \\ x_1(t) = v_1 t \end{cases} \qquad 2\begin{cases} v(t) = -v_2 \\ x_2(t) = -v_2 t + d \end{cases}$$

Quando si incontrano? Quando $x_1(t) = x_2(t)$

$\Rightarrow v_1 t = d - v_2 t \Rightarrow t(v_1 + v_2) = d \Rightarrow t^* = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{5\ \cancel{m}}{(0.2 + 0.4)\ \cancel{m}/s} = 8.3\ s$

Dove? $\rightarrow$ Sostituisco t^* in una delle leggi del moto $\Rightarrow s = x(t^*) = v_1 \frac{d}{v_1 + v_2} = d\left(\frac{v_1}{v_1 + v_2}\right) = \frac{d}{3} = 1.67\ m$

(usiamo x_1 per comodità)

ES 2

$v_1 = 120\ km/h$ (ladri) Dove e quando la polizia raggiunge i ladri?

$v_2 = 150\ km/h$ (polizia)

$t_0 = 5\ s$ (per la polizia)

$$① \begin{cases} v(t) = v_1 \\ x_1(t) = v_1 t \end{cases} \qquad ② \quad v(t)\begin{cases} t < t_0 & 0 \\ t > t_0 & v_2 \end{cases} \qquad x_2(t)\begin{cases} t < t_0 & 0 \\ t > t_0 & v_2(t - t_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow v_1 t = v_2(t - t_0) \Rightarrow (v_1 - v_2)t^* = -v_2 t_0 \Rightarrow t^* = \frac{v_2}{v_2 - v_1} t_0 = \left(\frac{150}{150 - 120}\right) 5 = 25\ s$

$x_1(t^*) = 120\ \cancel{km/h}\ \cancel{5\ s} = \frac{120}{3.6}\ m/s \cdot 25\ s = 833\ m$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

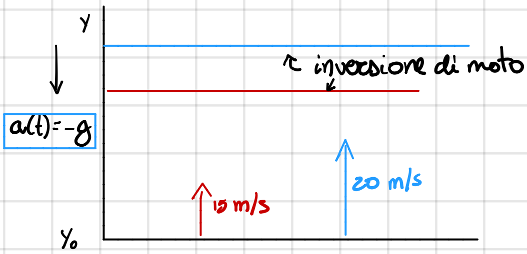
$$\begin{cases} x(t) \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{costante} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_0\, dt = dv \Rightarrow a_0 \int_{t_0}^{t} dt = \int_{V_0}^{v(t)} dv \Rightarrow a_0 (t - t_0) = V(t) - V_0 \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 + a_0 (t - t_0)}$$

$$\Rightarrow dx = [V_0 + a_0 (t - t_0)]\, dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} V_0\, dt + \int_{t_0}^{t} a_0 \overbrace{(t - t_0)}^{z}\, dt \Rightarrow x(t) - x_0 = V_0 (t - t_0) + a_0 \int_0^{t-t_0} z\, dz$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + V_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2}$$

La caduta dei gravi



$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} V(t) = V_0 - gt \\ y(t) = y_0 + V_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}}$$

Le formule sono le stesse del moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione negativa perché contraria!

ALTEZZA MASSIMA $\Rightarrow V(t) = 0$

$$\begin{cases} V(t) = 0 \rightarrow \boxed{t = V_0/g} \\ y(t) = \dots \end{cases} \Rightarrow \boxed{y(t)_{max} = \frac{V_0^2}{2g}}$$

TEMPO DI VOLO $\Rightarrow y(t) = 0$

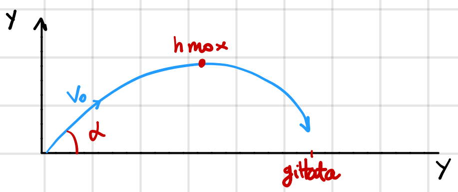
$$v(t) = 0 \Rightarrow t(V_0 - \tfrac{1}{2} g t) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \quad \text{(partenza)} \\ \boxed{t = \dfrac{2V_0}{g}} \quad \text{(arrivo)} \end{cases}$$

t volo $= 2\, t$ altezza massima

$V(t) = V_0 - gt = -V_0$ Velocità di atterraggio $= -$ velocità partenza

Balistica



Bisogno scomporre tutte le componenti in x e y!

$$V_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$a \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \qquad v \begin{cases} V_x = V_0 + at = V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_y = V_0 + at = V_{0y} + a_y t = V_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \qquad (x,y) \begin{cases} x = V_{0x} t = V_0 \cos\alpha\, t \\ y = V_{0y} t + \tfrac{1}{2} a t^2 = V_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ALTEZZA MASSIMA $\Rightarrow V_y = 0$

$$\begin{cases} V_y = V_0 \sin\alpha - gt = 0 \Rightarrow \boxed{t = V_0 \sin\alpha / g} \\ y = V_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2} V_0^2 \sin^2\alpha / g}$$

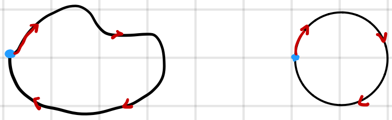
GITTATA $\Rightarrow y = 0$

$$\begin{cases} y = V_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \ \vee \ \boxed{t = \dfrac{2 V_0 \sin\alpha}{g}} \\ x = V_0 t \cos\alpha \Rightarrow V_0^2\, 2 \sin\alpha \cos\alpha / g = \boxed{V_0^2 \sin(2\alpha)/g} \end{cases}$$

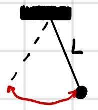
Altezza Max : $\alpha = 90°$

Gittata Max : $\alpha = 45°$

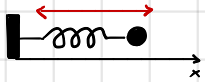
Moto Periodico



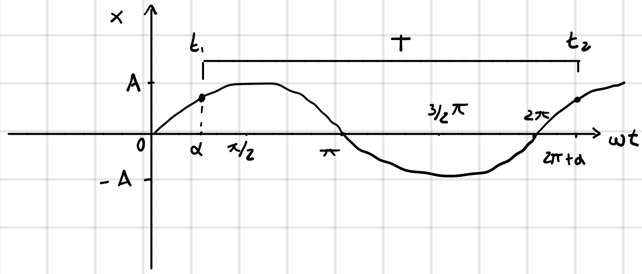
Periodo T = tempo per tornare al punto di partenza



Anche il moto su un arco di circonferenza è considerato periodico (es. pendolo) oppure su una retta (es. molla)



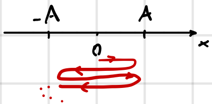
Moto Armonico



angolo di fase (rad)

legge oraria: $x(t) = A \sin(\omega t)$

elongazione / ampiezza (m) pulsazione (rad/sec)



$$\begin{cases} 2\pi + \alpha = \omega t_2 \\ \alpha = \omega t_1 \end{cases} \Rightarrow 2\pi = \omega (t_2 - t_1) = \omega T \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

f = FREQUENZA = $\frac{1}{T}$ $\left(\frac{1}{s} \text{ o } Hz\right)$

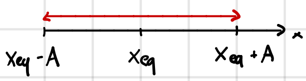
Indica quanti periodi ci sono in un secondo ovvero quante volte in un secondo riesco a fare un giro completo

$\Rightarrow \omega = 2\pi f$ (rad/sec)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$$

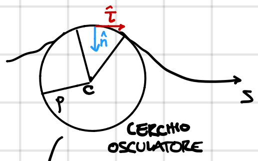
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + x_{eq} \\ v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\ a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 (x(t) - x_{eq}) \end{cases}$$



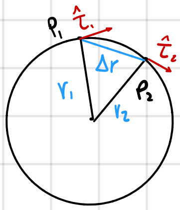
$$\vec{v} = v \cdot \hat{\tau} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{\tau}$$

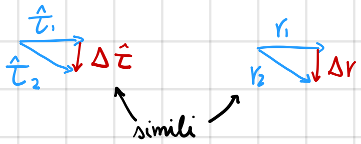
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v(t) \cdot \hat{\tau}(t)\right) = \overbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\tau}}^{a\ \text{tangenziale}} + \underbrace{v\frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{a\ \text{normale}}$$



C = centro di curvatura

ρ = raggio di curvatura



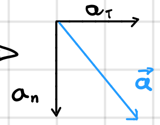


$$\Delta\hat{\tau} : \hat{\tau}_1 = \Delta r : r_1 \Rightarrow \Delta\tau = \frac{\overset{=1}{\hat{\tau}_1} \cdot \Delta r}{r_1 = \rho} = \frac{\Delta r}{\rho}$$

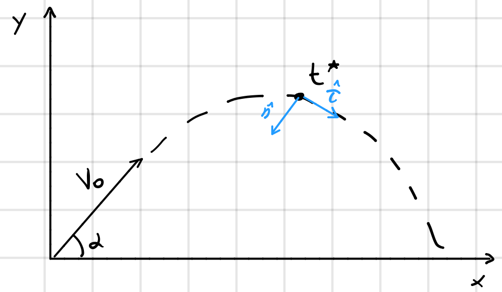
$$\Rightarrow a\ \text{normale} = v\frac{dr}{dt} \cdot 1/\rho = v \cdot v \cdot 1/\rho = \boxed{v^2/\rho\ \boxed{\hat{n}}}$$

$\hat{n}$: versore per dare direzione e verso

v^2/ρ: nulla nel caso di moto rettilineo

$\Rightarrow$ 

ES

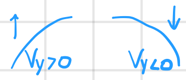


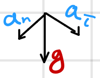
Dalle scomposizioni della Balistica:

$$(x)\begin{cases} \dots \\ V_x = V_0\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases} \qquad (y)\begin{cases} \dots \\ V_x = V_0\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}V^2(t) = \frac{d}{dt}\left(V_x^2 - V_y^2(t)\right) \Rightarrow 2V\frac{dV}{dt} = 2V_y\frac{dV_y}{dt} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{V_y}{V}\overset{=-g}{\frac{dV_y}{dt}} = -\frac{V_y g}{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_\tau = -\frac{V_y g}{V}}$$



NB. 

$\Rightarrow g^2 = a_n^2 + a_\tau^2$

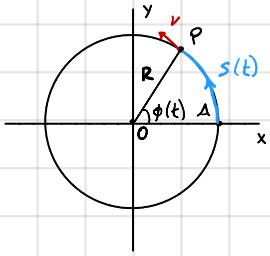
$$\Rightarrow a_n^2 = g^2 - a_\tau^2 = g^2 - g^2\frac{V_y^2}{V^2} = g^2\,\frac{V^2 - V_y^2}{V^2} = g^2\,\frac{(V_y^2 + V_x^2) - V_y^2}{V^2} = g^2\frac{V_x^2}{V^2} \Rightarrow \boxed{a_n = g\frac{V_x}{V}}$$

$\rho = \frac{V^3}{gV_x}$ poiché V varia nel tempo $\rightarrow \rho(t) = \frac{V^3(t)}{gV_x}$

Il raggio di curvatura MINIMO si ha all'apice della parabola, nel punto in cui $V_y = 0 \Rightarrow V = V_x \Rightarrow \rho_{min} = \frac{V^2}{g} = \frac{V_0^2\cos^2\alpha}{g}$

MOTO CIRCOLARE

La traiettoria è una circonferenza
A = origine degli archi = punto di partenza

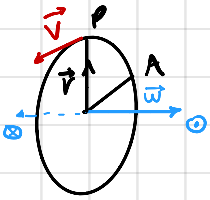


$s(t) = R \cdot \phi(t)$

$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt}$ velocità angolare ω (rad/sec) $= \omega R$

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \quad \text{accelerazione angolare } \alpha \ (rad/s^2) = \alpha R \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \end{cases}$$

Sono tutti scalari e quindi "perdiamo" le informazioni di verso e direzione! Applico quindi i vettori



$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Regola mano destra: medio = pollice × indice

perché ortogonali

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega}\,\cancel{(\vec{\omega} \times \vec{r})} - \vec{r}\,\overbrace{(\vec{\omega} \times \vec{\omega})}^{\omega^2}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{accelerazione centripeta} \end{cases}$$

Moto circolare uniforme

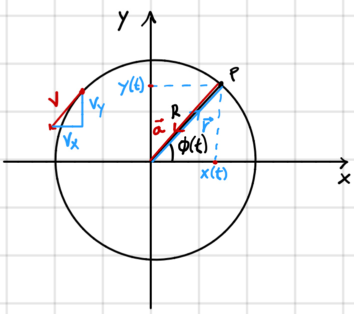
Modulo di v costante, non verso e direzione!
$V(t)$ costante $\leftrightarrow \omega(t)$ costante (poiché R costante)
Derivando $\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \alpha(t) = 0 \Rightarrow a_T = 0$
Integrando $\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$

$\Rightarrow$

ANGOLI	ARCHI
$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$	$S = \phi R$
$\omega(t) = \omega_0$	$V_0 = \omega_0 R$
$\alpha(t) = 0$	$\begin{cases} a_T = 0 \\ a_n = \omega_0^2 R \end{cases}$

L'accelerazione normale non cambia il modulo della velocità ma solo il suo verso e direzione!

$2\pi + \phi_0 = \omega_0 T + \phi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (simile al moto armonico)



moto armonico

$$\begin{cases} x(t) = R\cos[\phi(t)] = \overbrace{R\cos(\omega_0 t + \phi)}^{\text{moto armonico}} \\ y(t) = R\sin(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

ω_0 pulsazione

} 2 moti armonici $[-R, +R]$ sfasati di $\pi/2$

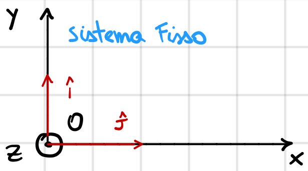
$\Downarrow$

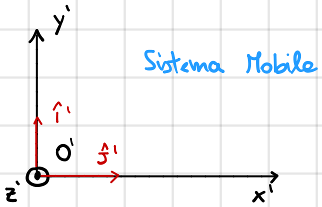
$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = R\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega_0^2 R\cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t) \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\omega_0^2 R\sin(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 y(t) \end{cases}$$

$\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} = -\omega_0^2 x \hat{\imath} - \omega_0^2 y \hat{\jmath} = -\omega_0^2 \overbrace{(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})}^{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}$ (centripeta)



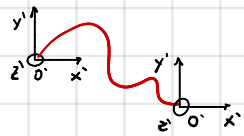


Ogni movimento cinematico, anche complesso, può essere scomposto in moti di traslazione e/o rotazione

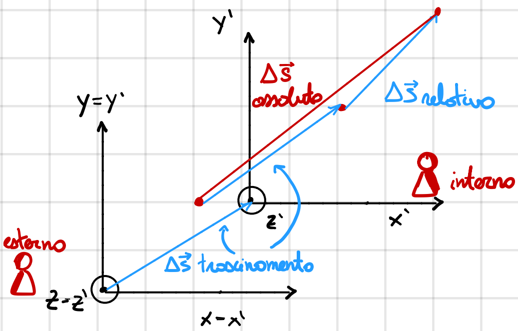
MOTO DI TRASCINAMENTO PER TRASLAZIONE

L'orientazione degli assi deve rimanere lo stesso di partenza

I versori $\hat{i}'$ e $\hat{j}'$ rimangono inalterati!



Esempio Treno:



L'osservatore interno vedrà solo $\Delta\vec{s}$ relativo

L'osservatore esterno vedrà $\Delta\vec{s}$ assoluto

$$\boxed{\Delta\vec{s}_a = \Delta\vec{s}_r + \Delta\vec{s}_t}$$

$$\frac{\Delta\vec{s}_a}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{s}_r}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{s}_t}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_t}$$

Ogni vettore a sua volta può essere scomposto sui suoi 3 assi

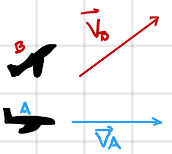
$$\vec{V}_a = (V_{ax}\,\hat{i} + V_{ay}\,\hat{j} + V_{az}\,\hat{k}) = \vec{V}_r + \vec{V}_t = (V_{rx'}\hat{i}' + V_{ry'}\hat{j}' + V_{rz'}\hat{k}') + (V_{tx}\hat{i} + V_{ty}\hat{j} + V_{tz}\hat{k})$$

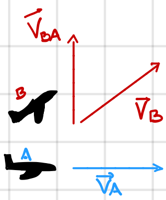
$$\Rightarrow d/dt \Rightarrow (a_{ax}\hat{i} + a_{ay}\hat{j} + a_{az}\hat{k}) = (a_{rx'}\hat{i}' + a_{ry'}\hat{j}' + a_{rz'}\hat{k}') + (a_{tx}\hat{i} + a_{ty}\hat{j} + a_{tz}\hat{k})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t}$$

CASO PARTICOLARE: $\vec{V}_t$ = costante $\quad \vec{a}_t = 0 \quad$ sistema inerziale

ES.





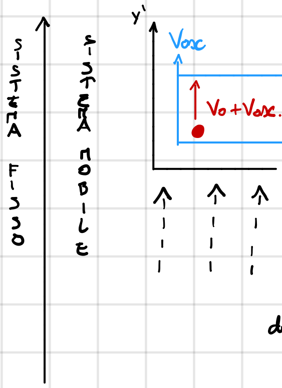
$\Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_{BA} + \vec{V}_A$

assoluta = relativa + trascinamento $\Rightarrow \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

osservatore esterno

osservatore interno a A

ES lancio moneta in ascensore



SISTEMA MOBILE

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \cancel{\vec{a}_t} = \vec{a}_r = \vec{g}$$

$$\begin{cases} a_{y'} = -g \\ V_{y'} = V_0 - gt \\ y' = V_0 t - gt^2/2 \end{cases}$$

SISTEMA FISSO

$$\vec{a}_a = \vec{g}$$

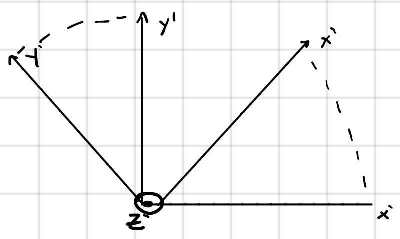
$$\begin{cases} a_y = -g \\ V_y = V_0 + V_{asc.} - gt \\ y = (V_0 + V_{asc})t - gt^2/2 \end{cases}$$

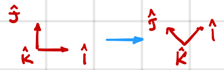
punto di ritorno

$$\begin{cases} y_{asc} = V_{asc} \cdot t \\ y = (V_0 + V_{asc})t - gt^2/2 \end{cases} \rightarrow t^* = \frac{2V_0}{g} \Rightarrow$$

Sistema mobile o fisso = uguale!

MOTO DI TRASCINAMENTO PER ROTAZIONE

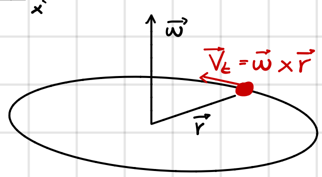




I versori cambiano l'orientamento (in questo caso non $\hat{z}$)

$\Delta \vec{s}_a = \Delta \vec{s}_r + \Delta \vec{s}_t$

$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_t$?



$= \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$= (V_{ax}\hat{i} + V_{ay}\hat{j} + V_{az}\hat{k}) = (V_{rx'}\hat{i}' + V_{ry'}\hat{j}' + V_{rz'}\hat{k}') + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow d/dt$

① $\Rightarrow (a_{ax}\hat{i} + a_{ay}\hat{j} + a_{az}\hat{k}) = \vec{a}_a$

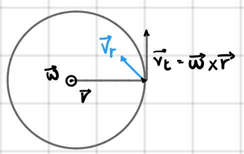
③ $\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega}(\cancel{\vec{\omega}\cdot\vec{r}}) \overbrace{- \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})}^{-\omega^2 \vec{r}}$

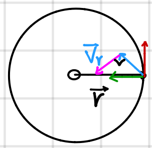
$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r - \omega^2 \vec{r}$

② $\Rightarrow \frac{d}{dt}(V_{rx}\hat{i}') = \frac{dV_{rx}}{dt}\hat{i}' + \frac{d\hat{i}'}{dt} V_{rx} \Rightarrow \overbrace{\left(\frac{dV_{rx}}{dt}\hat{i}' + \frac{dV_{ry}}{dt}\hat{j}' + \frac{dV_{rz}}{dt}\hat{k}'\right)}^{\vec{a}_r} + \left(V_{rx}\frac{d\hat{i}'}{dt} + V_{ry}\frac{d\hat{j}'}{dt} + V_{rz}\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)$

Formule di Poisson: $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}' \Rightarrow (V_{rx}\vec{\omega} \times \hat{i}' + V_{ry}\vec{\omega} \times \hat{j}' + V_{rz}\vec{\omega} \times \hat{k}') = \vec{\omega} \times \overbrace{(V_{rx}\hat{i}' + V_{ry}\hat{j}' + V_{rz}\hat{k}')}^{\vec{V}_r}$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \Big(\overbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}^{a\text{ trascinamento}} \underbrace{- \omega^2 \vec{r}}_{a\text{ centripeta}} + \overbrace{2\vec{\omega} \times \vec{V}_r}^{a\text{ complementare di Coriolis}}\Big)$$





$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_{t_1} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\ \vec{a}_{t_2} &= -\omega^2 \vec{r} \\ \vec{a}_{t_3} &= 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \end{aligned}\right\} + \vec{a}_r = \vec{a}_a$$

DINAMICA (DEL PUNTO MATERIALE)

Studio delle cause (Forze) del moto

CAUSA → EFFETTO
FORZA F → ACCELERAZIONE a

2° Principio della Dinamica : $\underbrace{\vec{F}}_{\text{Risultante delle forze}} = \overbrace{m}^{\text{massa inerziale}} \cdot \vec{a}$ $[N = Kg \cdot m/s^2]$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$: L'accelerazione è direttamente proporzionale alla somma delle forze e inversamente proporzionale alla massa inerziale

Il tutto si basa su sistemi fissi (inerziali) non mobile!

$$\Sigma \vec{F} = \begin{cases} \Sigma F_x = ma_x = m \cdot d^2x/dt^2 \\ \Sigma F_y = ma_y \quad m \cdot d^2y/dt^2 \\ \Sigma F_z = ma_z \quad m \cdot d^2z/dt^2 \end{cases}$$

Es Una macchina che accellera, vista da fuori è un sistema inerziale
I pedoni che "si muovono" visti da dentro la macchina no!

1° Principio della Dinamica

In un sistema di riferimento inerziale, ogni corpo in assenza di forze esterne prosegue nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme

Assenza di forze equivale anche a risultante nulla $\vec{a} = \frac{\cancel{\Sigma F}^{\,0}}{m} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{quiete} \\ \vec{v}_0 & \text{moto rettilineo uniforme} \end{cases}$

Tale principio va "letto al contrario": se in assenza di forze un oggetto rimane in quiete o in moto rettilineo uniforme allora ci troviamo in un sistema di riferimento inerziale

3° Principio della Dinamica (Azione e Reazione)

Forza esercitata da B su A

Forza esercitata da A su B

Ad ogni azione che A esercita su B corrisponde una reazione di B su A, uguale ed opposta diretta lungo la congiungente i corpi

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

QUANTITA' DI MOTO

$\vec{F} = m\vec{a} = m\, d\vec{v}/dt = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \xrightarrow{\text{se } m \text{ non costante}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ quantità di moto $p = mv$

TEOREMA IMPULSO

$\vec{F}dt = d\vec{p}$
impulso elementare

$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$
↳ indica la variazione di $\vec{p}$

CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO

se $\vec{F} = 0$ o $\vec{I} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}$ costante

Es

$\vec{F}_{frenante}$

$t_1 = 0s$ $\qquad$ $t_2 = 10$

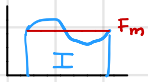
$V_1 = 108\ km/s$ $\qquad$ $V_2 = 0\ km/s$

$m = 1000\ kg$

$\vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

$P_2 = mV_2 = 0$ $\qquad$ $P_1 = mV_1 = 1000 \cdot \underset{(m/s)}{30} = 30000\ kg\ m/s$

$\rightarrow \vec{I} = -30000\ kg\ m/s$



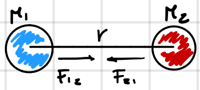
$\Rightarrow \vec{I} = \vec{F}_m \Delta t \Rightarrow F_m = \frac{-30000}{10} = -3000\ N$

TIPI DI FORZE

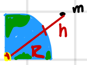
FONDAMENTALI:
1) gravitazionali
2) elettromagnetiche (Forza Peso)
3) nucleare debole
4) nucleare forte

DI CONTATTO
1) vincolari (Reazione Normale e Forze di Attrito
2) tensione di una fune
3) elastiche
4) apparenti

GRAVITAZIONE UNIVERSALE



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ $\qquad$ $F_G = F_{12} = F_{21} = \frac{M_1 M_2}{r^2} G$ $\qquad$ $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{Nm^2}{Kg^2} = \frac{m^3}{Kg\, s^2} \right)$



$F = G \frac{m_T m}{(R+h)^2} \overset{R \gg h}{\sim} G \frac{m_T m}{R^2} = m \overbrace{\left(G \frac{m_T}{R^2} \right)}^{g} = mg$

FORZA PESO

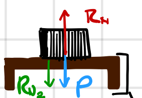
È la forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra sui corpi sulla superficie terrestre. Modulo costante, diretta lungo la verticale e orientata verso il basso

$\vec{P} = m\vec{g}$ [N o Kg peso]

↳ la massa viene chiamata anche massa gravitazionale

$\underbrace{m_{grav.} \vec{g}}_{F\ peso} = \underbrace{m_{inerz.} \vec{a}}_{II\ principio}$

FORZA DI REAZIONE VINCOLARE

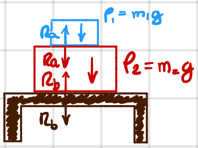


Sono le forze esercitate dal vincolo sull'oggetto.

vincolo

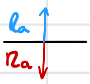
$\begin{cases} \vec{R}_N = -\vec{P} \\ R_N = P \end{cases}$

- verticale



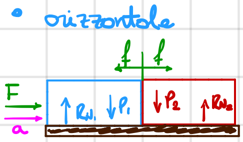
$R_a - m_1 g = 0 \Rightarrow R_a = m_1 g$

$R_b - R_a - m_2 g = 0 \Rightarrow R_b = R_a + m_2 g = (m_1 + m_2) g$



→ questo è dovuto al terzo principio della dinamica

- orizzontale



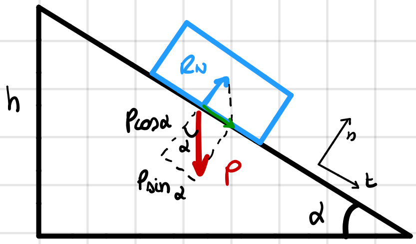
ASSE Y

$\begin{cases} ①\ -P_1 + R_{N_1} = 0 \rightarrow R_{N_1} = P_1 \\ ②\ -P_2 + R_{N_2} = 0 \rightarrow R_{N_2} = P_2 \end{cases}$

ASSE X

$\begin{cases} ①\ F - f = m_1 a \\ ②\ f = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = F/(m_1 + m_2) \\ f = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F \end{cases}$

- piano inclinato



In questo caso $\vec{P} + \vec{R_N} \neq 0$

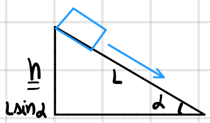
$\vec{P} + \vec{R_N} = m\vec{a}$

Scomponiamo P sulle componenti n e t

$$\begin{cases} n: \; R_N - P\cos\alpha = ma_n = 0 \\ t: \; P\sin\alpha = ma_t \end{cases}$$

$\rightarrow R_N = mg\cos\alpha$

$\rightarrow mg\sin\alpha = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\alpha$ moto uniformemente accelerato



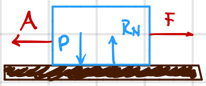
$$\begin{cases} a = g\sin\alpha \\ V = at + \cancel{V_0} \\ S = at^2/2 + \cancel{S_0} = L \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2h/\sin\alpha}{g\sin\alpha}} = \boxed{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

t caduta libera (se $\alpha = 90°$)

$V_{FIN} = a\,t_{FIN} = g\sin\alpha \cdot t_{FIN} = \sqrt{2gh}$ indipendente da α

FORZA DI ATTRITO

Parallela alle superfici a contatto e si oppone al loro movimento relativo.



$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{A_s} = 0$ caso statico (oggetto rimane fermo)

Per muovere l'oggetto F deve essere maggiore di $A_s \rightarrow F > \mu_s R_N = A_{MAX}$

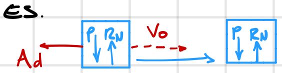
$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{A_d} = m\vec{a}$ caso dinamico (oggetto si muove)

$A_s \leq A_{max} = \mu_s R_N$

$A_d = \mu_d R_N$

$\mu_s > \mu_d$

ES.



Dopo quanto tempo e spazio si ferma?

Caso dinamico poiché già in movimento (V_0)

asse y: $R_N - P = ma_y = 0 \longrightarrow R_N = P$

asse x: $-A_d = ma_x$ NB. A_s si oppone ad una forza, A_d al movimento!

$a_x = \frac{-A_d}{m} = \frac{-\mu_d R_N}{m} = -\frac{\mu_d mg}{m} = -\mu_d g$ (decelerazione)

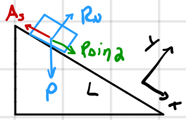
$V = -\mu_d g t + V_0$

$S = V_0 t - \mu_d g t^2/2$

$t_{FIN} \longrightarrow V = 0 \longrightarrow t_{FIN} = \frac{V_0}{\mu_d g}$

$S_{FIN} = S(t_{FIN}) \longrightarrow S_{FIN} = V_0^2 / 2\mu_d g$

ES



$$\begin{cases} R_v - P\cos\alpha = ma_y = 0 & \Rightarrow R_v = P\cos\alpha \\ P\sin\alpha - A_s = ma_x = 0 & \Rightarrow A_s = P\sin\alpha \end{cases}$$

Verifico che $A_s \le A_{MAX} = \mu_s R_v \longrightarrow tg\,\alpha \le \mu_s$ Condizione statica

$tg\,\alpha > \mu_s$ condizione dinamica

$\Downarrow$

asse y (uguale) : $R_v - P\cos\alpha = ma_y = 0 \longrightarrow R_v = P\cos\alpha$

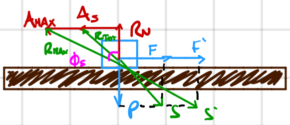
asse x : $P\cos\alpha - A_d = ma_x$ incognita è a_x $\Longrightarrow a_x = \dfrac{P\sin\alpha - A_d}{m} = \dfrac{mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$

$$\begin{cases} a = g\sin\alpha\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\,\alpha}\right) \ge 0 \rightarrow \text{acc. di caduta} \\ v = at \\ s = at^2/2 = L \end{cases}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2h/\sin\alpha}{g\sin\alpha\left(1-\frac{\mu_d}{tg\,\alpha}\right)}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mu_d}{tg\,\alpha}}}$$

$$v = at = \sqrt{2gh}\sqrt{1-\mu_d/tg\,\alpha}$$

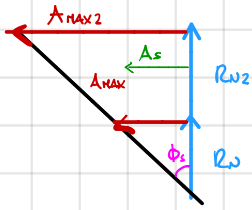
Supponiamo il seguente esempio



$$\underbrace{(\vec{P} + \vec{F})}_{S} + \underbrace{(R_v + A_s)}_{R_{TOT}} = 0$$

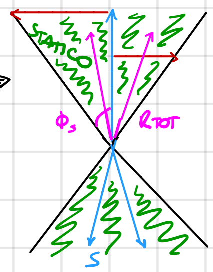
S è il vettore delle sollecitazioni mentre R_{TOT} quello delle reazioni vincolari

$tg\,\phi_s = \dfrac{A_{max}}{R_v} = \dfrac{\mu_s R_v}{R_v} = \mu_s \Longrightarrow$

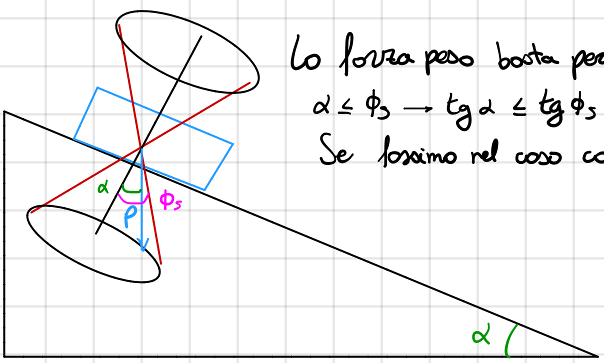


All'interno del cono siamo sempre nel caso statico poiché $A_s \le A_{MAX}$

$\Longrightarrow$



Questo è valido per entrambi i versi!



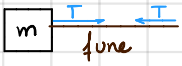
La forza peso basta per far muovere l'oggetto? No perché sta dentro il cono.

$\alpha \le \phi_s \longrightarrow tg\,\alpha \le tg\,\phi_s = \mu_s \longrightarrow tg\,\alpha \le \mu_s$

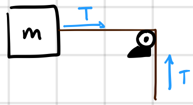
Se fossimo nel caso contrario $tg\,\alpha > \mu_s$ il corpo sarebbe nel caso dinamico.

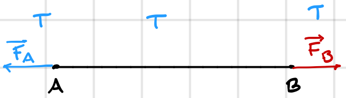
TENSIONE DELLA FUNE

FUNE: filo inestensibile che sviluppa forze uguali ed opposte ai suoi capi chiamate tensioni T



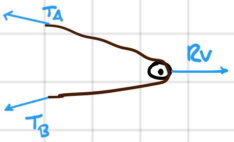
Lo tensione può cambiare direzione mediante l'uso di carrucole



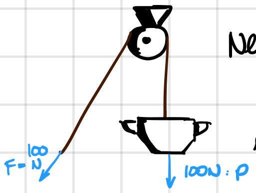


$\vec{F}_A + \vec{F}_B = m\vec{a}$ ma m è trascurabile $\longrightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B \longrightarrow F_A = F_B = T$

Nel caso in cui usiamo delle carrucole devo comunque avere come "risultante 0:



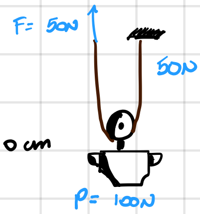
$\Rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{R}_V = 0$



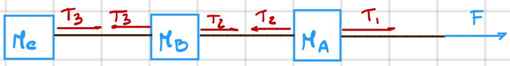
Nel caso di carrucola fissa l'unico vantaggio è cambiare la direzione della forza

Con una (o più) carrucole mobili (fissate cioè al peso) posso distribuire i carichi:

NB Il rapporto P/F è uguale a $\frac{\text{spostamento carico}}{\text{corda tirata}}$ (es. $P = 100$ $F = 50$, per alzare di 10 cm il carico dovrò tirare 20 cm di fune)



ES.



NO attrito $\longrightarrow$ solo forze orizzontali

$T_1 = F$

Forze agenti su M_A: $T_1 - T_2 = M_A a$

Forze agenti su M_B: $T_2 - T_3 = M_B a$

Forze agenti su M_C: $T_3 = M_C a$

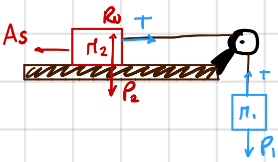
ovviamente a è uguale per tutti!

$$\Rightarrow T_1 = a(M_1 + M_2 + M_3) \Rightarrow a = \frac{F}{M_A + M_B + M_C}$$

$$T_3 = \left(\frac{M_C}{M_A + M_B + M_C}\right)F = \left(\frac{M_C}{M_{TOT}}\right)F$$

$$T_2 = T_3 + M_B a = \left(\frac{M_C}{M_{TOT}}\right)F + \left(\frac{M_B}{M_{TOT}}\right)F = \left(\frac{M_B + M_C}{M_{TOT}}\right)F$$

ES (caso statico con attrito)



$$M_1: \; T = P_1$$
$$M_2 \begin{cases} R_N = P_2 \\ A_S = T \end{cases}$$

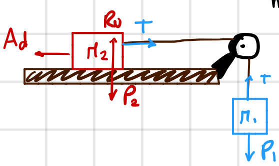
$\Rightarrow A_S = T = P_1$

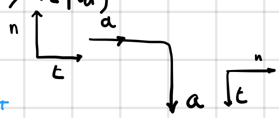
$\Rightarrow A_S \leq A_{MAX} = \mu_S R_N = \mu_S P_2 \Rightarrow P_1 \leq \mu_S P_2 \Rightarrow M_1 g \leq M_2 g \mu_S$

$\Rightarrow M_1 \leq \mu_S M_2$

NB. queste sono condizioni solo per il caso statico

(caso dinamico $M_1 > M_2 \mu_d$)



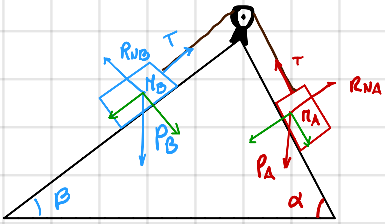


$$M_2: \begin{cases} R_N = P_2 & n \\ T - A_d = M_2 a & t \end{cases}$$
$$M_1: \; P_1 - T = M_1 a \quad t$$

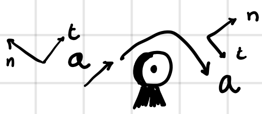
$$\Rightarrow P_1 - A_d = (M_1 + M_2)a \Rightarrow a = \frac{P_1 - A_d}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 g - \mu_d M_2 g}{M_1 + M_2} = g\left(\frac{M_1 - \mu_d M_2}{M_1 + M_2}\right)$$

$$T = P_1 - M_1 a = M_1(g - a) = M_1\left[g - g\left(\frac{M_1 - \mu_d M_2}{M_1 + M_2}\right)\right] = M_1 g\left(\frac{M_2(1 + \mu_d)}{M_1 + M_2}\right)$$

ES (pendio doppio senza attrito)



Non avendo ulteriori informazioni iniziamo ipotizzando che sia M_A a trascinare M_B



$$M_A \begin{cases} R_{NA} - P_A \cos\alpha = 0 \\ P_A \cos\alpha - T = M_A a \end{cases}$$

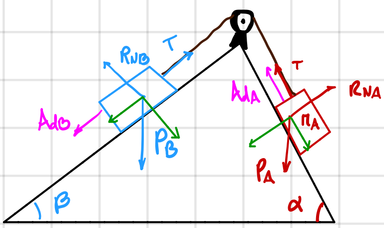
Le equazioni sull'asse n nel caso senza attrito possiamo dimenticarle

$$M_B \begin{cases} R_{NB} - P_B \cos\beta = 0 \\ T - P_B \sin\beta = M_B a \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_A \sin\alpha - P_B \sin\beta = (M_A + M_B)a \Rightarrow a = \frac{P_A \sin\alpha - P_B \sin\beta}{M_A + M_B} = g\left(\frac{M_A \sin\alpha - M_B \sin\beta}{M_A + M_B}\right)$$

se $M_A \sin\alpha - M_B \sin\beta < 0$ dobbiamo invertire il senso del moto

Se aggiungiamo gli attriti:



$$M_A \begin{cases} R_{NA} = P_A \cos\alpha \\ -Ad_A + P_A \sin\alpha - T = M_A a \end{cases}$$

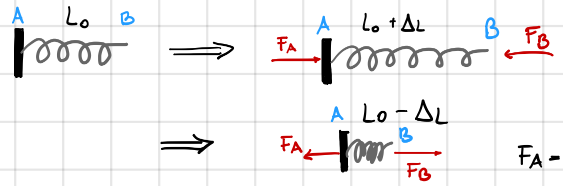
$$M_B \begin{cases} R_{NB} = P_B \cos\beta \\ -Ad_B + T - P_B \sin\beta = M_B a \end{cases}$$

Risolvo il sistema come al solito...

NB. In teoria bisognava prima studiare il caso statico con le dovute condizioni di staticità

Forze elastiche

Forze che hanno origine dalla deformazione dei corpi

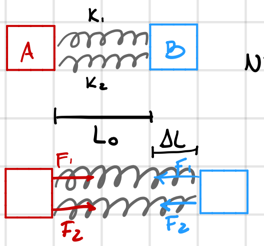


costante elastica $[N/m]$

$F_A = F_B = F_{elastica} = K \cdot \Delta L$

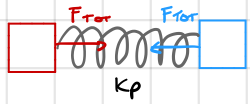
$F_A = F_B = K\Delta L$ (modulo) $\longrightarrow$ $\boxed{F_B = -K\Delta L}$

- Configurazione Parallela



NB molle stessa lunghezza L_0

$$\begin{cases} F_1 = K_1 \Delta L \\ F_2 = K_2 \Delta L \end{cases} \Rightarrow F_1 + F_2 = (K_1 + K_2)\Delta L \longrightarrow$$

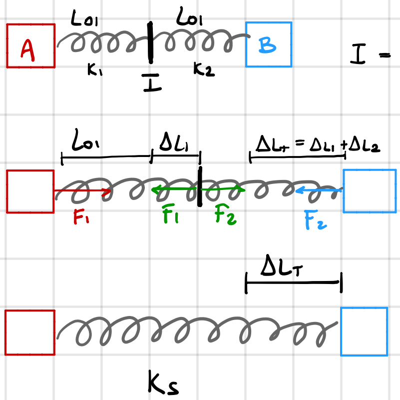


$F_{TOT} = K_P \Delta L$

$\Rightarrow K_P =$ costante elastica parallela $= \sum_i^n K_i$

NB. la lunghezza a riposo di tutte le molle deve essere uguale

- Configurazione Serie



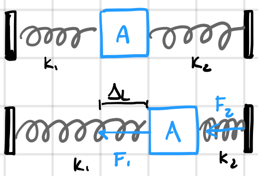
I = punto intermedio privo di massa $\Rightarrow F_1 - F_2 = 0 \rightarrow F_1 = F_2 = F$

$$\begin{cases} F = K_1 \Delta L_1 \\ F = K_2 \Delta L_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \Delta L_1 = F/K_1 \\ &\rightarrow \Delta L_2 = F/K_2 \end{aligned}$$

$F = K_S \cdot \Delta L_T \Rightarrow F/K_S = \Delta L_T = F/K_1 + F/K_2$

$\rightarrow \frac{1}{K_S} = \frac{1}{K_1} + 1/K_2 \rightarrow K_S = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K}$

ES

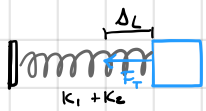


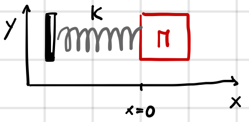
NB caso contrario al precedente, I = A non è privo di massa

ΔL è sia la compressione della molla 2 sia l'allungamento della molla 1

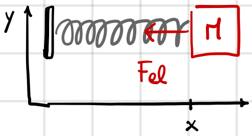
Le forze applicate alle pareti (oggetti fissi) vengono trascurate

$$\begin{cases} F_1 = K_1 \Delta L \\ F_2 = K_2 \Delta L \end{cases} \Rightarrow F_T = F_1 + F_2 = \underbrace{(K_1 + K_2)}_{\text{come il caso parallelo}}\Delta L \longrightarrow$$



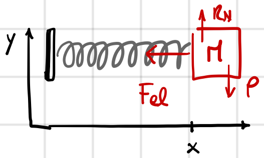


$\rightarrow$



$\vec{F}_{el} = -k \cdot x \cdot \hat{i}$ forma vettoriale, valida per entrambi i versi dello spostamento (estensione / compressione)

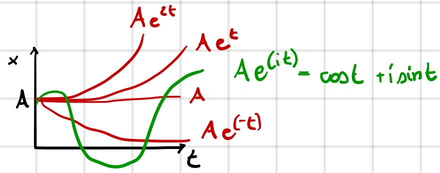
$F_{el\,x} = -kx$



$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$

$\begin{cases} R_N = P \\ F_{el\,x} = m a_x \Rightarrow -kx = m \dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$ NB eq. differenziale $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$ lineare, 2° ordine

- $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$
- Soluzione di prova: $x(t) = A \cdot e^{(\alpha t)} \Rightarrow$



- $\dfrac{dx}{dt} = A\dfrac{d}{dt}e^{(\alpha t)} = A\alpha e^{\alpha t} = \alpha x$
- $\dfrac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t} = \alpha^2 x$

$\left\{ \dfrac{d}{dt} = \alpha \rightarrow \dfrac{d^n}{dt^n} = \alpha^n \right.$

Pulsazione Oscillazioni libere

$\Rightarrow \alpha^2 x + \dfrac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \left(\alpha^2 + \dfrac{k}{m}\right)x = 0 \Rightarrow \alpha^2 + k/m = 0 \rightarrow \alpha^2 = -\dfrac{k}{m} = \pm\sqrt{-k/m} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{k/m} = \pm i\sqrt{k/m} = \pm i\omega_0$

$x(t) = Ae^{(\alpha_1 t)} + Be^{(\alpha_2 t)} = Ae^{(i\omega_0 t)} + Be^{(-i\omega_0 t)}$

$e^{(i\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$

$e^{(-i\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t) = \overline{e^{(i\omega_0 t)}}$ coniugati

$\overline{x(t)} = \overline{Ae^{(i\omega_0 t)} + Be^{(-i\omega_0 t)}} = \bar{A}e^{(-i\omega_0 t)} + \bar{B}e^{(i\omega_0 t)} = x(t) \rightarrow A = \bar{B} = \dfrac{C}{2}e^{(i\phi)}$

$x(t) = C/2\, e^{(i\omega_0 t + i\phi)} + \dfrac{C}{2}e^{(-i\omega_0 t - i\phi)} = \dfrac{C}{2}\left[e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega_0 t+\phi)}\right] = \dfrac{C}{2}\, 2\cos(\omega_0 t + \phi) = C\cos(\omega_0 t + \phi)$ moto armonico

fase iniziale

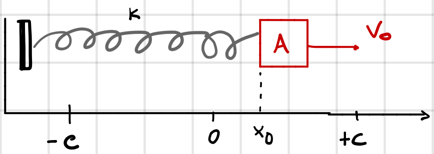
ampiezza — pulsazione $\sqrt{k/m}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$\Rightarrow x(t) = C\cos(\omega t + \phi) = C\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \phi\right)$

Rimangono C e ϕ incognite.

Supponiamo di portare la molla a x_0 e di darle un ulteriore velocità iniziale V_0



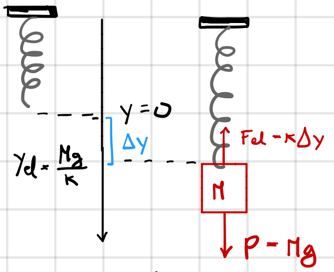
- $x(0) = c\cos(\phi) = x_0$

Derivo $x(t) \rightarrow v(t) = -\omega C\sin(\omega t + \phi) \Rightarrow v(0) = -\omega C\sin\phi = V_0$

$\begin{cases} C\cos\phi = x_0 \\ C\sin\phi = -V_0/\omega \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + (V_0/\omega)^2}$ = ampiezza massima

$\tan\phi = \dfrac{-V_0}{\omega x_0}\ (+\pi)$ = fase iniziale

Oscillazioni libere in verticale



In questo caso la posizione di equilibrio viene portata da 0 a y_{el} dal peso attaccato alla molla
Spostando ulteriormente verso il basso il peso ,Fel aumenterà e genererà il moto compensando P. (condizione fuori equilibrio)

In condizioni fuori equilibrio (y generica)

$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a} \longrightarrow mg + F_{el\,y} = ma_y \longrightarrow mg - ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)y = g$ Non omogenea

Soluzione $y(t) = y_{omogenea} + y_{particolare}$

$y_{particolare}$:

la ipotizziamo costante $\longrightarrow y_{part.} = mg/k$

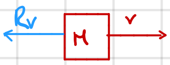
$y_{omogenea}$:

$\frac{d^2y}{dt^2} + (k/m)y = 0 \longrightarrow a^2 + (k/m) = 0 \longrightarrow a = \pm i\omega_0$ come nel caso orizzontale

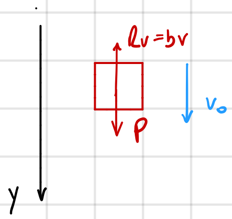
$\Rightarrow y_{omo} = C\cos(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow y = \frac{Mg}{K} + C\cos(\omega t + \phi)$ Le oscillazioni in pratica saranno intorno alla nuova posizione di equilibrio

RESISTENZA DEL MEZZO - FORZE VISCOSE



$R_v = bv \quad \vec{R}_v = -b\vec{v}$ A differenza dell'attrito, questa forza non è costante



$\vec{P} + \vec{R}_v = m\vec{a} \longrightarrow mg - bv_y = ma_y \longrightarrow a_y + \frac{b}{m}v_y = g \longrightarrow \frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right)v_y = g$ lineare non omogenea

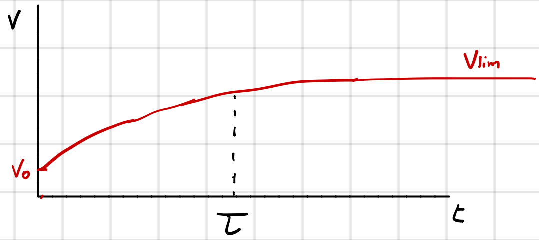
Soluzione particolare: $V_{p.} = mg/b$

Soluzione omogenea: $V_{om} = Ae^{(\alpha t)} \longrightarrow \alpha + b/m = 0 \longrightarrow \alpha = -b/m \longrightarrow V_{om} = Ae^{(-bt/m)}$

$\Rightarrow V_y(t) = Ae^{(-bt/m)} + mg/b \qquad \longrightarrow V_y(t) = \left(V_0 - mg/b\right)e^{(-bt/m)} + mg/b$

$v(0) = A + mg/b = V_0 \longrightarrow V_0 - mg/b = A$

se $mg/b = V_{limite}$ e $m/b = \tau \Rightarrow V_y(t) = (V_0 - V_{lim})e^{(-t/\tau)} + V_{lim}$



τ è il tempo in cui la velocità inizia a tendere al suo valore limite V_{lim}

Da $\frac{dV_y}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right)V_y = g$ posso passare a $\frac{dV_y}{dt} = -\left(\frac{b}{m}\right)\left(V_y - \frac{mg}{b}\right) = -\left(\frac{b}{m}\right)\left(V_y - V_{lim}\right)$

$\Rightarrow \frac{dV_y}{V_y - V_{lim}} = -\left(\frac{b}{m}\right)dt \longrightarrow \int_{V_0}^{V(t)} dV_y/V_y - V_{lim} = -\left(\frac{b}{m}\right)dt \longrightarrow \ln\frac{V_y - V_{lim}}{V_0 - V_{lim}} = -\left(\frac{b}{m}\right)dt \longrightarrow \frac{V_y - V_{lim}}{V_0 - V_{lim}} = e^{(-(\frac{b}{m})dt)}$

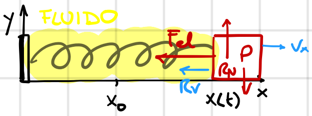
$\Rightarrow V_y(t) = (V_0 - V_{lim})e^{(-t/\tau)} + V_{lim}$ come prima

ES

Possiamo semplicemente trovare la V_{lim} supponendo che in quel momento $a = 0$

$F - bv = ma \qquad \longrightarrow F = bv \longrightarrow v = F/b$

OSCILLAZIONI SMORZATE



$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{el} + \vec{R}_V = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} y: & P = R_N \\ x: & F_{el_x} + R_{V_x} = m a_x \longrightarrow -kx - bv_x = m a_x \longrightarrow -kx - \frac{b\,dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$ eq. differenziale

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

sol. omogenea: $a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}$

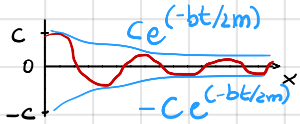
- $\Delta > 0 \longrightarrow b^2 > 4mk \longrightarrow$ 2 soluzioni reali distinte negative
- $\Delta = 0 \longrightarrow b^2 = 4mk \longrightarrow$ 1 soluzione reale negativa
- $\Delta < 0 \longrightarrow b^2 < 4mk \longrightarrow$ 2 soluzioni complesse coniugate

• $\Delta < 0$ oscillazioni sottosmorzate

$a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$ pulsazione oscillazioni smorzate ω'

$\Rightarrow$ soluzione: $x(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m} + i\omega'\right)t} + Be^{\left(-b/2m - i\omega'\right)t} \longrightarrow x(t) = e^{(-b/2m)t}\left[Ae^{(i\omega' t)} + Be^{(-i\omega' t)}\right]$

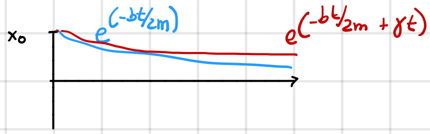
Poiché $A = \bar{B} = C/2\, e^{(i\phi)} \longrightarrow x(t) = Ce^{\left(-\frac{b}{2m}t\right)}\cos(\omega' t + \phi)$



• $\Delta > 0$ oscillazioni sovrasmorzate

$\sqrt{\Delta} = \gamma \longrightarrow a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm \gamma \longrightarrow x(t) = Ae^{(-b/2m + \gamma)t} + Be^{(-b/2m - \gamma)t}$ assenza di oscillazioni

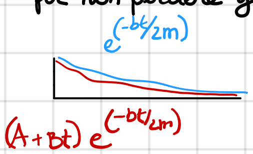
$$\Longrightarrow x(t) = e^{\left(-b/2m\, t\right)}\left[Ae^{(\gamma t)} + Be^{(-\gamma t)}\right]$$



• $\Delta = 0$ smorzamento critico

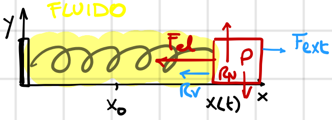
$x(t) = e^{(-b/2m)t}(A + B) \longrightarrow$ per non perdere generalità trasformiamo il secondo membro in un polinomio di 1° grado

$$\longrightarrow e^{\left(-\frac{bt}{2m}\right)}(A + Bt)$$



Nella pratica si cerca di arrivare al terzo caso...

OSCILLAZZIONI FORZATE



$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_{el}} + \vec{R_v} + \vec{F} = m\vec{a}$ (rispetto al caso precedente abbiamo una nuova forza)

$$\begin{cases} R_N = P \\ F_{elx} + R_{vx} + F = ma_x \longrightarrow -kx - bv_x + F = ma_x \longrightarrow -kx - b\frac{dx}{dt} + F = m\frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m}$ eq. differenziale lineare non omogenea

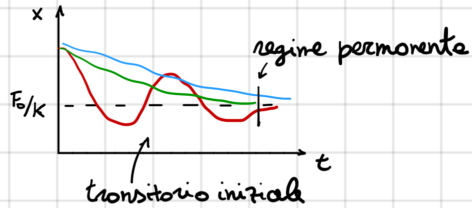
$x(t) = x_{omo} + x_{part.}$

x_{omo} è identico ai casi precedenti ($\Delta \gtrless 0$)

Per x_{part} bisogna vedere di che F parliamo....

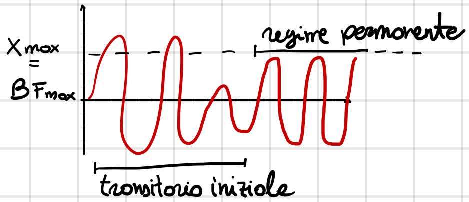
- $F_{ext} = F_0$ forza costante:

x_{part} costante $\longrightarrow \frac{k}{m} x_{part} = \frac{F_0}{m} \longrightarrow \boxed{x_{part} = F_0/k}$

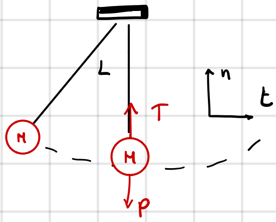


- $F_{ext} = F_{max} \cos(w_{ext} t)$ forza armonica

x_{part} segue la forza esterna $\longrightarrow x_{part}(t) = B F_{max} \cos(w_{ext} t - \phi)$

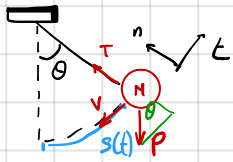


Pendolo semplice



Il pendolo è in equilibrio in verticale $\longrightarrow T = P = mg$

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$



$$\Rightarrow \begin{cases} n: \; T - P\cos\theta = ma_n = m\,v^2/L \\ t: \; -P\sin\theta = ma_t = m\dfrac{d^2s}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n: \; T = m(g\cos\theta + v^2/L) \\ t: \; -g\sin\theta = d^2s/dt \end{cases}$$

NB. θ non è costante nel tempo!

Nel moto circolare $s(t) = \theta(t)\cdot L \longrightarrow -g\sin\theta = d^2(\theta L)/dt = L\,d^2\theta/dt \longrightarrow \begin{cases} T = m(g\cos\theta + v^2/L) \\ -g\sin\theta = L\dfrac{d^2\theta}{dt} \end{cases}$

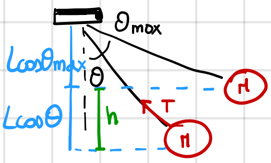
$d^2\theta/dt + g/L \sin\theta = 0$ non lineare! ma per $\theta < \pi/12$ $\sin\theta \sim \theta \longrightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt} + \underbrace{(g/L)}_{w_0^2}\theta = 0$ analogo alla molla

$\longrightarrow \theta(t) = \theta_{max}\cos(w_0 t + \phi)$ $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ come per la molla ma con $c = \theta_{max}$ e $m = \ell$

Per piccoli angoli il periodo non è dipendente dall'angolo di partenza

$s(t) = s_{max}\cos(w_0 t + \phi)$ poiché archi ed angoli sono simili.

Nell'equazione lungo l'asse n v^2 è incognita.... sappiamo però che dipende dall'altezza (vedi piano inclinato):
$v(\theta) = \sqrt{2gh}$

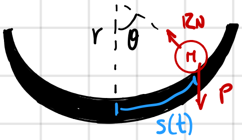


$h = L\cos\theta - L\cos\theta_{max} = L(\cos\theta_{max} - \cos\theta)$

$\longrightarrow v(\theta)\ \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$

$\longrightarrow T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$ Tensione all'angolo θ (non θ_{max}) che cambia con esso!

Analogamente:



$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \iff \vec{P} + \vec{R_N} = m\vec{a}$

T = periodo $= 2\pi\sqrt{r/g}$ (r al posto di L)

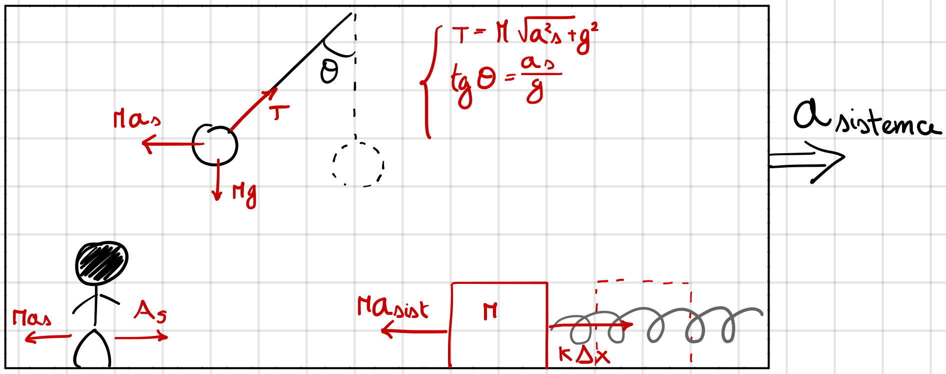
$R_N = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$

SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE (MOBILE)

• Traslazione

- $\Delta\vec{S}_a = \Delta\vec{S}_r + \Delta\vec{S}_t$
- $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_t$ ← assoluto = relativo + traslazione
- $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t$ $\Rightarrow$ $m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_t$

$$m\vec{a}_a = \Sigma\vec{F} \longrightarrow \Sigma\vec{F} - m\vec{a}_t = m\vec{a}_r \longrightarrow \Sigma\vec{F}_{reale} - \Sigma\vec{F}_{opponente} = m\vec{a}_r$$

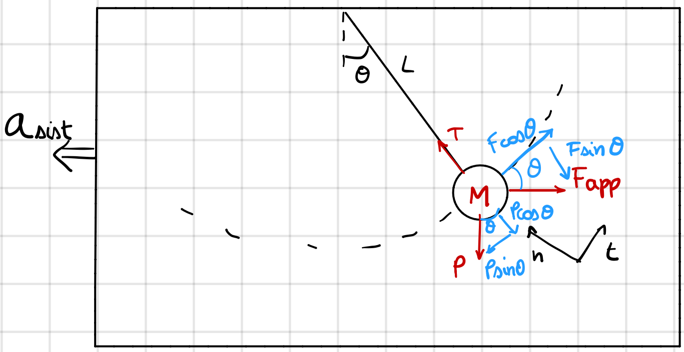


$A_s = Ma_s \le \mu_s Mg$

$a_s \le \mu_s g$

$\Delta x = \frac{Ma_s}{K}$

Pendolo non inerziale:



$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{opp} = m\vec{a}$$

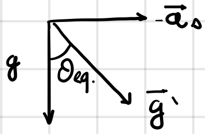
$$\begin{cases} n: & T - F_a\sin\theta - P\cos\theta = ma_n \\ t: & F_a\cos\theta - P\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

Nel caso di "nuovo" equilibrio $ma = 0$ in entrambe le funzioni...

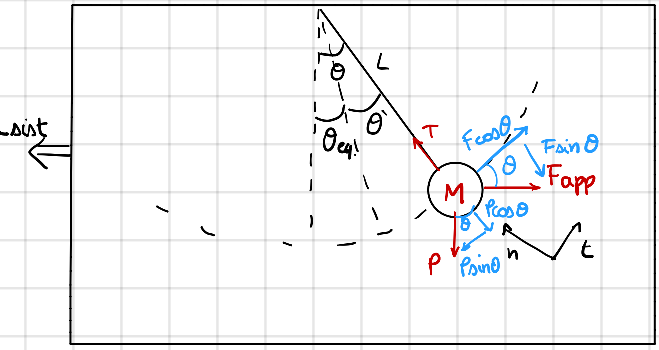
$$\begin{cases} T - F_a\sin\theta_{eq.} - P\cos\theta_{eq} = 0 \\ F_a\cos\theta_{eq.} - P\sin\theta_{eq.} = 0 \end{cases} \longrightarrow tg\,\theta_{eq.} = \frac{F_a}{P} = \frac{ma_s}{mg} = \frac{a_s}{g}$$

come detto prima!

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t \longrightarrow \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t \longrightarrow \vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_s$$



$$\begin{cases} g = g'\cos\theta_{eq.} \\ a_s = g'\sin\theta_{eq.} \end{cases} \longrightarrow tg\,\theta = \frac{a_s}{g}$$



Supponiamo ora di muovere il pendolo oltre l'angolo θ_{eq}.

$$\begin{cases} n: \ T - F_a \sin\theta - P\cos\theta = m a_n \\ t: \ F_a\cos\theta - P\sin\theta = m a_t \end{cases}$$

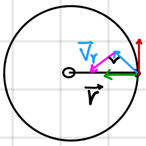
t: $\cancel{m} a_s \cos\theta - \cancel{m} g \sin\theta = \cancel{m}\frac{d^2 s}{dt^2} \longrightarrow g'\sin\theta_{eq}\cdot\cos\theta - g'\cos\theta_{eq}\cdot\sin\theta = \frac{d^2 s}{dt^2} \longrightarrow -g'(\cos\theta_{eq}\sin\theta - \sin\theta_{eq}\cdot\cos\theta) = \frac{d^2 s}{dt^2}$

$\Rightarrow -g'\sin(\theta - \theta_{eq}) = \frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \theta' = \theta - \theta_{eq} \rightarrow \frac{d^2\theta'}{dt^2} + \left(\frac{g'}{L}\right)\sin\theta' = 0$

per $\theta' < \pi/12 \rightarrow \sin\theta' \sim \theta' \Longrightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega' = 2\pi\sqrt{L/g'}}$

$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega' t + \phi) + \theta_{eq}$

- Rotazione

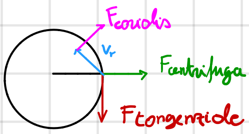


$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_{t_1} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} \\ \vec{a}_{t_2} &= -\omega^2\vec{r} \\ \vec{a}_{t_3} &= 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r \end{aligned}\right\} + \vec{a}_r = \vec{a}_a \Longrightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r\right)$$

Moltiplichiamo per m:

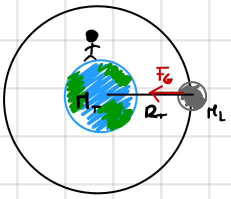
$\sum \vec{F}_{reale} = m\vec{a}_r + m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r\right) \longrightarrow \left(-m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + m\omega^2\vec{r} - 2m\omega^2\times\vec{V}_r\right) + \sum F_{reale} = m\vec{a}_r$

$$\left.\begin{aligned} &F_{centrifuga}: \ m\omega^2\vec{r} \\ &F_{tangenziale}: \ -m\,d\vec{\omega}/dt\times\vec{r} \\ &F_{coriolis}: \ -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r \end{aligned}\right\} \vec{F} \text{ apparenti}$$



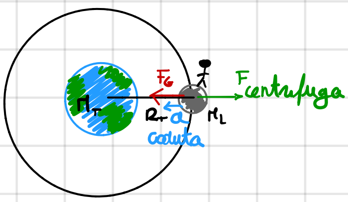
ES

caso inerziale



$F_G = G\frac{M_T M_L}{R^2} = M_L a_L = M_L\frac{V_L^2}{R} = M_L\omega^2 R \rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} = 28 \text{ giorni} \end{cases}$

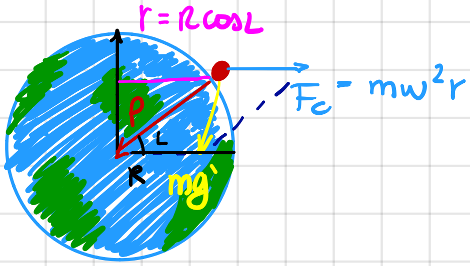
caso NON inerziale:



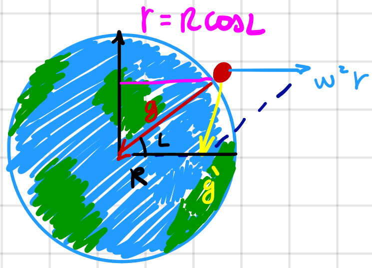
$F_c = M_L\frac{V_L^2}{R} = M_L\omega^2 R$

$F_G - F_c = M_L\, a_{caduta}$ ma sappiamo che la luna "non cade" $\rightarrow a_c = 0 \longrightarrow F_G - F_c = 0$

$\Rightarrow G\frac{M_T M_L}{R^2} - M_L\omega^2 R = 0$ NB. il secondo membro indica se siamo o meno in un sistema inerziale: inerziale se a destra dell'uguale, non inerziale se a sinistra



posso dividere per m:

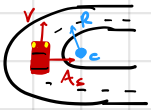


$$g' = \sqrt{g^2 + (\omega^2 r)^2 - 2g\omega^2 r \cos L} \approx \sqrt{g^2 - 2g\omega^2 r \cos L} = \sqrt{g^2\left(1 - \frac{2\omega^2 r}{g}\cos L\right)}$$

Poiché $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (se ε piccolo): $g' \approx g\left(1 - \frac{\omega^2 r \cos L}{g}\right) = g - \omega^2 r \cos L = g - \omega^2 R \cos^2 L$

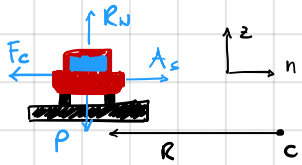
ES

SISTEMA INERZIALE



$$\begin{cases} z & R_N = P \\ n & A_s = m a_n = m\, V^2/R \end{cases}$$

SISTEMA NON INERZIALE

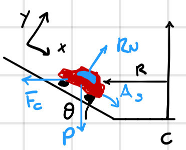


$$\begin{cases} z & R_N = P \\ n & A_s = \boxed{F_c} \le A_{max} = \boxed{\mu_s P} \end{cases}$$

$F_c \le \mu_s P \longrightarrow \cancel{m} V^2/R \le \mu_s \cancel{m} g \longrightarrow V_{max} \le \sqrt{\mu_s g R}$

velocità massima per non uscire di strada

ES. SISTEMA NON INERZIALE



$$\begin{cases} y & R_N - P\cos\theta - F_c\sin\theta = 0 \longrightarrow R_N = P\cos\theta + F_c \sin\theta \\ x & A_s + P\sin\theta - F_c\cos\theta = 0 \longrightarrow A_s = F_c\cos\theta - P\sin\theta \le \mu_s R_N \end{cases}$$

$F_c\cos\theta - P\sin\theta \le \mu_s(P\cos\theta + F_c\sin\theta) \longrightarrow F_c\cos\theta - \mu_s F_c \sin\theta \le \mu_s P\cos\theta + P\sin\theta$

$\longrightarrow F_c \le P(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)/(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)$

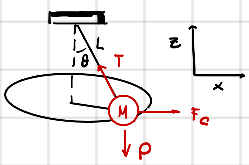
$\longrightarrow F_c \le P(\mu_s + tg\theta)/(1 - \mu_s tg\theta) \longrightarrow F_c \le P(tg\phi_s + tg\theta)(1 - tg\phi_s tg\theta)$

$\longrightarrow \frac{V^2}{R} \le g\left(\frac{\mu_s + tg\theta}{1 - \mu_s tg\theta}\right)$

$\Longrightarrow V_{max} = \sqrt{gR\left(\frac{\mu_s + tg\theta}{1 - \mu_s tg\theta}\right)}$ dipendente dall'angolo di inclinazione

se $\theta = 0$ torna $V = \sqrt{g\mu_s R}$

PENDOLO CONICO



$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_c = 0$ per avere un equilibrio

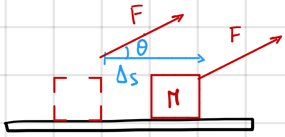
$$\begin{cases} z & T\cos\theta - P = 0 \longrightarrow T\cos\theta = P \\ x & F_c - T\sin\theta = 0 \longrightarrow T\sin\theta = F_c \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos\theta = g/\omega^2 L$

Poiché $\cos\theta$ è compreso tra 0 e 1 $\rightarrow g/\omega^2 L \le 1 \Rightarrow \omega \ge \sqrt{g/L}$ velocità angolare minima per questo tipo di rotazione

LAVORO ED ENERGIA

LAVORO = Forza · Spostamento

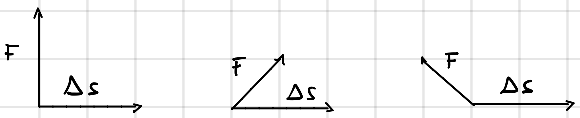


$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$ (è uno scalare, non un vettore)

$= F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta$ (angolo compreso tra forza e spostamento)

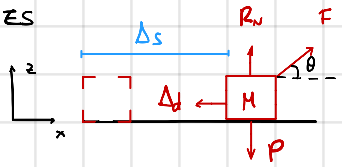
$\boxed{J = \text{Joule} = Nm}$

$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = (F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k})(\Delta x \hat{\imath} + \Delta y \hat{\jmath} + \Delta z \hat{k}) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$ (forma alternativa)



$L = 0$ $\quad$ $L > 0$ $\quad$ $L < 0$

ES



Dati:

$F = 100 N$ $\quad$ $\Delta s = 40 m$

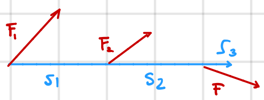
$M = 50 kg$ $\quad$ $\theta = 30°$

$\mu d = 0.15$

$$\begin{cases} z: R_N + F\sin\theta - P = 0 \rightarrow R_N = P - F\sin\theta \\ x: F\cos\theta - A_d = ma \end{cases}$$

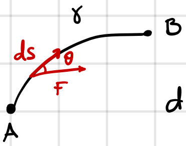
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F = 100 N \\ P = 490 N \\ R_N = 440 N \\ A_d = 66 N \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} L_F = F \cdot \Delta s \cos\theta = 3.5 kJ \\ L_P = P \cdot \Delta s \cos 90° = 0 \\ L_{R_N} = R_N \cdot \Delta s \cos 90° = 0 \\ L_{A_d} = A_d \cdot \Delta s \cos 180° = -2.6 kJ \end{bmatrix} \Rightarrow L_{TOT} = \Sigma L = 0.9 kJ$$

se la forza varia durante il moto ....



spezziamo il moto e calcoliamo i lavori singolarmente

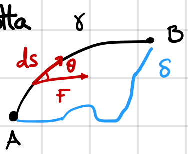
$L_{TOT} = L_1 + L_2 + L_3 = F_1 s_1 \cos\alpha_1 + F_2 s_2 \cos\alpha_1 + F_3 s_3 \cos\alpha_3$



$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\cos\theta \, ds$ LAVORO ELEMENTARE

$\rightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $\quad$ sappiamo che $\vec{v} = d\vec{s}/dt \rightarrow d\vec{s} = \vec{v}\,dt \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$

possiamo però cambiare rotta



$\rightarrow \int_{A\gamma}^B \vec{F} d\vec{s} \neq \int_{A\delta}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ FORZE NON CONSERVATIVE

(il lavoro varia con la "direzione")

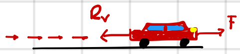
POTENZA

$$P = dL/dt = \frac{\text{lavoro compiuto}}{\text{tempo impiegato}} \quad (\text{potenza istantanea}) = \frac{F \cdot ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\text{Watt} = W = \text{Joule}/s}$$

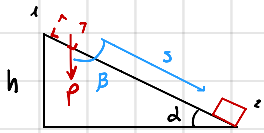
Il kilowattora è invece un'unità dell'energia erogata da una macchina di potenza 1 kW in 1 ora: $1kJ \cdot 3600\,s = 3.6\,MJ$

ES



$$V_{lim} = F/b \longrightarrow P = F \cdot V_{lim} = F^2/b$$

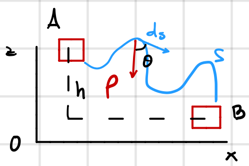
LAVORO FORZA PESO



$$L_{P_{12}} = \int_1^2 \vec{P}\,d\vec{s} = \vec{P}\int_1^2 d\vec{s} = \vec{P} \cdot \vec{s}$$

(perché P è costante)

- $\beta = \pi/2 - \alpha \longrightarrow L_{P_{12}} = mg \cdot s \cdot \cos\beta = mg \cdot s \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = mg\,s\sin\alpha$
- $s = h/\sin\alpha \longrightarrow L_{P_{12}} = mg \cdot (h/\cancel{\sin\alpha}) \cdot \cancel{\sin\alpha} = \boxed{mg\,h}$ non dipende da α!

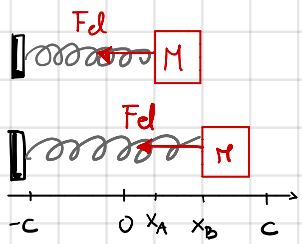


$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = p \cdot ds \cdot \cos\theta$$

$$= \cancel{P_x}\,dx + \cancel{P_y}\,dy + P_z\,dz = -P_z\,dz = \boxed{-mg\,dz}$$

$$\Longrightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz = mg(\overbrace{z_A - z_B}^{h}) = mg\,h$$

LAVORO FORZA ELASTICA

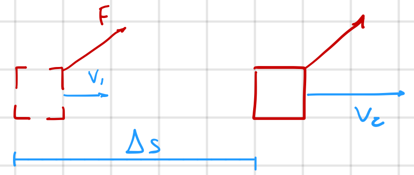


$$dL = \vec{F_{el}} \cdot d\vec{s} = F_x\,dx + \cancel{F_y}\,dy + \cancel{F_z}\,dz = -Kx \cdot dx$$

$$L_{AB} = \int_A^B dL = -K\int_{x_A}^{x_B} x\,dx = -K\left[\tfrac{1}{2}Kx^2\right]_{x_A}^{x_B} = \boxed{K/2\,(x_A^2 - x_B^2)}$$

dipende solo da x_A e x_B

LAVORO ED ENERGIA CINETICA



Il lavoro totale (di tutte le forze) causa una variazione di velocità e di conseguenza una variazione di energia cinetica (legato al movimento)

$$L_{TOT} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad K = \frac{mv^2}{2} = \text{energia cinetica}$$

$$= K_2 - K_1 = \Delta K$$

Forze: Spostamento:

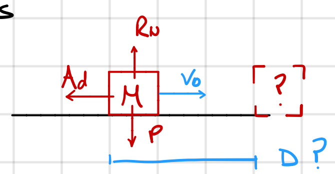
$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = m\, d\vec{v}/dt \qquad d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt \implies L_{TOT} = \int dL = \int_1^2 \vec{F}_{TOT}\, d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} \cdot \vec{v}\cancel{dt}$$

$$\implies L_{TOT} = m \int_{\vec{V}_1}^{\vec{V}_2} \vec{v}\, d\vec{v} \implies d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\, d\vec{v} \implies \frac{m}{2}\int_{\vec{V}_1^2}^{\vec{V}_2^2} d(\vec{v}^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta K$$

Alternativa:

$$L_{TOT} = \int dL = \int_1^2 \vec{F}_{TOT}\, d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{\cancel{dt}} v\cancel{dt} = m\int_{\vec{V}_1}^{\vec{V}_2} \vec{v}\, d\vec{v} = m\vec{V}_m \int_{\vec{V}_1}^{\vec{V}_2} d\vec{v} = m\left(\frac{\vec{V}_2 + \vec{V}_1}{2}\right)\cdot\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \Delta K$$

ES



LAVORO:

$$\left.\begin{array}{l} L_P = L_{RN} = 0 \\ L_A = \int_1^2 \vec{A}_d\, d\vec{s} = A_d \cdot D \cdot \cos\pi = -A_d \cdot D = -\mu_d m g D \end{array}\right\} L_{TOT} = -\mu_d m g D$$

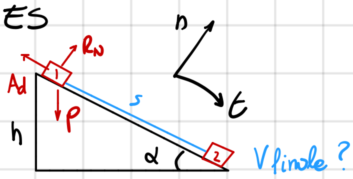
ENERGIA

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = \frac{mv_0^2}{2} \\ K_2 = 0 \quad (\text{perché } V_{finale} = 0) \end{array}\right\} \Delta K = -\frac{mv_0^2}{2}$$

$$\implies L_{TOT} = \Delta K \implies D = \frac{V_0^2}{2\mu_d g}$$

In entrambi gli esempi non consideriamo il tempo

ES



$$\begin{array}{l} n \\ t \end{array}\begin{cases} R_N = P\cos\alpha \\ P\sin\alpha - A_d = ma \end{cases}$$

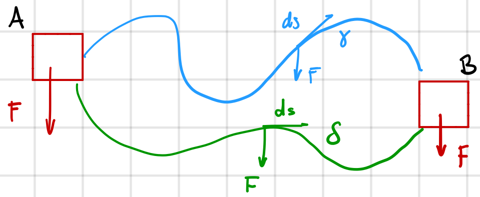
LAVORO:

$$\left.\begin{array}{l} L_P = mgh \\ L_{RN} = 0 \\ L_A = -\mu_d m g \cos\alpha \overbrace{\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)}^{s} = -\frac{\mu_d}{tg\alpha} mgh \end{array}\right\} L_{TOT} = mgh\left(1 - \mu_d/tg\alpha\right)$$

ENERGIA

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = 0 \\ K_2 = mv_{finale}^2/2 \end{array}\right\} \Delta K = mV_f^2/2 \implies L_{TOT} = \Delta K \to V_{finale} = \sqrt{2gh\left(1 - \mu_d/tg\alpha\right)}$$

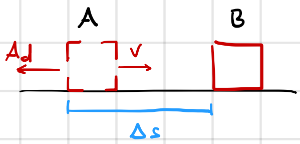
FORZE CONSERVATIVE



Se la forza è conservativa $L_\gamma = \int_A^B dL = \int_A^B \vec F \cdot d\vec s = L_\delta$

$$\Rightarrow \int_{A\gamma}^{B} \vec F \cdot d\vec s - \int_{A\delta}^{B} \vec F \, d\vec s = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A\gamma}^{B} \vec F \, d\vec s + \overbrace{\int_{B\delta}^{A} \vec F \, d\vec s}^{\text{cambio verso}} = 0 \Rightarrow \oint \vec F \cdot d\vec s = 0$$



Nel caso di forze non conservative:

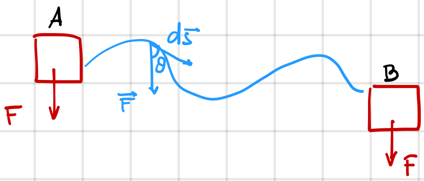
$$L_{AB} = \int_A^B \vec{A_d} \cdot d\vec s = -A_d \, \Delta s$$

se inverto la marcia:

$$L_{BA} = \int_B^A A_d \, ds = -A_d \, \Delta s$$

$$L_{TOT} = \oint \vec{A_d} \, d\vec s = -2 A_d \Delta s < 0 \longrightarrow \text{non conservativa}$$

ENERGIA POTENZIALE

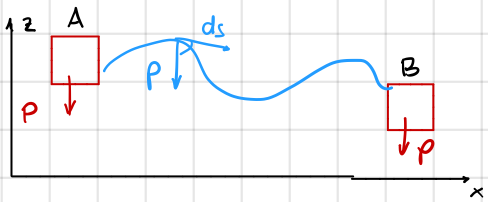


F conservativa $\longrightarrow L_{AB} = \int_A^B \vec F \cdot d\vec s = \boxed{U(A) - U(B)} = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B)$

$U(x, y, z)$ = integrale della forza = energia potenziale

Per convenzione si impone come variazione "contraria" tra il punto iniziale e finale $\Rightarrow U(A) - U(B) = -\Delta U$

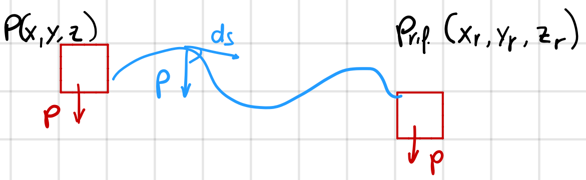
• Energia potenziale forza peso



$$dL = -mg \, dz \longrightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow \overbrace{mg z_A}^{U_A} - \overbrace{mg z_B}^{U_B} = U_A - U_B \Rightarrow U(x,y,z) = mgz$$

In realtà $U(x,y,z) = mgz +$ costante arbitraria, come sceglierla?

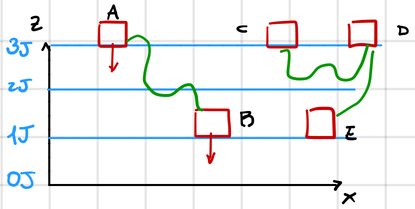


$$L_{PP_r} = U(x,y,z) - U(x_r, y_r, z_r)$$

Impostiamo che il potenziale in P_r sia nullo: $L_{PP_r} = U(x,y,z) = \int_P^{P_r} \vec F \cdot d\vec s$

$$U(x,y,z) = L_{PP_r} = \int_z^{z_r} -mgz = mgz - \cancel{mgz_r} = mgz \text{ senza costante}$$

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



$$U(x,y,z) = mgz$$

$\longrightarrow$ Superfici Equipotenziali: $U(x,y,z) = cost \longrightarrow z = cost$

$$L_{AB} = U_A - U_B = 3J - 1J = 2J$$
$$L_{CD} = U_C - U_D = 3J - 3J = 0$$
$$L_{ED} = U_E - U_D = 1J - 3J = -2J$$

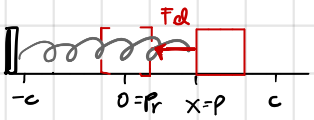
$$L_{AB} = -\Delta U$$
$$dL = -dU \Rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$\Rightarrow F_y = -\partial U/\partial y$$
$$\Rightarrow F_z = -\partial U/\partial z$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) = -\underbrace{\left(\partial/\partial x\,\hat{i} + \partial/\partial y\,\hat{j} + \partial/\partial z\,\hat{k}\right)}_{\nabla = \text{gradiente (nabla)}}U$$

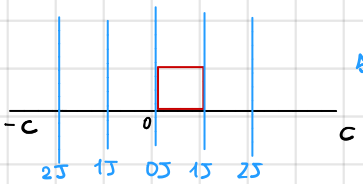
$$\longrightarrow \vec{F} = -\text{grad}\,U = -\nabla U$$

• Energia Potenziale Forza elastica



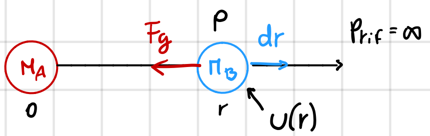
$$U(x,y,z) = L_{PP_r} = \int_x^0 -kx\,dx = \left[-\frac{kx^2}{2}\right]_x^0 = \boxed{\frac{kx^2}{2}}$$

$\longrightarrow$ Superfici equipotenziali: $U(x,y,z) = cost \longrightarrow x^2 = cost$



superfici equipotenziali

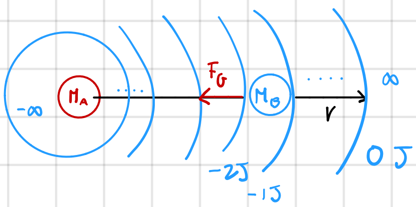
• Energia Potenziale Forza gravitazionale



$P_{rif} = \infty$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_r\,dr = -G\frac{M_A M_B}{r^2}\cdot dr$$
$$U(r) = L_{PP_r} = \int_r^{\infty} -G\frac{M_A M_B}{r^2}dr = -GM_AM_B\left[-1/r\right]_r^{\infty} = \boxed{-\frac{GM_AM_B}{r}}$$

$\longrightarrow$ Superfici equipotenziali $U(x,y,z) = cost \longrightarrow r = cost$



RIEPILOGO

Forza Gravitazionale $= F_G = \dfrac{-GM_AM_B}{r^2} \longrightarrow U^G(r) = -\dfrac{GM_AM_B}{r}$

Forza Peso $= P = -mg \longrightarrow U^P(z) = mgz$

Forza Elastica $= F_{el} = -kx \longrightarrow U^{el}(x) = \dfrac{kx^2}{2}$

Forza Centrifuga $= F_c = m\omega^2 r \longrightarrow U^c(r) = -\dfrac{m\omega^2 r^2}{2}$

Forza Elettrica $= F_E = \dfrac{k q_A q_B}{r^2} \longrightarrow U^E = \dfrac{k q_A q_B}{r}$ (Spoiler!)

CAMPI DI FORZE CONSERVATIVE

$L_{TOT,C} = K_B - K_A$

↳ forze di tipo conservativo $\quad L_P + L_{el} + L_E + \dots = K_B - K_A$

Per ogni L_C vale $L = -\Delta U \longrightarrow -\Delta U^P - \Delta U^{el} + \dots = K_B - K_A = (U_A^P - U_B^P) + (U_A^{el} - U_B^{el}) + (\quad) \dots = K_B - K_A$

$\Longrightarrow U_A^P + U_A^{el} + \dots + K_A = K_B + U_B^P + U_B^{el} + \dots \Rightarrow U_A^{TOT} + K_A = K_B + U_B^{TOT}$

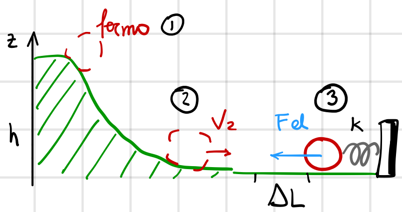
$U^{TOT} + K = E_m$ = energia meccanica $\longrightarrow \boxed{E_{mA} = E_{mB}}$ conservazione energia meccanica

Quando le forze NON sono conservative questo non vale:

$$L_C^{TOT} + L_{NC}^{TOT} = K_B - K_A \longrightarrow (-\Delta U^P - \Delta U^{el} \dots) + L_{NC} = \Delta K \longrightarrow L_{NC} = \underbrace{\overbrace{(\Delta U^P + \Delta U^{el} \dots)}^{\Delta \text{ energia pot. tot.}} + \Delta K}_{\Delta E_m}$$

$\boxed{L_{NC} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA}}$ NON c'è conservazione di energia!

ES.



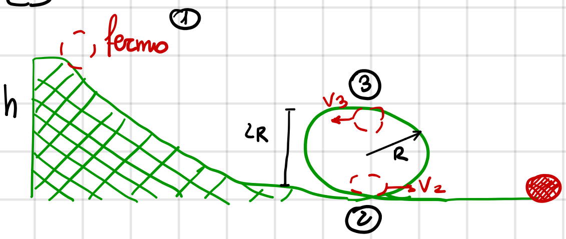
$$\overbrace{U_1^P + \cancel{U_1^{el}} + \cancel{K_1}}^{E_{m1}} = mgh \qquad \overbrace{\cancel{U_2^P} + \cancel{U_2^{el}} + K_2}^{E_{m2}} = mv_2^2/2 \qquad \overbrace{\cancel{U_3^P} + U_3^{el} + \cancel{K_3}}^{E_{m3}} = k\Delta L^2/2$$

$E_{m1} = E_{m2} \longrightarrow mgh = mv_2^2/2 \longrightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$

$E_{m1} = E_{m3} \longrightarrow mgh = k\Delta L^2/2 \longrightarrow \Delta L = \sqrt{2mgh/k}$

} caso senza attriti o altre forze non conservative

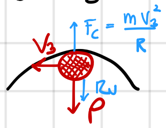
ES



- NO attrito
- trovare h sufficiente per fare il giro della morte

$$\left.\begin{aligned} E_{m_1} &= U_1^p = mgh \\ E_{m_2} &= K_2 = mv_2^2/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$E_{m_3} = U_3^p + K_3 = 2mgR + mv_3^2/2 \rightarrow E_{m_1} = E_{m_3} \rightarrow h = 2R + V_3^2/2g$$

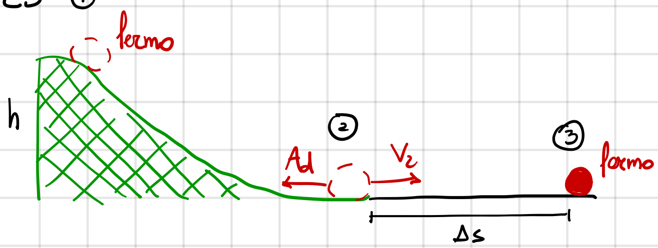


R_v in questo caso ho lo stesso verso di P!

$\Rightarrow mV_3^2/R = mg + R_v$ → il caso limite è quando $R_v = 0$ ovvero la palla sta per cadere

$\rightarrow V_3 = \sqrt{gR} = V_3$ minima → $h_{min} = 2R + R/2 = \frac{5}{2}R$

ES ①



- SI attrito (dopo la discesa)
- trovare Δs

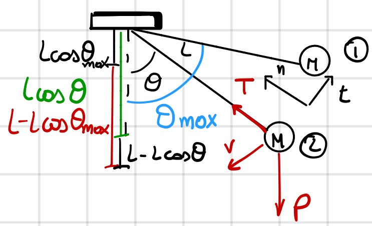
$$\left.\begin{aligned} E_{m_1} &= mgh \\ E_{m_2} &= mv_2^2/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

$E_{m_3} = 0$

Tra ① e ② non vi è dissipazione di energia, ma tra ① e ③ (o ② e ③) sì:

$$L_A = E_{m_3} - E_{m_1} = \Delta E_m \rightarrow -A_d \cdot \Delta s = -mgh \rightarrow \Delta s = \frac{mgh}{A_d} = \frac{h}{\mu_d}$$

ES

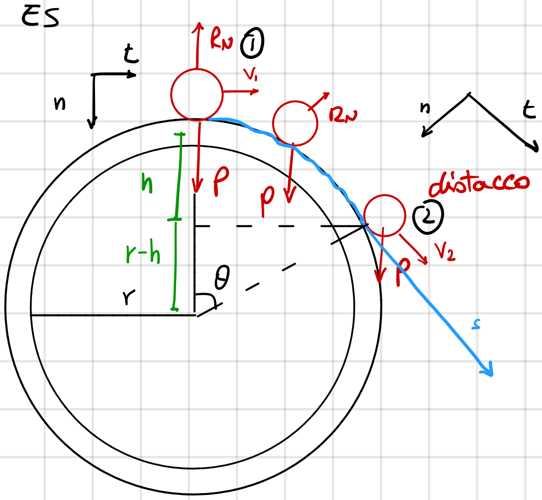


$$\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}\begin{cases} T - P\cos\theta = ma_n = m\,V^2/L \\ \underline{-P\sin\theta = ma_t = m\,d^2s/dt^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow T = mg\cos\theta + mv^2/L$

$$\left.\begin{aligned} E_{m_1} &= mgL(1-\cos\theta_{max}) \\ E_{m_2} &= mgL(1-\cos\theta) + \frac{mv^2}{2} \end{aligned}\right\} E_{m_1} = E_{m_2} \rightarrow V = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \longrightarrow T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

ES



$$\begin{cases} n & P\cos\theta - R_N = ma_n = m\,V_2^2/r \\ t & P\sin\theta = ma_t = m\,d^2s/dt^2 \longrightarrow mg\cos\theta = \dfrac{md^2(r\theta)}{dt^2} \longrightarrow \cancel{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\dfrac{g}{r}\right)\sin\theta = 0} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{m1} &= mgr + \frac{mV_1^2}{2} \\ E_{m2} &= mg(r-h) + \frac{mV_2^2}{2} \end{aligned}\right\} E_{m1} = E_{m2} \longrightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gh}$$

$$\longrightarrow R_N = P\cos\theta - m\frac{V_2^2}{r} = mg\left(\frac{r-h}{r}\right) - \frac{m(V_1^2+2gh)}{r} = \frac{m}{r}\left[g(r-3h) - V_1^2\right]$$

Quando $R_n = 0 \longrightarrow h_{distacco} = \frac{r}{3} - \frac{V_1^2}{3g}$

- Energia di un Oscillatore Armonico

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \longrightarrow \underbrace{\omega = \sqrt{K/m}}$$
$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \theta)$$

$$\Longrightarrow U(t) = \frac{Kx^2}{2} = \frac{KA^2}{2}\cdot\cos^2(\omega t + \theta) \quad \text{sempre positiva!}$$
$$\Longrightarrow K(t) = mv^2/2 = \frac{m\omega^2A^2}{2}\cdot\sin^2(\omega t + \theta)$$

$$E_m = U(t) + K(t) = \boxed{\frac{KA^2}{2}}$$

Viceversa:

$$E_m = U^{el}(t) + K(t) = \frac{KA^2}{2} \quad (\text{costante})$$

$$= \frac{Kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{KA^2}{2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{dx}{dt}$$ eq. diff. non lineare 1° ordine

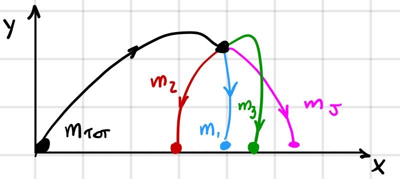
$$\longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{K}{m}}\,dt \longrightarrow \underbrace{\int_{x_0}^{x(t)} \dots}_{\left[\arccos(x/A)\right]_{x_0}^{x(t)}} = \int_0^t \dots \longrightarrow \arccos\left(\frac{x(t)}{A}\right) - \arccos\left(\frac{x_0}{A}\right) = \sqrt{\frac{K}{m}}\,t$$

Per esplicitare $x(t)$ applico il cos:

$$\cos\left[\arccos(x(t)/A)\right] = \cos\left[\sqrt{K/m}\,t + \arccos(x_0/A)\right] \longrightarrow x(t) = A\cos\left[\overbrace{\sqrt{\frac{K}{m}}}^{\omega}\,t + \overbrace{\arccos(x_0/A)}^{\phi}\right] = A\cos(\omega t + \phi)$$

MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI E DEL CORPO RIGIDO

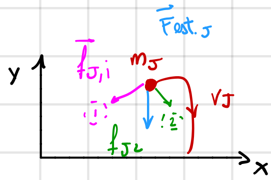
ES disintegrazione proiettile



Il moto di ogni scheggia è governato da forze interne al sistema e forze esterne

$$\sum_1^n m_J = m_{TOT}$$

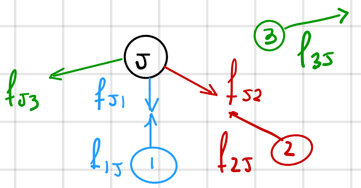
V_J = velocità m_J



$$\underbrace{\vec{f}_{J1} + \vec{f}_{J2} + \ldots + \vec{f}_{Jn}}_{f.\ interne} + \vec{F}_J = m_J \vec{a}_J = m_J \frac{d^2 \vec{r}_J}{dt^2}$$

f_{JN} = forza interna esercitata da m_N su m_J $\Longrightarrow$ $\sum_{K \neq J}^{N} \vec{f}_{JK} + \vec{F}_J^{est} = m_J \vec{a}_J = m_J \frac{d^2 \vec{r}_J}{dt^2}$

Sfortunatamente le forze interne sono incognite! però…



$\Longrightarrow f_{JK} = -f_{KJ}$

$$\begin{cases} (J)\ f_{J1} + f_{J2} + f_{J3} + \ldots \\ (1)\ f_{12} + f_{13} + f_{1J} + \\ (2)\ f_{21} + f_{23} + f_{2J} + \ldots \\ (3)\ f_{31} + f_{32} + f_{3J} + \end{cases}$$

sommiamo tutto e tutte le forze interne scompaiono

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_1^N \vec{F}_J^{est}}_{\vec{F}_{TOT}^{est}} = \sum_1^N m_J \vec{a}_J = \sum_1^N m_J \frac{d^2 \vec{r}_J}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_1^N m_J \vec{r}_J\right)$$

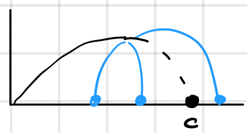
$\vec{r}_c$ = posizione del centro di massa $= \dfrac{\sum_1^N m_J \vec{r}_J}{\sum_1^N m_J} = \dfrac{\sum_1^N m_J \vec{r}_J}{m_{TOT}}$ $\longrightarrow$ $\vec{F}_{TOT}^{est} = M_{TOT} \dfrac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = m_{TOT}\, \vec{a}_c$

1ª equazione cardinale

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_J \cdot \frac{d\vec{r}_J}{dt}}{m_{TOT}} = \frac{\sum m_J \vec{v}_J}{m_{TOT}}$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_J \vec{a}_c}{m_{TOT}}$$

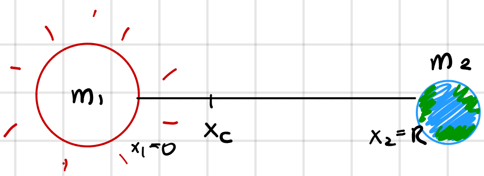
$$\vec{F}_{est} = m_{TOT}\,\vec{g} = m_{TOT}\,\vec{a}_c \longrightarrow \vec{a}_c = \vec{g}$$



- Sistema Particellare (o discreto)

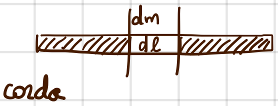
$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_J r_J}{m_{TOT}} - \begin{cases} x_c = \dfrac{\sum m_J x_J}{m_{TOT}} \\ y_c = \sum m_J y_J / m_{TOT} \\ z_c = \dfrac{\sum m_J z_J}{m_{TOT}} \end{cases}$$

ES



$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}$$

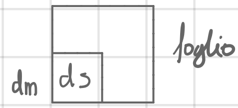
DENSITÀ (sistema continuo)

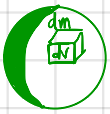


- Densità lineare $= \lambda = \frac{dm}{dl}$ se il materiale è omogeneo $\lambda = \frac{m_{TOT}}{l_{TOT}} \left(= \frac{dm}{dl}\right) \; [kg/m]$

La densità lineare si usa per oggetti MONODIMENSIONALI.

- Densità superficiale $= \sigma = \frac{dm}{ds}$ se il materiale è omogeneo $\sigma = \frac{m_{TOT}}{S_{TOT}} \; [kg/m^2]$





- Densità (volumetrica) $= \rho = \frac{dm}{dV}$ se il materiale è omogeneo $\rho = \frac{m_{TOT}}{V_{TOT}} \; [kg/m^3]$

CENTRO DI MASSA PER SISTEMI CONTINUI

$$\vec{r}_c = \frac{\int_M \vec{r} \cdot dm}{m_{TOT}} :$$

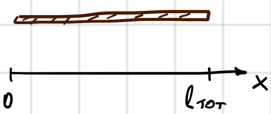
$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_l \lambda x \, dl}{m_{TOT}} \\ y_c = \frac{\int_l \lambda y \, dl}{m_{TOT}} \\ z_c = \frac{\int_l \lambda z \, dl}{m_{TOT}} \end{cases}$$ proiezioni sugli assi

(1D) $\frac{\int_L \vec{r} \lambda \, dl}{m_{TOT}}$

(2D) $\frac{\iint_S \vec{r} \sigma \, ds}{m_{TOT}}$

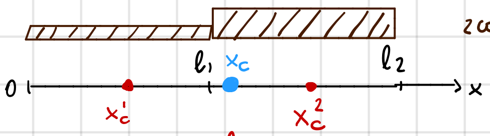
(3D) $\frac{\iiint_V \vec{r} \rho \, dV}{m_{TOT}}$

ES



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m_{TOT}}{l_{TOT}} \longrightarrow x_c = \frac{\int_0^{l_{TOT}} \lambda x \, dx}{m_{TOT}} = \frac{\lambda}{m_{TOT}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{l_{TOT}} = \frac{\cancel{\lambda}\, l_{TOT}^{\cancel{2}}}{2 m_{\cancel{TOT}}} = \frac{l_{TOT}}{2}$$

ES



2 corde con densità diverse

$\longrightarrow$ Sapendo i due centri siamo tornati ad un sistema discreto

$x_c^1 = l_1/2 \qquad x_c^2 = l_1 + l_2/2$

$$\longrightarrow x_c = \frac{m_1 x_c^1 + m_2 x_c^2}{m_1 + m_2} = \ldots$$

QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA

$\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = m_1\vec{v}_1 + \dots + m_n\vec{v}_n = \sum^n m_J\vec{v}_J$ se dividiamo per m_{TOT} $\rightarrow$ $P_{TOT}/m_{TOT} = \vec{V}_c$

$\rightarrow \vec{P}_{TOT} = m_{TOT}\vec{V}_c = \vec{P}_c = \vec{P}_{sist.}$

Dalla prima eq. cardinale: $\boxed{\vec{F}^{est.}} = m_{TOT}\vec{a}_c = m_{TOT}\frac{dV_c}{dt} = \frac{d}{dt}(m_{TOT}\vec{V}_c) = \boxed{\frac{d\vec{P}_{sist.}}{dt}}$

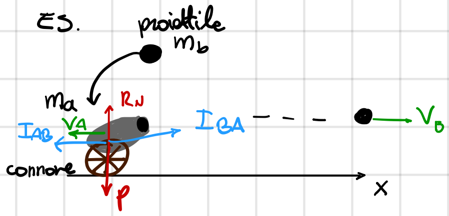
$\rightarrow \boxed{\vec{F}^{est} \cdot dt} = d\vec{p}_{sist}$ impulso elementare

$\rightarrow \vec{I}^{est}$ = impulso $= \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{est}\cdot dt = \Delta\vec{p}_{sist} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ Teorema dell'impulso e della variazione della quantità di moto

Se $\vec{I}^{est} = 0 \rightarrow P_1 = P_2$ = conservazione della quantità di moto $\Rightarrow \vec{P}_{sist.} = cost.$ (es. $\vec{F}^{est} = 0$)

Se $I^{est}_{asse} = 0 \rightarrow P_{asse} = cost.$

ES.

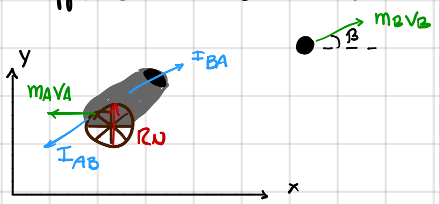


C'è conservazione di quantità di moto poiché gli impulsi sono interni e le forze esterne si compensano.

$\vec{P}_{prima} = 0$

$\vec{P}_{dopo} = m_A V_A + m_B V_B = 0 \rightarrow V_A = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right)V_B$

Supponiamo di inclinare il cannone:



$I^{est} = I_{RN} \neq 0$ NO conservazione quantità di moto

Lungo l'asse delle x però si può conservare poiché $I^{est}_x = 0 \rightarrow \Delta P_x = 0 \rightarrow P^x_{prima} = P^x_{dopo}$

$P_x^{prima} = 0$

$P_x^{dopo} = m_A V_{Ax} + m_b V_{bx} = m_A V_A + m_B V_B\cos\beta = 0 \rightarrow V_{ax} = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right)V_B\cos\beta$

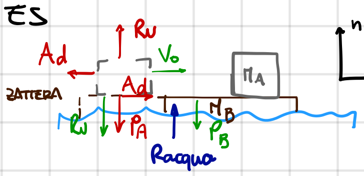
In alternativa:

$$\vec{I}^{est} = \vec{I}_{RN} = \Delta\vec{P}_{sist.} \begin{cases} y)\ I_{RN} = \Delta P_y = P_y^{dopo} - P_y^{prima} = m_B V_{By} - 0 \\ x)\ 0 = \Delta P_x = P_x^{dopo} - P_x^{prima} = m_B V_{Bx} + m_A V_{Ax} \end{cases}$$

$\rightarrow V_A = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right)V_B\cos\beta$

$\rightarrow I_{RN} = m_B V_B \sin\beta$

ES

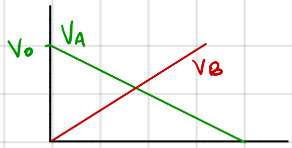


Calcolare quando A si ferma

NB. Ad e R_N sono "duplici" perché ognuno ha "effetto" su A o su B

$$A \begin{cases} n & R_N - M_A g = 0 \longrightarrow R_N = M_A g \\ t & -A_d = M_A a_A \longrightarrow a_A = -\mu_d g \Rightarrow V_A = V_0 \underbrace{-\mu_d g t}_{\int a_A} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} n & R_a = R_N + M_B g \\ t & A_d = M_B a_B \longrightarrow a_B = \left(\frac{M_A}{M_B}\right)\mu_d g \Rightarrow V_B = \mu_d g t \,(M_A/M_B) \end{cases}$$

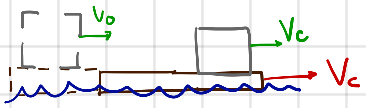


In questo caso "fermarsi" vuol dire che $V_A = V_B$

$$\longrightarrow t^* = \frac{V_0}{\mu_d g}\left(\frac{M_B}{M_A + M_B}\right)$$

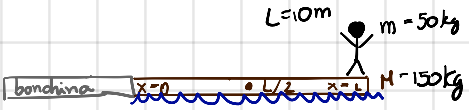
$$\longrightarrow V_B(t^*) = V_A(t^*) = V_0\left(\frac{M_A}{M_A + M_B}\right)$$

Alternativamente, usando la conservazione della quantità di moto



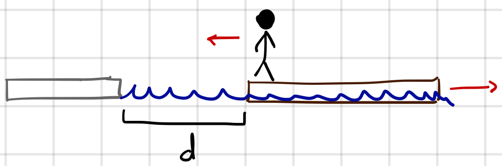
$$\left.\begin{array}{l} P_{prima} - M_A V_0 \\ P_{dopo} - (M_A + M_B) V_c \end{array}\right\} V_c = V_0\left(\frac{M_A}{M_A + M_B}\right)$$

ES



$$X_{CM} = \frac{mL + M(L/2)}{m + M} = 6.5$$

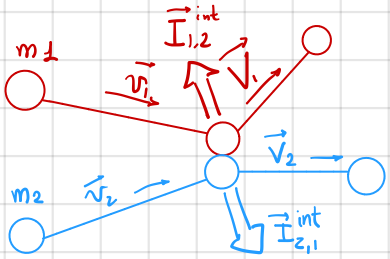
Camminando verso la banchina, la persona si muove, ma fa muovere anche (al contrario) la zattera. Il principio è lo stesso del caso precedente



Il centro di massa rimane invariato $\quad X_{CM} = \frac{md + M(d + L/2)}{m + M} = d + \left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{L}{2}$

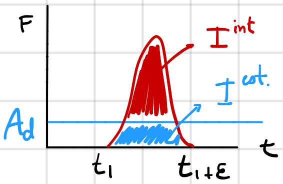
$X_{CM} = 6{,}5 \longrightarrow d = 2.75\,m$

PROCESSI D'URTO



v = prima dell'urto
V = dopo l'urto

Durante il contatto si scatenano delle brevi ma intense forze interne



$\vec{I}^{\,est}_{\cancel{Ad1}} + \vec{I}^{\,int}_{1,2} = \Delta \vec{p}_1$ Teorema dell'impulso (per la massa m_1) $= m_1\vec{V}_1 - m_1\vec{v}_1$

L'impulso delle forze esterne può essere trascurato

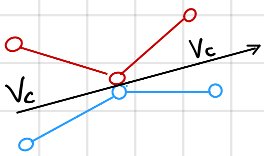
Analogamente: $I^{est}_{\cancel{Ad2}} + I^{int}_{2,1} = \Delta p_2 = m_2\vec{V}_2 - m_2\vec{v}_2$

$I_{12} = - I_{21}$

Ora vediamo il tutto come unico sistema senza differenziare le masse $\longrightarrow F^{int}$ trascurabili $\longrightarrow \vec{I}^{\,est} = \Delta \vec{p}_{sist}$

$\longrightarrow I^{est} = \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} Ad\, dt = \vec{A}_d \varepsilon \approx 0$ poiché ε è molto piccolo (o zero) $\longrightarrow \Delta p_{sist} = 0 \longrightarrow p_{sist} = cost$

$\vec{p}_c^{\,prima} = \vec{p}_c^{\,dopo}$



$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \Longrightarrow$ In tutti gli urti c'è conservazione di quantità di moto del sistema

URTI ELASTICI

Si conservano anche l'energia meccanica, ma poiché l'energia potenziale può essere trascurata, perché non varia, si conserva anche l'energia cinetica.

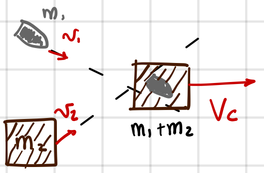
URTI ANELASTICI

Non c'è conservazione di energia meccanica (cinetica), ma diminuisce

URTI PERFETTAMENTE ANELASTICO

I due corpi si fondono e procedono insieme

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO



$$\left.\begin{array}{l} P_{prima} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ P_{dopo} = (m_1+m_2)\vec{V}_c \end{array}\right\} P_p = P_d \longrightarrow V_c = \left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_2+m_1}\right)$$

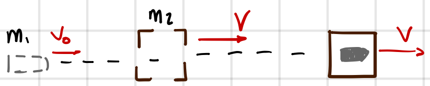
$$K_{prima} \geq K_{dopo} \longrightarrow \boxed{Q} = \text{calore} = K_{prima} - K_{dopo} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1+m_2)V_c^2}{2} =$$

$$\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{m_1+m_2}{2}\cdot\left|\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right|^2 = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(m_1+m_2)m_1 v_1^2 + (m_1+m_2)m_2 v_2^2}{m_1+m_2}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{m_1^2 v_1^2} + \cancel{m_2^2 v_2^2} + 2m_1 m_2 \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot\left(v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right) = \boxed{\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot|v_1 - v_2|^2}$$

Il calore è sempre positivo

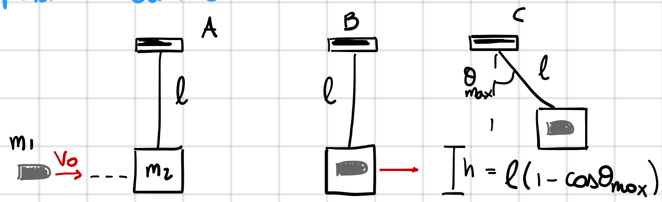
caso mono dimensionale



$$\left.\begin{array}{l} P_{prima} = m_1 V_0 \\ P_{dopo} = (m_1+m_2)V \end{array}\right\} \longrightarrow V = \left(\frac{m_1}{m_2+m_1}\right)v_0$$

$$K_{prima} = \frac{m_1 V_0^2}{2} \qquad K_{dopo} = \frac{(m_1+m_2)V^2}{2} = \frac{m_1^2 v_0^2}{2(m_1+m_2)} \longrightarrow Q = K_{prima} - K_{dopo} = \frac{m_2 m_1}{2(m_1+m_2)}V_0^2$$

pendolo balistico



Trovare v_0

$$\underbrace{P_A = m_1 V_0 \qquad P_B = (m_1+m_2)V}_{\text{Conservazione}} \qquad \boxed{P_C = 0} \longrightarrow \text{NO conservazione}$$

$$V_0 = \left(\frac{m_2+m_1}{m_1}\right)V$$

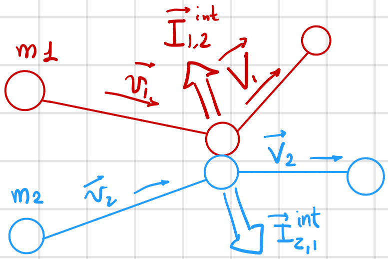
$$\boxed{E_{mA} = K_A = \frac{m_1 V_0^2}{2}} \qquad \underbrace{E_{mB} = \frac{(m_1+m_2)V^2}{2} \qquad E_{mC} = U_c = (m_1+m_2)gh}_{\text{Conservazione}}$$

No conservazione

Conservazione $\longrightarrow V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_{max})}$

$$\longrightarrow v_0 = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\cdot\sqrt{2gl(1-\cos\theta_{max})}$$

URTO ELASTICO



- Conservazione quantità di moto
  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$
- Conservazione energia meccanica (cinetica)
  $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$

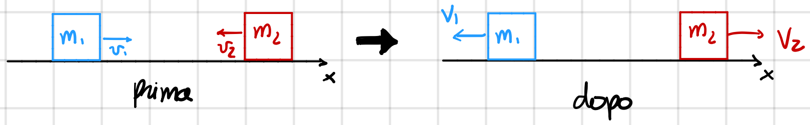
Nel caso 3D, per trovare $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ (6 incognite totali (x,y,z)) ho bisogno di 6 eq.
- 3 le ricavo dalla conservazione della quantità di moto (su x, y, z) perché vettoriale
- 1 lo ricavo dalla conservazione dell'energia cinetica (non vettoriale)

NOPE

Nel caso 2D ho bisogno di 4 eq.
- 2 dalla quantità di moto
- 1 dall'energia cinetica

NOPE

Nel caso monodimensionale invece ho le due eq. per le due incognite:



$P_{prima} = m_1v_1 + m_2v_2 =$

$K_{prima} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 =$

$P_{dopo} = m_1V_1 + m_2V_2$

$K_{dopo} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$

$$\begin{cases} \frac{m_1v_1^2}{\cancel{2}} + \frac{m_2v_2^2}{\cancel{2}} = \frac{m_1V_1^2}{\cancel{2}} + \frac{m_2V_2^2}{\cancel{2}} \longrightarrow m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \longrightarrow \cancel{m_1}(\cancel{v_1 - V_1})(v_1 + V_1) = \cancel{m_2}(\cancel{V_2 - v_2})(V_2 + v_2) \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \longrightarrow \cancel{m_1(v_1 - V_1)} = \cancel{m_2(V_2 - v_2)} \end{cases}$$

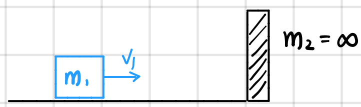
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + V_1 = v_2 + V_2 \quad \text{eq. mista} \rightarrow V_1 - V_2 = v_2 - v_1 \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ m_1v_1 + m_2v_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \det\begin{vmatrix} v_2 - v_1 & -1 \\ m_1v_1 + m_2v_2 & m_2 \end{vmatrix} \Big/ \det\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \frac{m_2(v_2 - v_1) + m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

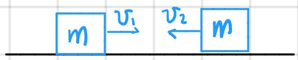
Scambiando 1 con 2 trovo V_2

ES



$$V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\cancel{v_2}\,0 = -v_1$$

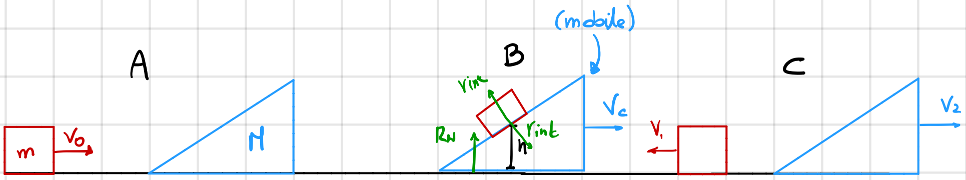
Es masse uguali



$V_1 = \frac{2m}{2m} v_2 = v_2$ scambio di velocità !

$V_2 = v_1$

Es



(no attriti)

• A/B

$\vec{I}^{\,est} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{R_N} + m\vec{g} + M\vec{g})\,dt = \Delta \vec{p}_{sist.}$ ⟶ Non c'è conservazione di quantità di moto in totale nel sistema, ma sì lungo l'asse x poiché tutte le forze esterne sono verticali

$I_x^{est} - \Delta P_x = 0$

$P_A = P_B \longrightarrow mV_0 = (m+M)V_c \longrightarrow V_c = \frac{mV_0}{m+M}$

Per quanto riguardo l'energia in questo caso quella potenziale è presente poiché non è propriamente un urto (m impiega tempo > ε per salire, non istantaneo)

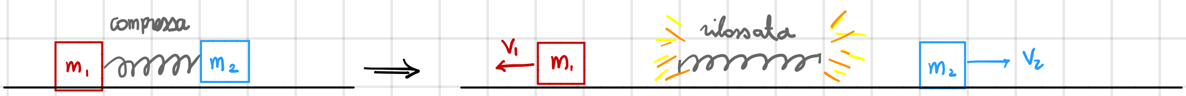
$E_{mA} - E_{mB}$ (no attriti) $\longrightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 = mgh + \frac{1}{2}(m+M)V_c^2 \longrightarrow h = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\left(\frac{M}{m+M}\right)$

• A/C

$\begin{cases} mv_0 = mV_1 + MV_2 \\ \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \end{cases}$ poiché la discesa non influisce sull'asse x } come l'urto elastico

$\longrightarrow V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)V_0 + \cancel{\left(\frac{2M}{m+M}\right)0}$ $\quad V_2 = \left(\frac{2m}{m+M}\right)V_0 - \cancel{\left(\frac{M-m}{m+M}\right)0}$

ESPLOSIONE



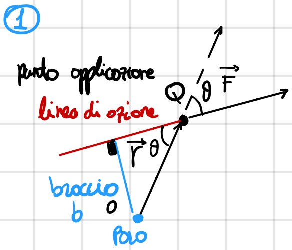
$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = E_{molla} \\ m_1V_1 + m_2V_2 = 0 \end{cases}$ (Bilanciamento energia, non conservazione)
(Conservazione quantità di moto, no forze esterne)

$\longrightarrow V_1 = \sqrt{2E\left(\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}\right)}$

MOMENTO DI UNA FORZA

Momento di una forza rispetto a $\begin{cases} \text{un polo (1)} \\ \text{un asse (2)} \end{cases}$

(1)

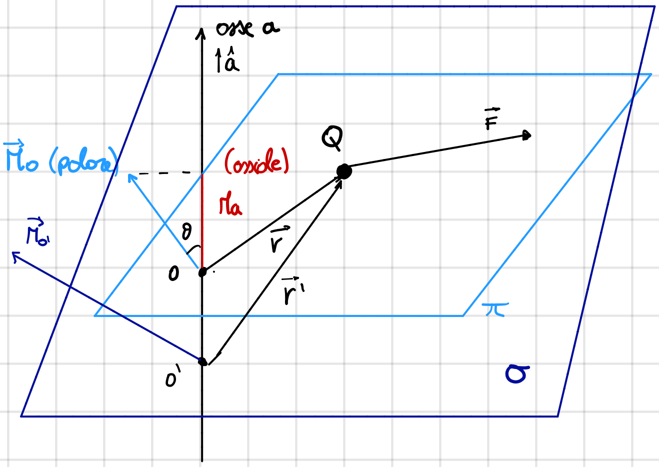


$\vec{M}_o = \boxed{\vec{r} \times} \vec{F}$ → operatore di moto

$\begin{cases} \text{INTENSITÀ} : M_O = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot b \\ \text{DIREZIONE} : \perp \text{ piano } \vec{r}, \vec{F} \\ \text{VERSO} : \text{mano destra (regola mano destra)} \end{cases}$

Se: $\begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \end{cases} \longrightarrow \vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

(2)



$M_a = \vec{M}_o \cdot \hat{a} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{a}$

Rispetto O':

$\vec{M}_{o'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{o'o}) \times \vec{F}$

$M_{a'} = \vec{M}_{o'} \cdot \hat{a} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} + \vec{o'o} \times \vec{F} \cdot \hat{a}$

$= \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} + \underbrace{\cancel{\hat{a} \times \vec{o'o}}}_{0} \cdot \vec{F}$

$= \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} = M_a$

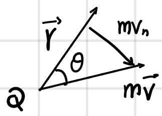
$\Rightarrow M_{a'} = M_a \quad \forall a'$

MOMENTO QUANTITÀ DI MOTO

Al posto di $\vec{F}$ avremo $\vec{p} = m\vec{v}$ e Q sarà il punto materiale

$\vec{b}_o$ - momento $\vec{p}$ $= \vec{r} \times \vec{p}$

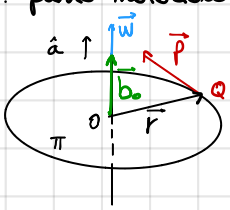
$b_o = r \cdot mv \cdot \sin\theta = \vec{r} \cdot mv_n$



$\vec{b}_o = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$

$b_a = \vec{b}_o \cdot \hat{a} = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \hat{a}$

ES. punto materiale in rotazione



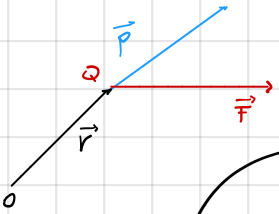
$\vec{p} = m\vec{v} = m\vec{\omega} \times \vec{r}$

$\omega \perp r \rightarrow \omega \cdot r = 0$

$\vec{b}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\,\cancel{(m\vec{\omega} \cdot \vec{r})} = (mr^2)\vec{\omega}$

b_a = proiezione $\vec{b}_o$ sull'asse $= b_o = (mr^2)\omega$

mr^2 = momento di inerzia $= I_a$



$M_o = \vec r \times \vec F$

$b_o = \vec r \times \vec p$

$\vec F = d\vec p/dt$ ok $M_o = d\vec b_o/dt$ NO

$\boxed{M_o} = \vec r \times \vec F = \boxed{\vec r \times d\vec p/dt}$

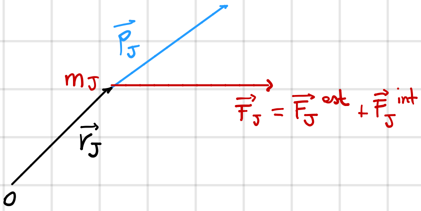
velocità del punto materiale relativo al polo

$d\vec b_o/dt = \frac{d(\vec r \times \vec p)}{dt} = \frac{d\vec r}{dt} \times \vec p + \boxed{\vec r \times d\vec p/dt} \longrightarrow M_o = d\vec b_o/dt - \boxed{\frac{d\vec r}{dt}} \times \vec p =$

Se anche il polo è in movimento $\vec M_o = d\vec b_o/dt - (\cancel{\vec V_Q} - \vec V_o) \times m\vec V_Q = d\vec b_o/dt + \vec V_o \times \overset{\vec p}{\boxed{m\vec V_Q}}$

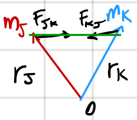
$V_Q \times V_Q = 0$

Nel caso di sistema di punti materiali le regole precedenti sono applicate per ogni singolo punto



$\vec M_J = \vec r \times \vec F_J = \vec r \times \vec F^{est} + \vec r \times \vec F^{int} = \vec M_J^{est} + \vec M_J^{int} = d\vec b_J/dt + \vec V_o \times m_J \vec V_J$

Per tutto il sistema: $\sum M_J^{est} + \boxed{\sum M_J^{int}} = \sum db_J/dt + \sum V_o \times m_J v_J$



$\vec M^{int}_{JK} = \vec r_J \times F_{JK}$

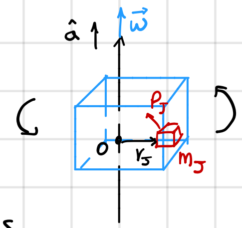
$\vec M^{int}_{KJ} = \vec r_K \times F_{KJ}$ + $\longrightarrow \vec r_J \times F_{JK} + \vec r_K \times \vec F_{KJ} = \vec r_J \times \vec F_{JK} - \vec r_K \times \vec F_{JK} = (\vec r_J - \vec r_K) \times \vec F_{JK} = 0$ perché //

Anche in questo caso le forze interne si annullano $\longrightarrow \sum M_J^{int} = 0$

$\vec M_o^{est} = \frac{d}{dt}\sum \vec b_J + \vec V_o \times \sum m_J \vec V_J = d\vec b_o/dt + \vec V_o \times \vec P_c$ II equazione cardinale

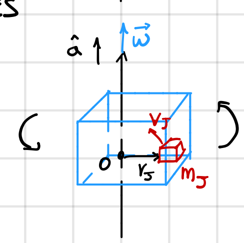
Per semplificare eliminando il secondo termine si pone $O = C \vee O$ fermo

Es



- $\vec P_J = m_J \vec V_J = m_J \vec\omega \times \vec r_J$
- $\vec b_{oJ} = \vec r_J \times \vec P_J = \vec r \times (m_J \vec\omega \times \vec r_J) = (m_J r_J^2)\vec\omega$
- $b_{aJ} = \vec b_{oJ} \cdot \hat a = b_{oJ} = (m_J r_J^2)\omega$
- $b_a = \underbrace{[\sum (m_J r_J^2)]}_{I_a}\omega = I_a \cdot \omega$

Es



- $\vec V_J = \vec\omega \times \vec r_J \longrightarrow V_J = \omega r_J$
- $K_J = \frac{1}{2} m_J v_J^2 = \frac{1}{2}(m_J r_J^2)\omega^2$
- $K = \sum K_J = \frac{\omega^2}{2}\sum m_J r_J^2 = \boxed{\frac{1}{2} I_a \omega^2}$

TRASLAZIONE $\longrightarrow$ ROTAZIONE

$\vec{P} = m\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad b_a = I_a \cdot \omega$

$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{1}{2} I_a \omega^2$

I eq. card. : $\vec{F}^{est} = d\vec{P}_c / dt$

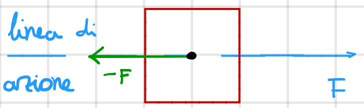
II eq. card : $\vec{M}_o^{est} = d\vec{b}_o / dt$ (caso $O = C \ \vee \ O$ fermo)

$\vec{F}^{est} = m_{TOT}\vec{a}_c \Rightarrow \vec{M}_a^{est} = db_a/dt = d/dt\,(I_a \omega) = I_a\, a$

$\vec{I}^{est} = \int \vec{F}^{est} dt = \Delta\vec{P}_{sist} \Rightarrow \vec{J}_a^{est}$ = impulso angolare $= \int \vec{M}_a^{est} dt = \Delta b_a$

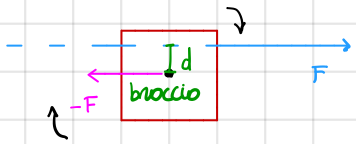
$\vec{P}_{sist} = cost$ (se $\vec{I}^{est} = 0$) $\rightarrow b_a = cost$ (se $\vec{J}_a^{est} = 0$)

CORPO VINCOLATO



I eq. card.
1) $\vec{F}^{est} = m_{TOT}\vec{a}_c$
2) $\vec{F}^{est} = \vec{F} - \vec{F} = 0$

II eq. card.
1) $M^{est} = I_a a$
2) $M^{est} = 0$ poiché braccio nullo



I eq. card.
1) $\vec{F}^{est} = m_{TOT}\vec{a}_c$
2) $\vec{F}^{est} = \vec{F} - \vec{F} = 0$

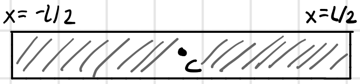
$\boxed{\begin{array}{l}\text{II eq. card.}\\ M^{est} = I_a\, a \\ M^{est} = -F \cdot d\end{array}}$

NB per convenzione si mette il segno negativo si ruota in senso orario

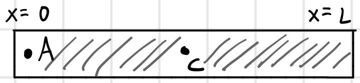
"$-F$" ha momento nullo perché non ha braccio!

$I_a = \sum m_j r_j^2 = \int_\Pi r^2 dm \quad \begin{cases} 1D & \int_\ell r^2 \lambda\, d\ell \\ 2D & \int_S\int r^2 \sigma\, dS \\ 3D & \int_V\int\int r^2 \rho\, dV \end{cases}$

ES 1D



$I_a = \int r^2 dm \longrightarrow I_c = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \lambda \frac{L^3}{12} \overset{\lambda L = m}{=} \frac{1}{12} m L^2$

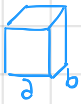


$I_A = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \lambda L^3/3 \overset{\lambda L = m}{=} \frac{1}{3} m L^2$

Teorema di Huyghens Steiner $\quad I_A = I_c + M_{TOT} \cdot AC^2 \quad \forall A$

barra 

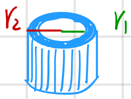
$I_a = \frac{1}{12} m L^2$

Parallelepipedo 

$I_a = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

Cilindro Pieno 
$I_a = \frac{1}{2} m r^2$

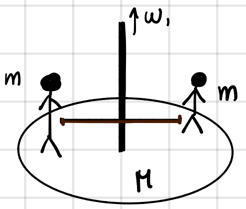
Cilindro Vuoto 
$I_a = m r^2$

Cilindro Parzialmente Pieno 

$I_a = \frac{1}{12} m (r_2^2 + r_1^2)$

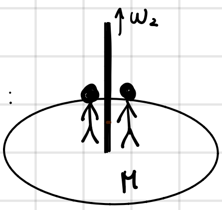
Sfera Piena 
$I_a = \frac{2}{5} m r^2$

Sfera Vuota 
$I_a = \frac{2}{3} m r^2$



$$M_a^{est} = \frac{dL_a}{dt} = \frac{d}{dt}(I_a \omega) = 0 \qquad L_a = I_a(t) \cdot \omega(t) = cost$$

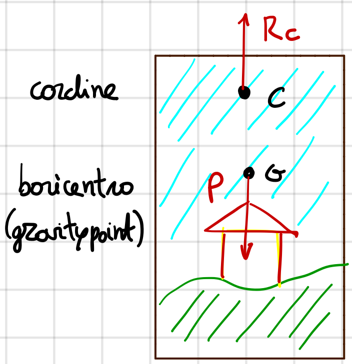
$$I_{a1} = \frac{1}{2} MR^2 + 2mR^2$$

Se i due si avvicinano: 

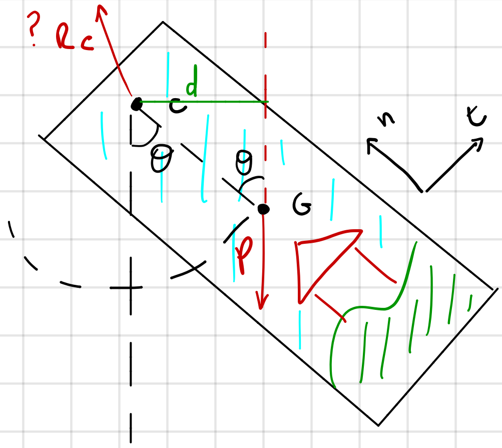
$I_{a2} = \frac{1}{2} MR^2$ poiché la loro distanza dal centro (braccio) è nulla (primo caso R)

$$I_{a1} \omega_1 = I_{a2} \omega_2 \longrightarrow \left(\frac{1}{2} MR^2 + 2MR^2\right)\omega_1 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_2 \qquad \omega_2 > \omega_1$$

PENDOLO COMPOSTO



$\Longrightarrow$



$R_c = P$

I eq. card

$\vec{P} + \vec{R_c} = m\vec{a_c}$

$$\begin{cases} n & R_{cn} \overset{?}{-} P\cos\theta = ma_n \\ t & R_{cn} - P\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

impossibile

II eq. card

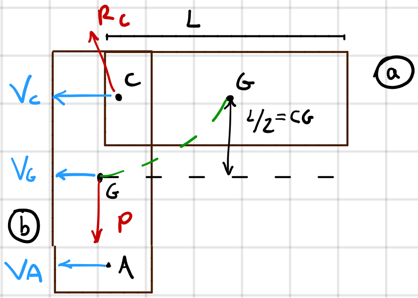
senso orario

$M_a^{est} = I_a \, d\omega/dt = I_a \, d^2\theta/dt^2 = M_P + \cancel{M_{Rc}}^{\,0} = Pd = -P\,CG\sin\theta \Rightarrow -mg\,CG\sin\theta = I_a \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$d^2\theta/dt^2 + \left(\dfrac{mg\,CG}{I_a}\right)\sin\theta = 0$ simile al pendolo semplice $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \left(g/L\right)\sin\theta = 0$ $\quad T = 2\pi\sqrt{L/g}$

$\longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_a}{mg\,CG}}$

Associamo il quadro ad una barra appesa per un estremo $\longrightarrow T = 2\pi\sqrt{mL^2/3 \big/ mg\,L/2} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\, L/g}$



- Velocità angolare massima ω_b
- Velocità nei punti C, G, A

$\omega_a = 0$

$E_{ma} = U_a = Mg(CG) = Mg\,\overset{h}{L/2}$

$\omega_b = ?$

$E_{mb} = K_b = \frac{1}{2} I_c \omega_b^2$

$I_c = \frac{1}{3}ML^2$ (asse estremo)

$$\left\{ \frac{1}{2} I_c \omega_b^2 = Mg\,L/2 \longrightarrow \boxed{\omega_b} = \sqrt{MgL/I_c} = \boxed{\sqrt{3g/L}} \right.$$

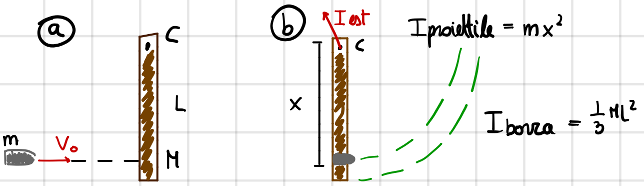
$V(r) = \omega_b \cdot r$

$\longrightarrow V_c = \omega_b \cdot \cancel{r}^{\,0} = 0$

$\longrightarrow V_G = \omega_b \cdot r = \sqrt{3g/L} \cdot L/2 = \sqrt{3gL/4}$

$\longrightarrow V_A = \omega_b \cdot \underbrace{r}_{} = \sqrt{3g/L} \cdot L = \sqrt{3gL}$

$\hookrightarrow$ distanza dal cardine

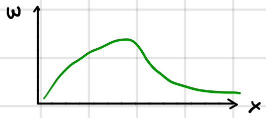


$I_{est} \neq 0 \longrightarrow$ No conservazione quantità di moto

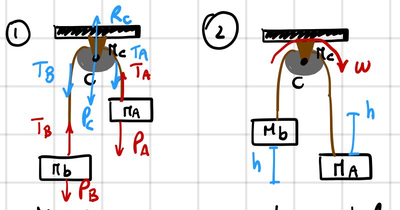
Poiché però le forze esterne sono applicate sul punto di rotazione, il loro momento è nullo $\longrightarrow J_a^{est} = 0 \longrightarrow b_a = cost$

$\longrightarrow$ conservazione momento quantità di moto

$$\left.\begin{aligned} &a: \; b_a = mV_0 x \\ &b: \; b_a = I_c^{TOT} \cdot \omega = \left(\tfrac{1}{3}ML^2 + mx^2\right)\omega \end{aligned}\right\} \; b_a^a = b_a^b \longrightarrow \omega(x) = \frac{mV_0 x}{ML^2/3 + mx^2}$$



MACCHINA DI ATWOOD



$M_A > M_b$ M_c non trascurabile

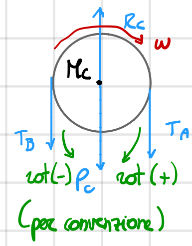
- Accelerazione del sistema
- Tensione della fune
- Velocità impatto
- Velocità angolare massima

$$\left.\begin{aligned} &P_A - T_A = M_A a_A \\ &T_B - P_B = M_B a_B \end{aligned}\right\} \; a_A = a_B = a$$

Positivo la forza "vincente"

I eq. card.

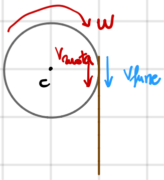
$$\begin{cases} y: \; R_c = P_c + T_A + T_B \\ x: \; / \end{cases}$$



II eq. card.

$$\underbrace{\cancel{M_{P_c}^{est}} + \cancel{M_{R_c}^{est}}}_{\text{braccio nullo}} + M_{T_A}^{est} + M_{T_B}^{est} = I_c \cdot \frac{d\omega}{dt} \Longrightarrow T_A \cdot r - T_B \cdot r = I_c \cdot d\omega/dt \longrightarrow T_A - T_B = \frac{I_c}{r} \cdot d\omega/dt$$

la ruota accelera se c'è differenza di tensione



$v_{fune} = v_{periferica\ ruota}$ l'attrito statico tende ad annullare il moto relativo dei corpi a contatto

$\longrightarrow V_{fune}(t) = \omega(t) \cdot r$

$\longrightarrow a = d\rho(t)/dt = d\omega/dt \cdot r = \alpha \cdot r$

a lineare fune   α angolare ruota

$$\longrightarrow \begin{cases} (T_A - T_B) = I_c/r \cdot a/r & + \\ P_A - T_A = M_A a & + \\ T_B - P_B = M_B a & = \end{cases} \longrightarrow P_A - P_B = \left(M_A + M_B + I_c/r^2\right)a \longrightarrow \boxed{a = g\left(\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + M_c/2}\right)}$$

caso ruota (cilindro) piena

Sostituisco in T_A e T_B:

$$\left[\begin{aligned} &T_A = M_A(g - a) = \dots \\ &T_B = M_B(a + g) = \dots \end{aligned}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &v = a \cdot t \\ &\underbrace{s = \tfrac{1}{2}at^2}_{\text{moto rettilineo uniformemente accelerato}} = h \longrightarrow t = \sqrt{2h/a} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{2ah}} = \text{velocità di impatto (= velocità sollevamento)}$$

$$= \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + I_c/r^2}}$$

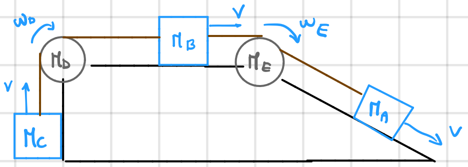
In assenza di attriti o forze non conservative c'è conservazione di energia meccanica:

$$E_{m_1} = U_A = M_A g h$$

$$E_{m_2} = U_B + K_B + K_C + K_A = M_B g h + \frac{1}{2} M_B v^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_C \omega^2}_{\frac{1}{2} I_c \frac{v^2}{r^2}} + \frac{1}{2} M_A v^2 = M_B g h + \frac{1}{2}\left(M_A + M_B + \underbrace{I_c/r^2}_{M_c/2 \text{ se ruota piena}}\right) v^2$$

$$E_{m1} = E_{m2} \longrightarrow v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + I_c/r^2}}$$ come trovato precedentemente

MACCHINE COMPLESSE



$$K_{sist.} = \frac{1}{2}(M_A + M_B + M_C) v^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_D^2 + \frac{1}{2} I_E \omega_E^2$$

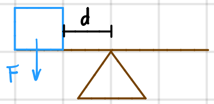
$$+ \frac{1}{2} \frac{I_D}{r_D^2} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \frac{I_E}{r_E^2} v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{M_A + M_B + M_C}_{\text{masse}} + \underbrace{\frac{I_D}{r_D^2} + \frac{I_E}{r_E^2}}_{\text{ruote}}\right) v^2$$

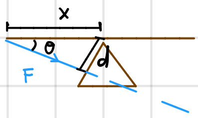
STATICA

La condizione di statica è:

$$\begin{cases} \vec{F}_{est} = m\vec{a}_c = 0 & \text{NO TRASLAZIONE} \\ M_a^{est} = I_a \alpha = 0 & \text{NO ROTAZIONE} \end{cases} \quad + \begin{cases} v_0 = 0 \\ \omega_0 = 0 \end{cases}$$

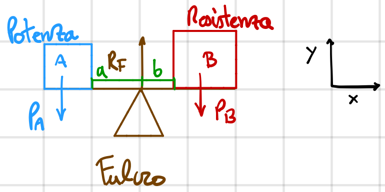


$M = F \cdot d$



$M = F \cdot d = F \cdot x \cdot \sin\theta$

LA LEVA



Statica:

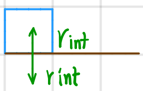
$\vec{F}_{est} = 0 \quad \begin{cases} y: R_F = P_A + P_B \\ x: / \end{cases}$

$M_F^{est} = 0 \rightarrow M_{P_A} + M_{P_B} = 0 \quad (M_F = 0)$

$P_A \cdot a - P_B \cdot b = 0 \longrightarrow \dfrac{P_B}{P_A} = \dfrac{a}{b} =$ Guadagno Meccanico

carico (P_B); forza applicata (P_A)

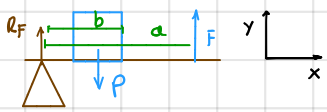
NB



Le forze normali sono interne e quindi non calcolate (idem per B)

Questo tipo di leva è detto di 1° genere: se $GM > 1$ vantaggiosa, se $GM < 1$ svantaggiosa

LEVA 2° GENERE



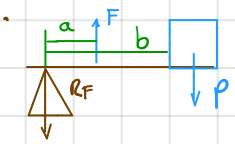
Statica:

$\vec{F}_{est} = 0 \quad \begin{cases} y: R_F = P - F \\ x: / \end{cases}$

$M_F^{est} = 0 \longrightarrow M_F + M_P = F \cdot a - P \cdot b = 0 \Rightarrow GM = P/F = a/b$

La leva di 2° genere è sempre vantaggiosa perché a è sempre maggiore di b

LEVA 3° GENERE



Il verso di R_F è contrario poiché in questo caso la leva è "saldata" al fulcro per non staccarsi (Si alzerebbe a sinistra altrimenti)

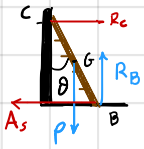
Statica:

$F_{est} \quad \begin{cases} y: R_F = F - P \\ x: / \end{cases}$

$M_F^{est} = F \cdot a - P \cdot b = 0 \longrightarrow GM = P/F = a/b$

La leva di 3° genere è sempre svantaggiosa perché $b > a$ sempre

SCALA



• Trovare θ_{max}

Statico:

$$F_{est} = 0 \quad \begin{cases} y: & -P + R_B = 0 \\ x: & R_C - A_s = 0 \end{cases} \qquad \text{OK} \qquad \begin{cases} R_B = P \\ A_s = R_C \end{cases}$$

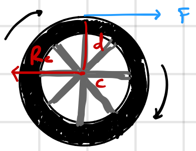
$$M_{est} = 0 \longrightarrow M_P + \cancel{M_{R_B}} + M_{R_C} + \cancel{M_{A_s}} = 0 \longrightarrow P\left(\tfrac{L}{2}\sin\theta\right) - R_C(L\cos\theta) = 0 \longrightarrow R_C(L\cos\theta) = P\left(\tfrac{L}{2}\sin\theta\right)$$

asse su B

$$R_C = \boxed{\frac{\cancel{P}}{2}\,tg\,\theta} = A_s \boxed{\leq} A_{max} = \mu_s R_B = \boxed{\mu_s \cancel{P}} \longrightarrow \mu_s \geq \frac{tg\,\theta}{2}$$

ROTAZIONE E ROTOTRASLAZIONE DELLA RUOTA

FISSA

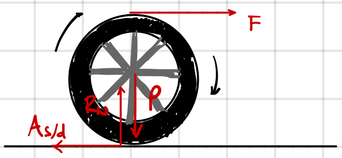


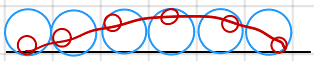
I eq. card: $\vec{F}_{est} = \vec{F} + \vec{R}_c = 0$

II eq. card: $M_{est} = F \cdot d + R_c \cdot 0 = I_c \cdot \alpha$ $\longrightarrow \frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{F \cdot d}{I_c}$ accelerazione angolare

$\longrightarrow \omega = \frac{F \cdot d}{I_c} \cdot t$ velocità angolare

ROTOLAMENTO



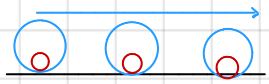


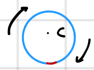
I eq card: $\vec{F}_{est} = m \cdot \vec{a}_c$ $\begin{cases} y: R_n - P = 0 \\ x: F - A = m a_c \end{cases}$

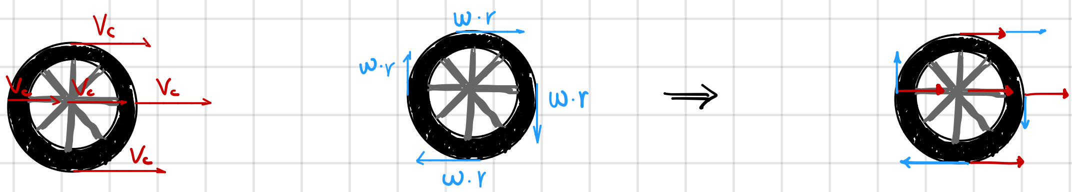
II eq. card: $M_{est} = I_c \cdot \alpha$ diversi perché F non è applicata sulla superficie

(c = centro massa) $M_A + M_F = I_c \cdot \alpha \longrightarrow A r + F d = I_c \cdot \alpha$

Vediamo il rotolamento come la combinazione di 1) pura traslazione e 2) pura rotazione

1) 

2)  fissa



L'attrito sarà di verso opposto al "vincente" tra le due velocità.

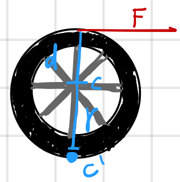
Se $\omega \cdot r = V_c$ parliamo di rotolamento

↳ derivando $\longrightarrow \alpha \cdot r = a_c$

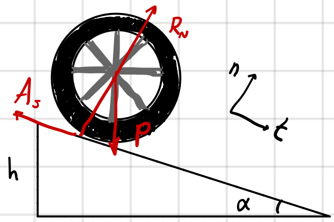
$\Rightarrow A_s r + F d = I_c \cdot \frac{a_c}{r} \longrightarrow A_s = \frac{I_c \cdot a_c}{r^2} - F\frac{d}{r}$

$\Rightarrow F - A_s = m a_c \Rightarrow F\left(\frac{d+r}{r}\right) = m a_c \left(1 + \frac{I_c}{m r^2}\right) \Longrightarrow a_c = \frac{F}{m}\left(\frac{d+r}{r}\right)\left(\frac{1}{1 + I_c/m r^2}\right)$

In alternativa è possibile calcolarla puntando l'asse nel punto di contatto con il terreno:



$F(d+r) = \overbrace{(I_c + m r^2)}^{\text{teo. H. Steiner}} \cdot \alpha \longrightarrow a_c = F(d+r)\left(\frac{r}{I_c + m r^2}\right)$ (equivalente alla precedente)



- Attrito richiesto
- Accelerazione sistema
- Velocità finale

I eq. card: $\begin{cases} n: R_v - P\cos\alpha = 0 \\ t: P\sin\alpha - A_s = m a_c \end{cases}$

II eq. card: (rispetto al centro) $\cancel{M_P} + \cancel{M_{R_v}} + M_A = I_c \cdot \alpha$

$A_s \cdot r = I_c \cdot \alpha$

condizione rotolamento $V_c = \omega \cdot r \longrightarrow a_c = \alpha \cdot r$

$\longrightarrow A_s = \frac{I_c}{r^2} \cdot a_c$

$\longrightarrow$ sostituisco A_s nella I eq. card $\longrightarrow a_c = \frac{g\sin\alpha}{1 + I_c/mr^2}$

$\longrightarrow A_s = \frac{I_c/mr^2}{1+I_c/mr^2} \cdot mg\sin\alpha \leq \mu_s R_v = \mu_s\, mg\cos\alpha \longrightarrow \boxed{\mu_s \geq tg\alpha \, \frac{I_c/mr^2}{1+I_c/mr^2}}$ il punto di contatto deve essere fermo!

$\begin{cases} v = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} a t^2 = h/\sin\alpha \longrightarrow t = \sqrt{2h/a\sin\alpha} \end{cases} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+I_c/mr^2}}$

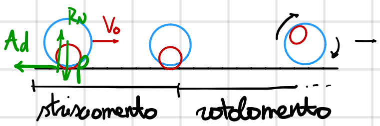
Usando l'energia:

$E_{m1} = mgh$

$E_{m2} = \underbrace{\frac{1}{2} m V_c^2}_{\text{trasl.}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_c \omega^2}_{\text{rotaz.}} \longrightarrow V_c = \omega r \longrightarrow E_{m2} = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}\frac{I_c}{r^2} V_c^2 = \frac{1}{2} m V_c^2 \Big(\underbrace{1}_{\text{tras.}} + \underbrace{\frac{I_c}{mr^2}}_{\text{rot.}}\Big)$

$E_{m1} = E_{m2} \longrightarrow V_c = \sqrt{\frac{2gh}{1+I_c/mr^2}}$

ES palla da Bowling



L'attrito è dinamico all'inizio!

I eq. card: $\begin{cases} y: R_v - P = 0 \\ x: -A_d = m a_c \end{cases} \longrightarrow a_c = -\mu_d g \longrightarrow V_{traslazione} = V_0 - \mu_d g t$

II eq. card: $M_A + \cancel{M_P} + \cancel{M_{R_v}} = I_c \cdot \alpha \rightarrow A_d \cdot r = I_c \cdot \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{\mu_d\, mg\, r}{I_c} \longrightarrow \omega = \alpha \cdot t + \cancel{\omega_0}$ nulla

$V_{rotaz.} = \omega r = \left(\frac{mr^2}{I_c}\right) \mu_d g t$

V_t diminuisce nel tempo, V_r cresce:

$V_r = V_t \longrightarrow t^* = \frac{V_0}{\mu_d g}\left(\frac{I_c}{I_c + mr^2}\right)$

$V_{rotolamento} = V_0 \left(\frac{mr^2}{I_c + mr^2}\right)$

I FLUIDI

Liquidi o gas

Pressione: è il rapporto tra la forza e la superficie su cui agisce $p = \frac{F}{S}$ $[Pa = N/m^2]$
NB la forza deve essere perpendicolare

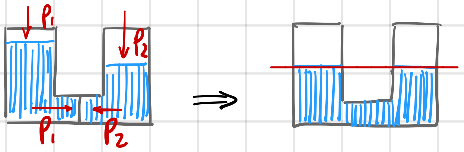
La pressione è uno scalare e non un vettore, che agisce uniformemente su tutta la superficie

Legge di Pascal: la pressione esercitata su qualsiasi superficie di un liquido si trasmette con lo stesso valore su ogni altra superficie a contatto con il liquido

Legge di Stevino: ogni liquido è soggetto alla forza-peso che determina una pressione. $P_L = g\,d\,h$ (d → densità, h → profondità)

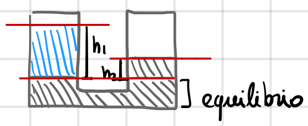
La pressione totale del liquido sarà $P = P_0 + g\,d\,h$ (P_0 → pressione atmosferica)

VASI COMUNICANTI



} stesso liquido

$P_1 > P_2$ $\qquad$ $P_1 = P_2$

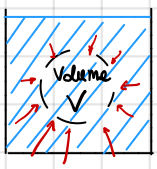


} Avendo densità diverse sarà necessario meno mercurio per compensare l'acqua → $h_1 > h_2$

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + d_1 g h_1 \\ P_2 = P_0 + d_2 g h_2 \end{cases} \rightarrow P_1 = P_2 \rightarrow d_1 h_1 = d_2 h_2 \rightarrow h_1/h_2 = d_2/d_1$$ (per liquidi diversi

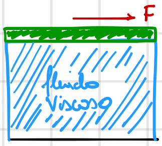
Spinta di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto di intensità pari al peso del volume del liquido spostato

$F_A = m_{fluido}\, g = d_f \cdot V \cdot g$



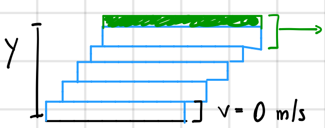
le forze "più in alto" sono minori di quelle "più in basso"

FLUSSO VISCOSO E COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ

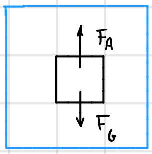


lastra di area A

$F = \eta \frac{A v}{y}$ (η → coefficiente viscosità)



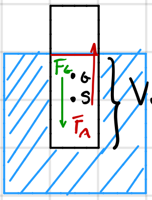
GALLEGGIAMENTO



$$F_G = mg = (d_{corpo} \cdot V)g$$
$$F_A = m_{fluido}\, g = (d_{fluido} \cdot V)g$$

$$\Big\}\ F_G - F_A = ma \rightarrow d_c \cancel{V} g - d_f \cancel{V} g = d_c \cancel{V} a \Rightarrow \quad a = g\left(\frac{d_c - d_f}{d_c}\right)$$

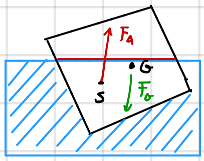
- $d_c - d_f > 0 \rightarrow a$ caduta
- $d_c - d_f < 0 \rightarrow a$ salita
- $d_c - d_f = 0 \rightarrow a = 0$ corpo fermo



G = baricentro totale

S = baricentro parte immersa

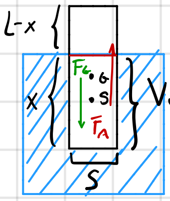
Vimm = Volume immerso



Oscillo tipo pendolo

$$F_G = mg = (d_c \cdot V)g$$
$$F_A = m_f \cdot g = (d_f \cdot V_{imm})g$$

$$\Big\}\ F_A = F_G \longrightarrow \frac{V_{imm}}{V} = \frac{d_c}{d_f}$$



Oscillo tipo molla ↑↓↑↓

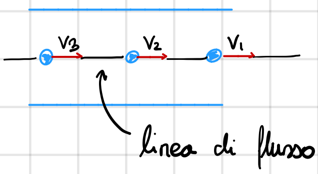
$$F_G = (d_c \cdot L \cdot s)g$$
$$F_A = (d_f \cdot x \cdot s)g$$

$$\Big\}\ \text{I eq. card}: F_G - F_A = ma \longrightarrow d_c L \cancel{S} g - d_f x \cancel{S} g = d_c \cancel{S} L \overbrace{a}^{m}$$

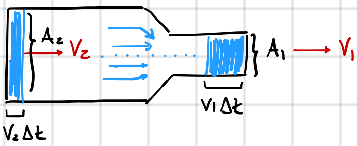
$$\longrightarrow d_c L g - d_f x g = d_c L \underbrace{d^2x/dt^2}_{a}$$

$$\longrightarrow d^2x/dt^2 + (d_f/d_c \cdot g/L)\, x = g$$

FLUIDODINAMICA



Portata: massa fluido che attraversa la sezione di un tubo in un secondo $[kg/s]$



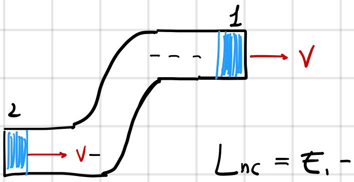
$$\Delta m = dV = dAv\Delta t$$

$$\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = d_2 A_2 V_2 = \text{portata } 2$$
$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = d_1 A_1 V_1 = \text{portata } 1$$

} nello stesso tempo (Δt) deve passare la stessa massa (Δm) in entrambe le sezioni

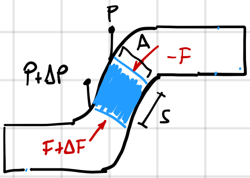
$\longrightarrow$ portata$_2$ = portata$_1$ equazione di continuità

d non può essere cambiata, solo A e v $\Rightarrow$ $Av = Q$ = portata del condotto $[m^3/s]$



Se c'è una differenza di quota tra le due sezioni, a quota maggiore avremo pressione minore

$$L_{nc} = E_1 - E_2 = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right) - \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right)$$



$$L = (\Delta F)s = (\Delta p)As = (p_2 - p_1)V$$

$$\Longrightarrow p_2 - p_1 = \left(\frac{1}{2}dv_1^2 + dgy_1\right) - \left(\frac{1}{2}dv_2^2 + dgy_2\right)$$

$$\longrightarrow p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 + dgy_1 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 + dgy_2 \quad \text{Equazione Bernoulli}$$

TERMOLOGIA E TERMODINAMICA

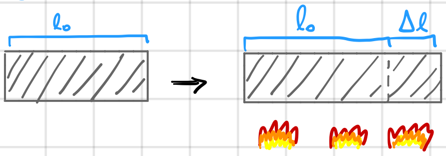
La temperatura è indice dello stato di agitazione termica dei corpi.

$0°C = 273.15$ Kelvin $- T_0$

$t + 273.15 = T$

DILATAZIONE

• lineare

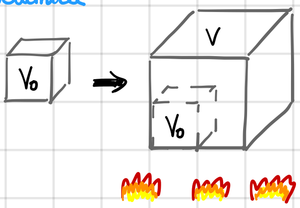


$$\Delta l = l_0 \lambda \Delta t$$

λ → coefficiente dilatazione lineare

Δt → variazione temperatura

• volumica

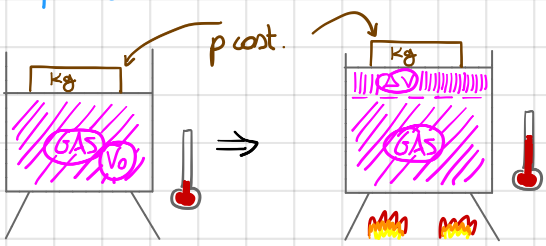


$$V = V_0(1+\alpha\Delta t)$$

α → coefficiente dilazione volumica

LO STATO DI UN GAS

• Trasformazione ISOBARA



I legge di Gay-Lussac

$$V = V_0(1+\alpha t) \Rightarrow V = V_0\left(\frac{\boxed{t+273.15}}{\boxed{273.15}_{T_0}}\right) \Rightarrow V = V_0\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

t in Kelvin

α → per i gas è sempre uguale di solito $3.66\times10^{-3} = \frac{1}{273.15}$

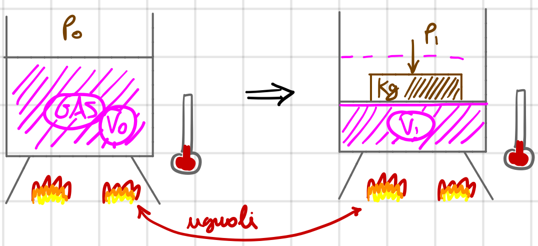
$$V/T = V_0/T_0 \qquad V = \frac{V_0}{T_0}T$$

V → V a temperatura T

V_0 → V a 273 K

T → temperatura gas

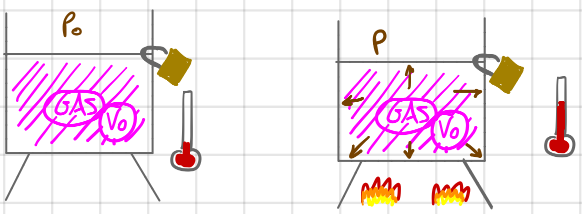
• Trasformazione ISOTERMA



Legge di Boyle

$$P_0V_0 = P_1V_1$$

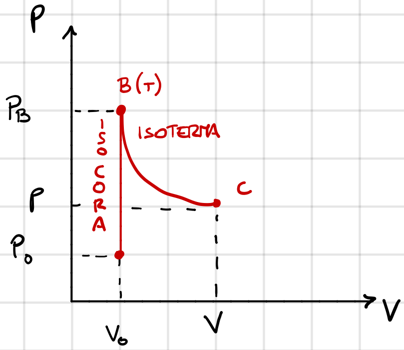
• Trasformazione ISOCORA



II legge di Gay-Lussac

$$P = P_0(1+\alpha t) \longrightarrow P = \frac{P_0}{T_0}T$$

GAS PERFETTO



$$\underbrace{\frac{P_B}{T} = \frac{P_0}{T_0}}_{\text{ISOCORA}} \qquad \underbrace{PV = P_B V_0}_{\text{ISOTERMA}}$$

$$\rightarrow PV = \left(\frac{P_0 T}{T_0}\right) V_0 \rightarrow \frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

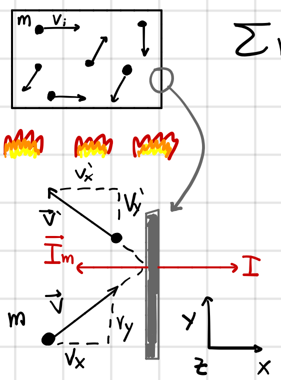
$P_0 = 1 \text{ atm} = 101300 \text{ Pa}$

$T_0 = 273.15 \text{ K}$

$V_0 (1 \text{ Kmole}) = 22.4 \text{ m}^3 \longrightarrow V_0 = \#_{\text{Kmole}} \cdot V_{\text{Kmole}} \Longrightarrow \overbrace{\frac{PV}{T} = \#_{\text{Kmole}} \cdot \left(\frac{P_0 V_{\text{Kmole}}}{T_0}\right)}^{\text{Eq. gas perfetti}} = \#_{\text{Kmoli}} \cdot R$

$\hookrightarrow R = 8314 \left[\frac{J}{\text{Kmole} \cdot K}\right]$ costante dei gas

TEORIA CINETICA DEI GAS



$\Sigma m \vec{V}_i$ = quantità di moto sistema $= 0 \longrightarrow \Sigma \vec{V}_i = 0$ (m uguale per tutte)

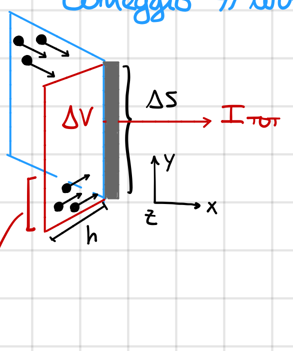
$$\vec{I} = -\vec{I}_m = -\Delta\vec{p} = m(\vec{v} - \vec{v}') \quad \begin{cases} x: I = m(v_x - \vec{v}_y) \\ y: v_y' = v_y \\ z: v_z' = v_z \end{cases}$$

Applicando la conservazione dell'energia: $\frac{1}{2} m (v_x^2 + \cancel{v_y^2} + \cancel{v_z^2}) = \frac{1}{2} m (v_x'^2 + \cancel{v_y'^2} + \cancel{v_z'^2}) \Rightarrow v_x^2 = v_x'^2$

$\Rightarrow$ dall'eq. su x capiamo che $v_x \neq v_x'$, ma essendo i loro quadrati uguali $\Longrightarrow v_x' = -v_x$

$x: I = m(v_x - v_x') = 2 m v_x$

Conteggio #urti su una parete ΔS in un intervallo Δt



$\Delta V = h \cdot \Delta S = v_x \Delta t \Delta S$ = volume delle molecole che contribuiscono all'urto

n = concentrazione $= N / \Delta V \longrightarrow N = \boxed{n(\vec{v})} \Delta V = n(\vec{v}) v_x \Delta S \Delta t$ = # molecole in ΔV

$\hookrightarrow$ a noi interessano solo quelle con una data $\vec{v}$, quelle dell'urto

$I(\vec{v}) = N \cdot I = 2 m n(\vec{v}) \cdot v_x^2 \cdot \Delta S \cdot \Delta t$

$I_{TOT} = 2m \cdot \underbrace{\left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2\right)}_{\text{tutti i "}\Delta V\text{" oltre a quello rosso}} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \longrightarrow$ tolgo le molecole "che hanno già sbattuto e stanno tornando indietro"

$\longrightarrow m \cdot \left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2\right) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$

$P = \frac{F_{TOT}}{\Delta S} = \frac{I_{TOT}}{\Delta S \Delta t} = m \left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2\right)$ = pressione sulla parete

$\overline{V_x^2}$ (media) = calcoli statistici = $\dfrac{\sum_v n(\vec v)\, v_x^2}{n}$ → concentrazione totale

$\longrightarrow \sum_v n(\bar v)\cdot V_x^2 = n\cdot \overline{V_x^2} \longrightarrow p = m\cdot n\cdot \overline{V_x^2}$

$\overline{V^2} = \overline{V_x^2} + \overline{V_y^2} + \overline{V_z^2} \longrightarrow \overline{V_x^2} = \overline{V_y^2} = \overline{V_z^2} = \overline{V^2}/3 \longrightarrow p = \frac{1}{3}\, m n \overline{v^2}$ → metto in evidenza l'energia cinetica $\longrightarrow p = \frac{2}{3}\overbrace{\left(\frac{1}{2} m\overline{v^2}\right)}^{K} n$

$\longrightarrow n = N/V \longrightarrow \boxed{p = \frac{2N}{3V}\left(\frac{1}{2} m\overline{v^2}\right)}$

$M_{TOT} = N\cdot m = n_{kmoli}\cdot M$ → massa 1 kmole $\longrightarrow pV = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} M_{TOT}\overline{v^2}\right) = \frac{1}{3}\, \cancel{n_{kmoli}}\, M\overline{v^2} = \cancel{n_{kmoli}}\cdot R\cdot T$

$\longrightarrow V$ = velocità quadratica media delle molecole $= \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

CALORIMETRIA

calore specifico

$[Q] = [c]\cdot m\cdot \Delta T$ $[Kcal]$ $1\ Kcal = 4186\ J \longrightarrow \Delta E = cm\Delta t$ $[J]$

calore assorbito

$C = cm$ = capacità termica $[J/K]$

Tra due oggetti con temperature diverse a contatto, quello a temperatura maggiore cede calore all'altro che lo assorbe fino ad una temperatura di equilibrio per entrambi.

es

$T_1 < T_e < T_2$

$Q_1 = c_1 m_1 (T_e - T_1)$ assorbe

$Q_2 = c_2 m_2 (T_e - T_2)$ cede

$\longrightarrow Q_1 + Q_2 = 0$ (in un sistema chiuso) $\longrightarrow \boxed{T_e} = \dfrac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$

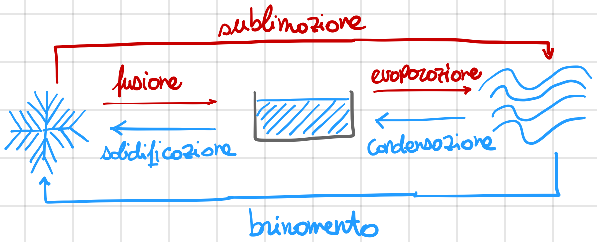
→ media pesata della capacità termica

In generale $\sum Q_i = 0$

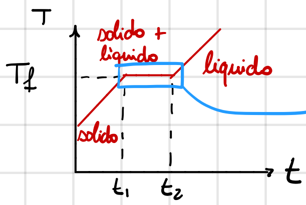
$\longrightarrow \sum c_i m_i (T_e - T_i) \Rightarrow \sum c_i m_i T_e = \sum c_i m_i T_i$

$\longrightarrow T_e = \sum c_i m_i T_i \,/\, \sum c_i m_i$

CALORE LATENTE



es fusione



→ calore latente: stessa temperatura fino a trasformazione completata

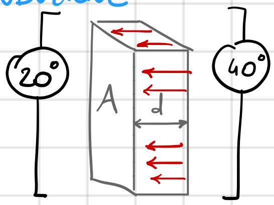
Q = calore necessario alla fusione $= \lambda_f\cdot m$

λ_v : evaporazione

PROPAGAZIONE DEL CALORE termica

- solidi → conduzione : trasmissione di energia ma non trasporto di materia
- fluidi → convezione : trasmissione di energia e trasporto di massa
- ✕ → irraggiamento : Trasmissione di energia elettromagnetica

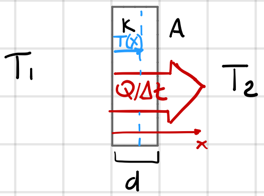
CONDUZIONE



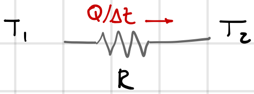
Legge di Fourier della conduzione : $Q = k \cdot \dfrac{A \cdot \Delta T \cdot \Delta t}{d}$

k → conducibilità termica $[W]$

Q → quantità calore che si propaga per conduzione

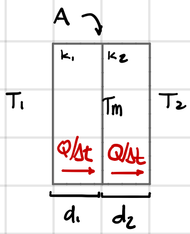


$$\underbrace{Q/\Delta t}_{\text{flusso termico}} = \left(k \cdot \frac{A}{d}\right) \Delta T$$



Legge di Ohm termica : $\Delta T = R\left(\dfrac{Q}{\Delta t}\right)$ Resistenza termica: $R = \dfrac{d}{k \cdot A}$

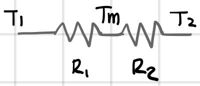
$$\left.\begin{aligned} Q/\Delta t &= \left(\frac{kA}{d}\right)(T_1 - T_2) \\ Q/\Delta t &= \left(\frac{kA}{x}\right)(T_1 - T(x)) \end{aligned}\right] \rightarrow \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{T_1 - T(x)}{x} \longrightarrow T(x) = T_1 - \left(\frac{x}{d}\right)(T_1 - T_2)$$

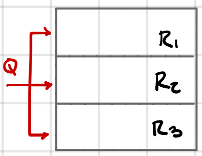


- $T_1 - \cancel{T_m} = R_1 \cdot (Q/\Delta t)$
- $\cancel{T_m} - T_2 = R_2 \cdot (Q/\Delta t)$

T_m e $Q/\Delta t$ incognite.

$$T_1 - T_2 = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{\text{resistenza termica IN SERIE}} (Q/\Delta t) \longrightarrow \frac{Q}{\Delta t} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2} \longrightarrow T_m = T_2 + R_2 (Q/\Delta t) = T_2 + \frac{R_2}{R_2 + R_1}(T_1 - T_2)$$

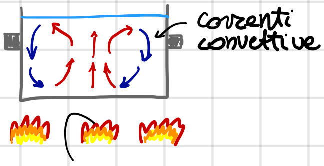




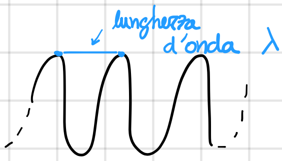
$$R_{TOT} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$ → resistenza termica IN PARALLELO

CONVEZIONE

Il fluido più caldo "sale" mentre quello più freddo "scende" poiché hanno rispettivamente densità più bassa e più alta

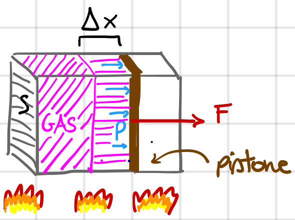


IRRAGGIAMENTO



$\lambda_{max} = \frac{2898}{T}$ micron Legge di Wien

LAVORO IN TERMODINAMICA

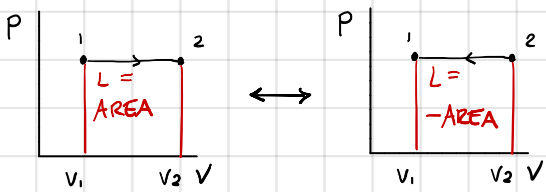


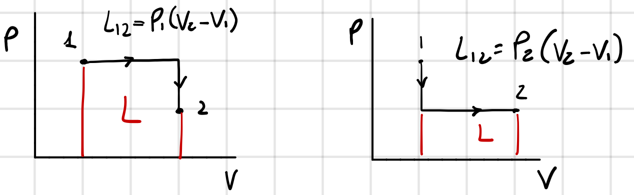
$L = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V$

dL = lavoro infinitesimo $= pSdx = p \cdot dV$

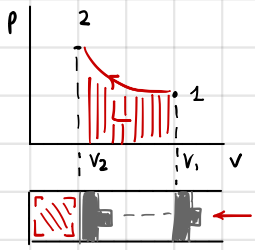
Se F "sposta" il pistone e quindi c'è aumento di volume si parla di lavoro positivo

Se invece F è "contraria" e il gas diminuisce di volume avremo lavoro negativo



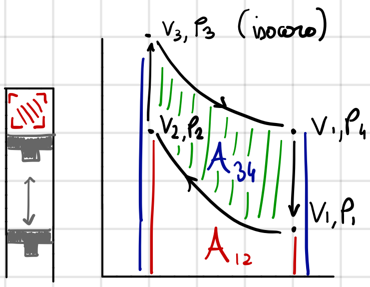


$\longrightarrow$ il lavoro dipende dal percorso



$L = \int_{V_1}^{V_2} PdV$

In un ciclo completo:

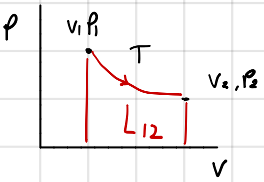


In compressione ho lavoro negativo $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = -A_{12}$

In decompressione ho lavoro positivo $L_{34} = \int_{V_2}^{V_1} PdV = A_{34}$

$\boxed{L_{TOT}} = A_{34} - A_{12} > 0$

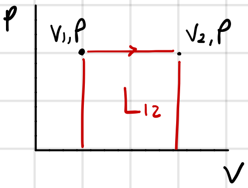
Lavoro in una trasformazione ISOTERMA per un gas IDEALE



$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$ in generale, ma $PV = \underbrace{n}_{\#\text{moli}} RT$ nei gas perfetti

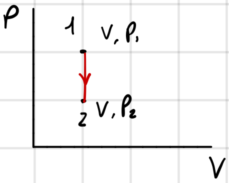
$\longrightarrow p = \frac{nRT}{V} \longrightarrow L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = \boxed{nRT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$

Lavoro in una trasformazione ISOBARA per un gas IDEALE



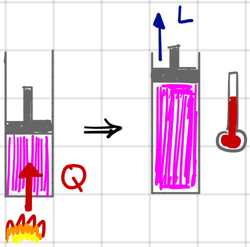
$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = p(V_2 - V_1) = \boxed{nR\Delta T}$

Lavoro in una trasformazione ISOCORA per un gas IDEALE



$L = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \boxed{0}$

I principio della termodinamica



$Q = \boxed{\Delta U} + L$ $\quad \rightarrow Q = C_v\,dT + p\,dV$ (gas perfetti)

$\hookrightarrow$ energia interna $\rightarrow$ proporzionale alla temperatura per gas perfetti

$dQ = dU + dL$ $\rightarrow$ forma differenziale

ISOCORA: $dQ_v = \overbrace{\boxed{C_v\,dT}}^{\Delta U} + \cancel{p\,dV}$ (V costante) $\rightarrow$ tutto il calore si "trasforma" in aumento di energia/temperatura

$\hookrightarrow$ calore specifico a volume costante $C_v = dQ_v/dT = n\,C_V$

$\hookrightarrow$ calore molare volume costante

ISOBARA: $dQ_p = \overbrace{\boxed{c_v\,dT}}^{\Delta U} + p\,dV \rightarrow pV = nRT \rightarrow p\,dV = nR\,dT \longrightarrow dQ_p = c_v\,dT + nR\,dT = \overbrace{(c_v + nR)}^{c_p}dT = c_p\,dT$

$c_p = dQ_p/dT = n\,C_p$

$\hookrightarrow$ calore molare pressione costante

ISOTERMA: $dQ = dL$ $\qquad \Delta U = 0$

GAS MONOATOMICO

energia traslazionale

$$U = K = \frac{1}{2} n M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} nRT \qquad \left(v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\right) \qquad = \underbrace{3 \cdot \left(\frac{1}{2} nRT\right)}_{\text{energia in 3 direzioni}}$$

peso molecolare

V media

n moli

3 gradi di libertà

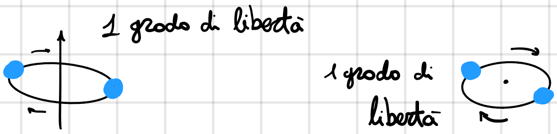
$$C_V = \frac{3}{2} R \qquad C_P = C_V + R = \frac{5}{2} R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{nC_P}{nC_V} = \frac{5}{3}$$

GAS BIATOMICI

1 grado di libertà

1 grado di libertà

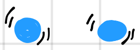


+ energia traslazionale (3 gradi di libertà)

energia rotazionale

$$U = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} nRT\right)$$

$$C_V = \frac{5}{2} R \qquad C_P = \frac{7}{2} R \qquad \gamma = 7/5$$



energia vibrazionale (trascurabile a basse temperature)

GAS TRIATOMICI

(Disegni complessi) $\longrightarrow$ 3 gradi libertà energia rotazionale + 3 gradi libertà energia traslazionale

$$U = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} nRT\right)$$

$$C_V = 3R \qquad C_P = 4R \qquad \gamma = \frac{4}{3}$$

II principio della termodinamica

Trasformazione ADIABATICA: non c'è scambio di calore

$$\cancel{dQ} = c_V dT + p dV \longrightarrow pV = nRT \longrightarrow Vdp + pdV = nRdT \rightarrow dT = \frac{Vdp + pdV}{nR} \longrightarrow \frac{c_V}{nR}(Vdp + pdV) + pdV = 0$$

$$\longrightarrow \frac{c_V}{nR} Vdp + \frac{c_V + nR}{nR} pdV = 0 \longrightarrow \frac{c_V}{nR} Vdp + \frac{c_p}{nR} pdV = 0 \longrightarrow Vdp + \overbrace{\boxed{\frac{c_p}{c_V}}}^{\gamma} pdV = 0 \xrightarrow{\frac{1}{pV}} \frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_V}\frac{dV}{V} = 0$$

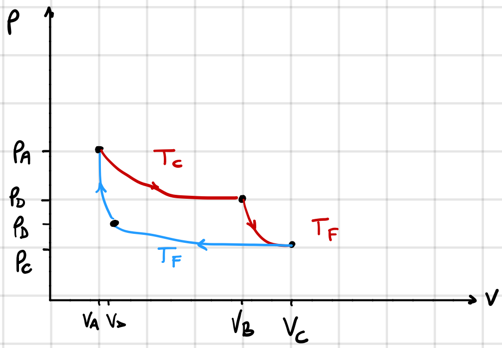
$$\int \longrightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \gamma \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0 \longrightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = 0 \longrightarrow \ln\left(\underbrace{\frac{p_2 V_2^{\gamma}}{p_1 V_1^{\gamma}}}_{=1}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_2 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}}$$

$U = n C_V \Delta T \qquad L = -U = -n C_V \Delta T$

CICLO DI CARNOT

1) Espansione isoterma
2) Espansione adiabatica
3) Compressione isoterma
4) Compressione adiabatica



1) $Q_C = Q_{AB} = L_{AB} = nRT_C \ln\left(V_B/V_A\right)$
2) $L_{BC} = -nC_V(T_F - T_C)$
3) $Q_F = Q_{CD} = L_{CD} = nRT_F \ln V_D/V_C$
4) $L_{DA} = -nC_V(T_C - T_F)$

$L_{TOT} = L_{AB} + L_{DA} = nRT_C \ln V_B/V_A + nRT_F \ln\left(V_D/V_C\right) \qquad$ con $\; V_B/V_A = V_C/V_D$

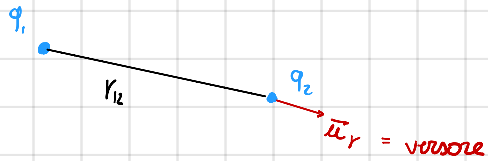
$\longrightarrow L_{TOT} = nR\ln\left(V_B/V_A\right)(T_C - T_F)$

$Q_C = nRT_C \ln\left(V_B/V_A\right)$

η = rendimento $= L_{TOT}/Q_C = 1 - T_F/T_C$

ELETTRICITÀ E MAGNETISMO

Elettrostatica : indipendenza dal tempo



LEGGE DI COULOMB : attrazione tra due cariche

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\cdot\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_r$$

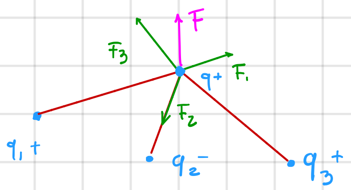
↳ fattore di proporzionalità = costante dielettrico del vuoto

Tale forza può essere sia attrattiva che repulsiva a secondo del segno delle cariche

- $q_1 \cdot q_2 > 0$ ⟶ forza repulsiva
- $q_1 \cdot q_2 < 0$ ⟶ forza attrattiva

$$\vec{F} \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_r$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



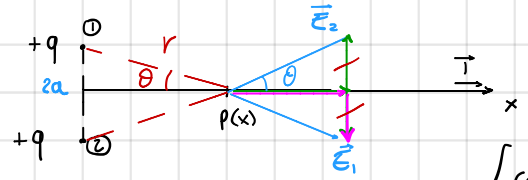
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_i^n \vec{F}_i$$

Tale forza dipende, oltre dalla carica stessa, anche dalla sua posizione!

⟶ dividendola per q tolgo la dipendenza dalla carica ⟶ $\vec{F}(x,y,z)/q$ = campo elettrico statico $\vec{E}$

In altri termini: se in un campo $\vec{E}$ generato da cariche, inserisco una carica di prova q si genera una forza data da $\vec{E}\cdot q$ su tale carica

ES



oppure $\vec{E}_2$

$$\vec{E}_{TOT} = |\vec{E}_{TOT}|\cdot\vec{i} = 2|\vec{E}_1|\cos\theta\cdot\vec{i}$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

$$\longrightarrow \vec{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r^2}\cdot\cos\theta\cdot\vec{i} \longrightarrow \begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ r^2 = (a^2+x^2)\end{cases} \longrightarrow \vec{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\cdot\vec{i}$$

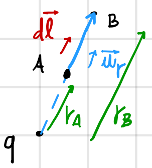
Il campo elettrostatico è conservativo!

$$\underbrace{\frac{L}{q}} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A - V_B \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

↳ Lavoro su una carica

$$\vec{E} = -\text{grad}\,V = -\vec{\nabla}V \qquad \left(\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= -\left[\frac{dV}{dx}\vec{i} + \frac{dV}{dy}\vec{j} + \frac{dV}{dz}\vec{k}\right]$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

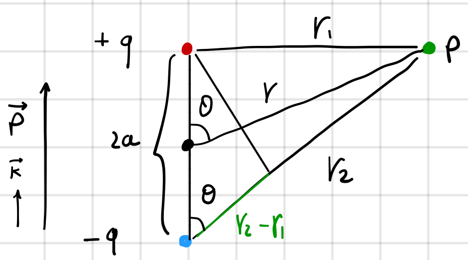
$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad d\vec{l} = dl\cdot\vec{u}_r$$

$$\longrightarrow V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\vec{u}_r\cdot \underbrace{dl}_{dr}\,\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{r}\right)\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$

$$r_B \to \infty \Rightarrow V_\infty = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_A}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$$



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

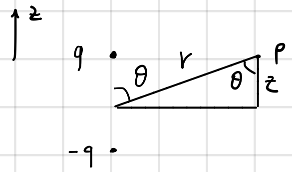
$r_1 < r < r_2$

Se P è molto lontano, i due angoli sono approssimativamente uguali.

$$\left\{\begin{array}{l} r_2 - r_1 = \quad \cos\theta \\ r_1 \cdot r_2 = r^2 \end{array}\right\} \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2aq\cos\theta}{r^2}$$

$\vec{p} = 2aq \cdot \vec{k}$ = momento di dipolo (dalla carica negativa a quella positiva)

$$\longrightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$



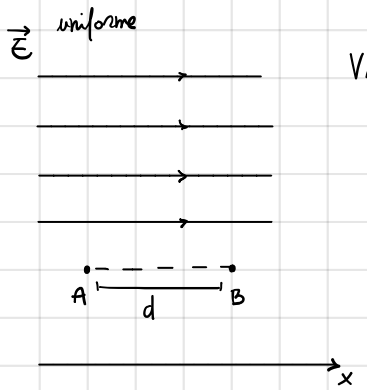
$z = r\cos\theta \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \cdot \frac{z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \underbrace{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$

↳ in coordinate cartesiane

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \cdot z \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left(-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x\right) = \boxed{\frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}}$$

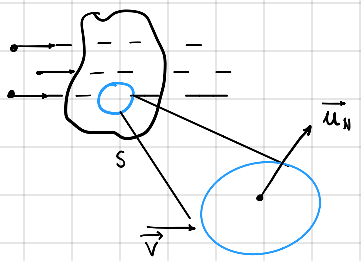
$E_y = \dots$

$E_z = \dots$



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E\,dl = E\int_A^B dl = E\int_{x_A}^{x_B} dx = E(x_B - x_A) = Ed$$

FLUSSO DI UN VETTORE

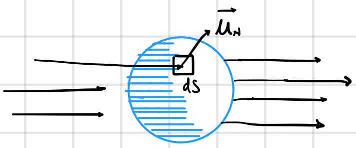


regione piano (dS)

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_N \, dS = d\Phi_v$$

$$\longrightarrow \Phi_v = \int \vec{v} \cdot \vec{u}_N \, dS$$

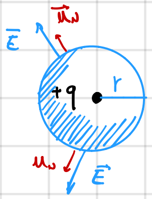
$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS$$



superficie chiusa

I flussi "uscenti" sono positivi, mentre quelli "entranti" negativi perché i vettori sono rispettivamente concordi e opposti al versore u_N $\longrightarrow \Phi = 0$

TEOREMA DI GAUSS

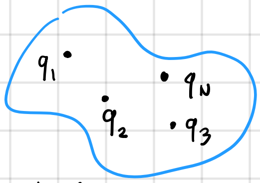


$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec u_N$$

$$\to \vec E\cdot \vec u_N = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

$$\to \Phi_E = \oint \vec E\cdot\vec u_N\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\overbrace{\oint dS}^{4\pi r^2\text{(sfera)}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

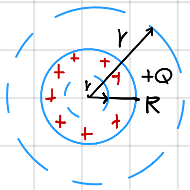
Questo teorema vale per qualunque superficie chiusa!



$$\to \boxed{\Phi_E = q_{TOT}/\varepsilon_0}$$

$q_{TOT} = \int_V \rho\, dV$ con ρ = densità di carica $\to \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$

– Sfera conduttrice uniformemente carica sulla superficie



$r < R \qquad \Phi_E = 0 = E(r)\cdot S$

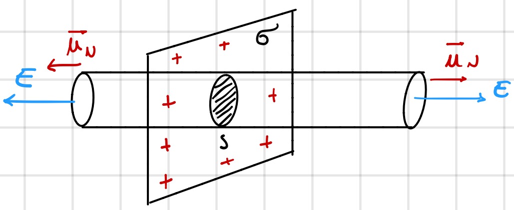
$r > R \qquad \Phi_E = \oint \vec E\cdot\vec u_N\, dS = E(r)\cdot 4\pi r^2 = Q/\varepsilon_0$

$$\to E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

In altre parole, fuori dalla sfera "vedo" un campo elettrico pari a quello di una carica puntiforme Q mentre all'interno è nullo.

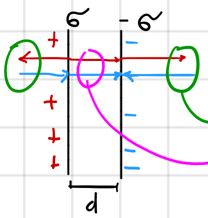
– Piano uniformemente carico

$\sigma = \frac{dQ}{dS}$ = densità superficiale di carica



$$\Phi_E = 2\int_S E\, dS = 2E\cancel{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sigma\cdot\cancel{S} \to E = \sigma/2\varepsilon_0$$

– Due piani uniformemente carichi paralleli



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

campo nullo

campo interno $= E_{INT} = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

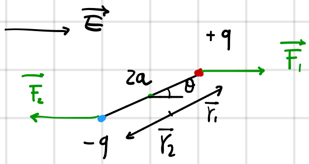
divergenza di $\vec{E}$ = $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ a differenza del gradiente, la divergenza è uno scalare

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \\ \vec{\nabla} &= \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Proprietà campo elettrico statico

- $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
- $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ = rotore di $\vec{E}$

"immergiamo" un dipolo in un campo elettrico $\vec{E}$: sulle cariche verranno esercitate delle forze prodotte dal campo elettrico



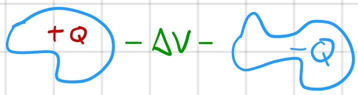
$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_1 &= q\vec{E} \\ \vec{F}_2 &= -q\vec{E} \end{aligned}\right\} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Si generano dei momenti di forze:

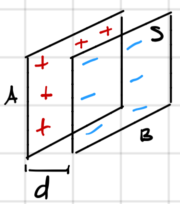
$$\left.\begin{aligned} |\vec{\tau}_1| &= |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = aqE\sin\theta \\ |\vec{\tau}_2| &= aqE\sin\theta \end{aligned}\right\} |\tau| = 2aqE\sin\theta = \underbrace{p}_{\text{momento dipolo}}E\sin\theta$$

CONDENSATORE

Un qualunque "sistema" in cui ci siano due conduttori carichi con una differenza di potenziale tra di essi.



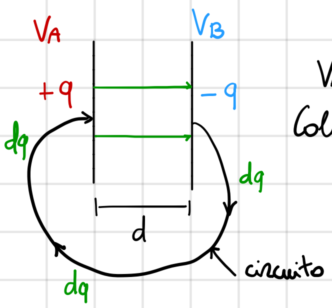
$Q/\Delta V$ = costante = C = capacità



$C = Q/\Delta V$

$\Delta V = \int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot d \longrightarrow Q = \sigma S$

$\Rightarrow C = \varepsilon_0 S/d$ (condensatore piano)



$V_A - V_B = E\cdot d > 0 \longrightarrow V_A > V_B$

Colleghiamo la piastra B ad A e carichiamo il condensatore:

$+q \longrightarrow +q + dq$

$-q \longrightarrow -q - dq$

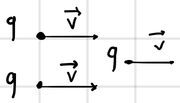
Poiché dq va da una zona a potenziale minore ad una con potenziale maggiore esercita un lavoro! ("controcorrente")

$$dL = (V_A - V_B)\,dq \qquad V_A - V_B = q/C \quad \Big\} \quad dU = dL = \frac{q\,dq}{C} \longrightarrow U = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$$ Energia Potenziale

u = densità energia $= \dfrac{U}{\text{Volume}} = \dfrac{1}{2}CV^2 \cdot \dfrac{1}{S \cdot d} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (Valido per qualunque volume, non solo $S \cdot d$)

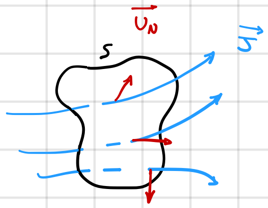
CORRENTE ELETTRICA: cariche in movimento. Con velocità molto inferiori a quella della luce, le regole viste fino ad ora sono ancora valide

i = corrente $= dq/dt$ (cariche "passanti" in una sezione di conduttore in un intervallo di tempo

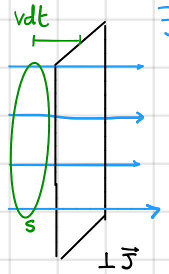


n = # particelle per unità di volume

$\vec{J} = nq\vec{v}$ = densità di corrente



$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u}_N\, dS = dq/dt$$



$\vec{J}$ uniforme

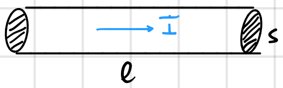
$\vec{J} \parallel \vec{u}_N \to J$

$$\longrightarrow dq/dt = JS = nqvS \longrightarrow dq = nq\boxed{Sv\,dt}$$

Volume

Legge di Ohm: $\Delta V = V = IR$

R = resistenza $= \dfrac{\ell}{S} \cdot \rho$ [ℓ = lunghezza conduttore S = sezione ρ = resistività]



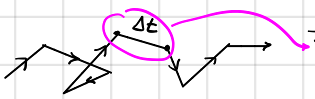
$V = IR$

$V = Ed = E\ell \qquad I = JS \qquad R = \rho \cdot \dfrac{\ell}{S}$

$$\longrightarrow E\cancel{\ell} = J\cancel{S} \cdot \rho \cdot \cancel{\ell}/\cancel{S} \longrightarrow E = \rho J \qquad (\vec{E} = \rho\vec{J})$$

Alternativamente: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ con $\sigma = 1/\rho$ = conducibilità

Il moto di un elettrone all'interno di un conduttore è irregolare e composto da una serie di urti



carica elettrone

$$\vec{V} = \vec{V}_0 - \left[\frac{e}{m}\vec{E}\,\Delta t\right]$$ accelerazione

massa

Δt medio $= \tau \longrightarrow \vec{V}_{media} = \vec{V}_{0\,medio} - \dfrac{e}{m}\vec{E}\tau$

$\vec{V}_0$ medio può considerarsi nullo perché V_0 è totalmente casuale

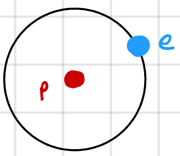
$$\longrightarrow \vec{V}_{media} = \boxed{\vec{V}_{deriva} = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau} \longrightarrow \vec{J} = -ne\vec{V}_d = \underbrace{\boxed{\frac{ne^2}{m}\tau}}_{\sigma}\cdot\vec{E}$$

P = potenza $= \vec F \cdot \vec V_d = -e\vec E \cdot \vec V_d$ singolo elettrone

P_{vol} = potenza per unità di volume $= -ne\vec E \cdot \vec V_d = \vec J \cdot \vec E = JE$ (se //)

$P_{TOT} = P_{vol} \cdot S \cdot \ell = \overbrace{JS}^{I}\underbrace{EL}_{V} = IV$ Legge di Joule $\quad V = IR \longrightarrow P = I^2R$

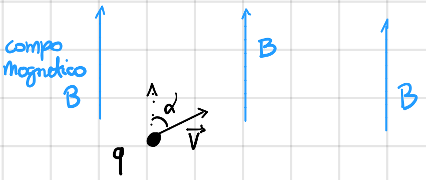
CAMPO MAGNETICO STATICO



$\bullet F_e \simeq 8.1 \cdot 10^{-8}\,N$

$\bullet F_g \simeq 3.7 \cdot 10^{-47}\,N$ $\rightarrow$ le forze gravitazionali sono trascurabili (nei nostri casi)

Diamo per scontato la natura del campo magnetico (per ora) e immergiamoci una carica di prova: se la carica è in quiete non accade nulla, se invece ho uno suo velocità iniziale avremo vari effetti.



$\vec F = q\vec v \times \vec B$ = Forza di Lorentz

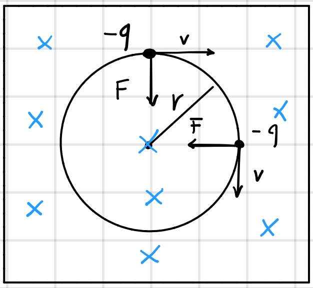
$|F| = qvB\sin\alpha$

$\vec F \perp \vec v \longrightarrow dL = \vec F \cdot d\vec\ell = \vec F \cdot \vec v\,dt = 0 \longrightarrow L = 0 \longrightarrow K_q$ non cambia!

Essendoci una forza avremo un'accelerazione che modificherà $\vec V$, ma K = costante $\sim v^2$

$\rightarrow$ l'accelerazione cambia $\vec V$ ma non il suo modulo! (forza centripeta)

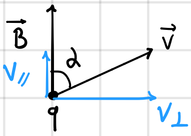
ES



Piano con campo magnetico entrante, $r = \frac{mv}{eB}$, $v = \omega r \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$

$F = \overbrace{evB}^{v \perp B} = \frac{mv^2}{r}$

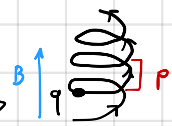
Se $\vec B$ e $\vec v$ non sono $\perp$:



Scomponendo in $V_{//}$ e $V_\perp$ possiamo calcolare che "$F_{//}$" è nulla ($\sin\alpha = 0$) e rimane $F_\perp$

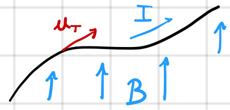
$r = \frac{mV_\perp}{qB} \qquad \omega = \frac{V_\perp}{r} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{V_\perp}$

$\Longrightarrow$ Il campo modifica $V_\perp$ in direzione, ma non in modulo e lascia invariata $V_{//}$ $\Longrightarrow$



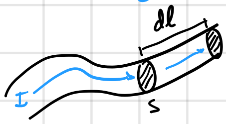
Passo $p = V_{//} \cdot T = V_{//} \cdot \frac{2\pi}{V_\perp} r = V_{//} \cdot \frac{2\pi}{V_\perp} \cdot \frac{mV_\perp}{qB} = \frac{2\pi m V_{//}}{qB}$

Applichiamo un campo magnetico su di un conduttore in cui sta scorrendo una corrente I



f_1 = forza magnetica su un singolo elettrone $= -e\vec{v} \times \vec{B}$

$f_{vol} = n f_1 = \underbrace{-ne\vec{v}}_{\vec{J}} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}$



$dV = S\,dl \longrightarrow dF = \vec{J} \times \vec{B}\,S\,dl$

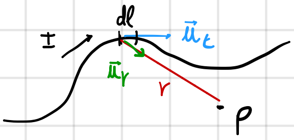
flusso

$\vec{J} = J \cdot \vec{u}_t \longrightarrow \vec{J}dl = J\,\vec{u}_t\,dl = J\,d\vec{l} \longrightarrow dF = \overline{JS}\,d\vec{l} \times \vec{B} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$

$\longrightarrow F = I \cdot \int_l d\vec{l} \times \vec{B}$

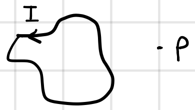
Un campo magnetico $\vec{B}$ è generato da correnti stazionarie.

Considerando un conduttore in cui scorre una corrente stazionaria e un punto P esterno

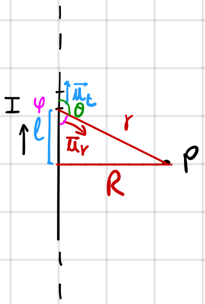


$d\vec{B} \sim I \dfrac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} dl$ Formula di Ampere-Laplace

$= \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \dfrac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} dl \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\dfrac{T \cdot m}{A}\right]$



$\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \oint \dfrac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} dl$ calcolo molto complesso!



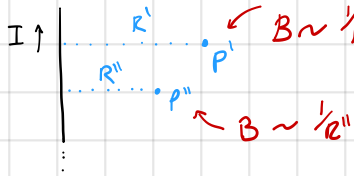
A seconda di quale dl prendiamo variano solo r, $\vec{u}_r$ e θ

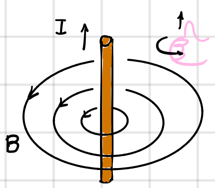
$B = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin\theta}{r^2} dl \qquad |\vec{u}_t| \cdot |\vec{u}_r| \cdot \sin\theta$ (with $|\vec{u}_t| = 1$, $|\vec{u}_r| = 1$)

$R = r\sin\varphi \longrightarrow \varphi = \pi - \theta \longrightarrow R = r\sin\theta$

$l = R\cot\varphi \longrightarrow dl = -R/\sin^2\varphi \; d\varphi = R\,d\theta/\sin^2\theta$

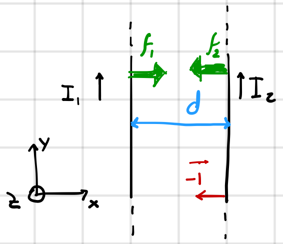
$\Longrightarrow B = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \displaystyle\int \dfrac{\sin\theta}{R^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\sin^2}\theta \cdot \dfrac{\cancel{R}}{\cancel{\sin^2\theta}} \cdot d\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{R} \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = \boxed{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}}$





(Regola mano destra)

Legge di Biot-Savart: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_t$



$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \qquad d\vec{l}_1 = dl_2 \cdot \vec{J}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\vec{k})$$ indica il verso entrante delle linee di flusso del campo B_1, mano destra)

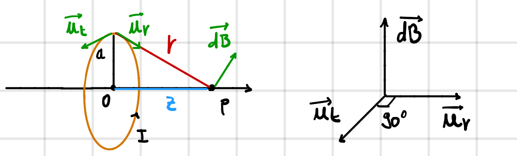
$$\longrightarrow \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int \vec{J} \times (-\vec{k})\, dl_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int dl_2 \cdot \vec{i} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot L_2 \cdot \vec{i}$$

$$\vec{f}_2 = \vec{F}_2 / L_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{i}$$

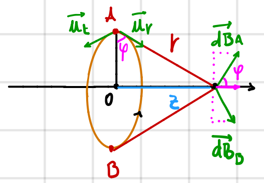
Analogamente: $\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot L_1 \cdot \vec{i} \longrightarrow f_1 = -f_2 \longrightarrow$ i due conduttori si attraggono!

Se le correnti sono discordi le forze saranno invece di tipo repulsivo

CAMPO MAGNETICO SULL'ASSE DI UNA SPIRA



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\overbrace{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}^{1}}{r^2} dl \longrightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} dl$$



Presi due punti simmetrici rispetto all'asse le componenti "verticali" di $d\vec{B}$ si annullano: basta calcolare le componenti parallele a z.

$$\longrightarrow dB_{\parallel} = dB \cos\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{1}{r^2} \boxed{\frac{a}{r}} dl \quad \cos\varphi$$

$$\longrightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{r^3} dl$$

circonferenza

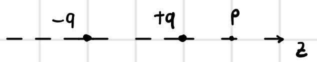
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{a}{r^3} \boxed{\oint dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{r^3} \cdot \boxed{2\pi a} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} \longrightarrow r = \sqrt{a^2 + z^2} \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{(in funzione di } z)$$

Per $z = 0 \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

Per $z \gg a \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{2 z^3} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 I S}{z^2}$ $\quad S \to \pi a^2$

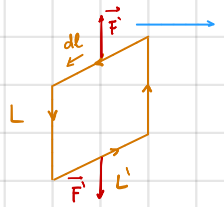
Introduciamo $m = I \cdot S =$ modulo momento dipolo elettrico $\longrightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m}{z^3}$

simili



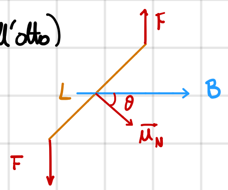
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p}{z^3}$$

Supponiamo una spira rettangolare



$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}$ Poiché dl e B sono sempre $\perp$ $\longrightarrow F' = IBL'$

(dall'alto)



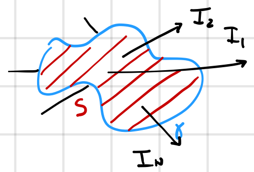
Il modulo delle forze sui lati sarà analogo, ma cambierà il verso

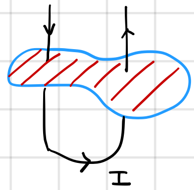
$F = IBL$

A differenza del caso precedente, le due forze non sono sulla stessa direzione e generano quindi un momento.

$$\tau_1 = F \frac{L'}{2} \sin\theta = \tau_2 \longrightarrow \tau = \overbrace{I \underbrace{B L L'}_{S}}^{m} \cdot \sin\theta = mB\sin\theta \qquad \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{con } \vec{m} = IS\vec{u}_N$$

Legge di circuitazione: $\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$
$= \mu_0 (I_1 + I_2 + \dots I_N)$



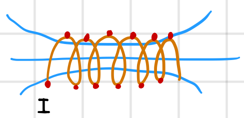


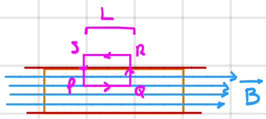
$\oint_\gamma \vec{B}\, d\vec{l} = 0$ ciò non implica che $\vec{B}$ sia nullo!

$\mu_0 I = \mu_0 \int \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, dS$ Legge di Ampere: $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int \vec{J}\cdot\vec{u}_n\, dS}$ → flusso densità di corrente

Nel caso del campo elettrico:
$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ sempre se $\vec{E}$ statico → $\text{rot}\,\vec{E} = 0$
mentre per il campo magnetico
$\text{rot}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \neq 0$ → Al contrario del campo elettrico, il rotore del campo magnetico è nullo solo se non sono presenti correnti ($\vec{J}$) → $\vec{B}$ non è conservativo

Calcolo campo magnetico di un solenoide rettilineo indefinito con la legge di Ampere





$\oint_{\text{rett.}} \vec{B}\cdot d\vec{l}$:
- lato SR → campo nullo
- metà superiore lati SP e RQ → campo nullo

} più o meno!

- metà inferiori lati SP e RQ → $d\vec{l} \perp \vec{B}$ → $\int B \cdot dl = 0$
- lato PQ → ok

$\Rightarrow \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{PQ} B\, dl = B \int_{PQ} dl = BL$ per la legge di Ampere → $BL = \mu_0 I_{TOT}$

$I_{TOT} = N \cdot I$ con $N = \#$ spire in L → $B = \mu_0 \frac{N}{L} \cdot I = \mu_0 n I$ ($n = N/L$)

$\oint \vec{E}\cdot\vec{u}_N\, dS = q_{int}/\varepsilon_0$ → $\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ legge di Gauss per il campo elettrico / 1^ Eq. di Maxwell

$\oint \vec{B}\cdot\vec{u}_N\, dS = 0$ → $\text{div}\,\vec{B} = \vec{\nabla}\vec{B} = 0$ Legge di Gauss per il campo magnetico / 2^ Eq. di Maxwell

S chiusa

$\text{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ → il campo ammette sorgenti puntiformi (le cariche)
$\text{rot}\,\vec{E} = 0$ → campo conservativo
$\text{div}\,\vec{B} = 0$ → non esistono cariche magnetiche
$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ → non conservativo

→ campo solenoidale

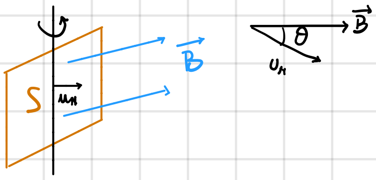
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$ tra due punti A e B

in un circuito chiuso invece: $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = V_\varepsilon$ = Forza elettromotrice indotta. Per campi conservativi $V_\varepsilon = 0$

Si è notato però che la forza elettromotrice e quindi il passaggio di corrente è generato dal cambiamento repentino nel tempo del flusso elettrico del circuito ed è proporzionale alla rapidità di variazione nel tempo

Legge di Faraday - Henry: $V_\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u_N}\, dS$

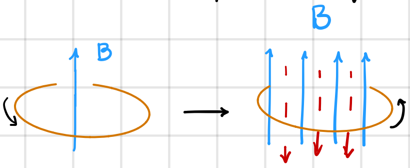


Supponiamo che l'angolo vari nel tempo $\theta = \omega t$

$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{u_N}\, dS = BS\cos\omega t$

$\longrightarrow V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BS\omega \sin\omega t$

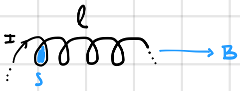
NB. Il segno negativo indica che la corrente indotta genera un campo magnetico secondario che tende ad opporsi al cambiamento del flusso del campo magnetico principale



Forma alternativa legge Faraday - Henry: $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u_N}\, dS$

L = coefficiente di autoinduzione $= \Phi_B / I$

Es



$B = \mu_0 \cdot n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$

$\Phi_B^1 = B \cdot S = \mu_0 n I S$

$\Phi_B = N\Phi_B^1 = \mu_0 n I N S = \mu_0 n^2 I l S \longrightarrow L = \Phi_B / I = \mu_0 n^2 l S \longrightarrow \frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S$ (per unità di lunghezza)

$\Phi_B = LI \rightarrow V_\varepsilon = -d\Phi_B/dt = -\frac{d}{dt}(LI)$

se L = costante $\longrightarrow V_L = -L\, dI/dt$ = forza elettromotrice autoindotta

$V_{TOT} = V(\text{generatore}) + V_L = RI \longrightarrow V - L\frac{dI}{dt} = RI \rightarrow I\, V = L\, dI/dt + RI\, I$

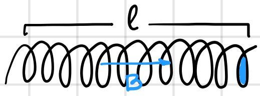
?

$\longrightarrow \underline{VI} = \boxed{LI\, dI/dt} + RI^2$ — potenza necessaria a far fluire la corrente

$\hookrightarrow$ potenza consumata dal generatore

$\Rightarrow$ potenza che il generatore spende per produrre il campo magnetico autoindotto

$\longrightarrow dU_B/\cancel{dt} = LI\, dI/\cancel{dt} \longrightarrow \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^I LI\, dI \longrightarrow U_B = \frac{1}{2}LI^2$ = energia prodotta nel circuito



$B = \mu_0 n I$ $\qquad$ $L = \mu_0 n^2 S \ell$

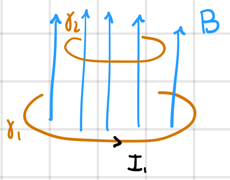
$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S \ell I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \underbrace{S\ell}_{\text{volume}}$ $\longrightarrow$ u_B = densità di energia $= \frac{U_B}{S\ell} = \frac{1}{2}\mu_0 \overbrace{n^2 I^2}^{B/\mu_0 = nI} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{B^2}{\mu_0^2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Dove è presente un campo magnetico è presente anche una densità di energia, in qualunque caso data da questa formula.

$\longrightarrow U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dv$

Analogamente: $U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 dv$

Mutua Induttanza



$\Phi_{2,1}$ = flusso 1 nel circuito 2 $= M \cdot I_1$

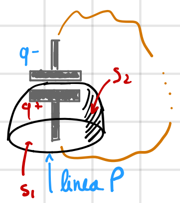
$\Phi_{1,2} = M I_2$

M = coefficiente di mutua induzione $= \frac{\Phi_{21}}{I_1}$

Da questo deriva la forza elettromotrice di mutua induzione $V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u}_n \, dS$ $\longrightarrow$ forma differenziale: $\text{rot}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$



In questo caso prendendo prima una superficie e poi l'altra otteniamo due risultati differenti con la legge di Ampere

Maxwell ha modificato la formula nel seguente modo: $\oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = \mu_0 (I + ?)$

Maxwell aggiunse a I una $I_s = I$ di spostamento $= \varepsilon_0 \, {}^{d}\!/\!_{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS$ che tiene conto dei "cambiamenti" (differente S_1 e S_2)

$\oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_s)$ Legge di Ampere - Maxwell

$= \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS + \varepsilon_0 \mu_0 \, {}^{d}\!/\!_{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS$ $\Rightarrow$ Un campo magnetico è generato da correnti e campi elettrici variabili nel tempo

$\text{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

Riepilogo Equazioni di Maxwell

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ 3) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt}$

2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ 4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{dt}$

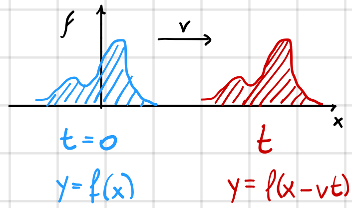
Possiamo notare quindi che campo elettrico e magnetico sono "collegati" tra loro e cominciamo a parlare di campo elettromagnetico

Nel vuoto, quindi dove non vi sono cariche e correnti, diventano ancora più simmetriche:

- $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$

ONDE

É una perturbazione che si propaga nel tempo.

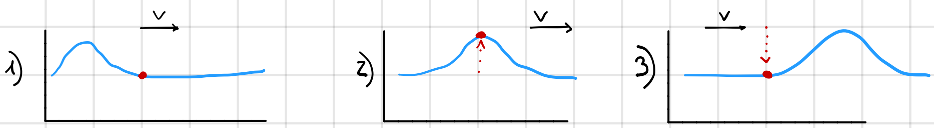


Il segno negativo descrive un'onda progressiva

I segno positivo descrive un'onda regressiva

$s(x,t)$ = perturbazione $= f(x-vt) + f_2(x+vt)$

A differenza di altri tipi di onde, quelle elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto senza spostamento di materia nella direzione dell'onda stessa (onde trasversali)



Eq. delle onde: $\frac{\partial^2 s}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 s}{dx^2}$ $u = x \pm vt$

DIMOSTRAZIONE:

$ds/dt = ds/du \cdot du/dt \longrightarrow du/dt = \pm v \longrightarrow ds/dt = \pm v \, ds/du$

1) $d/dt = d/du \cdot du/dt \Rightarrow \pm v \, d/du \left[\pm v \, ds/du\right] = \boxed{v^2 \, d^2s/du^2}$

2) $ds/dx = \frac{ds}{du} \cdot \underbrace{du/dx}_{1} = ds/du$

$d/dx = d/du \cdot du/dx \Rightarrow d/du \left[ds/du\right] = \boxed{\frac{d^2 s}{du^2}}$

$s(x,t)$ è una soluzione generale dell'equazione!

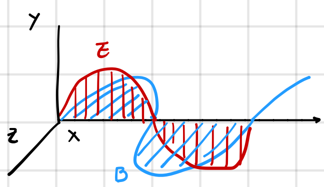
$s(x,t) = a \sin\left[k(x-vt)\right]$

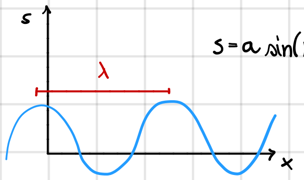
$ds/dx = ka \cos\left[k(x-vt)\right]$ $ds/dt = -vka \cos\left[k(x-vt)\right]$

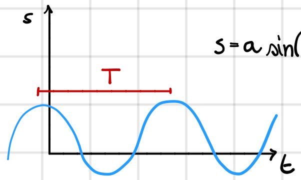
$d^2s/dx^2 = -k^2 a \sin\left[k(x-vt)\right] \longrightarrow \cdot v^2 \longrightarrow$ $d^2s/dt^2 = -v^2 k^2 a \sin\left[k(x-vt)\right] = v^2 \, d^2s/dx^2$ soluzione Armonica

$\longrightarrow s(x,t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx + \omega t)$ con $v = \omega / k$

$$\left.\begin{array}{l} E = E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B = B_0 \sin(kx - \omega t) \end{array}\right\} \text{ortogonali tra loro}$$



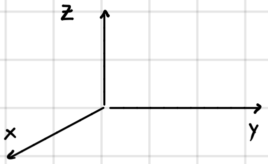




s è periodica sia nel tempo che nello spazio

$s = a\sin(kx-\omega t)$ nel punto $\underbrace{x' = x+\lambda}_{\text{periodicità}}$ $\longrightarrow s = a\sin(kx+k\lambda-\omega t) = a\sin(kx-\omega t) \longrightarrow k\lambda = 2\pi \longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Analogamente si può dimostrare che $\omega = 2\pi/T = 2\pi\,\nu \longrightarrow$ frequenza $= 1/T$



$\vec{E} = \vec{E}_y$

$\vec{B} = \vec{B}_z$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \longrightarrow dE_y/dy = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \longrightarrow dB_z/dz = 0$

Componente z $\mathrm{rot}\,\vec{E} = dE_y/dx - \cancel{dE_x}^{0}/dz = -dB_z/dt$ • $\quad (dE_y/dz = 0)$

Componente y $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\cancel{dB_x}^{0}}{dz} - \frac{dB_z}{dx} = \mu_0\varepsilon_0\, dE_y/dt$ • $\quad (dB_z/dy = 0)$

vedi formula completa rotore

- Deriviamo nuovamente rispetto spazio : $\frac{d^2E_y}{dx^2} = -\frac{d^2B_z}{dx\,dt}$
- Deriviamo nuovamente rispetto al tempo : $-\frac{d^2B_z}{dx\,dt} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2E_y}{dt^2}$

$\longrightarrow \frac{d^2E_y}{dx^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2E_y}{dt^2}$ (stessa cosa valida per B_z)

In generale:

- $\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = \boxed{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{d^2\vec{E}}{dx^2}$
- $\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = \boxed{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{d^2\vec{B}}{dx^2}$ $\quad (v^2)$

$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = v = c$ velocità della luce nel vuoto

Se non siamo nel vuoto, ma in un mezzo materiale:

$\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

$\mu_0 \longrightarrow \mu = \mu_0\mu_r$

$\longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ = indice di rifrazione

È possibile verificare che $\frac{dE_y}{dx} = -\frac{dB_z}{dt} \longrightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$

dalla soluzione armonica:

$$\left.\begin{array}{l} dE/dx = E_0 k\cos(kx-\omega t) \\ dB/dt = -B_0\omega\cos(kx-\omega t) \end{array}\right\} \longrightarrow E_0 k\cos(kx-\omega t) = B_0\omega\cos(kx-\omega t) \longrightarrow E_0 = \frac{\omega}{k}B_0 = cB_0 \longrightarrow \boxed{E = cB}$$

u_e = densità di energia $= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$E = cB \longrightarrow u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{E^2}{c^2}$

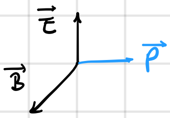
$c^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\right)^2 \longrightarrow u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2$

L'energia di un onda elettromagnetica è equipartita tra campo elettrico e magnetico!

I = intensità di un onda $= v \cdot u = c \cdot u_{em} = c\varepsilon_0 E^2$
$\bar{I}$ = intensità media $= c\varepsilon_0 E_0^2 \, \overline{\sin^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$

Vettore di Poynting

$\vec{P} = c^2 \varepsilon \, \vec{E} \times \vec{B}$



$|\vec{P}| = c^2 \varepsilon_0 E B \underbrace{\sin(90°)}_{1} = c^2 \varepsilon_0 E B = c^2 \varepsilon_0 \, E^2/c = c\varepsilon_0 E^2$