A.1 Misure:

Una classe di elementi identifica una grandezza fisica se per tutti gli enti che la compongono:
1) é possibile stabilire senza possibilitá di equivoci la validitá dei principi di uguaglianza e somma
2) se é possibile fissare un'unita di misura

Alcune grandezze dette scalari sono determinate dal numero mentre altre dette vettoriali richiedono la determinazione di una direzione e di un verso

A.2 Grandezze Fondamentali e Derivate

Le grandezze per cui si fissa un'unitá di misura mediante un campione vengono dette grandezze fondamentali, quelle invece che vengono ricavate per mezzo di relazioni con le grandezze fondamentali sono dette grandezze derivate

Spazio: si utilizza per campione il metro e si considera come unitá di riferimento la lunghezza $[L]$. L'area ad esempio é una funzione omogenea di 2° grado della lunghezza da cui dipende simbolicamente $[S]=[L^2]$ il volume invece ha eq. dimensionale $[V]=[L^3]$. Equazione dimensionale

Gli angoli formano una grandezza adimensionale infatti: $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{[L]}{[L]} = [L^0]$, 1 radiante corrisponde all'angolo sotteso da un arco di lunghezza R, con circonferenza di raggio 1

Tempo: l'unitá di misura é il secondo e dimensionalmente si indica con $[T]$

Massa: l'unitá di misura é il chilogrammo, si indica con $[m]$

Ad ogni grandezza corrisponde una dimensione, ovvero una potenza delle grandezze fisiche fondamentali (spazio, tempo, massa)

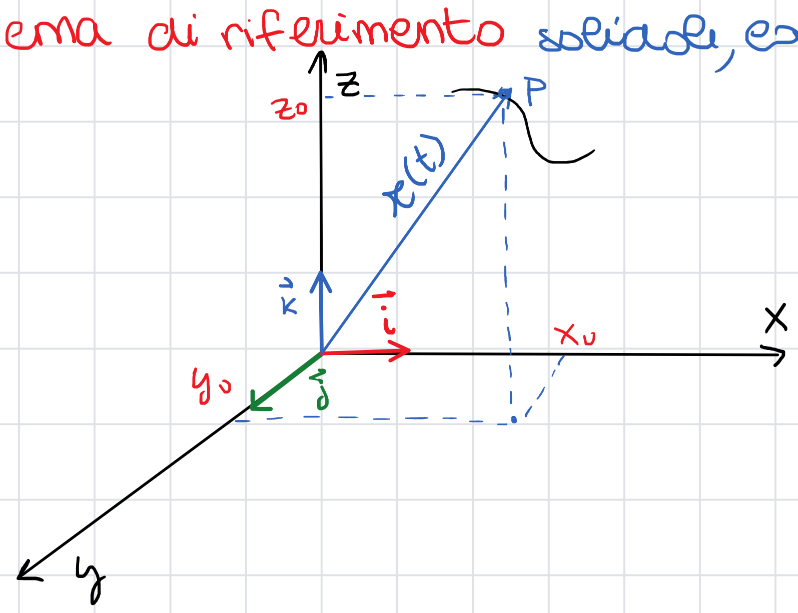
A.3 Sistema internazionale delle unitá di misura

Il sistema internazionale é detto SISTEMA M K S A (metro, chilo, secondo, ampere)

Ogni grandezza viene misurata con un certo ordine di errore Δ ad esempio $l+\Delta l$ o $t+\Delta t$ e non puó essere confrontata con grandezze di dimensioni diverse $[L] \neq [T]$

1.0 Cinematica: moto di un corpo

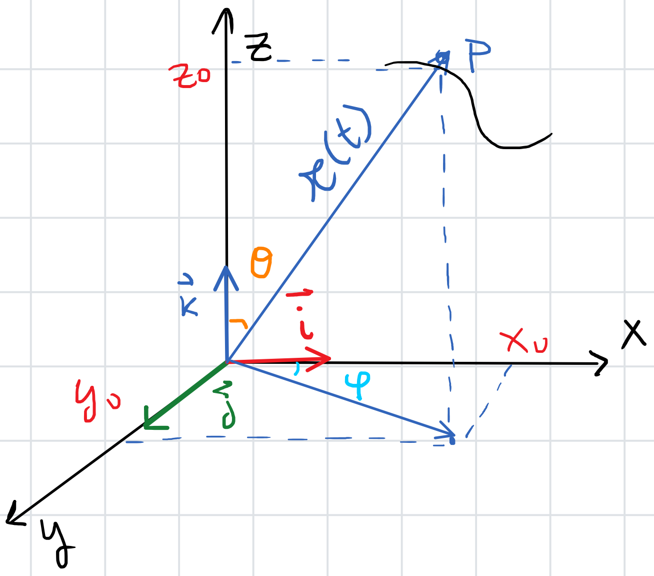
Si consideri un punto materiale di cui si trascurano la dimensione e la massa, e un sistema di riferimento spaziale, come quello cartesiano, allora la posizione del punto



si identifica prendendo il vettore applicato nell'origine del sistema con estremo in P

$x(t) = (x(t), y(t), z(t))$ raggio vettore

Per lo studio del moto si associa ad ogni posizione assunta dal punto un'ascissa temporale, fissato un istante iniziale

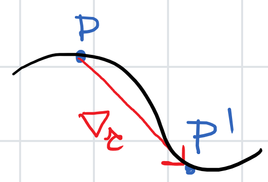


$\vec{r}(t) = \hat{i} \cdot x(t) + \hat{j} \cdot y(t) + \hat{k} \cdot z(t) = \vec{OP}$ vettore di posizione
e i, j, k sono detti versori coordinati

Traiettoria: luogo dei punti dello spazio occupati dal punto materiale
Il punto materiale nel suo moto descrive una traiettoria le cui equazioni cartesiane sono
$$\begin{cases} x = x(t) = r\,\text{sen}\,\theta \cos\varphi \\ y = y(t) = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = z(t) = r \cos\theta \end{cases}$$
se questa è una retta si parla di moto rettilineo e piano se la retta giace su un piano

1.1 Spostamenti

Consideriamo una seconda posizione P' assunta nell'istante $t_0 + \Delta t$ allora il vettore
$\vec{PP'} = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \Delta r = \hat{i} \cdot \Delta x + \hat{j} \cdot \Delta y + \hat{k} \cdot \Delta z$ spostamento nell'intervallo Δt



Lo spostamento è una grandezza vettoriale che si indica con $\Delta\vec{r}$ indipendente dal sistema di riferimento considerato

1.2 Gradi di libertà

Il numero minimo di coordinate necessario a determinare in maniera univoca nello spazio di riferimento la configurazione spaziale del sistema si chiama numero di gradi di libertà (numero di parametri per determinare la posizione nello spazio)

Siano P e P' 2 posizioni lungo la traiettoria associate ai vettori posizione $r(t)$ e $r(t + \Delta t)$ allora.

1.3 Velocità media e istantanea

Si definisce velocità media il rapporto $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$

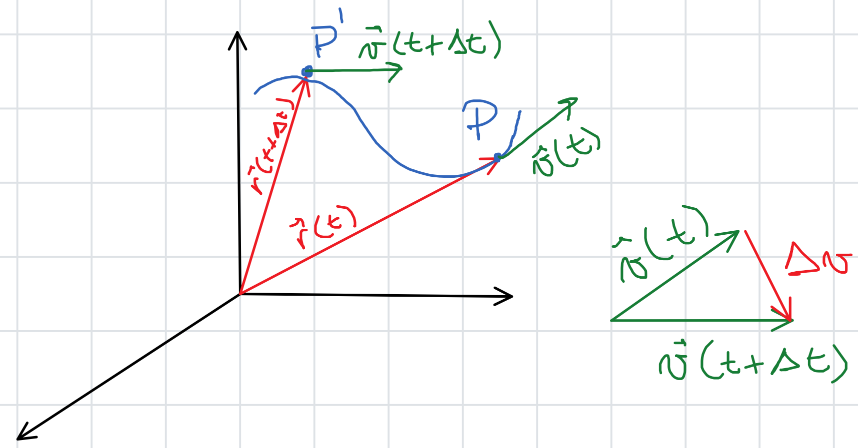
La velocità media non fornisce informazioni sul percorso compiuto nell'intervallo di tempo Δt, ma solo sulla posizione iniziale e quella finale.

Si definisce velocità istantanea $\vec{v}$ il vettore ricavato dal limite:
$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ed è tangente in ogni punto della traiettoria

Nello spazio possiede 3 componenti $\vec{v} = \begin{matrix} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{matrix}$ Dimensione $[\vec{v}] = [L \cdot T^{-1}]$

1.4 Accelerazione

Sia $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) + \vec{v}(t)$ con $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+\Delta t)$ vettori velocità applicati in P e P' allora:

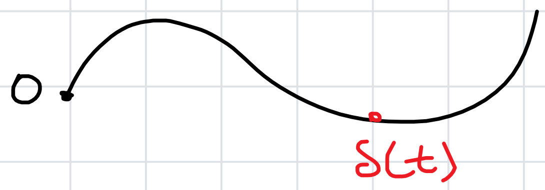


Si definisce accelerazione media il rapporto fra la variazione di v e la variazione di t
$\bar{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

Si definisce accelerazione istantanea il limite: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

1.5 Coordinate o ascisse curvilinee

Per descrivere un fenomeno si possono utilizzare sistemi di riferimento diversi che evidenziano caratteristiche diverse nei moti.
Un esempio sono le coordinate curvilinee, le quali però necessitano che si conosca a priori la traiettoria, ma permettono di lavorare con uno scalare piuttosto che con un vettore



Si stabilisce un'origine e ad ogni punto viene associato uno scalare $s(t)$ e una velocità scalare $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, indicata anche con $\dot{s}$.
Per ottenere la velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ si moltiplica per ogni posizione $v(t) \cdot \hat{\tau}$, con $\hat{\tau}$ versore tangente alla curva

L'accelerazione, come nel sistema cartesiano è definita dalla derivata della velocità nel tempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s} \cdot \hat{\tau})}{dt} = \boxed{\frac{d\dot{s}}{dt} \cdot \hat{\tau}} + \boxed{\dot{s}\,\frac{d\hat{\tau}}{dt}}$$

Accelerazione tangenziale
↳ fa variare il modulo della velocità, indicata con $\ddot{s}$

Accelerazione normale
fa variare la direzione della velocità

Prop. L'accelerazione normale è ortogonale in ogni punto alla tangente

DIM:
Si considera il prodotto scalare di $\hat{\tau}$ con se stesso: $\langle \hat{\tau}, \hat{\tau} \rangle = \|\hat{\tau}\| = 1$ perché versore
la derivata di $\langle \hat{\tau}, \hat{\tau} \rangle$ sarà quindi zero in quanto il valore assunto è costante, ma $D(\langle \hat{\tau}, \hat{\tau} \rangle) = \langle \frac{d\hat{\tau}}{dt}, \hat{\tau} \rangle + \langle \hat{\tau}, \frac{d\hat{\tau}}{dt} \rangle = 2 \langle \frac{d\hat{\tau}}{dt}, \hat{\tau} \rangle = 0 \iff \frac{d\hat{\tau}}{dt} \perp \hat{\tau}$

1.6 Moto Rettilineo Uniforme

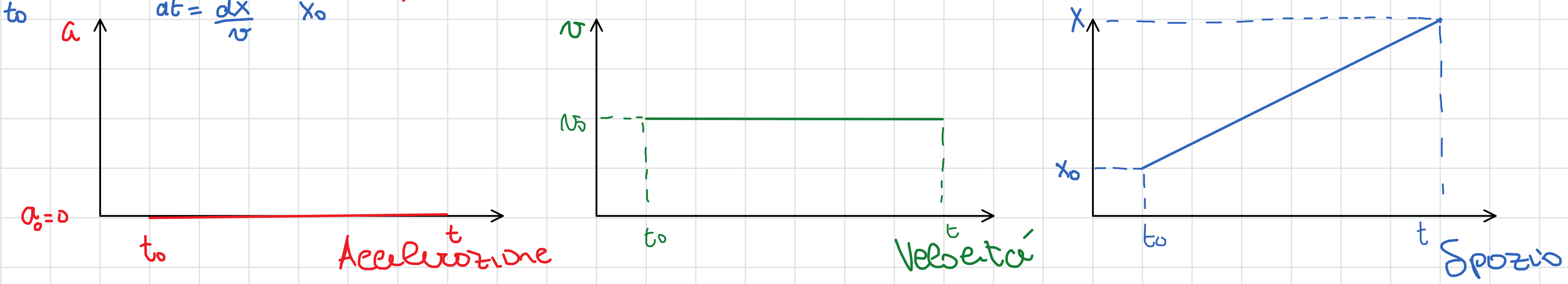
Un moto si dice rettilineo uniforme se la traiettoria viene identificata da una retta, sulla quale vengono fissati un'origine e un verso di percorrenza.
Ne deriva che il moto può essere analizzato attraverso un'unica componente, come ad esempio $x(t)$.

$$\begin{cases} x(t) & \text{spazio} \\ \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} & \text{velocità} \\ \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} & \text{accelerazione} \end{cases}$$

Nel caso del moto rettilineo uniforme l'accelerazione è nulla, $a_0 = 0$ ma $\vec{a}$ è definita come $\frac{dv}{dt} = 0 \iff v = cost = v_0$.

Lo spazio si ricava considerando $v = \frac{dx}{dt}$, quindi:

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt \qquad t = \frac{x}{v} \quad dt = \frac{dx}{v} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} \cancel{v} \cdot \frac{dx}{\cancel{v}} \Rightarrow \left[x(t) = x_0 + v(t - t_0) \right]$$



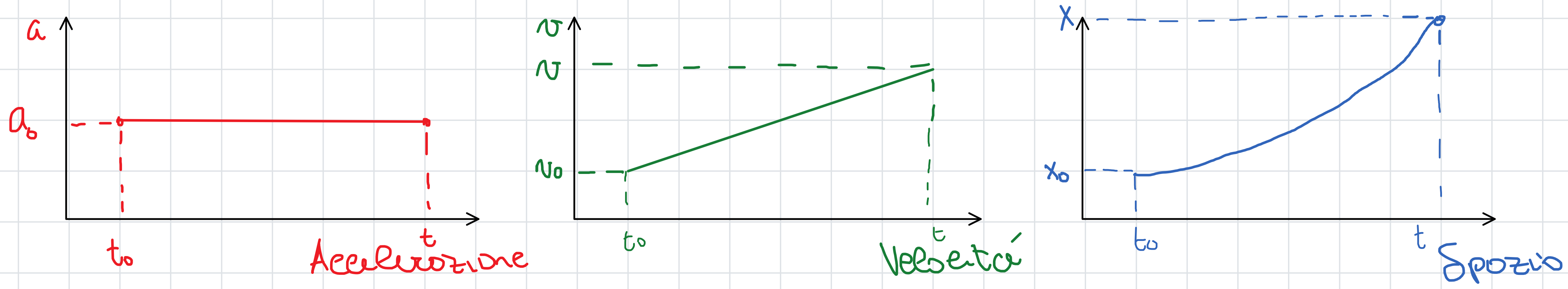
1.7 Moto uniformemente accelerato

Si considera il moto di un punto materiale lungo una traiettoria rettilinea con accelerazione costante $\vec{a} = a_0$ da cui $\int_{t_0}^{t} a_0 \, dt = \int^{v} dv \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0)}$

$dt = \frac{dv}{a}$

Analogamente essendo $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} v_0 + a_0 (t - t_0) \, dt = \int_{x_0}^{x} dx$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}$$



Le equazioni orarie possono essere inoltre riformulate per mettere in relazione diretta velocità e accelerazione o velocità e spazio:

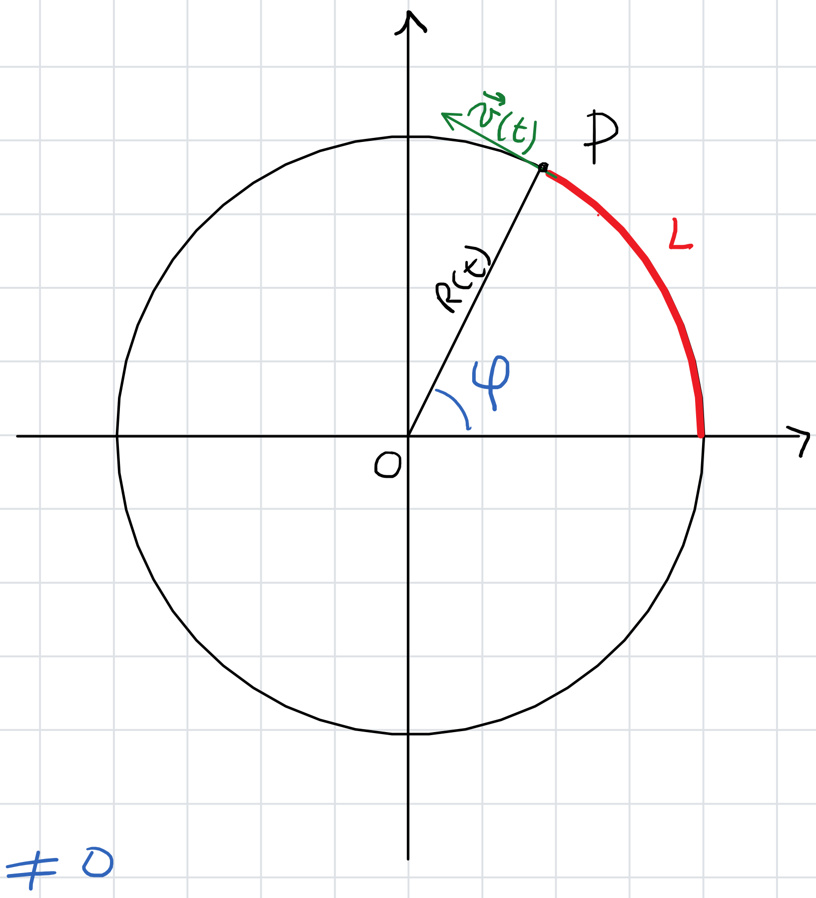
1) $\begin{cases} t - t_0 = \frac{v - v_0}{a} \\ x = x_0 + v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \cancel{a} \frac{(v - v_0)^2}{a^{\cancel{2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - t_0 = \frac{v - v_0}{a} \\ x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \end{cases}$

2) $\begin{cases} a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \\ x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{(v - v_0)}{\cancel{(t - t_0)}} (t - t_0)^{\cancel{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \\ x - x_0 = \underbrace{\frac{1}{2} (v + v_0)}_{v'} (t - t_0) \end{cases}$

Si può dedurre che l'equazione di un moto uniformemente accelerato può essere riformulata come l'equazione di un moto uniforme con velocità costante $v' = \frac{v + v_0}{2}$

1.8 Moto circolare:

Si definisce moto circolare ogni moto che avviene lungo una traiettoria circolare.



Ogni posizione P lungo la circonferenza viene associata al vettore spostamento $\vec{OP}$ che descrive un angolo φ ($\varphi > 0$ se antiorario e $\varphi < 0$ se orario).
Considerata la traiettoria in un sistema di ascisse curvilinee risulta che $s(t) = L(t)$, dove L é la lunghezza dell'arco spazzato, e che la velocitá, il cui modulo é $v(t) = \dot{s}(t) = \dot{L}(t)$, varia nella direzione.

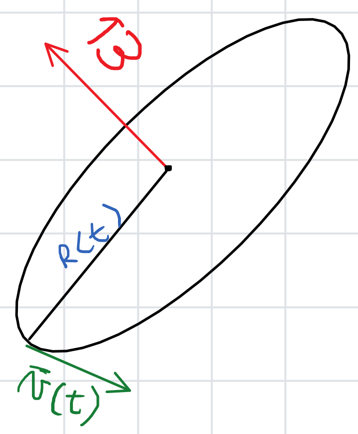
L'accelerazione é $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{\tau} + v\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt}$ con $a_n \neq 0$

Si puó quindi definire una componente normale della velocitá, infatti:
sapendo che $\frac{L\ (\text{arco})}{R\ (\text{raggio})} = \vartheta$ si puó scrivere: $v(t) = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{dL}{dt} = \underbrace{\boxed{\frac{d\vartheta}{dt}}}_{\omega}\cdot R \Rightarrow \boxed{v(t) = \omega R}$

velocitá angolare

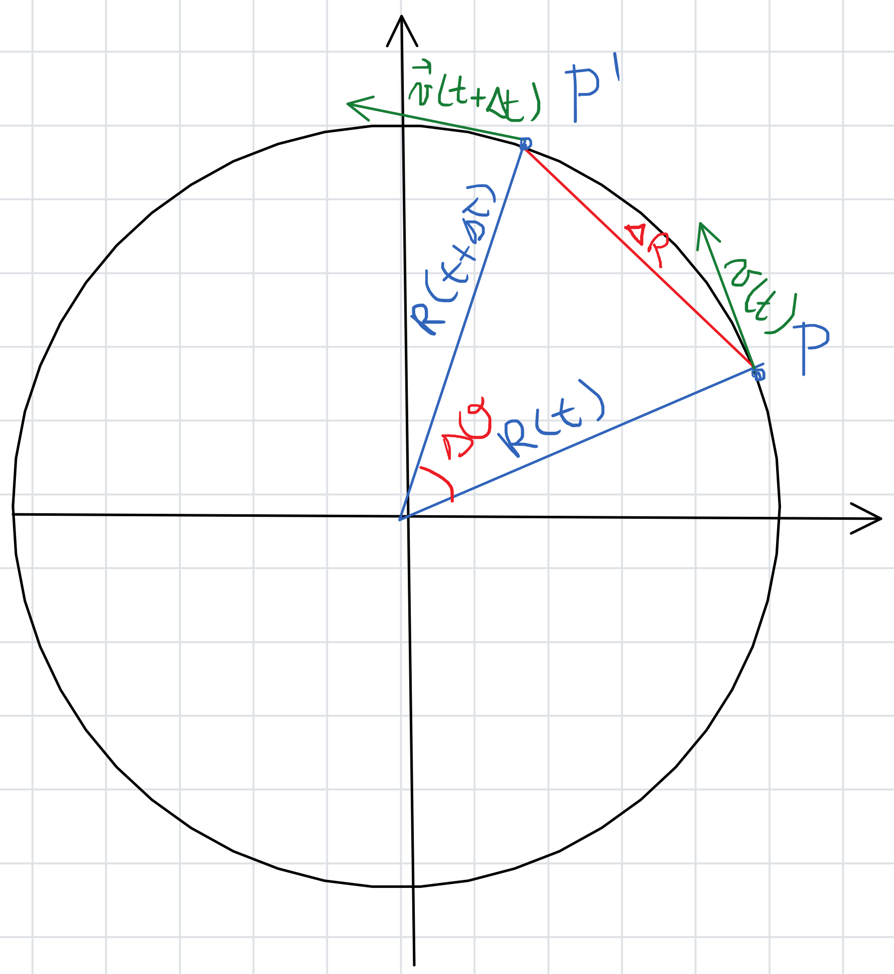
Il vettore velocitá angolare $\vec{\omega}$ ha:
1) direzione normale al piano di rotazione
2) verso uscente se il punto si muove in senso antiorario
3) intensitá $\omega = |\dot{\vartheta}(t)|$

Inoltre risulta $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

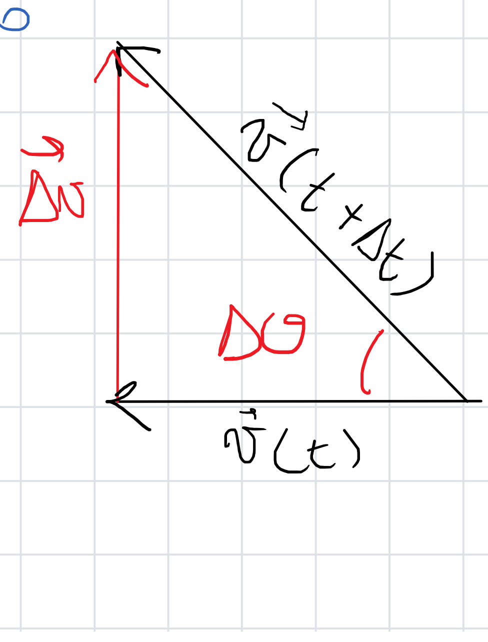


1.9 Moto circolare uniforme

Nel caso del moto circolare uniforme la velocitá tangenziale rimane costante in modulo, ma varia nella direzione il che é equivalente a dire che l'accelerazione presenta solo la componente normale.

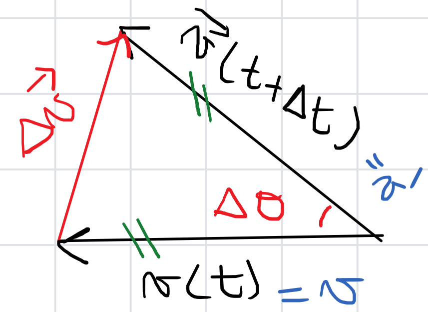


Siano P e P' 2 posizioni sulla traiettoria circolare, si considerano le velocitá tangenziali $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+\Delta t)$ e i vettori posizione $\vec{R}(t)$ e $\vec{R}(t+\Delta t)$ allora l'angolo tra $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+\Delta t)$ é uguale a quello tra $R(t)$ e $R(t+\Delta t)$, $\Delta\vartheta$



Calcolando l'accelerazione $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ si può considerare che per $\Delta t \to 0$

allora $\Delta\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{v}(t)$. Infatti il triangolo composto da v e v' è isoscele, ovvero $\beta = \alpha$, quindi per $\Delta\theta \to 0$
$\alpha + \beta \to \pi = 2\alpha \to \pi \Rightarrow \alpha \to \frac{\pi}{2}$ e di conseguenza $\Delta\vec{v}$, come $\vec{a}$, $\perp v$



Per ricavare il modulo di $\vec{a}$ si sfrutta che per $\Delta\theta \to 0$ allora $tg\theta \sim \theta$ quindi
1° $\Delta v = v\Delta\theta$ inoltre ricordando che anche fra $\vec{R}(t)$ e $\vec{R}(t+\Delta t)$ l'angolo è θ
2° $\Delta R = R\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta R}{R}$ sostituendo nella 1° $\Delta v = v \cdot \frac{\Delta R}{R}$.

Ne deriva che $|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t}}_{v} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

con direzione data dal versore $\vec{n} \perp \vec{v}$

Caso $\vec{v}$ variabile in verso e modulo

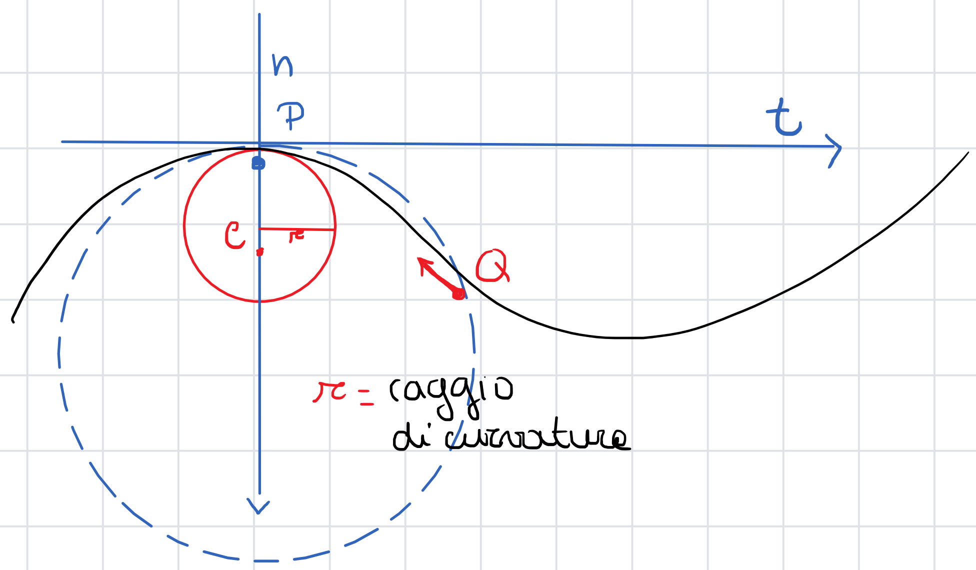
Nel caso in cui $\vec{v}$ vari in modulo e verso il calcolo della sua derivata può essere semplificato considerando $\vec{v} = v \cdot \hat{v}$:

$$\underbrace{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}_t} = \frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{v} + v \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} \quad \text{con}$$

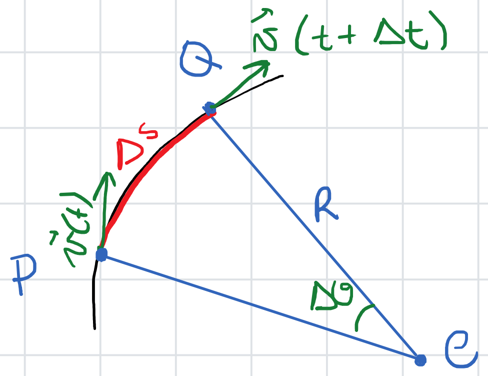
Sapendo inoltre che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, allora $\left[\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times R\right]$

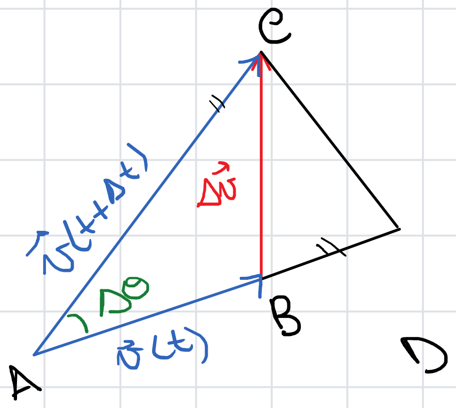
1.10 Moto con traiettoria giacente in piano. circonferenza osculatrice

Si considera il moto di un punto materiale lungo una traiettoria qualsiasi e si vuol calcolare per ogni posizione l'accelerazione tangente. Si considera P punto della curva con ascissa curvilinea $s(t)$ allora si possono definire la retta tangente orientata in senso concorde con s e la retta normale $n \perp t$. Esistono quindi ∞ circonferenze con centro appartenente a n, di cui se ne prende una che interseca la traiettoria oltre che in P in un altro punto Q.



Si definisce circonferenza osculatrice la circonferenza limite con centro in n passante per P e Q, al tendere di Q a P e che meglio approssima la curva nell'intorno del punto

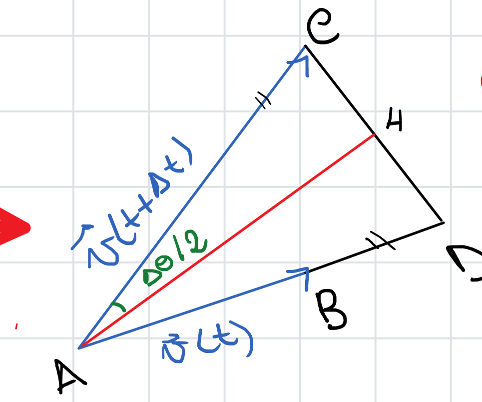




Siano P e Q 2 posizioni negli istanti t e $t+\Delta t$ allora presa $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ si possono costruire 2 vettori $\vec{BC}$ e $\vec{CD}$ tali che $\Delta\vec{v} = \vec{BC} + \vec{CD}$. L'accelerazione sarà quindi pari a: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\vec{BC}}{\Delta t}}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{\frac{\vec{CD}}{\Delta t}}_{\text{normale}}$

$* \ \vec{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{C}}{\Delta t}$

$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)}{R} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \neq 0 \ \rightarrow$



$CH = AC \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \qquad CD = 2CH$

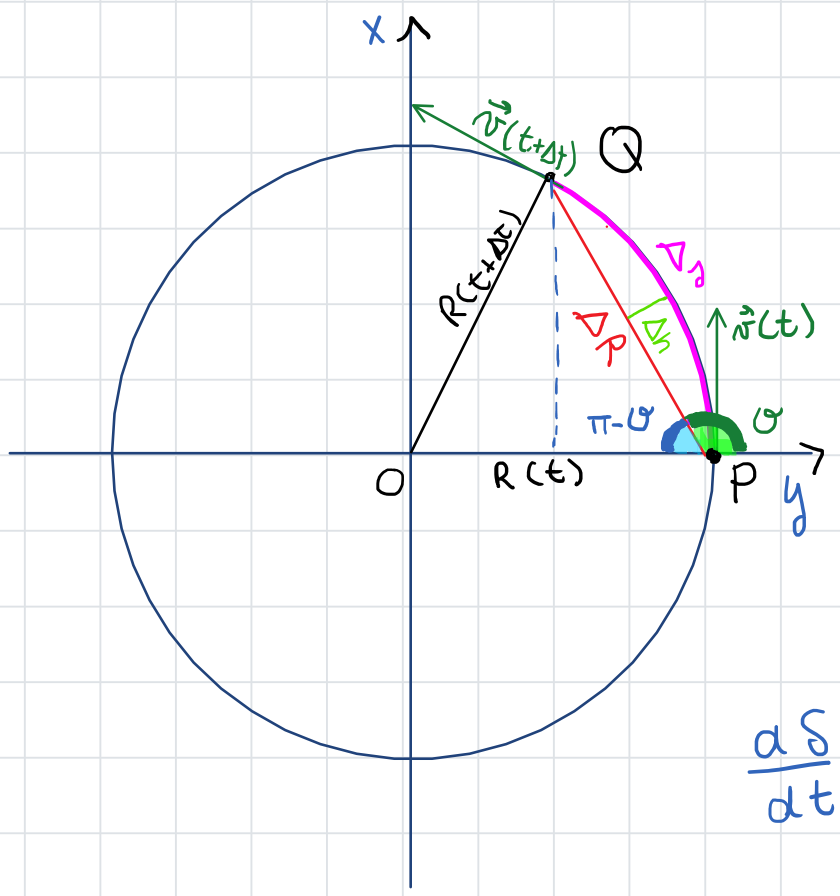
$CD = 2AC \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \sim \cancel{2}AC\frac{\Delta\theta}{\cancel{2}} = \vec{v}(t+\Delta t) \cdot \Delta\theta$

Ovvero l'accelerazione in ogni punto della traiettoria è pari a quella che si avrebbe in un moto circolare uniforme lungo la circonferenza osculatrice tangente al punto con velocità tangenziale pari al valore istantaneo in P.

Se il moto presenta 3 componenti si considera il fascio di piani contenenti la retta tangente al punto e che intersecano la curva in P e un altro punto Q, allora si definisce piano osculatore il piano identificato con il tendere di Q a P, che meglio approssima la traiettoria.

1.11 Moti centrali: velocità areolare

Si definiscono moti centrali i moti in cui il vettore accelerazione è sempre applicato verso un punto fisso dello spazio



Siano P e Q due posizioni sulla traiettoria, tali che i vettori posizione siano $R(t)$ e $R(t+\Delta t)$, ovvero in un intervallo Δt $R(t)$ spazza un'area data dal triangolo mistilineo $O\widehat{PQ} = O\hat{P}Q$ + Area tra l'arco Δs e la corda ΔR

$$S = O\hat{P}Q = \frac{1}{2} R(t) \cdot \Delta R \cdot \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \frac{1}{2} R(t) \cdot \Delta R \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Per intervalli infinitesimi di tempo ($\Delta t \to 0$), l'area del triangolo mistilineo sarà:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} R(t) \cdot \boxed{\frac{\Delta R}{\Delta t}} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

= per $\Delta t \to 0$ è $\sim$ alla lunghezza dell'arco Δs

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} R(t) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t}}}_{= v(t)} \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} R(t) \cdot v_{(t)} \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\left(R(t) \times v(t)\right)$$

La derivata di S rispetto a t è definita velocità areolare vettoriale con direzione perpendicolare al piano e modulo $|\dot{S}|$

1.12 Moto verticale: caduta di un grave

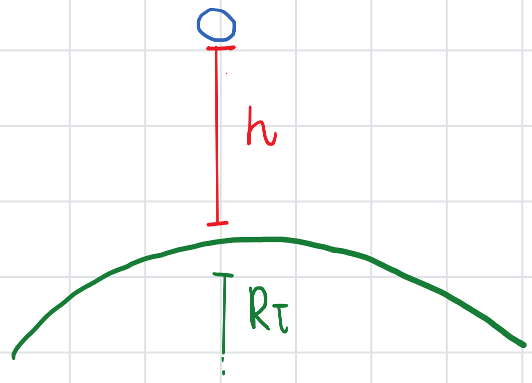
Ogni corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con accelerazione costante $g = -9,8 \ m/s^2$

COSTANZA DI g:

L'accelerazione gravitazionale è definita dall'equazione $\vec{g} = -\frac{G M_T}{r^2} \cdot \hat{r}$ con r distanza dal centro della terra.

Nel caso di un corpo lanciato esoddere da una distanza h dalla superficie terrestre allora r sarà $r = R_T + h$

con R_T = raggio della terra $= 6 \cdot 10^6$ m.



$$\vec{g} = -\frac{G \cdot M_T}{(R_T+h)^2} \cdot \hat{r} = \boxed{-\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}} \cdot \left(1+\frac{h}{R_t}\right)^{-2} \cdot \hat{r} \quad \forall h \;*$$

$\to g_0$ = accelerazione gravitazionale a livello del mare

* posto $x = \frac{h}{R_t}$ si applica lo sviluppo di Taylor a $(1+x)^{-2} \Rightarrow f' = \frac{-2}{(1+x)}^{-3}$, $f(0)=1$ $f'(0)=-2$

quindi:

$$(1+x)^{-2} \sim 1-2x \iff \left(1+\frac{h}{R_t}\right) \sim \left(1-\frac{2h}{R_t}\right) \text{ sostituendo}$$

$$\vec{g} = g_0 \cdot \left(1-\frac{2h}{R_t}\right) \text{ con } \frac{2h}{R_t} \sim 0 \Rightarrow \vec{g} = g_0 \cdot \hat{r} \qquad \forall h \text{ considerato}$$

Ne deriva che qualsiasi sia h questo é sempre trascurabile rispetto all'ordine di grandezza di $R_T \Rightarrow g$ costante

Es:

1) Caduta corpo da altezza h:

$x_0 = h$ m

$v_0 = 0$ m/s

$a_0 = -g$

$t_0 = 0$ s

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \int_t^{t_0} -g \, dt + v_0 = -g(t-t_0) = -gt \\ \vec{x}(t) = \int_t^{t_0} -g(t-t_0)\, dt + x_0 = -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + h = -\frac{1}{2}gt^2 + h = \underline{0} \end{cases}$$

2) Corpo lanciato verso l'alto con velocità v_0

$x_0 = 0$m

$v_0 = v_0$ m/s

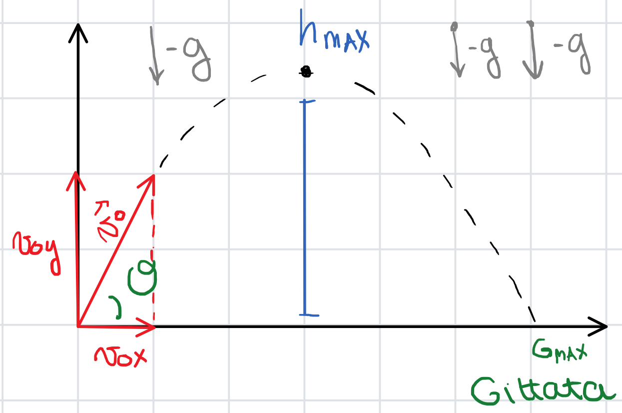
$t_0 = 0$

$a_0 = -g$ m/s²

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} -g\, dt = v_0 - gt = \underline{0} \\ x(t) = \int_{t_0}^{t} v_0 - gt \, dt + x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 = gt \\ x(t) = gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

2) Balistica



Accelerazione: $\begin{cases} \vec{a}_y = -g \\ \vec{a}_x = 0 \end{cases}$ velocità = $\begin{cases} \vec{v}_y(t) = v_{oy} - g(t-t_0) \\ \vec{v}_x(t) = v_{ox} \text{ (costante)} \end{cases}$

Dove $v_{ox} = v_0 \cos\theta$ e $v_{oy} = v_0 \sin\theta$

Spazio: $\begin{cases} y(t) = v_{oy}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \\ x(t) = v_{ox}(t-t_0) \end{cases}$ Eq^{ni} parametriche (x e y rispetto a t)

Traiettoria: $\begin{cases} y(t) = v_{oy} \cdot \frac{x(t)}{v_{ox}} - \frac{1}{2}g \frac{x^2(t)}{v_{ox}^2} \\ (t-t_0) = \frac{x(t)}{v_{ox}} \end{cases} \Rightarrow$ Eq^{ne} cartesiana della traiettoria

$[y = ax^2 + bx]$

2.1) Altezza massima

Per ricavare l'altezza massima si impone che la componente y della velocità é nulla e si studia soltanto la y dello spazio:

$$\begin{cases} v_y(t^*) = v_{oy} - g t^* = 0 \\ y(t^*) = V_{oy} \cdot \frac{V_{oy}}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \cdot \frac{V_{oy}^2}{g^{\cancel{2}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^* = \frac{V_{oy}}{g} \\ y(t^*) = \frac{1}{2} \frac{V_{oy}^2}{g} \end{cases}$$

2.2) Gittata

Si considera che se per arrivare nel punto di altezza massima c'é voluto un tempo $t^* = \frac{V_{oy}}{g}$ allora per compiere l'intera traiettoria ci vorrá un tempo $t^{**} = 2t^*$ quindi:

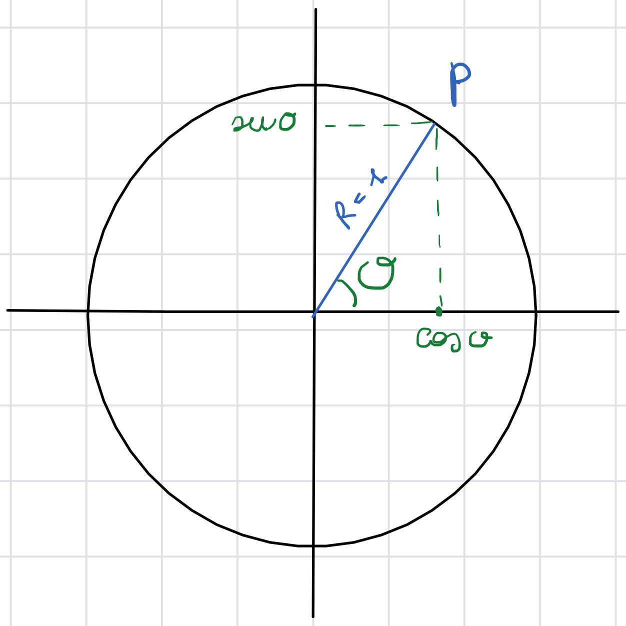
$$\begin{cases} t^{**} = \frac{2V_{oy}}{g} \\ x(t^{**}) = v_{ox} \cdot \frac{2V_{oy}}{g} \Leftrightarrow \frac{2V_0^2}{g} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

2.3) Trovare θ affinché la gittata sia massima

Si deriva x(t) e la si uguaglia a 0:

$$\frac{dx}{dt} = D\left(\frac{2V_0^2}{g} \cdot \cos\theta \operatorname{sen}\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{2V_0^2}{g}\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \theta = \pi/4$$

1.13 Moto armonico



Si studia la posizione della proiezione di P sull'asse x e sull'asse y.

Il punto P si muove con velocitá angolare ω tale che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, detta in questo caso pulsazione, ne deriva che:

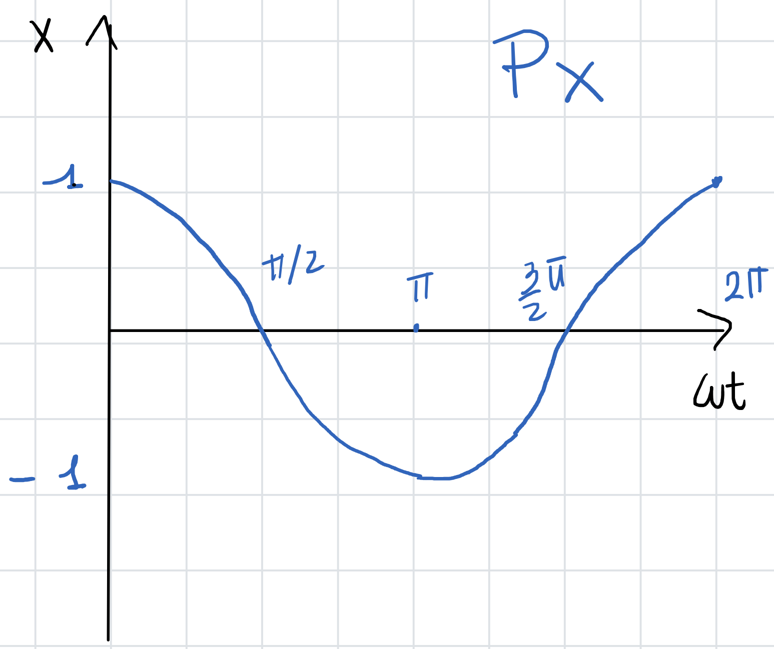
$$\begin{cases} x(t) = \cos\omega t \\ y(t) = \operatorname{sen}\omega t \end{cases} \text{Spazio}$$

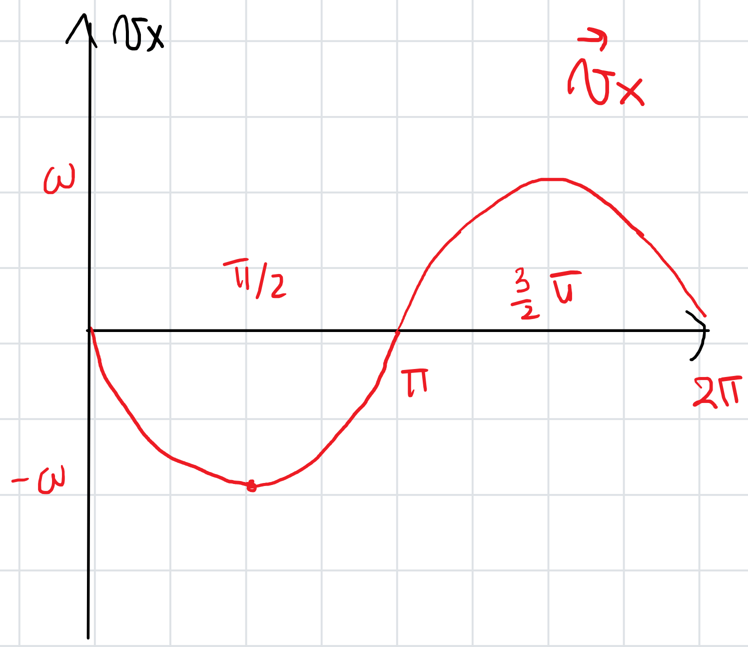
$$\begin{cases} \vec{v}_x(t) = -\omega \operatorname{sen}\omega t \\ \vec{v}_y(t) = \omega \cos\omega t \end{cases} \text{Velocitá}$$

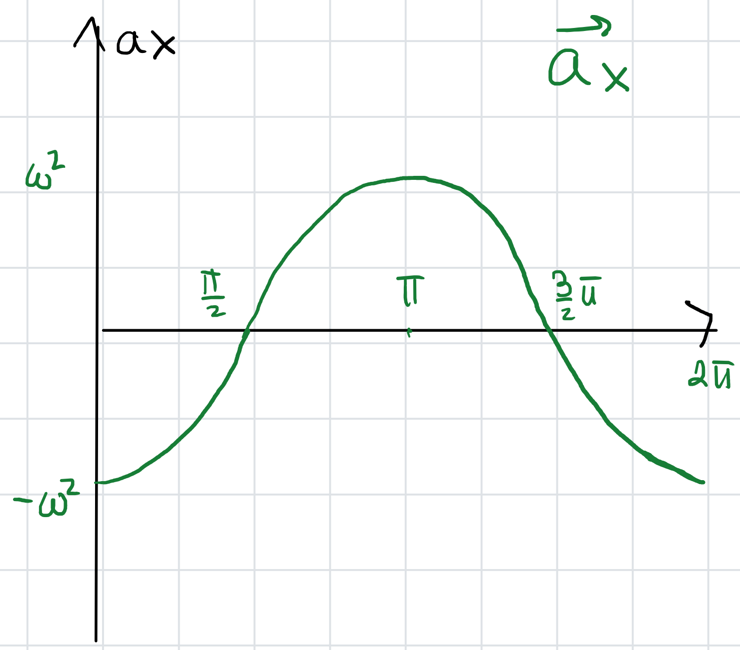
$$\begin{cases} \vec{a}_x(t) = -\omega^2 \cos\omega t \\ \vec{a}_y(t) = -\omega^2 \operatorname{sen}\omega t \end{cases} \text{Accelerazione}$$

$$\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega$$

$$\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2$$







Domande teoriche cap. 2

1) Definire il vettore accelerazione istantanea per un punto materiale in moto su un piano e precisare la relazione che sussiste tra le sue componenti tangenziale e normale e la velocità.

Si consideri il moto di un punto lungo una curva giacente su un piano e 2 posizioni lungo la traiettoria P e P' associate rispettivamente ai vettori posizione r(t) e r(t+Δt) e ai vettori velocità istantanea $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+\Delta t)$.

Allora, considerata la circonferenza osculatrice che contiene P e P' e tendere di P' a P, l'accelerazione istantanea sarà definita come: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d(v \cdot \hat{\tau})}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\tau}}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}}_{\text{normale}}$

con $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}$ ($\vec{R}$: raggio circonferenza)

e $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}$ ⇒ Rispetto alla velocità l'accelerazione tangenziale ne modifica il modulo, mentre la componente normale la fa variare nella direzione

2) Dimostrare che un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme con velocità v possiede un'accelerazione centripeta pari a v^2/r

Considerate le velocità relative agli istanti t e t+Δt, $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t+\Delta t)$ allora l'accelerazione sarà pari al limite $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$. Ma $\Delta v = v \cdot \Delta \theta$

per $\Delta\theta \to 0$, con θ angolo compreso tra v(t) e v(t+Δt) e pari anche a quello tra r(t) e r(t+Δt) ⇒ $\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r}$ sostituendo si ottiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}}_{v} = \frac{v^2}{r}$$

3) Mostrare come nel moto circolare uniforme l'accelerazione sia solo centripeta

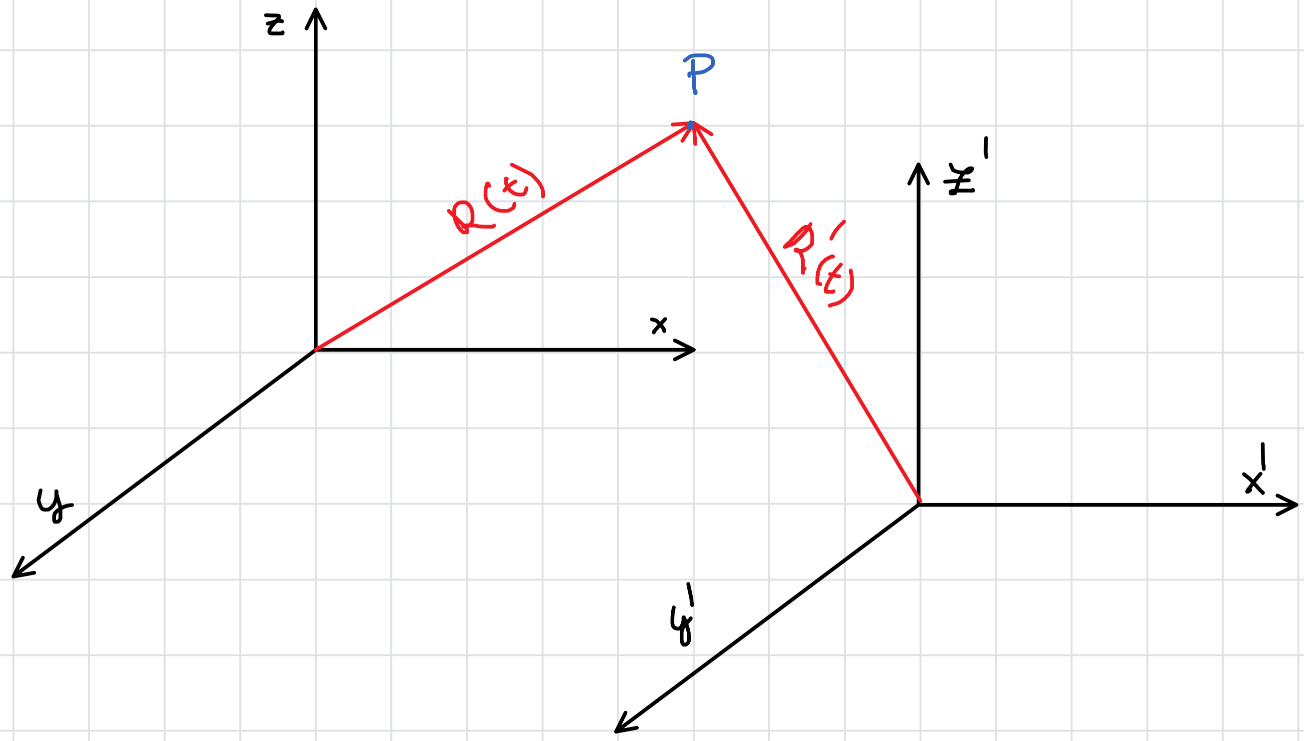
Nel moto circolare uniforme la velocità tangenziale è per definizione costante ciò implica che considerate l'equazione generalizzata dell'accelerazione $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} + v \cdot \frac{d\hat{\tau}}{dt}$ con componente tangenziale

$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\tau} = 0$ in quanto la derivata di una grandezza costante ($v = cost = v_0$) è sempre nulla

1.14 Sistemi di riferimento assoluti e relativi

Si consideri un moto di un punto materiale allora si può scegliere di descriverlo mediante un sistema solidale, ovvero rispetto a cui la distanza fra due punti resta invariata nel tempo, oppure mediante 2 diversi sistemi in moto relativo tra loro. Uno qualunque di questi viene indicato come fisso, rispetto a cui il moto di P è detto assoluto, e l'altro viene detto mobile e il moto in esso si dirà relativo.

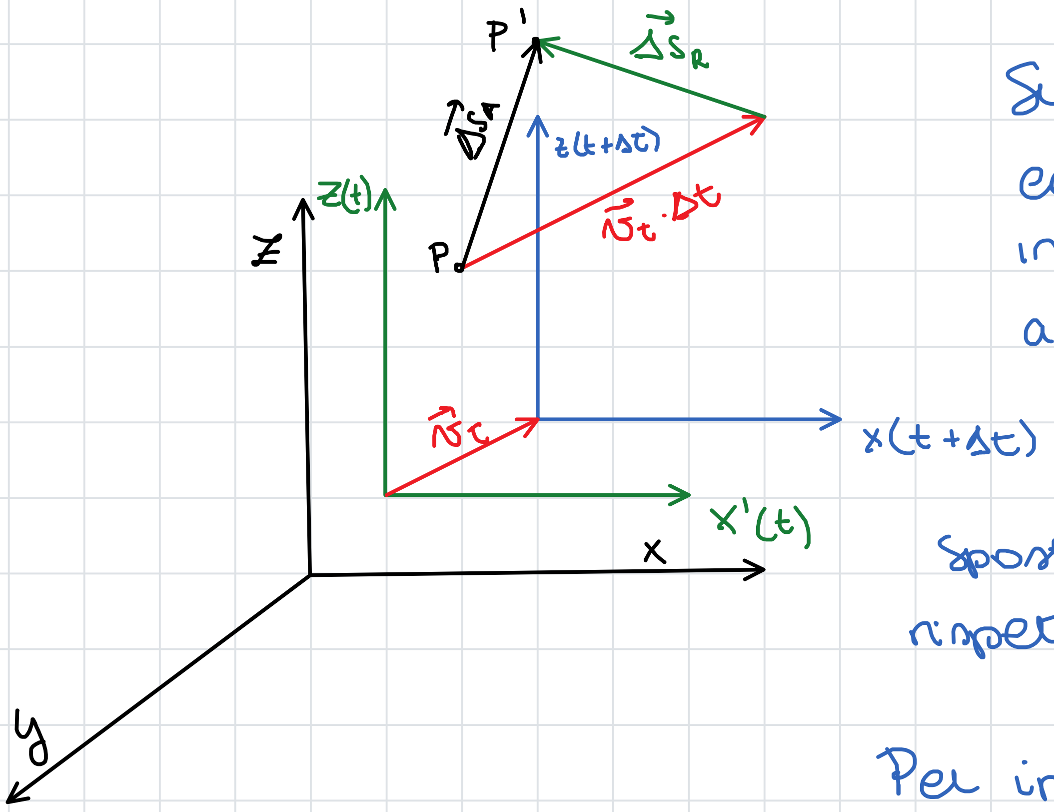
Es: presi 2 sistemi di riferimento xyz e $x'y'z'$, è facile notare che la posizione la velocità e l'accelerazione di P assumono valori diversi rispetto a xyz e $x'y'z'$



1.15 Moto di trascinamento

Si definisce moto di trascinamento un moto rigido della quaterna (Ω, x', y', z') e di tutti i punti ad essa solidali rispetto alla quaterna fissa (O, x, y, z)

I Traslazione a velocità costante



Sia (O, x, y) il sistema di riferimento fisso, allora considerato il sistema di riferimento mobile (O', x', y') in moto con velocità di trascinamento costante rispetto a (O, x, y) varrà la seguente relazione:

$$\Delta \vec{S}_A = \Delta \vec{S}_R + \vec{v}_T \cdot \Delta t$$

spostamento rispetto a (O, x, y) — spostamento rispetto a (O', x', y') — spazio percorso dal sistema in Δt

Per intervalli infinitesimali di Δt risulta:

$$\frac{1}{dt} \cdot dS_A = \frac{dS_R}{dt} + v_T \cdot \frac{\cancel{dt}}{\cancel{dt}} \iff \vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{v}_T$$

Legge di composizione delle velocità

con $\vec{v}_R$ = velocità relativa e $\vec{v}_T$ = velocità di trasc.

Considerando inoltre che $\vec{v}_T$ è costante allora l'accelerazione assoluta sarà pari a:

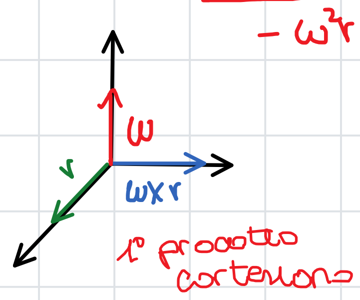
$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_R}{dt} + \boxed{\frac{d\vec{v}_T}{dt}} = 0 \iff \vec{a}_A = \vec{a}_R$$

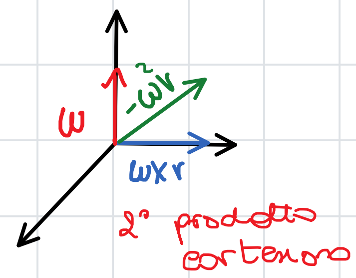
Nel caso in cui il sistema relativo non abbia velocità costante allora la componente $\frac{d\vec{v}_T}{dt} \neq 0$ e quindi $\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_T$

1.15 Accelerazione di trascinamento

Per calcolare l'accelerazione di trascinamento nel caso di $\vec{v}_\tau$ non costante si considera la sua derivata nel tempo.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\cdot r + \vec{\omega}\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}' = \vec{\omega}\times\vec{r}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \underbrace{\omega\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{-\omega^2 r}$$



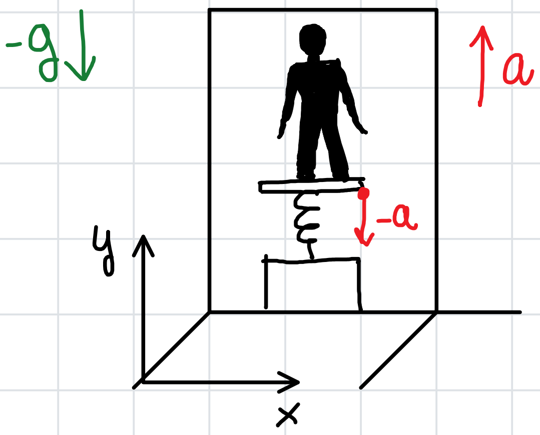


Esempi:

1) Rilevazione campo gravitazionale

Si supponga di voler verificare la presenza di un campo gravitazionale mediante un dinamometro, allora si arriva alla conclusione che qualsiasi sistema accelerato con $a \simeq g$ a = accelerazione relativa permette di misurare una forza peso pari a quella terrestre. Ne deriva quindi che è impossibile distinguere un sistema accelerato con $a \simeq g$ da un campo gravitazionale mediante un'unico punto materiale

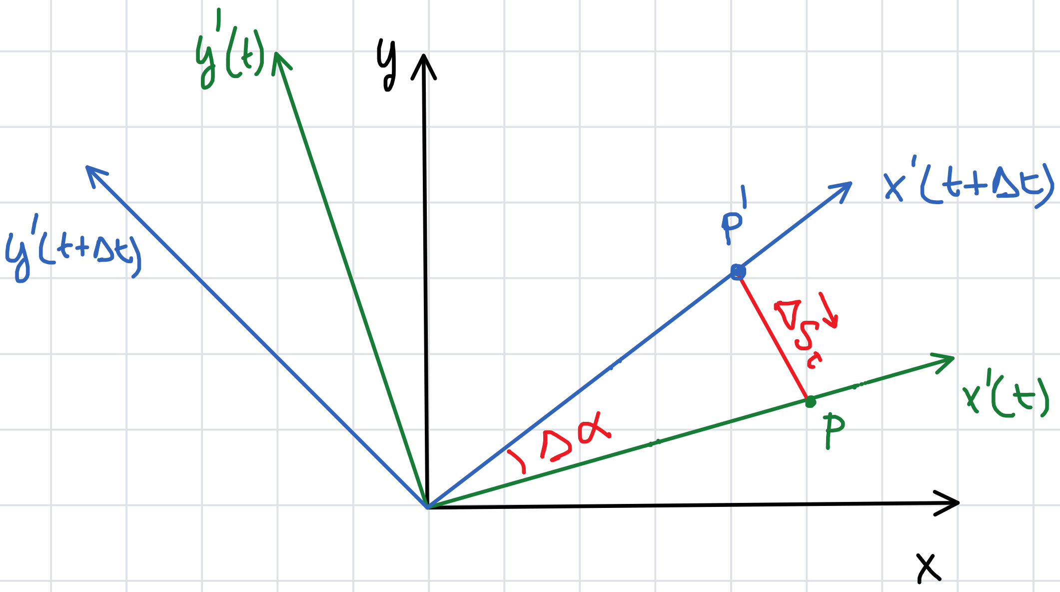
2) Ascensore che sale/cade con accelerazione $\vec{a}_\tau$



Si consideri una bilancia all'interno di un ascensore inizialmente fermo rispetto al sistema (x,y) "sul pianerottolo", allora non appena accelera di $a\,m/s^2$ la bilancia rileva un'accelerazione relativa $\vec{a}_R = \vec{a}_A - \vec{a}_\tau = -g - a = -(g+a)$. Al contrario se l'ascensore venisse lasciato libero di cadere

$\vec{a}_R = -(g-g) = 0$ ovvero il sistema sarebbe un sistema inerziale e si rileverebbe un'assenza di peso

II Rotazione

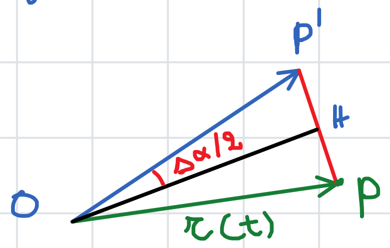


Si consideri un sistema mobile (O, x', y') che sta ruotando con velocità angolare ω rispetto al sistema fisso (O, x, y), allora il vettore spostamento da P posizione rispetto a $(x'(t), y'(t))$ a P' posizione rispetto a $(x'(t+\Delta t), y'(t+\Delta t))$ sarà:

$$\Delta\vec{S}_\tau = P\vec{P}' = \vec{OP}\cdot\Delta\alpha$$

ma $\vec{OP} = r$ e considerato che

$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta\alpha = \omega\Delta t$

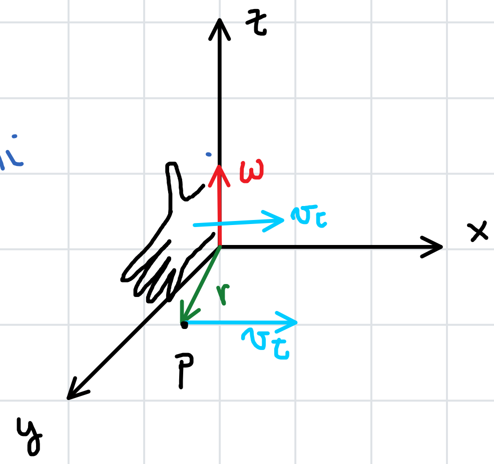


$P'H = OP \operatorname{sen}\frac{\Delta\alpha}{2}$

$P'P = 2P'H$

$P'P = OP\,\Delta\alpha$

Sostituendo nell'uguaglianza: $\Delta\vec{S}_\tau = \omega\cdot r\cdot\Delta t$ considerate le direzioni dei vettori si può riformulare $\Delta\vec{S}_\tau = \omega\times r\cdot\Delta t$ infatti $v \in$ Piano di rotazione a cui ω è perpendicolare per definizione. Inoltre per definizione il raggio r della circonferenza è sempre ortogonale alla velocità tangenziale $v \perp \omega$ e $v \perp r \Leftrightarrow v = \omega\times r$



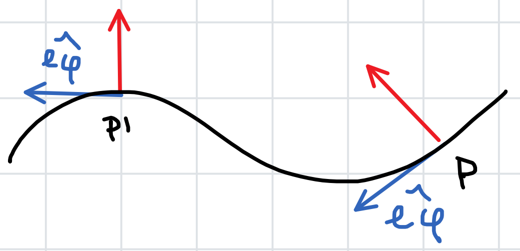
Per $\Delta t \to 0$ $\quad \vec{v}_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\omega\times r\cdot\frac{\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = \omega\times r$

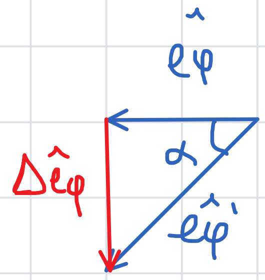
velocità tangenziale

L'accelerazione sarà quindi data da:

$$\vec a = \dot{\vec v} = \frac{d}{dt}(\dot r \cdot \hat e_r + r\cdot\omega\cdot \hat e_\varphi) = \frac{d\dot r}{dt}\cdot\hat e_r + \dot r\cdot\frac{d\hat e_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\cdot\omega\cdot\hat e_\varphi + r\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot\hat e_\varphi + r\cdot\omega\cdot\frac{d\hat e_\varphi}{dt}$$

$$= \ddot r\, \hat e_r + \dot r\cdot\omega\cdot e_\varphi + \dot r\,\omega\cdot\hat e_\varphi + r\cdot\dot\omega\cdot\hat e_\varphi + r\cdot\omega\cdot\dot{\hat e}_\varphi$$ dove $\dot{\hat e}_\varphi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \hat e_\varphi}{\Delta t}$





⇒ Δe_φ ha lo stesso direzione di $\hat e_r$ con modulo $\Delta\alpha$ ⇒ $\Delta\hat e_\varphi = -\omega\cdot\hat e_r$

(il segno meno c'è perché è opposto al verso di $\hat e_r$)

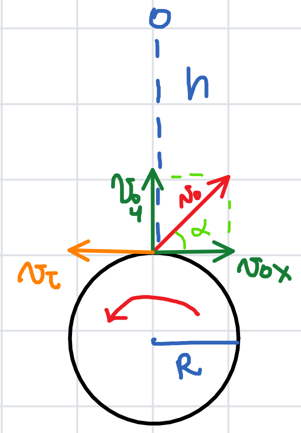
Accelerazione di Coriolis

$$\vec a = \hat e_r\left(\ddot r - \omega^2 r\right) + \hat e_\varphi\left(r\dot\omega + 2\dot r\,\omega\right)$$

direzione tangenziale   direzione ortogonale

Esercizi

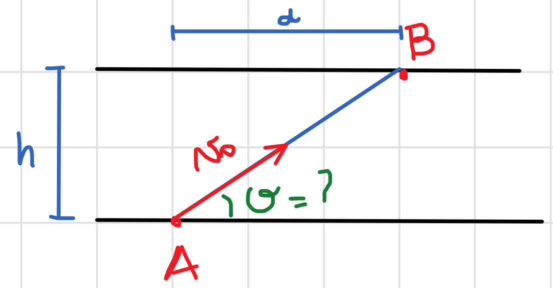
1) Un tiratore sul bordo di una giostra vuole colpire un bersaglio ad una distanza d; trovare l'angolo di inclinazione



Affinchè il bersaglio abbia un moto rettilineo allora la velocità assoluta deve essere nulla ⟺ componente orizzontale di v_0 deve annullare la velocità tangenziale del moto circolare ⇒ $v_0\cos\alpha = \omega R$ ⇒

$$\alpha = \arccos\frac{\omega R}{v_0}$$

2) Una barca deve arrivare dal punto A al punto B facendo il tragitto più breve trovare la direzione di v.



$$\vec V_A = \vec V_R + \vec V_T$$

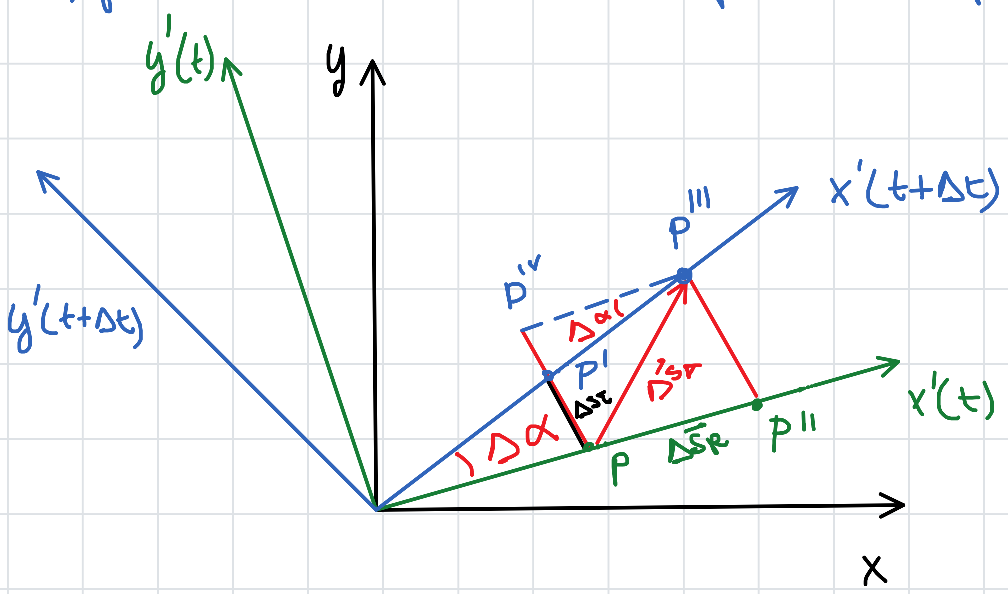
relativa della barca   velocità di trascinamento del fiume

$$\Rightarrow \begin{cases} v_a\cos\theta = v_t + v_R^x \\ v_a\sin\theta = 0 + v_R^y \\ v_R = \sqrt{{v_R^x}^2 + {v_R^y}^2} \end{cases} = \begin{cases} v_a\cos\theta = v_t + v_R^x \\ v_a = v_R^y/\sin\theta \\ v_R^2 = v_{Rx}^2 + v_{Ry}^2 \end{cases}$$

Sostituendo la terza equazione nella prima si ottiene

$$\begin{cases} v_{Ry}\cdot\cot\theta - v_t = \sqrt{v_R^2 - v_{Ry}^2} \\ // \\ // \end{cases}$$

Nel caso in cui P non fosse fermo ma si muovesse lungo il sistema di riferimento (x', y') fino ad arrivare dopo un tempo Δt ad una posizione P''. Allora il vettore



$$\Delta\vec{S} = \Delta\vec{S}_R + \overline{P''P'''} = \Delta\vec{S}_R + \overline{PP^{IV}}$$

$\overline{PP^{IV}}$ non è direttamente riconducibile come PP' tuttavia per intervalli infinitesimi di $\Delta t \to 0$, risulta che $\overline{PP^{IV}} > \Delta s_T$ e che essendo $\overline{PP^{IV}} = \Delta\vec{S}_T + \Delta\vec{S}_R \cdot \operatorname{sen}\Delta\alpha$ allora tende a 0 di un ordine superiore di $\Delta\vec{s}_T$ (infatti $\Delta s_R \to 0$ e $\operatorname{sen}\Delta\alpha \to 0$). Ciò implica che si può porre $\overline{PP^{IV}} \simeq d\vec{S}_T$ (ma $\overline{PP^{IV}} \neq \Delta\vec{S}_T$)

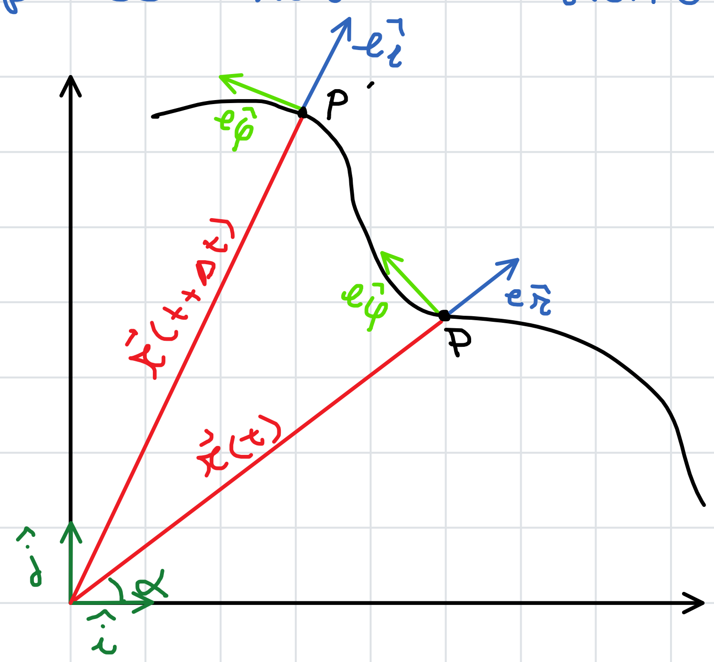
$$\Rightarrow \frac{d\vec{S}_A}{dt} = \frac{d\vec{S}_R}{dt} + \frac{d\vec{S}_T}{dt} \Longleftrightarrow v_R\cancel{\frac{dt}{dt}} + \underbrace{(\omega \times r)}_{\vec{v}_T}\cancel{\frac{dt}{dt}} \Longleftrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{v}_T$$

Considerando le accelerazioni si deve considerare che v_r e r variano nel tempo sia per la rotazione del sistema che per il moto del punto materiale stesso da cui deriva la seguente uguaglianza

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_T + \underbrace{a_c}_{\text{Accelerazione di Coriolis}}$$

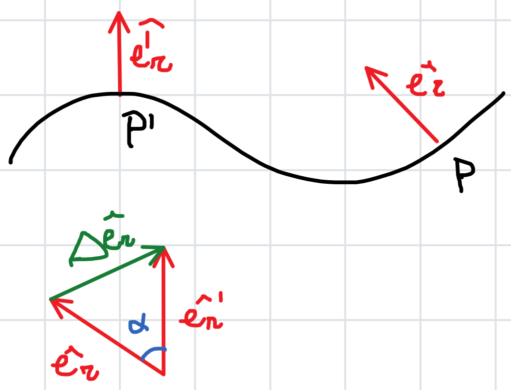
L'accelerazione di coriolis è nulla soltanto se il punto P è in equilibrio con il sistema mobile, ovvero se P non si muove o se si muove parallelamente al sistema.

1.16 Calcolo dell'accelerazione di Coriolis



Si considera una traiettoria curvilinea qualsiasi e 2 posizioni P e P' che hanno, rispettivamente, in un sistema di riferimento $(O, \hat{i}, \hat{j})$ coordinate $P\binom{x}{y}$ e $P'\binom{x'}{y'}$ tali che $\begin{cases} r \operatorname{sen}\alpha = y \\ r \cos\alpha = x \end{cases}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (analogo per P').

Allora si può ricavare un nuovo sistema di riferimento solidale a P con versori $\hat{e}_r = \hat{r}$ e $\hat{e}_\varphi \perp \hat{e}_r$, rispetto a cui $\vec{r} = r(t) \cdot \hat{e}_r(t) \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{e}_r(t) + r \cdot \underbrace{\frac{d\hat{e}_r(t)}{dt}}_{= \dot{\hat{e}}}$



Per ottenere la direzione di $\frac{d\hat{e}_r}{dt}$ si considera il limite:

$\dot{\hat{e}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{e}_r}{\Delta t}$ ma per $\Delta t \to 0$ anche l'angolo compreso $\Delta\alpha \to 0$ quindi $\Delta\hat{e}_r \perp \hat{e}_r$ e $\Delta\hat{e}_r$ ha proprio la direzione di $\hat{e}_\varphi$.

In modulo $|\Delta\hat{e}_r| = \underbrace{|\hat{e}_r|}_{\text{1 perché versore}} \cdot \Delta\varphi$ sostituendolo nel limite si

ottiene: $\dot{\hat{e}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}}_{\to \omega} \cdot \hat{e}_\varphi = \omega \cdot \hat{e}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{e}_r + r \cdot \omega \cdot \hat{e}_\varphi}$

2.0 Dinamica

2.1 Principio di inerzia:

Ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Un sistema rispetto a cui vale la legge di inerzia é definito **inerziale**.

2.2 Sistema inerziale

Un sistema é definito inerziale se ogni punto materiale "libero" in esso se posto inizialmente in quiete permane in quiete e si dice che è in equilibrio

Ogni sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema inerziale rappresentano un sistema inerziale. In oltre parole l'inerzia é una proprietá fondamentale dei corpi che li porta a mantenere inalterata la velocitá vettoriale in assenza di forze esterne.

2.3 Forza

La causa di una variazione di velocitá, ovvero della produzione di un'accelerazione, sono detta **forza**. Affinché questa venga considerata come una grandezza fisica bisogna stabilire:

1) un criterio di uguaglianza
2) un'operazione di somma
3) un'unita di misura

Si puó dedurre subito che la forza ha un carattere **vettoriale**, infatti l'accelerazione prodotta segue sempre la direzione di applicazione della forza

★ CRITERIO DI UGUAGLIANZA

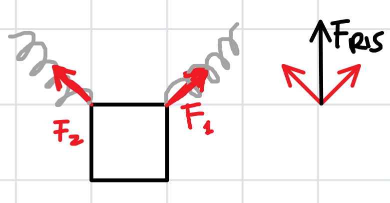
Due forze sono **uguali** se, applicate allo stesso corpo, producono la medesima accelerazione. Infatti:

$$F_1 \propto a_1 \quad e \quad F_2 \propto a_2 \quad \text{quindi se } F_1 = F_2 \iff a_1 = a_2$$

↑ proporzionale

Mentre hanno la **stessa intensitá** se il modulo delle accelerazioni é uguale, non considerando direzione e verso

★ SOMMA DI FORZE



Si considera un corpo a cui sono collegate 2 molle, provocando a queste lo stesso spostamento si ottengono 2 forze identiche che causano un'accelerazione a data dalla somma vettoriale delle 2 accelerazioni $F_1 + F_2 \propto a = a_1 + a_2$

2.4 Massa inerziale e Massa gravitazionale

Come detto precedentemente la forza é direttamente proporzionale all'accelerazione prodotta, ovvero $\vec{F} = k \cdot \vec{a}$ con k **scalare**. Per identificare il valore di k si sono considerati 2 corpi a cui si sono peró applicate forze uguali ricavando:

$$\vec{F} = (cost_1) \cdot \vec{a_1} \quad e \quad \vec{F} = (cost_2) \cdot \vec{a_2}$$

$$\vec{F}' = (cost_1') \cdot \vec{a_1}' \quad e \quad \vec{F}' = (cost_2') \cdot \vec{a_2}' \quad \text{con } a_1 \neq a_1' \text{ e } a_2 \neq a_2'$$

tuttavia si é ottenuto che il rapporto fra le accelerazioni relative alla stessa forza si mantenevano costanti ovvero: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1'}{a_2'}$, pur essendo $F \neq F'$

Ne deriva che tale costante moltiplicativa non é dipendente dalla forza, dalla posizione o dalla velocitá, ma che ne caratterizza il comportamento nei riguardi delle azioni che perturbano il suo stato iniziale di quiete o di moto rettilineo uniforme.
Tale caratteristica intrinseca del corpo é definita massa inerziale m_i la cui unitá di misura é il chilogrammo

$$\Rightarrow [F] = [M \cdot L \cdot T^{-2}] = [N] \text{ Newton}$$

2.5 Massa gravitazionale

Per massa gravitazionale si intende la capacitá di due corpi di attrarsi vicendevolmente ed é misurabile mediante una bilancia. Nonostante la massa inerziale e la massa gravitazionale siano concettualmente distinte, sperimentalmente si é visto che il loro rapporto é sempre costante. Infatti si consideri ad esempio il vettore peso dato da $\vec{p} = m_g \cdot \vec{g}$ allora $\vec{p} = \vec{F} \Rightarrow m_g \cdot \vec{g} = m_i \cdot \vec{a}$ ovvero $\vec{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right) \cdot \vec{g}$ ma $\vec{a}$ deve essere indipendente dal corpo e quindi $\frac{m_g}{m_i}$ = cost universale (vd. forza peso)

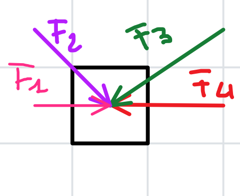
II Principio di Newton

In un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un corpo puntiforme prodotta da forze applicate é direttamente proporzionale alla somma delle forze stesse e inversamente proporzionale alla massa del corpo

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Le forze vengono poi distinte in:
- forze reali: se sono dovute ad azioni di altri corpi
- forze apparenti: dipendono dal fatto che il sistema di riferimento non é inerziale e quindi non sono da porsi in relazione all'azione di altri corpi

Principio di indipendenza delle azioni simultanee
Dato un corpo su cui agisce un sistema di forze $F_1, \dots, F_n$, allora l'accelerazione subita si ottiene dalla sommatoria delle accelerazioni che ogni forza F_i produrrebbe singolarmente



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{a_i} = m\vec{a}$$

Se la sommatoria delle forze é nulla allora il punto materiale si dice in equilibrio

Formulazione alternativa del 2° principio di Newton: quantitá di moto

Si definisce quantitá di moto il vettore $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, con direzione e verso di $\vec{v}$ e modulo pari a $m \cdot v \Rightarrow [p] = [L \cdot M \cdot T^{-1}]$

In un sistema di riferimento inerziale la forza totale applicata a un punto materiale é pari alla derivata del vettore quantitá di moto rispetto al tempo

$$\left[F = \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\vec F = \frac{d\vec p}{dt} = \frac{d(m\vec v)}{dt} = \overset{0 \text{ se } m=\text{cost}}{\frac{dm}{dt}}\cdot\vec v + m\,\overset{\vec a}{\frac{d\vec v}{dt}}$$

Il primo termine dell'uguaglianza é nullo se la massa resta costante, quindi ciò ci permette di generalizzare $F = m\cdot a$, a meno di casi in cui m é variabile.
Ne consegue che: in un sistema inerziale un punto materiale non sottoposto ad azione mantiene inalterata la sua quantità di moto ($dP = 0$)

2.6 Impulso

Si definisce impulso la variazione di quantità di moto in un determinato intervallo di tempo: $I = P_f - P_i = \Delta p$

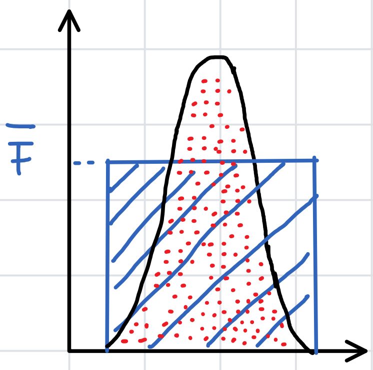
Si consideri un punto materiale in un sistema di riferimento inerziale si muova sottoposto ad una forza risultante $\vec F = m\cdot\vec a \iff dt\cdot\vec F = m\cdot\frac{d\vec v}{\cancel{dt}}\cdot\cancel{dt}$ moltiplicando per dt

Si integrano entrambi i membri $\int_{t_0}^{t_f}\vec F\,dt = \int_{t_0}^{t_f} m\,dv \Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} m a\cdot dt = [m\cdot\underbrace{a t_f}_{v_f} - m\underbrace{a t_0}_{v_0}]$

ovvero $\int_{t_0}^{t_f}\vec F = m\vec v_f - m\vec v_0 = \vec P_f - P_0 = \Delta v$, l'integrale di F in dt é detto impulso della forza I, da cui deriva il Teorema dell'impulso

L'impulso della forza agente su un punto materiale tra gli istanti t_0 e t_f é pari alla variazione di quantità di moto del punto subita in quell'intervallo di tempo

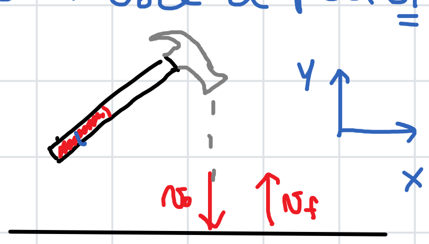
A partire dall'impulso si può inoltre ricavare un'altra grandezza: la forza media definita come $\bar F = \frac{\int_{t_0}^{t} F\,dt}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, ovvero come l'altezza del rettangolo con base $t_f - t_0$ la cui area é pari all'impulso. La forza media é quindi inversamente proporzionale al tempo, cosa che spiega perché minore é il tempo di impatto, indipendentemente dalla massa, e maggiore é la forza prodotta



Esempio: forza media e forza peso

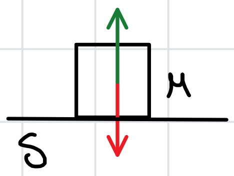
Si consideri di voler conficcare 2 chiodi in un tavolo in 2 modi diversi:
1) appoggiando una massa di 90 kg
2) colpendo il chiodo con un martello di peso 1 kg, con una velocità di 1 m/s in 10^{-3} s

Nel primo caso si nota che il chiodo nonostante la forza peso di 900 N non riesce a perforare il legno. Al contrario nel 2° caso $\bar F = \frac{P_f - P_i}{\Delta t} = \frac{2m\cdot v}{\Delta t} = 2000\ N$, e il chiodo si conficca, infatti ($P \ll \bar F$)



III principio di Newton

A ogni azione corrisponde un'azione uguale e contraria diretta lungo la congiungente i due punti materiali



Ad esempio considerato una massa posta su una superficie S allora questa reagisce alla forza peso P con una forza Rn di pari direzione e modulo, ma con verso opposto detta Reazione vincolare o normale.

Dal punto di vista microscopico Rn é giustificabile dalla repulsione degli elettroni della massa e della superficie.

2.7 Interazioni fondamentali

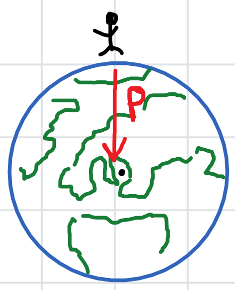
Ogni forza puó essere ricondotta ad una fra le 4 interazioni fondamentali:

1) interazione gravitazionale: si instaura fra 2 corpi quando sono l'uno in presenza dell'altro
2) interazione elettromagnetica: si instaura a causa della carica elettrica posseduta dai corpi
3) interazione nucleare debole: presente in alcune trasformazioni delle particelle
4) interazione nucleare forte: si trova all'interno dei nuclei atomici

Qualsiasi forza di "contatto" ad esempio é riconducibile ad un'interazione elettromagnetica fra le cariche dei due corpi che si scontrano.

2.7.1 Forza Peso:

La forza peso é un'interazione gravitazionale dovuta alla differenza considerevole di massa fra la terra e qualsiasi altro oggetto.
Su ogni punto materiale sulla superficie terrestre agiscono 2 forze: una forza di attrazione e una apparente dovuta al moto rotatorio della terra. La somma delle due dá la cosiddetta forza peso P



$P = m \cdot \vec{g} \quad (\vec{g} = g \cdot \hat{y})$

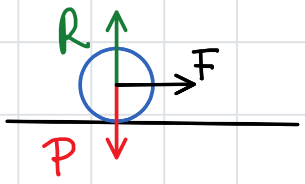
N.B. l'accelerazione $|g| = \frac{G_H \cdot M_T}{r^2}$, diminuisce seppur minimamente all'aumentare della distanza del corpo dalla terra, motivo per cui $P \sim cost$, mentre $m = cost$ e quindi m é stata identificata come grandezza fondamentale e non F

Nel caso della forza peso la massa $m = m_i = m_g$ e $\cancel{m_i} \cdot a = \cancel{m_g} \cdot g \Rightarrow$

[Ogni corpo accelera allo stesso maniera in un medesimo punto del campo gravitazionale]

2.7.2 Reazione Vincolare

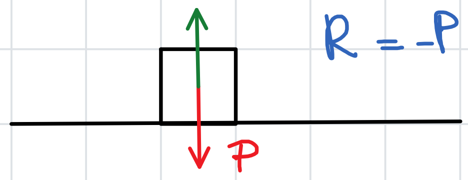
Una forza viene definita forza vincolare se si origina in relazione alle limitazioni imposte al movimento del punto materiale dai corpi circostanti, come quelle che obbligano un corpo puntiforme a restare in contatto con una superficie.



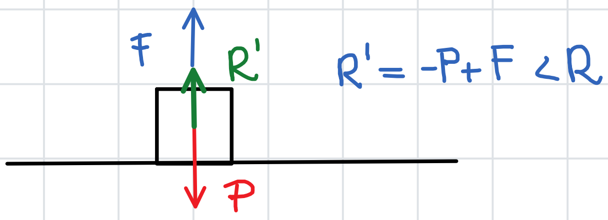
Microscopicamente Rn é dovuta ai legami intermolecolari che caricano elettricamente gli atomi

Es: Si consideri un corpo posto su una superficie, in equilibrio. Allora inizialmente $\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = 0$ se si aggiunge un'altra forza F con direzione e verso di $\vec{R}$, si ha che $R_n \to 0$ con F che aumenta finché $R_n = 0$ e $\Sigma F \neq 0$ allora il corpo subirà un'accelerazione $\vec{a} = \frac{\vec{F} - \vec{P}}{m}$

1) IN EQUILIBRIO

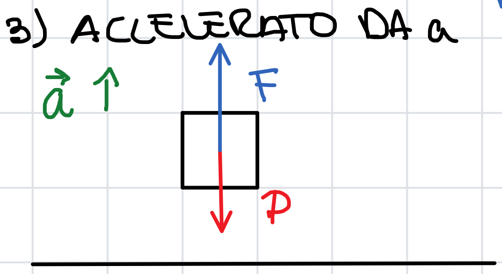


2) IN EQUILIBRIO (CON $\vec{F}$)



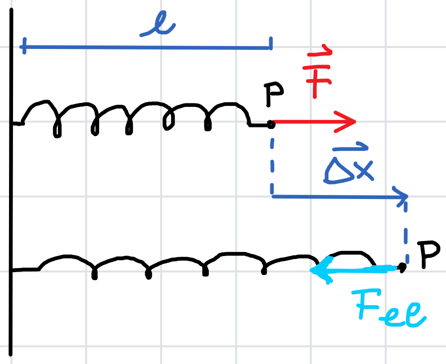
$\Rightarrow$

3) ACCELERATO DA a



2.7.3 Forza Elastica

Si origina a partire da piccole deformazioni di corpi, come molle, ed é proporzionale proprio alla deformazione.



Si consideri una molla che a riposo possiede una lunghezza l, applicando una forza $\vec{F}$ si ottiene uno spostamento $\vec{\Delta x}$. Si può notare che $F_{ee} \propto \Delta x$ e che la costante di proporzionalità dipende dal mezzo e viene indicata con k. Più precisamente $\vec{F}_{ee} = -k \cdot \vec{\Delta x}$

(Il meno serve ad indicare che la forza elastica é una forza di richiamo, ovvero una forza che si oppone allo spostamento e che cerca di ristabilire la situazione di equilibrio)

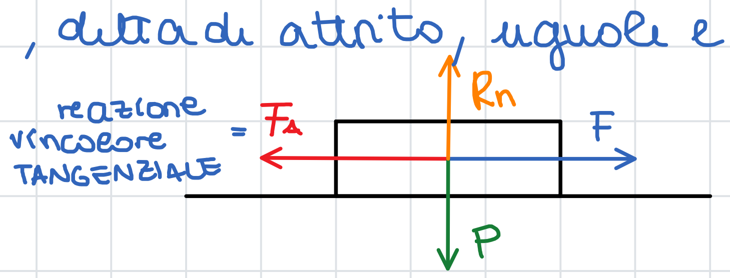
$$\vec{F}_{el} = -k\,x(t) = m\,\vec{a} = m\frac{dx^2}{dt} \Rightarrow \left[\ \frac{dx^2}{dt} - \frac{k}{m}x(t) = 0\ \right]$$ Eq. dell'oscillatore armonico
Eq. differenziale di 2° grado in x

L'equazione differenziale ha come soluzione $[x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)]$, dove x_0 é detta elongazione massima, φ fase iniziale e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2.7.4 Forza d'Attrito

Si considera un corpo appoggiato su un piano orizzontale rigido, allora il piano esercita sul corpo una reazione normale che equilibra la forza peso. Se si esercita una forza orizzontale F si può notare che finché F non supera una certa intensità F_{MAX} questo non si muove. Ciò vuol dire che F é equilibrata da una forza F_A, detta di attrito, uguale e contraria

$* \ F_A = F$ fino a che $F_T \leq F_{MAX}$

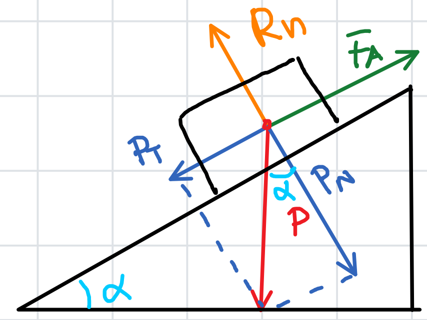


Sperimentalmente F_0 soddisfa le seguenti leggi empiriche:

1) é indipendente dalla superficie di contatto
2) é proporzionale alla Reazione Normale $F_{MAX} = \mu_S \cdot R_N$, con μ_S = coefficiente attrito statico

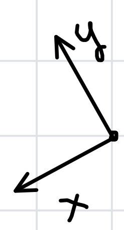
L'uguaglianza * può essere inoltre scritta come $F_A = F$ finché $F_A \leq \mu_S \cdot R_N \iff \mu_S \geq \frac{F_A}{R_N}$ ma essendo F_A e R_N le componenti tangenziale e normale della reazione il loro rapporto rappresenta $tg\,\theta$ $\Rightarrow \mu_S \geq tg\,\theta$ per $\mu_S = tg\,\theta_A$ θ_A é detto angolo di attrito

$\Rightarrow F_T = F$ finché $\theta \leq \theta_A$



Es: Un oggetto é appoggiato su un piano inclinato, con angolo α variabile, se μ_S é il coefficiente di attrito statico per quale valore di α il corpo comincia a scivolare?

Si studia il moto lungo l'asse x e l'asse y.



$\begin{cases} m \cdot g \cdot sen\alpha - F_A = F_x \\ -mg\cos\alpha + R_n = F_y \end{cases}$ se é in equilibrio $\Rightarrow \begin{cases} mg\,sen\,\alpha = F_A \\ mg\cos\alpha = R_n \end{cases}$ $\begin{cases} mg = F_A / sen\alpha \\ \frac{F_A}{tg\alpha} = R_n \end{cases} \iff \frac{F_A}{R_N} \simeq \mu_S$

quindi $tg\,\alpha \leq \mu_S \iff tg\,\alpha \leq tg\,\theta_A \iff \alpha \leq \theta_A$

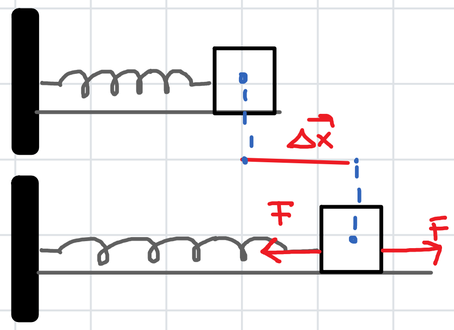
2.7.5 Forza di attrito dinamico

Si origina quando un corpo si muove strisciando contro un vincolo, è pari a : $F_D = \mu_D \cdot R_N$ dove μ_D è detto coefficiente di attrito dinamico ed ha un valore generalmente minore di μ_S a parità di materiale. La forza di attrito dinamico è costante ed ha direzione con verso opposto alla velocità con cui il corpo si muove.

2.8 Processi oscillatori

Tutti i moti oscillatori sono accumunati dal fatto che la forza di richiamo proporzionale allo spostamento.

1) Oscillazioni liberi (moto armonico puro)



Si considera un punto materiale P di massa M collegato ad una molla, questa viene allungata nella direzione di x di un tratto x tale che al punto P è applicata una forza elastica $\vec{F_e} = -kx\,\hat{i}$. Dove F_e è opposta alla forza F^* applicata dall'esterno per deformare la molla.

Rimuovendo F^* il punto P non si trova più in posizione di equilibrio ma sarà mosso dall'accelerazione causata da Fe, ovvero dal 2° principio di Newton:

$$\Rightarrow \; m \cdot \vec{a} = -k\vec{x} \quad \left(\begin{array}{l}\text{si considera solo il}\\ \text{modulo perché la direzione}\\ \text{è solo lungo } x\end{array}\right) \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{x} = -kx$$

Si è quindi ottenuta un'equazione differenziale del tipo

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \quad , \text{dove } \frac{k}{m} \geq 0 = \text{cost}$$

si può definire una costante ω tale che $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$

N.B. k e m rappresentano grandezze diverse dipendentemente dal caso considerato (ad esempio nella molla m è la massa e k la costante nel pendolo verranno considerati l = lunghezza filo e g = costante gravitazionale), in ogni caso ha dimensioni pari a:

$$[k] = [F/x] = [M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2} \cdot \cancel{L}^{-1}] \Rightarrow [\omega]^2 = [k/M] = [\cancel{M} \cdot T^{-2} \cdot \cancel{M}^{-1}]$$

Introducendo la costante ω si è quindi generalizzata l'equazione differenziale del moto armonico puro, non è più quindi associata soltanto all'esempio della molla.

Risoluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

La soluzione sarà un polinomio, sviluppabile come somma di potenze:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots$$
$$\dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \dots$$
$$\ddot{x}(t) = 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 t^2 + 20a_5 t + \dots$$

Sostituendo $\ddot{x}$ nell'equazione differenziale:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow 2a^2 + 6a_3 + 12a_4 t^2 + 20a_5 t + \dots + \omega^2 a_0 + \omega^2 a_2 t^1 + \omega^2 a_3 t^3 + \omega^2 a_4 t^4 + \omega^2 a_5 t^5 + \dots = 0$$

Si è quindi ottenuto un'equazione polinomiale di n-esimo grado con al più n soluzioni t_i, ma affinché $p(t) = 0$ allora $\forall i \quad k_i \cdot t^i = 0 \iff k_i = 0$

$$\begin{array}{l} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{array}\begin{cases} 2a_2+\omega^2 a_0=0 \\ 6a_3+\omega^2 a_1=0 \\ 12a_4+\omega^2 a_2=0 \\ 20a_5+\omega^2 a_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2=-\omega^2 a_0/2 \\ a_3=-\omega^2 a_1/6 \\ a_4=[-\omega^2(-\omega^2 a_0/2)]/12 \\ a_5=[-\omega^2(-\omega^2 a_1/6)]/20 \end{cases}$$

Si può notare che ogni a_i:
1) dipende da a_0 se è i è pari
2) dipende da a_1 se è i è dispari
3) il segno di a_i è alterno

Inoltre essendo l'eq^{ne} differenziale del 2° ordine la soluzione sarà definita a meno di 2 costanti dipendenti dalle condizioni iniziali, ovvero a_0 e a_1:

$$x(t)=a_0\left(1-\omega^2/2\cdot t^2+\omega^4/24\cdot t^4-\omega^6/(6\cdot5\cdot24)\cdot t^6\ldots\right)+a_1\left(t-\omega^2/6\, t^3+\omega^4/120\, t^5-\omega^6/7\cdot6\cdot120\, t^7\ldots\right)$$
$$=a_0\underbrace{\left(1-\frac{(\omega t)^2}{2}+\frac{(\omega t)^4}{24}-\frac{(\omega t)^6}{720}\ldots\right)}_{\cos\omega t}+\frac{a_1}{\omega}\underbrace{\left(\omega t-\frac{(\omega t)^3}{6}+\frac{(\omega t)^5}{120}-\frac{(\omega t)^7}{5040}\right)}_{\text{sen}\,\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=a_0\cos\omega t+\frac{a_1}{\omega}\text{sen}\,\omega t}$$

Per determinare le costanti a_0 e a_1 si impongono 2 condizioni:
* posizione a $t_0=0$: $x(0)=x_0=a_0\cos(0)+a_1/\omega\cdot\text{sen}(0)=a_0$
* velocità a $t_0=0$. $\dot{x}(0)=v_0=-a_0\omega\,\text{sen}(0)+a_1\cos(0)=a_1$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega_0}\text{sen}\,\omega t} \Longleftrightarrow \boxed{x(t)=C\cos(\omega_0 t+\underset{\uparrow\,\text{FASE}}{\varphi})}$$

DIM

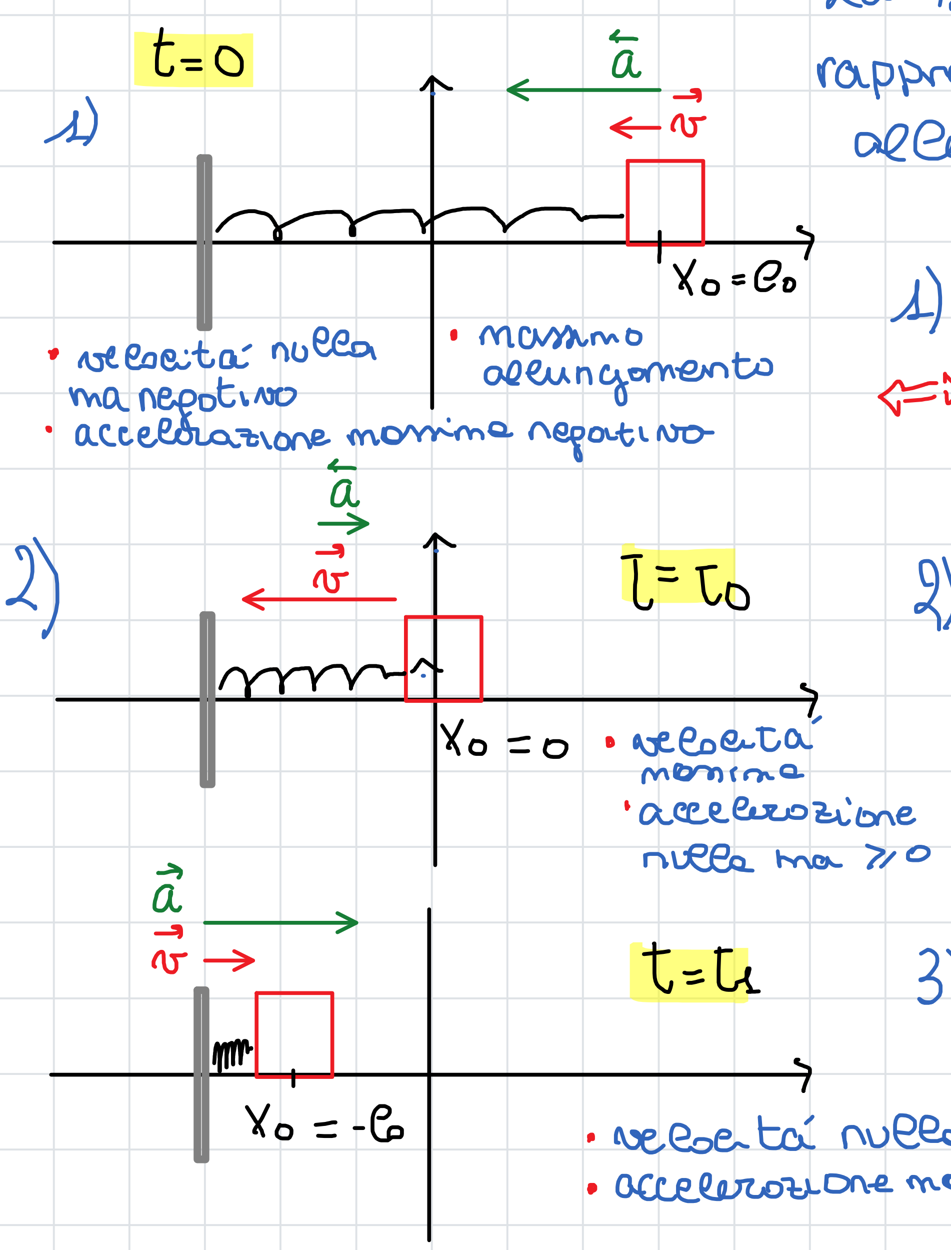
$$C\cos(\omega t+\varphi)=C\cos\omega t\cos\varphi-C\,\text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\begin{cases} C\cos\varphi=A \\ -C\,\text{sen}\,\varphi=B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C^2\cos^2\varphi=A^2 \\ C^2\text{sen}^2\varphi=B^2 \end{cases}$$ Sommando le 2 equazioni lineari: $C^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\text{sen}^2\varphi)}_{=1}=A^2+B^2$

$\Rightarrow C=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2}$ ampiezza dell'oscillazione

$\Rightarrow \varphi=-\text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)=-\text{arctg}\left(\frac{v}{\omega_0 x_0}\right)$ fase dell'oscillazione

La scelta del coseno come funzione trigonometrica che rappresenti con un'unica equazione il moto è dovuta alle seguenti considerazioni:

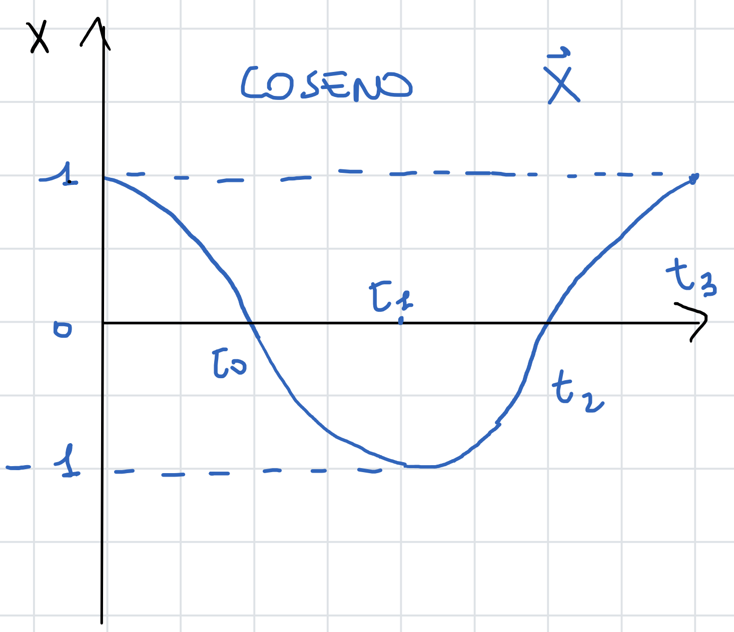


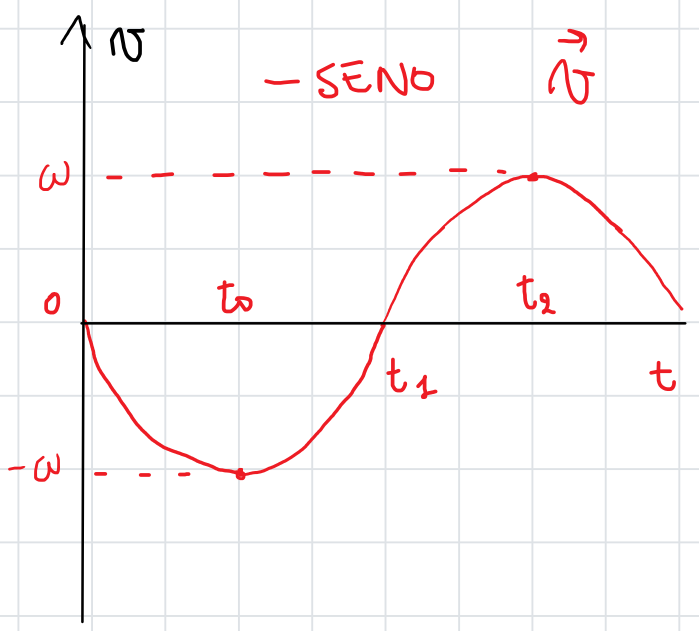
1) $\begin{cases} x(t)=C_0\cos(\omega t+\varphi)=C_0 \\ \dot{x}(t)=-\omega C_0\,\text{sen}(\omega t+\varphi)=0 \\ \ddot{x}(t)=-\omega^2 C_0\cos(\omega t+\varphi)=-a_0 \end{cases}$ Caso istante $t=0$ (dopo aver rimosso la forza esterna)

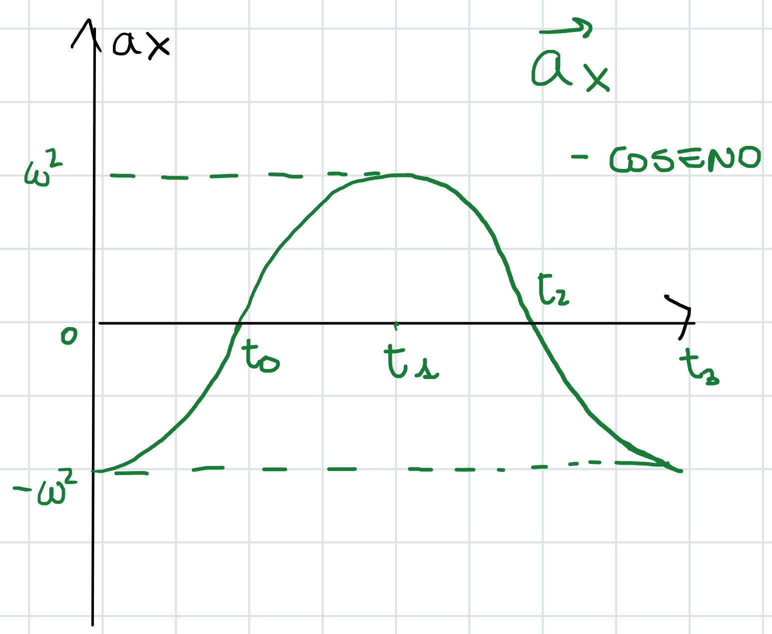
2) $\begin{cases} x(t)=C_0\cos(\omega t+\varphi)=0 \\ \dot{x}(t)=-\omega C_0\,\text{sen}(\omega t+\varphi)=v_0 \\ \ddot{x}(t)=-\omega^2 C_0\cos(\omega t+\varphi)=0 \end{cases}$ Caso istante $t=t_0$ (la molla si trova al centro)

3) $\begin{cases} x(t)=C_0\cos(\omega t+\varphi)=-C_0 \\ \dot{x}(t)=-\omega C_0\,\text{sen}(\omega t+\varphi)=0^+ \\ \ddot{x}(t)=-\omega^2 C_0\cos(\omega t+\varphi)=a \end{cases}$ Caso $t=t_1$ (la molla ha max allungamento negativo)

Ovvero graficando i dati ottenuti nelle diverse posizioni della molla si ottengono le seguenti funzioni:







Ulteriore risoluzione di $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Si suppone di avere una soluzione esponenziale del tipo $x = ce^{\lambda t}$ da cui derivando:

$\Rightarrow [x = ce^{\lambda t}] \Rightarrow [\dot{x} = \lambda c e^{\lambda t}] \Rightarrow [\ddot{x} = \lambda^2 c e^{\lambda t}]$ sostituendo x e $\ddot{x}$ nell'equazione diff.

$$\Rightarrow \lambda^2 c e^{\lambda t} + \omega_0^2 c e^{\lambda t} = 0$$

$$c e^{\lambda t}\underbrace{\left(\lambda^2 + \omega_0^2\right)}_{\text{equazione caratteristica}} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \pm i\omega_0 \ (\text{sol. complesse})$$

$$\left[x(t) = c_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + c_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}\right]$$

Tuttavia mentre matematicamente é accettabile una soluzione complessa, dal punto di vista fisico ció non é possibile quindi si impone che anche le costanti c_1 e c_2 siano valori complessi affinché $x \in \mathbb{R}$ inoltre, ció implica che il complesso coniugato deve sempre appartenere ad $\mathbb{R}$.

$$x^* = c_1^* e^{-i\omega_0 t} + c_2^* \cdot e^{i\omega_0 t} = x = c_2 e^{-i\omega_0 t} + c_1 e^{i\omega_0 t}$$ cioé c_1 e c_2 sono rispettivamente coniugati.

Quindi essendo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ possono essere scritti in forma esponenziale come:
$c_1 = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$ dove $\frac{A}{2} \in \mathbb{R}$ e φ é la parte immaginaria e c_2 (che é il suo coniugato)

sará $c_2 = \frac{A}{2} \cdot e^{-i\varphi}$ (stessa parte reale), sostituendo c_1 e c_2 in $x(t)$ si ottiene:

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}\right)$$

Ma per le formule di Eulero $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ quindi:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

II Oscillazioni smorzate

Si consideri moto armonico in cui é presente una forza dissipativa, la quale é caratterizzata dal fatto di essere proporzionale alla velocitá $\dot{x}$ (resistenze interne al mezzo in cui si muove, attriti interni nel materiale elastico...) allora l'eq^{ne} sará:

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx + b\dot{x}}$$ b é la costante di proporzionalitá tra la forza e la velocitá

Le dimensioni di b saranno $[b]=[F/v]=[M\cdot T^{-\cancel{2}}\cancel{L}\cdot\cancel{T}\cdot\cancel{L^{-1}}]=[M T^{-1}]$ (kg/s)
Si spostano tutti i membri dell'equazione a sinistra, dividendo per m e poi imponendo $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ si ottiene $\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$

Come per il moto armonico semplice si vuole risolvere l'eq. differenziale con una soluzione del tipo:

1) $x=c e^{\lambda t}$
2) $\dot{x}=\lambda c e^{\lambda t}$ sostituendo $\Rightarrow \lambda^2 c e^{\lambda t}+\frac{b}{m}\lambda c e^{\lambda t}+\omega_0^2\cdot c e^{\lambda t}=0$
3) $\ddot{x}=\lambda^2 c e^{\lambda t}$

$\Rightarrow c e^{\lambda t}\left(\lambda^2+\frac{b}{m}\lambda+\omega_0^2\right)=0$ eq. caratteristica

Rispetto però al moto armonico semplice le soluzioni dipendono dal discriminante:
$\Delta=\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\omega_0^2}$, si ottengono 3 casi ($\Delta<0$, $\Delta>0$, $\Delta=0$)

CASO 1) Piccoli smorzamenti $\Leftrightarrow b/2m<\omega_0 \Leftrightarrow \Delta<0$

Se $\Delta<0$ allora esistono 2 soluzioni complesse e coniugate.

$\lambda_1=-\frac{b}{2m}+i\underbrace{\boxed{\sqrt{\omega_0^2-(b/2m)^2}}}_{\omega'}$ e $\lambda_2=-\frac{b}{2m}-i\boxed{\sqrt{\omega_0^2-(b/2m)^2}}$ → ω' = frequenza di oscillazione ($\omega'<\omega_0$)

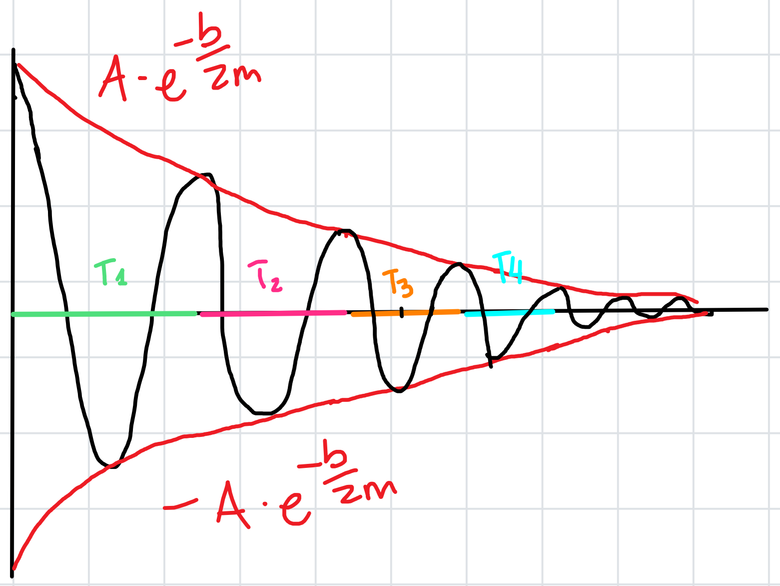
Si sostituiscono quindi λ_1 e λ_2 nella soluzione dell'eq^{ne}.

$x=c_1 e^{-\frac{b}{2m}+i\omega'}+c_2 e^{-\left(\frac{b}{2m}+\omega'\right)} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{b}{2m}}\left(c_1 e^{i\omega'}+c_2 e^{-i\omega'}\right)$

Inoltre considerando come in precedenza $c_2=c_1^*$ e viceversa si possono scrivere c_1 e c_2 come $c_1=\frac{A}{2}e^{i\varphi}$ e $c_2=\frac{A}{2}e^{-i\varphi}$, sostituendo:

$\left[x=\frac{A}{2}e^{-\frac{b}{2m}t}\left(e^{i(\omega'+\varphi)}+e^{-i(\omega'+\varphi)}\right)\right]$ Per Eulero $\Rightarrow \boxed{x=A\,e^{-\frac{b}{2m}}\cos(\omega' t+\varphi)}$

Se ne deduce che $A e^{-\frac{b}{2m}t}$ decresce in maniera esponenziale e quindi la distanza temporale fra i relativi massimi si "SMORZA"



Decremento logaritmico: $\ln\frac{x_{max,n}}{x_{max,n+1}}=\frac{b}{2m}\cdot T$

Dove T è il periodo di tempo fra i passaggi del punto materiale per le posizioni dei due massimi successivi.

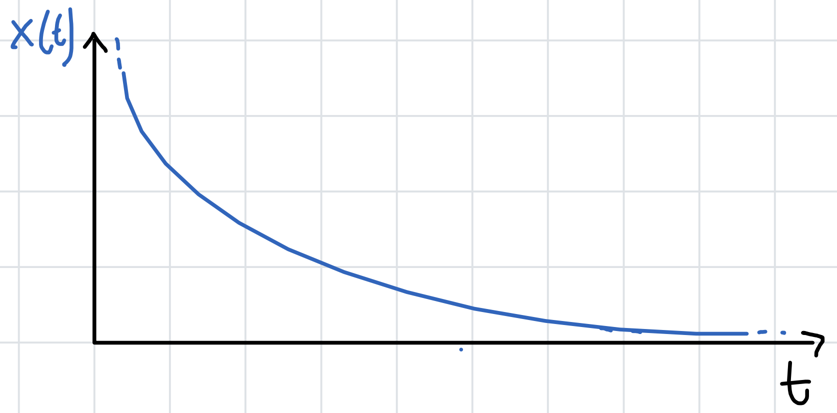
CASO 2) Grandi smorzamenti $\Leftrightarrow b/2m>\omega_0 \Leftrightarrow \Delta>0$

Per smorzamenti molto grandi la frequenza di smorzamento diminuisce.
Le soluzioni sono reali e distinte: $\lambda_{1,2}=-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{(b/2m)^2-\omega_0^2}$

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow x = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}} \in \mathbb{R}$$

Non é quindi una soluzione riconoscibile ad una funzione trigonometrica essendo giá un reale e di conseguenza non rappresenta un'oscillazione.

$$x = e^{-\frac{b}{2m}t}\left[e^{\sqrt{(b/2m)^2-\omega_0^2}} + e^{-\sqrt{(b/2m)^2-\omega_0^2}}\right]$$ Esponenenziale decrescente



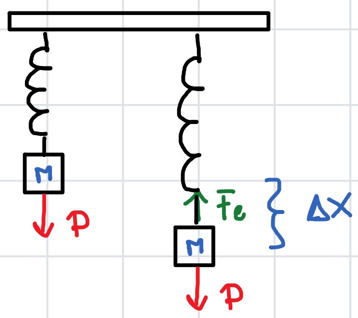
$$\left[\frac{2m}{b}\right] = [\cancel{M}\cdot\cancel{M}^{-1}\cdot T] = \tau$$ Tempo caratteristico.

CASO 3) $\frac{b}{2m} = \omega_0 \Leftrightarrow \Delta = 0$ Smorzamento critico.

Presenta una soluzione del tipo: $x(t) = (C+Bt)\,e^{-\frac{b}{2m}t}$, cioé si introduce un termine proporzionale al tempo, rappresenta un moto aperiodico che tende a tornare in una posizione di equilibrio il piú rapidamente possibile.

III. Oscillazioni forzate

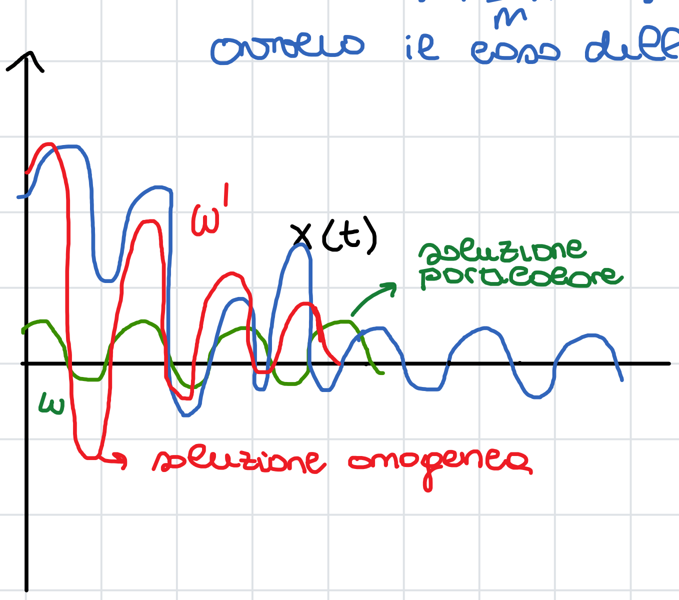
Si considera ad esempio una molla verticale a cui é applicata una massa M, allora la sua oscillazione sará descritta dall'eq. diff. $\ddot{x} + \omega_0 x = F$, dove F é costante ed é proprio la forza peso. Se ne ricava che la forza ha come unica conseguenza il fatto di modificare la posizione di equilibrio da $x_0 = 0$ a $x_0 = \frac{mg}{k}$, tuttavia non ha alcun effetto sulla frequenza di oscillazione.



Ne consegue che lo studio delle forze costanti non é rilevanti ai fini di un moto oscillatorio.
Si consideri invece che il punto materiale P considerato, a cui sono applicate una forza elastica e una resistenza passiva, presenti anche un'altra forza la quale la quale peró varia sinusoidalmente nel tempo. (E' sufficiente infatti a rappresentare ogni funzioni regolare che abbia determinati parametri)

$$\Rightarrow m\ddot{x} = \underbrace{-b\dot{x}}_{\text{RESISTENZA PASSIVA}} - kx + \underbrace{F}_{\text{FORZANTE}} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \underset{\uparrow\ \text{frequenza di oscillazione}}{\omega_0^2} x - \frac{F}{m} = 0$$

$x(t) =$ Soluzione omogenea + soluzione particolare
sol. di $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
ovvero il caso dello smorzamento



Né deriva che x(t) sará data dalla sovrapposizione dei grafici della soluzione omogenea, di frequenza ω, e della soluzione particolare di frequenza ω'. Per questo il suo grafico sará irregolare fino ad un certo tempo t dopo di cui la frequenza di oscillazione sará quella della sol. particolare poiché la sol. omogenea si sará smorzata completamente

Considerando che tutti i parametri dell'eq^{ne} differenziale sono reali, ma che risulta più conveniente lavorare con soluzioni complesse, allora si preferisce lavorare con $\tilde{F} = F_0 e^{i\omega t}$ piuttosto che con la forza effettiva $F = F_0 \cos\omega t$ (sapendo inoltre che $\tilde{F} = \underbrace{F_0\cos\omega t}_{\text{Forza } F} + iF_0 \sin\omega t$)

Da cui quindi risulta $F = Re(\tilde{F})$. Sostituendo nell'equazione:

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{x}} + \frac{b}{m}\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\omega t}$$

la soluzione sarà del tipo: $\tilde{x} = A e^{i\omega t}$, derivando:

$\dot{\tilde{x}} = i\omega A e^{i\omega t}$ e $\ddot{\tilde{x}} = (i\omega)^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$ sostituendo nell'eq. differenziale:

$$-\omega^2 A \cancel{e^{i\omega t}} + \frac{b}{m} \cdot i\omega A \cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2 \cdot A \cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F}{m} \cdot \cancel{e^{i\omega t}} \iff A\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{b\omega}{m}\right) = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{b\omega}{m}}$$

COEFFICIENTE COMPLESSO IN FORMA CARTESIANA

Si scrive il denominatore con coordinate polari $\rho \cdot e^{i\theta}$ dove $\rho = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}$ e $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{(b\omega)/m}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$, quindi $A = \frac{F}{m \cdot \rho} \cdot e^{-i\theta}$ chiamando $-\theta = \varphi$ si ottiene

$A = \frac{F}{m\rho} \cdot e^{i\varphi}$. Sostituendo A in $x(t)$ si ottiene $x(t) = \underbrace{\frac{F}{m\rho}}_{\text{MODULO DI } A} \cdot \underbrace{e^{i\varphi}}_{\text{FASE DI } A} \cdot e^{i\omega t}$

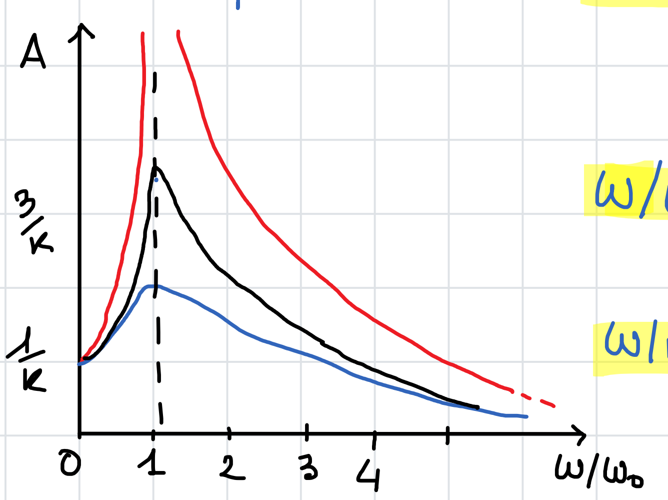
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F}{m\rho} \cdot \boxed{e^{i(\omega t + \varphi)}} = \cos(\omega t + \varphi) \text{ PER EULERO}$$

$$\iff \left[x(t) = \frac{F}{m\rho} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \right]$$

N.B. ρ non è costante in questo caso ed è ciò che viene definita **risonanza**, cioè la differenza fra la frequenza propria e quella di oscillazione che causa una variazione dell'ampiezza.
φ rappresenta la differenza di fase

Ampiezza di Oscillazione

Per frequenza ω:



$\omega = 0$ $\Rightarrow$ forzante è costante $\Rightarrow \rho = \omega_0^2 \iff A = \frac{F}{m\omega_0^2} \nearrow \frac{k}{m}$ e quindi $A = \frac{F}{k}$ lo spostamento statico

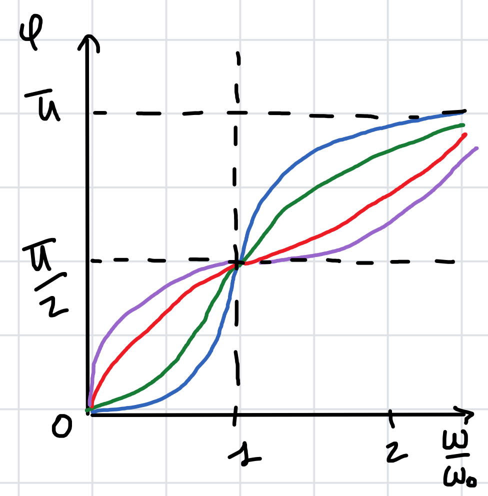
$\omega/\omega_0 \to 1$ $\Rightarrow$ l'ampiezza esponenzialmente tendendo ad infinito infatti $\rho \to 0$ e quindi $F \to +\infty$

$\omega/\omega_0 \gg 1$ $\Rightarrow$ l'ampiezza tende a 0 infatti $\rho \to +\infty$ e A è inversamente proporzionale a ρ quindi decresce progressivamente

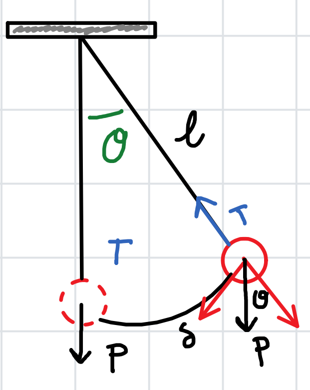
Fase di oscillazione

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{(b\omega)/m}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

per $\omega/\omega_0 \to 1$ $\operatorname{arctg}(B/\omega_0^2-\omega^2) \to \pi/2$
per $\omega = 0 \iff$ frequenza costante allora $tg\, 0 = 0$
per $\omega \to \infty$ allora $\operatorname{arctg}(B/\omega_0^2-\omega^2) \to \pi$



2.81 Oscillazione di un pendolo



Nel caso del pendolo per ricavare l'eq. oraria si considera che se $\theta \neq 0$ allora $R_n + P \neq 0$, ovvero:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

tangenziale $\begin{cases} -mg \sin\theta = m\ddot{s} \\ -mg\cos\theta + T = m\frac{dv}{dt} \end{cases}$ normale

Lo spazio percorso in un angolo θ sarà $s = l\theta$ e la forza corrisponderà alla componente tangenziale di P che non viene equilibrata da R_n:

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

$\ddot{s} + g\sin\theta = 0$ con $\theta = s/l$ sostituendo $\Rightarrow$ $\ddot{s} + g\sin\frac{s}{l}$

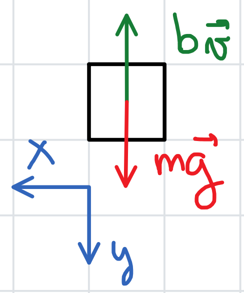
Tale eq. differenziale non è risolvibile nel caso generale, ma se si considerano piccole oscillazioni si può approssimare $\sin\theta \simeq \theta$. Quindi: $\ddot{s} + g\theta = 0 \iff \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0$

Inoltre ponendo $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (Il periodo per $\theta \ll 1$ è indipendente dall'ampiezza stessa, isocronismo delle piccole oscillazioni)

L'equazione oraria sarà quella di un moto armonico:

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Es: Caduta di un grave in presenza di un fluido ($F \propto v$)



Si ottiene:

$$m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - b\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

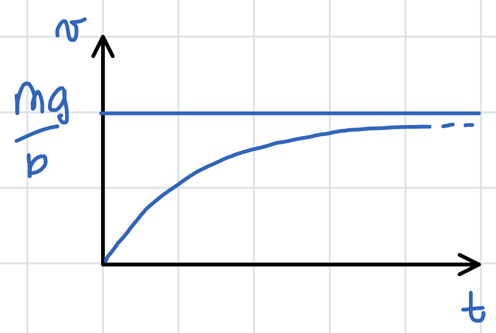
Si risolve per separazioni di variabili dopo aver effettuato un cambio di variabile:

1) $mg - bv = x$
2) $-b\,dv = dx$
3) $dv = -\frac{dx}{b}$

$$\Rightarrow \left[x = \frac{m}{b}\cdot -\frac{dx}{dt}\right] \Rightarrow \int_{mg}^{mg-bv}\frac{dx}{x} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

La soluzione è: $\ln(mg - bv) - \ln mg = -\frac{b}{m}t \iff \ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right) = -\frac{b}{m}t$, si ricava l'argomento del logaritmo:

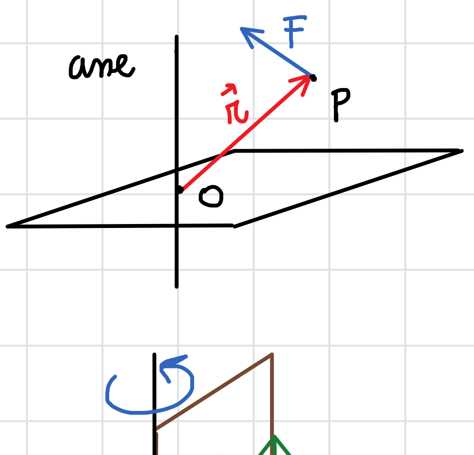
$$\left[1 - \frac{bv}{mg} = e^{-\frac{b}{m}t}\right] \iff \left[v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]$$



Se ne ricava che per moti all'interno di un fluido viscoso la velocità dipende dal peso (Una sfera di piombo atterra prima di una sfera di polistirolo)

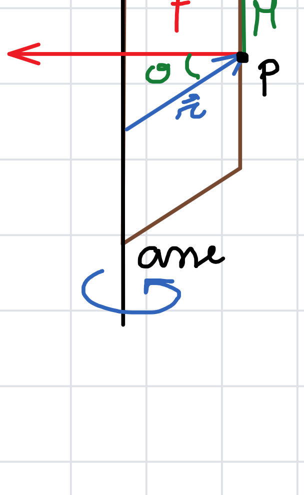
2.9 Momento di una forza

Si consideri la rotazione attorno ad un'asse, passante per un punto P detto polo, causata da una determinata forza e quindi da un'accelerazione, allora si può definire il



Momento della forza: $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

Generalmente l'accelerazione causata ha la stessa direzione di $\vec{F}$ nel caso però del moto circolare l'acc. angolare si modifica anche in modulo, dipendendo solo dalla componente tangenziale di F ($a_c \propto \theta$) oltre ad essere influenzato dal punto di applicazione.



Infatti riducendo la distanza diminuisce anche l'accelerazione ($a_c \propto d$)

$$M = \vec{r}\times\vec{F} = rF\sin\theta$$ (il seno perché conta la componente ortogonale)

momento della forza rispetto al polo O !!

Vettore ortogonale al piano di applicazione, contenente il vettore raggio e il vettore forza.

Considerando inoltre che $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ e $F\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}$ allora le coordinate di M sono: $M\begin{pmatrix}yF_z - zF_y\\ xF_z - zF_x\\ xF_y - yF_x\end{pmatrix}$,

Se ci sono più forze applicate nel punto si calcola la risultante e $\left[M = r\times\sum_{i=1}^{n}F_i\right]$

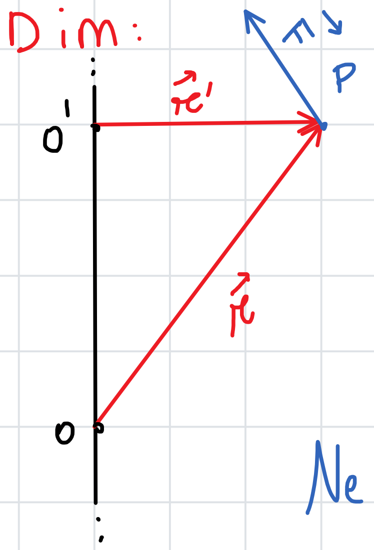
Le dimensioni di M saranno $[M] = [L \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}] = [L^2 M T^{-2}] \Rightarrow N \cdot m$

Il modulo di $|M| = rF \cdot \operatorname{sen}\theta = b \cdot F$ dove b é detto braccio ed é la distanza perpendicolare di P da O.

2.91 Momento assiale M_a

Si consideri una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P e una retta orientata a detta asse, allora si ottiene che la proiezione su a del momento di F rispetto ad un punto scelto della retta $\Rightarrow$ Il momento assiale é indipendente dal punto di applicazione sull'asse, ma dipende solo da $\vec{F}$ e dalla direzione di $\vec{a}$.

Dim:



Per le proprietá delle somme tra vettori: $\vec{r}' = \vec{OO'} + \vec{r}$, Sostituendo r' nel momento assiale M_a' che ha come polo O', si ottiene:

$$M_a' = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{OO'}) \times \vec{F} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{M_a \text{ con polo O}} + \underbrace{\vec{OO'} \times \vec{F}}$$

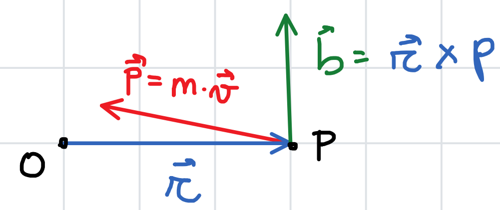
ha proiezione nulla su a essendo ortogonale a questa.

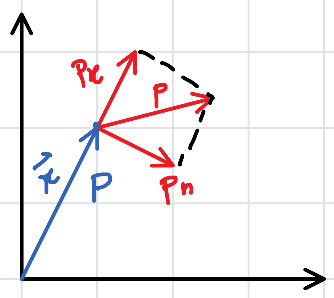
Ne deriva che $M_a' = M_a$, cioé M_a é indipendente dal polo $O \in a$ (Considerando $M_a = \vec{r} \times \vec{F}$

Oss: Il momento assiale ha un solo grado di libertá, ovvero la componente ortogonale all'asse.

2.92 Momento della quantitá di moto

Siano P, punto materiale, e p, vettore quantitá di moto applicato in P allora si definisce momento della quantitá di moto $\vec{b}$ il vettore $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$ che ha direzione normale a r e p e modulo pari a $rp\operatorname{sen}\theta$, con θ l'angolo compreso tra i vettori raggio e quantitá di moto. (Il verso si calcola con la regola della mano destra)





$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p_r} + \vec{p_n}) = \underbrace{(\vec{r} \times \vec{p_r})}_{\substack{\shortparallel \\ \text{perché paralleli}}} + \overbrace{(\vec{r} \times \vec{p_n})}^{\substack{r \cdot p_n \text{ perché perpendicolari} \\ \shortparallel}} = r m \vec{v}_n$$

Nel caso in cui $v_r = 0$ allora il moto risulta un semplice moto circolare, in cui $\vec{\omega}(t)$ é $\perp$ al piano passante per O e contenente $\vec{v}$ e ha modulo $\omega = v/r = \text{cost}$.

Ne deriva che il momento della quantitá di moto $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{\omega} r \cdot m) = r^2 \vec{\omega} m$ poiche $\vec{\omega}$ e $\vec{b}$ sono paralleli. Nell'equazione di $\vec{b}$ si ha che l'inerzia é sostituita dal momento di Inerzia definito come $[I = mr^2]$

2.93 Conservazione del momento della quantitá di moto

Si consideri un punto P su cui é applicata una forza $\vec{F}$ allora per il teorema dell'impulso risulta $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, da cui il momento della forza sará: $M = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$. Differenziando inoltre la relazione su $\vec{b}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}}_{\to \vec{v}} \times \vec{p} + r \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

, dove $\vec{v}$ é parallelo alla quantitá di moto quindi il 1° prodotto vettoriale é nullo e $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = M$

In un sistema inerziale la derivata rispetto al tempo della quantitá di moto di un punto materiale rispetto ad un punto fisso é pari al momento della forza agente su di esso.

Nel caso in cui O non fosse fisso allora $\frac{d\vec r}{dt} \times \vec p \neq 0$ in quanto $\frac{d\vec r}{dt} = \vec v - \vec v_0$, dove v_0 é la velocitá con con cui si muove O, e quindi $\frac{d\vec b}{dt} = \cancel{\vec v \times \vec p} + (-\vec v_0) \times \vec p + \underbrace{\vec r \times \frac{d\vec p}{dt}}_{\to \frac{d\vec b}{dt}} \Rightarrow \left[M = \frac{d\vec b}{dt} + \vec v_0 \times \vec p \right]$

Oss: $M = \frac{d\vec b}{dt} \Rightarrow \underbrace{M \cdot dt}_{\text{Impulso angolare}} = d\vec b \Rightarrow \int M\, dt = \vec b \Rightarrow M(t_f - t_0) = \vec b_f - \vec b_i = \Delta \vec b$

Ne deriva che se $\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$, ovvero se $\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$, la quantitá di moto é costante.

Teorema di conservazione di $\vec b$: se l'impulso angolare é nullo, si mantiene costante il momento della quantitá di moto $\vec b = cost$

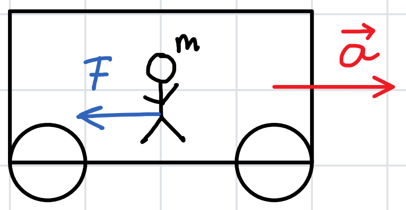
3.0 Forze apparenti e sistemi non inerziali

Soltanto mediante il 1° e il 2° principio di Newton non é possibile diversificare i casi in cui un corpo é accelerato a causa di forze reali o a causa di un sistema non inerziale. Considerando peró il 3° principio risulta che: le forze apparenti hanno reazione vincolare, quindi se un punto accelerato non presenta forze applicate allora si tratta di un sistema non inerziale.

In tal caso $\Rightarrow \underbrace{\vec F = m \cdot \vec a_A}_{\text{accelerazione rispetto al sistema fisso assoluto}} = m(\underbrace{\vec a_R}_{\text{Relativa}} + \underbrace{\vec a_T}_{\text{Trascinamento}} + \underbrace{\vec a_C}_{\text{Coriolis}}) \Rightarrow m \cdot \vec a_R = \vec F - \underbrace{m\vec a_T - m\vec a_C}_{\text{forze apparenti}}$

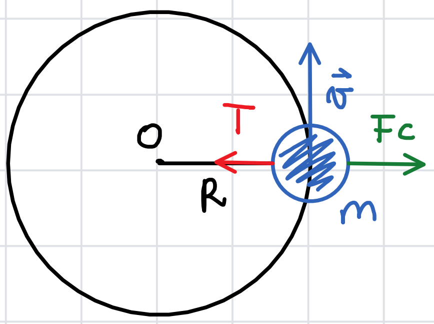
Esempi:

1) Veicolo che accelera (Forza di Trascinamento)



Se si considera un punto materiale P in un sistema che accelera con accelerazione pari ad $\vec a$, allora P sperimenta una forza $m \cdot a$, contraria al moto del sistema, apparente.

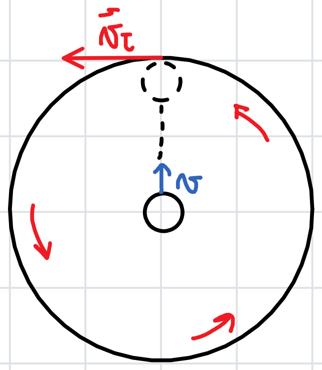
2) Moto circolare: (Forza centrifuga)



Si consideri una pallina di massa m che ruota attorno ad un centro O, a cui é legata mediante un filo. Allora rispetto ad:
- un sistema fisso inerziale presenta una tensione $T = m\,\vec a = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec r$
- un sistema solidale alla pallina, questa é in equilibrio ovvero $\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$, e deve esistere una forza F detta forza centrifuga tale che:

$$T + F = 0 \iff F = -T$$

3) Moto di un punto all'interno di un moto circolare (Forza di Coriolis)



Nel caso di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme in un sistema che ruota con $\omega = cost$, tale che si sposta dal centro fino sulla circonferenza allora su questo l'accelerazione sará:

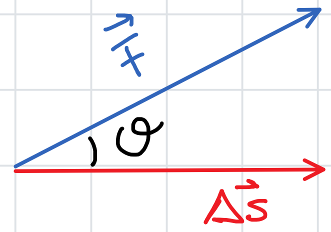
$$\vec a_A = \vec a_R + \vec a_T + \underbrace{\vec a_C}_{\to \text{Coriolis}}$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec a_R = F - \underset{0}{m a_T} - F_C$$

4.0 Lavoro

Sia P un punto materiale a cui é applicata un forza F COSTANTE, la quale causa uno spostamento Δs lungo una traiettoria rettilinea, allora si definisce lavoro lo scalare:

$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F \Delta s \cos\theta$ (θ angolo compreso fra $\vec{F}$ e $\vec{\Delta s}$)



Le dimensioni di L saranno: $[L] = [F\ S] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}] = J$ joule

Si considera solo la componente di F tangente allo spostamento, poiché causa l'accelerazione che fa variare il modulo di v.

Quindi si avrebbe lavoro positivo se lo spostamento é nel verso della forza e sarebbe nullo se questi fossero perpendicolari.

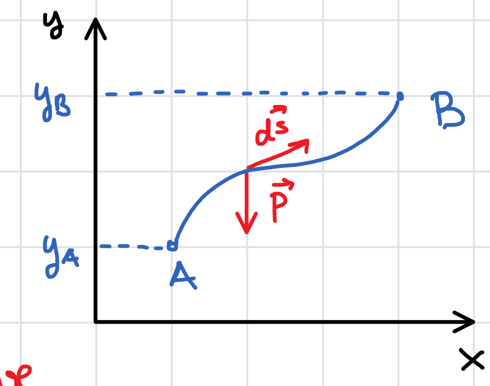
Tuttavia nel caso F fosse variabile si devono considerare gli infinitesimi spostamenti tale che:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

$L > 0$: lavoro compiuto

$L < 0$: lavoro subito

Es: Si vuol calcolare la forza necessaria per alzare un corpo di massa m ad un'altezza h: allora $\vec{F} = m \cdot \vec{g} = cost$ e $|\vec{S}| = h = cost$, quindi $L = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos\theta = m \cdot \vec{g} \cdot h \cdot 1 = \underline{\underline{mgh}}$



$$\vec{F} = -mg\hat{y}$$
$$L = \int -mg\hat{y} \cdot d\vec{s} = -mg \int \hat{g}\, ds$$
$$= -mg \int_{y_A}^{y_B} dy$$
$$= -mg(y_B - y_A) = -\Delta U$$

4.1 Energia Cinetica e Teorema delle forze vive

A partire dall'equazione del lavoro $L = \int F \cdot ds = \int m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \int d\vec{v} \cdot \boxed{\frac{d\vec{s}}{dt}}^{\vec{v}}$, considerando che:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow d(v^2) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

da cui si può scrivere $\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{d(v^2)}{2}$, allora si ottiene $L = m \int_{v_i}^{v_f} \frac{d(v^2)}{2} = T_f - T_i$

$$\left[L = \underbrace{\frac{1}{2} m v_f^2}_{T_f} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_i^2}_{T_i} \right]$$

TEO. DELLE FORZE VIVE

La variazione di energia cinetica di un punto materiale é sempre pari al lavoro compiuto su di esso dalla sommatoria delle forze applicate

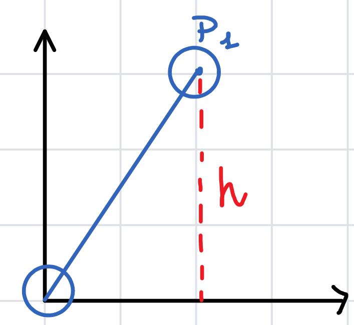
Si definisce quindi energia cinetica T la capacitá di un corpo di massa m di compiere lavoro, in virtú del fatto che questo possieda una velocita $\vec{v}$

4.2 Campi conservativi

Un campo di forza si definisce conservativo se il lavoro compiuto dalla forza per spostare un punto materiale da una posizione P_1 a una posizione P_2 é indipendente dal percorso, ma dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale.

Si può dedurre che per essere conservativo un campo deve essere necessariamente stazionario, cioé indipendente dal tempo. Infatti diverse traiettorie implicherebbero diversi tempi e quindi il lavoro sarebbe diverso a parità di posizioni iniziale e finale

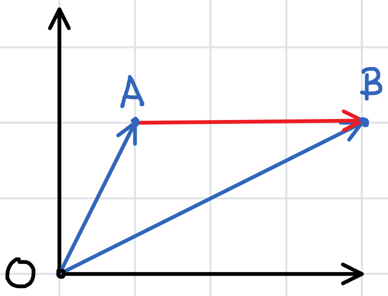
4.2.1 Campo gravitazionale e Energia potenziale



Si consideri un punto materiale di massa m, su cui é applicata una forza peso $P = m\vec{g}$ considerabile costante con buona approssimazione, che si muove in un sistema, dall'origine fino ad un punto P_1. Allora il lavoro compiuto dalla forza peso sarà $dL = P \cdot ds \Rightarrow L = P \int_0^{P_1} ds = P(z_1 - z_0) = mgh$

Ne deriva che il campo gravitazionale é indipendente dalla curva compiuta dal corpo per spostarsi da O a P_1 e quindi é un campo conservativo.

L'indipendenza del lavoro dal percorso compiuto può essere inoltre facilmente dimostrata considerando che se L dipende solo dagli estremi A e B allora può essere espresso come differenza fra i valori che una stessa funzione U delle coordinate assume rispettivamente in B e in A.



Si considera ad esempio il passaggio da A a B, considerando il percorso per O, allora:

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \int_A^O dL + \int_B^O dL = \int_A^O dL - \int_O^B dL = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

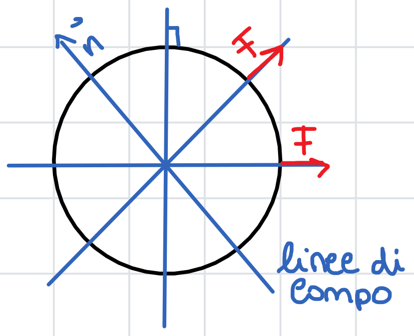
Dove U(P) è detta Energia potenziale, ed è definita a meno di costante additiva, ovvero il valore arbitrariamente assegnato al punto di riferimento O

Oss:
1) Si può definire un'energia potenziale solo se il lavoro considerato è conservativo.
2) Se i due punti A e B coincidono ovvero se il percorso è una linea chiusa allora il lavoro per compiere tale spostamento è nullo.

4.22 Superfici equipotenziali

Si definiscono superfici equipotenziali i luoghi geometrici dove l'energia potenziale assume i medesimi valori e quindi il lavoro per spostarsi da un punto all'altro è nullo.

Nel caso delle forze centrali, per motivi simmetrici, le superfici sono delle sfere.
Inoltre per ogni campo vettoriale è possibile identificare le linee di campo vettoriali a cui ogni vettore è tangente, le quali sono a loro volta ortogonali alle superfici equipotenziali.



Sia P un punto della curva nel quale è applicato il vettore $d\vec{n}$ ortogonale alla superficie, allora considerato uno spostamento $d\vec{s}$ con direzione, modulo e verso di $\vec{n}$, il lavoro per percorrerlo sarà:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underset{\vec{F} \,//\, dn}{\vec{F} \cdot d\vec{n}} = F_n\, dn = -dU \Rightarrow F_n = -\frac{dU}{dn} = \begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

GRADIENTE DI U

4.23 Teorema di conservazione dell'energia

Note le relazioni fra il lavoro e le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale si può ricavare un'ulteriore relazione:

$$L_{cons} = -\Delta U \quad e \quad L_{cons} = \Delta T \Rightarrow \Delta T = -\Delta U \iff [\Delta T + \Delta U = 0]$$

segno negativo perché se viene compiuto lavoro si perde energia

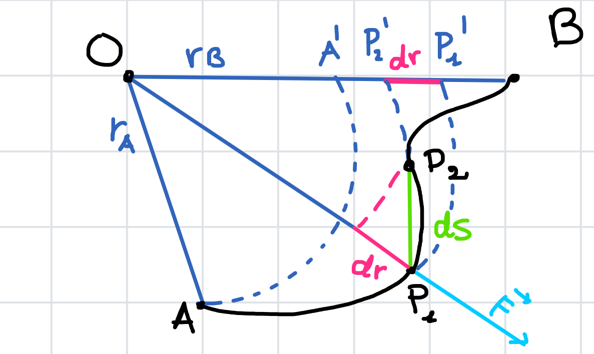
TEO. DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

> Per un punto che si muova sottoposto alle sole forze esercitate da un campo conservativo, l'energia meccanica data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale resta costante

4.24 Forze centrali

Una tipologia di forze conservative sono le forze centrali ovvero forze in cui il versore $\hat{r}$ punta sempre verso un centro, qualsiasi sia il punto della traiettoria e in cui il modulo dipende esclusivamente dalla distanza da questo.
Un esempio è la forza gravitazionale $\left[\vec{F}_G = \pm \frac{G m_1 m_2}{r^2} \cdot \hat{r}\right]$ (attrattiva/repulsiva); si vuole dimostrare che è conservativa, ovvero che non dipende dalla curva:

DIM:



Si considera un punto P sulla traiettoria da A a B allora in P saranno applicati 2 vettori $\vec{F}$ e $d\vec{s}$, tale che $dL = \vec{F}\cdot d\vec{s} = \pm F \cdot dr$ dove dr è la proiezione di $d\vec{s}$ su oP.

Si può notare che l'integrale $\int_{c(P_1,P_2)} F(r)\,dr = \int_{c(P_1',P_2')} F(r)\,dr = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr$

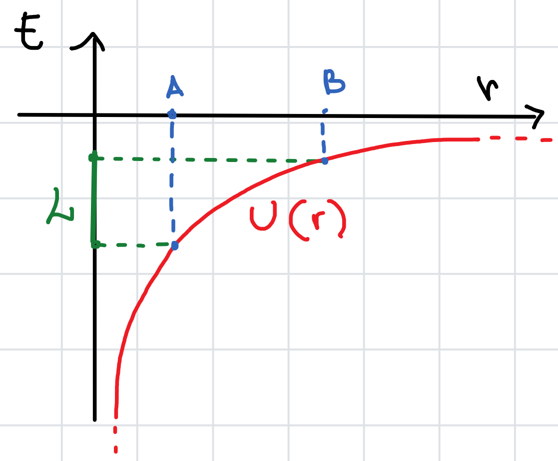
dove $F = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$

$$\Rightarrow L = -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\,dr = +G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = U(B) - U(A)$$

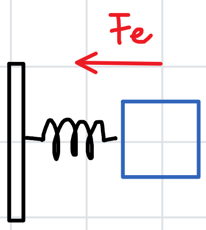
Cioè L dipende solo dalle distanze di A e B dal centro e quindi è CONSERVATIVA.

Inoltre $\frac{G m_1 m_2}{r_A}$ = energia potenziale al tendere di B infinito, che è equivalente a dire che $\frac{1}{r_B} \to 0$, e analogo per $\frac{G m_1 m_2}{r_B}$ quindi L può essere scritto come:

$$L = U_B - U_A = -\Delta U$$



4.25 Forze elastiche: Energia potenziale elastica

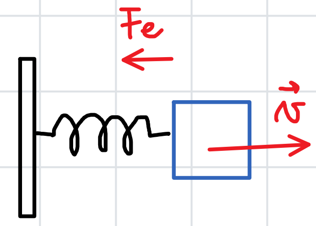


Si considera un corpo collegato ad una molla compressa che applica sulla massa una forza $\vec{F} = -k\vec{x}$. Per la definizione di lavoro $L = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$

$$= \int -kx \cdot \underbrace{\hat{x}\cdot ds}_{= dx} = -k\int x\,dx = -\frac{k}{2}\cdot x^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_B^2\right) = \underbrace{\frac{1}{2}k x_A^2}_{U_{el}(A)} - \underbrace{\frac{1}{2}k x_B^2}_{U_{el}(B)}$$

Si definisce quindi energia potenziale elastica U_{el} lo scalare $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$

Se Δx diminuisse si avrebbe che parte dell'energia potenziale elastica si trasformerebbe in energia cinetica, tale che l'energia meccanica totale sarebbe: $E = U_{el} + T = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$



Dove $x(t)$ e $v(t)$, essendo un moto armonico semplice sono pari: $x(t) = A\cos(\omega t)$ e $v(t) = -A\omega \,\text{sen}\,\omega t$. Sostituendo nell'equazione dell'energia $E = \frac{1}{2}k(A\cos\omega t)^2 + \frac{1}{2}m(-A\omega\,\text{sen}\,\omega t)^2$

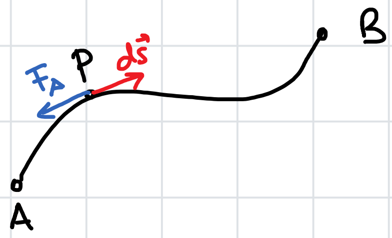
$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m\cdot\omega^2 A^2 \text{sen}^2\omega t$ ma $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}\cancel{m}\cdot\frac{k}{\cancel{m}}\cdot A^2\text{sen}^2\omega t \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}kA^2(\underbrace{\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t}_{=1})$

$\Rightarrow \left[E = \frac{1}{2}kA^2\right]$

4.3 Forze non conservative

Si vuol calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito per uno spostamento AB



$$L_A = \int_A^B \vec{F}_A \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-\mu\cdot m\cdot g\cdot\hat{\tau})\cdot d\vec{s} = -\mu m g \cdot \int_A^B \hat{\tau}\cdot d\vec{s} = -\mu m g \int_{s(A)}^{s(B)} ds$$

paralleli quindi il prodotto scalare è massimo

$\Rightarrow L_A = -\mu m g(s_A - s_B) = \mu m g(\underbrace{s_B - s_A}_{})$ → lunghezza della curva

Ne consegue che la forza di attrito è una forza non conservativa

4.31 Lavoro delle forze non conservative

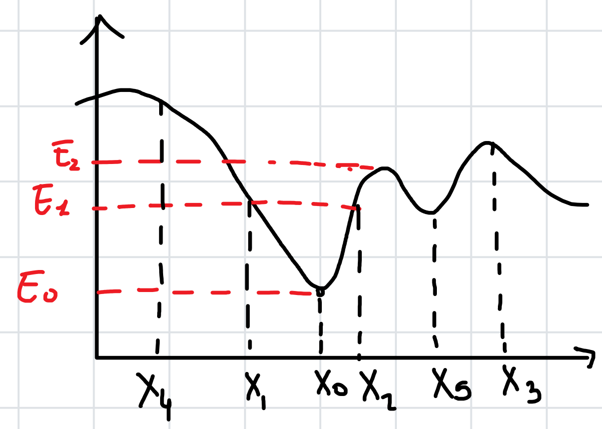
Considerato un punto materiale P su questo saranno applicate sia forze conservative che non tali che: $F = \sum (F_{c_i} + F_{NC_i}) \Rightarrow L = \sum (L_{c_i} + L_{NC_i}) = \Delta T$ dove $L_{cons} = -\Delta U$

$\Rightarrow -\Delta U + L_{NC} = \Delta T \Rightarrow L_{NC} = \Delta T + \Delta U = \Delta E$

Il lavoro delle forze non conservative é pari alla variazione di energia meccanica, da cui si ricava che se:

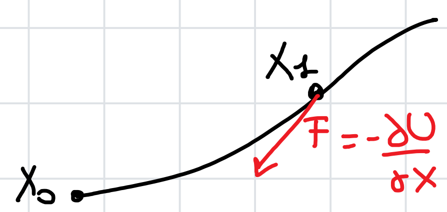
1) $L_{NC} > 0 \Rightarrow E_f > E_i$ ovvero il corpo ha acquistato energia
2) $L_{NC} < 0 \Rightarrow E_f < E_i$ ovvero il corpo ha perso energia (é il caso della forza d'attrito)

4.32 Grafico dell' energia



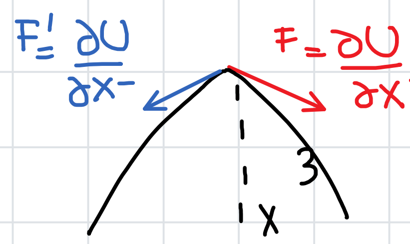
Si considera un punto materiale in un campo conservativo tale che l'energia cinetica vari rispetto alle x come nel grafico, allora l'energia meccanica sará sicuramente maggiore di $U(x_0) = E_0$, e $\forall x$: $E(x) > E_0$ essendo $E(x) = \frac{1}{2} m v^2(x) + U(x)$

Ogni punto del grafico puó essere classificato in categorie:



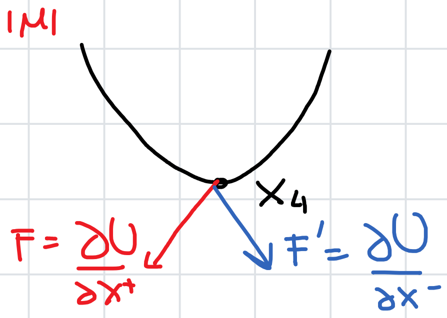
1) Instabile: un punto é definito instabile se la forza conservative $F = -\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$, che porterá a muoversi in una posizione equilibrio

MASSIMI



2) Equilibrio instabile: un punto é definito in equilibrio instabile se la forza conservativa F é nulla $\left(\frac{\partial U}{\partial x} = 0\right)$ e se la derivata seconda di U in dx é negativa $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0\right)$

MINIMI



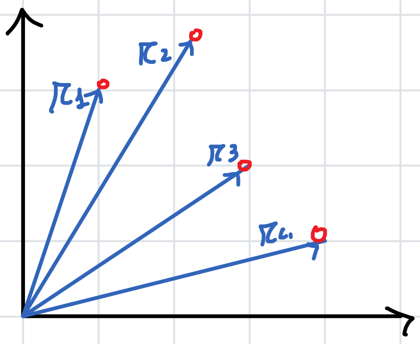
3) Equilibrio stabile: un punto é definito in equilibrio stabile se $F = 0$ e se derivata seconda é positiva. A differenza dell'equilibrio instabile allontanandosi da X_4 la forza generata tende a riportarlo nel punto di minimo.

4) Equilibrio indifferente: se piccoli spostamenti lasciano comunque il punto in equilibrio

5.0 Sistema di punti materiali

Lo studio dei moti dei corpi come punti materiali permette di semplificare i calcoli pur mantenendo una buona approssimazione, ma non é applicabile a tutte le situazioni
Ad esempio una sfera che ruota attorno ad un'asse verrebbe rappresentata come un punto in equilibrio contrariamente allo stato di moto.
Si considera quindi un sistema di n punti materiali, tanti quante sono le parti in cui é suddivisibile il corpo e per questo si necessiteranno di 3n gradi di libertá (a cui vanno sottratti il numero di legami fra i punti stessi)
Come per un singolo punto materiale si studiano le forze applicate su ognuno, suddividendole in:
Forze interne: forze che si scambiano i punti
Forze esterne: forze che l'esterno esercita sul sistema.

5.1 Centro di massa



Per ogni j-esimo punto è quindi possibile stabilire una $\vec{F}_j = m_j \cdot \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2}$, tale che l'intero sistema è rappresentato dal sistema a n equazioni:

$$\begin{cases} F_1 = m_1 \cdot \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \\ F_2 = m_2 \cdot \frac{d^2\vec{r}_2}{dt} \\ \vdots \\ F_n = m_n \cdot \frac{d\vec{r}_n^2}{dt^2} \end{cases}$$

Per ogni F_j questa è pari a $F_j^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} F_{jk}^{(i)}$

$F_j^{(e)}$: risultante delle forze esterne che agiscono su j

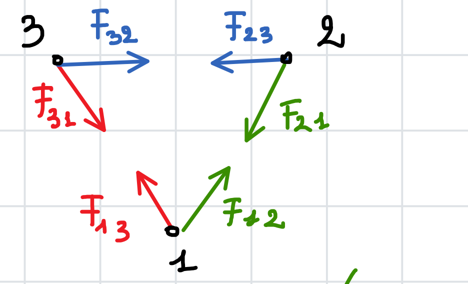
$\sum F_{jk}^{(i)}$: forze interne esercitate da un punto $k \neq j$ su j

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} F_{1k}^{(i)} = m_1 \cdot \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \\ F_2^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} F_{2k}^{(i)} = m_2 \cdot \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \\ \vdots \\ F_n^{(e)} + \sum_{k=1}^{n} F_{nk}^{(i)} = m_n \cdot \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} \end{cases}$$

Considerato inoltre che combinazioni di soluzioni sono sempre soluzioni si può ottenere un'ulteriore equazioni sommando membro a membro le n uguaglianze ottenute a partire dal II principio di Newton.

$$\Rightarrow \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)}}_{F^{(e)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i^{(i)}}_{F^{(i)}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt}\right] \Longleftrightarrow \left[F^{(e)} + F^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right]$$

Si può inoltre imporre come condizione che la sommatoria delle forze interne sia nulla infatti queste sono sempre applicate a coppie di forze uguali e contrarie quindi si annullano vicendevolmente.



$$\cancel{\vec{F}_{31}} + \cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{32}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{12}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \left[F^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}\right]$$

Si può poi sostituire il vettore $\vec{r}$ con un altro vettore posizione che sia però proporzionale alla massa $\vec{r}_j = \frac{R_j}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ (→ vettore; → massa totale M) tale che $\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot R_j}{M}\right]$ sia il vettore posizione di un punto geometrico detto centro di massa ← media pesata dei vettori posizione per le masse

EQUAZIONI DEL CENTRO DI MASSA
$$\left[\vec{R}_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{R}_j}{M}\right] \quad \left[\vec{v}_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{v}_j}{M}\right] \quad \left[\vec{a}_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{a}_j}{M}\right]$$
posizione, velocità e accelerazione del centro di massa

Oss: il centro di massa non appartiene al sistema di punti materiali, ma è definibile in base distribuzione di questi nello spazio

Si può inoltre dedurre che $\sum F^{(e)} = M \cdot \vec{a}_c$ ovvero l'accelerazione del centro di massa dipende solo dalle forze esterne e non dalle forze interne.

5.11 Quantità di moto

La quantità di moto di ogni singolo punto sarà $\vec{p}_j = m_j \cdot v_j$ tale che $\left[\vec{p} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j\right]$.
dove $v_j = \frac{dr_j}{dt}$, ma allora per la definizione di centro di massa $\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \frac{dr_j}{dt} = m \cdot \frac{dr_c}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{massa TOTALE}}}{m} \cdot v_c$

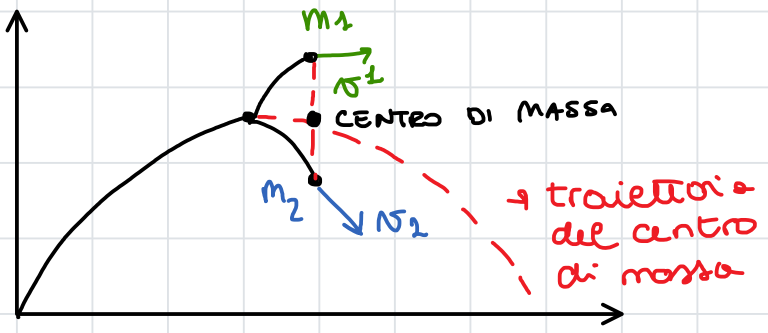
⇒ La quantità di moto di un sistema di punti materiali è pari alla quantità di moto che avrebbe un punto materiale con massa del sistema e velocità del centro di massa

Per il teorema dell'impulso la risultante delle forze esterne $F^{(e)}$ è data dalla derivata della quantità del moto nel tempo. Quindi se $\left[F^{(e)} = 0 \Leftrightarrow p = \text{cost}\right]$

Es: Proiettile che si spezza in 2 parti in volo

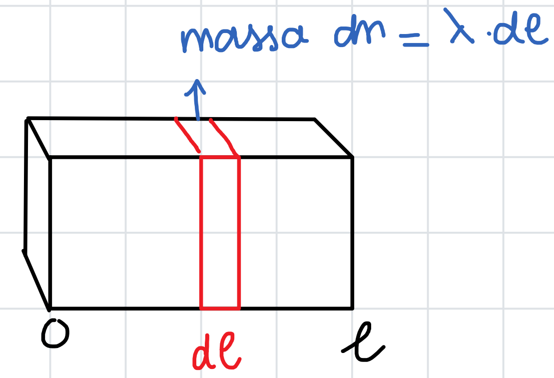
Si consideri un proiettile che viene sparato con velocità v, che forma un angolo α con l'orizzontale tale che il corpo si spezzi in n parti di massa m_1 e m_2 durante il volo. L'esplosione essendo causata da forze interne al sistema non modificherà la sua quantità di moto che quindi resterà costante.

$$\vec{p}(t) = M \cdot \vec{v}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v_i \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i}{M}$$



5.12 Baricentro di una sbarra di lunghezza l

Si consideri una sbarra cilindrica di lunghezza $l = y_2 - y_1$, omogenea tale che si possa definire un $\lambda = cost = \frac{M}{l}$ → MASSA SU UNITA' DI LUNGHEZZA

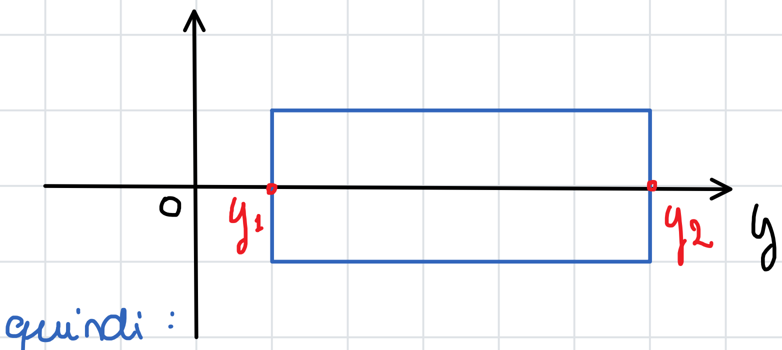


Allora presa una fetta dy con massa $dm = \lambda \cdot dl$, questa é assimilabile ad un punto materiale sull'asse y ($x_c = z_c = 0$ cioé il baricentro appartiene sicuramente all'asse y)

Ricordando che il vettore posizione del baricentro $\vec{r}_c = \int_0^l \lambda \cdot dl = \int_{S_{AREA}} \sigma \cdot ds = \int_{V_{OLUME}} \rho\, dV$ (MONODIMENSIONALE, BIDIMENSIONALE, TRIDIMENSIONALE)

e che in questo caso C appartiene all'asse y allora:

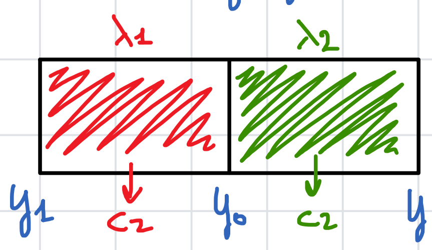
$$y_c = \left(\int_{y_1}^{y_2} \lambda \cdot y\, dl \right) \cdot \frac{1}{m} \underset{\lambda = cost}{\Rightarrow} y_c = \left[\lambda \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{y_2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\lambda}{2m} \left(y_2^2 - y_1^2 \right)$$



$$\Rightarrow y_c = \frac{\lambda}{2m} \underbrace{(y_2 - y_1)}_{= l} (y_2 + y_1) \iff y_c = \frac{\lambda l}{2m} \cdot (y_1 + y_2)$$ dove $\lambda \cdot l = m$, quindi:

$$\Rightarrow \boxed{y_c = \frac{(y_2 + y_1)}{2}}$$ CENTRO DI MASSA DI UNA SBARRETTA OMOGENEA.

Nel caso λ non fosse costante, ovvero se la sbarra non fosse omogenea, allora si divide la lunghezza l nei tratti $y_1 y_0$ a densità λ_1 e $y_0 y_2$ a densità λ_2, tale che:



dove $c_1 =$ centro di massa del tratto $y_1 y_0$ $= \frac{(y_1 + y_0)}{2}$

$c_2 =$ centro di massa del tratto $y_0 y_2$ $= \frac{(y_0 + y_2)}{2}$

$m_1 =$ massa $y_0 y_1 = \lambda_1 (y_0 - y_1)$

$m_2 =$ massa $y_0 y_2 = \lambda_2 (y_2 - y_0)$

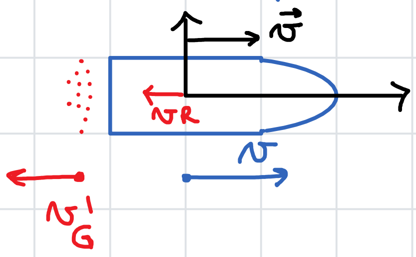
$$\Rightarrow y_c = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \lambda(l) \cdot y \cdot dl}{M_{TOT}} = \frac{\overbrace{\int_{y_1}^{y_0} \lambda_1 y\, dl}^{m_1 (y_1 + y_0)/2} + \overbrace{\int_{y_0}^{y_2} \lambda_2 y\, dl}^{m_2 (y_0 + y_2)/2}}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_c = \frac{m_1 (y_1 + y_0) + m_2 (y_0 + y_2)}{2(m_1 + m_2)}}$$

Esempi

1) Motori a reazione

Nel caso dei motori a reazione l'accelerazione che invece di sfruttare forze esterne per accelerare dipendono dall'espulsione del carburante e quindi dalla variazione di massa.



Si consideri inizialmente un sistema di riferimento esterno rispetto a cui il jet si muove di velocità v in un istante t e il gas viene espulso con velocità $\vec{v}_G$. Preso poi un sistema solidale con il jet si avrà che, per la legge della composizione della velocità,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{v}_T \Rightarrow \vec{v}_R = \vec{v}_G' - \vec{v}$$

Indicata con Δm la variazione della massa $\Rightarrow \Delta m < 0$, la quantità di moto sarà:

$p_R = (m_0 + \Delta m)(v_0 + \Delta v)$ ↑ razzo $\qquad p_G = (-\Delta m)\, v_R = (-\Delta m)(v_G' - \vec{v})$. ↑ gas

$$F^{(e)} = \Delta p \Rightarrow F^{(e)} = p_f - p_i$$

(p_f: moto solo del razzo; p_i: moto del razzo e del gas)

$$\Rightarrow F^{(e)} = \underbrace{(m_0 + \Delta m)(v_0 + \Delta v) + (-\Delta m)\, v'}_{\text{dopo espulsione gas}} - \underbrace{m_0 v_0}_{\text{prima del gas}}.$$

$\cancel{m_0 \vec{v}_0} + \Delta m \vec{v}_0 + m_0 \Delta \vec{v} + \cancel{\Delta m \Delta \vec{v}} - \Delta m \cdot \vec{v}'_G - \cancel{m_0 \vec{v}_0} = \vec{F}^{(e)}$ $\Rightarrow$ $m \Delta \vec{v} - \Delta m (\underbrace{\vec{v}'_G - \vec{v}}_{\vec{v}_R}) = \vec{F}^{(e)} = m \cdot a$

trascurabile a causa dell'ordine di grandezza

$m_0 \Delta \vec{v} - \Delta m (\vec{v}'_G - \vec{v}_0) = \dfrac{\Delta (m \vec{v})}{\Delta t}$ $\Longrightarrow$ in infinitesimi: $m_0 \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{dm}{dt} \vec{v}_R = \vec{F}^{(e)}$ $\Rightarrow$ $\left[m_0 \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dm}{dt} v_R + \vec{F}^{(e)} \right]$

Il termine $\frac{dm}{dt} \cdot v_0$ è detto **spinta** ed è la causa della presenza di un'accelerazione anche in caso di mancanza delle forze esterne.

Se $\vec{F}^{(e)} = 0$ $\Rightarrow$ $m_0 \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dm}{dt} \cdot v_R$ $\Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v_R} = \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$ supponendo $v_R = cost$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{v_R}(v - v_0) = \ln\left(\dfrac{m}{m_0}\right) - \cancel{\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0}\right)}$

$\left[v = \ln\left(\dfrac{m}{m_0}\right) \cdot v_R + \cancel{\dfrac{v_0}{v_R}} \right]$ trascurabile

5.2 Momento di un sistema di punti materiali

In un sistema formato da n punti materiali, considerato un punto fissato P_j allora questo avrà momento delle forze rispetto ad un polo O pari a: $[\vec{M}_j = \vec{r}_j \times \vec{F}_j]$. Da cui il momento totale del sistema sarà: $\left[\vec{M} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j\right]$

Allo stesso modo il momento della quantità di moto è $\left[\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{p}_j\right]$.

In particolare per ogni punto j si ottiene $\vec{M}_j = \dfrac{d\vec{b}}{dt}$, sapendo che il momento è dato dalla somma dei contributi delle forze esterne e delle forze interne, per cui:

$$\vec{M}_j^{(e)} + \vec{M}_j^{(i)} = \frac{d\vec{b}_j}{dt} + \vec{v}_0 \times \vec{p}_j$$ v_0 velocità del centro di massa.

Sommando tutte le equazione del momento si ottiene $\sum_{j=1}^{n} M_j^{(e)} + \sum_{j=1}^{n} M_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{db_j}{dt} + \vec{v}_0 \times \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{v}_j$ dove $\sum M_j^{(i)} = 0$ poiché le forze interne sono sempre poste a coppie uguali e contrarie con pari distanze dal polo.

$\Rightarrow$ $\vec{M} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{v}_0 \times \vec{p}$. Dove $\vec{v}_0 \times \vec{p} = 0$ < $\vec{v}_0 = 0$ / polo coincidente con il centro di massa

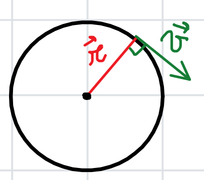
TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

[La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto rispetto ad un polo è pari al momento delle forze esterne calcolato rispetto al medesimo punto]

Momento assiale $\vec{M}_a^{(e)} = \dfrac{d\vec{b}_a}{dt}$ dove $d\vec{b}_a = \sum_{j=1}^{n} db_{a_j}$ e $\vec{M}_a^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_{a_j}^{(e)}$

5.21 Momento di inerzia di un sistema di punti che ruota attorno ad un'asse

Nel moto circolare il momento della quantità di moto rispetto ad un'asse è dato da:



$\vec{b}_a = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ ma $\vec{r} \perp \vec{v}$ quindi $r v \sin = r v$ dove v può essere vista come ωr. Sostituendo: $b_a = m r^2 \omega$ equazione valevole per ogni punto j-esimo del sistema.

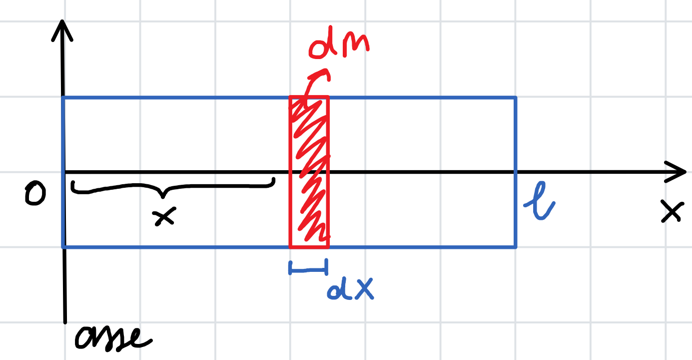
Nel caso in cui la velocità angolare sia uguale per ogni punto $\omega_i = \omega_j \ \forall i \neq j$ allora $b_a = \sum m_j \cdot r_j \cdot (\omega_j \cdot r_j) = \omega \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot r_j^2}$ I_j momento di inerzia di P_j

$\Rightarrow [\, b_a = I_0 \omega \,] \Longleftrightarrow \left[\, \vec{M}_a = \dfrac{d\vec{b}_a}{dt} = \dfrac{d(I_0 \cdot \omega)}{dt} = I_0 \cdot \dot{\vec{\omega}} \,\right]$

5.22 Momento di Inerzia di una sbarretta

Si considera di voler calcolare il momento di inerzia di una sbarretta rispetto ad un'asse fissato allora:

$I = \int r^2 \cdot dm$ con $dm = \lambda \, dl$ visto che l'asta si sviluppa in lunghezza in un'unica dimensione.



$$I=\int_0^{\ell} x^2 \cdot (\lambda\, dx) \quad \text{assumendo } \lambda=\text{cost}=\frac{m}{\ell} \quad I=\lambda\int_0^{\ell} x^2 dx \Rightarrow \boxed{I=\lambda\frac{\ell^3}{3}=\frac{m\ell^2}{3}}$$

Ne deriva che il momento d'inerzia dipende dalla posizione dell'asse rispetto alla sbarra. Ad esempio se si spostasse l'asse da O a $\ell/2$ I' sarebbe $I'=\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx \cdot \lambda = \left(\lambda\frac{\ell^3}{8}+\frac{\lambda\ell^3}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{\lambda\ell^3}{12} < \frac{\lambda\ell^3}{3}=I$

5.3 Lavoro e energia nei sistemi di punti materiali

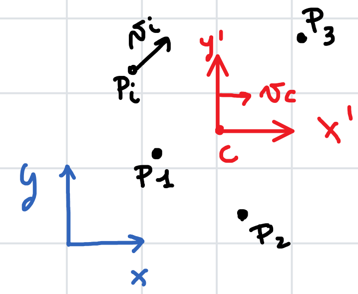
Analogamente al caso di un unico materiale in un sistema vale per ogni P_j: $L_j=\int (\vec{F}_j^{(e)}+\vec{F}_j^{(i)})\, d\vec{s}$, che è inoltre pari a $\Delta T_j = T_{f_j}-T_{i_j}$, tuttavia non è possibile trascurare la $\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_j^{(i)}$ in quanto il lavoro dipende anche dagli spostamenti che possono essere differenti.

Sommando quindi le n relazioni: $L=\sum_{j=1}^{n} L_j = \Delta T$ dove $T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j v_j^2$

TEO. DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA IN UN SISTEMA DI PUNTI: [La variazione dell'energia cinetica di un sistema in un intervallo Δt è pari al lavoro compiuto contemporaneamente da tutte le forze agenti sul sistema]

5.31 Teorema di König

Si considera un sistema di punti materiali, studiati mediante 2 sistemi di riferimento uno fisso e uno mobile con velocità v_c e origine nel centro di massa. Allora la velocità v_j di punto P_j sarà pari,



(per la legge di composizione delle velocità) a $\vec{v}_i=\vec{v}_{ic}+\vec{v}_c$ con v_{ic} velocità di P_j rispetto al sistema solidale al centro di massa

$\Rightarrow$ Energia cinetica di P_j $T_j=\frac{1}{2}m_j\cdot v_j^2=\frac{1}{2}m_j\cdot v_j\cdot v_j=\frac{1}{2}m(\vec{v}_{ic}+\vec{v}_c)(\vec{v}_{ic}+\vec{v}_c)$

$\Rightarrow T_j=\frac{1}{2}m_j\cdot(v_{ic}^2+v_c^2+2v_{ic}\cdot v_c)$

L'energia cinetica totale del sistema, data dalla sommatoria $\sum_{j=1}^{n} T_j$, è pari a $T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot(v_c^2+v_{jc}^2+2v_{jc}\cdot v_c)$

$\Rightarrow T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot v_c^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot v_{jc}^2+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\, v_c\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot v_{jc}}$ $\nearrow$ P quantità di moto del sistema che però è anche uguale al prodotto fra la massa totale e la velocità del centro di massa $\vec{v}_{cc}$ rispetto al sistema considerato. Ma quindi essendo questo solidale al moto di C $\vec{v}_{cc}=0 \iff P=0$

TEO DI KÖNIG [$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot v_{jc}^2 + M\cdot v_c^2$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali in un dato sistema di riferimento è pari alla somma dell'energia cinetica che spetterebbe al centro di massa nel caso in cui vi fosse concentrata tutta la massa M e della T dei punti materiali rispetto alla terna solidale con il centro di massa.]

Nel caso in cui è definita una velocità angolare del sistema e il polo coincide con il centro di massa allora ω è uguale per ogni punto e $T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\cdot \vec{v}_j^{\,2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j(\omega\cdot r_j)^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\sum m_j\cdot r_j^2}_{I_c}$

$\Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{2}\omega^2 I_c}$

5.32 Energia potenziale di un sistema di punti materiali

Sia $L=\int(\vec{F}^{(e)}+\vec{F}^{(i)})\,ds$, allora se le forze considerate sono conservative è possibile stabilire un'energia potenziale tale che $L=-\Delta U$. Prendendo $\vec{F}^{(e)}+\vec{F}^{(i)}=\vec{R}$ allora: $dL=\sum_{j=1}^{n}(R_{jx}\,dx+R_{jy}\,dy+R_{jz}\,dz)=-\Delta U$

$\Rightarrow [R=-\nabla U] \Rightarrow \left\{R_x=-\frac{\partial U}{\partial x} \quad R_y=-\frac{\partial U}{\partial y} \quad R_z=-\frac{\partial U}{\partial z}\right\}$

5.4 Equazioni cardinali del moto dei sistemi

Il moto di un sistema in un sistema di riferimento (inerziale o meno) lo si può considerare come l'unione del moto del centro di massa c con massa $M = \sum m_i$ in tale terna e del moto del sistema stesso rispetto alla terna in moto traslatorio solidale a c.

Del moto del centro (moto di un punto materiale con massa M sotto l'azione delle forze esterne) è ricavabile la relazione $\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} = \frac{d(M v_c)}{dt}$.

Per studiare invece il moto del sistema rispetto alla terna solidale a c è necessario conoscere le forze interne, le quali tuttavia non sono sempre facilmente ricavabili. Quindi si preferisce sfruttare il teorema del momento della quantità di moto rispetto a c, la quale può essere scritta senza avere informazioni su $\vec{F}^{(i)}$. $\left[\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}\right]$

EQUAZIONI CARDINALI DEL MOTO

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}_c}{dt} & \text{FORZE ESTERNE} \\ \vec{M} = \frac{d\vec{b}_c}{dt} & \text{MOMENTO} \end{cases}$$

Nei casi particolari:

1) SISTEMA ISOLATO $\iff P = cost$ e $b = cost$, allora le equazioni esprimono i principi di conservazione della quantità di moto e del suo momento.

2) SISTEMA IN EQUILIBRIO $\iff \vec{F} = 0$ e $\vec{M} = 0$

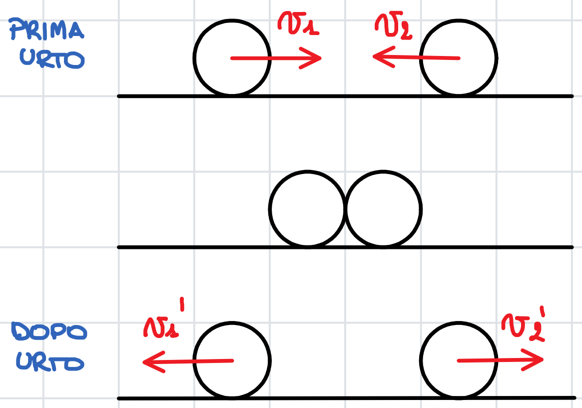
6.0 Processi d'urto

Si considera un urto centrale, ovvero un urto in cui il moto avviene lungo un'unica direzione, questo può essere studiato come un sistema di punti materiali per il quale si necessita la conoscenza delle forze interne. Un importante considerazione nei processi d'urto è che nel conteggio delle forze le forze esterne sono trascurabili, infatti a parità di intervallo di tempo l'impulso generato dalle $F^{(i)}$ sarà nettamente superiore di quello causato dalle $F^{(e)}$

Trascurando, quindi, tutte le forze indipendenti dall'urto si possono applicare i principi di conservazione della quantità di moto e del momento e si può affermare che il centro di massa del sistema non viene disturbato dall'urto, ma permane nel suo stato di moto.

6.1 Urti elastici

Negli urti elastici viene conservata sia la quantità di moto che l'energia meccanica, ovvero si possono sfruttare le seguenti relazioni:



quantità di moto / energia cinetica
$$\begin{cases} P_i = P_f & \Rightarrow \\ T_i = T_f & \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \iff m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_2^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 v_1'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 v_2'^2 \iff m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \end{cases}$$

divido la 2° eq^ne con la 1°

$$\frac{\cancel{m_1}\cancel{(v_1 - v_1')}(v_1 + v_1')}{\cancel{m_1}\cancel{(v_1 - v_1')}} = \frac{\cancel{m_2}\cancel{(v_2' - v_2)}(v_2' + v_2)}{\cancel{m_2}\cancel{(v_2' - v_2)}} \Rightarrow v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

$\iff (v_1 - v_2) = (v_2' - v_1')$ Considerando come sistema di riferimento uno solidale ad una delle due masse, la velocità relativa a questo resta costante prima e dopo l'urto.

Il che è deducibile dal fatto che il centro di massa resta imperturbato dall'urto.

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1 + v_1' - 2v_2) \\ v_2' = v_1 + v_1' - v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1'(\cancel{m_2 + m_1}) = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_2 + m_1} \\ v_2' = \dfrac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_2 + m_1} \end{cases}$$

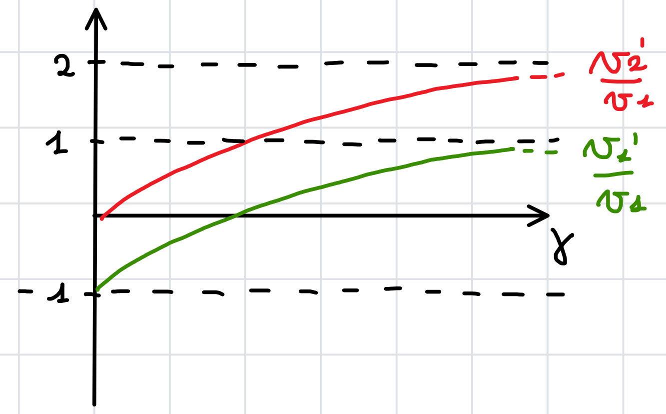
Se si considera $\gamma = m_1/m_2$ il sistema può essere riscritto come:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1 + \dfrac{2}{\gamma + 1} v_2 \\ v_2' = \dfrac{2}{\gamma + 1} v_1 + \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_2 \end{cases} \Rightarrow$$

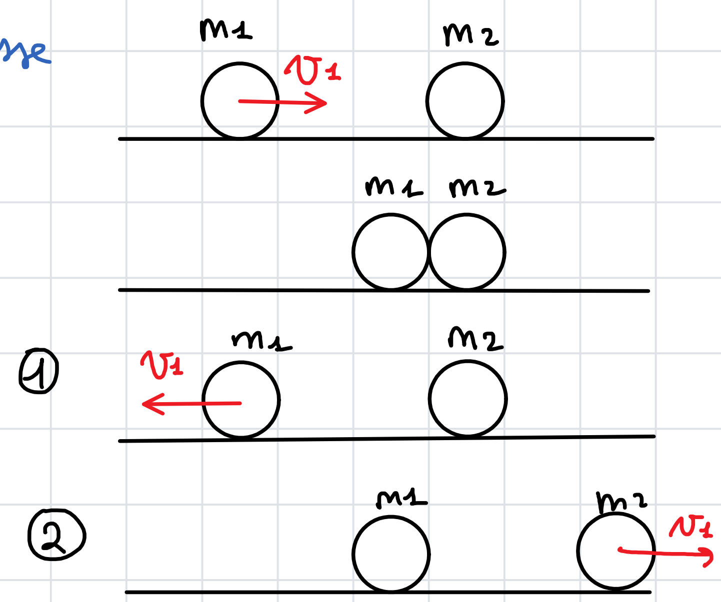
Oss: Se $v_2 = 0$, ovvero o il 2° corpo è fermo o si considera una terna solidale a questo, allora:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1 \\ v_2' = \dfrac{2}{\gamma + 1} v_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{v_1'}{v_1} = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ \dfrac{v_2'}{v_1} = \dfrac{2}{\gamma + 1} \end{cases}$$

Graficando le relazioni ottenute in funzione di γ si ottiene:



CASO 1 $m_1 \ll m_2$ = Se il rapporto delle masse tende a 0, ovvero se la massa m_2 è nettamente maggiore di m_1, allora $v_2' = 0$ e $v_1' = -v_1$. Cioè il corpo 2 permane nel suo stato di quiete mentre il corpo 1 torna indietro con la stessa velocità.



CASO 2 $m_1 = m_2$: il corpo 1 si ferma mentre il corpo 2 comincia a muoversi con la velocità v_1

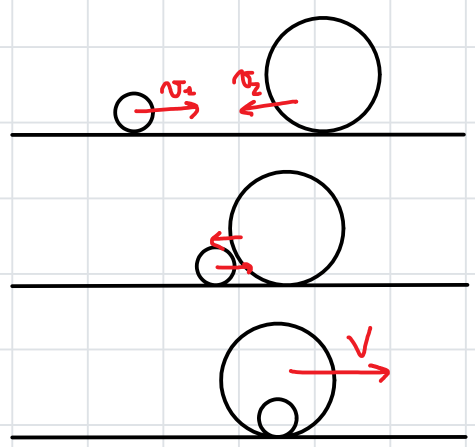
6.2 Urto anelastico

Nel caso anelastico si possiede un'unica equazione ($p_f = p_i$), in quanto si conserva solo la quantità di moto e non l'energia, per 2 incognite, v_1' e v_2', allora per ovviare al problema si considera l'energia dissipata dur - ' -

$$E_f = E_i - L \Rightarrow E_i = \alpha E_f \iff \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \alpha\left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2\right)$$

E_f è una frazione dell'energia iniziale

6.21 Urto completamente anelastico

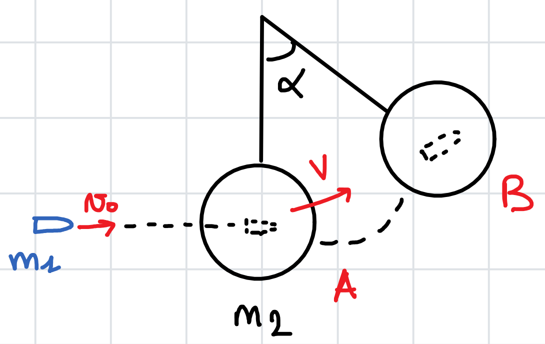


L'urto completamente anelastico è un caso particolare di urto anelastico in cui un corpo viene inglobato nell'altro durante la collisione e quindi continueranno il moto come un'unica massa $m_1 + m_2$.

$$\Rightarrow p_i = p_f \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$ velocità dei due corpi uniti

unica incognita

Es: Pendolo balistico



Si consideri un proiettile di massa m_1 che viene sparato con velocità v_0 contro un pendolo in equilibrio in posizione verticale, conficcandosi nella massa appesa. Dopo l'urto il pendolo comincia a muoversi con velocità V, si vuole sapere:

1) l'altezza massima
2) l'energia dissipata

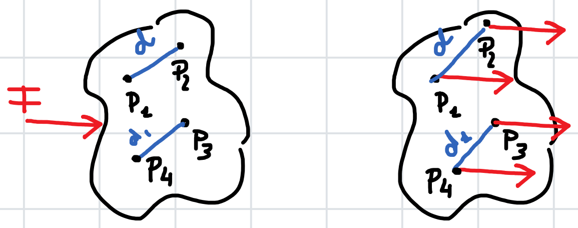
1) $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \dfrac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$ essendo dopo l'urto un semplice moto uniformemente accelerato si può applicare la conservazione dell'energia

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}(\cancel{m_1 + m_2}) V^2 = (\cancel{m_1 + m_2}) g h \Rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

2) $E_{dissipata} = T_{PRIMA\ URTO} - T_{DOPO\ URTO} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2$

7.0 Corpo rigido

Un qualsiasi corpo esteso può essere studiato come un sistema di punti, poiché può essere immaginato come suddiviso in un numero n di punti materiali. Un corpo rigido è un caso particolare di sistema in quanto vale la proprietà che la mutua distanza fra 2 punti materiali resta invariante nel tempo qualsiasi siano le sollecitazioni. Il che è equivalente ad affermare che i corpi rigidi non subiscono deformazione (corpi ideali)



Per descrivere il moto di un corpo rigido sono necessari 6 gradi di libertà (3 punti con 3 coordinate – le distanze 12, 13 e 23)
Come per i punti materiali è possibile identificare 2 tipi di moti elementari: il moto traslatorio (in ogni istante tutti i punti hanno velocità $v(t)$) e moto rotatorio attorno ad un'asse (tutti i punti dell'asse sono fermi e gli altri ruotano su piani ⊥ asse con traiettorie circolari)
La combinazione dei 2 moti è detta moto rototraslatorio il quale è paragonabile ad un moto elicoidale uniforme con velocità di rotazione ω e una velocità di traslazione costante diretta lungo l'asse di rotazione.

Ogni moto è poi descrivibile mediante le equazioni cardinali $\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt} \end{cases}$ tale che se:

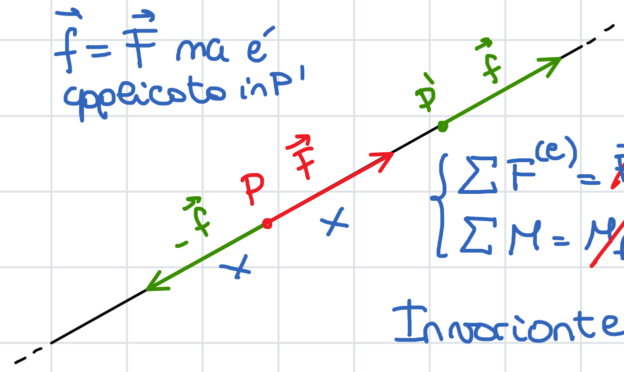
1) $\vec{F}^{(e)} = 0$ e $\vec{M} \neq 0$ allora si ha una rotazione
2) $\vec{F}^{(e)} \neq 0$ e $\vec{M} = 0$ allora si ha una traslazione
3) $\vec{F}^{(e)} \neq 0$ e $\vec{M} \neq 0$ allora si ha una rototraslazione

Se per 2 sistemi $\vec{F}_1^{(e)} = \vec{F}_2^{(e)}$ e $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$ allora sono detti equivalenti

Proprietà dei vettori forza applicati al sistema

1) Applicando 2 forze uguali e contrarie lungo la stessa retta non si alterano $\vec{M}$ e $\vec{F}^{(e)}$. Anzi si ricava inoltre che le equazioni cardinali non si modificano nemmeno spostando il punto di applicazione da P a P' un altro punto sulla linea di azione della forza

$\vec{f} = \vec{F}$ ma è applicato in P'

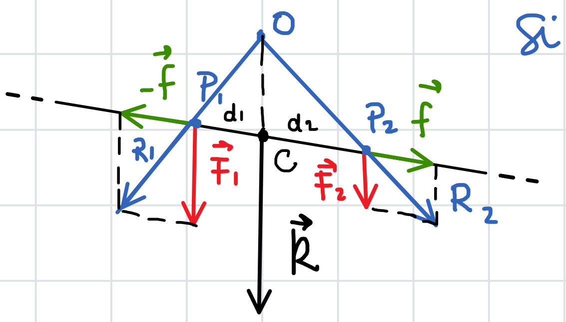


$\begin{cases} \sum F^{(e)} = \cancel{\vec{F}} + \vec{f} - \cancel{\vec{f}} \\ \sum M = \cancel{M_f} + \cancel{M_{-f}} + M_F \end{cases}$

Invariante

2) Riduzione di un sistema di forze in un'unica risultante

★ CASO 1 forze parallele nello stesso verso

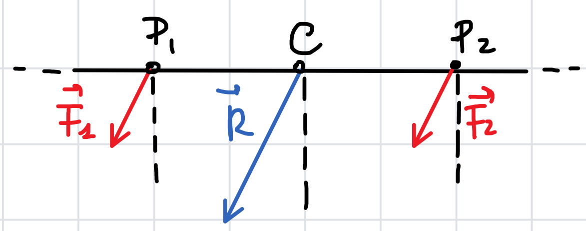


Si considera un sistema di 2 forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ applicate in P_1 e P_2 di cui si vuole calcolare la risultante. Per la proprietà precedente si può aggiungere una coppia di forze $-\vec{f}$ e $+\vec{f}$ in P_1 e P_2 rispettivamente, tali che $\vec{R}_1 = -\vec{f} + \vec{F}_1$ e $\vec{R}_2 = \vec{f} + \vec{F}_2$. R_1 e R_2 possono poi essere traslate entrambe nel punto O e la loro somma è proprio la risultante $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 - \cancel{\vec{f}} + \cancel{\vec{f}} + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Il punto C di applicazione di $\vec{R}$ sulla retta è detto centro delle 2 forze parallele ed è tale che:

$M_{R(C)}$ = momento di $\vec{R}$ con polo in $C = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{M}_{R(C)} = \vec{M}_{F_1(C)} + \vec{M}_{F_2(C)} = 0$

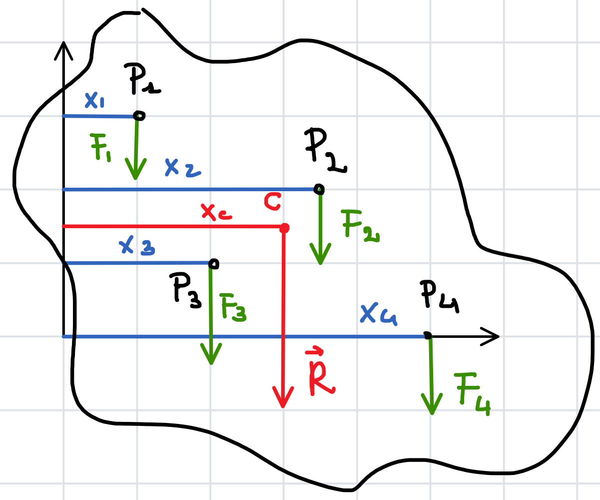
$\Rightarrow$ $F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$ Segmenti da C inversamente proporzionali all'intensità delle forze.

Oss: Se le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ formano un angolo α con la verticale anche $\vec{R}$ formerà un angolo α



$\Rightarrow$ la risultante di 2 forze parallele è una forza a esse parallela con pari direzione applicata nel centro delle forze.

Baricentro

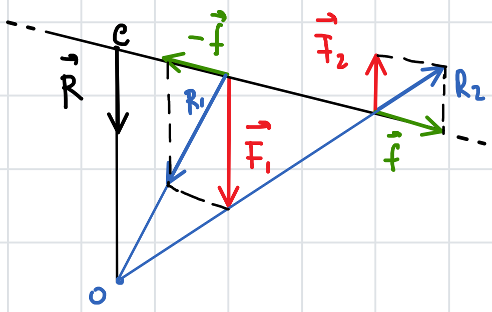


Nel caso le forze siano forze di gravità allora il centro è definito baricentro. Si considera ad esempio un sistema di 4 forze F_1, F_2, F_3 e F_4 applicate rispettivamente in P_1, P_2, P_3 e P_4, per il metodo precedente si possono ottenere le risultanti di F_1 e F_2, R_1, e di F_3 e F_4, R_2 le cui risultante finale sarà $\vec{R}$.

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \iff \vec{M}_{R(c)} = \vec{M}_{F_1(c)} + \vec{M}_{F_2(c)} + \vec{M}_{F_3(c)} + \vec{M}_{F_4(c)}$$

$$\Rightarrow x_c \cdot \vec{R} = x_1 \cdot \vec{F}_1 + x_2 \cdot \vec{F}_2 + x_3 \vec{F}_3 + x_4 \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{F}_i \Rightarrow \left[x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \right] \text{BARICENTRO}$$

*** CASO 2** forze antiparallele diverse in modulo

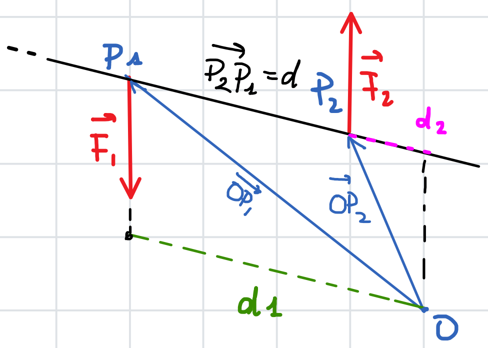


Si considerano le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ antiparallele e con intensità diversa, la risultante sarà quindi una forza $\vec{R}$ il cui modulo R è la differenza fra F_1 e F_2 e il cui verso è pari a quello della forza con intensità maggiore. Dalla relazione del momento si ricava la posizione di c

$$\Rightarrow \vec{M}_{R(c)} = \vec{M}_{F_1(c)} - \vec{M}_{F_2(c)} = 0 \text{ (perché il braccio è nullo)}$$

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0 \iff \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

*** CASO 3** forze antiparallele con modulo uguale

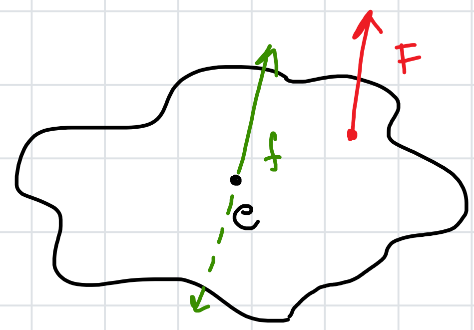


Nel caso di forze antiparallele pari in modulo risulta che preso un qualsiasi punto O come polo $\vec{M}_e = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ $\quad \vec{M}_R = \vec{OP}_1 \times F_1 + \vec{OP}_2 \times F_2 = d_1 F_1 - d_2 F_2$

$$\Rightarrow M_R = \underbrace{(d_1 - d_2)}_{d} F \neq 0 \quad \forall \text{ polo considerabile.}$$

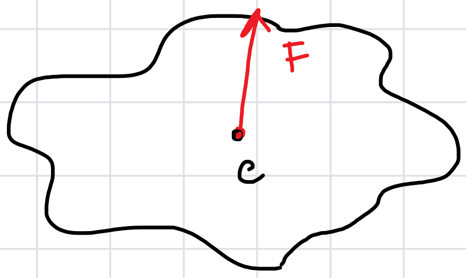
Si ottiene quindi che il momento non sarà mai nullo ma è invariante rispetto al polo $\Rightarrow$ coppia irriducibile di forze

7.1 Sollecitazioni di un corpo rigido

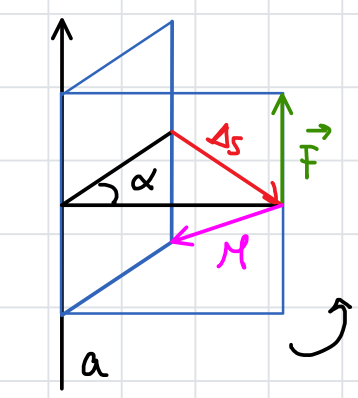


Considerata una forza F_i applicata in un punto P_i, allora questa può essere spostata in un altro punto P_i' aggiungendo opportunamente un'altra coppia di forze. Dipendentemente dal punto di applicazione della coppia si possono rappresentare i 3 moti:

1) coppia di forze $\Rightarrow$ rotazione
2) forza nel centro di massa $\Rightarrow$ traslazione
3) forza in un punto qualsiasi $\Rightarrow$ rototraslazione



7.2 Moto di un corpo rigido attorno ad un'asse fissa



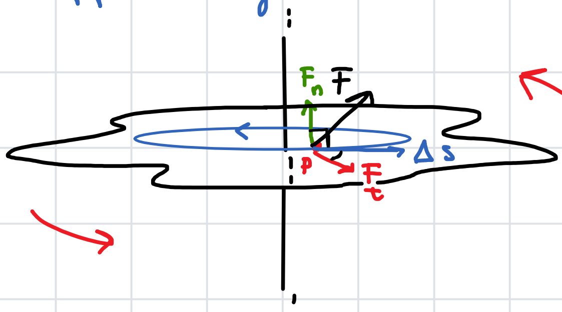
Per studiare la rotazione di un corpo rigido attorno ad un'asse è sufficiente un unico grado di libertà, l'angolo di rotazione $\vec{M}_a = \frac{d\vec{b}_a}{dt}$ dove $d\vec{b}_a = r \cdot d\vec{p}$ supponendo $v = \text{cost}$ e quindi ω uguale per tutti i punti allora $\Rightarrow r(v \cdot dm) = \omega r^2 dm$

$$\Rightarrow \vec{b}_a = \underbrace{\int r^2 dm}_{I_o} \cdot \vec{\omega} \Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_a = \frac{d\vec{b}_a}{dt} = I_o \cdot \dot{\omega} = I_o \cdot \frac{d^2\alpha}{dt} \\ \vec{F}^{(e)} = M_{TOT} \cdot \vec{a}_c \end{cases}$$

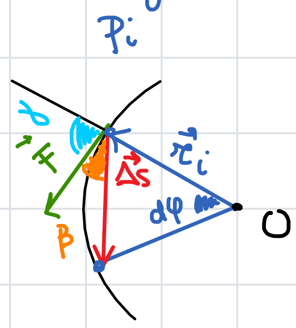
L'energia cinetica sarà invece: $T = \frac{1}{2} \int dm\, v^2 = \frac{1}{2} \int \omega^2 \underbrace{r^2 dm}_{I_o} \Rightarrow \left[T = \frac{1}{2} \omega^2 I_o \right]$ ENERGIA CINETICA

7.21 Lavoro di un corpo rigido che ruota attorno ad un'asse

Per calcolare il lavoro si considerano i contributi delle forze interne e delle forze esterne, ma $L_F^{(i)}$ è nullo poiché le forze sono sempre considerate a coppie uguali e contrarie e lo spostamento compiuto è lo stesso. Quindi $L = L_F^{(e)}$, più precisamente il lavoro delle componenti normali all'asse di rotazione in quanto i vettori spostamenti giacciono su piani $\perp$ a.



$$L = L_{F_T} + L_{F_n} = \vec{\Delta s}\cdot\vec{F_T} + \vec{\Delta s}\cdot\vec{F_n} = \Delta s F_T \cos\alpha + \Delta s F_n \cos\frac{\pi}{2} = L_{F_T}$$



$$dL_i = \vec{F_i}\cdot\vec{\Delta s_i} = (F_i \cos\beta)\Delta s_i \quad \text{con } \Delta s_i = 2 r_i \cdot \cos\frac{d\varphi}{2} \sim \cancel{2} r_i \cdot \frac{d\varphi}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow dL_i = (F_i \sin\gamma)\cdot r_i\, d\varphi \quad \text{ma } d\varphi = \omega\, dt$$

$$\Rightarrow dL_i = \underbrace{F_i \sin\gamma\; r_i}_{M_F}\, \omega\, dt = M_i \omega\, dt \Rightarrow \left[dL = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i}\cdot\vec{\omega}\, dt = M_a \cdot d\varphi \right]$$

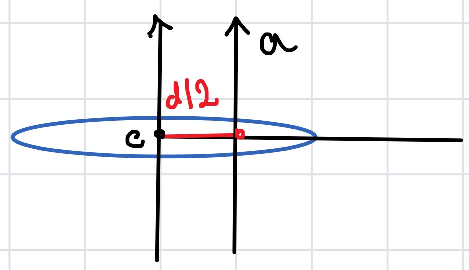
$$\Rightarrow \left[L_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_a \cdot d\varphi \right]$$ Considerando che $dT = dL \Rightarrow \left[d\left(\frac{1}{2} I_a \omega^2\right) = M_a\, d\varphi \right]$

7.22 Teorema di Huygens e momento di inerzia

Il momento d'inerzia di un corpo che ruota attorno ad un'asse è pari alla somma del momento d'inerzia considerando come asse una retta parallela e passante per il centro di massa più il momento d'inerzia considerando tutta la massa concentrata nel centro

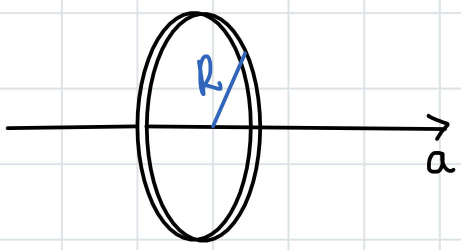
$$I_a = I_{a,c} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{massa totale}}}{m} \cdot d^2 \rightarrow \text{distanza di C dall'asse}$$

Es: Si consideri di voler calcolare il momento di inerzia di un disco rispetto ad un'asse che ha distanza $\frac{d}{2}$ dal centro, allora



$$I_a = I_0 + md^2 = \frac{1}{3}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{12} + \frac{md^2}{4} = \frac{md^2}{3}$$

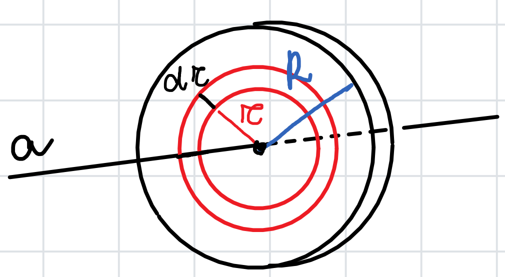
7.23 Momento di Inerzia di un anello rispetto ad un asse



Si vuol calcolare il momento di Inerzia di un sottile anello di raggio R rispetto a un'asse perpendicolare al piano dell'anello. Si suppone per semplicità che il corpo sia omogeneo con densità lineica $\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{2\pi R}$ → lunghezza circonferenza

$$\Rightarrow I_a = \int r^2 \cdot dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \cdot dl = \underbrace{R^2 \lambda}_{cost} \int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow \left[I_0 = 2\pi\lambda R^3 \right] \Longleftrightarrow \left[I_0 = \cancel{2\pi} \cdot \frac{m}{\cancel{2\pi}\cdot\cancel{R}} \cdot R^{\cancel{3}\,2} = mR^2 \right]$$

7.24 Momento di inerzia di un disco pieno

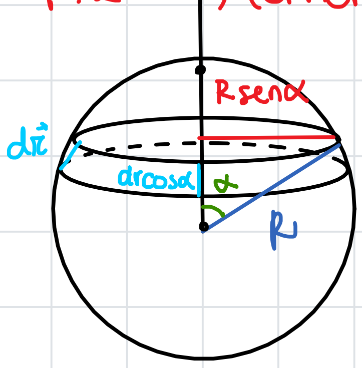


Nel caso di un disco pieno il calcolo del momento d'inerzia può essere semplificato, considerando il disco come composto da anelli concentrici di raggio crescente da 0 a R (il raggio del disco)

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma\, ds \quad \text{dove } ds = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\, dr + \underset{\text{trascurabile}}{\cancel{\pi dr}}$$

$$\left[I = \int_0^R r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\, dr = m\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{R^2}} = \frac{mR^2}{2} \right]$$

7.25 Momento di inerzia di una sfera rispetto ad un asse



Per calcolare I di una sfera si applica un ragionamento analogo considerando la sfera come composta di diversi dischi con spessore variabile.

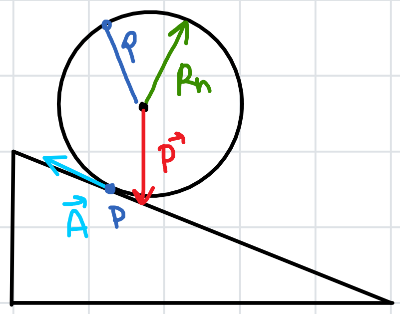
$$I=\int r^2 dm = \int (R\,sen\alpha)^2 dm = \int R^2 sen^2\alpha\, dm \Rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho\cdot \pi r^2 dh = \rho\pi(R\,sen\alpha)^2\cdot dr\cos\alpha$$

$$I=\frac{1}{2}\int R^2 sen^2\alpha\cdot \rho\pi R^2 sen^2\alpha\cdot d(R\cos\alpha) = \rho\frac{\pi}{2}\int R^4 sen^4\alpha\cdot d(\cos\alpha) = \rho\frac{R^5\pi}{2}\cdot\int_{-1}^{1} sen^4\alpha\, d(\cos\alpha)$$

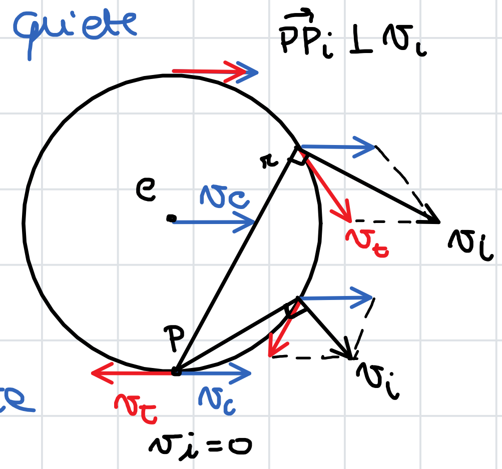
ponendo $x=\cos\alpha$ $\Rightarrow \int_{-1}^{1}(1-x^2)^2dx = \left[\frac{x^5}{5}+x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 16/15$ sostituendo nell'integrale

$$\left[I=\frac{\rho R^5\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{16}\,8}{15} = \frac{8\pi\rho R^5}{15}\right] \Longleftrightarrow_{\rho=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}} \left[I=\frac{8}{15}\pi\cdot\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot R^5 = \frac{2}{5}mR^2\right]$$

7.3 Moto di rotolamento puro



Si considera un disco che rotola lungo un piano inclinato scabro, le forze che vi sono applicate saranno la forza peso e la reazione (normale e forza d'attrito). Quest'ultima è quella che permette di avere un puro rotolamento $\Leftrightarrow v_c=\omega R = v_t$. infatti nell'unico punto di contatto P la velocità tangenziale e del centro di massa si equilibrano tale che P è in quiete e l'attrito considerato è statico.



Ma se $\vec{v_c}=\vec{v_t}=\vec{\omega}r$ allora $[\vec{a_c}=\dot{\omega}r]$ condizione di puro rotolamento, il che implica che può esserci accelerazione nel puro rotolamento

Dalle equazioni cardinali si ricava il seguente sistema al quale va aggiunta la condizione sull'accelerazione del centro di massa.

$$\begin{cases}\vec{F}^{(e)} = \vec{P}_{//}-\vec{A} = mg\,sen\alpha - A = m\,a_c\\ M^{(e)} = I\dot{\omega}\end{cases}$$

che è pari per definizione a $\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\cdot\vec{b_i}$ ma considerato il momento rispetto ad un'asse perpendicolare al disco passante per il centro è la forza di attrito, ovvero $M^{(e)} = I\dot{\omega} = -AR$

$$\Rightarrow\begin{cases}mg\,sen\alpha - A = m\cdot a_c\\ -I\dot{\omega} = -AR\end{cases}\quad \begin{cases}A = m(g\,sen\alpha - a_c)\\ A = \frac{I a_c}{R^2}\\ a_c = \dot{\omega}R\end{cases} = m(g\,sen\alpha - a_c) = \frac{I a_c}{R^2}$$

$$\Rightarrow = a_c(m+\underbrace{\tfrac{I}{R^2}}_{\to m/2}) = mg\,sen\alpha \qquad = \left[a_c = \frac{2}{3}g\,sen\alpha\right]$$

$$\Rightarrow A = mg\,sen\alpha - \frac{2}{3}mg\,sen\alpha = \left[A = \frac{1}{3}mg\,sen\alpha\right]$$

Dalla relazione sull'accelerazione del centro di massa si può anche ricavare la velocità con cui il disco arriva a terra dopo aver rotolato

$$\begin{cases}v_c = a_c t\\ s_c = \frac{1}{2}a_c t^2 = \ell\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=\frac{v_c}{a_c}\\ \ell = \frac{1}{2}\cancel{a_c}\cdot\frac{v_c^2}{a_c^{\cancel{2}}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}//\\ v_c=\sqrt{2\ell a_c} = \sqrt{\frac{2h}{\cancel{sen\alpha}}\cdot\frac{2}{3}g\,\cancel{sen\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}\end{cases}$$

moto uniformemente accelerato

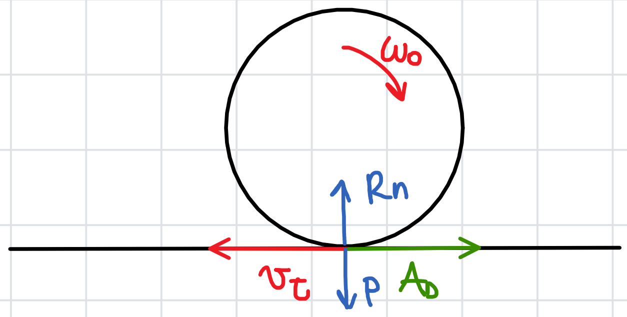
Lo si può dimostrare inoltre sfruttando la conservazione dell'energia: $\Delta T+\Delta U=0$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{m\cancel{R^2}}{2}}_{\text{momento di inerzia di un disco}}\cdot\frac{v_f^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2+\frac{1}{4}\cancel{m}v_f^2$$

$$\Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

7.31 Moto di Rotolamento

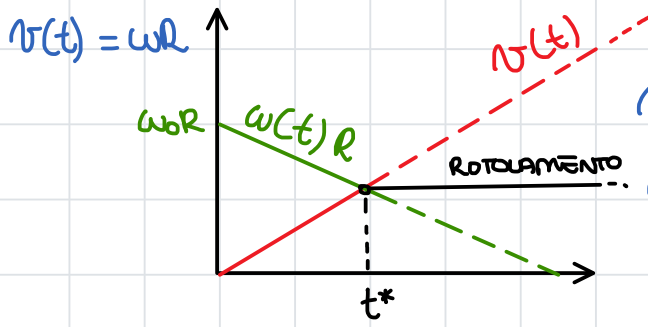
Si considera un disco che ruota con velocità angolare ω_0 e velocità del centro di massa v_c nulla, ovvero che striscia contro la superficie (attrito dinamico), le equazioni che descrivono tale moto saranno:



$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = A_D = m \cdot a_c \\ \vec{M}^{(e)} = I\dot{\omega} = A_D R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{m} g \mu_D = \cancel{m} \cdot a_c \\ m R^2 \cdot \dot{\omega} = \cancel{m} g \mu_D \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_c = g\mu_D \\ \dot{\omega} = \frac{g\mu_D}{R} \end{cases}$$

Si ricavano quindi l'equazioni della velocità

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}_c + \vec{a}_c t = 0 + g\mu_D t \\ \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 - \dot{\vec{\omega}} t \end{cases}$$



$v(t)$ cresce come una retta kt, mentre $\vec{\omega}(t)$ decresce a partire dal valore ω_0 fino a diventare nullo. Ne deriva che i due grafici si intersecheranno ad un certo istante t^* ovvero $\vec{v}(t^*) = \vec{\omega}(t^*)$, che è proprio la condizione di puro rotolamento

8.0 Leggi di Keplero

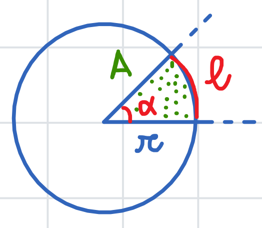
I) I pianeti percorrono orbite ellittiche di cui occupano uno dei due fuochi

II) La velocità areale con cui il raggio vettore, che unisce il sole ad un pianeta, descrive l'orbita è costante

III) Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo della semiasse maggiore $T^2 = k r^3$

Per studiare il moto dei pianeti si può considerare l'orbita ellittica approssimabile ad una circonferenza, per cui se la velocità areale $\frac{dA}{dt} = \text{cost}$ dove $dA : A_{TOT} = d\theta : 2\pi$

$dA : \pi r^2 = d\theta : 2\pi$



$\Rightarrow dA = \frac{r^2 d\theta}{2}$ ovvero $\frac{d\theta}{dt} = \text{cost} = \omega$. Se la velocità angolare è costante

Allora la forza gravitazionale non può avere componente tangenziale ma solo centripeta

$\Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \omega^2 r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 4\pi^2 m \cdot \frac{r}{T^2}$, ma per la 3° legge di Keplero $T^2 = k r^3$

$\Rightarrow \vec{F} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$ la forza che causa un'orbita circolare è inversamente proporzionale al quadrato delle distanze.

Presi due pianeti A e B allora $F_{A,B} = \frac{4\pi^2}{k_B} \cdot \frac{m_B}{r^2} \overset{\text{principio azione/reazione}}{=} F_{B,A} = \frac{4\pi^2}{k_A} \cdot \frac{m_A}{r^2} \Leftrightarrow m_B k_A = m_A k_B$

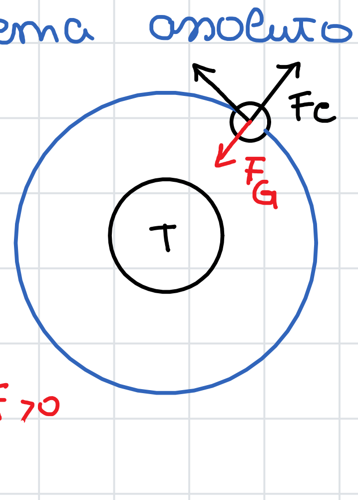
Si definisce allora una nuova costante $\gamma = \frac{4\pi^2}{m_B k_A} = \frac{4\pi^2}{m_A k_B}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \gamma \frac{m_A m_B}{r^2}}$

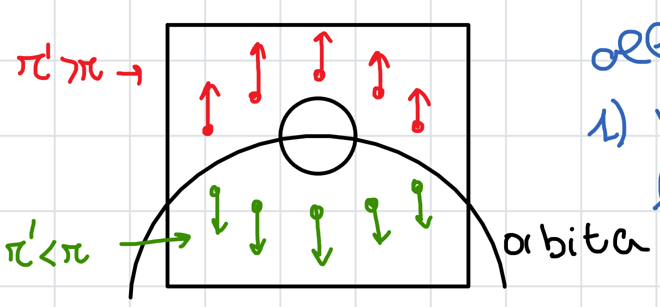
$\gamma \to G$ = costante gravitazionale

8.1 Velocità tangenziale

Sapendo che $\vec{F} = G\frac{m_T m}{r^{\cancel{2}}} = m \cdot \vec{a}_c = m \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$ (Considerando la velocità rispetto ad un sistema assoluto)

Se si prende invece un sistema solidale si ha che $\frac{mv^2}{r} - G\frac{m_T m}{r^2} = 0$ (perché il corpo è in equilibrio). Il che implica che





allontanandosi dalla traiettoria si genera una forza:

1) verso l'alto se si sposta il corpo più lontano dal l'centro: $m v^2 - \frac{G m_T m}{(r+\Delta r)} = \cancel{m v^2 r} + m v^2 \Delta r - \cancel{G m_T m} = F > 0$

2) verso il basso se si avvicina il corpo: $\cancel{m v^2 r} - m v^2 \Delta r - G \cancel{m_T m} = F < 0$

8.2 Energia potenziale

Come già dimostrato la forza gravitazionale è una forza conservativa per la quale vale: $\Delta T + \Delta U = 0$ dove $\Delta T = \frac{1}{2} m \Delta v^2$ e $\Delta U = -G \frac{m_1 m_2}{r_1 r_2} \Delta r$, in aggiunta all'energia potenziale si può inoltre definire un potenziale gravitazionale $V_{m_1}(r) = \frac{U}{m_2} = -\frac{G m_1}{R}$

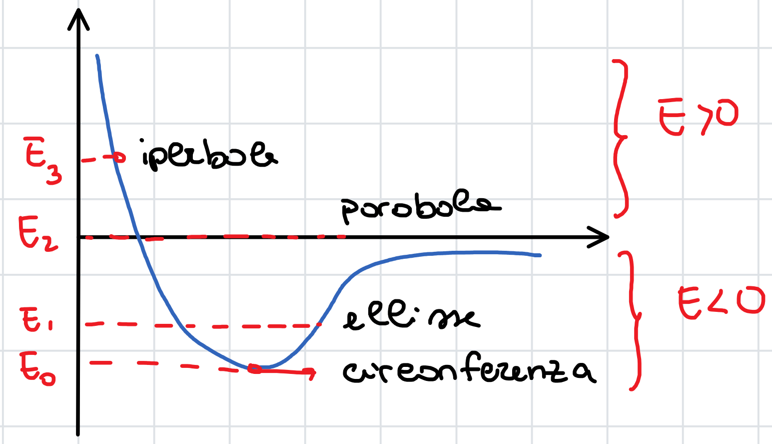
Grafico dell'energia

A seconda del valore dell'energia totale $E = T + U$ l'orbita percorsa dai 2 corpi è diversa:

1) $T > |U| \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 < \frac{G m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow$ orbita iperbolica

2) $T = |U| \Rightarrow$ orbita parabolica

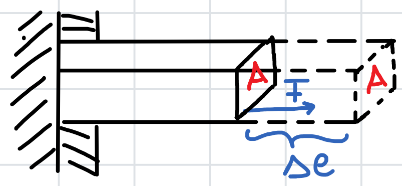
3) $T < |U| \Rightarrow$ orbita ellittica

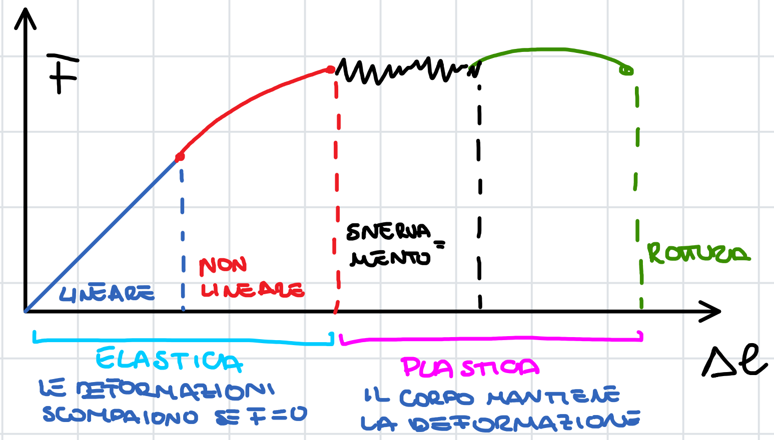


9.0 Deformazioni

Si considera una sbarra di sezione A e lunghezza ℓ, alla quale viene applicata una forza $\vec{F}$ che causa un allungamento $\Delta\ell$. Si nota che per basse forze $\Delta\ell \propto F$ e se si elimina la forza il corpo torna allo stato iniziale. DEFORMAZIONE ELASTICA

Aumentando F si ottengono deformazioni che non scompaiono interamente con la rimozione di F, ovvero si è superato il punto limite di elasticità. (deformazione plastica + elastica)





Per studiare quindi l'allungamento in funzione della forza senza che questo venga influenzato dalle caratteristiche geometriche ma solo dalla natura del materiale si introducono 2 nuove grandezze

1) la deformazione: una qualsiasi variazione di volume e/o di forma che in questo caso corrisponde a $def = \frac{\Delta\ell}{\ell}$ (adimensionato)

2) lo sforzo o sollecitazione, il rapporto fra la forza e la superficie (considerando che questa si riporti uniformemente su S) $sforzo = \frac{F}{A}$