

**LEZIONI
DI FISICA**

**ELETTRONAGNETISMO
OTTICA**



I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi.
L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti

Fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale) nei limiti del 15% di ciascun volume possono essere effettuate negli esercizi che aderiscono all'accordo tra SIAE - AIE - SNS e CNA - Confartigianato - CASA del 18 dicembre 2000, dietro pagamento del compenso previsto in tale accordo.

Per riproduzioni ad uso non personale l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste per tale tipo di riproduzione vanno inoltrate a:

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'ingegno (AIDRO)
Corso di Porta Romana, n.108
20122 Milano
e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La riproduzione a mezzo fotocopia degli esemplari di tali opere esistenti nelle biblioteche è consentita, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo indicando il nome e il luogo della scuola:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@bo.zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Prima ristampa Zanichelli editore S.p.A., Bologna, Copyright © 2001

Ristampa:

6 5 4 2008 2009 2010 2011

In copertina: A. Achilli, 1935, bozzetto per affresco (Sala Marconi, Sede C.N.R., Roma) su "Energia elettrica e Telecomunicazioni".

Composizione e grafica: CompoMat s.a.s., Loc. Braccone, Configni (RI)

Stampa: Tipografia Babina
Via Aldo Moro 18, 40068 San Lazzaro di Savena (Bologna)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

LEZIONI DI FISICA

Daniele Sette - Mario Bertolotti

ELETTRONAGNETISMO OTTICA

ZANICHELLI



Indice

PREFAZIONE	IX
1 Elettrostatica	
1.1. Introduzione.....	1
1.2. Esperienze elementari.....	2
1.3. Legge di Coulomb	8
1.4. Quantizzazione e conservazione della carica	13
1.5. Energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi	15
1.6. Il campo elettrico.....	18
1.7. Rappresentazione del campo elettrico. Linee di forza.....	24
1.8. Flusso di un vettore	25
1.9. Legge di Gauss	27
1.10. Alcune applicazioni della legge di Gauss..	31
1.11. Il potenziale elettrostatico	36
1.12. Espressione analitica della natura conservativa di E_0	41
1.13. Il potenziale elettrostatico per alcune distribuzioni di cariche.....	43
1.14. Il dipolo elettrico	46
1.15. L'approssimazione di dipolo per una distribuzione qualsiasi.....	49
1.16. Azioni su un dipolo in campo elettrico ...	51
1.17. I conduttori nel campo elettrico.....	53
1.18. Capacità e condensatori	58
1.19. Energia immagazzinata in un condensatore. Energia nel campo elettrostatico....	62
1.20. Energia potenziale di un sistema di cariche. Densità di energia nel campo elettrostatico	63
1.21. Densità di carica sulla superficie dei conduttori.....	65
1.22. Forze sui conduttori carichi	66
1.23. Strumenti elettrostatici	69
1.24. Esperienza di Millikan. Carica dell'elettrone.....	72
1.25. Il problema generale dell'elettrostatica. Le leggi fondamentali del campo elettrostatico. L'equazione di Poisson e l'equazione di Laplace	73
1.26. Metodo delle immagini	78
2 Campo elettrostatico nei dielettrici	
2.1. Il campo elettrostatico nei dielettrici	83
2.2. Il vettore spostamento elettrico	90
2.3. Capacità di un condensatore contenente un dielettrico	91
2.4. Paragone dei valori del campo elettrico nel vuoto e in un mezzo dielettrico materiale.	92
2.5. Campo elettrico alla superficie di separazione di due dielettrici	92
2.6. Forze fra cariche in un dielettrico	94
2.7. Energia di un sistema di cariche in presenza di un dielettrico	95
2.8. Forze su conduttori nel caso di presenza di dielettrico e sul dielettrico stesso	96
2.9. Interpretazione microscopica della polarizzazione nei dielettrici. Campo locale	101
2.10. Intensità di polarizzazione e momenti atomici di dipolo. Polarizzazione nei gas non densi	102
2.11. Polarizzabilità e costante dielettrica di mezzi densi.....	110
2.12. Perdite nei dielettrici e rigidità	114
2.13. Polarizzazione non lineare	115
2.14. Generatore di Van der Graaff	116
3 Correnti elettriche stazionarie	
3.1. Introduzione.....	119
3.2. Densità ed intensità della corrente di conduzione.....	120
3.3. Vari tipi di corrente. Corrente di spostamento. Circuito elettrico	123
3.4. Legge di Ohm. Resistenza	126
3.5. Struttura dei circuiti elettrici	130
3.6. Potenza in un tratto di circuito. Legge di Joule	133
3.7. Forza elettromotrice	134
3.8. Circuiti in serie	138
3.9. Le regole di Kirchhoff per i circuiti	142
3.10. Resistenze fisse e variabili	148
3.11. Misurazione di differenze di potenziale, di resistenze e di potenze	148
3.12. Teoremi sui circuiti	149
3.13. Conduzione elettrica nei gas	152
3.14. Conduzione elettrica nei liquidi	163

3.15. Conduzione elettrica nei solidi	172	5.14. Interazioni responsabili del campo molecolare. Teoria di Heisenberg	297
3.16. Evidenza dell'esistenza di elettroni liberi nei metalli.....	173	5.15. Anisotropia ferromagnetica e magnetostrizione	298
3.17. Teoria di Drude degli elettroni liberi nei metalli	174	5.16. Domini magnetici	300
3.18. Confronto fra teoria di Drude ed esperienza	178	5.17. Curva di magnetizzazione e ciclo di isteresi	304
3.19. I superconduttori	180	5.18. Materiali ferromagnetici	308
3.20. Le equazioni circuitali per condizioni quasi stazionarie.....	185	5.19. Antiferromagnetismo e ferrimagnetismo ..	310
4 Il campo magnetico di correnti stazionarie		5.20. Il campo magnetico terrestre.....	313
4.1. Introduzione.....	189	6 L'induzione elettromagnetica	
4.2. Azioni magnetiche. Vettore induzione magnetica	190	6.1. Introduzione.....	317
4.3. Forze magnetiche su cariche puntiformi in moto	193	6.2. Legge di Faraday-Neumann-Lenz.....	317
4.4. Forza magnetica su una corrente. Seconda formula di Laplace	205	6.3. Interpretazione microscopica delle esperienze di induzione elettromagnetica	320
4.5. Sollecitazione su un circuito percorso da corrente	206	6.4. Espressione differenziale della legge di Faraday-Neumann-Lenz per i mezzi stazionari	327
4.6. Campo magnetico creato da correnti. Prima formula di Laplace	209	6.5. Alcuni esempi di induzione elettromagnetica	328
4.7. Il vettore B_0 per alcune distribuzioni di cariche in moto	212	6.6. Forza elettromotrice indotta in condizioni quasi stazionarie. Coefficienti di mutua induzione e autoinduzione	334
4.8. Azioni fra correnti. Definizione dell'ampère	216	6.7. Circuito RL	337
4.9. Momento magnetico di una spira e di una bobina percorsa da corrente	218	6.8. Energia in un induttore. Densità di energia nel campo magnetico	340
4.10. Strumenti di misura di correnti	221	7 Le correnti alternate nell'approssimazione di stati quasi-stazionari	
4.11. Forze elettriche, forze magnetiche ed invarianza relativistica della carica	222	7.1. Introduzione.....	343
4.12. Complementi di relatività	224	7.2. Metodi di rappresentazione di grandezze sinusoidali	345
4.13. Elettrodinamica dei corpi in moto. Vettori E_0 e B_0	227	7.3. Circuiti serie in corrente alternata	351
4.14. Proprietà fondamentali di B_0	230	7.4. Trattazione generale di reti in corrente alternata mediante la rappresentazione con numeri complessi	359
4.15. Potenziale scalare	235	7.5. Potenza nei circuiti in corrente alternata	365
4.16. Potenziale vettore	239	7.6. Adattamento di impedenza fra generatore e circuito utilizzatore	367
4.17. Relazioni energetiche e forze fra circuiti ..	242	7.7. Misurazione delle grandezze nei circuiti in corrente alternata	368
4.18. Il vettore intensità del campo magnetico ..	248	7.8. Oscillazioni libere in un circuito RLC	369
5 Il campo magnetico nella materia		7.9. Oscillazioni forzate nel circuito RLC . Transitorio e risonanza	375
5.1. Introduzione.....	251	7.10. Trasformatore statico	380
5.2. I vettori magneticci nella materia	251	7.11. Correnti trifasi	385
5.3. Campo magnetico alla superficie di separazione di due mezzi	258	7.12. Campo magnetico rotante	386
5.4. Vari tipi di materiali	260	7.13. Generatori e motori	389
5.5. Impieghi dei materiali ferromagnetici	262	7.14. Reti a catena di celle T o II	392
5.6. Poli magnetici. Aghi magnetici	267	7.15. Filtri	396
5.7. Circuito magnetico	270	8 Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche	
5.8. Progetto di magneti permanenti	273	8.1. Introduzione	399
5.9. Studio sperimentale delle sostanze in campo magnetico	275	8.2. Corrente di spostamento	400
5.10. Spiegazione classica del comportamento magnetico della materia. Momenti magnetici atomici	277	8.3. Le equazioni di Maxwell	403
5.11. Momenti della quantità di moto e momenti magnetici per sistemi atomici nella meccanica quantistica	283	8.4. Propagazione di una perturbazione elettromagnetica in un mezzo dielettrico omogeneo, privo di cariche e correnti	408
5.12. Teoria quantistica del paramagnetismo atomico	288	8.5. Onde piane in un dielettrico omogeneo ..	410
5.13. Ferromagnetismo. Ipotesi di Weiss. Domini ferromagnetici e loro magnetizzazione spontanea	292	8.6. Energia delle onde elettromagnetiche. Vettore di Poynting	416
		8.7. Propagazione delle onde elettromagnetiche	419

8.8. Riflessione e rifrazione di onde piane	422	13 Interferenza	
8.9. Propagazione in un mezzo conduttore omogeneo.....	427	13.1. Introduzione.....	547
8.10. Pressione di radiazione.....	430	13.2. Esperienza di Young.....	548
8.11. Onde sferiche.....	432	13.3. Interferenza mediante riflessioni su uno strato	554
8.12. Potenziali elettrodinamici ed equazioni di Maxwell. Soluzione generale	433	13.4. Interferometro di Michelson	560
8.13. Il campo di un dipolo oscillante.....	436	13.5. Coerenza	565
8.14. Diffusione delle onde elettromagnetiche ..	440		
8.15. Potenziali elettrodinamici e campi elettrico e magnetico per una carica in moto qualsiasi..	443		
8.16. Massa elettromagnetica.....	443		
9 Natura della luce e trattazione dell'ottica		14 Difrazione	
9.1. Teoria ondulatoria e corpuscolare	449	14.1. Introduzione.....	571
9.2. Sorgenti di luce.....	453	14.2. Difrazione di Fresnel e di Fraunhofer	572
9.3. Velocità della luce	455	14.3. Difrazione di Fresnel	574
10 Ottica geometrica		14.4. Estensione delle figure di diffrazione nella zona d'ombra. Propagazione rettilinea	577
10.1. Introduzione.....	459	14.5. Difrazione di Fraunhofer. Fenditura semplice.....	578
10.2. Sistemi ottici ed immagini	461	14.6. Potere risolutivo di una fenditura rettangolare	584
10.3. Formazione di immagini per riflessione ..	463	14.7. Difrazione di Fraunhofer con apertura circolare	586
10.4. Convenzioni sui segni per gli spazi oggetto e immagine.....	467	14.8. Potere risolutivo per apertura circolare	588
10.5. Distanza focale. Formula degli specchi sferici. Costruzione grafica delle immagini ..	468	14.9. Potere risolutivo di sistemi ottici che forniscono immagini	590
10.6. Formazione di immagini per rifrazione ..	474	14.10. Doppia fenditura	594
10.7. Proprietà generali dei sistemi ottici centrati	480	14.11. Reticolo di diffrazione	599
10.8. Lenti sferiche sottili	484	14.12. Reticoli e spettri	604
10.9. Aberrazioni delle lenti	490	14.13. Reticoli tridimensionali. Difrazione di raggi X	607
10.10. Luminanza dell'oggetto e dell'immagine ..	491		
10.11. Dispositivi ottici per la formazione di immagini	493		
10.12. Rifrazione attraverso lastra a facce piane. Prisma	503		
10.13. Dispersione del prisma. Spettroscopia prisma	505		
11 Il principio di Huygens-Fresnel		15 Laser e ottica nonlineare	
11.1. Introduzione	509	15.1. Introduzione	613
11.2. Principio di Huygens-Fresnel	510	15.2. Il laser	613
12 Polarizzazione		15.3. Ottica nonlineare	619
12.1. Introduzione	519	15.4. Giustificazione della presenza di una risposta nonlineare della materia	619
12.2. Polarizzazione per riflessione	522	15.5. Produzione di seconda armonica	621
12.3. Polarizzazione per doppia rifrazione	525	15.6. Effetti del terz'ordine. Autofocheggiamento	626
12.4. Onde piane in cristalli	527	15.7. Effetti elettroottici	627
12.5. Onde ordinaria e straordinaria in cristalli uniassici	530	15.8. Bistabilità ottica	628
12.6. Doppia rifrazione in cristalli uniassici	532	15.9. Caos ottico	631
12.7. Polarizzatori per doppia rifrazione. Prisma di Nicol	535		
12.8. Dicroismo	536		
12.9. Lamme ritardatrici	537		
12.10. Momento della quantità di moto della luce	539		
12.11. Rotazione del piano di polarizzazione	539		
12.12. Birifrangenza prodotta da tensioni meccaniche. Fotoelasticità	540		
12.13. Birifrangenza prodotta da campi elettrici o magnetici intensi	541		
		16 Elettroni nei cristalli e processi legati alle loro proprietà nei metalli	
		16.1. Introduzione	639
		16.2. Statistiche quantistiche	640
		16.3. Funzioni di distribuzione delle statistiche Fermi-Dirac e Bose-Einstein	643
		16.4. Applicabilità delle varie statistiche	647
		16.5. Elettroni nei metalli e statistica di Fermi-Dirac	648
		16.6. Formazione delle bande di livelli energetici consentiti agli elettroni nei cristalli	650
		16.7. Effetto Volta, o del potenziale di contatto. Lavoro di estrazione	655
		16.8. Effetti termoelettrici	658
		16.9. Coppiie termoelettriche	664
		16.10. Emissione termica di elettroni	665
		16.11. Effetto fotoelettrico esterno	668
		16.12. Effetto fotoelettrico interno	671

Appendici**AI I sistemi di unità di misura
in elettromagnetismo**

AI.1. Introduzione	675
AI.2. Sistema CGS elettrostatico	676
AI.3. Sistema CGS elettromagnetico	679
AI.4. Sistema misto o di Gauss.....	682
AI.5. Sistema pratico	683
AI.6. Sistema MKSA e SI.....	684

AI.7. Confronto fra dimensioni e unità nei vari sistemi	687
AI.8. Formule equivalenti nei vari sistemi	688
AI.9. Sistema Internazionale di Unità	690
AII Calcolo vettoriale	
AII.1. Sintesi delle regole.....	693
BIBLIOGRAFIA	699
INDICE ANALITICO	701

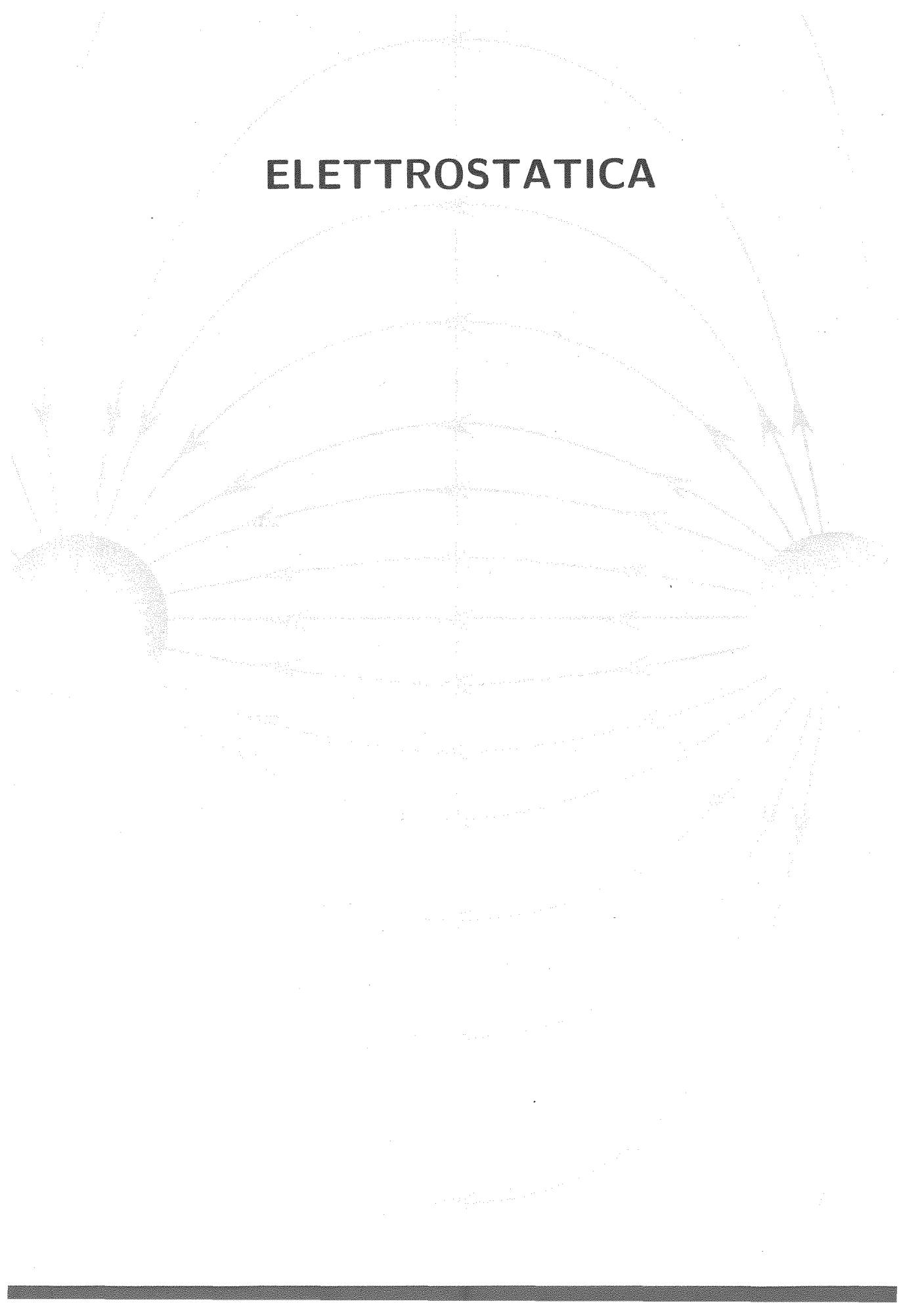
Prefazione

Il presente volume di Lezioni di Fisica è stato redatto per soddisfare, in particolare, i bisogni degli studenti del secondo anno di Ingegneria.

Esso fa uso in larga misura dei testi scritti da uno degli Autori e che per molti anni sono stati usati in corsi di Fisica delle Facoltà di Ingegneria e Fisica.

Il testo tratta l'elettromagnetismo, le onde elettromagnetiche e l'ottica. Gli argomenti fondamentali, presenti in genere in testi per studenti del primo biennio, sono trattati in dettaglio con ampi riferimenti ai recenti sviluppi della Fisica in modo da fornire una visione più ampia dei vari problemi ed una più facile possibilità di successivi approfondimenti.

ELETTROSTATICA



Elettrostatica

1.1. INTRODUZIONE

Alcuni fenomeni elettrici e magnetici erano noti ai greci fin dall'antichità (Talete di Mileto, 624-545 a.C.), ma lo sviluppo delle conoscenze in questo campo è molto più recente e si è svolto negli ultimi due secoli, culminando nelle esperienze di Faraday e nella sintesi che ne ha saputo dare Maxwell. Questo settore della fisica è quello che noi oggi chiamiamo "elettromagnetismo classico". I successivi sviluppi costituiti dalla teoria della relatività e dalla meccanica quantistica sono avvenuti in questo secolo. Daremo a questi ultimi solo uno spazio marginale, in quanto le equazioni di Maxwell sono compatibili con la teoria della relatività e gli sviluppi quantistici possono essere trascurati nel trattare la maggior parte dei fenomeni qui considerati.

Il campo di applicazione della teoria classica dell'elettromagnetismo è molto esteso, specie dopo aver riconosciuto che la luce è di natura elettromagnetica. Così tale teoria è in grado di dar conto non solo dei fenomeni elettrici e magnetici e del funzionamento degli apparecchi basati su tali fenomeni (generatori e motori elettrici, acceleratori di particelle, calcolatori elettronici, ecc.) ma anche dei fenomeni inerenti alla luce e alle onde elettromagnetiche in genere nonché del funzionamento dei dispositivi ottici e radioelettrici (microscopi, apparecchi per radiocomunicazioni, radar, ecc.).

La presentazione dell'elettromagnetismo incontra alcune difficoltà per il fatto che molti suoi concetti basilari sono piuttosto complessi ed interdipendenti.

Molto spesso si comincia con la descrizione dei casi statici, notevolmente più semplici; essi vengono presentati nella loro completezza prima di passare ai casi dinamici più complessi e nei quali la interdipendenza dei fenomeni di vario genere si manifesta in pieno.

È bene sottolineare fin d'ora che l'elettrostatica e la magnetostatica vanno considerate come casi molto particolari della situazione più generale che viene trattata per mezzo di equazioni (di Maxwell) che descrivono il campo elettromagnetico attraverso i due campi elettrico \mathbf{E} e induzione magnetica \mathbf{B} e che sono in grado di predire e descrivere tutti i fenomeni elettromagnetici, fra cui quelli propri delle onde elettromagnetiche di cui la luce è un esempio.

In questo primo capitolo si esamineranno i fenomeni elettrici che avvengono quando le cariche che li generano sono immobili nello spazio. Questa parte dell'elettromagnetismo va sotto il nome di elettrostatica.

Per lo studio di questa parte è necessario discutere come si è arrivati al concetto di carica elettrica, definire la forza che agisce fra cariche e introdurre le nozioni di campo elettrico e potenziale elettrico. Questi quattro concetti sono fondamentali:

- carica elettrica
- forza di Coulomb fra cariche puntiformi
- definizione di campo elettrico
- definizione di potenziale.

Il concetto di carica elettrica può venire introdotto considerando alcune semplici esperienze elementari.

■ 1.2. ESPERIENZE ELEMENTARI

Alcune semplici esperienze qualitative mostrano che i corpi materiali in opportune condizioni acquistano particolari proprietà che sono di solito espresse genericamente dicendo che essi risultano elettrizzati⁽¹⁾. Allo scopo di precisare concetti e terminologia è bene accennare rapidamente ad alcune di queste esperienze.

Si abbiano corpi di varia natura (vetro, ambra, metallo), che per semplicità supponiamo di forma sferica, i quali possano venire sospesi a sottili fili di seta (fig. 1.1a), a mo' di pendolo. All'inizio dell'esperienza⁽²⁾ ed in condizioni normali si osserva che la posizione di riposo di ciascun pendolo non è affatto alterata se si avvicina uno qualsiasi degli altri oggetti sospesi. Se ora i vari corpi vengono strofinati, per es. con un panno di lana (fig. 1.1b), si trova che avvicinando due pendoli realizzati con la stessa sostanza si manifesta una azione repulsiva fra essi (fig. 1.1c), mentre se si avvicinano due pendoli, uno di vetro e l'altro di ambra, essi sono mutualmente attratti. Tali azioni, repulsive o attrattive, derivano dal fatto che i corpi si sono elettrizzati in virtù dello strofinio⁽³⁾.

Le esperienze ora ricordate mostrano l'esistenza di due diversi stati di elettrizzazione, che prendono, per convenzione, i nomi rispettivamente di:

- elettrizzazione positiva o vetrosa, come si diceva nel passato, propria appunto del vetro
- elettrizzazione negativa o resinosa, propria dell'ambra e, in genere, di tutte le resine.

Corpi che si elettrizzano nello stesso modo si respingono tra loro, mentre quelli che si elettrizzano in modo diverso si attirano reciprocamente: avvicinando a un pendolo costituito da una sfera di vetro elettrizzata per strofinio altri corpi parimenti elettrizzati per strofinio, è facile riconoscere quali di essi sono elettrizzati positivamente (azione repulsiva) e quali invece sono elettrizzati negativamente (azione attrattiva).

⁽¹⁾ La parola ha origine dal greco *ηλέκτρον* (ambra) dal nome di una sostanza che presenta l'elettrizzazione in maniera conspicua.

⁽²⁾ In queste considerazioni non si tiene conto delle forze gravitazionali che, come vedremo (par. 1.3), sono trascurabili.

⁽³⁾ All'elettrizzazione per strofinio si dà il nome di *effetto triboelettrico*, dal greco *τριβή* (strofinio).

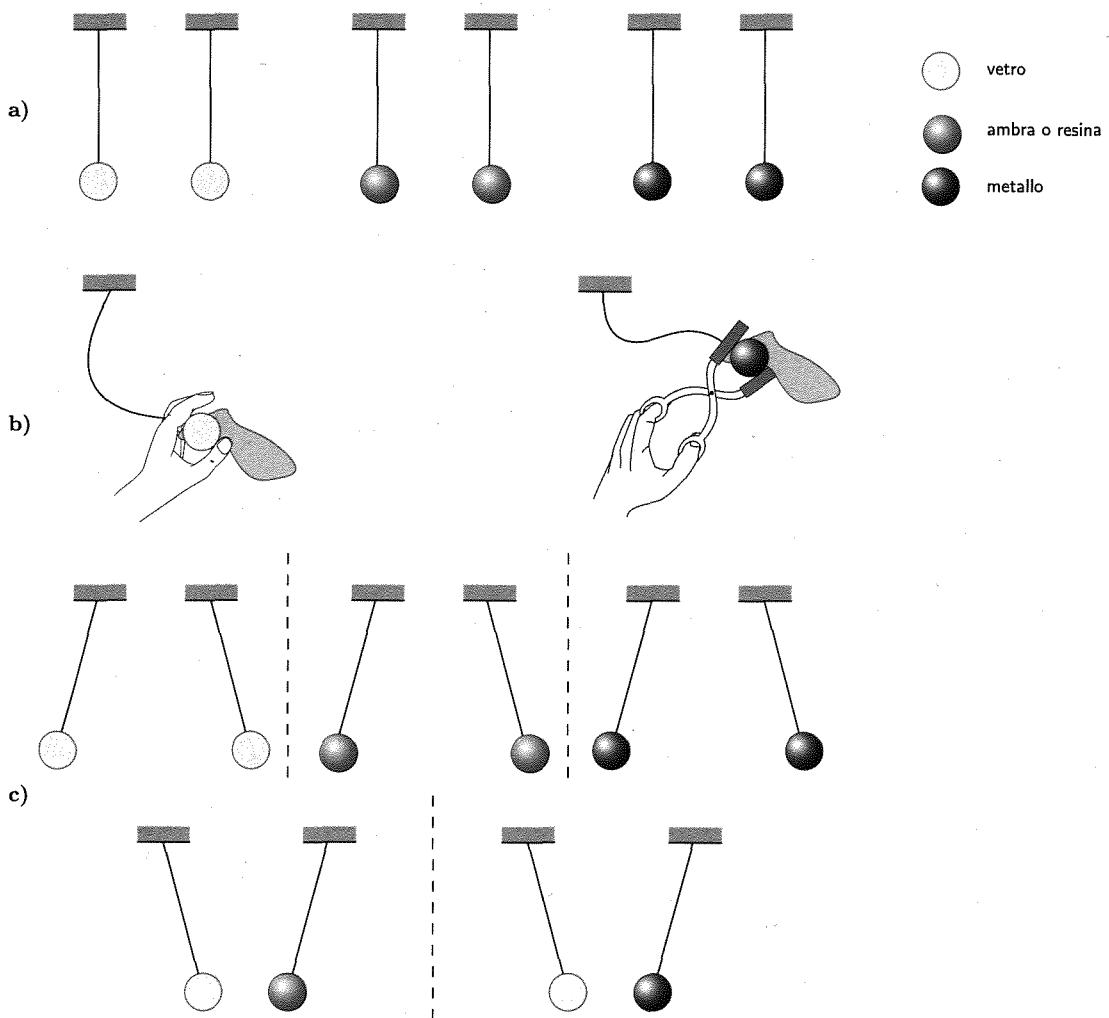


Fig. 1.1

L'esperienza ripetuta con corpi metallici riesce solo se nello strofinare il corpo metallico con il panno di lana, il metallo viene sostenuto mediante un sostegno di un materiale quale vetro o sostanza plastica e non viene a contatto con altre grosse masse metalliche o anche con il corpo umano (fig. 1.1b).

Il complesso delle esperienze accennate va interpretato riconoscendo l'esistenza di un ente, la carica elettrica⁽⁴⁾, che esiste in due forme diverse: vetrosa e resinosa. Inoltre

Carica elettrica

- cariche dello stesso tipo si respingono
- cariche di tipo diverso si attraggono.

⁽⁴⁾ Osserviamo che la locuzione carica elettrica è correntemente usata, oltreché nel significato di "ente responsabile delle azioni elettriche", anche nel significato più concreto, di "corpo elettrizzato": è un caso analogo a quello della locuzione "massa materiale", usata talora per indicare l'ente responsabile delle proprietà inerziali e gravitazionali di un corpo materiale, altre volte per indicare il corpo materiale medesimo.

*Carica positiva
e carica negativa*

È una convenzione quella di chiamare positive le cariche che si manifestano sul corpo di vetro elettrizzato e negative quelle che si hanno sull'ambra strofinata.

L'interpretazione delle esperienze descritte va completata con l'ausilio di informazioni ottenute in numerosissime altre esperienze. Tutti i corpi e gli atomi che li costituiscono sono formati da particelle che sono:

- elettroni, caricati negativamente, di massa assai piccola ($m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg) e di dimensioni praticamente puntiformi;
- protoni, caricati positivamente della stessa quantità di carica, in valore assoluto, dell'elettrone, di massa assai più grande ($m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) e di dimensioni dell'ordine di 10^{-15} m;
- neutroni, particelle prive di carica elettrica e aventi massa e dimensioni praticamente uguali a quelle del protone.

In condizioni normali vi è un equilibrio completo fra cariche di segno contrario e la carica netta di un corpo è zero. In un atomo i protoni e i neutroni sono concentrati nella parte centrale, chiamata nucleo, e tenuti assieme da un tipo speciale di forze, chiamate nucleari, mentre gli elettroni si trovano nella parte periferica dell'atomo in numero tale da neutralizzare, quando l'atomo non è disturbato, esattamente la carica positiva del nucleo e si muovono sotto l'azione di forze di natura puramente elettrica.

Lo strofinio di due corpi fra loro può produrre il passaggio di un certo numero di cariche di un tipo da uno dei corpi all'altro e far sì che ciascuno dei due corpi, una volta separati, abbia una carica netta, naturalmente di segno contrario per i due corpi.

Da quanto detto segue che la quantità più piccola di elettricità che si può liberare è quella dell'elettrone. La carica elettrica è quindi quantizzata, cioè può variare solo per quantità finite.

Esaminando in dettaglio le esperienze prima descritte si deduce che le cariche prodotte per strofinio con corpi come il vetro, l'ambra e le resine restano dove vengono originate, mentre nei corpi metallici esse hanno la possibilità di spostarsi e possono sparire dal corpo considerato se il medesimo viene a contatto con altri corpi che godono della medesima proprietà. Appare quindi evidente che, nei riguardi della maniera in cui cariche elettriche in eccesso rispetto a quelle di equilibrio possono essere tenute dai corpi, si possono distinguere due tipi di sostanze:

- isolanti, caratterizzati dal fatto che le cariche create in un punto vi restano localizzate;
- conduttori, per i quali ciò non avviene giacché le cariche, potendosi muovere, tendono ad allontanarsi reciprocamente il più possibile per effetto delle mutue azioni repulsive. I metalli sono tipici conduttori.

Va ancora osservato che quando un primo corpo carico tocca un secondo corpo (per es. scarico), alcune cariche passano in genere da un corpo all'altro; un corpo può quindi essere elettrizzato non solo per strofinio, come nelle esperienze precedentemente descritte, ma anche per contatto con un altro corpo carico.

I risultati delle precedenti esperienze possono essere utilizzati per realizzare un dispositivo che può a sua volta consentire di controllare lo stato di elettrizzazione di un corpo e di cominciare a dare una valutazione quantitativa della sua carica: l'elettroscopio.

*La carica elettrica
è quantizzata*

Elettroscopio

Un elettroscopio a foglie d'oro è realizzato come nella figura 1.2.

Un corpo metallico formato da un'asta (*A*) che porta alle due estremità rispettivamente una sfera metallica (*B*) e due foglie d'oro molto sottili e flessibili (*C*) oppure una sola foglia d'oro distesa a fianco di un'asta (v. più avanti la fig. 1.4) è sostenuto da un isolante (*D*) e la parte con le foglie d'oro è racchiusa in un recipiente con finestre di vetro (*E*), in modo da proteggere le foglie d'oro da correnti d'aria pur consentendo la visione della loro posizione dall'esterno. Molto spesso l'involucro è metallico e funziona, come meglio vedremo in seguito, da schermo (par. 1.10b).

Se il conduttore centrale (sfera + sbarra + foglie d'oro) non ha ricevuto alcuna carica, le foglie pendono l'una accanto all'altra.

Se ora la sfera viene toccata con un corpo carico, anche se questo viene in seguito rimosso, alcune delle cariche in eccesso restano sul conduttore e quindi anche sulle due foglie: queste di conseguenza si respingono e l'angolo di deviazione può essere un'indicazione della carica presa dal conduttore.

Per scaricare un elettroscopio carico basta collegare mediante un conduttore (o con il corpo umano) la parte centrale del conduttore con la terra. Le cariche, già localizzate sull'elettroscopio, a causa delle forze repulsive, si disperdono (si portano a distanza reciproca molto grande) sulla terra: l'elettroscopio disconnesso nuovamente da terra si trova privo di cariche in eccesso.

L'elettroscopio può essere usato in numerose esperienze. Accenniamo ad alcune di esse che hanno interesse per lo svolgimento delle nostre considerazioni.

1. Si considerino due sfere metalliche di ugual raggio, sostenute ciascuna da un supporto isolante (fig. 1.3). Esse siano inizialmente scariche. Una di esse venga caricata per strofinio; le due sfere vengano in seguito poste a contatto fra loro e separate. Si trova che le sfere poste successivamente a contatto con l'elettroscopio scarico producono la stessa deviazione delle foglie. Se ne deduce che la carica presa dall'elettroscopio nei due casi è la stessa e che uguali sono pure le cariche possedute dalle due sfere prima del contatto con l'elettroscopio.

Si raggiunge così la conclusione che sfere metalliche dello stesso raggio, poste a contatto e poi separate, si suddividono in parti uguali una eventuale carica posseduta inizialmente. Si ha quindi la possibilità di preparare, su corpi sferici metallici, cariche elettriche che stiano fra loro in dati rapporti semplici, prima ancora di aver fissato una unità di misura per la carica.

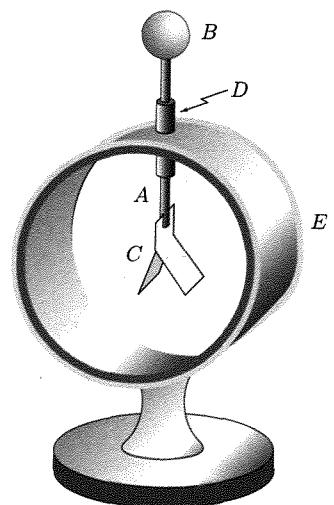


Fig. 1.2

Carica su due sfere conduttrici uguali

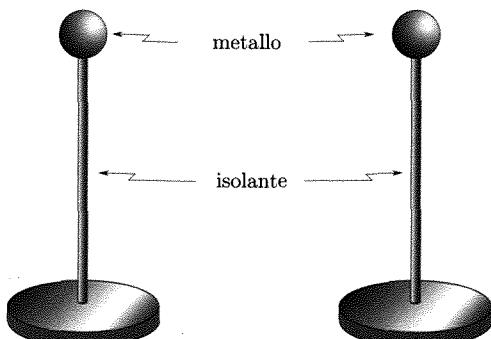


Fig. 1.3

Induzione elettrostatica

2. All'elettroscopio scarico venga avvicinato un corpo carico; si nota che le foglie deviano (fig. 1.4a). La deviazione scompare quando si allontana il corpo carico. Inoltre (fig. 1.4b), qualora un lungo corpo conduttore scarico sia posto con una estremità presso la sfera dell'elettroscopio, senza toccarla, se si avvicina un corpo carico all'altra estremità, si trova che le foglie ancora deviano. Il fenomeno avviene qualunque sia il segno della carica del corpo che viene avvicinato.

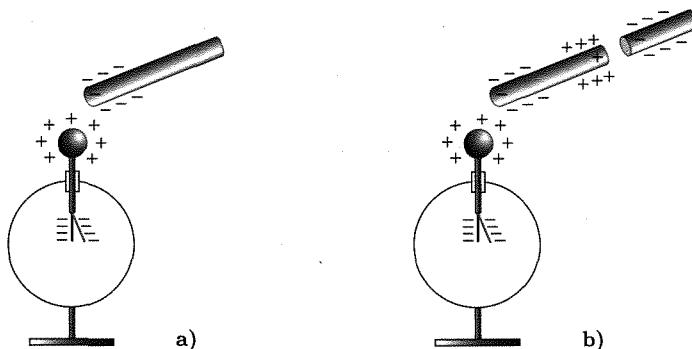


Fig. 1.4

Queste esperienze mostrano il verificarsi di una ridistribuzione di carica in tutti i conduttori quando ad essi viene avvicinato un corpo carico: il fenomeno prende il nome di **induzione elettrostatica**.

Esso si spiega facilmente osservando che, dato che i conduttori neutri in condizioni normali posseggono cariche che hanno (almeno quelle di un tipo) la possibilità di muoversi, la presenza nelle loro vicinanze di cariche di un segno conduce ad una ridistribuzione delle cariche proprie del conduttore con un addensamento di cariche di segno contrario a quelle del corpo inducente (essendo attratte da queste) nella parte del conduttore più prossima al corpo inducente ed un corrispondente addensamento di cariche dello stesso segno di quelle del corpo inducente nelle regioni del conduttore più lontane da esso.

Nello studio della struttura atomica dei metalli si riconosce che le cariche mobili sono elettroni (carica negativa) e quindi le regioni a carica negativa o positiva sono zone nelle quali si ha un arricchimento o rispettivamente un depauperamento di elettroni rispetto alle condizioni normali.

Il fenomeno ora descritto può essere utilizzato per caricare conduttori per induzione. La figura 1.5 indica le operazioni da compiere.

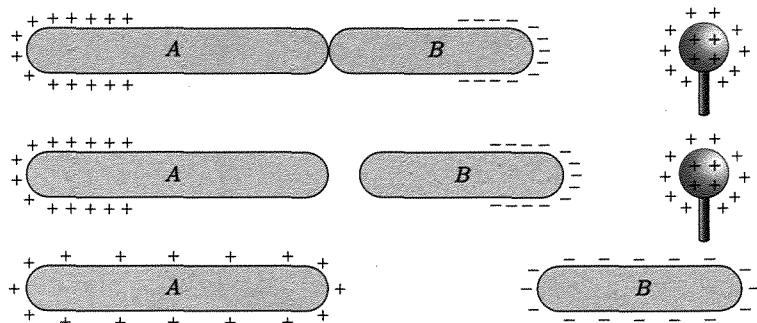


Fig. 1.5

Le cariche mobili nei metalli sono elettroni

I due corpi metallici *A* e *B* siano uniti e sottoposti all'azione del corpo inducente; essi vengono successivamente separati prima di allontanare il corpo inducente. Ciascuno di essi conserva una carica che naturalmente è di segno contrario per i due corpi. Il metodo può essere seguito per caricare con cariche di un certo segno un elettroscopio: in questo caso il conduttore dell'elettroscopio (fig. 1.6) è collegato con un conduttore molto esteso e costituito dalla terra (anche l'involucro è collegato a terra per ottenere una azione di schermo) (5). Dopo che è avvenuta la induzione e prima di allontanare il corpo inducente il conduttore l'elettroscopio (fig. 1.6b) viene disconnesso dalla terra.

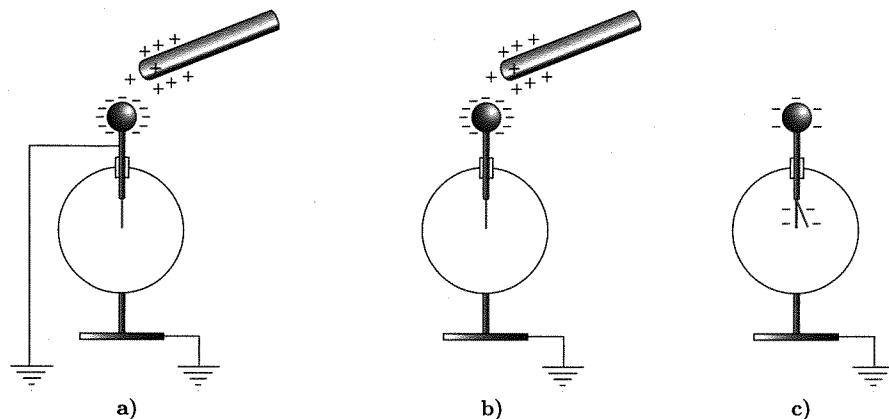


Fig. 1.6

3. Un elettroscopio carico può essere usato per distinguere il segno della carica posseduta da un corpo che viene usato come inducente. Come esempio nella figura 1.7 è indicato ciò che avviene se ad un elettroscopio inizialmente carico negativamente viene avvicinato un corpo carico positivamente: la deviazione delle foglie dapprima decresce perché le cariche positive prodotte dall'induzione sulle foglie riducono la carica negativa qui localizzata. Avvicinando il corpo la deviazione può sparire ed anche ricomparire: in questo ultimo caso essa è dovuta a cariche positive. Qualora il corpo inducente avvicinato all'elettroscopio carico

L'elettroscopio usato per distinguere il segno di una carica

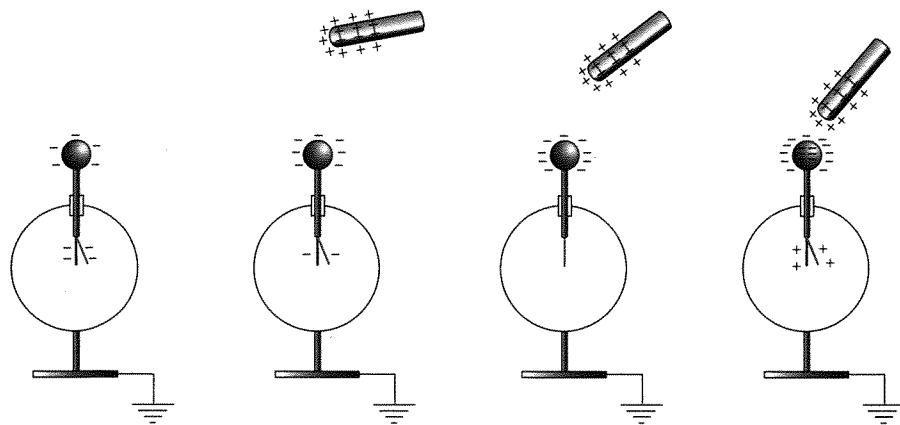


Fig. 1.7

(5) Vedi paragrafo 1.10b

negativamente avesse anche esso cariche negative, la deviazione delle foglie aumenterebbe a partire dal valore originario.

Le esperienze descritte hanno mostrato in maniera semplice la esistenza delle cariche elettriche e come si possano preparare corpi che abbiano cariche uguali od in rapporti fissati. Per potere considerare come una grandezza fisica la carica, o quantità di elettricità, occorre fissare una unità di misura.

Sulla questione delle unità di misura torneremo in seguito. Per ora basta dire che passando dalla meccanica all'elettromagnetismo il numero delle grandezze fondamentali varia da tre a quattro. Occorre quindi scegliere accanto alla lunghezza, alla massa ed all'intervallo di tempo, una quarta grandezza fondamentale (o, ciò che è equivalente, fissare arbitrariamente una ulteriore relazione fra le grandezze fisiche). Per molto tempo è stata scelta come quarta grandezza fondamentale proprio la carica o quantità di elettricità fissandone l'unità di misura, il coulomb (C), in maniera opportuna. Oggi, per ragioni legate alla facilità di realizzare i campioni, si preferisce scegliere come quarta grandezza fondamentale l'intensità di corrente elettrica, la cui unità di misura è l'ampère (A).

*Unità di carica:
coulomb*

*Unità di corrente:
ampère*

Corrente elettrica

Elettrostatica

*Una carica puntiforme
è una carica
concentrata in un punto
senza dimensione*

Le esperienze precedenti che ci hanno condotto a riconoscere l'esistenza delle cariche elettriche sono essenzialmente di natura statica. Cariche elettriche possono tuttavia trovarsi in moto ed in tal caso costituiscono correnti elettriche. Se si considera come caso particolare quello di cariche che si muovono in un conduttore filiforme, si chiama intensità di corrente il rapporto fra la carica netta dq che passa attraverso una sezione del filo nel tempo dt e l'intervallo di tempo stesso.

$$(1) \quad i = \frac{dq}{dt} .$$

Situazioni diverse si possono incontrare e saranno da noi discusse in seguito. Dalla (1) si vede tuttavia come la scelta di un campione per l'unità di intensità di corrente (ampère) fissi anche la unità per la quantità di elettricità (coulomb).

■ 1.3. LEGGE DI COULOMB

L'elettrostatica è quella parte dell'elettrologia, cioè della teoria dei fenomeni elettrici, che si occupa delle questioni relative a cariche elettriche in condizioni statiche: vale a dire cariche di valore costante nel tempo e la cui posizione sia parimenti costante nel tempo.

La trattazione dell'elettrostatica inizia dalla legge di Coulomb che fissa la forza fra cariche puntiformi. Si può dire che l'essenza dell'elettrostatica è la legge di Coulomb, e gran parte delle considerazioni che si fanno in elettrostatica servono a porre in evidenza le particolarità di tale legge ed a sfruttare tali particolarità per rendere più semplice la trattazione dei problemi pratici.

Come è stato già notato, due corpi elettricamente carichi posti nelle vicinanze uno dell'altro si attraggono o si respingono secondo che le cariche nette da essi possedute siano di segno opposto od uguale.

Vogliamo ora stabilire la espressione della forza fra cariche puntiformi; essa è fondamentale per tutto l'elettromagnetismo sicché è opportuno esa-

minare non solo l'esperienza, invero non molto precisa, che ha condotto originariamente a stabilirla ma anche le ragioni della nostra fiducia sulla sua esattezza.

L'esperienza diretta può essere fatta secondo uno schema semplice (fig. 1.8) facendo uso di una bilancia di torsione (*B*) per misurare la forza fra due sfere conduttrici caricate: il raggio di queste sfere è molto piccolo rispetto alla loro distanza in modo da potere ritenere puntiformi le cariche medesime. Nella disposizione di figura 1.8 la distanza fra le sfere scaricate può essere variata girando (mediante il bottone *K*) il sostegno del filo di torsione; la intensità della forza tra le sfere quando esse vengono caricate e la loro distanza possono essere dedotte dall'angolo di cui devia l'equipaggio in seguito al conferimento di cariche alle sfere. Si osservi che già prima di avere introdotto una unità di misura della carica *q* è possibile assicurarsi che le cariche (quantità di elettricità conferite alle due sfere (*q*₁, *q*₂) stiano fra loro secondo rapporti semplici scelti a piacere⁽⁶⁾)

Una carica a simmetria sferica si comporta come una carica puntiforme

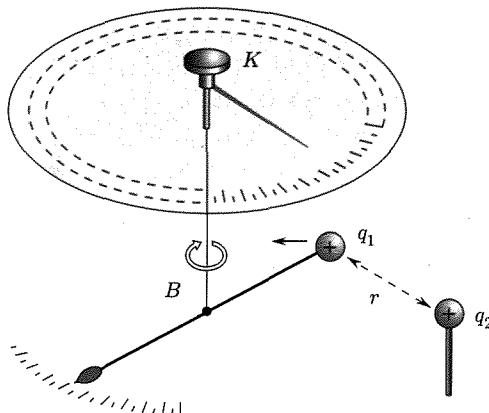


Fig. 1.8

Esperienze fatte con lo schema precedente, variando la distanza fra le cariche e il valore delle cariche stesse, hanno condotto Coulomb (1785) a riscontrare che la forza (attrattiva o repulsiva) è proporzionale a ciascuna delle cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

La forza che si esercita su *q*₂ è data, indicando con *r* la distanza orientata di *q*₂ rispetto a *q*₁ (fig. 1.9), dalla relazione

$$(2) \quad \mathbf{F}_2 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

essendo *k*₀ una costante che dipende dal sistema di unità di misura, e $\frac{\mathbf{r}}{r}$ il versore nella direzione di *r*.

Si noti che se *q*₁ e *q*₂ sono dello stesso segno la forza è repulsiva, se *q*₁ e *q*₂ hanno segno contrario la forza è attrattiva. Naturalmente la forza che *q*₂ esercita su *q*₁ è

$$(3) \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

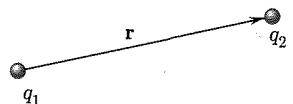


Fig. 1.9

⁽⁶⁾ Ciò può farsi sulla base dell'esperienza descritta nel paragrafo 1.2 (fig. 1.3).

In genere, la forza che una carica puntiforme esercita su una seconda carica anche essa puntiforme si può dunque porre

Legge di Coulomb

$$(4) \quad \mathbf{F} = k_0 q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

essendo \mathbf{r} il vettore che fissa la posizione della seconda carica rispetto alla prima. La (4) è la legge di Coulomb.

È bene osservare che la legge di Coulomb, data dalla (4), vale per l'azione fra cariche puntiformi nell'ipotesi che nello spazio fra di esse non vi sia nulla che produca azioni secondarie: cioè essa è valida nel vuoto. Se invece vi è un mezzo materiale, la situazione può essere alterata in maniera considerevole perché le particelle del mezzo possono subire il fenomeno dell'induzione e concorrere in maniera determinante alle azioni che si esercitano fra due cariche puntiformi. Su questo problema (presenza di dielettrici) torneremo in seguito (cap. 2). Per ora tratteremo il caso che le cariche si trovino nel vuoto. È bene tuttavia già dire che le conclusioni di questa trattazione vanno bene anche nel caso che le cariche si trovino nell'aria, giacché la presenza dell'aria a pressione atmosferica ha l'effetto di alterare l'intensità delle forze fra cariche puntiformi nel vuoto per un fattore piuttosto piccolo (circa 0,002).

Le caratteristiche essenziali della legge di Coulomb per la forza fra cariche puntiformi sono:

1. natura centrale della forza;
2. diminuzione della intensità della forza con il quadrato della distanza;
3. indicazione della validità di un principio di sovrapposizione per le forze elettriche, implicita nella proporzionalità della forza alla carica.

Quest'ultima osservazione è perfettamente confermata nel caso che si abbiano più di due cariche puntiformi: la forza su una di esse è la risultante di quelle che ciascuna delle altre eserciterebbe qualora agisse da sola.

Le esperienze statiche del tipo di quella di Coulomb sono piuttosto delicate e non possono essere eseguite con una precisione molto elevata. La grande fiducia che viene riposta sulla validità, entro vasti limiti, della legge di Coulomb sta nella verifica, che può essere fatta con grande esattezza, delle indicazioni che da essa si traggono nella sua applicazione a numerosi problemi particolari.

È possibile per esempio mostrare, in analogia al caso gravitazionale (vol. I, cap. 6, par. 6.1), che in conseguenza della dipendenza della intensità della forza da $1/r^2$ non si ha alcuna forza su cariche nell'interno di un involucro sferico carico⁽⁷⁾: ciò significa che il fenomeno della induzione elettrostatica, se la legge di Coulomb è valida, non deve verificarsi per un conduttore nell'interno di una sfera cava carica. Tale circostanza è stata verificata con precisioni tali da assicurare che l'esponente di r nella espressione della forza elettrica deve essere compreso fra 2,000000002 e 1,999999998.

Come ulteriore sostegno della validità della legge di Coulomb, con particolare riferimento alle piccole distanze, ricordiamo la esperienza di Geiger e Marsden e la sua interpretazione da parte di Lord Rutherford (vol. I, cap. 4, par. 4.15), che tanta importanza hanno avuto sullo sviluppo della teoria atomica. L'esperienza è perfettamente spiegata con lo schema dell'atomo formato da un piccolo nucleo

1. la forza di Coulomb
è conservativa
2. la forza di Coulomb
dipende da $1/r^2$
3. la forza di Coulomb
è proporzionale
alle cariche

*Esperienza di
Geiger-Marsden*

(7) Nel caso elettrostatico questa proprietà vale per involucri *conduttori* di qualsiasi forma (par. 1.10b).

carico positivamente in cui è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo e da elettroni disposti nell'intorno, solo se si ammette che la forza fra le particelle atomiche (cariche puntiformi) abbia intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Per quanto riguarda la validità della legge di Coulomb alle grandi distanze (kilometri ed oltre) si può dimostrare che se la legge dell'inverso del quadrato della distanza venisse meno, il quanto di radiazione elettromagnetica o fotone dovrebbe avere una massa di riposo che sebbene molto piccola sarebbe finita. Di conseguenza si dovrebbe osservare, nel vuoto, una variazione della velocità di propagazione c delle onde elettromagnetiche con la frequenza. Le esperienze condotte con la luce ($\lambda \approx 10^{-6}$ m) e con le microonde ($\lambda = 1$ cm) non mostrano differenze in c entro i limiti degli errori sperimentali (1 parte in 10^6).

I risultati che si ottengono dalla analisi di questi problemi particolari consentono di ritenere valida la legge di Coulomb nel grande campo delle distanze fra cariche puntiformi che va da circa 10^{-15} m ad almeno molti kilometri. Tutto ciò giustifica di prendere la legge di Coulomb come punto di partenza per la descrizione dell'elettromagnetismo.

Come si è già detto, la costante k_0 ⁽⁸⁾ dipende dal sistema di unità di misura. La differenza fra il numero di grandezze fisiche ed il numero delle relazioni indipendenti fra esse, che abbiamo visto essere tre in meccanica, sale a quattro in elettromagnetismo. Ciò significa, come già detto, che accanto alle tre grandezze fondamentali introdotte in meccanica, occorre sceglierne una quarta o, quello che è equivalente, fissare arbitrariamente una nuova relazione fra le grandezze fisiche⁽⁹⁾. Nel caso che si prenda una quarta grandezza come fondamentale, la sua scelta va fatta con criteri relativi alla facilità di realizzazione del campione, alla sua invariabilità e riproducibilità.

Il sistema di unità di misura al quale correntemente faremo riferimento, usualmente indicato con la sigla SI, sceglie come quarta grandezza fondamentale la intensità di corrente elettrica e l'unità, fissata in maniera che vedremo in seguito, è l'ampère (A).

L'unità di misura della carica, o quantità di elettricità, il coulomb (C), è definito mediante la relazione che lega l'intensità di una corrente costante (i) in un conduttore filiforme e la quantità di elettricità (q) che passa attraverso una sezione del conduttore nel tempo t :

$$(5) \quad q = i t.$$

Il coulomb è la carica che passa in un secondo attraverso una sezione di un conduttore filiforme percorso da una corrente costante e di intensità pari a 1 ampère.

In questo sistema di unità di misura la costante k_0 va determinata con esperienze nel vuoto; per essa si trova il valore:

$$(6) \quad k_0 = 8,98776 \cdot 10^9 \frac{\text{newton} \cdot \text{m}^2}{\text{coulomb}^2}.$$

Allo scopo di rendere più semplici⁽¹⁰⁾ alcune formule che si deducono dalla legge di Coulomb e che sono usate più frequentemente della legge di

Unità di misura

*L'unità fondamentale
è quella della corrente:
l'ampère*

*Unità di carica:
il coulomb*

⁽⁸⁾ Lo zero a deponente sta a indicare, e questo è un uso che manterremo nel seguito, che si tratta di grandezze relative ad esperienze condotte nel vuoto.

⁽⁹⁾ Vedi appendice I.

⁽¹⁰⁾ Eliminando un fattore 4π .

Coulomb stessa, si trova utile porre la costante k_0 nella forma

$$(7) \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

essendo

*La costante dielettrica
del vuoto*
 $\epsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

$$(8) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = 8,85415 \cdot 10^{-12} \frac{\text{coulomb}^2}{\text{newton} \cdot \text{m}^2}.$$

La costante ϵ_0 ⁽¹¹⁾ prende il nome di costante dielettrica del vuoto.
Con le scelte ora fatte la legge di Coulomb si scrive dunque:

*La legge di Coulomb
nella forma
comunemente usata*

$$(9) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Il sistema che fa uso delle unità metro, kg-massa, secondo, ampère e nel quale si è scelto di far comparire esplicitamente nella espressione di k il fattore 4π si dice sistema SI.

È bene accennare ad un altro sistema che viene talvolta usato: il sistema CGS elettrostatico. Le prime tre grandezze fondamentali sono ancora la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo ma le unità sono il centimetro, il grammo ed il secondo. Inoltre invece di scegliere una quarta grandezza (di natura elettrica) come fondamentale e fissarne l'unità mediante un campione, si preferisce introdurre un'altra relazione fra le grandezze fisiche e tale relazione corrisponde (vedi appendice I) ad ammettere la costante k_0 nella (4) come grandezza adimensionata e di valore unitario

$$(10) \quad k_0 = 1.$$

In tale sistema la legge di Coulomb si scrive

$$(11) \quad \mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

A norma della relazione ora scritta, la carica unitaria è quella che posta nel vuoto a distanza di 1 cm da una carica uguale la respinge con la forza di 1 dime. Tale unità di quantità di elettricità nel sistema di unità elettrostatiche (CGS elettrostatico) è a volte indicata con i nomi di franklin o di statcoulomb; essa è molto più piccola del coulomb

$$1 \text{ coulomb} = 2,99582 \cdot 10^9 \text{ statcoulomb}.$$

Nel caso che più cariche puntiformi (q_1, q_2, \dots, q_n) siano presenti, la forza che agisce sulla singola carica è la risultante delle forze su di essa esercitate dalle cariche rimanenti. Se si vuole l'espressione della forza su q_i e si indica con \mathbf{r}_{ij} il vettore che ha origine nella posizione occupata da q_j e termina nella posizione in cui si trova q_i , si ha

$$(12) \quad \mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij})^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} q_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij})^3}.$$

⁽¹¹⁾ A norma della (6) è $k_0 \cong 9 \cdot 10^9$, talché si può scrivere $\epsilon_0 \cong (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$: tale valore risulta spesso comodo nei calcoli.

Esempi di applicazione della legge di Coulomb

1. Si supponga di sospendere a sottili fili di seta di lunghezza l (fig. 1.10) due palline identiche di massa m , le quali posseggano la stessa carica q . I fili deviano dalla verticale di un piccolo angolo θ . Si vuole determinare q . Ciascuna sfera è in equilibrio sotto l'azione del peso, della forza di Coulomb e della reazione vincolare (diretta lungo il filo). Ciò significa che la risultante del peso e della forza di Coulomb deve avere la direzione del filo, cioè

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}}{mg}.$$

Essendo inoltre

$$\tan \theta = \frac{\left(\frac{r-a}{2}\right)}{l},$$

si ha

$$q = \left(\frac{2\pi\epsilon_0 m g r^2 (r-a)}{l} \right)^{1/2}.$$

Dalla valutazione della distanza di equilibrio r fra le sfere si può dedurre la loro carica. Se per esempio $l = 1$ m, $a = 0,02$ m, $m = 0,01$ kg, $r = 0,05$ m, si ha

$$q = \sqrt{4,1 \cdot 10^{-16}} \simeq 2 \cdot 10^{-8} \text{ coulomb}.$$

2. Supponiamo di avere due elettroni e paragoniamo la forza di repulsione coulombiana (F_C) con la forza gravitazionale di attrazione (F_G). Poiché la carica e la massa dell'elettrone sono:

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}; \quad m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg},$$

le due forze valgono, quando le cariche sono a distanza r ⁽¹²⁾.

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2,56 \cdot 10^{-38}}{r^2} = \frac{2,3}{r^2} \cdot 10^{-28} \text{ newton}$$

$$F_G = \frac{G(9,11 \cdot 10^{-31})^2}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 83 \cdot 10^{-62}}{r^2} = \frac{5,55}{r^2} \cdot 10^{-71} \text{ newton}.$$

Come si vede la forza gravitazionale è molto più piccola (circa 10^{-43}) della forza coulombiana e trascurabile rispetto ad essa. Per questa ragione nella trattazione dei problemi di elettrostatica non si considerano le forze gravitazionali.

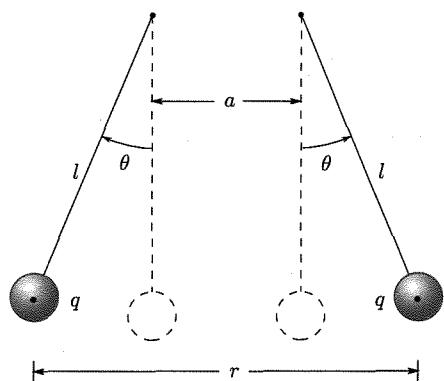


Fig. 1.10

1.4. QUANTIZZAZIONE E CONSERVAZIONE DELLA CARICA

Siamo ora in grado di dare il valore della carica dell'elettrone. Nel seguito (par. 1.24), dopo l'introduzione di alcuni altri concetti, descriveremo una celebre esperienza (Millikan, 1911) che condusse ad una determinazione quantitativa della sua carica abbastanza precisa. Oggi sappiamo, da misure più precise, che il valore della carica dell'elettrone è

$$e = 1,60206 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}.$$

La carica dell'elettrone

(12) Ricordiamo che la costante universale G vale $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ newton} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ (vol. I, cap. 6, par. 6.3).

Nello studio dell'elettrostatica classica si ha a che fare con corpi di dimensioni non piccolissime sui quali si trovano delle cariche nette il cui valore appare, nei limiti di precisione dei metodi di misura che si usano di solito, potere avere tutti i valori possibili. In realtà, come detto, non è così. I corpi sono costituiti da atomi; gli atomi sono costituiti da nuclei carichi positivamente e da elettroni carichi negativamente⁽¹³⁾; i nuclei sono formati da particelle neutre (neutroni) e particelle caricate positivamente (protoni)⁽¹⁴⁾: la carica del protone, positiva, è pari a quella dell'elettrone.

Nelle reazioni nucleari, oltre che protoni e neutroni, possono comparire altre particelle con carica zero, positiva o negativa e masse diverse: un importante risultato sperimentale è che tutte le particelle caricate osservate hanno una carica che, in valore assoluto, è un multiplo intero della carica dell'elettrone⁽¹⁵⁾.

Sviluppi piuttosto recenti nello studio delle particelle elementari hanno mostrato che protoni e neutroni non sono particelle elementari, ma hanno una struttura interna formata da quark⁽¹⁶⁾. Queste particelle elementari (il cui numero totale stabilito nello studio delle particelle elementari è sei), come le (sei) corrispondenti antiparticelle (anti-quark) hanno carica frazionaria in termini di e : $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{2}{3}$.

Il protone è formato da due quark u (ciascuno caratterizzato da carica $+\frac{2}{3} e$) e un quark d (carica $-\frac{1}{3} e$); il neutrone, invece, è formato da due quark d ed un quark u . Queste particelle non sono osservabili isolatamente, ma solo in combinazioni con carica totale (in unità e) 0, -1, +1. Questa circostanza è spiegata sulla base delle caratteristiche particolari delle forze che agiscono fra le particelle (legate a particolari quanti, gluon). Pur non essendo possibile isolare le singole particelle, è possibile confermare la loro esistenza nei protoni e nei neutroni a mezzo di delicate e raffinate esperienze⁽¹⁷⁾.

Per quanto si è detto, la carica q di un qualsiasi corpo può essere posta nella forma

$$(13) \quad q = n e$$

essendo n un numero intero positivo o negativo e può quindi, come già detto, variare solo per quantità discrete. È cioè quantizzata.

Una ulteriore proprietà fondamentale dei sistemi materiali concernente la carica è costituita dalla conservazione della carica; più precisamente: in un sistema materiale isolato la carica netta non può variare. La carica totale netta è ovviamente data dalla somma algebrica della carica positiva e di quella negativa.

*Conservazione
della carica*

⁽¹³⁾ Le forze che tengono assieme elettroni e nucleo in un atomo sono quelle coulombiane.

⁽¹⁴⁾ Le forze che tengono assieme i protoni in un nucleo sono forze di un nuovo tipo, forze nucleari. Esse sono molto più intense di quelle coulombiane, che invece tenderebbero a far disgregare il nucleo.

⁽¹⁵⁾ La parità in valore assoluto delle cariche dell'elettrone e del protone è stata stabilita con la precisione di una parte su 10^{21} .

⁽¹⁶⁾ Il nome fu posto da Murray Gell-Mann (premio Nobel, 1969) nel 1963 ispirandosi ad una sua interpretazione di una frase di James Joyce nel libro *Finnegans Wake: three quarks for Muster Mark*, che egli interpretava come: "three quarts for Mister Mark", un ordine in un bar. V'è infatti analogia nella maniera con cui il numero 3 compare in questo ordine e come tale numero entra nella presenza dei quark in natura (tre quark in un protone o in un neutrone).

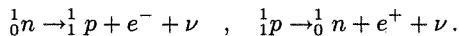
⁽¹⁷⁾ Per esempio: un fascio di elettroni di alta energia può essere usato per una specie di esame micrografico dell'interno del protone. Vari premi Nobel sono stati assegnati a fisici impegnati nelle ricerche sui quark (ed anti-quark), sui gluon, sia sperimentalmente sia nello sviluppo di adeguate teorie.

Questa conservazione può essere mostrata macroscopicamente strofinando fra loro due corpi dello stesso sistema (per es. pallina di vetro e straccio di lana come nelle esperienze elementari descritte nel paragrafo 1.2, fig. 1.1) e controllando che i due corpi, se separati fra loro, posseggono cariche uguali e di segno contrario: la carica netta è zero come prima dello strofinio. Si possono fare numerosissime altre esperienze che confermano, anche su base microscopica, la conservazione della carica totale.

Vogliamo accennare ad alcuni processi nei quali la conservazione è mostrata in maniera evidente.

Un processo molto importante è quello in cui (fig. 1.11) un quanto di radiazione elettromagnetica (fotone) scompare e materia viene creata. Si trova che viene creata una coppia formata da due particelle della stessa massa e carica opposta: elettrone negativo ($-e$) ed elettrone positivo o positrone ($+e$). L'energia del fotone ($h\nu$, con ν frequenza della radiazione, h costante di Planck) deve, in accordo con le indicazioni della teoria della relatività, essere almeno 1,02 MeV⁽¹⁸⁾, corrispondente alla massa delle particelle create ($E = mc^2$, essendo c la velocità della luce nel vuoto). Ciò fa sì che la frequenza della radiazione debba essere molto elevata (raggi gamma). Il processo inverso, annichilimento della coppia elettrone-positrone, si può anche verificare, quando le due particelle sono portate a distanze molto piccole fra loro; la massa scompare e sono creati due quanti gamma procedenti in direzione opposta. In questo processo la carica totale è sempre zero.

Neutrone e protone possono in certe circostanze tramutarsi uno nell'altro secondo le reazioni



La notazione usata per la particella nucleare (neutrone o protone) ha due indici: quello inferiore indica la carica in unità e , l'altro la massa in unità atomiche; il simbolo ν indica qui una particella neutra avente massa di riposo nulla, chiamata neutrino. Come si vede, in questi processi la carica totale è conservata. Lo stesso accade in tutti i processi di decadimento radioattivo naturali o artificiali.

La conservazione della carica netta di un sistema isolato è pertanto una proprietà fondamentale dei sistemi stessi, legata a più generali proprietà, quali quelle di simmetria che legano ogni particella alla sua "antiparticella": la creazione di una particella carica è infatti sempre accompagnata da quella di un'altra particella (antiparticella) avente la stessa massa e carica uguale ed opposta della prima.

È importante ancora indicare che la carica netta di un sistema è relativisticamente invariante: osservatori in sistemi di riferimento diversi (inerziali e non) misurerrebbero lo stesso valore per la carica totale di un sistema di cariche.

1.5. ENERGIA ELETTROSTATICA DI UN SISTEMA DI CARICHE PUNTIFORMI

La forza fra due cariche puntiformi, q_1 e q_2 , è data dalla (9). La situazione può essere analizzata pensando che una delle cariche (indifferentemente q_1 o q_2 ; per esempio q_1) posta in O crei nello spazio circostante

⁽¹⁸⁾ 1 MeV = 10^6 eV. L'elettrone-volt è, come meglio si vedrà in seguito, una unità di energia
 $1 \text{ eV} = 1 \cdot 6 \cdot 10^{-19} \text{ joule}$.

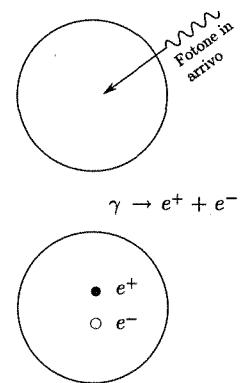


Fig. 1.11

*La forza di Coulomb
è conservativa*

Energia potenziale

un campo di forza che si esplica sull'altra carica (q_2) qualora questa venga posta nel punto (P) definito dal vettore $\mathbf{r}_{1,2}$ mediante la forza (9).

Si osservi che la forza F_2 che agisce su q_2 è una forza centrale e quindi conservativa. In accordo con le considerazioni svolte sui campi di forza conservativi si può introdurre una funzione, energia potenziale (relativa al sistema $q_1 q_2$, chiamata anche energia mutua), definita, a meno di una costante, per mezzo dell'integrale di linea, cioè del lavoro, cambiato di segno, che la forza del campo compie quando la carica q_2 si sposta da una posizione P_1 di riferimento alla posizione generica P lungo una qualsiasi linea C . Precisamente

$$(14) \quad \mathcal{U}(x, y, z) = - \int_{P_1(x_0, y_0, z_0)}^{P(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \text{cost.}$$

Il valore della costante è il valore assegnato arbitrariamente a \mathcal{U} nel punto P_1 .

Se si conviene di assegnare ad \mathcal{U} il valore zero in punti infinitamente distanti da O ($r = \infty$) e si osserva che nel caso di forze centrali conviene usare coordinate polari, si ha:

$$(15) \quad \mathcal{U}(r) = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

dr essendo la proiezione di $d\mathbf{l}$ su \mathbf{r} .

La $\mathcal{U}(r)$ rappresenta anche il lavoro che occorre compiere dall'esterno contro le forze del campo per portare le cariche q_1 e q_2 da una distanza infinita fra loro alla distanza r : infatti

$$(16) \quad \mathcal{U}(r) = \int_{\infty}^r \left(- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Si osservi bene che $\mathcal{U}(r)$ è una funzione della posizione di q_2 nel campo di forza creato da q_1 : essa è indipendente dalla maniera in cui q_2 è stata portata nella posizione in questione.

Il fatto che la espressione è simmetrica rispetto a q_1 e q_2 mostra che l'energia potenziale è una caratteristica del sistema in ogni sua configurazione.

In accordo con quello che già si conosce sulla funzione energia potenziale dei campi conservativi, le sue derivate rispetto alle coordinate che fissano la posizione di q_2 forniscono, cambiate di segno, le componenti della forza su q_2 :

$$(17) \quad \begin{cases} F(r) = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}; \\ \\ \begin{cases} F_x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}; \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \mathcal{U}.$$

L'energia potenziale può essere considerata naturalmente anche nel caso di sistemi formati da più di due cariche puntiformi giacché il campo risultante delle varie forze che su una carica puntiforme esercitano le rimanenti è ancora conservativo.

Per calcolare la espressione della funzione energia potenziale in funzione delle coordinate che fissano la configurazione del sistema si può usare la circostanza, già sottolineata precedentemente, che l'energia potenziale per una configurazione è pari al lavoro compiuto dall'esterno contro le forze del campo per portare le cariche puntiformi da distanze fra loro infinite a quelle della configurazione in oggetto.

Se per esempio consideriamo tre cariche q_1, q_2, q_3 ed indichiamo con r_{12}, r_{13}, r_{23} le distanze mutue, questo lavoro può essere calcolato nella seguente maniera. Si immagini di portare le cariche q_1 e q_2 da distanza infinita alla distanza r_{12} : il lavoro fatto contro le forze del campo è

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Si porti ora la carica q_3 dall'infinito ad occupare la posizione individuata da r_{13} e r_{23} : occorre compiere un lavoro per vincere le azioni fra q_1 e q_3 e, rispettivamente, fra q_2 e q_3 .

Tali valori sono

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}.$$

Si ha quindi:

$$(18) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Questa formula può essere generalizzata per il caso di un sistema di N cariche puntiformi (q_1, q_2, \dots, q_N) tenuto in una configurazione definita dalle distanze r_{ij} fra le cariche q_i e q_j .

L'energia potenziale risulta

$$(19) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j}^N \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi

La doppia somma significa che per un certo j , per es. $j = 3$, la somma per i contiene i termini $i = 1, 2, 4, 5, \dots, N$. Ciascuna coppia di cariche è considerata due volte nell'espressione (19) e ciò spiega il fattore $\frac{1}{2}$ che è stato introdotto.

Sottolineiamo ancora che la struttura simmetrica rispetto alle cariche delle relazioni (18) e (19) corrisponde all'essere l'energia potenziale di un sistema di cariche in ogni sua possibile configurazione una caratteristica del sistema nel suo insieme.

L'energia potenziale è una funzione delle coordinate delle posizioni occupate dalle cariche; le derivate rispetto alle coordinate di queste posizioni, cambiate di segno, forniscono le componenti delle forze che agiscono su ciascuna carica. Ritorneremo su queste forze nel paragrafo 1.18 dopo aver trovato una maniera equivalente alla (19) per esprimere \mathcal{U} .

Esempi

1. Nell'interno di un nucleo atomico due protoni si trovano a distanze di circa $6,0 \cdot 10^{-15}$ m. È facile calcolare la energia elettrostatica mediante la (15)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{6 \cdot 10^{-15}} = \\ &= \frac{(1,6)^2 \cdot 10^{-38}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-15}} = \\ &= 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ joule} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ eV}. \end{aligned}$$

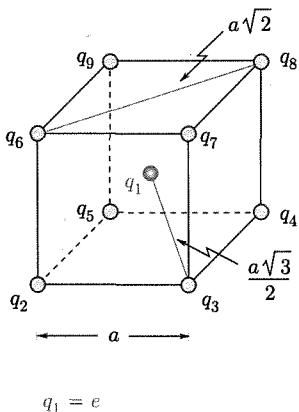


Fig. 1.12

L'azione elettrostatica tende a fare allontanare i protoni fra loro ed a rompere il nucleo; nonostante questa azione il nucleo rimane unito per effetto di forze di nuovo genere, nucleari, molto più intense di quelle elettrostatiche.

2. Si consideri una configurazione di cariche quale quella in figura 1.12. L'energia elettrostatica del sistema si ottiene dalla (19). Si osservi che quando la carica j è quella al centro del cubo (q_1) tutti i termini (8) della seconda sommatoria sono uguali; quando la carica j è ad uno degli spigoli del cubo ($j = 2, 3, \dots, 9$) la sommatoria ha sempre lo stesso valore qualunque sia lo spigolo. Pertanto

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8 \frac{q_1 q_2}{a\sqrt{3}/2} + 8 \left(\frac{q_2 q_1}{a\sqrt{3}/2} + 3 \frac{q_2 q_3}{a} + 3 \frac{q_2 q_4}{a\sqrt{2}} + \frac{q_2 q_8}{a\sqrt{3}} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 8 \left(-\frac{4e^2}{a\sqrt{3}} + \frac{3e^2}{a} + \frac{3e^2}{a\sqrt{2}} + \frac{e^2}{a\sqrt{3}} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{8e^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{3}{a\sqrt{3}} + \frac{3}{a} + \frac{3}{a\sqrt{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left[12 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{13,57}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}. \end{aligned}$$

1.6. IL CAMPO ELETTRICO

Il concetto di campo elettrico è particolarmente utile per analizzare le azioni fra cariche: si pensa che una carica muti lo stato dello spazio che la circonda nel senso che una azione si esercita su di una seconda carica qualora questa venga posta in un punto qualsiasi di tale spazio: questa azione è proporzionale alla seconda carica. L'utilità di tale concetto si palesa nel caso di complesse distribuzioni di cariche.

Le proprietà del campo elettrico discendono da quelle della legge di Coulomb:

- la dipendenza di tale forza dell'inverso del quadrato della distanza fra cariche puntiformi conduce ad una proprietà particolare del flusso del campo elettrico (legge di Gauss) molto utile nella trattazione pratica di vari problemi;
- la natura conservativa delle forze e del campo conduce alla introduzione di una funzione energia potenziale per carica positiva unitaria (potenziale) che consente di sostituire, nelle trattazioni dei problemi, considerazioni su funzioni scalari (potenziali) a quelle su funzioni vettoriali (campi).

Nel paragrafo 1.3 abbiamo visto come la legge di Coulomb consenta di trovare la forza che un certo numero di cariche puntiformi, q_1, q_2, q_3, \dots esercita nel vuoto su un'altra carica q_i : equazione (12); questa forza è proporzionale a q_i .

L'azione esercitata su q_i dalle rimanenti cariche elettriche può essere analizzata pensando che queste ultime (q_j , per $j \neq i$) creino un campo di forza in una regione dello spazio il quale si esplica mediante una forza sulla carica q_i , proporzionale a q_i ed espressa dalla (12), qualora q_i venga posta in un punto di tale regione.

Queste considerazioni possono essere generalizzate con notevole utilità nella trattazione dei casi pratici nei quali esista una regione ove si risentano le azioni di cariche elettriche comunque distribuite quando venga introdotta in un suo punto P una nuova carica puntiforme. La forza che si esercita su q è infatti sempre proporzionale a q e può essere posta:

$$(20) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 .$$

Il vettore

$$(21) \quad \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{F}}{q} ,$$

che evidentemente caratterizza il campo di forza che le cariche preesistenti determinano in P , prende il nome di intensità del campo elettrico. Dalla maniera usata per introdurre il vettore \mathbf{E}_0 è evidente che la carica puntiforme q che va introdotta nel punto P per determinare \mathbf{E}_0 deve essere tanto piccola⁽¹⁹⁾ (eventualmente infinitesima) da non disturbare (in maniera apprezzabile) la distribuzione delle cariche che crea \mathbf{E}_0 . Per tali ragioni si può scrivere la (21), più correttamente, nella forma

$$(22) \quad \mathbf{E}_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} .$$

Campo elettrico

Nel caso che la carica unitaria sia tale da non disturbare la distribuzione delle cariche preesistenti (che creano \mathbf{E}_0), il vettore intensità del campo elettrico rappresenta la forza che agisce sulla carica positiva puntiforme unitaria posta nel punto P che si considera.

Il campo elettrico si misura, nel sistema SI, in newton/coulomb. Vedremo fra breve che tale unità (per \mathbf{E}_0) può esprimersi anche diversamente (volt/m).

Il campo elettrico si misura in volt/m

L'impiego del vettore intensità del campo elettrico riesce utile perché consente di determinare l'azione che una qualsiasi distribuzione di cariche esercita su una nuova carica come una proprietà dello spazio caratterizzata proprio dal valore di \mathbf{E}_0 .

⁽¹⁹⁾ In queste considerazioni di elettrostatica classica si ignora il fatto che q non può essere più piccola di un dato valore, e . In genere la carica esploratrice che occorre immaginare di usare nelle considerazioni dell'elettrostatica classica per quanto molto piccola (e trattata a volte come infinitesima dq) può essere pensata fisicamente sempre molto maggiore di e .

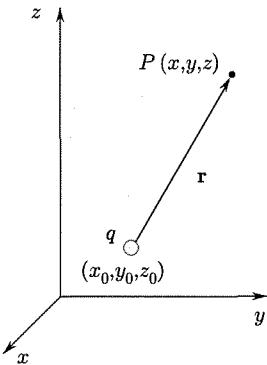


Fig. 1.13

Campo elettrico di una carica puntiforme

Il problema di determinare le azioni che una certa distribuzione di cariche esercita su una nuova carica puntiforme può così essere diviso in due parti:

1. l'azione sulla carica è espressa dalla (20) qualunque sia q , purché puntiforme e tale da non disturbare la distribuzione delle altre cariche;
2. il complesso delle azioni dovute alla distribuzione delle altre cariche (diverse da q) è rappresentato complessivamente per mezzo di un unico vettore, \mathbf{E}_0 .

Il problema è quindi essenzialmente ricondotto alla determinazione di \mathbf{E}_0 , nello spazio che interessa, per la particolare distribuzione di cariche del caso in esame.

Il campo elettrico creato da un'unica carica puntiforme q (fig. 1.13) in un punto (x, y, z) individuato dal vettore \mathbf{r} che ha origine nella posizione della carica (x_0, y_0, z_0) ha l'intensità

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{0,x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ E_{0,y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ E_{0,z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \end{array} \right.$$

Il campo creato da una distribuzione di N cariche puntiformi q_i situate nei punti (x_i, y_i, z_i) ha intensità

$$(24) \quad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{r}_i}{r_i^2},$$

essendo \mathbf{r}_i il vettore che ha origine nella posizione (x_i, y_i, z_i) della carica q_i e termina nel punto $P(x, y, z)$ in cui si considera il campo. Inoltre

$$(25) \quad E_{0,x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}},$$

$E_{0,y}$ ed $E_{0,z}$ hanno espressioni analoghe, che si deducono immediatamente.

Molto spesso nella elettrostatica classica si trattano situazioni nelle quali non ha interesse il fatto che in realtà le cariche non possono avere valori più piccoli di una certa quantità (e) giacché si ha a che fare con cariche che sono più grandi di e secondo fattori molto elevati. È molto comune in questi casi avere cariche elettriche non puntiformi bensì distribuite in una porzione dello spazio. È di notevole interesse pertanto esaminare come le considerazioni finora svolte con riferimento a cariche puntiformi possano essere generalizzate. Supponiamo perciò (fig. 1.14) di avere una regione dello spazio nella quale si abbia una distribuzione continua di carica. Una tale distribuzione può essere descritta mediante una densità spaziale di carica $\rho(xyz)$. La densità ρ in un punto di coordinate x, y, z , è il rapporto

fra la carica dq che si trova in un volume elementare attorno al punto considerato ($d\tau = dx dy dz$) ed il volume stesso:

$$(26) \quad \rho(x, y, z) = \frac{dq}{d\tau}.$$

*Densità di carica
di volume; unità
di misura
coulomb/m³*

La ρ è una grandezza scalare funzione della posizione del punto; essa viene misurata in coulomb/m³ nel sistema SI.

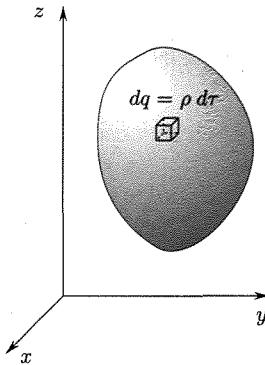


Fig. 1.14

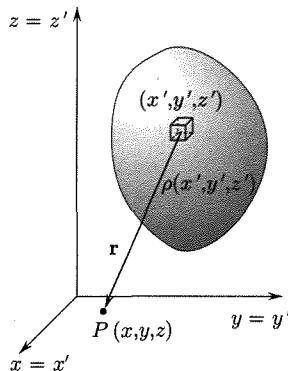


Fig. 1.15

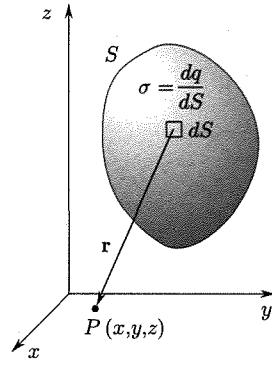


Fig. 1.16

Per ottenere il campo elettrico creato in un punto P (fig. 1.15) da una distribuzione continua di carica, basta immaginare lo spazio occupato dalla distribuzione stessa diviso in tanti elementi di volume sufficientemente piccoli ($d\tau = dx dy dz$) da potere considerare la carica in ciascuno di essi [$\rho(x, y, z)dx dy dz$] come una carica puntiforme. Il campo elettrico in P prodotto dalla intera distribuzione si calcola allora facilmente. Se per maggiore chiarezza indichiamo con l'apice le coordinate dei punti della distribuzione di carica si ha

$$(27) \quad \mathbf{E}_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dx' dy' dz',$$

*Campo elettrico di una
distribuzione di volume
di cariche*

essendo \mathbf{r} il vettore che ha origine in (x', y', z') e termina nel punto $P(xyz)$. La componente di \mathbf{E}_0 nella direzione x risulta

$$(28) \quad E_{0,x}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz'.$$

Le altre componenti si deducono facilmente.

A volte le cariche elettriche sono distribuite con continuità su una superficie S (fig. 1.16). Questa distribuzione viene trattata in maniera analoga alla precedente. Precisamente, si introduce una densità superficiale di carica definita per ciascun punto della superficie come il rapporto tra la carica dq che si trova su un elemento della superficie intorno al punto considerato, e l'area dS dell'elemento medesimo:

$$(29) \quad \sigma(x, y, z) = \frac{dq}{dS}.$$

*Densità di carica
superficiale; unità
di misura
coulomb/m²*

Si ha allora:

Campo elettrico di una distribuzione superficiale di cariche

(30)

$$\mathbf{E}_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(x, y, z)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dS.$$

In maniera analoga, introducendo la densità lineare di carica, si procede per il caso di cariche distribuite lungo linee.

Le considerazioni fin qui svolte mostrano come la legge di Coulomb assieme al principio di sovrapposizione consenta di determinare, almeno in linea di principio (prescindendo cioè dalle difficoltà matematiche che si possono incontrare nei casi concreti), l'azione che si esercita su una carica puntiforme introdotta nel campo elettrico creato da altre cariche purché la distribuzione di queste cariche sia conosciuta.

Il campo elettrico è un vettore

Si osservi che le formule trovate per il campo elettrico dovute a più cariche od a distribuzioni di cariche (formule (24) (27), (30)) sono di natura vettoriale. Il calcolo di \mathbf{E} implica in altri termini la esecuzione di operazioni vettoriali di somma.

Esempi

L'esame di alcuni esempi è utile per sottolineare le difficoltà che si incontrano nell'uso delle relazioni vettoriali scritte per il calcolo di \mathbf{E} , e fare intuire come queste possano divenire molto forti in casi di distribuzioni di cariche non così semplici quali quelle negli esempi stessi che qui si considerano.

1. Si abbiano due cariche puntiformi di valore $q_1 = 10^{-10}$ C e $q_2 = -2 \cdot 10^{-10}$ C disposte a 10 cm di distanza. Si vuole calcolare il valore del campo elettrico nei punti A , B indicati in figura 1.17.

Il campo in ciascun punto è la somma dei campi prodotti da ciascuna carica (equazione (24))

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \right).$$

Il campo in A è diretto lungo la congiungente le due cariche poiché \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 hanno questa direzione (fig. 1.17b); per il modulo si ha

$$\begin{aligned} E_{0,A} &= 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10^{-10}}{(0,04)^2} - \frac{2 \cdot 10^{-10}}{(0,14)^2} \right) \\ &= 9 \cdot 10^9 (6,25 \cdot 10^{-8} - 1,01 \cdot 10^{-8}) \\ &= 471 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}. \end{aligned}$$

La determinazione di $\mathbf{E}_{0,B}$ può essere fatta facilmente in maniera grafica (fig. 1.17c). Il campo creato da q_1 è diretto come \mathbf{r}_1 ed ha modulo

$$9 \cdot 10^9 \frac{10^{-10}}{25 \cdot 10^{-4} + 25 \cdot 10^{-4}} = 180 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

Il campo creato da q_2 è diretto in verso opposto a \mathbf{r}_2 ed ha modulo

$$2 \times 180 = 360 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

Si ha quindi

$$E_{0,B} = \sqrt{180^2 + 360^2} = 402,49 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

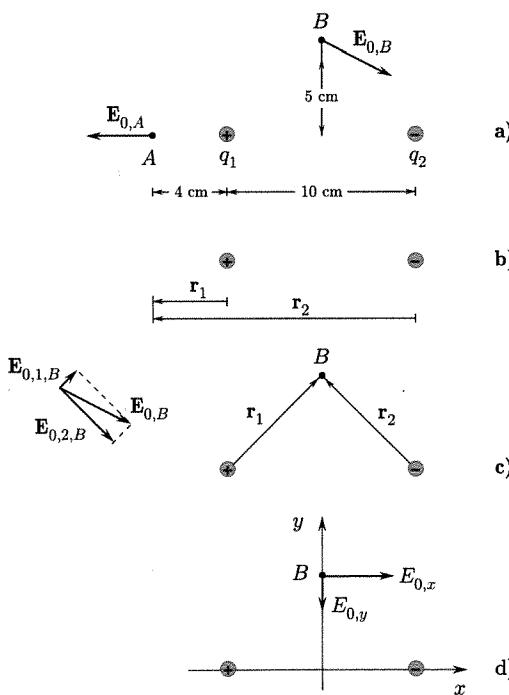


Fig. 1.17

Calcoliamo mediante la (25) ed analoghe, le componenti $E_{0,x}$ ed $E_{0,y}$ secondo gli assi indicati in fig. 1.17d per $E_{0,B}$

$$E_{0,x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{3/2}} + \frac{q_2(x-x_2)}{[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2]^{3/2}} \right\}.$$

Nel caso che si considera ($x = 0, y = 0,05$) ($x_1 = -0,05, y_1 = 0$), ($x_2 = 0,05, y_2 = 0$), si ha:

$$\begin{aligned} E_{0,x} &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-10} \left[\frac{0,05}{(25 \cdot 10^{-4} + 25 \cdot 10^{-4})^{3/2}} + \frac{2 \cdot 0,05}{(50 \cdot 10^{-4})^{3/2}} \right] = \frac{2,7 \cdot 0,05}{353,55 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 381,83 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0,y} &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-10} \left[\frac{(y-y_1)}{353,55 \cdot 10^{-6}} - \frac{2(y-y_2)}{353,55 \cdot 10^{-6}} \right] = -\frac{0,9 \cdot 0,05}{353,55 \cdot 10^{-6}} = \\ &= -127,28 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}. \end{aligned}$$

$$E_{0,B} = \sqrt{(381,83)^2 + (127,28)^2} = 402,49 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

2. Anello uniforme. Si supponga di avere un anello di raggio R (e spessore molto piccolo rispetto ad R) carico uniformemente e positivamente. Si vuole calcolare l'intensità del campo elettrico lungo l'asse (fig. 1.18). Si tratta di una distribuzione lineare con una densità lineare data da

$$\gamma = \frac{Q}{2\pi R},$$

se con Q si indica la carica totale. È facile vedere che per ragioni di simmetria il campo in un punto qualsiasi sull'asse dell'anello è diretto come l'asse. Si immagini infatti l'anello suddiviso in elementi di lunghezza infinitesima dl e si consideri con uno di essi (quale quello indicato in figura) quello opposto diametralmente sull'anello. Questi elementi considerati come cariche puntiformi danno in P dei contributi (dE_0) al vettore intensità totale del campo che hanno le componenti secondo l'asse uguali e nello stesso verso e le componenti normali all'asse uguali ed opposte. È evidente quindi che facendo le somme dei contributi di tutti gli elementi in cui si è diviso l'anello resta la componente assiale.

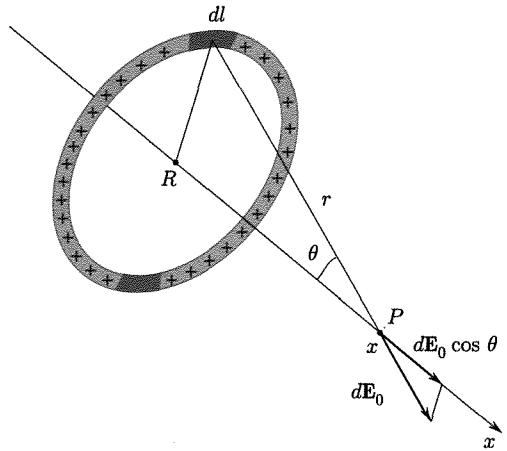
Ciò posto ci si può limitare a calcolare la componente di \mathbf{E}_0 secondo l'asse x :

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_0(x)| &= E_{0,x}(x) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{\gamma(x-x')}{r^3} dl. \end{aligned}$$

Poiché $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, $x' = 0$ ed x è costante, si ha:

$$(31) \quad \mathbf{E}_0(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi R} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Fig. 1.18



Campo elettrico sull'asse di un anello

Si osservi che per $x \gg R$ l'intensità del campo si riduce a

$$(32) \quad E_0(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2},$$

cioè la distribuzione sul cerchio equivale ad una carica puntiforme concentrata nel suo centro, mentre al centro del cerchio ($x = 0$) è $E_0(0) = 0$.

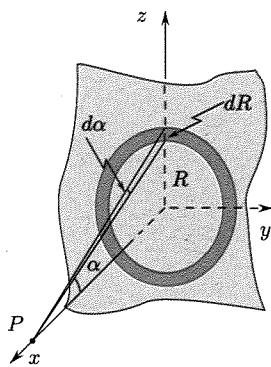


Fig. 1.19

3. Strato piano. Si supponga di avere una distribuzione uniforme di carica su un foglio piano infinitamente esteso (fig. 1.19). Si vuole calcolare l'intensità del campo in un punto dell'asse x . Si può qui applicare la formula (30). È possibile peraltro facilitare il calcolo con le seguenti considerazioni. Si immagini diviso il piano in tanti anelli come quello in figura. Ciascun anello è individuato dal punto P che si considera, dall'angolo α e dal suo incremento $d\alpha$. È evidente che il campo in P sarà il risultante di quelli dovuti a ciascuno degli anelli. In base al risultato ottenuto al punto precedente si può concludere che il campo in P creato dalla distribuzione piana in considerazione è diretto normalmente al piano, cioè lungo x . Determiniamo il contributo ad $E_0(x)$ dell'anello segnato in figura. L'area dell'anello è

$$dS = 2\pi R dR,$$

e se σ è la densità superficiale di carica, la carica da esso posseduta è

$$dq = \sigma dS = 2\pi\sigma R dR.$$

Il contributo dE_0 al modulo dell'intensità del campo elettrico in P dovuto all'anello di raggio R risulta perciò, dalla (31), pari a

$$dE_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} R dR = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} R dR.$$

Se si osserva che

$$R = x \tan \alpha \quad ; \quad dR = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad ; \quad (x^2 + R^2)^{1/2} = \frac{x}{\cos \alpha},$$

si ha

$$dE_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Al variare di R fra 0 ed ∞ , la variabile α varia fra 0 e $\frac{\pi}{2}$; risulta quindi:

$$(33) \quad E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

*Il campo elettrico
di uno strato piano è
 $E_0 = \sigma/2\epsilon_0$*

E_0 quindi è ovunque normale al piano della distribuzione ed ha lo stesso valore (campo uniforme): nella (33) non appare infatti x . Dall'altra parte del piano $x < 0$, E_0 , ha lo stesso valore che per x positiva ma verso opposto.

È bene osservare che i risultati ora ottenuti sono con ottima approssimazione validi nel caso di distribuzioni di carica uniformi su un foglio piano di dimensioni finite purché ci si limiti a considerare punti la cui distanza dal foglio sia piccola rispetto alle distanze che intercorrono fra i punti stessi ed i bordi del foglio. Si consideri infatti che i contributi più importanti al campo in un punto sono quelli corrispondenti agli anelli (fig. 1.19) in cui si è scomposto il foglio aventi i valori più piccoli di R e che i contributi degli anelli con $R \gg x$ finiscono per essere trascurabili.

1.7. RAPPRESENTAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO. LINEE DI FORZA

Come per altri campi vettoriali anche per il campo elettrico una utile descrizione è quella che fa uso delle linee di forza. Una linea di forza è definita come una linea che gode della proprietà di avere in ogni punto la tangente coincidente con la direzione del campo in quel punto.

Le linee di forza sono orientate in modo che la tangente orientata definisca anche il verso del campo nel punto di tangenza. Le linee di forza hanno origine dalle posizioni occupate da cariche positive e termine in posizioni occupate da cariche negative: le cariche sono infatti le sorgenti del campo.

In punti del campo diversi dalle sorgenti passa una sola linea di forza. Ciascuna linea di forza è continua in una regione priva di cariche.

La indicazione di alcune linee di forza di un campo è in genere molto utile per porre in evidenza alcune caratteristiche del campo stesso. È possibile fare uso delle linee di forza per una descrizione quantitativa oltre che qualitativa si può infatti convenire, secondo un metodo introdotto da Faraday, di segnare nella rappresentazione grafica di un campo le linee di forza in modo che il numero di esse che attraversano una superficie di area unitaria tracciata normalmente alla direzione del campo in un punto qualsiasi P , sia proporzionale all'intensità del campo in quel punto.

Usando tale metodo si può valutare dalla rappresentazione grafica la distribuzione dell'intensità del campo: ove le linee sono più fitte l'intensità è più elevata.

La fig. 1.20 indica le linee di forza del campo uniforme da ciascuna parte dello strato piano infinito (esempio 3 del paragrafo precedente). Le linee sono parallele ed uniformemente spaziate.

La figura 1.21 è relativa al campo creato da una carica positiva puntiforme.

Le figure 1.22 e 1.23 si riferiscono al campo creato da due cariche puntiformi uguali e dello stesso segno (fig. 1.22) o di segno opposto (fig. 1.23).

*Le linee di forza
del campo elettrico*

Criterio di Faraday

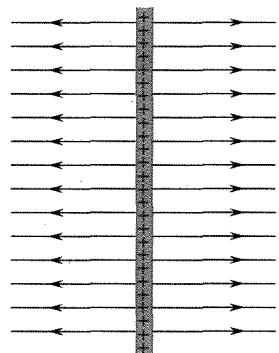


Fig. 1.20

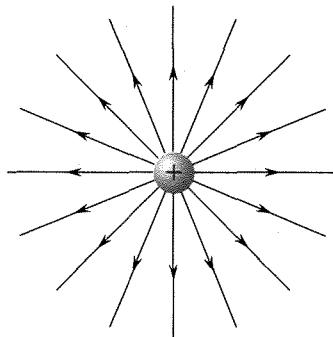


Fig. 1.21

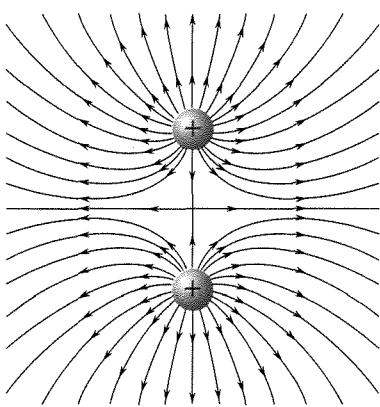


Fig. 1.22

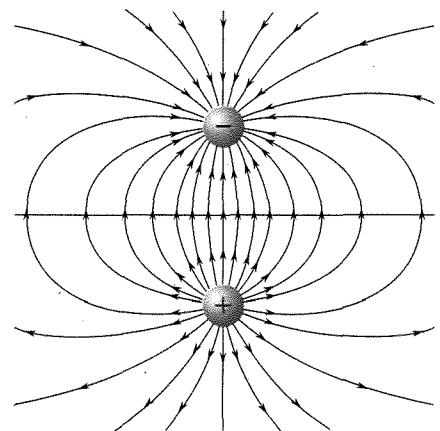


Fig. 1.23

1.8. FLUSSO DI UN VETTORE

Si consideri un qualsiasi campo vettoriale; per concretezza ci riferiamo al caso di un campo elettrico, ma le definizioni sono generali. Si abbia in tale campo una superficie S (fig. 1.24) se ne consideri un elemento, di area dS , e sia \mathbf{n} il versore della normale a tale elemento (orientata in una delle due possibili maniere).

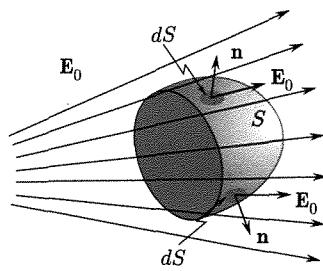


Fig. 1.24

Si definisce flusso elementare del vettore (\mathbf{E}_0 , in questo caso) attraverso l'elemento considerato il prodotto scalare⁽²⁰⁾

$$(34) \quad d\phi(\mathbf{E}_0) = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS.$$

Il flusso del vettore attraverso l'intera superficie S vale

Flusso del vettore campo elettrico

$$(35) \quad \phi_S(\mathbf{E}_0) = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS.$$

Flusso uscente

Di particolare interesse è il caso in cui si debba considerare il flusso attraverso una superficie chiusa. Considerando positiva l'orientazione della normale nei singoli punti di S verso l'esterno della superficie il flusso dato dalla (35) prende il nome di flusso uscente dalla superficie chiusa S .

Operatore divergenza

Nei riguardi del flusso di un vettore, peraltro qualsiasi⁽²¹⁾, uscente da una superficie chiusa si stabilisce nel calcolo vettoriale un'importante relazione (teorema della divergenza di Gauss), che qui esporremo usando come vettore l'intensità del campo elettrico. In questa relazione interviene una grandezza scalare chiamata divergenza⁽²²⁾ del vettore nel punto considerato:

$$(36) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Il simbolo⁽²³⁾ ∇ rappresenta l'operatore differenziale nabla

$$(37) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

e può essere trattato come un vettore ordinario. In particolare:

$$(38) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

L'operatore nabla è molto usato in trattazioni moderne; il termine $\operatorname{div} \mathbf{E}$ è tuttavia più suggestivo ed immediato.

Noi useremo di solito la notazione div ma scriveremo le più importanti relazioni anche nella maniera che fa uso dell'operatore nabla.

Mediante l'operatore nabla si possono esprimere anche il gradiente di una funzione scalare (\mathcal{U}) ed il rotore di un vettore \mathbf{A}

$$\operatorname{grad} \mathcal{U} = \nabla \mathcal{U}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

⁽²⁰⁾ Il nome deriva dal caso in cui il vettore il cui campo si considera è quello della velocità delle particelle di un fluido (vol. I, cap. 8, par. 8.10 e 8.15). In tal caso il flusso elementare rappresenta il volume del fluido che passa in un secondo attraverso l'elemento di superficie considerato.

⁽²¹⁾ L'unica condizione è che il vettore nella regione occupata dalla superficie abbia derivate continue.

⁽²²⁾ Per considerare la divergenza di un vettore questo deve essere differenziabile nella regione dello spazio di interesse.

⁽²³⁾ Vedi anche appendice II.

L'espressione del teorema della divergenza (di Gauss) è la seguente:

$$(39) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$$

Teorema della
divergenza

Esso stabilisce che il flusso di un qualunque vettore, purché continuo insieme alle sue derivate prime, attraverso una superficie chiusa è pari all'integrale della sua divergenza esteso al volume racchiuso dalla superficie.

La dimostrazione può essere fatta nella seguente maniera. Si immagini di dividere il volume racchiuso dalla superficie S in cubi infinitesimi, mediante piani paralleli ai piani xy , yz , zx (fig. 1.25).

Consideriamo (fig. 1.26) uno di questi cubetti.

Il flusso uscente dalla superficie del cubetto è la somma di quelli uscenti dalle sei facce. Poniamo l'attenzione sulle due facette normali ad x (la 1 e la 2). L'intensità del campo normale alle facette è per la 1, E_x e per la 2, $[E_x + (\partial E_x / \partial x) dx]$.

Il flusso complessivo uscente è

$$-E_x dy dz + \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} d\tau.$$

Analoghe relazioni si hanno per le altre due coppie di facce. Il flusso elementare uscente dalla superficie chiusa del cubetto è allora

$$(40) \quad d\phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau = \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau.$$

Se si sommano le espressioni (40) per tutti i cubetti in cui il volume τ è stato diviso, accade che la somma dei flussi al primo membro è pari al flusso uscente da S . Si osservi infatti che i flussi attraverso le pareti dei cubetti che non sono parte di S danno un contributo totale nullo alla somma dei flussi uscenti giacché ogni parete appartiene a due cubi contigui ed il flusso relativo entra due volte nella somma con segni opposti. Si ha così la (39).

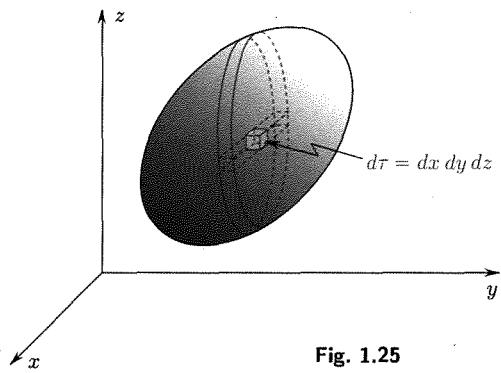


Fig. 1.25

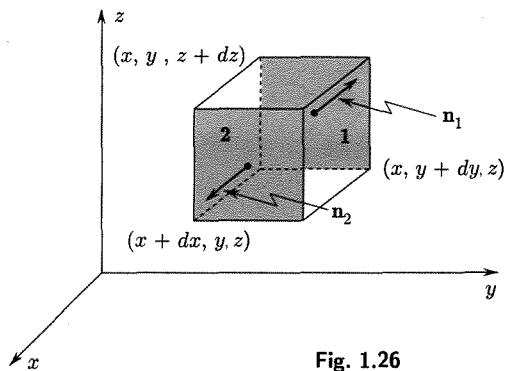


Fig. 1.26

1.9. LEGGE DI GAUSS

Vogliamo ora stabilire una relazione che rappresenta una proprietà fondamentale del campo elettrico ed è una conseguenza diretta del fatto che la forza fra cariche puntiformi dipende dall'inverso del quadrato della loro distanza.

Cominciamo con il prendere in considerazione una superficie chiusa S che racchiuda nel suo interno una carica puntiforme q situata per esempio in O (fig. 1.27a) e calcoliamo il flusso del campo elettrico creato da q ed uscente da S . Per far ciò si consideri un elemento, di area dS , della superficie ed il cono che da O vede tale elemento (fig. 1.27).

L'angolo solido del cono sia $d\Omega$: sia θ l'angolo fra il vettore \mathbf{r} e la normale esterna all'elemento considerato. Il cono intercetta sulla sfera di centro O e raggio r un elemento di area dS' ; si ha:

$$(41) \quad dS' = r^2 d\Omega = \pm dS \cos \theta.$$

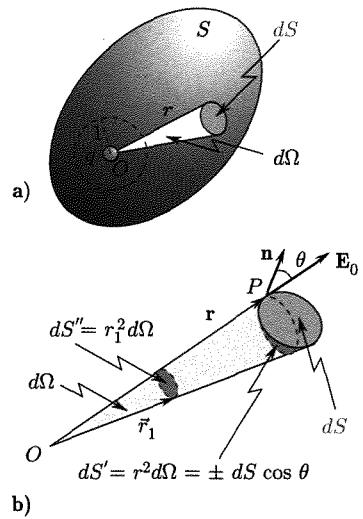


Fig. 1.27

ove i segni + o - valgono secondo che l'angolo fra \mathbf{E}_0 ed \mathbf{n} sia acuto od ottuso. Quest'ultimo caso può verificarsi in situazioni come quella in fig. 1.28.

Il flusso elementare di \mathbf{E}_0 attraverso l'elemento di S considerato vale

$$\begin{aligned}
 d\phi &= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} dS = \\
 (42) \quad &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta dS = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = \\
 &= \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega
 \end{aligned}$$

ove i segni + o - valgono secondo che l'angolo fra \mathbf{r} ed \mathbf{n} è acuto od ottuso.

Nel caso di q positiva il flusso elementare uscente da dS è positivo per un elemento disposto come in figura 1.27 ($\theta < \pi/2$) e negativo per un elemento disposto come quello segnato in fig. 1.28. Nel caso di q negativa i flussi nei due casi cambiano di segno (assieme a q) giacché il verso di \mathbf{E}_0 diviene opposto a quello di \mathbf{r} .

Si noti che in questa espressione del flusso elementare attraverso dS è scomparso qualsiasi riferimento alla distanza r tra dS e la carica che crea il campo: ciò accade perché nella legge (di Coulomb) che esprime l'azione fra cariche puntiformi, la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Di conseguenza il flusso elementare è il medesimo (a parte il segno, dipendente dall'angolo fra \mathbf{r} ed \mathbf{n}) per tutti gli elementi di superficie che sono intersezioni tra superfici qualsiasi (per es. la S e la sfera di raggio unitario r_1 in fig. 1.27) e lo stesso semicono con vertice in O ed angolo $d\Omega$.

Per avere il flusso totale attraverso S occorre sommare i contributi analoghi a (42) relativi a tutti gli elementi in cui la S è stata suddivisa. Tenendo presente che S è vista da O sotto un angolo solido di 4π steradiani, si ha

Teorema di Gauss per una carica puntiforme

$$(43) \quad \phi_S(\mathbf{E}_0) = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Il flusso attraverso S ⁽²⁴⁾ è pari al flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa che circonda il punto O ove si trova la carica puntiforme q (come la sfera di raggio unitario segnata in figura 1.27). Supponiamo ora che la carica puntiforme sia esterna alla superficie (fig. 1.29a) e prendiamo in considerazione un cono elementare di apertura $d\Omega$ che intersechi la superficie S . Il numero di intersezioni sarà sempre pari: per quanto si è detto il valore assoluto del flusso uscente attraverso ciascuna delle areole elementari di intersezione ($dS_1, dS_2, dS_3, dS_4, \dots$) è sempre lo stesso ma esso avrà segni opposti secondo che l'angolo fra \mathbf{r} e la normale esterna è acuto od ottuso. Il flusso complessivo di \mathbf{E}_0 attraverso le areole dS_1, dS_2, \dots tagliate su S dal cono elementare d'apertura $d\Omega$ è perciò zero. Lo stesso vale per qualsiasi altro cono elementare con vertice in O che tagli S . Si conclude

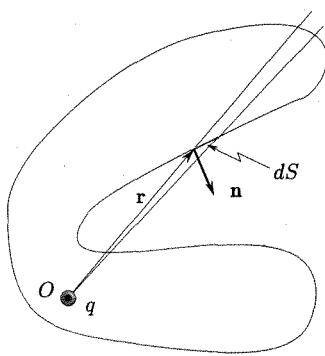


Fig. 1.28

⁽²⁴⁾ La ragione di porre nella legge di Coulomb la costante di proporzionalità nella forma $1/4\pi\epsilon_0$ nel sistema SI sta appunto nel vantaggio di eliminare il fattore 4π nell'espressione (43) del flusso attraverso S e nelle importanti relazioni che ne conseguono.

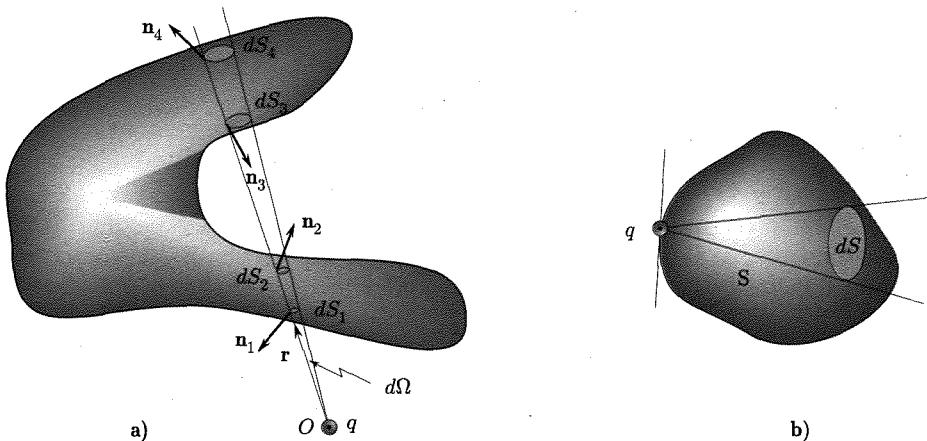


Fig. 1.29

che se la carica puntiforme è esterna dalla superficie chiusa il flusso di \mathbf{E}_0 attraverso S è nullo⁽²⁵⁾.

I risultati ora ottenuti possono essere estesi facilmente al caso in cui più cariche puntiformi siano presenti; si ricordi infatti che il campo \mathbf{E}_0 ad esse dovuto è pari alla somma (vettoriale) di quelli creati indipendentemente da ciascuno di essi. Si ha in questo caso

$$(44) \quad \phi_S(\mathbf{E}_0) = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

*Teorema di Gauss
per una distribuzione
di cariche puntiformi*

essendo la somma (algebrica) estesa alle sole cariche interne alla superficie S ⁽²⁶⁾.

Nel caso che le cariche non siano puntiformi ma siano distribuite spazialmente si ha:

$$(45) \quad \phi_S(\mathbf{E}_0) = \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau .$$

*Teorema di Gauss
generale*

essendo τ il volume racchiuso da S .

Le (44) e (45) rappresentano la legge (o teorema) di Gauss: il flusso del vettore intensità del campo elettrico attraverso una superficie chiusa

⁽²⁵⁾ Vi sarebbe da considerare come terzo caso possibile quello in cui (fig. 1.29b) la carica puntiforme si trovi sulla superficie S . Ripetendo i ragionamenti presentati si troverebbe

$$\phi_S(\mathbf{E}_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega = \frac{q}{2\epsilon_0} .$$

Nelle applicazioni pratiche delle considerazioni che qui si svolgono questo caso è poco importante giacché in genere si può scegliere la superficie S in modo che su di essa non si trovino cariche.

⁽²⁶⁾ Se oltre alle cariche interne alla superficie (che qui chiamiamo q_i) vi fossero cariche (q_S) sulla superficie, si avrebbe

$$\phi_S(\mathbf{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\Sigma q_i + \frac{1}{2} \Sigma q_S \right] .$$

qualsiasi è pari al rapporto fra la somma algebrica delle sole cariche contenute nell'interno della superficie stessa ed ϵ_0 .

Abbiamo tenuto a sottolineare che la legge di Gauss discende come una conseguenza della proporzionalità della forza fra cariche puntiformi a $1/r^2$: un esponente diverso da 2 per r non consentirebbe di giungere alle espressioni (44) e (45).

Il fatto che numerose deduzioni dalla legge di Gauss possano essere confrontate con l'esperienza con grande precisione e che il confronto sia sempre stato soddisfacente, è una forte convalida della esattezza della legge di Coulomb.

La legge di Gauss rappresenta analiticamente una proprietà fondamentale del campo elettrostatico. Naturalmente, come si è mostrato, essa non aggiunge nulla a ciò che già è contenuto nella legge di Coulomb, ma esplicita alcune caratteristiche del campo. Per comprendere la sua importanza si osservi che mentre l'impiego diretto della legge di Coulomb consente di determinare le forze su una carica e quindi il campo prodotto da una distribuzione di cariche, la legge di Gauss, rappresentando una relazione fra campo e cariche, ci può consentire di determinare qual è la carica totale in una regione dello spazio se si conosce il campo in essa.

Sulla base della relazione (39) l'espressione della legge di Gauss può essere posta in un'altra maniera nella quale compare il volume (τ) racchiuso nell'interno della superficie chiusa S :

$$(46) \quad \int_S \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{E}_0 d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau.$$

Infine, anziché in maniera globale relativa a superfici chiuse e volumi finiti come finora visto, la legge di Gauss può essere espressa in maniera differenziale, valida punto per punto. Per ottenere tale espressione basta applicare la legge ad un volume infinitesimo ($dx dy dz$) che circonda il punto $P(x, y, z)$. Il flusso uscente dalla superficie del cubetto è dato, usando la relazione (40), dall'espressione:

$$(47) \quad d\phi(\mathbf{E}_0) = \operatorname{div} \mathbf{E}_0 dx dy dz = \frac{\rho}{\epsilon_0} dx dy dz;$$

si ha quindi

$$(48) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad o \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

*I equazione di Maxwell
valida nel vuoto*

Questa equazione differenziale è una delle equazioni fondamentali del campo elettrostatico nel vuoto ed opportunamente estesa al caso dei dielettrici costituisce una delle quattro equazioni di Maxwell che descrivono il campo elettromagnetico.

Si noti che per l'applicazione del teorema della divergenza è necessario che il campo elettrico sia derivabile in ogni punto del dominio considerato. Ciò non sempre succede e mentre il teorema di Gauss non risente di questa limitazione, quando il campo elettrico presenta discontinuità è necessario, se si vuole usare la (48), limitare il dominio a quella parte dello spazio dove il campo è derivabile, raccordando poi le soluzioni con opportune condizioni al contorno. Per contro la (48) presenta indubbi vantaggi quando si voglia considerare casi non stazionari. Ad esempio, se la densità di cariche entro la superficie del teorema di Gauss varia nel tempo, come varia il campo alla superficie? Il problema non si pone nella (48) dove le grandezze fisiche che in essa compaiono sono tutte calcolate nello stesso punto allo stesso istante.

1.10. ALCUNE APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

L'applicazione della legge di Gauss nella forma globale [eq. (44) e (45)] consente di ottenere facilmente alcuni importanti risultati dell'elettrostatica. Ne vogliamo considerare alcuni.

a. Impossibilità di equilibrio meccanico stabile per una carica elettrica nel campo statico creato da altre cariche

Perché la carica introdotta in un punto P nel campo creato da altre cariche sia in equilibrio è necessario che sia $\mathbf{E}_0(P) = 0$ (cioè avviene per esempio nel punto di mezzo della congiungente due cariche puntiformi uguali). Tale posizione tuttavia non è di equilibrio stabile. Se ciò fosse vero infatti (fig. 1.30) dando alla carica un piccolo spostamento (s) in una qualsiasi direzione da P il campo elettrico dovrebbe riportare la carica in P : ciò significa che se si considera una piccola sfera con centro in P , il campo \mathbf{E}_0 nei suoi punti dovrebbe puntare sempre verso l'interno (o verso l'esterno se la carica fosse negativa).

In tali condizioni il flusso di \mathbf{E}_0 attraverso la sfera sarebbe diverso da zero e questo, per il teorema di Gauss, è in contrasto con il fatto che in P non v'è alcuna carica.

Perché una carica si trovi in equilibrio stabile in un campo elettrostatico è necessario che forze di altra natura (per es. elastiche) agiscano contemporaneamente su di essa. L'equilibrio stabile è invece possibile in campi elettrici variabili nel tempo.

b. Distribuzione elettrostatica delle cariche in un conduttore isolato carico

È facile vedere che la carica data in eccesso ad un conduttore isolato si trova localizzata, in condizioni di equilibrio, sulla sua superficie esterna.

Si consideri infatti (fig. 1.31) un conduttore isolato, isotropo ed omogeneo, al quale sia stata data una carica netta in eccesso (per es. negativa) e si sia atteso che le condizioni di equilibrio siano state raggiunte.

Come si è detto, caratteristica dei conduttori è quella di avere elettroni mobili nel loro interno e che le cariche ad essi date⁽²⁷⁾ in un punto non sono vincolate a rimanervi. Le cariche mobili nel conduttore si spostano se sono sollecitate da un campo elettrico. In condizioni di equilibrio, cioè statiche, non vi può essere un moto netto di cariche nell'interno del conduttore e ciò porta di conseguenza che il campo elettrico⁽²⁸⁾ in tutti i punti interni al conduttore deve essere zero. Se allora si considera una qualsiasi superficie chiusa S interna al conduttore (come quella indicata in figura 1.31) il flusso del campo elettrico attraverso S è zero e quindi la carica netta interna ad S deve essere zero per la legge di Gauss. Questo ragionamento può essere ripetuto per superfici S interne sempre più grandi che approssimano la superficie limite del corpo dall'interno. Si conclude quindi che la carica in eccesso posseduta dal conduttore deve trovarsi distribuita sulla superficie esterna.

*Impossibilità
di equilibrio meccanico
stabile*

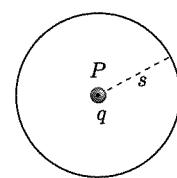


Fig. 1.30

*La carica
su un conduttore
va sulla superficie*

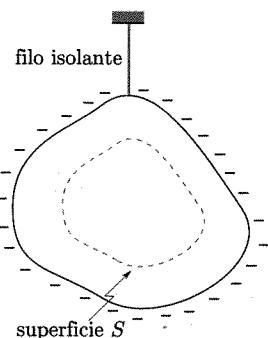


Fig. 1.31

*Il campo elettrico
all'interno di un
conduttore è zero*

⁽²⁷⁾ In genere elettroni dati (in eccesso) o portati via: quest'ultimo caso equivale a dare una carica netta positiva.

⁽²⁸⁾ Per campo elettrico nell'interno del conduttore in queste considerazioni noi intendiamo un valore medio, essendo la media fatta in spazi grandi rispetto alle dimensioni atomiche.

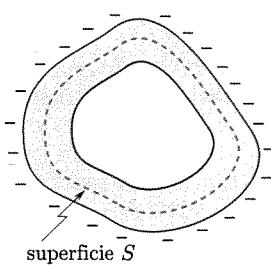


Fig. 1.32

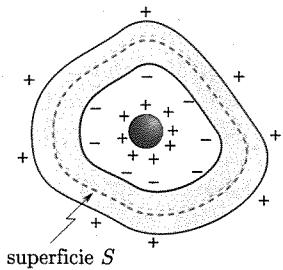


Fig. 1.33

Schermo elettrostatico

Questa conclusione continua a valere anche se il conduttore è cavo (fig. 1.32): la carica si trova sulla superficie esterna.

Queste indicazioni della legge di Gauss (o della legge di Coulomb) sono state sottoposte ad accurato controllo sperimentale.

Se ne deduce anche che la superficie esterna dell'invólucro scherma lo spazio interno da azioni elettrostatiche esterne⁽²⁹⁾: infatti le azioni esterne possono influire sulla distribuzione delle cariche sulla superficie esterna del conduttore mentre il campo nell'interno è sempre nullo⁽³⁰⁾.

Si osservi che il conduttore cavo non effettua uno schermaggio per azioni dall'interno verso l'esterno: se cioè si pone nell'interno dell'invólucro una carica, per es. $+q$, deve comparire, per induzione, sulla superficie interna dell'invólucro una carica uguale ed opposta, $-q$, e contemporaneamente sulla superficie esterna una carica pari a $+q$ (fig. 1.33). Questa circostanza è resa evidente se si considera ancora una superficie S chiusa nel conduttore: per la legge di Gauss, essendo in tutti i suoi punti $\mathbf{E} = 0$ la carica totale netta entro S deve essere nulla: $\Sigma q = 0$. Di conseguenza se una carica $(-q)$ è spostata sulla superficie interna dell'invólucro, una carica $(+q)$ deve presentarsi sulla superficie esterna, variando la carica netta qui esistente ed il campo esterno.

c. Campo creato da una distribuzione di cariche a simmetria sferica

Si abbia nello spazio una distribuzione di carica a simmetria sferica. La figura 1.34 rappresenta una tale distribuzione; il valore di ρ , rappresentato in figura dall'intensità della colorazione, ha lo stesso valore nei punti che distano ugualmente dal centro della sfera. Se si dovesse calcolare il campo in vari punti, come P_1 , P_2 con la legge di Coulomb occorrerebbe eseguire complessi integrali. Il risultato si ottiene facilmente con la legge di Gauss e con considerazioni di simmetria.

Si consideri la sfera con centro nel centro della distribuzione e che passi attraverso il punto (P_1, P_2, \dots) in cui si vuole determinare \mathbf{E}_0 .

Per ragioni di simmetria \mathbf{E}_0 è radiale ed ha modulo costante per i punti della stessa sfera. Si ha allora, per la legge di Gauss:

$$4\pi r^2 E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{q}{\epsilon_0},$$

⁽²⁹⁾ Per l'azione di schermo di invólucri conduttori vedi anche il par. 1.25.

⁽³⁰⁾ L'effetto di schermo si ottiene con buona approssimazione anche se l'invólucro non è continuo ma presenta fori di dimensioni piccole rispetto a quelle dell'invólucro stesso: il campo nell'interno non è esattamente zero ma è molto piccolo tranne in corrispondenza ai fori. L'effetto di schermo che qui si considera è relativo a campi elettrostatici: le conclusioni valgono anche con buona approssimazione per campi lentamente variabili.

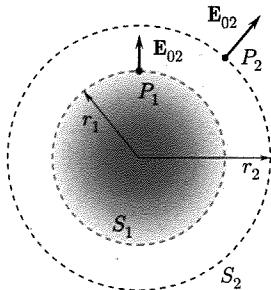


Fig. 1.34

essendo il volume τ quello della sfera di raggio r e q la carica totale in essa.

Si vede che il campo

$$(49) \quad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

è lo stesso di quello che si avrebbe nel punto se tutta la carica q fosse concentrata nel centro della sfera⁽³¹⁾. Si osservi che per un punto come P_2 esterno alla distribuzione di carica, la carica che determina il campo è la carica totale della distribuzione. Nel caso che il punto, come P_1 , sia interno alla distribuzione, ha interesse solo la parte della distribuzione interna alla sfera che passa per il punto.

Conseguenza di ciò è che se si ha nello spazio una distribuzione di carica a simmetria sferica su un involucro sferico (fig. 1.35) il campo da essa creato nell'interno della sfera è nullo. Questa conclusione, valida anche se l'involucro non è conduttore⁽³²⁾, è alla base di metodi di controllo della esattezza della legge di Coulomb.

d. Campo creato da una distribuzione uniforme in un cilindro ad asse rettilineo di lunghezza infinita

Una tale distribuzione, se il diametro del cilindro è piccolo, prende il nome di distribuzione rettilinea infinita. Indichiamo con γ la carica per unità di lunghezza del cilindro. Il calcolo di \mathbf{E}_0 in un punto qualsiasi può farsi risolvendo una integrale del tipo (27) cioè sommando i contributi dovuti alle cariche sulle varie parti in cui il cilindro può essere diviso. Un calcolo molto più rapido si può fare usando la legge di Gauss e proprietà di simmetria.

Si osservi infatti innanzitutto che il campo in un qualsiasi punto non può che essere perpendicolare all'asse del cilindro per ragioni di simmetria. Si consideri perciò un cilindro C coassiale con la distribuzione, che passi per P , abbia lunghezza l e sia limitato da due facce normali all'asse (fig. 1.36). Il calcolo del flusso uscente dalla superficie chiusa di tale cilindro per P si riduce al calcolo del flusso attraverso la superficie cilindrica, giacché quello attraverso i piani terminali è nullo giacendo \mathbf{E}_0 su tali piani:

$$\phi_C(\mathbf{E}_0) = 2\pi rlE_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \gamma l$$

Si ha quindi

$$(50) \quad E_0 = \frac{\gamma}{2\pi r \epsilon_0}$$

Campo per una distribuzione a simmetria sferica

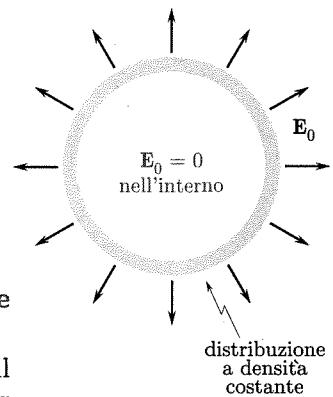


Fig. 1.35

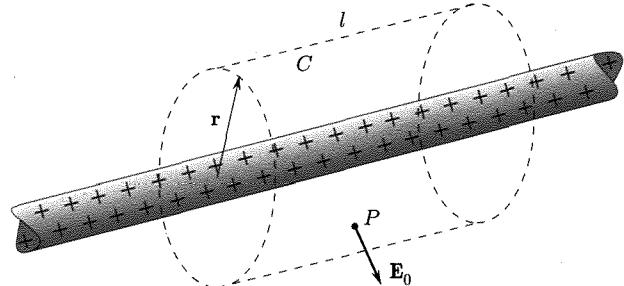


Fig. 1.36

Campo per una distribuzione a simmetria cilindrica uniforme

⁽³¹⁾ Le conclusioni ora trovate sono simili a quelle relative alle forze gravitazionali (vol. I, cap. 6, par. 6.1): una sfera di massa m distribuita con simmetria sferica si comporta nei riguardi di una massa esterna come se tutta la m fosse concentrata nel centro. Si osservi che la ragione di ciò sta nel fatto che sia la forza gravitazionale, sia quella di Coulomb, dipendono da $1/r^2$.

⁽³²⁾ Se l'involucro è conduttore la conclusione vale anche per forme diverse da quella sferica, in base alle considerazioni del punto b. precedente.

Il campo è lo stesso di quello che si avrebbe se la carica q invece di essere distribuita uniformemente nel volume del cilindro di lunghezza unitaria fosse disposta sull'asse. \mathbf{E}_0 è diretto verso l'esterno per distribuzione di cariche positive.

e. Distribuzione uniforme su un piano infinito (strato piano uniforme)

Abbiamo già considerato questo caso, deducendo il valore del campo in un punto P distante x dallo strato, mediante le formule generali del campo (par. 1.6, esempio 3). Vogliamo ora trattare il problema usando la legge di Gauss. Si osservi che per ragioni di simmetria il campo in P (fig. 1.37) non può essere che normale allo strato: inoltre in coppie di punti dalle due parti dello strato che distano ugualmente dallo strato, il campo deve avere modulo uguale e verso opposto.

Si consideri come superficie per l'applicazione della legge di Gauss un cilindro retto ad asse normale allo strato, di altezza $2x$ e che abbia una delle superfici piane (di area A) passante per P . Si ha allora:

$$\phi_S(\mathbf{E}_0) = 2AE_0 = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

essendo σ la densità superficiale della distribuzione. Quindi è

Campo di uno strato piano

(51)

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

in accordo con la (33). Il campo è uniforme in tutti e due i semispazi determinati dal piano ed ha una discontinuità in corrispondenza al piano poiché i versi dalle due parti del piano stesso sono opposti (fig. 1.37).

f. Campo nelle vicinanze della superficie di un conduttore carico

Si abbia un conduttore carico (fig. 1.38). Come si è visto la carica in eccesso si distribuisce sulla superficie esterna S con una densità σ che sarà in genere funzione del punto⁽³³⁾. Si vuole determinare il campo \mathbf{E}_0 in un punto P fuori dalla superficie ma infinitamente prossimo ad essa (teorema di Coulomb).

Si osservi innanzitutto che il campo alla superficie del conduttore, e quindi in P , è normale alla superficie stessa; se ciò non fosse il campo alla superficie avrebbe una componente tangenziale che farebbe muovere gli elettroni e non si avrebbe una situazione di equilibrio (statica). Si consideri ora una superficie elementare di area dS' , per P parallela alla superficie del conduttore e la superficie chiusa di una figura (fig. 1.38) formata da dS' , da generatrici normali a S per l'orlo di dS'' e da dS'' (anche essa parallela a S come dS') interna ad S . La carica nel suo interno è $\sigma dS'$ ed il flusso uscente si riduce a quello attraverso $dS' = dS$. Infatti nell'interno del conduttore \mathbf{E}_0 è zero e sulla superficie laterale del cilindro, fuori del conduttore, \mathbf{E}_0 è normale ad \mathbf{n} .

Si ha così:

$$\mathbf{E}_0 dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0},$$

Fig. 1.38

Campo alla superficie di un conduttore

⁽³³⁾ σ dipende dalla curvatura della superficie (vedi par. 1.21).

cioè

$$(52) \quad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Teorema di Coulomb

È questa la conclusione del cosiddetto teorema di Coulomb.

g. Doppio strato

Si abbiano due piani paralleli di dimensioni infinite sui quali siano distribuite uniformemente e con la stessa densità superficiale rispettivamente cariche positive su uno e cariche negative sull'altro (fig. 1.39). La distanza sia δ . Il campo elettrico è la somma di quelli generati da ciascuna distribuzione piana. Di conseguenza il campo è diverso da zero solo nella zona fra i due piani (spessore δ) e qui è uniforme. Il campo è normale ai due piani e vale

$$(53) \quad E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Questa relazione può essere impiegata anche nel caso di distribuzioni uniformi su piani non infiniti, purché la distanza fra i piani δ sia molto piccola rispetto alle loro dimensioni lineari e si consideri il campo in punti lontano dai bordi.

La stessa relazione si può usare con buona approssimazione anche nel caso di distribuzioni su due superfici parallele non piane ma a grande raggio di curvatura.

h. Distribuzioni su sfere concentriche e cilindri coassiali

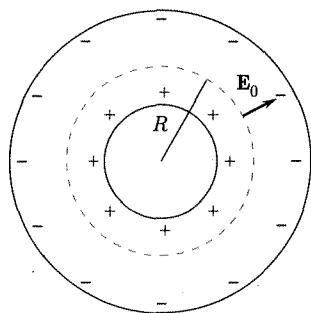


Fig. 1.40

Si abbiano due cariche uguali ed opposte ($\pm q$) distribuite uniformemente su due sfere concentriche (fig. 1.40). È evidente per ragioni di simmetria che il campo, ove non è nullo, deve essere radiale. Applicando la legge di Gauss a sfere concentriche con le due date, si riconosce che il campo è diverso da zero solo nello spazio fra le due distribuzioni e vale, in un punto a distanza R dal centro del sistema:

$$(54) \quad E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Si osservi che se i raggi delle sfere tendono all'infinito lo stesso accade per il valore di R per i punti fra le sfere. Se q è tenuto costante, E_0 tende a zero per $R \rightarrow \infty$. Se la carica q viene variata di modo che la densità superficiale $\sigma = q/4\pi R^2$ resti costante, la (54) tende alla formula (53) per il doppio strato piano.

Si considerino ora (fig. 1.41) due distribuzioni di cariche opposte su due cilindri coassiali di lunghezza infinita, tali che la carica per unità di lunghezza dei cilindri sia in valore assoluto uguale (γ). Anche in questo caso il campo è ovunque normale all'asse dei cilindri e si riconosce, applicando la legge di Gauss a cilindri coassiali con le distribuzioni date, che il

Il campo di un doppio strato è non nullo solo all'interno dove vale

$$E_0 = \sigma/\epsilon_0$$

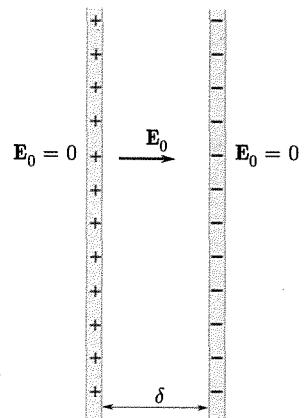


Fig. 1.39

Il campo di un doppio strato sferico è non nullo solo all'interno dove è

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

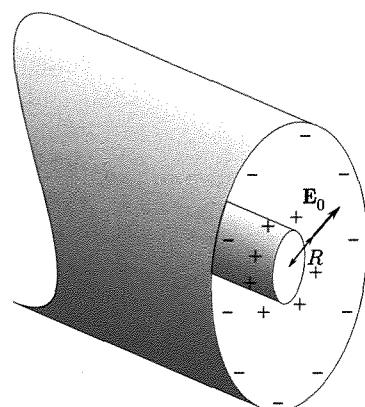


Fig. 1.41

Il campo di un doppio strato cilindrico è non nullo solo all'interno

$$\text{dove vale } E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r}$$

Il campo elettrico è conservativo

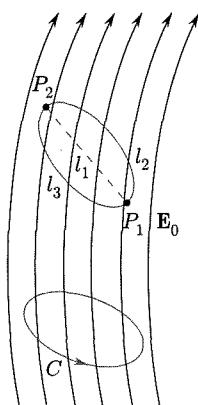


Fig. 1.42

campo è diverso da zero solo nello spazio fra i due cilindri carichi. A distanza R dall'asse l'intensità vale:

$$(55) \quad E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\gamma}{2\pi R}.$$

Anche questa formula tende a quella del doppio strato quando le curvature dei cilindri su cui sono distribuite le cariche tendono a zero.

Tanto nel caso della distribuzione di cariche opposte su due sfere concentriche quanto in quello di cilindri coassiali precedentemente visti, si può con buona approssimazione applicare per E_0 la formula del doppio strato (53) se la differenza dei raggi delle sfere e dei cilindri è piccola rispetto ai raggi stessi.

■ 1.11. IL POTENZIALE ELETTROSTATICO

Le proprietà fondamentali del campo elettrico sono due e, come si è detto, discendono da altrettante caratteristiche fondamentali della forza di Coulomb fra cariche puntiformi. Una di queste proprietà (proporzionalità di F a $1/r^2$) è già stata considerata per mezzo della legge di Gauss ed ha condotto alle relazioni globali (44) e (45) ed alla relazione differenziale (48).

Vogliamo ora fermarci sull'altra proprietà fondamentale di \mathbf{E}_0 : essa consiste nel fatto che il campo elettrico è conservativo. Anche questa proprietà può essere espressa per mezzo di relazioni globali o differenziali che sono fondamentali per la elettrostatica e che legano il valore del campo elettrico in un punto ai valori nei punti vicini.

In accordo a quanto già osservato al paragrafo 1.5, la forza che un insieme di cariche puntiformi esercita su una nuova carica puntiforme posta in un punto P in cui si risente la loro azione è una forza conservativa come la forza (di Coulomb) che ciascuna di esse individualmente eserciterebbe. In particolare ciò è valido per la carica dq usata nella definizione dell'intensità del campo elettrico e quindi anche il campo elettrico creato da una distribuzione statica di cariche è conservativo. Il lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria⁽³⁴⁾ si sposta da un punto (P_1) ad un altro (P_2) non dipende dal percorso seguito (fig. 1.42); la circuitazione di \mathbf{E}_0 , cioè l'integrale di linea

$$(56) \quad \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

lungo una qualunque linea chiusa C , è sempre zero (vol. I, cap. 3, par. 3.4).

È possibile allora associare ai punti del campo dei valori numerici V_0 tali che la differenza dei valori associati ai punti P_1 e P_2 fornisca il valore del lavoro che la forza del campo compie quando la carica positiva unitaria passa da P_1 a P_2 :

$$(57) \quad V_{0,P_1} - V_{0,P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = L_{P_1 P_2}.$$

⁽³⁴⁾ Per semplicità di dizione noi supporremo che la carica unitaria sia sufficientemente piccola da non disturbare la distribuzione di cariche che crea il campo. Se questo non è il caso, è facile mutare le espressioni per riferirsi alla carica dq usata per la definizione del campo.

Considerando le espressioni del tipo (57) per tutti i punti, valutate a partire da uno stesso punto A di riferimento, si giunge a considerare una funzione scalare $V_0(x, y, z)$ tale che

$$(58) \quad V_0(x_A, y_A, z_A) - V_0(x, y, z) = \int_A^P \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = L_{AP},$$

cioè

$$(59) \quad \begin{aligned} V_0(x, y, z) &= - \int_A^P \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + V_0(x_A, y_A, z_A) = \\ &= -L_{AP} + V_0(x_A, y_A, z_A). \end{aligned}$$

Potenziale elettrostatico

La funzione $V_0(x, y, z)$ consente di esprimere il lavoro L_{12} che la forza del campo compie quando la carica positiva unitaria passa da P_1 a P_2 semplicemente come differenza dei valori che la funzione stessa assume nei due punti

$$(60) \quad V_0(x_1, y_1, z_1) - V_0(x_2, y_2, z_2) = L_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}. \quad \text{Differenza di potenziale}$$

La funzione scalare $V_0(x, y, z)$ prende il nome di potenziale elettrostatico.

È bene fare subito alcune osservazioni. Dal punto di vista fisico quelle che sono perfettamente determinate sono le differenze di potenziale fra punti [relazioni (60)]. La considerazione del potenziale in un punto implica la scelta arbitraria di un punto di riferimento (A) e la scelta arbitraria del valore da assegnare a V_0 in tale punto. Queste scelte vanno fatte nei vari casi nella maniera più opportuna per la trattazione dei singoli problemi elettrostatici. Di solito si assume nullo il valore del potenziale in corrispondenza al punto (A) di riferimento. In tal caso

$$(61) \quad V_0(x, y, z) = -L_{AP} = L_{PA}$$

il potenziale in un punto (x, y, z) è pari al lavoro L_{PA} che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria si sposta dal punto in considerazione al punto di riferimento⁽³⁵⁾.

Per quanto riguarda la scelta del punto di riferimento molto spesso si trova utile sceglierlo come un punto a distanza infinita⁽³⁶⁾ dalle cariche che creano il campo: in tal caso solamente si può dire che il potenziale in un punto è pari al lavoro che le forze del campo compiono quando la carica positiva unitaria viene portata dal punto che si considera all'infinito.

⁽³⁵⁾ Si può considerare anche il passaggio della carica positiva unitaria dal punto di riferimento A al punto in considerazione: il potenziale in P è pari al lavoro cambiato di segno ($-L_{AP}$) che le forze del campo compiono, cioè è pari al lavoro che le forze esterne (uguali ed opposte alle forze del campo) compiono durante il passaggio della carica da A a P .

⁽³⁶⁾ Qui, e in altri casi simili, per distanza infinita s'intende una distanza abbastanza grande perché le azioni promananti dalle cariche generatrici del campo siano sufficientemente piccole, cioè, come si usa dire, ci si porti "fuori dal campo".

In molti casi peraltro può essere utile o addirittura necessario scegliere il punto di riferimento in altre posizioni; nel caso per esempio che interessi nel particolare problema il comportamento di vari conduttori rispetto ad un conduttore che li abbracci tutti, o comunque sia molto grande (per es. la Terra), conviene porre il punto di riferimento in un punto di tale conduttore; vedremo in seguito esempi di situazioni ove è necessario per giungere facilmente alla soluzione dei problemi di porre il punto di riferimento in un punto non a distanza infinita (par. 1.13d).

*Le dimensioni
del potenziale sono
energia/carica*

*L'unità di misura
del potenziale è il volt*

Si osservi ancora che la funzione potenziale corrisponde perfettamente alla funzione energia potenziale vista per tutti i campi conservativi tranne per il fatto che ci si è qui riferiti ad una carica unitaria: ha quindi le dimensioni di un'energia divisa per una carica.

La funzione potenziale elettrostatico equivale cioè alla energia potenziale che competerebbe alla carica unitaria positiva nei vari punti del campo creato da altre cariche nell'ipotesi che l'introduzione di tale carica non alteri la distribuzione di quelle che creano il campo⁽³⁷⁾.

Come rapporto tra energia (o lavoro) e carica, il potenziale elettrostatico nel Sistema Internazionale (SI) si misura in joule/coulomb: a questa unità è stato dato il nome di volt⁽³⁸⁾.

Dalle considerazioni ora svolte e dalle proprietà generali della funzione scalare energia potenziale per i campi conservativi (vol. I, cap. 3, par. 3.5) si deduce che la funzione potenziale elettrostatico è legata alle componenti della forza del campo cioè alle componenti dell'intensità del campo elettrostatico. La componente del campo in una qualsiasi direzione \mathbf{l} è data da

$$(62) \quad E_{0,l} = -\frac{\partial V_0}{\partial l},$$

e quindi per le componenti secondo x, y, z :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{0,x} = -\frac{\partial V_0}{\partial x} \\ E_{0,y} = -\frac{\partial V_0}{\partial y} \\ E_{0,z} = -\frac{\partial V_0}{\partial z} \end{array} \right.$$

⁽³⁷⁾ È bene a questo punto osservare che l'energia potenziale di un sistema di cariche, quale è stata da noi già considerata al paragrafo 1.5 e che sarà ancora trattata al paragrafo 1.19, non va confusa con il potenziale elettrostatico; l'energia potenziale di un sistema di cariche è una proprietà globale del sistema e dipende dalla sua configurazione; per una certa configurazione rappresenta l'energia che è stata spesa per portare le cariche nella configurazione stessa e che è immagazzinata nel sistema. Il potenziale elettrostatico serve a descrivere il campo creato da una distribuzione di cariche mediante la energia potenziale che compete ad una nuova carica puntiforme unitaria introdotta in un punto del campo. Nel paragrafo 1.18 vedremo come l'energia di un sistema di cariche possa prendere una utile espressione che fa uso della funzione potenziale.

⁽³⁸⁾ Usando il volt, l'unità di misura per l'intensità del campo elettrico risulta:

$$\frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} = \frac{\text{joule}}{\text{m-coulomb}} = \frac{\text{volt}}{\text{m}}$$

Si ha così⁽³⁹⁾

$$(64) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V_0}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\ &= -\operatorname{grad} V_0 = \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V_0 = -\nabla V_0. \end{aligned}$$

Il campo elettrico è il gradiente del potenziale cambiato di segno

$$\mathbf{E}_0 = -\operatorname{grad} V_0$$

A questo punto si osservi che se invece della carica unitaria positiva si deve considerare il comportamento della carica puntiforme q introdotta nel campo, v'è luogo a considerare una funzione energia potenziale

$$(65) \quad \mathcal{U}(x, y, z) = qV_0(x, y, z)$$

Energia potenziale di una carica

che esprime l'energia che compete alla nuova carica q per il fatto di trovarsi nel punto (x, y, z) del campo creato dalle altre cariche. La forza che sollecita la carica è allora

$$(66) \quad \mathbf{F} = -\operatorname{grad} \mathcal{U} = -q \operatorname{grad} V_0 = q\mathbf{E}_0.$$

Per la descrizione del campo scalare del potenziale elettrostatico è utile considerare le superfici equipotenziali. Si osservi che per un punto passa una sola superficie equipotenziale così come, se il punto non è sede di una carica, passa una sola linea di forza. La linea di forza è ortogonale alla superficie equipotenziale per il punto (vol. I, cap. 3, par. 3.4). Si osservi infatti che se si considerano due punti sulla stessa superficie equipotenziale il lavoro compiuto dalle forze del campo quando la carica $+1$ passa da un punto all'altro deve essere zero qualunque sia il percorso seguito: in particolare si può scegliere un percorso che giaccia interamente sulla superficie equipotenziale. In tal caso perché

$$\int_l \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$$

risulti zero non essendo nulli \mathbf{E}_0 e $d\mathbf{l}$, è necessario che i due vettori siano normali fra loro.

Le figure seguenti mostrano per alcuni casi caratteristici le linee di forza e le tracce delle superfici equipotenziali: le linee continue sono quelle di forza, le linee tratteggiate sono le tracce delle superfici equipotenziali. Per avere una efficace rappresentazione del campo scalare V_0 , è opportuno considerare superfici equipotenziali per incrementi (ΔV_0) costanti del potenziale. In tal caso ove le tracce si infittiscono, il gradiente aumenta, cioè l'intensità del campo elettrico è maggiore e in corrispondenza anche le linee di forza si infittiscono.

Superfici equipotenziali

La figura 1.43 si riferisce ad un campo uniforme quale quello creato da uno strato piano uniforme (par. 1.7); la figura 1.44 si riferisce al campo creato da una carica positiva; la figura 1.45 si riferisce al caso di un dipolo (par. 1.14); quella 1.46 al caso di due cariche uguali e la 1.47 al campo creato da un disco uniformemente carico.

⁽³⁹⁾ Per l'uso del simbolo ∇ vedi paragrafo 1.7 ed appendice II.

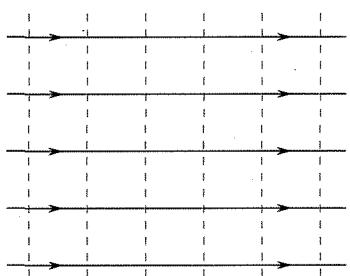


Fig. 1.43

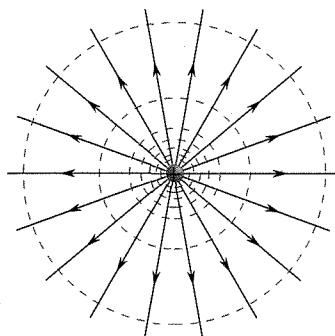


Fig. 1.44

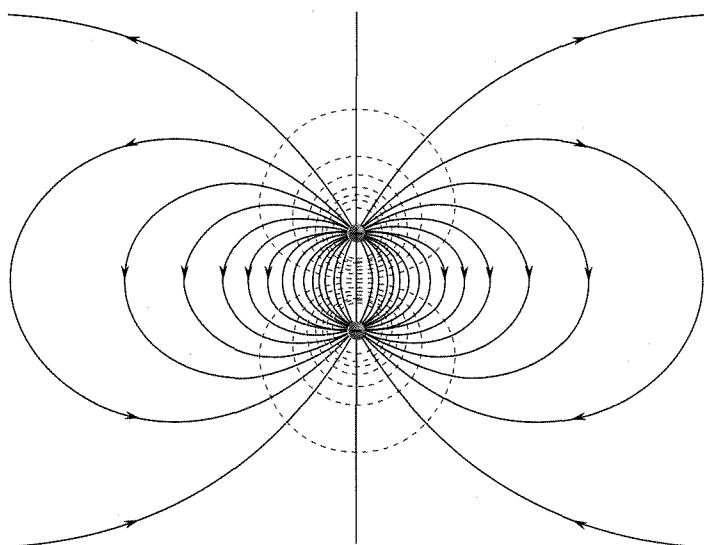


Fig. 1.45

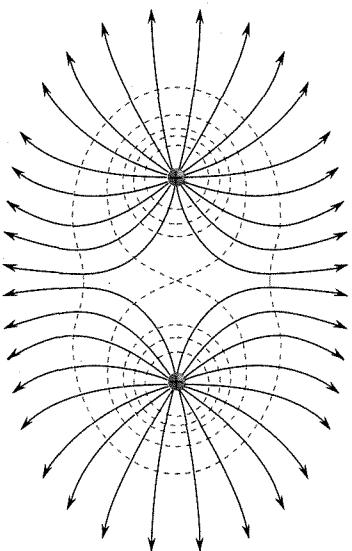


Fig. 1.46

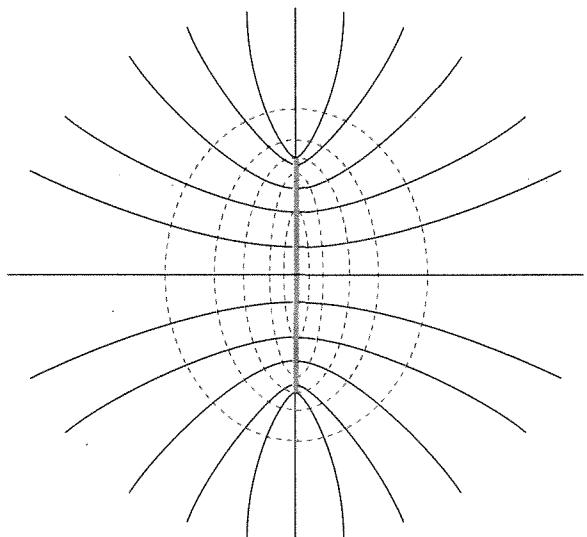


Fig. 1.47

1.12. ESPRESSIONE ANALITICA DELLA NATURA CONSERVATIVA DI \mathbf{E}_0

La natura conservativa del campo elettrostatico si rispecchia come si è visto nell'esistenza della funzione scalare potenziale avanti introdotta e per cui vale la (64).

Vogliamo ora stabilire una relazione differenziale che esprime questa importante caratteristica del campo elettrico⁽⁴⁰⁾ esclusivamente in termini delle componenti di \mathbf{E}_0 . Essa si ottiene applicando un importante teorema di calcolo vettoriale (teorema di Stokes).

Ricordiamo (vol. I, cap. 8, par. 8.8), come premessa, che per un campo vettoriale (che qui supponiamo essere \mathbf{E}_0) si definisce $\text{rot } \mathbf{E}_0$ (o, usando il simbolo nabla, $\nabla \times \mathbf{E}_0$) il vettore

$$(67) \quad \text{rot } \mathbf{E}_0 = \nabla \times \mathbf{E}_0 = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Operatore rotore

Se si considera ora una linea chiusa qualsiasi C , orientata in una direzione (fig. 1.48a), la circuitazione del vettore (qui \mathbf{E}_0) è

$$\oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}.$$

Si prenda una qualsiasi superficie S che abbia C come contorno e su di essa una curva fra i punti A e B della C (fig. 1.48b). Accanto al percorso C vengano ora considerati i due percorsi chiusi C_1 e C_2 orientati come C e formati da un tratto di C ed AB o BA . È facile vedere che la circuitazione lungo C è la somma di quelle lungo C_1 e C_2 : il tratto AB viene infatti complessivamente percorso una volta in un verso (come facente parte di C_1) ed una volta nel verso opposto (come facente parte di C_2). La suddivisione di C può essere portata avanti considerando un numero molto grande di curve tutte su S fra vari punti di C (fig. 1.48c).

Al limite, i singoli circuiti divengono infinitesimi: in tal caso la zona di S che ciascuno di essi circonda (dS) può essere ritenuta piana e sia \mathbf{n} la normale orientata in modo da vedere in senso antiorario il contorno orientato come C .

Supponiamo che un elementino dS sia un rettangolo $dx dy$ con \mathbf{n} diretta come z (fig. 1.49). La circuitazione di \mathbf{E}_0 lungo il contorno di dS può essere suddivisa in quattro parti rispettivamente lungo i lati 1, 2, 3, 4.

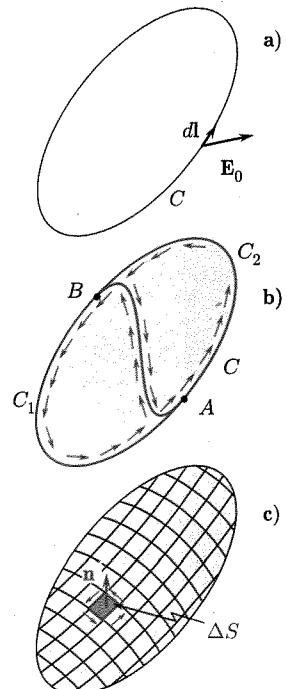


Fig. 1.48

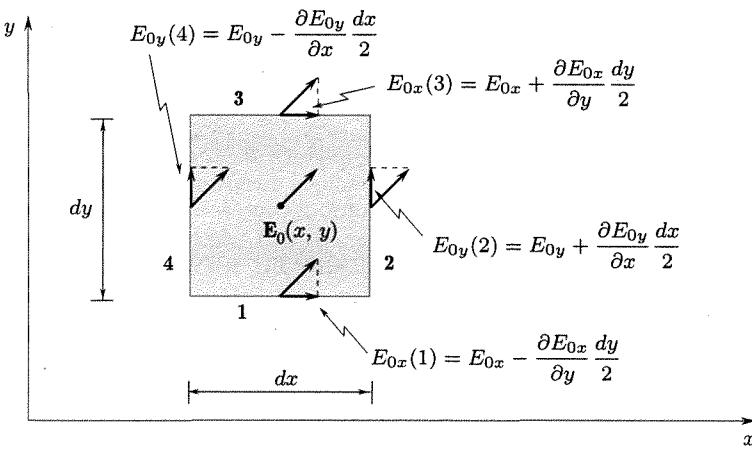


Fig. 1.49

⁽⁴⁰⁾ È questa una relazione di validità generale per tutti i campi conservativi. Essa infatti si deduce da considerazioni sulle proprietà generali di tali campi.

Lungo ciascuno di questi (essendo infinitesimi) il campo elettrico può essere ritenuto costante. Se inoltre il campo al centro del rettangolo è \mathbf{E}_0 (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}) è facile ricavare le componenti dei campi in corrispondenza ai lati. Così per esempio le componenti secondo x per i lati 1 e 3 sono rispettivamente

$$(68) \quad \begin{aligned} E_{0x}(1) &= E_{0x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \\ E_{0x}(3) &= E_{0x} + \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

quelle secondo y in corrispondenza ai lati 2 e 4 sono rispettivamente

$$(69) \quad \begin{aligned} E_{0y}(2) &= E_{0y} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ E_{0y}(4) &= E_{0y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2}. \end{aligned}$$

Si osservi ancora che la circuitazione nel verso scelto è

$$\left(\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \right)_{\substack{\text{contorno} \\ \text{elementare}}} = E_{0x}(1)dx + E_{0y}(2)dy - E_{0x}(3)dx - E_{0y}(4)dy.$$

La ragione dei segni diversi per i vari addendi dipende dal fatto che gli elementi dx e dy sono diretti nel verso della circuitazione per i lati 1 e 2 ed in verso opposto per i lati 3 e 4.

Si ha quindi:

$$(70) \quad \begin{aligned} \left(\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \right)_{\substack{\text{contorno} \\ \text{elementare}}} &= \left[E_{0x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx + \left[E_{0y} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy - \\ &\quad - \left[E_{0x} + \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx - \left[E_{0y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy = \\ &= \left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0)_z dS = \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} dS. \end{aligned}$$

Analogamente, se gli elementi dS sono rettangoli la cui normale è diretta come l'asse x , o l'asse y , si ha rispettivamente

$$(71) \quad \begin{aligned} \left(\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \right)_{\substack{\text{contorno} \\ \text{elementare}}} &= (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0)_x dy dz = \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{i} dS \\ \left(\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \right)_{\substack{\text{contorno} \\ \text{elementare}}} &= (\operatorname{rot} \mathbf{E}_0)_y dx dz = \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{j} dS \end{aligned}$$

Queste espressioni possono essere generalizzate al caso di un contorno elementare che circonda un elemento piano dS comunque disposto. Se \mathbf{n} è la normale a dS orientata in modo da vedere in senso antiorario il contorno orientato come C :

$$(72) \quad \left(\oint \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \right)_{\substack{\text{contorno} \\ \text{elementare}}} = \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS.$$

Sommendo membro a membro tutte le relazioni per i contorni infinitesimi in cui C è stato scomposto si ha la relazione di Stokes (scritta per \mathbf{E}_0):

$$(73) \quad \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Questa relazione è molto importante perché lega la circuitazione di un vettore (\mathbf{E}_0) cioè l'integrale di linea lungo una linea chiusa (C), al flusso (integrale di superficie) di un altro vettore ($\operatorname{rot} \mathbf{E}_0$) attraverso una qualsiasi superficie che ha C come contorno.

Il teorema di Stokes si scrive per \mathbf{E}_0

$$(74) \quad \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}_0) \cdot \mathbf{n} dS,$$

essendo S una superficie qualsiasi che ha come contorno C . Se si tiene presente che poiché \mathbf{E}_0 è conservativo, la circuitazione di \mathbf{E}_0 (lungo una qualsiasi linea chiusa) è zero, si ha:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Tale relazione deve valere qualunque sia la S che ha per contorno la linea chiusa C considerata: ciò richiede che sia in ogni punto del campo eletrostatico

$$(75) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}.$$

Il campo eletrostatico è quindi irrotazionale. La (75) costituisce la forma particolare che la seconda equazione di Maxwell assume per i casi stazionari.

La relazione ⁽⁴¹⁾ differenziale (75) che lega i valori di \mathbf{E}_0 in punti vicini e valida punto per punto, può essere presa, al pari di

$$(76) \quad \mathbf{E}_0 = - \operatorname{grad} V_0,$$

per esprimere la natura conservativa di \mathbf{E}_0 . Si osservi che nella (75) intervergono solo le componenti di \mathbf{E}_0 (con le loro derivate) mentre nella (76) interviene anche la funzione potenziale.

Teorema di Stokes

*Il equazione
di Maxwell per i casi
stazionari*

1.13. IL POTENZIALE ELETROSTATICO PER ALCUNE DISTRIBUZIONI DI CARICHE

La grande utilità pratica dell'uso della funzione potenziale nella trattazione dei problemi eletrostatici può essere bene illustrata effettuando la determinazione di tale funzione per varie distribuzioni di cariche. Risulterà evidente come il calcolo del campo in un punto riesca notevolmente semplificato se invece di procedere come visto precedentemente (par. 1.6) si calcoli l'espressione della funzione potenziale e si determinino le componenti di \mathbf{E}_0 mediante operazioni di derivazione su $V_0(x, y, z)$. La ragione fondamentale della semplificazione sta nell'essere V_0 una funzione scalare, mentre invece \mathbf{E}_0 è una funzione vettoriale.

a. Carica puntiforme

In questo caso il campo elettrico dipende solo da r [equazione (23)].

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

⁽⁴¹⁾ Essa può essere anche ottenuta calcolando le componenti di $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0$, ricordando che le componenti di \mathbf{E}_0 per essere conservativo ($\mathbf{E}_0 = - \operatorname{grad} V_0$) sono

$$E_{0x} = -\frac{\partial V_0}{\partial x}; \quad E_{0y} = -\frac{\partial V_0}{\partial y}; \quad E_{0z} = -\frac{\partial V_0}{\partial z}.$$

Si ha quindi:

$$(77) \quad V_0(r) - V_0(r_A) = - \int_{r_A}^r \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{r} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right).$$

Prendendo come punto di riferimento (r_A) il punto per cui $r_A \rightarrow \infty$ e assegnando al corrispondente potenziale il valore zero, si ha:

Il potenziale di una carica puntiforme

$$(78) \quad V_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Nel caso che fosse dato il potenziale (78) sarebbe facile calcolare \mathbf{E}_0 . Data la simmetria della funzione (78) (superficie equipotenziali sferiche) il campo è radiale ed è:

$$(79) \quad E_0 = - \frac{\partial V_0}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

b. Sistemi di cariche puntiformi

Il campo elettrico in un punto è il risultante di quelli dovuti alle singole cariche. A ciascuno di questi campi parziali (\mathbf{E}_{0i}) corrisponde una funzione potenziale ottenibile dalla (78) per $q = q_i$ se, come qui supponiamo, si assume sempre $V_{0i} = 0$ per $r = \infty$. In tali condizioni si ha per il sistema di N cariche, la funzione potenziale

$$(80) \quad V_0(P) = \sum_{1,i}^N V_{0i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1,i}^N \frac{q_i}{r_i},$$

essendo r_i la distanza fra la carica che si considera e il punto P per il quale si calcola il potenziale.

c. Distribuzioni continue

Nel caso di distribuzioni spaziali in un volume τ finito⁽⁴²⁾ (eventualmente costituito da volumi v_1, v_2, \dots separati) con densità $\rho(x', y', z')$, si ha:

$$(81) \quad V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.$$

Si sono indicate con l'apice le coordinate del punto nella distribuzione di carica, e con x, y, z quelle del punto in cui si calcola il potenziale. Il potenziale è assunto nullo a distanza infinita.

Nei casi di distribuzione superficiale (densità σ) sulla superficie S e di distribuzioni lineari (densità γ) sulla linea l si ha, rispettivamente:

$$(82) \quad V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(x', y', z') dS}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

$$(83) \quad V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\gamma(x', y', z') dl}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

Il potenziale per una distribuzione di cariche di volume

Il potenziale per una distribuzione di superficie

Il potenziale per una distribuzione di cariche lungo una linea

⁽⁴²⁾ Questa condizione è necessaria se si vuole mantenere $V_{0i} = 0$ per $r = \infty$ per tutte le cariche puntiformi in cui la distribuzione può immaginarsi suddivisa. Per casi di distribuzioni che si estendono all'infinito si veda il punto d.

Anche in questi casi il potenziale è assunto nullo a distanza infinita. Si paragonino gli integrali al secondo membro delle (81), (82), (83) con quelli nelle espressioni [(27), (30)] per l'intensità del campo per le stesse distribuzioni di cariche: nel caso del potenziale gli integrali rappresentano scalari e non vettori ed inoltre al denominatore compare r e non r^2 .

Disco carico. Si supponga (fig. 1.50) di avere un disco circolare uniformemente carico⁽⁴³⁾ (densità σ) e di volere calcolare V_0 per punti sull'asse (y). La superficie $S (\pi A^2)$ può essere divisa in piccoli elementi da cerchi concentrici e raggi separati da un angolo $d\alpha$: un elemento ha la carica

$$\sigma s d\alpha ds.$$

Si ha:

$$(84) \quad V_0(0, y, 0) = V_0(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^A \frac{\sigma s d\alpha ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} = \\ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^A (y^2 + s^2)^{-1/2} s ds.$$

Ponendo $y^2 + s^2 = \chi$ si ha

$$\int (y^2 + s^2)^{-1/2} s ds = \frac{1}{2} \int \chi^{-1/2} d\chi = \chi^{1/2},$$

e quindi

$$(85) \quad V_0(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + s^2} \right]_0^A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + A^2} - \sqrt{y^2} \right)$$

Si osservi che $\sqrt{y^2} = \pm y$. Delle due soluzioni hanno significato fisico quella $+y$ per $y > 0$ e quella $-y$ per $y < 0$; in definitiva, è:

$$(86) \quad V_0(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + A^2} - y \right) \quad \text{per } y > 0$$

$$(87) \quad V_0(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + A^2} + y \right) \quad \text{per } y < 0$$

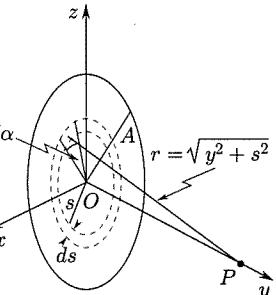


Fig. 1.50

Potenziale sull'asse
di un disco carico

Per la simmetria del problema deve infatti essere $V_0(-y) = V_0(y)$. Il calcolo di E_0 è semplice. Per ragioni di simmetria per i punti dell'asse y esso è diretto come y . Inoltre,

$$E_0 = - \frac{\partial V_0}{\partial y}.$$

Per valori di $y \gg A$ si ha

$$\sqrt{y^2 + A^2} = y \left[1 + \left(\frac{A}{y} \right)^2 \right]^{1/2} = y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{y} \right)^2 + \dots \right] \simeq y + \frac{A^2}{2y},$$

e quindi, essendo la carica totale del disco $\pi A^2 \sigma$, dalla (86) risulta:

$$(88) \quad V_0(y) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y}.$$

Il potenziale (e l'intensità del campo) sono approssimativamente uguali a quelli che si avrebbero se tutta la carica fosse concentrata in O .

⁽⁴³⁾ Il disco deve essere isolante; infatti, se fosse conduttore la densità non potrebbe essere costante perché si avrebbe un addensamento di carica verso l'orlo (vedi par. 1.26).

d. Distribuzioni di cariche che si estendono a distanza infinita

Anche in questo caso il potenziale può essere ottenuto come somma algebrica delle funzioni potenziali valide per le singole cariche puntiformi in cui la distribuzione può immaginarsi decomposta, funzioni scritte con la medesima scelta del punto di riferimento in cui il potenziale è assunto nullo. A differenza peraltro dal caso di distribuzioni finite questo comune punto di riferimento non può porsi a distanza infinita poiché proprio all'infinito si trova la maggior parte dei punti della distribuzione. In questi casi è necessario porre il punto di riferimento A per la definizione della funzione potenziale (59) in un punto scelto ad arbitrio a distanza finita.

Come esempio si consideri il caso di una distribuzione lineare di carica (densità γ) infinita lungo un asse rettilineo. Per una tale distribuzione ricordiamo di avere già determinato il campo al paragrafo 1.10d. Il campo è radiale e la sua intensità vale

$$E_0 = \frac{\gamma}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Potenziale di un filo carico

Se si prende come punto di riferimento A un punto a distanza r_A dall'asse rettilineo si ha per la funzione potenziale (59):

$$(89) \quad V_0(r) = - \int_A^P \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_A}^r \frac{dr}{r} = - \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0} (\log r - \log r_A) = - \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0} \log r + \text{cost.}$$

Potenziale di uno strato piano carico

Analogamente, per uno strato piano carico uniformemente ed infinito, per il quale è stato al paragrafo 1.10d determinato E_0 , scegliendo il punto di riferimento a distanza x_0 si ha:

$$(90) \quad V_0(x) = - \int_A^P \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = - \int_{x_0}^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x - x_0) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x + \text{cost.}$$

Nei paragrafi successivi (1.14 e 1.15) considereremo ancora la funzione potenziale in alcuni casi particolarmente importanti di distribuzioni di cariche.

1.14. IL DIPOLO ELETTRICO

Come ulteriore esempio del calcolo del potenziale e del campo elettrico per distribuzioni di cariche consideriamo il caso, molto importante per le applicazioni, del dipolo elettrico. Il dipolo elettrico è un sistema costituito da due cariche puntiformi di valore uguale, di segno opposto, tenute ad una piccola distanza δ fra loro (v. fig. 1.51).

Si definisce momento di dipolo un vettore diretto da $-q$ a $+q$, avente modulo

$$(91) \quad |\mathbf{p}| = q\delta.$$

Per il potenziale relativo ad un tale sistema di cariche noi stabiliremo fra breve una espressione semplice valida esclusivamente per punti le cui distanze dalle cariche $\pm q$ siano molto maggiori di δ .

L'interesse pratico del dipolo è limitato appunto al caso in cui ci si trovi a distanze da esso molto grandi rispetto a δ ; di solito quindi quando

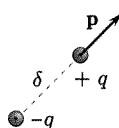


Fig. 1.51

Momento di dipolo

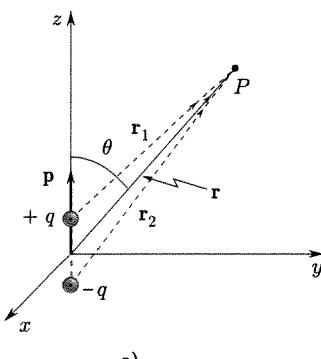
si parla di dipoli si intende riferirsi al caso in cui la distanza δ fra le cariche sia molto piccola rispetto ad ogni altra distanza in gioco nel problema⁽⁴⁴⁾. Dal punto di vista matematico ciò corrisponde a supporre che nel sistema delle due cariche, q sia infinitamente grande e δ infinitamente piccolo in modo che p resti finito e la espressione del potenziale che stabiliremo [relazioni (96), (98)] sia esatta.

Dipoli elettrici si incontrano comunemente in casi concreti. Molte molecole, pur essendo naturalmente neutre, hanno una struttura interna per cui il centro delle cariche positive⁽⁴⁵⁾ non coincide con quello delle cariche negative. La molecola dell'acqua è un caso di questo genere; la figura 1.52 dà uno schema della molecola con l'indicazione della posizione dei nuclei atomici, della distribuzione della carica negativa (in colore) e del momento di dipolo p .

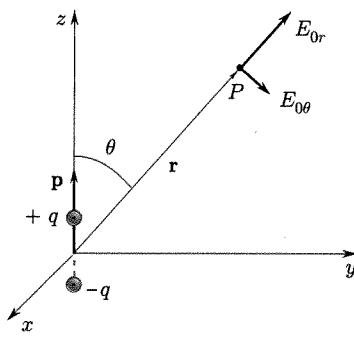
Anche le molecole prive di momento di dipolo proprio e gli atomi possono trasformarsi in dipoli se vengono posti in un campo elettrico: quest'ultimo infatti deforma la distribuzione delle cariche spingendo in verso opposto le cariche dei due segni; di conseguenza i centri di carica positiva e negativa non coincidono più. La figura 1.53 rappresenta un tale processo. Dipoli elettrici si incontrano anche in altre situazioni: per es., talune antenne radio (appunto dette "a dipolo") possono essere approssimate per mezzo di due cariche opposte separate da una piccola distanza; in questo caso la situazione non è statica e va trattata con altre equazioni (cap. 7, par. 7.13) ma il dispositivo è ancora un dipolo (oscillante).

Ci proponiamo di calcolare il potenziale e l'intensità del campo generato da un dipolo a distanze dal dipolo grandi rispetto a δ . Con riferimento alla figura 1.54a ed in accordo con la (80)

$$(92) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$



a)



b)

Fig. 1.54

Esempi di dipoli elettrici

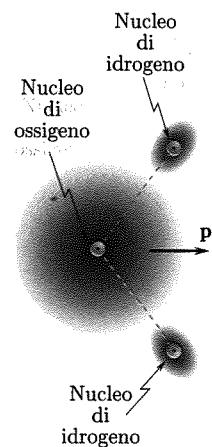


Fig. 1.52

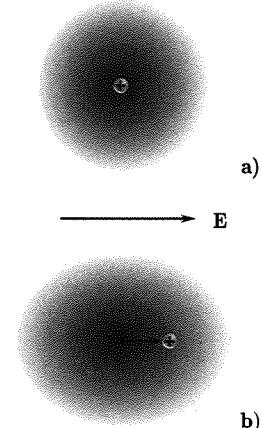


Fig. 1.53

⁽⁴⁴⁾ Alcuni autori preferiscono sottolineare questa circostanza limitando la definizione di dipolo nel senso che il sistema delle cariche $\pm q$ viene indicato come dipolo solo se considerato da punti la cui distanza dalle cariche $\pm q$ sia molto maggiore di δ .

⁽⁴⁵⁾ Il centro delle cariche di un segno va determinato con criteri analoghi a quelli usati per la determinazione del centro di massa di un sistema di punti materiali (vol. I, cap. 4, par. 4.2).

Poiché ci si limita a punti per cui $r \gg \delta$

$$(93) \quad r_2 - r_1 \simeq \delta \cos \theta \quad r_1 r_2 \simeq r^2$$

e quindi

$$(94) \quad V_0(P) = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Si osservi che V_0 è nullo nel piano equatoriale del dipolo (nel caso in figura il piano xy) ove $\theta = \pi/2$. Ad r costante il potenziale è massimo per $\theta = 0$ e minimo (massimo valore negativo) per $\theta = \pi$. Se si osserva che $\cos \theta$ è il terzo coseno direttore di \mathbf{r} si ha

$$(95) \quad \cos \theta = \frac{z}{r}$$

essendo z una delle coordinate di P . Si ha quindi

Potenziale di un dipolo

$$(96) \quad V_0(P) = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Un'altra formula interessante per $V_0(P)$ si ottiene se si osserva che

$$(97) \quad \begin{aligned} \text{grad} \frac{1}{r} &= \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{j} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k} = -\frac{1}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Si ha così

$$(98) \quad V_0(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Si ricordi che \mathbf{r} è il vettore che dal centro del dipolo va al punto $P(x, y, z)$.

Le componenti del campo E_0 secondo x, y, z possono essere facilmente ottenute

*Componenti cartesiane
del campo elettrico
di un dipolo*

$$(99) \quad \begin{aligned} E_{0x} &= -\frac{\partial V_0(P)}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5} \\ E_{0y} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5} \\ E_{0z} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Le due componenti E_{0x} ed E_{0y} possono essere composte e dare la componente di E_0 normale alla direzione (z) del dipolo

$$(100) \quad E_{0\perp} = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

*Componente del campo
elettrico normale a \mathbf{p}*

Poiché $\cos \theta = z/r$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sin \theta = r \sin \theta$

$$(101) \quad \begin{aligned} E_{0\perp} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3} \\ E_{0\parallel} &= E_{0z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}. \end{aligned}$$

*Componente del campo
elettrico parallela a \mathbf{p}*

È utile per alcune considerazioni che faremo in seguito procurarsi le componenti di E_0 a grande distanza dal dipolo in due altre direzioni. Si osservi che il vettore E_0 per un qualsiasi punto P giace nel piano determinato da P e dall'asse del dipolo. Se ci si pone in tale piano (fig. 1.54b) e si usano coordinate polari (r, θ) per individuare il punto P , si possono facilmente determinare le componenti E_0 nella direzione di r (nel verso delle r crescenti) ed in direzione normale (nel verso delle θ crescenti). La componente secondo r è la stessa che si ha nel sistema x, y, z , precedentemente considerato, nella direzione del versore \mathbf{r}/r , cioè $(\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{r}/r))$. Si ottiene

$$(102) \quad E_{0r} = E_{0x} \frac{x}{r} + E_{0y} \frac{y}{r} + E_{0z} \frac{z}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_{0\theta} = \sqrt{E_0^2 - E_{0r}^2} = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2 - E_{0r}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

Le (94), (101) e (102) mostrano che nel caso del dipolo il potenziale lungo una retta che esce dal centro del dipolo, decresce come $1/r^2$ (nel caso di una sola carica puntiforme come $1/r$) e l'intensità del campo come $1/r^3$ (nel caso di carica puntiforme come $1/r^2$).

È interessante accennare ad un sistema di cariche che è costituito da due dipoli uguali ed opposti come in figura 1.55. Il sistema si dice costituire un quadrupolo elettrico e si chiama momento di quadrupolo la quantità

$$(103) \quad \mathcal{P} = 2q\delta^2.$$

Componenti del campo elettrico del dipolo in coordinate polari

Il potenziale del dipolo va come $1/r^2$

Il campo elettrico del dipolo va come $1/r^3$

Quadrupolo elettrico

Il potenziale per punti P dell'asse del quadrupolo si calcola facilmente

$$(104) \quad V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r-\delta} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r+\delta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\delta^2}{(r-\delta)r(r+\delta)}.$$

Se si considerano punti a distanza $r \gg \delta$ si può trascurare δ nel denominatore e

$$(105) \quad V_0 = \frac{\mathcal{P}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}.$$

Si vede che in questo caso V_0 decresce come $1/r^3$ e di conseguenza $|\mathbf{E}_0|$ decresce come $1/r^4$.

Queste considerazioni possono essere proseguite. Due cariche uguali ed opposte che non coincidono danno effetti che non si cancellano e che a distanza creano un campo che decresce come $1/r^3$; due dipoli uguali ed opposti che non coincidono nello spazio danno luogo ad un quadrupolo il cui campo decresce con la distanza come $1/r^4$; due quadrupoli che non si compensano esattamente danno luogo a distribuzioni di ordine superiore (ottupoli) e così via.

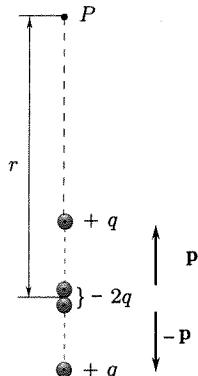


Fig. 1.55

1.15. L'APPROXIMAZIONE DI DIPOLO PER UNA DISTRIBUZIONE QUALSIASI

Si abbia (fig. 1.56) una distribuzione di cariche qualsiasi confinata in una regione dello spazio e si voglia studiare il potenziale ed il campo a distanze molto grandi rispetto alle dimensioni lineari della regione. Se si indica con q_i la generica carica nel punto di coordinate (x'_i, y'_i, z'_i) (nel caso di distribuzioni continue in qualche parte della regione, q_i va sostituita con

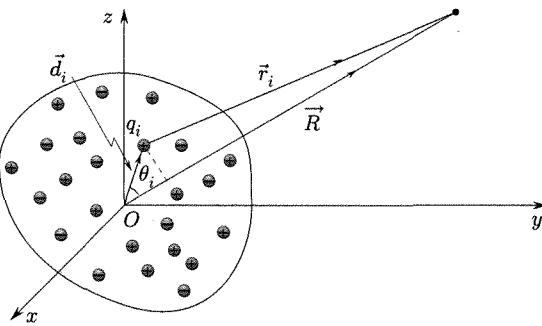


Fig. 1.56

$\rho d\tau$), il potenziale nel punto P vale

$$(106) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}.$$

Ricordando che noi siamo interessati al potenziale in punti per i quali R (fig. 1.56) è molto maggiore delle dimensioni lineari della regione in cui è distribuita la carica e quindi delle lunghezze dei vettori \mathbf{d}_i che fissano la posizione delle cariche q_i rispetto al punto O interno alla regione, cerchiamo di trovare una adatta espressione per

$$(107) \quad \frac{1}{r_i} = \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{d}_i|}.$$

Ciò può essere fatto sviluppando il secondo membro in serie di potenze di x'_i, y'_i, z'_i . Il risultato che si ottiene se ci si ferma ai termini quadratici, coincide con quello che si può avere con semplici considerazioni geometriche. Essendo il punto molto distante una prima approssimazione è quella di ritenere

$$r_i \simeq R$$

La approssimazione successiva è quella di porre (v. fig. 1.56)

$$(108) \quad r_i \simeq R - d_i \cos \theta_i = R - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R} = R \left(1 - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right).$$

Si ha allora con buona approssimazione, essendo $d_i \ll R$

$$(109) \quad \frac{1}{r_i} \simeq \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right).$$

Per il potenziale in punti distanti si ha quindi da (106) e (109):

$$(110) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}} \cdot \sum q_i \mathbf{d}_i + \dots$$

Il potenziale quindi può essere espresso come una somma di vari termini.

Il primo è pari a quello che si avrebbe nel punto P se la carica totale (somma algebrica $\sum q_i$) fosse concentrata in O ; esso è diverso da zero se $\sum q_i \neq 0$ ed in tal caso è il termine più importante: si consideri infatti che il secondo termine decresce proporzionalmente a $1/R^2$, cioè molto più rapidamente del primo. Nel caso che $\sum q_i \neq 0$, a distanze grandi dalla regione in cui esistono le cariche il potenziale (ed il campo) è praticamente

*Approssimazione
del potenziale per una
distribuzione qualsiasi
di cariche puntiformi
confinate in una regione*

lo stesso di quello che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata in O : è questo un risultato abbastanza ovvio.

Il secondo termine diviene importante quando $\sum q_i = 0$.

Questo termine ha una espressione analoga a quella del potenziale del campo creato da un dipolo e prende il nome di termine di dipolo. Si definisce inoltre come momento di dipolo della distribuzione il vettore

$$(111) \quad \mathbf{P} = \sum q_i \cdot \mathbf{d}_i ,$$

di componenti

$$(112) \quad P_x = \sum q_i d_{ix} \quad P_y = \sum q_i d_{iy} \quad P_z = \sum q_i d_{iz} .$$

*Momento di dipolo
per una distribuzione
limitata di cariche
puntiformi*

Il momento di dipolo nel caso che $\sum q_i = 0$ è una caratteristica della distribuzione, indipendente dal punto scelto come origine del sistema di riferimento. Se infatti questo venisse spostato in un altro punto O' le cui coordinate nel vecchio sistema sono a, b, c , le componenti di \mathbf{P}' nel nuovo sistema sarebbero

$$(113) \quad \begin{aligned} P'_x &= \sum q_i d'_{ix} = \sum q_i (d_{ix} - a) = P_x - a \sum q_i \\ P'_y &= P_y - b \sum q_i \\ P'_z &= P_z - c \sum q_i \end{aligned}$$

Esse coincidono con P_x, P_y, P_z essendo $\sum q_i = 0$.

Si osservi che i sistemi nei quali $\sum q_i = 0$ sono molto comuni (si pensi alle molecole, ai corpi in condizioni normali quando essi cioè sono neutri) ed è abbastanza frequente che per essi esista un momento di dipolo. In tal caso il potenziale (ed il campo) sono in buona approssimazione quelli che si deducono dalla (110). Nel caso che $\sum q_i = 0$ ed anche $\mathbf{P} = 0$ (come quando la distribuzione, oltre ad essere a carica totale nulla, ha anche un centro di simmetria) non è lecito arrestare lo sviluppo in serie di $1/|\mathbf{R} - \mathbf{d}_i|$ ai termini quadratici e nell'espressione di V_0 possono assumere importanza termini di ordine superiore (di quadrupolo, ecc.).

1.16. AZIONI SU UN DIPOLO IN CAMPO ELETTRICO

A causa della grande importanza di casi pratici nei quali dipoli elettrici si trovano immersi in un campo elettrico esterno vogliamo considerare la sollecitazione alla quale un dipolo di momento \mathbf{p} (essendo $|\mathbf{p}| = q\delta$) è sottoposto in un campo elettrico, di intensità \mathbf{E}_0 .

Determiniamo innanzitutto la energia potenziale che ad esso compete nel campo esterno: le cariche $-q$ e $+q$ (fig. 1.57a) si trovano nei punti a potenziale rispettivamente V_0 e $V_0 + (\partial V_0 / \partial l)\delta$ essendo \mathbf{l} la direzione del dipolo. Si ha quindi

$$(114) \quad \begin{aligned} \mathcal{U} &= -qV_0 + q\left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial l}\delta\right) = p \frac{\partial V_0}{\partial l} = -pE_l = \\ &= -pE_0 \cos\theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 . \end{aligned}$$

L'energia potenziale è zero quando \mathbf{p} è normale ad \mathbf{E}_0 .

*Energia potenziale
di un dipolo immerso
in un campo elettrico
esterno*

$$\mathcal{U} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$$

$$|\mathcal{M}| = qE_0\delta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = pE_0 \sin \alpha$$

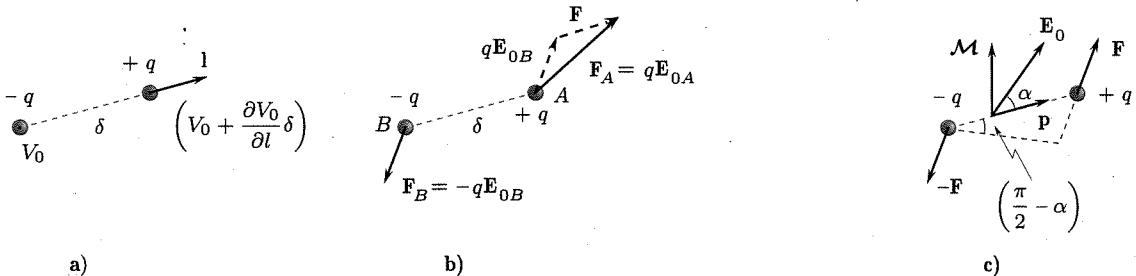


Fig. 1.57

Le forze che agiscono sulle due cariche (\mathbf{F}_A ed \mathbf{F}_B) hanno modulo diverso, tranne nel caso particolare di campo uniforme.

La forza risultante applicata al dipolo (considerato come un sistema meccanico rigido) ha come componenti le derivate cambiate di segno dell'energia potenziale \mathcal{U} ⁽⁴⁶⁾:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\operatorname{grad} \mathcal{U} = \operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0) = \operatorname{grad}(p_x E_{0x} + p_y E_{0y} + p_z E_{0z}) = \\ &= \left(p_x \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \\ (115) \quad &+ \left(p_x \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(p_x \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

L'ultima relazione tiene conto del fatto che le componenti di \mathbf{p} non dipendono dalle coordinate rispetto alle quali le operazioni vanno eseguite. Se inoltre si osserva, scambiando l'ordine di derivazione, che:

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_{0y}}{\partial x}$$

ed analogamente

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial z} = \frac{\partial E_{0z}}{\partial x},$$

si può anche scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left(p_x \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ (116) \quad &+ \left(p_x \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(p_x \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Forza su un dipolo immerso in un campo elettrico esterno

È evidente che la forza \mathbf{F} scompare se il campo \mathbf{E}_0 è uniforme.

⁽⁴⁶⁾ Per uno spostamento virtuale dl , il lavoro $(\mathbf{F} \cdot dl)$ è fatto a spese dell'energia potenziale, la quale quindi varia di $(-\partial \mathcal{U})$.

Il momento risultante delle forze applicate al dipolo calcolato rispetto al punto B (fig. 1.57b), risulta

$$(117) \quad \mathbf{M} = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_A = \mathbf{BA} \times q\mathbf{E}_{0A} = q\mathbf{BA} \times \mathbf{E}_{0A} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{0A}.$$

Nel caso di un campo uniforme la sollecitazione si riduce ad una coppia di momento

$$(118) \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0.$$

Si osservi che questo risultato può ottersi anche partendo dalla considerazione dell'energia potenziale che un dipolo ha in campo elettrico. In un campo uniforme la sollecitazione è una coppia (fig. 1.57c). Il momento è diretto come in figura (normale al piano della coppia e nel verso da vedere la coppia ruotare in senso antiorario). Per ottenere il valore del modulo si osservi che per una rotazione $d\alpha$ del dipolo rispetto al campo, il lavoro compiuto dalle forze del campo ($d\mathcal{L}$) è fatto a spese della energia elettrostatica

$$(119) \quad d\mathcal{L} = -dU$$

Il verso di \mathbf{M} è tale che, avendo indicato con α l'angolo fra \mathbf{E}_0 e \mathbf{p} , un lavoro positivo (cui corrisponde una diminuzione di U) si ha per $d\alpha$ negativa cioè per una diminuzione di α ; si ha cioè

$$d\mathcal{L} = -\mathcal{M}d\alpha = -dU$$

e quindi per il modulo di \mathcal{M}

$$(120) \quad \mathcal{M} = \frac{dU}{d\alpha} = \frac{d(-pE_0 \cos \alpha)}{d\alpha} = pE_0 \sin \alpha.$$

Associando al modulo dato dalla (120), la direzione ed il verso del momento della coppia si ha la (118).

Coppia che agisce su un dipolo immerso in un campo elettrico omogeneo

1.17. I CONDUTTORI NEL CAMPO ELETTRICO

Abbiamo già riconosciuto (par. 1.10) che il campo elettrostatico nell'interno di un conduttore omogeneo ed isotropo⁽⁴⁷⁾ in equilibrio è nullo e che alla superficie esso è diretto normalmente alla superficie stessa. Ciò corrisponde nei riguardi del potenziale a dire che la superficie e tutto il volume occupato da un tale conduttore in condizioni di equilibrio (statiche) sono sempre equipotenziali.

La comparsa di addensamenti di cariche di uno dei due tipi in alcune regioni di un conduttore, anche se originariamente scarico, cioè a carica netta nulla, quando viene posto in un campo elettrico, va considerata come la conseguenza di un riaggiustamento delle cariche sulla superficie del conduttore, reso necessario perché lo spazio occupato dal conduttore divenga equipotenziale (fig. 1.58b); tale spazio infatti non soddisfarebbe tale condizione in assenza delle cariche di induzione (fig. 1.58a).

L'induzione elettrostatica è conseguenza del fatto che le cariche del conduttore si ridistribuiscono in modo da rendere equipotenziale tutto il conduttore

⁽⁴⁷⁾ Se il conduttore non è omogeneo ed isotropo ma è costituito da un sistema complesso, può accadere che sulle cariche elettriche si esercitino anche forze di genere diverso rispetto a quelle coulombiane: per es. forze legate a reazioni chimiche od a diverse situazioni per le cariche libere nelle parti aventi strutture diverse. In tali casi nella situazione statica è presente nell'interno di un conduttore un campo elettrico che equilibra le azioni di altra natura che si esercitano sulle cariche. Un tipico esempio di tali situazioni è quello di un corpo conduttore fatto da due parti di metalli diversi saldati fra loro (effetto Volta).

La superficie e tutto il volume occupato da un conduttore in condizioni di equilibrio statico sono sempre equipotenziali

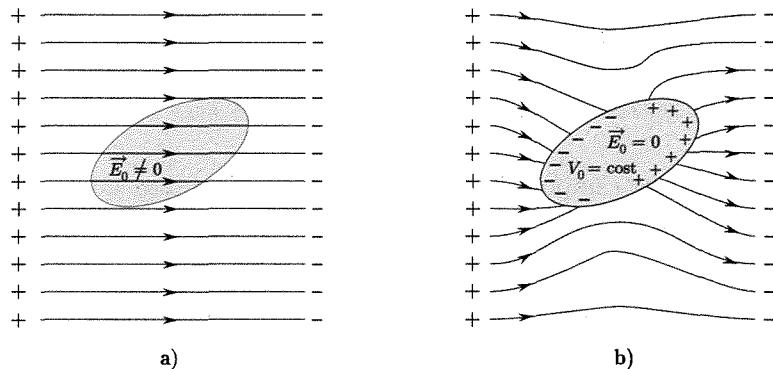


Fig. 1.58

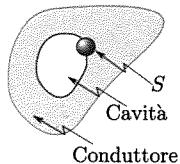


Fig. 1.59

È bene osservare che qualora il conduttore abbia nel suo interno una cavità (fig. 1.59) e nello spazio vuoto di tale cavità non vi siano cariche elettriche, il potenziale in tutta la cavità è lo stesso di quello del conduttore e sulla superficie limite della cavità (interna al conduttore) non vi sono cariche. Si noti infatti che lo spazio occupato dal conduttore è equipotenziale e quindi la superficie limite della cavità è equipotenziale: di conseguenza il potenziale nel volume della cavità deve avere ovunque lo stesso valore altrimenti vi sarebbero in tale spazio dei punti di potenziale massimo (o minimo) (e quindi un campo elettrico) pur non essendovi cariche elettriche, il che non è possibile⁽⁴⁸⁾. Se allora si considera una superficie chiusa (S) che racchiuda uno spazio in parte formato dal conduttore ed in parte dalla cavità, e si applica ad essa il teorema di Gauss si trova che essendo ovunque il campo elettrico nullo la carica racchiusa deve essere nulla. Si giunge così alla conclusione che sulla superficie limite della cavità interna al conduttore non vi sono cariche. Di conseguenza quando si ha un conduttore in equilibrio in un campo elettrico si può trascurare di considerare se esso abbia o meno delle crepe interne.

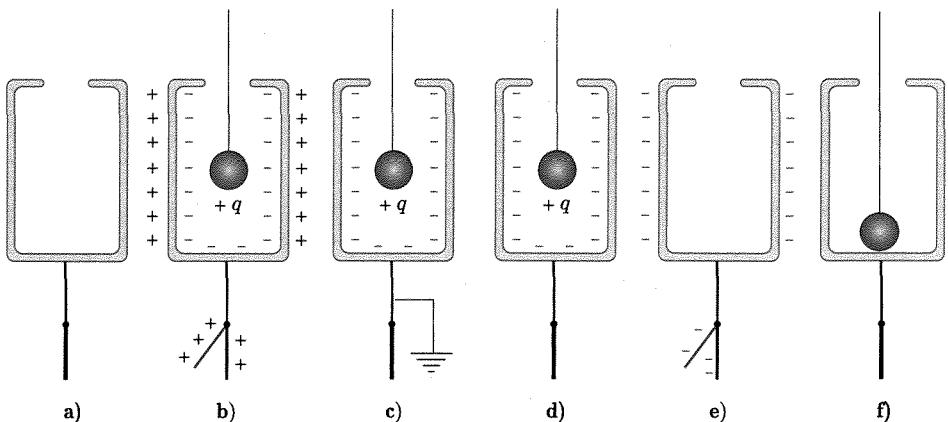


Fig. 1.60

Pozzo di Faraday

È interessante considerare il caso di un conduttore cilindrico cavo come in figura 1.60 (pozzo di Faraday), munito di una piccola apertura attraverso cui si possano introdurre piccoli oggetti quali sfere metalliche. Il cilindro sia inizialmente scarico, come si può controllare collegandolo ad un elettroscopio (fig. 1.60a). Se si introduce una sfera avente la carica (per esempio) $+q$, per il fenomeno della induzione si ha una carica negativa sulla parete interna della cavità ed una carica

⁽⁴⁸⁾ Vedi anche paragrafo 1.25; applicazione del teorema di esistenza ed unicità per la soluzione dell'equazione di Laplace.

positiva su quella esterna (fig. 1.60b). È possibile stabilire con semplici esperienze (facendo uso di un elettroscopio) che le cariche totali sulle superfici interna ed esterna sono rispettivamente pari a $-q$ e $+q$. Se per esempio noi collegiamo la superficie esterna del cilindro con la terra (fig. 160c) le cariche di induzione positive si portano a distanza infinita e non sono più localizzate sul cilindro; se in seguito si toglie il collegamento con la terra, la superficie esterna e l'elettroscopio restano privi di carica (in eccesso) (fig. 160d), ma se si estraе la sfera carica dal cilindro (fig. 160 e) si trova che sulla superficie esterna del cilindro si viene a disporre la carica negativa precedentemente localizzata sulla superficie interna (in presenza della carica $+q$ nell'interno); se infine si pongono a contatto cilindro e sfera carica (fig. 160f) e poi si separano, si trova che entrambi i corpi risultano scarichi: la carica quindi spostata per induzione sulla superficie interna nella situazione di fig. 1.60b è pari a $-q$ e di conseguenza quella sulla superficie esterna $+q$.

Sulla base di quanto ora detto si comprende che se nell'interno di un pozzo di Faraday viene introdotto un corpo conduttore con la carica $+q$ e questo viene posto a contatto con la superficie interna del pozzo, si finisce per avere la carica $+q$ sull'esterno del pozzo⁽⁴⁹⁾. Una tale circostanza viene usata spesso per le misure di cariche per mezzo di un elettroscopio collegato al pozzo.

Si osservi che il trasferimento al cilindro della carica posseduta inizialmente dal corpo inserito nel pozzo e posto a contatto con la superficie interna, non è affatto influenzato da una eventuale carica già esistente sulla superficie esterna del pozzo. Per tale ragione i pozzi di Faraday sono molto utili nel campo delle misure, come collettori di carica.

Il fenomeno dell'induzione elettrostatica rende notevolmente complicati i problemi elettostatici quando corpi conduttori (carichi o no) sono presenti. Il calcolo del potenziale nei punti dello spazio in questi casi non è così semplice come in quelli nei quali la distribuzione di cariche in una regione è determinata esclusivamente dalle cariche ivi situate e non è influenzata da cariche o corpi neutri posti in altre regioni.

Torneremo in seguito a considerare le difficoltà del problema generale. Vogliamo ora invece svolgere alcune considerazioni intese ad illustrare alcune caratteristiche del comportamento dei conduttori in elettrostatica.

Si supponga di avere un certo numero di conduttori isolati in una regione dello spazio circondata ancora da un altro conduttore; nella figura 1.61 supponiamo per semplicità che i conduttori isolati siano $n = 3$ oltre al conduttore che costituisce l'involucro del sistema.

Conviene naturalmente prendere un punto di questo ultimo conduttore come punto di riferimento per la definizione del potenziale: il potenziale di questo conduttore viene quindi posto pari a zero⁽⁵⁰⁾. Cominciamo col supporre che venga data una carica q_1 al primo conduttore mentre $q_2 = q_3 = 0$; è questa la situazione illustrata in figura 1.61. Sui conduttori 2, 3 e sull'involucro si determinano cariche indotte ed il campo che si stabilisce è naturalmente strettamente dipendente da queste, oltre che da q_1 .

Il campo nell'interno dell'involucro è rappresentato da linee di forza che hanno origine dalle cariche date al conduttore 1 (supposte positive)

Induzione elettrostatica

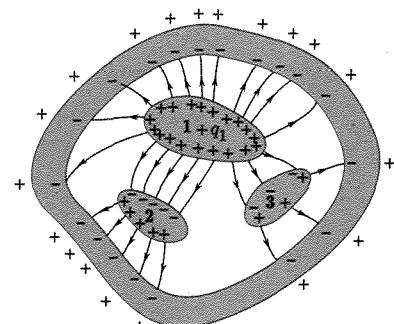


Fig. 1.61

⁽⁴⁹⁾ Si osservi che al momento in cui il corpo carico tocca la superficie interna del pozzo si stabilisce un equilibrio che è quello di un conduttore con cavità sicché la carica netta (q) deve trovarsi sulla superficie esterna.

⁽⁵⁰⁾ Le funzioni del conduttore che circonda il sistema sono quelle di rendere il sistema isolato e stabilire il potenziale di riferimento. Nei casi pratici può anche essere sostituito da una sfera conduttrice cava immaginaria a raggio infinito (il che equivale a porre zero il potenziale in punti all'infinito) o, talvolta, dalla terra.

o dalle cariche di induzione positive e termine sulle cariche di induzione negative sulla superficie dei vari conduttori. La configurazione delle linee nelle condizioni specificate dipende esclusivamente dalla geometria del sistema; la distribuzione del campo ed i valori della intensità possono essere rappresentati mediante le linee di forza usando il criterio di Faraday: le linee di forza vengono segnate in numero tale che nell'intorno di un punto P il numero di linee di forza attraverso l'unità di superficie normale alle linee di forza stesse è proporzionale ad $\mathbf{E}_0(P)$. I potenziali assunti dai conduttori 1, 2, 3 per una certa carica q_1 ($q_2 = q_3 = 0$) siano V_{01}, V_{02}, V_{03} .

Siccome il campo in ciascun punto $[\mathbf{E}_0(P)]$ dipende dal punto, dalla configurazione geometrica e dalla carica q_1 data al primo conduttore, si comprende che se si varia q_1 sempre essendo $q_2 = q_3 = 0$, i potenziali V_{01}, V_{02}, V_{03} cambiano proporzionalmente: la forma delle linee di forza del campo non varia; cambia solo la loro densità al pari della densità di carica sui conduttori. Questa circostanza in ultima analisi è una conseguenza del principio di sovrapposizione: gli effetti di una carica $q_1 = q'_1 + q''_1$ sono pari a quelli dovuti alla sovrapposizione degli effetti prodotti indipendentemente da q'_1 e q''_1 .

Le stesse considerazioni possono essere ripetute per i casi in cui venga data una carica solo al secondo conduttore ($q_2 \neq 0; q_1 = q_3 = 0$) o solo al terzo conduttore ($q_3 \neq 0; q_1 = q_2 = 0$). Nel caso generale in cui le cariche diverse da zero sono date a tutti i conduttori, si ha, per la validità del principio di sovrapposizione, che il potenziale assunto da ciascun conduttore può essere espresso mediante la somma di quelli che sarebbero assunti se solo uno dei conduttori fosse carico, cioè come combinazione lineare della forma

$$(121) \quad \begin{aligned} V_{01} &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + p_{13}q_3 \\ V_{02} &= p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q_3 \\ V_{03} &= p_{31}q_1 + p_{32}q_2 + p_{33}q_3 \end{aligned}$$

Nel caso generale di n conduttori

Coefficienti di potenziale (122)
$$V_{0i} = \sum_1^n p_{ij}q_j .$$

Il coefficiente p_{ij} rappresenta il potenziale al quale si porta il conduttore i quando sul conduttore j viene posta la carica positiva unitaria; i vari p_{ij} sono positivi e prendono il nome di coefficienti di potenziale. Questi coefficienti rispecchiano esclusivamente le caratteristiche geometriche della configurazione dei conduttori. Tenendo presente questa natura dei coefficienti p_{ij} è abbastanza semplice intuire una proprietà che può essere dimostrata con rigore (teorema di reciprocità): il potenziale $V_{0i} = p_{ij}q_j$ preso dal conduttore i quando la carica q_j viene data al conduttore j essendo nulle le cariche su tutti gli altri conduttori del sistema è pari al potenziale $V_{0j} = p_{ji}q_i$ che il conduttore j assume se una carica $q_j = q_i$ viene data al conduttore i essendo nulle le cariche su gli altri conduttori. Ciò si esprime con la condizione

$$(123) \quad p_{ij} = p_{ji}$$

Le (121) e (122) con la condizione (123) costituiscono un sistema di equazioni lineari algebriche che possono essere risolte con la regola di

Cramer per dare le cariche in funzione dei potenziali

$$(124) \quad q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} V_{0j}$$

Se si considera il determinante

$$(125) \quad \Delta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

i coefficienti c_{ij} sono i minori di questo determinante divisi per Δ . La soluzione del sistema (121) [o (122)] esiste essendo $\Delta > 0$ poiché i coefficienti di potenziale sono positivi: ciò è anche evidente per ragioni fisiche.

Per comprendere il significato dei coefficienti c_{ij} riprendiamo il caso di tre conduttori e supponiamo (fig. 1.62) di avere collegato i conduttori 2 e 3 al conduttore di riferimento (posti a terra se questa è il conduttore di riferimento). In tal caso

$$(126) \quad \begin{aligned} q_2 &= c_{21} V_{01} \\ q_3 &= c_{31} V_{01} \end{aligned}$$

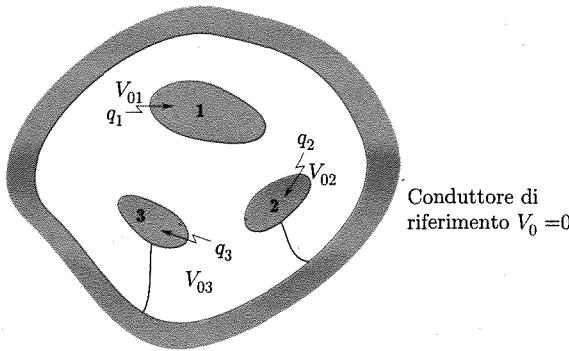


Fig. 1.62

In genere

$$(127) \quad c_{ij} = \frac{q_i}{V_{0j}}$$

cioè il coefficiente c_{ij} è pari al rapporto fra la carica presa dal conduttore i ed il potenziale del conduttore j quando tutti i conduttori tranne j sono collegati al conduttore di riferimento (per es. posti a terra)⁽⁵¹⁾. I coefficienti c_{ij} per $i \neq j$ prendono il nome di coefficienti di induzione: essi sono negativi (o zero) perché q_i è sempre di segno contrario alla carica q_j che crea V_{0j} . Il coefficiente c_{ii} rappresenta il rapporto fra la carica che si trova sul conduttore i ed il potenziale dello stesso conduttore quando tutti gli altri conduttori sono collegati al conduttore di riferimento (per es. posti a terra): esso si chiama coefficiente di capacità.

Coefficienti di induzione

Coefficiente di capacità

⁽⁵¹⁾ Oppure pari alla carica presa dal conduttore i quando il conduttore j è al potenziale +1, essendo tutti gli altri conduttori, tranne j , collegati al conduttore di riferimento (posti a terra).

1.18. CAPACITÀ E CONDENSATORI

Nel caso che si abbia un unico conduttore isolato, oltre naturalmente al corpo il cui potenziale viene preso come riferimento (zero) (per es. la terra), si ha che il potenziale al quale il conduttore si porta è proporzionale alla carica netta che si trova su di esso (e viceversa). Si definisce come capacità del conduttore il coefficiente

Capacità di un conduttore

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}$$



$$q, V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Fig. 1.63

La capacità di una sfera isolata è $C = 4\pi\epsilon_0 R$

Il farad è una unità di misura molto grande

Condensatore e sua capacità

(128)

$$C = \frac{q}{V}.$$

Essa rappresenta la quantità di elettricità che viene immagazzinata sul conduttore quando il suo potenziale viene innalzato di una unità.

La capacità nel sistema SI si misura in coulomb/volt: a tale unità è stato dato il nome di farad (simbolo: F).

Consideriamo per esempio (fig. 1.63) una sfera (conduttrice) isolata di raggio R alla quale sia stata data la carica q e supponiamo che il potenziale sia posto zero all'infinito.

Il potenziale ad una distanza r dal centro della sfera è

(129)

$$V_0(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e quindi il potenziale della sfera (essendo pari al potenziale della sfera di raggio R)

(130)

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Ne segue

(131)

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Se per es. $R = 1 \text{ m}$, $C = 4\pi \times 8,859 \cdot 10^{-12} \times 1 = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 11 \text{ pF}$.

L'unità farad è molto grande e spesso si usano i suoi sottomultipli: il microfarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) ed il picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

Nel caso che si abbiano più conduttori presenti non è possibile parlare di capacità di ciascuno di essi perché, come si è visto, il potenziale di ciascun conduttore dipende non solo dalla carica posta su di esso ma anche dalle cariche sui rimanenti conduttori. V'è tuttavia un caso molto importante ed è quello in cui i conduttori siano solo due (1, 2) e le cariche su di essi siano uguali ed opposte ($q_1 = q$; $q_2 = -q$). In tal caso è perfettamente definito il coefficiente

(132)

$$C = \frac{q}{V_{01} - V_{02}}.$$

Si osservi che in questo caso tutte le linee di forza elettriche hanno origine su un conduttore e termine sull'altro⁽⁵²⁾. Un sistema di questo genere si dice che realizza il fenomeno dell'induzione completa.

Il sistema dei due conduttori prende il nome di condensatore ed il coefficiente C di sua capacità. Il nome di condensatore è dovuto al fatto che, come vedremo in seguito, l'aggiunta del secondo conduttore nelle condizioni specificate, consente di aumentare l'energia immagazzinata nel

(52) Si dice che non v'è *flusso disperso*.

campo elettrico a parità di differenza di potenziale. Si osservi che una maniera semplice per realizzare un dispositivo che soddisfi le condizioni poste è ottenuta (fig. 1.64) circondando il conduttore 1 con un involucro conduttore 2 che viene collegato ad un conduttore molto esteso al potenziale di riferimento (per es. terra). La capacità del condensatore è il coefficiente di capacità del conduttore interno (isolato).

Consideriamo alcuni casi interessanti.

a. Condensatore sferico (fig. 1.65)

Al conduttore interno (raggio r_1) sia data la carica $+q$, il conduttore esterno sia posto a terra.

Applicando la legge di Gauss si ha fra le due sfere

$$(133) \quad E_0 = -\frac{dV_0}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$(134) \quad V_{01} - V_{02} = \int_{V_{02}}^{V_{01}} dV_0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Si ha quindi

$$(135) \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{\epsilon_0 \sqrt{S_1 S_2}}{d}$$

essendo S_1 e S_2 le superfici delle due sfere e $d = r_2 - r_1$ la loro distanza.

b. Condensatore cilindrico

I due conduttori (armature) del condensatore siano due cilindri coassiali. Se la loro lunghezza è grande rispetto al raggio, e se la differenza fra i raggi è piccola rispetto ai raggi stessi, si può con buona approssimazione ammettere che il campo sia normale all'asse in tutto lo spazio fra le armature; la deviazione delle linee di forza alle estremità dei cilindri rispetto all'andamento nel resto del condensatore può essere trascurato (fig. 1.66).

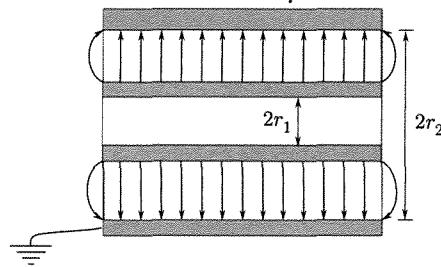
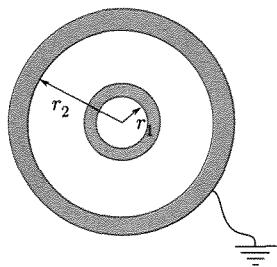


Fig. 1.66

Indicando allora con $+q_l$ la carica su l'unità di lunghezza del cilindro interno, il campo alla distanza r dall'asse, nello spazio fra le armature, risulta

$$(136) \quad E_0(r) = -\frac{dV_0}{dr} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

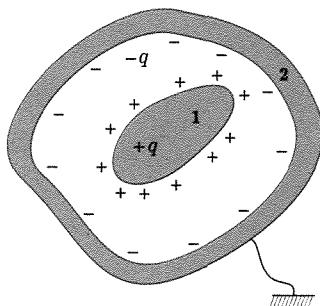


Fig. 1.64

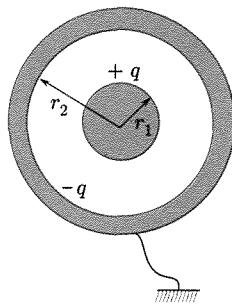


Fig. 1.65

La capacità di un condensatore sferico è

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Si ha quindi

$$(137) \quad V_{01} - V_{02} = \int_{V_{02}}^{V_{01}} dV_0 = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_2}{r_1}$$

La capacità di un condensatore cilindrico è

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

e se l è la lunghezza assiale ($q = lq_l$)

$$(138) \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

c. Condensatore piano

Questo condensatore è formato da due piastre metalliche (superficie S) tenute alla distanza d . La figura 1.67 mostra l'andamento delle linee di forza. Come si vede v'è in realtà un addensamento delle linee di forza (e delle cariche) agli orli delle armature ed addirittura vi sono alcune cariche sulle superfici esterne (non affacciate) delle piastre. Se tuttavia d è piccolo rispetto alle dimensioni lineari delle piastre, questi effetti agli orli si possono con buona approssimazione trascurare e si può ritenere che la carica q su ciascuna armatura si distribuisca sulle facce affacciate con densità $\sigma = q/S$: il sistema equivale allora ad un doppio strato piano. Il campo esiste solo fra le armature, è normale ad esse ed uniforme (par. 1.10g):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

e

$$(139) \quad V_{01} - V_{02} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}.$$

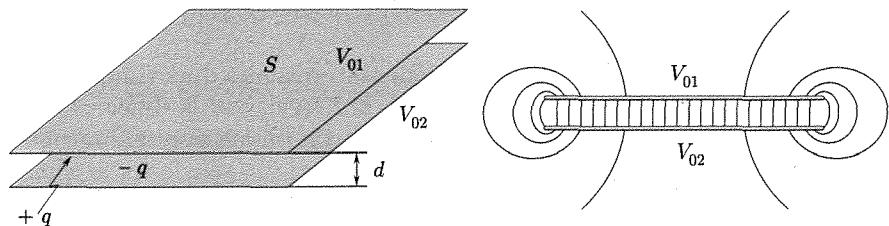


Fig. 1.67

La capacità di un condensatore piano è

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Si ha quindi

$$(140) \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Questa formula si può ottenere da quella del condensatore sferico (135) facendo crescere i raggi delle sfere, mantenendo $r_2 - r_1 = d$ costante. Le superfici delle sfere S_1 e S_2 finiscono per tendere allo stesso valore mentre il condensatore sferico si trasforma in quello piano.

La (140) mostra come la capacità di un condensatore piano possa essere aumentata avvicinando le armature ed aumentando la loro estensione.

I condensatori sono dispositivi molto interessanti sia dal punto di vista elettrostatico sia per le proprietà che essi presentano quando la differenza di potenziale alle loro armature cambia. Vedremo in seguito che essi costituiscono importanti elementi di circuiti in condizioni non stazionarie.

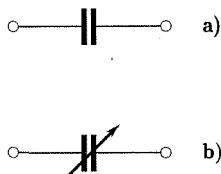


Fig. 1.68

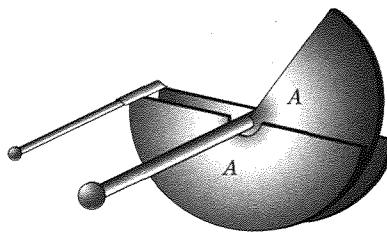


Fig. 1.69

Essi sono indicati nei circuiti con il simbolo di fig. 1.68a (condensatore fisso) o di fig. 1.68b (condensatore variabile). In quest'ultimo caso il dispositivo è realizzato in modo che si possa variare qualche parametro che determina la sua capacità: nel caso di condensatori piani può essere per esempio cambiata la estensione delle armature affacciate spostando una piastra rispetto all'altra (fig. 1.69).

I condensatori, considerati come dispositivi elettrostatici caratterizzati da una propria capacità, possono essere collegati fra loro in due modi principali: collegamento in parallelo e collegamento in serie. Desideriamo qui stabilire la capacità equivalente a due o più condensatori di data capacità quando sono collegati fra loro.

1. Collegamento in parallelo

Si abbiano due condensatori di capacità C_1 e C_2 ed essi siano collegati in modo che ciascuna armatura di un condensatore sia collegata ad una diversa armatura dell'altro (fig. 1.70a). Per determinare la capacità equivalente si immagini di fissare la differenza di potenziale fra le armature per es. collegando il complesso agli estremi di un generatore (per es. pila). Le quantità di elettricità sulle armature dei due condensatori sono

$$q_1 = C_1(V_{01} - V_{02}) \quad q_2 = C_2(V_{01} - V_{02}).$$

Il condensatore equivalente deve essere tale da tenere sulle sue armature la carica $q = q_1 + q_2$ quando ad esse si applica la differenza di potenziale $(V_{01} - V_{02})$. Si ha per la sua capacità

$$(141) \quad C = \frac{q}{(V_{01} - V_{02})} = \frac{q_1 + q_2}{(V_{01} - V_{02})} = C_1 + C_2.$$

Condensatori in parallelo $C = \sum_i C_i$

La capacità di più condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle capacità dei singoli condensatori. In particolare se si collegano in parallelo n condensatori uguali la capacità è n volte quella del singolo condensatore. Questo collegamento riesce utile quindi quando si vogliono realizzare capacità elevate. Si noti che ciascun condensatore ha fra le armature la stessa differenza di potenziale.

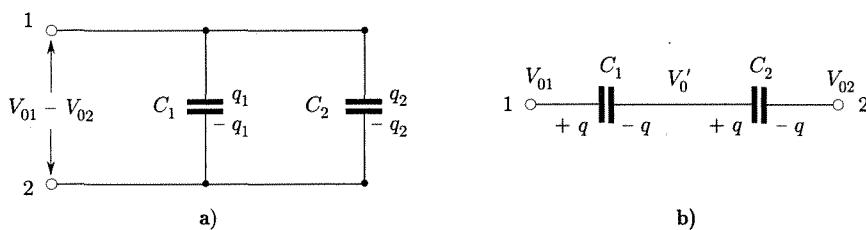


Fig. 1.70

2. Collegamento in serie

I due condensatori di capacità C_1 e C_2 siano collegati come in figura 1.70b. La differenza di potenziale è applicata ad una armatura del primo condensatore e ad una armatura del secondo, essendo le altre due armature collegate fra loro⁽⁵³⁾. Si osservi che il complesso delle due armature collegate fra loro si comporta come un unico conduttore allungato le cui estremità sono le armature stesse, è evidente quindi che la carica q sulle quattro armature è, in valore assoluto, la medesima. Inoltre il potenziale V'_0 al quale si portano le due armature collegate avrà un valore intermedio fra V_{01} e V_{02} . Si può scrivere

$$V_{01} - V'_0 = \frac{q}{C_1} \quad V'_0 - V_{02} = \frac{q}{C_2}$$

Per il condensatore equivalente

$$\frac{V_{01} - V_{02}}{q} = \frac{1}{C} = \frac{V_{01} - V'_0}{q} + \frac{V'_0 - V_{02}}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

In genere per n condensatori in serie

Condensatori in serie

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (142)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_1^n \frac{1}{C_i}$$

l'inverso della capacità equivalente è la somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori, cioè

$$(143) \quad C = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{C_i}}.$$

Si osservi che la differenza di potenziale ($V_{01} - V_{02}$) si suddivide fra i vari condensatori; se i condensatori sono uguali ($V_{01} - V_{02}$) si divide in parti uguali. Il collegamento serie è appunto utile quando si vuole che la d.d.p. alle armature dei singoli condensatori non superi certi valori: ciò è reso necessario per evitare particolari processi distruttivi (scariche) che possono avvenire (specie se v'è un mezzo materiale fra le armature) quando il campo fra le armature raggiunge certi valori.

1.19. ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE. ENERGIA NEL CAMPO ELETTROSTATICO

In un condensatore carico, cariche elettriche opposte si trovano sulle armature ed esercitano mutue azioni; a questo stato di cose, come in genere per i sistemi di cariche in elettrostatica (par. 1.5), corrisponde una energia potenziale. L'energia immagazzinata in un condensatore può essere resa evidente durante la scarica quando fenomeni termici, luminosi, sonori possono manifestarsi.

⁽⁵³⁾ Nel collegamento in serie di più condensatori ciascuna armatura di un condensatore (tranne una per quelli estremi) è collegata all'armatura adiacente del condensatore successivo.

Il calcolo dell'energia potenziale immagazzinata (\mathcal{U}) quando la differenza di potenziale fra le armature ha un certo valore $V_0 (= V_{01} - V_{02})$ può essere fatto immaginando di partire da condensatore scarico e portare gradatamente quantità di elettricità elementari dq dalla armatura negativa a quella positiva contro le forze del campo. Il lavoro speso per caricare il condensatore corrisponde alla energia immagazzinata. Se ad un certo istante la differenza di potenziale fra le armature è V'_0 (e la carica presente sulle armature $q_{V'_0}$) il lavoro fatto per aumentare la carica di dq è

$$(144) \quad dL = V'_0 dq = \frac{1}{C} q_{V'_0} dq.$$

Essendo infatti la carica trasportata infinitesima, si può ritenere che il potenziale (V'_0) si mantenga costante durante l'operazione.

Il lavoro fatto per caricare il condensatore fino ad avere la carica

$$q = CV_0$$

sulle armature, è

$$(145) \quad L = \mathcal{U} = \frac{1}{C} \int_0^q q_{V'_0} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q V_0 = \frac{1}{2} C V_0^2.$$

*Energia immagazzinata
in un condensatore
 $\mathcal{U} = \frac{1}{2} C V_0^2$*

Questa energia potenziale è associata al campo elettrico e risiede in esso. È interessante determinare anche la densità di energia (w). Ciò può farsi facilmente se si considera il caso del condensatore piano: il campo è uniforme ed è limitato nel volume Sd compreso fra le armature. Si ha

$$(146) \quad w = \frac{\mathcal{U}}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{qV_0}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{\sigma S \cdot E_0 d}{Sd} = \frac{1}{2} \sigma E_0.$$

Ricordando che (par. 1.18c)

$$\sigma = \epsilon_0 E_0$$

si ha

$$(147) \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left(\frac{\text{joule}}{\text{m}^3} \right).$$

*Densità di energia
del campo elettrico*

Questa relazione per la densità di energia del campo elettrico è stata determinata per il caso particolare dello spazio nell'interno di un condensatore piano. Essa tuttavia è generale e vale anche se il campo E_0 varia da punto a punto [vedi paragrafo successivo, formula (158)].

1.20. ENERGIA POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE. DENSITÀ DI ENERGIA NEL CAMPO ELETROSTATICO

Riprendiamo in considerazione l'argomento già esaminato al paragrafo 1.5. Per un sistema di N cariche puntiformi, l'energia potenziale (pari al lavoro speso per realizzare la configurazione partendo dalle cariche a distanza relativa infinita) è stato trovato essere [equazione (19)]

$$(148) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{1,j}^N q_j \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{r_{ij}} \right].$$

Vogliamo ora trovare un'altra espressione che fa uso dei potenziali. Si osservi che l'espressione fra parentesi nella (148) rappresenta [relazione (80)] il potenziale V_{0j} creato nel posto ove si trova q_j dalle cariche q_i costituenti il sistema con eccezione della q_j .

Si ha quindi

$$(149) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_{0i}.$$

Se le cariche sono distribuite con continuità in una regione, la sommatoria si trasforma in integrale. Se si ha una distribuzione nello spazio con densità $\rho(x, y, z)$

$$(150) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V_0 d\tau$$

essendo τ il volume della regione di carica spaziale. Se la distribuzione è su superfici

$$(151) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_S \sigma V_0 dS.$$

Si osservi che nelle espressioni (150), (151), la specificazione che V_0 è dovuto a tutte le altre cariche tranne q_i non occorre, dato che la carica ($\rho d\tau$ o σdS) è infinitesima: ciò significa che V_0 è il potenziale nel punto (x, y, z) dovuto a tutte le cariche

È facile vedere come la (151) applicata ad un condensatore conduca alla (145). Consideriamo il caso di un condensatore piano.

In tal caso $\sigma = \text{cost}$; inoltre la distribuzione esiste sulle due armature di superficie S ; per ciascuna di esse il potenziale è costante (V_{01} e V_{02}). La (151) dà

$$(152) \quad \begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \left(\int_{S_1} \sigma V_{01} dS + \int_{S_2} (-\sigma) V_{02} dS \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma V_{01} S - \sigma V_{02} S) = \frac{1}{2} \sigma S (V_{01} - V_{02}) = \frac{1}{2} q V_0 \end{aligned}$$

coincidente con la (145).

La (150) può scriversi usando la (48)

$$(153) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} V_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_0 d\tau.$$

D'altra parte poiché⁽⁵⁴⁾

$$(154) \quad \operatorname{div}(V_0 \mathbf{E}_0) = V_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 \cdot \operatorname{grad} V_0$$

si ha

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} \operatorname{div}(V_0 \mathbf{E}_0) d\tau - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} \mathbf{E}_0 \cdot \operatorname{grad} V_0 d\tau$$

ed usando il teorema della divergenza [eq. (39)]

$$(155) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_s V_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int E_0^2 d\tau \right]$$

essendo τ il volume finito della regione di carica spaziale ed S la sua superficie limite.

⁽⁵⁴⁾ Vedi appendice II.

Se si immagina di far crescere gradatamente il volume τ fino ad invadere tutto lo spazio in cui esiste il campo \mathbf{E}_0 creato dalle cariche, l'integrale di superficie diviene trascurabile⁽⁵⁵⁾. Si ha quindi

$$(156) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E_0^2 d\tau$$

essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio in cui esiste il campo.

L'energia elettrostatica si trova ripartita nel campo in modo che nel volume $d\tau$ nell'intorno di un punto ce ne sia

$$(157) \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 d\tau$$

cioè con una densità, punto per punto, pari a

$$(158) \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2.$$

*Densità di energia
del campo elettrico*

Questa formula è in accordo con quella (147) trovata nel caso particolare dello spazio nell'interno di un condensatore piano.

■ 1.21. DENSITÀ DI CARICA SULLA SUPERFICIE DEI CONDUTTORI

Quando cariche elettriche vengono date ad un conduttore isolato esse si distribuiscono sulla superficie esterna. È questa una conseguenza della natura repulsiva delle forze coulombiane fra cariche dello stesso tipo: le cariche date al conduttore infatti, essendo libere di muoversi, tendono ad allontanarsi il più possibile fra loro pur rimanendo nel conduttore e ciò le porta sulla superficie. La densità con cui esse si distribuiscono è naturalmente costante solo in caso di simmetria sferica del sistema, cioè nel caso di sfere isolate. Nel caso di conduttori di forma diversa, le cariche si distribuiscono in una maniera che dipende punto per punto dalla curvatura della superficie nel punto. È più precisamente possibile stabilire che la carica data ad un conduttore di forma qualsiasi si distribuisce con una densità proporzionale alla curvatura. Per giustificare, sia pure approssimativamente, questa conclusione si consideri il conduttore rappresentato in figura 1.71 formato da due sfere di raggi R_1 e R_2 ($> R_1$) unite fra loro da un lungo filo metallico. Sia data una carica Q al conduttore: esso si porta ad un potenziale V_0 e la carica si localizza essenzialmente sulle due sfere ($q_1 + q_2 = Q$) poiché è del tutto trascurabile quella sul filo; inoltre le distribuzioni sulle sfere (data la grande distanza fra loro) sono praticamente quelle che si avrebbero se ciascuna sfera fosse isolata ed al potenziale V_0 . Se si ricorda che il potenziale di una sfera di raggio R isolata sulla quale si trovi la carica q è

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

⁽⁵⁵⁾ Al crescere di τ aumentano le distanze, r , dei punti di S dalle cariche. Poiché V_0 varia come $1/r$, $|\mathbf{E}_0|$ come $1/r^2$ ed S come r^2 , il flusso di $V_0 \mathbf{E}_0$ attraverso S finisce con decrescere come $1/r$ e diviene trascurabile per S molto distante dalle cariche.

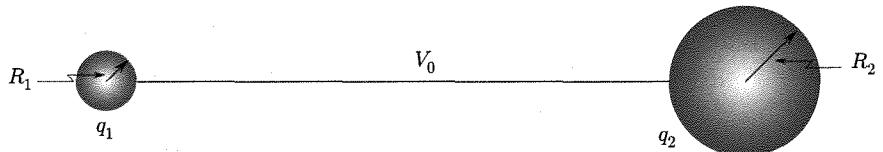


Fig. 1.71

si può scrivere

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

cioè

$$(159) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Le densità di carica su ciascuna delle due sfere è con buona approssimazione uniforme (sempre a causa della lunghezza del filo per cui è come se ciascuna sfera fosse isolata) e vale

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}.$$

Si ha quindi

$$(160) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

cioè le densità risultano inversamente proporzionali ai raggi di curvatura.

Questa conclusione è valida anche punto per punto nel caso di superficie qualsiasi dei conduttori. Concentrazioni di cariche si hanno quindi dove il raggio di curvatura della superficie assume valori molto piccoli, come per esempio in corrispondenza di asperità o punte. Il campo elettrico in prossimità della superficie del conduttore [eq. (52)] in corrispondenza a tali protuberanze assume valori molto superiori a quelli che si hanno nelle vicinanze di altre zone dello stesso conduttore. La figura 1.72 mostra le linee di forza e le superfici equipotenziali per un corpo carico, avente forma allungata. Le superfici equipotenziali a grande distanza dal corpo approssimano la forma sferica, quale si avrebbe dappertutto qualora il conduttore fosse sferico. Man mano che ci si avvicina al corpo tendono a prendere la forma del corpo stesso. Come si vede esse si addensano in corrispondenza alla regione a raggio di curvatura più piccolo. Le linee di forza sono qui più fitte, cioè l'intensità del campo è maggiore.

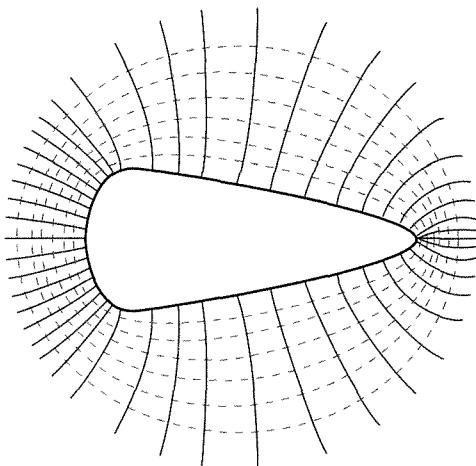


Fig. 1.72

1.22. FORZE SUI CONDUTTORI CARICHI

Vogliamo in questo paragrafo accennare alle sollecitazioni cui sono sottoposti conduttori che si trovano in un campo elettrico.

Cominciamo con il considerare un conduttore isolato sul quale vengano poste delle cariche elettriche sicché si crea un campo elettrico. Poniamo l'attenzione su un elemento di superficie dS (fig. 1.73) in corrispon-

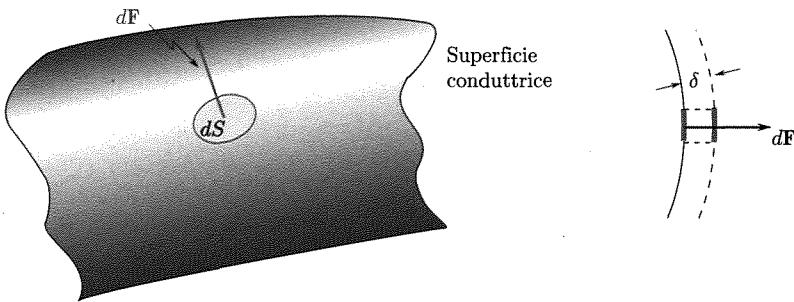


Fig. 1.73

denza al quale il campo elettrico sia E_0 : la direzione di E_0 è normale a dS . Indichiamo con dF la forza (incognita) che sollecita dS : l'origine di questa forza sta nella repulsione che si esercita fra le cariche dello stesso segno che si trovano sulla superficie del conduttore e per tale ragione essa è diretta normalmente a dS (se avesse una componente tangenziale le cariche si muoverebbero). Se immaginiamo uno spostamento $\delta \mathbf{n}$ (virtuale) della superficie dS verso l'esterno lungo la normale, l'energia totale del campo elettrico diminuisce della quantità inizialmente contenuta nel volume $dS \delta$ (dopo lo spostamento tale volume è occupato dal conduttore e quindi il campo in esso diviene nullo)

$$\frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 dS \delta.$$

Questa diminuzione di energia corrisponde al lavoro fatto dalla forza agente su dS durante lo spostamento

$$(161) \quad d\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{n} = dF \delta = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 dS \delta.$$

Si ha quindi per la forza che si esercita su l'unità di superficie (normale a S)

$$(162) \quad \frac{dF}{dS} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

*Forza per unità
di superficie
su un conduttore*

È questa la forza che sollecita un conduttore che viene caricato: l'equilibrio del corpo richiede che altre forze (atomiche, molecolari, di gravità o esercitate da altri corpi) agiscano contemporaneamente sul conduttore ed impediscano alla repulsione fra le cariche di rompere il corpo in più parti. La stessa espressione (162) vale per la forza che si esercita sulla superficie di un conduttore quando questo viene introdotto in un campo elettrico creato da altre cariche.

In molti problemi si è interessati alle forze mutue che si esercitano fra coppie di conduttori che fanno parte di un sistema di corpi conduttori carichi. Questi problemi si trattano sempre esprimendo la energia del sistema [equazione(149)] in funzione delle coordinate geometriche che specificano la configurazione del sistema e ricordando che le forze possono essere espresse mediante le derivate spaziali dell'energia (cambiate di segno). Ciò equivale a dire che se si immagina che una delle coordinate configurazionali abbia una piccola variazione (virtuale) la variazione corrispondente dell'energia del sistema fornisce il lavoro (cambiato di segno) compiuto dalle forze applicate al punto del sistema che è spostato.

Forza che si esercita fra le piastre di un condensatore piano

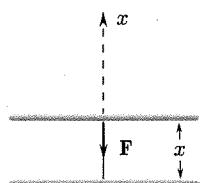


Fig. 1.74

Calcolo per il caso che la carica del condensatore resti costante

Calcolo per il caso che il potenziale del condensatore resti costante

È importante in questi casi specificare come si comportino durante gli spostamenti (che causano le variazioni di energia) le cariche ed i potenziali dei vari conduttori.

Vogliamo illustrare il metodo di calcolo delle forze, considerando il caso di un sistema di due soli conduttori i quali, ancora per semplicità, siano piani e costituiscano un condensatore (fig. 1.74): una delle armature sia fissa ad $x = 0$ e cerchiamo la forza che sollecita la seconda armatura a distanza x (la forza sulla prima armatura è uguale ed opposta). In questo caso la energia potenziale si scrive

$$(163) \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} QV_0 = \frac{x}{2\epsilon_0 S} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x} V_0^2$$

essendo V_0 la differenza di potenziale fra le armature.

Una prima maniera di operare è quella nella quale le cariche sui conduttori restino costanti mentre la configurazione viene alterata (virtualmente): ciò corrisponde al caso in cui le armature del condensatore dopo aver ricevuto la carica Q sono state disconnesse dal generatore. La variazione di energia per una piccola variazione di x è legata alla forza che si esercita sulla armatura che si muove nella direzione x da

$$(164) \quad F_x = F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V_0^2.$$

È questa naturalmente una forza attrattiva (diretta in verso opposto a quello delle x).

È possibile peraltro far sì che durante la variazione della configurazione del sistema i potenziali dei conduttori restino costanti: ciò richiede che le cariche sulle armature varino con la distanza (x) fra le armature stesse. Si possono realizzare le condizioni volute mantenendo durante lo spostamento le armature collegate con un generatore; tale generatore ha il compito di inviare sulle armature o ritirare da esse cariche nelle quantità richieste per mantenere costante, alle varie distanze fra i conduttori, il loro potenziale. Ciò porta di conseguenza che la variazione di energia del sistema deve tener conto del flusso di energia da o verso il generatore. La variazione dell'energia elettrica totale del sistema in questo caso cioè consta di due parti:

a. variazione di energia elettrostatica⁽⁵⁶⁾ nel condensatore per effetto della variazione di x a $V_0 = \text{cost}$

$$(165) \quad dU_{\text{el}} = \frac{1}{2} V_0 dQ = \frac{1}{2} V_0^2 dC = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{dC}{dx} dx = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V_0^2 dx$$

b. variazione dell'energia del generatore; quando questo fornisce la quantità dQ di elettricità a $V_0 = \text{cost}$ la sua energia varia (si riduce) di

$$(166) \quad dU_{\text{gen}} = -V_0 dQ.$$

⁽⁵⁶⁾ Se ci si limitasse a considerare solo questa energia per il calcolo di F si avrebbe un risultato sbagliato; la forza che si esercita sulla armatura nella posizione x risulterebbe

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V_0^2$$

avrebbe cioè lo stesso modulo della forza nel caso precedente ($Q = \text{cost}$) ma sarebbe diretta in verso opposto, sarebbe cioè diretta nel verso positivo delle x (forza repulsiva), è evidente da ciò che il risultato sarebbe errato).

La variazione totale di energia elettrica è

$$(167) \quad dU_{\text{tot}} = dU_{\text{gen}} + dU_{\text{el}} = -\frac{1}{2}V_0 dQ = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V_0^2 dx.$$

Essa risulta pari alla sola energia elettrostatica (165) cambiata di segno.

Si ha quindi

$$(168) \quad F_x = F = -\frac{\partial U_{\text{tot}}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{x^2} V_0^2.$$

Si giunge a una espressione uguale a quella valida per il primo caso. Si faccia attenzione al fatto che la forza da noi considerata è quella che si esercita sul conduttore.

Quella che deve essere applicata per contrastare la F e tenere il conduttore fermo è uguale ed opposta.

1.23. STRUMENTI ELETTROSTATICI

Le azioni fra conduttori carichi, esaminate nel paragrafo precedente, si prestano alla realizzazione di strumenti che consentono sia di individuare lo stato di elettrizzazione dei corpi [elettroskopì (vedi par. 1.2)] sia di determinare quantitativamente le differenze di potenziale fra conduttori. Descriviamo brevemente innanzitutto l'elettrometro assoluto⁽⁵⁷⁾ di Kelvin.

In esso le azioni fra conduttori carichi vengono confrontate con forze pesi al fine di determinare la differenza di potenziale fra essi. Lo schema è dato in figura 1.75. Un condensatore piano ha una armatura a forma di disco (P_1) sostenuta da una sbarra isolante (quarzo); tale armatura può essere mossa su e giù. L'altra armatura P_2 è un piatto diviso in due parti: una corona fissa ed un disco centrale (superficie A) sostenuto da un sistema a molle; queste a loro volta sono collegate ad una sbarra di quarzo che, anche essa, può muoversi su e giù: le due parti del piatto P_2 sono elettricamente collegate fra loro ed in genere messe a terra⁽⁵⁸⁾.

Il disco mobile di P_2 porta un indice che può naturalmente spostarsi di fronte ad un segno di riferimento posto sulla cassa dell'apparecchio.

Lo strumento viene usato nella seguente maniera. Le armature P_1 e P_2 del condensatore vengono dapprima collegate fra loro (e la terra) ed una massa M viene posta al centro del disco mobile di P_2 ; la sbarra Q_2 viene spostata finché l'indice collegato con il disco mobile sia in corrispondenza al segno di riferimento: il disco è allora sullo stesso piano della corona circolare.

La massa M viene tolta; evidentemente il disco viene sollevato dalle molle. Si disconnetta ora P_1 da P_2 e si colleghi a P_1 il corpo il cui potenziale rispetto a terra si vuol determinare. In tali condizioni una forza attrattiva si esercita sul disco mobile. Spostando il disco P_1 (mediante Q_1), cioè variando d , si può riportare il disco mobile

Elettrometro assoluto
di Kelvin

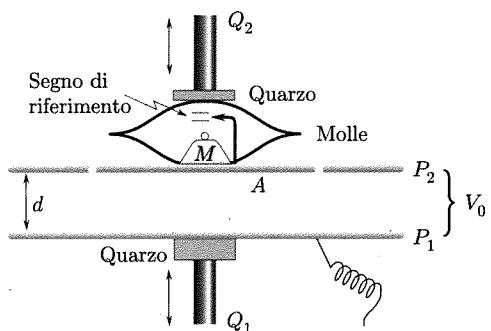


Fig. 1.75

⁽⁵⁷⁾ Assoluto perché determina una grandezza fisica per mezzo della misura di grandezze non omogenee con la prima (vol. I, Introduzione, par. 7).

⁽⁵⁸⁾ La corona circolare prende il nome di *anello di guardia*. La disposizione ha il fine di garantire che nella regione del disco centrale (che è quella che qui interessa) il campo elettrico nel condensatore sia uniforme, eliminando le disuniformità che si hanno ai bordi di un condensatore piano.

di P_2 nella posizione di allineamento con la corona esterna: il raggiungimento di tale condizione si ha quando l'indice ritorna in corrispondenza al segno di riferimento. La forza sull'armatura mobile vale allora Mg e si ha in accordo con la (168)

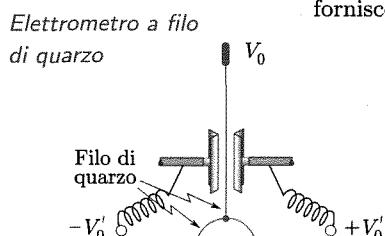
$$(169) \quad Mg = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{AV_0^2}{d^2}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2Mg}{\epsilon_0 A}} d.$$

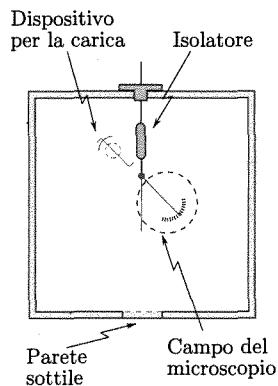
È questo uno strumento che va bene per misurare potenziali piuttosto elevati ($> 10^3$ V).

Per differenze di potenziale più piccole esiste un numero molto grande di voltmetri elettrostatici, tutti basati sulle azioni fra conduttori carichi: le disposizioni geometriche sono tuttavia molto più complesse di quelle dell'elettrometro di Kelvin e di solito essi richiedono una taratura preventiva effettuata con sorgenti che forniscono differenze di potenziale note.

La figura 1.76 indica un elettrometro a fibra di quarzo: un sottile filo di quarzo rivestito di uno strato conduttore è teso lungo la linea centrale dello spazio fra due elettrodi a spigolo: tali elettrodi si trovano ai potenziali $+V'_0$, $-V'_0$, sicché il filo è in equilibrio a potenziale zero. La fibra di quarzo, fissa ad un estremo, è collegata meccanicamente all'altro ad un arco, ancora di filo di quarzo, che agisce come una molla. Se ora si applica al conduttore filiforme il potenziale $+V_0$ esso prende una carica positiva ed è attratto dall'elettrodo a potenziale $-V'_0$. La deformazione del filo è contrastata dalla reazione elastica della sospensione inferiore. Si raggiunge una posizione di equilibrio per la fibra, che dipende da V_0 . Questo elettrometro va bene per potenziali dell'ordine di 1 volt.



Elettrometro a foglia



Elettrometro a quadranti

La figura 1.77 indica un elettrometro a foglia. Un conduttore a forma di sbarra porta su un lato distesa una sottile foglia metallica: l'insieme è disposto, isolato, in una scatola metallica (messa a terra). Il conduttore centrale può essere collegato con il corpo di cui si vuole determinare il potenziale rispetto a terra. Le cariche su tale conduttore e quelle sull'interno dell'involucro metallico fanno deviare la foglia di un angolo che può essere determinato con precisione mediante una osservazione al microscopio e che dipende dal valore del potenziale in misura: la scala non è lineare giacché la capacità del sistema (equivalente ad un condensatore) varia con la posizione della foglia. La sensibilità può essere molto elevata giacché la capacità è dell'ordine di 1 pF: le quantità di elettricità che vengono prelevate dai conduttori il cui potenziale si vuole determinare sono molto piccole.

Questi strumenti a foglia sono molto usati per misure di radioattività; in tal caso l'elettroscopio viene caricato ed in seguito isolato dalla sorgente di differenza di potenziale; se nell'interno della scatola avvengono processi di ionizzazione prodotti da emanazioni di sostanze radioattive e quindi ioni di cariche opposte vengono creati nel gas, accade che gli ioni vengono raccolti dagli elettrodi e riducono la carica dell'elettroscopio. Di conseguenza le deviazioni della foglia diminuisce fornendo indicazioni sull'entità dei processi di decadimento radioattivo. La scatola di protezione dello elettroscopio ha di solito una zona a parete (metallica) molto sottile per facilitare l'ingresso di radiazioni da materiali radioattivi.

Un ultimo strumento elettrostatico che vogliamo descrivere è l'elettrometro a quadranti (fig. 1.78). Un basso barattolo di rame è tagliato in quattro quadranti uguali mediante due piani assiali perpendicolari fra loro. I quadranti sono sostenuti da colonnine di quarzo; i quadranti diametralmente opposti sono collegati elettricamente fra loro. Nell'interno della scatola è sospeso un ago metallico a forma di doppio ventaglio e molto leggero: il filo di sospensione in quarzo (rivestito di un strato conduttore) fornisce una coppia di richiamo verso la posizione di riposo che (tramite la sospensione del filo) è aggiustata in modo che l'asse dei ventagli piani dell'ago cada sul piano assiale del barattolo fra coppie di quadranti. Il filo di sospensione porta anche uno specchietto che deviando un fascio di luce serve a rivelare la posizione dell'ago. Un involucro metallico fornisce uno schermaggio elettrostatico allo strumento. I potenziali delle due coppie di quadranti e dell'ago siano rispettivamente V_{01} , V_{02} , V_{03} . L'energia potenziale in funzione dell'angolo di

deviazione dell'ago dalla posizione di zero, avanti indicata, può essere scritta con esattezza sulla base delle considerazioni del paragrafo 1.20 [eq. (149)]. Con buona approssimazione si può ritenere che la energia elettrostatica possa essere posta nella forma

$$(170) \quad U = \frac{1}{2}C_1(V_{03} - V_{01})^2 + \frac{1}{2}C_2(V_{03} - V_{02})^2 + U_0$$

essendo C_1 e C_2 le capacità fra ciascuna coppia di quadranti e l'ago, U_0 è un termine che si ammette non vari con θ : esso corrisponde alla energia legata alla capacità formata con l'involucro, o comunque a capacità non portate direttamente in conto.

L'uso dello strumento viene fatto mantenendo le sorgenti di differenza di potenziale collegate⁽⁵⁹⁾. La coppia che agisce sull'ago in corrispondenza alla deviazione θ ha il momento

$$(171) \quad -\left(-\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2}(V_{03} - V_{01})^2 \frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \frac{1}{2}(V_{03} - V_{02})^2 \frac{\partial C_2}{\partial \theta}.$$

La forma dell'ago (ventagli a settore circolare) fa sì che C_1 e C_2 siano funzioni lineari di θ

$$(172) \quad C_{1,2} = a \pm b\theta$$

e quindi

$$(173) \quad \frac{\partial C_1}{\partial \theta} = -\frac{\partial C_2}{\partial \theta} = b$$

Perché si abbia equilibrio il momento della coppia che si esercita per le azioni elettriche sull'ago deve essere uguale al momento ($K\theta$) della reazione elastica. Indicando ancora con θ l'angolo per cui si ha l'equilibrio

$$(174) \quad K\theta = \frac{b}{2}[(V_{03} - V_{01})^2 - (V_{03} - V_{02})^2]$$

cioè

$$(175) \quad \theta = A(V_{02} - V_{01}) \left\{ V_{03} - \frac{1}{2}(V_{02} + V_{01}) \right\}$$

essendo A una costante.

L'elettrometro è in genere usato in uno dei due modi seguenti.

- a. Metodo idiosistatico. In questo caso l'ago è collegato ad uno dei quadranti e la differenza di potenziale da misurare è applicata fra le due coppie di quadranti ($V_{03} = V_{02}$). Si ha allora

$$(176) \quad \theta = \frac{1}{2}A(V_{02} - V_{01})^2$$

e la scala è quadratica. La misura risulta indipendente dal segno di $(V_{02} - V_{01})$.

- b. Metodo eterostatico. All'ago viene dato un potenziale costante che è grande rispetto a V_{01} e V_{02} (circa 100 V). La differenza di potenziale è applicata fra i quadranti ($V_{02} - V_{01}$). In tali condizioni [$V_{03} \gg (V_{01} + V_{02})$] si può scrivere con buona approssimazione

$$(177) \quad \theta = AV_{03}(V_{02} - V_{01}) = A'(V_{02} - V_{01}).$$

Le deviazioni sono proporzionali alle differenze di potenziale in misura; la costante A' è in genere determinata mediante taratura usando una d.d.p. nota.

Questo strumento può essere usato per misurare anche d.d.p. piccole, dell'ordine di 10^{-2} V.

Se mediante paragone con condensatori di capacità nota si determina la sua capacità, lo strumento può essere usato anche per la misura di quantità di elettricità.

Esso può anche essere usato per misurare la rapidità con cui cariche vengono portate sulle sue armature finché tali rapidità sono molto piccole: esso cioè consente la misura di correnti di carica molto piccole (dell'ordine di 10^{-17} coulomb/sec = $= 10^{-17}$ ampère). In queste applicazioni occorre che l'isolamento delle armature sia molto ben curato.

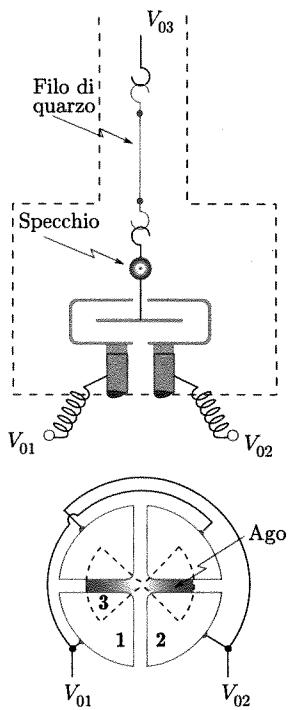


Fig. 1.78

⁽⁵⁹⁾ Per la variazione dell'energia totale occorre considerare non solo la energia elettrostatica ma anche quella fornita dalla sorgente (vedi par. 1.22). L'energia elettrica totale è pari a quella elettrostatica cambiata di segno.

■ 1.24. ESPERIENZA DI MILLIKAN. CARICA DELL'ELETTRONE

Vogliamo ora descrivere la esperienza fatta da R.A. Millikan (1911) per riconoscere la granularità delle cariche elettriche e determinare il valore della carica elettronica (e del quanto di elettricità) e .

Lo schema dell'esperienza è indicato nella figura 1.79a. Due lastre metalliche piane sono disposte orizzontalmente in aria, e quando vengono collegate ad una batteria (d.d.p. V_0) servono a creare un campo elettrico uniforme. Precauzioni sono prese per evitare che correnti d'aria giungano fra le armature e disturbino l'esperienza.

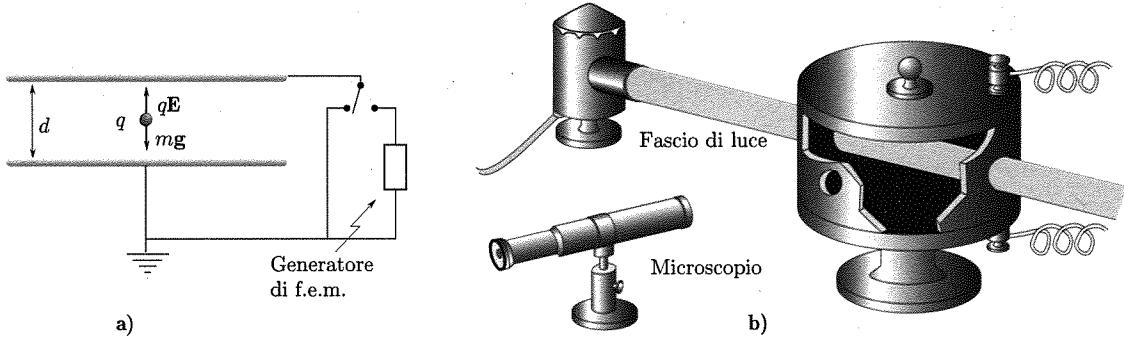


Fig. 1.79

Nello spazio fra le armature vengono introdotte alcune piccolissime gocce d'olio: esse sono ottenute con uno spruzzatore ed alcune di esse risultano caricate; l'elettrizzazione è prodotta per strofinio all'atto della fuoriuscita dallo spruzzatore. Lo spazio fra le armature è illuminato da un fascio di luce; un microscopio è disposto in modo da potere seguire il moto di una singola particella, su cui si fissa l'attenzione: essa appare luminosa su un fondo scuro (fig. 1.79b).

Vediamo le caratteristiche del moto di una di tali gocce sia quando nessuna d.d.p. è applicata fra le armature, sia quando una d.d.p. viene applicata. La densità dell'olio sia ρ ed il raggio della goccia sferica sia a : la massa risulta $m = 4/3\pi a^3 \rho$. In assenza di campo elettrico fra le armature, la goccia cade verticalmente sotto l'azione delle forze di gravità, della spinta di Archimede e della resistenza del mezzo ($-bv$, essendo v il modulo della velocità e b una costante). Il moto (vol. I, cap. 2, par. 2.17) è dapprima accelerato e diviene infine uniforme, con velocità limite v_0 che soddisfa la relazione

$$(178) \quad \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_{\text{aria}} g - bv_0 = 0.$$

Se si introduce una massa efficace della sfera $\bar{m} = 4/3\pi a^3 (\rho - \rho_{\text{aria}})$ si ha per la velocità limite di caduta

$$(179) \quad v_0 = \frac{\bar{m}g}{b}.$$

Nel caso che venga applicato il campo elettrico (E_0), una nuova forza, anche essa verticale, agisce sulla goccia se questa è carica

$$(180) \quad F_E = qE_0 = q \frac{V_0}{d}.$$

Si sia fissata l'attenzione su una goccia per la quale si verifichi che in presenza di E_0 essa si muova verso l'alto.

Anche in questo caso il moto finisce per essere uniforme con una velocità limite (v_E) data da

$$(181) \quad qE_0 - \bar{m}g - bv_E = 0$$

$$(182) \quad v_E = \frac{qE_0 - \bar{m}g}{b}$$

Dalle (179) e (182) si ottiene

$$(183) \quad \frac{v_0}{v_E} = \frac{\bar{m}g}{qE_0 - \bar{m}g}$$

$$(184) \quad q = \frac{\bar{m}g}{E_0} \left(\frac{v_0 + v_E}{v_0} \right)$$

Da questa relazione \bar{m} può essere eliminata usando la (179) e la legge di Stokes che esprime, per le gocce sferiche che si muovono a piccole velocità in un fluido avente coefficiente di viscosità η , il valore di b :

$$(185) \quad b = 6\pi\eta a.$$

Si ha infatti

$$(186) \quad v_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{(\rho - \rho_{\text{aria}})g}{6\pi\eta a} = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\eta} g(\rho - \rho_{\text{aria}})$$

$$(187) \quad a = \left(\frac{9}{2}\eta \right)^{1/2} \frac{v_0^{1/2}}{g^{1/2}(\rho - \rho_{\text{aria}})^{1/2}}$$

$$(188) \quad \bar{m} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9}{2}\eta \right)^{3/2} \frac{v_0^{3/2}}{g^{3/2}(\rho - \rho_{\text{aria}})^{1/2}}$$

e quindi

$$(189) \quad q = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{9}{2}\eta \right)^{3/2} \left(\frac{1}{g(\rho - \rho_{\text{aria}})} \right)^{1/2} (v_0 + v_E) v_0^{1/2} \frac{d}{V_0}$$

Se si pone l'attenzione su una particolare goccia per la quale accade che il moto in presenza di campo elettrico avvenga verso l'alto, la (189) consente la determinazione per essa delle velocità limiti in presenza ed in assenza di campo elettrico e quindi la valutazione di q . La misura della velocità limite viene fatta misurando il tempo impiegato dalla goccia a passare attraverso fili di riferimento nel campo del microscopio.

Se nella regione fra le piastre agisce una causa ionizzante (per es. raggi X) che spezza le molecole di aria producendo pesanti ioni positivi ed elettroni liberi, può accadere che la goccia d'olio cambi la sua carica per la cattura di qualcuno di questi ioni.

L'esperienza di Millikan consiste nel seguire per parecchie ore (4-5) una singola goccia facendola muovere su e giù fra le armature in presenza di una causa ionizzante e controllando v_0 e v_E . Si trova che v_0 resta costante mentre v_E varia discontinuamente.

Dall'analisi dei risultati si trova che le corrispondenti variazioni di q non sono mai più piccole di una determinata quantità e sono sempre multiple di tale quantità. Il valore di questa variazione più piccola di carica è la carica elettronica.

Con esperienze di questo genere si determina

$$(190) \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}.$$

■ 1.25. IL PROBLEMA GENERALE DELL'ELETTROSTATICA. LE LEGGI FONDAMENTALI DEL CAMPO ELETTROSTATICO. L'EQUAZIONE DI POISSON E L'EQUAZIONE DI LAPLACE

Abbiamo precedentemente sottolineato il fatto che l'intera base della elettrostatica sta nella legge di Coulomb che esprime la forza fra cariche puntiformi. Abbiamo tuttavia visto come la considerazione di numerosi aspetti e circostanze sia grandemente semplificata mediante la introduzione di concetti e grandezze le cui proprietà sono, naturalmente, immediate conseguenze delle caratteristiche della forza coulombiana. Le grandezze introdotte sono due: una vettoriale, l'intensità del campo elettrico,

e l'altra scalare, il potenziale. La considerazione del campo elettrico consente di suddividere il problema della determinazione delle interazioni fra corpi carichi in due parti: una distribuzione di cariche crea un campo elettrico, di intensità $\mathbf{E}_0(P)$, che esercita su una carica puntiforme q posta in P la forza (20)

$$[20] \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}_0(P).$$

Le forze su corpi carichi possono essere dedotte.

Per il campo elettrico sono state stabilite due relazioni che rispecchiano le proprietà fondamentali (della legge di Coulomb) del campo elettrostatico [eq. (75) e (48)]

*Leggi fondamentali
del campo elettrostatico*

$$[75] \quad \text{rot } \mathbf{E}_0 = 0$$

$$[48] \quad \text{div } \mathbf{E}_0 = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Esse sono indicate come le leggi fondamentali del campo elettrostatico.

La seconda grandezza che è stata introdotta è scalare ed essendo direttamente legata al campo è molto utile per il calcolo del campo stesso nel caso che le distribuzioni di carica non siano molto semplici. Ricordiamo infatti che il potenziale elettrostatico è legato al vettore \mathbf{E}_0 dalla relazione (64)

$$[64] \quad \mathbf{E}_0 = -\text{grad } V_0(x, y, z).$$

I numerosi esempi esaminati hanno mostrato l'utilità del concetto di funzione potenziale.

Vogliamo ora completare ciò che è stato finora detto con delle considerazioni di carattere generale sulla maniera in cui possono presentarsi i problemi elettrostatici e sui criteri con i quali conviene procedere per la loro soluzione.

*Problema generale
dell'elettrostatica*

Il problema elettrostatico nella sua generalità si presenta nella seguente maniera. È nota la configurazione geometrica delle regioni in cui cariche sono distribuite (nello spazio, su superfici, in punti) e la posizione di corpi conduttori (eventualmente a carica netta nulla): si desidera determinare punto per punto il potenziale nello spazio, da cui dedurre mediante la (64) il campo e di conseguenza le forze su corpi carichi che venissero introdotti nel campo. Occorre osservare che i dati elettrici per le distribuzioni di cariche che creano il campo possono essere forniti in due maniere diverse: a) possono essere specificate punto per punto le cariche o le densità di carica sulle superfici conduttrici; b) possono essere specificati i potenziali nelle regioni ove le distribuzioni di cariche esistono.

Nel primo caso, quando cioè sono note le distribuzioni di carica, noi abbiamo già a disposizione la soluzione del problema. Ricordiamo infatti che [eq. (81) e (82)] in tal caso

$$(191) \quad V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z')}{r} d\tau + \int_S \frac{\sigma(x', y', z')}{r} dS \right]$$

avendo indicato con x', y', z' le coordinate dei punti ove esistono cariche (volume τ e superficie S). Si osservi che nella (191) è fatto uso della scelta

del punto all'infinito come punto di riferimento per la funzione potenziale, cioè si è assunto che V_0 vada a zero all'infinito come $1/r$ (e quindi E_0 vada a zero all'infinito come $1/r^2$).

La soluzione del problema matematico rappresentato dalla (191) può divenire di difficoltà enorme e spesso anche in casi relativamente semplici non può essere raggiunta: si pensi alla complessità delle distribuzioni prodotte dai processi di induzione elettrostatica nel caso che conduttori (anche carichi) siano presenti.

È perciò molto utile, almeno per alcuni casi, seguire un altro metodo che in sostanza trae profitto dalle proprietà del campo elettrostatico espresse dalle (75) e (48) come legami fra i valori che le componenti hanno in punti vicini. Se si elimina E_0 fra (48) e (64) si ha

$$(192) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} V_0 = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Svolgendo le operazioni per il calcolo della divergenza relative al vettore $\operatorname{grad} V_0$ si ottiene

$$(193) \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Usando l'abbreviazione

$$(194) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

per il cosiddetto operatore Laplaciano⁽⁶⁰⁾, la equazione si scrive più brevemente

$$(195) \quad \nabla^2 V_0 = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

Equazione di Poisson

La equazione (193) o (195) è nota con il nome di equazione di Poisson.

Essa è una equazione differenziale lineare del secondo ordine alle derivate parziali che deve essere soddisfatta dalla funzione potenziale.

Si osservi che la (195) presenta in maniera matematicamente alternativa lo stesso complesso di proprietà che erano state prese in considerazione per giungere alla (191) e quindi la (191), se si fa l'ipotesi che V_0 vada a zero all'infinito come $1/r$, è la soluzione della (195) per il caso in cui si conosca punto per punto la distribuzione di carica. Il vantaggio offerto dalla (195) è quello di potere usare importanti conclusioni che si traggono dal suo studio matematico⁽⁶¹⁾ per trovare la soluzione del problema elettrostatico quando non si sappia calcolare direttamente la (191).

Una importante indicazione matematica nei riguardi della (195) e della corrispondente equazione omogenea di cui si parlerà presto, è quella che una volta specificate le condizioni ai limiti come ai casi a o b del problema generale dell'elettrostatica ed ammesso che V_0 vada a zero all'infinito come $1/r$, la soluzione dell'equazione differenziale e del problema esiste ed è unica (teorema di esistenza e di unicità). Noi non possiamo indulgere su questi importanti aspetti la cui trattazione è fatta in testi

*Teorema di esistenza
e unicità*

⁽⁶⁰⁾ Se si considera $\nabla \cdot \nabla$ si ottiene appunto ∇^2 .

⁽⁶¹⁾ Vedi A. Ghizzetti, F. Rosati, *Analisi Matematica*, Masson, Milano, 1996 (distribuzione esclusiva Zanichelli).

d'analisi⁽⁶²⁾ e di fisica matematica, ma vogliamo giustificare in maniera fisicamente intuitiva l'indicazione fornita dal teorema di esistenza e di unicità. Se si ha una certa disposizione geometrica di cariche e conduttori è abbastanza evidente che le cariche sui conduttori si aggiusteranno in una certa maniera e l'equilibrio sarà raggiunto in modo che le forze sulle cariche non abbiano più a spostarle; l'equilibrio sarà certamente raggiunto e ad esso corrisponderà una certa distribuzione di cariche sui conduttori, certi potenziali su di essi e quindi un valore determinato del campo in ogni punto. Se pertanto si ammette, come sembra plausibile, che la (195) rappresenti bene lo stato delle cose, la sua soluzione nel caso concreto particolare deve fornire la ben precisa distribuzione reale.

Vogliamo ora dare alcune sommarie indicazioni sulla maniera di usare la (195) per trattare i problemi di elettrostatica. Consideriamo il caso in cui le cariche si trovino su conduttori e le condizioni ai limiti specificate consistano nel conoscere la posizione dei conduttori ed il loro potenziale. Il problema sarà risolto se si riesce a trovare la distribuzione del potenziale in tutti i punti dello spazio al di fuori dei conduttori: allora infatti si può determinare E_0 mediante la (64) e, considerando i valori di E_0 in prossimità delle superfici conduttrici, si può determinare punto per punto $\sigma = \epsilon_0 E_0$ e le distribuzioni di carica sui conduttori stessi. Per trovare la distribuzione del potenziale che soddisfi la (195) si osservi che la (195) nei punti al di fuori delle distribuzioni di cariche, cioè al di fuori dei conduttori nel nostro caso, si riduce a:

Equazione di Laplace

$$(196) \quad \nabla^2 V_0 = 0.$$

Questa equazione è nota con il nome di equazione di Laplace.

Il problema si presenta quindi nella seguente maniera: cercare una soluzione della (196) che assuma i valori noti per V_0 in corrispondenza a certe superfici limiti che sono le superfici dei conduttori. È possibile vedere che se si ammette che V_0 vada a zero all'infinito come $1/r$ tale soluzione esiste ed è unica (problema di Dirichlet).

Problema di Dirichlet

Problema di Neumann

Nel caso invece che nel problema elettrostatico sia nota la distribuzione di cariche sui conduttori, la soluzione del problema (problema di Neumann) mediante le (195) o (196) può essere ottenuta mediante la soluzione di due problemi di Dirichlet nella seguente maniera. Essendo nota la posizione dei conduttori si assegnino arbitrariamente ad essi i potenziali V'_{0i} e risolvendo un primo problema di Dirichlet si calcolino le corrispondenti cariche q'_i . Ciò significa avere determinato i coefficienti c_{ij} nelle relazioni (117)

$$q'_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} V'_{0j}.$$

Questo sistema di equazioni algebriche lineari può essere trasformato per esprimere i potenziali ai quali si portano i conduttori quando date cariche vengono date ad essi [relazioni (115)]

$$V_{0i} = \sum_{j=1}^N p_{ij} q_j.$$

⁽⁶²⁾ Vedi A. Ghizzetti, F. Rosati, *op. cit.*

È possibile così ottenere i potenziali V_{0i} per le cariche effettive del problema assegnato. Conoscendo ora i vari V_{0i} è possibile, mediante la soluzione di un nuovo problema di Dirichlet, trovare la risposta voluta.

Non è nostra intenzione fermarci a trattare le maniere con cui l'equazione di Laplace può essere risolta per varie condizioni ai limiti. Ciò può essere trovato in corsi più avanzati di fisica matematica; nel seguito troveremo, a volte, situazioni concrete e vedremo come per esse le equazioni di Poisson e di Laplace vadano risolte.

Va osservato qui che molto spesso la trattazione matematica esatta dei problemi diviene molto complessa o addirittura impossibile⁽⁶³⁾; ciò porta di conseguenza che assumono importanza ed interesse alcuni metodi pratici di soluzione approssimata. Uno di essi, che si basa su un particolare artificio, è indicato nel paragrafo successivo. Un altro metodo parte dalla osservazione che l'equazione di Laplace si incontra nella trattazione di vari processi fisici: flusso termico in condizioni stazionarie, flusso irrotazionale di un fluido, flusso di una corrente elettrica stazionaria in un mezzo esteso, deformazione di una membrana elastica. È possibile allora sviluppare analogie fra il caso elettrostatico in oggetto ed un opportuno modello fisico sul quale fare misure delle grandezze analoghe a quelle elettriche che si vogliono determinare.

Un metodo abbastanza usato è quello della vasca elettrolitica basato sulla analogia fra linee di forza e superfici equipotenziali del campo elettrostatico nello spazio fra conduttori a diverso potenziale⁽⁶⁴⁾ da una parte e linee di corrente e distribuzione del potenziale in un mezzo conduttore omogeneo ed uniforme fra elettrodi conformati e disposti come per il caso elettrostatico dall'altra⁽⁶⁵⁾. Il rilievo della distribuzione del potenziale nel secondo caso, fatta mediante sonde che vengono sparse in vari punti del mezzo conduttore liquido (soluzione elettrolitica), consente di stabilire la posizione delle superfici equipotenziali nel flusso di corrente: tali superfici sono le medesime nel caso elettrostatico. La figura 1.80 mostra lo schema della disposizione in un caso nel quale si voglia determinare la distribuzione del potenziale ed il campo elettrostatico fra due elettrodi cilindrici di sezione normale comunque complessa (fig. 1.80a) e di lunghezza molto grande: il problema è in questo caso bidimensionale perché ciò che interessa è la distribuzione in un piano qualsiasi normale all'asse del cilindro. Le figure 1.80b e c mostrano in sezione e pianta la vasca

Metodi di soluzione approssimati

⁽⁶³⁾ Il caso di un conduttore carico di forma elissoidale ed i casi limiti di ago o disco possono essere risolti in termini di funzioni note. Già casi di conduttori di forma non particolarmente complicata, quale quello di un conduttore a forma di cilindro pieno di lunghezza finita, presentano tali difficoltà analitiche che la soluzione va fatta approssimativamente con metodi numerici.

⁽⁶⁴⁾ Nel vuoto od in un dielettrico omogeneo.

⁽⁶⁵⁾ La analogia è basata sul fatto che per il flusso di corrente elettrica in un mezzo omogeneo (conducibilità σ) fra elettrodi tenuti a potenziali diversi nel caso di correnti continue (o, con buona approssimazione variabile a bassa frequenza, per es. 1 kHz) valgono le seguenti relazioni per la densità di corrente j (A/m^2 , vedi cap. 3)

$$(197) \quad \operatorname{div} j = 0$$

$$(198) \quad j = \sigma E.$$

Si ha inoltre che, sempre per fenomeni stazionari (e con buona approssimazione variabili a bassa frequenza), vale la relazione

$$(199) \quad \operatorname{rot} E = 0.$$

Dalla (198) si vede che le linee del vettore j (linee di corrente) sono anche linee di E , mentre la (197) [con l'aiuto della (198)] e la (199) mostrano che in questo caso valgono per E le stesse relazioni del campo elettrostatico e quindi l'equazione di Laplace nello spazio fra gli elettrodi. Vedi cap. 3, par. 3.4.

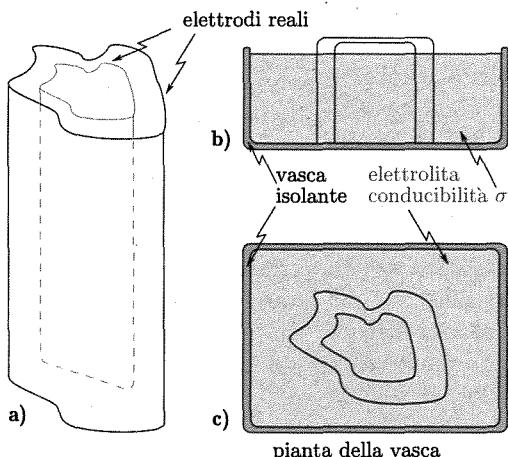


Fig. 1.80

fatto che la forza fra cariche puntiformi dipende dal quadrato della distanza, è nulla la forza risultante dalle azioni esercitate dai vari elementi in cui l'involucro può essere diviso, su una carica puntiforme posta nell'interno della sfera.

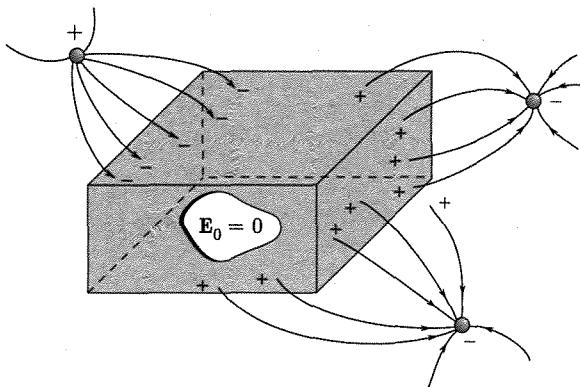


Fig. 1.81

condizione al limite in questo caso è quella che il potenziale abbia il valore costante (V_0)₁ sulla superficie limite di questo spazio (superficie interna del conduttore). Una soluzione ovvia dell'equazione di Laplace è quella per cui il potenziale sia costante e pari a (V_0)₁ in tutto lo spazio. Siccome peraltro, sulla base del teorema di unicità, non vi può essere che una soluzione al problema, la soluzione è $V_0 = (V_0)_1 = \text{cost}$. Ciò significa $E_0 = 0$.

contenente la soluzione elettrolitica (liquido conduttore di conducibilità σ) in cui sono immersi elettrodi sagomati in scala come i conduttori del caso elettrostatico. A tali conduttori viene applicata una differenza di potenziale⁽⁶⁶⁾ e mediante sonde appuntite collegate a strumenti di misura si effettua la mappa della distribuzione del potenziale.

Come esempio della grande utilità delle considerazioni matematiche basate sulle equazioni di Poisson e Laplace per vedere chiaramente ed elegantemente la soluzione di taluni problemi elettrostatici, consideriamo ancora una volta il problema del potenziale (e del campo) nell'interno di un conduttore cavo quando in tale spazio interno non siano disposte cariche. Abbiamo già osservato (par. 1.10b) come nel caso di involucro cavo sferico anche non conduttore, uniformemente carico, è possibile usare un teorema stabilito da Newton per il caso gravitazionale il quale mostra che come conseguenza del

Nel caso che l'involucro sia di forma qualsiasi e limitatamente al caso di involucro conduttore l'applicazione del teorema di Gauss a superfici chiuse nell'interno del conduttore cavo mostra che il campo elettrico deve essere nullo in tutto questo spazio il quale quindi deve trovarsi allo stesso potenziale dell'involucro conduttore⁽⁶⁷⁾. Qualsiasi azione esterna altera le cariche sulla superficie esterna del conduttore ma non può influenzare lo spazio interno all'involucro. L'involucro costituisce uno schermo per gli eventuali corpi nel suo interno. La stessa conclusione può raggiungersi brillantemente usando il teorema di esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Laplace. L'equazione di Laplace (196) deve infatti essere soddisfatta nell'interno di un conduttore cavo di forma qualsiasi (fig. 1.81), inoltre la

1.26. METODO DELLE IMMAGINI

Il problema di determinare la configurazione del campo (per esempio per mezzo delle linee di forza o delle superfici equipotenziali) per varie disposizioni geometriche di conduttori e di cariche (puntiformi o distribuite), diviene di grande difficoltà per casi non estremamente semplici.

⁽⁶⁶⁾ Le esperienze vanno fatte usando conduttori ad elevata conducibilità e mantenendo le correnti molto basse in modo che nonostante il fluire della corrente, gli elettrodi possano essere considerati conduttori a potenziale costante ed uniforme.

⁽⁶⁷⁾ Lo stesso risultato è stato ottenuto al paragrafo 1.16 con ragionamenti semplici ed intuitivi.

Un artificio che può essere talvolta utile per risolvere il problema è quello di fare uso di indicazioni ottenute in casi nei quali la distribuzione delle cariche era specificata e la distribuzione del potenziale ed il campo sono stati stabiliti.

Per comprendere il metodo consideriamo un caso semplice.

La distribuzione del potenziale ed il campo per due cariche uguali ed opposte a distanza $2d$ fra loro sia stata determinata con esattezza ad una delle superfici equipotenziali, per es. quella indicata con A (v. fig. 1.82a). Se si immagina di conformare un sottile lamierino come A , metterlo nello spazio fra le cariche $+q$ e $-q$ nella posizione della superficie A e dare ad esso lo stesso potenziale che compete ad A nella distribuzione di figura 1.82a, questa non viene alterata affatto: sulle due superfici del lamierino si localizzano le cariche $-q$ (all'esterno) e $+q$ (all'interno). Si osservi inoltre che la superficie A è chiusa e quindi, purché essa venga mantenuta al potenziale costante che le corrisponde, la distribuzione del potenziale ed il campo all'esterno (o all'interno) di essa non vengono alterati comunque si cambi il campo all'interno (o, rispettivamente, all'esterno).

Se allora nell'interno della superficie A la carica $-q$ viene rimossa e lo spazio viene riempito con un conduttore, nulla varia per il campo all'esterno. Si è così costruita la soluzione che fornisce il campo e la distribuzione del potenziale per la situazione di figura 1.82b, cioè di una carica q in fronte di un ben determinato conduttore carico.

Si è cioè risolto il problema sostituendo al conduttore una carica puntiforme ($-q$) situata in una posizione opportuna al di là della superficie del conduttore stesso: questa carica è chiamata immagine ed il metodo si dice delle immagini.

In questo modo le superfici equipotenziali calcolate per date distribuzioni di cariche consentono di sviluppare una casistica per determinare la forma del campo quando conduttori di forma particolare si trovano nelle vicinanze di cariche. Questi casi possono servire a costruire le soluzioni nei casi pratici.

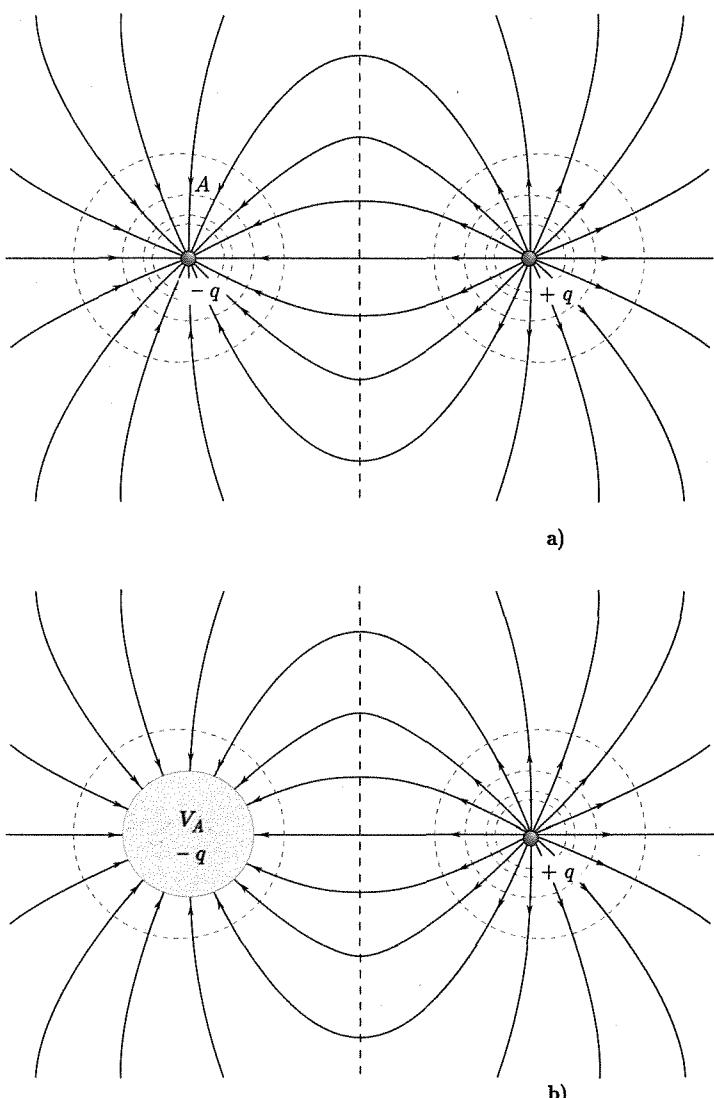


Fig. 1.82

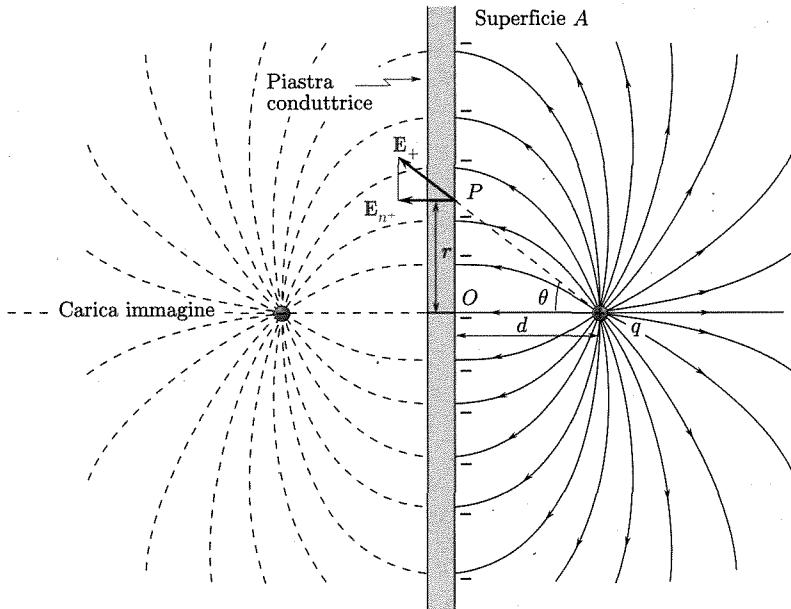


Fig. 1.83

La distribuzione delle cariche sulla superficie del piano può essere facilmente calcolata. Sia O il piede della perpendicolare da q al piano e consideriamo sul piano un punto P che dista r da O , la sua distanza da q e da $(-q)$ è $\sqrt{r^2 + d^2}$. Il campo in P è normale al piano e diretto verso l'interno del conduttore (in direzione opposta alla direzione positiva della normale esterna): esso è la somma delle componenti normali al piano dei campi creati da q e $(-q)$. La componente normale del campo elettrico dovuto a $+q$ è

$$(200) \quad E_{n+} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2 + d^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Siccome la componente E_{n-} è uguale a E_{n+} si ha

$$(201) \quad E(r) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

e quindi

$$(202) \quad \sigma(r) = \epsilon_0 E(r) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}.$$

L'integrale $\int \sigma dS$ esteso a tutta la superficie del piano fornisce la carica totale sul piano e questa deve risultare pari a $(-q)$. Infatti ponendo $dS = 2\pi r dr$

$$\int_0^\infty \sigma(r) 2\pi r dr = -qd \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = -q.$$

Infine la forza con la quale la carica $+q$ è attratta verso il piano ha il modulo

$$(203) \quad F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2}.$$

Il metodo delle immagini andrebbe meglio indicato come metodo nel quale si cerca di trovare in casi già risolti superfici equipotenziali che corrispondano a quelle delle condizioni ai limiti del caso da risolvere. Nelle recenti considerazioni abbiamo considerato una carica ed una superficie A (figg. 1.82, 1.83).

Sempre dalla distribuzione del potenziale e del campo fra due cariche $+q$ e $-q$ a distanza $2d$ (fig. 1.84a) si può ricavare il campo per il caso di

Di particolare interesse pratico è il caso della determinazione del campo e della distribuzione del potenziale per una carica (q) in fronte a un piano conduttore di dimensioni molto grandi collegato al potenziale di riferimento (zero). Si osservi la figura 1.82a e si noti che il piano normale alla congiungente $+q$ e $-q$ nel punto di mezzo della congiungente stessa è la superficie equipotenziale zero. Si deduce quindi che la soluzione del nostro problema consiste nel considerare al posto del piano una carica $-q$ (immagine) disposta rispetto al piano nella posizione simmetrica di q e nel determinare le linee di forza e le superfici equipotenziali per una tale distribuzione. Queste linee e queste superfici nella parte a destra della parete sono identiche a quelle valide per la carica q in fronte al piano (fig. 1.83).

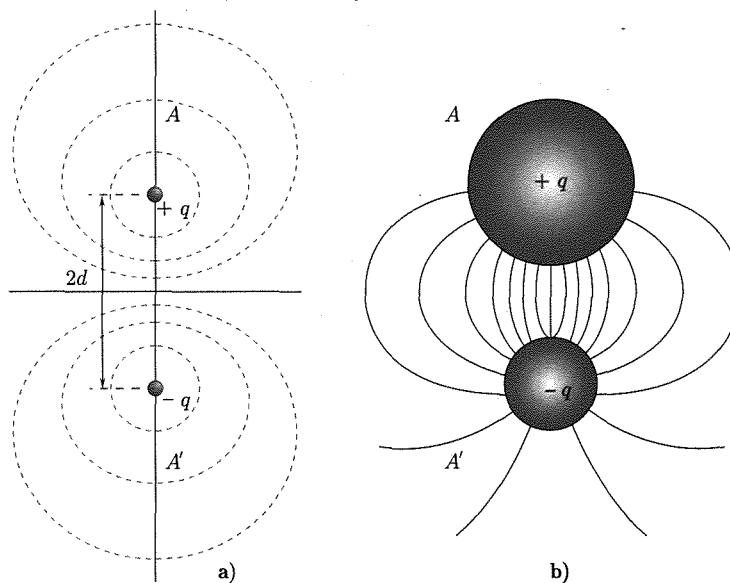


Fig. 1.84

due conduttori delle forme A ed A' indicate in fig. 1.84b ai quali siano date le cariche $+q$ e $(-q)$.

Si osservi che questa utilizzazione dei risultati ottenuti per distribuzioni di cariche note non si limita al caso di cariche uguali ed opposte.

Un caso interessante è quello che risolve il problema del campo creato da una carica puntiforme q posta nelle vicinanze di una sfera conduttrice collegata a terra (fig. 1.85a).

Si abbia (fig. 1.85b) una carica puntiforme $(+q)$ a distanza d da una origine O : sulla congiungente della posizione di q con O ed a distanza a^2/d (con $a < d$) venga posta una seconda carica puntiforme (negativa) $(-(a/d)q)$. Il potenziale in un punto P le cui coordinate polari sono r e θ è dato da

$$(204) \quad V_0(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2} - \frac{aq}{dr_1} \right) = \\ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(d^2 + r^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(a^2 + \frac{r^2 d^2}{a^2} - 2rd \cos \theta)^{1/2}} \right].$$

Da questa espressione è evidente che $V_0 = 0$ per qualsiasi θ se $r = a$ ⁽⁶⁸⁾.

Ciò significa che la sfera di centro O e raggio a è la superficie equipotenziale zero. Ciò porta di conseguenza che se si vuole determinare la distribuzione di potenziale nel caso di una carica q in vicinanza di una sfera di raggio a collegata a terra, si può considerare la distribuzione del potenziale per il sistema della carica q e della carica $(-(a/d)q)$ nelle posizioni viste: il campo nei due casi è lo stesso nella regione al di fuori della sfera.

Nel caso che la sfera conduttrice non si trovi a potenziale zero ma abbia un potenziale V'_0 si può considerare una distribuzione di cariche formata dalle due cariche precedentemente viste e da una carica nel centro della sfera che crei su di essa il potenziale V'_0 .

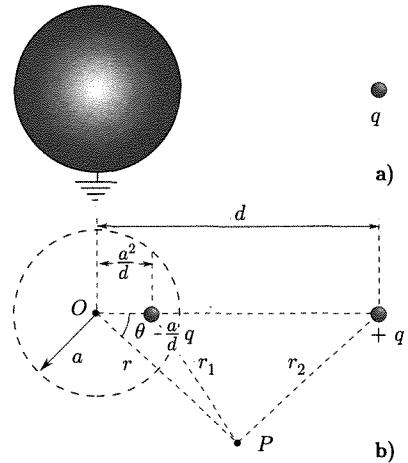


Fig. 1.85

(68) Ciò è dovuto al fatto che la sfera di raggio a è il luogo dei punti le cui distanze dalle due cariche stanno nel rapporto costante delle due cariche $r_2/r_1 = a/d$.

CAMPO ELETTROSTATICO NEI DIELETTRICI

- ✓ In questo capitolo viene mostrato che il campo elettrico in un dielettrico è determinato oltre che dalle cariche libere anche dall'effetto delle cariche presenti nel dielettrico stesso, dovute alla sua struttura atomica. Questo effetto può essere tenuto in conto in vari modi:
 - ▶ considerando come le cariche nel dielettrico si ridistribuiscono, dando origine a *cariche di polarizzazione*;
 - ▶ introducendo un nuovo vettore macroscopico **P**, chiamato *intensità di polarizzazione*, legato alle cariche di polarizzazione;
 - ▶ introducendo un vettore **D**, chiamato *spostamento elettrico*, che è determinato dalle sole cariche "libere", ma contiene in sé l'effetto della polarizzazione.
- ✓ Lo studio dei fenomeni elettrici in un dielettrico richiede quindi, accanto alla conoscenza delle cariche "libere", la determinazione di due grandezze fra quelle anzidette che possono essere il campo **E** e **P**, o **E** e **D**, o **P** ed **E**, o **E** e le cariche di polarizzazione ecc.
Nei dielettrici lineari che qui si considerano **P** è *proporzionale a E* e l'effetto delle cariche di polarizzazione è alla fine tenuto in conto tramite un parametro caratteristico del dielettrico: la costante dielettrica ϵ .
- ✓ Verrà infine discussa, su basi classiche, l'origine della polarizzazione e quindi della costante dielettrica nei dielettrici.

Campo elettrostatico nei dielettrici

2.1. IL CAMPO ELETTROSTATICO NEI DIELETTRICI

Le proprietà del campo elettrostatico nel vuoto sono sintetizzate dalle due relazioni fondamentali, valide punto per punto

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0})$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0),$$

ove ρ è la densità di volume delle cariche che creano il campo.

Nel caso che corpi materiali siano presenti le (1) e (2) continuano a valere purché ρ rappresenti la densità di tutte le cariche presenti, qualunque sia la loro origine, comprese in particolare le cariche che costituiscono gli atomi.

Quando il corpo che si trova nel campo possiede cariche mobili, è cioè un conduttore, l'azione del campo elettrostatico è quella di produrre una variazione delle cariche elettriche sulla superficie del corpo in modo da rendere equipotenziale lo spazio occupato dal corpo stesso. La presenza in un campo elettrostatico di un corpo conduttore (isolato) altera quindi il campo stesso (rispetto a quello in sua assenza) in una maniera che può globalmente essere ottenuta considerando un'opportuna distribuzione di cariche su una superficie coincidente con quella limite del corpo stesso.

Nonostante le notevoli complicazioni analitiche che la presenza di conduttori isolati può produrre nella soluzione di problemi pratici, non vi sono grandi difficoltà concettuali in essi.

Meno semplice ed immediato è il caso in cui siano presenti materiali isolanti⁽¹⁾ nei quali pur mancando cariche libere si produce, tuttavia, una perturbazione dello stato di equilibrio nella distribuzione delle cariche, per effetto del campo applicato.

Vogliamo innanzitutto avvertire che noi qui siamo interessati esclusivamente a considerare un valore medio, macroscopico, del campo elettrico nel dielettrico giacché è questo il solo che si può immaginare di misurare.

⁽¹⁾ I materiali isolanti sono anche chiamati dielettrici poiché le linee di forza del campo elettrico passano attraverso (greco διά) essi.

Si osservi che la struttura atomica della materia è tale che cariche diverse si trovano a piccolissima distanza fra loro⁽²⁾ e che la posizione di tali cariche varia molto rapidamente.

Se si volesse considerare il campo effettivo, microscopico, in ciascun punto esso avrebbe variazioni rapidissime nello spazio (per es. passando dalle vicinanze di un elettrone a quelle di un nucleo) e nel tempo. Non è possibile realizzare metodi di misura tanto accurati da rilevare tali variazioni. Appare quindi logico considerare un campo macroscopico ottenuto come media di quello microscopico essendo la media eseguita in tempi e spazi che siano, contemporaneamente, grandi in confronto, rispettivamente, alle dimensioni atomiche ed ai periodi dei moti nell'interno dell'atomo e piccoli rispetto alle risoluzioni ottenibili negli apparecchi di misura: per esempio la media può essere eseguita in spazi aventi dimensioni lineari di circa 100 volte il diametro atomico ed in tempi dell'ordine di 10^{-12} sec.

Tutto ciò si rispecchia nei riguardi delle distribuzioni di carica, nel considerare, al posto di quelle effettive, opportune distribuzioni medie nel tempo e nello spazio.

È nostro desiderio esaminare in quale maniera, nel caso di campo elettrico in presenza di un dielettrico, si possa utilmente separare nella (2) la densità delle cariche che sono in un certo senso all'origine prima del campo e che esisterebbero anche se il dielettrico non fosse presente, dalla densità di cariche dovute alla presenza del dielettrico. Chiameremo le due densità rispettivamente ρ_{lib} e, con una terminologia che presto sarà chiara, $\rho_{\text{polarizzazione}}$.

La (1) si scrive in tal caso

(3)

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0}$$

Il nostro problema è quello di cercare di esprimere ρ_{pol} in qualche maniera semplice, che rappresenti adeguatamente l'effetto della presenza del dielettrico. È evidente, tuttavia, dalla (3) come la conoscenza del campo elettrico in presenza di un dielettrico richieda due tipi di informazione, rispettivamente su:

1. la distribuzione delle cariche libere
2. la distribuzione delle cariche nel dielettrico. La descrizione di questa ultima distribuzione va fatta mediante qualche parametro che rispecchi le caratteristiche strutturali del dielettrico presente.

Nel vuoto il problema è notevolmente più semplice perché basta l'informazione 1.

Nella trattazione classica di questo problema, sufficiente per introdurre i concetti che a noi ora interessano, non è necessario considerare in dettaglio le proprietà microscopiche dei dielettrici. È sufficiente immaginarli costituiti da particelle, per esempio sferiche, dotate di cariche positive e negative in ugual quantità (particelle neutre) che tuttavia non possano allontanarsi dalla particella stessa (per esempio come sfere conduttrici isolate)⁽³⁾.

⁽²⁾ Si ricordi che il raggio dell'orbita elettronica nella descrizione di Bohr dell'atomo di idrogeno è circa 0,5 Å e che l'elettrone si muove su tale orbita con velocità dell'ordine di 10^6 m/s descrivendola completamente in un tempo di $1,5 \cdot 10^{-16}$ sec.

⁽³⁾ Le dimensioni di queste particelle sferiche sarebbero notevolmente superiori a quelle

Campo macroscopico

Per vedere come conviene procedere, è opportuno considerare una esperienza, che poi è quella fondamentale di Faraday, dalla quale prese inizio lo studio dei dielettrici.

Si consideri un condensatore piano (fig. 2.1a) nel vuoto al quale sia stata data una quantità di elettricità Q

$$(4) \quad C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

essendo S la superficie delle armature e d la loro distanza. Il campo elettrico è uniforme e pari a

$$(5) \quad |\mathbf{E}_0| = \frac{\sigma_{\text{lib}}}{\epsilon_0},$$

se σ_{lib} è la densità superficiale delle cariche che creano il campo.

La (5), come è noto, si ottiene applicando il teorema di Gauss alla superficie di un parallelepipedo quale quello che ha in figura la sezione A_1 .

Infine la differenza di potenziale fra le armature è

$$(6) \quad V_0 = E_0 d.$$

Si supponga ora di inserire fra le armature una lastra di materiale dielettrico omogeneo (fig. 2.1b). Si riscontra che la d.d.p. fra le armature è diminuita. La differenza di potenziale fra le armature è sempre l'integrale di linea del campo fra di esse (per es. lungo la linea a).

Si noti inoltre che il campo elettrico in un punto fra le armature fuori del dielettrico è ancora \mathbf{E}_0 (si applichi il teorema di Gauss alla superficie del parallelepipedo di sezione A_1). Si deduce quindi che il campo elettrico \mathbf{E} nel dielettrico è diverso da \mathbf{E}_0 e più piccolo di esso. Se ora si applica il teorema di Gauss al parallelepipedo di sezione A_2 si vede che perché sia $E < E_0$ la carica totale nell'interno di esso deve essere più piccola di quella dovuta a σ_{lib} . Da ciò si conclude, tenuto conto dell'uniformità della perturbazione nell'interno del dielettrico nel caso particolare qui considerato, che sulla superficie del dielettrico affacciata alla armatura positiva vi deve essere una carica negativa distribuita con una densità $\sigma_{\text{pol}} < \sigma_{\text{lib}}$. Sulla superficie del dielettrico che fronteggia l'armatura negativa v'è naturalmente una carica positiva con la stessa densità σ_{pol} .

Nella trattazione classica come si è detto non occorre specificare molto sulla struttura del dielettrico. I risultati dell'esperienza possono essere interpretati assumendo il dielettrico formato da particelle neutre fisse nello spazio i cui costituenti aventi carica (q) positiva e negativa posso sotto

degli atomi (per es. raggio 100 volte maggiore). In tal modo le medie temporali e spaziali (sulle distribuzioni di cariche effettivamente presenti per la costituzione atomica della materia) necessarie per giungere ad un campo elettrico macroscopico sono automaticamente fatte.

Esperienza di Faraday

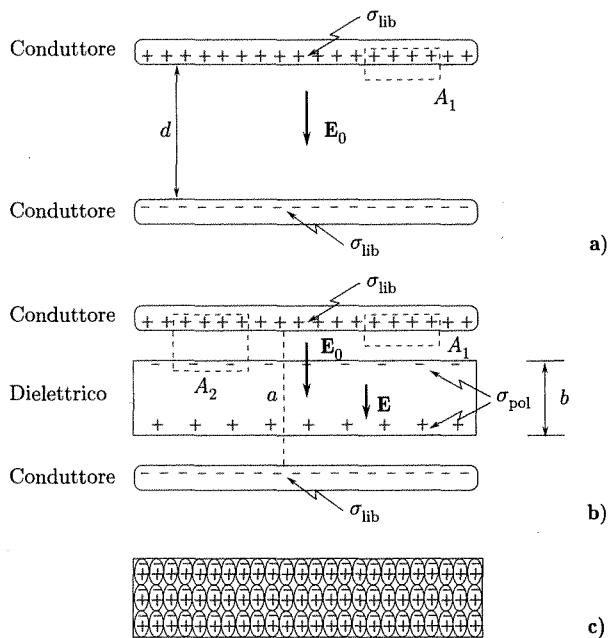


Fig. 2.1

l'azione del campo elettrico avere piccoli spostamenti (δ) gli uni rispetto agli altri. In un campo elettrico ciascuna particella quindi si trasforma in un dipolo il cui momento ($|\mathbf{p}| = q\delta$) dipende dall'intensità del *campo elettrico*.

È evidente che un tale meccanismo spiega completamente l'esperienza di figura 2.1. Data l'uniformità del campo elettrico anche i dipoli delle singole particelle saranno uguali ed allineati nella direzione di \mathbf{E} . Una tale situazione nel dielettrico si manifesta con una distribuzione di cariche superficiali sulle facce contigue alle armature; nell'interno infatti le cariche diverse di dipoli si equilibrano (fig. 2.1c).

Lo stato particolare ora illustrato, prodotto da un campo elettrico in un dielettrico, si dice di polarizzazione. Per la sua rappresentazione è utile introdurre un vettore, \mathbf{P} , intensità di polarizzazione

$$(7) \quad \mathbf{P} = N\mathbf{p} \left(\frac{\text{coulomb}}{\text{m}^2} \right)$$

pari al prodotto fra il momento di dipolo causato mediamente dal campo elettrico nella singola particella ed il numero di particelle per unità di volume.

Tale vettore, in una situazione di campo uniforme e di dielettrico omogeneo, quale quella di figura 2.1, fornisce il momento di dipolo globale prodotto dal campo elettrico e presentato dall'unità di volume del dielettrico.

Nella situazione di figura 2.1, ove il complesso dei processi conduce alla comparsa di cariche sulle facce del dielettrico affacciate alle armature, è facile esprimere σ_{pol} per mezzo di \mathbf{P} . Si osservi infatti che il momento di dipolo complessivo dello strato dielettrico di forma parallelepipedica con faccia di area S e spessore b può essere espresso tanto per mezzo di \mathbf{P} quanto per mezzo di σ_{pol} .

Per il modulo di tale momento si ha

$$P(Sb) = \sigma_{\text{pol}}Sb,$$

cioè

$$(8) \quad \sigma_{\text{pol}} = P.$$

L'applicazione del teorema di Gauss al parallelepipedo di sezione A_2 consente di ottenere per il campo elettrico macroscopico nel dielettrico:

$$(9) \quad |\mathbf{E}| = \frac{\sigma_{\text{lib}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{lib}} - |\mathbf{P}|}{\epsilon_0}.$$

La (9) mostra chiaramente che la determinazione di \mathbf{E} nel dielettrico richiede la conoscenza oltre che della densità delle cariche libere, del vettore \mathbf{P} . È questa una conclusione che per quanto sia stata dedotta in un caso molto semplice, è di carattere generale.

Dopo aver considerato la situazione particolare di figura 2.1 per introdurre e giustificare in maniera semplice la descrizione classica della perturbazione dello stato di un dielettrico prodotto da un campo elettrico, al fine di calcolare il campo elettrico macroscopico in esso, passiamo a considerare il caso generale di un dielettrico di forma qualsiasi, di proprietà in genere diverse da punto a punto, il quale si trovi esposto a campi elettrici (creati da ρ_{lib}) non uniformi. In analogia al caso semplice visto avanti,

*Intensità
di polarizzazione*

*Polarizzazione in un
dielettrico omogeneo*

*Densità delle cariche
superficiali
di polarizzazione in un
dielettrico omogeneo*

*Polarizzazione
in un dielettrico non
omogeneo*

anche nel caso generale il dielettrico può essere immaginato come costituito da particelle complessivamente neutre (formate da cariche positive e negative) che sotto l'azione del campo elettrico si trasformano in dipoli; in questo caso tuttavia i momenti di dipolo delle singole particelle non sono più in generale uguali fra loro. Ciò fa prevedere che, a causa della mancata compensazione dei dipoli nell'interno del dielettrico polarizzato la situazione si manifesti non solo con una distribuzione superficiale (σ_{pol}) di cariche di polarizzazione ma anche con una distribuzione spaziale (ρ_{pol}) nell'interno del dielettrico.

Per trattare questa situazione conviene generalizzare la definizione del vettore intensità di polarizzazione \mathbf{P} ponendo

$$(10) \quad \mathbf{P} = \frac{N' \mathbf{p}}{\Delta \tau}$$

ove \mathbf{p} è ora il momento medio di dipolo per particella e N' il numero di particelle in un volume $\Delta \tau$ che circonda il punto considerato.

Il volume $\Delta \tau$ può essere ridotto a valori molto piccoli pur soddisfaccendo alla condizione di contenere nel suo interno molte delle particelle che costituiscono il mezzo. In tali condizioni, per i fini pratici, si può assumere che la polarizzazione sia uniforme nell'interno di $\Delta \tau$. Nonostante che dal punto di vista fisico $\Delta \tau$ nella definizione di \mathbf{P} vada considerato finito, in molte considerazioni esso può essere trattato come infinitesimo. Il vettore \mathbf{P} risulta funzione del punto nel dielettrico che si considera.

Noi vogliamo ora mostrare come questo vettore consenta di rappresentare agevolmente lo stato di polarizzazione del dielettrico.

Sia $d\tau$ un elemento di volume nell'intorno di un punto qualsiasi del dielettrico (il cui volume totale indichiamo con τ). Quando il dielettrico è in un campo elettrico, l'elemento equivale ad un dipolo di momento $\mathbf{P}d\tau$, se \mathbf{P} è l'intensità di polarizzazione nel punto considerato. Il potenziale prodotto da un tale dipolo elementare alla distanza r è (cap. 1, par. 1.14)

$$(11) \quad dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{P}d\tau) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right).$$

In tale relazione \mathbf{r} è il vettore che va dal centro O del dipolo, considerato fisso, al punto e la differenziazione va fatta rispetto alle coordinate di tale punto. Nel caso che qui interessa, peraltro, il punto in cui si calcola il potenziale generato dal dipolo è fisso ed il centro del dipolo varia: ciò corrisponde a cambiare il segno di \mathbf{r} e di conseguenza si ha per il potenziale prodotto dal dipolo elementare alla distanza r

$$(12) \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{P} d\tau) \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Le operazioni di derivazione vanno eseguite rispetto alle coordinate dell'elemento di volume che contiene il dipolo.

Dalla (12) si ottiene per il potenziale del campo creato in un punto da tutto il volume τ del dielettrico polarizzato:

$$(13) \quad V = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{P} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\tau.$$

*Intensità
di polarizzazione per la
situazione generale*

Si può usare ora la regola di calcolo vettoriale⁽⁴⁾

$$(14) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right),$$

ed ottenere:

$$(15) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau.$$

Trasformando il primo integrale da un integrale di volume ad uno esteso alla superficie S che limita il volume τ per mezzo del teorema della divergenza (cap. 1, par. 1.8) si ha

$$(16) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau.$$

Ricordando le espressioni del potenziale creato da distribuzioni superficiali e spaziali di cariche⁽⁵⁾, la (16) mostra chiaramente che *l'effetto della polarizzazione del dielettrico equivale nel caso generale alla somma di:*

1. una distribuzione di carica sulla superficie esterna S del dielettrico con densità⁽⁶⁾

$$(17a) \quad \sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

2. una distribuzione spaziale nel volume del dielettrico con densità

$$(17b) \quad \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Densità di carica di polarizzazione di volume

Quest'ultima distribuzione scompare se \mathbf{P} è solenoidale o, in particolare, uniforme. In tal caso si ha solo una distribuzione di carica sulla superficie del dielettrico: la densità è pari a $|\mathbf{P}|$ se la superficie è normale a \mathbf{P} ; è zero se \mathbf{P} giace sulla superficie. Una situazione di questo genere ($\rho = 0; \sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$) si presenta nel caso di un condensatore nel quale è inserito uno strato dielettrico come in figura 2.1 e che è stato da noi considerato in precedenza.

I risultati ora ottenuti mostrano come il vettore \mathbf{P} si presti a rappresentare nel caso generale la densità delle cariche prodotte dalla polarizzazione del dielettrico che hanno importanza per il campo elettrico macroscopico nel dielettrico stesso. In particolare la densità delle cariche di polarizzazione punto per punto è data dalle (17).

In base a questi risultati la relazione (3) diviene nell'interno di un dielettrico

$$(18) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{lib}} - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

⁽⁴⁾ La regola già usata (cap. 1, par. 1.20) si scrive, se \mathbf{A} è un vettore e u una funzione scalare,

$$\operatorname{div}(u \cdot \mathbf{A}) = u \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{grad} u.$$

⁽⁵⁾ Rispettivamente (cap. 1, par. 1.13):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r}.$$

⁽⁶⁾ Al solito, \mathbf{n} è il versore della normale *esterna* alla superficie limite del dielettrico.

che può anche essere scritta

$$(19) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) &= \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \\ \left[\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \right] &= \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

La (19) assieme alla (2), che resta inalterata, caratterizza il campo elettrostatico nei dielettrici. Come si vede, la determinazione dello stato elettrico in un dielettrico richiede l'uso dei due vettori \mathbf{E} e \mathbf{P} , a differenza del caso particolare del vuoto ove \mathbf{P} non esiste.

Nelle considerazioni che hanno condotto alla (19) nessuna restrizione è stata posta su \mathbf{P} , cioè sulle caratteristiche (per es. di isotropia od anisotropia) del dielettrico; \mathbf{P} naturalmente dipende da \mathbf{E} .

Nel caso di sostanze isotrope ed entro vasti limiti di valori del campo elettrico, \mathbf{P} è parallelo e semplicemente proporzionale ad \mathbf{E} . Parleremo di comportamento *lineare* del dielettrico.

In questi casi, che sono tuttavia quelli più frequenti, si usa scrivere

$$(20) \quad \mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

La costante χ prende il nome di suscettività dielettrica e caratterizza il dielettrico. Essa è una grandezza adimensionata.

Relazione fra polarizzazione e campo elettrico nel caso lineare

Assumendo la validità della (20), la (19) diviene

$$(21) \quad \operatorname{div}(1 + \chi) \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}.$$

La costante $(1 + \chi)$ ha il nome di costante dielettrica relativa del mezzo dielettrico:

$$(22) \quad \epsilon_r = 1 + \chi,$$

e quindi:

$$(23) \quad \operatorname{div}(\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}.$$

Nel caso che la costante dielettrica non vari da punto a punto (7)

$$(24) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon}$$

essendo ϵ la costante dielettrica assoluta del mezzo, data dalla relazione

$$(25) \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r.$$

Suscettività dielettrica

Costante dielettrica relativa

I equazione di Maxwell per un dielettrico

Si ha quindi nel caso normale di mezzi isotropi in cui si può ammettere la validità della (20), che la equazione (23) e la (2) scritta per esprimere la natura conservativa del campo \mathbf{E} , sono le relazioni di base per l'elettrostatica nei dielettrici. Esse valgono anche se ϵ_r varia nello spazio, come per esempio quando diversi dielettrici sono presenti in differenti regioni.

Nel caso in cui il mezzo oltre ad essere isotropo è anche omogeneo (ϵ_r è ovunque la stessa) le equazioni fondamentali si riducono alle (24) e (2) (scritta per \mathbf{E}).

Costante dielettrica assoluta

(7) Vale la regola di calcolo vettoriale (vedi appendice II):

$$\operatorname{div}(\epsilon_r \mathbf{E}) = \epsilon_r \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \epsilon_r.$$

■ 2.2. IL VETTORE SPOSTAMENTO ELETTRICO

La trattazione precedente ha mostrato che la descrizione della perturbazione elettrica in un dielettrico richiede l'uso di due vettori. Accanto al campo elettrico macroscopico \mathbf{E} che, come nel vuoto, si può pensare, almeno in alcuni casi, di determinare mediante l'azione esercitata su una carica esploratrice, è necessario usare il vettore \mathbf{P} , intensità di polarizzazione, per portare in conto le azioni delle cariche che costituiscono il mezzo dielettrico, opportunamente mediate (ρ_{pol}).

Vedremo in seguito come lo studio microscopico dei dielettrici possa consentire la determinazione di \mathbf{P} nei vari casi.

È bene a questo punto introdurre un terzo vettore, che è parimenti molto usato. Esso è definito da

*Vettore
spostamento elettrico*

$$(26) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

e viene chiamato spostamento elettrico. Esso offre il vantaggio di rendere una delle relazioni fondamentali dell'elettrostatica nei dielettrici particolarmente semplice perché fa comparire solo le ρ_{lib} . La (19) diviene infatti

I equazione di Maxwell

$$(27) \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} \quad (\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}).$$

L'altra equazione rimane la (2); essa è espressa in termini di \mathbf{E} . Si osservi che l'introduzione di \mathbf{D} non risolve affatto il problema di caratterizzare il dielettrico e se si vuole risolvere il sistema delle (27) e (2) occorre stabilire una relazione fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} che equivale ad introdurre una descrizione del comportamento della materia. Nel caso che valga la (20) la relazione fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} si scrive

*Vettore
spostamento elettrico
nel caso lineare*

$$(28) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}.$$

Appare tuttavia evidente l'assenza di una profonda giustificazione per l'introduzione del vettore \mathbf{D} , dal momento che per risolvere i problemi occorre sempre passare per \mathbf{P} , che invece è il vettore che caratterizza le proprietà strutturali del dielettrico. Non si vede la necessità di fare scomparire le caratteristiche del dielettrico mediante l'uso di \mathbf{D} se poi per calcolare \mathbf{D} occorre di nuovo ritornare alla considerazione delle proprietà del dielettrico. Si osservi inoltre che la relazione semplice (28), che è in sostanza una descrizione delle proprietà della materia, ha una validità limitata; infatti per \mathbf{E} molto grandi \mathbf{D} non è proporzionale ad \mathbf{E} e per alcune sostanze non si ha proporzionalità neanche a bassi campi. Va inoltre detto che in elettrostatica in genere si misurano e controllano le d.d.p. fra corpi e non le cariche su di essi: ciò significa che in genere si ha il modo di agire direttamente su \mathbf{E} e non su \mathbf{D} legato a ρ secondo la (27).

Per tali ragioni oggi il vettore \mathbf{D} viene usato meno che per il passato.

Insistiamo ancora che le equazioni di validità generale sono le (1) e le (2); nel caso dei dielettrici è utile separare le ρ_{lib} dalle ρ_{pol} . Questo può essere fatto in maniera logica considerando il vettore intensità di polarizzazione \mathbf{P} e sostituendo la (1) con la (19). La dipendenza di \mathbf{P} dalle caratteristiche strutturali sarà studiata in seguito e servirà per il suo calcolo (par. 2.10 e segg.).

L'introduzione di un nuovo vettore non è affatto necessaria. Naturalmente se esso viene introdotto mediante la definizione (26) lo stato del dielettrico può essere descritto mediante due qualsiasi dei tre vettori \mathbf{E} , \mathbf{P} , \mathbf{D} .

Per lungo tempo è stata consuetudine generale quella di usare **E** e **D**. È perciò molto frequente trovare trattazioni in cui è fatta questa scelta. È questa la ragione per cui noi nel seguito faremo riferimento al vettore **D**.

Facendo uso del vettore **D** il teorema di Gauss (par. 1.8) fornisce per il flusso attraverso una superficie chiusa *S*, in un dielettrico

$$\phi_S(D) = \sum_i q_i$$

essendo q_i le cariche racchiuse da *S*.

2.3. CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE CONTENENTE UN DIELETTRICO

Si consideri il caso molto importante di un condensatore di forma qualsiasi, tale che tutto lo spazio fra le armature sia occupato da un dielettrico omogeneo le cui proprietà siano funzioni lineari del campo: per tale dielettrico cioè si suppone che valga la (20). Per determinare la capacità $C = Q/V$ occorre conoscere il campo **E** fra le armature; *V* è infatti l'integrale di linea di **E** per un percorso qualsiasi che porti da una armatura all'altra.

Il problema è facilmente risolto se si conosce il campo nel caso che le armature siano disposte nel vuoto.

Si osservi infatti che ciò significa conoscere per il caso in questione la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$(30)$$

Il sistema che occorre risolvere nel caso di dielettrico omogeneo che riempia lo spazio fra le armature è [vedi eq. (23)]

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$(32)$$

Poiché si è ammesso che la ϵ_r sia costante ed ovunque la stessa, la equazione (32) può essere sostituita dalla

$$(33) \quad \operatorname{rot}(\epsilon_r \mathbf{E}) = 0.$$

Il sistema (31), (33) equivale a quello (29), (30) con la sola sostituzione di $\epsilon_r \mathbf{E}$ a \mathbf{E}_0 . Ciò significa che la soluzione nel caso di presenza del dielettrico (**E**) può ottenersi da quella nota per il caso del vuoto ponendo

$$(34) \quad \epsilon_r \mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_0.$$

Si ha di conseguenza

$$(35) \quad \epsilon_r V = V_0$$

$$(36) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_r Q}{V_0} = \epsilon_r C_0.$$

Capacità di un condensatore con dielettrico

La presenza del dielettrico in tutto lo spazio fra le armature fa aumentare ($\varepsilon_r > 1$) la capacità di un condensatore di forma qualsiasi.

Le espressioni della capacità per mezzo dei parametri geometrici del condensatore è immediatamente ottenuta dalle espressioni della capacità nel vuoto.

In particolare per un condensatore piano si ha:

$$(37) \quad C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d},$$

essendo S la estensione delle superfici affacciate (armature) dei conduttori che costituiscono il condensatore stesso e d la loro distanza.

■ 2.4. PARAGONE DEI VALORI DEL CAMPO ELETTRICO NEL VUOTO E IN UN MEZZO DIELETTRICO MATERIALE

A conclusione delle considerazioni ora svolte è bene sottolineare che se si paragonano due situazioni elettrostatiche uguali per tutto (ρ_{lib}) tranne per il fatto che in un caso le cariche libere sono nel vuoto e nell'altro il mezzo è un dielettrico omogeneo che occupa tutto lo spazio che interessa il campo, si ha sempre

$$(38) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r},$$

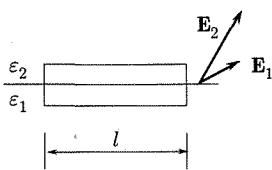
$$(39) \quad V = \frac{V_0}{\varepsilon_r}.$$

La costante dielettrica relativa in molti dielettrici solidi ha valori compresi fra 1 e 10. Nel caso dell'acqua essa ha un valore particolarmente elevato, $\varepsilon_r = 80$, mentre nell'aria alla pressione di 760 mm di Hg e temperatura ambiente si ha $\varepsilon_r = 1,00057$. Il fatto che questo ultimo valore è molto prossimo all'unità fa sì che la trattazione del campo elettrico nel vuoto possa essere applicata con una ottima approssimazione nel caso che il dielettrico sia l'aria. Ciò viene fatto comunemente.

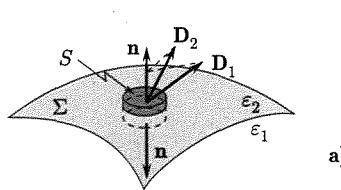
■ 2.5. CAMPO ELETTRICO ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE DI DUE DIELETTRICI

Si consideri il caso di due dielettrici in un campo elettrico e si voglia esaminare la situazione in corrispondenza alla superficie limite. Si osservi che poiché, in genere, le intensità di polarizzazione nei due mezzi sono diverse, si hanno *cariche di polarizzazione* localizzate sulla superficie limite e quindi i campi elettrici nei due mezzi sono diversi. È facile tuttavia provare che supponendo che sulla superficie di separazione non vi siano cariche libere⁽⁸⁾, la variazione del campo concerne semplicemente la componente nella direzione normale alla superficie di separazione. Si prenda

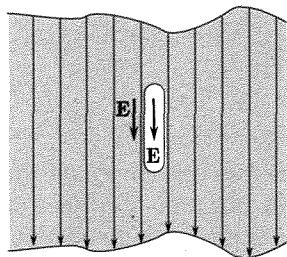
⁽⁸⁾ Con una trattazione più generale di quella che qui presentiamo si può vedere che le relazioni (41) e (43) che stabiliremo valgono anche qualora esista nei due mezzi una $\rho_{\text{lib}}(x, y, z)$ che peraltro non abbia singolarità sulla superficie di separazione (in modo da garantire $\sigma_{\text{lib}} = 0$ su tale superficie).



a)

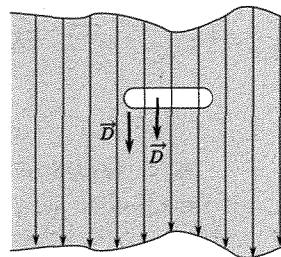


a)



b)

Fig. 2.2



b)

Fig. 2.3

(fig. 2.2a) infatti una linea chiusa formata da un rettangolo avente due lati di lunghezza l , paralleli alla traccia della superficie di separazione sul piano della figura e due lati molto più piccoli dei primi. La circuitazione del campo elettrico lungo tale linea (cioè il lavoro compiuto per spostare la carica unitaria lungo di essa) è data, chiamando con E_t la componente tangenziale del campo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = l E_{1t} - l E_{2t}$$

essendosi trascurati i contributi molto piccoli lungo i lati normali alla superficie di separazione.

Tale circuitazione per la (2) è zero, e si ha dunque:

$$(40) \quad l E_{1t} = l E_{2t},$$

$$(41) \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

La (41) esprime la continuità della componente tangenziale del campo elettrico alla separazione di due mezzi dielettrici.

Nonostante quindi che il campo elettrico abbia una discontinuità alla superficie di separazione di due mezzi e che quindi le linee di forza cambino bruscamente di direzione, la componente tangenziale del campo elettrico resta inalterata.

Ciò porta di conseguenza che se nell'interno di un dielettrico si ha una cavità allungata con le pareti, nella parte cilindrica, parallele alle linee di forza del campo nel dielettrico (fig. 2.2b) il campo elettrico nel dielettrico e nella cavità cilindrica è il medesimo giacché all'interfaccia il campo ha solo la componente tangenziale.

Una condizione di continuità all'interfaccia fra due dielettrici esiste anche per le componenti normali del vettore \mathbf{D} . Sempre con l'ipotesi che sulla superficie di separazione vi siano solo cariche di polarizzazione ($\sigma_{lib} = 0$) si consideri (fig. 2.3a) un cilindro chiuso avente le generatrici normali alla superficie di separazione e le superfici piane parallele alla superficie di separazione stessa; l'altezza del cilindro sia molto piccola rispetto al suo diametro. In tali condizioni il flusso uscente dal cilindro è

La componente tangenziale del campo elettrico si conserva nel passare da un mezzo a un altro

praticamente quello attraverso le due superfici piane di area S .

$$\phi(\mathbf{D}) = D_{n1}S_1 - D_{n2}S_2,$$

essendo D_n la componente normale di \mathbf{D} . Siccome nell'interno del cilindro non vi è (almeno nel caso generale) alcuna ρ_{lib} essendo le cariche presenti solo cariche di polarizzazione, l'applicazione del teorema di Gauss porta di conseguenza

*La componente normale
dello spostamento
elettrico si conserva
nel passare da un mezzo
ad un altro*

(42)

$$D_{n1}S_1 - D_{n2}S_2 = 0,$$

(43)

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

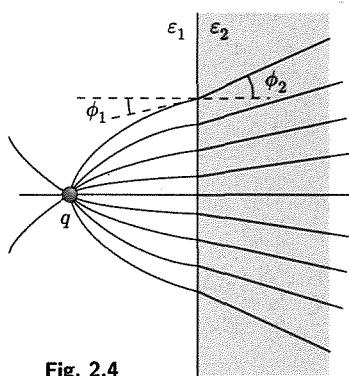


Fig. 2.4

*Rifrazione delle linee
di forza del campo
elettrico nel passaggio da
un mezzo dielettrico
ad un altro*

Se si considera (fig. 2.3b) in un dielettrico una cavità a forma di un cilindro largo e basso con i piani normali alle linee del vettore \mathbf{D} , il valore di tale vettore è lo stesso nel dielettrico e nella cavità all'interfaccia: infatti il vettore \mathbf{D} è normale alla superficie piana.

Per le componenti del campo elettrico normale alla superficie di separazione si può scrivere

$$(44) \quad \epsilon_0 \epsilon_{1r} E_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_{2r} E_{n2}$$

e quindi

$$(45) \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r}}.$$

Se si considera (fig. 2.4) la variazione di direzione delle linee del campo elettrico alla separazione di due mezzi (rifrazione delle linee di forza) si ottiene facilmente:

$$(46) \quad \frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} = \frac{E_{t1}/E_{n1}}{E_{t2}/E_{n2}} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}}.$$

2.6. FORZE FRA CARICHE IN UN DIELETTRICO

Si supponga di avere un dielettrico uniforme di costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ e si supponga di porre in un punto A una carica puntiforme q . Se si applica il teorema di Gauss per una sfera di raggio r e centro in A , poiché per ragioni di simmetria il campo elettrico ha lo stesso modulo in tutti i punti della superficie sferica

$$(47) \quad 4\pi r^2 \epsilon_r E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

cioè

$$(48) \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

Ne segue che la forza che si esercita fra due cariche puntiformi in un dielettrico è

$$(49) \quad \mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

essendo r la distanza fra le due cariche ed \mathbf{r} il vettore che ha origine nella posizione di una carica e termine nella posizione dell'altra carica, su cui

*Forza di Coulomb
in un dielettrico*

si esercita la forza \mathbf{F} . La (49) va anche sotto il nome di *legge di Coulomb nei dielettrici*.

Analogamente, il potenziale creato da una carica puntiforme è

$$(50) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}.$$

È bene osservare che la (49) può rappresentare la forza fra cariche puntiformi in un dielettrico fluido, quando cioè l'introduzione di un conduttore con la carica puntiforme non produce alterazione del dielettrico; nel caso che il dielettrico sia solido, il problema è molto più complicato perché l'introduzione dei conduttori carichi nei dielettrici ed il loro spostamento non può farsi senza ingenerare deformazioni e tensioni che alterano il dielettrico. L'uso delle (48) e (49) è quindi piuttosto limitato.

2.7. ENERGIA DI UN SISTEMA DI CARICHE IN PRESENZA DI UN DIELETTRICO

Tale energia corrisponde al lavoro che occorre spendere per portare le cariche nella configurazione finale in presenza del dielettrico. Essa è ancora data da una formula analoga alla (150) del cap. 1:

$$(51) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau,$$

essendo l'integrale esteso allo spazio occupato da tutte le cariche presenti. In questo caso tuttavia per ρ non può usarsi la (48) del cap. 1, bensì, se il mezzo dielettrico è isotropo, la (23)

$$\operatorname{div}(\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}$$

o la (27)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}.$$

Si ha quindi

$$(52) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int V \operatorname{div} \mathbf{D} d\tau.$$

Con ragionamenti analoghi a quelli visti nel paragrafo 1.20 del cap. 1, si giunge alla relazione

$$(53) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

ed alla densità di energia

$$(54) \quad w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

*Densità di energia
elettrica
in un dielettrico*

Utilizzando la relazione (28) fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} la (53) diviene

$$(55) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2\epsilon_0} \int \frac{D^2}{\epsilon_r} d\tau.$$

Se inoltre il mezzo è omogeneo si ha:

$$(56) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon}{2} \int E^2 d\tau,$$

essendo al solito l'integrale esteso a tutto lo spazio contenente le cariche.

Il risultato ora ottenuto si riferisce al caso in cui tutte le cariche presenti si trovino in distribuzioni di volume.

Esso si estende senza sostanziale modifica al caso in cui siano presenti anche distribuzioni superficiali, giacché queste sono casi limiti di distribuzioni di volume.

■ 2.8. FORZE SU CONDUTTORI NEL CASO DI PRESENZA DI DIELETTRICO E SUL DIELETTRICO STESSO

Le forze che si presentano sulle varie parti di un sistema nel caso di presenza di un dielettrico vanno calcolate con lo stesso metodo visto nel caso del campo elettrico nel vuoto, cioè esprimendo la energia del sistema in funzione delle coordinate che fissano la configurazione e ricordando che le componenti della forza su ciascuna parte del sistema sono le derivate, cambiate di segno, dell'energia rispetto alle coordinate configurazionali del punto stesso.

Le situazioni peraltro possono essere molto varie e spesso difficili da analizzarsi specie nel caso di sistemi contenenti dielettrici non omogenei o quando il campo elettrico ha struttura non semplice.

Noi qui ci limiteremo a dare alcune indicazioni generali.

a. Forza su conduttori immersi in un dielettrico omogeneo che riempie tutto lo spazio esterno ai conduttori

In questo caso è facile paragonare la situazione con quella che si avrebbe in assenza di dielettrico (vuoto). Si ricordi che per dati valori della carica su i conduttori fissi nello spazio e per una data distribuzione eventuale di cariche spaziali, il potenziale in assenza di dielettrico, cioè nel vuoto (V_0), ed il potenziale in presenza del dielettrico sono legati da

$$(57) \quad V = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} V_0 .$$

Per le energie elettrostatiche si ha, in assenza di dielettrico,

$$(58) \quad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_{0i} = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V_0 d\tau ,$$

ed in presenza di dielettrico (con $\rho_{lib} = \rho$)

$$(59) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau ,$$

essendo Q_i la carica sul conduttore i .

Dalle (57), (58), (59) si deduce

$$(60) \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathcal{U}_0 .$$

Se il dielettrico è fluido questa relazione vale comunque si spostino i conduttori; nel caso di dielettrico solido un qualsiasi movimento dei conduttori causa deformazioni del dielettrico e l'intervento di altre energie.

Ci limiteremo perciò a considerare il caso del dielettrico fluido.

Se si considera il fatto che la forza su un punto del sistema si ottiene nei due casi (assenza e presenza del dielettrico) mediante operazioni di derivazione dell'energia elettrica rispetto alle coordinate spaziali, si comprende che debba risultare

$$(61) \quad \mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{F}_0 = \frac{\mathbf{F}_0}{\epsilon_r} ,$$

essendo \mathbf{F}_0 ed \mathbf{F} le forze sullo stesso punto nel vuoto e nel dielettrico.

b. Forze su ciascun elemento di volume nella massa di un dielettrico omogeneo fluido

Ogni elemento di volume $d\tau$ di un tale dielettrico in un campo elettrico è sottoposto ad una forza che può essere posta nella forma

$$(62) \quad d\mathbf{F}_\tau = \mathbf{f} d\tau$$

e che desideriamo calcolare. Consideriamo per ora il caso in cui nel dielettrico non ci siano cariche distribuite ($\rho_{\text{lib}} = 0$).

Per ottenere il risultato occorre fare riferimento alla energia immagazzinata nel dielettrico. Si può pensare d'avere suddiviso il dielettrico in elementi di volume $d\tau$ e si può immaginare di averli separati di infinitamente poco fra loro, tenendo ciascuno di essi in equilibrio mediante la applicazione di una forza $-\mathbf{f} d\tau$. Si supponga ancora di spostare ciascun elemento di volume di una quantità infinitamente piccola $\delta\mathbf{u}$, la quale tuttavia vari con continuità nello spazio e sia compatibile con la condizione che i conduttori e la superficie esterna del dielettrico restino fissi.

In tali condizioni il dielettrico subisce deformazioni (compressione o dilatazioni del fluido) che si ripercuotono in variazioni di costante dielettrica e conseguentemente di energia. Supponendo che la carica dei conduttori non venga variata, la variazione di energia nel dielettrico può scriversi

$$(63) \quad \delta\mathcal{U} = - \int_\tau (\delta\epsilon) \frac{E^2}{2} d\tau .$$

Tale variazione è anche data dal lavoro della forza $-\mathbf{f} d\tau$ applicata agli elementi

$$(64) \quad \delta\mathcal{U} = \int_\tau (-\mathbf{f}) \cdot \delta\mathbf{u} d\tau .$$

I due integrali a secondo membro delle (63) e (64) risultano quindi uguali.

Gli spostamenti arbitrari $\delta\mathbf{u}$ possono essere legati alle variazioni $\delta\epsilon$ che ne conseguono. Nei fluidi ϵ dipende infatti dalla densità⁽⁹⁾ ω e si può porre

$$(65) \quad \delta\epsilon = \frac{d\epsilon}{d\omega} \delta\omega .$$

Inoltre il valore di $\delta\omega$ conseguente a un certo $\delta\mathbf{u}$ si può ottenere utilizzando la espressione della legge di conservazione della massa

$$(66) \quad \delta\omega = -\text{div}(\omega\delta\mathbf{u}) .$$

Per un materiale omogeneo si ha:

$$(67) \quad \delta\omega = -\omega \text{div}(\delta\mathbf{u})$$

e quindi

$$(68) \quad \delta\epsilon = -\omega \frac{d\epsilon}{d\omega} \text{div}(\delta\mathbf{u}) .$$

La (63) si scrive

$$(69) \quad \delta\mathcal{U} = \omega \frac{d\epsilon}{d\omega} \int_\tau \text{div}(\delta\mathbf{u}) \frac{E^2}{2} d\tau .$$

Si osservi che siccome⁽¹⁰⁾

$$(70) \quad \text{div}(\delta\mathbf{u}) \frac{E^2}{2} = \text{div}\left(\frac{E^2}{2} \delta\mathbf{u}\right) - \delta\mathbf{u} \cdot \text{grad} \frac{E^2}{2} ,$$

l'integrale si scinde in due integrali. Usando per il primo il teorema della divergenza esso si riduce al flusso di $(E^2/2)\delta\mathbf{u}$, attraverso la superficie limite del dielettrico. Per l'ipotesi posta che $\delta\mathbf{u}$ sia zero su tale superficie, questo integrale ha valore zero.

⁽⁹⁾ Usiamo per la densità (kg/m^3) il simbolo ω invece del simbolo più comune ρ per non causare confusioni con la densità di carica (coul/m^3) per la quale ρ è stato usato in questo capitolo.

⁽¹⁰⁾ Vedi *supra* nota (4) o appendice II.

Si ottiene quindi

$$(71) \quad \delta U = -\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \int \delta \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \frac{\mathbf{E}^2}{2} d\tau = - \int_{\tau} \operatorname{grad} \left(\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\tau.$$

Questa relazione va confrontata con la (64) e se si tiene conto della arbitrarietà di $\delta \mathbf{u}$ si può scrivere

$$(72) \quad \mathbf{f} = \operatorname{grad} \left(\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right).$$

Elettrostrizione

Si vede quindi che quando si stabilisce un campo elettrico in un dielettrico si genera una forza sui singoli elementi di volume ($\mathbf{f} d\tau$) che produce inizialmente un moto degli elementi di volume (particelle) gli uni rispetto agli altri. Tali deformazioni creano reazioni elastiche e procedono fino a che non si raggiunga equilibrio fra l'azione elettrica e la reazione elastica. Il fatto che l'applicazione del campo elettrico crei in un dielettrico sforzi elasticci e deformazioni costituisce il cosiddetto fenomeno della elettrostrizione.

Nel caso di fluidi, come qui supponiamo di avere, l'unico sforzo elastico possibile (statico) è quello della pressione idrostatica (P) e le forze che si generano su un elemento di volume $d\tau$ derivano da un gradiente di p . Si ha quindi in condizioni di equilibrio

$$(73) \quad \mathbf{f} d\tau - \operatorname{grad} p d\tau = 0,$$

e quindi il gradiente della espressione

$$(74) \quad p = \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{\mathbf{E}^2}{2},$$

è nullo, cioè la espressione (74) ha un valore costante nel fluido. Di conseguenza fra due punti nel fluido nei quali i valori del campo sono E_1 ed E_2 , esiste una differenza di pressione

$$(75) \quad p_2 - p_1 = \omega_2 \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_2 \frac{\mathbf{E}_2^2}{2} - \omega_1 \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_1 \frac{\mathbf{E}_1^2}{2}.$$

Per i vari fluidi la legge di variazione ha forme diverse secondo le corrispondenti espressioni di $d\varepsilon/d\omega$.

È importante notare che gli *sforzi e le conseguenti deformazioni dovute alla elettrostrizione dipendono da E^2 e quindi non cambiano verso quando \mathbf{E} si inverte*.

L'effetto di elettrostrizione è molto piccolo, ma ha talvolta notevole importanza.

Nel caso di liquidi, per esempio, si può mostrare che con buona approssimazione⁽¹¹⁾ è

$$(76) \quad \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} = \varepsilon_0 \frac{(\varepsilon_r + 2)}{3} (\varepsilon_r - 1).$$

Se, per fare un esempio, confrontiamo la situazione in un dielettrico ($\varepsilon_r = 5$) disposto nell'interno di un condensatore (campo $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$, pressione p_2) con quella

⁽¹¹⁾ Per la costante dielettrica di un liquido (non polare) vale con buona approssimazione una formula (Clausius-Mossotti, vedi più avanti) che può scriversi nella forma

$$(77) \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = C\omega,$$

essendo C una costante. Da essa si ha

$$(78) \quad \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = C\omega.$$

Differenziando

$$\frac{3\varepsilon_0}{(\varepsilon + 2\varepsilon_0)^2} d\varepsilon = C d\omega$$

e quindi:

$$\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{\varepsilon_0}{3} (\varepsilon_r + 2)(\varepsilon_r - 1).$$

che si ha in un punto fuori del condensatore ($E_1 = 0$, $p = p_1$) si trova che

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{6} E^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r + 2)(\varepsilon_r - 1) = 0,41 \cdot 10^{-10} E^2,$$

da cui si calcola che per una differenza di pressione di 0,01 atm ($\approx 10^3 \text{ N/m}^2$), E deve essere pari a circa $5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.

c. Forze di volume in un dielettrico non omogeneo in presenza di cariche distribuite in esso ($\rho_{\text{lib}} \neq 0$)

Il caso più generale è quello in cui nel dielettrico stesso esistono delle cariche (densità ρ_{lib}) ed il dielettrico non sia omogeneo cioè abbia costante dielettrica diversa nei vari punti.

Si può procedere come nel caso precedente (punto b) considerando innanzitutto la variazione di energia. Si osservi che nel caso presente $\delta\varepsilon$ è formato oltre che dal termine esaminato precedentemente e che conduce alla elettrostrizione, da un altro dovuto alla disomogeneità del dielettrico. Supponendo che la ε vari con continuità si ha complessivamente:

$$(79) \quad \delta\varepsilon = -\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}) - \operatorname{grad}\varepsilon \cdot \delta\mathbf{u}.$$

Ne segue, considerando anche la presenza di cariche distribuite,

$$(80) \quad \delta\mathcal{U} = - \int_{\tau} \left[\rho_{\text{lib}} \mathbf{E} + \operatorname{grad} \left(\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{E^2}{2} \right) - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad}\varepsilon \right] \cdot \delta\mathbf{u} d\tau$$

e quindi

$$(81) \quad \mathbf{f} = \rho_{\text{lib}} \mathbf{E} + \operatorname{grad} \left(\omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} \frac{E^2}{2} \right) - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad}\varepsilon.$$

La forza per unità di volume è formata da tre termini: il primo è la forza che si esercita sulle cariche disposte nel dielettrico (densità ρ_{lib}); il secondo è quello che conduce alla elettrostrizione già esaminata; il terzo è quello legato al gradiente di ε ed esiste solo ove ε varia (per es. superfici di separazione fra dielettrici diversi).

d. Forze di volume su un dielettrico privo di cariche, trascurando la elettrostrizione

In questo caso la forza di volume per unità di volume è data dal solo terzo termine della (81). In essa si è supposto che ε vari con continuità. Se questo non accade (come al passaggio fra due mezzi) si può immaginare di sostituire la variazione reale con una continua e calcolare il limite della forza quando la distribuzione continua tende a quella discontinua.

Nello studio delle azioni meccaniche di volume di origine elettrica che si esercitano su un dielettrico privo di cariche quando si possa trascurare la elettrostrizione, può riuscire utile usare una espressione per la energia del sistema che si può ottenere abbastanza semplicemente. Più particolarmente la formula che ora dedurremo è utile quando la introduzione del dielettrico in tutto o parte dello spazio fra conduttori avvenga mantenendo costanti le cariche (che creano il campo) su di essi o il loro potenziale.

Se si considera infatti la energia nel mezzo nel caso che esso sia il vuoto (\mathcal{U}_0) o che vi sia il dielettrico (\mathcal{U}) si ha

$$(82) \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0) d\tau.$$

Aggiungendo e sottraendo nell'integrando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0$ si ha

$$(83) \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{D}_0 \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) d\tau.$$

Per il primo integrale si può scrivere⁽¹²⁾:

$$(84) \quad - \int \operatorname{grad} V \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d\tau = - \int \operatorname{div} [V(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)] d\tau + \int V \operatorname{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d\tau.$$

⁽¹²⁾ Vedi *supra* nota⁽⁴⁾ per la regola vettoriale.

Il primo termine al secondo membro della (84) è zero⁽¹³⁾.

Se inoltre supponiamo che il dielettrico sia introdotto mantenendo inalterate le cariche che creano il campo, è

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}_0 = \rho_{\text{lib}}$$

e quindi anche il secondo integrale al secondo membro della (84) va a zero. Si ottiene quindi:

$$(85) \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) d\tau.$$

In maniera analoga a quella prima vista si deduce $1/2 \int_{\tau} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d\tau = 0$; sommando membro a membro questa relazione e la (85)

$$(86) \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}) d\tau.$$

Se si usa la relazione $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$, si ha

$$(87) \quad \begin{aligned} \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 &= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0 d\tau. \end{aligned}$$

Ricordando le (20) e (28):

$$(88) \quad \mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 d\tau.$$

La variazione di energia (diminuzione) conseguente alla introduzione di un dielettrico nel campo elettrico viene espressa mediante il valore del campo elettrico in assenza di dielettrico, e la intensità di polarizzazione nel dielettrico.

Nel caso che l'introduzione del dielettrico in tutto o in parte dello spazio tra o presso i conduttori avvenga mantenendo i conduttori stessi collegati a sorgenti sicché le cariche sui conduttori variano mentre i potenziali restano costanti, si trova che, analogamente ai casi visti nel vuoto, le sorgenti erogano una energia doppia e di segno contrario di quella elettrostatica sicché per la energia totale si ha in questo caso una espressione analoga alla (88) ma con il segno positivo.

Come esempio di applicazione di queste considerazioni prendiamo in esame il caso in cui fra le armature di un condensatore piano venga introdotto uno dei rami di un tubo ad U contenente un liquido (ϵ_r) (fig. 2.5a).

Si nota che all'equilibrio si stabilisce una differenza di livello fra i due rami $2h$ (il livello è più alto nel ramo che si trova nel campo elettrico). Ciò è conseguenza di una forza diretta verso l'alto che si esercita sul liquido a causa della diversa costante dielettrica rispetto al mezzo (gassoso) che si trova nella parte restante dello spazio fra le armature del condensatore.

Il calcolo può essere condotto con la (81) e ciò è necessario per descrivere con completezza il fenomeno. Se tuttavia si vuole solo esprimere h in funzione dei parametri che individuano la situazione elettrica, si può fare uso della (88) esprimendo che all'equilibrio la energia potenziale totale (elettrostatica + meccanica) del liquido nell'interno del condensatore deve avere derivata nulla.

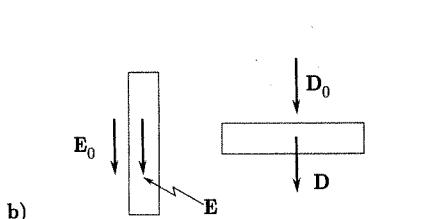
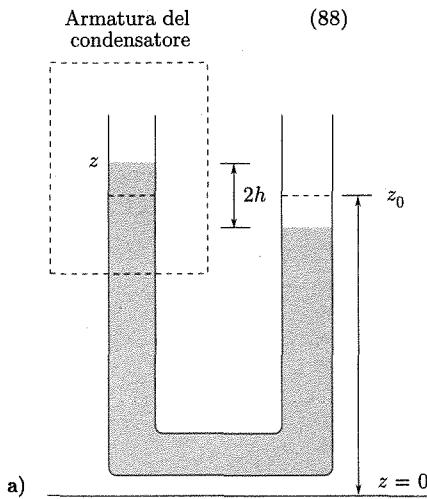


Fig. 2.5

⁽¹³⁾ Applicando il teorema della divergenza

$$\int \operatorname{div}[V(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)] d\tau = \int \operatorname{div}(V \delta \mathbf{D}) d\tau = \int_S V \delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS.$$

La superficie S può essere scelta infinitamente grande: siccome \mathbf{D} e la sua variazione $\delta \mathbf{D}$ sono proporzionali a $1/r^2$ e V a $1/r$, mentre S cresce come r^2 , il flusso di $V \delta \mathbf{D}$ attraverso S è zero.

Supponiamo che nel condensatore vi sia oltre al liquido aria ($\epsilon_r \approx 1$). Indichiamo con z la coordinata verticale rispetto ad un piano orizzontale di riferimento e $h = (z - z_0)$ l'innalzamento della superficie libera del liquido (densità ω) nel ramo inserito nel condensatore. L'aumento dell'energia gravitazionale del liquido nei due rami del tubo è

$$(89) \quad \omega g S(z - z_0)(z - z_0) = \omega g S(z - z_0)^2,$$

essendo S la sezione del tubo.

Per l'energia totale del liquido nel dispositivo si ha quindi:

$$(90) \quad \mathcal{U}_{\text{tot}} = \mathcal{U}_{0,\text{tot}} - \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 d\tau + \omega g S(z - z_0)^2.$$

Il volume τ a cui va esteso l'integrale è quello del liquido inserito nel campo elettrico. Si noti che $d\tau = S dz$; l'integrale si trasforma quindi in un integrale di linea nella coordinata z ed il limite superiore è il valore di z per la superficie libera.

La condizione di equilibrio è

$$(91) \quad \frac{d\mathcal{U}_{\text{tot}}}{dz} = 0,$$

e quindi

$$(92) \quad -\frac{1}{2} S \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 + 2\omega g S(z - z_0),$$

da cui

$$(93) \quad h = z - z_0 = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0}{4\omega g}.$$

Se nel resto del condensatore invece del vuoto vi fosse un altro dielettrico (1), si otterebbe, essendo l'indice 2 per il dielettrico nel tubo,

$$(94) \quad h = (z - z_0) = \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{E}_0}{4\omega g}.$$

Si noti che l'intensità di polarizzazione è legata ad \mathbf{E} e che la relazione fra \mathbf{E} ed \mathbf{E}_0 dipende dalla forma della sezione del tubo e dalla sua posizione nel campo. Se per esempio (fig. 2.5b) tale sezione è rettangolare con due lati molto più grandi degli altri ed i lati lunghi sono paralleli ad \mathbf{E}_0 , si ha:

$$(95) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}_0.$$

Di conseguenza la (93) fornisce:

$$(96) \quad h = \frac{\epsilon_r - 1}{4\omega g} \epsilon_0 E_0^2.$$

Nel caso che il tubo fosse orientato in modo che il lato lungo della sezione fosse normale ad \mathbf{E}_0 , si ha, dalle condizioni alla separazione di due mezzi ($\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0$),

$$(97) \quad \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$$

e

$$(98) \quad h = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{4\omega g}.$$

■ 2.9. INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DELLA POLARIZZAZIONE NEI DIELETTRICI. CAMPO LOCALE

Lo studio dei dielettrici che noi ora faremo è essenzialmente quello classico, giacché le indicazioni che si possono raggiungere con teorie più avanzate (quantistiche) per i processi che considereremo non differiscono sostanzialmente da quelle che si ottengono nella trattazione classica, più semplice. In tale descrizione i mezzi dielettrici materiali possono essere ritenuti costituiti da particelle (atomi, molecole, ioni) tenute in strutture

neutre tali che le cariche di cui tali particelle sono costituite non siano libere di lasciare le particelle cui appartengono e di allontanarsi definitivamente nel mezzo, neanche sotto l'azione di un campo elettrico esterno. Il comportamento dielettrico di questi mezzi dipende

1. dalla costituzione delle particelle che li formano e dalla struttura in cui esse sono tenute;
2. dal valore del campo elettrico (E_{loc}) che effettivamente agisce su di esse quando un campo elettrico esterno viene applicato.

Campo locale E_{loc}

Con E_{loc} non vogliamo intendere un campo microscopico che subisca rapide variazioni nel tempo e nello spazio, ma un valore mediato che peraltro rappresenta adeguatamente l'azione che ciascuna particella risente per gli effetti del campo esterno e della presenza delle altre particelle: esso differisce dal campo macroscopico \mathbf{E} considerato nei paragrafi precedenti, come meglio vedremo in seguito.

Gran parte delle difficoltà che si incontrano nello studio dei mezzi dielettrici aggregati deriva proprio dal fatto che tuttora non si dispone di un adeguato metodo di calcolo per E_{loc} . Per intuire le difficoltà che si incontrano nel determinare E_{loc} si osservi che la intensità di polarizzazione di un dielettrico (\mathbf{P}) dipende da E_{loc} ed il campo locale a sua volta dipende da \mathbf{P} oltre che dal campo esterno. Lorentz ha fatto un calcolo approssimativo, ma esso si mostra spesso inadeguato e solo in pochi casi può essere soddisfacientemente usato.

Per questa ragione noi considereremo dapprima i mezzi dielettrici costituiti da gas non densi, nei quali si può assumere che le particelle non si influenzino reciprocamente e E_{loc} sia pari al campo esterno creato dalle sole cariche libere. Questo ci consentirà di esaminare con semplicità i meccanismi di polarizzazione. Vedremo in seguito il caso dei gas densi, dei liquidi e dei solidi.

2.10. INTENSITÀ DI POLARIZZAZIONE E MOMENTI ATOMICI DI DIPOLO. POLARIZZAZIONE NEI GAS NON DENSI

I mezzi materiali dielettrici, tranne casi particolari, non presentano in assenza di un campo elettrico esterno una polarizzazione netta risultante. Questa invece si presenta quando essi vengono esposti ad un campo elettrico esterno.

Esprimiamo il vettore \mathbf{P} per mezzo del momento medio \mathbf{m} ⁽¹⁴⁾ della singola particella (atomo, molecola), che risulta nella direzione del campo applicato, e del numero N di particelle per unità di volume, con la semplice relazione

$$(99) \quad \mathbf{P} = N\mathbf{m}$$

Noi qui desideriamo vedere come \mathbf{m} , e quindi \mathbf{P} , dipendano dal campo elettrico. Considereremo dapprima dielettrici sotto forma di gas non densi per i quali si può assumere senza grave errore che il campo che ciascuna particella risente (E_{loc}) sia praticamente pari al campo applicato dall'esterno \mathbf{E} (dovuto cioè alle sole cariche libere poste a creare il campo):

⁽¹⁴⁾ Si faccia attenzione al fatto che nel presente capitolo, la lettera m è anche usata per le masse in situazioni ove non vi può essere equivoco.

in tale approssimazione \mathbf{E} è anche il campo macroscopico nel dielettrico; inoltre le nostre considerazioni (tanto per i dielettrici gassosi quanto per i liquidi e solidi, par. 2.11) saranno fatte nell'ipotesi di sostanze isotrope, nelle quali si ha che i vettori \mathbf{E} , \mathbf{P} (e quindi \mathbf{D}) sono paralleli fra loro.

Il momento medio di dipolo \mathbf{m} che una particella di un mezzo dielettrico possiede quando si trova in un campo elettrico è la somma dei contributi derivanti da tre meccanismi diversi e che vanno sotto i nomi di polarizzazione:

- elettronica
- atomica e ionica
- di orientamento.

Quest'ultimo meccanismo esiste solo se le particelle posseggono un dipolo proprio indipendentemente dal campo elettrico.

Ci proponiamo di esaminare i tre meccanismi, facendo per il momento riferimento al caso di gas poco densi ($\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}$).

a. Polarizzazione elettronica

Si consideri per semplicità il caso di un gas monoatomico (per es. elio). I singoli atomi hanno una carica positiva concentrata nel nucleo ed una carica negativa costituita dagli elettroni: sebbene questi si muovano, ciò avviene così rapidamente che, ai fini delle considerazioni che intendiamo svolgere, si può pensare che la carica negativa abbia una distribuzione statica intorno al nucleo. Tale distribuzione si ottiene assegnando ad ogni punto una frazione della carica di un elettrone pari alla frazione di tempo spesa in media da quell'elettrone in quella posizione, cioè pari alla probabilità di trovare in esso ad un certo istante l'elettrone⁽¹⁵⁾. Fuori da campi elettrici esterni il centro delle cariche negative coincide con la posizione del nucleo e l'atomo è, oltre che a carica totale nulla, privo di momento di dipolo. Se ora un campo elettrico viene applicato, la azione di questo si esercita in versi opposti sul nucleo e sugli elettroni: si ha una deformazione che procede finché la forza di attrazione coulombiana fra nucleo ed elettrone non equilibra la forza esercitata dal campo esterno. In prima approssimazione, e per piccoli spostamenti, la forza di origine coulombiana che sollecita elettroni e nucleo e tende a riportarli nella condizione originaria, dipende linearmente dallo spostamento e quindi può essere considerata come una forza elastica di richiamo (la cui costante indichiamo con k). Questo è vero fintantoché la forza esercitata dal campo elettrico esterno sull'elettrone è molto piccola in confronto alla forza coulombiana di attrazione fra elettrone e nucleo.

Una giustificazione semplice e classica della dipendenza lineare fra forze e spostamento ora detta può ottenersi pensando che l'atomo sia approssimativamente costituito da un nucleo di carica $(+Ze)$ e da una distribuzione uniforme della carica negativa $(-Ze)$ in una sfera di raggio a (fig. 2.6a). Se il centro della sfera coincide con il nucleo nessuna forza si esercita. Se invece v'è uno spostamento relativo (x) si può determinare il campo che si esercita sul nucleo considerando il caso della

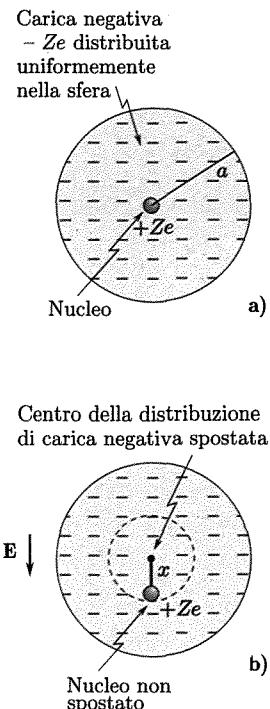


Fig. 2.6

⁽¹⁵⁾ Il centro di carica della distribuzione va calcolato con criteri analoghi a quello del centro di massa delle distribuzioni di masse (vol. I, cap. 4, par. 4.2).

distribuzione uniforme di carica negativa nella sfera di raggio a ⁽¹⁶⁾. Si trova

$$(100) \quad E' = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} x$$

e quindi la forza sul nucleo risulta

$$(101) \quad F = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} x = -kx.$$

Una forza uguale ed opposta si esercita sulla distribuzione di carica negativa.

In seguito alla applicazione del campo elettrico statico il nucleo ed il centro di carica negativa non coincidono più, ma si trovano ad una distanza \bar{x} data da

$$(102) \quad ZeE - k\bar{x} = 0.$$

Il sistema, avente carica totale netta nulla, equivale ad un dipolo indotto che, nei limiti delle approssimazioni poste (finché il campo applicato non è molto grande), risulta diretto come il campo e proporzionale ad E

$$(103) \quad |\mathbf{m}_{ie}| = Ze\bar{x} = \alpha_e |\mathbf{E}|.$$

Polarizzabilità

Il coefficiente α_e prende il nome di polarizzabilità elettronica. La polarizzabilità è misurata in farad \times m². Essa è indipendente dalla temperatura: quest'ultima infatti non influenza la distribuzione degli elettroni. Sebbene noi abbiamo fatto riferimento a campi elettrici statici per la definizione di α_e , tale parametro può essere considerato anche per i campi elettrici applicati che variano (per es. sinusoidalmente). Si trova che α_e ha lo stesso valore statico fino a frequenze nel campo dell'ultravioletto (10^{15} Hz). Questa circostanza va spiegata tenendo presente che la polarizzazione elettronica deriva da una deformazione nella quale sono gli elettroni quelli che si muovono rispetto a nuclei massivi: dato che la loro massa è piccola, il loro moto segue senza ritardo anche rapide variazioni del campo.

Un calcolo *classico* di α_e , più generale di quello che potrebbe basarsi sulle (101) e (103), si può facilmente eseguire. Si è già riconosciuto che purché i campi applicati non siano molto elevati e le deformazioni restino piccole, la deformazione dell'atomo produce forze elastiche di richiamo e si può pensare, in prima approssimazione, che la distribuzione di carica negativa (di massa complessiva m) si muova come un tutt'uno rispetto al nucleo fermo. La distribuzione di carica negativa, dotata di massa e sottoposta ad una forza elastica di richiamo, si comporta come un oscillatore armonico le cui oscillazioni libere sono descritte dall'equazione

$$(104) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

(16) La densità di carica spaziale nella sfera di volume $V = (4/3)\pi a^3$ risulta

$$\rho = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi a^2}.$$

Se si vuole calcolare il campo E' in un punto interno alla sfera di raggio a , distante x dal suo centro, si consideri la sfera concentrica di raggio x (volume $(4/3)\pi x^3$, superficie $4\pi x^2$) e si applichi il teorema di Gauss alla sua superficie. Per ragioni di simmetria il modulo E' è costante sui punti di tale superficie. Ne segue

$$\phi(E) = 4\pi x^2 E' = \frac{-Ze}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi x^3 \frac{1}{\epsilon_0}$$

da cui la (100).

ed avvengono con pulsazione

$$(105) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La (105) può essere usata per esprimere k in funzione di ω_0 . La α_e risulta dalle (102), (103), (105)

$$(106) \quad \alpha_e = \frac{m_{ie}}{E} = \frac{Ze\bar{x}}{E} = \frac{(Ze)^2}{k} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2}.$$

Per vedere la dipendenza di α_e dalla frequenza si osservi che se un campo elettrico di pulsazione ω sollecita l'oscillatore, si hanno oscillazioni forzate che sono descritte dall'equazione seguente, se non vengono considerati effetti dissipativi:

$$(107) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = ZeE(t).$$

La soluzione della (107) fornisce

$$x = \frac{ZeE(t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}.$$

Risulta di conseguenza per la α_e alla frequenza ω

$$(108) \quad \alpha_e = \frac{(Ze)^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

La (108) indica l'esistenza di un fenomeno di risonanza in corrispondenza a $\omega = \omega_0$. Per $\omega \ll \omega_0$, α_e ha il valore statico (106).

Per avere l'ordine di grandezza di α_e statico possiamo considerare il caso particolarmente semplice dell'atomo di idrogeno e fare l'approssimazione molto grossolana che l'energia dell'oscillatore, $h\nu_0 = h\omega_0/2\pi$, sia dell'ordine dell'energia di ionizzazione, cioè dell'energia necessaria ad allontanare l'elettrone dal nucleo. Si trova allora

$$(109) \quad \frac{h\nu_0}{2\pi} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$

ω_0 è dell'ordine di 10^{16} ed α_e per $\omega \ll \omega_0$ risulta circa $7 \cdot 10^{-42}$ farad \cdot m 2 , in accordo con l'esperienza.

La tabella 2.1 dà i valori di α_e per i gas nobili.

b. Polarizzazione atomica o ionica

La polarizzazione elettronica è stata da noi considerata per atomi singoli: in tal caso essa è l'unica esistente. Nel caso di aggregati atomici, quali sono le molecole (od alcuni ioni), il meccanismo della polarizzazione elettronica è sempre operante: l'azione del campo sugli elettroni e sui nuclei produce uno spostamento relativo dei corrispondenti centri di carica (positiva e negativa). Negli aggregati atomici tuttavia si presentano altri due processi che hanno importanza nel determinare il vettore \mathbf{m} , cioè due altri tipi di polarizzazione: 1. atomica o ionica e 2. di orientamento.

Nelle molecole gli atomi sono uniti mediante legami di vario genere, i quali influenzano in maniera fondamentale le distribuzioni di cariche: nel caso di legami ionici (per es. HCl, NaCl ecc.) le cariche degli atomi isolati si distribuiscono in modo da condurre alla formazione di ioni (H^+ , Na^+ , Cl^-) e sono proprio le forze elettrostatiche fra gli ioni di segno opposto quelle che determinano il legame; nel caso di legami covalenti le molecole (per es. CCl_4) assumono configurazioni spaziali caratteristiche in dipendenza degli atomi legati e ciò produce distribuzioni particolari di cariche nello spazio. In alcune molecole (dette perciò polari) il centro delle cariche positive non coincide con quello delle cariche negative, già in assenza di campi

Tabella 2.1

	$\alpha_e \cdot 10^{40}$ (farad \cdot m 2)
He	0,22
Ne	0,43
Ar	1,80
Kr	2,73
Xe	4,33

esterni; esse sono pertanto dotate di un momento di dipolo proprio (μ_p). La maggior parte delle molecole come quelle simmetriche (H_2 , H_2S , CCl_4 ecc.) non hanno tuttavia momento proprio.

L'applicazione di un campo esterno può alterare la posizione relativa degli ioni e degli atomi in una molecola e produrre, in tale maniera un nuovo momento di dipolo ($\mathbf{m}_{i,a}$) indotto. Nel caso delle molecole ioniche (per es. $NaCl$) la distanza fra i due ioni varia. Nel caso di altre molecole (per es. CCl_4) gli angoli formati dai legami che tengono gli atomi (per es. C — Cl nel caso del CCl_4) possono variare facendo sì che i centri delle distribuzioni di carica positiva e negativa non coincidano più. La corrispondente polarizzabilità (α_a) si chiama atomica o ionica.

La trattazione della deformazione ora accennata delle molecole in campo elettrico va fatta, classicamente, in maniera perfettamente analoga a quella della deformazione elettronica e il momento di dipolo indotto si può esprimere ancora mediante la (103) sostituendo α_a ad α_e .

La polarizzabilità atomica (o ionica) può essere legata alle caratteristiche delle molecole con una trattazione analoga a quella vista per la polarizzabilità elettronica negli atomi. Le masse che qui entrano sono quelle di atomi o ioni e quindi molto maggiori di quelle elettroniche; di conseguenza i fenomeni di risonanza avvengono a frequenze più basse di quelle della risonanza elettronica. In genere α_a può essere ritenuta costante fino alle frequenze delle onde infrarosse.

Al pari della polarizzazione elettronica, il meccanismo della polarizzazione atomica non dipende dalla temperatura. Per molte molecole ioniche α_a è dell'ordine di $0.1\alpha_e$.

c. Polarizzazione di orientamento

Nel caso di molecole polari⁽¹⁷⁾, un terzo meccanismo può contribuire alla polarizzazione dielettrica del mezzo. Le singole molecole siano dotate di un dipolo proprio e siano, in assenza di campi esterni, libere di ruotare. In tal caso, se si considera un dielettrico gassoso (poco denso, come si è supposto) fuori da un campo elettrico esterno ed in condizioni di equilibrio termico, le molecole sono disposte a caso ed i loro dipoli sono diretti in tutte le direzioni: nessun momento risultante per unità di volume esiste. Qualora un campo elettrico venga applicato una azione orientatrice si esercita sui dipoli; essi tendono cioè ad orientarsi nella direzione e nel verso del campo. Tale azione è ostacolata dall'agitazione termica che tende invece a ristabilire la distribuzione a caso. Ne consegue una situazione nella quale il momento medio per particella (\mathbf{m}_0) è diverso da zero e diretto come il campo applicato. Entro limiti abbastanza vasti \mathbf{m}_0 risulta proporzionale al campo agente sulla singola molecola

$$(110) \quad \mathbf{m}_0 = \alpha_0 \mathbf{E}$$

Polarizzabilità
di orientamento

α_0 è la polarizzabilità di orientamento. Il suo calcolo, nella maniera classica, segue quello fatto da Langevin per il paramagnetismo.

⁽¹⁷⁾ I momenti di dipolo propri delle molecole sono dell'ordine di 10^{-30} coulomb · m; si è trovato utile per esprimere i debye che è un sottomultiplo del coulomb · m

$$1 \text{ debye} = 10^{-30} \text{ coulomb} \cdot \text{m}$$

Per esempio per l'acqua $\mu_p = 1,84$ debye, per il KCl $\mu_p = 10,5$ debye.

Si consideri un gas formato da N particelle, ciascuna dotata di un momento di dipolo di modulo μ_p . L'energia potenziale di un dipolo orientato in modo da formare l'angolo θ con il campo \mathbf{E} (fig. 2.7a) è

$$\mathcal{E} = -\mu_p \cdot \mathbf{E} = -\mu_p E \cos \theta$$

ed è minima quando μ_p è orientato come \mathbf{E} .

Il numero di particelle, fra le N , che posseggono energia fra \mathcal{E} ed $(\mathcal{E} + d\mathcal{E})$ è dato, secondo la statistica classica di Boltzmann (vol. I, cap. 15, par. 15.11) da:

$$dN = ce^{-\mathcal{E}/kT} d\mathcal{E}.$$

In conseguenza dell'espressione di \mathcal{E} , tali particelle sono anche quelle che hanno il loro momento di dipolo orientato, rispetto ad \mathbf{E} , con un angolo tra θ e $(\theta + d\theta)$, figura 2.7b. Si ha:

$$(111) \quad dN = ce^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \mu_p E \sin \theta d\theta.$$

La costante c si determina imponendo la condizione che integrando dN per tutte le energie possibili, cioè per θ che varia fra 0 e π , si deve ottenere il numero totale N di particelle del sistema:

$$(112) \quad N = c \int_0^\pi e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \mu_p E \sin \theta d\theta$$

Volendo calcolare il momento risultante per le N particelle (che risulta essere nella direzione di \mathbf{E}), si deve osservare che il contributo delle dN particelle i cui momenti μ_p formino un angolo con \mathbf{E} fra θ e $(\theta + d\theta)$ è

$$(113) \quad dN \mu_p \cos \theta = \mu_p \cos \theta c e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \mu_p E \sin \theta d\theta.$$

Si ottiene per il momento risultante delle N particelle, nella direzione di \mathbf{E}

$$\mu_p^2 c E \int_0^\pi \cos \theta e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \sin \theta d\theta.$$

Indicando con m_0 il valore medio del momento di dipolo per particella si può scrivere:

$$m_0 = \frac{1}{N} \mu_p^2 c E \int_0^\pi \cos \theta e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \sin \theta d\theta$$

e quindi, usando la (112)

$$\frac{m_0}{\mu_p} = \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{(\mu_p E \cos \theta)/kT} \sin \theta d\theta}.$$

Se si pone

$$\cos \theta = x$$

$$\frac{\mu_p E}{kT} = a$$

si ha

$$(114) \quad \frac{m_0}{\mu_p} = \frac{\int_{-1}^1 x e^{ax} dx}{\int_{-1}^1 e^{ax} dx} = \cotan a - \frac{1}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = L(a)$$

Si ottiene

$$(115) \quad m_0 = \mu_p L\left(\frac{\mu_p E}{kT}\right) = \mu_p L(a).$$

La funzione $L(a)$ è chiamata funzione di Langevin ed è rappresentata in figura 2.8. Per valori molto elevati del campo (e quindi di $a = \mu_p E/kT$) la funzione tende al valore asintotico 1. In tal caso $m_0 = \mu_p$; ciò significa che tutti i dipoli molecolari sono orientati nella direzione del campo; la

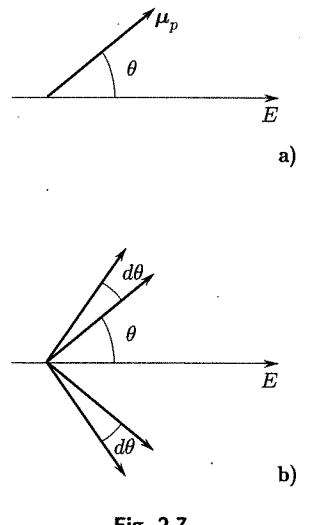


Fig. 2.7

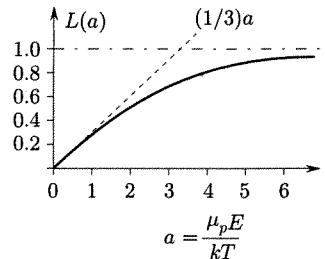


Fig. 2.8

corrispondente intensità di polarizzazione $P = Nm_0$ (essendo N il numero di molecole per unità di volume) avrebbe il valore massimo possibile, di saturazione:

$$(116) \quad P_s = N\mu_p.$$

In realtà nei casi normali, quando il campo applicato (\mathbf{E}) non ha valori eccezionalmente intensi e la temperatura non è molto bassa, risulta $a \ll 1$ e la funzione di Langevin è bene approssimata dalla retta:

$$(117) \quad L(a) = \frac{a}{3}.$$

Per es. con $E = 3 \cdot 10^7 \text{ V/m}$, temperatura ambiente ($kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ joule}$) e $\mu_p = 4 \text{ debye}$, si ha $\mu_p E / kT = a = 0,1$. Quando è valida la approssimazione (117) si ha

$$(118) \quad m_0 = \frac{\mu_p^2 E}{3kT}$$

e quindi

$$(119) \quad \alpha_0 = \frac{\mu_p^2}{3kT}.$$

La polarizzabilità risulta inversamente proporzionale a T ⁽¹⁸⁾.

La polarizzazione per orientamento fu considerata per la prima volta da Debye (1910) al fine di spiegare le alte costanti dielettriche riscontrate in alcuni casi (per es. acqua, sia allo stato di vapore sia in quello liquido) e la loro dipendenza dalla temperatura. Si ricordi a tale proposito che le polarizzabilità elettronica ed ionica non dipendono dalla temperatura e non possono essere quindi le sole presenti quando la intensità di polarizzazione varia con T .

È importante notare che, a seguito di una variazione del campo applicato, il nuovo valore del momento di dipolo per orientamento non viene stabilito istantaneamente a causa dell'inerzia di rotazione delle molecole. Si ha un tipico fenomeno di rilassamento e la nuova posizione viene raggiunta asintoticamente con legge esponenziale. V'è da considerare un *tempo di rilassamento* (τ) caratteristico del tipo di molecola e dello stato del sistema (tanto più grande quanto maggiore è il momento di inerzia della molecola, e quanto maggiore è la viscosità del mezzo): esso esprime il tempo richiesto, dopo una subitanea variazione del campo, perché la differenza fra valore istantaneo di m_0 ed il nuovo valore di equilibrio si riduca nel rapporto $1/e$. La esistenza del rilassamento dielettrico è importante, oltre che per la caratterizzazione dei transitori che seguono improvvise variazioni del campo applicato, anche, e specialmente, per l'andamento dei processi in campo variabile. Se si applica un campo sinusoidale, la conseguente polarizzazione del dielettrico può essere notevolmente diversa secondo la frequenza. Se il periodo di \mathbf{E} è grande rispetto a τ , le molecole hanno tutto il tempo per riaggiustarsi in seguito alle variazioni di \mathbf{E} ; di conseguenza \mathbf{m}_0 (e \mathbf{P}) seguono \mathbf{E} senza sfasamento: la polarizzabilità ha lo stesso valore che per campi continui. Se il periodo di \mathbf{E} è molto più piccolo (frequenze alte) di τ , l'inerzia di rotazione delle molecole impedisce loro

Rilassamento

(18) Questo risultato è stato ottenuto classicamente ed è perfettamente confermato dalla trattazione quantistica.

di seguire le variazioni del campo e tutto va come se la polarizzazione di orientamento fosse nulla ($\alpha_0 = 0$). Se infine il periodo di \mathbf{E} è dello stesso ordine di τ , α_0 ha un valore intermedio fra quello per campo continuo e zero; \mathbf{m}_0 segue \mathbf{E} con un *ritardo di fase* ed a ciò si associa una perdita di energia. Questo processo di rilassamento è analogo a quelli di rilassamento termico o strutturale descritti nella propagazione di onde elastiche longitudinali in un fluido (vol. I, cap. 9, par. 9.9). Esso è stato studiato da Debye. I tempi di rilassamento sono dell'ordine di 10^{-11} sec e quindi la regione in cui α_0 cambia con la frequenza (dispersione) è di solito nel campo delle microonde ($\lambda \sim 1$ cm).

Siamo ora in condizioni di discutere il comportamento di dielettrici costituiti da gas non densi in un campo elettrico. Per essi tanto il momento medio per particella quanto il vettore intensità di polarizzazione sono, nel caso generale, costituiti dalla somma dei tre contributi dovuti alle polarizzazioni elettronica, atomica e di orientamento

$$(120) \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_0 = N\mathbf{m}$$

$$(121) \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_{ie} + \mathbf{m}_{ia} + \mathbf{m}_0 = \alpha\mathbf{E}$$

$$(122) \quad \alpha = \alpha_e + \alpha_a + \alpha_0.$$

Consideriamo dapprima il comportamento in campi costanti. Delle tre polarizzabilità solo α_0 è funzione della temperatura e, in base alla (119), si può scrivere

$$(123) \quad \alpha(T) = (\alpha_e + \alpha_a) + \frac{\mu_p^2}{3kT} = \text{cost} + \frac{\mu_p^2}{3kT}.$$

Lo studio di $\alpha(T)$ può quindi consentire di separare α_0 dagli altri due addendi e di determinare il momento proprio delle molecole. In realtà a questo scopo conviene usare invece delle polarizzabilità le costanti dielettriche relative, che sono le quantità in genere ottenute dall'esperienza (per esempio misurando la capacità di condensatori il cui dielettrico è quello in misura).

Dalla relazione

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$$

e dalle (120), (121), (122) si ha

$$(124) \quad (\epsilon_r - 1) = \frac{N\alpha}{\epsilon_0}.$$

La figura 2.9 (Sänger) riporta i valori di $(\epsilon_r - 1)$ misurati in alcuni vapori in funzione di $1/T$. Si vede chiaramente che nel caso di molecole ($\text{CCl}_4, \text{CH}_4$) prive di momento proprio, $(\epsilon_r - 1)$ e quindi α non dipendono dalla temperatura: il valore di α è la somma delle polarizzabilità elettronica ed atomica. Nel caso degli altri vapori considerati in figura i risultati delle misure sono disposti su rette inclinate come indica la teoria di Debye. Dal coefficiente angolare di tali rette si può calcolare μ_p .

*Comportamento
dei dielettrici gassosi
non densi*

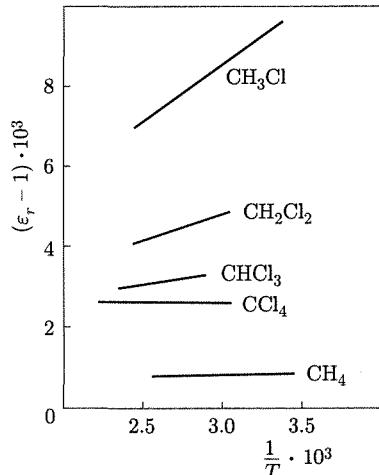


Fig. 2.9

*Comportamento
della costante dielettrica
con la temperatura*

*Comportamento
della polarizzabilità
in frequenza*

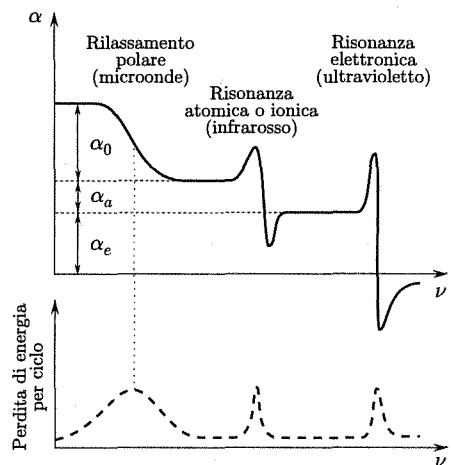


Fig. 2.10

Nel caso di campi variabili la polarizzabilità (e la costante dielettrica) può assumere valori diversi secondo la frequenza. Si è infatti visto che:

1. il contributo di *orientamento* è soggetto ad un processo di *rilassamento* che lo annulla a frequenze elevate: la frequenza di rilassamento è nel campo delle microonde;
2. i contributi *atomici* (o ionici) ed *elettronici* presentano fenomeni di *risonanza* in corrispondenza ai quali α e quindi ϵ_r variano notevolmente in maniera caratteristica; le frequenze di risonanza sono nell'infrarosso per la polarizzabilità atomica o ionica e nell'ultravioletto per quella elettronica.

La figura 2.10 indica in maniera qualitativa l'andamento di α che si riscontra in funzione della frequenza a causa dei processi indicati⁽¹⁹⁾. È evidente che se fosse possibile misurare α in un campo di frequenze molto vasto sarebbe possibile separare i vari contributi. Nella figura sono indicate qualitativamente anche le perdite di energia associate ai processi.

Vogliamo infine ricordare che nel calcolo classico della risonanza elettronica noi abbiamo considerato tutti gli elettroni assieme e ne risulta un'unica risonanza. In realtà vanno considerati numerosi oscillatori elettronici separati e di conseguenza si hanno molte risonanze distinte per α_e a frequenze nel campo ultravioletto⁽²⁰⁾. È importante osservare che nel campo delle frequenze ottiche la costante dielettrica deriva in maniera quasi esclusiva dalla polarizzabilità elettronica.

■ 2.11. POLARIZZABILITÀ E COSTANTE DIELETTRICA DI MEZZI DENSIDI

La trattazione quantitativa del comportamento di mezzi dielettrici densi (gas densi, liquidi, solidi) è molto più complicata di quella vista per i gas non densi, pur rimanendo i meccanismi che danno origine alla polarizzazione in genere i medesimi. La ragione di ciò sta nella difficoltà di portare adeguatamente in conto le azioni che su una particella esercitano i dipoli corrispondenti alle altre particelle del mezzo.

È bene innanzitutto distinguere chiaramente fra il campo elettrico macroscopico definito, nella trattazione generale dei dielettrici, mediante le cariche libere (esterne al dielettrico) che sono la causa prima del campo e tutte le cariche di polarizzazione, ed il campo locale che rappresenta l'azione in corrispondenza alla posizione della particella (atomo, molecola, ione), delle cariche libere e di tutte le cariche di polarizzazione eccezion fatta per il dipolo formato dalla particella stessa.

⁽¹⁹⁾ Le variazioni con la frequenza della costante dielettrica, ϵ_r , in accordo con la (124), sono analoghe; il valore limite per $\nu \rightarrow \infty$ è $\epsilon_r = 1$.

⁽²⁰⁾ Il calcolo classico fa vedere con semplicità la esistenza dei fenomeni di risonanza e spiega qualitativamente l'andamento dei processi osservati. È bene notare tuttavia che l'analisi rigorosa della situazione va fatta con i metodi della meccanica quantistica esaminando gli stati consentiti al sistema elettronico e le transizioni fra essi.

*Distinzione fra campo
macroscopico e campo
locale*

Una approssimazione spesso usata per calcolare il campo locale (\mathbf{E}_{loc}) agente su una particella, cioè il risultante del campo dovuto alle cariche esterne al mezzo (\mathbf{E}_0) e del campo (\mathbf{E}_p) dovuto alle cariche di polarizzazione di tutte le particelle eccezione fatta di quella in esame

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$$

è quella suggerita da Lorentz. Essa consiste nel trattare:

- a. *microscopicamente* le azioni dei dipoli⁽²¹⁾ compresi in una sfera, di raggio molte volte (per es. 100) la distanza media fra le particelle, e che circonda la particella in oggetto;
- b. *macroscopicamente* le azioni delle rimanenti particelle del mezzo.

Trattare macroscopicamente significa supporre che le azioni siano equivalenti a quelle delle distribuzioni superficiali delle cariche di polarizzazione sulle superfici limiti del dielettrico dal quale si pensa asportata la sfera di cui in a. Nel caso, corrispondente alle condizioni delle comuni esperienze, come quando il dielettrico riempia completamente un condensatore piano alimentato a tensione costante e purché il dielettrico sia isotropo o a reticolo cubico si trova che

$$(125) \quad \mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} .$$

Campo di Lorentz

Il campo locale supera in questo caso il campo macroscopico \mathbf{E} . L'espressione (125) prende il nome di *campo di Lorentz*. È bene dire chiaramente che esso costituisce una approssimazione che solo talvolta consente di ottenere risultati in accordo con l'esperienza, limitatamente alle polarizzazioni indotte (elettronica ed ionica). Molto spesso l'approssimazione di Lorentz non va bene: si ritiene che ciò dipenda da una sovrapposizione delle distribuzioni di carica delle particelle, non portata in conto nel calcolo di Lorentz, e dal fatto che il campo dei dipoli atomici, se considerato a distanze dai dipoli che sono solamente di pochi angstrom, non è affatto omogeneo⁽²²⁾. Va inoltre osservato che il campo di Lorentz non può essere usato, neanche approssimativamente, come campo orientante nel caso di sostanze polari; cioè è dovuto al fatto che in questo caso i dipoli non sono affatto paralleli fra loro ed al campo applicato come viene ammesso nella derivazione del campo di Lorentz. Onsager, cui è dovuta la precedente osservazione, ha sviluppato un'altra teoria per le sostanze polari. Occorre tenere bene presente le difficoltà che si incontrano nel descrivere adeguatamente il campo locale, nell'esame dell'interpretazione delle proprietà dei dielettrici densi.

In ogni caso i meccanismi di polarizzazione sono gli stessi di quelli visti per i gas non densi e vale la (120)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_0 .$$

Consideriamo separatamente i casi delle sostanze non polari e di quelle polari.

⁽²¹⁾ Nel calcolo di Lorentz si suppone che i dipoli delle particelle nella sfera siano paralleli.

⁽²²⁾ Questa circostanza rende addirittura dubbio che si possa sempre ritenere il momento di dipolo indotto proporzionalmente al campo come asserisce la (103).

a. Sostanze non polari

In questo caso il campo di Lorentz è una approssimazione che vale, di solito, abbastanza bene. Si hanno allora le relazioni

$$\mathbf{P} = N(\alpha_e + \alpha_a)\mathbf{E}_{\text{loc}} = N\alpha\mathbf{E}_{\text{loc}}$$

$$(126) \quad \mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$$

che forniscono per ϵ_r la cosiddetta relazione di Clausius-Mossotti:

*Relazione
di Clausius-Mossotti*

$$(127) \quad \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$$

N è il numero di particelle per unità di volume. Se si moltiplicano i due membri per M/ρ (essendo M il peso molecolare, od atomico, e ρ la densità) e si indica con N_0 il numero di Avogadro, si ha la quantità

$$(128) \quad \frac{N_0\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho}$$

che prende il nome di polarizzabilità molecolare.

La relazione (127) consente di spiegare abbastanza bene la esperienza sia nei gas densi, sia nei liquidi non polari. Innanzi tutto, in accordo con essa e con quanto è stato detto circa α_e ed α_a , non si riscontra sperimentalmente una variazione della polarizzabilità con la temperatura.

La tabella 2.2 dà i valori sperimentali di $(\epsilon_r - 1)$ per vari gas non polari alla pressione di una atmosfera: per confronto sono indicati i valori anche per alcuni gas polari (per i quali $\mu_p \neq 0$).

A queste pressioni $(\epsilon_r - 1)$ è nei gas non polari molto piccolo e quindi nel denominatore della (127) si può sostituire $(\epsilon_r + 2)$ con 3. Ciò rende la (127) coincidente con la (124). Ciò equivale a ritenere $\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}$ vale cioè l'approssimazione del paragrafo 2.10 (gas non densi). Tale approssimazione non è più valida a pressioni superiori ed occorre usare la (127). La validità della relazione Clausius-Mossotti nei gas densi è stata controllata fino a 1.000 atm.

La applicabilità delle considerazioni svolte al caso dei liquidi non polari e la validità della (127) possono essere dimostrate confrontando i valori sperimentali della costante dielettrica nel liquido (ϵ_{rl}) con quelli calcolati per la stessa sostanza usando la (118) ed i valori trovati per la costante (ϵ_{rg}) allo stato gassoso. Facendo l'ipotesi plausibile che la polarizzabilità in queste sostanze non dipenda dallo stato (gassoso o liquido), la validità della (128) dovrebbe far dipendere ϵ_r semplicemente dal numero N di particelle per unità di volume, cioè dalle densità delle sostanze. La tabella 2.3 dà alcuni risultati del confronto.

Tabella 2.2

	$(\epsilon_r - 1)10^3$	μ_p (debye)
He	0,071	0
H ₂	0,270	0
O ₂	0,531	0
N ₂	0,588	0
CO ₂	0,988	0
CH ₄	0,948	0
CO	0,692	0,10
N ₂ O	1,08	0,17
NH ₃	8,34	1,45
SO ₂	9,93	1,59

Tabella 2.3

	ρ_g	ρ_l	ρ_l/ρ_g	ϵ_{rg}	ϵ_{rl}
					calcolato
A	0,00178	1,44	810	1,000545	1,517
CS ₂	0,00339	1,293	381	1,0029	2,76
O ₂	0,00143	1,19	832	1,000523	1,509
CCl ₄	0,00489	1,59	325	1,0030	2,45
					sperimentale
					1,54
					2,64
					1,507
					2,24

L'accordo è particolarmente buono per le sostanze che posseggono solo α_e .

La situazione è analoga nel caso dei solidi; la relazione Clausius-Mossotti sembra rappresentare bene la situazione nel caso di solidi per i quali esiste solo α_e . Si tratta di solidi costituiti da atomi uguali (elementi). Nel caso di solidi che contengono più di un tipo di atomi in genere anche la polarizzabilità ionica ha importanza e spesso a basse frequenze quest'ultima ha valori maggiori di α_e . In questi casi la (127) non va bene per le ragioni indicate nella discussione su E_{loc} .

Si osservi per quanto riguarda le variazioni di α e di ε_r con la frequenza che valgono le osservazioni svolte per i gas poco densi. Tanto α_e che α_a presentano fenomeni di risonanza; quelli relativi ad α_a avvengono nel campo dell'infrarosso, quelli relativi ad α_e avvengono nell'ultravioletto. Ne segue che a frequenze ottiche l'indice di rifrazione è sempre legato alla costante dielettrica determinata dalla polarizzazione elettronica ($n^2 = \varepsilon_r$). Tale costante dielettrica è quella statica nelle sostanze che presentano solo α_e , può essere invece varie volte (2 ÷ 3) più piccola di quella statica nelle sostanze che hanno anche polarizzazione atomica.

Andamento della polarizzabilità in frequenza

b. Sostanze polari

Nel caso di sostanze dense polari non è possibile usare il campo di Lorentz come approssimazione per E_{loc} : si avrebbero risultati in netto contrasto con l'esperienza. Così per esempio, usando il campo di Lorentz si ottiene in questo caso una relazione analoga a quella di Clausius-Mossotti

$$(129) \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N}{3\varepsilon_0} \left(\alpha_e + \alpha_a + \frac{\mu_p^2}{3kT} \right).$$

Se si usa la (129) per calcolare ε_r per l'acqua dai dati conosciuti per il vapore e la densità, si ottiene un valore negativo, mentre l'esperienza fornisce un valore statico 80. Queste previsioni errate dipendono dal fatto che il campo di Lorentz è più intenso di E_{loc} effettivo. Come si è già accennato, Onsager ha rilevato che ciò è dovuto al fatto che nel calcolo del campo di Lorentz si fa l'ipotesi che i dipoli siano paralleli al campo; nel caso delle sostanze polari ciò non è vero perché fuori dal campo essi sono orientati in tutte le direzioni e l'applicazione del campo (finché non è molto intenso) altera solo di poco la situazione preesistente. Onsager ha calcolato un'altra espressione per E_{loc} (*campo di Onsager*)

$$(130) \quad E_{loc} = E + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r + 1} E = \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1} E.$$

Espressione del campo locale di Onsager

Esso si riduce al campo di Lorentz

$$E + \frac{\varepsilon_r - 1}{3} E = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} E$$

quando $\varepsilon_r \approx 1$. Quando invece ε_r cresce e raggiunge valori grandi, il campo di Onsager tende al valore limite $3/2 E$ mentre quello di Lorentz aumenta indefinitamente. La teoria di Onsager conduce a prevedere una costante dielettrica statica per l'acqua a temperatura ambiente di circa 130; tale valore è in eccesso rispetto a quello sperimentale (80) ma molto più prossimo di quanto previsto con il campo di Lorentz.

Naturalmente anche nel caso di dielettrici polari che siano gas densi o liquidi si presenta il fenomeno di rilassamento illustrato per i gas non densi.

Dielettrici polari solidi

Nel caso di dielettrici polari solidi la situazione è ancora più complicata perché accanto alle difficoltà illustrate relative al campo locale si ha che i dipoli non sono in condizioni di ruotare liberamente in maniera totale o parziale.

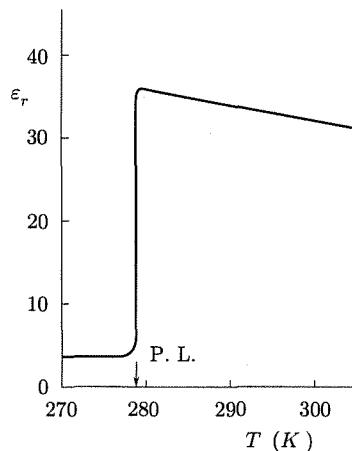


Fig. 2.11

La figura 2.11 (Smith-Hitchcock) riporta per esempio l'andamento della costante dielettrica statica in funzione della temperatura per il nitrobenzolo solido e liquido: in corrispondenza al punto di liquefazione si osserva un improvviso aumento di ϵ_r che viene attribuito al fatto che mentre i dipoli non possono ruotare allo stato solido, ciò avviene allo stato liquido. La diminuzione successiva di ϵ_r al crescere di T è caratteristica della polarizzazione di orientamento.

Per quanto riguarda la variazione della polarizzabilità e della costante dielettrica con la frequenza si verificano per le sostanze polari dense le medesime circostanze viste per i gas polari non densi: le variazioni sono dovute al rilassamento polare (a frequenze delle microonde), alla risonanza ionica (infrarosso) ed alle risonanze del sistema elettronico (ultravioletto). La costante dielettrica a frequenza ottica è di solito quella dovuta esclusivamente alla polarizzazione elettronica ed è, nelle sostanze polari, notevolmente più bassa del valore statico.

Ciò spiega perché l'indice di rifrazione della luce porta a valori di ϵ_r ($n^2 = \epsilon_r$) molto più bassi dei valori statici. Nel caso dell'acqua per esempio ϵ_r ha il valore statico 80 mentre a frequenze ottiche vale $(1,33)^2 \approx 1,77$.

2.12. PERDITE NEI DIELETTRICI E RIGIDITÀ

Quando un campo elettrico variabile è applicato ad un dielettrico si hanno perdite di energia per l'intervento di vari processi. I dielettrici possono differire notevolmente per le perdite in essi e tali perdite dipendono dalla frequenza. Alcune cause di dissipazione sono legate ad imperfezioni del mezzo quali disomogeneità, inclusioni di materiali conduttori od altro, che rendono il processo di polarizzazione più complesso di quello finora descritto; le perdite dovute a queste cause possono essere ridotte curando la purezza dei materiali dielettrici. Altre cause sono legate ai processi elementari di polarizzazione (fig. 2.10) e non possono essere soppresse. Nelle applicazioni pratiche si cerca di usare materiali che nel campo di frequenza di interesse non mostrino rilevanti processi dissipativi. Naturalmente ciò non è sempre possibile.

Quando i dielettrici sono sottoposti a campi di valore gradatamente crescente, si giunge ad un certo punto alla rottura. Nel caso di dielettrici solidi si verifica di solito che a causa di impurità presenti nel dielettrico si producano, in regioni limitate, campi molto più elevati del valore medio e, per effetto delle perdite, temperature piuttosto alte: hanno così inizio correnti di conduzione (elettronica e ionica) che producono ulteriori innalzamenti di temperatura e successivamente di corrente fino a che si raggiungono temperature locali così elevate che il materiale finisce per trasformarsi in qualcosa di simile ad un plasma⁽²³⁾ gassoso e si produce

⁽²³⁾ Mezzo globalmente neutro ma contenente un gran numero di ioni mobili.

la rottura irreversibile. Infatti anche se il campo viene rimosso o ridotto, il materiale è irrimediabilmente alterato nella regione della rottura elettrica. Così per esempio nei materiali isolanti del tipo di ossidi metallici la rottura elettrica rimuove praticamente l'ossigeno dal materiale compreso in un sottile canale; questo, di conseguenza, resta metallico e conduttore.

Per queste ragioni gli isolamenti alle tensioni più elevate non vengono fatti con dielettrici solidi, ma si preferisce usare dielettrici liquidi. In questo caso infatti il materiale può essere fatto circolare in refrigeratori esterni in modo da tenere la temperatura a valori non molto elevati; inoltre quando si verifica una rottura dielettrica lo strappo nel liquido viene eliminato automaticamente una volta che la scarica cessi. Usando infine oli minerali, i prodotti gassosi della scarica sono in genere innocui.

Molto spesso per le applicazioni ha interesse il valore del campo elettrico al quale si produce la rottura in un dielettrico. Questo parametro prende il nome di rigidità dielettrica. Le rigidità dielettriche sono dell'ordine di $50 \div 100 \text{ kV/cm}$ negli oli isolanti: $500 \div 1.000 \text{ kV/cm}$ in solidi quali il vetro, la mica, la porcellana. Per confronto diremo che la rigidità dell'aria è all'incirca 32 kV/cm .

2.13. POLARIZZAZIONE NON LINEARE

Nel caso che il campo elettrico applicato non sia trascurabile rispetto al campo creato dal nucleo sull'elettrone, l'approssimazione espressa dalla (104) che la distribuzione della carica elettronica si comporti come un oscillatore armonico non è più valida. Adesso l'espressione della forza di richiamo non può più essere pensata come una semplice forza elastica. Si può tuttavia pensare che tale forza possa essere espressa come una espansione in serie di potenze di x e scrivere:

$$(131) \quad F = -kx + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots$$

Sostituendo questa espressione della forza nella (104) e risolvendo per x si può alla fine trovare che l'espressione del vettore polarizzazione può essere scritta come una serie di potenze del campo elettrico come

$$(132) \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \chi^{(2)}(\mathbf{E})^2 + \chi^{(3)}(\mathbf{E})^3 + \dots$$

dove $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ sono opportuni coefficienti che prendono il nome di suscettività del secondo e terzo ordine, rispettivamente.

Se consideriamo un atomo d'idrogeno, il campo elettrico sull'elettrone nella sua orbita fondamentale è

$$(133) \quad E = e/4\pi\epsilon_0 a^2 \cong 6 \cdot 10^{11} \text{ V/m}.$$

Nessun campo statico di quest'ordine di grandezza può essere applicato ad un materiale senza che avvengano altri fenomeni che portano alla distruzione del materiale stesso. È possibile invece applicare campi variabili nel tempo, per esempio alternati, con valori di alcuni ordini di grandezza minori del valore dato dalla (133) che sono tuttavia abbastanza intensi da produrre una polarizzazione che può essere espressa dalla (132). Campi di questo genere possono essere quelli delle onde elettromagnetiche, come sarà mostrato più avanti. In questi casi l'espressione della prima equazione di Maxwell deve essere data in termini della polarizzazione scritta nella forma (132) e si ottengono nuovi ed importanti fenomeni come la

creazione di armoniche, frequenze somma e differenza, e altro. Quando questo avviene si parla di ottica non lineare.

■ 2.14. GENERATORE DI VAN DER GRAAFF

Vogliamo accennare brevemente alla esistenza di alcune macchine nelle quali, con sistemi basati essenzialmente su effetti elettrostatici, si riesce ad ottenere una migrazione di carica dall'uno all'altro di due conduttori e quindi una differenza di potenziale fra di essi. Ci limiteremo a presentare il generatore di Van der Graaff che oggi ha una notevole importanza per ottenere differenze di potenziale notevoli (fino a parecchi milioni di volt) e che trova frequente impiego in fisica nucleare e nelle tecniche dei raggi X e della radioterapia.

Prima di descrivere questo generatore è bene riprendere la osservazione fatta nel cap. 1 al par. 1.21 relativa alle distribuzioni del potenziale e del campo elettrico in prossimità delle zone a maggiore curvatura della superficie di un conduttore carico, applicandole al caso in cui il conduttore si trovi in un mezzo dielettrico gassoso, come per esempio l'aria. Se in particolare si considerano due conduttori affacciati di cui uno piano e l'altro a forma di punta aguzza (fig. 2.12) e si applica fra di essi una differenza di potenziale, si ha che il campo (gradiente del potenziale) raggiunge in vicinanza della punta i valori massimi. Questi valori, se la differenza di potenziale applicata è opportuna, possono essere sufficienti a spezzare le molecole del gas in ioni positivi e negativi (o elettroni): gli ioni di segno contrario a quello delle cariche sulla punta sono attratti da queste, giungono sulla superficie metallica e neutralizzano parte delle cariche ivi esistenti. Gli ioni con carica dello stesso segno di quella sulla punta vengono spinti lontano dalla punta. Questo comportamento delle punte si può sinteticamente rappresentare dicendo che tutto va come se la punta perdesse cariche che effondono nello spazio circostante.

Lo schema di una macchina di Van der Graaff è indicato in figura 2.13. Una grande sfera (o un ellissoide) conduttrice cava è sostenuta da colonne che la isolano dal basamento posto a terra. Una cinghia di materiale isolante (plastica, gomma, seta) è tesa fra due pulegge: una inferiore (P_1) è mossa da un motore ed è fuori dalla sfera, l'altra (P_2) è folle sul suo asse ed è disposta nell'interno della sfera. Vi sono quattro elettrodi a punta disposti come in figura e quello esterno inferiore è collegato all'estremo positivo di un generatore (pila) che fornisce una d.d.p. relativamente bassa, ma sufficiente a far sì che la punta dell'elettrodo e_1 perda cariche positive.

Gli ioni positivi aderiscono alla cinghia e sono trasportati in alto: giungendo in vicinanza dell'elettrodo e_3 avviene che questo si polarizza per induzione e la punta perde cariche negative: di conseguenza l'elettrodo e_3 si carica positivamente e la cinghia perde parte delle cariche positive; essa viene privata delle rimanenti cariche positive attraverso la puleggia superiore collegata elettricamente alla sfera cava.

Contemporaneamente l'elettrodo e_4 , collegato anch'esso con la sfera cava, viene polarizzato per induzione dall'elettrodo e_3 e la punta perde cariche negative che sono trasferite alla cinghia e portate in basso. Quando queste cariche arrivano in fronte alla punta dell'elettrodo e_2 esse sono neutralizzate in parte da cariche positive che sono perdute da tale punta: per il resto la cinghia è scaricata dalla puleggia inferiore collegata a terra.

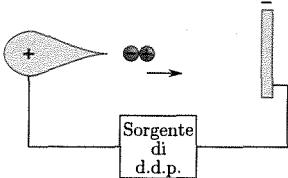


Fig. 2.12

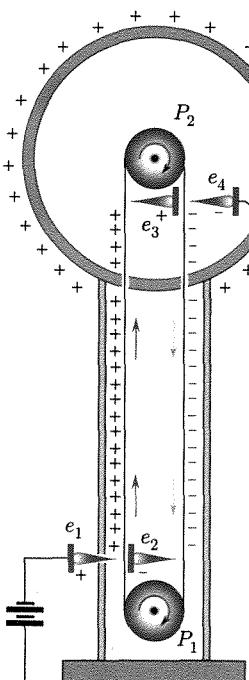


Fig. 2.13

Tutto sommato la sfera cava si carica positivamente sia perché guadagna cariche positive attraverso la puleggia superiore sia perché perde cariche negative attraverso l'elettrodo e_4 ; cariche negative invece sono perdute verso terra attraverso la puleggia inferiore e l'elettrodo e_1 .

In tale maniera la sfera cava si arricchisce a poco a poco di cariche positive: esse naturalmente si distribuiscono sulla superficie esterna della sfera. Si osservi che il lavoro per caricare la sfera è fatto dal motore che muovendo la cinghia costringe le cariche su di essa (positive nella parte ascendente, negative sulla parte discendente) ad avvicinarsi a corpi carichi con cariche dello stesso segno, vincendo la repulsione coulombiana.

Le condizioni di equilibrio vengono raggiunte quando la d.d.p. fra sfera e terra sono tali che le cariche perdute per unità di tempo a causa di imperfetto isolamento od attraverso un eventuale carico che utilizza la d.d.p. creata dalla macchina, uguaglano le cariche portate in un secondo dalla cinghia sulla sfera.

CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE

- ✓ La corrente elettrica è dovuta al movimento delle cariche libere in un conduttore. Verrà data la definizione di densità e di intensità della corrente elettrica. Si passerà quindi a considerare essenzialmente il caso in cui la corrente è costante nel tempo (caso stazionario o corrente continua) e si introdurranno la legge di Ohm, che definisce una classe di conduttori in cui corrente e differenza di potenziale sono tra loro proporzionali (*conduttori ohmici*), l'effetto Joule, che riguarda la dissipazione di potenza in un circuito elettrico ed il concetto di *forza elettromotrice* (f.e.m.).
- ✓ Vengono poi date una serie di regole e di teoremi che permettono la soluzione di *reti elettriche*.
- ✓ La parte finale del capitolo riguarda il comportamento e la spiegazione classica della conduzione in vari mezzi:
 - gas
 - liquidi
 - solidi.
- ✓ Si terminerà con un esempio di corrente lentamente variabile: la *carica e la scarica di un condensatore* a cui possono essere applicate le metodologie introdotte per lo studio delle correnti stazionarie.

■ Correnti elettriche stazionarie

3.

■ 3.1. INTRODUZIONE

Nello studio dell'elettrostatica abbiamo visto che valgono le due relazioni

$$(1) \quad \text{div}(\epsilon_r \mathbf{E}) = \text{div} \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad \left. \right\}$$
$$(2) \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0$$

La prima relazione ha validità generale in tutto l'elettromagnetismo e costituisce una delle quattro equazioni di Maxwell. La seconda, assieme alla relazione equivalente

$$(3) \quad \mathbf{E} = - \text{grad } V,$$

è limitata alla elettrostatica giacché *nel caso di grandezze variabili nel tempo*, in conseguenza dei legami fra campi elettrici e campi magnetici variabili, *il campo elettrico non è più irrotazionale*.

Nel presente capitolo vogliamo introdurre i concetti di corrente elettrica e di densità di corrente e considereremo essenzialmente il caso stazionario. In tali condizioni gli effetti magnetici vengono nuovamente separati da quelli elettrici e la (2) e la (3) continuano a valere.

Allo scopo tuttavia di chiarire dall'inizio le limitazioni della trattazione che qui viene fatta ed indicare l'esistenza e l'importanza di un altro tipo di corrente che si presenta nel caso di processi variabili nel tempo, accenneremo brevemente alle correnti di spostamento, nonostante che solo in seguito (cap. 8, par. 8.2) si avrà la possibilità di porre in evidenza le ragioni che indussero Maxwell a formulare la ipotesi della loro esistenza e di trovare la brillante conferma della esattezza della ipotesi attraverso lo studio delle onde elettromagnetiche.

Il capitolo, pur essendo essenzialmente destinato all'esame delle caratteristiche dei circuiti attraversati da correnti stazionarie (continue), contiene un esempio di applicazione delle relazioni circuitali qui sviluppate per ottenere le equazioni dei circuiti in regime non stazionario.

Vengono infine considerate le principali caratteristiche della conduzione nei solidi, liquidi e gas dandone la spiegazione microscopica su basi puramente classiche.

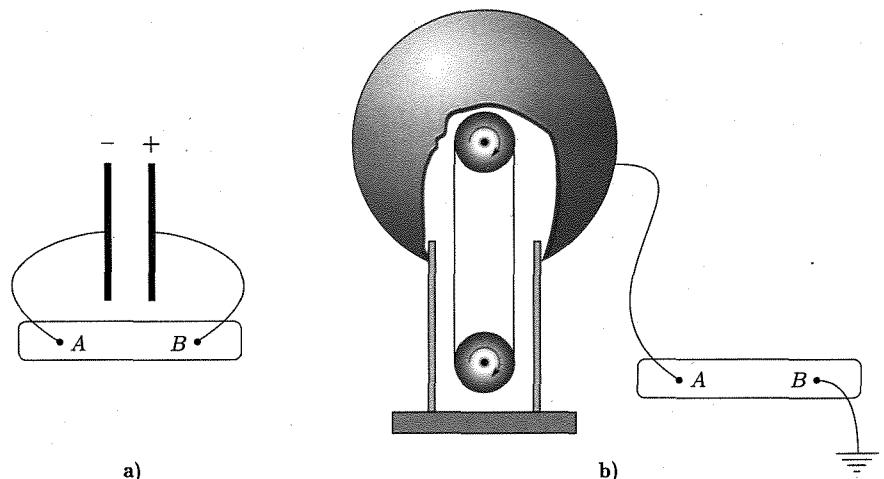


Fig. 3.1

■ 3.2. DENSITÀ ED INTENSITÀ DELLA CORRENTE DI CONDUZIONE

In elettrostatica, il potenziale al quale si trova un conduttore è costante e nessuna forza tende a spostare le cariche presenti sul conduttore stesso. Si supponga ora di stabilire fra due punti di un conduttore una differenza di potenziale: ciò può ottersi collegando i due punti *A* e *B*, mediante conduttori, alle armature di un condensatore carico (fig. 3.1a), oppure al conduttore isolato ed alla terra di una macchina tipo Van de Graaf (fig. 3.1b). In tal caso il campo elettrico nel conduttore non è più nullo, una forza si esercita sulle cariche e quelle libere di muoversi prenderanno a farlo fino a che si raggiunga di nuovo l'equilibrio: si osservi che nel caso del conduttore collegato al condensatore si finisce per raggiungere l'equilibrio quando le cariche uguali e di segno contrario originariamente distribuite sulle armature del condensatore si sono equipartite nel sistema e questo ha raggiunto un potenziale costante; nel secondo caso si possono disporre le cose in modo che la differenza di potenziale fra i punti del conduttore, nonostante il moto delle cariche che tende ad annullarlo, rimanga costante; in tal caso il flusso delle cariche portate dalla cinghia sul conduttore del Van de Graaf a potenziale diverso da quello della terra, compensa le cariche che si allontanano dalla macchina attraverso il conduttore.

Corrente elettrica

Il flusso delle cariche attraverso un conduttore costituisce una corrente elettrica di conduzione. Ad essa sono associati importanti fenomeni, quale una dissipazione di energia che si manifesta in un riscaldamento del conduttore ed un effetto magnetico che sarà esaminato in dettaglio in seguito: possiamo qui per ora semplicemente dire che per tale effetto magnetico una azione meccanica si esercita su un secondo conduttore anche esso attraversato da corrente, qualora si trovi nelle vicinanze del primo conduttore.

Vogliamo ora giungere ad una definizione quantitativa della densità e della intensità della corrente di conduzione. Mettiamoci perciò nel caso più generale, cioè quello in cui il moto delle cariche avvenga in uno spazio tridimensionale qualsiasi. Si osservi che i portatori di carica liberi di muoversi hanno già, in assenza del campo elettrico, un moto disordinato cui corrisponde una velocità di scorrimento media nulla; a questo moto

si sovrappone in presenza di un campo elettrico un moto di scorrimento lungo il campo elettrico che è quello a cui noi siamo qui interessati. Vedremo meglio in seguito come questa situazione possa essere analizzata; diciamo qui semplicemente che si può supporre che il moto di ciascun tipo di portatore in condizioni stazionarie avvenga con una velocità di scorrimento⁽¹⁾ media (v_d) nella direzione del campo elettrico con un modulo che dipende da \mathbf{E} . Il flusso delle cariche in un conduttore può essere rappresentato per mezzo di *linee di flusso*, tangenti in ogni punto alla direzione della velocità di scorrimento in quel punto. È bene osservare che per un conduttore in un dato campo elettrico il verso della velocità di scorrimento in un punto è opposto per cariche positive e cariche negative. In accordo con le convenzioni già usate (forza esercitata dal campo elettrico su una carica q) la velocità di scorrimento risulta positiva (nel verso del campo elettrico e quindi da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale inferiore) per portatori di cariche positive, e negativa per portatori di cariche negative.

Dopo queste premesse possiamo definire il vettore densità di corrente in un punto. Si consideri la linea di flusso di v_d nel punto P ed una superficie elementare dS per P disposta normalmente a v_d . Sia dq la carica che passa attraverso dS nel tempo dt . Si definisce come vettore densità di corrente in P , un vettore \mathbf{j} diretto come la linea di flusso (e v_d) ed avente come modulo

$$(4) \quad |\mathbf{j}| = \frac{dq/dt}{dS}.$$

Nel caso che il campo vettoriale v_d intorno a P non vari rapidamente nel tempo e nello spazio si può approssimativamente dire che il vettore \mathbf{j} rappresenta la carica che passa in un secondo attraverso una superficie unitaria disposta normalmente a v_d in P . La figura 3.2a si riferisce ad una tale schematizzazione nell'ipotesi che si abbia un solo tipo di portatori di carica.

Naturalmente \mathbf{j} può facilmente porsi in relazione con le velocità di scorrimento delle cariche libere di muoversi.

Supponiamo che siano presenti varie specie di portatori aventi ciascuna carica q_1, q_2, q_3 , velocità di scorrimento di moduli $v_1, v_2, v_3 \dots$ e densità (numero per unità di volume) $n_1, n_2, n_3 \dots$ Il contributo di ciascuna specie alla carica che passa attraverso dS nel tempo dt è pari alla carica complessiva dei portatori contenuti in un cilindro di base dS e altezza vdt cioè $(n q v dS dt)$ (fig. 3.2b). Si ha quindi:

$$(5) \quad |\mathbf{j}| = \frac{1}{dS} \frac{dq}{dt} = n_1 q_1 v_1 + n_2 q_2 v_2 + n_3 q_3 v_3 + \dots$$

Si osservi che i vari addendi sono tutti positivi perché per ciascun portatore q e v hanno lo stesso segno.

Nel caso in particolare in cui siano presenti solo due tipi di portatori rispettivamente positivi (p, q^+, v^+) e negativi (n, q^-, v^-), si ha:

$$(6) \quad \mathbf{j} = p q^+ \mathbf{v}^+ + n q^- \mathbf{v}^-.$$

Velocità di scorrimento

Vettore densità di corrente

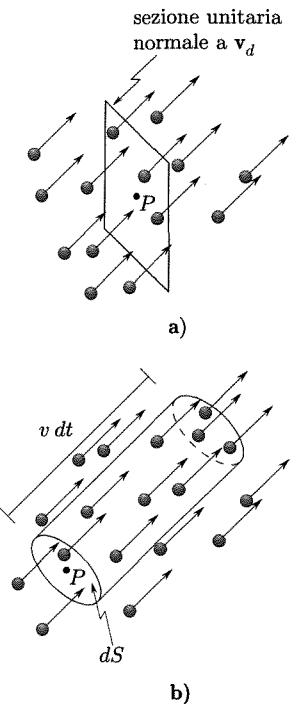


Fig. 3.2

⁽¹⁾ Le velocità di scorrimento degli elettroni in un metallo sono sempre molto piccole (piccole frazioni di m/s) rispetto alla velocità media di agitazione termica (10^5 m/s a temperatura ambiente).

Nel caso dei metalli, i portatori liberi sono elettroni (carica $-e$) e

$$(7) \quad \mathbf{j} = -nev^-$$

il vettore densità di corrente è diretto in verso opposto a quello del moto di scorrimento delle cariche.

Intensità della corrente

Data inoltre una qualsiasi superficie S (fig. 3.3a) nella regione in cui si ha flusso di cariche, si definisce come intensità della corrente attraverso S il rapporto fra la carica (dQ_S) netta che passa attraverso S nel tempo dt e dt stesso (cioè la carica netta nell'unità di tempo). Tale intensità è pari al flusso di \mathbf{j} attraverso S :

$$(8) \quad i_S = \frac{dQ_S}{dt} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

\mathbf{n} è il versore della normale orientato nel verso nel quale si vuole considerare la corrente i_S (cioè da una delle parti dello spazio separate dalla superficie S all'altra). Molto spesso, come per esempio se si considera (fig. 3.3b) la sezione di un conduttore filiforme nel cui interno si muovono

delle cariche, \mathbf{n} viene orientato in modo da formare con il campo elettrico un angolo acuto: la corrente risulta allora positiva nel verso in cui si muovono le cariche positive. Ciò è in accordo con una convenzione introdotta per la corrente in conduttori filiformi quando non si conosceva bene la struttura dei conduttori metallici: scelta per un conduttore filiforme una delle due direzioni come positiva si conveniva di considerare come positiva una corrente dovuta a cariche positive che si spostino nel verso scelto (fig. 3.3c) (o quel che è lo stesso a cariche negative che si spostino in verso opposto): ciò, come meglio vedremo in seguito, equivale ad assumere come verso positivo della corrente elettrica quello secondo il quale va decrescendo, lungo il conduttore, il potenziale elettrico.

A seconda che la intensità della corrente data dalla (8) risulti costante oppure variabile nel tempo, si parla di corrente stazionaria o, come abitualmente si dice, continua (2) oppure di corrente variabile.

La intensità di corrente è nel sistema SI la quarta grandezza fondamentale: vedremo in seguito come va fissato il campione per la sua unità, l'ampère (A).

Dalle considerazioni precedenti si deduce che nel Sistema Internazionale la densità di corrente si misura in A/m^2 .

Se la superficie S è una superficie chiusa (fig. 3.3d) la corrente i_S , cioè il flusso di \mathbf{j} attraverso essa, fornisce il rapporto fra la carica che nell'intervallo elementare di tempo $d\tau$ lascia il volume τ racchiuso da S , e $d\tau$. Siccome la carica elettrica totale non può né crearsi né distruggersi (v. cap. 1, par. 1.4), a questo flusso di cariche deve corrispondere una variazione della carica ($\int_\tau \rho d\tau$) nell'interno del volume τ

$$(9) \quad \int_{S \text{ chiusa}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{d\tau} \left(\int_\tau \rho d\tau \right).$$

(2) Per l'intensità di corrente di correnti stazionarie useremo il simbolo I , riservando quello i al caso più generale di correnti variabili.

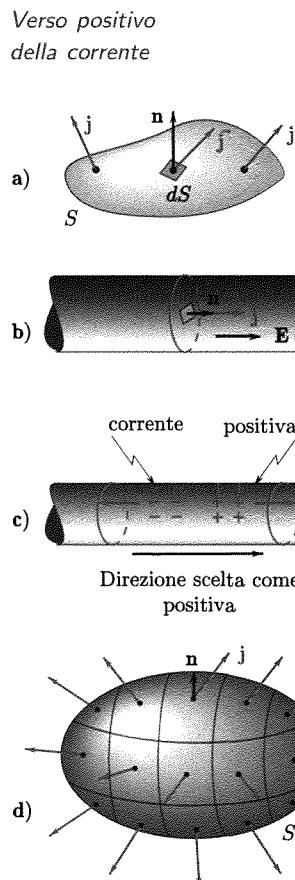


Fig. 3.3

Usando il teorema della divergenza ed osservando che le operazioni di derivazione ed integrazione al secondo membro della (9) possono essere scambiate, essendo relative a variabili differenti, si ha

$$(10) \quad \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{j} d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Se si applica la relazione ora ottenuta ad un volume $d\tau$, si deduce la espressione della *conservazione della carica*:

$$(11) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

La (11) prende anche il nome di equazione di continuità per la corrente.

Vogliamo osservare che se si considera un conduttore filiforme (fig. 3.4) in condizioni stazionarie ($\partial \rho / \partial t = 0$) e si applica la (9) al volume compreso fra due sezioni trasversali S_1 e S_2 , poiché il flusso di cariche attraverso la superficie laterale del filo è nullo si ha

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

La corrente totale uscente da S_1 e S_2 è nulla, cioè

$$(12) \quad \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

La corrente uscente attraverso S_2 è pari a quella entrante attraverso S_1 .

Se si cambia la orientazione della normale in S_1 si vede dalla (12) che *la intensità della corrente è la stessa per qualsiasi sezione trasversale del conduttore filiforme in condizioni stazionarie*.

In tale condizioni si può parlare di intensità della corrente nel filo senza specificare attraverso quale sezione trasversale.

*Conservazione
della carica*



Fig. 3.4

3.3. VARI TIPI DI CORRENTE. CORRENTE DI SPOSTAMENTO. CIRCUITO ELETTRICO

Esistono essenzialmente tre tipi di corrente, chiamate rispettivamente: di conduzione, di convezione e di spostamento. Abbiamo introdotto nel paragrafo precedente la corrente di conduzione che si presenta in mezzi conduttori sottoposti ad un campo elettrico.

Le correnti di convezione si producono quando oggetti carichi elettricamente vengono spostati nello spazio: un esempio tipico è quello che si ha nel generatore di Van de Graaf ove le cariche disposte sulla cinghia e mosse per il movimento di quest'ultima costituiscono una corrente.

Il terzo tipo di corrente è più difficile a descriversi e la sua importanza si potrà valutare a pieno solo in seguito, quando si potrà sia illustrare le ragioni che indussero Maxwell a formulare, nella maggiore generalità, l'ipotesi della esistenza di questo tipo di corrente, sia sostenere l'intuizione di Maxwell mediante l'esame del successo della teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche, che ha quella ipotesi come parte essenziale.

Desideriamo accennare a questo tipo di corrente qui in modo che siano subito chiare le ragioni per cui è possibile prescindere da essa in molte considerazioni che saranno svolte nei prossimi capitoli, ed in modo

Corrente di conduzione

Corrente di convezione

Corrente di spostamento

da potere comprendere meglio alcune situazioni che saranno incontrate e nelle quali il circuito è solo parzialmente formato da conduttori.

Secondo Maxwell un *campo elettrico variabile* nel tempo ha effetti magnetici simili a quelli delle normali correnti di conduzione e quindi, *accoppiata a campi elettrici variabili, va considerata una corrente detta di spostamento* la cui densità risulta

$$(13) \quad \mathbf{j}_s = \frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} .$$

Essa esiste solo in casi non stazionari.

La densità della corrente totale \mathbf{c} , somma⁽³⁾ delle densità delle correnti di conduzione e di spostamento, risulta

$$(14) \quad \mathbf{c} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} + \frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} .$$

Essa ha la caratteristica di avere sempre divergenza nulla. Infatti, nel caso stazionario ricordando la (11) si ha:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$(16) \quad \operatorname{div} \mathbf{c} = 0.$$

Nel caso non stazionario, la conservazione della carica (11) si esprime

$$(17) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

da cui

$$(18) \quad \operatorname{div} \mathbf{c} = 0.$$

Nel caso generale quindi una corrente è formata da due parti corrispondenti ai due addendi nella (14). I valori relativi dei due termini possono essere molto diversi. Nei conduttori metallici la corrente di conduzione è in genere tanto maggiore della corrente di spostamento che questa può essere trascurata: ciò è vero fino a quando i campi non divengano molto rapidamente variabili come nel caso di onde elettromagnetiche a frequenza delle onde luminose o maggiore. Negli isolanti perfetti è invece presente solo la corrente di spostamento. Per illustrare questa circostanza esaminiamo un esempio.

Si consideri un circuito formato da un condensatore piano carico le cui armature vengano collegate mediante un filo conduttore (fig. 3.5). Indicando con $\pm Q$ le cariche presenti ad un istante sulle armature, l'intensità della corrente di conduzione che passa attraverso una qualsiasi sezione del

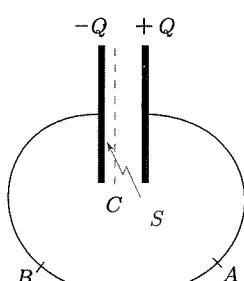


Fig. 3.5

⁽³⁾ Si suppone che non vi siano correnti di convezione. Queste si presentano solo in casi particolari e quando sono presenti possono essere portate in conto con un terzo termine aggiuntivo.

filo conduttore⁽⁴⁾ ($A \rightarrow B$) vale:

$$(19) \quad i = -\frac{dQ}{dt}.$$

Tale corrente di conduzione esiste solo nel conduttore. Nello spazio fra le armature esiste per tutto il tempo in cui passa la corrente nel conduttore un campo elettrico variabile e quindi una corrente di spostamento. Se S è la superficie delle armature si ha per il vettore \mathbf{D} , all'istante in cui la carica è Q ,

$$D = \frac{Q}{S},$$

e quindi la densità della corrente di spostamento risulta

$$(20) \quad \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$

e l'intensità della corrente di spostamento (superficie \times densità) attraverso una sezione come C vale:

$$(21) \quad \frac{dQ}{dt}.$$

Tale corrente⁽⁵⁾ è diretta in verso opposto a \mathbf{D} , cioè dalla armatura negativa a quella positiva. La corrente di spostamento ha quindi la medesima intensità ed il medesimo verso della corrente di conduzione che è presente nella parte del circuito costituito dal filo conduttore.

Questo esempio mostra chiaramente come l'introduzione della corrente di spostamento fa sì che la corrente totale in un circuito sia la stessa in tutte le sezioni del circuito e come per avere in regime non stazionario un circuito nel quale circoli una corrente non è necessaria la continuità di conduttori metallici. Conseguenze molto importanti di questo fatto saranno esaminate in seguito.

Allo scopo di chiarire ulteriormente la ipotesi di Maxwell relativa alla corrente di spostamento, vogliamo ricordare che quando un campo elettrico viene applicato ad un dielettrico materiale, si producono *spostamenti* delle cariche che danno luogo alla polarizzazione.

Nel caso di campo elettrico variabile la variazione delle cariche di polarizzazione conduce ad una corrente di densità

$$(22) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Se, d'altra parte, si ricorda che

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

si vede che la densità della corrente di spostamento è pari a

$$(23) \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Essa quindi è formata da due parti: quella dovuta al moto effettivo di spostamento delle cariche di polarizzazione e un'altra che è presente anche nel mezzo vuoto.

⁽⁴⁾ Il verso della corrente è quello $A \rightarrow B$. Il segno meno compare nella (19) perché con Q si è indicata la carica sulle armature: essa diminuisce nel tempuscolo dt , cioè dQ è negativa; la carica che passa attraverso una sezione nel tempuscolo dt è ($dq = -dQ$).

⁽⁵⁾ Si osservi ancora che Q decresce con il tempo e quindi dQ/dt è negativa.

L'intuizione di Maxwell quindi si riferisce ad avere introdotto la considerazione del termine

$$(24) \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

in modo che la densità di corrente totale

$$(25) \quad \mathbf{c} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

avesse divergenza nulla. Sottolineiamo che i primi due termini nella (25) corrispondono ad un effettivo trasporto di cariche, mentre il terzo è originato dal campo elettrico variabile ed esistente anche in assenza di un mezzo materiale (cioè anche nel vuoto).

Nel seguito del presente capitolo considereremo quasi esclusivamente processi stazionari, nei quali quindi la corrente di spostamento è nulla.

Prima di esaminare le questioni relative alle correnti e i fenomeni cui esse danno luogo, vogliamo precisare il concetto di circuito elettrico già intuitivamente usato. Genericamente, come *circuito di una corrente* s'intende la regione di spazio in cui scorre la corrente medesima. Se questa ultima è una corrente di conduzione, tale regione si identifica con la regione occupata dalle linee di flusso della velocità di scorrimento, cioè, in base alla definizione del vettore \mathbf{j} , dalle linee di flusso del vettore densità di corrente (tangenti in ogni punto e ad ogni istante al vettore \mathbf{j}). Poiché in condizioni stazionarie, è $\text{div } \mathbf{j} = 0$, cioè \mathbf{j} è solenoidale, tali linee di flusso sono chiuse, e il circuito della corrente ha quindi una configurazione chiusa.

In condizioni non stazionarie, \mathbf{j} non è più solenoidale, e viene meno la precedente definizione. Del resto, ora non è più lecito riferirsi alla sola corrente di conduzione, dato che in tali condizioni è presente anche una corrente di spostamento. Se quindi, come è naturale, ci riferiamo alla densità totale di corrente \mathbf{c} , potremo definire, nei termini più generali possibili, come circuito di una corrente elettrica *la regione occupata dalle linee di flusso del vettore \mathbf{c}* : essendo tale vettore sempre solenoidale, il circuito ha sempre una configurazione chiusa.

Ciò premesso, osserviamo che correntemente il concetto di circuito viene tacitamente riferito al caso, invero usuale nell'elettrotecnica, in cui la corrente sia di conduzione, o prevalentemente di conduzione. Si finisce così con l'intendere per circuito della corrente la catena di conduttori (resistori, fili di collegamento, macchine elettriche, ecc.) e di dispositivi (generatori, tubi termoelettrici, ecc.) nella quale può instaurarsi un ordinato movimento di cariche elettriche: in questo ordine di idee, si parla, ad onta della implicita contraddizione dei termini, anche di *circuito aperto*, corrispondente al caso che la predetta catena sia interrotta (eventualmente mediante la manovra di appositi interruttori) in modo che non possa scorrere in essa una corrente di conduzione (stazionaria).

3.4. LEGGE DI OHM. RESISTENZA

Una semplice ed importante esperienza è quella che conduce alla legge di Ohm⁽⁶⁾. Due punti di un conduttore metallico vengano portati e man-

⁽⁶⁾ Enunciata dal tedesco Georg Simon Ohm nel 1825.

tenuti a potenziali diversi e costanti. Ciò può realizzarsi per esempio disponendo un conduttore costituito da un filo metallico sottile e molto lungo, fra gli elettrodi (elettrodo ad alto potenziale e terra) di una macchina di Van de Graaf, proporzionando le cose in modo che la differenza di potenziale fra gli estremi del filo rimanga costante: in tali condizioni le cariche che fluiscono nel filo vengono esattamente sostituite da quelle che il nastro porta sull'elettrodo a potenziale elevato della macchina. Si può ancora più semplicemente realizzare la situazione voluta facendo uso di altri tipi di generatori (per esempio pile) di più semplice impiego.

Abbiamo già accennato (cap. 1, par 1.23) a metodi che consentono di misurare la differenza di potenziale ($V_A - V_B$) fra gli estremi A e B del filo. Accenneremo fra breve (par. 3.6) ad alcuni dei metodi che possono essere usati per misurare la intensità di una corrente stazionaria.

L'esperienza che si vuole descrivere consiste nell'esaminare la relazione fra differenza di potenziale applicata al conduttore metallico ed intensità della corrente prodotta in *condizioni stazionarie*. Si trova che *se si opera mantenendo il conduttore a temperatura costante* tale relazione è *lineare*. Si può anche dire che la linea che rappresenta graficamente la relazione fra intensità della corrente e d.d.p. $V = V_A - V_B$ e che per un qualsiasi elemento circuitale prende il nome di *caratteristica*⁽⁷⁾ dell'elemento stesso, è in questo caso una *retta* (fig. 3.6).

La relazione fra V ed I si può esprimere nella forma analitica

$$(26) \quad V = RI,$$

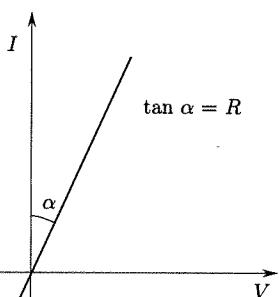


Fig. 3.6

Legge di Ohm

essendo R un parametro caratteristico del conduttore usato, il quale, a *temperatura costante*, ha un valore costante e positivo. La (26) costituisce la espressione della legge di Ohm.

La grandezza R prende il nome di resistenza elettrica, o semplicemente *resistenza* del conduttore. A norma della (26) la *legge di Ohm per un conduttore* si può quindi enunciare dicendo che la tensione ai capi di un conduttore è proporzionale, secondo la resistenza, all'intensità della corrente.

La (26) può tuttavia essere scritta anche nel seguente modo:

$$(27) \quad I = \frac{V}{R} = GV$$

dove la grandezza G , pari dunque all'inverso della resistenza, ha il nome di *conduttanza*; in conseguenza potremo anche dire che l'intensità della corrente fluente in un conduttore è proporzionale, secondo la conduttanza, alla tensione agli estremi del conduttore medesimo.

Nel Sistema Internazionale (SI) la resistenza si misura in volt/ampère = ohm (Ω), mentre la conduttanza si misura in ampère/volt = Ω^{-1} = siemens (S). La resistenza di un conduttore dipende dalla forma, dalle dimensioni del conduttore, dalla natura della sostanza con cui è fatto, oltre che dalla temperatura.

Se si considerano conduttori filiformi (o comunque di sezione costante), si trova sperimentalmente che a temperatura costante la resistenza è proporzionale alla lunghezza (l) e inversamente proporzionale all'area

Resistenza elettrica unità
di misura Ohm (Ω)

Conduttanza $G = \frac{1}{R}$
unità di misura
siemens (S)

(7) Propriamente: *caratteristica tensione-corrente*.

della sezione normale S

$$(28) \quad R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma S} l.$$

*Resistività ρ
e unità di misura $\Omega \cdot \text{m}$
conducibilità σ S/m*

*Andamento
della resistività
con la temperatura*

Il parametro ρ dipende dalla sostanza che costituisce il resistore. Esso prende il nome di resistività e si misura in ohm per metro ($\Omega \cdot \text{m}$). Il suo inverso è la conducibilità (σ): essa si misura in siemens/metro (S/m). La resistività, o la conducibilità, è il parametro che descrive globalmente le caratteristiche del processo di conduzione nel particolare conduttore e sarà da noi messo in relazione alla struttura del conduttore ed ai particolari processi che hanno luogo in esso quando una differenza di potenziale viene applicata. Si può dire che il movimento dei portatori liberi avviene, nel particolare mezzo costituito dalla parte restante del conduttore (reticolo), con modalità che globalmente rappresentano un ostacolo al libero fluire dei portatori sotto l'azione di un campo elettrico applicato e ciò si rispecchia nella esistenza di una resistenza ed in una perdita di energia (vedi par. 3.6).

Al variare della temperatura nei conduttori metallici la resistività varia in maniera piuttosto complessa. Essa decresce al decrescere della temperatura e tende ad un valore limite alle temperature molto basse. Questi andamenti saranno esaminati in seguito.

Spesso nelle vicinanze della temperatura ambiente si può, per variazioni non molto grandi, ammettere approssimativamente la validità di una relazione lineare⁽⁸⁾:

$$(29) \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

dove α prende il nome di coefficiente di temperatura della resistività.

Una analoga relazione, precisamente

$$(30) \quad R = R_0(1 + \alpha t)$$

si può ammettere che valga per la resistenza di un conduttore: ad essa si perviene combinando le (28) (29).

Il fatto che la resistenza di un conduttore vari con la temperatura giustifica il fatto, precedentemente sottolineato, che la legge di Ohm è rigorosamente valida soltanto per conduttori metallici tenuti a temperatura costante. Si ha infatti la circostanza, sulla quale torneremo più avanti, che un conduttore percorso da corrente si riscalda tanto più quanto più intensa è la corrente: in definitiva, se non si provvede ad asportare in qualche modo, per esempio, ricorrendo ad un termostato, il calore prodotto dalla corrente, la temperatura aumenta, e con essa varia la resistenza: quest'ultima viene a dipendere dalla corrente e la caratteristica non è più lineare, come invece vuole la legge di Ohm.

La tabella riporta i valori di ρ a temperatura ambiente ($\sim 20^\circ\text{C}$) ed i coefficienti di temperatura (α) per alcuni metalli.

Taluni metalli, in genere fra quelli che a temperatura ordinaria non sono ottimi conduttori (per esempio Pb), presentano a temperature molto basse (alcuni gradi kelvin) il fenomeno della *superconduttività* caratterizzato dall'annullarsi della resistività per processi stazionari (corrente continua).

⁽⁸⁾ Ciò equivale a sviluppare la funzione $\rho(T)$ nelle vicinanze di un suo punto (ρ_0 , T_0) in serie di potenze di $t = T - T_0$

$$\rho = \rho_0 + at + bt^2 + \dots$$

e trascurare le potenze superiori alla prima.

Tabella 3.1 Resistività e coefficiente di temperatura in prossimità della temperatura ambiente (20°C)

Metallo	$\rho(\Omega \cdot \text{m})^{(*)}$	$\alpha(\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})$
Argento	$1,47 \cdot 10^{-8}$	0,0038
Rame	$1,72 \cdot 10^{-8}$	0,00393
Alluminio	$2,63 \cdot 10^{-8}$	0,0039
Tungsteno	$5,51 \cdot 10^{-8}$	0,0045
Ferro	$10 \cdot 10^{-8}$	0,0050
Piombo	$22 \cdot 10^{-8}$	0,0043
Mercurio	$94 \cdot 10^{-8}$	0,00088
Costantana (60% Cu, 40% Ni)	$49 \cdot 10^{-8}$	0,000002
Manganina (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	$44 \cdot 10^{-8}$	$< 10^{-6}$

(*) Per ottenere la resistività in $\Omega \cdot \text{cm}$ si moltipichi per cento $\rho(\Omega \cdot \text{m})$.

Va a questo punto notato che anche altre sostanze che non sono metalli presentano a temperatura costante una caratteristica di conduzione ($V - I$) lineare ed indipendente dal verso di V ed I . Per essi cioè vale la legge di Ohm. Anche essi consentono di realizzare elementi circuituali ohmici. A questa categoria di materiali appartengono, per esempio, mezzi liquidi (per esempio soluzioni elettrolitiche), gas leggermente ionizzati attraversati da correnti di bassa intensità e semiconduttori omogenei ($\rho_{20} = 10^{-1} \Omega \cdot \text{m}$ in Ge). Le sostanze per cui vale la legge di Ohm si chiamano conduttori ohmici.

È bene avvertire che, come sarà visto in seguito, la resistività dei cristalli semiconduttori, a differenza di quella dei metalli, decresce all'innalzarsi della temperatura, indicando una notevole differenza fra le caratteristiche di conduzione nei due tipi di solidi.

La legge di Ohm espressa dalla (26) nella maniera che si ricava dalla esperienza, può essere posta in una forma che valga punto per punto nel mezzo conduttore e che riesce particolarmente utile in molte considerazioni quando si voglia mediante la teoria del campo giungere a relazioni che valgono nelle immediate vicinanze di un punto generico del mezzo. Per far ciò basta supporre che la legge, trovata per un conduttore filiforme, valga per un qualsiasi volume elementare nel suo interno. Prendiamo perciò in considerazione un cilindretto di lunghezza dl e sezione dS orientato nella direzione del campo (\mathbf{E}) (fig. 3.7). Se dV è la differenza di potenziale agli estremi dell'elemento e $j dS$ la corrente (essendo j la densità di corrente) si ha:

$$(31) \quad -dV = \rho \frac{dl}{dS} j \, dS.$$

Il segno meno corrisponde al fatto che la corrente è positiva nel verso in cui il potenziale V decresce. La (31) conduce a

$$E = -\frac{dV}{dl} = \rho j,$$

che può anche essere scritta vettorialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \rho \mathbf{j} \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Conduttori ohmici

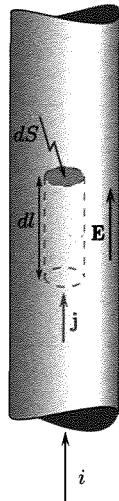


Fig. 3.7

Legge microscopica di Ohm

Le (32) valgono per sostanze isotrope ove la resistività (o la conducibilità) non dipendono dalla direzione⁽⁹⁾. Esse sono le espressioni cercate e pongono in relazione punto per punto i due campi vettoriali \mathbf{E} e \mathbf{j} .

Esse possono essere prese nella teoria del campo per la definizione di σ (o ρ) in un mezzo conduttore. È importante notare che queste relazioni valgono qualunque sia la forma del mezzo conduttore ohmico ed esse, per il fatto che legano in ciascun punto i valori locali di \mathbf{j} ed \mathbf{E} , conservano la loro validità anche in processi variabili nel tempo, mentre la espressione (26) della *legge di Ohm* vale solo per fenomeni stazionari (correnti continue).

In un mezzo esteso uniforme ($\sigma = \text{cost}$), e per fenomeni stazionari si ha:

$$(33) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

$$[32] \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

e quindi

$$(34) \quad \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Questa relazione, assieme a

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

porta a

$$(35) \quad \nabla^2 V = 0,$$

il che significa che nel caso ora specificato è valida la equazione di Laplace come in elettrostatica. Se perciò si pongono due elettrodi (di materiale perfettamente conduttore) in un mezzo conduttore molto esteso (infinito) di conducibilità finita e si applica fra gli elettrodi una differenza di potenziale, la distribuzione del potenziale è la stessa che si avrebbe in elettrostatica in un condensatore avente come armature gli elettrodi dati; le linee di corrente sono normali alle superfici equipotenziali e coincidono con le linee di \mathbf{E} nei due casi.

Come si è già detto (cap. 1, par. 1.25) su queste circostanze si basa il metodo della vasca elettrolitica per lo studio del campo elettrostatico fra elettrodi di forma particolare.

3.5. STRUTTURA DEI CIRCUITI ELETTRICI

Vogliamo ora fare alcune considerazioni generali relative alla struttura dei circuiti che si realizzano ai fini della pratica utilizzazione delle correnti elettriche. Nel presente capitolo noi siamo interessati essenzialmente al caso di circuiti per correnti stazionarie, ma per comprendere bene il significato di alcuni termini dovremo a volte fare riferimento al caso generale di circuiti attraversati da correnti variabili.

Sarà perciò bene premettere che se si considera un conduttore metallico (per esempio filiforme) facente parte di un circuito e si vuole descrivere il suo comportamento, mentre in condizioni stazionarie è sufficiente allo scopo l'impiego della grandezza resistenza (R) già introdotta, qualora il

⁽⁹⁾ In corpi anisotropi ρ e σ non sono scalari ma tensori simmetrici sicché \mathbf{j} ed \mathbf{E} non sono più paralleli fra loro. Noi consideriamo solamente sostanze isotrope.

circuito sia attraversato da correnti variabili è necessario invece usare oltre la R altre grandezze (la capacità già da noi conosciuta e la induttanza che vedremo in seguito) che dipendono dalla configurazione geometrica del conduttore e dalla sua posizione rispetto al resto del circuito; in regime di correnti variabili, infatti, nuovi processi e trasformazioni particolari di energia possono avvenire e richiedere per una loro esatta descrizione l'impiego delle grandezze ora indicate.

Un circuito è schematicamente costituito da:

- a. uno o più *generatori di forza elettromotrice* (e fra poco parleremo di quelli per corrente continua) i quali forniscono l'energia necessaria per fare circolare la corrente nel circuito;
- b. uno o più *componenti circuituali o utilizzatori*, dispositivi di cui ci si serve per un determinato scopo;
- c. conduttori che servono a collegare al generatore gli utilizzatori.

Di norma si fa in modo che ciascun conduttore di collegamento sia il più corto possibile ed abbia resistenza (capacità e induttanza) trascurabili⁽¹⁰⁾ rispetto a quelli dei componenti utili del circuito.

Quanto ai componenti circuituali conviene distinguere tra essi quelli *ohmici* da quelli *non ohmici*. I componenti ohmici sono quelli il cui comportamento è completamente descritto dalla legge di Ohm. Ciascuno di essi è esclusivamente caratterizzato (a temperatura costante) da un ben determinato valore della resistenza; come vedremo meglio nel prossimo paragrafo, l'energia fornita dal generatore per il passaggio della corrente in essi viene trasformata esclusivamente in energia termica. Un conduttore metallico in un circuito in corrente continua (c.c.) è un componente di tale tipo. Va osservato che un tale componente può avere anche una capacità rispetto ad altro conduttore con cui forma un condensatore od una induttanza propria: queste caratteristiche non hanno interesse in circuiti in condizioni stazionarie, ma assumerebbero importanza se l'elemento venisse attraversato da correnti variabili. È possibile per altro realizzare componenti i quali siano praticamente caratterizzati dalla sola resistenza anche se inseriti in circuiti in regime di correnti variabili: questi particolari componenti si chiamano *puramente resistivi* o *puramente ohmici*.

Come si è detto, nei paragrafi successivi di questo capitolo noi considereremo quasi esclusivamente circuiti in condizioni stazionarie per i quali tutti i componenti realizzati mediante conduttori che vengono attraversati da corrente sono ohmici (indipendentemente dal fatto che siano o no realizzati in modo che rimangano esclusivamente ohmici se usati in circuiti a corrente variabile). I corrispondenti circuiti si chiamano *puramente resistivi*.

Ai componenti circuituali che realizzano una ben determinata resistenza si dà il nome di resistori. Spesso si realizzano elementi a resistenza variabile (*reostati*): ciò può ottenersi avvolgendo un filo conduttore nudo su un supporto, per esempio, di porcellana e disponendo un cursore che possa essere spostato a toccare spire diverse: la resistenza fra un estremo dell'avvolgimento e il cursore dipende dalla posizione di questo. Accen-

Struttura di un circuito elettrico

Componenti ohmici

Resistore

⁽¹⁰⁾ Il soddisfacimento di questa condizione può divenire difficile nel caso di circuiti per correnti di frequenza molto elevata quando i valori dei parametri (capacità, induttanza) per i componenti utili possono divenire comparabili con quelli per i conduttori di collegamento.

remo successivamente⁽¹¹⁾ ad alcune realizzazioni pratiche di laboratorio per realizzare resistori aventi resistenza fissa o resistenza che può assumere valori a piacere (par. 3.10). Nel disegnare lo schema di circuiti si usano per resistori e reostati i simboli grafici in figura 3.8.

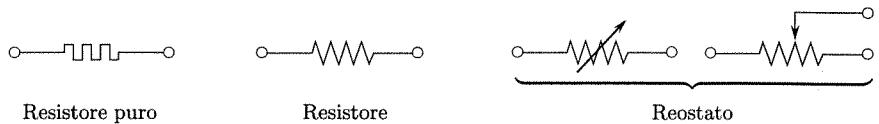


Fig. 3.8

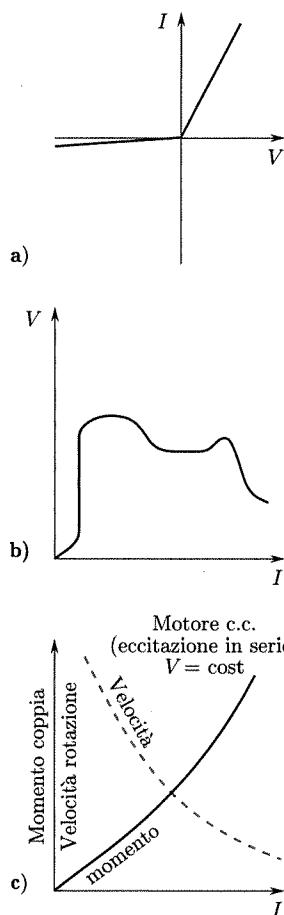
Componenti non ohmici

Fig. 3.9

I componenti non ohmici invece sono quelli il cui comportamento non segue la legge di Ohm. Se si tratta di componenti in circuiti per correnti stazionarie si verifica semplicemente che la caratteristica tensione-corrente è diversa da quella di figura 3.6 per un componente ohmico (retta per la origine): il rapporto V/I ha una espressione più complessa della (26). Come esempio si considerino i casi di figura 3.9. La figura 3.9a rappresenta (schematicamente) la caratteristica tensione-corrente di un diodo a semiconduttore; la figura 3.9b rappresenta la caratteristica tensione-corrente per un tubo a gas a bassa pressione. La figura 3.9c riporta qualitativamente per un motore in c.c. (eccitazione in serie) alimentato a $V = \text{cost}$ come varia la corrente al variare della coppia motrice fornita; è indicato per ogni valore della coppia la corrispondente velocità di rotazione del motore.

Nel caso che si tratti di circuiti per correnti variabili (per esempio corrente sinusoidale) per determinare il comportamento dei componenti non ohmici (a differenza di quelli puramente ohmici) occorre specificare non solo il rapporto dei corrispondenti valori della d.d.p. applicata e della corrente ma anche un parametro che indica come le variazioni delle due grandezze si seguano nel tempo. Noi troveremo per esempio che componenti caratterizzati esclusivamente da una capacità o da una induttanza in un regime sinusoidale di *frequenza fissata* sono attraversati da una corrente sinusoidale la cui ampiezza è proporzionale alla ampiezza della d.d.p. applicata⁽¹²⁾ ma le cui variazioni avvengono rispetto a quelle della d.d.p. con una differenza di fase costante.

Come si vede gli scostamenti dalla legge di Ohm nel comportamento dei componenti non ohmici possono essere di vario tipo.

Molto spesso⁽¹³⁾ nei componenti non ohmici l'energia fornita dal generatore di f.e.m. che mantiene la d.d.p. agli estremi del componente è trasformata in gran parte in energia di genere diverso da quella termica: per es. in energia meccanica nei motori, in energia chimica nei voltametri⁽¹⁴⁾ e negli accumulatori sotto carica, in energia raggianti nei gas in regime di scarica luminosa, in energia magnetica in una induttanza, ecc.

⁽¹¹⁾ Dopo aver parlato dei collegamenti in serie e in parallelo di resistori.

⁽¹²⁾ In maniera analoga a quanto avviene per i resistori puri, cioè a quanto richiesto dalla legge di Ohm.

⁽¹³⁾ Ciò non accade sempre: per esempio nel caso di un diodo avente la caratteristica di figura 3.9a, l'energia prodotta per trasformazione dell'energia fornita al componente nel componente stesso, nel caso di circuito in condizioni stazionarie, è esclusivamente termica.

⁽¹⁴⁾ Cella elettrolitica impiegata per determinare quantità di carica in essa passate mediante la misura delle quantità di sostanze deposte o liberate agli elettrodi.

Va osservato inoltre che in tutti i componenti reali in cui una corrente passa, esistono processi dissipativi che conducono ad una degradazione (di tutta o parte) dell'energia fornita dal generatore con la sua conversione in calore. Tale processo è l'unico processo di conversione dell'energia nei componenti ohmici mentre in genere è solo uno di quelli presenti nei componenti non ohmici.

Alle volte, sulla base di quanto ora detto, riesce utile nella trattazione pratica delle situazioni rappresentare un componente non ohmico ove energia di tipo non termico viene prodotta, come formato da una pura resistenza e da un dispositivo non dissipativo nel quale avviene la conversione di parte dell'energia data al componente in energia non termica. Un tale dispositivo come si vedrà dalla discussione sui generatori di f.e.m. non è altro che un generatore che funziona in senso inverso.

Questa schematizzazione, che come si è detto può essere talvolta utile, ha limitazioni come tutte le schematizzazioni molto semplici e va usata con cautela. Su di essa torneremo in seguito al paragrafo 3.8 per il caso di circuiti in condizioni stazionarie.

■ 3.6. POTENZA IN UN TRATTO DI CIRCUITO. LEGGE DI JOULE

Si consideri in figura 3.10 un tratto di circuito di costituzione qualsiasi: in esso potranno esservi generatori componenti di vario tipo (ohmici, cioè resistori, e non ohmici quali motori, voltametri, ecc.).

Si sappia solo che agli estremi del tratto esistono i potenziali V_A e V_B e che una corrente stazionaria, di intensità I , passa attraverso esso.

È facile vedere che la potenza posta in gioco nell'interno del tratto dipende solo da I e $(V_A - V_B)$. Si osservi infatti che nel tempo dt , la quantità di elettricità $dq = Idt$ entra da un estremo ed esce dall'altro, cioè attraversa l'elemento.

Si ha quindi il trasferimento di tale carica dal punto a potenziale V_A al punto a potenziale V_B ; ciò richiede un lavoro e quindi si ha una variazione della energia potenziale del sistema:

$$(36) \quad d\mathcal{E} = dq(V_A - V_B).$$

Ponendo $V_A - V_B = V$, è:

$$(37) \quad d\mathcal{E} = IV dt.$$

La potenza è quindi

$$(38) \quad P = IV,$$

pari al prodotto della intensità di corrente e della differenza di potenziale ai capi del tratto di circuito. Si tratta di potenza ceduta al circuito dalla sorgente che mantiene i potenziali V_A e V_B , se la I passa nel verso in cui i potenziali decrescono e di potenza ceduta dal circuito nel caso contrario.

È bene sottolineare che la (38) è una relazione generale per un tratto di circuito in corrente continua (fenomeni stazionari) qualunque sia la natura degli elementi che lo costituiscono.

Nel caso particolare che il tratto sia semplicemente formato da un conduttore che segua la legge di Ohm (componente ohmico) I e V sono

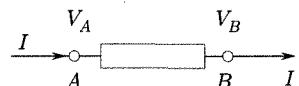


Fig. 3.10

legati fra loro dalla (26) e si può scrivere

$$(39) \quad P = I^2 R \quad (\text{watt}).$$

Legge di Joule

In un conduttore ohmico la potenza dissipata, e trasformata in calore, è proporzionale alla resistenza ed al quadrato della intensità di corrente. Questa legge va sotto il nome di legge di Joule. Joule infatti la stabilì sperimentalmente nel corso delle sue misure sull'equivalente meccanico della caloria. Se si vuole esprimere la quantità di calore prodotta nel tempo t si ha

$$(40) \quad Q = I^2 R t \text{ (joule)} = \frac{1}{4,186} I^2 R t \text{ (cal)}.$$

Le ragioni fisiche che conducono a dissipazione di energia al passaggio di una corrente nel conduttore saranno esaminate in seguito. Esse sono le stesse che causano la comparsa della resistenza. È bene osservare a questo riguardo che le leggi di Ohm e Joule esprimono essenzialmente proprietà non indipendenti di una classe di sostanze e pertanto non sono leggi indipendenti: se per una sostanza è valida una delle due, vale anche l'altra.

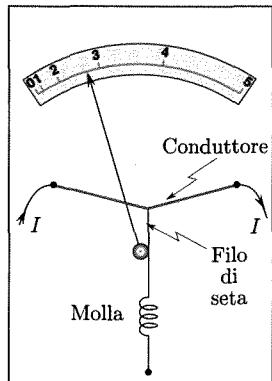


Fig. 3.11

Vogliamo ora notare come utilizzando l'effetto Joule si possano realizzare dei misuratori di intensità di corrente (amperometri). La figura 3.11 mostra un possibile schema: la corrente da misurare attraversa un filo metallico e per effetto Joule causa in tale filo una dissipazione di energia proporzionale a I^2 . La temperatura del filo e la sua lunghezza sono quindi funzioni di I . Le variazioni di lunghezza possono essere rivelate secondo le scale indicate: un filo di seta è collegato ai suoi estremi da una parte al filo conduttore e dall'altra ad una molla e passa nella gola di una puleggia la cui posizione è rivelata da un indice ad essa solidale.

Il filo conduttore risulta, di conseguenza, sempre teso ma secondo la sua lunghezza varia la posizione dell'indice di fronte ad una scala. È questo uno strumento di tipo termico, caratterizzato da una dipendenza quadratica fra deviazione dell'indice ed intensità della corrente. Strumenti di questo genere vengono in realtà usati solo in casi particolari; vedremo in seguito (cap. 4, par. 4.10) il principio di funzionamento di amperometri per i quali la scala è lineare e che sono i più usati (amperometri elettromagnetici).

3.7. FORZA ELETTROMOTRICE

Il più semplice circuito in corrente continua è quello costituito da una resistenza e da un generatore il quale mantenga ai capi della resistenza una differenza di potenziale $V = (V_A - V_B)$ (fig. 3.12).

Vogliamo ora caratterizzare il generatore. Per fare circolare la corrente nel circuito esterno (R , nel caso in figura) occorre spendere energia. Nel caso in figura questa energia è quella che si trasforma in calore per effetto Joule (RI^2). Questa energia deve essere fornita dal generatore. È evidente inoltre che il moto delle cariche nell'interno del generatore avviene in verso opposto a quello del campo elettrico stazionario⁽¹⁵⁾ esistente, sempre nel generatore, fra gli elettrodi A e B .

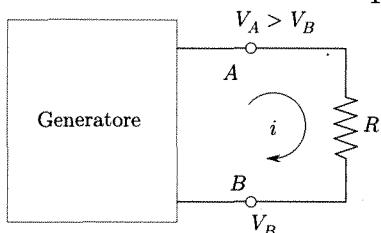


Fig. 3.12

⁽¹⁵⁾ Osserviamo che in *condizioni stazionarie*, quali sono state qui ammesse, le configurazioni, ed i valori, delle distribuzioni di carica raccolte intorno agli elettrodi (positive presso uno, negative presso l'altro) sono statiche *di equilibrio*, e non variano, anche quando il generatore eroga corrente (a mantenere la costanza provvedono le cariche via via separate,

Si conclude che nell'interno del generatore è presente una azione sulle cariche che deve essere di natura diversa da quella del campo elettrostatico in quanto le costringe a muoversi fra gli elettrodi in senso contrario a quello secondo cui le sollecita il campo elettrostatico ivi esistente. Al trasporto delle cariche nell'interno del generatore da un elettrodo all'altro è associato un lavoro fatto contro il campo elettrostatico e che corrisponde alla energia elettrostatica potenziale acquistata dalle cariche separate: è questa la energia che viene successivamente utilizzata nel circuito esterno (R) per farvi passare la corrente. Si riconosce quindi che nei generatori si effettua una trasformazione in energia elettrica di energia di altra specie. È possibile dimostrare che le trasformazioni che avvengono nell'interno del generatore sono termodinamicamente *reversibili* ciò significa che se con opportuni mezzi si costringono le cariche a muoversi nell'interno del dispositivo in verso opposto a quello normale nei generatori, i particolari fenomeni che hanno luogo nel generatore procedono in senso inverso seguendo le stesse trasformazioni che si hanno nel generatore ed energia elettrica si trasforma nella corrispondente energia di altra specie.

Lo schema di un generatore è quindi quello di un dispositivo (fig. 3.13) nel quale per intervento di fenomeni di vario genere cariche di segno contrario vengono accumulate su due elettrodi diversi, che costituiscono i terminali del generatore, contro l'azione del campo elettrostatico (\mathbf{E}_S) che da tale separazione di cariche è originato nel generatore stesso e che tenderebbe a ristabilire la neutralità nelle varie parti del generatore.

Un generatore è quindi un qualsiasi dispositivo nel quale ha luogo una trasformazione (reversibile) in energia elettrica di energia di altra specie. Un tale dispositivo è caratterizzato dalla *quantità di energia che viene trasformata in energia elettrica per unità di carica che passa nel suo interno*. Un tale parametro prende il nome di *forza elettromotrice* del generatore ed il generatore si chiama *sorgente di f.e.m.*

La f.e.m. è quindi data da

$$(41) \quad f = \frac{d\mathcal{E}}{dq}$$

se $d\mathcal{E}$ è l'energia trasformata per il passaggio della carica dq attraverso una qualsiasi sezione del generatore.

Le dimensioni di f sono quelle di un lavoro diviso una carica ed essa andrà misurata in joule/coulomb. Tale unità è pari al volt e quindi le f.e.m. vengono espresse nella stessa unità dei potenziali. Ciò può generare qualche confusione ed è quindi opportuno sottolineare che *nonostante che f.e.m. e differenza di potenziale siano espresse nella stessa unità, esse corrispondono a concetti completamente diversi*.

che rimpiazzano altrettante avviate dal generatore nel circuito): ad onta che non siamo più in condizioni generali elettrostatiche, il campo generato da tali cariche è peraltro statico, e gode quindi di tutte le proprietà, prima fra tutte la conservatività, del campo che abbiamo studiato nell'elettrostatica.

Potremo quindi a buon diritto chiamare "campo elettrostatico" quello generato dalle cariche addensate presso gli elettrodi del generatore (quando questo sia in equilibrio) sia che eroghi corrente o che non la eroghi.

Azione che spinge le cariche in verso opposto a \mathbf{E}_S

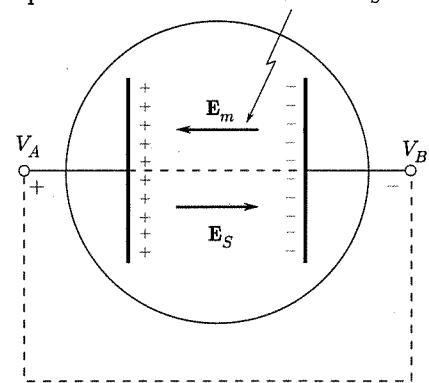


Fig. 3.13

La f.e.m. è la quantità di energia che viene trasformata in energia elettrica per unità di carica

Il concetto di f.e.m. di un generatore è stato introdotto con tutta generalità. Per dare maggiore concretezza alle nostre considerazioni vogliamo accennare a qualche caso concreto: i fenomeni di vario tipo che conducono alle trasformazioni di energia nel generatore saranno esaminati in dettaglio in varie parti del corso.

Un primo esempio è il generatore di Van de Graaf già considerato; in tal caso l'energia che viene impiegata per portare cariche di segno opposto sugli elettrodi è energia meccanica fornita dal motore che muovendo la cinghia costringe le cariche a muoversi in direzione opposta a quella del campo elettrico prodotto nell'interno del generatore proprio dalle cariche accumulate sugli elettrodi. Anche i generatori elettromeccanici, come la dinamo, effettuano la conversione in energia elettrica della energia meccanica usata per muovere una parte mobile (rotore) della macchina contro forze di natura elettromagnetica. Sebbene in questo caso i fenomeni non siano di natura semplicemente elettrica ma elettromagnetica, le considerazioni generali che qui facciamo sui generatori possono essere applicate anche a questo caso poiché prescindono dalla particolare natura dei processi che hanno luogo nell'interno del generatore. Un altro tipo di generatore molto usato è rappresentato dalle pile e dagli accumulatori: in essi energia chimica è trasformata in energia elettrica. Nei generatori termoelettrici una f.e.m. è prodotta per particolari effetti reversibili (termoelettrici) legati a differenze di temperatura nel dispositivo e quindi è energia termica quella che è trasformata in energia elettrica. Nelle celle fotoelettriche, infine, è l'energia di radiazioni elettromagnetiche quella che viene utilizzata nel generatore.

Qualunque sia la natura del processo di conversione in energia elettrica di altra forma di energia si può globalmente analizzare questa azione pensando che una *forza* (equivalente) agisca su ciascuna carica mobile nell'interno del generatore facendola spostare contro la forza elettrica. Naturalmente in alcuni generatori (Van de Graaf, dinamo) si può bene individuare una forza meccanica, in altri, come nelle pile ove reazioni chimiche producono l'effetto, ciò non è più vero: siccome peraltro in ogni caso un lavoro viene fatto per portare le cariche da un elettrodo all'altro nel generatore contro il campo elettrostatico, si può introdurre una *forza equivalente* (\mathcal{F}) sulla carica q come quella forza che compirebbe lo stesso lavoro di quello effettivamente richiesto per portare la carica stessa da un elettrodo all'altro. Questa forza risulta proporzionale alla carica sicché si può in genere parlare di un *campo elettromotore* esistente nell'interno del generatore ed in verso opposto a quello del campo elettrostatico, e la cui intensità vale:

$$(42) \quad \mathbf{E}_m = \frac{d\mathcal{F}}{dq} .$$

Il campo elettromotore non è conservativo.

Il campo totale \mathbf{E} che agisce sulle cariche *nell'interno del generatore* è ovviamente la somma del campo elettromotore e del campo elettrostatico \mathbf{E}_s

$$(43) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_m .$$

Se si considera una linea chiusa che attraversa il generatore, come quella segnata a tratteggio sulla figura 3.13, si ha per l'integrale di linea (circuitazione):

$$(44) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = f$$

La circuitazione di \mathbf{E}_s è nulla essendo tale campo conservativo, e la circuitazione di \mathbf{E}_m si riduce all'integrale di linea nell'interno del generatore (fuori, $\mathbf{E}_m = 0$). Quest'ultimo integrale essendo il lavoro compiuto

Campo elettromotore

La f.e.m. è anche la circuitazione del campo totale

per spostare la carica unitaria nella direzione di \mathbf{E}_m da un elettrodo all'altro è pari alla f.e.m. Si può anche quindi definire la *f.e.m. presente in un circuito come l'integrale di linea lungo il circuito stesso (circuitazione) dell'intensità del campo totale (elettrostatico ed elettromotore)*.

Per effettuare la misurazione della f.e.m. di un generatore si osservi che se gli elettrodi terminali di un generatore non sono collegati ad un circuito esterno (si dice *a circuito aperto*), la separazione delle cariche prodotta nel generatore da \mathbf{E}_m procede finché la quantità di elettricità accumulata sugli elettrodi non raggiunga valori tali che il conseguente campo elettrico nell'interno del generatore uguagli in modulo il campo elettromotore: si dice allora che il *generatore è in equilibrio*. Dalla (43) si ha, in tali condizioni, nell'interno del generatore:

$$\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_m = 0$$

e

$$\mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l}.$$

Integrando tra il morsetto a potenziale maggiore (A) e quello a potenziale minore (B):

$$\int_A^B \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l}.$$

Il primo membro è, per definizione, la d.d.p. $V_A - V_B$ mentre il secondo, ove si tenga conto di quanto detto dianzi, è la f.e.m. f :

$$(45) \quad V_A - V_B = f.$$

La f.e.m. può quindi essere determinata misurando con uno strumento elettrostatico (che non assorbe corrente in condizioni stazionarie) la d.d.p. fra i terminali del generatore a circuito aperto e in equilibrio.

La misurazione va fatta a circuito aperto perché quando corrente passa hanno luogo perdite di energia anche nell'interno del generatore: tali perdite possono essere rappresentate mediante una resistenza interna ed hanno di conseguenza che la d.d.p. fra i terminali del generatore non è più uguale ma minore della f.e.m. L'importanza della resistenza interna del generatore sulle condizioni di funzionamento dei circuiti sarà più dettagliatamente vista fra breve.

Concludiamo comunque sottolineando che i *parametri caratteristici di un generatore sono la f.e.m. (f) e la resistenza (r)*. È bene infine avvertire che in accordo con quanto detto prima, alla f.e.m. di un generatore viene assegnato come senso positivo quello che va nell'interno del generatore dal terminale a potenziale minore a quello a potenziale maggiore, cioè nel verso in cui essa tende a far circolare la corrente in un circuito resistivo esterno. Il simbolo per una sorgente di f.e.m. continua è indicato in figura 3.14. La freccia è talvolta indicata a rendere più evidente il senso della f.e.m.

Una analogia è spesso presentata per aiutare a comprendere il significato di forza elettromotrice di un generatore. Se si ha un tubo orizzontale AB e si vuole fare passare un fluido reale con una data portata, occorre mantenere fra i suoi estremi una differenza di pressione per compensare le perdite per attrito nel tubo. Questa differenza di pressione è l'analogo della differenza di potenziale ai capi della resistenza. Per ottenere e mantenere la differenza di pressione fra A e B in modo da avere il moto stazionario si può disporre una pompa che prendendo l'acqua dalla parte a bassa pressione la porta all'estremo ad alta pressione. Per far ciò occorre nella pompa spendere lavoro contro le forze di pressione che nell'interno nella pompa

*La f.e.m. è uguale
alla d.d.p. fra
i terminali
del generatore a circuito
aperto*

*Resistenza interna
del generatore*

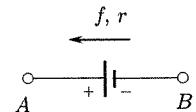


Fig. 3.14

spingerebbero il fluido in verso opposto (dal terminale ad alta pressione a quello a bassa pressione). Il lavoro compiuto da un particolare agente nella pompa è l'analogo del lavoro compiuto contro le forze del campo elettrico in un generatore e che conduce alla f.e.m. La descrizione dell'agente che fornisce l'energia può essere fatta usando come parametro il lavoro speso per portare il volume unitario da un estremo all'altro della pompa contro le forze di pressione a circuito interrotto e tale lavoro è l'analogo della f.e.m.

Nel caso che la pompa eroghi fluido e quindi questo circoli nella pompa, si producono perdite nell'interno della pompa per viscosità o per altre cause; esse sono l'analogo delle perdite nel generatore di f.e.m. rappresentate dalla resistenza interna.

3.8. CIRCUITI IN SERIE

Il circuito più semplice è quello caratterizzato dal fatto che la stessa corrente attraversa tutti gli elementi del circuito: tali elementi devono essere di conseguenza disposti in una serie e collegati in modo che il terminale di uscita della corrente da uno sia unita al terminale di ingresso del successivo.

Si parla di circuiti in serie. Il circuito in serie più semplice è quello costituito da un generatore e da un utilizzatore resistivo, cioè un resistore. Lo schema è dato in figura 3.15a (16).

In un tale circuito la corrente circola nel verso della f.e.m. Applichiamo il principio di conservazione dell'energia. L'energia fornita dalla sorgente di f.e.m. in un secondo, cioè la potenza (fI), deve uguagliare le perdite di energia per secondo nella resistenza esterna (RI^2) e nel generatore. Queste ultime perdite, come si è detto, possono essere rappresentate assegnando al generatore una resistenza interna (r). Si ha quindi:

$$(46) \quad fI = RI^2 + rI^2;$$

da qui si ha, per l'intensità della corrente

$$(47) \quad I = \frac{f}{R+r}$$

e per la differenza di potenziale ai capi dell'utilizzatore:

$$(48) \quad V_B - V_A = IR = f \frac{R}{R+r}.$$

La figura 3.15b mostra graficamente la distribuzione del potenziale nel circuito, lungo una linea $ABCD$. Si è immaginato che l'effetto della f.e.m. sia separato da quello della resistenza interna (17): in realtà essi sono intimamente uniti quando la corrente circola.

L'andamento del potenziale fra A e B è quindi la somma dell'effetto della f.e.m. (del campo elettromotore, che spinge le cariche nel verso AB) e della resistenza interna che produce una caduta (ohmica) del potenziale

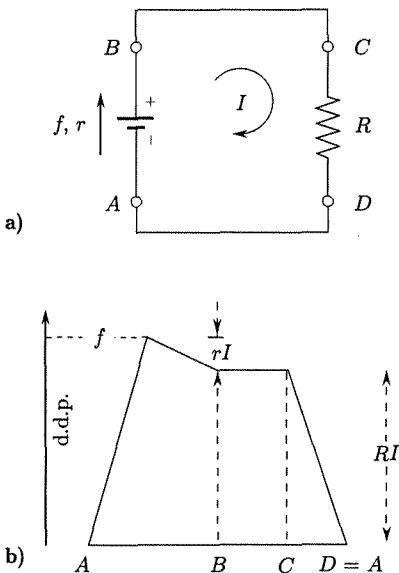


Fig. 3.15

(16) È bene sottolineare che negli schemi dei circuiti, i tratti rettilinei che collegano gli elementi costitutivi del circuito (generatori, resistori, ecc.) rappresentano collegamenti fatti con conduttori di resistenza trascurabile. Essi possono in realtà avere lunghezza piccola od addirittura nulla.

(17) Ciò equivale a sostituire al generatore reale un *generatore ideale*, privo di resistenza interna, con in serie un resistore di resistenza pari alla resistenza interna r .

(rI) . La variazione del potenziale fra C e D , cioè attraverso il conduttore ohmico esterno (caduta ohmica) vale rI . Le (46) e (47) ed il grafico di figura 3.15b mostrano chiaramente l'importanza della resistenza interna del generatore ai fini della determinazione dell'intensità della corrente nell'utilizzatore.

Si potrà trascurare la resistenza interna e porre $(V_B - V_A)$ numericamente pari ad f solo qualora sia $r \ll R$.

Se per esempio $f = 10$ V, $R = 1.000 \Omega$, si hanno per I e $(V_B - V_A)$ i seguenti valori per tre resistenze interne r :

$$\text{per } r = 1 \Omega \quad I = \frac{10}{1.001} \approx \frac{10}{1.000} = 10^{-2} \text{ A}; \quad V_B - V_A \approx f = 10 \text{ V}$$

$$\text{per } r = 1.000 \Omega, \quad I = \frac{10}{2.000} = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ A}; \quad V_B - V_A = \frac{f}{2} = 5 \text{ V}$$

$$\text{per } r = 10.000 \Omega, \quad I = \frac{10}{11.000} = 0.91 \cdot 10^{-3} \text{ A}; \quad V_B - V_A = f \frac{1.000}{11.000} = 0.91 \text{ V}$$

Da considerazioni del tutto analoghe a quelle che per il circuito di figura 3.15 hanno condotto alla (47), si ricava facilmente che *se in un circuito (fig. 3.16) sono disposti due o più resistori in serie (R_1, R_2, R_3) si ha:*

$$I = \frac{f}{r + (R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{f}{r + R};$$

la resistenza complessiva è pari alla somma delle resistenze:

$$(49) \quad R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Questa circostanza fornisce un utile metodo per realizzare un resistore di assegnata resistenza disponendo in serie più resistori in modo da soddisfare la (49) (vedi par. 3.10).

Vogliamo ora considerare un circuito un po' più complesso, in cui siano presenti anche componenti (non ohmici) in cui energia non termica venga prodotta. Come si è detto (par. 3.5), a prescindere dalla natura dei fenomeni che avvengono in essi, riesce spesso utile schematizzare questi componenti come formati da una resistenza interna in serie ad un generatore che funziona fornendo una opportuna forza elettromotrice. Questa schematizzazione è abbastanza semplice nel caso di circuiti in condizioni stazionarie. La grandezza della f.e.m. del generatore equivalente, che serve a rappresentare la parte P^* della potenza data al componente (dall'esterno) che non è trasformata in potenza termica, è data da

$$(50) \quad f_c = \frac{P^*}{I}$$

ed è facile vedere che essa è diretta in verso opposto a quello della f.e.m. del generatore che mantiene la d.d.p. ai capi del componente: è questa la ragione per cui la f.e.m. del generatore equivalente immaginato nel componente non ohmico si indica di solito con il nome di *forza controelettromotrice*.

Per chiarire quanto ora detto, consideriamo (fig. 3.17) un generatore (f, r) che alimenti un motore elettrico: sia r_m la resistenza interna di quest'ultimo, I l'intensità della corrente nel circuito. La potenza erogata dal generatore vale, come

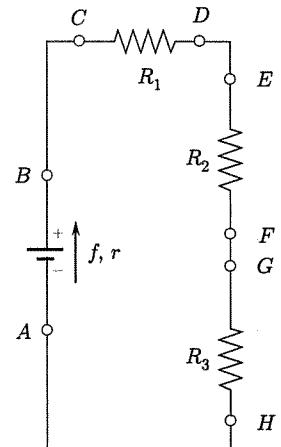


Fig. 3.16

La resistenza equivalente di una serie di resistenze è la somma delle resistenze

Forza controelettromotrice

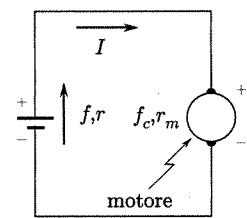


Fig. 3.17

sappiamo, fI ; di essa, una parte, e precisamente $(r + r_m)I^2$, viene trasformata in energia termica ed una parte (P^*) è convertita dal motore in potenza meccanica; il bilancio di potenza è dunque:

$$fI = (r + r_m)I^2 + P^*.$$

Con evidenti operazioni, si può scrivere

$$(51) \quad f - \frac{P^*}{I} = f - f_c = (r + r_m)I$$

espressione che dà conto della qualifica di forza controelettromotrice attribuita al rapporto P^*/I .

Vedremo a suo tempo quali forme esplicite, in funzione di altre grandezze elettriche, possano darsi in qualche caso a tali forze controelettromotrici. Per ora ci limiteremo a tenere conto di tali utilizzatori assimilandoli a generatori di opportuna resistenza interna e di opportuna f.e.m. negativa (*forza controelettromotrice*)

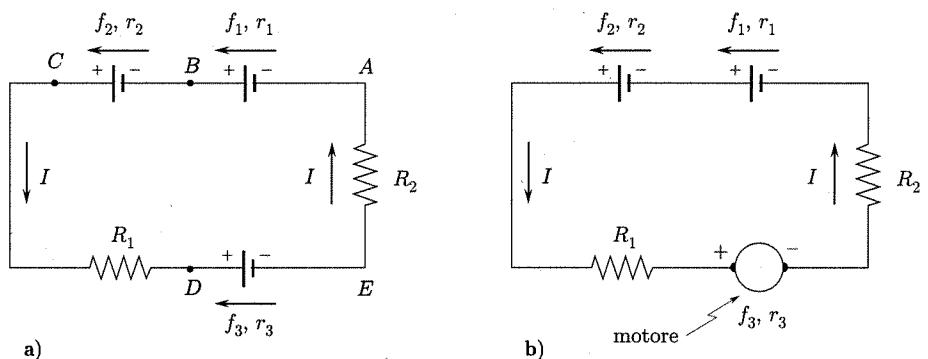


Fig. 3.18

Un circuito generale in serie potrà quindi presentarsi nelle forme schematizzate nella figura 3.18. Delle tre f.e.m. due (f_1, f_2) sono dirette nel verso della corrente (possiamo pensare che siano quelle di due generatori), mentre la terza (f_3) è diretta in verso opposto: quest'ultima potrebbe essere, per esempio, semplicemente la f.e.m. di un generatore collegato in modo che essa tenda a far circolare la corrente in verso opposto a quanto fanno f_1 ed f_2 (fig. 3.18a)⁽¹⁸⁾ oppure la forza controelettromotrice di un motore (fig. 3.18b). Il bilancio delle potenze per tale circuito è:

$$(f_1 + f_2 + f_3)I = (R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3)I^2.$$

Questa relazione può scriversi

$$(52) \quad \sum f = \sum IR = I \sum R.$$

La somma delle f.e.m. è una somma algebrica ove le singole f.e.m. hanno segno + o - a seconda che il loro verso è concorde o discorde con quello della corrente; la somma delle resistenze va estesa a tutte le resistenze nel circuito serie, comprese le resistenze dei generatori.

Nel caso che non si conosca a priori il verso della corrente, si può scegliere ad arbitrio uno dei versi da considerarsi come positivo e si conduce

⁽¹⁸⁾ In esso quindi energia elettrica verrebbe convertita in energia di altra specie come per il caso b).

il calcolo come descritto precedentemente: se la corrente dovesse risultare negativa vuol dire che essa in realtà circola nel verso opposto a quello scelto come positivo (vedi esempio in seguito).

Consideriamo infine un tratto qualsiasi di un circuito in serie, come quello fra i punti A e B nella figura 3.19. Il tratto è collegato con il resto del circuito nel quale altre sorgenti di f.e.m. possono essere presenti e concorrere a determinare la corrente nel circuito. Vogliamo trovare una espressione per la differenza di potenziale $V_A - V_B$ fra gli estremi del tratto AB . Allo scopo di fissare chiaramente i versi delle varie grandezze in gioco sceglieremo anche qui ad arbitrio come positivo uno dei due versi fra A e B , per esempio quello da A a B : di conseguenza considereremo positiva la corrente se si muove in questo verso e positiva una f.e.m. (come f_2) che tende a far passare la corrente nel circuito nel verso AB . Il potenziale in A (V_A) sarà maggiore o minore di quello in B (V_B) secondo che $(V_A - V_B)$ risulti positivo o negativo.

Per stabilire la relazione voluta supponiamo che la corrente nel tratto AB sia positiva. In questo caso la conservazione dell'energia conduce alla seguente espressione per il bilancio di potenza:

$$(53) \quad (V_A - V_B)I - f_1 I + f_2 I = (R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2)I^2.$$

Il primo termine al primo membro rappresenta la potenza che entra dall'esterno nel tratto AB ; $f_2 I$ è la potenza erogata dal secondo generatore nel quale la corrente si muove nel verso della f.e.m., mentre $f_1 I$ è la potenza assorbita dal primo generatore. Si ottiene allora

$$(V_A - V_B) + \sum f = \sum RI$$

cioè

$$(54) \quad (V_A - V_B) = \sum RI - \sum f.$$

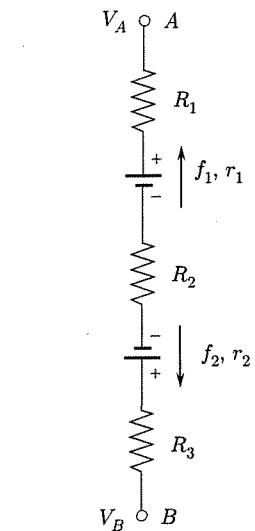


Fig. 3.19

Legge di Ohm generalizzata

È questa la relazione cercata: essa è di solito indicata con il nome di legge di Ohm generalizzata. Si osservi che essa si riduce alla forma comune della legge di Ohm nel caso che il tratto AB sia costituito da una semplice resistenza. Se inoltre B viene spostato lungo il circuito e finisce per ritornare in A (dopo avere percorso l'intero circuito) si ottiene la (52).

Per rendere ancora più evidente le convenzioni sui segni consideriamo un esempio. Si abbia il circuito in serie indicato in figura 3.20. I componenti abbiano i seguenti valori per i parametri corrispondenti:

$$f_1 = 100 \text{ V}; r_1 = 5 \Omega; f_2 = 10 \text{ V}; r_2 = 1 \Omega; f_3 = 50 \text{ V}; r_3 = 2 \Omega;$$

$$R_1 = 15 \Omega; R_2 = 10 \Omega; R_3 = 7 \Omega.$$

Calcoliamo innanzitutto l'intensità della corrente nel circuito. Dai valori delle f.e.m. nel caso semplice qui in esame si vede subito che la corrente circola nel verso orario. In casi più complessi il verso della corrente può non essere evidente.

Per comprendere come si proceda, sceglieremo arbitrariamente un verso come positivo per la corrente ed applicando la (52) calcoliamo I : se questa risulterà positiva essa circola nel verso scelto, altrimenti nell'opposto. Fissiamo, per esempio, nel nostro caso il verso antiorario come positivo, saranno positive le f.e.m. f_2 e f_3 che tendono a far circolare la corrente in questo verso e negativa la f_1

$$f_2 + f_3 - f_1 = \sum IR$$

$$-40 = I40$$

$$I = -1 \text{ A}.$$

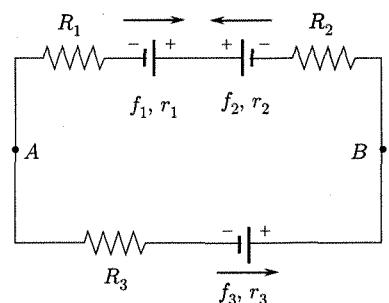


Fig. 3.20

La corrente ha l'intensità di 1 A e circola nel verso opposto a quello scelto come positivo cioè in quello orario. Se il verso orario fosse stato scelto come positivo, la (52) si sarebbe scritta

$$f_1 - f_2 - f_3 = \sum IR$$

e

$$I = 1 \text{ A}.$$

Cerchiamo di calcolare la differenza di potenziale fra i punti A e B nel circuito dato, nel quale l'intensità della corrente è 1 A e circola nel verso orario. Il calcolo può condursi indifferentemente considerando il tratto di circuito attraverso f_1 ed f_2 oppure quello attraverso f_3 . Scegliamo il primo di questi due tratti e fissiamo come verso positivo quello da A a B : in tal caso I è positiva; f_1 è positiva ed f_2 è negativa. Secondo la (53)

$$(V_A - V_B) + f_1 - f_2 = I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2)$$

$$(V_A - V_B) = 31 - 100 + 10 = -59 \text{ V}.$$

Il potenziale di V_A è inferiore a quello di V_B .

Se si fosse scelto come positivo il verso BA , la corrente sarebbe -1 A; f_1 dovrebbe essere portata in conto come negativa ed f_2 come positiva

$$(V_B - V_A) - f_1 + f_2 = I(R_1 + R_2 + r_1 + r_2)$$

$$(V_B - V_A) - 100 + 10 = -1(31)$$

$$(V_B - V_A) = 59 \text{ V}.$$

Se si fosse preso per il calcolo della d.d.p. fra A e B il tratto attraverso f_3 e scelto come positivo il verso fra A e B la corrente sarebbe da portarsi in conto come negativa

$$(V_A - V_B) + f_3 = I(R_3 + r_3)$$

$$(V_A - V_B) = -1(9) - 50 = -59 \text{ V}.$$

I vari procedimenti di calcolo sono ovviamente equivalenti.

3.9. LE REGOLE DI KIRCHHOFF PER I CIRCUITI

Passiamo ora a considerare circuiti più complessi, le cosiddette *reti*. Per l'analisi del loro funzionamento in condizioni stazionarie riescono particolarmente utili due regole stabilite (1850) da Kirchhoff.

La figura 3.21 mostra un esempio generico di una rete formata da resistori e sorgenti di f.e.m., alla quale ci riferiamo per introdurre la terminologia usata comunemente.

Si chiama:

1. nodo ogni punto del circuito in cui concorrono più di due componenti del circuito;
2. ramo ogni tratto di circuito compreso tra due nodi consecutivi;
3. maglia un circuito in serie chiuso che si ottiene partendo da un nodo qualsiasi e ritornando in esso seguendo un percorso attraverso un numero discreto di rami differenti.

Esempi di maglie per il circuito di figura 3.21a sono segnati nella figura 3.21b indicando semplicemente il numero di ordine dei rami che formano ciascuna maglia (individuabile dal subscripto delle resistenze).

La prima regola di Kirchhoff (regola dei nodi) si riferisce alla situazione ai nodi. Si consideri un nodo generico (figura 3.22) e le correnti nei

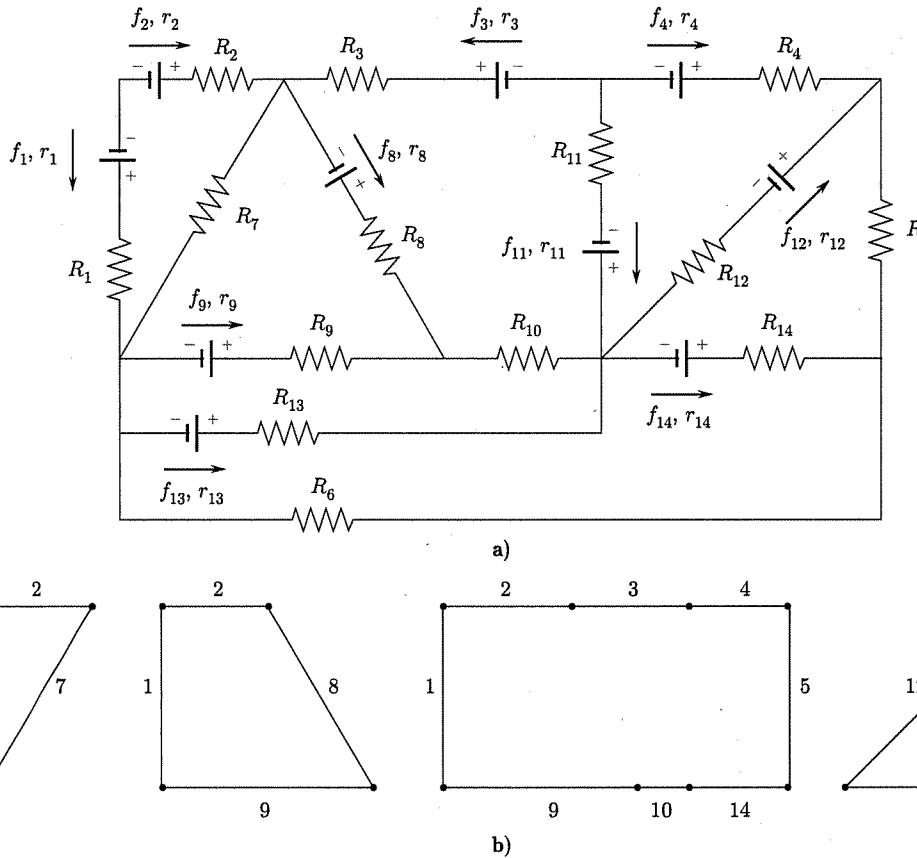


Fig. 3.21

rami collegati al nodo: per distinguere il verso delle correnti nei rami conveniamo di ritenere positive quelle che si muovono verso il nodo e negative quelle che si allontanano dal nodo.

La regola di Kirchhoff afferma che la somma algebrica delle intensità delle correnti nei rami che concorrono in un nodo deve essere nulla

$$(55) \quad \sum_i I_{ki} = 0 .$$

L'indice k per le correnti nella sommatoria mostra che le correnti si riferiscono a rami concorrenti nel nodo k .

Questa regola non è altro che l'espressione, nel caso in oggetto, del principio di conservazione della carica: in condizioni stazionarie la carica nel nodo non può cambiare e quindi la carica portata nell'unità di tempo dalle correnti che si muovono verso il nodo deve essere uguale a quella portata via nello stesso tempo dalle correnti che si allontanano dal nodo.

La seconda regola (regola delle maglie) si riferisce alle maglie. Presa in considerazione una qualsiasi maglia e scelto arbitrariamente un verso positivo per le correnti nelle maglie (per esempio quello orario) la somma algebrica delle f.e.m. nella maglia è pari alla somma algebrica dei prodotti RI (cadute di tensione ohmiche):

$$(56) \quad \sum f = \sum RI .$$

Questa regola è una immediata conseguenza della (54) che fornisce la

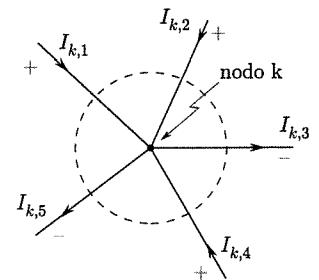


Fig. 3.22

Seconda regola
di Kirchhoff

d.d.p. fra gli estremi di un ramo in cui sono collegate serie di resistenze e sorgenti. Basta infatti applicare la (54) a ciascuno dei rami della maglia e sommare membro a membro le relazioni ottenute: la somma delle differenze di potenziale agli estremi dei rami è zero nel circuito chiuso e si ricava la (56) (19).

Le due regole di Kirchhoff consentono di scrivere un numero di relazioni (equazioni algebriche lineari) fra le grandezze (correnti e f.e.m.) caratteristiche di una rete. Tale sistema di equazioni è sovrabbondante. Di conseguenza occorre scegliere fra le possibili un numero di relazioni indipendenti pari al numero di incognite nel singolo problema (intensità o f.e.m.). Criteri per giungere a tale scelta esistono e saranno visti in elettrotecnica ed elettronica. Nel seguito (par. 3.12) esamineremo alcuni teoremi che facilitano l'analisi dei circuiti. Vogliamo qui mostrare con alcuni esempi l'utilità delle regole di Kirchhoff applicandole a casi che hanno un notevole interesse per il seguito delle nostre considerazioni.

a. Resistenze in parallelo

Si consideri lo schema di figura 3.23. Si dice che le resistenze R_1 , R_2 , R_3 sono collegate in parallelo.

In questo caso è facile vedere che la prima regola di Kirchhoff conduce ad una sola relazione indipendente

$$(57) \quad I = I_1 + I_2 + I_3 .$$

La seconda regola applicata a due maglie formate rispettivamente dalle resistenze R_1 , R_2 ed R_1 , R_3 , fornisce

$$(58) \quad \begin{aligned} I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$(59) \quad I = I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3} \right) = I_1 R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) .$$

Si osservi che $I_1 R_1$ è pari alla differenza di potenziale $(V_A - V_B) = V$ applicata alle tre resistenze. Si ha quindi

$$(60) \quad \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} .$$

Il complesso delle tre resistenze, quindi, equivale ad una unica resistenza R il cui valore è dato dalla (60) (fig. 3.23b).

Nel caso generale di n resistenze in parallelo la resistenza complessiva (20) è data da

$$(61) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

e quindi la conduttanza

$$(62) \quad G = \frac{1}{R} = G_1 + G_2 + \dots + G_n .$$

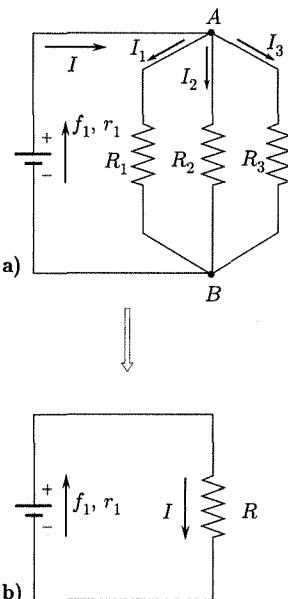


Fig. 3.23

L'inverso della resistenza complessiva di un parallelo di resistenze è la somma degli inversi delle singole resistenze

(19) Essa ovviamente coincide con la (52) per il caso del semplice circuito ad una sola maglia.

(20) Chiamata spesso resistenza di ingresso del complesso.

Si ricordi (49) che nel caso di resistori collegati in serie, la resistenza totale equivalente è la somma delle resistenze. Si è ora trovato che nel caso di resistori in parallelo la conduttanza totale è la somma delle conduttanze.

Si osservi che se in particolare tutti i resistori hanno la stessa resistenza R^* , la resistenza per il collegamento in parallelo è

$$(63) \quad R = \frac{R^*}{n}$$

e l'intensità della corrente in ciascun resistore (I^*) è un ennesimo della totale (I), cioè

$$(64) \quad I^* = \frac{I}{n}.$$

Come esempio di un caso concreto in cui il collegamento in parallelo di resistenze riesce utile, si consideri il problema dell'uso di un dato amperometro per la misura di correnti superiori a quella che determina la deviazione massima dell'indice dello strumento. L'amperometro è uno strumento il cui elemento sensibile deve essere attraversato dalla corrente che si vuole misurare; tale elemento presenta una certa resistenza (interna dello strumento). Per estendere verso le correnti più intense il campo di misura, si può usare lo strumento nello schema di figura 3.24: una opportuna resistenza (shunt) è disposta in parallelo allo strumento in modo da ridurre la corrente attraverso lo strumento stesso ad una frazione nota della corrente da determinare. Se per esempio si vuole moltiplicare la portata dello strumento per un fattore 100 occorre far sì che

$$I_A = \frac{I}{100}.$$

D'altra parte dalle regole di Kirchhoff si ha

$$I_A r = I_S R$$

$$I = I_A + I_S = I_A \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

e quindi:

$$\left(1 + \frac{r}{R} \right) = 100$$

$$R = \frac{r}{99}.$$

b. Complesso di resistenze collegate in serie e in parallelo

È molto frequente trovare una porzione notevole di una rete costituita esclusivamente da resistenze (elementi passivi, che cioè assorbono potenza) collegate fra loro in maniera varia: si pensi per esempio all'insieme degli utilizzatori passivi in una rete di distribuzione per corrente continua.

In questi casi è importante nei riguardi della potenza assorbita dal complesso, trovare la resistenza equivalente (di ingresso) del complesso. Questo può farsi usando le relazioni di Kirchhoff per calcolare la corrente di ingresso e la differenza di potenziale agli estremi del complesso. Si può fare più facilmente applicando ripetute volte le regole per il calcolo della resistenza equivalente di resistori in serie o parallelo; la porzione di rete è infatti formata da resistenze collegate in serie od in parallelo. Come esempio si consideri il complesso passivo indicato in figura 3.25; in tale figura è indicato anche come tale schema possa essere gradatamente ridotto a quello di un'unica resistenza.

Shunt

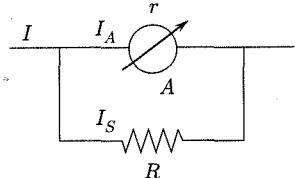


Fig. 3.24

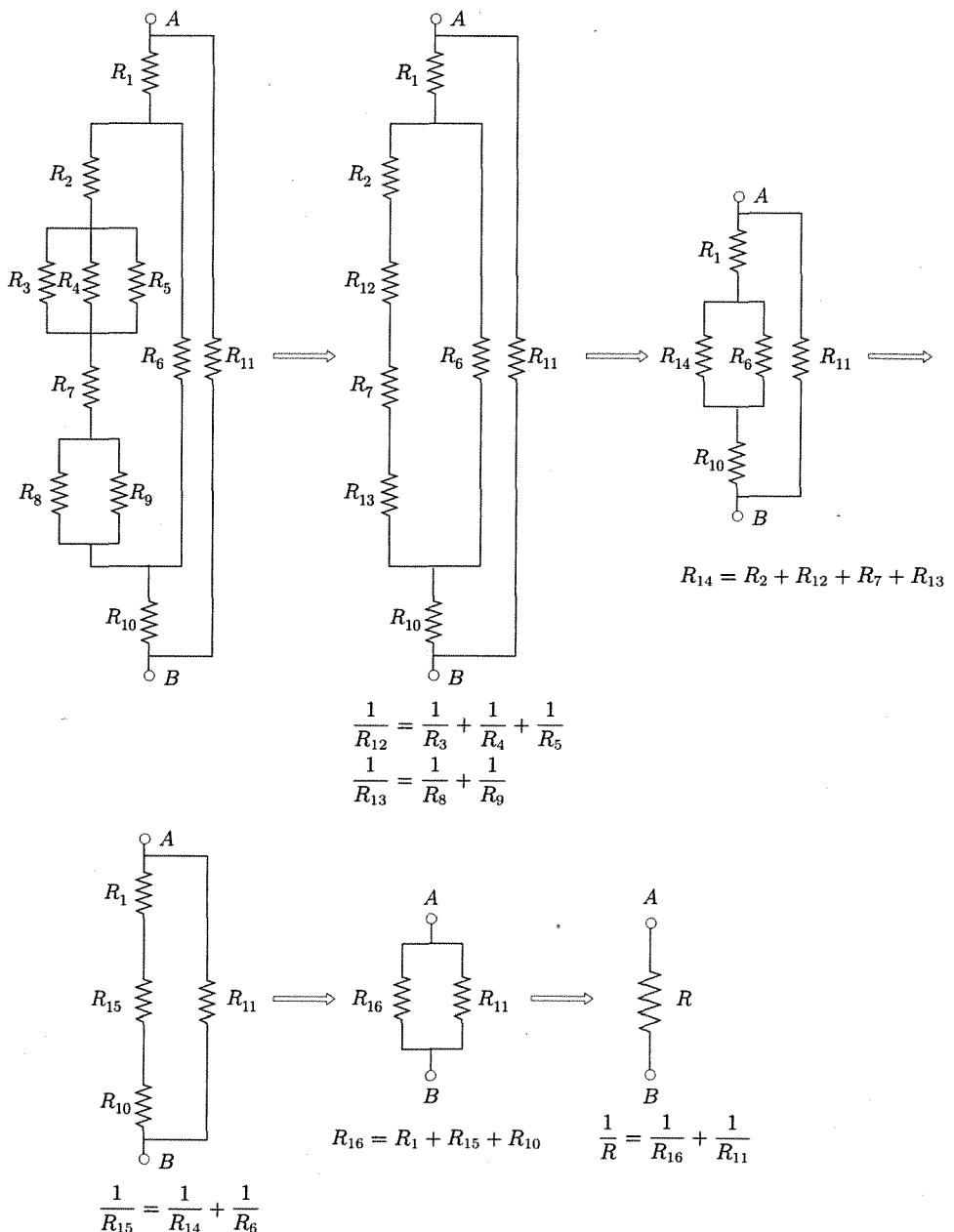


Fig. 3.25

c. Circuito potenziometrico

Lo schema del circuito potenziometrico per la misura di f.e.m. (f_x) incognite è dato in figura 3.26. La resistenza AC ha un contatto B che può essere spostato in modo da variare le resistenze R_1 e R_2 . G è un misuratore di corrente di precisione (galvanometro) e serve a rivelare la posizione del cursore B in corrispondenza alla quale la corrente I_1 attraverso f_x è nulla.

Applicando la seconda regola di Kirchhoff alla maglia formata dal generatore f_x e dalla resistenza R_2 si ha

$$(65) \quad f_x = I_1 r + (I_0 + I_1)R_2$$

essendo $r = r_x + r_G$. Se ci si pone nella condizione

$$I_1 = 0$$

$$(66) \quad f_x = I_0 R_2$$

e quindi la f.e.m. incognita si ottiene dal valore della resistenza calibrata R_2 per cui $I_1 = 0$ e da I_0 . Invece di determinare I_0 (con un amperometro) nelle misure di precisione si preferisce sostituire a f_x una sorgente di f.e.m. campione [pila campione (Weston)] f_c . Ripetendo la determinazione della posizione del cursore B per cui $I_1 = 0$ si ha

$$(67) \quad f_c = I_0 R'_2$$

e quindi

$$(68) \quad f_x = f_c \frac{R_2}{R'_2}.$$

d. Ponte di Wheatstone per la misurazione di resistenze

Lo schema in figura 3.27 è quello di un metodo molto usato per la misura di una resistenza incognita (R_x); R_1 , R_2 , R_3 sono resistenze note ed esse possono essere cambiate durante la misura, in genere R_1 e R_2 possono variare discontinuamente⁽²¹⁾ e sono realizzate mediante cassette (di resistenza, vedi par. 3.10); R_3 è invece una resistenza variabile che può assumere ogni valore in un certo intervallo. Le quattro resistenze formano una maglia a quattro lati: la sorgente è collegata in corrispondenza ad una diagonale (AC). Sull'altra diagonale (ponte) può essere inserito, mediante un tasto, un galvanometro: questo è in genere munito di shunt che possono essere variati o tolti secondo la sensibilità che si desidera avere per il galvanometro stesso.

La misura viene condotta determinando sperimentalmente, mediante variazione del rapporto R_1/R_2 e della resistenza R_3 , la condizione per cui la corrente nel galvanometro è nulla (condizione di equilibrio del ponte).

Applicando la prima regola di Kirchhoff ai nodi B e D

$$(69) \quad I_1 = I_2 \quad I_3 = I_4.$$

Applicando la seconda regola alle maglie ABD e DBC

$$R_1 I_1 = R_3 I_3$$

$$(70) \quad R_2 I_1 = R_x I_3.$$

Dividendo membro a membro le ultime due relazioni si ha

$$(71) \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x}$$

e

$$(72) \quad R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1}.$$

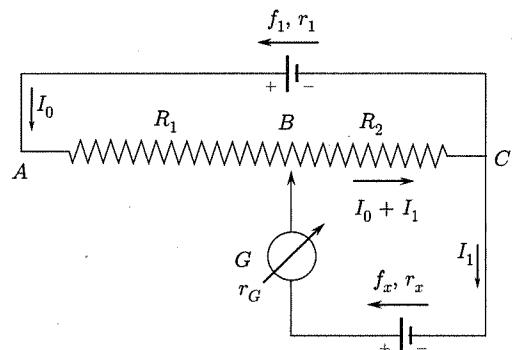


Fig. 3.26

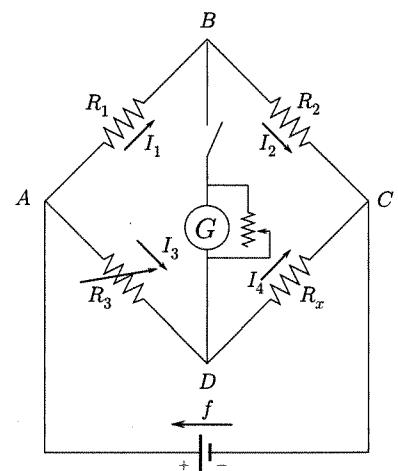


Fig. 3.27

⁽²¹⁾ Di solito il rapporto R_1/R_2 viene infatti fatto variare secondo le potenze di 10 fra 10^{-3} e 10^3 mediante un unico commutatore.

3.10. RESISTENZE FISSE E VARIABILI

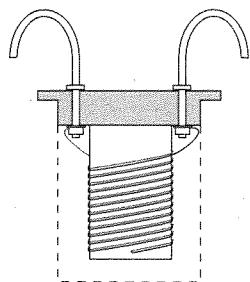


Fig. 3.28

Vogliamo dare ora un breve cenno sulla realizzazione pratica dei resistori. Le caratteristiche di ciascuno di essi sono il valore della resistenza e la potenza massima che in esso può essere dissipata impunemente. I resistori che si trovano in commercio per la realizzazione di circuiti nei quali le potenze in gioco non sono particolarmente elevate, sono essenzialmente a filo od a composizione. Nei primi un filo di una lega [nickel-rame (costantana), nichel-manganese-rame (manganina), vedi tabella 3.1] a resistività elevata e basso coefficiente di temperatura, viene avvolto su un supporto ceramico fino a realizzare la voluta resistenza. L'avvolgimento viene fatto con particolari precauzioni per evitare che l'elemento presenti assieme alla resistenza caratteristiche capacitive o induttive (cap. 6, par. 6.6).

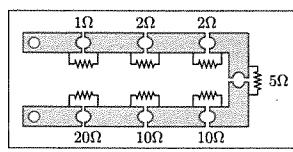
In genere l'avvolgimento è fatto in modo che per ogni spira sul supporto cilindrico attraversato dalla corrente in un verso ve ne sia una attraversata dalla stessa corrente in verso opposto. I resistori a filo possono essere realizzati fino a resistenze di $100\text{ k}\Omega$ e potenze di 100 W (per resistenze di $40\text{ k}\Omega$).

I resistori composti sono fatti con una mescolanza di polvere di carbone ed un legante isolante: essi possono essere costruiti sotto forma di cilindri pieni o mediante uno strato del materiale ora detto disteso su un supporto ceramico. I resistori del tipo composto hanno caratteristiche di stabilità inferiori di quelli a filo e coefficienti di temperatura più elevati.

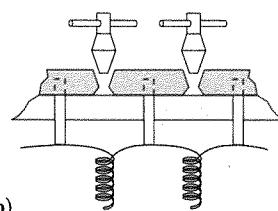
Vogliamo ora fermarci su qualche realizzazione di resistori da laboratorio. La figura 3.28 mostra lo schema di una resistenza campione: un filo di manganina (vedi tabella 3.1 per il coefficiente di temperatura) è avvolto su un supporto cilindrico. Si noti che il filo è ripiegato su se stesso (avvolgimento bifilare antinduttivo) per ottenere la compensazione degli effetti magnetici essendo spire contigue attraversate da correnti uguali in verso opposto. L'avvolgimento è immerso in un bagno d'olio ed un termometro è previsto per il controllo della temperatura. Resistori di questo tipo si costruiscono per resistenze fra 10^{-3} e $10^{-1}\text{ }\Omega$.

Una cassetta di resistenza è formata (fig. 3.29a e b) da resistenze (antinduttive) in serie con blocchi di rame. Questi ultimi sono sagomati in modo che l'inserzione di una spina può cortocircuitare la resistenza collegata fra i due blocchi a contatto con la spina stessa. I valori indicati sullo schema di figura 3.29a, si riferiscono ad una cassetta che con una opportuna inserzione di spine consente di ottenere fra i morsetti terminali una qualsiasi resistenza avente valore intero fra 0 e $50\text{ }\Omega$.

La figura 3.30a mostra lo schema di un'altra disposizione per ottenere resistenze fra 0 e $99\text{ }\Omega$ variabili di ohm in ohm: in questo caso due manopole servono a muovere due commutatori in modo da inserire fra i terminali del dispositivo (A e B) la resistenza voluta. La figura 3.30b mostra un dispositivo per realizzare una resistenza variabile con continuità (fino ad un massimo).

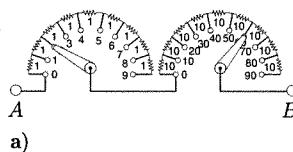


a)



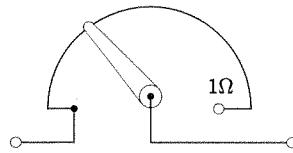
b)

Fig. 3.29



A)

B)



A)

b)

Fig. 3.30

3.11. MISURAZIONE DI DIFFERENZE DI POTENZIALE, DI RESISTENZE E DI POTENZE

La differenza di potenziale fra due punti di un circuito può essere misurata con lo schema di figura 3.31 facendo uso di un amperometro

avente in serie una resistenza (R_S) molto grande rispetto alla resistenza di ingresso della rete a valle (voltmetro): in tal caso infatti l'intensità I_1 della corrente derivata attraverso lo strumento è molto piccola rispetto ad I_0 ed il disturbo arrecato al circuito può divenire trascurabile. L'applicazione della legge di Ohm porta allora

$$(73) \quad V_A - V_B = V = I_1(R_S + r) \simeq I_1 R_S$$

essendo la resistenza interna dello strumento (r) trascurabile rispetto a R_S . Come si vede nell'uso dei voltmetri bisogna stare molto attenti a soddisfare la condizione posta relativa ad R_S in rapporto al circuito in misura. Valori tipici di R_S per strumenti da 100 V fondo scala vanno da 10^4 a 10^6 Ω.

Abbiamo esaminato in precedenza il metodo del ponte di Wheatstone per la misura delle resistenze. Un altro metodo molto semplice per la misura della resistenza è quello di determinare contemporaneamente la d.d.p. agli estremi e la corrente nella resistenza (*metodo voltamperometrico*).

Gli schemi possibili sono indicati in figura 3.32. Nello schema a) la determinazione della corrente attraverso la resistenza è fatta mediante l'amperometro mentre la d.d.p. ai capi si ricava facilmente dalle indicazioni dei due strumenti (V, I)

$$(74) \quad V_R = V - I_R r = V - Ir.$$

Nel secondo caso (schema b) la d.d.p. $V_R = V$ è letta allo strumento e la corrente nella resistenza si trova dalla relazione

$$(75) \quad I_R = I - I_v = I - \frac{V}{r}.$$

La resistenza incognita è data nei due casi da V_R/I_R . Spesso le correzioni da apportare alle letture degli strumenti sono trascurabili e

$$(76) \quad R = \frac{V}{I}.$$

Misure contemporanee della d.d.p. ai capi del dispositivo e della corrente che entra in esso servono a determinare la potenza assorbita

$$(77) \quad P = VI.$$

Lo schema è indicato in figura 3.33. Nel caso che sia necessario, bisogna apportare una correzione per tenere conto che l'amperometro fornisce la somma delle correnti nel dispositivo e nel voltmetro.

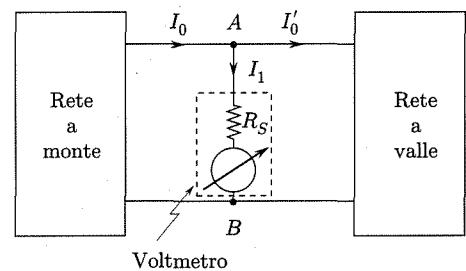


Fig. 3.31

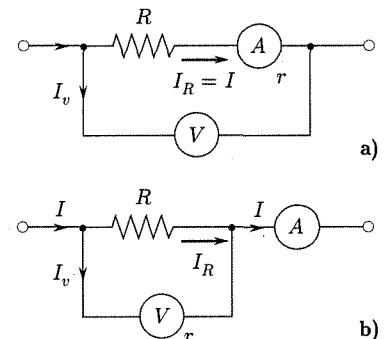


Fig. 3.32

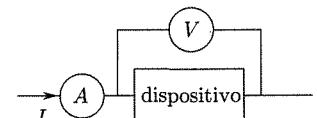


Fig. 3.33

3.12. TEOREMI SUI CIRCUITI

Le regole di Kirchhoff (e a volte già la legge di Ohm generalizzata) consentono di scrivere relazioni algebriche lineari sufficienti per lo studio delle reti. Come si è detto le relazioni che si possono scrivere sono in numero maggiore delle incognite e fra di esse occorre trovare quelle indipendenti (in numero pari a quello delle incognite). Pur senza addentrarci

nello studio delle reti, che sarà fatto con completezza in elettrotecnica ed elettronica, vogliamo accennare ad alcuni dei teoremi che possono essere facilmente dedotti dalle relazioni già stabilite e molto spesso semplificano notevolmente la trattazione di casi pratici.

a. Teorema di sovrapposizione

A volte questo teorema è anche detto principio di sovrapposizione⁽²²⁾. Esso discende dalla linearità della legge di Ohm e delle relazioni di Kirchhoff e si esprime: in una qualsiasi rete di generatori e resistenze la corrente in ogni punto è la somma delle correnti che vi sarebbero se ogni generatore venisse considerato separatamente e gli altri generatori venissero sostituiti da resistenze pari alle loro resistenze interne.

Con riferimento alla figura 3.34c la corrente in un ramo (per esempio attraverso R_3) quando sono presenti contemporaneamente f_5 ed f_1 è pari alla somma delle correnti I'_3 ed I''_3 per gli schemi a e b.

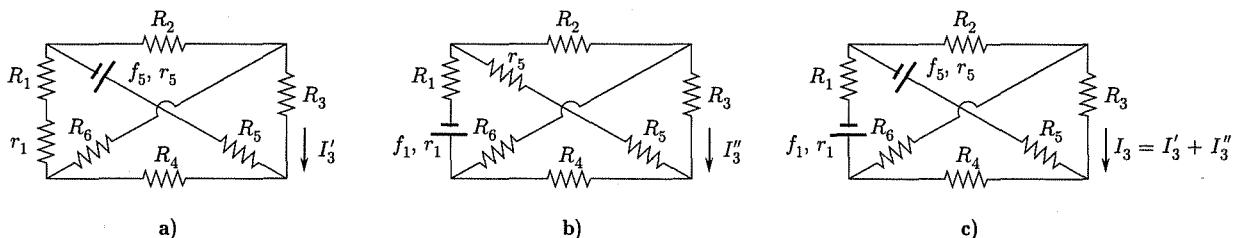


Fig. 3.34

b. Teorema di reciprocità

In una qualsiasi rete di generatori e resistenze, se una forza elettromotrice (f) inserita in un ramo (i) produce una corrente (I_j) in un altro ramo (j), la corrente che si otterrebbe in $i(I_i)$ inserendo la f in j è pari a I_j .

In altri termini i rapporti f_i/I_j e f_j/I_i , chiamati resistenze di trasferimento (R_{ij} , R_{ji}), sono uguali

$$(78) \quad R_{ij} = R_{ji}.$$

Anche questo teorema scende dalla linearità delle equazioni di Kirchhoff.

c. Teorema di Thevenin

In una rete di generatori e resistenze comunque complicata si considerino due punti che separano la rete in due parti: essi possono essere considerati i terminali di uscita di una prima rete e quelli di entrata di una seconda rete (fig. 3.35). La prima rete può essere sempre sostituita ai fini dei calcoli per la seconda rete mediante un semplice generatore avente forza e.m. pari alla d.d.p. a circuito aperto fra i due terminali e resistenza interna pari alla resistenza di ingresso della prima rete misurata tra i terminali stessi.

⁽²²⁾ Del tutto analogo al principio di sovrapposizione visto in elasticità per le piccole deformazioni, in acustica per le onde di piccola ampiezza e in elettrostatica per le forze su cariche elettriche.

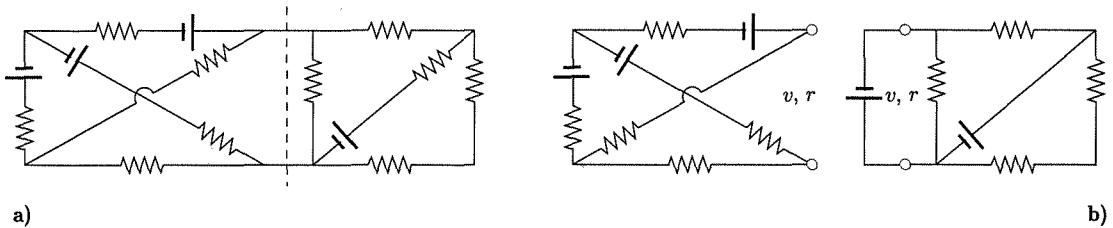


Fig. 3.35

d. Teorema del massimo trasferimento di potenza

Si consideri una rete comunque complicata di generatori e resistenze che termini in due punti ai quali è collegata una rete comunque complicata formata da elementi passivi. Il sistema può schematizzarsi sempre mediante una sorgente che ha una f.e.m. f , ed una resistenza interna r , la quale alimenti una resistenza di carico R_c (fig. 3.36). L'intensità della corrente è

$$(79) \quad I = \frac{f}{R_c + r}$$

e la potenza fornita al carico

$$(80) \quad P_c = \frac{f^2 R_c}{(R_c + r)^2} .$$

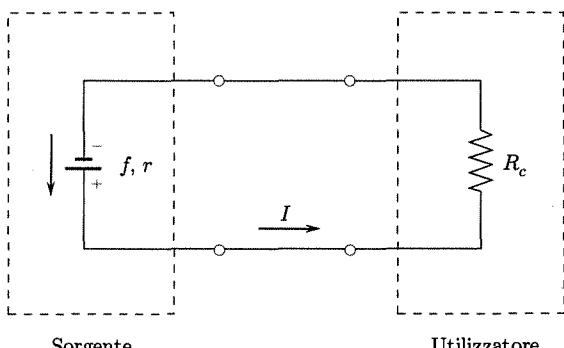


Fig. 3.36

Evidentemente tale potenza cresce se r diminuisce. Supponiamo che r abbia un valore fissato e che invece R_c possa variare. La potenza P_c tende a zero sia per R_c tendente a zero sia per R_c tendente a valori molto grandi. Per ottenere il valore per cui P_c è massimo basta porre la prima derivata uguale a zero

$$(81) \quad \frac{dP_c}{dR_c} = 0 = f^2 \left[\frac{1}{(R_c + r)^2} - \frac{2R_c}{(R_c + r)^3} \right]$$

cioè

$$(82) \quad R_c = r.$$

Che si tratti di un massimo può essere controllato osservando che la derivata seconda ha valore negativo per $R_c = r$.

Si ha così: una data sorgente di f.e.m. fornisce il massimo della potenza ad un carico quando la resistenza di carico uguaglia la resistenza interna del generatore.

In tali condizioni la potenza fornita al carico è

$$(83) \quad P_{c\max} = \frac{f^2}{4R_c}$$

e risulta la metà della potenza erogata dalla sorgente: l'altra metà è consumata nell'interno della sorgente stessa.

■ 3.13. CONDUZIONE ELETTRICA NEI GAS

Vogliamo ora svolgere alcune considerazioni su come avvengono i processi di conduzione nei vari mezzi materiali.

I gas non sottoposti ad azioni capaci di spezzare le loro molecole sono intrinsecamente ottimi isolanti giacché tutte le molecole sono neutre. Tuttavia nelle condizioni normali sono di solito operanti uno o più processi che causano la liberazione di elettroni da alcune molecole e di conseguenza la presenza nella massa gassosa di particelle cariche libere (elettroni, ioni positivi o negativi) rende possibile una conduzione elettrica.

Ionizzazione

Prescindendo da taluni casi nei quali è possibile che elettroni entrino nella massa gassosa da superfici di solidi immersi in essa, il meccanismo che produce cariche libere in una massa gassosa tenuta in condizioni normali è quello della liberazione di elettroni da molecole del gas stesso (ionizzazione). In tale processo viene in genere prodotta una coppia di cariche libere: uno ione positivo ed un elettrone. L'elettrone può poi rimanere come entità isolata oppure può associarsi a qualche molecola neutra trasformandola in uno ione negativo.

Il processo di ionizzazione di una molecola richiede una energia almeno pari alla energia necessaria ad allontanare (a distanza infinita) dal resto della molecola un elettrone che inizialmente si trovi in uno stato corrispondente ad una orbita periferica in uno degli atomi della molecola stessa. La figura 3.37 riporta l'energia di ionizzazione per elettroni periferici di atomi neutri: l'energia assume i valori massimi per i gas nobili ed i valori minimi (relativi) per i metalli alcalini. Come si vede queste energie di ionizzazione, espresse in eV vanno da 24,5 (He) a circa 4 (per Cs); come valore orientativo si può prendere 10 eV. Valori più elevati sono richiesti per ionizzare elettroni non periferici nella struttura atomica.

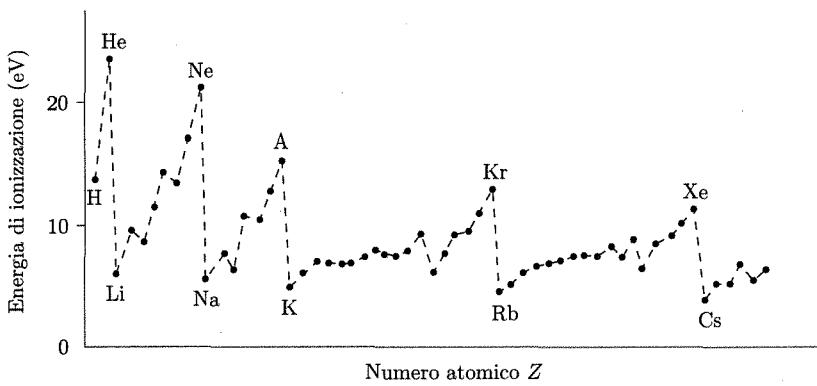


Fig. 3.37

I valori delle energie di ionizzazione mostrano chiaramente come la ionizzazione delle molecole di un gas non possa essere prodotta nell'urto fra le molecole del gas stesso se non a temperature notevolmente elevate. Si ricordi infatti che il valore di kT a temperatura ambiente è 0,025 eV e diviene dell'ordine di 10 eV a temperature intorno a 10^5 K. La ionizzazione termica ha tuttavia grande interesse in alcuni casi quale quello della atmosfera intorno al sole (corona solare) che si trova alla temperatura di milioni di gradi e di plasmi prodotti in gas portati ad alte temperature.

Le energie necessarie alla ionizzazione in gas in condizioni normali di temperatura sono invece comunemente fornite da radiazioni elettro-

magnetiche ultraviolette, X o gamma (attraverso l'effetto fotoelettrico, di cui parleremo più avanti, o l'effetto Compton, di cui nel vol. I, cap. 4, par. 4.14) e da radiazioni corpuscolari ad alta energia quali si trovano nei raggi cosmici o sono emesse da sostanze radioattive sempre presenti nei materiali che sono vicini alla massa gassosa.

In un cm^3 di aria al livello del mare si trovano in media 500-1000 ioni. Essi sono quasi tutti prodotti dai raggi ultravioletti; i raggi cosmici e le radiazioni da materiali radioattivi della crosta terrestre sono responsabili della presenza di soli 1 a 5 ioni per cm^3 . Il numero di ioni presenti è molto piccolo rispetto al numero di molecole del gas (dell'ordine di 10^{19} per cm^3 al livello del mare). La ionizzazione dovuta ai raggi cosmici ed ai raggi ultravioletti cresce con la quota. Nell'alta atmosfera (a circa 200 km d'altezza) si ha una zona (ionosfera) di aria altamente ionizzata; si hanno circa $3 \cdot 10^5$ ioni/ cm^3 su $2 \cdot 5 \cdot 10^{10}$ molecole/ cm^3 .

Una volta prodotti gli ioni possono ricombinarsi, dando origine a sistemi neutri. La ricombinazione diretta di un elettrone con uno ione positivo in un urto binario è un evento abbastanza raro, a causa delle condizioni richieste per la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Se nell'urto partecipa un altro atomo o molecola del gas o la parete del recipiente è più facile soddisfare le condizioni. Vi sono anche processi in cui l'elettrone prima si attacca ad una molecola formando uno ione negativo e poi questa urta uno ione positivo neutralizzandosi.

Vi sono poi processi, legati alla preesistenza di cariche libere, che consentono la creazione di ulteriori cariche. I principali sono:

1. *Moltiplicazione per urto.* Consideriamo una massa gassosa nella quale agenti ionizzanti esterni producano alcuni ioni positivi ed elettroni; essa sia inoltre immersa in un campo elettrico (fig. 3.38). I portatori di carica liberi in assenza del campo elettrico avrebbero un moto disordinato quale quello che hanno le altre particelle (neutre) del gas e nessuno spostamento netto (medio) potrebbe osservarsi per essi in alcuna direzione. Sotto l'azione del campo elettrico i portatori di carica liberi hanno un moto composto da quello disordinato suddetto e da un moto nella direzione del campo elettrico: ciascuno di essi viene accelerato dal campo nella sua direzione tra due urti con altre particelle del gas. Si osservi che l'energia che ciascun ione prende dal campo mentre viene accelerato finisce attraverso il meccanismo degli urti per essere distribuita tra tutte le particelle del gas.

Se il campo è sufficientemente intenso ed il libero cammino medio degli elettroni è abbastanza lungo, gli elettroni possono accumulare fra due urti consecutivi una energia cinetica sufficiente a ionizzare le molecole con cui urtano producendo ioni ed elettroni secondari: il processo si può ripetere più volte dando luogo ad un forte aumento di ioni e di elettroni di successive generazioni.

2. *Cariche prodotte per bombardamento.* Il catodo bombardato dai massivi ioni positivi può, attraverso un effetto noto come emissione secondaria, emettere elettroni, se l'energia degli ioni positivi è sufficiente a liberare l'elettrone. Altrimenti essi possono riscaldare il catodo e questo per effetto termoelettronico (v. più avanti) emette elettroni.

Ionosfera

Ricombinazione

Raggi X

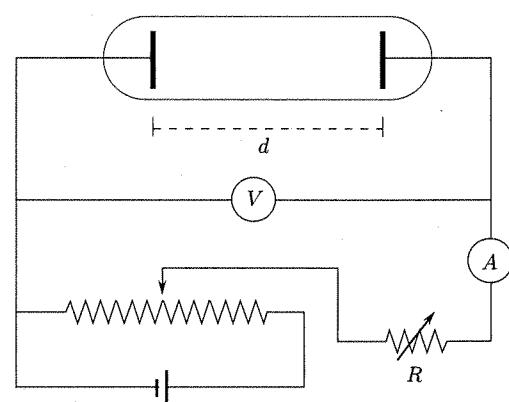


Fig. 3.38

Ioni ed elettroni secondari

Emissione secondaria

L'emissione secondaria avviene per valori del campo elettrico superiori a quelli per cui si ha moltiplicazione per urto da parte di elettroni nel gas.

Caratteristica tensione-corrente

Siamo ora in grado di discutere la caratteristica tensione-corrente di un gas quale mostrata nella figura 3.39 per il caso di un gas tenuto a pressione di qualche mm di mercurio fra due elettrodi piani secondo lo schema della figura 3.38. Il gas è contenuto in una ampolla in cui a distanza d uno dall'altro si trovano due elettrodi collegati ad una sorgente di d.d.p. il cui valore e la cui resistenza interna possono essere variati per realizzare la coppia di valori V e I corrispondente a ciascun punto della caratteristica. Un agente ionizzante esterno garantisce la formazione di ioni.

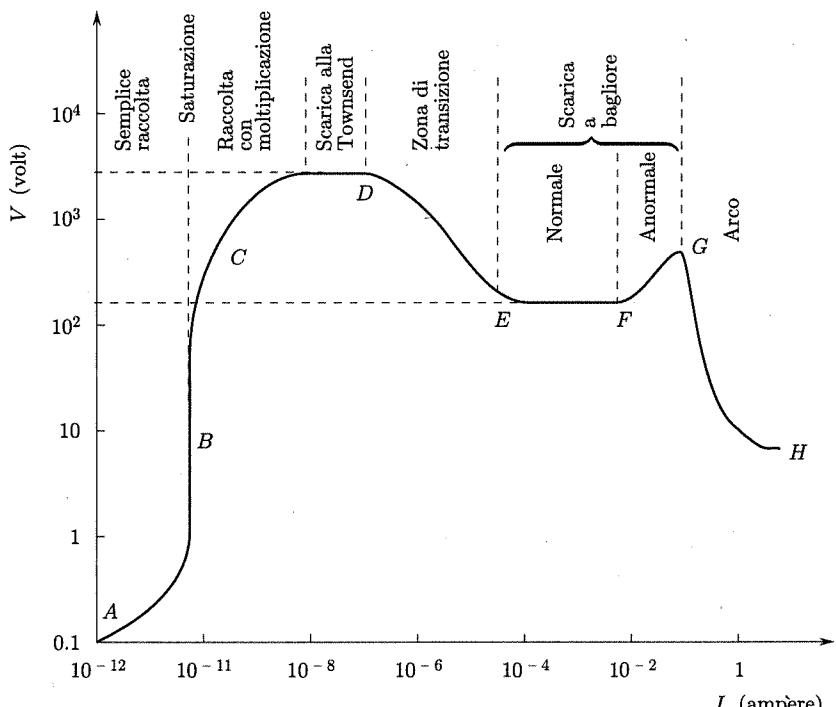


Fig. 3.39

Andamento ohmico

*Scarica oscura
o alla Townsend*

*Scarica a bagliore
Arco*

Solo per un tratto iniziale brevissimo, la relazione fra corrente e tensione può ritenersi lineare, corrispondente cioè ad un comportamento ohmico; ben presto al crescere di V la corrente finisce per raggiungere un valore di saturazione. Se la differenza di potenziale viene aumentata, si osserva che al di là di un certo valore la corrente prende a crescere rapidamente (moltiplicazione per urto dei portatori di carica) e si giunge ad una regione nella quale la caratteristica corrente-tensione è parallela all'asse delle correnti (scarica oscura o alla Townsend). Da questa regione in poi la variabile indipendente è in realtà la corrente (al posto della tensione) e questa è fissata nel circuito agendo sulla resistenza interna del generatore. Al crescere della corrente alla regione della scarica oscura si succedono la scarica a bagliore, ove gli effetti luminosi sono molto rilevanti, e la zona dell'arco. Tutti i processi che avvengono fino alla regione di saturazione sono tali (non autosostenentesi) che essi cessano se la sorgente esterna di ionizzazione viene rimossa, gli altri (quali quelli che si hanno nella scarica oscura ed a bagliore e nell'arco), se avviati, non richiedono l'ulteriore presenza della sorgente di ionizzazione (scarica autosostenentesi).

a. Scarica non autosostenentesi

La prima parte del comportamento, quella in cui si ha una scarica non autosostenentesi, è essenzialmente dovuta alla raccolta da parte del campo elettrico applicato dei pochi ioni prodotti dall'agente ionizzante esterno. Applicando fra gli elettrodi una d.d.p., molto piccola, si può ritenere che il campo elettrico

$$E = V/d$$

sia uniforme e per la densità di corrente si può scrivere

$$(84) \quad j = ne(v_d^+ + v_d^-)$$

essendo v_d le velocità di scorrimento dei portatori di carica. La loro concentrazione può essere calcolata indicando con P il numero di ioni prodotti per unità di volume e per unità di tempo dai processi di ionizzazione e con R il coefficiente di ricombinazione. Assumendo che la concentrazione degli ioni positivi e degli elettroni sia uguale si può scrivere

$$(85) \quad \frac{dn}{dt} = P - Rn^2$$

che in condizioni di equilibrio ($dn/dt = 0$) dà

$$(86) \quad P = Rn^2 \text{ ovvero } n = (P/R)^{1/2}.$$

Se la pressione del gas è costante, le velocità di scorrimento possono essere ritenute con buona approssimazione proporzionali a E

$$(87) \quad v_d = \mu E$$

dove il coefficiente μ prende il nome di *mobilità*. La (84) si scrive allora

$$(88) \quad j = e(P/R)^{1/2}(\mu^+ + \mu^-)V/d$$

che corrisponde alla legge di Ohm. Ciò spiega l'andamento della prima parte della caratteristica $V-I$ di figura 3.39, il cui andamento generale nella regione di scarica non autosostenentesi è riportato, ingrandito non in scala, nella figura 3.40. La mobilità degli elettroni è molto superiore a quella dei massivi ioni positivi, sicché il contributo di questi nella (88) può essere trascurato.

La validità di una legge lineare fra j ed E , sia pure in maniera approssimata, è limitata a valori molto piccoli della d.d.p. applicata. Noi non ci fermeremo qui a considerare come le mobilità molto diverse degli elettroni e degli ioni positivi portino alla formazione di cariche spaziali e, di conseguenza, alla deviazione dalla uniformità del campo fra gli elettrodi. Basti dire che al crescere della tensione applicata fra gli elettrodi la corrente va verso un valore di saturazione quando il campo diviene così intenso che gli ioni, subito dopo essere stati creati, vengono separati e raccolti agli elettrodi. In tal caso gli eventi di ricombinazione diventano molto rari e la carica spaziale scompare.

Si può vedere che la corrente di saturazione vale

$$(89) \quad j_s = edP.$$

Raggiunta la saturazione, come si osserva nella caratteristica di figura 3.40, la corrente non varia nonostante che la differenza di potenziale venga aumentata, entro limiti piuttosto ampi.

*Scarica non
autosostenentesi*

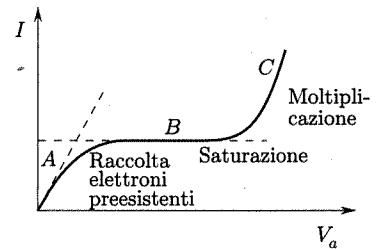


Fig. 3.40

Cariche spaziali

Saturazione

Aumentandola ulteriormente, tuttavia, si riscontra ad un certo punto che la corrente riprende a salire molto rapidamente. Il campo elettrico in queste condizioni ha raggiunto il valore per cui si verifica il processo di ionizzazione delle molecole del gas per urto da parte degli elettroni primari.

Se si indica con dN l'aumento del numero di elettroni (N) che si verifica, in una disposizione con elettrodi piani, per un avanzamento dx degli elettroni stessi (cioè nello strato di spessore dx) si può porre

*Primo coefficiente
di Townsend*

$$(90) \quad dN = \alpha N dx$$

essendo α una costante che rappresenta macroscopicamente il numero di coppie di ioni prodotti da un elettrone nel percorso unitario nella direzione del campo. Esso viene chiamato comunemente primo coefficiente di Townsend. Il coefficiente α dipende da E , dalla pressione e dalla natura del gas.

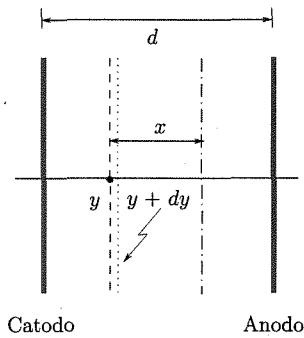


Fig. 3.41

Si supponga ora che P sia costante e si desideri determinare il numero di elettroni che raggiunge l'anodo per unità di superficie in un secondo. Si consideri un piano a distanza y dal catodo (vedi fig. 3.41). Nel cilindro di sezione unitaria e altezza dy vengono creati in un secondo Pdy elettroni i quali producono, muovendosi verso l'anodo, elettroni secondari per urto in accordo con la (90). Il numero di elettroni originati dai Pdy elettroni primari dello strato considerato a distanza x dallo strato stesso (vedi la fig. 3.41) è

$$(Pdy)e^{\alpha x}$$

ed in corrispondenza all'anodo

$$(91) \quad (Pdy)e^{\alpha(d-y)}.$$

Il numero totale di elettroni incidenti sull'anodo per unità di superficie e per secondo si ha sommando le espressioni del tipo (91) per tutti gli strati di spessore infinitesimo in cui può essere suddiviso lo spazio fra anodo e catodo

$$(92) \quad N = \int_0^d P e^{\alpha(d-y)} dy = \frac{P}{\alpha} (e^{\alpha d} - 1).$$

Pertanto la densità di corrente nella scarica passa dal valore di saturazione (j_s) a

$$(93) \quad j = \frac{eP}{\alpha} (e^{\alpha d} - 1) = \frac{j_s}{\alpha d} (e^{\alpha d} - 1).$$

In tutte queste parti della scarica il passaggio della corrente è legato alla ionizzazione primaria: togliendo la sorgente che causa tale ionizzazione il passaggio della corrente si arresta. Inoltre la corrente, per quanto intensa, è sempre proporzionale al numero di ioni creati nell'unità di tempo dall'agente di ionizzazione primaria.

b. Scarica autosostenentesi. Scarica alla Townsend e legge di Paschen

Nel caso delle scariche autosostenentesi il processo, una volta avviato, non richiede più la sorgente di ionizzazione primaria e quindi può continuare anche se essa viene rimossa. Questo tipo di scarica avviene, restando fisse le altre condizioni sperimentali, se la differenza di potenziale applicata agli elettrodi fra i quali si trova il gas supera un dato valore.

La particolarità del processo e le condizioni del suo stabilirsi sono diverse secondo che la pressione del gas è alta o bassa. Nel primo caso le correnti in gioco sono forti (ampère) e secondo le caratteristiche del generatore di d.d.p. si ha scintilla o arco: nel secondo caso le correnti restano basse, dell'ordine dei μA .

Noi ci limiteremo qui a considerare il caso delle pressioni basse quali quelle che si è detto esistono nel dispositivo di figura 3.38. La prima scarica autosostenentesi che si stabilisce aumentando la d.d.p. applicata è chiamata *alla Townsend* ed alle volte anche oscura giacché non è accompagnata da fenomeni luminosi cospicui: si ha solo una limitata luminosità uniforme nella massa gassosa fra gli elettrodi.

Se si continua ad aumentare la differenza di potenziale applicata agli elettrodi al di là della zona già descritta di moltiplicazione per urto, si giunge ad un valore al di sopra del quale la corrente prende a salire più rapidamente di quanto indicato dalla (93) e la caratteristica $I-V$ finisce per avere un tratto parallelo all'asse delle intensità di corrente (fig. 3.42). Questo andamento della corrente è dovuto al presentarsi di nuovi fenomeni agli elettrodi: si tratta in particolare della emissione elettronica secondaria al catodo. Questa e la moltiplicazione nel gas producono un fattore di moltiplicazione effettivo (numero di elettroni che giungono all'anodo a partire da un singolo elettrone che lascia il catodo) molto grande che diventa infinito in corrispondenza al tratto della caratteristica $I-V$ parallela all'asse I .

Per un dispositivo la cui caratteristica $V-I$ non sia una linea retta non si può parlare a rigore di resistenza; pure, se si fissa un punto sulla caratteristica (punto di lavoro) e si è interessati esclusivamente a piccole variazioni di V ed I intorno al valore del punto di lavoro, si può immaginare di sostituire alla caratteristica effettiva la sua tangente nel punto di lavoro, cioè approssimare la relazione effettiva fra V ed I con una legge lineare. La pendenza della tangente determina la cosiddetta resistenza differenziale relativa al punto di lavoro fissato.

Si vede quindi che per punto di lavoro nell'interno del tratto della caratteristica parallelo all'asse I , la resistenza differenziale dell'elemento circolante formato dagli elettrodi e dal gas è zero. In tale regione le variazioni di corrente sono prodotte esclusivamente dalla variazione di resistenza del generatore (e di altre eventuali resistenze in serie esterne al tubo del gas). Vedremo fra breve che se il generatore è tale che la corrente può crescere al di là di certi limiti un nuovo regime si stabilisce.

Il verificarsi del regime di scarica alla Townsend dipende: 1. dalla natura del catodo; 2. dalla separazione fra gli elettrodi; 3. dalla pressione, natura del gas e differenza di potenziale.

La legge di Paschen afferma che la tensione di scarica alla Townsend ($V_{S,T}$), rimanendo inalterati la natura del catodo ed il gas, è funzione del prodotto separazione degli elettrodi per pressione: pd .

Ciò può essere compreso se si pensa che la pressione è inversamente proporzionale al libero cammino medio e quindi pd è proporzionale al numero di urti che un elettrone in media subisce nel percorso fra i due elettrodi, e quindi al numero di moltiplicazioni per urti che si hanno. È evidente che la tensione di scarica debba essere la stessa, al variare di d e p , se il numero di moltiplicazioni che avvengono quando un elettrone va dal catodo all'anodo resta lo stesso.

*Scarica alla Townsend
o oscura*

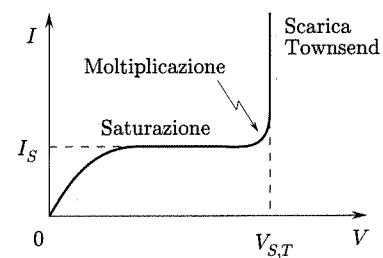


Fig. 3.42

Resistenza differenziale

Legge di Paschen

I tempi richiesti per la scarica sono piuttosto piccoli. Fra l'apparizione del primo elettrone e lo stabilirsi della scarica di Townsend in condizioni di equilibrio si ha un tempo di formazione della scarica dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$ sec.

Vogliamo infine osservare che nella scarica alla Townsend e negli altri regimi che vedremo in seguito, le caratteristiche e l'andamento dei processi non sono più determinati dalla d.d.p. applicata, bensì dal valore della corrente; questa è la ragione per cui nella descrizione dei processi di scarica autosostenentesi si usa come variabile indipendente I (o j) e si considerano le caratteristiche $V-I$.

c. Scarica autosostenentesi. Scarica a bagliore

Nella regione Townsend le condizioni che si stabiliscono dipendono dalla resistenza esterna al tubo a gas, cioè del generatore e del circuito

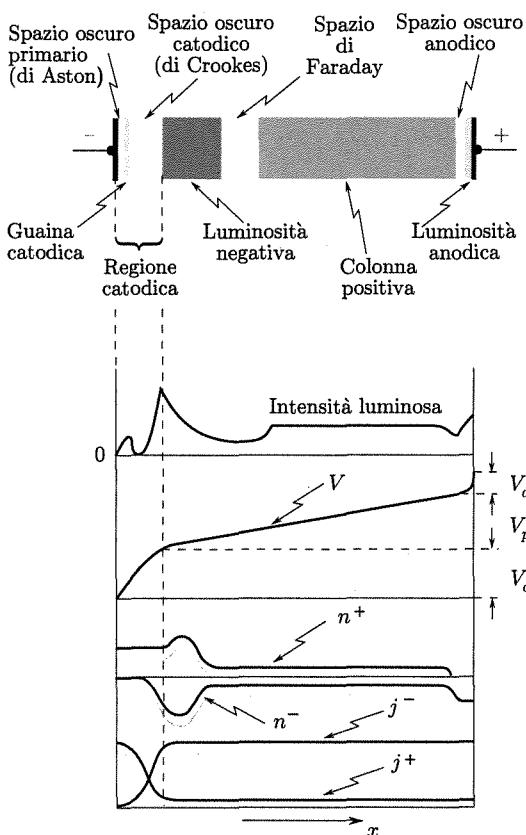


Fig. 3.43

1. primo spazio scuro (di Aston);
2. guaina catodica;
3. spazio oscuro catodico (o di Crookes);
4. zona luminosa negativa⁽²⁴⁾;

esterno. Riducendo questa resistenza la corrente nel circuito cresce mentre la tensione ai capi del tubo a gas resta costante: si raggiunge tuttavia un punto in corrispondenza al quale all'aumento della corrente corrisponde una diminuzione della d.d.p. al tubo. Ciò è legato al crearsi di particolari distribuzioni di carica spaziale che alterano notevolmente la distribuzione del potenziale fra gli elettrodi. Si giunge infine (fig. 3.39) ad un nuovo regime caratterizzato da un tratto della curva $V-I$ parallelo all'asse delle I : in tale ultima regione l'emissione di luce è notevole e la scarica prende il nome di scarica a bagliore normale; la zona della scarica a bagliore normale è seguita da una regione (scarica a bagliore anormale) ove al crescere della I cresce la V .

Non ci occuperemo in dettaglio della zona di transizione fra la regione di scarica alla Townsend e quella della scarica a bagliore nella quale la distribuzione di carica spaziale cambia notevolmente con le condizioni di alimentazione. Va tuttavia osservato che l'andamento discendente della caratteristica è fortemente influenzato dal circuito esterno usato per il rilievo e non è infrequente osservare instabilità ed oscillazioni⁽²³⁾.

Vogliamo invece fermarci a descrivere l'andamento dei processi nella scarica a bagliore. La figura 3.43 si riferisce al caso di tubi allungati con elettrodi paralleli abbastanza estesi e posti ad una notevole distanza fra loro. Andando dal catodo all'anodo si succedono varie zone chiaramente distinte:

⁽²³⁾ L'andamento decrescente della caratteristica corrisponde a resistenza differenziale negativa; la presenza di induttanze e capacità nel circuito può condurre ad oscillazioni di notevole ampiezza.

⁽²⁴⁾ Le dizioni *zona luminosa negativa*, *luce negativa*, *luce positiva* con riferimento alla

5. spazio oscuro di Faraday;
6. colonna positiva;
7. spazio oscuro anodico;
8. zona luminosa anodica.

Il colore della luce emessa dipende dalla natura del gas e dalla zona luminosa di emissione: così per esempio nel caso dell'aria la luce che esce dalla zona luminosa negativa è bluastra e quella della colonna positiva è rosa.

Al variare della pressione, della distanza fra gli elettrodi, della forma del recipiente, è possibile osservare che la zona che viene più fortemente alterata è la colonna positiva; essa può anche scomparire. Più particolarmente se in un dato tubo si riduce la pressione, la zona luminosa negativa e lo spazio oscuro si espandono a spese della colonna positiva fino a che questa scompare: se si varia la distanza fra gli elettrodi la lunghezza della colonna positiva cambia senza che le altre zone varino apprezzabilmente di dimensioni; infine se gli elettrodi sono montati in un grande involucro sferico, invece che in un tubo, non si osserva la presenza della colonna positiva. Tutto ciò fa apparire evidente che la colonna positiva non costituisce una caratteristica fondamentale del tipo di scarica come invece lo sono le zone luminose ed oscure in prossimità del catodo. Nella figura sono indicate le distribuzioni del potenziale, delle cariche, delle densità di corrente dovuta ai due tipi di cariche e dell'intensità della luce emessa. La differenza di potenziale applicata (V) si divide in tre parti:

V_c caduta di potenziale nella zona catodica (spazio oscuro primario, guaina catodica, spazio oscuro catodico)

V_p caduta di potenziale nella colonna positiva

V_a caduta di potenziale anodica.

La caduta di potenziale anodica in certe condizioni sperimentali può essere nulla; nei casi in cui è presente essa ha un valore all'incirca pari al primo potenziale di ionizzazione del gas (~ 10 V). Nella colonna positiva il campo elettrico è costante e vale pochi volt per cm. Di conseguenza V_p non ha in genere valori elevati e, come si è detto, ci si può porre anche in condizioni che esso scompaia. Si vede che la maggior parte della caduta di potenziale si ha nelle vicinanze del catodo. In genere quindi

$$(94) \quad V_c \gg V_p + V_a .$$

Il valore di V_c dipende dalle caratteristiche del gas e del materiale con cui è fatto il catodo; esso in genere è molto poco influenzato dalla pressione del gas e dalla distanza fra gli elettrodi. Esso è anche indipendente dalla corrente di scarica finché questa non superi un valore limite I_F in corrispondenza al quale si passa dalla scarica a bagliore normale a quella anormale (vedi fig. 3.39). Nei riguardi della distribuzione di carica si nota una notevole concentrazione di cariche positive nella zona catodica e di cariche negative in quella anodica. Ancora più vistosa è la concentrazione di cariche dei due segni, ed in particolare di quelle negative, nella *zona luminosa negativa*. Nella regione della colonna positiva le due densità di carica sono praticamente le stesse, si hanno qui pertanto le condizioni di

emissione di luce da regioni particolari nella scarica a bagliore, per quanto non belle, sono comunemente usate.

un gas fortemente ionizzato con densità uguali per le cariche dei due segni, cioè di quello che si chiama *plasma*.

Per quel che riguarda la densità di corrente

$$j = j_+ + j_-$$

essa è, in condizioni di regime, costante in ogni sezione del tubo⁽²⁵⁾ mentre invece i due addendi variano: j_+ va a zero all'anodo e j_- va a zero al catodo. Si osservi che nella colonna positiva $n_- \sim n_+$ ma $j_- \gg j_+$ a causa della diversa mobilità degli elettroni e degli ioni.

Diamo ancora qualche altra informazione sui processi nelle varie zone. Come si è detto la caduta di tensione nella zona catodica può essere praticamente pari alla tensione applicata al tubo ed i fenomeni che qui avvengono sono i principali per il mantenimento della scarica. Si può con buona approssimazione supporre che in tale regione le condizioni che si hanno siano quelle per la scarica alla Townsend; in questo caso d è lo spessore della regione catodica. In tale approssimazione l'effetto delle altre regioni fra la zona catodica e l'anodo è essenzialmente quello di rendere conduttore lo strato gassoso in modo da produrre un anodo virtuale al limite della zona catodica.

Nella zona catodica gli elettroni sono emessi dal catodo per bombardamento ionico. Essi vengono accelerati dal campo; per un piccolo tratto (zona di Aston) non hanno energia sufficiente ad eccitare o ionizzare le molecole neutre che urtano; nella stessa zona gli ioni positivi hanno velocità relativamente elevate sicché la probabilità di ricombinazione radiativa (con emissione di luce) ione-elettrone è bassa. Si osservi ancora che gli ioni sono al termine del loro viaggio ed in genere vi giungono trovandosi nello stato fondamentale (essi cioè hanno in precedenza avuto ogni possibilità, negli urti, di diseccitarsi se all'atto della creazione erano eccitati). Per tutte queste ragioni lo strato di gas contiguo al catodo è oscuro (spazio oscuro primario, di Aston). La guaina catodica luminosa si produce quando gli elettroni provenienti dal catodo hanno raggiunto sufficiente energia per eccitare gli ioni, e la luce emessa corrisponde alla diseccitazione degli ioni stessi.

Nello spazio oscuro catodico (di Crookes) si ha ionizzazione per urto da parte degli elettroni catodici che hanno superato le zone precedenti senza urtare molecole; essi hanno accumulato sufficiente energia per far ciò. Si ha moltiplicazione ma gli elettroni prodotti non hanno energia sufficiente ad eccitare le molecole sicché la regione non emette molta luce.

Gli elettroni secondari vengono accelerati e ben presto raggiungono le condizioni richieste per eccitare molecole del gas: si ha allora la regione di luminosità negativa ove l'intensità della luce emessa è molto elevata. In questa regione vi sono inoltre molti ioni e sono frequenti i processi di ricombinazione; il contributo alla luce emessa dalla radiazione di ricombinazione non è tuttavia molto elevato. Nella regione luminosa negativa gli elettroni perdono quasi completamente la loro energia, sicché nella zona successiva essi entrano con energia insufficiente ad eccitare atomi. In tale regione inoltre il campo è molto piccolo sicché essi non riescono a guadagnare rapidamente energia per la eccitazione. Si ha così la zona oscura di Faraday.

*Ragione
del comportamento
delle varie regioni
di scarica*

(²⁵) La sezione del tubo in cui ha luogo la scarica è in genere costante.

La zona successiva è quella della colonna positiva, che può essere presente od assente secondo le disposizioni⁽²⁶⁾. Essa è la regione di luminosità più elevata dopo la zona di luminosità negativa. In essa la luce emessa ha uno spettro a linee, gli elettroni non raggiungono grandi velocità (a causa del campo acceleratore basso) e gli atomi vengono eccitati solo sui livelli più bassi. La colonna positiva può emettere luce in maniera omogenea o può apparire a strie in alcune condizioni geometriche della struttura del tubo, per alcuni valori della corrente ed in alcuni gas.

Nella regione anodica l'anodo ha solo la funzione di raccogliere gli elettroni e non influenza la scarica. In genere nelle prossimità dell'anodo v'è una carica spaziale negativa ed una caduta di potenziale dell'ordine di grandezza del potenziale di ionizzazione del gas; in questa regione gli elettroni vengono accelerati di quanto occorre per produrre gli ioni positivi che entrano nella colonna positiva; v'è contemporaneamente un aumento della probabilità di eccitazione degli atomi e ciò spiega la luminosità non molto intensa della zona luminosa positiva.

Sebbene sia possibile avere scariche a bagliori anche a pressioni notevolmente elevate, di solito le pressioni sono tenute al di sotto dei 10 mm Hg. Le correnti sono in genere nell'ordine dei milliampère.

d. Arco elettrico

Sempre con riferimento alla disposizione sperimentale di figura 3.38 ed alla caratteristica $V-I$ di figura 3.39, ricordiamo che nel regime di scarica a bagliore l'emissione degli elettroni dal catodo avviene per il processo di emissione secondaria. È questo un processo poco efficiente, i pesanti ioni positivi devono essere accelerati per giungere ad una velocità sufficiente per avere energia tale che nel bombardamento del catodo elettroni vengano emessi: la notevole caduta di potenziale al catodo è necessaria per fornire il campo accelerante. Nella regione della scarica a bagliore anomale l'aumento della corrente corrisponde ad un aumento della densità di corrente, inoltre lo spessore della regione catodica decresce leggermente. Ciò porta di conseguenza che aumenta l'energia che viene ceduta al catodo dagli ioni per urto e la temperatura del catodo (T_c) si innalza. Al di là di un certo punto della caratteristica (G , fig. 3.39) la emissione di elettroni dal catodo per effetto termoelettrico diviene importante e si stabilisce un nuovo regime.

Esso è quello dell'*arco* elettrico. L'arco si può ottenere anche a pressioni di varie atmosfere ed anche senza che si passi attraverso le fasi di scarica alla Townsend e scarica a bagliore.

Le caratteristiche generali dell'arco sono:

1. la densità di corrente è molto alta: può raggiungere valori di decine di migliaia di ampère per cm^2 ;
2. la maggior parte della corrente nelle vicinanze del catodo è trasportata da elettroni (e non da ioni come nella scarica a bagliore);
3. la d.d.p. fra gli elettrodi è notevolmente più bassa di quella che si ha in altri tipi di scarica (dell'ordine delle decine di volt).

Gli archi possono essere ottenuti con elettrodi separati fra loro per distanze da micron a metri, si possono avere con d.d.p. applicate continue o alternative.

⁽²⁶⁾ Nei tubi commerciali (per esempio neon) usati come sorgente di luce, essa riempie la maggior parte della lunghezza del tubo.

Vogliamo infine osservare che è molto frequente avere disposizioni nelle quali uno strato di gas si trovi fra due elettrodi a potenziali differenti. Finché la differenza di potenziale è piccola, lo strato gassoso è in genere un ottimo isolante; al crescere della differenza di potenziale si possono verificare alcuni dei processi descritti in precedenza e si può giungere alla rottura del dielettrico. Tale rottura dipende da numerosi fattori quali: natura e pressione del gas, temperatura dell'ambiente, presenza di radiazioni in esso, natura, forma e stato delle superfici degli elettrodi (27), tipo di d.d.p. applicata (continua o rapidamente variabile).

Il verificarsi della rottura del dielettrico gassoso, con formazione in genere di scintilla o arco, richiede:

1. l'esistenza di una carica libera iniziale fra gli elettrodi;
2. l'esistenza di condizioni che rendano possibile un processo di moltiplicazione per cui quando la carica libera iniziale scompare ad un elettrodo vi sia almeno una carica identica nelle stesse condizioni iniziali della carica primaria; ciò assicura che la scarica si automantenga indipendentemente dalla causa di ionizzazione iniziale. Questa seconda condizione equivale ad un coefficiente di moltiplicazione infinito.

La prima condizione viene sempre soddisfatta, più o meno rapidamente, per l'arrivo di radiazioni ionizzanti, come la radiazione cosmica. La seconda condizione può essere realizzata per l'intervento di vari processi. Nelle considerazioni svolte in precedenza si è visto che uno di tali processi può essere la produzione di elettroni secondari liberati al catodo dagli ioni positivi, se questi hanno energie sufficienti. Altri processi che conducono allo stesso risultato possono verificarsi nei vari dispositivi a gas (28).

Un caso molto interessante è quello di due elettrodi cilindrici coassiali o semplicemente affiancati. La figura 3.44a mostra la disposizione coassiale: un filo conduttore (*f*) molto lungo e di raggio *a* è disposto sull'asse dell'elettrodo cilindrico cavo *C* di raggio *b*; fra gli elettrodi v'è un gas (per esempio aria) a pressione *p*. Quando la d.d.p. fra gli elettrodi raggiunge il valore V_S di rottura, presso il conduttore centrale, si manifesta emissione di luce, si può ascoltare un crepitio e, nel caso di aria, si manifesta la formazione di ozono. Il complesso fenomeno prende il nome di effetto corona. Più particolarmente (fig. 3.45) se l'elettrodo centrale è a potenziale positivo rispetto a *C*, il conduttore centrale appare avvolto da una guaina luminosa (corona positiva) che nel caso dell'aria ha un colore bluastro. Se l'elettrodo centrale è negativo si osservano sulla sua lunghezza ad intervalli regolari piccole zone luminose molto brillanti (corona negativa). Queste zone luminose nel caso dell'aria sono rossastre; se la pressione è abbastanza bassa le zone luminose si fondono in una guaina più o meno continua. Nel caso che la d.d.p. applicata

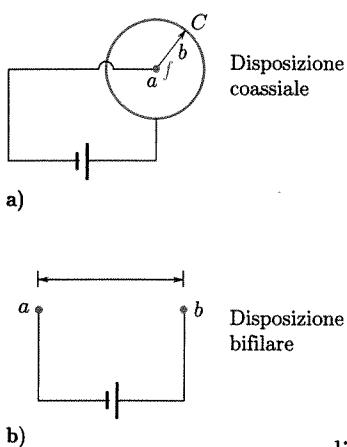


Fig. 3.44

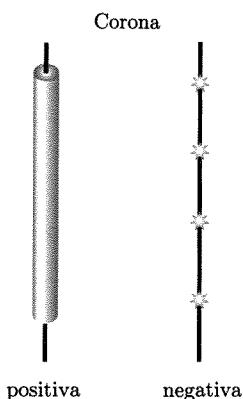


Fig. 3.45

(27) La forma degli elettrodi ha grande influenza sulla distribuzione del potenziale fra gli elettrodi. La presenza di rugosità e scabrosità sulla superficie produce aumenti locali del campo che possono avere gravi conseguenze nel determinare l'inizio della scarica. A parità di altre condizioni la rottura avviene a d.d.p. più elevate per elettrodi levigati che per elettrodi scabri (cap. 1, par. 1.21).

(28) Fra essi citiamo: 1) la emissione di elettroni dal catodo per effetto fotoelettrico (cap. 16) prodotto dai fotoni emessi nella diseccitazione di atomi o nella ricombinazione di ioni del gas; 2) la perturbazione della distribuzione di carica spaziale fra gli elettrodi e ciò può essere particolarmente importante a pressioni elevate ed a tensioni elevate; 3) la emissione di campo che può in talune circostanze essere innescata.

sia alternativa con periodi lunghi rispetto ai tempi richiesti per lo stabilirsi dell'effetto corona, cioè a frequenza relativamente bassa ($< 10 \text{ kHz}$), i processi di corona positiva e negativa si alternano ad ogni mezzo periodo. Effetti corona perfettamente analoghi si osservano per la disposizione di due lunghi fili paralleli (fig. 3.44b).

L'effetto corona si rende a volte visibile lungo le linee di trasmissione di energia elettrica. Quando si verifica si hanno ovviamente perdite di energia da parte della sorgente di d.d.p. L'energia perduta è quella che viene irraggiata o che viene dispersa per effetto degli urti anelastici ed elastici fra le molecole del gas in corrispondenza alla superficie del conduttore. L'effetto corona, a pressioni medie ed alte, può essere evitato aumentando il raggio di curvatura dell'elettrodo più piccolo.

Situazioni analoghe a quella ora descritta si hanno nel caso di elettrodi a punta.

3.14. CONDUZIONE ELETTRICA NEI LIQUIDI

Il comportamento di un liquido quando viene posto in un campo elettrico può essere molto diverso a seconda del tipo di legame che tiene gli atomi assieme. Possiamo distinguere essenzialmente tre casi.

Il primo è quello dei metalli fusi. Ricordiamo che in un solido metallico la conduzione è dovuta al moto degli elettroni; per molte considerazioni si può trattare il solido come formato da un reticolo regolare di ioni positivi e da una nube di elettroni che assicura il legame (metallico) e la neutralità. Anche quando la temperatura è sufficientemente elevata in modo che l'agitazione termica riesca a distruggere in parte notevole l'ordine reticolare ed il sistema divenga liquido, la situazione nei riguardi della conduzione elettrica non viene essenzialmente alterata: nei metalli liquidi, come per esempio a temperatura ordinaria il mercurio, la conduzione elettrica è dovuta esclusivamente al moto degli elettroni e ad essa non è praticamente associato alcun moto di ioni. I valori della conducibilità sono dello stesso ordine di quelli nei metalli solidi (nel caso del mercurio circa $10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$).

Il secondo caso è quello di sostanze liquide le cui molecole sono formate da atomi tenuti assieme da legami covalenti (vol. I, cap. 12, par. 12.7 e 12.8). In tal caso gli elettroni di valenza si trovano in stati (orbite) localizzati fra gli atomi che legano e non sono disponibili per la conduzione. Questi liquidi (benzolo, tetracloruro di carbonio, solfuro di carbonio, alcool, etere, olii, ecc.) sono ottimi isolanti, la conducibilità elettrica avendo valori molto bassi, dell'ordine di $10^{-11} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Il terzo caso corrisponde a liquidi formati da sostanze a legame ionico o da opportune loro soluzioni. È questo il caso che riveste particolare importanza: il passaggio della corrente è associato a reazioni chimiche le quali possono avvenire con assorbimento o liberazione di energia. Quest'ultima circostanza conduce alla realizzazione di generatori di f.e.m. (pile). Un esame accurato dei processi che consistono essenzialmente nello studio di alcune reazioni chimiche è di solito fatto nei corsi di Chimica. Noi ci limiteremo qui a mostrare la caratteristica fondamentale della conduzione eletrolitica di associare al passaggio della corrente un trasporto di massa, ad indicare il tipo di reazioni che hanno luogo e come si possa giungere alla realizzazione di un generatore di f.e.m.

Metalli fusi

Liquidi covalenti

Liquidi a legame ionico

Formazione del legame ionico

Consideriamo la struttura di sostanze a legame ionico. Se si considera un solido o una molecola si può pensare che la struttura sia stata originata dagli atomi costitutivi che partendo da distanze molto grandi fra loro siano stati gradatamente avvicinati. La formazione del legame è associata ad una ridistribuzione degli elettroni di valenza con formazione di ioni positivi e negativi; le forze che tengono assieme la struttura molecolare o il cristallo sono quelle di attrazione coulombiana fra le cariche ioniche.

La ridistribuzione delle cariche e l'origine del legame ionico possono essere facilmente illustrati con riferimento ad un caso particolarmente semplice, quello della formazione di una molecola di NaCl ottenuta avvicinando un atomo di sodio ad un atomo di cloro. L'atomo di sodio (numero atomico 11) ha una struttura (vol. I, cap. 12, par. 12.6) che differisce da quella del neon (numero atomico 10) per avere un ulteriore elettrone al di fuori degli anelli K ed L (completi) e propriamente in uno stato $3s$; esso ha quindi una notevole tendenza a cedere un elettrone trasformandosi in ione positivo (Na^+) di carica $|e|$ (ione monovalente) avente la struttura molto stabile del neon. L'atomo di cloro (numero atomico 17) ha invece una grande tendenza a prendere un elettrone, assumendo la struttura elettronica stabile di un altro gas nobile, l'argon (numero atomico 18); in tal caso si produce uno ione negativo monovalente (Cl^-).

Si comprende quindi come avvicinando gli atomi neutri di Na e Cl si possa determinare la contemporanea formazione di Na^+ e Cl^- mediante perdita di un elettrone da parte dell'atomo Na ed acquisto da parte dell'atomo Cl; la molecola od il cristallo di cloruro di sodio è tenuto dalle forze coulombiane fra gli ioni risultanti.

Le semplici considerazioni precedenti si applicano alla formazione di molti ioni mono e polivalenti: va però osservato che possonoaversi ioni provenienti da singoli atomi e da gruppi di atomi, la cui struttura non è quella di un gas nobile. Dal punto di vista chimico le molecole delle sostanze ioniche sono sali, acidi, basi.

È evidente che qualora si applichi un campo elettrico esterno ad un solido od un liquido ionico, non essendovi elettroni liberi di muoversi individualmente, ma grossi ioni formati da singoli atomi o raggruppamenti di atomi che hanno acquistato o ceduto elettroni, sarà possibile una conduzione purché un certo numero di ioni sia in condizioni di muoversi nell'ambiente circostante. In tal caso il passaggio di corrente è associato a spostamento di materia, la conduzione si chiama **elettrolitica** e la sostanza elettrolita.

La conducibilità in elettroliti liquidi, quali sali fusi, è molto maggiore di quella che essi hanno allo stato solido⁽²⁹⁾: il numero di ioni che partecipa al trasporto della corrente è molto maggiore ed inoltre le mobilità sono anche esse maggiori. È importante notare che al passaggio di corrente in un elettrolita allo stato solido o liquido sono associate alcune reazioni chimiche che avvengono agli elettrodi e che consentono il trasferimento di cariche elettriche dagli ioni al circuito esterno. Consideriamo per esempio il caso di NaCl fuso contenuto in una vasca di vetro (fig. 3.46a) in cui sono immersi due elettrodi metallici fra i quali è dall'esterno applicata

⁽²⁹⁾ La possibilità di moto di ioni nel solido è legata alla presenza di difetti nella struttura reticolare: posizioni reticolari vuote e ioni interstiziali.

una differenza di potenziale. Passando allo stato liquido un certo numero di molecole NaCl si trova dissociato in ioni secondo la reazione



Il loro numero è piccolo rispetto a quello delle molecole indissociate e sono tali ioni quelli che assicurano la conduzione elettrica. Gli ioni positivi (Na^+) (cationi) si dirigono verso il catodo. La reazione che qui ha luogo è quella di combinazione dello ione con un elettrone fornito dal catodo, essa cioè consiste nell'acquisto di un elettrone da parte dello ione: tale reazione è in chimica indicata con il nome di riduzione. Lo ione Na^+ si trasforma di conseguenza in un atomo neutro di sodio che si deposita sull'elettrodo



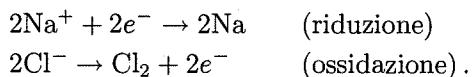
La reazione che contemporaneamente avviene all'anodo, ove giungono gli anioni Cl^- , consiste in una cessione di elettroni dallo ione (reazione detta di *ossidazione*) all'elettrodo



Gli atomi neutri di cloro formano molecole che si liberano all'elettrodo. Le figure 3.46b e c illustrano i processi descritti. La conduzione quindi implica:

1. un movimento di elettroni nel circuito metallico esterno nella direzione dal generatore verso il catodo;
2. un passaggio di elettroni dal catodo ad ioni sodio (che si trasformano in atomi metallici);
3. un trasporto di carica attraverso il liquido per mezzo di ioni di segno contrario;
4. un passaggio di elettroni da ioni cloro all'anodo (con produzione di cloro atomico e successivamente di Cl_2);
5. un moto di elettroni dall'anodo al generatore.

Il complesso delle reazioni agli elettrodi associate al passaggio della corrente è in questo caso



Esse possono essere rappresentate globalmente dalla reazione di ossido-riduzione



oppure



Questa reazione di decomposizione della sostanza, che è legata al passaggio della corrente, prende il nome di *elettrolisi*.

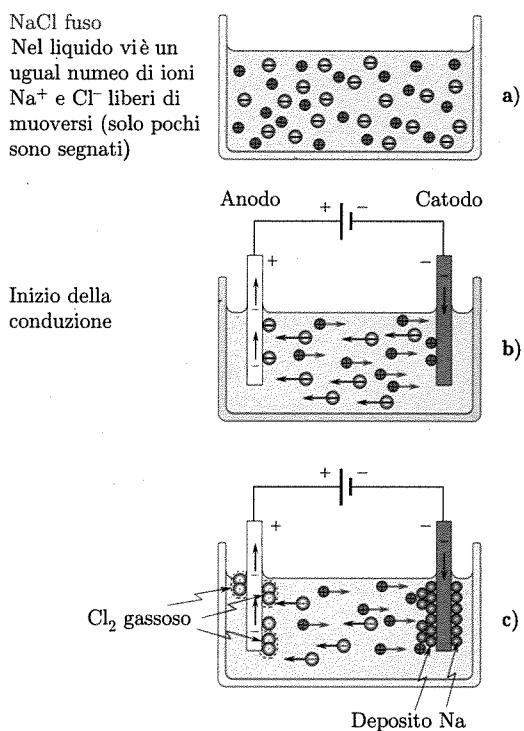


Fig. 3.46

Un caso particolarmente interessante è quello in cui un elettrolita è sciolto in acqua.

È bene richiamare innanzitutto tre proprietà dell'acqua:

*Soluzioni elettrolitiche
acquose*

1. il legame che tiene gli atomi nell'acqua è parzialmente ionico nel senso che esso è realizzabile e realizzato sia come legame covalente⁽³⁰⁾ fra atomi di O ed H, sia come legame ionico con il trasferimento di un elettrone dall'atomo di idrogeno (che diviene H^+) al gruppo ionico $(OH)^-$;
2. molecole di acqua possono legarsi fra loro in strutture molto aperte mediante un particolare legame ionico (legame idrogeno) costituito da uno ione H^+ che attira contemporaneamente due atomi ossigeno di due molecole diverse;

Le due proprietà spiegano la conducibilità elettrica dell'acqua ($5 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1}$) notevolmente inferiore a quella dei sali fusi, ma molto superiore a quella dei liquidi a legame covalente.

La natura parzialmente ionica del legame conduce alla presenza nell'acqua di ioni idrogeno H^+ e dell'ossidrile $(OH)^-$. La reazione di dissociazione può essere posta nella forma



Le concentrazioni di tali ioni sono piccole: a temperatura ordinaria (25 °C) in acqua pura, si ha per ciascun tipo di ione una concentrazione di 10^{-7} gram-molecole per litro, e ciò corrisponde ad un numero di ioni di ciascuna specie di $6,03 \cdot 10^{18}$ ioni/litro;

3. la terza proprietà, dovuta alla natura polare delle molecole ed alla possibilità di associazioni fra loro mediante legami idrogeno, è la elevata costante dielettrica (circa 80).

Molte sostanze si sciolgono in acqua, ma mentre quelle di esse a legami covalenti (per esempio zuccheri) non ne alterano la conducibilità, le sostanze ioniche (acidi, basi, sali) la alterano in maniera drastica.

*Dissociazione
elettrolitica*

Quest'ultima circostanza è stata interpretata (Arrhenius, 1887) sulla base della *dissociazione elettrolitica*: *le molecole del soluto sono completamente dissociate in ioni*⁽³¹⁾. *Un tale processo avviene all'atto della soluzione e non implica passaggio di corrente nel liquido*. Le ragioni di un tale fenomeno vanno ricercate nelle proprietà dell'acqua, l'elevata costante dielettrica riduce le forze coulombiane con cui ioni di segno opposto si attraggono; le associazioni di uno ione del soluto con molecole polari di acqua attratte da esso (idratazione) stabilizzano gli ioni.

La conducibilità di una soluzione elettrolitica è, per valori non elevati del campo elettrico applicato, indipendente dal campo stesso e data dalla relazione

$$(100) \quad \sigma = e \left(\sum_{\alpha} n_{\alpha}^+ \mu_{\alpha}^+ + \sum_{\beta} n_{\beta}^- \mu_{\beta}^- \right)$$

contenente tanti termini quanti sono gli ioni positivi (α) e negativi (β), n sono le concentrazioni e μ le mobilità (rapporto fra i moduli della velocità media di scorrimento e il campo elettrico).

⁽³⁰⁾ Vol. I, cap. 12, par. 12.7.

⁽³¹⁾ Solo alle concentrazioni molto elevate si possono avere in soluzione molecole non dissociate di soluto.

Di solito i termini relativi agli ioni H^+ ed $(OH)^-$ derivanti dalla dissociazione dell'acqua e preesistenti alla soluzione dell'elettrolita, sono trascurabili rispetto a quelli derivanti dalla dissociazione di quest'ultimo. Si osservi che la valenza degli ioni creati dall'elettrolita può essere diversa ma sempre il prodotto della valenza per il numero di ioni creati deve essere lo stesso per gli ioni positivi e per quelli negativi.

La tabella 3.2 fornisce la mobilità di alcuni ioni in acqua nel caso di soluzioni diluite. Dalla tabella 3.2 si vede che lo ione H^+ , che è il più piccolo, ha la maggiore mobilità. La bassa mobilità del Li^+ è dovuta alla forte idratazione dello ione.

Si osservi che nel caso in cui in una soluzione vi siano ioni aventi mobilità notevolmente diverse, la conduzione è essenzialmente affidata allo ione di maggiore mobilità. Per esempio in una soluzione aquosa di HCl, gli ioni H^+ trasportano circa 83% della corrente.

Come indicazione delle conducibilità che si hanno nelle soluzioni elettolitiche diremo che esse sono dell'ordine di circa 10^{-6} quelle dei metalli: così per esempio la conducibilità a temperatura normale di una soluzione che contenga una grammomolecola di NaCl per litro d'acqua è di circa $7 \Omega^{-1} m^{-1}$.

Se mediante una sorgente esterna collegata a due elettrodi metallici inerti (nel senso che non partecipano alle reazioni, per esempio platino) immersi in una soluzione elettolitica aquosa si forza il passaggio di una corrente nel sistema, si ha una successione di eventi perfettamente analoga a quella vista nel caso di un sale fuso:

1. elettroni vengono dal generatore forzati nel catodo;
2. elettroni passano dal catodo ad ioni o molecole vicine al catodo, causando una reazione di *riduzione*;
3. ioni derivanti dalla decomposizione dell'elettrolita conducono la corrente dalla zona vicino al catodo a quella vicino all'anodo;
4. elettroni passano da ioni o molecole nell'anodo, in seguito ad una reazione di *ossidazione*;
5. elettroni vanno dall'anodo al generatore.

La differenza essenziale fra la conduzione in un elettrolita fuso ed in una soluzione che per ora consideriamo diluita sta nelle reazioni di riduzione ed ossidazione che effettivamente avvengono agli elettrodi a causa del fatto che ioni e molecole diverse da quelle dell'elettrolita sono contemporaneamente presenti. Fra le varie reazioni possibili a ciascuno degli elettrodi avviene in realtà quella energeticamente più favorevole. Per fare un esempio concreto consideriamo l'elettrolita NaCl. Si è visto che nel caso del sale fuso le reazioni rispettivamente di riduzione al catodo e di ossidazione all'anodo conducono al deposito di sodio e cloro. Nel caso della soluzione aquosa diluita le cose vanno diversamente. Al catodo sarebbero possibili tre diverse reazioni di riduzione

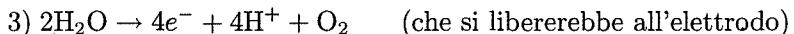
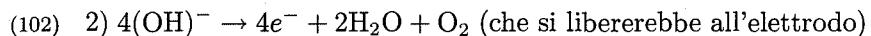
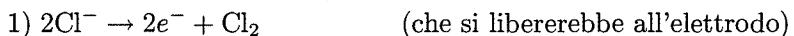
- 1) $Na^+ + e^- \rightarrow Na$ (che si depositerebbe all'elettrodo)
- (101) 2) $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$ (che si libererebbe all'elettrodo)
- 3) $2H_2O + 2e^- \rightarrow 2(OH)^- + H_2$ (che si libererebbe all'elettrodo).

Le reazioni 2) e 3) sono energicamente più favorevoli (richiedono minore lavoro elettrico) e poiché la concentrazione di ioni H^+ è molto limitata, la reazione che avviene in realtà è praticamente la 3).

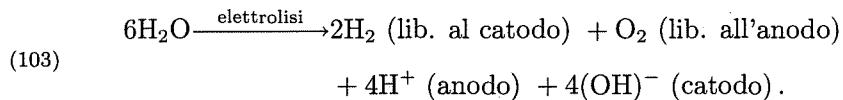
Tabella 3.2 Mobilità degli ioni in soluzioni elettolitiche aquose diluite

Li^+	$350 \cdot 10^{-10} m^2 V^{-1} s^{-1}$
K^+	$670 \cdot 10^{-10}$
H^+	$3260 \cdot 10^{-10}$
Mg^{++}	$476 \cdot 10^{-10}$
Cl^-	$680 \cdot 10^{-10}$
OH^-	$1800 \cdot 10^{-10}$

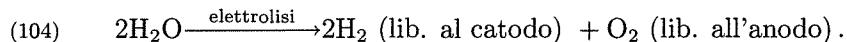
All'anodo sarebbero possibili le seguenti reazioni di ossidazione:



Nel caso di soluzioni diluite (chimicamente neutre) la terza reazione è quella che avviene. Ne segue che il complesso delle reazioni di elettrolisi può scriversi sinteticamente



Gli ioni H^+ formati all'anodo e quelli $(\text{OH})^-$ formati al catodo diffondono nel liquido ed infine si ricombinano a formare molecole di acqua. In effetti quindi tutto va come se la reazione di elettrolisi fosse



Si ha quindi liberazione agli elettrodi di idrogeno ed ossigeno dalla decomposizione dell'acqua. Si vede che gli ioni del soluto non intervengono nella reazione chimica: l'andamento delle cose è lo stesso per quasi tutti i solventi purché la soluzione sia diluita e gli elettrodi non entrino attivamente nel processo.

Solo a concentrazioni elevate le reazioni agli elettrodi che conducono a deposito di atomi derivanti dagli ioni del soluto si presentano spesso come più favorevoli. È bene osservare che il verificarsi di una particolare reazione a ciascun elettrodo fra le varie possibili dipende in maniera essenziale dalla concentrazione degli ioni H^+ ed $(\text{OH})^-$. Essi possono essere presenti in numero praticamente uguale (soluzione neutra, come nel caso da noi considerato in precedenza) o in numero differente (H^+ in maggioranza, soluzione acida, $(\text{OH})^-$ in maggioranza, soluzione basica).

Sarà bene sottolineare che nell'interno della soluzione la corrente è portata essenzialmente dagli ioni del soluto mentre le reazioni agli elettrodi possono non implicare questi ioni: i due fatti non sono in contrasto. Riferendosi al caso della soluzione diluita di NaCl , gli ioni Na^+ vanno verso il catodo ove compensano le cariche negative degli ioni $(\text{OH})^-$ creati a quest'elettrodo; analogamente gli ioni Cl^- vanno verso l'anodo ove compensano le cariche positive degli ioni H^+ creati dalla reazione di ossidazione.

Le reazioni che in realtà avvengono agli elettrodi possono essere diverse, almeno in parte, da quelle indicate se gli elettrodi invece di essere inerti, come finora supposto, prendono parte alle reazioni.

Non ci dilungheremo oltre su questo.

Gli aspetti quantitativi dell'elettrolisi sono espressi dalle due leggi che Faraday formulò nel 1833.

Premettiamo che si definisce equivalente chimico di un elemento il rapporto fra il suo peso atomico (P) e la sua valenza (V). La tabella 3.3 fornisce gli equivalenti chimici (P/V) di alcuni elementi.

Tabella 3.3 Equivalenti chimici di alcuni elementi

Elemento	Peso atomico	Valenza	Equivalente chimico
Alluminio	26,97	3	8,99
Antimonio	121,76	3	40,59
Argento	107,88	1	107,88
Bromo	79,92	1	79,92
Calcio	40,08	2	20,04
Carbonio	12,010	4	3,003
Cloro	35,457	1	35,457
Idrogeno	1,0080	1	1,0080
Ferro (feroso)	55,85	2	27,93
Ferro (ferrico)	55,85	3	18,62
Ossigeno	16,00	2	8,0
Rame	63,54	2	31,77
Zinco	65,38	3	32,69
Zolfo	32,07	2	16,04

Le leggi di Faraday si esprimono nella seguente maniera:

Leggi di Faraday

1. La massa (m) di una specie chimica prodotta (depositata, liberata o scomparsa) da una reazione catodica o anodica di elettrolisi è direttamente proporzionale alla quantità di elettricità che è passata nella cella (voltmetro).
2. Le masse di differenti specie chimiche prodotte dalla stessa quantità di elettricità sono proporzionali agli equivalenti chimici delle specie.

La giustificazione di entrambe le leggi è immediata sulla base di ciò che è stato detto sulla elettrolisi. A ciascuno dei contatti liquido-metallo il passaggio di elettricità è associato ad una reazione chimica che conduce contemporaneamente al consumo di ioni la cui carica entra nel circuito metallico ed alla produzione della sostanza, costituita od originata dagli ioni neutralizzati. La massa di sostanza prodotta in un certo tempo è pertanto proporzionale al numero di ioni usati nelle reazioni agli elettrodi e quindi alla carica passata nella cella. A parità di carica, il numero di ioni impiegato è inversamente proporzionale alla loro valenza (V'); ciò significa che la massa depositata è proporzionale a P'/V' ove si è indicato con P' la massa atomica della sostanza.

L'insieme delle due leggi è espresso analiticamente dalla relazione

$$(105) \quad m = \left(\frac{1}{F} \right) q \frac{P'}{V'}$$

ove m è la massa della sostanza prodotta ad un elettrodo per il passaggio della quantità di elettricità q . La costante di proporzionalità, che va determinata sperimentalmente, è stata posta nella forma $1/F$. Evidentemente F è la quantità di elettricità richiesta per la produzione di un equivalente chimico della sostanza (qualunque essa sia): essa vale⁽³²⁾

$$(106) \quad F = 96.523,6 \pm 6,2 \frac{\text{coulomb}}{\text{equiv. chim.(gr)}} = 9,6523 \cdot 10^7 \frac{\text{coulomb}}{\text{equiv. chim.(kg)}} .$$

⁽³²⁾ Questa determinazione, che è la più precisa disponibile, è quella di Craig e Hoffman (1950) ottenuta con una soluzione di acido perclorico e perclorato di argento usando elettrodi di argento.

Potenziale delle celle
elettrolitiche

Se si considera una cella elettrolitica in condizioni stazionarie nella quale passi una corrente I , la differenza di potenziale che viene mantenuta agli estremi non è legata ad I in maniera così semplice come nel caso di un conduttore metallico; cioè, il potenziale non varia con la semplice legge lineare da un estremo all'altro. Nel caso della soluzione elettrolitica accanto alla caduta di potenziale graduale dovuta alla conducibilità dell'elettrolita nella parte centrale della cella, si hanno in genere notevoli variazioni di potenziale localizzate nelle immediate vicinanze degli elettrodi dovute sia alle reazioni chimiche principali che vi hanno luogo, sia ad eventuali variazioni di concentrazione di ioni (cariche spaziali) od a reazioni secondarie.

Una analisi più dettagliata mostra che la caduta di potenziale fra gli estremi della cella e la potenza assorbita possono essere espresse, quando la corrente I passa a regime, dalle relazioni:

$$(107) \quad V = RI + f_c + v_p$$

$$(108) \quad VI = RI^2 + f_c I + v_p I.$$

Il significato dei vari simboli è il seguente: R rappresenta una resistenza che dipende dalla conducibilità della soluzione e dalla geometria della cella: il suo valore può, entro larghi limiti di I , essere ritenuto costante per una data cella; f_c è una f.e.m. di origine chimica che rappresenta complessivamente le reazioni che avvengono agli elettrodi e prende il nome di *forza elettromotrice* (o controelettromotrice) di *decomposizione*: essa può avere valori positivi (e quindi opporsi al passaggio della corrente), negativi od essere zero, secondo il tipo di soluzione e di elettrodi, ma ha un valore costante per una data cella. Il termine v_p riunisce invece vari contributi (che prendono il nome generico di fenomeni di polarizzazione)⁽³³⁾ che non dipendono linearmente dalla I e che in genere dipendono dalla storia della cella e mutano con il tempo.

Nella equazione del consumo di potenza il termine ($f_c I$) rappresenta il lavoro elettrico corrispondente alla variazione di energia chimica che si ha nelle reazioni che hanno luogo nell'unità di tempo nella cella e che sono essenzialmente la reazione di ossidazione all'anodo e quella di riduzione al catodo. Alla variazione di energia interna (chimica) contribuiscono anche gli scambi di calore fra cella ed ambiente esterno. Se ci si pone in condizioni che questi scambi siano piccoli e si possa non tenerne conto, il *calore molare di reazione*⁽³⁴⁾ della reazione, che rappresenta globalmente le variazioni chimiche nella cella quando la sostanza che viene prodotta (o consumata) è una grammomolecola, è pari alla energia assorbita per il passaggio di una quantità di elettricità ($I \cdot t$) pari ad vF , cioè ($v f_c F$).

Il valore ($f_c I$), in accordo a quanto già detto, dipende dalle particolarità delle reazioni agli elettrodi e può essere positivo (assorbimento di potenza dall'esterno), zero, o negativo.

⁽³³⁾ Si badi che il nome, non ben appropriato, può indurre in errore. Il termine *polarizzazione*, per effetti che avvengono ai *poli*, non ha alcun riferimento di analogia con i fenomeni di polarizzazione dielettrica o magnetica.

⁽³⁴⁾ Tale calore di reazione globale è pari alla somma dei calori di reazione delle reazioni di ossidazione e riduzione che avvengono agli elettrodi. Si ricordi la legge di Hess (vol. I, cap. 14, par. 14.10).

A noi interessa esaminare il caso in cui f_c sia negativo, in cui cioè il complesso delle reazioni di ossidazione all'anodo e di riduzione al catodo avvengano con liberazione di energia chimica e la f.e.m. f_c agevoli il passaggio della corrente I . È possibile allora con una configurazione opportuna della cella ottenere una sorgente di energia elettrica (pila voltaica).

Per comprendere il suo funzionamento osserviamo che quando una sbarra metallica viene posta in una soluzione elettrolitica viene a stabilirsi un equilibrio statistico fra ioni presenti nell'edificio cristallino del metallo e ioni dello stesso tipo in soluzione, per il raggiungimento del quale ioni possono passare dal metallo alla soluzione lasciando il primo carico negativamente oppure possono passare dalla soluzione al metallo rendendo la soluzione carica negativamente rispetto al metallo.

Noi non desideriamo addentrarci nella spiegazione di questo comportamento e diremo solo che la tendenza di ioni di un metallo a passare in soluzione (cioè a partecipare ad una reazione di ossidazione) o la tendenza opposta di passare dalla soluzione al metallo (cioè a partecipare ad una reazione di riduzione) quando una lastra del metallo si trova in una soluzione di un suo sale dipende dalla natura del metallo, dalla concentrazione della soluzione e dalla temperatura del sistema. Queste diverse tendenze possono essere utilizzate per realizzare delle pile.

Supponiamo (fig. 3.47) di porre una lastra di zinco in una soluzione diluita di ZnSO_4 ed una lastra di rame in una soluzione concentrata di CuSO_4 . Ioni Zn^{++} vanno in soluzione nella prima soluzione caricando negativamente la lastra metallica fino allo stabilirsi di un equilibrio: nella seconda soluzione ioni Cu^{++} si scaricano sulla lastra (Cu si deposita) rendendo questa positiva rispetto alla soluzione. Se si collegano le due lastre esternamente alle soluzioni con un conduttore metallico⁽³⁵⁾, elettroni sono trasferiti dalla lastra di zinco (carica negativamente) a quella di Cu (carica positivamente) cioè una corrente fluisce nella direzione $\text{Cu} \rightarrow \text{Zn}$. Questo flusso di elettroni causa la dissoluzione di altro zinco e la deposizione di altro rame ma evidentemente cessa quando un numero sufficiente di ioni Zn^{++} è passato dal metallo nel liquido nella prima cella ed un corrispondente numero di ioni Cu^{++} sono stati eliminati dalla seconda soluzione: quando cioè nella prima soluzione si ha un numero di ioni positivi in eccesso sufficiente a fermare la reazione di ossidazione all'elettrodo di Zn e nella seconda soluzione v'è un corrispondente numero di ioni negativi ($\text{SO}_4^{- -}$) sufficiente a fermare la reazione di riduzione alla piastra di Cu.

Se si vuole che le due reazioni di ossidazione alla lastra di Zn e di riduzione a quella di Cu riprendano e continuino bisogna ridurre la con-

Pila voltaica

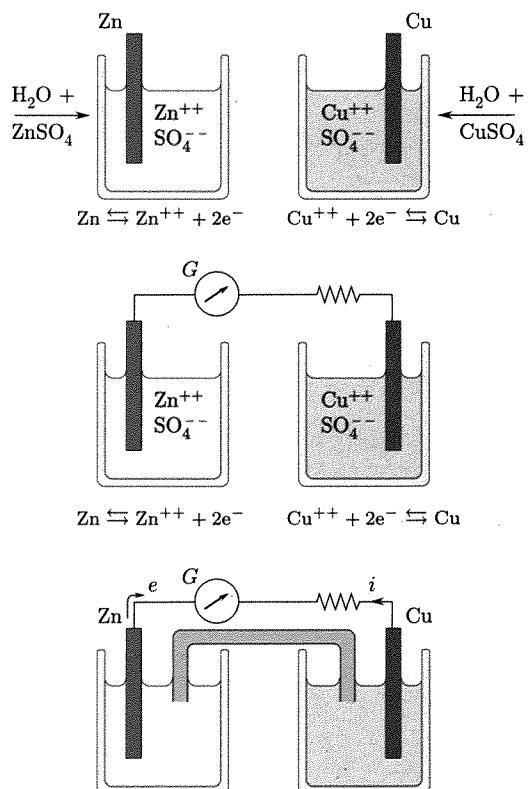
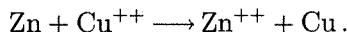


Fig. 3.47

⁽³⁵⁾ Nell'esame dettagliato dei processi va anche considerata la presenza dell'effetto Volta (vedi cap. 16, par. 16.7) fra metalli diversi nella catena. L'andamento delle cose non varia, tuttavia, in maniera significativa.

centrazione di ioni positivi in eccesso nella prima soluzione e quella degli ioni negativi nella seconda; ciò può farsi realizzando un collegamento fra le due soluzioni in modo che gli ioni Zn^{++} possano lentamente diffondere verso la seconda soluzione e ioni SO_4^{--} possano diffondere verso la prima. Si realizza in questo modo un dispositivo (pila) in cui le reazioni di ossidazione ad un elettrodo (Zn) e di riduzione all'altro (Cu) proseguono indisturbate durante il fluire della corrente in un circuito esterno. In tal caso viene convertita in energia elettrica l'energia chimica delle due reazioni o, quello che è lo stesso, della reazione di ossido-riduzione complessiva:



La prima pila, quella di Volta, era costituita da elettrodi di Zn e Cu in una soluzione diluita di acido solforico; in tal caso la reazione di riduzione all'anodo porta sviluppo di H_2 e quindi gli effetti di polarizzazione, dovuti alla formazione di bolle gassose sull'anodo, sono molto forti e conducono rapidamente a drastiche riduzioni della f.e.m. utile.

Le pile sviluppate successivamente evitano questo effetto usando configurazioni speciali o sostanze chimiche opportune (depolarizzatori) che fissano i prodotti delle reazioni agli elettrodi in composti non volatili. Nelle pile a secco l'elettrolita ha una consistenza gelatinosa oppure è "immobilizzato" mediante opportune sostanze inertie. Una pila molto usata è quella di Daniell: gli elettrodi sono Zn e Cu ed essi sono immersi rispettivamente in una soluzione diluita di $ZnSO_4$ ed in una soluzione concentrata di $CuSO_4$; le due soluzioni sono separate da un vaso di ceramica poroso (ceramica non ricoperta di strato vetrificato) che, pur consentendo il passaggio di ioni da una parte all'altra, impedisce i moti d'insieme ed il rimescolamento delle due soluzioni. La polarizzazione è evitata giacché ioni Zn^{++} vanno dalla lastra di Zn nella soluzione di solfato di Zn e ioni Cu^{++} si depositano all'anodo di Cu.

3.15. CONDUZIONE ELETTRICA NEI SOLIDI

I solidi possono differire tra loro enormemente per le loro proprietà nei riguardi della conduzione elettrica. La tabella 3.4 riporta per alcuni solidi per cui vale la legge di Ohm il valore della resistività a 20 °C e del coefficiente di temperatura $(1/\rho)(\delta\rho/\delta T)$: per confronto sono indicati i valori anche per alcuni liquidi. I buoni conduttori (ρ dell'ordine di $10^{-7} \Omega m$) sono in genere i metalli sia sotto forma di elementi puri, sia come leghe: la loro resistività cresce con la temperatura. I buoni isolanti hanno resistività da $10^{11} \Omega m$ in su. Vi sono inoltre materiali i quali hanno resistività a temperatura ambiente intermedia ($10^{-1} - 10^8 \Omega m$) fra quelle dei buoni conduttori e dei buoni isolanti ed una resistività che decresce con l'innalzarsi della temperatura: essi sono i cosiddetti semiconduttori.

La resistività delle soluzioni elettrolitiche ha un coefficiente di temperatura negativo ed abbastanza elevato.

Le nostre considerazioni per spiegare la conduzione elettrica nei solidi saranno fatte essenzialmente con riferimento a solidi cristallini ove l'esistenza di un elevato ordine nella distribuzione dei componenti consente di sviluppare interpretazioni efficaci del loro comportamento. La migliore trattazione teorica disponibile dei fenomeni di conduzione elettrica nei cristalli è quella delle *bande*; essa consiste in una trattazione quantistica piuttosto avanzata.

Tabella 3.4 Valore di resistività di alcuni solidi

Sostanza	$\rho(\Omega \text{m})$ 20 °C	Coefficiente di temperatura $(^{\circ}\text{C})^{-1}$
Alluminio	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Argento	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Costantana	$44,2 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}
Ferro	$10 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
Manganina	$44 \cdot 10^{-8}$	10^{-6}
Nichel	$7,8 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-3}$
Platino	$10 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Tungsteno	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
NaCl fuso	$2,5 \cdot 10^{-3}$	
NaCl (soluzione 1N)	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$-2,5 \cdot 10^{-2}$
Acqua pura	$2,5 \cdot 10^5$	
Germanio	0,5	$-0,5 \cdot 10^{-2}$
Ebanite	$2 \cdot 10^{13}$	
Zolfo	10^{15}	
Polistirene	10^{15}	
Micalex	10^{11}	
Quarzo fuso	$> 5 \cdot 10^{16}$	

Nel caso molto importante dei conduttori metallici, tuttavia, la maggior parte dei risultati sperimentali sulla conduzione elettrica può essere spiegata mediante trattazioni più semplici costituite dalle teorie degli elettroni liberi. Noi considereremo queste teorie nella versione che fa uso della statistica classica (teoria di Drude). Ciò viene fatto sia perché questa teoria è tuttora estesamente usata nell'esame di situazioni concrete, sia perché essa consente di introdurre gradualmente alcuni concetti della massima importanza.

3.16. EVIDENZA DELL'ESISTENZA DI ELETTRONI LIBERI NEI METALLI

Un conduttore metallico è in genere formato da un aggregato di cristallini delle dimensioni dall'ordine delle frazioni di micron (cioè circa 10^{-1} m) in su; solo raramente si ha a che fare con campioni monocristallini della lunghezza di qualche centimetro. Se si ricorda che le distanze fra atomi vicini in un cristallo sono dell'ordine di $1 \text{ \AA} (10^{-10} \text{ m})$ si vede che in ogni caso si hanno nell'interno del conduttore unità formate da un numero molto elevato di atomi tenuti in regolari strutture tridimensionali. Molto spesso quindi faremo considerazioni riferendoci a semplici strutture monocrystalline ed esse conservano la loro validità nei campioni policristallini. Ricordiamo inoltre (vol. I, cap. 12, par. 12.7) che la natura del legame metallico è tale che gli elettroni di valenza degli atomi costituenti il cristallo non si trovano localizzati fra coppie di atomi, ma si trovano diffusi nel cristallo; essi in altri termini, in un linguaggio suggestivo anche se grossolano, possono descrivere *orbite* che invadono tutto il cristallo e muoversi liberamente nel suo interno. In accordo con ciò, si può immaginare la situazione in un cristallo metallico come una nella quale elettroni in numero notevole (almeno uno per atomo) si trovino *liberi* di spostarsi nell'interno del cristallo; essi quindi possono muoversi nella direzione di un campo elettrico se questo viene imposto al cristallo dall'esterno.

Effetto Tolman

Una prima conferma sperimentale (Tolman) di questo stato di cose si ha nello studio di un effetto puramente meccanico atto a determinare il segno delle cariche mobili in un conduttore ed il rapporto fra carica e massa dei portatori. Si immagini di arrestare bruscamente un conduttore in moto: se nel suo interno vi sono cariche libere queste continuano per un certo tempo, a causa della loro inerzia, nel loro moto iniziale e si spostano rispetto al reticolo di un certo tratto. Ciò significa che attraverso una sezione del conduttore si ha un passaggio netto di quantità di elettricità; naturalmente questo moto relativo viene nel tempo frenato ed eliminato, sia per effetto degli urti dei portatori con il reticolo, sia per lo stabilirsi di un campo elettrico tra le estremità del conduttore dovuto proprio all'addensarsi delle cariche ad una estremità ed alla depauperazione di esse all'altra. Il moto di queste cariche attraverso il conduttore può essere rivelato attraverso un galvanometro balistico collegato alle sue estremità.

Uno schema d'esperienza è quello indicato nella figura 3.48. Un conduttore è avvolto a spirale su un cilindro che viene posto in rapida rotazione ed in seguito rapidamente frenato: le estremità della spirale, portate sull'asse, sono collegate ad un galvanometro balistico che rivela lo spostamento degli elettroni dovuto alla loro inerzia.

Esperienze di questo genere hanno mostrato che il segno delle cariche mobili nei buoni conduttori come rame, argento ecc., è quello negativo e che il rapporto fra carica (q) e massa (m) dei portatori è

$$\frac{q}{m} = 1,93 \cdot 10^{11} \frac{\text{coulomb}}{\text{kg}}.$$

Tale valore differisce per meno dell'errore sperimentale dal valore e/m per elettroni liberi ($1,7589 \cdot 10^{11}$ coulomb/kg).

Una seconda indicazione sperimentale sul segno delle cariche mobili in un metallo ed una determinazione della loro densità si ha nello studio dell'effetto Hall, che sarà discusso nel cap. 4, par. 4.3g.

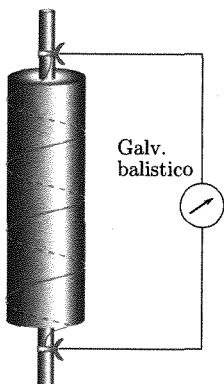


Fig. 3.48

3.17. TEORIA DI DRUDE DEGLI ELETTRONI LIBERI NEI METALLI

Le considerazioni precedenti mostrano che come punto di partenza per una teoria della conduzione nei metalli si possono porre le seguenti ipotesi:

1. *nei metalli esistono elettroni liberi;*
2. *la loro densità n è dello stesso ordine di grandezza del numero di atomi per unità di volume.*

Si può cioè ammettere che un campione metallico sia costituito da un reticolo di ioni positivi, formati dagli atomi costituenti privati degli elettroni di valenza, e da un certo numero di elettroni che sono liberi di muoversi pur essendo costretti a rimanere nell'interno del metallo stesso (36).

(36) Il fatto, mostrato dall'esperienza, che gli elettroni liberi di muoversi nell'interno non riescano in genere ad uscire dal metallo, mostra come gli elettroni che giungono sulla superficie debbano essere soggetti a forze che li respingono verso l'interno. Diremo qui solamente che le forze che trattengono gli elettroni sono dovute: 1) alle azioni che gli ioni metallici disposti sulla superficie esercitano su elettroni che tendano ad allontanarsi verso

Fissando l'attenzione sugli elettroni *liberi* si deve riconoscere che il volume di ciascuno di essi è enormemente piccolo rispetto al volume occupato da un atomo ed ancor più piccolo del volume delle celle elementari del reticolo; ci si trova quindi, per questo riguardo, in condizioni analoghe a quelle che si verificano per le molecole di un gas perfetto. Va però osservato che mentre nel caso del gas perfetto le particelle non sono soggette a forze se non durante gli urti, gli elettroni risentono forze elettrostatiche da parte sia degli altri elettroni, sia degli ioni positivi. In una prima approssimazione si può assumere che le forze che si esercitano su un singolo elettrone *libero*, dovute a tutte le altre cariche, si compensino⁽³⁷⁾ (tranne che in corrispondenza alla superficie del conduttore). Si vede perciò che una prima maniera di considerare lo stato delle cose nell'interno dei conduttori metallici è quella di assimilare l'insieme degli elettroni liberi ad un gas perfetto.

La teoria di P.K.Z. Drude (1900) consiste essenzialmente nella applicazione della teoria classica (Maxwell-Boltzmann) dei gas a questa situazione. Gli elettroni in questione, liberi di muoversi nel conduttore come molecole di gas in un recipiente, si muovono, in assenza di campo elettrico applicato, a caso in tutte le direzioni, subendo urti di tanto in tanto con le altre parti del metallo (elettroni ed ioni positivi); in conseguenza non v'è alcuna corrente netta in nessuna direzione. Lo stato di un tale gas può essere descritto qualora:

1. si conosca la densità elettronica, cioè il numero n di elettroni per unità di volume;
2. si conosca la funzione di distribuzione delle velocità e , come si è detto, si assuma la validità della funzione di Maxwell⁽³⁸⁾;

l'esterno della superficie del metallo (esse sono le più importanti fino a distanze dell'ordine di 10^{-7} cm dalla superficie); 2) a fenomeni di induzione elettrostatica (forze immagine). In conseguenza della esistenza di queste forze gli elettroni per poter uscire dal metallo debbono compiere un lavoro, il che equivale a dire che l'energia potenziale dell'elettrone fuori del metallo è maggiore di quella che esso possiede nell'interno. Lo stato delle cose può sintetizzarsi dicendo che fra l'interno del metallo e l'esterno esiste una differenza di potenziale (barriera). Per molte considerazioni si può schematizzare la situazione ammettendo che gli elettroni siano liberi di muoversi in uno spazio equipotenziale limitato da una barriera molto ripida e di spessore infinito.

⁽³⁷⁾ Va avvertito che l'idea che vi siano nei metalli elettroni liberi nel senso che non risentono dell'azione delle altre cariche presenti è errata: la possibilità di successo di una trattazione che consideri alcuni elettroni come liberi è basata, come si vede con considerazioni quantistiche, sul fatto che gli elettroni nell'interno del metallo risentono azioni dalle altre cariche che globalmente conducono per gli elettroni di conduzione ad una dipendenza dell'energia dal quadrato della velocità, sicché il loro comportamento può a volte essere assimilato a quello di cariche libere.

⁽³⁸⁾ La funzione di distribuzione delle velocità di Maxwell (vol. I, cap. 15, par. 15.9) $n(v)$, tale che $n(v)dv$ dia il numero di molecole di gas monoatomico per unità di volume con velocità di modulo fra v e $v + dv$, è

$$(109) \quad n(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

e si può ottenere come caso particolare dalla funzione di distribuzione delle energie di Boltzmann (vol. I, cap. 15, par. 15.11). La funzione di Boltzmann che consente di esprimere il numero $n(\varepsilon)d\varepsilon$ di particelle che occupano i $g(\varepsilon)d\varepsilon$ stati con energia fra ε e $(\varepsilon + d\varepsilon)$, è

$$(110) \quad n(\varepsilon) = ag(\varepsilon)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = g(\varepsilon)e^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{kT}}$$

essendo a ed ε_0 costanti che vanno determinate con la condizione che il numero totale di molecole che posseggono le varie energie ε sia pari al numero di particelle presenti, per unità di volume, nel sistema.

3. si introduca un libero cammino medio l . Relativamente ad l si può ammettere, come per i gas, che, almeno in prima approssimazione, esso sia indipendente dalla velocità u degli elettroni.

È bene a questo punto notare che la velocità media degli elettroni quale si calcola nella teoria dei gas (vol. I, cap. 15, par. 15.9) è, a temperature vicine a quelle ambiente, dell'ordine di

$$(111) \quad \bar{u}_T = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Quando un campo elettrico \mathbf{E} viene applicato al conduttore, gli elettroni sono accelerati nella direzione del campo ed un moto in questa direzione si sovrappone al moto a caso preesistente (fig. 3.49): ciò conduce ad una corrente. Si possono calcolare la corrente e la conducibilità.

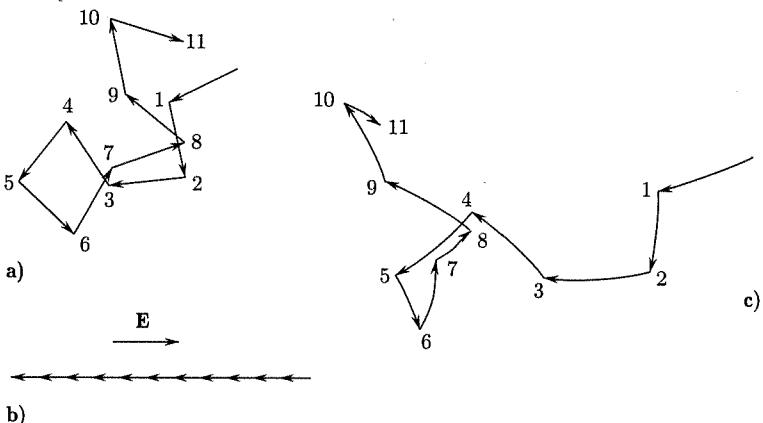


Fig. 3.49 a) Moto di un elettrone in un cristallo fuori da campi elettrici (per semplicità i cammini liberi sono presi uguali). b) Moto di un elettrone in un cristallo in un campo \mathbf{E} . Componente dello spostamento dovuta al campo \mathbf{E} nei successivi cammini liberi. c) Traiettoria risultante del moto a caso e del moto dovuto al campo elettrico.

Per la densità di corrente si può scrivere

$$(112) \quad \mathbf{j} = (-ne)\mathbf{v}_d$$

essendo $\mathbf{v}_d = \bar{\mathbf{v}}$ velocità di scorrimento media degli elettroni nella direzione del campo. Se scegliamo come asse di riferimento x , quello diretto come il campo applicato \mathbf{E} , la (112) si scrive scalarmente

$$(113) \quad j = ne|\mathbf{v}_d|.$$

Per il calcolo di v_d consideriamo un elettrone accelerato dal campo \mathbf{E} ; per esso vale la relazione

$$(114) \quad m \frac{dv}{dt} = -eE.$$

Supponiamo che all'istante $t = 0$ esso abbia subito un urto ed indichiamo con v_0 la velocità nella direzione x con cui esso emerge dall'urto. Per la velocità nella direzione x , $v(t)$, si ottiene

$$(115) \quad v(t) = v_0 - \frac{e}{m} Et.$$

Si osservi che poiché non esiste alcuna direzione privilegiata per la velocità dell'elettrone dopo l'urto, la media dei valori v_0 , eseguita su molti elettroni deve essere nulla.

L'elettrone a partire dall'istante $t = 0$ aumenta la sua velocità in accordo con la (115) e ciò fino all'istante τ' in cui subisce un nuovo urto. Avendo supposto il libero cammino medio l indipendente dalla velocità dell'elettrone (\mathbf{u}), si ha per τ'

$$(116) \quad \tau' = \frac{l}{u_m}.$$

La \mathbf{u}_m è somma della velocità (\mathbf{u}_τ) che l'elettrone avrebbe in assenza del campo elettrico e di quella media che deriva dalla accelerazione prodotta dal campo. Siccome τ' è molto piccolo, come meglio si vedrà in seguito, il secondo contributo (che al massimo ha il valore $e/mE\tau'$) è piccolo rispetto alla velocità di agitazione termica; si può pertanto nel calcolo di τ' per un elettrone supporre u indipendente dal campo, costante e pari alla velocità termica u_T dell'elettrone⁽³⁹⁾.

La velocità media assunta dall'elettrone che si considera nel tempo fra $t = 0$ e $t = \tau'$ è

$$(117) \quad v = \frac{1}{\tau'} \int_0^{\tau'} v(t) dt = v_0 - \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \tau' = v_0 - \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \frac{l}{u_T}.$$

Per ottenere la velocità di scorrimento media bisogna mediare la (117), valida per un elettrone, su molti elettroni e ricordando che $\bar{v}_0 = 0$,

$$(118) \quad \bar{v}_d = \bar{v} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} l E \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)}.$$

L'intensità del vettore densità di corrente risulta

$$(119) \quad j = \frac{1}{2} \frac{n e^2 l}{m} E \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)}$$

e per il vettore si ha:

$$(120) \quad \mathbf{j} = \frac{1}{2} \frac{n e^2 l}{m} \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)} \mathbf{E}.$$

La conducibilità ha quindi il valore

$$(121) \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{n e^2 l}{m} \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)}.$$

Ammettendo la validità della legge di Maxwell per le velocità termiche degli elettroni, si ha (usando la (109) con u_T al posto di v):

$$(122) \quad \begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)} &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{1}{u_T} n(u_T) du_T = \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{mu_T^2}{2kT}} u_T du_T = 2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

⁽³⁹⁾ Si osservi che vale

$$j = nev_d.$$

Se si pone per esempio $j = 10^7$ A/m² ($i = 10$ A in un conduttore della sezione di 1 mm²) e $n = 10^{29}$ elettroni/m³, risulta $v_d = 6 \cdot 10^{-4}$ m/s, valore molto piccolo rispetto ad \bar{u}_T (10⁵ m/s).

e quindi

$$(123) \quad \sigma = \frac{ne^2l}{(2\pi mkT)^{1/2}}.$$

È spesso interessante considerare un'altra grandezza, la mobilità, definita come il modulo della velocità di scorrimento assunta dalle cariche mobili in un campo acceleratore unitario

$$\mu = \frac{|\mathbf{v}_d|}{|\mathbf{E}|}.$$

Essa si misura in $\text{m}^2/\text{volt sec}$.

La (118) fornisce per la mobilità degli elettroni

$$(124) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{el}{m} \sqrt{\left(\frac{1}{u_T}\right)}.$$

Per gli elettroni nel rame a temperatura ambiente, il valore che si ha dall'esperienza per μ è

$$\mu = 0,35 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^2}{\text{volt sec}} = 35 \frac{\text{cm}^2}{\text{volt sec}}.$$

■ 3.18. CONFRONTO FRA TEORIA DI DRUDE ED ESPERIENZA

Dalla espressione (123) trovata per la conducibilità e dalle considerazioni svolte, si deduce che la resistenza opposta al moto delle cariche accelerate dal campo elettrico è dovuta alle interazioni fra elettroni e reticolo; l'effetto degli urti degli elettroni con gli ioni del reticolo è rappresentato nella (123) dal libero cammino medio. In questi urti l'energia spesa dal campo \mathbf{E} per accelerare nella sua direzione le cariche libere, viene ceduta al reticolo e perduta nei riguardi dell'effetto che si vuole ottenere, cioè dello spostamento delle cariche nella direzione di \mathbf{E} , cioè della corrente elettrica. Naturalmente tale energia si ritrova come energia di vibrazione del reticolo nell'innalzata temperatura del conduttore.

La teoria non consente di determinare con considerazioni indipendenti il libero cammino e quindi non può essere usata per un calcolo dei valori di σ da confrontare con la esperienza.

Dalla (123) si può tuttavia calcolare l'ordine di grandezza di l che la teoria richiede per spiegare i valori sperimentali di σ .

Si consideri per esempio il caso del rame a temperatura ambiente. Per esso $\rho = 1/\sigma = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ed inoltre $n = 1,1 \cdot 10^{29}$ elettroni/ m^3

$$(125) \quad l = \frac{\sigma \sqrt{2\pi mkT}}{ne^2} = \frac{\sqrt{6,28 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{29} \cdot (1,6)^2 \cdot 10^{-38}} = \\ = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

Siccome le distanze tra atomi in un cristallo sono di qualche Å (10^{-10} m) si vede che l è dell'ordine di varie volte la distanza reticolare.

In maniera analoga al calcolo della conducibilità elettrica, la teoria classica di Drude consente di calcolare il contributo degli elettroni liberi

al coefficiente di conducibilità termica. Si ottiene

$$(126) \quad K_e = \frac{n}{2} \bar{u}_T k l$$

essendo k la costante di Boltzmann.

Per il rapporto della conducibilità termica e di quella elettrica si ottiene, usando la (121) e ponendo $\overline{(1/u_T)} \simeq 1/\bar{u}_T$,

$$(127) \quad \frac{K_e}{\sigma} = m \frac{k}{e^2} \bar{u}_T^2.$$

Ricordiamo (vol. I, cap. 15, par. 15.8) che

$$(128) \quad \frac{1}{2} m \bar{u}_T^2 = \frac{3}{2} k T.$$

Con lo stesso grado di approssimazione delle semplificazioni precedenti possiamo porre

$$m \bar{u}_T^2 = 3kT$$

e quindi si ha

$$(129) \quad \frac{K_e}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Questo rapporto, come si vede, non dipende dal libero cammino medio e quindi si presta per un confronto fra teoria ed esperienza. Quest'ultima mostra in effetti (legge di Wiedeman Franz) che il rapporto K_e/σ è funzione lineare di T con un coefficiente abbastanza prossimo a quello indicato dalla teoria di Drude.

A parte questa circostanza (che va considerata casuale) la teoria di Drude, semplice ma grossolana, non consente di spiegare importanti aspetti dei risultati sperimentali.

Innanzitutto essa indica dipendenze di σ e K_e da T diverse da quelle riscontrate in pratica. Così, per quanto riguarda σ , dalla (123), ritenendo l costante, la conducibilità dovrebbe essere proporzionale a $T^{-1/2}$; invece si trova, nelle vicinanze della temperatura ambiente, una proporzionalità fra σ e T^{-1} , ed a temperature basse una variazione di σ con T ancora diversa.

La figura 3.50 (Mac Donald-Mendelssohn) dà la resistenza misurata per campioni diversi di sodio alle basse temperature.

Vogliamo inoltre osservare che H.A. Lorentz ha condotto un calcolo più rigoroso di quello elementare di Drude giungendo a formule analoghe a quelle precedentemente riportate per σ e K_e , differendone solo per un coefficiente che deriva da una più esatta maniera di compiere le medie in presenza di un campo elettrico applicato al cristallo (per σ) o della caduta di potenziale elettrico che si stabilisce in corrispondenza ad un gradiente di temperatura (per il calcolo di K_e). Egli ottiene

$$(130) \quad \sigma = \frac{2}{3} \frac{e^2 n l}{m} \overline{\left(\frac{1}{u_T} \right)}$$

Legge di Wiedeman
Franz

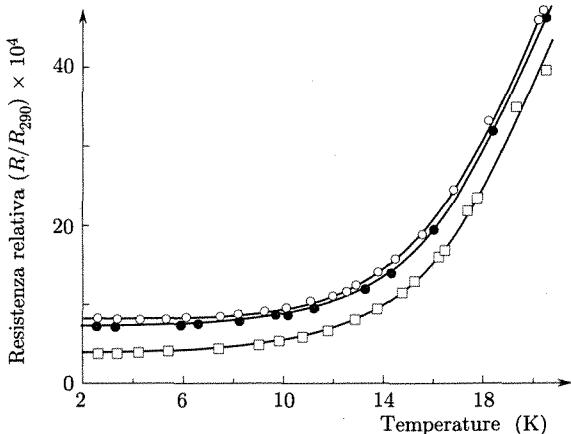


Fig. 3.50

ed usando la statistica di Maxwell

$$(131) \quad \sigma = \frac{4}{3} \frac{e^2 n l}{\sqrt{2\pi m k T}}.$$

Analogamente il rapporto K_e/σ assume il valore

$$(132) \quad \frac{K_e}{\sigma} = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Quest'ultima relazione è analoga alla (129) ma il coefficiente numerico si adatta meno bene ai risultati sperimentali di quanto non accadesse per quello della (129): ciò dimostra la coincidenza casuale dell'accordo fra la (129) e l'esperienza.

La incapacità della teoria classica di Drude a rappresentare adeguatamente lo stato delle cose si rende evidente in maniera drammatica nel calcolo del contributo degli elettroni al calore specifico. Questa teoria infatti (vol. I, cap. 16, par. 16.8) porterebbe ad un contributo al calore atomico pari a $3/2R$, molto superiore a quello indicato dalle esperienze. Queste difficoltà delle teorie classiche sono superate nelle trattazioni quantistiche.

3.19. I SUPERCONDUTTORI ⁽⁴⁰⁾

La resistività di un tipico conduttore metallico decresce al diminuire della temperatura. Essa tuttavia non si riduce a zero nemmeno quando T tende allo zero assoluto (vedi fig. 3.50). Come abbiamo visto, la resistività di un conduttore trova origine nelle collisioni subite dagli elettroni di conduzione nel loro movimento entro il reticolo cristallino. Le impurità e i difetti reticolari aumentano le possibilità che gli elettroni collidano e queste collisioni con gli atomi che si trovano spostati per il moto vibratorio dai loro siti reticolari contribuiscono a opporre una resistenza, che resta anche a bassissima temperatura a causa delle impurità.

In alcuni materiali, tuttavia, detti superconduttori, la resistività diminuisce gradatamente con l'abbassarsi della temperatura e ad una certa temperatura, detta temperatura critica (T_c), cade improvvisamente a zero (vedi la fig. 3.51).

Nel caso del mercurio, il primo materiale in cui l'effetto fu scoperto nel 1911 da Kammerling-Onnes, ciò accade a 4,15 K.

La supercondutività è stata in seguito riscontrata in numerosi elementi (come Pb, Al, Sn) e moltissime leghe. Le temperature di transizione (T_c) per questi materiali vanno da un valore più basso finora trovato di 0,155 K (in Bi₂Pt) a circa 18 K nella lega di Nb e Sn avente approssimativamente la composizione Nb₃Sn. Nei campioni di elementi superconduttori puri, ben ricotti, la transizione avviene in un intervallo di temperatura molto piccolo, alcuni millesimi di grado, mentre nel caso di campioni aventi tensioni interne e nelle leghe (o composti) la resistenza va a zero in un intervallo di circa un grado.

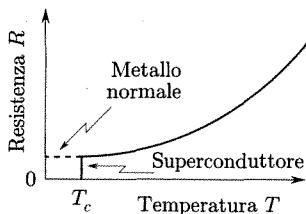


Fig. 3.51

⁽⁴⁰⁾ Si consiglia la lettura di questo paragrafo dopo i capitoli sul magnetismo.

Va ancora menzionato che esiste un limite al valore dell'intensità di una corrente continua che un superconduttore può portare; se questo valore viene superato il materiale si trasforma in conduttore normale.

A temperature inferiori a T_c la supercondutività può essere distrutta dalla applicazione di un campo magnetico sufficientemente intenso (campo critico H_c). Questa circostanza fu scoperta da Kammerling-Onnes nel 1914; il campo critico tende ad un valore massimo (H_0) al tendere della temperatura allo zero assoluto e va a zero alla temperatura T_c . La figura 3.52 (D.A. Buck) riporta per vari elementi superconduttori come varia H_c con T al di sotto di T_c : le misure si riferiscono a cilindri con l'asse nella direzione del campo magnetico. Ciascuna curva va intesa come la separazione fra la regione termodinamica (H, T) dello stato superconduttore (al di sotto della curva) e la regione di conduzione normale; essa corrisponde ad un vero e proprio cambiamento termodinamico di fase.

Per molti superconduttori il campo critico, e quindi la linea che limita la fase superconduttrice, è espresso abbastanza bene dalla relazione

$$(133) \quad H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right].$$

I valori di H_0 per superconduttori puri e ben ricotti sono in genere dell'ordine di alcune centinaia di Oersted (1 Oersted = 1000 Asp/4πm ~ 80 Asp/m). La tabella 3.5 riporta per gli elementi superconduttori ed alcuni superconduttori composti i valori di T_c e di H_c .

Tabella 3.5 H_c e T_c negli elementi superconduttori ed in alcuni composti

Sostanza	T_c (K)	H_c (Asp/m)	Sostanza	T_c (K)	H_c (Asp/m)
Al	1,196	7.920	Tc	11,2	
Cd	0,56	2.400	Th	1,37	12.960
Ga	1,091	4.080	Ti	0,39	8.000
Hf	0,165		Tl	2,36	13.680
Hg(α)	4,153	33.000	U(α)	0,6-0,7	160.000
Hg(β)	3,949	27.440	V	5,3	104.800
In	3,407	23.400	Zn	0,91	4.240
Ir	0,14	1.520	Zr	0,55	3.740
La(α)	5,0		Al Nb ₃	18	
La(β)	5,95	128.000	Ba Bi ₃	5,69	59.200
Mo	0,92	7.840	Bi ₂ Pt	0,16	800
Nb	9,25	155.500	Co Si ₂	1,40	8.400
Os	0,655	5.200-6.600	Ge Ir	4,70	
Pb	7,175	64.208	In La ₃	10,4	
Re	1,699	16.080	Nb ₃ Sn	18,07	
Ru	0,49	5.280	Si V ₃	16,8-17,1	
Sn	3,74	24.400	Nb ₃ Ge	23,2	286.845
Ta	4,483	62.400	Nb ₃ Ga	20,3	256.650

Campo critico

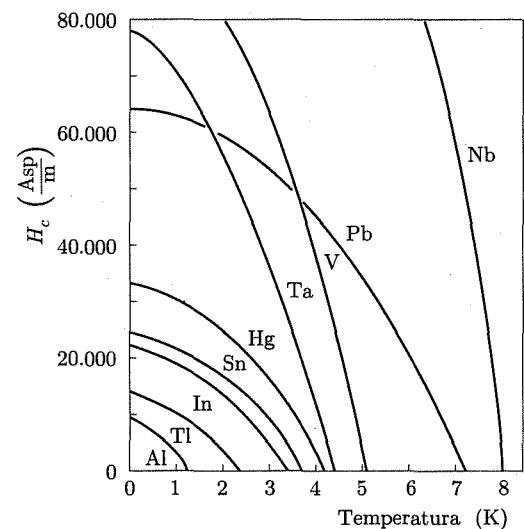


Fig. 3.52

L'esistenza di un campo magnetico critico il quale al di sotto di T_c distrugge la superconduttività, chiarisce la circostanza già menzionata che la superconduttività scompare se la intensità della corrente continua che attraversa il superconduttore supera un determinato valore: secondo Silsbee negli elementi superconduttori ben ricotti questa intensità limite è

proprio quella necessaria perché la corrente nel superconduttore crei essa stessa alla superficie del campione un campo magnetico pari a quello critico (H_c).

Nel 1933 Meissner e Ochsenfeld scoprirono il fatto che un campo magnetico esterno praticamente non penetra nell'interno di un campione superconduttore massivo, ed ancora, che qualora in un tale campione esista un campo magnetico prima del passaggio da normale a superconduttore, il campo magnetico nell'interno viene annullato al momento della trasformazione (effetto Meissner). La figura 3.53 mostra le linee di forza di un campo magnetico quando in esso si trova una sfera conduttrice (a) e quando quest'ultima viene trasformata in superconduttrice (b). In altri termini un elemento superconduttore ben ricotto che abbia tutte e tre le dimensioni non piccolissime, è un materiale *diamagnetico perfetto* giacché nel suo interno $B = 0$ e $\mu = 0$. È stato successivamente mostrato che questo comportamento è dovuto alla comparsa di correnti in uno strato superficiale del superconduttore dello spessore di 10^{-5} - 10^{-6} cm. Tali correnti schermano l'interno del campione dal campo esterno.

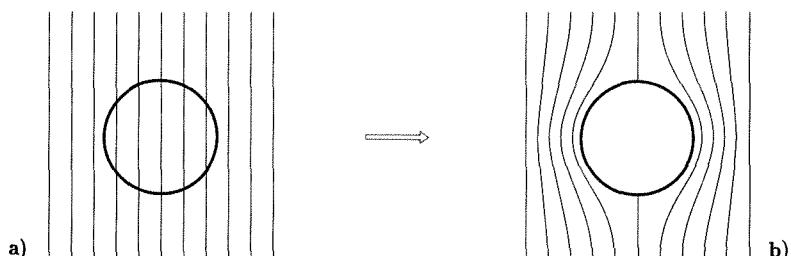


Fig. 3.53

L'esistenza delle correnti superficiali prodotte dal campo magnetico esterno mostra che in realtà le linee di forza del campo esterno penetrano nel campione limitatamente ad uno strato superficiale il cui spessore viene indicato come profondità di penetrazione (λ) ed ha nei comuni superconduttori valori di 10^{-5} - 10^{-6} cm. Ciò porta di conseguenza che superconduttori a forma di lamine aventi spessore più piccolo, oppure di polveri con grani di dimensioni più piccole della profondità di penetrazione, non presentano l'effetto Meissner.

È importante notare che l'effetto Meissner non è una semplice conseguenza delle caratteristiche di perfetto conduttore che hanno i superconduttori e va considerato come una nuova proprietà. Nel caso infatti che si ponga un conduttore perfetto (nell'interno del quale non si possono avere forze elettromotrici) in un campo magnetico esterno non si può avere l'ingresso in esso di flusso magnetico⁽⁴¹⁾: si determinerebbero in superficie correnti indotte tali da annullare il campo nell'interno; tali correnti permanerebbero indefinitamente, finché dura il campo esterno, a causa della assenza di resistenza nel conduttore. Per le stesse ragioni,

⁽⁴¹⁾ In un conduttore $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ e quindi in un superconduttore, essendo $\rho = 0$, $\mathbf{E} = 0$. Ciò porta di conseguenza, se si considera la seconda equazione di Maxwell

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

che \mathbf{B} non può variare.

se nel conduttore esistesse un campo magnetico prima che esso diventi conduttore perfetto il flusso dovrebbe rimanere nell'interno, bloccato, anche se il campo esterno venisse rimosso. L'esperienza invece mostra che il campo magnetico nell'interno dei campioni viene espulso all'atto della trasformazione in superconduttore.

Un ultimo effetto che è stato di grande importanza per l'interpretazione della superconduttività è l'effetto isotopico.

Nel 1950 indipendentemente C.A. Reynolds (ed altri) sperimentando in mercurio ed E. Maxwell in stagno mostrarono che i valori di T_c ed H_0 differiscono leggermente per campioni realizzati con isotopi diversi dello stesso elemento. Le differenze in T_c , pur essendo di pochi centesimi di grado, sono nettamente misurabili. Questo effetto è stato in seguito riscontrato in molti metalli superconduttori e si è trovato che per ogni elemento, se M è la massa dell'isotopo

$$(134) \quad T_c M^{1/2} = \text{cost.}$$

Analogamente il campo critico massimo H_0 è inversamente proporzionale a $M^{1/2}$, sicché il rapporto H_0/T_c resta costante.

Le conclusioni che si deducono da questo risultato sono di enorme importanza e sono state quelle che hanno da una parte spazzato via molti tentativi precedenti di spiegazione teorica e dall'altra aperta la strada alla nuova teoria microscopica di Bardeen, Cooper e Schrieffer (1957).

L'effetto isotopico mostra che la massa degli ioni che costituiscono il reticolo ha una azione determinante sul processo della superconduttività, che pure è un processo elettronico. Si osservi che la massa degli ioni ha influenza esclusivamente sulle vibrazioni reticolari (sullo spettro dei fononi). Si deve quindi concludere che *la superconduttività è legata ad una interazione elettrone-reticolo*, cioè, come spesso si dice, elettrone-fonone. Questa circostanza chiarisce immediatamente in maniera qualitativa perché la superconduttività si verifichi quasi esclusivamente in metalli che non sono, a temperature normali, buoni conduttori; l'esistenza infatti di forti interazioni fra elettroni e reticolo conduce, come sappiamo, nei conduttori normali ad una elevata resistività.

La scoperta dell'effetto isotopico consente inoltre di scartare tutti i tentativi di spiegazione teorica basati sulla ipotesi di reticolo rigido nel cristallo (42).

Effetto isotopico

(42) La teoria BCS ha consentito di interpretare in maniera soddisfacente gran parte dei risultati sperimentali. Per comprendere bene le difficoltà che si incontrano nel formulare una teoria microscopica della superconduttività e notare alcune proprietà che una teoria di tal genere deve avere, vogliamo aggiungere ai risultati sperimentali già considerati alcune altre indicazioni fornite dall'esperienza. Innanzitutto i superconduttori mostrano tutte le stesse caratteristiche nonostante essi siano solidi di proprietà cristallografiche ed atomiche molto diverse; ciò indica che le cause del fenomeno devono essere di carattere generale e devono esulare da complicate situazioni strutturali. Le energie inoltre che sono implicite nel passaggio dalla conduzione normale alla superconduzione sono molto piccole; allo zero assoluto tali energie sono dell'ordine di 10^{-8} eV. Va notato infine che i cambiamenti di fase possono essere molto netti (avvenire in millesimi di grado). L'assenza di fluttuazioni statistiche di una qualche importanza in questi casi indica che lo stato superconduttore è uno stato ad elevata correlazione, che cioè coinvolge un gran numero di elettroni. Una teoria microscopica deve quindi basarsi su una interazione che implica un gran numero di elettroni, che sia legata alle proprietà di base di tutti i metalli e che conduca ad una variazione di energia, rispetto allo stato normale dei metalli, molto piccola. Come si è già detto la scoperta dell'effetto isotopico è stata fondamentale nell'indicare tale interazione in quella fra il reticolo che vibra e gli elettroni.

Superconduttori ad alta temperatura critica

Per 75 anni, dopo la scoperta di Onnes nel 1911, la massima temperatura raggiunta per la transizione allo stato superconduttore crebbe gradatamente dai 4,2 K del mercurio, ad un apparente limite di 20-25 K. Molti teorici erano convinti che il meccanismo fotonico non possa produrre temperature critiche più alte. Sebbene alcuni (Little in USA e Ginzburg in URSS) speculassero che meccanismi alternativi avrebbero potuto produrre uno stato superconduttore a temperature molto alte, magari anche a temperatura ambiente, tutti i tentativi per ottenere tali "superconduttori ad alta temperatura" erano falliti.

Quando, nel 1986, Alex Muller e Georg Bednorz a Zurigo riportarono la scoperta di effetti superconduttori in un composto di lantanio e ossido di rame, la notizia scoppia inaspettata. Oggi esiste un grande numero di materiali composti che sono superconduttori ad alta temperatura (v. tab. 3.6). Essi sono in genere formati da piani reticolari di CuO_2 fra i quali sono disposti, secondo i casi, strati di lantanio, ittrio, bario o altri isolanti. Questi nuovi materiali hanno proprietà che in taluni casi mostrano marcate differenze con i superconduttori ordinari e a tutt'oggi non esiste teoria soddisfacente del loro comportamento.

I superconduttori ad alta temperatura rappresentano un salto formidabile nello sviluppo tecnologico. In particolare essi permettono di raggiungere lo stato superconduttore a temperature facilmente mantenibili utilizzando azoto liquido (77 K).

Tabella 3.6

Formula	T_c (K)
$(\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x)\text{CuO}_4$	38
$(\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x)\text{CaCu}_2\text{O}_6$	60
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_6$	0-80
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	108
$\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$	125
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_6$	0-20
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	85
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$	110
$(\text{Nd}_{2-x}\text{Ce}_x)\text{CuO}_4$	30
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$	92
$\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$	80
$\text{Y}_2\text{Ba}_4\text{Cu}_7\text{O}_{14}$	40
$\text{TlBa}_2\text{CuO}_5$	0-50
$\text{TlBa}_2\text{CaCu}_2\text{O}_7$	80
$\text{TlBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_9$	110
$\text{TlBa}_2\text{Ca}_3\text{Cu}_4\text{O}_{11}$	112
CaCuO_2	-
$(\text{Nd}, \text{Ce}, \text{Sr})\text{CuO}_4$	30
$(\text{Ba}_{0,6}\text{K}_{0,4})\text{BiO}_3$	30

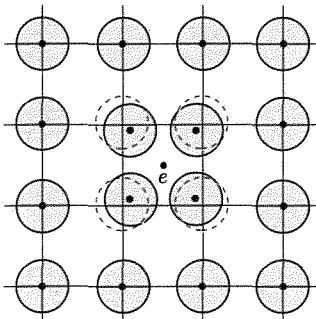


Fig. 3.54

Nel 1950, contemporaneamente alla scoperta dell'effetto isotopico, Fröhlich e Bardeen formularono indipendentemente due teorie in cui la suddetta interazione veniva considerata; tale interazione è infine alla base della teoria BCS molto più elaborata delle due precedenti ora citate. La meccanica quantistica conduce al risultato che in un reticolo, anche allo zero assoluto, esistono vibrazioni (vibrazioni al punto zero). Secondo le teorie ora dette ogni elettrone altera il comportamento del reticolo nei riguardi delle vibrazioni e tale alterazione produce un campo di forze che influenzano un altro elettrone: ciò equivale a dire che esiste una interazione fra due elettroni e tale interazione può risultare attrattiva e superiore alla repulsione coulombiana. In un linguaggio non preciso ed approssimato si può dire che un elettrone trovandosi in un reticolo di ioni positivi, che in sua assenza avrebbe avuto una certa configurazione, lo deforma poiché attira a sé gli ioni e crea una regione in cui le cariche positive sono più vicine fra loro ed il reticolo è più denso (fig. 3.54): un secondo elettrone che si trovi ad una certa distanza può risentire di questo stato di cose venendo attratto verso la regione più densa di cariche positive; in tal maniera tutto va come se una attrazione fra i due elettroni venisse ad esercitarsi mediante la loro contemporanea interazione con il reticolo. Le vibrazioni reticolari in meccanica quantistica sono descritte per mezzo di fononi e la interazione che lega i due elettroni è una interazione fonone-elettrone.

Nella teoria BCS si mostra come una tale interazione conduca al fatto che due elettroni aventi energie prossime al livello di Fermi ed aventi tanto momenti di cristallo quanto spin opposti possano unirsi a formare una coppia (coppia di Cooper di elettroni legati). È importante sottolineare che la formazione di una coppia non è un processo al quale prendono parte solo i due elettroni che vengono legati, ma è un *processo cooperativo* al quale partecipano tutti gli elettroni di conduzione del metallo. Nello stato superconduttore gli elettroni si trovano legati a coppie nella maniera suddetta. In tali condizioni il trasferimento di energia al sistema richiede la rottura di una coppia: ciò porta di conseguenza che tale energia deve avere un valore almeno pari all'energia di legame della coppia; tale energia quindi rappresenta l'intervallo proibito fra stato superconduttore e stato di conduttore normale.

L'assenza di resistività dei superconduttori ha quindi una spiegazione immediata. Le coppie infatti non possono perdere energia cinetica in collisioni con il reticolo finché la loro velocità non supera un dato valore: perché una interazione di questo genere possa avvenire esse devono avere acquistato una energia cinetica almeno pari all'intervallo di energia proibita; quando l'interazione si verifica la coppia si distrugge e gli elettroni divengono elettroni normali di conduzione. È questo ciò che accade nella transizione superconduttore-conduttore normale quando si applica un campo magnetico superiore al valore critico. Rimanendo nella regione superconduttrice la corrente può circolare senza incontrare resistenza. Si può mostrare ancora che la presenza di un intervallo di energia proibito porta di conseguenza il diamagnetismo perfetto a frequenza zero.

3.20. LE EQUAZIONI CIRCUITALI PER CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE

La legge di Ohm generalizzata (54) e le regole di Kirchhoff, (55) e (56), sono state stabilite per circuiti in condizioni stazionarie. È abbastanza frequente avere a che fare con circuiti nei quali i processi pur non essendo stazionari, avvengono con variazioni temporali lente⁽⁴³⁾; si parla allora di *condizioni quasi stazionarie* giacché in ciascun istante si può pensare che il circuito si trovi in condizioni di equilibrio, naturalmente con i valori istantanei delle grandezze (corrente, d.d.p.) in gioco. Ai circuiti in condizioni quasi stazionarie possono applicarsi la legge di Ohm generalizzata e le regole di Kirchhoff come relazioni fra i valori istantanei delle grandezze che vi intervengono.

Consideriamo, ad esempio, il caso della scarica di un condensatore C attraverso una resistenza R (fig. 3.55a). Il condensatore avente carica Q_0 e d.d.p. V_0 venga collegato ad R all'istante $t = 0$ chiudendo un interruttore. Cariche fluiscano (corrente i) attraverso R ed energia viene dissipata. La carica su ciascuna armatura (Q), la d.d.p. ai capi del condensatore e l'energia immagazzinata in esso decrescono nel tempo. È evidente che il condensatore nei riguardi di R funziona come un generatore di f.e.m. variabile e resistenza interna zero.

La *equazione del circuito* si scrive

$$(135) \quad v = Ri$$

essendo⁽⁴⁴⁾ v ed i funzioni di t . Si può porre

$$(136) \quad v = \frac{Q}{C}$$

e

$$(137) \quad -dQ = i dt \\ i = -\frac{dQ}{dt}.$$

Il segno meno si presenta perché con dQ indichiamo la variazione di carica sulle armature invece della carica che passa nel conduttore ($dq = -dQ$).

Dalle (135), (136), (137) si ottiene per Q la equazione differenziale

$$(138) \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}.$$

Tale equazione si può risolvere per separazione di variabili

$$(139) \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}.$$

$$(140) \quad \log Q = -\frac{1}{RC}t + \text{cost.}$$

⁽⁴³⁾ Le perturbazioni in un circuito elettrico si propagano con una velocità (c) finita. La approssimazione di quasi stazionarietà (cap. 7, par. 7.1) vale finché il tempo impiegato per la propagazione di una perturbazione nell'intero circuito sia trascurabile rispetto a quello richiesto perché la grandezza che rappresenta la perturbazione abbia una variazione apprezzabile. L'elevato valore di c (circa 300.000 km/s) rende molto frequenti i casi di circuiti in condizioni quasi stazionarie.

⁽⁴⁴⁾ In accordo con quanto detto al paragrafo 3.2, si usano lettere minuscole per indicare intensità di corrente e d.d.p. variabili con il tempo.

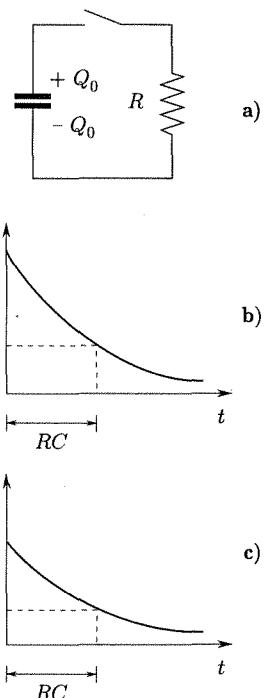


Fig. 3.55

Si ottiene, tenendo conto che $Q = Q_0$ per $t = 0$,

$$(141) \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

La costante di tempo è $\tau = RC$
 La carica (e la differenza di potenziale Q/C) decade con legge esponenziale (fig. 3.55b). La costante $\tau = RC$ ha le dimensioni di un tempo e caratterizza la rapidità della scarica: si osservi infatti che per $t = \tau$ la carica si è ridotta a

$$(142) \quad Q = \frac{Q_0}{e}.$$

La costante τ prende il nome di costante di tempo del circuito. La corrente di conduzione risulta, dalla (137),

$$(143) \quad i = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

e decade anche essa esponenzialmente con la stessa costante di tempo di Q (fig. 3.55c).

È opportuno sottolineare come l'energia che viene trasformata in calore nella resistenza R viene fornita dall'energia potenziale elettrostatica conservata nel condensatore e che durante il processo diminuisce.

Ricordiamo che la espressione per la corrente totale in una sezione qualsiasi del circuito di figura 3.55a è data dalla (14)

$$\mathbf{c} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Tale corrente si riduce a quella di conduzione nel tratto conduttore ed a quella di spostamento tra le armature del condensatore.

Per ottenere la energia (fornita od assorbita) nelle due parti del circuito consideriamole separatamente. La energia assorbita nell'intervallo di tempo dt nel conduttore sarà, essendo v la d.d.p. agli estremi ed S la sezione del conduttore:

$$(144) \quad cSv dt = jSv dt = iv dt = Ri^2 dt.$$

Per il condensatore, indicando con A l'area di una sezione parallela alle armature, si ha per la energia messa in gioco nell'intervallo dt

$$(145) \quad cAv dt = \frac{\partial(AD)}{\partial t} v dt = \frac{\partial Q}{\partial t} v dt = -iv dt.$$

I valori delle due energie sono uguali, ma mentre quella dissipata per effetto Joule è assorbita (positiva) quella nell'interno del condensatore è sviluppata (negativa) giacché corrente e d.d.p. hanno versi opposti.

Per completare l'esempio consideriamo il caso della carica di un condensatore (C) da parte di una sorgente di f.e.m. (f, r) attraverso una resistenza R (fig. 3.56). Si consideri perciò la espressione della seconda legge di Kirchhoff applicata ai valori istantanei delle grandezze. Si osservi che man mano che la carica procede il condensatore si comporta come una sede di f.e.m. (avente $f' = v, r = 0$) diretta in verso opposto a f giacché le cariche accumulate sulle armature tendono a spingere le cariche in verso opposto a quello della corrente prodotta da f . Si ha quindi per l'equazione del circuito

$$(146) \quad f - v = (R + r)i.$$

In questo caso

$$(147) \quad dQ = i dt$$

e

$$v = \frac{Q}{C}.$$

Si ha quindi

$$(148) \quad \frac{dQ}{dt}(R + r) + \frac{Q}{C} = f.$$

La soluzione di questa equazione è

$$(149) \quad Q = Cf(1 - e^{-t/(R+r)C})$$

La Q cresce esponenzialmente con la costante di tempo $\tau = R_{\text{tot}}C = (R + r)C$. Il valore finale è Cf . Il corrispondente valore di v è f . Per la corrente si ha

$$(150) \quad i = \frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R_{\text{tot}}} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

I grafici di Q , v ed i sono dati in figura 3.56.

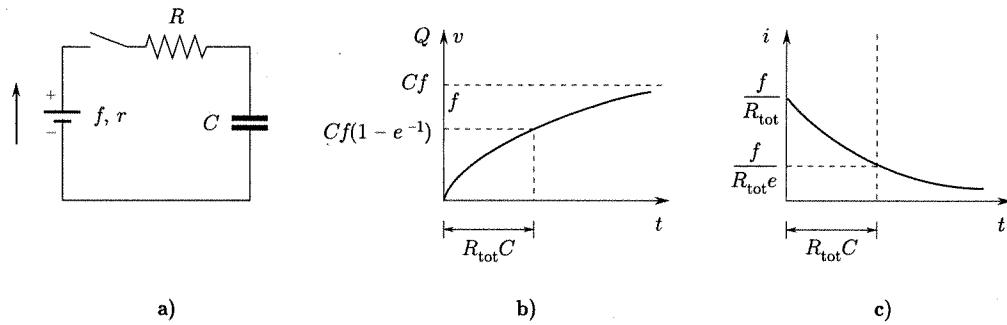


Fig. 3.56

IL CAMPO MAGNETICO DI CORRENTI STAZIONARIE

- ✓ Cariche in moto esercitano fra loro azioni che possono essere descritte tramite un vettore, *induzione magnetica B*, da considerarsi accanto al campo elettrico e che con questo è intimamente legato, come mostrato dalla teoria della relatività.
- ✓ Nel presente capitolo viene considerato il **campo magnetico** nel vuoto creato da cariche in moto a velocità costante, quali quelle che costituiscono una corrente stazionaria.
Il campo creato da una corrente e l'azione che questo campo esercita su cariche in moto costituenti una corrente sono sintetizzate dalla *prima e seconda formula di Laplace*, rispettivamente. La forza che il campo esercita su una singola carica in moto prende il nome di **forza di Lorentz**.
- L'azione di tipo magnetico che si esercita fra correnti ha permesso di introdurre una definizione particolarmente conveniente dell'**ampere**, l'unità di corrente.
Si riconosce poi che non esistono sorgenti puntiformi di campo magnetico. La sorgente più semplice può essere descritta in analogia al dipolo elettrico e prende il nome di **dipolo magnetico**.
- ✓ Le proprietà fondamentali dell'induzione magnetica nel vuoto creata da correnti stazionarie, e cioè il fatto che il campo ha sempre **linee di flusso chiuse** e il **teorema di Ampere della circuitazione** sono descritte dalla *terza e quarta equazione di Maxwell*.
- È possibile infine fare delle considerazioni che permettono l'introduzione di un **vettore potenziale magnetico** che torna utile in molte considerazioni fra cui quelle legate all'espressione dell'energia magnetica e ai coefficienti di auto e mutua induzione.

■ Il campo magnetico di correnti stazionarie

4.

■ 4.1. INTRODUZIONE

Il nome di magnetismo dato ad una particolare categoria di processi fisici deriva da quello (Magnesia) di una città dell'Asia Minore nelle cui vicinanze fu trovato un minerale ferroso (magnetite) che presenta una particolare proprietà, quella di attrarre piccoli pezzi di ferro. Fu successivamente mostrato che un aghetto di un tale materiale sospeso per il centro di massa ed isolato nello spazio (lontano da altri corpi che potrebbero esercitare altre azioni magnetiche su di esso) risente l'azione di una coppia che tende a dirigere il suo asse in una direzione molto prossima a quella del meridiano terrestre.

Per molto tempo lo studio del magnetismo è partito dall'esame delle azioni fra corpi (magneti) che si comportano come la magnetite naturale. Nel 1819, tuttavia, alcune esperienze fatte da Oersted portarono a riconoscere che azioni magnetiche si esercitano anche fra magneti permanenti e correnti, fra correnti, ed in genere fra cariche in moto. Ampère nel 1820 avanzò l'ipotesi, mostratasi fondamentalmente corretta, che anche il comportamento dei magneti permanenti fosse da ricondursi alle azioni fra cariche in moto, essendo queste cariche quelle delle particelle che costituiscono gli atomi.

La conclusione che le azioni magnetiche sono azioni fra cariche in moto è tutt'oggi fondamentale e la teoria della relatività può mostrare la necessità della loro considerazione accanto alle forze coulombiane come metodo di rappresentazione generale delle azioni elettromagnetiche.

Appare perciò più semplice e logico trattare il magnetismo in analogia all'elettrostatica, cominciando dal considerare le azioni fra cariche che si muovono *nel vuoto* a velocità costante e vedendo in seguito quali ulteriori specificazioni debbano essere introdotte nel caso che materia sia presente. Nella descrizione dei fenomeni magnetici in presenza della materia si vedrà come i sistemi materiali debbano essere distinti in varie categorie alcune delle quali hanno la proprietà, se esposte ad un campo magnetico esterno, di conservare uno stato di magnetizzazione quando sono estratte dal campo stesso. Fra queste sostanze sono comprese quelle (come la magnetite)⁽¹⁾ che consentono di realizzare i magneti permanenti.

Magnetismo

⁽¹⁾ Il campo magnetico polarizzante è per il minerale naturale un particolare campo esistente attorno alla Terra: il campo magnetico terrestre (cap. 5, par. 5.20).

Nel presente capitolo noi tratteremo delle azioni magnetiche fra cariche in moto a velocità costante: un caso particolare importante è quello delle azioni fra correnti continue. La trattazione sarà qui svolta per il caso del vuoto e sarà in seguito (cap. 5) estesa al caso di presenza di materia.

I passi fondamentali sono l'introduzione del vettore \mathbf{B}_0 che rappresenta il campo magnetico e prende il nome di induzione magnetica, della forza (di Lorentz) che si esercita fra una carica in moto e un campo magnetico e delle due formule di Laplace che permettono di ricavare: la prima l'induzione magnetica creata da una data distribuzione di correnti e la seconda la forza che si esercita su un filo percorso da una corrente in presenza di un campo magnetico. L'uso combinato di queste due formule permetterà di calcolare le azioni che si esercitano fra due circuiti percorsi da correnti e porterà alla definizione elettrodinamica dell'unità di corrente elettrica (ampère) che viene usata nel Sistema Internazionale di unità di misura.

Infine il teorema di equivalenza di Ampère mostra l'eguaglianza fra una spira percorsa da corrente e un piccolo magnete (dipolo magnetico) per quanto riguarda le azioni meccaniche e il campo prodotto da questi due sistemi apparentemente così diversi, dando quindi piena giustificazione all'intuizione di Ampère che un campo magnetico è in ultima analisi prodotto sempre da cariche in moto.

Le proprietà fondamentali del vettore \mathbf{B}_0 , così come abbiamo già visto per il vettore \mathbf{E} , sono infine matematicamente espresse da due relazioni integrali (una per il flusso e una per la circuitazione) che danno luogo alle ultime due equazioni di Maxwell, limitate per ora ai casi stazionari.

4.2. AZIONI MAGNETICHE. VETTORE INDUZIONE MAGNETICA

Allo scopo di dare concretezza alle nostre considerazioni, vogliamo accennare ad alcune semplici esperienze che mostrano chiaramente le azioni magnetiche. Si abbiano due lunghi fili conduttori (1 e 2) paralleli (fig. 4.1). Il primo filo possa essere collegato ad un generatore ed essere percorso da una corrente stazionaria (⁽²⁾) (i_1); il secondo sia inizialmente isolato.

È possibile vedere dando alcune cariche elettriche al secondo conduttore (⁽³⁾), che nessuna nuova azione si esercita su di esse e sul conduttore stesso quando nel primo viene fatta passare la corrente i_1 . Questa corrente è formata da cariche (elettroni) in moto e si può concludere che cariche in moto non esercitano alcuna azione di nuovo tipo su cariche ferme.

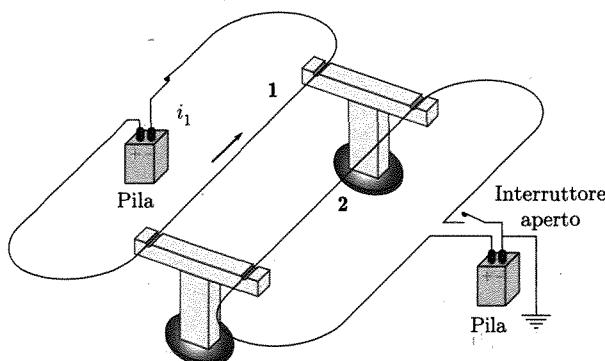


Fig. 4.1

⁽²⁾ Indichiamo con i (anziché con I come nel cap. 3), l'intensità della corrente giacché la trattazione del presente capitolo, pur essendo rigorosamente valida per correnti stazionarie, viene usata anche nel caso di fenomeni lentamente variabili nel tempo, come si vedrà meglio in seguito.

⁽³⁾ Per esempio collegandolo ad un polo di una batteria come in figura (interruttore aperto).

Se ora si fa passare una corrente stazionaria (i_2) anche nel secondo conduttore (fig. 4.2) si trova che i due fili si avvicinano o si allontanano secondo i versi di i_1 e i_2 : in particolare una forza attrattiva si esercita fra i conduttori se le correnti i_1 ed i_2 scorrono nello stesso verso; la forza è invece repulsiva se i versi sono discordi.

Come ulteriore esperienza si consideri un sottile fascetto elettronico quale quello che si ha nei cosiddetti tubi a raggi catodici. In un tale dispositivo (fig. 4.3) gli elettroni emessi da un filamento incandescente (effetto termoelettronico) vengono riuniti in un sottile fascetto e portati ad avere la medesima velocità da un complesso di elettrodi che assieme al filamento costituiscono il cosiddetto cannone elettronico. Il sottile fascetto di elettroni isoenergetici entra in uno spazio vuoto piuttosto lungo e finisce con l'urare uno schermo ricoperto di sostanze elettrofluorescenti (fosfori), che, colpiti dagli elettroni, divengono luminose; sullo schermo pertanto si può osservare una piccola traccia luminosa che individua il posto ove la traiettoria degli elettroni ha termine. Nel caso che nessuna azione⁽⁴⁾ si eserciti sugli elettroni nel volo fra l'uscita del cannone e lo schermo, la macchietta si trova sull'asse del cannone stesso (e del tubo).

Si avvicini ora un conduttore rettilineo e parallelo all'asse del tubo il quale sia percorso da una corrente: si osserva che la macchietta si sposta avvicinandosi, od allontanandosi, dal filo conduttore secondo il verso della corrente; si avvicina, se il verso della corrente è opposto a quellò del moto degli elettroni del fascetto. Ciò indica che un'azione magnetica si esercita su ciascun elettrone del fascetto obbligandolo a variare la sua traiettoria nel volo verso lo schermo.

Le azioni magnetiche fra cariche in moto appaiono come azioni a distanza e la loro analisi può essere utilmente fatta, come nel caso delle forze coulombiane, pensando che una o più cariche in moto⁽⁵⁾ creino nello spazio un campo che noi chiameremo magnetico che si esplica mediante una forza che agisce su una nuova carica puntiforme q qualora questa venga a passare con una velocità \mathbf{v} attraverso un punto qualsiasi della regione in oggetto. L'esperienza mostra che questa azione è sempre proporzionale a q .

Il complesso delle esperienze che è possibile eseguire può essere ricondotto al seguente schema. Si consideri una regione dello spazio ed in un punto qualsiasi (P) si ponga una carica puntiforme q , ferma. Se la carica risente una azione (\mathbf{F}_E), nel punto esiste un campo elettrico la cui intensità \mathbf{E}_0 vale, come ben sappiamo,

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{F}_E}{q}.$$

Si faccia ora passare la carica q attraverso P con una velocità \mathbf{v} e si ripeta la esperienza per diversi valori di \mathbf{v} . Se accade che accanto alla forza elettrostatica sia, in genere, presente un'altra azione, noi chiamiamo questa seconda azione *magnetica* e diciamo che nel punto P esiste un campo

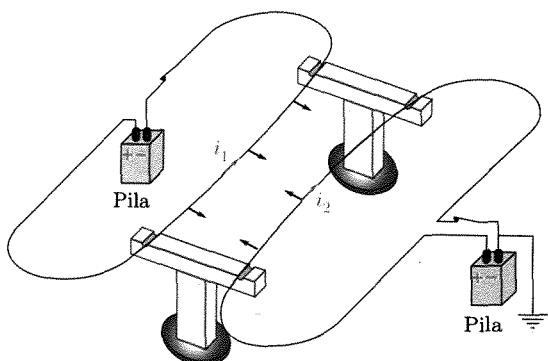


Fig. 4.2
Tubo a raggi catodici

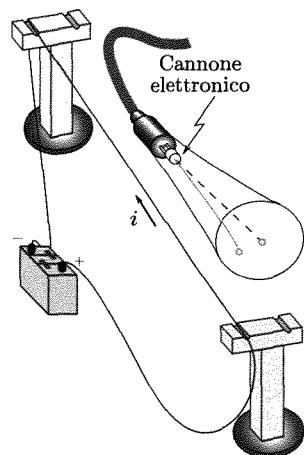


Fig. 4.3

Campo magnetico

⁽⁴⁾ Si può trascurare la forza gravitazionale.

⁽⁵⁾ Rispetto al sistema di riferimento solidale con l'osservatore.

magnetico. Il complesso delle esperienze conduce per la forza totale alla espressione

$$(1) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0).$$

Il vettore \mathbf{B}_0 rappresenta il campo magnetico⁽⁶⁾, così come \mathbf{E}_0 rappresenta il campo elettrico. Si noti bene che i due vettori \mathbf{B}_0 ed \mathbf{E}_0 , pur entrando ciascuno in uno dei due termini dell'espressione della forza su una carica elettrica, hanno dimensioni ben diverse: si vede tuttavia che \mathbf{B}_0 ha per il campo magnetico funzioni analoghe a quelle di \mathbf{E}_0 per il campo elettrico.

Al vettore \mathbf{B}_0 sarebbe quindi appropriato il nome di *intensità del campo magnetico* ma tale nome è stato assegnato in tempi passati ad un altro vettore che incontreremo in seguito (\mathbf{H}_0) e viene, per ragioni essenzialmente storiche, mantenuto ad esso⁽⁷⁾. Al vettore \mathbf{B}_0 è dato il nome improprio di *induzione magnetica*⁽⁸⁾.

Dalla (1) si vede che la forza magnetica è proporzionale al prodotto vettoriale di \mathbf{v} e \mathbf{B}_0 ed è quindi normale ad entrambi questi vettori.

A norma della (1) le dimensioni di \mathbf{B}_0 sono quelle di una forza divisa per una carica e per una velocità, e, quindi, nel sistema SI:

$$[B_0] = \frac{[\text{forza}]}{[\text{carica}][\text{velocità}]} = \frac{[LMT^{-2}]}{[AT][LT^{-1}]} = [MT^{-2}A^{-1}]$$

esse sono anche quelle di una d.d.p. moltiplicata per un tempo e divisa per un'area

$$\frac{[\text{d.d.p.}][\text{tempo}]}{[\text{area}]} = \frac{[L^2MT^{-3}A^{-1}][T]}{[L^2]} = [MT^{-2}A^{-1}].$$

B_0 è l'*induzione magnetica*

La forza magnetica è
 $F = qv \times B_0$

B_0 si misura in Wb/m^2
o tesla

L'unità in cui si misura B_0 è quindi il volt·sec/ m^2 e poiché al volt·sec è stato assegnato il nome weber⁽⁹⁾ l'unità di B_0 è normalmente indicata weber/ m^2 (simbolo Wb/m^2)⁽¹⁰⁾. Nel Sistema Internazionale si è deciso di usare il tesla (T): un tesla = 1 Wb/m^2 .

⁽⁶⁾ Vedremo in seguito metodi per la misurazione di \mathbf{B}_0 più semplici di quello che si può dedurre dalle considerazioni ora svolte per introdurre il concetto di \mathbf{B}_0 .

⁽⁷⁾ Nel passato, e talvolta ancora oggi, la trattazione del campo magnetico veniva fatta prendendo come fondamentale il vettore \mathbf{H}_0 (invece di \mathbf{B}_0) e partendo dall'analisi delle azioni fra magneti permanenti (aghi magnetici) invece che dall'analisi delle azioni fra cariche in moto, che allo stato attuale della ricerca fisica appaiono molto più fondamentali. In una tale descrizione occorre introdurre concetti particolarmente delicati e di validità limitata (poli, masse magnetiche) ed immaginare esperienze che allo stato attuale delle nostre conoscenze non sono possibili.

In una trattazione che prende \mathbf{H} come vettore fondamentale per la descrizione del campo magnetico, \mathbf{H} assumerebbe una funzione analoga a \mathbf{E} e \mathbf{B} sarebbe analogo a \mathbf{D} . Avremo in seguito qualche occasione per indicare qualche caratteristica di una tale descrizione; noi tuttavia seguiremo la via più moderna e logica che parte dall'analisi delle azioni fra cariche in moto e che ha \mathbf{B} come vettore fondamentale.

⁽⁸⁾ Per quanto riguarda l'origine del nome: 1) nelle trattazioni tradizionali che partono dal vettore \mathbf{H} come fondamentale e in cui si considerano le masse magnetiche, il vettore \mathbf{B} consente di esprimere la densità superficiale delle masse magnetiche indotte in un mezzo materiale (come avviene per il vettore \mathbf{D} e le cariche indotte in elettrostatica); 2) il vettore \mathbf{B} serve a spiegare i fenomeni di induzione elettromagnetica.

⁽⁹⁾ In onore del fisico tedesco Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

⁽¹⁰⁾ Avvertiamo subito che si tratta di una unità di misura piuttosto grande; i campi magnetici intensi che si riesce comunemente a creare hanno induzioni di qualche Wb/m^2 . Ciò giustifica, almeno in parte, l'uso che talvolta si fa della corrispondente unità del sistema CGS e.m. (appendice I) il gauss: 1 $\text{Wb}/\text{m}^2 = 10.000$ gauss.

Per quanto si è detto lo studio delle azioni magnetiche fra cariche in moto si divide in due parti:

1. quella tendente a determinare punto per punto il valore di \mathbf{B}_0 creato nello spazio da una distribuzione di cariche in moto;
2. quella tendente a determinare l'azione che il campo \mathbf{B}_0 esercita su un particolare sistema di cariche in moto.

Noi considereremo dapprima questa seconda parte e tratteremo la prima in seguito (par. 4.6). Ricordiamo che per il momento noi supponiamo che il mezzo sia il vuoto.

■ 4.3. FORZE MAGNETICHE SU CARICHE PUNTIFORMI IN MOTO

Nel presente paragrafo e nel successivo vogliamo considerare con qualche dettaglio le forze magnetiche che si esercitano su cariche puntiformi o su particolari distribuzioni di cariche in moto.

Una carica q che passa con velocità \mathbf{v} attraverso un punto in cui la induzione magnetica ha il valore \mathbf{B}_0 , risente l'azione di una forza (forza di Lorentz)

$$(2) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 .$$

La figura 4.4 indica la direzione ed il verso di \mathbf{F} nel caso in cui q sia positiva. Si osservi che essendo \mathbf{F} normale a \mathbf{v} la forza magnetica *non compie lavoro* ed il suo effetto è quello di introdurre una accelerazione normale nel moto di q .

Particolarmenete interessante è il caso in cui la carica q venga a muoversi in una regione ove il campo magnetico è uniforme. (Questo caso fu già considerato al vol. I, cap. 2, par. 2.16.)

Supponiamo di avere una regione dello spazio ove \mathbf{B}_0 è costante. Esso sia per esempio (fig. 4.5a) diretto normalmente al foglio e verso il suo interno. Una particella di massa m e carica positiva q venga a trovarsi all'istante iniziale nel punto O con velocità \mathbf{v} normale a \mathbf{B}_0 . L'accelerazione presente è solo quella normale dovuta alla forza magnetica

$$(3) \quad qvB_0 = \frac{mv^2}{R},$$

essendo R il raggio di curvatura della traiettoria: il moto che ne conseguue è circolare uniforme. Il raggio dell'orbita è

$$(4) \quad R = \frac{mv}{qB_0};$$

la velocità angolare è

$$(5) \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB_0}{m} .$$

Nel caso qui considerato in cui q è positiva la rotazione avviene intorno a \mathbf{B}_0 in verso antiorario come indicato in figura 4.5a; se q fosse negativa la rotazione avverrebbe in verso orario (fig. 4.5b).

Forza di Lorentz

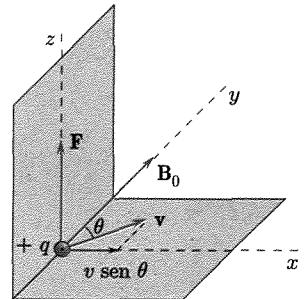


Fig. 4.4

Moto di una carica
in un campo uniforme

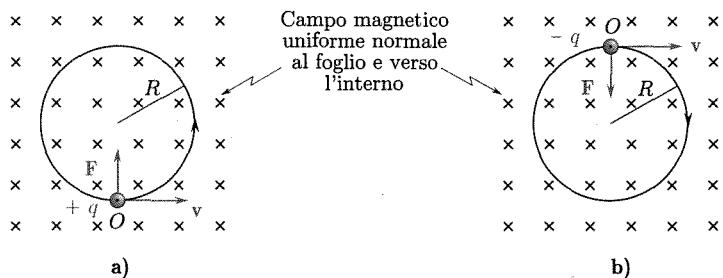


Fig. 4.5

Si osservi che mentre il raggio dell'orbita è proporzionale alla velocità della particella, la velocità angolare non dipende da v . Se quindi si hanno nello stesso campo \mathbf{B}_0 particelle di uguale massa dotate di velocità diverse, ma sempre perpendicolari a \mathbf{B}_0 , si osserva che le particelle più veloci si muovono su orbite più grandi di quelle percorse dalle particelle più lente; tuttavia il tempo impiegato a descrivere l'orbita circolare è sempre lo stesso.

È questa una circostanza molto importante per varie applicazioni, come presto vedremo.

Nel caso in cui la carica q si trovi all'istante $t = 0$ nel punto O con una velocità \mathbf{v} che non sia diretta normalmente a \mathbf{B}_0 , il moto risultante sarà in genere un moto elicoidale composto da un moto circolare uniforme con velocità pari alla componente di \mathbf{v} normale a \mathbf{B}_0 e da un moto rettilineo uniforme lungo \mathbf{B}_0 (con velocità pari alla componente di \mathbf{v} parallela a \mathbf{B}_0).

Vogliamo ora accennare brevemente ad alcune importanti utilizzazioni delle circostanze ora esaminate.

a. Determinazione del segno di una carica

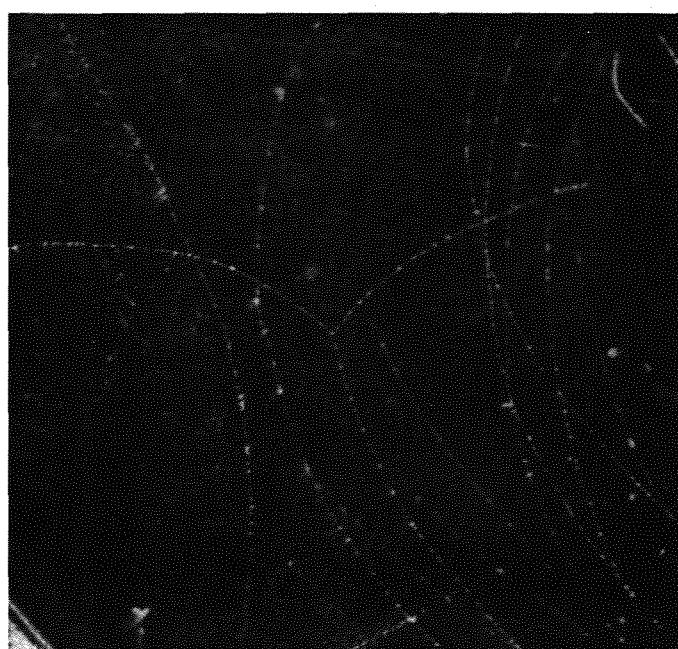
Il segno della carica di particelle, quali per esempio particelle elementari che si manifestano a seguito di reazioni nucleari, può essere determinato facendole passare in un campo magnetico uniforme e vedendo la conseguente inflessione della traiettoria.

La figura 4.6a mostra il fotogramma ottenuto (O. Ritter *et al.*) con una camera a bolle a metano e riferentesi all'urto di un elettrone positivo (positrone) avente l'energia di 250 keV con un elettrone: come si vede le curvature della traiettoria del positrone e di quella dell'elettrone sono opposte; l'induzione magnetica è di $0,03 \text{ Wb/m}^2$. La figura 4.6b (W.A. Fowler *et al.*) mostra invece il fotogramma di una camera di Wilson nel quale si osserva la creazione in aria di una coppia elettrone-positrone da un raggio γ di 16,1 MeV. Le energie, calcolate dai raggi di curvatura⁽¹¹⁾, sono di 9,6 MeV per l'elettrone negativo e di 5,6 MeV per il positrone; la induzione magnetica è di $0,162 \text{ Wb/m}^2$. Sono visibili anche le tracce di molti elettroni di bassa energia (lenti).

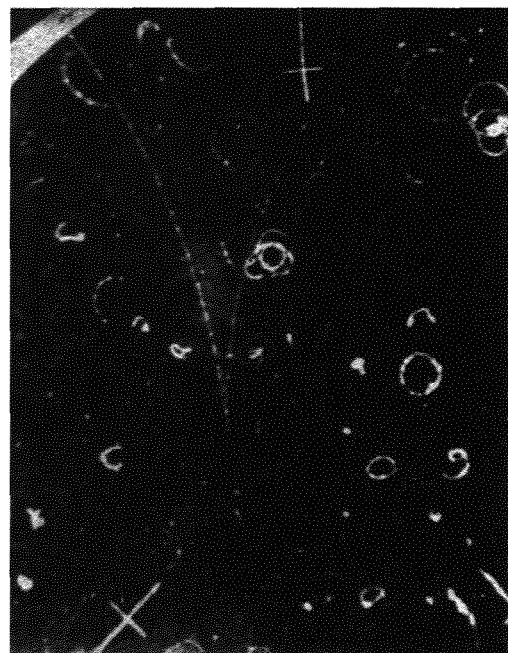
b. Determinazione del rapporto e/m

Nel 1897 J.J. Thomson riuscì a determinare il rapporto carica/massa per gli elettroni sottoponendoli alla azione combinata di un campo magnetico e di un campo elettrico. L'esperienza è stata successivamente ripetuta in molte versioni diverse, che lasciano tuttavia inalterata la essenza dell'esperienza primitiva.

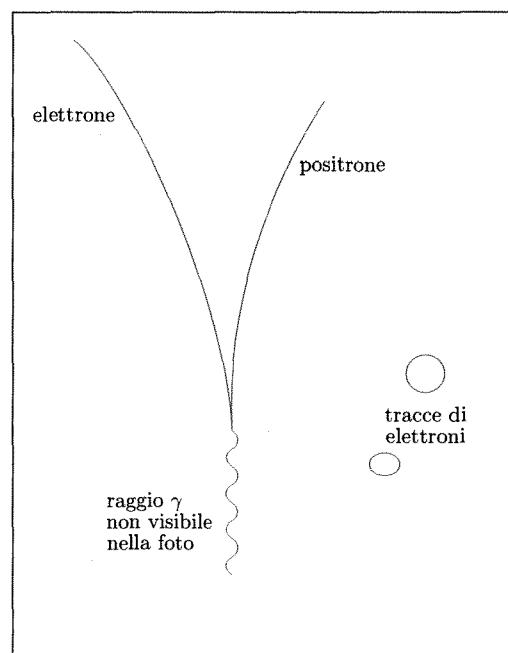
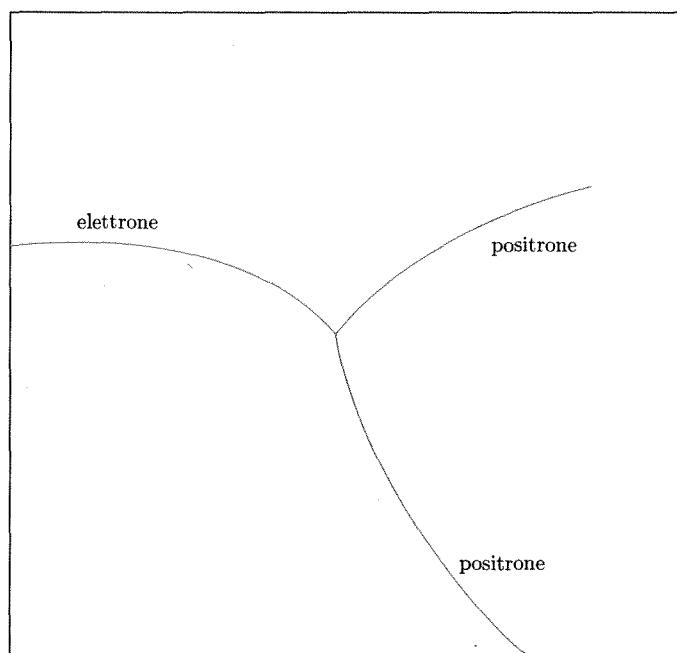
⁽¹¹⁾ Le traiettorie nello spazio vanno individuate con fotografie contemporanee prese secondo direzioni diverse. Il calcolo va fatto tenendo conto delle correzioni relativistiche.



a)



b)

Fig. 4.6 a) Urto positrone-elettrone (O. Ritter *et al.*).b) Creazione di una coppia positrone-elettrone in aria (W.A. Fowler *et al.*).

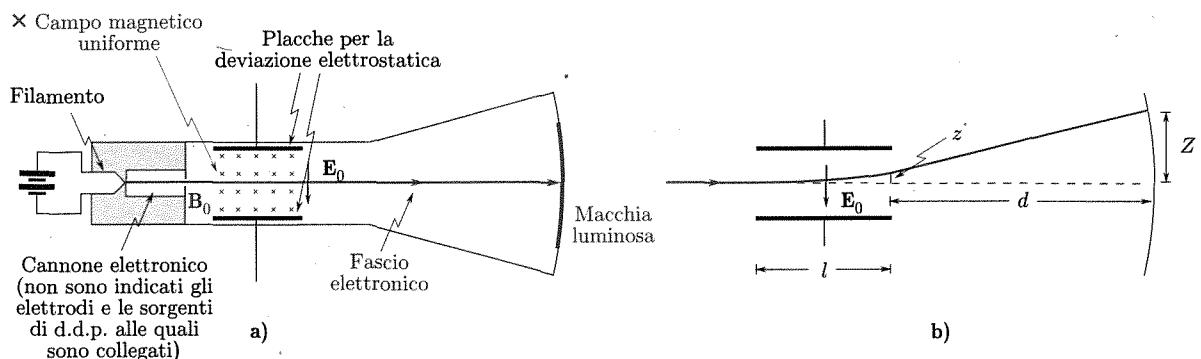


Fig. 4.7

La figura 4.7 fornisce lo schema di una versione moderna. Si abbia un fascio di elettroni isoenergetici (velocità v) uscenti da un cannone elettronico: tale fascio si muove in un recipiente evacuato e, prima di giungere sullo schermo, passa attraverso una regione ove può essere sottoposto all'azione combinata di un campo magnetico uniforme (B_0) e di un campo elettrico uniforme (E_0). Il campo magnetico è creato da correnti esterne al tubo; il campo elettrico è ottenuto applicando una d.d.p. fra due piastre piane e parallele che comprendono lo spazio in cui si desidera agire sul fascio elettronico. La forza agente sul singolo elettrone è:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0).$$

Con i versi dei campi indicati in figura, il campo elettrico per suo conto determinerebbe uno spostamento del fascetto verticalmente e verso l'alto, mentre il campo magnetico produrrebbe uno spostamento in verso opposto. Aggiustando i valori di E_0 e B_0 si può fare in modo che la posizione del fascetto, rivelato dalla macchia luminosa sullo schermo, non sia alterata per l'azione contemporanea dei due campi. In tali condizioni

$$(6) \quad eE_0 = evB_0.$$

Questa prima parte dell'esperienza consente di determinare il valore di v . La seconda parte della esperienza consiste nell'escludere uno dei campi E_0 o B_0 . Supponiamo di escludere B_0 . In tal caso la macchia luminosa si sposta verticalmente sullo schermo di una quantità Z . Sulla figura 4.7b è indicata la traiettoria di un elettrone. Per l'azione del campo elettrico la traiettoria è, fra gli elettrodi piani, una parabola (vol. I, cap. 2, par. 2.16) al di fuori di tale spazio il moto è rettilineo uniforme.

Dal valore di Z e dalla distanza (d) dell'orlo delle piastre deviatici dallo schermo è possibile dedurre lo spostamento verticale (z) fra l'ingresso e l'uscita del singolo elettrone nel campo elettrico, cioè nel tratto di traiettoria parabolica. Tale valore z , se si indica con l la lunghezza delle piastre nella direzione dell'asse del tubo⁽¹²⁾, è dato da

$$(7) \quad z = \frac{1}{2} \frac{eE_0 l^2}{mv^2}.$$

Si ha, quindi, usando la (6):

$$(8) \quad \frac{e}{m} = \frac{2Z E_0}{B_0^2 l^2}.$$

Il valore trovato da Thomson per questo rapporto ($1,7 \cdot 10^{11}$ coulomb/kg) è molto vicino alla migliore determinazione oggi disponibile

$$(9) \quad \frac{e}{m} = 1,75890 \cdot 10^{11} \frac{\text{coulomb}}{\text{kg}}.$$

⁽¹²⁾ E quindi $t = l/v$ è il tempo impiegato per attraversare lo spazio fra le placche deviatici.

c. Spettrometro di massa

Lo spettrometro di massa è uno strumento che consente la determinazione delle masse di ioni positivi. Esso permette di raggiungere grandi precisioni specie in misure relative, cioè quando si vogliono determinare piccole differenze di massa di atomi che si trovano riuniti a formare un sistema: questo è il caso di isotopi dello stesso elemento, di atomi cioè che differiscono esclusivamente per la massa del nucleo a seguito del diverso numero di neutroni presenti⁽¹³⁾.

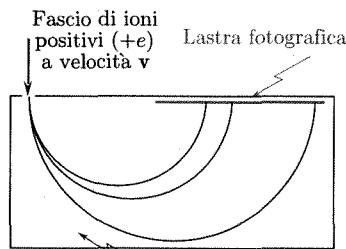
Negli spettrometri di massa l'insieme di atomi da esaminare viene trattato in maniera opportuna prima di entrare nella parte caratteristica dell'apparecchio ove, come vedremo, esiste un campo magnetico. Gli atomi devono innanzitutto essere trasformati in ioni di carica nota (supponiamo per esempio ioni monovalenti, aventi cioè carica netta $+e$) e portati a velocità determinata. Quest'ultima condizione si ottiene mediante campi elettrici acceleratori e mediante il passaggio attraverso filtri che eliminano le particelle a velocità diversa da quella prescelta⁽¹⁴⁾.

Il fascio parallelo di ioni positivi a ben determinata velocità (v) viene ora introdotto in un campo magnetico uniforme (B_0) normale a v (fig. 4.8a). La traiettoria di ciascun ione diviene circolare con raggio

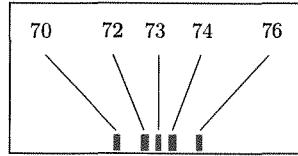
$$(10) \quad R = \frac{mv}{eB_0}.$$

La misurazione di R consente di determinare m se i valori delle altre grandezze sono note. Il metodo è, come si è detto, particolarmente preciso per misure relative; se nel fascetto vi sono ioni di diversa massa m_1, m_2, m_3 , si ha

$$(11) \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad \frac{R_1}{R_3} = \frac{m_1}{m_3} \dots$$



a) Regione con B_0 uniforme e normale al foglio



b) Spettro di massa del Ge (K.T. Bainbridge)

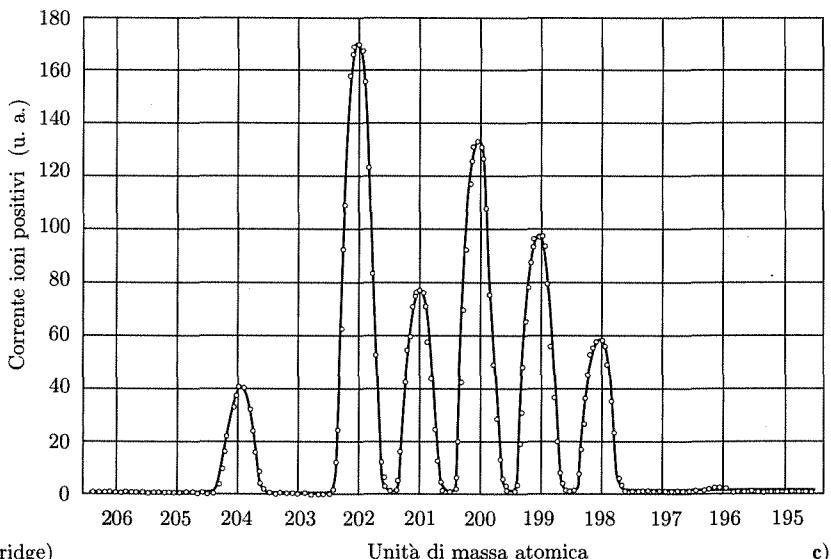


Fig. 4.8

⁽¹³⁾ Gli isotopi di uno stesso elemento non sono distinguibili con metodi chimici perché avendo la stessa struttura elettronica, posseggono le medesime proprietà chimiche.

⁽¹⁴⁾ Un filtro di velocità può ottersi facendo passare il fascio parallelo di ioni attraverso una regione in cui agiscono un campo elettrico (E_0) ed un campo magnetico (B_0) normali fra loro ed al fascio. In maniera analoga a ciò che si è visto descrivendo l'esperienza di Thomson (punto b), la traiettoria resta immutata solo per quegli ioni che hanno la velocità v che soddisfa alla condizione $eE_0 = evB_0$. Gli altri vengono deflessi e possono essere eliminati.

La conoscenza di una delle masse (m_1) consente allora di determinare con precisione le altre (m_2, m_3).

La determinazione sperimentale dei valori di R si può effettuare ponendo una lastra fotografica su cui incidono gli ioni dopo che hanno descritto una mezza circonferenza (fig. 4.8a): l'emulsione fotografica è sensibilizzata da questi urti. La figura 4.8b (K.T. Bainbridge) mostra uno spettro di massa del Ge: sono evidenti le tracce lasciate dagli isotopi le cui masse sono valutate in unità di massa atomica. Per la determinazione di R gli apparecchi più recenti usano un rivelatore elettrico di ioni con il vantaggio di potere amplificare il segnale del rivelatore con metodi elettronici: il rivelatore viene spostato lentamente. La figura 4.8c rappresenta lo spettrogramma degli isotopi del mercurio (A.O. Nier).

d. Magnetron

Si consideri una struttura come quella in figura 4.9a. Un filamento assiale opportunamente scaldato emette elettroni in uno spazio limitato da un conduttore cilindrico coassiale. Lo spazio è vuoto ed un campo elettrico radiale (E_0) attira gli elettroni verso il cilindro. Si applichi ora (fig. 4.9b) un campo magnetico B_0 parallelo al filamento (ed all'asse del dispositivo). Le traiettorie degli elettroni si trasformano da segmenti rettilinei diretti come i raggi delle sezioni trasversali del dispositivo in segmenti circolari. Variando il valore di B_0 si trova che se esso è maggiore di un certo valore gli elettroni non raggiungono l'anodo e tornano verso il filamento: in tal caso non si ha corrente attraverso l'anodo. Un dispositivo di questo genere opportunamente tarato può essere usato per la misura di B_0 . Nel caso dei magnetron, dispositivi per la generazione di oscillazioni elettromagnetiche di frequenza molto elevata, l'anodo presenta una configurazione come quella in figura 4.9c; il cilindro presenta periodicamente aperture cui sono collegate cavità risonanti: se si aggiustano i campi elettrico (E_0) e magnetico (B_0) in modo che gli elettroni costituiscano fasci che urtino all'incirca tangenzialmente gli orli delle cavità, si ottiene che il campo elettromagnetico nelle cavità entra in oscillazione sulle frequenze caratteristiche di risonanza delle cavità stesse.

In tal modo l'energia cinetica del fascetto di elettroni viene trasformata in energia di oscillazioni elettromagnetiche di frequenza elevata (onde centimetriche). L'eccitazione elettromagnetica delle cavità da parte dei fascetti elettronici e lo stabilirsi di onde stazionarie in esse, è perfettamente analoga alla eccitazione di onde elastiche in canne d'organo da parte di getti d'aria (vol. I, cap. 10, par. 10.6).

e. Lenti magnetiche

Un campo magnetico è a volte usato per far sì che elettroni che emergono da una sorgente muovendosi in direzioni leggermente divergenti, vengano deviati in modo da passare tutti per un medesimo punto: il dispositivo prende il nome di *lente magnetica*. La figura 4.10a mostra lo schema di principio di una lente magnetica. Tra i due piani tratteggiati esiste un campo magnetico uniforme; in figura è indicata la traiettoria di un elettrone che esce dalla sorgente O con una velocità che forma un piccolo angolo con l'asse del dispositivo e giace nel piano del disegno (le frecce nere indicano per le varie x la coordinata normale a x). Quando l'elettrone entra nella regione del campo magnetico per effetto di questo la traiettoria viene incurvata normalmente a B_0 e v e diviene del tipo a spirale.

I parametri (valore di B_0 , estensione assiale del campo) sono aggiustati in modo che la traiettoria dell'elettrone dopo che ha superato la regione del campo magnetico si diriga verso l'asse del dispositivo e lo incontri nel punto I (immagine). La posizione di I (come la cosiddetta distanza focale, distanza dalla lente del punto di convergenza per un fascio di traiettorie inizialmente parallele all'asse) dipende in un dato dispositivo dal valore di B_0 e dalla velocità dell'elettrone. Se la sorgente invece di essere puntiforme è estesa e disposta in un piano perpendicolare all'asse del dispositivo (oggetto), l'immagine si trova (a parte aberrazioni) in un piano anche esso normale all'asse ed è rotata di un dato angolo rispetto all'oggetto. La figura 4.10b indica una semplice disposizione che realizza approssimativamente le condizioni di figura 4.10a.

Alle volte, come per esempio nei microscopi elettronici occorre realizzare lenti magnetiche aventi distanza focale molto piccola (fino ad 1 mm). Ciò viene ottenuto (fig. 4.10c) usando elettromagneti particolarmente studiati (fig. 4.10d) in modo da avere campi di induzione molto intensi in un volume (interferro) molto piccolo.

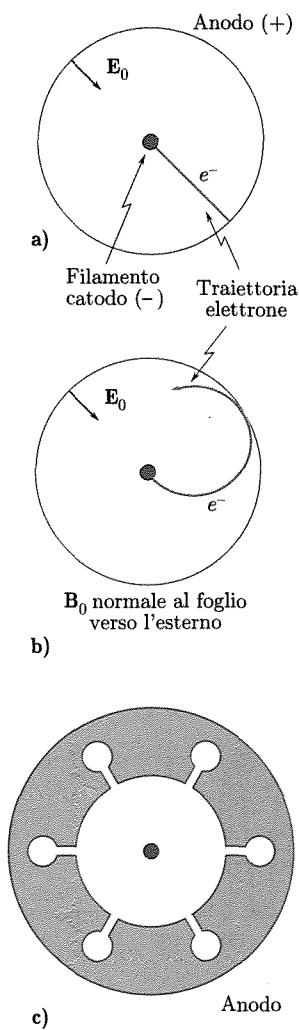


Fig. 4.9

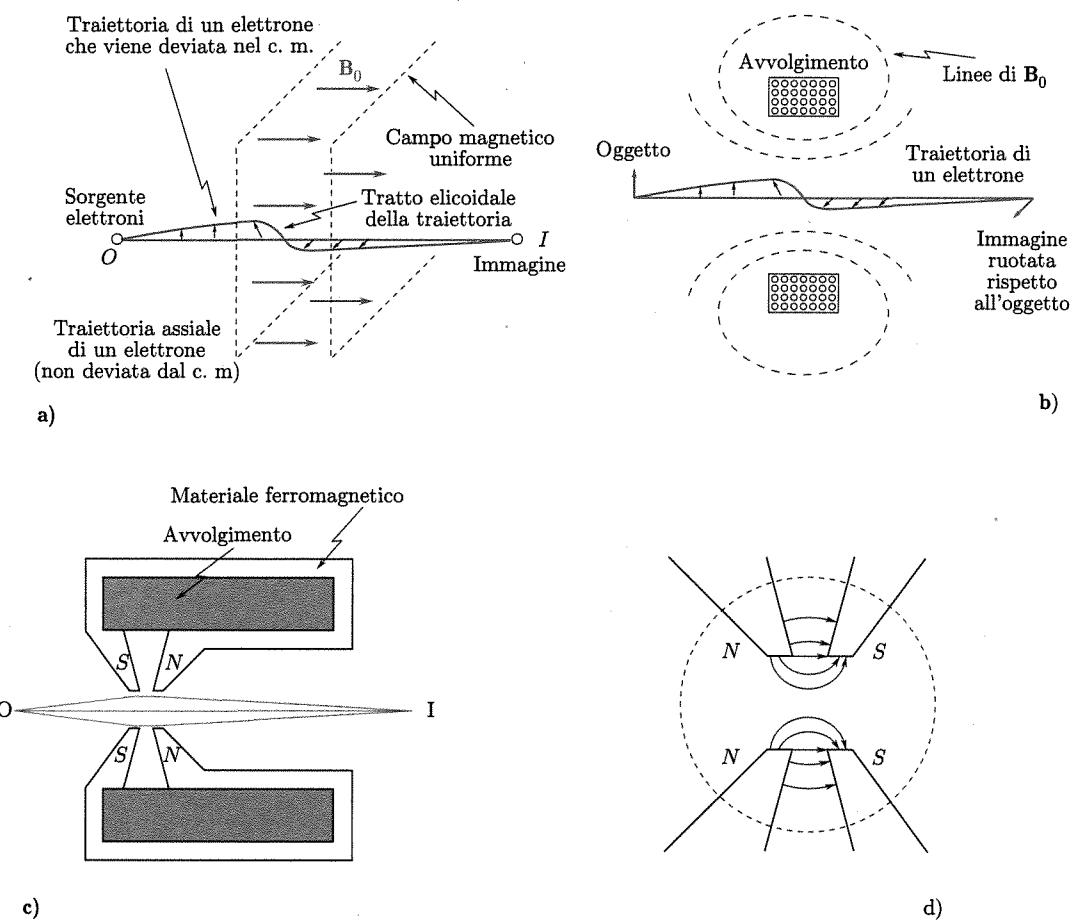


Fig. 4.10

f. Macchine acceleratrici di particelle tipo ciclotrone

Lo studio della fisica nucleare delle alte energie viene oggi essenzialmente fatto utilizzando macchine acceleratrici in cui particelle caricate (protoni, deuteroni⁽¹⁵⁾, elettroni) vengono portate ad elevatissime energie cinetiche prima di essere usate come proiettili contro nuclei. Lo studio degli effetti delle collisioni consente di avere indicazioni sulle caratteristiche delle forze nucleari e sulle particelle elementari.

La macchina più semplice è il ciclotrone: in essa un campo elettrico, di estensione piuttosto limitata, viene attraversato ripetutamente dalle particelle in questione in modo che ad ogni passaggio esse vengano accelerate mentre un campo magnetico, normale alla velocità delle particelle, viene usato per incurvare la traiettoria e riportare le particelle sotto l'azione del campo elettrico. Lo schema della macchina è indicato in figura 4.11. La parte più caratteristica di essa è costituita da una grossa e bassa scatola metallica divisa in due parti uguali a forma di "D"; queste due D sono leggermente separate fra loro e fra di esse è applicato il campo elettrico. Tale campo esiste solo nello spazio fra le due D, ed è nullo nell'interno delle due mezze scatole: il campo elettrico inoltre varia periodicamente di direzione: esso è infatti un campo oscillante a frequenza ν_0 .

Il campo magnetico è normale al piano mediano (di simmetria) delle due D (cioè al piano della figura 4.11). Il complesso delle due D si trova in un recipiente evacuato.

⁽¹⁵⁾ Nuclei di idrogeno pesante (deuterio).

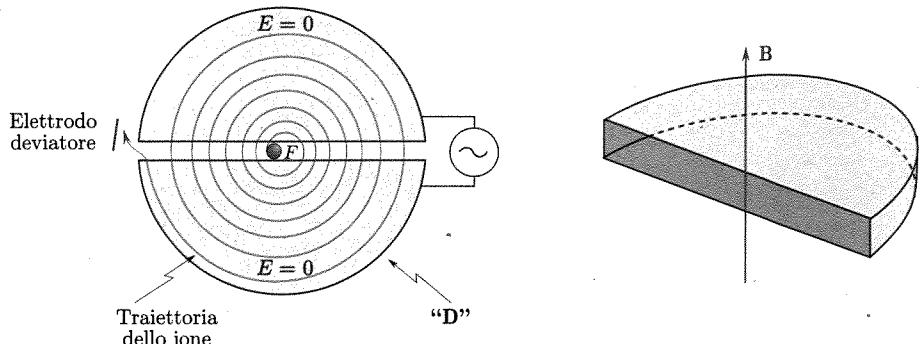


Fig. 4.11

Nelle vicinanze del centro della macchina v'è la sorgente delle particelle (F): nel caso di deuteroni questi sono prodotti nella collisione di elettroni (100 eV) ed atomi di deuterio nell'interno della sorgente ed escono dalla sorgente attraverso una piccola apertura nella parete della sorgente stessa. Supponiamo per esempio che quando un deuterone (carica +e) esce dalla sorgente trovi negativo il D che nella figura si trova superiormente: esso è quindi accelerato fino ad entrare in esso; nell'interno del D il campo elettrico è nullo e la particella si muove di moto circolare uniforme sotto l'azione di B_0 . In tal modo essa si ripresenta nello spazio fra le due D. Se nel frattempo il campo elettrico fra le D ha invertito la sua polarità lo ione viene nuovamente accelerato ed entra nel secondo D e così via.

È importante a questo punto ricordare che il tempo impiegato da una particella in moto in un campo magnetico normale a v a descrivere un'orbita circolare (e quindi anche una sua metà) non dipende dal valore di v [vedi equazione (5)]. È possibile così accordare la frequenza del campo in modo che il corrispondente mezzo periodo sia proprio uguale al tempo impiegato dallo ione a percorrere una mezza circonferenza: in tali condizioni lo ione percorre una traiettoria che è formata da semicirconferenze di raggio gradatamente crescente e da raccordi corrispondenti ai tratti in cui esso viene accelerato fra le due D. Lo ione quindi aumenta gradatamente la sua energia (per azione di E_0) e può essere portato ad energie elevate prima che passi vicino ad una placchetta deviatrice ove un campo elettrico lo fa uscire dalla traiettoria ora illustrata per farlo partecipare alla collisione che si intende studiare. Per avere un ordine di grandezza dei parametri in gioco si può dire che se il potenziale accelerante è di 10^5 V e si vuole portare i deuteroni ad energie di 10 MeV il numero di passaggi fra le D è di 100.

L'uso dei ciclotroni secondo lo schema ora illustrato può essere fatto solo finché le velocità delle particelle sono piccole rispetto a quelle della luce in modo che la massa rimanga costante. Si ricordi che la massa interviene nella espressione della velocità angolare con cui viene descritta l'orbita circolare. Se l'energia⁽¹⁶⁾ della particella dovesse salire a valori per cui le velocità in gioco non consentano di trascurare gli effetti relativistici, occorre tenere presente che la massa (m) della particella differisce da quella (m_0) di riposo secondo l'espressione

$$(12) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e, nello schema illustrato, si verrebbe a perdere il sincronismo fra il campo elettrico ed il moto dello ione.

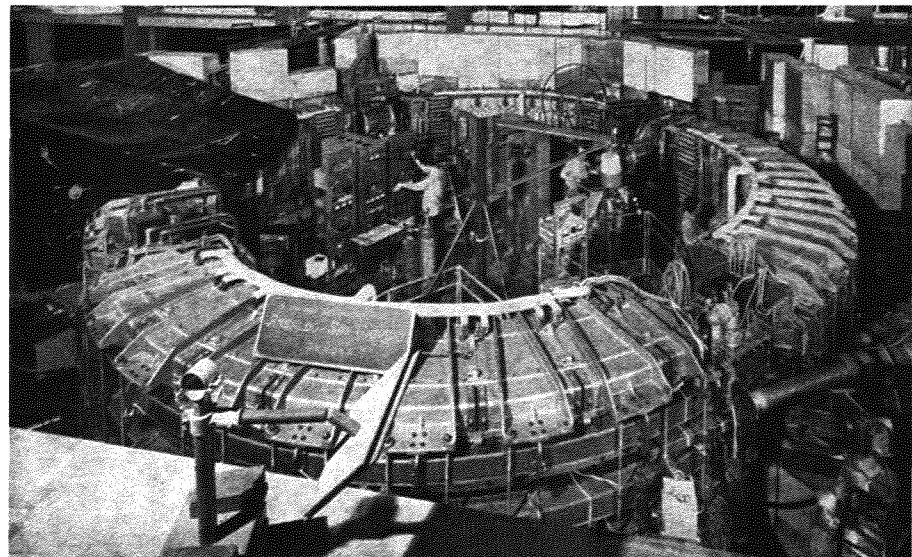
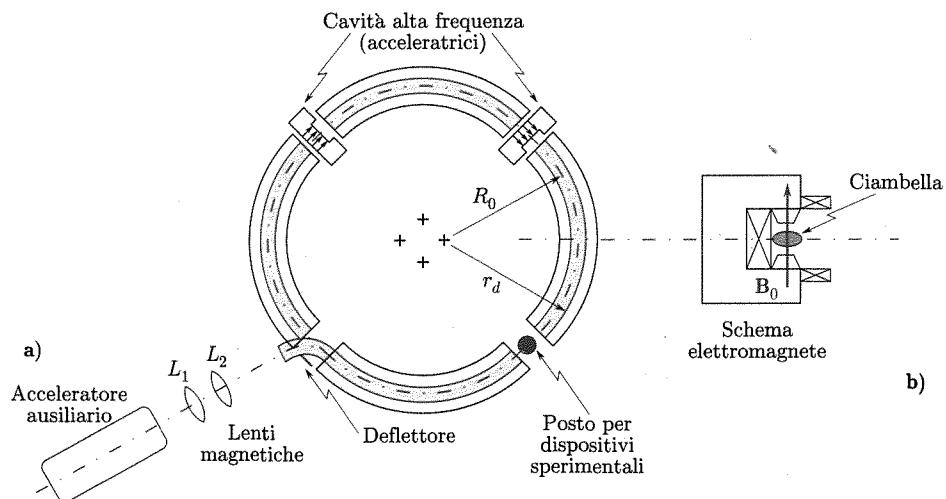
Questo inconveniente si può superare se nell'operazione di accelerare un pacchetto di ioni la frequenza del campo elettrico viene variata (diminuita) man mano che la velocità degli ioni aumenta in modo da compensare le conseguenze degli effetti relativistici e mantenere sempre soddisfatta la condizione di sincronismo. Le

⁽¹⁶⁾ Protoni aventi energia di 30 GeV (30.000 MeV) hanno velocità pari a 0,99998 c (essendo c la velocità della luce). L'energia dei protoni nella macchina del CERN (Ginevra) è di 28 GeV.

macchine, derivate dai ciclotroni, che realizzano lo schema ora indicato sono i sincrociclotroni.

Un'altra difficoltà nella realizzazione di ciclotroni per alte energie è rappresentata dalle dimensioni della sezione circolare della zona in cui vi deve essere il campo magnetico. Il campo magnetico viene ottenuto con grandi elettromagneti: le loro dimensioni e le caratteristiche di uniformità che il campo deve avere rendono questi elettromagneti molto costosi. È quindi indubbiamente vantaggioso sostituire lo schema descritto di un ciclotrone ($B_0 = \text{cost}$) con uno in cui B_0 viene variato periodicamente in modo da far sì che il moto delle particelle caricate non avvenga in tutta la sezione trasversale della D ma sia limitata ad un piccolo anello: in tal caso le D sono sostituite da due parti di una medesima ciambella ed il campo magnetico è limitato ad una regione anulare. Le macchine in cui tanto B_0 quanto v_0 sono variate periodicamente si chiamano sincrotroni.

La figura 4.12a indica uno schema di uno dei primi sincrotroni realizzati a Frascati. La traiettoria del fascio di elettroni in una ciambella evacuata è formata da quattro archi di cerchio dello stesso raggio e da piccoli tratti rettilinei.



c)

Fig. 4.12 Sincrotrone dell'INFN (Frascati)

Gli archi circolari si trovano nell'interno di un campo magnetico fornito da elettromagneti (fig. 4.12b). Gli spazi fra i magneti sono occupati dalle cavità a radio frequenza (due) per accelerare gli elettronni, dal dispositivo deflettore che serve per immettere i fasci di eletroni prodotti in un acceleratore sussidiario (10 MeV), e da dispositivi sperimentali (per esempio bersaglio). In tale macchina si accelerano elettronni ($22 \cdot 10^{11}$ elettron per secondo) a energia di 1,1 GeV; il funzionamento è ad impulsi che si susseguono ad intervalli di 20 secondi, ciascuno della durata di qualche millisecondo. La induzione magnetica è circa 1 Wb/m^2 . La figura 4.12c dà una visione generale della macchina.

Notevoli sviluppi si sono realizzati negli ultimi anni in queste macchine. Essi hanno consentito di ottenere fondamentali informazioni sulle particelle e sulle interazioni elementari (vol. I, cap. 2, par. 2.9), come anche sulla struttura della materia condensata (tramite la luce di sincrotrone).

A Frascati è stata costruita una macchina, DAΦNE⁽¹⁷⁾, formata da due anelli per collisione di eletroni (e^-) e positroni (e^+) portati sia gli uni che gli altri ad energia di 510 MeV.

Il CERN [Comitato Europeo Ricerche Nucleari (Ginevra)] ha operato un Super-protosincrotrone costruito per portare protoni ad una energia massima di 28 GeV; in tale macchina i protoni (10^{11} per impulso) percorrono uno spazio di $8 \cdot 10^4 \text{ km}$; l'energia guadagnata dai protoni per ogni giro è di 54 KeV; l'induzione massima è di $1,4 \text{ Wb/m}^2$.

Sempre al CERN, il LEP (large electron-positron collider) consente di raggiungere energie di circa 190 GeV. È inoltre avviata la costruzione di una macchina, LHC (large adron⁽¹⁸⁾ collider), che nel 2005 consentirà di fare urtare protoni in volo da direzioni opposte con energia complessiva di 14 TeV ($14 \cdot 10^{12} \text{ eV}$).

Il percorso delle particelle per un giro sia nel LEP sia nel LHC è di 26,7 km.

g. Effetto Hall

Abbiamo visto nel cap. 3 come la conduzione elettrica nei metalli sia attribuita al moto di elettroni. Una indicazione sperimentale del segno delle cariche mobili nei metalli e la determinazione della loro densità si ha nello studio dell'effetto Hall, la cui interpretazione è ottenuta attraverso una semplice applicazione dell'effetto della forza di Lorentz sulle cariche portatrici di corrente.

Si supponga di avere una sbarretta metallica parallelepipedo (lunghezza, c , molto più grande delle dimensioni trasversali, a, b) attraversata, nella direzione della lunghezza, da una corrente continua di densità costante j

(13)

$$i = jab.$$

La direzione ed il verso di i sia quello positivo dell'asse x (fig. 4.13).

Venga ora applicato un campo d'induzione magnetica B uniforme, normale ad x e parallelo ad una delle facce laterali della sbarra; la direzione ed il verso di B sono scelti come orientazione dell'asse y . In tali condizioni si nota il comparire di una differenza di potenziale fra le facce della sbarretta parallele al piano xy (normali a z e colorate in figura). Per tale differenza di potenziale vale la relazione empirica

$$(14) \quad \Delta V = V_2 - V_1 = R_H \frac{iB}{a}.$$

Il coefficiente R_H è di solito chiamato coefficiente di Hall e spesso anche, impropriamente, costante di Hall: esso dipende dal materiale, dalla temperatura e, a volte, dall'intensità dei campi applicati.

La spiegazione di questo effetto in maniera elementare si raggiunge facilmente esaminando l'azione del campo magnetico sui portatori di carica che nella sbarra si

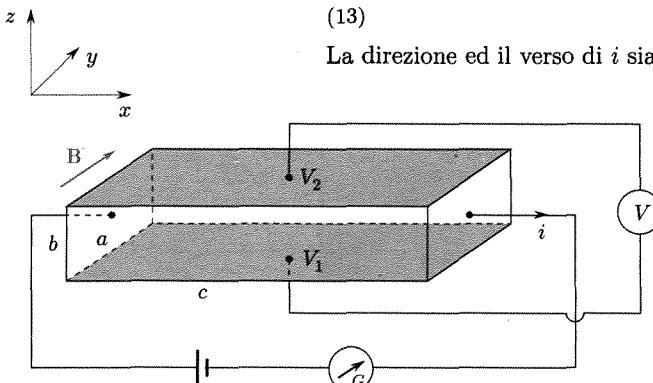


Fig. 4.13

⁽¹⁷⁾ Double Anular for Φ (particelle) Nice Experiment.

⁽¹⁸⁾ Particelle soggette ad interazioni forti.

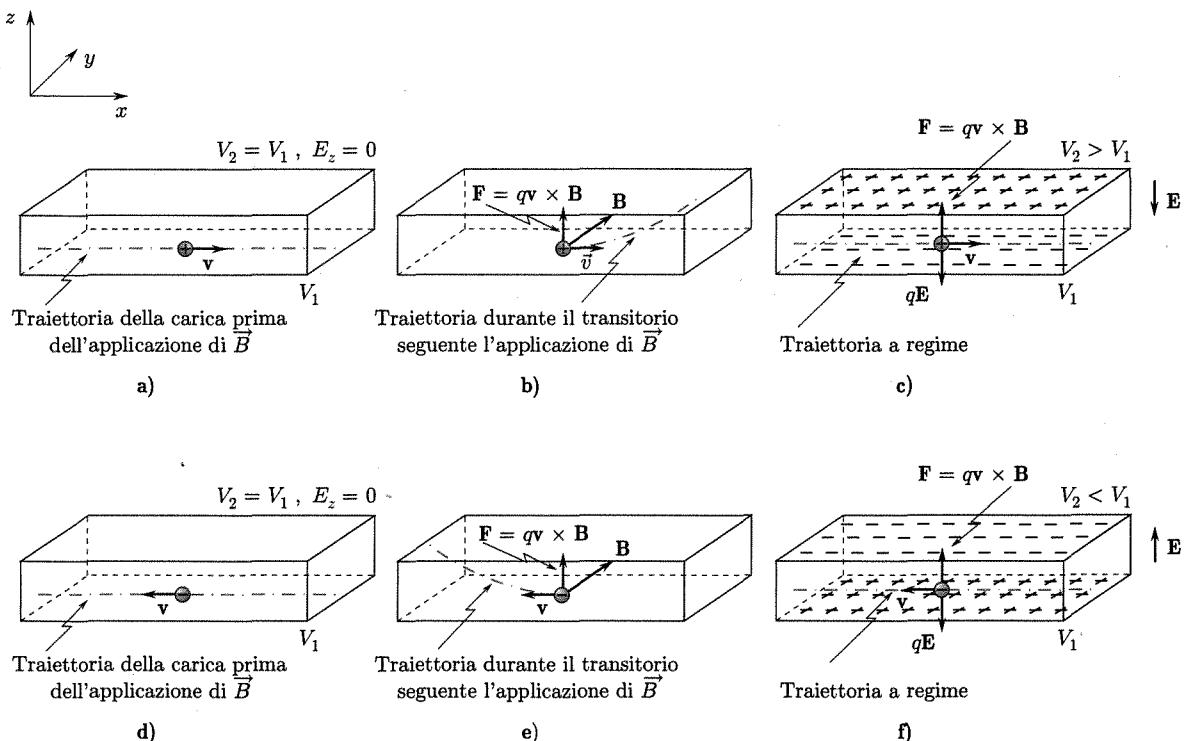


Fig. 4.14

muovono costituendo la corrente i . Supponiamo che le cariche libere (portatori) presenti nella sbarra siano di un solo tipo (di carica positiva o negativa) e consideriamo per chiarezza i due casi separatamente.

Qualora i portatori siano positivi, essi si muovono prima della applicazione del campo magnetico nel verso della corrente, cioè $\mathbf{v} = v(v_x, 0, 0)$ ha il verso di i (fig. 4.14a). All'atto della applicazione del campo magnetico su ciascuna carica in moto q , si esercita la forza di Lorentz

$$(15) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

diretta nel verso positivo dell'asse z . In conseguenza (fig. 4.14b) le traiettorie delle cariche non restano più rettilinee nella direzione x , ma si incurvano verso l'alto. Ciò corrisponde ad uno spostamento trasversale di carica nel campione con accrescimento del numero di cariche positive sulla faccia normale a z superiore e diminuzione sulla faccia inferiore. Questa ridistribuzione di cariche crea un campo elettrico trasversale E_z che ha sulle cariche in moto un effetto contrario a quello della forza di Lorentz. Dopo il transitorio che si verifica all'atto della applicazione del campo magnetico, cioè quando le condizioni di regime sono state raggiunte, le cariche positive spostate sulla faccia superiore normale a z dalla faccia inferiore creano un campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}$ (essendo \mathbf{k} il versore nella direzione z) che bilancia la forza di Lorentz (fig. 4.14c)

$$(16) \quad q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

In tali condizioni le traiettorie dei portatori di carica ritornano rettilinee nella direzione x . Si osservi che \mathbf{E} è diretto nel verso negativo di z e $V_2 > V_1$.

Nel caso che i portatori di carica siano negativi (cioè q è negativo) si può ripetere ciò che si è detto nel caso precedente; si faccia tuttavia attenzione alla figura 4.14e che illustra lo spostamento iniziale delle cariche nella direzione trasversale. In questo caso ancora la forza di Lorentz è diretta nel verso positivo di z , giacché tanto q quanto \mathbf{v} hanno segni negativi (le cariche si muovono in senso contrario a quello di i). In questo caso perciò, a regime (fig. 4.14f), la faccia superiore della sbarretta normale a z è carica negativamente ed il campo \mathbf{E} ha la direzione positiva di z .

Per entrambi i casi si può scrivere a regime

$$(17) \quad E_z + vB = 0.$$

Poiché

$$(18) \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{V_2 - V_1}{b} = -\frac{\Delta V}{b}$$

$$(19) \quad v = \frac{j}{q\eta} = \frac{i}{q\eta ba}$$

avendo indicato con η il numero di portatori per unità di volume (densità, già altrove indicata con p o n secondo che i portatori siano positivi o negativi), si ha dalla (17)

$$(20) \quad \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{q\eta} \frac{iB}{a}.$$

Tale relazione coincide con la relazione empirica (14) se si pone per il coefficiente di Hall:

$$(21) \quad R_H = \frac{1}{q\eta}.$$

Il coefficiente di Hall risulta quindi legato al tipo ed alla densità dei portatori di carica. Supponendo che i portatori di carica siano di un solo tipo esso risulta positivo o negativo secondo che i portatori siano positivi o negativi.

I valori delle tensioni di Hall che si possono misurare in campioni conduttori sono piuttosto piccoli: facendo $a = 0,1$ mm, $i = 10$ A, $B = 1$ Wb/m² nel caso dell'argento $\Delta V = -8,4$ μ V. Le misure sono perciò piuttosto delicate.

Nella tabella 4.1 sono riportati i valori di R per alcuni dei principali metalli buoni conduttori.

Tabella 4.1

Sostanza	$R \left(\frac{\text{m}^3}{\text{coul}} \right)$	$n = \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{atomi}}{\text{m}^3}$
Alluminio	$-3,0 \cdot 10^{-11}$	$2,1 \cdot 10^{29}$	$0,6 \cdot 10^{29}$
Argento	$-8,4 \cdot 10^{-11}$	$0,75 \cdot 10^{29}$	$0,59 \cdot 10^{29}$
Oro	$-7,2 \cdot 10^{-11}$	$0,87 \cdot 10^{29}$	$0,48 \cdot 10^{29}$
Rame	$-5,5 \cdot 10^{-11}$	$1,1 \cdot 10^{29}$	$0,85 \cdot 10^{29}$

In tutti questi casi la costante di Hall è negativa e ciò indica che i portatori di carica presenti nei metalli sono negativi⁽¹⁹⁾. In accordo con le indicazioni discusse nel capitolo precedente sembra quindi lecito supporre che tali portatori siano elettroni. Introducendo allora la carica elettronica e (al posto di q) nella (21) si ha il modo di calcolare la densità elettronica ($\eta = n$) dal valore di R .

I risultati di questo calcolo sono riportati nella terza colonna della tabella, mentre nella quarta sono indicate le densità degli atomi (atomi/m³) ottenute dalla densità dei metalli (kg/m³) e dalle masse degli atomi (peso atomico $\times 1,66 \cdot 10^{-2}$ kg).

I valori di n e del numero di atomi per unità di volume sono dello stesso ordine di grandezza (n è sempre maggiore): questa circostanza sembra avvalorare le considerazioni svolte nel cap. 3 ed indicare che in questi metalli v'è almeno un elettrone libero (da uno a tre) per atomo presente nel cristallo.

⁽¹⁹⁾ In realtà in altri metalli (zinco, ferro, cobalto) il valore di R è positivo come se i portatori di carica fossero positivi. Questa circostanza richiede considerazioni quantistiche per la sua interpretazione.

■ 4.4. FORZA MAGNETICA SU UNA CORRENTE. SECONDA FORMULA DI LAPLACE

Un conduttore percorso da corrente che si trovi in un campo magnetico è sottoposto ad una forza che è la risultante delle forze che agiscono sulle singole cariche che costituiscono la corrente.

Cominciamo con il considerare il caso molto semplice di un tratto rettilineo di un conduttore filiforme attraversato da una corrente i in un campo magnetico uniforme e normale al conduttore stesso (fig. 4.15). La lunghezza del conduttore sia l e l'area della sezione S . Se si indica con n la densità dei portatori di carica⁽²⁰⁾, q la loro carica e \mathbf{v}_d la velocità media di scorrimento nella direzione della corrente (del campo elettrico), si può scrivere per l'intensità della corrente:

$$(22) \quad i = qnSv_d$$

essendo nSv_d il numero di portatori che passa attraverso una sezione trasversale del conduttore nell'unità di tempo.

La forza che si esercita su ciascun portatore nel campo magnetico nelle condizioni specificate (\mathbf{B}_0 normale a \mathbf{v}_d) è

$$(23) \quad qv_d B_0$$

e quindi la forza che si esercita sul tratto di conduttore rettilineo di lunghezza l sarà

$$(24) \quad F = qv_d B_0 nSl = ilB_0 .$$

essendo nSl il numero di portatori presenti nel tratto l . La forza è diretta normalmente a \mathbf{B}_0 ed a \mathbf{v}_d come indicato in figura.

Nel caso generale che \mathbf{v}_d non fosse normale a \mathbf{B}_0 la forza su ogni singolo portatore risulterebbe pari a

$$(25) \quad q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_0$$

e quella su tutto il conduttore sarebbe:

$$(26) \quad \mathbf{F} = qnSl\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_0 .$$

Associando ad l un vettore \mathbf{l} diretto come \mathbf{v}_d (e la corrente) la (26) si può scrivere

$$(27) \quad \mathbf{F} = il \times \mathbf{B}_0 .$$

Le considerazioni ora svolte possono essere usate per realizzare un dispositivo per la misurazione di \mathbf{B}_0 in regioni ove esso non cambi molto rapidamente. Si può realizzare una disposizione secondo lo schema di figura 4.16. Un conduttore rettilineo di lunghezza l può scorrere su due guide metalliche; il suo moto è peraltro contrastato da molle che tendono a riportarlo in una determinata posizione di equilibrio. Nelle guide e nel conduttore viene fatta circolare una corrente di intensità i . Disponendo l'apparecchio nella regione in cui si vuole misurare \mathbf{B}_0 si possono fare esperienze nelle quali i valori di \mathbf{F} per varie orientazioni del conduttore rettilineo l sono determinate dalle deformazioni delle molle di richiamo. La lunghezza l del conduttore mobile

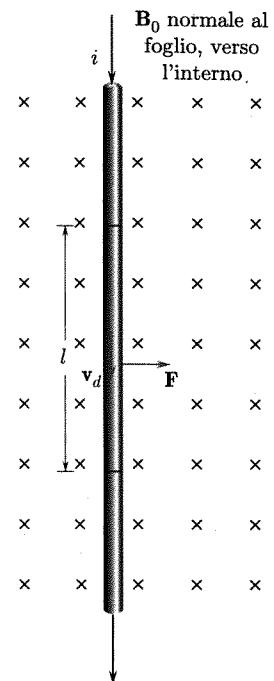


Fig. 4.15

Forza su un filo rettilineo percorso da corrente immerso in un campo magnetico

⁽²⁰⁾ Nel caso dei conduttori metallici i portatori sono elettroni di carica $q = -e$. Non è necessario qui specificare il tipo di portatori perché la stessa forza si esercita tanto su portatori positivi che si muovono nella direzione di i quanto su portatori negativi che si muovono in direzione opposta. Nella formula che vogliamo stabilire per la forza agente sul conduttore compare semplicemente l'intensità della corrente.

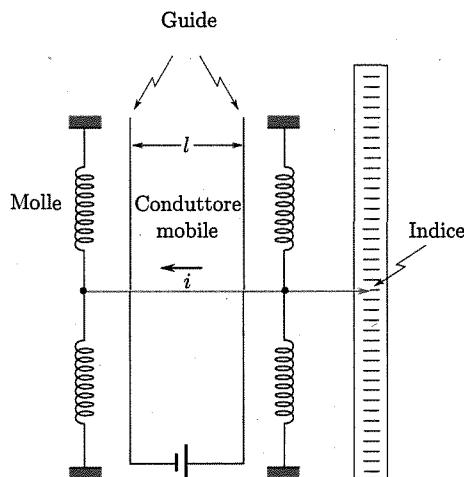


Fig. 4.16

può essere fatta abbastanza piccola in modo da avere una discreta precisione nella determinazione di B_0 .

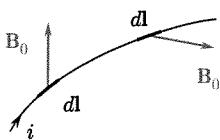


Fig. 4.17

*Seconda formula
di Laplace*

*Forza su un filo
percorso da corrente*

Nel caso generale peraltro il conduttore attraversato da corrente, per il quale si desidera determinare la forza esercitata dal campo magnetico, non è rettilineo e si trova in un campo non uniforme. Un calcolo della forza si può fare in questo caso usando una formula matematica, nota con il nome di seconda formula di Laplace.

Si può immaginare (fig. 4.17) di scomporre il conduttore in elementi di lunghezza molto piccola, al limite infinitesima, ciascuno dei quali può essere considerato rettilineo ed immerso in un campo magnetico uniforme. Per un tale elemento dl la forza agente vale

$$(28) \quad d\mathbf{F} = idl \times \mathbf{B}_0 .$$

Al variare dell'elemento varia in genere l'orientazione di dl e \mathbf{B} . La forza sul conduttore di lunghezza l si può ottenere integrando lungo la configurazione C del conduttore

$$(29) \quad \mathbf{F} = i \int_C dl \times \mathbf{B}_0 .$$

Si osservi che la formula di Laplace è solo una formula matematica in quanto l'elemento idl deve far parte di un circuito finito.

Vedremo in seguito varie applicazioni della (28).

4.5. SOLLECITAZIONE SU UN CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE

La sollecitazione che agisce su un circuito percorso da corrente in un campo magnetico si calcola mediante la seconda formula di Laplace (28). Vogliamo considerare alcuni casi semplici ed importanti.

Supponiamo di avere una spira piana rettangolare (lati a, b) percorsa da una corrente di intensità i ed immersa in un campo uniforme \mathbf{B}_0 come in figura 4.18a e b. Nella figura non è segnata per semplicità l'origine della corrente: si può pensare che sia inserita una pila molto piccola (come quelle per gli apparecchi acustici per sordi) o si può pensare di addurre la

Azione su una spira

corrente alla spira mediante due fili strettamente attorcigliati (fig. 4.18c): in tal caso l'effetto globale del campo magnetico sui due fili è nullo giacché le correnti in essi sono uguali ed opposte.

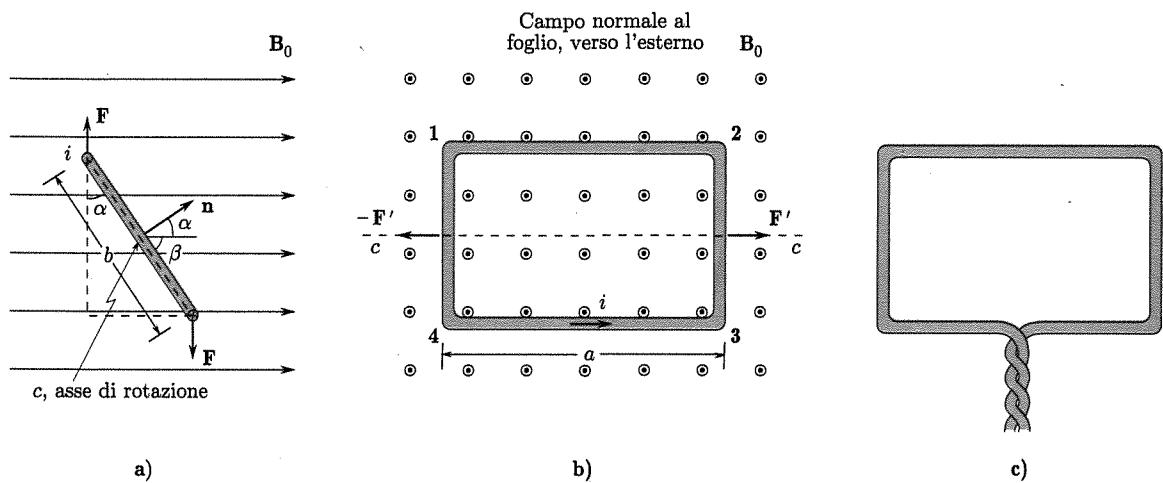


Fig. 4.18

La spira è sostenuta per mezzo di due perni che consentono la rotazione intorno all'asse c , c normale ai lati di lunghezza b nel loro punto centrale.

I versi delle correnti e del campo magnetico siano quelli indicati in figura. Si consideri la normale al piano della spira orientata verso quella parte dalla quale la corrente appare circolare in verso antiorario⁽²¹⁾.

Si indichi con α l'angolo che tale normale forma con B_0 . La figura 4.18a mostra la situazione avendo nel disegno immaginato di sezionare la spira con un piano perpendicolare all'asse di rotazione; la figura 4.18b si ottiene guardando la spira nella direzione di B_0 dalla parte della n positiva.

La forza sul lato 2,3 è diretta lungo l'asse di rotazione ed ha modulo

$$(30) \quad ibB_0 \sin \beta,$$

essendo β l'angolo fra il lato ed il campo.

Quella sul lato 1,4 è uguale ed opposta a quella sul lato 2,3.

Le forze su questi due lati hanno la stessa linea di azione ed essendo uguali ed opposte si equilibrano. Le forze sui lati 1,2 e 4,3 hanno anche esse lo stesso modulo

$$(31) \quad iaB_0,$$

⁽²¹⁾ Questo verso può indicarsi anche come quello di avanzamento di una vite destra che ruoti, come la corrente nella spira (regola della vite destra o del cavatappi, fig. 4.19).

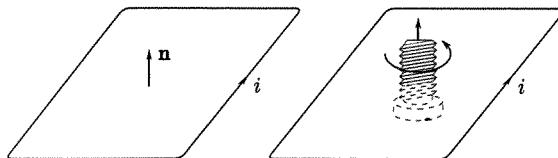


Fig. 4.19

la stessa direzione e verso opposto. Le linee di azione non coincidono ma distano di

$$(32) \quad b \sin \alpha.$$

Esse costituiscono quindi una coppia il cui momento ha modulo

$$(33) \quad |\mathcal{M}| = iabB_0 \sin \alpha = iSB_0 \sin \alpha,$$

se con S si indica l'area della superficie piana racchiusa dalla spira

$$S = ab.$$

L'azione di un campo magnetico uniforme su una spira percorsa da corrente è una coppia
 $\mathcal{M} = iS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0)$

Vettorialmente si ha

$$(34) \quad \mathcal{M} = iS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0).$$

Allo stesso risultato si giunge qualunque sia la forma della spira piana.

Si supponga di avere una spira circolare (raggio r) nel piano xy di un sistema di riferimento, ed il campo \mathbf{B}_0 sia diretto come y (fig. 4.20).

La spira può ruotare intorno al diametro parallelo a x .

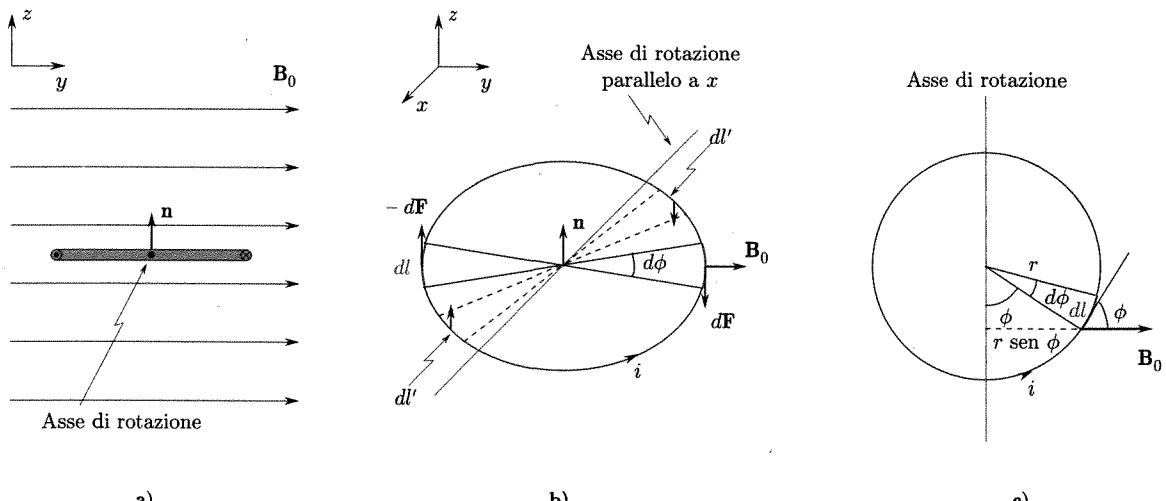


Fig. 4.20

La forza su un elemento $dl = rd\phi$ individuato dall'angolo ϕ (fig. 4.20c) è data in modulo da

$$(35) \quad dF = iB_0 dl \sin \phi = iB_0 r \sin \phi d\phi,$$

giacché ϕ è anche l'angolo fra \mathbf{B}_0 e dl .

Il momento di tale forza rispetto all'asse di rotazione ha modulo

$$d\mathcal{M} = iB_0 r^2 \sin^2 \phi d\phi.$$

Il modulo del momento totale è

$$(36) \quad |\mathcal{M}| = iB_0 r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = iB_0 r^2 \pi = iSB_0,$$

essendo $S = \pi r^2$ la superficie della spira. Nel caso che la normale al piano della spira facesse con \mathbf{B}_0 un angolo α , invece che $\pi/2$ come nella situazione esaminata, si sarebbe ottenuto

$$(37) \quad |\mathcal{M}| = iSB_0 \sin \alpha.$$

Introducendo il versore normale alla spira, con le convenzioni già poste, cioè essendo tale vettore diretto dalla parte dalla quale si vede *i* circolare in senso antiorario, le (36) e (37) si possono scrivere vettorialmente come la (34).

Si consideri ora un avvolgimento elicoidale ad asse rettilineo (fig. 4.21): tale avvolgimento prende il nome di solenoide e può essere considerato come un sistema di spire circolari solidali fra loro, disposte in piani normali all'asse dell'elica. Sia *i* l'intensità della corrente ed *N* il numero di spire. L'avvolgimento disposto in un campo magnetico risente un'azione costituita da una coppia il cui momento si ottiene dalla (34)

$$(38) \quad \mathcal{M} = NiS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0).$$

La (34) [come la (38)] è analoga alla espressione del momento meccanico che si esercita su un dipolo elettrico in un campo uniforme

$$\mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$$

e conduce a considerare una spira percorsa da corrente (od un avvolgimento quale un solenoide) come un dipolo magnetico cui va associato un momento magnetico. La analogia sarà ancora più evidente quando esamineremo la forma del campo creato dal dipolo magnetico a notevole distanza (par. 4.9). Rimandiamo a quel punto la definizione di momento magnetico.

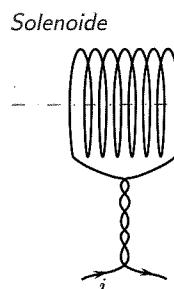


Fig. 4.21

Una spira percorsa da corrente è un "dipolo magnetico" di momento magnetico $\mathbf{m} = iSn$

■ 4.6. CAMPO MAGNETICO CREATO DA CORRENTI. PRIMA FORMULA DI LAPLACE

Passiamo ora a considerare l'altra parte in cui abbiamo diviso l'analisi delle interazioni magnetiche fra cariche in moto, cercando di determinare il valore del vettore \mathbf{B}_0 creato in un punto da un certo insieme di cariche in moto. Vi è innanzitutto da osservare che siccome in questo capitolo stiamo considerando fenomeni stazionari, per i quali cioè il valore di \mathbf{B}_0 in un punto non varia con il tempo, dovremo limitarci a considerare sistemi stazionari di cariche in moto qual è una corrente continua in un circuito od un flusso stazionario di cariche nello spazio; ciò significa che se anche giungeremo ad esprimere il campo \mathbf{B}_0 creato da una singola carica *q* che si muove con velocità \mathbf{v} ciò viene fatto nell'ipotesi che tale carica faccia parte di un fascio di particelle corrispondente ad una distribuzione di cariche in moto stazionario in modo che il campo \mathbf{B}_0 in un punto sia costante nel tempo.

La determinazione del vettore \mathbf{B}_0 per varie distribuzioni di cariche in moto è stato oggetto di un gran numero di osservazioni sperimentali fra le quali vanno ricordate quelle di Biot e Savart, e, specialmente, quelle di Ampère. Il metodo consiste nell'esaminare la forza fra due distribuzioni di cariche in moto, essenzialmente fra due circuiti percorsi da corrente. Queste esperienze sono in un certo senso le analoghe delle esperienze di Coulomb per determinare le interazioni elettrostatiche fra cariche ferme. Le esperienze magnetiche sono peraltro più complesse di quelle elettrostatiche sia perché non v'è l'equivalente magnetico della carica puntiforme ed occorre sperimentare con circuiti, sia perché varie grandezze che determinano la forza fra correnti hanno carattere vettoriale.

Il complesso di tutte le esperienze fatte porta a riconoscere:

1. che il campo dovuto ad una qualsiasi distribuzione di cariche in moto stazionario può essere espresso come somma di quello dovuto alle singole cariche in moto;
2. il campo \mathbf{B}_0 prodotto da una carica q (facente parte di una distribuzione indipendente dal tempo) che si muove con velocità \mathbf{v} in un punto determinato dal vettore \mathbf{r} (con origine nella posizione della carica) è

(39)

$$\mathbf{B}_0 = k \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

Il coefficiente k dipende dal sistema di unità. Nel Sistema Internazionale il coefficiente k ha il valore $10^{-7} \text{ Wb/ampère} \cdot \text{metro}$, come si deduce dalla definizione del campione fissato per l'unità (ampère) della intensità di corrente, scelta come quarta grandezza fondamentale. Per ragioni analoghe a quelle viste in elettrostatica⁽²²⁾ per cui il coefficiente che compare nella formula di Coulomb è stato posto $1/4\pi\epsilon_0$ nel Sistema Internazionale, e ciò per eliminare il fattore 4π in alcune relazioni che dedurremo, si trova utile porre k nella forma $\mu_0/4\pi$, essendo

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ è I_a
permeabilità magnetica
del vuoto

Campo magnetico
nel vuoto creato
da una carica in moto

(40)

$$\mu_0 = 4\pi k = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

la permeabilità magnetica (del vuoto).

Nel Sistema Internazionale si ha dunque che la (39) si scrive

(41)

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

Dalla (41) si deduce una relazione particolarmente utile per le applicazioni pratiche nelle quali si ha a che fare con correnti in circuiti. Cerchiamo perciò di determinare il contributo ($d\mathbf{B}_0$) al campo magnetico in un punto (P) dovuto alle cariche che fluiscono in un elemento infinitesimo (rettilineo) di un conduttore (dl) facente parte di un circuito percorso da una corrente stazionaria; supponiamo che P sia ad una distanza r dal conduttore molto maggiore delle dimensioni trasversali del conduttore medesimo, per modo che questo possa considerarsi, come si usa dire, *filiforme*. Orientando dl come \mathbf{v} si ha, se n è la densità dei portatori di carica (q') ed S la sezione del conduttore,

(42)

$$q\mathbf{v} = (nSdlq')\mathbf{v} = (nSvq')dl = idl.$$

La (41) quindi fornisce la relazione cercata e che è spesso indicata come prima formula di Laplace

(43)

$$d\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ove \mathbf{r} è la distanza orientata di P da dl .

La figura 4.22 mostra la posizione relativa dei vari vettori. Il vettore $d\mathbf{B}_0$ in un punto P si trova in un piano normale all'asse dell'elemento rettilineo dl ed è perpendicolare al piano che contiene dl e P . Le linee di induzione (analoghe alle linee di forza di un campo di forze) alle quali il vettore $d\mathbf{B}_0$ è in ogni punto tangente, sono quindi circonferenze concentriche giacenti in piani normali all'asse di dl e con centro nella traccia di tale

Prima formula
di Laplace

⁽²²⁾ Vedi appendice I.

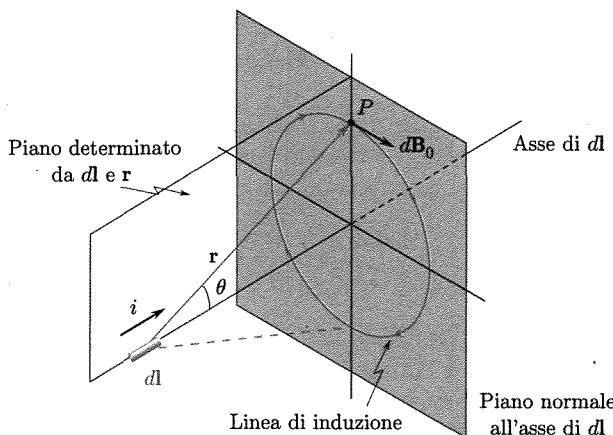


Fig. 4.22

asse su ciascun piano. Il verso di tali linee di induzione si ottiene considerando il prodotto vettoriale $(dl \times r)$; più semplicemente vale la seguente regola mnemonica (vedi anche paragrafo successivo) che si può facilmente dedurre nel caso in oggetto: si immagini di afferrare con la mano destra l'elemento di corrente in modo che il pollice dia il verso della corrente; allora il verso di rotazione delle dita che si chiudono a rinserrare dl dà il verso delle linee di induzione. Il verso delle linee di induzione può anche essere descritto come quello in cui deve ruotare una vite destra che avanza nella direzione dl .

Si osservi che il campo dB_0 è nullo nei punti sull'asse dell'elemento dl giacché per tali punti dl ed r sono paralleli. Il campo invece per un certo valore di r è massimo per punti (a distanza r) nel piano normale a dl che passa per l'elemento dl stesso (cioè dl ed r normali fra loro).

L'importanza della formula (43) è molto notevole perché essa consente di esprimere il campo creato in un punto da correnti in un circuito filiforme comunque complesso mediante l'integrale

$$(44) \quad \mathbf{B}_0 = \int_{\text{circ}} d\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{circ}} i \frac{dl \times r}{r^3} .$$

L'integrale va esteso alla linea chiusa che rappresenta il circuito. Si osservi che la (43) va considerata come una formula matematica che consente, tramite la (44), di rappresentare i risultati sperimentali che si ottengono con ogni tipo di circuito.

Se, contrariamente a quanto sinora supposto, il punto P non è abbastanza lontano dal conduttore, le dimensioni trasversali di questo non sono più lecitamente trascurabili rispetto ad r e viene meno il concetto di *elemento infinitesimo di corrente idl*.

Se tuttavia si ricorda che è

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS ,$$

essendo S la sezione del conduttore e si combina questa relazione con la (44) si ottiene

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau$$

Le linee di forza di \mathbf{B}_0 sono linee chiuse

Campo creato da correnti in un circuito filiforme

essendo $d\tau$ l'elemento di volume intorno al generico punto Q del circuito, τ il volume occupato da quest'ultimo ed \mathbf{r} la distanza orientata da Q a P (fig. 4.23).

Tenendo presente che \mathbf{j} è nullo fuori dalla regione occupata dal circuito, il risultato che si ottiene dalla formula ora scritta non cambia se il campo di integrazione viene esteso all'intero spazio; si ha dunque

$$(45) \quad \mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(x, y, z) \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau.$$

Campo generato da una qualsiasi distribuzione di corrente

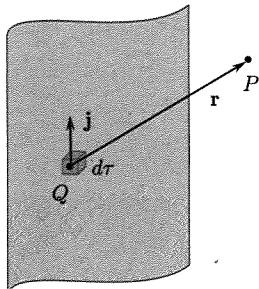


Fig. 4.23

È questa la relazione generale per il calcolo di \mathbf{B}_0 , valida non soltanto nel caso che a generare il campo siano circuiti percorsi da corrente, ma anche nel caso più generico che a generare il campo siano cariche in moto, comunque distribuite nello spazio.

Nei prossimi paragrafi noi applicheremo la (44) e la (45) a vari casi trovando risultati importanti per il seguito delle nostre considerazioni. Avremo occasione in tal modo di sottolineare l'accordo delle deduzioni dalle (44) e (45) con i risultati sperimentali e quindi la validità della sintesi delle indicazioni sperimentali rappresentata dalle (41) e (44) [o (45)].

■ 4.7. IL VETTORE \mathbf{B}_0 PER ALCUNE DISTRIBUZIONI DI CARICHE IN MOTO

Vogliamo ora usare la prima formula di Laplace per determinare il vettore \mathbf{B}_0 in alcuni casi semplici di circuiti percorsi da una corrente stazionaria.

a. Filo rettilineo molto lungo

Si osservi la figura 4.24a, in cui f è un conduttore rettilineo percorso da una corrente di intensità i . Se ci si limita a considerare punti abbastanza lontani dal conduttore perché questo possa considerarsi filiforme, ma al tempo stesso abbastanza vicini perché la loro distanza R dall'asse del conduttore sia molto piccola rispetto alla lunghezza del conduttore medesimo, quest'ultimo può considerarsi, per i punti anzidetti, *infinitamente lungo*. Siccome i contributi $d\mathbf{B}_0$ al campo in un punto generico P dei vari elementi dl in cui il conduttore può essere suddiviso hanno tutti la stessa direzione e lo stesso verso, \mathbf{B}_0 avrà la direzione ed il verso di un qualsiasi $d\mathbf{B}_0$;

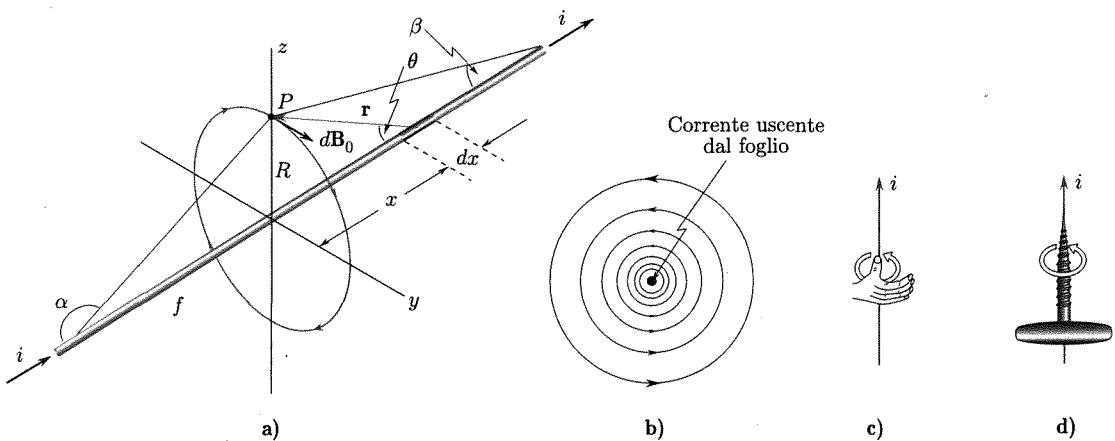


Fig. 4.24

le linee di induzione sono quindi cerchi che giacciono in piani normali al conduttore, hanno centro nella traccia del conduttore sul piano e passano attraverso il punto in questione (fig. 4.24b); le linee sono orientate in senso antiorario se guardate dalla parte del piano verso la quale la corrente è diretta, e quindi in verso orario se guardate dalla parte da dove la corrente proviene. Una utile regola mnemonica per individuare il verso è quella già citata della mano destra disposta con il pollice lungo la corrente; il verso in cui le dita ruotano per chiudersi sul palmo fornisce il verso delle linee di induzione (fig. 4.24c). Ancora: il verso delle linee di induzione è quello in cui ruota una vite destra (o un cavatappi) che avanza lungo il conduttore nel verso di i (fig. 4.24d).

Per calcolare il modulo di \mathbf{B}_0 , se indichiamo con x_1, x_2 gli estremi del conduttore rettilineo si ha

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{d\mathbf{x} \times \mathbf{r}}{r^3} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin \theta}{r^2} dx.$$

Si prenda ora come variabile indipendente θ e siano α e β i valori di θ corrispondenti ad x_1 e x_2 (estremi del filo). Si ha

$$r = \frac{R}{\sin \theta}, \quad x = r \cos \theta = R \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta,$$

e pertanto

$$(46) \quad B_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Nel caso che il filo sia molto lungo (rispetto ad R) ed il punto P non sia vicino ad uno degli estremi, si può porre $\alpha = \pi$ e $\beta = 0$.

In tal caso

$$(47) \quad B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

È questa la formula che dà il valore di B_0 per un filo di lunghezza molto grande (teoricamente infinita). Essa va sotto il nome di legge di Biot e Savart per i conduttori rettilinei di lunghezza infinita e fu stabilita in base a risultati sperimentali. Questi risultati sperimentali fanno parte di quelli la cui analisi ha condotto alle (41) e (44) [o (45)].

Sottolineiamo il risultato ottenuto nei riguardi delle linee di induzione; esse sono linee chiuse. È questo un risultato che si troverà valido per tutti i campi magnetici.

b. Spira circolare

Si abbia una spira filiforme di raggio R , percorsa da una corrente stazionaria di intensità i ; la corrente è addotta ed estratta attraverso due fili paralleli e molto vicini i cui effetti magnetici globali possono essere trascurati giacché le correnti in essi sono uguali ed opposte.

Calcoliamo il valore di \mathbf{B}_0 in un punto dell'asse della spira che disti x dal piano della spira stessa (fig. 4.25a). Si comprende innanzitutto come per ragioni di simmetria \mathbf{B}_0 sia diretto lungo l'asse: il suo verso inoltre, come si riconosce subito, è verso quella regione determinata dal piano della spira dalla quale si vede la corrente circolare in senso antiorario nella spira stessa (fig. 4.25b), (cioè il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti come la corrente nella spira: fig. 4.25c). Si consideri ora il contributo $d\mathbf{B}_0$ dovuto ad un elemento del circuito dl : esso è normale al piano formato da dl ed \mathbf{r} ed ha una componente lungo l'asse della spira che vale $dB_0 \sin \beta$ ed una componente normale all'asse ($dB_0 \cos \beta$). Quest'ultima è uguale ed opposta alla componente normale del contributo $d\mathbf{B}'_0$ creato dall'elemento del circuito (dl') in posizione simmetrica (rispetto al centro della spira) di dl sulla spira. Si ha quindi:

$$(48) \quad B_0 = \int_{\text{circ}} dB_0 \sin \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi R} \left| \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \right| \sin \beta.$$

Campo generato da una corrente in un filo di lunghezza "infinita"

Legge di Biot e Savart

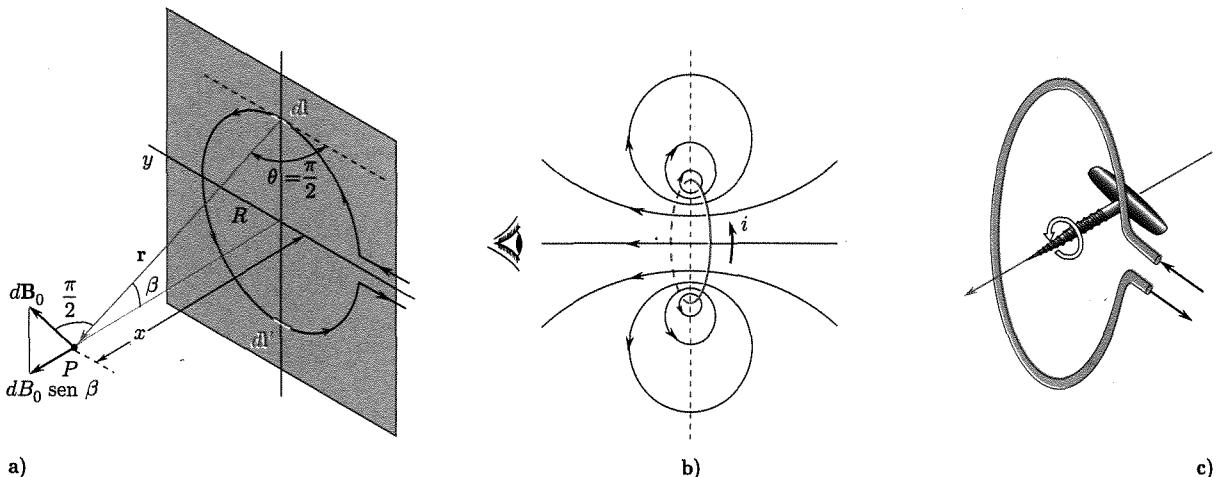
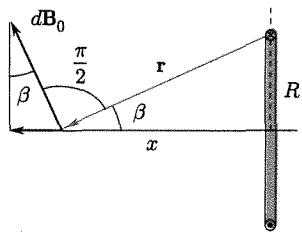


Fig. 4.25



(49)

Poiché l'angolo θ fra dl ed r vale $\pi/2$, è

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi R} \frac{dl \sin \theta \sin \beta}{r^2} = \frac{\mu_0 i R \sin \beta}{2r^2}.$$

Si ha anche (fig. 4.25d) $\sin \beta = R/r$, $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$, e quindi

(50)

$$B_0 = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Campo generato
al centro di una spira
circolare
percorsa da corrente

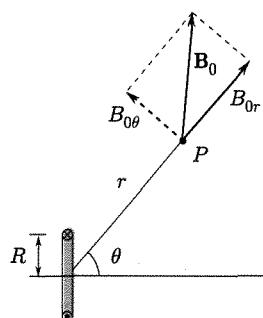


Fig. 4.26

Componenti del campo
generate da una spira
in un punto qualsiasi
dello spazio

Come caso particolare si ha per il valore di B_0 al centro della spira, ponendo nella (50) $x = 0$,

(51)

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2R}.$$

Il calcolo del campo in punti fuori dall'asse può essere fatto con la regola generale: esso è piuttosto lungo ed implica, in termini di funzioni semplici e generalmente note, la considerazione di serie infinite. Ci limiteremo a considerare il caso in cui ci si trovi a distanza dalla spira grande rispetto ad R : in tal caso, usando coordinate polari, il problema diviene abbastanza semplice. Si osservi che il problema ha simmetria assiale; inoltre \mathbf{B}_0 per un punto P qualsiasi giace nel piano determinato dall'asse della spira e da P .

Se si indicano con r e θ le coordinate polari del punto in questo piano (fig. 4.26) il calcolo fornisce per le componenti di \mathbf{B}_0 nella direzione di r (nel verso delle r crescenti) e nella direzione normale a r (nel verso delle θ crescenti) le espressioni

(52)

$$\begin{aligned} B_{0r} &= \frac{\mu_0}{2} i R^2 \frac{\cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} S i \frac{\cos \theta}{r^3} && \text{per } r \gg R \\ B_{0\theta} &= \frac{\mu_0}{4} i R^2 \frac{\sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} S i \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

essendo $S = \pi R^2$ l'area della superficie racchiusa dalla spira.

La figura 4.27 mostra le linee di induzione del campo generato da una spira: come si vede anche in questo caso le linee non escono o terminano in determinati punti, ma sono chiuse su se stesse (al finito od all'infinito).

Nel caso in cui al posto di una spira si abbia un avvolgimento di N spire uguali e molto vicine⁽²³⁾, le (51) e (50) per il campo al centro dell'avvolgimento o in un

⁽²³⁾ Lunghezza assiale dell'avvolgimento piccola rispetto al raggio.

punto qualsiasi del suo asse si trasformano rispettivamente in

$$(53) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ni}{R}$$

$$(54) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{NiR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Analogamente B_{0r} e $B_{0\theta}$ dati dalle (52) vengono moltiplicate per N .

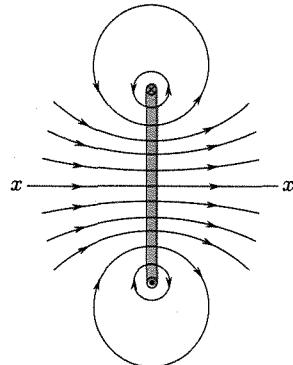


Fig. 4.27

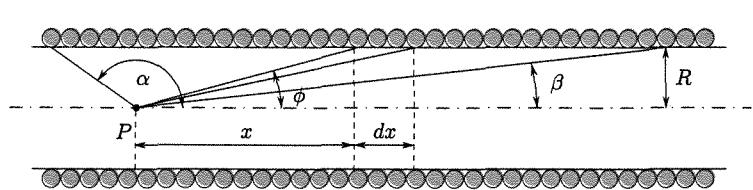


Fig. 4.28

c. Solenoide

La figura 4.28 indica un solenoide ad asse rettilineo di lunghezza l , formato da N spire di uguale raggio R . Il campo \mathbf{B}_0 prodotto in un punto qualsiasi è la somma di quelli prodotti da ciascuna spira.

Calcoliamo \mathbf{B}_0 in un punto P dell'asse del solenoide (interno od esterno). Per ragioni di simmetria \mathbf{B}_0 sarà diretto come l'asse e, come nel caso della semplice spira, nel verso nel quale avanza una vite destra che si avvolge girando come la corrente nelle spire.

Si consideri un elemento del solenoide di lunghezza dx posto ad una distanza assiale x da P . Nell'elemento sono comprese $(N/l)dx$ spire e si ha

$$(55) \quad dB_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{N}{l} i \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dx.$$

Se si sceglie come variabile l'angolo ϕ si ha:

$$x = R \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad ; \quad dx = -R \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \quad ; \quad (R^2 + x^2) = \frac{R^2}{\sin^2 \phi}$$

e

$$(56) \quad dB_0 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{Ni}{l} \sin \phi d\phi.$$

Si ha quindi, indicando con α e β i valori estremi di ϕ ,

$$(57) \quad B_0 = -\frac{\mu_0}{2} \frac{Ni}{l} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ni}{l} (\cos \beta - \cos \alpha).$$

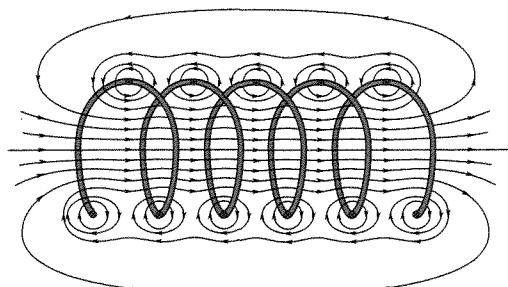
Tale relazione vale per un qualsiasi punto sull'asse interno od esterno al solenoide. Se si considera un punto nell'interno di un solenoide lungo ($l \gg R$), che non sia vicino alle estremità del solenoide stesso si può porre $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ e quindi

$$(58) \quad \boxed{B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} i}.$$

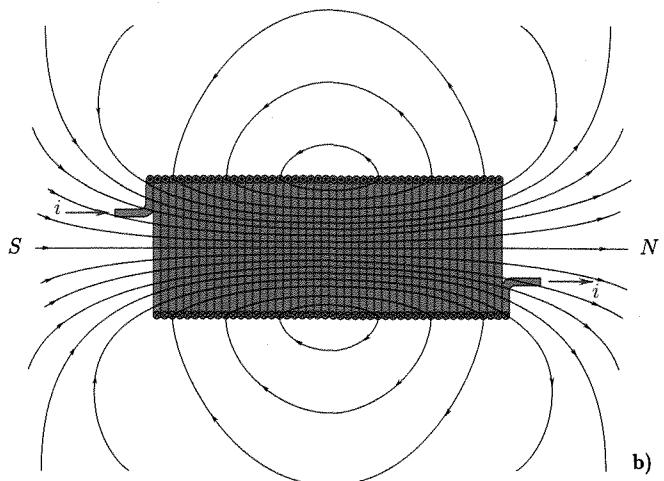
Campo all'interno di un solenoide molto lungo

Per un punto assiale all'estremo del solenoide $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$ e

$$(59) \quad B_0 = \frac{\mu_0}{2} \frac{N}{l} i.$$



a)



b)

Fig. 4.29

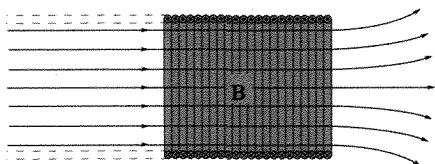


Fig. 4.30

La figura 4.29a mostra le linee di induzione per un solenoide con le spire molto distanziate. La figura 4.29b indica le linee di induzione per un solenoide con le spire contigue, avente lunghezza assiale non molto grande. Per un solenoide di lunghezza molto grande (rispetto ad R) le linee di induzione nell'interno sono parallele, tranne che nelle vicinanze delle estremità (fig. 4.30); nella zona centrale interna del solenoide il campo è uniforme con il valore da noi calcolato per punti sull'asse, come sarà mostrato in seguito (par. 4.14b).

Si osservi che anche in questo caso è evidente come le linee di induzione siano chiuse su se stesse.

■ 4.8. AZIONI FRA CORRENTI. DEFINIZIONE DELL'AMPÈRE

Si supponga di avere due circuiti filiformi qualsiasi percorsi da correnti di intensità rispettivamente i_1 ed i_2 (fig. 4.31) e si considerino due elementi dl_1 e dl_2 ciascuno appartenente ad uno dei circuiti. È facile esprimere l'azione $d\mathbf{F}_1$ che si esercita su dl_1 per effetto del campo $d\mathbf{B}_{02}$ creato dalla corrente i_2 in dl_2 .

Si ha infatti:

$$(60) \quad d\mathbf{F}_1 = i_1 dl_1 \times d\mathbf{B}_{02},$$

$$(61) \quad d\mathbf{B}_{02} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \frac{dl_2 \times r_1}{r^3},$$

essendo \mathbf{r}_1 il vettore che va da dl_2 a dl_1 .

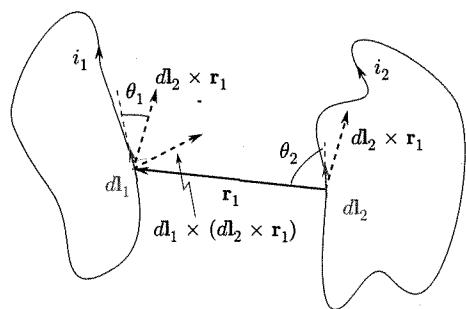


Fig. 4.31

È quindi

Forza su un circuito percorso da corrente a causa del campo creato da un altro circuito

$$(62)$$

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{dl_1 \times (dl_2 \times r_1)}{r^3}.$$

Questa relazione, che a volte è indicata con il nome di legge della forza magnetica di Ampère esprime la forza fra elementi di corrente ed è, per così dire, l'equivalente della legge di Coulomb in elettrostatica che esprime la forza fra cariche statiche elementari (puntiformi).

Anche in questo caso va osservato che la (62) da noi dedotta dalle formule (28) (43) è in realtà stata trovata con le indicazioni sperimentali ed è servita a passare da queste alle posizioni (29), (44) che consentono una sintesi generale dei processi esaminati. È evidente dalla struttura della (62) come le esperienze magnetiche siano enormemente più complicate di quelle elettrostatiche.

Si osservi in particolare che la forza (dF_1) che agisce su dl_1 per effetto della corrente in dl_2 non è in genere⁽²⁴⁾ uguale ed opposta a quella (dF_2) che si esercita su dl_2 per effetto della corrente in dl_1 . Nella figura 4.32 si è supposto che dl_1 e dl_2 siano nel piano del foglio; le forze dF_1 e dF_2 risultano normali a dl_1 e dl_2 .

Questa circostanza, che sembra costituire una violazione del III principio della dinamica, ha causato molte discussioni: si può riconoscere, tuttavia, che non si ha violazione se si considera che il campo eletromagnetico di una corrente possiede una quantità di moto (cap. 7, par. 7.10) che nel caso in oggetto cambia proprio di quanto è richiesto perché il terzo principio della dinamica risulti rispettato.

La forza totale agente su un circuito percorso da corrente per effetto del campo creato dalla corrente in un altro circuito si ottiene integrando la (62).

Particolarmente interessante è il caso in cui si abbiano due conduttori filiformi paralleli di lunghezza infinita⁽²⁵⁾, percorsi da corrente. Si osservi innanzitutto che in questo caso (fig. 4.33) i prodotti $dl_1 \times (dl_2 \times r_1)$ e $dl_2 \times (dl_1 \times r_2)$ sono vettori uguali ed opposti. Ciò porta di conseguenza che la forza che si esercita su un tratto di lunghezza l di uno dei conduttori è uguale ed opposta a quella che si esercita sul tratto della stessa lunghezza dell'altro conduttore. Inoltre da questi prodotti vettoriali si vede che la forza è attrattiva o repulsiva secondo che dl_1 e dl_2 (cioè le correnti i_1 ed i_2) abbiano lo stesso verso o versi discordi.

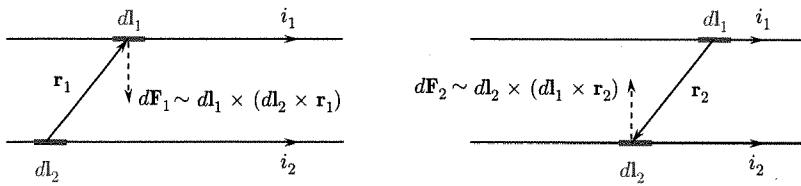


Fig. 4.33

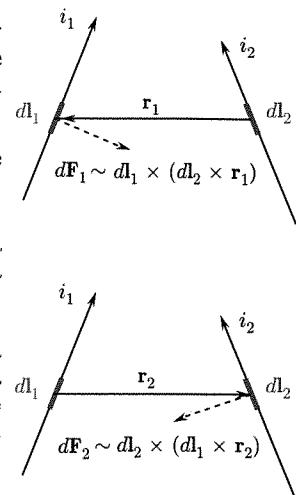


Fig. 4.32

Calcoliamo la forza F_1 che si esercita sulla lunghezza l del primo conduttore per effetto del campo creato dalla corrente nel secondo conduttore di lunghezza infinita. Sarà:

$$(63) \quad F_1 = i_1 \int_0^l dl_1 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \frac{dl_2 \times r_1}{r^3} .$$

Si osservi che il secondo integrale è il campo (B_{02}) creato a distanza a da una corrente i_2 in un conduttore rettilineo infinito ed è dato dalla (47) (fig. 4.34). Si ha quindi

$$(64) \quad F_1 = i_1 \int_0^l dl_1 \times \left(\frac{\mu_0 i_2}{2\pi a} \mathbf{u} \right)$$

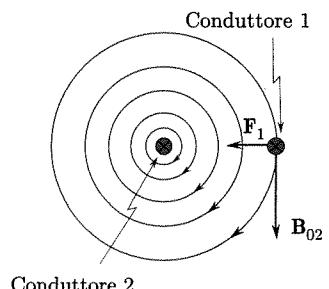


Fig. 4.34

⁽²⁴⁾ Tranne quando dl_1 e dl_2 siano paralleli.

⁽²⁵⁾ Nel senso precisato all'inizio del paragrafo 4.7.

essendo \mathbf{u} il versore nella direzione del prodotto $(dl_2 \times \mathbf{r}_1)$ che fissa la direzione di \mathbf{B}_{02} . Si osservi ancora che dl_1 e \mathbf{u} sono normali fra loro sicché il modulo del prodotto $(dl_1 \times \mathbf{u})$ vale dl_1 e la direzione (e la direzione di \mathbf{F}_1) è normale ai conduttori: il verso è quello che va da un conduttore all'altro se dl_1 e dl_2 sono nello stesso verso. La forza \mathbf{F}_1 è cioè una forza attrattiva fra i due conduttori se le correnti in essi sono concordi. Per il modulo si ha

Forza fra due conduttori rettilinei paralleli fra loro

Definizione dell'ampère

Elettrodinamometro assoluto

$$(65) \quad F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{l}{a} .$$

L'esistenza della forza ora espressa fra due conduttori paralleli attraversati da correnti viene utilizzata per definire l'unità di intensità di corrente, cioè della grandezza che è scelta come quarta grandezza fondamentale (accanto al metro, al kilogrammo massa ed al secondo) nel Sistema Internazionale. L'ampère viene definito come quella corrente costante che passando in due lunghi e sottili conduttori paralleli disposti ad una distanza di 1 m nel vuoto produce su ciascuno di essi una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro di lunghezza.

Da questa definizione segue che il valore di μ_0 permeabilità nel vuoto, risulta nel Sistema Internazionale

$$(66) \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} .$$

In base alla definizione data, il campione dell'ampere può essere stabilito con l'aiuto del metro e di uno strumento che misuri una forza. Spesso si preferisce, nella realizzazione dei campioni, usare avvolgimenti invece di fili rettilinei e determinare le forze fra di essi quando sono percorsi da correnti. La figura 4.35 indica la struttura di una bilancia di corrente o elettrodinamometro assoluto. Una bobina realizzata con particolare cura è fissata ad un piatto di una bilancia ed è disposta nello spazio fra due altre bobine fisse. La medesima corrente passa nelle tre bobine e le cose sono disposte in modo che la forza che si esercita sulla bobina mobile può essere presa per determinare il valore comune di i .

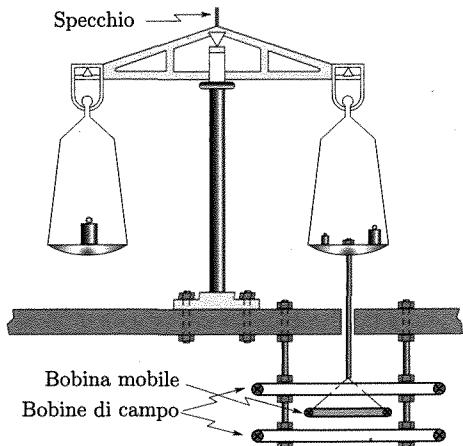


Fig. 4.35

■ 4.9. MOMENTO MAGNETICO DI UNA SPIRA E DI UNA BOBINA PERCORSÀ DA CORRENTE

Nel paragrafo 4.5 abbiamo riconosciuto che una bobina formata da N spire piane uguali, di forma qualsiasi, disposte una accanto all'altra e percorse da una corrente di intensità stazionaria i , se viene a trovarsi in un

campo magnetico uniforme \mathbf{B}_0 risente l'azione di una coppia meccanica di momento

$$(67) \quad \mathcal{M} = NiS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0),$$

essendo S l'area della superficie individuata da una singola spira ed \mathbf{n} la normale al piano delle spire diretta verso la regione dalla quale si vede la corrente nella spira circolare in verso antiorario: si può anche dire che il verso di \mathbf{n} è quello in cui avanza una vite destra che ruota come la corrente nella spira.

La (67) comprende come caso particolare, per $N = 1$, quello di una sola spira. Si è già fatto notare che la espressione di tale momento è perfettamente analoga a quella del momento della coppia che agisce su un dipolo elettrico (di momento \mathbf{p}) in un campo elettrico \mathbf{E}_0 : $\mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$.

Nel paragrafo 4.7 abbiamo calcolato il campo creato dalla corrente circolante in una spira od in una bobina fatta di spire uguali. Il calcolo è stato fatto per spire circolari, ma la validità delle formule seguenti è generale. A distanza grande (rispetto alle dimensioni lineari della spira) il vettore \mathbf{B}_0 in un punto (P) qualsiasi giace nel piano determinato da P e dall'asse della spira; le componenti di \mathbf{B}_0 nella direzione della congiungente il centro della bobina con il punto (nel verso delle r crescenti) ed in direzione normale (nel verso delle θ crescenti) sono (52):

$$\begin{aligned} B_{0r} &= \frac{\mu_0}{2\pi} NSi \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_{0\theta} &= \frac{\mu_0}{4\pi} NSi \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned}$$

Si osservi che queste espressioni sono perfettamente analoghe a quelle trovate per l'intensità del campo elettrico creato da un dipolo a distanza grande dal dipolo stesso [cap. 1, par. 1.14, eq. (102)]. La differenza consiste nel fatto che $1/\mu_0$ ha il posto di ϵ_0 e NSi ha il posto del momento di dipolo elettrico.

Si vede quindi che una spira percorsa da corrente o una bobina di N spire si comporta sia per quanto riguarda le azioni in un campo magnetico esterno uniforme, sia per quanto riguarda il campo da essa stessa creato a distanza grande (rispetto alle sue dimensioni), in maniera analoga a quella di un dipolo elettrico in elettrostatica (teorema di equivalenza di Ampère).

È quindi logico considerare una di queste distribuzioni di corrente come un dipolo magnetico ed associare ad essa un momento magnetico. La maniera più semplice per definire il momento magnetico è la seguente: il momento magnetico di una spira piana è un vettore normale al piano della spira, diretto verso quella regione dalla quale si vede la corrente nella spira circolare in verso antiorario⁽²⁶⁾ (fig. 4.36) ed il cui modulo vale iS (in Am^2). Essendo \mathbf{m} diretto nel verso di \mathbf{n} si ha:

$$(68) \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n}.$$

Nel caso di una bobina di N spire si ha:

$$(69) \quad \mathbf{m} = NiS\mathbf{n}.$$

*Componenti del campo
B generato
da una spira percorsa
da corrente*

*Teorema di equivalenza
di Ampère*

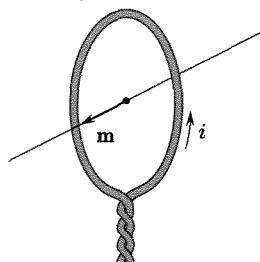


Fig. 4.36

*Momento magnetico di
una spira m = iS \mathbf{n}*

⁽²⁶⁾ Si può anche dire nel verso nel quale avanza una vite destra che ruota come la corrente nella spira.

Momento della coppia che agisce su un dipolo magnetico in un campo uniforme

Energia di una spira in un campo magnetico

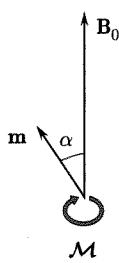


Fig. 4.37

L'energia di un dipolo in un campo magnetico è
 $\mathcal{U}_{\text{mecc}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0$

Con tale definizione il momento della coppia che agisce sul dipolo magnetico in un campo uniforme vale

$$(70) \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 ,$$

e l'induzione del campo creato dalla corrente circolante nella spira a grandi distanze dalla spira stessa ha componenti

$$(71) \quad \begin{aligned} B_{0r} &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2m \frac{\cos \theta}{r^3} , \\ B_{0\theta} &= \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\sin \theta}{r^3} . \end{aligned}$$

Tali espressioni corrispondono del tutto a quelle relative al dipolo elettrico.

Se si considera una spira percorsa da corrente costante in un campo magnetico esterno la (70) fornisce la coppia che su di essa si esercita. Qualora si voglia *cambiare la orientazione della spira* (del momento magnetico) occorre compiere un lavoro dall'esterno (positivo o negativo) e si può considerare una energia potenziale meccanica $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ ⁽²⁷⁾ associata alla posizione della spira nel campo \mathbf{B}_0 . Si può porre

$$(72) \quad d\mathcal{U}_{\text{mecc}} = d\mathcal{L}_e = -(lavoro della coppia } \mathbf{M}) = -d\mathcal{L}_M .$$

Cioè il lavoro $d\mathcal{L}_e$ fatto dall'esterno (pari al lavoro della \mathbf{M} cambiato di segno) per una rotazione $d\alpha$ conduce ad un aumento di $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$.

Si orienti il piano determinato da \mathbf{B}_0 ed \mathbf{m} (fig. 4.37), per esempio con la normale z positiva verso l'esterno del foglio e sia α l'angolo orientato (verso positivo antiorario) fra \mathbf{B}_0 ed \mathbf{m} . La proiezione su z di \mathbf{M} è $\mathcal{M}_z = -mB_0 \sin \alpha$; il segno meno si ha giacché la coppia tende ad allineare \mathbf{m} e \mathbf{B}_0 . Ne segue che il lavoro elementare di \mathbf{M} per una rotazione $d\alpha$ di \mathbf{m} è:

$$(73) \quad d\mathcal{L}_M = \mathcal{M}_z d\alpha = -mB_0 \sin \alpha d\alpha .$$

Di conseguenza

$$(74) \quad d\mathcal{U}_{\text{mecc}} = mB_0 \sin \alpha d\alpha .$$

Quello che interessa sono le variazioni di energia potenziale fra le varie posizioni e noi possiamo porre uguale a zero l'energia potenziale meccanica in una qualsiasi posizione. Se si sceglie (in analogia a quanto si è fatto per i dipoli elettrici) di porre zero l'energia potenziale meccanica quando \mathbf{m} e \mathbf{B}_0 sono normali fra loro ($\alpha = \pi/2$), l'energia potenziale meccanica in una qualsiasi posizione α è pari al lavoro che agenti esterni devono compiere per portare \mathbf{m} dalla posizione $\alpha = \pi/2$ a α

$$(75) \quad \mathcal{U}_{\text{mecc}} = mB \int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha = -mB_0 \cos \alpha = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0 .$$

Il segno negativo indica che la coppia che si esercita sulla spira tende ad allineare \mathbf{m} e \mathbf{B}_0 sicché questa è la posizione di energia minima.

Anche questa relazione è analoga a quella elettrostatica

$$(76) \quad \mathcal{U} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 .$$

⁽²⁷⁾ Come diremo meglio (par. 4.17) questa non è l'intera energia magnetica giacché energia va spesa per mantenere costanti le correnti (nella spira e quelle che producono il campo) al variare della orientazione della spira. Si trova che l'energia potenziale totale magnetica è pari a $-\mathcal{U}_{\text{mecc}}$.

Si deve sottolineare peraltro che mentre nella (76) per il caso elettrostatico interviene \mathcal{U} che è l'energia potenziale totale, nella (75) per il caso del dipolo magnetico interviene $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ che non è l'energia potenziale magnetica totale ma solo una parte di essa. La (75) può tuttavia essere usata per il calcolo delle forze con il principio dei lavori virtuali supponendo che la corrente nella spira resti costante.

Occorre sottolineare che molto spesso il momento magnetico di una spira e di una bobina viene definito come

$$(77) \quad \mathbf{m}' = \mu_0 N i \mathbf{S} \quad (\text{weber} \cdot \text{m}).$$

Questa scelta è collegata con l'uso esteso che per molto tempo si è fatto di un altro vettore (intensità del campo magnetico \mathbf{H}) come vettore fondamentale nella descrizione del campo magnetico al posto di \mathbf{B} : nel vuoto come si vedrà, è

$$(78) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}.$$

Le espressioni di \mathcal{M} , $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ e del campo rimangono analoghe a quelle per il dipolo elettrico con la definizione (77) del momento magnetico a patto di usare nelle formule \mathbf{H}_0 al posto di \mathbf{B}_0 . Naturalmente quei vettori⁽²⁸⁾ che dipendono da \mathbf{m} e che incontreremo in seguito hanno una diversa definizione e diverse dimensioni secondo la scelta fatta nel definire il momento magnetico.

Noi nel seguito useremo la definizione (69), ma è bene tenere presente la osservazione precedente perché è frequente trovare trattazioni ove è ancora mantenuta la scelta (77).

4.10. STRUMENTI DI MISURA DI CORRENTI

L'azione che si esercita in un campo magnetico su una bobina percorsa da corrente viene utilizzata per realizzare strumenti per la misurazione delle correnti (amperometri, galvanometri ecc.).

Uno schema di principio è indicato in figura 4.38. Una corrente stazionaria di intensità nota I_1 passa attraverso due solenoidi coassiali e crea nel breve spazio fra di essi un campo di induzione \mathbf{B}_0 approssimativamente uniforme ed il cui modulo è proporzionale a I_1 :

$$(79) \quad \mathbf{B}_0 = k_1 I_1.$$

In tale spazio è disposta la bobina attraversata dalla corrente stazionaria di cui si vuole misurare l'intensità I . Tale bobina è sottoposta ad una coppia, proporzionale a B_0 ed a I , creata dalla interazione magnetica; alla bobina è anche applicata una coppia di natura elastica che tende a mantenerla in una posizione ($\theta = 0$) di riposo. L'angolo θ di cui devia la bobina quando è attraversata da una corrente è proporzionale al prodotto $B_0 I$ e quindi:

$$(80) \quad \theta = k_2 B_0 I.$$

Le deviazioni θ possono essere rivelate per mezzo di un indice solidale con la bobina mobile che si muove in fronte ad una scala.

Nelle realizzazioni pratiche più importanti degli apparecchi di misura per corrente continua, il campo \mathbf{B}_0 uniforme è ottenuto invece che facendo passare una corrente nota in un avvolgimento, mediante l'impiego di un magnete permanente (cap. 5). La figura 4.39 dà lo schema di un normale galvanometro usato per misurare piccole intensità di corrente, fino ad un limite di circa 10^{-12} A . Il magnete che fornisce il campo uniforme \mathbf{B}_0 è a ferro di cavallo e fra le espansioni terminali è disposta la bobina C ; essa è sospesa ad un sottile filo la cui torsione, quando la bobina è percorsa da corrente, fornisce la reazione elastica. Il cilindro A di ferro dolce serve

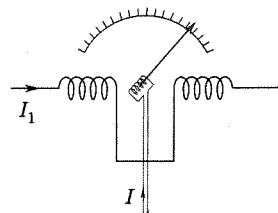


Fig. 4.38

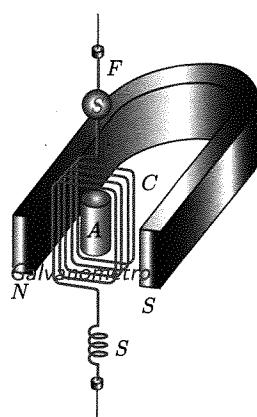


Fig. 4.39

⁽²⁸⁾ Quale il vettore di intensità di magnetizzazione (vedi cap. 5, par. 5.2).

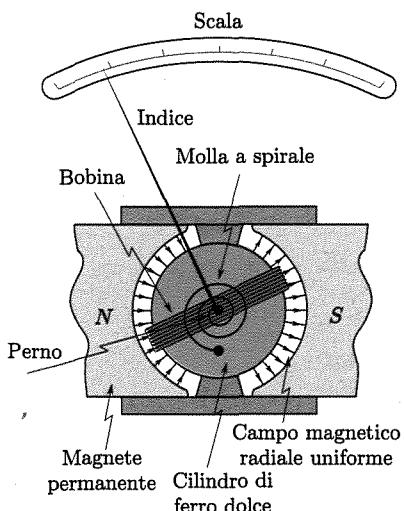


Fig. 4.40

Galvanometro usato per misurare una carica

a configurare opportunamente il campo magnetico in cui si trova la bobina. La sospensione porta anche solidalmente uno specchio *S*: un fascetto luminoso inviato su di esso viene riflesso e finisce per colpire una scala graduata; una rotazione della bobina e dello specchio di un angolo θ produce una rotazione 2θ del fascio riflesso aumentando così la sensibilità del dispositivo (sistema ad indice ottico). La sensibilità di questo strumento è misurata dalla intensità di corrente che produce uno spostamento di 1 mm dell'indice luminoso sulla scala posta ad 1 m dallo strumento: essa può raggiungere valori di 10^{-12} A/mm.

La figura 4.40 dà lo schema di un amperometro a perni: il campo magnetico è anche qui creato da un magnete permanente: il telaio della bobina mobile è posto su un cilindro di ferro dolce (in modo da far muovere la bobina in un campo magnetico radiale uniforme). La coppia di reazione elastica è creata da molle a spirale che sono usate anche per addurre la corrente alla bobina. Con questi strumenti la sensibilità è dell'ordine di circa 10^{-7} A per divisione.

Un galvanometro può essere anche usato per misurare quantità di elettricità messe in gioco in intervalli di tempo molto brevi. Se infatti la corrente passa nel circuito del galvanometro per un intervallo (Δt) breve rispetto al periodo proprio di oscillazione dell'equipaggio, il passaggio della corrente ha termine praticamente prima che l'equipaggio prenda a muoversi: in tali condizioni l'equipaggio riceve un impulso che è proporzionale a

$$\int_0^{\Delta t} i \, dt$$

cioè alla quantità di elettricità (Q) che è passata attraverso una sezione del circuito nel fenomeno impulsivo. Di conseguenza esso si muove e raggiunge una deviazione massima che è proporzionale a Q . I galvanometri da usare in questo tipo di misura (balistici) vengono realizzati in modo che l'equipaggio mobile abbia un lungo periodo di oscillazione libera e sia soggetto a coppie di richiamo molto piccole.

I galvanometri e gli amperometri⁽²⁹⁾ fin qui visti hanno una scala lineare: in essi la deviazione θ è una funzione lineare della corrente da misurare.

Un altro tipo di strumento può ottenersi usando lo schema di figura 4.38 e facendo circolare la stessa corrente da misurare tanto nella bobina mobile quanto in quelle fisse che creano il campo B_0 : la bobina mobile è anche qui soggetta ad una coppia elastica di richiamo. In tal caso la relazione fra deviazione e corrente diviene

$$(81) \quad \theta = kI^2$$

e la scala è quadratica. Vedremo in seguito importanti usi degli strumenti di questo tipo (elettrodinamometri).

■ 4.11. FORZE ELETTRICHE, FORZE MAGNETICHE ED INVARIANZA RELATIVISTICA DELLA CARICA

L'esistenza delle forze magnetiche fra cariche in moto è stata finora da noi stabilita esclusivamente come un risultato di esperienze le quali hanno consentito di valutarle e di fissare la definizione e le modalità di misura del vettore B_0 , induzione magnetica. L'espressione generale della forza fra cariche è data dalla espressione (1) nella quale al termine coulombiano si aggiunge un altro termine quando tanto le cariche che producono il campo

⁽²⁹⁾ Propriamente si distingue tra amperometri (milliamperometri, microamperometri, nanoamperometri) e galvanometri a seconda che gli strumenti siano a lettura diretta oppure no, cioè a seconda che la scala sia graduata in ampere o sottomultipli dell'ampere oppure in unità arbitrarie. Correntemente, peraltro, si usa chiamare galvanometri gli strumenti particolarmente sensibili, a indice ottico, atti a precise misurazioni di laboratorio, e amperometri gli strumenti usati per misurazioni correnti.

quanto quelle che ne risentono l'azione sono in moto:

$$(82) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0.$$

L'interazione fra cariche è quindi espressa come somma di una forza elettrica e di una forza magnetica. Per determinare sperimentalmente il valore di \mathbf{B}_0 in un punto si dovrebbe procedere come si è già detto nella seguente maniera: presa una particella di carica nota e postala ferma nel punto in considerazione si determini il valore della parte della forza (82) dovuta al campo elettrico ($q\mathbf{E}_0$); facendo poi passare la stessa carica per il punto successivamente con diversi valori di \mathbf{v} e misurando le corrispondenti forze \mathbf{F} si ha la maniera di determinare \mathbf{B}_0 .

È bene osservare che in questa procedura, come già nello scrivere la (82), si fa l'ipotesi che la carica (q) posseduta da un qualsiasi corpo sia *indipendente dalla velocità* con la quale esso si muove. Questa circostanza può essere presa come un *fondamentale risultato sperimentale*. Per dare evidenza a questa conclusione accenniamo ad alcune prove sperimentali:

- a. si supponga di avere a temperatura ambiente un corpo solido conduttore neutro, nel quale cioè le cariche degli ioni positivi che formano il reticolato sono perfettamente equilibrate da quelle degli elettroni liberi. Tale campione venga in seguito riscaldato: a ciò corrisponde una variazione della energia termica delle particelle. Siccome le masse degli elettroni e degli ioni positivi sono molto differenti, le velocità medie dei due tipi di particelle variano di quantità notevolmente diverse; di conseguenza, se la carica non fosse indipendente dalla velocità, il corpo originariamente neutro dovrebbe mostrare una carica totale diversa da zero quando la sua temperatura venga alterata. L'esperienza indica invece che il corpo resta neutro al variare della sua temperatura;
- b. le reazioni chimiche portano in genere a variazioni nelle associazioni di particelle cariche e ciò causa notevoli variazioni di velocità di alcuni elettroni. Se la carica non fosse indipendente dalla velocità si dovrebbero manifestare variazioni di carica in seguito a reazioni chimiche ed a tali variazioni sarebbero associati campi elettrici di intensità elevatissima. Ciò non è mai stato riscontrato;
- c. le determinazioni del rapporto e/m per le particelle beta (elettroni veloci) conducono a diversi valori di tale rapporto al variare della velocità delle particelle entro un campo abbastanza vasto; le differenze tuttavia sono interamente spiegate dalla dipendenza della massa dalla velocità in accordo con la teoria della relatività (vol. I, cap. 3, par. 3.11).

Si può accettare la conclusione che *la carica di un corpo è indipendente dalla sua velocità* e che osservatori diversi che si trovino in sistemi di riferimento diversi i quali determinino q nei loro sistemi devono giungere allo stesso valore: la carica cioè è relativisticamente invariante⁽³⁰⁾.

È importante ai fini di chiarire le relazioni fra le forze elettriche e magnetiche che sollecitano un corpo carico e quindi fra \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 , svolgere alcune considerazioni di teoria della relatività. Si vedrà in tal modo che la presenza delle forze magnetiche può essere legata alla validità della teoria della relatività in elettromagnetismo ed alla invarianza della carica,

⁽³⁰⁾ Ricordiamo che la carica oltre ad essere relativisticamente invariante, si conserva (cap. 1, par. 1.4).

ed apparire come una necessaria generalizzazione della legge di Coulomb. Per poter raggiungere questi importanti risultati è opportuno introdurre alcune relazioni di teoria della relatività a complemento delle nozioni date al par. 3.11 del cap. 3 del vol. I. Ciò è fatto nel prossimo paragrafo, prima di riprendere la discussione sull'elettrodinamica dei corpi in moto.

■ 4.12. COMPLEMENTI DI RELATIVITÀ

Vogliamo qui introdurre alcune relazioni di teoria della relatività speciale a complemento dei cenni dati al par. 3.11 del cap. 3 del vol. I. Come è noto la teoria della relatività si basa sui due postulati:

1. le leggi fisiche e le relazioni matematiche che le esprimono hanno la stessa forma in tutte le terne cartesiane che hanno un moto relativo uniforme fra loro, cioè in tutte le terne inerziali;
2. la velocità della luce nel vuoto (c) che si può misurare in ciascuno di questi sistemi inerziali è sempre la stessa indipendentemente dalla velocità della sorgente. La velocità della luce nel vuoto è cioè indipendente dalla velocità relativa fra sorgente ed osservatore.

Supponiamo di considerare due terne cartesiane, delle quali la prima sia x, y, z e la seconda abbia gli assi x', y', z' paralleli a quelli della prima. Le due terne coincidono all'istante $t = t' = 0$ e la seconda si sposti rispetto alla prima con velocità v diretta come x . In tali condizioni le trasformazioni di Lorentz che consentono di passare da (x, y, z, t) a (x', y', z', t') si scrivono⁽³¹⁾

$$(83) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

essendo

$$(84) \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Analogamente

$$(85) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

- a. **Contrazione Lorentz-Fitzgerald.** Supponiamo che lungo l'asse x' in x', y', z' vi sia una sbarra ferma in tale sistema. Noi vogliamo paragonare la lunghezza l_0 (di riposo) misurata da un osservatore (A') in x', y', z' con quella, l , determinata da un osservatore A in x, y, z . Supponiamo che ad un istante determinato da A (in x, y, z)

⁽³¹⁾ Le espressioni di queste relazioni di Lorentz si possono ottenere esprimendo che un'onda luminosa sferica che parta dall'origine comune dei due sistemi all'istante $t = t' = 0$ viaggia con la stessa velocità c in entrambi i sistemi.

l'osservatore A' rilevi le posizioni $x'(1)$, $x'(2)$ delle estremità della sbarra. Allora la lunghezza (l') misurata in x', y', z' , coincidente con la lunghezza di riposo, risulta

$$(86) \quad l' = l_0 = x'(2) - x'(1).$$

Perché l'osservatore A in x, y, z determini la lunghezza, l , della sbarra che si muove rispetto ad esso con la velocità v , egli deve applicare le trasformazioni di Lorentz alle coordinate $x'(1)$ e $x'(2)$. Si ha dalle (83)

$$(87) \quad l_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} [x(2) - vt(2) - x(1) + vt(1)]$$

e poiché $t(1)$ è lo stesso di $t(2)$

$$(88) \quad l_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} [x(2) - x(1)] = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

L'osservatore in A quindi rileva una lunghezza l più piccola della lunghezza di riposo nel rapporto $1 : 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. In ciò consiste la contrazione di Lorentz-Fitzgerald.

Si osservi che se la sbarra è disposta normalmente alla direzione della velocità v di traslazione di un sistema inerziale rispetto all'altro (come per esempio lungo y' o z') le determinazioni nei due sistemi coincidono ($l = l'$).

b. Espansione degli intervalli di tempo. L'osservatore A' posto in un punto nel sistema $x'y'z'$ (che si muove rispetto ad A) invii due segnali all'osservatore A (in xyz) in due istanti t'_1 e t'_2 .

L'intervallo di tempo fra di essi è per A'

$$(89) \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

I segnali sono ricevuti da A agli istanti t_1 e t_2 e quindi l'intervallo di tempo corrispondente secondo A è [per le (85)]

$$(90) \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_1 - t'_1 - \frac{v}{c^2} x'_2 \right].$$

Poiché l'osservatore A' è sempre nello stesso posto (in $x'y'z'$) si ha $x'_1 = x'_2$ e quindi

$$(91) \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

L'osservatore in A apprezza un intervallo di tempo Δt più lungo di quello $\Delta t'$ valutato da A' nel rapporto $1/\sqrt{1 - \beta^2} : 1$.

c. Velocità nei due sistemi. Dalla applicazione dei risultati ottenuti nei punti a. e b. si possono ricavare le relazioni che consentono di passare dalle componenti della velocità ($u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$, $u'_z = dz'/dt'$) di un punto nel sistema x', y', z' a quelle rilevate da un osservatore A in x, y, z , cioè $u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$, $u_z = dz/dt$. Ricordiamo che il sistema x', y', z' si muove rispetto a x, y, z con velocità \mathbf{v} diretta come x . Si ottiene

$$(92) \quad \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \end{aligned}$$

d. Dipendenza della massa dalla velocità e relazione fra massa ed energia. Senza addentrarci nella dimostrazione, la teoria della relatività conduce, come già è stato accennato al par. 3.12 del cap. 3 del vol. I, a riconoscere che:

1. la massa di un corpo dipende dalla sua velocità

$$(93) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

essendo m_0 la massa di riposo.

2. esiste una relazione fra massa ed energia (E)

$$(94) \quad E = mc^2.$$

Se si definisce come *energia di riposo* la quantità

$$(95) \quad E_0 = m_0 c^2$$

si trova per l'energia cinetica T che un corpo ha per effetto del suo moto

$$(96) \quad T = E - E_0 = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right].$$

e. Relazioni per la trasformazione delle forze. Le espressioni nei due sistemi per la forza che agisce su uno stesso corpo sono

$$(97) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{u}) = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \mathbf{u} \right) \\ \mathbf{F}' &= \frac{d}{dt'} \mathbf{p}' = \frac{d}{dt'} (m' \mathbf{u}') = m_0 \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} \mathbf{u}' \right). \end{aligned}$$

Con trasformazioni che utilizzano le relazioni dei precedenti punti si ottengono le seguenti relazioni fra le componenti di \mathbf{F} ed \mathbf{F}' :

$$(98) \quad \begin{aligned} F_x &= F'_x + \frac{u'_y v}{c^2 + u'_x v} F'_y + \frac{u'_z v}{c^2 + u'_x v} F'_z \\ F_y &= \frac{c^2}{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c^2 + u'_x v)} F'_y \\ F_z &= \frac{c^2}{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c^2 + u'_x v)} F'_z. \end{aligned}$$

Nel seguito delle nostre considerazioni noi useremo le (98) nel caso particolare in cui $\mathbf{u}' = 0$. Esse allora si semplificano in:

$$(99) \quad \begin{aligned} F_x &= F'_x \\ F_y &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_y = \sqrt{1 - \beta^2} F'_y \\ F_z &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} F'_z = \sqrt{1 - \beta^2} F'_z. \end{aligned}$$

■ 4.13. ELETTRODINAMICA DEI CORPI IN MOTO. VETTORI E_0 E B_0

La teoria della relatività, come si è detto, è stata originata da considerazioni svolte nell'ambito dell'elettromagnetismo⁽³²⁾. Anche per i fenomeni elettromagnetici le leggi fisiche devono avere la medesima validità in tutti i sistemi di riferimento inerziali e dalla conoscenza dell'andamento di un processo in un sistema inerziale deve essere possibile determinare come esso appaia ad un osservatore in un altro sistema inerziale.

È possibile far vedere come in questo quadro l'esistenza di una forza magnetica fra cariche in moto sia una conseguenza necessaria della invarianza della carica e della validità della legge di Coulomb (fra cariche ferme) in un qualsiasi sistema inerziale.

Naturalmente noi non faremo una trattazione completa della questione ma ci limiteremo, considerando casi particolari, ad alcuni cenni sufficienti a lumeggiare i punti più importanti delle considerazioni che conducono al risultato generale ora accennato. Noi assumeremo che:

1. la carica sia relativisticamente invariante, cioè conservi lo stesso valore in una qualsiasi terna inerziale;
2. la forza esercitata da una distribuzione statica di cariche su una carica puntiforme sia esprimibile in qualsiasi terna inerziale mediante l'impiego della legge di Coulomb.

Si osservi (fig. 4.41) che la forza su una carica puntiforme dovuta ad una distribuzione di cariche fisse nel sistema che si considera è la stessa tanto se la carica puntiforme è anche essa fissa, quanto se essa si muove con una velocità v . Questa circostanza può essere presa come un risultato di esperienze condotte in un campo molto vasto di velocità v ⁽³³⁾, ma può anche essere spiegata facilmente nel quadro delle considerazioni relativistiche del tipo di quelle che faremo fra breve.

In conseguenza della seconda ipotesi per determinare la forza su una carica (in moto o no) dovuta ad una distribuzione statica possono essere applicate le considerazioni elettrostatiche da noi svolte precedentemente, qualunque sia la terna inerziale che si considera. In particolare notiamo, per il seguito delle nostre considerazioni, che la legge di Gauss mantiene la sua validità in una qualsiasi terna inerziale.

Ciò premesso supponiamo di avere due terne inerziali x, y, z , e x', y', z' ad assi paralleli ed una distribuzione lineare di cariche (positive o negative) lungo l'asse x . La terna x', y', z' si muova rispetto a xyz con una velocità $(-v)$ diretta lungo x (fig. 4.42a).

L'osservatore nella terna x, y, z rilevi che le cariche siano ferme ed occupino una lunghezza l con una densità lineare (che supponiamo uniforme) pari a

$$(100) \quad \gamma = \frac{Q}{l}$$

essendo Q la carica totale. All'osservatore in x', y', z' la terna x, y, z (e la distribuzione di cariche) appare muoversi verso destra lungo x' con velocità v (fig. 4.42b). Mentre Q resta invariata ed ha quindi lo stesso valore in (x', y', z') la lunghezza della distribuzione diviene

$$(101) \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \sqrt{1 - \beta^2}.$$

⁽³²⁾ Il primo lavoro di Einstein (1905) sulla relatività aveva il titolo *Sulla elettrodinamica dei corpi in moto*. Inoltre Lorentz già precedentemente era giunto per la elettrodinamica dei corpi in moto ad una formulazione molto prossima a quella della relatività.

⁽³³⁾ In accordo con questi risultati la forza su una carica in moto in presenza di altre cariche è stata espressa come somma di due termini, il primo che rappresenta la interazione con le cariche statiche nel sistema di riferimento usato e l'altra che rappresenta la interazione con cariche anche esse in moto: la prima interazione non dipende da v e si ottiene tramite il campo E_0 cioè essa è espressa mediante la legge di Coulomb.

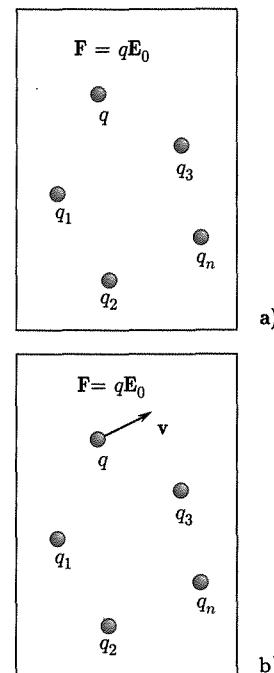


Fig. 4.41

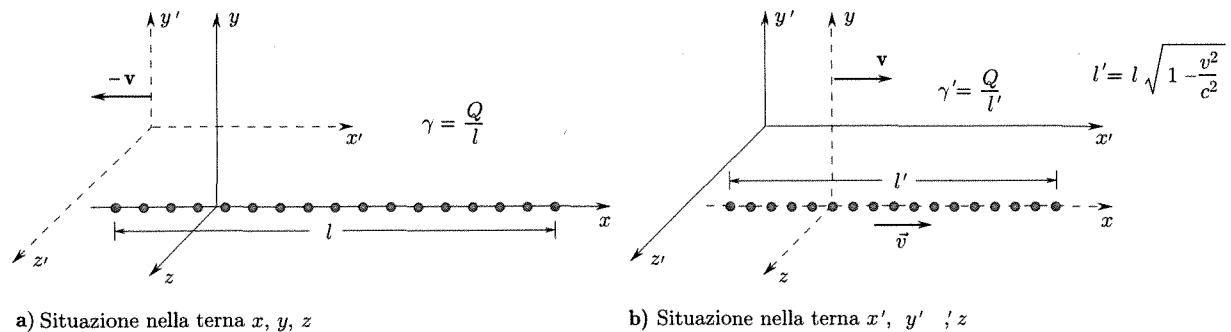


Fig. 4.42

Di conseguenza la densità della distribuzione assume il valore

$$(102) \quad \gamma' = \frac{Q}{l\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

È questa circostanza, cioè il fatto che la densità della distribuzione di carica nella direzione x, x' è diversa nelle due terne, quella che è alla base delle considerazioni che vogliamo svolgere per chiarire le relazioni fondamentali fra i campi \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 .

Si osservi che eventuali distribuzioni in direzione perpendicolare a x ed x' (per esempio lungo y o z nella terna x, y, z) non cambiano densità nelle terne inerziali considerate giacché le lunghezze misurate in queste direzioni assumono gli stessi valori nelle due terne.

Consideriamo ora una corrente (di intensità i) in un filo rettilineo di lunghezza molto grande (praticamente infinito) ed una carica q che si muova rispetto al filo con una velocità v , che, per semplicità, supponiamo parallela al filo e diretta nel verso opposto alla corrente. La carica si trovi ad una distanza r dall'asse del filo. La figura 4.43a schematizza la situazione in un sistema x, y, z legato al conduttore.

Il conduttore può essere considerato ai fini che a noi interessano (fig. 4.43b) come una doppia distribuzione lineare (nella direzione x) di cariche: le cariche positive sono gli ioni del reticolato cristallino e sono fisse nel sistema di riferimento x, y, z le cariche negative sono elettroni che si muovono lungo x con una velocità che per semplicità di calcolo⁽³⁴⁾ supponiamo ancora pari a v .

Per la neutralità del conduttore le densità lineari delle cariche positive γ_+ e di quelle negative γ_- misurate in x, y, z , devono essere uguali:

$$(103) \quad \gamma_+ = \gamma_- = \gamma.$$

Di conseguenza il campo elettrico nel punto ove istante per istante viene a trovarsi la carica

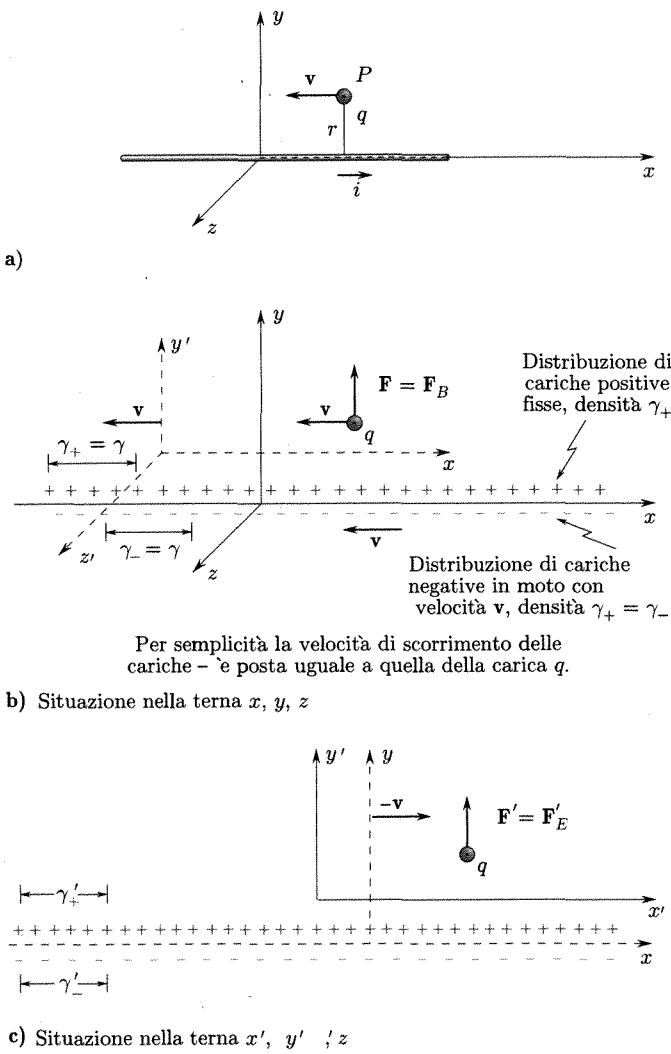


Fig. 4.43

⁽³⁴⁾ I risultati non cambiano nella loro sostanza nel caso generale in cui la velocità di scorrimento degli elettroni sia diversa da quella del moto della carica q .

q , è nullo e nessuna forza elettrica agisce su q . In queste condizioni si è visto che sulla carica q si esercita una forza magnetica

$$(104) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0.$$

In questo caso, secondo la legge di Biot e Savart, il vettore \mathbf{B}_0 in P è diretto perpendicolarmente al foglio del disegno e verso l'esterno del foglio. Il suo modulo vale:

$$(105) \quad |\mathbf{B}_0| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \gamma v.$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$ (ed \mathbf{F} se q è positiva) è un vettore nel piano del foglio, normale al conduttore e diretto nel verso dal conduttore al punto P . Il modulo di \mathbf{F} vale

$$(106) \quad |\mathbf{F}| = qv^2 \gamma \frac{\mu_0}{2\pi r}.$$

Consideriamo ora la situazione quale va descritta da un osservatore in un'altra terna inerziale x', y', z' che per semplicità supponiamo ad assi paralleli a x, y, z : ovviamente tutte e due le descrizioni in x, y, z ed x', y', z' dovranno sempre condurre a riconoscere la medesima circostanza, cioè quella che la carica è sollecitata ad allontanarsi dal conduttore. Consideriamo in particolare quella terna inerziale che si muova rispetto a x, y, z nella direzione x con velocità v come indicato in figura 4.43b. In tale terna la carica q è ferma, la distribuzione di cariche negative è ferma, e quella di cariche positive si muove con la velocità $-v$. La densità di queste due distribuzioni, misurate in x', y', z' , risultano rispettivamente

$$(107) \quad \gamma'_+ = \frac{\gamma_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$(108) \quad \frac{\gamma'_-}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma_- = \gamma.$$

Esse non sono più uguali fra loro (fig. 4.43c) come era nella terna x, y, z . In particolare per la densità delle cariche positive $\gamma'_+ > \gamma$ e per la densità delle cariche negative $\gamma'_- < \gamma$. Di conseguenza per l'osservatore in x', y', z' la distribuzione di cariche nel filo ha una densità netta diversa da zero:

$$(109) \quad \gamma' = \gamma'_+ - \gamma'_- = \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \beta^2} \right) = \gamma \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Una tale distribuzione crea un campo elettrico la cui intensità \mathbf{E}'_0 nel punto P si ottiene applicando il teorema di Gauss ad un cilindro di lunghezza unitaria coassiale con il filo e passante per P :

$$(110) \quad E'_0 = \frac{\gamma'}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi r}.$$

La forza esercitata dal campo elettrico \mathbf{E}'_0 sulla carica q è diretta normalmente al filo conduttore: essa ha il verso dal conduttore alla carica se q è positiva; il suo modulo vale:

$$(111) \quad |\mathbf{F}'| = |\mathbf{F}'_E| = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \gamma \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sulla carica q nel sistema x', y', z' non si esercita alcuna forza magnetica giacché in tale sistema la carica q è ferma.

In conclusione l'osservatore in x, y, z osserva agire su q una forza di natura puramente magnetica \mathbf{F}_B (dovuta a \mathbf{B}_0), l'osservatore in x', y', z' osserva una forza \mathbf{F}_E di natura puramente elettrica (dovuta ad \mathbf{E}'_0). Le due forze sono dirette normalmente al filo conduttore ed allontanano la carica dal filo se q è positiva.

Vogliamo infine osservare che, come si è visto, la teoria della relatività consente di passare dalla descrizione di un processo in un sistema inerziale a quella in un altro

sistema ancora inerziale. Consideriamo perciò la descrizione nel sistema x', y', z' nel quale il processo è descritto esclusivamente mediante la legge di Coulomb a noi nota dalla elettrostatica ed applichiamo le formule relativistiche per ottenere la espressione della forza nel sistema x, y, z . In questo caso la forza che nel sistema x', y', z' agisce sulla carica q fissa è data dalla (111); essa è diretta come z' (cioè $F'_x = F'_y = 0$). Dalle (99) si ha allora

$$(112) \quad \begin{aligned} F_x &= F_y = 0 \\ F_z &= \sqrt{1 - \beta^2} F'_z = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} \gamma. \end{aligned}$$

La forza \mathbf{F} è appunto diretta come \mathbf{F}' ed il suo modulo ha la stessa espressione (106) che si è trovata nella descrizione mediante la forza magnetica in xyz , se si pone

$$(113) \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2.$$

Si troverà in seguito appunto che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto (c) si esprime in termini di ϵ_0 e μ_0 mediante la (113).

Noi abbiamo qui considerato un caso molto particolare che peraltro può essere generalizzato. Si riconosce che le azioni fra cariche elettriche hanno una loro natura ben precisa, che noi chiamiamo elettromagnetica, la cui descrizione è fatta da noi per mezzo di forze elettriche e forze magnetiche: la suddivisione nei due contributi dipende dal sistema inerziale in cui l'osservatore si trova. In casi particolari, quali quello avanti considerato può essere possibile passare da una terna inerziale in cui la descrizione della interazione fra le cariche va fatta esclusivamente in termini di forze elettriche, ad un'altra in cui la descrizione va fatta esclusivamente in termini di forze magnetiche. In genere in una qualsiasi terna inerziale l'interazione richiede per la sua descrizione la considerazione di forze elettriche e forze magnetiche. Ciò è espresso dalla espressione generale della forza (1).

Le considerazioni precedenti sono particolarmente importanti per chiarire i rapporti fra i vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 che comunemente vengono usati nello studio dei processi elettromagnetici in una qualsiasi terna inerziale: le forze elettriche nella descrizione di un processo in un sistema inerziale si trasformano in forze magnetiche nella descrizione dello stesso processo in un altro sistema inerziale. La descrizione del processo può essere fatta indifferentemente in un qualsiasi sistema inerziale.

Questa trasformazione di forze elettriche in magnetiche e viceversa al variare del sistema di riferimento mostra come l'introduzione delle forze magnetiche scenda come una conseguenza necessaria dalla legge di Coulomb, dall'invarianza relativistica della carica e dalla validità della teoria della relatività in elettromagnetismo.

4.14. PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI \mathbf{B}_0

Le proprietà fondamentali del campo vettoriale \mathbf{B}_0 creato da distribuzioni di cariche in moto stazionario sono due e si riferiscono, se espresse in termini integrali (come nel caso del campo elettostatico),

- al flusso attraverso una superficie chiusa;
- all'integrale di linea lungo una curva chiusa (circuitazione);

esse in altri termini esprimono legami fra i valori che il vettore assume in vari punti. Anche nel caso del campo magnetico queste proprietà possono essere espresse in equazioni differenziali che legano i valori del vettore \mathbf{B}_0 in punti infinitamente vicini.

a. Flusso di \mathbf{B}_0 attraverso una superficie chiusa.

Nella descrizione dei campi magnetici creati da varie correnti stazionarie (par. 4.7) abbiamo riscontrato e sottolineato il fatto che le linee di induzione sono sempre chiuse: è questa una conclusione generale, valida

qualunque sia la distribuzione di correnti stazionarie che crea il campo e valida anche, come si vedrà in seguito, se il campo è creato da materiali magnetici polarizzati: in questo caso le linee escono da una regione del materiale, entrano attraverso un'altra e si chiudono nell'interno del materiale. In ogni caso quindi se si considera una superficie chiusa S nel campo del vettore \mathbf{B}_0 , giacché ogni linea di induzione che entra in S deve anche uscirvi, si ha che il flusso attraverso S è nullo:

$$(114) \quad \int_S \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 0 .$$

Il flusso di \mathbf{B}_0 attraverso una superficie chiusa è sempre zero

La (114) è in un certo senso corrispondente alla legge di Gauss per l'elettrostatica; la differenza fra le due relazioni, la (114) e la (44) del cap. 1, sottolinea il fatto che per il campo del vettore \mathbf{B}_0 non esistono sorgenti puntiformi discrete che possano essere isolate come è per le sorgenti (cariche) del campo elettrico; il campo del vettore \mathbf{B}_0 è sempre un campo di dipolo.

La (114) è l'espressione di una proprietà fondamentale del campo \mathbf{B}_0 in termini di flusso attraverso una superficie chiusa estesa. L'applicazione del teorema della divergenza in maniera analoga a quanto fatto per la legge di Gauss (cap. 1, par. 1.9) fornisce l'espressione differenziale di tale proprietà:

$$(115) \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \quad (\Delta \cdot \mathbf{B}_0 = 0) .$$

III equazione di Maxwell

Questa espressione resta valida anche in un mezzo materiale⁽³⁵⁾ ed anche se il campo magnetico varia nel tempo: essa costituisce una delle leggi fondamentali del campo elettromagnetico ed una delle equazioni di Maxwell.

b. Circuitazione di \mathbf{B}_0 . Legge di Ampère.

Consideriamo dapprima il caso di un campo magnetico creato da un conduttore rettilineo di lunghezza infinita (diretto come l'asse z di un sistema di riferimento) percorso da corrente stazionaria e calcoliamo l'integrale di linea

$$(116) \quad \int_A^B \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l}$$

lungo una curva quale quella in figura 4.44a. Si consideri il contributo corrispondente al generico elemento $d\mathbf{l}$ quale quello fra P_1 e P_2 . Siccome \mathbf{B}_0 in P_1 giace nel piano normale a z (corrente i) si è riportato nella figura 4.44b la posizione di \mathbf{B}_0 e della proiezione di $d\mathbf{l}$ sul piano orizzontale. La proiezione di $d\mathbf{l}$ sulla direzione di \mathbf{B}_0 risulta evidentemente $r d\alpha$ se r è la distanza di P_1 da z e $d\alpha$ è positivo nel verso antiorario. Si ottiene quindi

$$(117) \quad \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = B_0 r d\alpha$$

ed usando per il campo l'espressione (47) di Biot e Savart

$$(118) \quad \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\alpha .$$

⁽³⁵⁾ Al posto di \mathbf{B}_0 andrà sostituito un vettore \mathbf{B} opportunamente definito (cap. 5, par. 5.2).

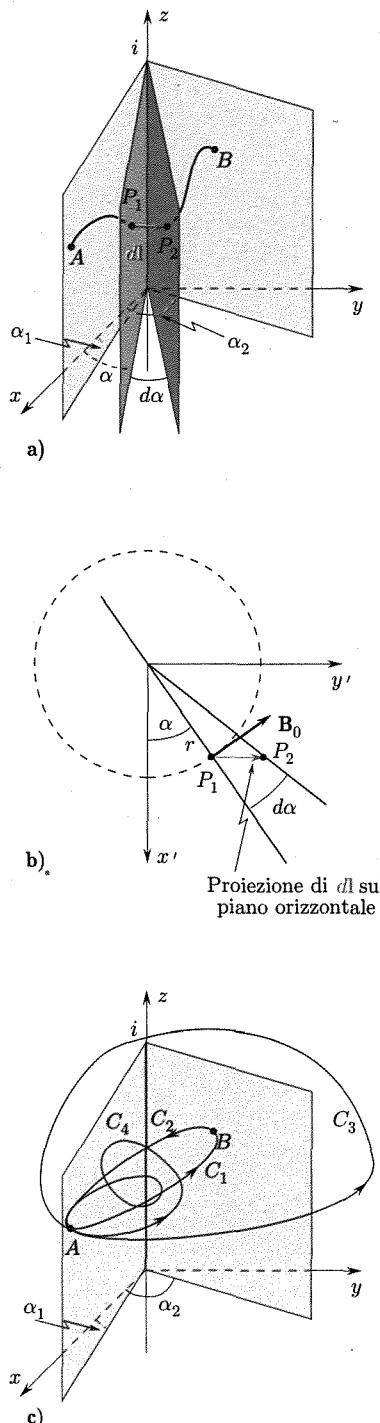


Fig. 4.44

Il fatto che \mathbf{B}_0 sia inversamente proporzionale ad r rende il contributo all'integrale di linea corrispondente a dl dipendente esclusivamente da $d\alpha$ ed indipendente dalla distanza r . Si ha quindi per il percorso AB di figura 4.44a

$$(119) \quad \int_A^B \mathbf{B}_0 \cdot dl = \frac{\mu_0}{2\pi} i (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Si considerino (fig. 4.44c) due qualsiasi linee (C_1 , C_2) del tipo di quelle di figura 4.44a e che vadano da A a B . Siccome lungo le due linee

$$(120) \quad \int_{AC_1}^A \mathbf{B}_0 \cdot dl = \int_{AC_2}^B \mathbf{B}_0 \cdot dl$$

si ha per la circuitazione lungo la linea C formata dalla C_1 , da A a B e dalla C_2 percorsa da B ad A

$$(121) \quad \oint_C \mathbf{B}_0 \cdot dl = \int_{AC_1}^B \mathbf{B}_0 \cdot dl - \int_{BC_2}^A \mathbf{B}_0 \cdot dl = 0.$$

La circuitazione lungo la linea chiusa considerata è zero. Questo risultato non vale qualunque sia la linea chiusa C . Finora abbiamo considerato il caso in cui la linea C non circondi il conduttore percorso da corrente: per tutte le linee chiuse di questo tipo la circuitazione è zero. Consideriamo ora una linea chiusa come la C_3 di figura 4.44c che abbracci una sola volta il conduttore. Per essa (36):

$$(122) \quad \oint_{C_3} \mathbf{B}_0 \cdot dl = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} id\alpha = \mu_0 i.$$

La circuitazione è positiva nel caso considerato in cui il verso di percorrenza di C_3 è lo stesso delle linee di induzione create da i .

Per una linea come la C_4 che abbraccia due volte il conduttore

$$(123) \quad \oint_{C_4} \mathbf{B}_0 \cdot dl = \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 4\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} id\alpha = 2\mu_0 i.$$

In genere, per una linea chiusa che circondi n volte il conduttore si ha

$$(124) \quad \oint \mathbf{B}_0 \cdot dl = \pm n \mu_0 i.$$

La circuitazione è positiva se il verso di percorrenza della linea è lo stesso del verso delle linee di induzione create dalla corrente.

È questa l'espressione generale della circuitazione lungo una linea chiusa nel campo creato da una corrente in un conduttore rettilineo di lunghezza infinita e di cui la (121) costituisce il caso

(36) La ragione di porre il fattore k nella relazione (39) sotto la forma $\mu_0/4\pi$ è proprio quella di fare scomparire il fattore 4π nella espressione della circuitazione che qui calcoliamo ed ottenere per essa una forma semplice, così come è stato fatto in elettrostatica ($1/4\pi\varepsilon_0$ e legge di Gauss). Vedi appendice I.

particolare, quello in cui la linea non circondi il conduttore o, come si usa dire, non sia concatenata con esso⁽³⁷⁾.

Questo risultato può essere facilmente esteso al caso in cui la linea chiusa (C) che si considera abbracci vari conduttori rettilinei come in figura 4.45 attraversati da correnti stazionarie. In tale figura per maggiore chiarezza del disegno i conduttori sono stati segnati tratteggiati al di sotto del piano in cui per semplicità supponiamo giaccia la linea C . Siccome il campo magnetico è la somma di quelli dovuti alle singole correnti si ha

$$(125) \quad \oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \sum \mu_0 i ,$$

dando alle correnti segni opportuni: precisamente, fissato il verso della linea chiusa secondo cui si calcola la circuitazione sono da considerare positive le correnti abbracciate che determinano linee di induzione orientate nel medesimo verso di C (per esse i corrispondenti contributi ai termini $\mathbf{B}_0 \cdot dl$ sono positivi). Nella figura 4.45 la corrente i_1 è da considerarsi positiva, le i_2 , i_3 , i_4 negative.

La (124) e la (125) sono state da noi stabilite nel caso di campo creato da correnti stazionarie in conduttori rettilinei molto lunghi. Esse valgono tuttavia qualunque sia la forma dei circuiti percorsi dalle correnti. Noi non daremo la corrispondente dimostrazione e prenderemo la validità delle (124) e (125) per il caso di campi magnetici creati da correnti stazionarie in circuiti di forma qualsiasi (conduttori non rettilinei) come un postulato sostanziato dal fatto che le conseguenze che da esse si deducono si trovano in accordo perfetto con l'esperienza.

La (125) può essere presa come espressione della legge di Ampère o della circuitazione: in una regione che contiene correnti stazionarie la circuitazione del vettore \mathbf{B}_0 lungo una linea chiusa orientata qualsiasi è pari al prodotto di μ_0 e della somma delle correnti abbracciate dalla linea: le correnti sono da portarsi in conto con il segno + o - a seconda che le linee di induzione del campo creato da ciascuna di esse abbiano verso concorde o discorde con quello della linea orientata.

La circuitazione di \mathbf{B}_0 lungo una qualsiasi linea chiusa è pari a μ_0 volte la somma delle correnti concatenate con la linea

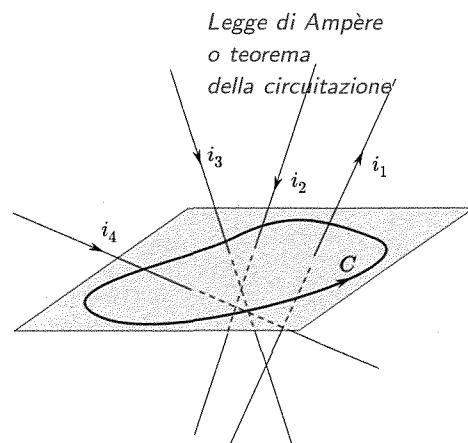


Fig. 4.45

(37) Data una linea orientata l ed una curva chiusa s , si dice che la l è *concatenata* con la s se non esiste alcuna superficie che abbia s come contorno e non sia attraversata dalla l (fig. 4.46a). Nel caso di attraversamenti multipli si dovrà badare al senso in cui essi avvengono, attribuendo pesi opposti ad attraversamenti che hanno luogo in senso opposto. Il numero totale di attraversamenti prende allora il nome di "ordine di concatenazione". Ad esempio in figura 4.46b la l e la s hanno una concatenazione del primo ordine mentre in figura 4.46c la concatenazione è del secondo ordine.

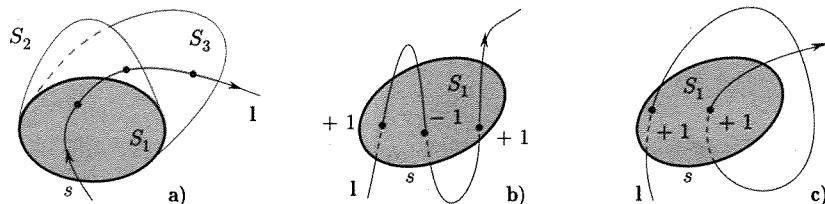


Fig. 4.46

Se in particolare la linea non abbraccia alcuna corrente la circuitazione è zero.

La legge di Ampère nella forma integrale ora scritta può essere impiegata per risolvere problemi particolari. Come esempio calcoliamo il campo nell'interno di un solenoide di lunghezza infinita (fig. 4.47a).

Per il seguente calcolo occorre solo conoscere il fatto sperimentale che il campo di induzione fuori del solenoide nella vicinanza delle sue spire è, nei casi pratici, molto basso e diviene sempre più piccolo quanto più il solenoide diviene lungo e le spire fitte: si può perciò ammettere che esso sia nullo per un solenoide di lunghezza infinita.

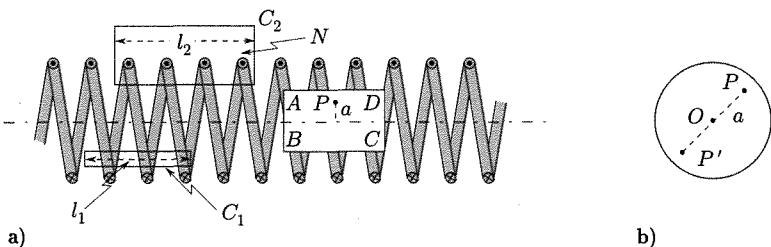


Fig. 4.47

Si osservi ora che nell'interno dell'avvolgimento per ragioni di simmetria il valore di \mathbf{B}_0 deve avere modulo che può dipendere solo dalla distanza (a) del punto generico P dall'asse del solenoide ed orientamento simmetrico rispetto a tale asse per punti (P, P') che in una sezione normale (fig. 4.47b) sono simmetrici rispetto alla traccia dell'asse (O). Inoltre sempre per ragioni di simmetria la distribuzione dei valori di \mathbf{B}_0 in una sezione normale all'asse deve essere indipendente dalla posizione della sezione stessa. Se pertanto si considera nell'interno del solenoide una qualsiasi superficie chiusa cilindrica a generatrici parallele all'asse (come quella che in figura ha la traccia $ABCD$), la condizione che sia

$$\int_S \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

porta di conseguenza che il vettore \mathbf{B}_0 deve, nell'interno del solenoide di lunghezza infinita, essere ovunque parallelo all'asse. Se inoltre si considera una linea chiusa come la C_1 in figura 4.47a e si applica la legge di Ampère si ha

$$\oint_{C_1} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = B_{01} l_1 - B_{02} l_1 = 0$$

essendo B_{01} e B_{02} i moduli di \mathbf{B}_0 alle distanze a_1 ed a_2 dall'asse:

$$(126) \quad B_{01} = B_{02} .$$

Potendosi ripetere queste considerazioni per qualsiasi linea chiusa del tipo della C_1 , si conclude che nell'interno del solenoide il vettore \mathbf{B}_0 ha ovunque lo stesso valore: il suo campo è uniforme.

Si consideri ora una linea chiusa che si svolga parte nell'interno e parte all'esterno dell'avvolgimento come la C_2 in figura. La circuitazione di \mathbf{B}_0 lungo essa, essendo \mathbf{B}_0 nullo all'esterno del solenoide fornisce

$$\oint_{C_2} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = B_0 l_2 = \mu_0 N i$$

e quindi per il modulo del vettore \mathbf{B}_0 nell'interno di un solenoide di lunghezza infinita vale

$$(127) \quad B_0 = \mu_0 \frac{N}{l_2} i = \mu_0 n i .$$

Queste conclusioni valgono con buona approssimazione anche per solenoidi di lunghezza finita, ma molto lunghi rispetto alle dimensioni trasversali e limitatamente alle regioni interne all'avvolgimento lontane dagli estremi.

L'espressione integrale della legge di Ampère può essere trasformata in una espressione differenziale di uso molto esteso. Per far ciò conviene innanzitutto esprimere nel secondo membro la somma delle intensità di corrente mediante il flusso del vettore densità di corrente.

Si consideri una qualsiasi superficie S che ha come bordo la linea orientata lungo cui si calcola la circuitazione di \mathbf{B}_0 (fig. 4.48) e si orienti la normale in modo da vedere dalla parte positiva della superficie S la linea orientata nel verso antiorario. In queste condizioni

$$(128) \quad \Sigma i = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS,$$

essendo \mathbf{j} il vettore densità di corrente. Si osservi che \mathbf{j} è zero ovunque tranne nelle aree intersezioni con S dei conduttori. Si può quindi scrivere

$$(129) \quad \oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Applicando il teorema di Stokes (cap. 1, par. 1.12) si può trasformare l'integrale a primo membro lungo la linea l in un integrale di superficie esteso alla stessa superficie S che ha l come bordo e che è stata usata per la (128). Si ha

$$(130) \quad \oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS.$$

La (129) allora diviene:

$$(131) \quad \int_S \text{rot } \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Si ha quindi:

$$(132) \quad \int_S (\text{rot } \mathbf{B}_0 - \mu_0 \mathbf{j}) \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Questa relazione vale per qualsiasi superficie S che ha la linea l come bordo. Ciò richiede che sia

$$(133) \quad \text{rot } \mathbf{B}_0 - \mu_0 \mathbf{j} = 0,$$

cioè:

$$(134) \quad \text{rot } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j} \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}.$$

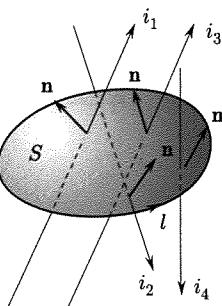


Fig. 4.48

*IV equazione di Maxwell
per i casi stazionari*

È questa la espressione differenziale della legge di Ampère (o della circuitazione) e rappresenta una delle due importanti proprietà del campo magnetico creato da correnti stazionarie.

4.15. POTENZIALE SCALARE

Le due proprietà fondamentali del campo magnetostatico \mathbf{B}_0 nel vuoto sono rappresentate dalle relazioni

$$(135) \quad \begin{cases} \text{div } \mathbf{B}_0 = 0 \\ \text{rot } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}. \end{cases}$$

La prima, come si è detto, ha validità generale in tutto l'elettromagnetismo, la seconda è valida soltanto in casi stazionari.

Richiamiamo le due equazioni analoghe che rappresentano le proprietà fondamentali del campo elettrostatico nel vuoto:

$$(136) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0. \end{cases}$$

La prima ha validità generale in elettromagnetismo mentre la seconda è valida solo in elettrostatica.

Il calcolo di \mathbf{E}_0 può essere fatto partendo dalla applicazione della legge di Coulomb per ottenere le azioni che su una nuova carica esercitano le singole cariche che costituiscono una data distribuzione. Abbiamo visto in elettrostatica come questo calcolo venga estremamente semplificato dalla introduzione della funzione potenziale e dalla applicazione di metodi analitici (equazione di Poisson ecc.).

Si pone la questione di vedere se anche nel caso del vettore \mathbf{B}_0 si possa seguire una via analoga la quale consenta di introdurre metodi analitici nel calcolo del campo magnetico creato da distribuzioni di correnti. La differenza fra i due casi dei vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 diviene evidente se si considera che mentre il campo elettrostatico è conservativo ($\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$) il campo magnetostatico in genere non lo è [seconda delle (135)]. Si osservi tuttavia che se ci si limita a considerare esclusivamente punti che non fanno parte dei circuiti in cui passano le correnti, cioè regioni ove $\mathbf{j} = 0$, si ha

$$(137) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = 0$$

e quindi si può pensare di introdurre una funzione potenziale scalare analogamente al caso elettrostatico. Questa procedura ha naturalmente limitazioni molto gravi; tuttavia essa riesce utile in alcuni casi di notevole interesse.

Per vedere come si possa procedere per stabilire una espressione per la funzione potenziale scalare e dedurre le sue proprietà, consideriamo un caso semplice ma molto importante, quello di una spira percorsa da corrente (fig. 4.49). Sia P il punto nel quale si vuole determinare \mathbf{B}_0 ed Ω l'angolo solido sotto cui si vede da P la spira. Se si immagina che il punto P subisca uno spostamento $d\mathbf{s}$, l'angolo solido subisce una variazione $d\Omega$, che è identica a quella che si verifica nel caso che P resti fermo e tutta la spira si sposti di $-d\mathbf{s}$. Per ottenere allora $d\Omega$, si divida la spira in elementi dl e si osservi che $d\Omega$ è la somma di tutte le variazioni elementari dell'angolo solido intercettati dai parallelogrammi di lati $(-ds)$ e dl (vedi figura).

Per ottenere l'incremento dovuto ad uno di questi parallelogrammi, cominciamo con il proiettarne la sua superficie sulla direzione del vettore \mathbf{r} che vada da P a dl : si ottiene $-(ds \times dl) \cdot \mathbf{r}/r$ e quindi l'incremento elementare dell'angolo solido corrispondente vale

$$-(ds \times dl) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -ds \cdot \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

La variazione totale dell'angolo solido è quindi

$$(138) \quad d\Omega = -ds \cdot \int \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3},$$

essendo l'integrale esteso alla spira. D'altra parte, si ha che in maniera del tutto generale si può scrivere:

$$(139) \quad d\Omega = \operatorname{grad} \Omega \cdot d\mathbf{s}.$$

Potenziale scalare magnetico

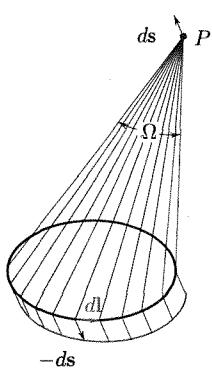


Fig. 4.49

Dalla (138) e (139) si ha:

$$(140) \quad -\text{grad } \Omega = \int \frac{dl \times r}{r^3},$$

essendo l'integrale esteso alla spira.

Se si tiene conto che in base alla prima formula di Laplace il vettore \mathbf{B}_0 in P vale

$$(141) \quad \mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl \times r}{r^3},$$

essendo l'integrale esteso alla linea della spira, si ha

$$(142) \quad \mathbf{B}_0 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{grad } \Omega.$$

La (142) indica che la funzione scalare

$$(143) \quad \mathcal{U} = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \Omega$$

Il potenziale scalare magnetico è una funzione polidroma

è una funzione il cui gradiente cambiato di segno fornisce l'induzione magnetica \mathbf{B}_0 .

Ricordiamo che la funzione ora introdotta ha una limitazione fondamentale: non vale nell'interno dei conduttori in cui scorre la corrente ($\mathbf{j} \neq 0$). Inoltre il potenziale magnetico scalare ha un'altra caratteristica: è una funzione polidroma; al potenziale in un punto non può cioè essere assegnato un solo valore giacché tutti i valori che da questo si ottengono aggiungendo o togliendo un multiplo intero di $(\mu_0 i)$ sono ugualmente validi. Ciò può vedersi analiticamente osservando che l'angolo solido Ω non è definito univocamente giacché ad un suo valore si può aggiungere un multiplo qualsiasi di 4π per ottenere un angolo che lo rappresenta in maniera esattamente equivalente. Se perciò si sostituisce nella (143) ad Ω il valore $(\Omega + n4\pi)$ si ha

$$(144) \quad \mathcal{U}' = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega \right) + n\mu_0 i = \mathcal{U} + n\mu_0 i.$$

Tale funzione ha lo stesso gradiente di \mathcal{U} e quindi

$$(145) \quad \mathbf{B}_0 = -\text{grad } \mathcal{U} = -\text{grad } \mathcal{U}',$$

cioè anche la funzione \mathcal{U}' rappresenta il potenziale di \mathbf{B}_0 in P . Questa circostanza ha naturalmente un'origine fisica.

Quando in un campo vettoriale a rotazione nulla ($\text{rot } \mathbf{B}_0 = 0$) si parla di potenziale in un punto, si esprime con ciò una funzione ottenibile mediante l'integrale di linea del campo fra il punto in considerazione ed un punto di riferimento O (a distanza finita od infinita) al quale si decide di assegnare il valore zero del potenziale. Per \mathbf{B}_0 (al di fuori dei conduttori) si avrebbe

$$(146) \quad \mathcal{U}(P) = \int_P^O \mathbf{B}_0 \cdot dl$$

essendo l'integrale di linea calcolato lungo un percorso che vada da P ad O senza concatenarsi con il circuito percorso dalla corrente che crea B_0 , come per esempio il percorso 1 della figura 4.50. Se si fosse scelto come percorso di integrazione per andare da P ad O quello formato dalla linea

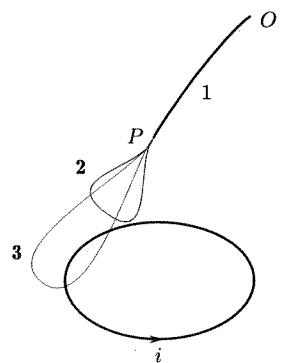


Fig. 4.50

chiusa 2 e dal percorso 1 si sarebbe ottenuto ancora lo stesso risultato dato che

$$\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

lungo la linea 2 essendo questa non concatenata con il circuito. Se si fosse scelto tuttavia la linea 3 ed il percorso 1 l'integrale di linea avrebbe fornito una nuova funzione

$$(147) \quad \mathcal{U}'(P) = \oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} + \mathcal{U}(P) = \mu_0 i + \mathcal{U}(P)$$

poiché la linea 3 si concatena con la spira.

Se infine si scegliesse una linea di integrazione che si concatenasse n volte con il circuito si otterebbe

$$(148) \quad \mathcal{U}''(P) = n\mu_0 i + \mathcal{U}(P).$$

Accanto quindi ad un singolo valore del potenziale scalare in un punto, sono ugualmente validi tutti i valori ottenuti aggiungendo o sottraendo un multiplo intero di $(\mu_0 i)$.

Nel caso che il campo sia dovuto a correnti in più circuiti, e quindi il potenziale pari alla somma dei potenziali per ciascuno di essi, la circostanza ora rilevata fa sì che ad un punto nello spazio si può assegnare un potenziale che può avere praticamente qualsiasi valore. L'utilità di un potenziale siffatto finisce in gran parte con lo scomparire.

In effetti il potenziale scalare viene usato quasi esclusivamente per il caso di campo creato da una semplice spira e per problemi in cui, per loro natura, non si debbano considerare linee che si concatenino con la spira⁽³⁸⁾. Ciò per esempio accade se la regione di interesse è formata da punti tutti a distanza molto grande dalla spira. In tali casi pur essendo il potenziale scalare una funzione polidroma, esso va praticamente trattato nel problema alla stessa stregua di come avverrebbe se fosse una funzione ad un solo valore.

Vogliamo, per il caso della spira piana, esprimere il potenziale in punti molto lontani dalla spira (rispetto alle sue dimensioni). In accordo alla figura 4.51, per ottenere Ω si può con buona approssimazione proiettare la superficie S della spira sul piano normale ad \mathbf{r} e dividere per r^2 . La proiezione di S sul piano normale a \mathbf{r} è pari a

$$(149) \quad S \cos \theta = S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

essendo \mathbf{n} il versore della normale a S orientata in modo da vedere la corrente antioraria dalla parte positiva di \mathbf{n} .

Si ha quindi

$$(150) \quad \mathcal{U}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega = \frac{\mu_0 i}{4\pi} S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Ricordando che si è definito come momento magnetico della spira

$$\mathbf{m} = iS\mathbf{n}$$

si può scrivere

$$(151) \quad \mathcal{U}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

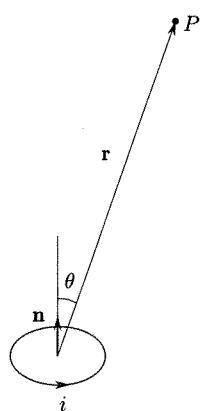


Fig. 4.51

⁽³⁸⁾ Un caso importante si ha nella schematizzazione dell'atomo di Bohr per la spira equivalente al moto di un elettrone su un'orbita intorno al nucleo.

Tale espressione per il potenziale scalare magnetico a grande distanza da una spira, cioè da un dipolo magnetico, è perfettamente analoga a quella già trovata in elettrostatica [eq. (96) cap. 1, par. 1.14] per un dipolo elettrico: la differenza consiste, oltre alla sostituzione del momento di dipolo magnetico a quella del momento del dipolo elettrico, al fatto che μ_0 si trova al posto di $1/\epsilon_0$.

Ciò è perfettamente in accordo con l'analogia delle espressioni già esaminate (par. 4.9) per E_0 e B_0 a distanze notevoli rispettivamente da un dipolo elettrico ed un dipolo magnetico.

4.16. POTENZIALE VETTORE

La possibilità di trarre profitto dalla funzione potenziale scalare per ottenere, mediante l'impiego di metodi analitici, il valore del campo B_0 è limitata a distribuzioni di correnti molto semplici; essenzialmente alla semplice spira, come si è visto nel paragrafo precedente.

V'è tuttavia un'altra maniera di introdurre una funzione potenziale, una funzione cioè del punto che consente mediante le sue derivate di ottenere il campo vettoriale che a noi interessa; questa funzione peraltro non è scalare ed è indicata con il nome di potenziale vettore.

Noi vogliamo qui brevemente introdurre il potenziale vettore (A_0) ed indicare le principali ragioni della sua utilità.

Per stabilire la nuova funzione legata a B_0 , si parte dalla proprietà sempre valida

$$\operatorname{div} B_0 = 0$$

osservando che per un teorema di analisi vettoriale, qualunque sia il vettore A , si ha sempre

$$(152) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0.$$

È possibile quindi porre B_0 nella forma

$$(153) \quad B_0 = \operatorname{rot} A_0,$$

essendo A_0 un vettore funzione della posizione che va scelto con la sola condizione che sia soddisfatta l'equazione

$$(154) \quad \operatorname{rot} B_0 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} A_0 = \mu_0 j.$$

Vi sono infiniti vettori che soddisfano questa ultima relazione sicché siamo autorizzati a porre ulteriori condizioni per giungere alla individuazione di una ben determinata funzione A_0 che chiameremo potenziale vettore. Queste ulteriori condizioni vanno poste naturalmente nella maniera più utile possibile.

Ancora un teorema di analisi vettoriale⁽³⁹⁾ indica che per qualsiasi vettore A è:

$$(155) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A.$$

La condizione che viene posta arbitrariamente in modo da selezionare, fra gli infiniti vettori che soddisfano le (153) e (154), un vettore⁽⁴⁰⁾, è che

*Definizione di B_0
tramite il potenziale
vettore A_0*

⁽³⁹⁾ Vedi appendice I.

⁽⁴⁰⁾ Il vettore A_0 risulta dalle condizioni poste definito a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria (u) dato che $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ per qualsiasi u . Questa circostanza

sia:

$$(156) \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_0 = 0.$$

In tal modo dalla (154) e dalla (155) scritta per \mathbf{A}_0 si ha

*Equazione generale
del potenziale vettore*

$$(157) \quad \nabla^2 \mathbf{A}_0 = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

La ragione della scelta espressa dalla (156) è immediatamente evidente.

Ricordiamo che in elettrostatica il concetto di potenziale è particolarmente utile perché è possibile calcolare il potenziale per una distribuzione di cariche mediante la soluzione dell'equazione di Poisson

$$(158) \quad \nabla^2 V_0 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Qui è stata introdotta una funzione potenziale vettore tale che essa, e le sue componenti (A_{0x} , A_{0y} , A_{0z}), soddisfano una equazione perfettamente analoga a quella di Poisson⁽⁴¹⁾ e le cui soluzioni si possono ottenere da quelle trovate in elettrostatica. Così, per es., per una regione illimitata in cui esiste una distribuzione di carica ρ , il potenziale elettrostatico in un punto è dato (risolvendo l'equazione di Poisson, cap. 1, par. 1.25) da

$$(159) \quad V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau}{r},$$

essendo r la distanza dell'elemento $d\tau$ dal punto in considerazione. Analogamente, il potenziale vettore per una regione illimitata ove esistono correnti distribuite con la densità \mathbf{j} si ha come soluzione della (157)

$$(160) \quad \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} d\tau.$$

È questa una espressione generale per il potenziale vettore di una qualsiasi distribuzione di correnti nota; da essa si può dedurre \mathbf{B}_0 .

Per indicare la maniera in cui il potenziale vettore può essere usato per ottenere \mathbf{B}_0 nei vari casi, consideriamo due semplici esempi: la deduzione della prima formula di Laplace per il campo $d\mathbf{B}_0$ creato da un elemento di corrente (idl) e l'espressione del campo creato da una corrente in un conduttore rettilineo infinitamente lungo. Per il primo caso la densità di corrente \mathbf{j} che passa attraverso la sezione S dell'elemento dl è legata (fig. 4.52) alla corrente i e si ha:

$$(161) \quad \mathbf{j} d\tau = \mathbf{j} S dl = idl.$$

Si ha allora dalla (160) che il contributo al vettore \mathbf{A}_0 in un punto dovuto all'elemento dl è

$$(162) \quad d\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl}{r}.$$

Il vettore $d\mathbf{A}_0$ è parallelo a dl . Il corrispondente $d\mathbf{B}_0$ è dato da

$$(163) \quad d\mathbf{B}_0 = \operatorname{rot}(d\mathbf{A}_0).$$

è analoga a quella rappresentata dalla presenza di una costante arbitraria nella definizione del potenziale elettrostatico.

⁽⁴¹⁾ Al solito μ_0 ha il posto di $1/\epsilon_0$ e la densità di corrente (\mathbf{j}) quello della densità di carica.

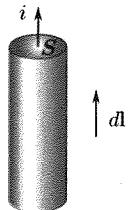


Fig. 4.52

Potenziale vettore infinitesimo per un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente

Per il calcolo di questo rotore, si osservi che $d\mathbf{l}$ è un vettore costante ed r una funzione scalare della posizione. Conviene perciò usare la formula vettoriale

$$(164) \quad \text{rot}(f\mathbf{F}) = f \text{rot } \mathbf{F} + (\text{grad } f \times \mathbf{F})$$

essendo f ed \mathbf{F} funzioni rispettivamente scalare e vettoriale. Si ha

$$(165) \quad d\mathbf{B}_0 = \text{rot}(d\mathbf{A}_0) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\text{grad} \frac{1}{r} \times d\mathbf{l} \right].$$

Si ha inoltre⁽⁴²⁾ che

$$(166) \quad \text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Risulta perciò

$$(167) \quad d\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

che coincide con l'espressione della prima legge di Laplace. Naturalmente una volta trovata la (167) si può risolvere il caso del filo di lunghezza infinita. Vogliamo tuttavia dedurre \mathbf{B}_0 ancora, per esempio, dal potenziale vettore.

Il conduttore sia disposto lungo l'asse z (fig. 4.53) ed abbia la sezione S . Di conseguenza \mathbf{j} ha valore zero tranne nel cilindro di asse z e sezione S ove si riduce a

$$(168) \quad j_z = \frac{i}{S}.$$

Considerando la (160) si vede che il vettore \mathbf{A}_0 in un punto P ha solo la componente parallela a z (essendo $j_x = j_y = 0$)

$$(169) \quad A_{0z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z}{r} d\tau.$$

Il problema non può essere risolto calcolando l'integrale a secondo membro, giacché questo diverge in conseguenza della lunghezza infinita del conduttore.

Per risolvere il nostro problema, consideriamo il corrispondente problema elettrostatico: il potenziale creato da una distribuzione cilindrica uniforme di cariche di lunghezza infinita, in un punto esterno alla distribuzione stessa. Supponendo che il raggio del cilindro sia piccolo si può usare il risultato ottenuto al par. 1.13d. del cap. 1 per una distribuzione lineare di carica, con densità lineare γ . In un punto a distanza r dall'asse della distribuzione

$$(170) \quad V_0(r) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \log r + \text{cost.}$$

La soluzione per A_{0z} è quindi

$$(171) \quad A_{0z}(r) = -\frac{Sj_z\mu_0}{2\pi} \log r + \text{cost.} = -\frac{i}{2\pi} \mu_0 \log r + \text{cost.}$$

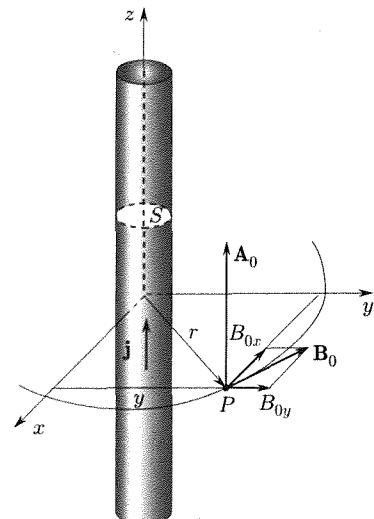


Fig. 4.53

⁽⁴²⁾ $\text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \mathbf{k} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right] = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r$

$\text{grad } r = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

essendo α, β, γ i coseni direttori del vettore \mathbf{r} .

Per ottenere \mathbf{B}_0 si deve applicare la (153):

$$\begin{aligned} B_{0x} &= \frac{\partial A_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial A_{0z}}{\partial y} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (\log \sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{y}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (172) \quad B_{0y} &= \frac{\partial A_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{0z}}{\partial x} = -\frac{\partial A_{0z}}{\partial x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\log \sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

$$B_{0z} = \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} = 0.$$

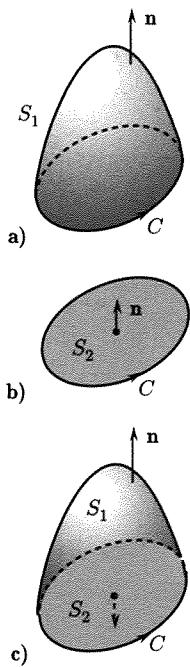
Il vettore \mathbf{B}_0 giace nel piano (xy) normale alla corrente, è tangente al cerchio avente centro sulla traccia della corrente e raggio r (linea di induzione per il punto); il verso di circolazione su tale linea è quello antiorario se visto dalla parte del piano verso cui è diretta la corrente. Il modulo è

$$(173) \quad |\mathbf{B}_0| = \sqrt{B_{0x}^2 + B_{0y}^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

È questo il risultato già stabilito al par. 4.7.

L'uso del potenziale vettore nelle semplici distribuzioni da noi considerate negli esempi non aggiunge nulla di nuovo. L'utilità del suo impiego appare nel caso di complesse distribuzioni di corrente e, ancora di più, dipende dal fatto che:

1. per l'energia magnetica si trovano in funzione del potenziale vettore espressioni analoghe a quelle viste in elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico (vedi cap. 1, par. 1.20);
2. esso può essere usato nei problemi in cui si hanno variazioni nel tempo di cariche e correnti;
3. esso assume una particolare importanza in meccanica quantistica.



4.17. RELAZIONI ENERGETICHE E FORZE FRA CIRCUITI

Abbiamo già nei paragrafi precedenti considerato casi semplici ed importanti di interazioni fra circuiti.

Vogliamo indicare ora le linee di una trattazione generale di tali interazioni, essenzialmente analoga a quella vista in elettrostatica per le interazioni fra corpi carichi.

Essa si basa sulla costruzione di una funzione energia potenziale magnetica del sistema di correnti in esame.

Prima di far ciò è utile premettere che se si considera in un campo magnetico di induzione \mathbf{B}_0 una linea chiusa orientata C (fig. 4.54a, b) si chiama flusso di \mathbf{B}_0 concatenato con C il flusso attraverso una qualsiasi superficie che ha C come bordo e per la quale la normale è orientata in ogni punto come il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti secondo il senso positivo su C . Si osservi che tale flusso non dipende dalla superficie scelta. Se infatti si considerano due superfici S_1 ed S_2 che hanno C come bordo, esse nel loro complesso determinano una superficie chiusa (fig. 4.54c). Il flusso uscente (normale verso l'esterno) attraverso S è nullo (par. 4.14)

Fig. 4.54

$$(174) \quad \phi_S(\mathbf{B}_0) = \phi_{S_1}(\mathbf{B}_0) + \phi_{S_2}(\mathbf{B}_0) = 0$$

e quindi

$$(175) \quad \phi_{S_1}(\mathbf{B}_0) = -\phi_{S_2}(\mathbf{B}_0),$$

cioè il flusso che attraversa le due superfici nello stesso verso è il medesimo.

In tutte queste considerazioni noi supponiamo che le correnti che determinano il vettore \mathbf{B}_0 e la corrente nel singolo circuito sul quale si determina la sollecitazione, siano costanti nel tempo: ciò richiede, come si vedrà nel cap. 6, una erogazione di energia da parte delle sorgenti di f.e.m. (per esempio pile).

Si consideri un circuito percorso da una corrente di intensità i in un campo \mathbf{B}_0 (creato da altre correnti e preesistente).

Sul singolo elemento dl agisce la forza:

$$idl \times \mathbf{B}_0.$$

Supponiamo che *forze esterne* producano uno spostamento del circuito (fig. 4.55) rappresentato dal vettore ds . Il lavoro compiuto dalle *forze esterne* per spostare l'elemento dl vale

$$(176) \quad -(idl \times \mathbf{B}_0) \cdot ds = -i(ds \times dl) \cdot \mathbf{B}_0.$$

Dalla figura si vede che il circuito nello spostarsi genera una superficie che si può considerare formata dalle aree descritte dai singoli elementi dl . Sulla figura è indicata in grigio la superficie generata dall'elemento dl . Si osservi che $ds \times dl$ è un vettore che ha come modulo proprio l'area di tale elemento di superficie ed è diretto normalmente ad esso e verso l'interno della superficie generata dal moto del circuito. Di conseguenza

$$(ds \times dl) \cdot \mathbf{B}_0$$

è il flusso di \mathbf{B}_0 entrante in questa superficie attraverso l'elemento considerato.

Se si integra la (176) lungo il circuito si ottiene il lavoro che le forze esterne compiono per spostare il circuito:

$$(177) \quad dL = -i \int_C (ds \times dl) \cdot \mathbf{B}_0.$$

L'integrale è il flusso di \mathbf{B}_0 che entra nell'interno della superficie generata dal moto del circuito.

Se ora si considera la superficie chiusa formata dalla superficie ora detta, da una di quelle determinate dal circuito nella posizione iniziale (indice h) e da una per la posizione finale (indice k), il flusso totale attraverso essa deve essere zero; il flusso entrante attraverso la superficie generata dal moto del circuito quindi deve essere pari al flusso uscente attraverso le altre due. Se per ciascuna di queste superfici si suppone di avere orientato la normale come il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti come la corrente nella spira, si ha

$$(178) \quad \int_C (ds \times dl) \cdot \mathbf{B}_0 = \int_k \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS - \int_h \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS.$$

Si ha quindi

$$(179) \quad dL = -i \left(\int_k \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS - \int_h \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS \right).$$

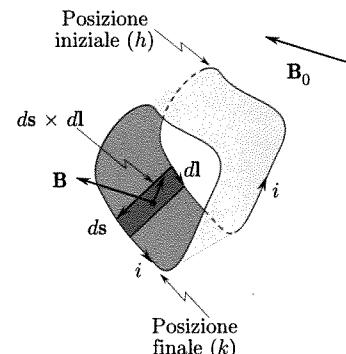


Fig. 4.55

Se si indica con

$$(180) \quad \phi = \int \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS$$

il flusso concatenato con il circuito, si ha

$$(181) \quad dL = -i d\phi ,$$

essendo $d\phi$ la differenza fra i flussi concatenati finale ed iniziale.

Integrando si ha (essendo i costante)

$$(182) \quad L = \mathcal{U}_{\text{mecc}} = -i\phi + \text{cost} .$$

Lavoro che le forze esterne compiono per spostare il circuito

Questo lavoro compiuto dall'esterno corrisponde ad energia potenziale meccanica immagazzinata dal sistema. Per la costante si può scegliere di porre ⁽⁴³⁾ $L = 0$ quando $\phi = 0$.

Di conseguenza, con ragionamenti analoghi a quelli ora fatti (applicazione del principio dei lavori virtuali), si riconosce che la forza o la coppia che sollecita un circuito è pari alla *derivata parziale* di $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ rispetto alla appropriata coordinata (spostamento lineare od angolare) *cambiata di segno*.

Ricordiamo il caso elettrostatico nel quale i potenziali dei conduttori venivano tenuti costanti e l'energia elettrica totale del sistema non era pari alla sola energia elettrostatica (\mathcal{U}_{el}) perché i generatori che devono mantenere costanti i potenziali compiono lavoro ($\mathcal{U}_{\text{tot}} = -\mathcal{U}_{el}$). In maniera analoga si verifica nel presente caso, quando cioè si suppone che le correnti vengano mantenute costanti, che l'energia magnetica totale del circuito non è pari all'energia meccanica ora calcolata. Si trova ⁽⁴⁴⁾ per l'energia totale

$$(183) \quad \mathcal{U} = -\mathcal{U}_{\text{mecc}} = i\phi = i \int_S \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS ,$$

essendo S una superficie che ha il circuito come bordo.

Se quindi si prende in considerazione l'energia magnetica totale è evidente che il circuito tende a muoversi in modo da aumentare \mathcal{U} (diminuire $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$); in altri termini, il circuito tende ad assumere una posizione per la quale il flusso concatenato è massimo. Le forze e le coppie si ottengono mediante le *derivate parziali positive* rispetto alle corrispondenti coordinate spaziali.

La relazione (183) può anche scriversi facendo intervenire il potenziale vettore. Si ha infatti

$$(184) \quad \int_S \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \text{rot } \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l}$$

⁽⁴³⁾ Questo è in accordo con la scelta fatta nel par. 4.9 nel caso di un circuito formato da una spira piana: infatti l'energia meccanica è stata posta zero quando il momento magnetico della spira (normale alla spira) e \mathbf{B}_0 sono normali fra loro, cioè \mathbf{B}_0 è parallelo al piano della spira e quindi $\phi = 0$.

⁽⁴⁴⁾ Si trova infatti che l'energia che i generatori spendono per tenere costanti le correnti nei circuiti che creano il campo è proprio pari a $-\mathcal{U}_{\text{mecc}}$ e lo stesso valore ha anche l'energia spesa per tenere costante la corrente nel circuito che viene spostato. Ne consegue che l'energia totale, somma dei tre termini, vale $\mathcal{U}_{\text{mecc}}$. Per maggiori dettagli vedi J.A. Stratton, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Einaudi, Torino.

e quindi

$$(185) \quad \mathcal{U} = \oint i \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l} .$$

L'integrale va fatto lungo il circuito in cui passa la corrente i , ed \mathbf{A}_0 è dovuto alle correnti (diverse da i) che creano \mathbf{B}_0 .

Nel caso che il circuito sia una piccola spira piana (superficie S) attraversata da corrente costante, per la quale si è definito il momento magnetico

$$\mathbf{m} = iS\mathbf{n}$$

essendo la normale \mathbf{n} diretta come il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti come la corrente nella spira, si ha

$$(186) \quad \mathcal{U} = i\phi(\mathbf{B}_0) = i(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n})S = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0 .$$

Il momento della coppia che agisce su essa è

$$(187) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$$

e la forza sul circuito nel caso che il campo non sia uniforme

$$(188) \quad \mathbf{F} = \text{grad} \mathcal{U} = \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0)$$

in maniera perfettamente analoga al caso del dipolo elettrico.

L'espressione (185) fornisce l'energia magnetica per un circuito che viene immerso in un campo preesistente, di induzione \mathbf{B}_0 .

Conviene spesso esprimere l'energia mutua di due o più circuiti in funzione delle correnti e di parametri geometrici. Nel caso di due circuiti ciò può farsi inserendo nella (185) l'espressione del potenziale vettore,

$$(189) \quad \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r}$$

creato dalla corrente (i_1) nel circuito che si pensa creare il campo (\mathbf{B}_0) in cui è immerso il secondo circuito. Si ha allora per l'energia mutua

$$(190) \quad \mathcal{U}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} .$$

Si osservi che il flusso ϕ_2 che si concatena con il secondo circuito per la corrente che scorre nel primo è

$$(191) \quad \phi_2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \right) i_1 = L_{21} i_1 ,$$

e quello ϕ_1 che si concatena con il primo circuito per effetto della corrente nel secondo è

$$(192) \quad \phi_1 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \right) i_2 = L_{12} i_2 .$$

Il moltiplicatore di $i_1 i_2$ nella (190), cioè $L_{12} = L_{21}$ è un parametro esclusivamente dipendente da μ_0 e da elementi geometrici che determinano l'estensione e la posizione dei due circuiti. Tale coefficiente prende il nome di coefficiente di mutua induzione ⁽⁴⁵⁾. Nel Sistema Internazionale esso si

Energia mutua di due circuiti

Il flusso magnetico che si concatena con il secondo circuito per la corrente che scorre nel primo è $\phi_2 = L_{21} i_1$

Il flusso magnetico che si concatena nel primo circuito per la corrente che scorre nel secondo è $\phi_1 = L_{12} i_2$

⁽⁴⁵⁾ Sul suo calcolo torneremo in seguito (cap. 6, par. 6.6).

misura in henry = $\Omega \cdot \text{sec}$. L'energia mutua di due circuiti si esprime (formula di Neuman):

L₁₂ è il coefficiente
di mutua induzione

(193)

$$\mathcal{U}_{12} = L_{12} i_1 i_2 .$$

Se si desidera avere l'energia magnetica totale del sistema, bisogna aggiungere a questa espressione l'energia propria di ciascun circuito: per il fatto che ogni circuito è attraversato da una corrente e che questa crea un flusso che si concatena con il circuito stesso, si ha una energia ancora data formalmente dalla (183) e dalla (185). Si osservi peraltro che in tal caso il campo \mathbf{B}_0 è creato dalla corrente i e cresce con essa: ciò conduce alla comparsa del fattore 1/2:

$$(194) \quad \mathcal{U}_1 = \frac{1}{2} i_1 \phi_1 .$$

Il flusso ϕ_1 prodotto dalla corrente i_1 nel circuito 1 e concatenato con il circuito stesso, può porsi, in analogia alle (191) e (192), proporzionalmente ad i_1 :

$$(195) \quad \phi_1 = L_{11} i_1 .$$

Si ha quindi:

$$(196) \quad \mathcal{U}_1 = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 .$$

Analogamente:

$$(197) \quad \phi_2 = L_{22} i_2 ,$$

e

$$(198) \quad \mathcal{U}_2 = \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 .$$

La somma delle (193), (196) e (198) fornisce l'energia magnetica totale del sistema di due circuiti. Nel caso di più circuiti si ottiene la formula generale

$$(199) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=1}^{h=n} L_{kh} i_k i_h .$$

Si osservi che i termini corrispondenti a due circuiti diversi appaiono due volte nella sommatoria, sicché la loro somma fornisce il corrispondente valore (193) essendo stato introdotto il fattore 1/2 nella formula.

Questa è l'espressione generale dell'energia magnetica totale di un sistema di circuiti. Qualsiasi componente della forza o qualsiasi coppia che agisce su una parte del sistema si ottiene prendendo la derivata parziale *positiva* di \mathcal{U} rispetto alla corrispondente variabile spaziale.

L'espressione della densità di energia del campo magnetico può ottenersi nel quadro delle considerazioni che si vanno svolgendo.

Se si considera il circuito k , il flusso totale attraverso esso è

$$(200) \quad \phi_k = \sum_{h=1}^n L_{kh} i_h .$$

Questa espressione consente di scrivere la (199) nella forma

$$(201) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k i_k .$$

*Il flusso magnetico
prodotto dalla corrente
e concatenato
con il circuito stesso è*

$$\phi = L_i$$

*Energia magnetica
totale di un sistema
di circuiti*

Questa relazione differisce da quella che si può ottenere dalla (183) per il fattore $\frac{1}{2}$: ciò è dovuto al fatto che mentre per la (183) si ammette che il campo in cui si determina l'energia del circuito sia stato creato e fissato in precedenza, l'energia nella (201) è l'energia legata allo stabilirsi di tutte le correnti nel sistema. La (201) può scriversi facendo intervenire il potenziale vettore. Se si usa infatti il teorema di Stokes (cap. 1, par. 1.12)

$$(202) \quad \phi_k = \int_{S_k} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{l_k} \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l},$$

essendo l_k la linea del circuito k ed S_k una superficie che ha l_k come bordo, si ha

$$(203) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_k^n \oint_{l_k} i_k \mathbf{A}_0 \cdot d\mathbf{l}.$$

Nel caso che invece di un numero di circuiti si abbiano correnti distribuite nello spazio, l'elemento $i_k d\mathbf{l}$ va sostituito con il prodotto $\mathbf{j} d\tau$ essendo \mathbf{j} il vettore densità di corrente e $d\tau$ l'elemento di volume. In conseguenza la somma degli integrali lineari si trasforma in un integrale di volume

$$(204) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_0 d\tau$$

essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio occupato dalle correnti. È questa una espressione analoga alla espressione per l'energia potenziale di un sistema di cariche

$$(205) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau.$$

Ricordando che

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j},$$

la (204) si scrive

$$(206) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{B}_0 d\tau.$$

Inoltre poiché ⁽⁴⁶⁾

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0) &= \mathbf{B}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{B}_0, \\ \mathcal{U} &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\int \mathbf{B}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{A}_0 d\tau - \int \text{div}(\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Se le correnti occupano solo una regione finita il secondo integrale è nullo ⁽⁴⁷⁾.

Si ottiene

$$(207) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B_0^2 d\tau,$$

essendo l'integrale esteso a tutto lo spazio occupato dal campo magnetico. L'energia magnetica totale di una qualsiasi distribuzione di corrente è $\frac{1}{2}\mu_0$ volte l'integrale di B_0^2 nello spazio. La (207) indica che l'energia magnetica totale nell'unità di volume, cioè la densità di energia, vale

$$(208) \quad w = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2.$$

Densità di energia
del campo magnetico

⁽⁴⁶⁾ Vedi appendice II.

⁽⁴⁷⁾ Ciò può vedersi trasformando con il teorema del flusso l'integrale di volume in uno di superficie del flusso di $\mathbf{A}_0 \times \mathbf{B}_0$ attraverso una superficie a grande distanza (r). Poiché \mathbf{A}_0 è proporzionale a $1/r$, \mathbf{B}_0 è proporzionale a $1/r^2$ mentre la superficie cresce con r^2 l'integrale va a zero come $1/r$.

Calcoleremo questa relazione nel cap. 6 con un metodo diverso per un caso particolare; le considerazioni svolte qui mostrano la generalità della (208) come espressione della densità della energia in un campo magnetico.

■ 4.18. IL VETTORE INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO

La trattazione del campo magnetico nel vuoto, come si è visto, può essere completamente fatta usando il vettore induzione magnetica \mathbf{B}_0 . Abbiamo già rilevato il fatto che il nome assegnato a questo vettore non è il più adatto e che ciò dipende dal fatto che in precedenza era stato assegnato ad un altro vettore il nome di intensità del campo magnetico. L'introduzione di tale secondo vettore non è affatto necessaria finché si resta nel vuoto. Esso è infatti definito dalla relazione

Intensità del campo magnetico

$$(209) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$$

ed è pertanto diretto come \mathbf{B}_0 e ne differisce solo nel modulo che varia per un fattore costante.

Il vettore intensità del campo magnetico assume importanza nel caso di campi nella materia, come si vedrà nel prossimo capitolo.

Abbiamo tuttavia voluto introdurre qui il vettore \mathbf{H}_0 in quanto esso è molto spesso usato al posto di \mathbf{B}_0 . Ciò è fatto specialmente in quei casi in cui nelle relazioni di interesse espresse in termini di \mathbf{B}_0 , compare μ_0 al numeratore. Per esempio citiamo:

$$\left. \begin{array}{l} [51] \quad \mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \\ (210) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{1}{2\pi R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{legge di Biot e Savart per i} \\ \text{conduttori rettilinei infiniti} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} [43] \quad \mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \\ (211) \quad \mathbf{H}_0 = \frac{i}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{prima formula di Laplace} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} [125] \quad \oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum i \\ (212) \quad \oint \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = \sum i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{teorema della circuitazione} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} [134] \quad \text{rot } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j} \\ (213) \quad \text{rot } \mathbf{H}_0 = \mathbf{j} \end{array} \right\}$$

Per la densità di energia si ha inoltre la relazione

*Densità di energia
del campo magnetico*

$$(214) \quad w = \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 .$$

Il valore dell'intensità del campo magnetico nell'interno di un solenoide si ricava dalla (127) e vale

$$(215) \quad H_0 = ni.$$

Questa relazione ci consente di esaminare convenientemente le dimensioni e l'unità di misura dell'intensità del campo magnetico. Precisamente, ricordando che n è il numero di spire per unità di lunghezza, cioè per metro, H_0 si misura in amperspire al metro (Asp/m). Naturalmente, poiché n ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, le dimensioni di H_0 sono quelle di un'intensità di corrente diviso per una lunghezza

$$[H_0] = [L^{-1}A].$$

*H₀ si misura
in amperspire al metro
(Asp/m)*

IL CAMPO MAGNETICO NELLA MATERIA

- ✓ La trattazione del **magnetismo** viene qui estesa al caso di presenza di materiali, in perfetta analogia al caso dei dielettrici, introducendo i concetti di *correnti atomiche* e di vettori *intensità di magnetizzazione M* e .
- ✓ Il comportamento della materia in presenza di campo magnetico è molto più complesso di quanto visto per il caso elettrico. I più comuni tipi di comportamento: il *diamagnetismo* (sempre presente), il *paramagnetismo* e il *ferromagnetismo* vengono illustrati dando gli elementi della loro spiegazione nell'ambito della teoria classica e di quella quantistica.
- ✓ I **materiali ferromagnetici** sono quelli di maggior interesse per le applicazioni pratiche e per essi si trova il *ciclo d'isteresi* e vale la legge di Hopkinson.

■ Il campo magnetico nella materia

5.

■ 5.1. INTRODUZIONE

Nel presente capitolo noi desideriamo estendere la trattazione del campo magnetostatico, precedentemente limitata al vuoto, al caso in cui siano presenti mezzi materiali. Questa estensione viene fatta con criteri analoghi a quelli già visti per il campo elettrico nei dielettrici. Nel caso magnetico, esistono differenze molto forti fra i vari materiali che possono costituire il mezzo in cui il campo magnetico va considerato nei casi pratici di interesse. Alcuni materiali, come i ferromagnetici, hanno proprietà molto particolari, che saranno considerate in dettaglio assieme a quelle degli altri materiali magnetici.

Dopo aver molto rapidamente accennato ad una descrizione delle proprietà di mezzi magnetici mediante parametri globali tratti dall'esperienza, si accennerà ai vantaggi che l'impiego di taluni materiali magnetici consente di ottenere quando si desideri disporre di elevati flussi magnetici in alcune regioni. La trattazione dei cosiddetti circuiti magnetici fornisce il metodo di analisi e di progetto dei dispositivi che si usano in tali applicazioni.

Chiuderemo il capitolo con le spiegazioni classica e quantistica dei vari comportamenti magnetici.

■ 5.2. I VETTORI MAGNETICI NELLA MATERIA

La trattazione delle azioni magnetiche nel vuoto può essere completamente fatta mediante l'impiego del vettore \mathbf{B}_0 e l'introduzione (cap. 4, par. 4.18) del vettore \mathbf{H}_0 , *intensità del campo magnetico*, non è affatto necessaria; tutto ciò in maniera analoga a quanto si è visto in relazione ai vettori \mathbf{E}_0 e \mathbf{D}_0 per il campo elettrico nel vuoto (cap. 1).

Nel caso che sia presente un mezzo materiale, per la descrizione delle azioni magnetiche è necessario tener conto delle cariche che entrano nella struttura della materia giacché esse sono in moto. Ciò porta di conseguenza che occorre considerare accanto a \mathbf{B} un altro vettore (intensità di magnetizzazione \mathbf{M}), analogo alla intensità di polarizzazione (\mathbf{P}) nel caso dei dielettrici, od un vettore legato a \mathbf{M} e \mathbf{B} che goda di proprietà analoghe a quelle di \mathbf{D} . L'ultima espressione va intesa nel senso che come l'uso di \mathbf{D} consente di scrivere una relazione fondamentale [la (27) del cap. 2] in cui compare solo la densità di cariche libere (ρ_{lib}), l'uso del nuovo vettore

Intensità
di magnetizzazione \mathbf{M}

Campo magnetico H

magnetico deve consentire di scrivere una delle relazioni fondamentali del campo magnetostatico ⁽¹⁾, in cui entri la densità delle correnti esterne (che creano il campo magnetico anche in assenza del mezzo): questo vettore è il vettore (**H**) intensità del campo magnetico; esso si riduce al vettore (209) del cap. 4 nel caso che il mezzo sia il vuoto. Mostreremo tuttavia che il vettore **H**, a differenza del vettore **D** nel caso elettrostatico, riesce spesso utile nell'esame sperimentale delle situazioni.

Prima di esaminare come vada impostata la trattazione del campo magnetico nei mezzi materiali, è bene riassumere le principali proprietà del vettore **B**₀ nel vuoto. Esse sono rappresentate dalle due relazioni (115) e (134) del cap. 4:

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}$$

essendo **j** il vettore densità della corrente che crea il campo.

Nel caso che il mezzo nel quale esiste un campo magnetico sia un mezzo materiale, per ottenere il valore del vettore **B** in un punto bisogna considerare oltre alle *correnti esterne* (che creano il campo anche in assenza del mezzo) le correnti (*atomiche*) dovute al movimento delle cariche che costituiscono gli atomi ⁽²⁾.

Ci si trova qui in una situazione analoga a quella vista per il campo elettrico (cap. 2): mentre lì venivano considerate le distribuzioni (statiche) di carica, qui occorre tenere conto del moto delle cariche.

Va osservato che, come nel caso del campo elettrico dei dielettrici, anche per il campo magnetico in un mezzo materiale noi non possiamo pensare di effettuare misurazioni in regioni così piccole ed in tempi così brevi da potere mettere in evidenza le rapide variazioni nello spazio e nel tempo che il campo magnetico effettivamente presenta nel mezzo a causa della sua struttura e della natura delle correnti atomiche. Noi siamo interessati esclusivamente a valori di **B** *macroscopici*, che rappresentino cioè valori medi in spazi e tempi piccoli rispetto alle risoluzioni dei metodi di misura, ma grandi rispetto alle dimensioni atomiche ⁽³⁾.

Dopo queste considerazioni, ed in analogia a quanto visto per **E** nei dielettrici, possiamo affermare che per il valore di **B** macroscopico (che d'ora in poi indicheremo semplicemente con **B**) in un mezzo materiale valgono ancora le (1) e (2) purché nella (2) accanto alla densità delle correnti esterne (**j**) si introduca una densità media delle correnti atomiche **j'**:

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Correnti atomiche j'

$$(4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}').$$

⁽¹⁾ E che opportunamente generalizzata conduce ad una delle relazioni fondamentali del campo e.m. (cap. 8, par. 8.3).

⁽²⁾ Ed i momenti magnetici che si riscontrano associati a molte particelle elementari nella descrizione quantistica del loro comportamento. Nelle considerazioni che seguono si suppone per semplicità che gli effetti magnetici delle particelle materiali siano riconducibili al moto di cariche. Ciò non toglie nulla alla generalità dei risultati che come si vedrà vanno espressi in termini di momenti magnetici. Successivamente si esamineranno le proprietà presentate dalle particelle atomiche.

⁽³⁾ Le medie possono pensarsi, per esempio, eseguite in volumi di 10^6 \AA^3 (cubo avente lato pari a 100 volte il diametro dell'atomo di idrogeno) ed in tempi dell'ordine di 10^{-12} sec (diecimila volte maggiore del tempo impiegato dall'elettrone a percorrere l'orbita nell'atomo di idrogeno).

Il problema è ora di stabilire una maniera semplice per calcolare \mathbf{j}' mediante le caratteristiche del mezzo.

Per far ciò riferiamoci ad una semplice esperienza⁽⁴⁾. Si abbia un lungo solenoide (n_s spire per unità di lunghezza) collegato con una sorgente di d.d.p. continua; nel circuito sia inserito un amperometro (fig. 5.1).

Supponiamo che il mezzo sia il vuoto e che l'intensità della corrente sia i_0 . Si ha allora

$$(5) \quad B_0 = \mu_0 n_s i_0.$$

\mathbf{B}_0 è diretto come l'asse del solenoide ed il suo verso è quello di avanzamento di una vite destra che giri come la corrente nelle spire.

Il solenoide venga ora riempito di un mezzo omogeneo *isotropo*⁽⁵⁾: si osserva nei riguardi della corrente che, a parte un breve transitorio, la sua intensità assume lo stesso valore di prima, i_0 , mentre \mathbf{B} , quale può essere misurato con una esperienza che utilizzi la forza di Lorentz, ha la stessa direzione e lo stesso verso di \mathbf{B}_0 ma valore diverso.

Si può scrivere globalmente

$$(6) \quad B = \mu n_s i_0 = \mu_0 \mu_r n_s i_0;$$

μ_r è la permeabilità relativa

μ e μ_r prendono i nomi rispettivamente di permeabilità assoluta (con le stesse dimensioni di μ_0) e permeabilità relativa (grandezza adimensionata) del mezzo.

Sottraendo membro a membro la (5) dalla (6) si ha

$$(7) \quad B - B_0 = (\mu - \mu_0)n_s i_0 = \mu_0 [(\mu_r - 1)n_s i_0].$$

Appare quindi che la introduzione del mezzo di permeabilità μ conduce alla presenza, nell'interno del solenoide, di correnti il cui effetto equivale a quello di una corrente di intensità i , che passi in un certo numero (n) di spire per unità di lunghezza del solenoide, avvolte sulla superficie del mezzo adiacente al solenoide stesso; i ed n sono tali che

$$(8) \quad in = (\mu_r - 1)n_s i_0.$$

In particolare si può supporre che n sia pari a n_s ed allora la corrente risulta

$$(9) \quad i_M = (\mu_r - 1)i_0;$$

i_M prende comunemente il nome di corrente di magnetizzazione.

L'effetto delle correnti atomiche può quindi essere portato globalmente in conto, nel caso considerato, mediante una corrente i_M che passi in n_s spire per unità di lunghezza del solenoide, disposte sulla superficie cilindrica del mezzo a contatto con il solenoide (fig. 5.2a). Si può cioè ritenere che le correnti atomiche nell'interno del campo magnetico equivalgano a correnti in spire disposte normalmente a \mathbf{B} (fig. 5.2b): esse si compensano

Corrente
di magnetizzazione

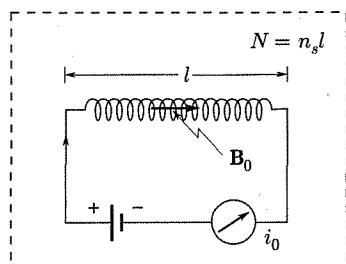


Fig. 5.1

⁽⁴⁾ Si noti che essa è analoga nel presente contesto a quella del condensatore piano in cui si inserisce un dielettrico e che è stata esaminata per il caso del campo elettrico nei dielettrici (cap. 2, par. 2.1).

⁽⁵⁾ Per esempio riempiendo di un fluido il contenitore tratteggiato in figura.

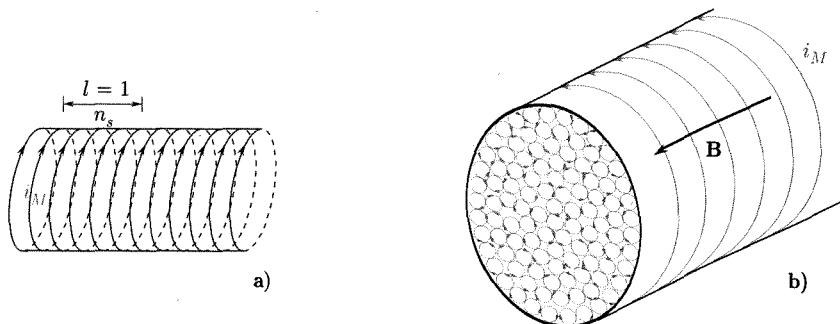


Fig. 5.2

nell'interno del materiale, mentre producono una corrente di magnetizzazione netta sulla superficie esterna del mezzo esposto al campo magnetico.

Se si ricorda che ad una spira percorsa dalla corrente i e che racchiuda la superficie piana S , è associato un momento magnetico⁽⁶⁾

$$(10) \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^2)$$

essendo il versore della normale al piano della spira, \mathbf{n} , diretto nel verso di avanzamento di una vite destra che ruoti come la corrente nella spira, si può concludere che le correnti atomiche possono essere portate in conto supponendo che il mezzo nel solenoide abbia un momento magnetico per unità di lunghezza pari a

$$(12) \quad \mathbf{m}_1 = n_s i_M S \mathbf{n}.$$

Il volume del materiale che presenta il momento \mathbf{m}_1 è $(S \cdot 1)$. Conviene introdurre il vettore intensità di magnetizzazione \mathbf{M} come momento magnetico per unità di volume del mezzo⁽⁷⁾

$$(13) \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}_1}{S \cdot 1} = n_s i_M \mathbf{n}$$

\mathbf{M} ha nel solenoide di figura 5.1 la direzione dell'asse e quindi di \mathbf{B}_0 . Le dimensioni di \mathbf{M} sono [mom.magnetico/volume] e l'unità A/m.

Il vettore \mathbf{M} consente di scrivere la (7) nella forma:

$$(15) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}.$$

⁽⁶⁾ Si faccia attenzione che viene usata la definizione di momento magnetico introdotta nel cap. 4, par. 4.9, eq. (68). Si è già indicato in quel paragrafo che un'altra definizione molto usata è quella di porre il momento magnetico di una spira pari a

$$(11) \quad \mathbf{m}' = \mu_0 i S \mathbf{n} \quad (\text{weber} \cdot \text{metro}).$$

Essa riesce particolarmente utile nel caso che si desideri usare nella trattazione del campo magnetico il vettore \mathbf{H} come fondamentale al posto di \mathbf{B} . Le espressioni che alcune relazioni qui in seguito dedotte con la posizione (10) assumono se si facesse la scelta (11), sono riportate al termine del presente paragrafo.

⁽⁷⁾ Più precisamente: l'intensità di magnetizzazione in un punto andrebbe definita con riferimento ad un volume $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo ma ancora comprendente molti atomi, intorno al punto in considerazione, ed al corrispondente momento magnetico $\Delta\mathbf{m}$.

$$(14) \quad \mathbf{M} = \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta\tau}.$$

In molte considerazioni $\Delta\mathbf{m}$ e $\Delta\tau$ possono essere trattati come infinitesimi. Nel caso comune di mezzo omogeneo ed esteso questa definizione equivale alla (13).

L'intensità
di magnetizzazione
è il momento magnetico
per unità di volume

In base alla (4) si ha allora

$$(16) \quad \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B}_0 + \mu_0 \text{rot } \mathbf{M} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}').$$

Siccome per la (2)

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}$$

si ricava che il vettore \mathbf{M} soddisfa l'importante relazione

$$(17) \quad \text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}'.$$

Questa relazione, stabilita da noi con considerazioni relative ad un caso particolare, ha validità generale. Possiamo quindi dire che nel caso generale per la descrizione del campo magnetostatico in un mezzo materiale si hanno le relazioni (3) e (4) essendo \mathbf{j}' esprimibile per mezzo del vettore intensità di magnetizzazione \mathbf{M} in accordo alla (17).

Come si vede la descrizione delle azioni magnetiche in un mezzo materiale richiede due vettori \mathbf{B} ed \mathbf{M} . Vedremo più avanti come possa ottenersi \mathbf{M} sulla base delle proprietà atomiche e strutturali dei mezzi.

Si osservi che, in maniera perfettamente analoga a quella seguita per l'introduzione di \mathbf{D} nei dielettrici, anche qui si può introdurre un vettore che semplifica la espressione della (4). Se infatti si pone

$$(18) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0}$$

Il vettore intensità del campo magnetico \mathbf{H}

la (4), tenendo conto della (17), si scrive

$$(19) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Il vettore \mathbf{H} , intensità del campo magnetico, si riduce ad \mathbf{H}_0 nel caso del vuoto ($\mathbf{M} = 0$). Il suo uso consente di scrivere la (19) [al posto della (4)] ove, si noti bene, compare solo la densità delle correnti esterne. Gli effetti delle correnti atomiche sono contenuti nel vettore \mathbf{H} .

Non si pensi tuttavia che il problema sia semplificato nella sua essenza, perché la relazione fra \mathbf{B} ed \mathbf{H} può essere scritta solo conoscendo le caratteristiche del mezzo, cioè \mathbf{M} [eq. (18)]. Va notato peraltro che l'impiego del vettore \mathbf{H} , a differenza di quello di \mathbf{D} , è spesso utile per ragioni pratiche. In elettrostatica le grandezze che realmente si misurano e controllano sono le differenze di potenziale tra conduttori e non le cariche su di essi: ciò significa che il vettore che viene controllato e misurato è \mathbf{E} e non \mathbf{D} . Si comprende quindi come non vi sia un grande interesse in un vettore che non è fondamentale e che, in genere, non semplifica le operazioni di misura e controllo. Nel caso del magnetismo invece le grandezze che sono facilmente misurabili sono le intensità delle correnti che qui abbiamo chiamato esterne, mentre non v'è maniera semplice di controllare \mathbf{B} e \mathbf{M} . Così, per la circuitazione lungo una linea chiusa si ha dalla (19):

$$(20) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i = i_{\text{tot}}.$$

La corrente totale abbracciata dalla curva di circuitazione è determinata come per la circuitazione di \mathbf{B}_0 al par. 4.14 del cap. 4.

Si comprende quindi come l'uso di \mathbf{H} riesca spesso utile.

Nei materiali isotropi si usa porre la relazione fra \mathbf{H} e \mathbf{M} nella forma

$$(21) \quad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$$

Relazione fra \mathbf{M} e \mathbf{H}
 $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$

χ è la suscettività magnetica

essendo χ una grandezza adimensionata, detta suscettività magnetica. Per la maggior parte dei materiali (materiali diamagnetici e paramagnetici) χ è una costante; per pochi materiali (ferro e ferrimagnetici) χ è una funzione di H (vedi par. 5.4).

Si ha allora dalla (18)

$$(22) \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}.$$

Ritornando per un momento al caso del solenoide molto lungo immerso nel mezzo materiale ed applicando la proprietà fondamentale di \mathbf{H} [eq. (20)] nel considerare la circuitazione lungo una linea chiusa molto grande che comprende l'asse del solenoide, si ha

$$(23) \quad H = n_s i_0.$$

L'intensità del campo magnetico creato nel mezzo nell'interno del solenoide percorso da corrente ha lo stesso valore che nel caso del vuoto. Tenendo conto della (23), la (6) fornisce

$$(24) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}.$$

Dal paragone delle (22) e (24) si ricava:

$$(25) \quad \mu_r = 1 + \chi.$$

In conclusione si è visto che nel caso di presenza di un mezzo materiale, la descrizione del campo magnetico richiede due vettori: accanto al vettore \mathbf{B} si può considerare il vettore intensità di magnetizzazione \mathbf{M} (momento magnetico dell'unità di volume del mezzo) od il vettore \mathbf{H} , per portare in conto il contributo al campo magnetico delle cariche in moto che costituiscono la materia. La scelta del vettore \mathbf{M} (come per \mathbf{P} nei dielettrici) è la più logica, ma spesso si preferisce scegliere \mathbf{H} per la semplificazione che tale vettore consente di ottenere nella espressione di importanti equazioni e per il fatto che in pratica il controllo del campo magnetico viene fatto mediante correnti esterne, legate in maniera semplice ad \mathbf{H} .

Nel caso che si usino i vettori \mathbf{B} ed \mathbf{M} le proprietà fondamentali del campo magnetico sono espresse dalle (3) e (4) dove le correnti atomiche sono legate a \mathbf{M} dalla (17).

Se si sceglie \mathbf{H} come secondo vettore le stesse relazioni si scrivono

$$[3] \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$[19] \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

essendo \mathbf{H} definito dalla (18).

Per il caso di materiali isotropi vale la (24) sicché in essi le relazioni fondamentali della magnetostatica si possono scrivere

$$[3] \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$(26) \quad \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j}.$$

Se inoltre, come spesso è il caso, il mezzo oltre che essere isotropo possiede una permeabilità indipendente dall'intensità del campo magnetico (materiali dia- e paramagnetici), ed è omogeneo (μ_r costante nello

spazio), le relazioni fondamentali divengono⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} [3] \quad & \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ (27) \quad & \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \end{aligned}$$

*Se μ_r è costante
nello spazio*

Queste relazioni fondamentali della magnetostatica consentono di trattare tutti i problemi che si presentano.

Di particolare interesse è il caso in cui si abbia a che fare con un mezzo caratterizzato da permeabilità indipendente dall'intensità del campo magnetico, che sia omogeneo ed isotropo e che riempia tutto lo spazio. Per tale caso, usando le (3) e (27), analoghe alle relazioni valide per il vuoto, si estendono facilmente le conclusioni raggiunte nel vuoto sui potenziali scalare e vettoriale, sulle forze e sulle relazioni energetiche.

Si osservi che la intensità del campo \mathbf{H} creato da una distribuzione qualsiasi di correnti in uno spazio infinito riempito con un materiale isotropo di permeabilità relativa costante μ_r è punto per punto la stessa di quella che si ha nel vuoto⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾. Questa circostanza è una conseguenza diretta del fatto che l'equazione fondamentale (19) che definisce \mathbf{H} non dipende dalle caratteristiche del mezzo, espresse da μ_r . Per quel che riguarda invece il vettore induzione magnetica si deduce che nella situazione descritta \mathbf{B} è μ_r volte maggiore di \mathbf{B}_0 nello spazio vuoto. Se si tiene presente che le forze su cariche in moto o correnti dipendono da \mathbf{B} si comprende che la forza fra due elementi di corrente immersi in un mezzo di permeabilità relativa μ_r debba essere μ_r volte quella che si eserciterebbe nel vuoto.

In particolare, una spira percorsa da corrente, avente momento magnetico

$$(28) \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n},$$

in un campo magnetico uniforme ed in un mezzo materiale infinito, risente l'azione di una coppia il cui momento vale

$$(29) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

in analogia con la (70) del cap. 4 ed ha una energia *meccanica*

$$(30) \quad \mathcal{U}_{\text{mecc}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

in analogia con la (75) del cap. 4. La densità di energia in un mezzo di permeabilità relativa μ_r che occupi tutto lo spazio è

$$(31) \quad w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}.$$

*Una spira percorsa
da corrente in un campo
magnetico uniforme*

*La densità di energia
in un mezzo magnetico
è $w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$*

Vogliamo infine sottolineare che, come si è detto in precedenza, nella trattazione svolta è stata scelta per la definizione del momento magnetico di una spira la

⁽⁸⁾ Vale la regola di calcolo vettoriale (vedi appendice II):

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{grad} \frac{1}{\mu}.$$

⁽⁹⁾ Un caso è quello del solenoide molto lungo immerso in un mezzo materiale per cui è stata dedotta la (23).

⁽¹⁰⁾ Si faccia attenzione al fatto che nel caso in cui il mezzo non sia isotropo ed omogeneo ciò non è più vero. Per esempio si veda il par. 5.8 ove si considera il campo in un mezzo formato in parte da un materiale ferromagnetico ed in parte da aria.

espressione (28)

$$\mathbf{m} = iS\mathbf{n} \quad (\text{A} \cdot \text{m}^2).$$

A volte invece si trova usata, come si è detto al cap. 4, par. 4.9, la definizione (11)

$$\mathbf{m}' = \mu_0 i S \mathbf{n} \quad (\text{Wb} \cdot \text{m})$$

dove \mathbf{m}' ha le stesse dimensioni di \mathbf{B} .

È opportuno qui mostrare in quale maniera si modificano alcune relazioni stabilito in questo paragrafo. Il vettore *intensità di magnetizzazione*, anziché la (13) ha l'espressione

$$(32) \quad \mathbf{M}' = \mu_0 n_s i_M \mathbf{n} \quad (\text{Wb}/\text{m}^2).$$

La relazione (15) tra \mathbf{B} , \mathbf{B}_0 ed \mathbf{M} diviene

$$(33) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{M}'.$$

Il legame fra l'intensità di magnetizzazione e la densità media delle correnti atomiche si scrive, al posto della (17)

$$(34) \quad \text{rot} \frac{\mathbf{M}'}{\mu_0} = \mathbf{j}'.$$

Inoltre la relazione (18) fra \mathbf{H} , \mathbf{B} ed \mathbf{M} diviene

$$(35) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{M}'}{\mu_0}$$

Nei materiali isotropi al posto della (21) si ha

$$(36) \quad \mathbf{M}' = \mu_0 \chi \mathbf{H}$$

e quindi valgono le (22) e (25)

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}.$$

Infine per il momento meccanico della coppia che sollecita una spira percorsa da corrente in un campo magnetico uniforme in un mezzo infinito si ha, al posto della (29)

$$(37) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$$

e per l'energia meccanica

$$(38) \quad \mathcal{U}_{\text{mecc}} = -\mathbf{m}' \cdot \mathbf{H}.$$

La (37) può servire per una definizione operativa di \mathbf{H} .

5.3. CAMPO MAGNETICO ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE DI DUE MEZZI

Consideriamo il caso in cui due mezzi caratterizzati da diversa permeabilità siano a contatto lungo una superficie S e che un campo magnetico sia presente. Si desideri esaminare le discontinuità che in corrispondenza ad S hanno i vettori \mathbf{B} ed \mathbf{H} . I ragionamenti che qui si fanno, nell'ipotesi che su S non esistano correnti esterne ($\mathbf{j} = 0$) sono del tutto analoghi a quelli visti nel caso del campo elettrico nei dielettrici (cap. 2, par. 2.5).

La relazione

$$(39) \quad \phi(\mathbf{B}) = 0$$

per una superficie chiusa (fig. 5.3a) che comprende parte dei due mezzi nelle vicinanze di S e la relazione

$$(40) \quad \int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

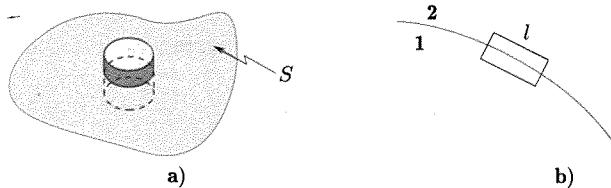


Fig. 5.3

lungo una linea chiusa che attraversi la superficie S (fig. 5.3b), sono analoghe rispettivamente alle relazioni

$$(41) \quad \phi(\mathbf{D}) = 0$$

$$(42) \quad \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Ciò significa che le condizioni di continuità per \mathbf{B} sono le stesse di quelle di \mathbf{D} ed una analoga circostanza si ha per \mathbf{H} ed \mathbf{E} . Si può quindi dire che in corrispondenza alla superficie S di separazione di due mezzi magnetici diversi sulla quale non esistono correnti esterne, il vettore \mathbf{B} ha la componente normale continua,

$$(43) \quad B_{n1} = B_{n2},$$

mentre il vettore \mathbf{H} ha la componente tangenziale continua,

$$(44) \quad H_{t1} = H_{t2}.$$

Queste relazioni riescono utili, fra l'altro, nel problema della misurazione di \mathbf{B} ed \mathbf{H} in un mezzo solido. Per effettuare la misurazione sarà necessario creare una cavità nel mezzo in modo da potere disporre il dispositivo di misura. Le relazioni (43) e (44) specificano come le cavità vanno fatte in modo che la misura nella cavità fornisca anche il valore del vettore nel solido. Se si tratta della misurazione di \mathbf{B} la cavità va fatta sotto forma di un cilindro basso e largo con i piani estremi normali alle linee di induzione (fig. 5.4a); in tal caso per la (43) alle superfici piane si ha che il vettore \mathbf{B} ha solo la componente normale alla superficie e quindi la determinazione di B_2 fornisce B_1 .

Per la misurazione di \mathbf{H} la cavità va fatta di forma cilindrica allungata nella direzione delle linee di forza (fig. 5.4b).

*La componente normale
di B si conserva
nel passaggio
da un mezzo ad un altro*

*La componente
tangenziale di H
si conserva
nel passaggio
da un mezzo ad un altro*

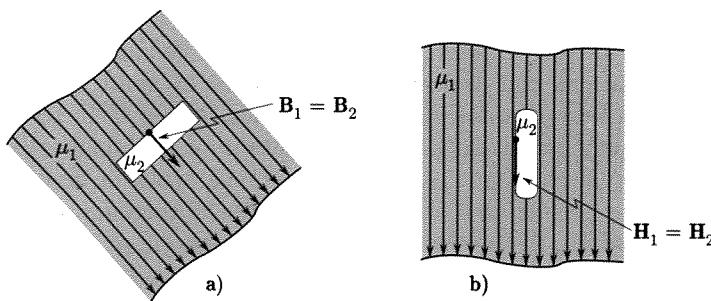


Fig. 5.4

Le linee di induzione inoltre subiscono una variazione brusca di direzione in corrispondenza alla superficie limite (rifrazione). Si ha indicando

con ϕ_1 e ϕ_2 gli angoli che le linee di induzione nei due mezzi formano con la normale ad S in corrispondenza a tale superficie

$$\frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi_2} = \frac{\frac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\frac{B_{2t}}{B_{2n}}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}}.$$

Siccome, inoltre,

$$B_{1t} = \mu_0 \mu_{r1} H_{1t}$$

$$B_{2t} = \mu_0 \mu_{r2} H_{2t} = \mu_0 \mu_{r2} H_{1t},$$

risulta

$$(45) \quad \frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}.$$

Gli angoli ϕ_1 e ϕ_2 possono differire notevolmente se le due sostanze hanno permeabilità molto diversa.

5.4. VARI TIPI DI MATERIALI

In un successivo paragrafo esamineremo in dettaglio come il vettore \mathbf{M} , intensità di magnetizzazione, dipenda dalle proprietà degli atomi costituenti il mezzo materiale. Dalla conoscenza di \mathbf{M} si giunge a quella dei parametri globali χ (suscettività magnetica) e μ_r (permeabilità magnetica) che consentono, come si è visto, di giungere alla descrizione delle azioni magnetiche nel mezzo. Sono questi parametri globali quelli che si possono valutare mediante misurazioni.

Accenniamo brevemente ad alcune proprietà dei principali materiali magnetici.

La maggior parte dei mezzi materiali presenta una suscettività molto piccola, dell'ordine di $10^{-4} \div 10^{-5}$, cioè la loro permeabilità è molto prossima a quella del vuoto. Questi mezzi tuttavia vanno divisi in due categorie

- diamagnetici per i quali la suscettività è negativa (rame, argento, acqua ecc.); la suscettività inoltre non dipende dalla temperatura;
- paramagnetici per i quali la suscettività è positiva (aria, alluminio, platino ecc.); la suscettività inoltre è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta.

Il fatto che in questi mezzi, ed in particolare nell'aria, μ_r è molto prossimo a 1 fa sì che con buona approssimazione in molte situazioni si può trascurare la presenza del mezzo: ciò è molto spesso fatto per il caso che aria occupi tutto lo spazio in cui è presente il campo magnetico.

Un numero relativamente ristretto di sostanze presenta invece valori di χ (e μ_r) molto elevati, dell'ordine delle decine di migliaia. Anche fra queste sostanze vanno distinte varie categorie secondo le particolarità del comportamento e della struttura (materiali ferromagnetici, ferriti). Su questi argomenti torneremo con dettaglio in seguito. Per ora è sufficiente accennare alle proprietà fondamentali dei materiali ferromagnetici (ferro, nichel, cobalto e qualche lega).

Nei materiali ferromagnetici χ e μ_r hanno valori elevati, che dipendono dal valore del campo magnetico applicato e dalla sua storia. Questi valori

Materiali diamagnetici

Materiali paramagnetici
 $\chi = \frac{c}{T}$

Materiali ferromagnetici

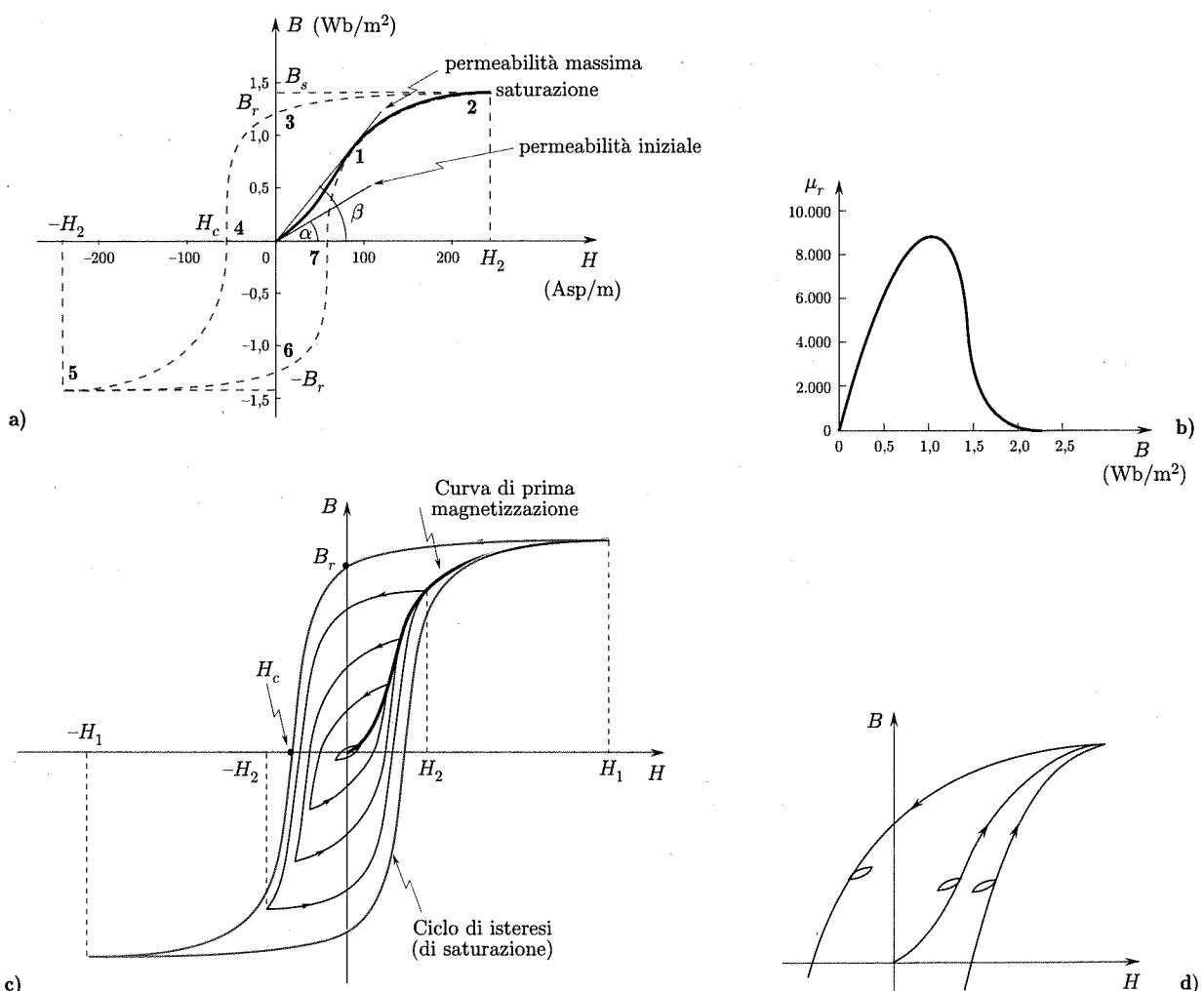


Fig. 5.5

elevati si hanno finché il materiale è tenuto al di sotto di una temperatura caratteristica T_c (di Curie); al di sopra di tale temperatura il materiale si comporta come un normale materiale paramagnetico.

La figura 5.5a illustra alcune caratteristiche del comportamento di un materiale ferromagnetico (e quindi di χ e μ_r) al variare dell'intensità del campo magnetico e propriamente quando questo viene fatto crescere gradatamente fino a valori molto grandi (positivi o negativi), cioè fino a che la magnetizzazione del materiale abbia raggiunto la cosiddetta saturazione. La curva 012⁽¹¹⁾ si riferisce alla prima applicazione del campo ad un materiale smagnetizzato, cioè non esposto prima a campo magnetico, o trattato precedentemente in modo particolare⁽¹²⁾. La curva (chiusa) tratteggiata si ottiene quando il materiale è sottoposto ad un campo che varia periodicamente fra i valori molto grandi $\pm H_2$: è evidente da tale

⁽¹¹⁾ La permeabilità in ogni punto della curva si ottiene congiungendo tale punto con l'origine degli assi e considerando la tangente dell'angolo formato con l'asse H : essa vale B/H . La curva di figura 5.5b dà μ_r lungo la 012 di figura 5.5a.

⁽¹²⁾ In modo che sia inizialmente $B = 0$ per $H = 0$.

Ciclo d'isteresi

curva come il valore di B per lo stesso H assuma valori diversi secondo le modalità con cui il valore di H è raggiunto. Si vedrà in seguito che ciò è il risultato di particolari processi irreversibili che avvengono nel materiale al variare di H , e che l'area racchiusa dal ciclo è proporzionale alla energia trasformata in calore in un ciclo per unità di volume del materiale. Il ciclo prende il nome di ciclo di isteresi completo fino alla saturazione.

È bene avvertire che cicli di isteresi si hanno anche se il campo magnetico viene fatto variare periodicamente fra valori massimi più piccoli di quelli di saturazione od intorno ad un valore medio diverso da zero. La forma dei cicli è allora diversa come è illustrato nei grafici delle figure 5.5c e d.

Campo coercitivo

È molto importante notare dalla figura 5.5a che se ad un materiale ferromagnetico viene applicato un campo (per esempio H_2 nella figura) e questo viene successivamente rimosso, rimane una magnetizzazione rappresentata dal valore di B_r (magnetismo residuo). Questa magnetizzazione persiste (tratto della curva nel secondo quadrante) anche se campi magnetici diretti in verso opposto a quello della magnetizzazione e di (\mathbf{B}) vengono applicati, finché questi non siano molto elevati. Il campo magnetico che va applicato perché la magnetizzazione scompaia (H_c , campo coercitivo) indica la intensità delle azioni che tendono nell'interno del materiale a conservare una magnetizzazione residua.

Si vede quindi la possibilità che materiali ferromagnetici precedentemente polarizzati in un campo magnetico esterno, rimanendo magnetizzati anche fuori di esso, possano essere usati come sorgenti di un campo magnetico. Sono questi i cosiddetti magneti permanenti e come è noto da essi è partito storicamente lo studio del magnetismo: i minerali di ferro che hanno le particolari proprietà di attrarre piccoli pezzi di ferro sono appunto materiali che presentano le proprietà ora descritte per i ferromagnetici⁽¹³⁾ e la magnetizzazione è stata prodotta nel tempo dal campo magnetico terrestre (par. 5.20).

Nei successivi paragrafi svolgeremo appunto alcune considerazioni relative a situazioni in cui materiali ferromagnetici sono presenti.

5.5. IMPIEGHI DEI MATERIALI FERROMAGNETICI

I materiali ferromagnetici, come si è detto, hanno una permeabilità, funzione del campo e della storia del materiale, che può raggiungere valori molto elevati. Essi sono estesamente usati per due scopi principali:

1. avere, in un campo magnetico creato dall'esterno, delle regioni ad elevato valore di \mathbf{B} , ove cioè in una rappresentazione del campo alla Faraday⁽¹⁴⁾, si addensino le linee di induzione;
2. creare un campo magnetico esterno, in assenza di campo magnetizzante, utilizzando il magnetismo residuo.

⁽¹³⁾ In realtà si tratta di ferriti come la magnetite.

⁽¹⁴⁾ In maniera analoga a quanto visto per \mathbf{E} in elettrostatica, il campo di \mathbf{B} può essere graficamente rappresentato mediante le linee di induzione: allo scopo vanno segnate le linee di induzione con una densità tale che il numero di linee che attraversano l'unità di superficie disposta normalmente a \mathbf{B} in un punto generico P sia proporzionale al $B(P)$.

Ci limiteremo qui a svolgere poche considerazioni elementari per casi di comune interesse cominciando da esempi relativi al secondo scopo sopra detto.

Il campo creato da un pezzo di materiale magnetico magnetizzato dipende dalla geometria del pezzo e dalla distribuzione di \mathbf{M} . Il caso più semplice è ovviamente quello di magnetizzazione uniforme, e ad esso limiteremo le nostre considerazioni. Se inoltre la forma del pezzo è ellissoidale, il problema di determinare \mathbf{B}_0 all'esterno e \mathbf{B} ed \mathbf{H} all'interno può essere risolto matematicamente.

In particolare nel caso di una sfera di raggio R uniformemente magnetizzata e circondata dal vuoto si ricava⁽¹⁵⁾: fuori della sfera in un punto determinato dalle coordinate polari r e θ riferite all'asse di magnetizzazione per il centro della sfera ed a tale centro

$$(46) \quad \mathbf{B}_0 = -\operatorname{grad} \left(\frac{\mu_0 M R^3}{3r^2} \cos \theta \right) = -\operatorname{grad} \left(\frac{\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right);$$

Campo di una sfera magnetizzata uniformemente

Fuori della sfera

entro la sfera

$$(47) \quad \mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Entro la sfera

$$(48) \quad \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{M}}{3}.$$

La (46) mostra, come del resto è già stato fatto notare in precedenza ed in generale, che il campo fuori del mezzo magnetizzato ammette un potenziale; nel caso specifico è il potenziale di un dipolo [vedi cap. 4 eq. (151)] di momento:

$$(49) \quad \mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M}$$

che è appunto il momento che compete alla sfera magnetizzata.

Le linee di induzione hanno l'andamento di figura 5.6a: esse sono linee chiuse in accordo con la condizione

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

e la componente normale di \mathbf{B} alla superficie di separazione è costante. Le linee del vettore \mathbf{H} sono indicate in figura 5.6b: esse sono dirette come le linee di \mathbf{B} al di fuori del mezzo ferromagnetico ed in verso opposto entro: si ha cioè una discontinuità nel vettore \mathbf{H} alla superficie di separazione. Questo andamento delle linee di \mathbf{H} sta ad indicare che sulla superficie del mezzo sono distribuite sorgenti discrete di \mathbf{H} : su questa situazione torneremo al par. 5.6.

Un caso limite molto importante di solido di forma ellissoidale è quello di una lunga sbarra cilindrica: a questa forma corrisponde per pezzi ferromagnetici magnetizzati lungo l'asse il tipico esempio di magnete permanente (calamita) usata per molte esperienze. Ricordiamo infatti che lo studio del magnetismo è partito dalle azioni che queste calamite esercitano fra loro e su pezzi di altri materiali ferromagnetici non magnetizzati (ferro dolce). Queste azioni, come si è già detto, sono del tutto corrispondenti a

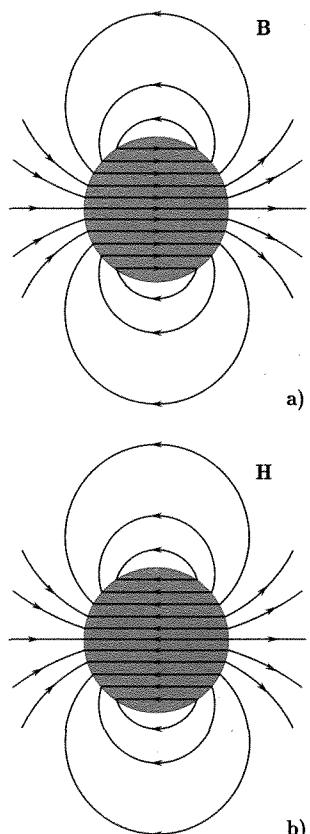


Fig. 5.6

⁽¹⁵⁾ Vedi per esempio Slater-Frank, *Electromagnetism*, McGraw-Hill, New York, 1947; o J.A. Stratton, *Teoria dell'Elettromagnetismo*, Einaudi, Torino.

Sbarra cilindrica uniformemente magnetizzata

quelle fra correnti in opportuni circuiti. Ci si deve quindi attendere una intima somiglianza fra la forma del campo creato dalle calamite di forma semplice e quella di circuiti semplici percorsi da corrente, già esaminati.

La figura 5.7 si riferisce al caso di una sbarra cilindrica uniformemente magnetizzata e fornisce la distribuzione dei vettori M , B ed H ; l'andamento delle linee di induzione è perfettamente analogo a quello di un solenoide rettilineo (fig. 4.29 del cap. 4). Anche in questo caso le linee di H hanno lo stesso verso di quelle di B al di fuori e verso opposto al di dentro del materiale: il vettore H ha una discontinuità alla superficie di separazione dei mezzi. Ciò è dovuto, come si è visto nel caso precedente, all'intervento del vettore M all'interno del materiale nel determinare H . Nella figura è indicata la composizione dei vettori per un punto fuori (P) e dentro (Q) sull'asse del magnete.

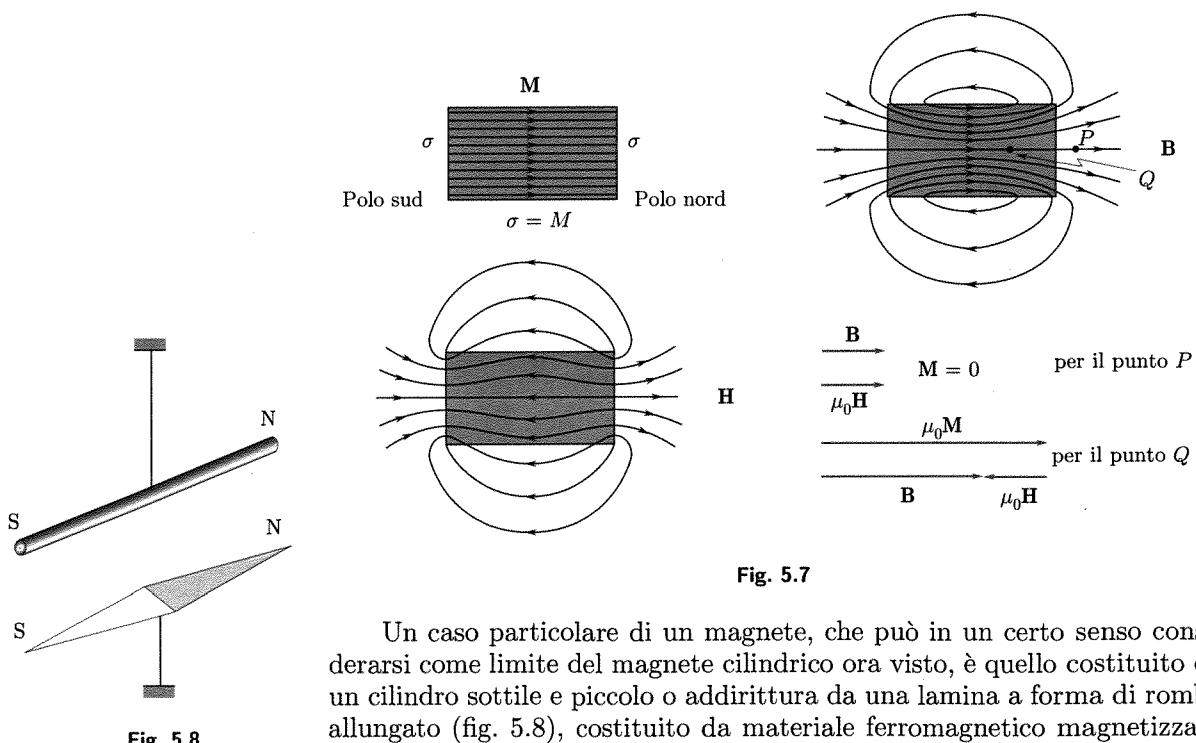


Fig. 5.7

Ago magnetico

Un caso particolare di un magnete, che può in un certo senso considerarsi come limite del magnete cilindrico ora visto, è quello costituito da un cilindro sottile e piccolo o addirittura da una lamina a forma di rombo allungato (fig. 5.8), costituito da materiale ferromagnetico magnetizzato lungo l'asse: esso è stato usato, ed è ancora estesamente usato, sospeso per il baricentro per rivelare un campo magnetico, costituendo il cosiddetto ago magnetico. Il suo equivalente è una semplice spira percorsa da corrente disposta normalmente all'asse dell'ago. Torneremo nel paragrafo successivo sulla definizione di momento magnetico dell'ago. Ricordiamo qui che l'estremità che nel campo magnetico terrestre si dirige approssimativamente verso il nord geografico prende il nome di estremità nord (vedi par. 5.6) ed è quella dalla quale, secondo le convenzioni poste, escono le linee di induzione. L'altra estremità è detta sud.

Le figure 5.9 e 5.10 mostrano l'andamento delle linee di induzione all'esterno del materiale ferromagnetico per altre due forme di magneti di uso comune, quello a ferro di cavallo ed uno a piccolo interferro cilindrico; esse si chiudono nell'interno del materiale; le linee di H presentano al solito la discontinuità alla interfaccia. Il secondo tipo di magnete consente di avere un campo intenso ed uniforme in una piccola regione (interferro).

Altre forme di magneti

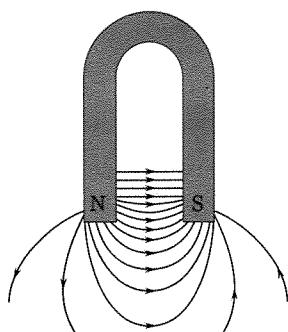


Fig. 5.9

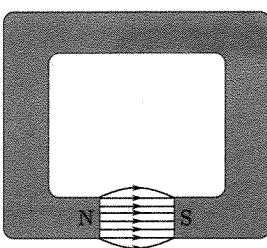


Fig. 5.10

Passiamo a vedere l'effetto prodotto da un pezzo di materiale ferromagnetico non precedentemente magnetizzato, che venga introdotto in un campo esterno: per semplicità supporremo, nel considerare alcuni esempi, che il campo esterno \mathbf{B}_0 in assenza del materiale sia uniforme. Il materiale ferromagnetico sottoposto ad un campo magnetico si magnetizza e di conseguenza altera il campo preesistente.

Nel caso per esempio di una sfera di materiale ferromagnetico introdotta in un campo \mathbf{B}_0 (cui corrisponde $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$) la sfera si magnetizza nella direzione di \mathbf{B}_0 e ne consegue un campo entro e fuori la sfera che è la somma di quello uniforme (\mathbf{B}_0 , \mathbf{H}_0) e quello già esaminato creato dalla sfera e dato dalle (46), (47) e (48). Nell'interno della sfera il valore del campo è

$$(50) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{M}}{3}.$$

Il vettore intensità del campo magnetico nell'interno della sfera è ridotto rispetto a quello che si ha in assenza della sfera per il termine $-\mathbf{M}/3$ dovuto alla magnetizzazione e che prende il nome di campo demagnetizzante; il fattore $\frac{1}{3}$ che per la sfera caratterizza tale campo, prende il nome di fattore di demagnetizzazione.

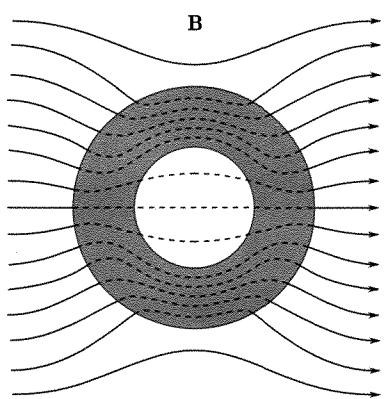


Fig. 5.11

La figura 5.11 fornisce l'andamento delle linee di induzione per il caso che un toro di materiale ferromagnetico venga introdotto in un campo magnetico uniforme.

La figura 5.12 si riferisce al caso di una sbarra cilindrica introdotta in un campo uniforme diretto come l'asse della sbarra ed indica le linee di induzione del campo inducente, del campo dovuto alla magnetizzazione del materiale (fig. 5.12a) ed il campo risultante (fig. 5.12b) che evidentemente non è più uniforme. Come si vede le linee di induzione si trovano addensate nel materiale ad elevata permeabilità e diradate nelle zone circostanti.

Vogliamo osservare che se una sbarra di materiale magnetico viene introdotta in un campo uniforme diretto in una direzione che forma l'angolo

*Materiale magnetico
in un campo esterno*

Sfera in campo esterno

Campo demagnetizzante

*Fattore
di demagnetizzazione*

*Toro in campo
magnetico*

*Sbarra in campo
magnetico*

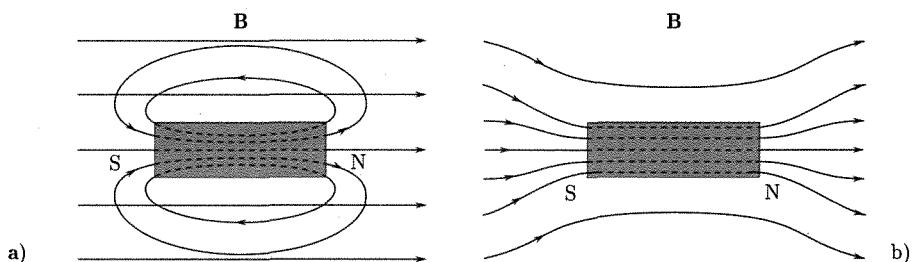


Fig. 5.12

θ con il suo asse, la sbarra, come meglio si vedrà in seguito (par. 5.6) è sollecitata da una coppia a ruotare in modo che l'angolo θ si annulli: nel caso che il campo inducente non sia uniforme esiste anche una forza che tende ad attrarre la sbarra verso le regioni di campo più intenso.

Queste circostanze sono comunemente usate in un metodo molto semplice e suggestivo per rilevare l'andamento delle linee di induzione: limatura di ferro, formata da tanti piccoli pezzettini aghiformi di ferro non magnetizzato, è disposta su un foglio di carta che viene introdotto nel campo magnetico. Ciascun aghetto viene magnetizzato e, sottoposto alla sollecitazione descritta, si orienta secondo la direzione di \mathbf{B} nel punto considerato; la limatura inoltre si addensa nelle regioni di maggiore induzione. La figura 5.13 (Kronig) si riferisce al caso delle linee di induzione create da una corrente rettilinea osservata in un piano ad essa normale (fig. 5.13a), da una corrente in una spira osservata in un piano assiale (fig. 5.13b), da una corrente in un solenoide osservato in un piano assiale (fig. 5.13c), da una corrente in un avvolgimento toroidale (fig. 5.13d).

*Metodo
di visualizzazione
delle linee di forza
di \mathbf{B} mediante limatura
di ferro*

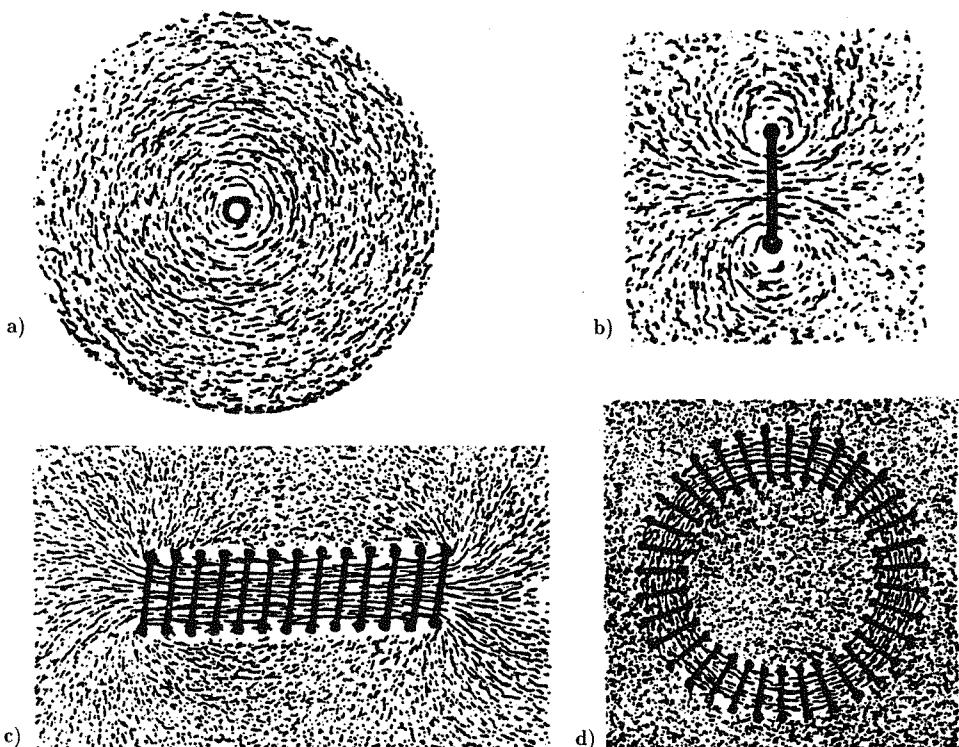


Fig. 5.13

5.6. POLI MAGNETICI. AGHI MAGNETICI

Nel paragrafo precedente abbiamo sottolineato con vari esempi la circostanza che un qualsiasi campione di materiale ferromagnetico magnetizzato che non sia chiuso su se stesso (come per esempio è un toro) crea un campo magnetico anche all'esterno del campione stesso. Inoltre:

1. le linee di induzione, chiuse su se stesse e continue attraverso la superficie limite, hanno una configurazione che dipende dalla forma geometrica del magnete (o calamita) ed il loro ingresso e la loro uscita nel materiale sono essenzialmente concentrati in alcune zone della superficie del magnete;
2. le linee del vettore **H** presentano una discontinuità sulla superficie limite del materiale ferromagnetico (fig. 5.6b e 5.7).

Quest'ultima circostanza mostra che le linee di forza del vettore **H** hanno origine da una ben determinata regione della superficie limite ed hanno termine in un'altra ben determinata regione.

Si osservi che questa circostanza è in un certo senso analoga a quella che vale per le linee di forza del vettore elettrico per un dipolo, per un sistema cioè di due cariche elettriche uguali ed opposte.

Accanto alla precedente osservazione, vanno considerate varie esperienze che è possibile fare con magneti permanenti e che potrebbero essere suggestivamente spiegate mediante un'analogia del campo magnetico con il campo elettrico creato da cariche uguali ed opposte. Ricorderemo in particolare che se si hanno due calamite cilindriche sospese per il baricentro, disposte in modo da avere gli assi sulla stessa retta ed esse vengono avvicinate, si presenta un'azione repulsiva od attrattiva a seconda che vengano a trovarsi affacciate le estremità dei due magneti dalle quali escono (o entrano) le linee di **B** o estremità di tipo diverso.

Queste esperienze, che furono quelle da cui iniziò lo studio del magnetismo, fecero inizialmente pensare che esistesse l'equivalente magnetico delle cariche elettriche positive e negative. Si ammise appunto che nelle regioni (poli) della superficie del magnete dalle quali hanno origine o nelle quali terminano le linee del vettore **H**, fossero concentrate masse magnetiche diverse. A queste ipotetiche masse è stato convenzionalmente dato un nome per distinguerle una dall'altra utilizzando i risultati di un'altra semplice esperienza: una sbarra (o un ago) magnetizzata, libera di orientarsi e non sottoposta a campi creati da altri magneti (o correnti), si orienta sotto l'azione del campo magnetico terrestre (par. 5.20) approssimativamente con l'asse nella direzione del meridiano terrestre. La massa che si trova diretta all'incirca verso il nord geografico prende il nome di massa magnetica nord (considerata nei calcoli positiva) e l'altra il nome di massa magnetica sud. Le regioni della superficie del magnete ove queste masse si troverebbero distribuite assumono il nome di poli nord e sud. Questa scelta determina il verso positivo sulle linee di **H** e **B**.

L'analogia fra la situazione in una calamita e quella in un sistema elettrostatico formato da due cariche uguali e opposte non può essere accettata nel senso che non è possibile isolare le masse magnetiche di tipo diverso⁽¹⁶⁾. Tuttavia da questa non soddisfacente analogia è nata una

Poli magnetici e masse magnetiche

Il polo nord di un ago magnetico è quella estremità che si orienta verso il nord geografico

⁽¹⁶⁾ Questa circostanza è dimostrata dalla ben nota esperienza della *calamita spezzata*: se si spezza una calamita cilindrica nella speranza di isolare le masse nord e sud che si potrebbero pensare localizzate alle estremità, si trova che nuove masse si presentano ed

terminologia in uso ed una maniera di trattare alcuni semplici problemi pratici che è tuttora impiegata in molte applicazioni.

Per tale ragione noi indugiamo a svolgere alcune considerazioni sulle masse magnetiche, su come esse possano essere introdotte nel quadro della trattazione da noi presentata, quali siano le limitazioni nell'uso di tale concetto e quale sia l'espressione delle forze che si esercitano fra masse magnetiche di magneti diversi.

Per giungere ad una semplice introduzione delle masse magnetiche ed all'espressione della forza che agisce fra poli vicini di magneti diversi si potrebbe ricorrere ad esperienze analoghe a quelle fatte per stabilire la legge di Coulomb in elettrostatica: le misure sono tuttavia molto più complesse e la definizione quantitativa di massa magnetica non è semplice. Per tali ragioni preferiamo procedere nella maniera seguente. Se si considera (fig. 5.15) una sbarra di materiale ferromagnetico di sezione S e lunghezza l , e si suppone che l'intensità di magnetizzazione M sia uniforme e diretta lungo l'asse della sbarra, la sbarra possiede un momento magnetico che in base alla definizione del vettore \mathbf{M} , momento magnetico dell'unità di volume [eq. (13)], è data da

$$(51) \quad \mathbf{m} = Sl\mathbf{M}.$$

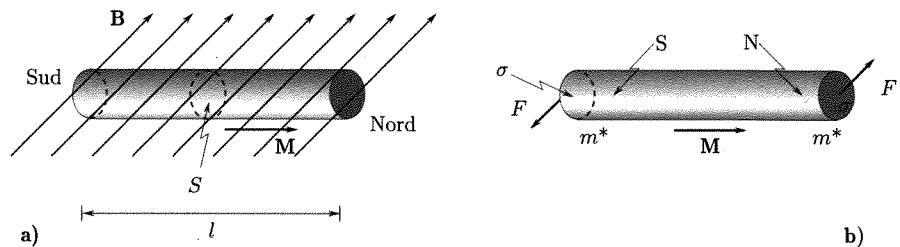


Fig. 5.15

La coppia che la sbarra risente in un campo uniforme \mathbf{B} ha di conseguenza il momento

$$(52) \quad \mathcal{M} = Sl\mathbf{M} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Il momento magnetico può, in analogia al caso del dipolo elettrico, essere immaginato dovuto a due masse (m^*) uguali e di tipo diverso (nord e sud) concentrate sulle superfici estreme (polarì) tali che

$$(53) \quad \mathbf{m} = \mathbf{MSl} = m^*lu$$

essendo u il versore nella direzione sud-nord.

Ciò equivale a pensare che alle estremità della sbarra esistano due distribuzioni superficiali di massa magnetica con densità

$$(54) \quad \sigma = M.$$

Questa relazione è identica a quella valida per una sbarra dielettrica uniformemente polarizzata se all'intensità di magnetizzazione si sostituisce la intensità di polarizzazione (\mathbf{P}). Formule analoghe al caso dielettrico possono essere dedotte anche per il caso magnetico se le superfici terminali non sono normali a \mathbf{M} .

ogni pezzo è una nuova calamita con poli nord e sud (fig. 5.14).

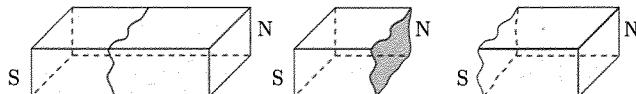


Fig. 5.14

Ritornando al caso semplice di figura 5.15; la coppia di momento \mathcal{M} può essere ritenuta formata da due forze applicate ai poli dirette come \mathbf{B} (fig. 5.15b) e di modulo

$$(55) \quad F = m^* B.$$

Il significato della (55) è piuttosto limitato: l'azione che un magnete cilindrico risente in un campo uniforme, e che è una coppia, può essere immaginata come determinata da due forze uguali ed opposte applicate a ciascun polo nella direzione di \mathbf{B} e la (55) ci dà il modulo di tali forze.

Possiamo ora ammettere in prima approssimazione che anche quando il campo \mathbf{B} non sia uniforme, su ciascun polo di un magnete si eserciti una forza diretta come \mathbf{B} , nel verso di \mathbf{B} o in quello opposto, a seconda che il polo sia nord o sud, il cui modulo sia dato dalla (55).

Consideriamo ora il caso in cui il campo \mathbf{B} che agisce su un magnete sia creato da un altro magnete, cioè il caso dell'interazione fra due magneti. Trattare questa interazione nella maniera ora detta per mezzo della (55) è una approssimazione che diviene abbastanza buona nel caso che i due magneti siano disposti in modo che la distanza fra un polo di un primo magnete (1) ed un polo dell'altro (2) sia molto piccola rispetto alla distanza fra i poli di ciascun magnete e quindi anche fra altre coppie di poli appartenenti uno ad un magnete e l'altro all'altro. In tal caso il campo \mathbf{B} che va usato nella (55) per ottenere la forza che agisce sul polo di massa m_2^* e su tutto il magnete (2), è praticamente quello creato dalla massa magnetica m_1^* del polo vicino dell'altro magnete (1).

Per quanto riguarda il calcolo di \mathbf{B} va ricordato che il campo creato da un magnete è conservativo. Nel caso del campo creato da una sbarra magnetizzata di volume τ il potenziale scalare può porsi sotto la forma

$$(56) \quad \mathcal{U}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\tau$$

essendo r la distanza orientata dall'elemento $d\tau$ al punto (x, y, z) . Questa formula è analoga a quella del potenziale elettrostatico creato da una sbarra dielettrica polarizzata.

Nel caso, che in realtà ha qui interesse, di un'azione fra due magneti che possa con buona approssimazione essere ridotta all'azione fra i poli vicini dei due magneti, il campo \mathbf{B} nella (55) è quello creato da un polo di un magnete cilindrico molto lungo. Il potenziale in questo caso, in analogia con il potenziale elettrostatico creato da una carica puntiforme, può essere posto

$$(57) \quad \mathcal{U} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1^*}{r}$$

essendo m_1^* la massa magnetica del polo che crea il campo: conveniamo di ritenere positiva la massa magnetica di un polo nord e negativa quella di un polo sud.

Si ha per il vettore \mathbf{B} , in modulo

$$(58) \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1^*}{r^2}.$$

L'azione mutua fra due poli puntiformi risulta quindi⁽¹⁷⁾

$$(59) \quad \mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1^* m_2^*}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

⁽¹⁷⁾ Nel caso che il momento magnetico di una spira venga definito mediante la (11) sicché la coppia su di essa in un campo magnetico diviene

$$(60) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m}' \times \mathbf{H}$$

anche la definizione del momento magnetico per unità di volume (intensità di magnetizzazione) e del momento magnetico di una sbarra vanno alterati in accordo alla (11). Ne consegue che anche le masse magnetiche hanno dimensioni diverse da quelle da noi definite nella (53) o (55). In tal caso in termini di queste nuove masse (m'^*) la forza fra due poli si scrive

$$(61) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1'^* \times m_2'^*}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Essa è repulsiva o attrattiva secondo che m_1^* , m_2^* siano dello stesso tipo o di tipo diverso.

La (59) viene a volte chiamata legge magnetostatica di Coulomb.

Vogliamo infine menzionare l'uso esteso che, specie in passato, è stato fatto di aghi di materiale ferromagnetico magnetizzato sospesi in modo che si possano liberamente orientare (fig. 5.16). Ciascuno di essi è caratterizzato da un momento magnetico che può essere determinato mediante la (52) introducendo l'ago stesso in un campo di induzione \mathbf{B} noto; esso è un vettore diretto come l'asse del magnete dall'estremità sud a quella nord. Un ago magnetico è perfettamente corrispondente ad una spira e per il campo da esso creato a distanze grandi rispetto alle sue dimensioni valgono le formule del cap. 4 sostituendo al momento magnetico della spira quello dell'ago.

Gli aghi magnetici sono usati specialmente per rivelare la presenza di campi magnetici in regioni dello spazio e per determinarne il valore. È molto noto il loro impiego nelle bussole per rivelare la direzione del campo magnetico terrestre e quindi la posizione del nord. Inoltre se si conosce il momento magnetico di un ago, la determinazione del momento della coppia che agisce su di esso in un campo magnetico, consente di determinare \mathbf{B} (52): si possono quindi realizzare strumenti per la misurazione di \mathbf{B} ⁽¹⁸⁾.

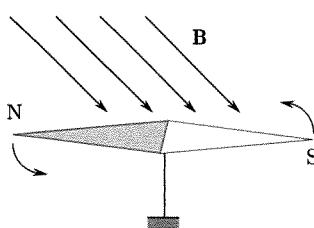


Fig. 5.16

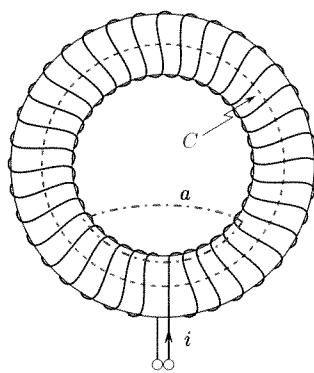


Fig. 5.17

5.7. CIRCUITO MAGNETICO

Una delle applicazioni più frequenti dei materiali ad elevata permeabilità (ferromagnetici e ferrimagnetici) è, come si è già detto, quella intesa ad ottenere in regioni limitate dello spazio flussi magnetici od induzioni magnetiche di valore elevato utilizzando la elevata permeabilità di tali materiali. Nella trattazione pratica dei problemi costruttivi per la realizzazione degli scopi desiderati, riesce molto utile una trattazione che, per quanto approssimata, dà ottimi risultati e che si basa sul concetto di circuito magnetico. Per giungere a tale concetto consideriamo la situazione in figura 5.17 nella quale su un toro di materiale ferromagnetico è uniformemente avvolto un conduttore (N spire). Le linee del vettore \mathbf{B} restano nell'interno del toro: ciò significa che il flusso di \mathbf{B} attraverso una qualsiasi sezione trasversale è costante, cioè che il flusso disperso (che passa attraverso alcune sezioni del toro e non attraverso altre)⁽¹⁹⁾ è nullo. Si possono scrivere le seguenti relazioni. Dal teorema della circuitazione applicato alla linea mediana del toro, C (di lunghezza l)

$$(62) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl = Ni.$$

Inoltre, ritenendo approssimativamente \mathbf{B} costante in modulo nei punti di una qualsiasi sezione trasversale (di area S)

$$(63) \quad \phi(\mathbf{B}) = BS = \mu SH.$$

Dalle (62) e (63)

$$(64) \quad Ni = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \phi(\mathbf{B}).$$

⁽¹⁸⁾ E per la misurazione di \mathbf{H} se si sceglie la definizione (11) per il momento magnetico, in accordo alla (60).

⁽¹⁹⁾ Non vi sono cioè linee del vettore \mathbf{B} che, sempre chiuse su se stesse, si svolgano solo parzialmente nell'interno del toro, come sarebbe la linea a nella figura.

Se si pensa che l'effetto della corrente nelle spire è quello di causare il flusso $\phi(\mathbf{B})$ nel toro, si riconosce che la (64) è formalmente analoga alla legge di Ohm in un circuito elettrico chiuso nel quale la f.e.m. causa la corrente (flusso della densità di corrente) nel circuito. Si può cioè considerare il toro come un circuito magnetico e notare che per esso vale una legge (di Hopkinson) fra la causa, (Ni), che genera il campo magnetico e l'effetto costituito dal flusso di \mathbf{B} .

La somiglianza fra la (64) e la legge di Ohm giustifica il nome di forza magnetomotrice dato al termine (Ni), e di resistenza magnetica o riluttanza data al termine

$$(65) \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \quad (\text{Asp/Wb}).$$

Tale resistenza magnetica dipende dalle dimensioni geometriche del materiale ferromagnetico in maniera analoga a quanto accade per la resistenza elettrica di un conduttore filiforme; essa dipende inoltre, al pari della resistenza elettrica, dalla natura del materiale: la permeabilità (μ) sarebbe l'analogo della conducibilità ($1/\rho$).

Le considerazioni ora svolte nel caso dello schema semplice di figura 5.17 possono essere estese ad altri casi nei quali sia possibile seguire lo svolgersi nello spazio delle linee del vettore \mathbf{B} e queste restino riunite in tubi abbastanza omogenei, in modo cioè che si possa trascurare il flusso disperso: cioè accade quando le linee si svolgono completamente, o quasi, nell'interno di materiali ad elevata permeabilità.

In questi soli casi vale il concetto di circuito magnetico: questi peraltro sono i casi di interesse pratico.

Sintetizzando quindi si può dire che *per circuito magnetico si intende una regione dello spazio interamente o quasi costituita di materiali ad alta permeabilità magnetica nella quale può restare confinato il campo (solenoidale) del vettore \mathbf{B}* . Per tali circuiti si possono stabilire relazioni fra forze magnetomotorie e flussi del vettore \mathbf{B} analoghe a quelle (leggi di Ohm, di Kirchhoff) valide per i circuiti elettrici.

Diamo qui qualche esempio.

Esempio

Se si considera un dispositivo quale quello in figura 5.18 nel quale tronchi di materiale a permeabilità diverse (μ_1, μ_2, μ_3) sono disposti in serie (ed il flusso disperso possa essere trascurato) si può scrivere per la circuitazione lungo la linea 1

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 = \sum Ni$$

$$\phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3$$

$$B_1 = \mu_1 H_1; \quad B_2 = \mu_2 H_2; \quad B_3 = \mu_3 H_3.$$

Si ricava, indicando con \mathcal{F} la forza magnetomotrice totale e con \mathcal{R} la riluttanza totale

$$(66) \quad \mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_i = \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} \right) \phi = \left(\sum \mathcal{R}_i \right) \phi = \mathcal{R} \phi.$$

Questa relazione è analoga alla relazione per resistenze elettriche collegate in serie.

Si consideri successivamente uno schema come in figura 5.19 ove vi sono regioni in cui confluiscono vari tronchi di materiali magnetici; esso è l'analogo

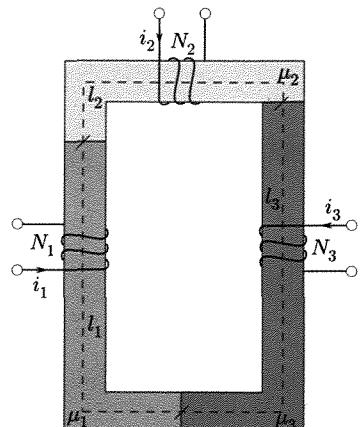


Fig. 5.18

$$\begin{aligned} &\text{Legge di Hopkinson} \\ &Ni = \mathcal{R} \phi(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

di una rete elettrica (*rete magnetica*) e si può parlare di nodi ove vari tubi di linea di flusso si uniscono. Data la solenoidalità di \mathbf{B} deve essere per essi

$$(67) \quad \sum \phi = 0$$

e questa relazione corrisponde alla legge di Kirchhoff relativa ai nodi.

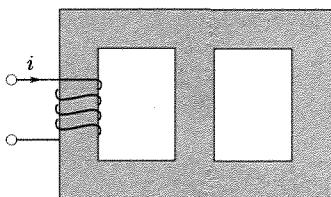


Fig. 5.19

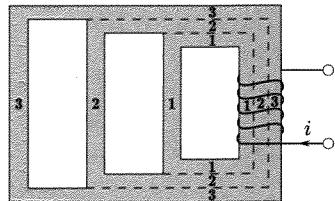


Fig. 5.20

Si consideri ancora lo schema di figura 5.20 nel quale vari tubi di flusso, chiusi ciascuno su se stesso, sono collegati in modo che in un loro ramo essi abbiano la stessa f.m.m. Si può scrivere

$$(68) \quad \mathcal{F} = \mathcal{R}_1\phi_1 = \mathcal{R}_2\phi_2 = \mathcal{R}_3\phi_3$$

e quindi

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \mathcal{F} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} \right)$$

e

$$(69) \quad \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\phi}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3}.$$

La composizione quindi di circuiti magnetici in parallelo avviene in maniera identica al caso elettrico.

Analogamente si può dimostrare la validità della seconda legge di Kirchhoff.

Come si è detto il concetto di circuito magnetico e la analogia con il caso dei circuiti elettrici è molto utile in pratica. Va avvertito peraltro che non solo il concetto di circuito magnetico può essere usato con facilità esclusivamente quando i flussi dispersi possano essere trascurati, ma anche che la analogia non va spinta al di là di certi limiti. Si osservi per esempio che nei materiali ferromagnetici μ dipende dal flusso ϕ in maniera piuttosto complicata mentre la conducibilità dei conduttori elettrici è indipendente da i ; mentre inoltre per mantenere una corrente in un circuito elettrico occorre spendere energia, non vi è tale necessità per mantenere un flusso magnetico⁽²⁰⁾.

Esempi

Mostriamo con alcuni esempi la grande utilità del concetto di circuito magnetico nell'esame e nella progettazione di apparecchi elettromagnetici.

- Supponiamo di avere (fig. 5.17) un toro di un materiale magnetico avente $S = 50 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, $l = 1 \text{ m}$ e si desideri progettare l'avvolgimento in modo da avere un valore di B di $0,5 \text{ Wb/m}^2$.

⁽²⁰⁾ Se il campo magnetico è creato da una corrente continua in un avvolgimento, si hanno perdite di energia ma queste sono dovute ad effetto Joule nei conduttori.

Il corrispondente valore di μ_r sia 3000. Si ha

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} = \frac{1}{3 \cdot 10^3 \cdot 12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 5,30 \cdot 10^4 \text{ Asp/Wb}$$

$$\phi = BS = 0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\mathcal{F} = Ni = 5,30 \cdot 10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 132 \text{ Asp.}$$

Si potrà ottenere il risultato desiderato mediante un avvolgimento di 132 spire percorso dalla corrente di 1 A, oppure mediante un avvolgimento di 66 spire percorso dalla corrente di 2 A, ecc.

2. Supponiamo di considerare la disposizione di figura 5.21 che differisce dalla precedente per la presenza di un interferro di 2 cm di spessore. Va innanzitutto osservato che il concetto di circuito magnetico può essere ancora applicato giacché il tubo di linee del vettore \mathbf{B} è ancora ben localizzato ed il campo del vettore \mathbf{B} si trova essenzialmente nell'interno di materiali ad elevata μ . La sezione del tubo di linee di \mathbf{B} in corrispondenza all'interferro è in genere più larga di quella nell'interno del materiale ferromagnetico; se tuttavia, come nel caso presente, l'interferro è piccolo questa circostanza può in prima approssimazione essere trascurata e si può ammettere che la sezione trasversale del tubo di linee del vettore \mathbf{B} sia ovunque la stessa.

Si ha allora

$$\mathcal{F} = Ni = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)\phi$$

essendo \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 le riluttanze del materiale ferromagnetico (pari praticamente a quella calcolata nell'esempio precedente) e dell'interferro.

$$\mathcal{R}_1 = 5,30 \cdot 10^4 \text{ Asp/Wb}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 3,18 \cdot 10^6 \text{ Asp/Wb}$$

$$\phi = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\mathcal{F} = Ni \simeq 8000 \text{ Asp.}$$

La presenza del piccolo interferro produce un fortissimo aumento della forza magnetomotrice necessaria a mantenere nel circuito lo stesso flusso. Il campo magnetico creato dall'avvolgimento è molto maggiore che non nel caso precedente: si osservi peraltro che nell'interno del materiale magnetico ad esso si sovrappone il campo⁽²¹⁾ (demagnetizzante) dovuto alla magnetizzazione del materiale ferromagnetico. I due campi, quello esterno e quello dovuto alla magnetizzazione del materiale ferromagnetico, sono nella stessa direzione nell'interferro ed in direzione opposta nel materiale ferromagnetico.

3. Il problema inverso dei precedenti, quando cioè sia dato il circuito magnetico, le caratteristiche dei materiali (μ in funzione del flusso) assieme alla forza m.m. e si desideri calcolare il flusso, può essere risolto facilmente per interpolazione. Si può infatti calcolare per un certo numero di flussi scelti a piacere le f.m.m. corrispondenti; si costruisce allora un grafico che fornisce il flusso in funzione della f.m.m. e da esso si può dedurre il flusso che corrisponde alla f.m.m. del problema.

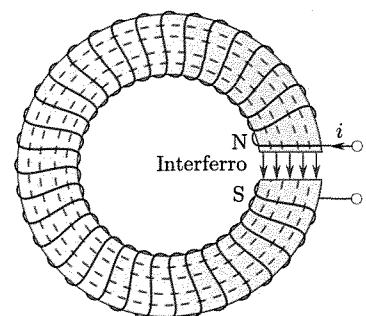


Fig. 5.21

■ 5.8. PROGETTO DI MAGNETI PERMANENTI

Applichiamo le considerazioni svolte sui circuiti magnetici allo studio dei magneti permanenti.

Consideriamo il caso di un magnete permanente realizzato con lo schema di figura 5.22 e con il materiale la cui caratteristica $B-H$ (ciclo

⁽²¹⁾ Tale campo si può pensare prodotto dai poli (par. 5.5) che si originano alle estremità del materiale ferromagnetico in corrispondenza all'interferro.

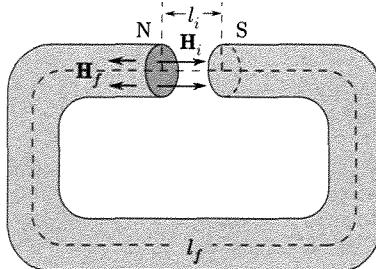


Fig. 5.22

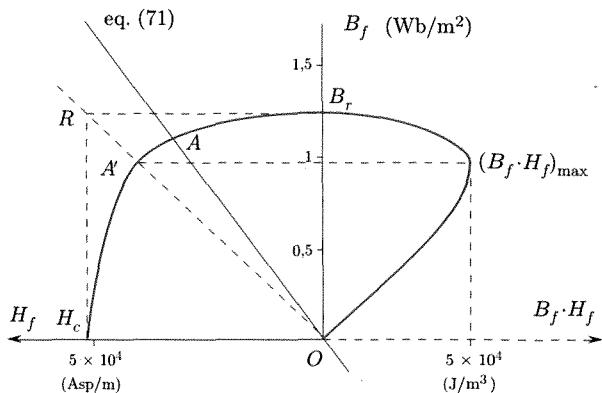


Fig. 5.23

di isteresi) nel secondo quadrante sia quella indicata nella parte sinistra di figura 5.23.

In questo caso la forza m.m. è nulla giacché nessun avvolgimento è presente ed il campo magnetico nell'interferro e nell'interno del materiale ferromagnetico è dovuto allo stato di magnetizzazione esistente nel materiale ferromagnetico. In seguito a tale magnetizzazione due polarità esistono all'estremità del magnete: nord ove escono le linee di forza di \mathbf{H} nell'aria, sud ove esse entrano dall'aria. Come si è molte volte notato il campo magnetico creato da queste polarità nell'interferro ha direzione opposta a quella del campo magnetico nel materiale ferromagnetico (campo demagnetizzante): v'è, cioè, in corrispondenza alle superfici magnete-interferro, una discontinuità netta nel verso di \mathbf{H} . Se si fa la circuitazione di \mathbf{H} lungo la linea mediana

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_f l_f + H_i l_i = 0$$

essendo H_f ed H_i i campi magnetici nel ferro e nell'interferro, e l_f , l_i le lunghezze dei corrispondenti tratti della linea mediana stessa, si ha

$$(70) \quad H_f = -H_i \frac{l_i}{l_f}.$$

Tale relazione mostra la inversione del segno di H .

Le linee del vettore \mathbf{B} sono invece continue attraverso le stesse superfici polari: il flusso di \mathbf{B} è lo stesso in ogni sezione del circuito. Se ne deduce in particolare:

$$B = \mu_0 H_i$$

e quindi dalla (70) (22)

$$(71) \quad \frac{B}{H_f} = \mu = -\mu_0 \frac{l_f}{l_i}.$$

(22) La (71) si può ottenere direttamente dalla legge di Hopkinson:

$$\text{f.m.m.} = 0 = (\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_i)\phi$$

da cui

$$\frac{l_f}{\mu S} + \frac{l_i}{\mu_0 S} = 0.$$

La (71) rappresenta il legame fra la induzione magnetica in tutto il circuito (e quindi nel ferro) ed il campo magnetico esistente nel ferro, che deriva dalla struttura del circuito. Ad essa corrisponde nel piano $B_f - H_f$ (fig. 5.23) una retta per l'origine. Il punto di lavoro, A , cioè il campo magnetico H_f e l'induzione B_f , è determinato dall'intersezione della retta con la curva $B_f - H_f$ caratteristica del materiale del magnete.

Come si vede, nelle applicazioni dei materiali ferromagnetici per la realizzazione di magneti permanenti, ha interesse la parte della caratteristica $B_f - H_f$ che giace nel secondo quadrante: la creazione del campo magnetico all'esterno del magnete è, come già detto, associata ad un campo demagnetizzante H_f nel materiale magnetico; di conseguenza la induzione nel circuito magnetico è sempre inferiore alla induzione residua B_r .

Da queste considerazioni è evidente che i materiali per magneti permanenti devono presentare un campo coercitivo più elevato possibile ed una curva $B-H$ il più distesa possibile nella direzione delle ascisse in modo da poter consentire la realizzazione di dispositivi che funzionano con campi demagnetizzanti (H_f) relativamente elevati ed induzioni non molto discoste da B_r .

Si osservi che la densità di energia magnetica che si trova nell'interferro vale, in accordo con la (31)

$$(72) \quad w = \frac{1}{2} H_i B .$$

Di conseguenza l'energia magnetica che si trova nell'interferro (volume $S l_i$) è

$$(73) \quad W = \frac{1}{2} H_i B S l_i .$$

Usando la (70) ed indicando con $V_f = S l_f$ il volume del magnete

$$(74) \quad W = -\frac{1}{2} (B_f H_f) V_f .$$

Tale relazione mostra che a parità di volume del magnete l'energia immagazzinata nell'interferro è proporzionale al prodotto $(B_f H_f)$ e sarà massima quando tale prodotto è massimo. Nella parte destra della figura 5.23 è riportato sulle ascisse il prodotto $(B_f H_f)$ in corrispondenza ai vari B_f per un materiale avente la caratteristica indicata a sinistra della figura: tale curva è molto utile in sede di progetto di un magnete. Il valore massimo di $(B_f H_f)$ prende il nome di fattore di merito del materiale.

Una regola pratica approssimata per trovare rapidamente sulle curve B_f-H_f nel secondo quadrante il punto ove è massimo $(B_f H_f)$ è indicata in figura 5.23. Si considerino le parallele agli assi coordinati per i punti estremi della curva (cioè O , B_r e H_c , O) e si congiunga la loro intersezione con l'origine: questa retta taglia la curva B_f-H_f nel punto (A') cercato.

■ 5.9. STUDIO SPERIMENTALE DELLE SOSTANZE IN CAMPO MAGNETICO

Allo scopo di dare maggiore concretezza alle considerazioni che saranno svolte in seguito vogliamo dare qualche indicazione sui metodi di misura usati per valutare i parametri globali (χ , μ_r) che caratterizzano il comportamento di una sostanza nel campo magnetico.

Nel caso di sostanze debolmente magnetiche la suscettività viene determinata con metodi basati sulla misura delle forze che agiscono sui campioni della sostanza in esame introdotti in un campo magnetico non uniforme.

Se infatti si considera (fig. 5.24) un campione di piccolo volume (v) della sostanza (suscettività χ_1) immerso in un mezzo (per esempio aria) a suscettività χ_2 , in presenza di un campo magnetico non uniforme è facile determinare la forza che lo sollecita.

La variazione di energia nel campo ⁽²³⁾ per la presenza della sostanza è

$$(75) \quad \mathcal{U} = v \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H} \right) = \frac{1}{2} v (\chi_1 - \chi_2) \mu_0 H^2$$

e le componenti della forza, essendo date dalle derivate della \mathcal{U} rispetto a x , y , z dipendono da χ_1 . Si comprende quindi come dalla misura della forza sull'elemento v della sostanza in esame si possa giungere alla determinazione della sua suscettività.

Nel caso di materiali per i quali χ ha valori molto elevati (10^3) si trova, come già detto, che a differenza di quanto avviene nei materiali debolmente magneticci, χ e μ_r dipendono dalla intensità del campo H e dalla storia del materiale. Lo studio di questi materiali richiede la determinazione di B e di H nell'interno della sostanza. Lo schema di un metodo di misura è indicato in figura 5.25. Il campione viene configurato a forma toroidale in modo da eliminare l'azione demagnetizzante dovuta alle estremità polari. Sul toro sono disposti due avvolgimenti: il primo (primario) è avvolto uniformemente e può essere attraversato da una corrente continua (i) erogata da una pila e regolata da un reostato (R_1). Se n_1 è il numero di spire per unità di lunghezza il campo nel materiale ha il valore

$$(76) \quad H = n_1 i.$$

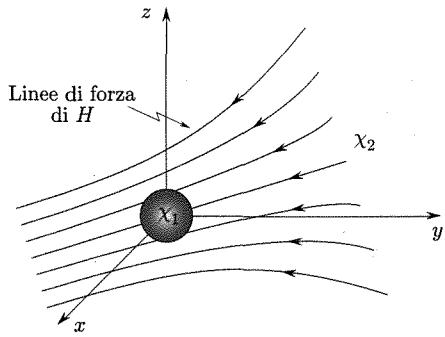


Fig. 5.24

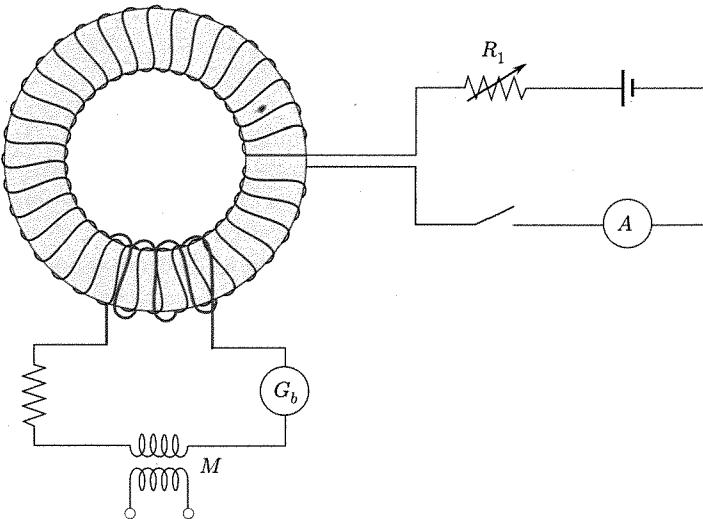


Fig. 5.25

⁽²³⁾ In questo calcolo si suppone che l'intensità del campo magnetico (\mathbf{H}) nel volume occupato dalla particella sia la stessa di quella che si ha in assenza di essa. La differenza fra il campo che effettivamente si ha e quello portato in conto è costituito dal campo demagnetizzante nel campione dovuto alla magnetizzazione stessa del campione. Quest'ultimo è dell'ordine di $M = \chi H$ e può essere trascurato per valori piccoli di χ .

Il secondo avvolgimento circonda una piccola porzione del toro ed è collegato con un galvanometro balistico: esso serve alla determinazione di B . Se n_2 è il numero di spire di questo avvolgimento, S la loro sezione, il flusso concatenato è

$$(77) \quad \Phi = n_2 SB = n_2 n_1 S \mu.$$

Se il circuito primario viene aperto il flusso (77) va a zero: nell'avvolgimento secondario passa, per l'effetto della induzione elettromagnetica (vedi cap. 6, par. 6.5), una quantità di elettricità che è determinata dal galvanometro balistico (G_b).

La mutua induzione M è inserita nel circuito per la taratura del galvanometro balistico.

■ 5.10. SPIEGAZIONE CLASSICA DEL COMPORTAMENTO MAGNETICO DELLA MATERIA. MOMENTI MAGNETICI ATOMICI

Nel paragrafo 5.4 abbiamo presentato le principali proprietà macroscopiche di alcuni materiali magnetici (dia-, para-, ferro-magnetici); una ricerca approfondita ha condotto oggi alla determinazione di numerose altre caratteristiche nel comportamento specifico di tali materiali (specie ferromagnetici) ed al riconoscimento della esistenza di altre classi di materiali magnetici.

Per molto tempo i principali fenomeni presentati dalle sostanze magnetiche sono stati spiegati esclusivamente mediante teorie fenomenologiche piuttosto semplici sorte nell'ambito dell'elettromagnetismo classico e perciò dette *classiche*. In un certo senso è stata la semplicità della spiegazione di fenomeni vistosi offerta da queste teorie la principale causa che ha ritardato a lungo lo sviluppo di teorie più avanzate. Solo relativamente di recente è stato messo in evidenza che le teorie classiche non riescono a fornire esaurienti spiegazioni, specie per vari fenomeni meno vistosi che via via sono stati investigati sperimentalmente. È stato inoltre mostrato che i fenomeni che caratterizzano il comportamento magnetico della materia possono essere spiegati esaurientemente solo nell'ambito di trattazioni intrinsecamente quantistiche.

In questo paragrafo ci limiteremo a presentare le spiegazioni classiche, che, come si è detto, sono abbastanza semplici e suggestive per una interpretazione dei fenomeni più vistosi.

L'inizio della spiegazione classica è dovuto ad Ampère (1820), il quale, sulla base della dimostrazione (Oersted ed Arago, 1820) che ad una spira percorsa da corrente è associato un momento magnetico, suggerì l'idea che il ferromagnetismo e, in genere, il comportamento magnetico della materia, fossero dovuti a correnti elettriche interne agli atomi: queste ultime possono essere individuate nel moto delle cariche negative (elettroni) su traiettorie chiuse intorno ai nuclei atomici. Una tale idea si presentava molto attraente e consente di spiegare fra l'altro come non sia mai possibile nei materiali ferromagnetici isolare poli diversi: infatti l'elemento costitutivo su scala atomica è un dipolo magnetico.

In questo paragrafo presentiamo la trattazione classica relativa ai momenti magnetici atomici, legati al moto degli elettroni intorno al nucleo.

a. Momenti magnetici atomici in assenza di campo magnetico

Allo scopo di esaminare, sia pure in maniera approssimata, la situazione che si determina per effetto del moto delle cariche nell'interno dell'atomo, cominciamo con il considerare il moto centrale di una carica q

*Nonostante
il comportamento
magnetico della materia
sia spiegato
esaurientemente solo
da teorie quantistiche,
la teoria classica
permette di introdurre
in modo semplice
concetti ed idee
fondamentali*

(massa m_q) che si muova su un'orbita chiusa la quale racchiuda evidentemente il centro delle forze O (fig. 5.26). Essendo il moto centrale, il momento della quantità di moto rispetto ad O risulta costante

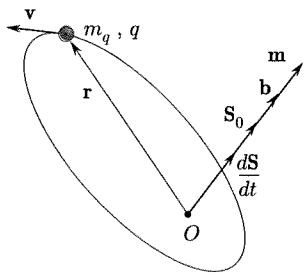


Fig. 5.26

(78)

$$\mathbf{b} = m_q(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 2m_q \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

$d\mathbf{S}/dt$ ⁽²⁴⁾ è la velocità areolare, cioè un vettore normale al piano dell'orbita, diretto verso il semispazio dal quale si vede la carica (punto materiale) descrivere l'orbita in senso antiorario e di modulo dS/dt essendo dS l'area spazzata dal raggio vettore (\mathbf{r}) nel tempo dt .

D'altra parte il moto periodico della carica sulla traiettoria chiusa quando, come nel caso che qui interessa, possa essere osservato solo per tempi lunghi rispetto al periodo (τ), equivale ad una spira percorsa da una corrente di intensità

(79)

$$i = \frac{q}{\tau}.$$

Il momento magnetico associato alla corrente atomica risulta

(80)

$$\mathbf{m} = \frac{q}{\tau} \mathbf{S}_0$$

dove il modulo S_0 è la superficie piana racchiusa dall'orbita.

Poiché \mathbf{S}_0/τ è la velocità areolare media ed essa coincide con quella istantanea essendo quest'ultima costante, si può scrivere

(81)

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m_q} \mathbf{b} = \gamma \mathbf{b}$$

con

(82)

$$\gamma = \frac{q}{2m_q}.$$

Si è quindi raggiunta la conclusione che nel caso considerato v'è una proporzionalità fra i vettori momento magnetico e momento della quantità di moto. γ è una costante; essa non dipende né dall'estensione dell'orbita né dalla velocità v con cui la carica q la descrive.

Nel caso che si consideri il moto di un elettrone intorno al nucleo nell'interno di un atomo, la carica è negativa,

(83)

$$\gamma = -\frac{e}{2m_e}$$

e i due vettori \mathbf{b} ed \mathbf{m} hanno versi opposti.

Nella trattazione classica l'origine del momento magnetico degli atomi è ritenuta consistere esclusivamente nel moto degli elettroni intorno al nucleo.

Siccome in ogni atomo vari elettroni sono presenti e per il moto di ciascuno di essi valgono le considerazioni precedenti, il momento magnetico dell'atomo risulta dalla somma dei momenti orbitali degli elettroni ed è diretto parallelamente ed in verso contrario rispetto al corrispondente momento totale della quantità di moto.

⁽²⁴⁾ Nel seguito di questo capitolo si incontrerà un numero quantico indicato con S ed un vettore momento della quantità di moto \mathbf{S} ; non v'è tuttavia possibilità di equivoco con la grandezza qui indicata con \mathbf{S} .

Molto spesso entrambi questi vettori risultanti sono nulli; in alcuni casi essi sono diversi da zero. Analogamente nel caso delle molecole o di altri aggregati di atomi molto spesso, ma non sempre, il momento magnetico è nullo.

b. Momento magnetico atomico indotto in un campo \mathbf{B} .

Precessione di Larmor

Quando una sostanza viene introdotta in un campo di induzione \mathbf{B} il moto orbitale di ciascun elettrone viene alterato; è possibile mostrare che ne consegue una variazione del momento della quantità di moto e si origina un momento magnetico indotto proporzionale a \mathbf{B} ma diretto in senso opposto. Questo risultato è espresso dal teorema di Larmor.

Supponiamo (fig. 5.27) di avere una carica q che si muova in un campo di forze centrali \mathbf{F} come quello dovuto alla attrazione esercitata dal nucleo su un elettrone; venga ora applicato un campo \mathbf{B} in una direzione in genere diversa da quella della normale (\mathbf{n}) al piano dell'orbita. L'equazione del moto in un sistema di coordinate inerziali risulta

$$(84) \quad m_q \mathbf{a} = m_q \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

essendo $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ la velocità del punto materiale (di carica q).

Supponiamo di voler riferire il moto ad un sistema di assi che ruoti intorno alla direzione di \mathbf{B} con velocità angolare costante ω . Si tratta evidentemente di un sistema non inerziale sicché occorre introdurre le forze apparenti (di trascinamento e di Coriolis) che tengano conto del moto della terna di riferimento.

Si ha

$$(85) \quad m_q \mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{F} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B} - m_q \mathbf{a}_t - 2m_q \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}.$$

La forza di trascinamento si riduce alla forza centrifuga

$$(86) \quad -m_q \mathbf{a}_t = -m_q \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

ed essa, se $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ è piccola rispetto a \mathbf{v}_{rel} , risulta molto piccola e trascurabile rispetto alla forza di Coriolis

$$-2m_q \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}.$$

È questo il caso normale per un elettrone in un atomo. Inoltre nelle stesse condizioni si può trascurare la differenza fra la velocità del punto materiale nel sistema inerziale \mathbf{v} ed in quello non inerziale (tale differenza è pari a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$). In tali condizioni la (85) si scrive approssimativamente

$$(87) \quad m_q \mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{F} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B} - 2m_q \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Se si ricorda che $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{B} hanno la stessa direzione e si sceglie il modulo di $\boldsymbol{\omega}$ tale che

$$(88) \quad q \mathbf{v} \times \mathbf{B} - 2m_q \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$$

la (87) diviene

$$(89) \quad m_q \mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{F}.$$

Ciò significa che all'osservatore nella terna in rotazione il moto del punto materiale appare quello che si ha nella terna fissa in assenza di \mathbf{B} . Ciò equivale a dire che il moto nella terna fissa in presenza di \mathbf{B} equivale alla somma di quello preesistente alla applicazione di \mathbf{B} e a un lento moto

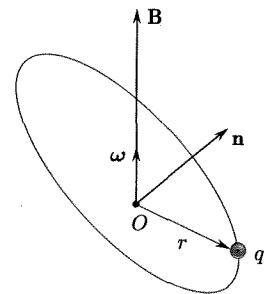


Fig. 5.27

di rotazione intorno alla direzione di \mathbf{B} con velocità $\omega = \Delta\omega$ (precessione di Larmor). Dalla (88) si ha

$$(90) \quad q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -2m_q\mathbf{v} \times \omega$$

$$(91) \quad \omega = -\frac{q}{2m_q}\mathbf{B}.$$

Nel caso dell'elettrone il modulo⁽²⁵⁾ di ω è

$$(92) \quad \omega = \Delta\omega = \omega_L = \frac{e}{2m_e}B.$$

Alla precessione di Larmor si associa una variazione del momento della quantità di moto ($\Delta\mathbf{b}$) e del momento magnetico. Se si considera un elettrone, nel caso semplice che \mathbf{B} sia normale all'orbita si ha:

$$(93) \quad \Delta\mathbf{b} = m_e(\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{v}) = m_e r^2 \Delta\omega = \frac{er^2}{2}\mathbf{B}.$$

Nel caso generale, se si indica con \bar{a}^2 il valore medio dei quadrati delle distanze dei punti dell'orbita dell'elettrone dall'asse di precessione (parallelo a \mathbf{B} per la posizione del nucleo) si trova

$$(94) \quad \Delta\mathbf{b} = \frac{e}{2}\bar{a}^2\mathbf{B}.$$

Per la variazione del momento magnetico si ha nel caso generale

$$(95) \quad \Delta\mathbf{m} = \gamma\Delta\mathbf{b} = -\frac{e^2}{4m_e}\bar{a}^2\mathbf{B}.$$

c. Diamagnetismo

Il diamagnetismo si manifesta nel caso di materiali le cui particelle (atomi, molecole) sono prive di momento magnetico proprio. Il processo che l'origina è tuttavia operante in tutte le sostanze. Secondo la trattazione classica quando un sistema materiale qualsiasi viene introdotto in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} , ha origine per tutti gli elettroni un moto di precessione intorno alla direzione di \mathbf{B} con la velocità angolare

$$(96) \quad \omega_L = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}.$$

Ad ogni atomo viene di conseguenza associato un momento magnetico indotto, somma di quelli relativi a ciascun elettrone presente nell'atomo: siccome tutti questi momenti componenti sono diretti in senso contrario a \mathbf{B} , lo stesso accade per il momento atomico indotto risultante. Si ha quindi dalla (95):

$$(97) \quad \mathbf{m} = -\frac{e^2}{4m_e} \left(\sum_1^z \bar{a}^2 \right) \mathbf{B}$$

essendo la sommatoria estesa a tutti gli z elettroni di un atomo.

⁽²⁵⁾ L'espressione ottenuta per ω consente di controllare la liceità della approssimazione consistente nel trascurare $\omega \times \mathbf{r}$ rispetto a \mathbf{v}_{rel} : si osservi infatti che anche per campi B notevolmente intensi (1 T) il valore di ω_L (circa 10^{11} rad/s) risulta notevolmente inferiore alla velocità angolare di un elettrone sulla sua orbita (10^{15} rad/s) che determina essenzialmente (moltiplicata per r) v_{rel} .

Se si indica con N il numero di atomi per unità di volume risulta per la suscettività⁽²⁶⁾

$$(98) \quad \chi = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{H}} = \frac{\mu_0 N \mathbf{m}}{\mathbf{B}} = -\frac{N \mu_0 e^2}{4m_e} \sum_i^z \overline{a_i^2}.$$

È questa la formula che la teoria classica di Langevin fornisce per il diamagnetismo. La suscettività diamagnetica è essenzialmente determinata dalla distribuzione di carica elettronica negli atomi e siccome questa non dipende praticamente dalla temperatura, il diamagnetismo di una sostanza non varia con la temperatura; ciò è in accordo con l'esperienza.

Si deve osservare che la determinazione teorica di χ è condotta al calcolo $\sum_i^z \overline{a_i^2}$ per il quale la teoria classica non dà alcun suggerimento. Si può solo vedere che usando i dati sperimentali per χ , il valore di $\sum_i^z \overline{a_i^2}$ è dell'ordine di 10^{-20} m^2 : tali valori non sembrano essere in contrasto con le dimensioni atomiche.

Le considerazioni svolte sulla precessione degli elettroni degli atomi introdotti nel campo \mathbf{B} mostrano che il diamagnetismo è una proprietà comune a tutta la materia. Esso è peraltro un effetto quantitativamente piccolo che è facilmente mascherato qualora siano presenti fenomeni più intensi che conducono ad una magnetizzazione nel verso del campo \mathbf{B} applicato.

Come abbiamo già anticipato, la teoria classica è errata. Ciononostante la (98) sembra essere in accordo con l'esperienza.

Con riferimento alla maniera in cui la (98) è stata ricavata, la ragione per cui la sua deduzione è sbagliata sta nel fatto che i calcoli per ottenerla sono stati condotti assumendo che ogni elettrone percorra un'orbita di ben determinate dimensioni. J.H. Van Leeuwen fece osservare che se si resta nel campo della teoria classica non vi sono limitazioni relative alle orbite di un elettrone e bisogna assumere per esse dimensioni distribuite in un campo continuo di valori. È possibile dimostrare, usando la statistica classica di Maxwell-Boltzmann, che in tali circostanze la suscettività totale, dovuta al diamagnetismo ed al paramagnetismo (di cui si parla al punto d.) risulta sempre zero. Ciò dimostra la impossibilità di spiegare classicamente il diamagnetismo (e anche il paramagnetismo).

La risoluzione di questo problema è offerta dalla meccanica quantistica in accordo alla quale, parlando in termini approssimati, le orbite permesse agli elettroni sono solo in numero finito. In seguito a tale limitazione il calcolo che la meccanica quantistica consente di eseguire mostra l'esistenza del diamagnetismo e la validità dell'equazione (98) per sostanze a molecole monoatomiche.

d. Paramagnetismo

Il paramagnetismo si presenta per le sostanze nelle quali gli atomi, le molecole o gli ioni hanno momento magnetico non nullo. Secondo la teoria classica, in assenza di campo magnetico esterno, i momenti magnetici delle singole particelle, per effetto della agitazione termica, sono diretti a caso in tutte le possibili direzioni, sicché la sostanza non possiede alcuna

Nonostante che la (98) sia sostanzialmente in accordo con l'esperienza, la teoria classica è sbagliata

⁽²⁶⁾ Essendo in questi materiali χ molto piccola, è praticamente $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

magnetizzazione risultante. Quando la sostanza viene posta in un campo magnetico, si manifesta una azione orientatrice che tende a far ruotare i momenti magnetici delle particelle verso la direzione del campo: tale azione è contrastata dalla agitazione termica che invece tende a ristabilire la distribuzione a caso. Ne segue una magnetizzazione nella direzione e nel verso di \mathbf{B} e quindi una suscettività positiva: magnetizzazione e suscettività dipendono dalla temperatura e crescono al ridursi di quest'ultima. La suscettività così originata è in genere superiore a quella negativa del contributo diamagnetico. Questa spiegazione qualitativa è in accordo con la legge sperimentale di Curie

Legge di Curie

(99)

$$\chi = \frac{C}{T}$$

dove C è una costante e anche con il fatto che per valori di \mathbf{B} molto intensi e temperature basse la magnetizzazione non cresce più proporzionalmente a \mathbf{B} e finisce con il tendere ad un valore costante. Quando infatti tutti i momenti magnetici elementari sono allineati con il campo esterno, l'intensità di magnetizzazione non può ulteriormente aumentare (intensità di saturazione).

Teoria di Langevin

Langevin presentò, lungo queste linee, la spiegazione classica del paramagnetismo nel caso di un gas di molecole dotate di momento magnetico proprio \mathbf{m} . Egli fece l'ipotesi che quando un tale gas è posto in un campo magnetico, si eserciti sulle molecole esclusivamente un'azione che tenda a disporle parallelamente a \mathbf{B} . Ad un tale sistema egli applicò la statistica di Boltzmann.

La trattazione è identica a quella presentata per la polarizzazione dielettrica di orientamento⁽²⁷⁾, ed in realtà fu sviluppata da Langevin per il paramagnetismo e poi applicata alla polarizzazione dielettrica.

Si ottiene per il rapporto fra il momento magnetico medio per atomo nella direzione di \mathbf{B} (\bar{m}) ed il momento proprio atomico (m)

$$(100) \quad \frac{\bar{m}}{m} = \cotan a - \frac{1}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = L(a)$$

dove

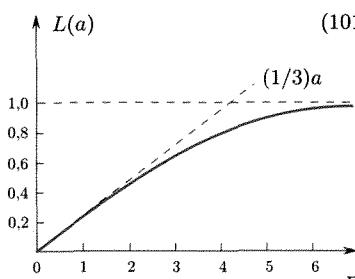
(101)

$$a = \frac{mB}{kT}.$$

La funzione $L(a)$, funzione di Langevin, è rappresentata nella figura 5.28. Per valori elevati di a , cioè per B elevati e T basse, essa approssima l'unità: si ha allora la saturazione per l'allineamento completo di tutti i dipoli atomici. Per piccoli valori di a , cioè campi magnetici deboli ed alte temperature, la curva è praticamente una retta⁽²⁸⁾

$$(102) \quad L(a) \simeq \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \frac{mB}{kT}.$$

Fig. 5.28



⁽²⁷⁾ Si tratta di sostituire al momento di dipolo elettrico μ_p , il momento magnetico proprio di ciascuna particella, di modulo m , ed al campo elettrico \mathbf{E} quello di induzione magnetica \mathbf{B} .

⁽²⁸⁾ Lo sviluppo in serie per i piccoli valori di a è

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \frac{2a^5}{945} \dots$$

Per campi poco intensi e temperature non molto basse, la suscettività risulta, indicando con N il numero di atomi per unità di volume,

$$(103) \quad \chi = \frac{N\bar{m}}{H} = \frac{Nm^2B}{3kTH} = \frac{N\mu_0 m^2}{3kT}.$$

È questa una relazione del tipo della legge empirica di Curie ed anzi coincide con essa se si pone la costante C della legge di Curie

$$(104) \quad C = \frac{\mu_0 N m^2}{3k}.$$

L'uso dei dati sperimentali nella (103) consente di calcolare i valori dei momenti propri degli atomi. Per sostanze che hanno una χ di circa 10^{-3} a temperatura ambiente, si trovano valori di m dell'ordine di $10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Questi valori sono notevolmente superiori a quelli di segno contrario dovuti al diamagnetismo e rendono possibile trascurare il diamagnetismo nello studio delle sostanze paramagnetiche.

La teoria di Langevin è stata sviluppata per il caso di sostanze allo stato gassoso, quando cioè le mutue interazioni delle molecole siano sufficientemente piccole e possano essere trascurate. La legge di Curie (e quindi la trattazione teorica di Langevin) sembra tuttavia rappresentare abbastanza bene l'andamento dei fenomeni nel caso di alcuni liquidi e solidi come per esempio nelle soluzioni diluite di sali paramagnetiche quando gli ioni paramagnetiche sono abbastanza lontani fra loro e possano considerarsi liberi. In genere peraltro nei liquidi e nei solidi quando le interazioni divengono notevoli la suscettività segue più frequentemente una legge di Curie modificata che va sotto il nome di legge di Curie-Weiss

$$(105) \quad \chi = \frac{C}{T - \theta}$$

dove θ è una costante (di Weiss) e può essere positiva o negativa.

Tale legge vale solo per $T > |\theta|$.

Nonostante l'apparente successo della teoria classica del paramagnetismo, essa non può essere accettata perché inficiata da una obiezione fondamentale. La teoria di Langevin si basa infatti sull'ipotesi che gli atomi del sistema abbiano un momento magnetico ben definito. Una tale ipotesi non può essere giustificata classicamente. Se infatti il momento magnetico di un atomo deve essere associato e proporzionale al momento della quantità nel moto orbitale degli elettroni, esso dovrebbe prendere non un unico ben definito valore ma valori distribuiti con continuità fra $-\infty$ e $+\infty$ e ciò porta di conseguenza, come già osservato nel punto c., che il calcolo classico del diamagnetismo e del paramagnetismo si conclude con una esatta compensazione dei due effetti. Risultato questo in contrasto con l'esperienza e quindi errato.

*Legge di Curie-Weiss
valida per liquidi
e solidi*

*Anche le basi teoriche
classiche
del paramagnetismo
sono sbagliate*

■ 5.11. MOMENTI DELLA QUANTITÀ DI MOTO E MOMENTI MAGNETICI PER SISTEMI ATOMICI NELLA MECCANICA QUANTISTICA

Nella trattazione quantistica di un sistema atomico il momento della quantità di moto ed il momento magnetico che, come si dimostra, è associato ad esso, hanno una origine che non risiede esclusivamente nel moto

orbitale degli elettroni intorno ai nuclei, come è invece nella trattazione classica.

Nel presente paragrafo noi vogliamo discutere appunto le indicazioni della meccanica quantistica circa i momenti magnetici. Faremo ciò esaminando dapprima i momenti relativi ai componenti dell'atomo (elettroni, nucleo) e daremo in seguito un cenno sui risultati cui si perviene per atomi nel loro complesso o per gruppi atomici (molecole, ioni ecc.).

Per studiare il momento della quantità di moto ed il momento magnetico dei singoli elettroni in un atomo occorre considerare gli stati quantici da loro occupati. Sarà bene a questo punto ricordare che lo stato⁽²⁹⁾ di un elettrone in un atomo è determinato da quattro numeri quantici n , l , m^* ⁽³⁰⁾, s . Il primo n , numero totale o principale, è quello che essenzialmente determina l'energia ed ha valori interi positivi ($1, 2, \dots$). Il secondo, l , numero quantico azimutale, viene introdotto considerando il momento della quantità di moto dell'elettrone rispetto al nucleo⁽³¹⁾. Tale momento è in modulo precisamente dato da⁽³²⁾

$$(106) \quad b = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi}.$$

In genere il vettore \mathbf{b} , in uno stato caratterizzato dal numero quantico l , viene indicato con \mathbf{l} . Come diremo presto, esso può assumere solo alcune orientazioni nello spazio.

Il numero l può avere uno dei valori

$$0, 1, 2, \dots (n-1).$$

Poiché la particella (elettrone) è carica, al momento della quantità di moto (orbitale) ora considerato è associato un momento magnetico che, per quanto è stato già detto (par. 5.10)⁽³³⁾, è diretto come \mathbf{l} ma nel verso opposto a causa della carica negativa e vale (81) in modulo

$$(107) \quad m = \gamma |\mathbf{l}| = -\frac{e\hbar}{4\pi m_e} \sqrt{l(l+1)}.$$

La teoria quindi indica una ben definita quantità avente le dimensioni di m e che va considerata come un *momento magnetico elementare*

$$(108) \quad \mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$$

esso prende il nome di magnetone di Bohr⁽³⁴⁾.

Il terzo numero quantico m^* , detto magnetico per le ragioni che presto vedremo, è legato al fatto che non solo il momento della quantità di moto è quantizzato ma lo è anche la sua componente *in una direzione (z) fissata qualsiasi*:

$$(109) \quad b_z = l_z = m^* \frac{h}{2\pi}.$$

Il numero m^* può assumere i valori interi fra $-l$ e $+l$ ed il valore zero. Ciò corrisponde a dire che il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{l}$ (di modulo $\sqrt{l(l+1)}h/2\pi$) può assumere solo alcune orientazioni nello spazio (quantizzazione spaziale). La figura 5.29 indica

⁽²⁹⁾ Per una trattazione semplice degli effetti magnetici faremo spesso riferimento ad orbite degli elettroni: non è questa la maniera esatta di trattare i problemi e di descrivere gli stati quantici. I risultati che vengono riportati possono essere tuttavia ottenuti con la teoria quantistica rigorosa.

⁽³⁰⁾ Questo numero quantico viene qui indicato con m^* invece che con m come è di solito, per evitare confusioni con il momento magnetico.

⁽³¹⁾ Nella figurazione impropria delle orbite, sarebbe il momento della quantità di moto orbitale.

⁽³²⁾ Per molte considerazioni è sufficiente porre $b = lh/2\pi = l\hbar$.

⁽³³⁾ Le conclusioni lì raggiunte valgono anche nella trattazione quantistica.

⁽³⁴⁾ Si osservi che viene usata la lettera μ per il magnetone di Bohr pur essendo tale lettera in genere da noi usata per le permeabilità. Non si confonda μ_B (dimensioni di un momento magnetico) con la permeabilità μ_0 .

queste orientazioni per il caso $l = 2$: esse sono evidentemente determinate dai valori consentiti per $b_z = l_z$.

La quantizzazione delle componenti di \mathbf{l} in una direzione qualsiasi porta di conseguenza che se si applica un campo magnetico \mathbf{B} anche le componenti del momento magnetico dell'elettrone possono assumere solo valori discreti che si calcolano dalla espressione di l_z . È stato appunto lo studio del comportamento degli atomi in campo magnetico quello che ha dimostrato il fatto che \mathbf{l} può assumere solo alcune direzioni nello spazio rispetto ad una direzione qualsiasi scelta come direzione del campo magnetico: questo spiega il nome dato al numero quantico m^* .

È bene infine dire che quando si applica un campo \mathbf{B} nella direzione z il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{l}$ assume un moto di precessione con la stessa velocità $\omega = (-e/2m_e)B$ data dalla teoria classica; tale moto intorno a z lascia evidentemente inalterato il valore di l_z .

Il quarto numero quantico (s , di spin) è dovuto al fatto che, come la esperienza e la teoria della relatività mostrano, l'elettrone ha un momento magnetico proprio ed associato ad esso un momento della quantità di moto. In un campo magnetico orientatore i valori possibili della componente del momento della quantità di moto di spin nella direzione del campo⁽³⁵⁾ (z) sono

$$(110) \quad b_{sz} = s \frac{\hbar}{2\pi} = s\hbar$$

con $s = \pm 1/2$.

Questa situazione può essere rappresentata in un modello vettoriale dell'atomo dicendo che l'elettrone ruota intorno ad un suo asse con un momento della quantità di moto legato ad s : la direzione dell'asse è fissata dal campo magnetico applicato, dovendo la componente del momento della quantità di moto lungo la direzione del campo essere quella data dalla (110). La relazione fra momento magnetico e momento della quantità di moto è analoga a quella valida per i moti orbitali. Le componenti nella direzione del campo applicato (z) sono legate dalla

$$(111) \quad m_{sz} = \gamma_s b_{sz}.$$

Il coefficiente di proporzionalità ha un valore diverso dal γ classico, valido come si è già detto anche nella teoria quantistica, *per i momenti relativi al moto dell'elettrone intorno al nucleo*. Questa circostanza è spiegata nella meccanica quantistica relativistica (Dirac). Si può scrivere

$$(112) \quad \gamma_s = g_s \gamma$$

e

$$(113) \quad m_{sz} = g_s (\gamma b_{sz}) = -g_s \left(s \frac{e\hbar}{4\pi m_e} \right) = -g_s s \mu_B.$$

Si è trovato che il valore del coefficiente g_s , è molto prossimo a 2 ($g_s = 2,0023$) il che vuol dire che lo spin dell'elettrone dà origine ad un momento magnetico approssimativamente pari a un magnetone di Bohr nella direzione del campo \mathbf{B} applicato (nel verso di \mathbf{B} o in quello opposto).

Esamineremo fra poco la composizione dei momenti della quantità di moto e dei momenti magnetici per gli elettroni in un atomo. Vogliamo premettere che anche il nucleo ha un momento della quantità di moto e un momento magnetico: i componenti del nucleo, protoni e neutroni (detti in generale nucleoni) si spostano nel nucleo con un moto che, entro certi limiti, si può ritenere analogo a quello orbitale degli elettroni nell'atomo ed inoltre hanno un moto di rotazione su se stessi. I momenti magnetici nucleari risultanti sono tuttavia molto più piccoli di quelli associati agli elettroni in un atomo: in genere sono più piccoli per un fattore 10^{-3} (si ricordi che γ è inversamente proporzionale alla massa della particella). Siccome la

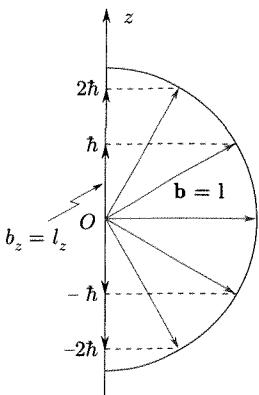


Fig. 5.29

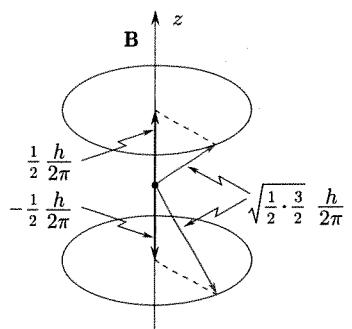


Fig. 5.30

⁽³⁵⁾ Con maggior precisione il momento della quantità di moto di spin \mathbf{b}_s ha modulo $\sqrt{s(s+1)}\hbar/2\pi$ con $s = \pm \frac{1}{2}$ ed assume orientazioni rispetto ad una direzione fissata (campo magnetico applicato) tali che le sue proiezioni su tale direzione siano $\pm sh/2\pi$. Tale vettore è di solito indicato con \mathbf{s} . Nella figura 5.30 è indicata la quantizzazione spaziale di \mathbf{s} : la direzione z è quella del campo magnetico applicato dall'esterno ed intorno al quale il vettore \mathbf{s} assume un moto di precessione. Quest'ultimo non ha influenza sulla componente nella direzione z .

suscettività di un sistema atomico (gassoso) come si è visto nella trattazione classica [formula (103)] e come è confermato nella trattazione quantistica, dipende dal quadrato del momento magnetico delle particelle, il contributo nucleare alla suscettività di un sistema atomico può essere in genere trascurato⁽³⁶⁾ nella trattazione del paramagnetismo atomico che qui stiamo considerando. Si conclude quindi che per lo studio del paramagnetismo atomico è sufficiente considerare il momento magnetico che deriva dagli elettroni.

Gli elettroni in un atomo si trovano ad occupare gli stati consentiti a partire da quelli di energia inferiore. Usando dizioni spettroscopiche derivanti da una schematizzazione alla Bohr, questi stati vengono raggruppati in *gusci*. Un guscio è formato da tutti i livelli che sono caratterizzati dallo stesso valore del numero quantico n (e diversi valori di l, m^*, s). Analogamente si dice che tutti i livelli caratterizzati dagli stessi valori di n e l formano un *sottoguscio*. È facile vedere⁽³⁷⁾ che in base al principio di Pauli⁽³⁸⁾, il contributo ai momenti della quantità di moto e magnetico dell'atomo dovuto agli elettroni di un guscio o sottoguscio pieno è nullo.

Quindi gli atomi dotati di momento dovuto agli elettroni sono quelli aventi sottogusci incompleti⁽³⁹⁾. Per avere il momento della quantità di moto e quello magnetico di un atomo dovuto agli elettroni siamo condotti a considerare come si compongano i momenti (orbitale o di spin) degli elettroni di un sottoguscio incompleto. Ciò dipende naturalmente dalle interazioni esistenti. Noi non ci addentreremo nello studio di questo problema. Prima di dare i risultati vogliamo peraltro dire che le interazioni sono essenzialmente di due tipi:

1. magnetiche, trattandosi di particelle dotate di momento magnetico;
2. elettrostatiche.

Queste ultime non si limitano alle forze coulombiane, ma comprendono, molto importante e determinante, una interazione di natura nettamente quantistica, l'interazione di scambio. Heisenberg (1928) ha mostrato che nel calcolo quantistico dell'energia elettrostatica quando si ha una parziale sovrapposizione delle distribuzioni di carica corrispondenti agli stati dai due elettroni in un atomo, si presenta un termine legato agli spin degli elettroni⁽⁴⁰⁾. Ciò corrisponde ad una forza mutua fra gli elettroni: le interazioni di scambio sono quelle che conducono ai legami covalenti in un atomo. Il nome di *scambio* deriva dal fatto che il termine dell'energia di cui sopra fra due elettroni aventi momenti della quantità di moto di spin $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$, può porsi nella forma

$$(114) \quad W_{sc} = -2J_{sc}\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$$

J_{sc} è l'*integrale di scambio*, così chiamato perché legato alla probabilità che i due elettroni scambino i relativi stati.

Le interazioni fra i vari elettroni conducono al risultato che negli atomi aventi sottogusci incompleti il momento della quantità di moto può porsi nella forma

$$(115) \quad \sqrt{J(J+1)} \frac{\hbar}{2\pi}$$

⁽³⁶⁾ Ciò non è vero in altre situazioni quali nel fenomeno della risonanza magnetica nucleare: uno di quegli effetti che non può essere affatto spiegato da teorie classiche.

⁽³⁷⁾ Su ciascuno stato caratterizzato dagli stessi n, l, m^* vi sono due elettroni a spin opposti e quindi il contributo dovuto agli spin scompare. Per quanto riguarda i momenti orbitali, si osservi che, essendo per un sottoguscio n e l fissati, ed essendo occupati tutti gli stati con diversi m^* vi è una esatta compensazione (vedi fig. 5.29).

⁽³⁸⁾ Il principio di Pauli afferma che in uno stesso sistema due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantico stazionario, essi cioè non possono avere la stessa serie di numeri quantici.

⁽³⁹⁾ Si osservi che a volte l'occupazione parziale di un sottoguscio è relativa agli elettroni di valenza (stati periferici dell'atomo), altre volte è relativa a stati ben interni alla distribuzione elettronica dell'atomo (gruppi del ferro, delle terre rare ecc.).

⁽⁴⁰⁾ L'origine di tale termine è una conseguenza dell'esistenza dello spin degli elettroni e del principio di esclusione di Pauli: l'energia elettrostatica del sistema quando le distribuzioni di carica dei due elettroni si sovrappongono dipende dall'orientamento degli spin.

essendo J , numero quantico *totale* della quantità di moto, un numero intero o semintero, esprimibile per mezzo dei momenti delle quantità di moto diciamo così orbitali e di spin degli elettroni in questione. Il momento magnetico in realtà non è parallelo al momento della quantità di moto⁽⁴¹⁾. Nei casi che si debbano considerare processi in campi magnetici esterni poco intensi⁽⁴²⁾ ci si può limitare a considerare in pratica il momento magnetico nella direzione del momento della quantità di moto. Esso risulta

$$(116) \quad m_j = -g\mu_B \sqrt{J(J+1)}$$

essendo μ_B il magnetone di Bohr, e g un fattore (di Landé) esprimibile per mezzo di J e dei numeri quantici l_i ed s_i (del momento della quantità di moto orbitale e di spin) degli stati elettronici interessati.

Quando l'atomo è posto in un campo esterno, la componente nella direzione del campo del momento magnetico può assumere i valori

$$(117) \quad m = -g\mu_B M_j$$

essendo M_j il numero quantico che può avere uno dei $(2J+1)$ valori

$$-J, -(J-1), \dots, (J-1), J.$$

La (117) rappresenta il risultato finale cercato e mostra, che a differenza della teoria classica, la teoria quantistica conduce ad un insieme discreto di valori che il momento magnetico di un atomo può assumere.

Lo stato caratterizzato dal numero quantico totale J , se l'atomo è fuori da un campo magnetico, è tale che lo stato è $(2J+1)$ volte degenere perché tutti i livelli con diverso M_J hanno la stessa energia. Quando esso viene posto in un campo magnetico \mathbf{B} , la degenerazione è tolta: l'energia corrispondente al livello M_J è

$$(118) \quad W = g\mu_B M_J B$$

e la differenza di energia fra due livelli contigui (corrispondenti a $M_J, M_J + 1$) è

$$(119) \quad \Delta W = g\mu_B B.$$

La figura 5.31 mostra come vari W con B per i livelli che derivano dallo stesso livello degenere fuori del campo magnetico nel caso di J pari a $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Il momento magnetico di un atomo può scriversi

$m_j = -g\mu_B \sqrt{J(J+1)}$ e le sue componenti nella direzione del campo magnetico sono quantizzate (cioè hanno solo i valori discreti)

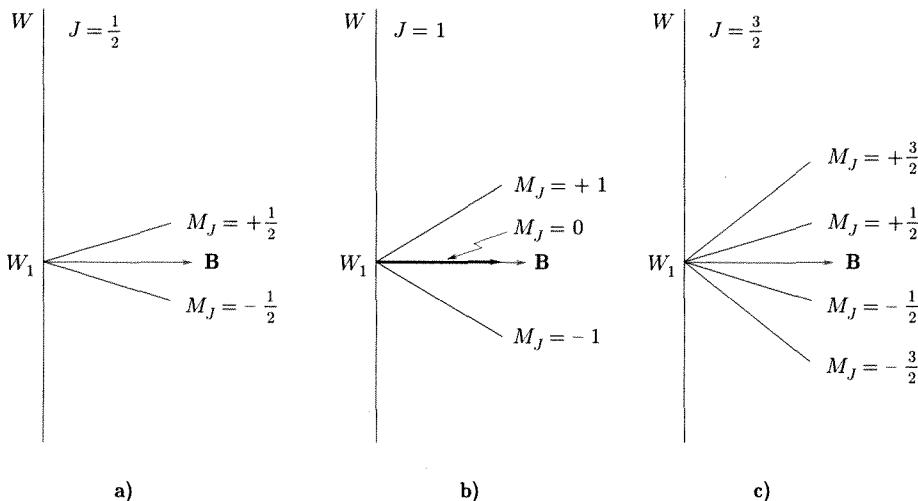


Fig. 5.31

⁽⁴¹⁾ Ciò è dovuto ai valori diversi di γ per i casi rispettivamente dei momenti magnetici orbitali e di spin.

⁽⁴²⁾ Quali quelli che in realtà si riesce a creare.

■ 5.12. TEORIA QUANTISTICA DEL PARAMAGNETISMO ATOMICO

Il paramagnetismo atomico è dovuto ai momenti magnetici (orbitale e di spin) degli elettroni. Esaminiamo più da vicino le indicazioni delle teorie quantistiche per vari sistemi atomici.

a. Sistemi di atomi liberi

La teoria quantistica mostra che gli atomi aventi sottogusci (insieme di stati elettronici aventi gli stessi numeri quantici n e l) incompleti hanno un momento della quantità di moto ed un momento magnetico dovuti a tali elettroni. Essi possono essere descritti associando allo stato dell'atomo un numero, intero o semintero, J , numero quantico totale della quantità di moto. Se si applica un campo magnetico esterno, le componenti del momento magnetico atomico nella direzione del campo possono assumere esclusivamente i valori della (117).

L'energia corrispondente per l'atomo è data dalla (118).

Mentre nella teoria classica il momento magnetico di un atomo (legato esclusivamente al moto orbitale degli elettroni) può avere valori che variano con continuità fra $-\infty$ e $+\infty$, nella meccanica quantistica il momento magnetico di un atomo (derivante dal moto orbitale e di spin di elettroni in sottogusci incompleti) può prendere un valore diverso da zero e ben preciso e la sua proiezione nella direzione del campo applicato può avere solo un numero discreto di valori. Si vede quindi che nella teoria quantistica viene rimossa la obiezione di base che inficia i calcoli di Langevin. Il calcolo della suscettività può essere fatto con uno schema che ricalca quello di Langevin.

Supponiamo di avere un insieme di atomi liberi⁽⁴³⁾ (N per unità di volume) i quali si trovino nello stato fondamentale caratterizzato dal numero quantico totale della quantità di moto J . Tale stato, fuori del campo magnetico, è degenere. Quando si applica il campo \mathbf{B} si può ritenere che i vari atomi continuino ad occupare stati con lo stesso J ma, essendo ora tolta la degenerazione, essi si ripartiscano fra gli stati caratterizzati da energie diverse secondo il valore del numero quantico magnetico M_J (compreso fra $-J$ e $+J$). L'energia potenziale magnetica per un atomo nello stato caratterizzato da M_J è

$$M_J g \mu_B B$$

e quindi la probabilità che un atomo si trovi in tale stato è, secondo la statistica di Boltzmann, proporzionale a

$$(120) \quad e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}.$$

Di conseguenza la frazione di atomi che si trovano nello stato avente un dato M_J è

$$\frac{e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}{\sum_{M_J=+J}^{M_J=-J} e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}.$$

La componente del momento magnetico per un atomo caratterizzato da M_J nella direzione di B è $(-M_J g \mu_B)$ e quindi il contributo al momento magnetico dell'unità di volume dovuto agli atomi caratterizzati dal particolare valore di M_J è:

$$(121) \quad \frac{-N M_J g \mu_B e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}{\sum_{M_J=+J}^{M_J=-J} e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}$$

essendo N il numero di atomi per unità di volume.

⁽⁴³⁾ In tal caso ogni atomo può essere considerato come un sistema isolato.

Il momento magnetico dell'unità di volume, cioè l'intensità di magnetizzazione, si ottiene sommando i contributi (121) per i vari valori consentiti di M_J

$$(122) \quad M = N\bar{m} = N \frac{\sum (-M_J g \mu_B) e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}{\sum e^{-\frac{M_J g \mu_B B}{kT}}}.$$

Le somme vanno estese da $M_J = -J$ ad $M_J = +J$; \bar{m} è il momento magnetico medio nella direzione di B .

Con passaggi algebrici la (122) può trasformarsi nella espressione

$$(123) \quad M = N\bar{m} = NgJ\mu_B[B_J(x)]$$

essendo

$$(124) \quad x = \frac{gJ\mu_B B}{kT}$$

e

$$(125) \quad B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \cotan \left[\frac{(2J+1)x}{2J} \right] - \frac{1}{2J} \cotan \left(\frac{x}{2J} \right)$$

la cosiddetta funzione di Brillouin⁽⁴⁴⁾.

Va osservato che i valori del parametro x sono in genere molto piccoli in corrispondenza ai valori dell'induzione magnetica e della temperatura normalmente incontrati⁽⁴⁵⁾.

In tali condizioni si può usare uno sviluppo in serie della funzione di Brillouin arrestato al primo termine⁽⁴⁶⁾ ottenendosi come risultato per l'intensità di magnetizzazione

$$(126) \quad M = N\bar{m} = Ng^2\mu_B^2 J(J+1) \frac{B}{3kT}.$$

Si ottiene per la suscettività

$$(127) \quad \chi = \frac{N\bar{m}}{H} = \frac{\mu_0 N J(J+1) g^2 \mu_B^2}{3kT} = \frac{C}{T}.$$

La suscettività paramagnetica nella teoria quantistica

Questa espressione della suscettività è in accordo con la legge di Curie e coincide con la formula classica della teoria di Langevin se si osserva che il valore del momento magnetico associato al numero quantico totale J è (116)

$$m = -g\mu_B \sqrt{J(J+1)}.$$

Si osservi che la teoria quantistica consente di legare la costante di Curie a parametri caratteristici della struttura atomica. Ciò può consentire in alcuni casi (quando il momento magnetico atomico è misurato indipendentemente) di controllare l'esattezza della teoria. Viceversa quando si riscontrano sperimentalmente la validità della legge di Curie, la (127) può servire per determinare il momento magnetico atomico e più particolarmente il suo rapporto al magnetone di Bohr. Il numero effettivo di magnetoni di Bohr è

$$(128) \quad p_{\text{eff}} = \frac{m}{\mu_B} = g\sqrt{J(J+1)}.$$

L'ordine di grandezza della χ previsto dalla teoria è in accordo con l'esperienza.

⁽⁴⁴⁾ Nel caso che J divenga molto grande, che cioè vi sia un numero molto grande di orientazioni possibili per il momento magnetico atomico, la funzione di Brillouin tende a quella di Langevin ($\cotan x - 1/x$) che appunto è ottenuta mediante una integrazione invece che mediante la somma di un numero finito di termini.

⁽⁴⁵⁾ Per esempio con un campo di induzione $B = H/\mu_0$ di 1 Wb/m^2 ed a temperatura ambiente, per il caso importante di momento magnetico atomico dovuto allo spin di un elettrone ($J = \frac{1}{2}$, $g = 2$) risulta x all'incirca pari a $2 \cdot 10^{-3}$.

⁽⁴⁶⁾ $B_J(x) \approx [(J+1)/J] (x/3)$.

Così se $N = 10^{28}$ atomi/m³, $p_{\text{eff}} = 1$, si ha

$$\chi \simeq \frac{1}{40T}$$

e quindi a temperatura ambiente $\chi \simeq 10^{-4}$.

Nel caso di campi magnetici intensi a basse temperature i valori di χ non sono più piccoli e per rappresentare l'andamento delle cose occorre usare la (125) nella sua interezza. In tali casi si dimostra evidente la differenza fra le funzioni di Langevin e di Brillouin. L'esattezza della teoria quantistica è stata controllata in molti esperimenti.

b. Aggruppamenti atomici

Finora abbiamo considerato sistemi formati da atomi liberi (isolati), come è il caso in un gas monoatomico. Si osservi che è sufficiente che il numero degli elettroni presenti nell'atomo sia dispari perché vi sia qualche sottoguscio incompleto ed un momento magnetico diverso da zero.

È peraltro più comune avere a che fare con sistemi formati da raggruppamenti di atomi (uguali o no) quali sono le molecole, i cristalli ecc. Per vedere come stiano le cose nei riguardi dei momenti magnetici elementari è allora importante considerare quale è il guscio incompleto responsabile del momento magnetico degli atomi costituenti.

Esso può essere quello degli elettroni più periferici, cioè degli elettroni (di valenza) responsabili dei legami chimici fra atomi quando questi vengano avvicinati, oppure un guscio più interno. Quest'ultimo caso si verifica negli elementi di transizione e propriamente per gli orbitali (sottoguscio) 3d (gruppo del ferro), 4d (gruppo del palladio), 4f (gruppo del lantanzio o delle terre rare), 5d (gruppo del platino) e 5f (gruppo dell'attinio).

Nel caso che gli elettroni di valenza siano i responsabili del momento magnetico atomico, tale momento di solito scompare con la formazione del composto: ciò è dovuto al fatto che nella ridistribuzione degli elettroni periferici (di valenza), in cui consiste la formazione del legame (covalente o ionico), gli elettroni che davano origine al momento magnetico degli atomi isolati vengono a trovarsi in distribuzioni aventi momenti orbitale e di spin complessivamente nulli.

Ne segue che quasi tutte le molecole non hanno momento magnetico proprio.

Le cose stanno differentemente nel caso di complessi formati da atomi con sottogusci interni incompleti: anche se privati degli elettroni di valenza, o con questi impegnati in legami covalenti, la causa del momento magnetico dell'atomo isolato permane, almeno in parte, negli aggruppamenti.

È evidente inoltre che le considerazioni svolte per il caso di sistemi di atomi liberi potranno applicarsi senza ulteriori specificazioni ad aggruppamenti atomici di vario genere, come per esempio a composti allo stato solido (cristalli) che contengano l'elemento in oggetto, solo se le interazioni fra i vari atomi di ciascun aggruppamento non alterino in maniera essenziale lo stato delle cose nei riguardi degli atomi dotati di momento magnetico proprio. Ciò accade nelle soluzioni solide (magneticamente diluite) in cui sia molto bassa la concentrazione della struttura atomica diremo così attiva, cioè dotata di momento magnetico proprio qualora libera.

È interessante a questo punto considerare alcuni risultati sperimentalni. Ci limiteremo al caso di composti solidi contenenti ioni del gruppo delle terre rare e del ferro: sono questi quelli che sono stati più estesamente studiati. In entrambi questi casi si trova rispettata la legge di Curie per campi magnetici non molto intensi e si può calcolare per vari ioni il numero efficace di magnetoni di Bohr o, quello che è lo stesso, il rapporto fra il momento magnetico dello ione in oggetto ed il magnetone di Bohr. Tale valore, ottenuto da informazioni sperimentalni, può essere confrontato con il valore teorico (128).

Nel caso degli ioni di terre rare l'accordo fra teoria ed esperienza è ottimo. In questo caso, siccome il sottoguscio incompleto responsabile per il momento magnetico (4f) è notevolmente più interno dei sottogusci di valenza (5d, 6s), le interazioni elettrostatiche con gli atomi vicini (campo elettrico cristallino) non hanno alcuna influenza sicché il momento magnetico dello ione risulta lo stesso che si avrebbe per ioni liberi.

Il caso di solidi contenenti ioni del gruppo del ferro è considerato nella tabella 5.1. Sono qui riportati per vari ioni del gruppo il valore del numero quantico

Tabella 5.1

Numero di elettroni 3d	Ione	J	g	$g\sqrt{J(J+1)}$	S	$2\sqrt{S(S+1)}$	$\frac{m_{\text{sper}}}{\mu_B}$
0	Ca ²⁺ Sc ³⁺ Ti ⁴⁺	0	1	0	0	0	0
1	Ti ³⁺	3/2	0,80	1,55	1/2	1,73	1,70
2	V ³⁺	4/2	0,61	1,64	2/2	2,83	2,61
3	Cr ³⁺ Mn ⁴⁺ V ²⁺	3/2	0,40	0,77	3/2	3,87	3,85
4	Mn ³⁺ Cr ²⁺	0	1	0	4/2	4,90	4,83
5	Mn ²⁺ Fe ³⁺	5/2	2	5,91	5/2	5,92	5,83
6	Fe ²⁺	8/2	1,50	6,74	4/2	4,90	5,36
7	Co ²⁺	9/2	1,33	6,62	3/2	3,87	4,90
8	Ni ²⁺	8/2	1,25	5,60	2/2	2,83	3,11
9	Cu ²⁺	5/2	1,20	3,55	1/2	1,73	1,83
10	Zn ²⁺	0	1	0	0	0	0

totale J , il fattore di Landé, il rapporto m/μ_B calcolato mediante il numero quantico J , mediante il numero quantico di spin totale S ⁽⁴⁷⁾ degli elettroni del sottoguscio incompleto ed il valore sperimentale di m/μ_B .

I risultati sperimentali ed i valori del momento magnetico calcolato teoricamente nella maniera usuale ($g\sqrt{J(J+1)}\mu_B$) non sono in accordo. Il confronto migliora notevolmente se i risultati sperimentali sono paragonati ai valori del momento magnetico che si avrebbero se solo gli spin elettronici ($g = 2$) fossero responsabili del magnetismo

$$2\sqrt{S(S+1)}\mu_B.$$

La spiegazione di questo fatto può ancora trovarsi nella interazione elettrostatica degli ioni con le particelle circostanti nel cristallo. Si osservi che negli ioni del gruppo del ferro gli elettroni $3d$, cui è dovuto il momento magnetico degli atomi liberi, sono gli elettroni più esterni e sono quindi fortemente esposti al campo elettrico cristallino. Conseguenza della interazione è che il moto orbitale degli elettroni $3d$ viene influenzato (orbita bloccata) nel senso che i corrispondenti momenti della quantità di moto e magnetico non possono orientarsi in un campo magnetico esterno (si dice che il momento della quantità di moto orbitale ed il momento magnetico orbitale sono *smorzati*, in inglese *quenched*). Lo spin degli elettroni non è influenzato dalle interazioni elettrostatiche e quindi resta a dare il momento magnetico degli ioni.

Vogliamo alla fine di questo paragrafo accennare al paramagnetismo dovuto agli elettroni di conduzione nei metalli. Per far ciò è sufficiente considerare lo schema di un metallo come formato da ioni fissi ed alcuni elettroni liberi. Per chiarezza prendiamo in considerazione un metallo i cui ioni non abbiano momenti magnetici (per esempio sodio, per cui la struttura dello ione è quella del neon a gusci pieni). Se si applica un campo magnetico si riscontra un debole paramagnetismo che va associato agli spin degli elettroni.

Qualora si applicassero a questo caso le formule stabilite in precedenza si ottiene per la suscettività a temperatura ambiente un valore di circa 10^{-3} ed una proporzionalità a $1/T$.

L'esperienza mostra invece χ_e dell'ordine di 10^{-5} ed indipendente da T .

La spiegazione (Pauli) va trovata applicando la statistica di Fermi al posto di quella di Boltzmann nella trattazione del problema.

⁽⁴⁷⁾ Il numero quantico S si ottiene dalla composizione dei vettori di spin degli elettroni in questione.

■ 5.13. FERROMAGNETISMO. IPOTESI DI WEISS. DOMINI FERROMAGNETICI E LORO MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA

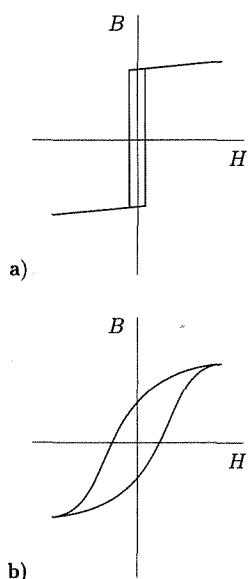


Fig. 5.32

Teoria di Weiss

Interazione fra i dipoli

Il fatto che una sostanza ferromagnetica al di sopra di una temperatura (di Curie) si comporti come paramagnetica, indica che gli atomi costituenti devono avere un momento proprio come per le sostanze paramagnetiche; a differenza di queste tuttavia deve esistere una qualche interazione fra le particelle capace di tenere i loro momenti allineati anche in assenza di campo esterno e ciò risulta essere possibile solo al di sotto di una temperatura⁽⁴⁸⁾ T_c ; al di sopra, l'agitazione termica ha il sopravvento sulla azione orientatrice e si è condotti ad un sistema i cui atomi hanno momenti magnetici diretti a caso fuori da un campo magnetico (sistema paramagnetico). I punti da spiegare nei riguardi della magnetizzazione sono:

1. la natura e le modalità di interazione dei momenti magnetici elementari;
2. perché in pezzi ferromagnetici macroscopici (mono o policristallini) si osservi la magnetizzazione se il pezzo è stato esposto ad un campo esterno e si può non osservare altrimenti.

L'isteresi caratterizza un legame fra H e M (o B) tale che la linea rappresentativa (piano MH o BH) degli stati del materiale quando H varia periodicamente è un ciclo ad area diversa da zero. La forma del ciclo può essere abbastanza diversa anche per lo stesso materiale: per campioni monocristallini di dimensioni non molto grandi la forma del ciclo può approssimarsi ad un rettangolo di piccola area (fig. 5.32a), mentre per campioni policristallini il ciclo assume forme con spigoli molto smussati (fig. 5.32b) e racchiude un'area maggiore. Queste circostanze sembrano indicare che nel primo caso si debba trattare di una struttura relativamente elementare, sia pure nella sua complessità, e che nel secondo il materiale sia formato da sistemi elementari le cui risposte al campo si sovrappongono in maniera non completamente ordinata a dare il comportamento osservato. Legata agli stessi processi che danno luogo alla isteresi va trovata la spiegazione della variazione di μ al variare del campo applicato e della storia del materiale.

Agli inizi del secolo Weiss ha presentato una teoria essenzialmente fenomenologica nella quale tutto il complesso comportamento su indicato viene interpretato sulla base di due sole ipotesi:

1. *un campione di materiale ferromagnetico (mono o policristallino) è in genere formato da più regioni* (regioni di Weiss o domini) *spontaneamente magnetizzate* (di solito non nella stessa direzione);
2. la magnetizzazione (spontanea) esistente in ciascun dominio è dovuta ad un allineamento dei dipoli atomici prodotto da una mutua interazione; *l'azione orientativa* che, in media, un dipolo atomico risente viene posta *proporzionale al numero di dipoli paralleli per unità di volume, cioè proporzionale all'intensità di magnetizzazione.*

⁽⁴⁸⁾ L'esistenza di un ordine al di sotto della temperatura di Curie e la sua scomparsa al di sopra di tale temperatura sono ancora indicati da un andamento particolare del calore specifico, caratteristico del passaggio ordine-disordine di un sistema.

La teoria di Weiss ha avuto successo nella spiegazione dei fenomeni più vistosi del ferromagnetismo ed è tuttora estesamente usata per considerazioni semplici su di essi.

Vogliamo aggiungere che l'esistenza dei domini ipotizzata da Weiss è stata dimostrata mediante esperienze dirette di vario genere, che discuteremo in seguito, e quindi va considerata oggi non più una ipotesi ma come un dato sperimentale.

La seconda ipotesi di Weiss serve ad esprimere il campo locale \mathbf{B}_l che agisce sul singolo dipolo magnetico elementare⁽⁴⁹⁾ in un dominio. Il campo locale è dovuto a quello applicato dall'esterno⁽⁵⁰⁾, ed a quello prodotto da tutti i dipoli elementari che costituiscono il materiale eccezion fatta del dipolo in questione: la seconda ipotesi di Weiss suppone che questo secondo contributo sia proporzionale ad \mathbf{M} .

Si può scrivere quindi:

$$(129) \quad \mathbf{B}_l = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \lambda \mathbf{M} = \mu_0 (\mathbf{H} + \lambda \mathbf{M}).$$

Il coefficiente di \mathbf{M} è stato posto nella forma $\mu_0 \lambda$, e quindi λ è una costante numerica, chiamata costante del campo molecolare ($\lambda \mathbf{M}$) o di Weiss.

Le considerazioni che qui presentiamo vanno fatte supponendo di avere un esemplare costituito da un unico dominio. Allora \mathbf{B}_l , \mathbf{H} , \mathbf{M} hanno la stessa direzione; perciò noi d'ora in poi non segnaliamo il vettore.

Vogliamo notare che nello studio delle sostanze ferromagnetiche, come per esempio nella determinazione della magnetizzazione da esse assunta in certe circostanze, si trova più conveniente usare H come variabile indipendente piuttosto di B . Ciò è in parte legato al fatto che nell'esperienza il campo applicato dall'esterno può essere facilmente controllato mediante correnti in circuiti opportunamente disposti.

Faremo ora vedere come le ipotesi di Weiss consentano di spiegare la magnetizzazione spontanea, l'esistenza della temperatura di Curie (T_c), il comportamento paramagnetico per $T > T_c$.

Si supponga di avere un solido il quale contenga N atomi (ioni, molecole), dotati di momento magnetico proprio (\mathbf{m}), per unità di volume. La teoria svolta per i materiali paramagnetici ci consente di esprimere l'intensità di magnetizzazione in funzione del parametro a

$$(130) \quad M = N \bar{m} = N m L(a)$$

essendo in questo caso nella funzione di Langevin (100)

$$(131) \quad a = \frac{m B_l}{kT} = \frac{m \mu_0 (H + \lambda M)}{kT}$$

poiché il campo che agisce sul dipolo è B_l .

Volendo ora considerare la magnetizzazione spontanea, cioè in assenza di campo esterno applicato ($H = 0$), si ha dalla (131) per M

$$(132) \quad M = \frac{kT}{m \mu_0 \lambda} a.$$

Campo locale

*Spiegazione
della magnetizzazione
spontanea*

⁽⁴⁹⁾ Tale campo non va confuso con il campo macroscopico nel materiale (par. 5.2) che è dovuto oltre che al campo esterno, a quello prodotto da tutti i dipoli elementari.

⁽⁵⁰⁾ Per esempio dovuto alle correnti che lo creano; esso agirebbe sul singolo dipolo anche in assenza del resto del materiale ed è legato ad \mathbf{H} essendo pari a $\mu_0 \mathbf{H}$.

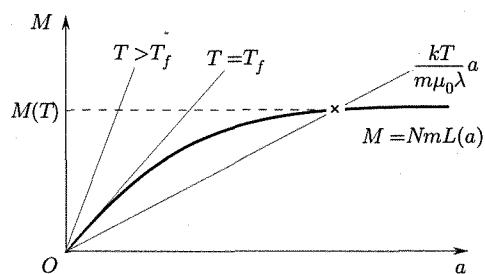


Fig. 5.33

Temperatura di Curie ferromagnetica

L'intensità di magnetizzazione può essere ottenuta in funzione della temperatura eliminando il parametro a fra le equazioni (130) e (132).

La soluzione analitica del sistema [(130) e (132)] non si riesce ad ottenere, sicché conviene usare un metodo grafico (fig. 5.33) cercando le intersezioni delle linee rappresentative delle due relazioni fra $M(T)$ ed a . Si osservi che la (132) è una relazione lineare ed è quindi rappresentata da una retta uscente dalla origine con un coefficiente angolare $(k/\lambda\mu_0 m)T$ proporzionale alla temperatura. Studiare come varia M con T significa considerare come variano le intersezioni fra la curva rappresentativa della (130) e semirette uscenti dall'origine con diverse inclinazioni. Indichiamo con T_f la temperatura per cui la retta (132) risulta tangente alla curva (130). Per $T < T_f$ si hanno due intersezioni fra retta e linea: è possibile vedere che l'intersezione differente dall'origine corrisponde ad uno stato stabile.

Per $T < T_f$ la sostanza presenta quindi una magnetizzazione in assenza di campo esterno. Quando T è uguale o maggiore di T_f l'intersezione che rappresenta lo stato stabile viene a mancare, la sostanza non ha più una magnetizzazione in assenza di campo esterno: ciò corrisponde al fatto (usando una terminologia classica) che la interazione fra dipoli, per temperature superiori a T_f , non è più sufficiente a mantenere orientati i dipoli stessi e l'agitazione termica ha il sopravvento. I singoli atomi (o molecole), prima raggruppati nei domini, riacquistano la loro libertà, ed è su di essi che ora agisce il campo, come accade nei mezzi paramagnetici. La temperatura T_f , alla quale viene a cessare il comportamento ferromagnetico, prende il nome di temperatura di Curie ferromagnetica.

È facile trovare la espressione di T_f . Si osservi che vicino all'origine la funzione $L(a)$ è praticamente pari ad $a/3$ e la (130) può essere approssimata dalla retta

$$(133) \quad M = \frac{Nm}{3}a.$$

Tale retta deve coincidere con la (132) per $T = T_f$

$$(134) \quad M = \frac{kT_f}{m\mu_0\lambda}a.$$

Si ha quindi

$$\frac{Nm}{3} = \frac{kT_f}{m\mu_0\lambda}$$

e

$$(135) \quad T_f = \frac{\lambda\mu_0 Nm^2}{3k}.$$

Spiegazione quantistica

La teoria quantistica procede esattamente lungo le stesse linee. La intensità di magnetizzazione è ora data dalla (123) in cui compare la funzione $B_J(x)$ di Brillouin ed

$$(136) \quad x = g\mu_B \frac{B_l J}{kT} = g\mu_B \frac{\mu_0(H + \lambda M)}{kT} J.$$

In questo caso il campo magnetico (locale) B_l che agisce sul dipolo e che entra nella (136) è quello dato dalla (129).

Volendo ora considerare la magnetizzazione spontanea, cioè in assenza di campo esterno applicato ($H = 0$), si ottiene dalla (136) per M

$$(137) \quad M = \frac{kT}{\lambda\mu_0 g\mu_B J} x.$$

L'intensità di magnetizzazione può essere ottenuta in funzione della temperatura eliminando il parametro x fra le equazioni (123) e (137), anche in questo caso con un metodo grafico illustrato nella figura 5.34 analoga alla figura 5.33.

La relazione tra T_f e la costante λ che caratterizza le interazioni può essere trovata osservando che vicino all'origine ($x \ll 1$) la $B_J(x)$ è data approssimativamente da

$$(138) \quad B_J(x) \simeq \frac{(J+1)}{J} \frac{x}{3}$$

e quindi si ha, ponendo l'inclinazione della (138) per $x = 0$ uguale a quella della linea (137) per $T = T_f$:

$$(139) \quad Ng\mu_B(J+1) \frac{1}{3} = \frac{kT_f}{\lambda\mu_0 g\mu_B J}$$

e

$$(140) \quad T_f = \frac{\lambda\mu_0 N}{3k} [(g^2\mu_B^2)J(J+1)] = \frac{\lambda\mu_0 N m_J^2}{3k}$$

essendo il momento magnetico totale associato con J pari a $m_J = g\mu_B\sqrt{J(J+1)}$.

Al di sopra di T_f la sostanza deve perdere le proprietà ferromagnetiche e comportarsi come sostanza paramagnetica. Ciò è in accordo con l'esperienza. In tale regione si ha una magnetizzazione solo in presenza di un campo esterno.

Se H è sufficientemente piccolo si può usare per $B_J(x)$ la espressione (138) e la (123) diviene

$$(141) \quad M = Ng\mu_B(J+1) \frac{x}{3}.$$

Questa relazione, assieme alla (136), consente di calcolare per χ l'espressione

$$(142) \quad \chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - T_p}$$

essendo

$$(143) \quad C = \frac{Ng^2\mu_0\mu_B^2(J+1)J}{3k} = \frac{\mu_0 N m_J^2}{3k}$$

$$(144) \quad T_p = \lambda C = \lambda \frac{Ng^2\mu_B^2 J(J+1)\mu_0}{3k}.$$

La (142) rappresenta la legge di Curie-Weiss.

Si osservi che la temperatura caratteristica T_p (di Curie paramagnetica) ha la stessa espressione (140) di T_f (temperatura di Curie ferromagnetica). Ciò significa che la teoria di Weiss non consente di distinguere fra le temperature di Curie ferromagnetica e paramagnetica.

In realtà (fig. 5.35) la temperatura di Curie che va introdotta nella legge di Curie-Weiss perché questa rappresenti i risultati sperimentali (T_p temperatura di Curie paramagnetica) è 10-20° più elevata della temperatura alla quale si stabilisce (o cessa) la magnetizzazione spontanea (T_f temperatura di Curie ferromagnetica). Questa circostanza, non spiegata dalla teoria di Weiss, viene chiarita da alcune teorie quantistiche.

Ritornando a considerare le intensità di magnetizzazione a campo esterno nullo⁽⁵¹⁾ si vede dalla (123) che essa è massima quando $B_J(x)$ assume il valore massimo che è pari all'unità, e ciò avviene per $x = \infty$ e quindi per $T = 0$.

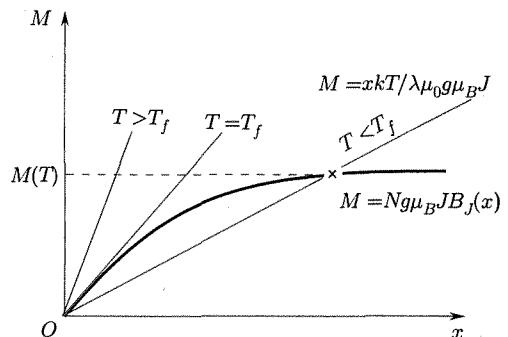


Fig. 5.34

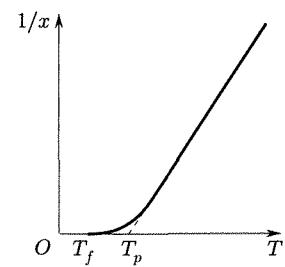


Fig. 5.35

⁽⁵¹⁾ Si osservi che la magnetizzazione spontanea a campo esterno nullo che qui si considera è quella che si presenta in un singolo dominio. Nel caso di un campione a più domini il valore della intensità di magnetizzazione spontanea può essere valutata con buona approssimazione applicando un campo esterno e misurando la intensità di saturazione: in tali

Tale valore, pari a $Ng\mu_B J$, si ha quando *tutti* i dipoli magnetici sono orientati parallelamente: al crescere della temperatura l'intensità di magnetizzazione decrese per ridursi a zero alla temperatura di Curie⁽⁵²⁾. Il valore della intensità di magnetizzazione alle varie temperature può ottenersi risolvendo (per esempio graficamente) il sistema [(123), (137)] per ciascun caso concreto. È utile a tale riguardo considerare invece di M il rapporto

$$\frac{M(T)}{M(0)}.$$

Le equazioni (123) e (137) divengono

(145)

$$\frac{M(T)}{M(0)} = B_J(x)$$

(146)

$$\frac{M(T)}{M(0)} = \frac{xkT}{\lambda\mu_0 Ng^2\mu_B^2 J^2} = \frac{xT(J+1)}{3JT_f}.$$

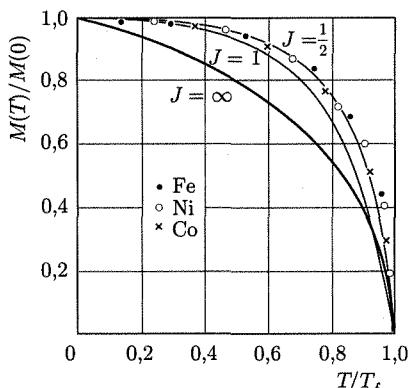


Fig. 5.36

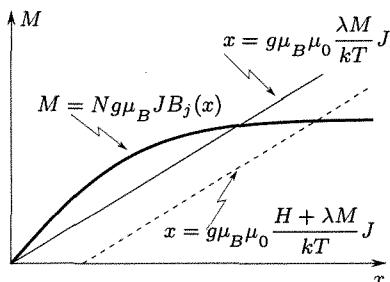


Fig. 5.37

La $M(T)/M(0)$ per un certo valore del parametro J è una funzione universale di T/T_f , che vale cioè per ogni sostanza per la quale i dipoli elementari sono caratterizzati dal numero quantico J .

Nella figura 5.36 sono indicate le curve $M(T)/M(0)$ ottenute mediante soluzione grafica del sistema [(145), (146)], per $J = \frac{1}{2}, 1, \infty$. Sono riportati i punti sperimentali ottenuti per l'intensità di magnetizzazione di saturazione in Fe, Co, Ni. È evidente che tali punti sperimentali si adagiano ottimamente sulla curva $J = \frac{1}{2}$; ciò sembra indicare che in queste sostanze ferromagnetiche la magnetizzazione è associata allo spin degli elettroni e che il loro momento orbitale della quantità di moto non intervenga. Questa conclusione, notevolmente importante, è confermata da altre informazioni sperimentali.

Prima di terminare questo esame della magnetizzazione secondo la teoria di Weiss osserviamo che la precedente trattazione per la magnetizzazione spontanea ($H = 0$) può essere usata anche se un campo magnetico esterno è applicato al campione. In questo caso il sistema da usare è quello delle equazioni (123) e (136); l'equazione (136) rappresenta nel piano M, x una retta parallela alla retta per l'origine che rappresenta, alla stessa temperatura, la (137) per $H = 0$. L'intersezione con l'asse delle ascisse ($M = 0$) si ha nel punto (a destra dell'origine)

$$x = \mu_0 g \mu_B \frac{J}{kT} H.$$

Come si vede dalla figura 5.37, se la temperatura è ben al di sotto di quella di Curie (inclinazione della retta notevolmente minore di quella per T_f) la intersezione della curva di Brilloin con la retta (136) non ha una ordinata molto diversa da quella della intersezione con la retta (137). Ciò significa che la presenza del campo fa aumentare solo di poco la intensità di magnetizzazione rispetto a quella che si ha a campo nullo.

condizioni (saturazione) i domini sono portati ad avere i vettori intensità di magnetizzazione paralleli o sono addirittura convertiti in un unico grande dominio. Il fatto che la misura richieda l'applicazione di un campo magnetico esterno non ha gravi conseguenze data la esiguità dei campi che è necessario applicare (1-100 Asp/m) rispetto al campo molecolare (λM) che si ha in questi materiali (10^8 - 10^9 Asp/m). È possibile quindi ammettere in prima approssimazione, al fine di esaminare come l'intensità di magnetizzazione spontanea vari con T , di misurare al suo posto nei campioni a più domini l'intensità di saturazione.

(52) Il passaggio della intensità di magnetizzazione dal valore caratteristico alle basse temperature al valore zero non avviene bruscamente ma lentamente come in molti altri processi ordine-disordine e corrisponde ad una trasformazione di secondo ordine. Le caratteristiche di queste trasformazioni nelle vicinanze della temperatura critica di Curie (come l'andamento dei calori specifici) sono molto complesse per il presentarsi di particolari fenomeni critici. Su di esse noi non ci fermeremo.

Le cose stanno diversamente per temperature prossime a quella di Curie, quando piccoli spostamenti della retta (136) rispetto alla (137) possono corrispondere a notevoli variazioni di M .

5.14. INTERAZIONI RESPONSABILI DEL CAMPO MOLECOLARE. TEORIA DI HEISENBERG

L'ipotesi di Weiss secondo la quale l'allineamento dei dipoli atomici nelle sostanze ferromagnetiche sarebbe dovuto ad un campo magnetico interno (molecolare), consente di spiegare gli aspetti macroscopici della magnetizzazione nei singoli domini. Abbiamo peraltro già osservato come questa semplice teoria oltre a non indicare affatto le origini del ferromagnetismo non riesca ad interpretare alcuni risultati sperimentali quali quelli relativi alla differenza fra le *temperature di Curie, ferromagnetica e paramagnetica*.

Non possiamo procedere molto oltre nell'esame di più soddisfacenti schemi teorici. Vogliamo peraltro svolgere alcune considerazioni fondamentali che possono far intravedere la natura delle azioni fra dipoli elementari in meccanica quantistica, azioni il cui effetto globale corrisponde al campo molecolare di Weiss.

È innanzitutto abbastanza semplice valutare l'ordine di grandezza dell'energia che è associata ad un dipolo nella disposizione parallela in assenza di campi esterni e quindi l'ordine di grandezza della intensità del campo molecolare di induzione (B_m). Il valore assoluto di questa energia potenziale può approssimativamente essere posto nella forma

$$\mu_B B_m$$

giacché il valore del momento atomico è dell'ordine di grandezza del magnetone di Bohr. Il fatto che il parallelismo viene distrutto dall'agitazione termica alla temperatura di Curie T_f mostra che l'energia del dipolo è dell'ordine di kT_f

$$(147) \quad \mu_B B_m \sim kT_f.$$

Così per esempio per il nickel ($T_f = 631$ K) risulta $B_m \simeq 800$ Wb/m². Il valore di tale campo è più elevato di quello di qualsiasi campo di induzione prodotto in laboratorio.

È di conseguenza possibile affermare che la *interazione magnetica* fra dipoli non può essere la causa del loro allineamento. Alle distanze di equilibrio fra atomi contigui nel nickel ($\sim 2,5$ Å) infatti tale interazione è così piccola che l'energia corrispondente sarebbe dell'ordine di kT per $T = 1$ K. Questa circostanza rendeva inesplicabile l'essenza del ferromagnetismo all'epoca in cui Weiss presentò la sua teoria fenomenologica.

La teoria quantistica ha mostrato la esistenza di un'altra interazione fra elettroni in virtù dello spin. Sono queste le *interazioni di scambio*.

Come si è già accennato parlando delle interazioni fra elettroni in un atomo (par. 5.10) e fra elettroni di atomi diversi che entrano nei legami covalenti (vol. I, cap. 12, par. 12.7), queste interazioni sono di natura elettrostatica e derivano dalle limitazioni imposte dal principio di esclusione di Pauli nei riguardi degli spin degli elettroni quando le distribuzioni di carica⁽⁵³⁾ associate agli stati occupati dai due elettroni cominciano a sovrapporsi.

L'energia potenziale fra due elettroni caratterizzati dai vettori momento della quantità di moto di spin $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j$ può essere posta (Heisenberg, 1928) nella forma

$$(148) \quad W = \text{cost} \cdot -2J_{ij}\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j$$

⁽⁵³⁾ Tali distribuzioni si ottengono immaginando la carica elettronica ripartita nello spazio proporzionalmente alla frazione di tempo trascorsa in ogni punto, cioè secondo la densità di probabilità.

che mette in evidenza, nel secondo addendo, l'energia di scambio. J_{ij} è il cosiddetto integrale di scambio il quale è legato alla probabilità che i due elettroni scambino il loro stato. Esso dipende dalla sovrapposizione delle distribuzioni spaziali di carica per gli elettroni i e j . Tale integrale può essere positivo o negativo. Nel caso del valore positivo lo stato a spin paralleli è quello stabile (energia minore); nel caso di J_{ij} negativo lo stato a spin antiparalleli è quello ad energia più bassa. Se si considerano *due atomi* aventi vettori quantità di moto totale di spin $\mathbf{S}_i = \sum_i \mathbf{s}_i$, $\mathbf{S}_j = \sum_j \mathbf{s}_j$, l'energia di scambio può porsi nella forma

$$(149) \quad W_{sc} = -2J_{sc}\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j.$$

Anche in questo caso al valore positivo di J_{sc} corrisponde come stato stabile (energia minore) quello a spin paralleli cioè lo stato magnetico. I valori dell'integrale di scambio possono a volte essere notevolmente grandi e quindi si può pensare che le interazioni di scambio possano spiegare il verificarsi di situazioni nelle quali i magneti elementari restino paralleli fra loro anche in assenza di campo esterno.

Heisenberg ha per primo (1928) presentato una teoria del ferromagnetismo basata sulle forze di scambio. Egli considera un modello del sistema nel quale i responsabili del ferromagnetismo sono gli spin elettronici non compensati degli atomi magnetici e tali spin vengono considerati localizzati nei corrispondenti atomi (cioè i corrispondenti stati quantici sono localizzati). Si osservi che il ritenere che i magneti elementari siano gli spin elettronici non compensati è in accordo con le indicazioni sperimentali.

L'energia di scambio calcolata da Heisenberg ha la forma

$$(150) \quad W_{sc} = \frac{-2J_{sc}z}{Ng^2\mu_B^2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{M}$$

essendo z il numero degli atomi immediatamente vicini di un singolo atomo.

Questa relazione è identica a quella dell'energia potenziale del momento atomico \mathbf{m} in un campo magnetico di induzione

$$(151) \quad \mathbf{B}_m = \left(\frac{2J_{sc}z}{Ng^2\mu_B^2} \right) \mathbf{M}$$

proporzionale a \mathbf{M} . L'effetto cioè delle forze di scambio può essere portato in conto mediante un campo interno (molecolare) \mathbf{B}_m proporzionale alla intensità di magnetizzazione come era stato ipotizzato da Weiss.

Dal paragone della (151) con il secondo termine della (129) si ha per la costante di Weiss

$$(152) \quad \lambda = \frac{2zJ_{sc}}{\mu_0 Ng^2\mu_B^2}.$$

La formula (140) può essere usata per stabilire una relazione fra l'integrale di scambio e la temperatura di Curie (ferromagnetica). In questo caso al posto di J come numero quantico va posto S , essendo il momento magnetico atomico di spin responsabile per il ferromagnetismo. Si ottiene così:

$$(153) \quad T_f = \frac{2z}{3k} S(S+1) J_{sc}.$$

Nel caso, per esempio, di reticolo cubico ($z = 6$) e $S = \frac{1}{2}$ risulta $J_{sc}/kT_f = \frac{1}{3}$. Valutazioni di statistica quantica più precise indicano per il rapporto fra l'integrale di scambio e kT_f valori intorno a 0,5.

5.15. ANISOTROPIA FERROMAGNETICA E MAGNETOSTRIZIONE

Lo studio sperimentale della magnetizzazione in monocrystalli ferromagnetici (Fe, Co, Ni) ha mostrato l'esistenza di una anisotropia nel senso che la intensità di magnetizzazione che è possibile ottenere in funzione del campo applicato dipende dalla direzione del campo rispetto agli assi cristallografici.

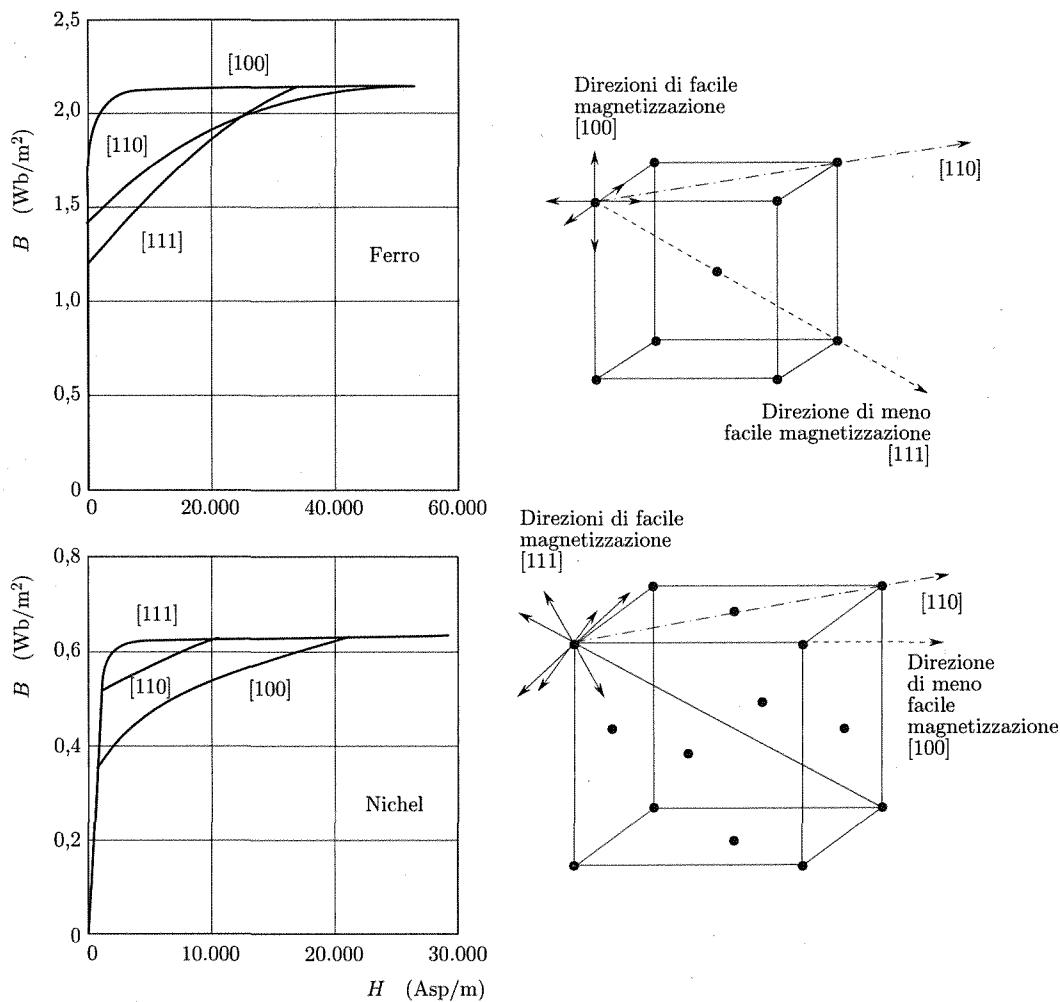


Fig. 5.38

La figura 5.38 mostra per il caso del Fe e del Ni la struttura cristallina e le curve di magnetizzazione per alcune direzioni individuate per mezzo dei cosiddetti indici di Miller usati in cristallografia.

Nel caso del ferro le direzioni degli spigoli del cubo ([100] ed equivalenti) sono quelle di facile magnetizzazione nel senso che la curva $M-H$ e quella $B-H$ salgono più rapidamente al crescere di H . Le direzioni delle diagonali delle facce e della diagonale del cubo sono, nell'ordine, direzioni di meno facile magnetizzazione.

Si osservi che l'energia di magnetizzazione per unità di volume, data da $\int_0^{B_s} H dB$, è rappresentata per ciascuna curva $B-H$ dall'area racchiusa fra l'asse B , la curva e la parallela all'asse H in corrispondenza al tratto asintotico della curva (saturazione). Tale energia è minima per la direzione di facile magnetizzazione. L'eccesso di energia per ottenere la magnetizzazione (limite) in una direzione di meno facile magnetizzazione rispetto a quella per la direzione di facile magnetizzazione rappresenta la cosiddetta energia di anisotropia.

L'origine della anisotropia non può stare nelle forze di scambio giacché queste dipendono solo dall'angolo fra gli spin (prodotto scalare $s_i \cdot s_j$) e non dalla loro orientazione rispetto al reticolo. Si ritiene che l'anisotropia derivi dalla esistenza di un accoppiamento spin-orbita degli elettroni responsabili del magnetismo atomico e dal fatto che il contributo orbitale nelle sostanze ferromagnetiche è fortemente smorzato per effetto delle interazioni elettrostatiche di ciascun atomo magnetico con il reticolo. Tale smorzamento risente della simmetria del cristallo e può determinare l'anisotropia magnetica.

L'energia di anisotropia ha le stesse proprietà di simmetria del cristallo ed è tanto più piccola quanto più alta è la simmetria del cristallo⁽⁵⁴⁾.

L'esistenza della anisotropia fa sì che la magnetizzazione tende ad essere diretta lungo gli assi di facile magnetizzazione.

Collegato alla anisotropia ferromagnetica è il fenomeno della magnetostruzione il quale consiste nel presentarsi di deformazioni meccaniche in campioni ferromagnetici quando essi vengano magnetizzati. L'effetto magnetostrettivo più semplice è quello Joule il quale consiste nella variazione delle dimensioni lineari (per esempio, lunghezza di una sbarra, spessore di una piastra) del campione quando il campo magnetico è applicato in una determinata direzione (per esempio, nel caso dell'effetto longitudinale, nella direzione dell'asse della sbarra, o dello spessore della piastra).

■ 5.16. DOMINI MAGNETICI

La teoria fenomenologica di Weiss consente di spiegare qualitativamente, mediante la ipotesi dell'esistenza di un campo interno molecolare, l'andamento di vari fenomeni macroscopici presentati dalle sostanze ferromagnetiche quali l'esistenza della temperatura di Curie, il comportamento magnetico al di sopra di essa e la magnetizzazione spontanea al di sotto di questa temperatura caratteristica. Vi sono peraltro altre proprietà dei materiali ferromagnetici che non possono essere spiegate sulla base della sola ipotesi dell'esistenza del campo interno.

Noi abbiamo visto (par. 5.13) che partendo da tali ipotesi si giunge alla conclusione che lo stato smagnetizzato ($M = 0$ per $H = 0$) è instabile, mentre l'esperienza mostra che un campione ferromagnetico può essere smagnetizzato in varie maniere⁽⁵⁵⁾ e rimanere stabilmente in queste condizioni. Inoltre per ristabilire la magnetizzazione è sufficiente un campo esterno H dell'ordine di 10^2 Asp/m che è molto piccolo rispetto al campo interno ($H_l = B_l/\mu_0$) di circa 10^9 Asp/m. Infine occorre spiegare l'esistenza del ciclo di isteresi.

Allo scopo di superare queste difficoltà Weiss formulò l'ipotesi (n. 1, par. 5.13): *un campione macroscopico (anche se monocristallino) è, in genere, formato da numerose regioni (domini) ciascuna magnetizzata spontaneamente (a saturazione) in una direzione*: la teoria della magnetizzazione spontanea precedentemente svolta si applica a ciascun dominio; nel materiale smagnetizzato le direzioni di magnetizzazione dei vari domini,

⁽⁵⁴⁾ Essa è minore per il ferro che ha simmetria cubica che per il cobalto che ha solo simmetria assiale.

⁽⁵⁵⁾ I metodi per ottenere la smagnetizzazione possono essere vari: a) tempera da una temperatura superiore a quelle di Curie; b) trattamenti meccanici, come urti vigorosi; c) applicazione di campi alternativi di ampiezza decrescente gradatamente fino a zero. In quest'ultimo metodo, che è il più usato, il materiale descrive cicli di isteresi la cui area è gradatamente ridotta a zero.

che in genere sono direzioni di facile magnetizzazione, sono tutte le varie possibili (distribuzione a caso) sicché il momento magnetico risultante è nullo. La figura 5.39a indica una tale situazione in un monocristallo, la figura 5.39b si riferisce ad un campione policristallino: le linee continue indicano i limiti dei cristalli, quelle tratteggiate quelle dei domini.

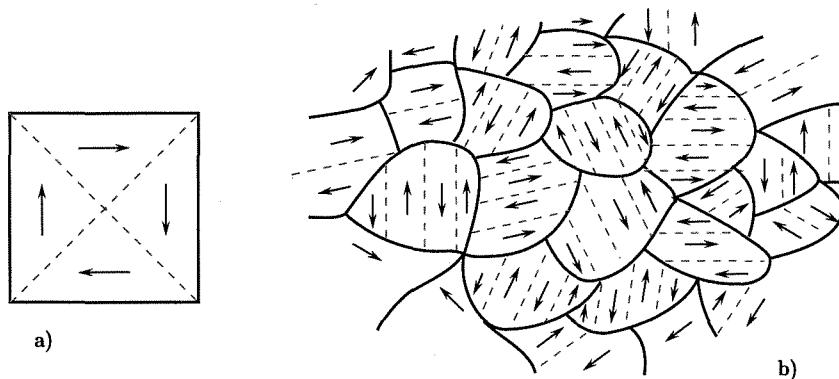


Fig. 5.39

Una magnetizzazione risultante del campione si produce per un eccesso di domini (in numero e dimensioni) il cui momento è diretto in una particolare direzione.

Il concetto dell'esistenza dei domini è in grado di spiegare molte circostanze sperimentali.

È importante notare che successivamente alla formulazione dell'ipotesi da parte di Weiss, l'esistenza dei domini è stata dimostrata con varie tecniche. La prima tecnica usata è molto semplice (F. Bitter, 1931). Una superficie piana del campione ferromagnetico viene accuratamente levigata e su di essa viene posta una goccia di una sospensione colloidale di minute particelle ferromagnetiche. La osservazione al microscopio mostra che le particelle si concentrano lungo linee: sono queste i limiti dei domini e la concentrazione è dovuta ai forti campi locali presenti ai limiti dei domini differentemente orientati. La figura 5.40 (Bozorth) mostra la struttura dei domini in un campione monocristallino di ferro: la superficie esaminata ha giacitura [100] e le frecce apposte indicano la direzione della magnetizzazione nei vari domini. Altre tecniche quale quella della diffrazione di fasci di elettroni o di fasci di neutroni polarizzati (aventi il loro spin in una determinata direzione) sono state impiegate per studiare la struttura dei domini e per confermare le indicazioni teoriche. *In seguito a questo lavoro sperimentale, l'esistenza dei domini, posta come ipotesi da Weiss, è da ritenersi oggi come un dato sperimentale.*

Prima di procedere ad esaminare come l'esistenza dei domini consenta di spiegare, almeno qualitativamente, gli andamenti della curva di magnetizzazione e del ciclo di isteresi nei normali ferromagnetici, vogliamo svolgere alcune considerazioni di natura piuttosto generale e qualitativa che rendono plausibile l'esistenza dei domini.

Lo stato di equilibrio di un sistema termodinamico in condizioni nelle quali sono costanti la temperatura e le variabili estensive ad eccezione dell'entropia (vol. I, cap. 19, par. 19.2), è quello al quale corrisponde il minimo valore dell'energia libera (Helmholtz):

(154)

$$A = U - TS.$$

I domini di Weiss sono facilmente visibili

*Giustificazione
dell'esistenza dei domini*

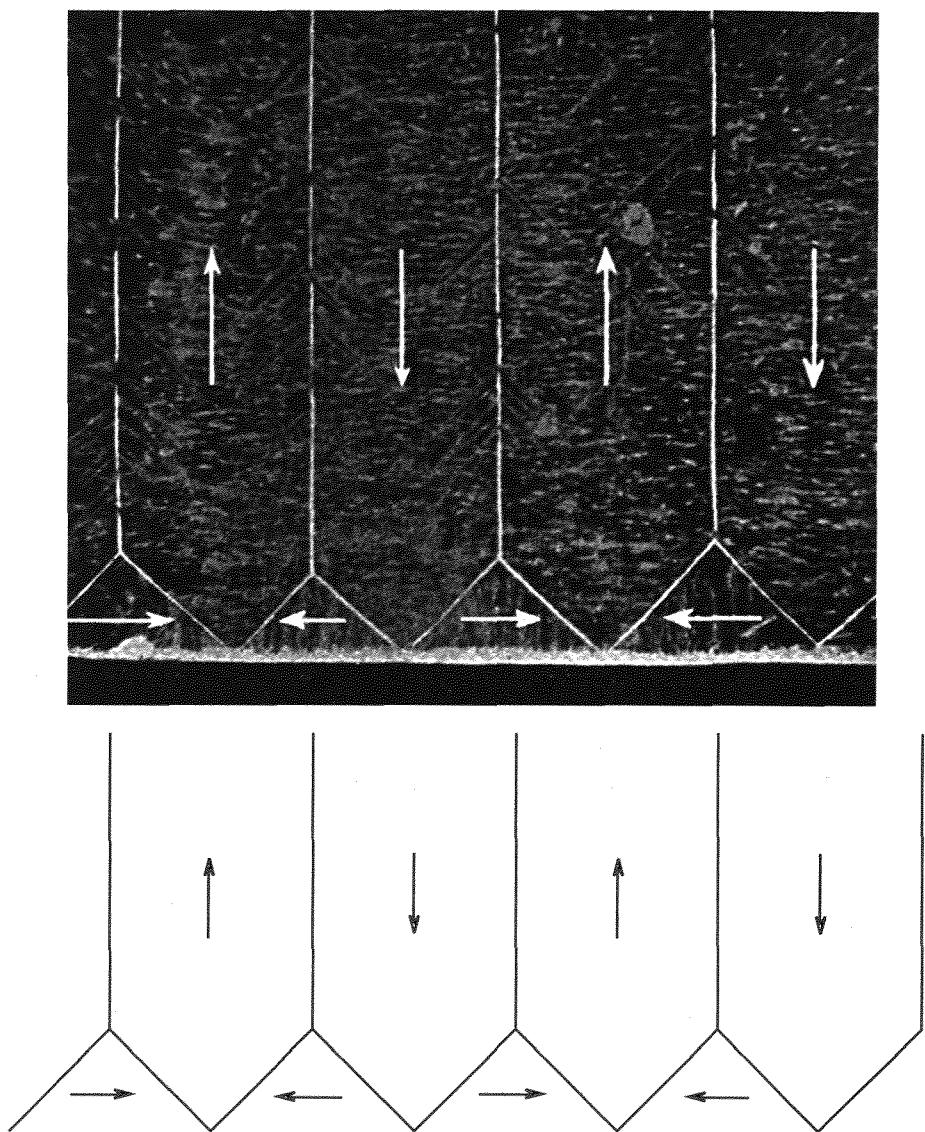


Fig. 5.40

Nel caso di un sistema ferromagnetico a temperatura abbastanza inferiore a quella di Curie, v'è un ordine al livello microscopico molto elevato; ciò porta di conseguenza che le varie strutture possibili non hanno entropie molto dissimili sicché le differenze di energia libera fra di esse dipendono essenzialmente dalle corrispondenti energie interne: è possibile quindi, volendo svolgere solo considerazioni qualitative, determinare lo stato stabile come quello di energia interna minima.

È utile a questo punto paragonare varie strutture possibili. Nella figura 5.41 sono presentate alcune strutture per un monocristallo di ferro; le linee tratteggiate sono i limiti fra i domini, le frecce indicano la direzione di magnetizzazione. Il cristallo si immagina tagliato con le facce parallele alla faccia della cella cristallina (cubica) elementare. Come si vede le direzioni di magnetizzazione sono quelle di facile magnetizzazione, cioè ciascun dominio risulta magnetizzato in una di tali direzioni.

Nel caso della struttura a) l'intero cristallo è un solo dominio; alle estremità si presentano due polarità opposte, cioè il campo magnetico si estende notevolmente nello spazio circostante.

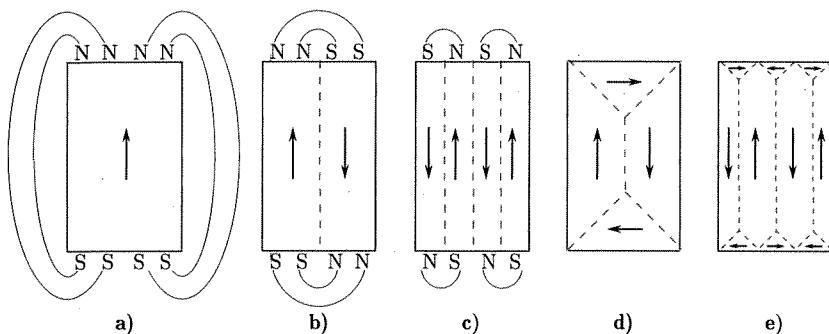


Fig. 5.41

L'energia che si trova in tale campo magnetico⁽⁵⁶⁾ cresce con il volume della regione invasa dal campo. Nella struttura *b*) o *c*) polarità opposte si trovano su ciascuna faccia: di conseguenza la regione in cui si estende il campo magnetico all'esterno del campione è notevolmente ridotta e così l'energia magnetostatica in esso. Va però osservato che in questo caso sono state create delle pareti fra domini che hanno una direzione di magnetizzazione diversa e ciò è stato fatto vincendo le interazioni (di scambio) che tendono ad orientare parallelamente i momenti magnetici di spin di atomi contigui.

Le pareti fra domini contigui a spin opposti prendono il nome di pareti di Bloch. Secondo Bloch nel passaggio da un dominio ad un altro non si ha una variazione brusca dell'orientazione degli spin fra quelle dei due domini a contatto, bensì una variazione graduale quale quella illustrata nella figura 5.42. In tale figura sono indicate le orientazioni degli spin per una linea di atomi disposti secondo una retta normale alla parete. Di conseguenza la parete ha uno spessore finito. L'argomento usato per stabilire questa circostanza è quello di mostrare che l'energia che deriva dall'interazione di scambio fra due spin contigui le cui orientazioni formano un angolo Φ è maggiore di quella che compete ad un insieme formato da una linea di $(N+1)$ atomi aventi spin contigui ruotati dell'angolo Φ/N : quest'ultima configurazione è quindi favorita. La considerazione del solo effetto dovuto all'interazione di scambio porterebbe a pareti di spessore molto grande. A limitare tale spessore v'è un altro effetto dovuto al fatto che gli spin nell'interno della parete non sono orientati in una delle direzioni di facile magnetizzazione (quelle dei domini) e ad essi è di conseguenza associata una energia di anisotropia. Lo spessore di equilibrio è determinato dalla condizione di minimo della somma dell'energia di scambio e di anisotropia. Per dare un'idea dell'ordine di grandezza dello spessore di queste pareti, diremo che nel caso del ferro il calcolo indica la presenza nella parete di circa 300 piani atomici, lo spessore totale è di circa 1000 Å. L'energia totale di parete è di 1-2 erg cm².

Alla presenza di una parete è associata quindi una *energia di parete* necessaria per la sua creazione: tale energia è proporzionale alla superficie. Se si tiene presente che l'energia magnetostatica cresce con il volume dello spazio circostante invaso dal campo magnetico (e quindi con il volume del campione nella situazione *a*) mentre l'energia di parete cresce con la superficie della parete (cioè con la superficie del campione), si comprende che appena le dimensioni del campione superano certi valori (centesimi di millimetro di lato) può essere energeticamente più favorevole passare dalla struttura *a* alla *b* (o *c*) nel senso che la riduzione di energia magnetostatica è superiore all'energia che occorre spendere per creare la (o le) pareti.

È questa la ragione per cui è difficile avere monocrystalli di dimensioni non piccolissime che siano costituiti da un solo dominio. Se si paragona ora la struttura del tipo *b* con quella *d* si vede che nell'ultimo caso l'estensione del campo esterno e l'energia corrispondente sono ulteriormente ridotte e possono anche essere annullate: nel caso infatti che \mathbf{B} risulti parallelo ovunque alla superficie del cristallo e che la sua componente normale alla superficie di separazione sia continua nel passaggio da

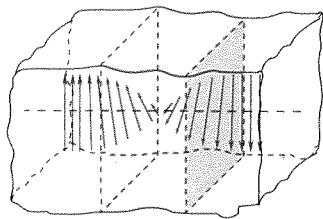


Fig. 5.42

⁽⁵⁶⁾ Tale energia è $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$. L'ordine di grandezza di questa energia in una struttura tipo *a* con sezione trasversale quadrata è dell'ordine di 10^6 erg/cm³ = 10^8 J/m³.

domini triangolari a domini interni⁽⁵⁷⁾, non vi sono polarità libere né alla superficie del campione né alla separazione dei domini e quindi non v'è campo esterno.

Nelle strutture di tipo *d* compaiono peraltro altri due tipi di energia: di anisotropia ed elastica. Si osservi infatti che la direzione di magnetizzazione dei domini di chiusura può in alcuni casi (per esempio cristalli di Co) non essere una direzione di facile magnetizzazione (ciò non è nel caso del Fe e del Ni) e quindi richiedere una maggiore energia a causa dell'anisotropia. Inoltre le dimensioni di un cristallo cambiano, quando esso viene magnetizzato, in una maniera che dipende dalla direzione di magnetizzazione (magnetostruzione, par. 5.11). Ciò porta di conseguenza che i domini interni e quelli triangolari di chiusura essendo magnetizzati in direzioni diverse tendono a deformarsi in maniera diversa. Siccome devono invece deformarsi congiuntamente, i domini devono subire una deformazione elastica cui si associa una energia elastica (e uno stato di tensione). Anche in questo caso lo stato di equilibrio viene determinato dall'essere per esso minima la energia interna cioè la somma delle energie: 1) magnetostatica; 2) di parete; 3) di anisotropia; 4) elastica.

Si osservi che la necessità di spendere energia per creare le pareti corrisponde ad una tendenza ad avere pochi domini di grandi dimensioni; in tal caso peraltro l'energia di anisotropia sarebbe piuttosto elevata poiché notevolmente estesi sarebbero i domini di chiusura. Nei riguardi della energia di anisotropia invece è più favorevole la situazione con numerosi piccoli domini. La struttura di domini che in realtà si determina è in genere del tipo *e* in figura 5.41 e le dimensioni sono determinate da un compromesso fra gli effetti contrastanti. Le dimensioni dei domini sono in genere comprese fra 10^{-2} e 10^{-6} cm³ e lo spessore dei domini interni è dell'ordine di 10^{-3} cm.

■ 5.17. CURVA DI MAGNETIZZAZIONE E CICLO DI ISTERESI

Le esperienze sui domini al crescere dell'intensità del campo mostrano come la curva di magnetizzazione (e il ciclo di isteresi) in un campione ferromagnetico a più domini, qual è ad esempio un normale campione policristallino, possa essere spiegata mediante l'intervento di due processi⁽⁵⁸⁾: movimento delle pareti fra domini (pareti di Bloch) con aumento del volume dei domini orientati in modo tale da dare un elevato contributo al momento magnetico nella direzione del campo applicato e conseguente riduzione di volume degli altri domini; rotazione della direzione di magnetizzazione di domini verso la direzione del campo. Un semplice schema bidimensionale dei due processi è indicato nella figura 5.43a, b (crescita di un dominio) e 5.43c, d (rotazione).

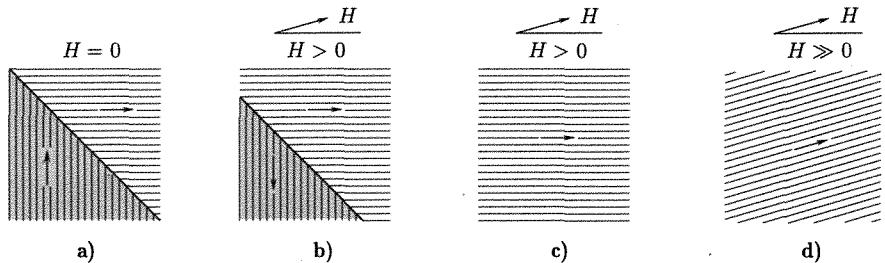


Fig. 5.43

⁽⁵⁷⁾ Per ottenere ciò occorre che le pareti dei domini triangolari in comune con i domini contigui siano a 45° rispetto alle direzioni della magnetizzazione in essi.

⁽⁵⁸⁾ Entrambi i processi avvengono perché ad essi è associata una riduzione dell'energia magnetica del campione: si ricordi che l'energia di un dipolo magnetico (\mathbf{m}) in un campo \mathbf{B} è $(-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$.

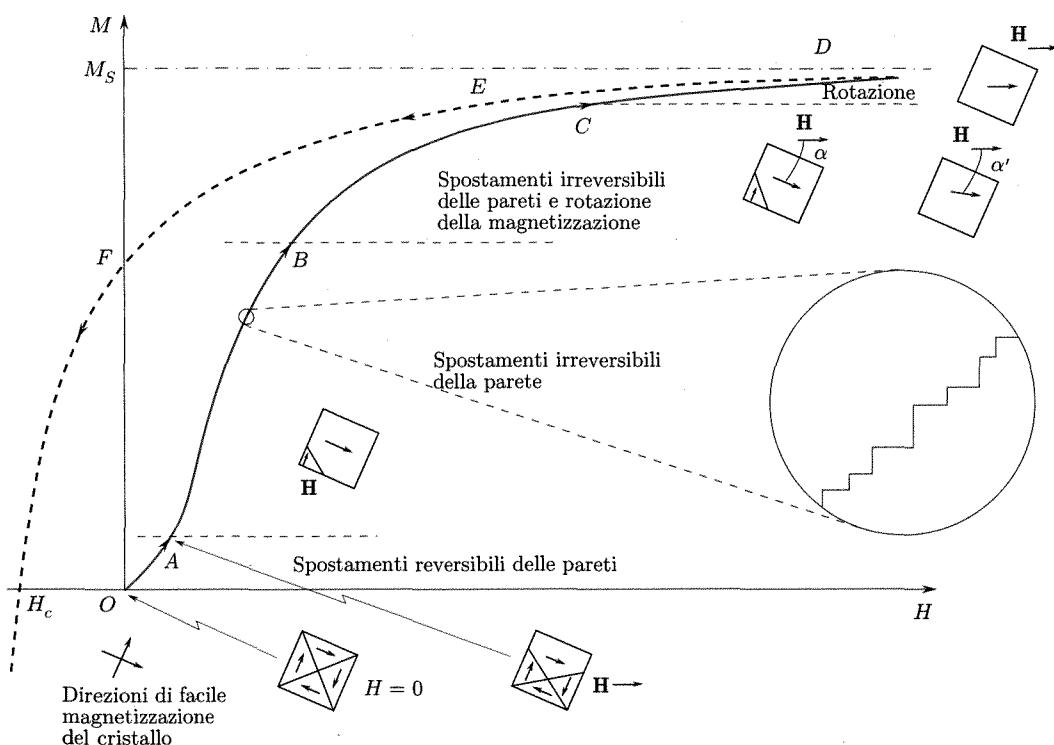


Fig. 5.44

Il processo di rotazione della direzione di magnetizzazione dei domini da una direzione di facile magnetizzazione prossima a quella del campo applicato verso la direzione di quest'ultimo, può avvenire solo in campi intensi giacché un notevole lavoro deve essere compiuto contro le forze di anisotropia. Queste rotazioni sono in genere reversibili.

La figura 5.44 indica per le varie regioni di una curva di magnetizzazione (tratto pieno) il processo responsabile per la crescita della intensità di magnetizzazione che si osserva partendo da un campione non magnetizzato (prima magnetizzazione). Finché gli spostamenti delle pareti dei domini sono piccole (tratto OA) esse sono reversibili, cioè la parete torna nella posizione iniziale quando il campo \mathbf{H} viene rimosso; quando gli spostamenti divengono maggiori essi sono in genere irreversibili (tratto AB). Questa circostanza può essere spiegata pensando che l'energia associata ad una parete (e quindi l'energia del campione) quando la parete viene spostata, dipende dallo spostamento (normale alla parete, x), per il fatto che essa incontra impurità costituite da atomi estranei, cavità, difetti strutturali presenti nel cristallo oppure semplicemente regioni in cui esistono tensioni elastiche. La relazione fra energia e spostamento è schematicamente rappresentata in figura 5.45. Lo stato del materiale fuori del campo è quello in corrispondenza ad un minimo, per esempio al punto $A(x_0)$. È evidente che per piccoli spostamenti intorno ad x_0 lo stato del sistema ritorna in A quando è rimossa la causa dello spostamento. Spostamenti tali che il punto rappresentativo superi la posizione B richiedono per avvenire che

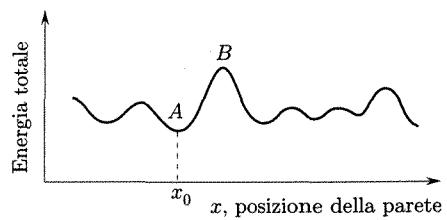


Fig. 5.45

la parete acquisti una energia sufficiente. Tale energia viene fornita dal campo tramite la riorientazione locale dei momenti magnetici atomici⁽⁵⁹⁾: essa dopo il superamento del picco è in gran parte trasformata in calore per effetto di due processi che accompagnano il rapido movimento della parete che allora si riscontra. Da una parte la rapida variazione della magnetizzazione, e quindi del campo **B** nell'interno del cristallo, produce correnti indotte di dispersione⁽⁶⁰⁾; dall'altra gli effetti di deformazione elastica (magnetostrizione) associati alla stessa variazione di magnetizzazione originano onde sonore (d'urto) che vengono in seguito assorbite. Di conseguenza spostamenti della parete che implichino il superamento di picchi nella curva energia-spostamento costituiscono processi irreversibili.

La figura 5.46 (R.W. De Blois, C.W. Graham) mostra il moto reversibile (a, b, c) delle pareti in un aghetto (wisker) monocristallino di ferro, quando i campi applicati sono piccoli. La figura 5.46d corrisponde ad un salto irreversibile in corrispondenza alla applicazione di un campo elevato.

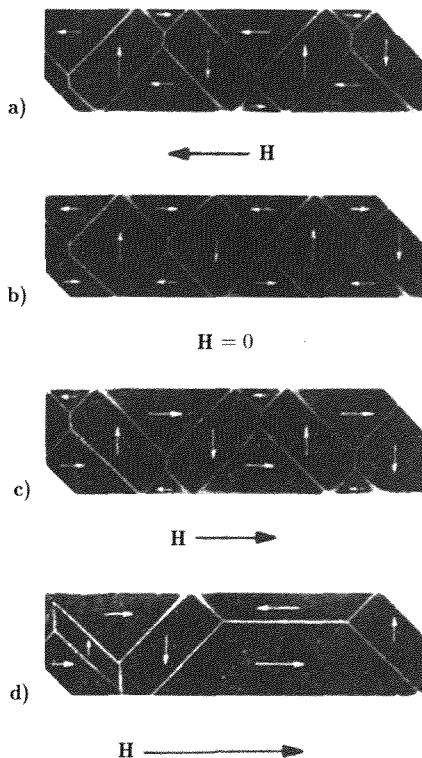


Fig. 5.46 (De Blois-Graham)

Il moto delle pareti nella regione irreversibile ha la caratteristica di avvenire discontinuamente, con salti bruschi: di conseguenza la curva di magnetizzazione nel tratto degli spostamenti irreversibili non è in realtà continua. Questa circostanza è mostrata dall'inserto in figura 5.44 ove un breve tratto della curva di magnetizzazione è ingrandito molte volte. Lo spostamento delle pareti dei domini al crescere del campo può procedere fino a far sì che ciascun grano cristallino (monocristallo) si riduca ad un *unico dominio*⁽⁶¹⁾ orientato nella direzione di facile magnetizzazione più prossima alla direzione del campo applicato. La possibilità di un ulteriore aumento del contributo alla magnetizzazione nella direzione di **H** del singolo grano cristallino sta nella rotazione della direzione di magnetizzazione del dominio fuori dalla direzione di facile magnetizzazione, verso quella di **H**. Il processo di rotazione è un processo che produce un lento aumento della intensità di magnetizzazione nella direzione di **H**, al crescere di **H**; è un processo continuo e reversibile. Se si considerasse un monocristallo a struttura molto regolare, il passaggio nella curva di magnetizzazione dalla regione nella quale la variazione dell'intensità di magnetizzazione al crescere di **H** è dovuto al moto delle pareti a quella legata alla rotazione, sarebbe caratterizzato da una netta discontinuità. Nel caso di materiali policristallini, a causa delle differenti condizioni che esistono nei vari grani, il passaggio non è brusco, ma la curva presenta un ginocchio (tratto *BC* della fig. 5.44) ove

⁽⁵⁹⁾ Quando un dipolo magnetico passa da una orientazione diversa a quella parallela al campo (ove l'energia ha il valore minimo) energia è resa disponibile.

⁽⁶⁰⁾ Vedi cap. 4, par. 4.4.

⁽⁶¹⁾ Va osservato che di frequente anche a campi elevati i grani cristallini non divengono esattamente un solo dominio, giacché possono rimanere piccolissimi domini orientati diversamente, probabilmente ancorati a difetti del cristallo.

i due processi coesistono. La crescita della intensità di magnetizzazione al di là del punto *C* è essenzialmente (praticamente in maniera esclusiva) dovuta alla rotazione reversibile dei domini.

Se dopo aver raggiunto un punto (*D*) molto prossimo alla saturazione il campo viene ridotto, il punto rappresentativo descrive un tratto *DE* praticamente coincidente con il tratto *CD*: esso è dovuto alla rotazione della direzione di magnetizzazione dei domini dalla direzione del campo verso quella più prossima di facile magnetizzazione. Per una ulteriore riduzione di *H* la magnetizzazione decresce per effetto del moto irreversibile delle pareti dei domini: per $H = 0$ si ha il magnetismo residuo (punto *F*). Naturalmente il moto delle pareti implica che in ogni grano ci siano più domini: ciò è dovuto sia al fatto che, come si è sopra osservato, nella precedente fase *OD* di magnetizzazione non tutti i domini diretti in maniera diversa dal campo esterno scompaiono a campi elevati, sia all'intervento di complessi fenomeni di nucleazione (per esempio dovuti a disuniformità del campo presso difetti strutturali, inclusioni ecc.) che originano nuovi domini.

Il moto reversibile delle pareti continua se si fa crescere *H* nella opposta direzione per un breve tratto al di là di *F*; in seguito iniziano i moti irreversibili delle pareti i quali portano l'intensità di magnetizzazione, attraverso il valore zero per $H = H_c$, a valori negativi. Per valori negativi abbastanza elevati il processo di rotazione entra di nuovo a portare il suo contributo alla variazione dell'intensità di magnetizzazione.

Invertendo le variazioni di *H* i processi ora visti si ripetono ed il ciclo di isteresi viene completato. Nella figura 5.44 non sono stati segnati per semplicità i tratti della curva (*M*, *H*) per magnetizzazioni negative. È facile interpretare sulla base di quanto ora detto il ciclo di isteresi (*B*, *H*). Il ciclo è, per così dire, la rappresentazione grafica del fatto che il processo di magnetizzazione al variare del campo, per valori bassi del campo stesso, avviene superando resistenze di vario genere dovute ad irregolarità, difetti, anisotropie della struttura ed è quindi un processo tipicamente irreversibile. L'area racchiusa dalle linee del ciclo è proporzionale alle perdite di energia dovute ai fenomeni irreversibili che accompagnano la variazione della magnetizzazione.

Per quanto è stato ora detto, nei materiali monocrillini a struttura molto regolare il ciclo di isteresi ha un andamento quasi rettangolare con brusche variazioni dalle regioni ove si ha moto delle pareti a quelle di rotazione dei domini. La figura 5.47 riporta i risultati di Williams e Shockley in un monocristallo di ferrosilicio (si noti il basso valore del campo coercitivo). In materiali ferromagnetici a più grani il ciclo di isteresi ha di solito forme prive di angoli netti.

Il valore del campo coercitivo è una importante proprietà dei materiali ferromagnetici sia perché è un'indicazione globale delle loro proprietà strutturali sia perché è un parametro essenziale per le applicazioni tecniche.

Nei materiali cristallini normali, nei quali cioè i singoli grani contengono in genere più domini, il campo coercitivo è un indice piuttosto sensibile degli elementi strutturali (atomi di impurità, tensioni elastiche

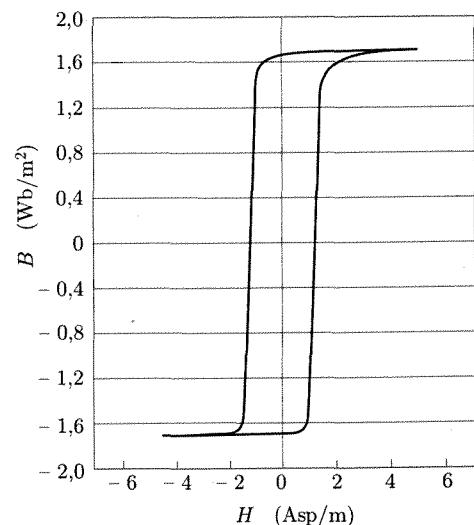


Fig. 5.47

ecc.) che ostacolano il moto delle pareti: esso è basso in materiali molto puri e privi di tensioni interne; è elevato in materiali temperati o in leghe nelle quali mediante trattamenti termici si produca la precipitazione di fasi separate.

■ 5.18. MATERIALI FERROMAGNETICI

Vogliamo ora tornare sulle proprietà dei materiali ferromagnetici che interessano la tecnica e mostrare come esse siano legate alle considerazioni precedenti.

I materiali ferromagnetici che interessano nella tecnica possono essere divisi in due grandi categorie ed hanno in corrispondenza ricevuto due nomi molto significativi: materiali dolci e materiali duri (magneticamente). I primi hanno una alta permeabilità, sono facilmente magnetizzabili e demagnetizzabili e quindi hanno un ciclo di isteresi molto stretto: essi trovano impiego nell'elettrotecnica sia per realizzare bobine ad elevato coefficiente di autoinduzione sia quando (macchine elettriche) si desideri avere in regioni ristrette dello spazio un flusso magnetico elevato. I secondi (materiali duri) hanno una permeabilità relativamente bassa, un campo coercitivo (H_c) elevato, una induzione residua (B_r) abbastanza elevata, e quindi un ciclo di isteresi piuttosto ampio: si tratta di materiali difficilmente demagnetizzabili che si prestano per la realizzazione di magneti permanenti.

a. Materiali dolci

Secondo le indicazioni della teoria dei domini per ottenere materiali dolci occorre far sì che le pareti dei domini si possano muovere il più facilmente possibile: i materiali quindi devono essere molto puri, privi di tensioni interne, avere grani ben orientati, presentare nel minor grado possibile effetti di anisotropia e di magnetostrizione (quest'ultima infatti crea sforzi interni in seguito alla magnetizzazione).

L'effetto della presenza di impurità sul valore di $\mu_{r,\max}$ è indicato dalla tabella 5.2 che riporta i risultati di un trattamento in ambiente di idrogeno ad alta temperatura effettuato su ferro Armco (usato per la costruzione di elettromagneti). Con il ridursi del contenuto di impurità μ_{\max} cresce rapidamente.

Tabella 5.2

Materiale	Percentuale delle impurità presenti						$\mu_{r,\max}$
	C	S	Mn	P	Si	O	
Ferro Armco uscito dalla fabbrica	0,012	0,018	0,030	0,004	0,002	0,030	0,0018
dopo 3 ore a 1475 °C in H ₂ secco	0,005	0,006	0,028	0,004	-	0,003	0,0003
dopo 18 ore a 1475 °C in H ₂ secco	0,005	0,003	0,028	0,004	-	0,003	0,0001
							227.000

Una chiara indicazione dell'influenza degli effetti di anisotropia e di magnetostrizione si ha considerando le leghe Fe-Ni. Siccome le direzioni di facile magnetizzazione nei due materiali puri sono diverse [spigolo della cella cubica (100) nel Fe, diagonale nel cubo (111) nel Ni] facendo delle leghe dei due elementi si attutisce la anisotropia; le leghe con circa il 70% di nichel sono praticamente isotrope. Inoltre la magnetostrizione nel ferro e nel nichel ha segni diversi (una sbarra di ferro si allunga

quando viene magnetizzata, una sbarra di nichel si accorcia): nelle leghe la magnetostrizione si annulla per una composizione di circa l'80% di nichel. In conseguenza dei due effetti le leghe Fe-Ni con un contenuto in nichel fra 70 e 80% sono assai facilmente magnetizzabili. Per tale ragione esse hanno ricevuto il nome di permalloy.

Le proprietà di un campione di tali materiali dipende in maniera essenziale dai trattamenti termici e meccanici subiti. La figura 5.48 (Bozorth) mostra la permeabilità massima per le leghe Fe-Ni e pone in evidenza l'influenza del trattamento termico. Piegando o sollecitando un pezzo di permalloy oltre il limite elastico si deteriorano fortemente le proprietà magnetiche. Valori elevati della permeabilità iniziale relativa (circa 10^5) e bassi valori del campo coercitivo (circa 3 Asp/m) si possono ottenere con questi materiali. L'induzione residua (B_r) che si ottiene è di circa 0,8 Wb/m².

Un altro materiale di questo tipo è il super-permalloy che contiene 80% Ni, 15% Fe, 5% Mo: dopo trattamento termico in ambiente di idrogeno a 1300° esso presenta una permeabilità iniziale relativa di 10^6 e un campo coercitivo di 0,3 Asp/m. Il super-permalloy presenta una resistività di circa $60-90 \mu\Omega \cdot \text{cm}$.

Questi materiali sono abbastanza costosi ed il loro impiego è limitato alle applicazioni di bassa potenza quali in genere quelle nelle telecomunicazioni. In tali casi i segnali sono in genere piccoli ed è quindi importante avere materiali con elevate permeabilità in campi bassi (permeabilità iniziale) allo scopo di ottenere flussi notevoli e quindi una raggardevole risposta al segnale. In tali applicazioni l'induzione di raro supera i 0,01 Wb/m² (nelle applicazioni di potenza l'induzione raggiunge valori oltre cento volte maggiori).

Per le applicazioni di potenza (macchine elettriche) i materiali più impiegati sono costituiti dalle leghe Fe-Si. Le figure 5.49 e 5.50 mostrano come variano il valore di B_s (Wb/m²) e la resistività nelle leghe Fe-Si al crescere del tenore di silicio. Le leghe normalmente usate hanno il 4% di Si e vengono lavorate sotto forma di lamierini di 0,3-0,5 mm di spessore. Tecniche particolari di laminazione a freddo, associate a ricottura, consentono di avere i cristalli orientati nella lamina in gran prevalenza con una delle loro direzioni di facile magnetizzazione nella direzione della lunghezza della lamina, nella direzione nella quale essi vengono magnetizzati quando sono impiegati per fare i nuclei. Trattamenti termici (1.200 °C) in ambiente di idrogeno consentono anche di aumentare la purezza della lega eliminando in gran parte il carbonio presente. In questa maniera è oggi possibile produrre lamierini Fe-Si di costo non eccessivo e di proprietà magnetiche molto soddisfacenti; essi sono estensivamente usati a bassa frequenza (50-60 Hz) nelle macchine elettriche.

b. Materiali duri

Nell'impiego di questi materiali per la realizzazione di magneti permanenti hanno interesse l'induzione residua (B_r) ed il campo coercitivo (H_c). È favorevole che tali parametri abbiano valori i più alti possibili. La parte della caratteristica BH (ciclo di isteresi) che ha importanza per le applicazioni di questi materiali è quella che giace nel secondo quadrante; infatti il punto di lavoro del materiale nei magneti permanenti si trova in un punto di tale linea (par. 5.8). La figura 5.51 riporta tali linee per alcuni materiali duri. In parentesi è indicato il valore massimo lungo ciascuna curva del prodotto BH (joule/m³) tale valore prende il nome di fattore di merito ed è un indice della bontà del materiale. Come si vede dall'andamento delle linee, i cicli di isteresi per questi materiali sono

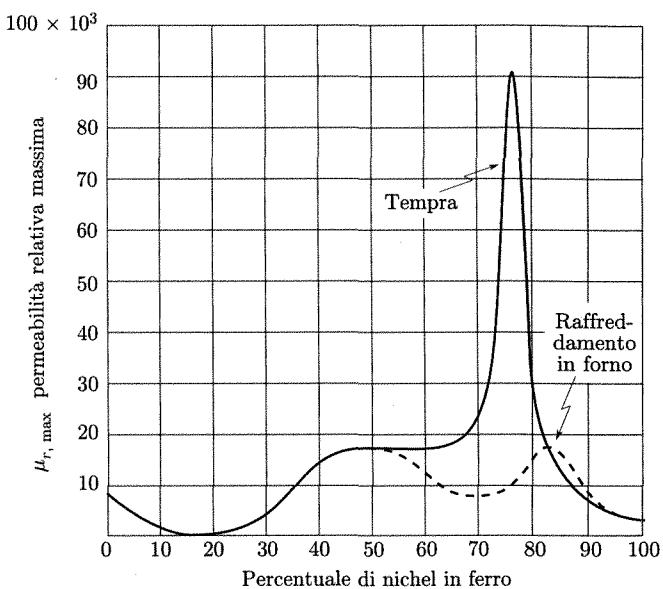


Fig. 5.48

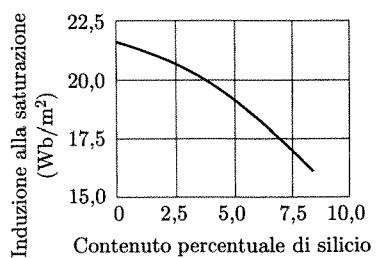


Fig. 5.49

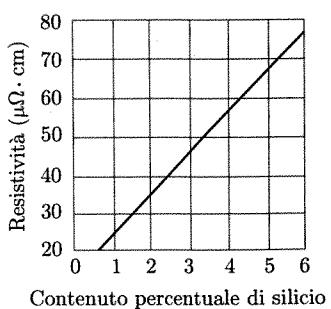


Fig. 5.50

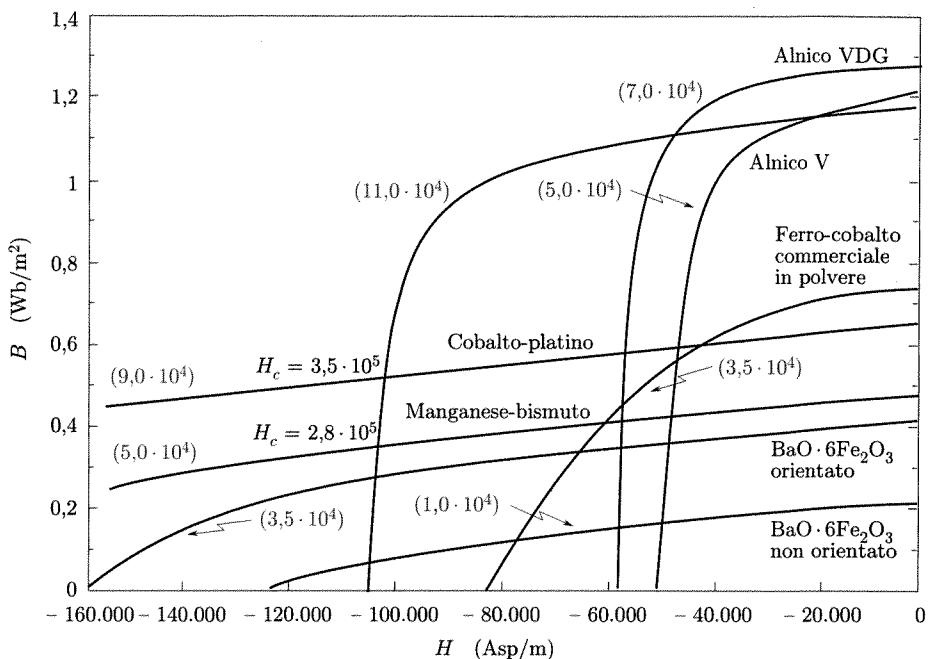


Fig. 5.51

molto ampi. Nella preparazione dei materiali duri si cerca di ostacolare il moto delle pareti dei domini sia introducendo nel reticolo cristallino atomi di tipo diverso (impurità), sia sottoponendo i materiali stessi a trattamenti termici e meccanici che aumentino le tensioni elastiche interne ed i difetti strutturali. I migliori materiali oggi disponibili (come Alnico V) sono formati da grani di dimensioni sufficientemente piccole in modo che essi contengano un solo dominio. In tal caso la variazione di magnetizzazione può avvenire solo per rotazione della direzione di magnetizzazione del dominio. Mediante trattamenti meccanici o trattamenti meccanici in presenza di campi magnetici i grani invece che sferici possono essere di forma allungata (laminette od aghi) nella direzione in cui si deve avere la magnetizzazione: in tal caso la rotazione della magnetizzazione dei domini è fortemente ostacolata da effetti di anisotropia di forma nell'energia magnetostatica.

5.19. ANTIFERROMAGNETISMO E FERRIMAGNETISMO

Il ferromagnetismo è caratterizzato dal fatto che gli spin degli elettroni magnetici, a seguito di una interazione particolarmente intensa, quale abbiamo visto essere quella di scambio, vengono a trovarsi orientati parallelamente: questo ordine è annullato alla temperatura di Curie. Il ferromagnetismo è presentato solo da pochi elementi (Fe, Ni, Co) ed abbiamo accennato che ciò è dovuto alla dipendenza piuttosto critica dell'integrale di scambio dalla distanza reticolare degli atomi e dalle dimensioni delle orbite ($3d$) degli elettroni magnetici.

Per un lungo tempo è stato un pressante interrogativo il fatto che cristalli di elementi quali il Mn ed il Cr, che pure hanno distanze reticolari dello stesso ordine di quelle del Fe, Ni, Co, non fossero ferromagneticci; per di più alcune loro leghe sono ferrimagnetiche. Infine i cristalli di questi elementi non si comportano come le normali sostanze paramagnetiche perché la loro suscettività alle temperature relativamente

basse non segue la legge di Curie. Néel (1936) suggerì l'idea che in queste sostanze, a differenza di quanto accade in quelle paramagnetiche, esista a temperature inferiori ad una certa temperatura (di Néel) un ordine nell'orientamento degli spin come avviene nelle sostanze ferromagnetiche. Peraltro, a differenza da quest'ultime, gli spin di elettroni contigui si verrebbero a trovare in posizione antiparallela. Ciò sarebbe la conseguenza di un valore negativo dell'integrale di scambio. La figura 5.52 illustra la situazione nel caso di un cristallo a semplice cella cubica.

Un altro semplice schema è quello di un reticolo cubico a corpo centrato nel quale gli spin degli atomi ai vertici del cubo sono orientati parallelamente fra loro e quello al centro della cella in direzione antiparallela. In questi schemi evidentemente tutti gli spin degli atomi più prossimi ad un atomo qualsiasi sono antiparalleli a quello dello spin dell'atomo in questione; gli spin degli atomi successivi sono invece in posizione parallela. Si può pensare in altri termini di essere in presenza di due reticolli compenetrantesi, ciascuno caratterizzato dal fatto che gli spin dei propri atomi risultano paralleli fra loro ed antiparalleli a quelli dell'altro reticolo. Naturalmente questa disposizione ordinata sussiste solo a temperature relativamente basse: al di sopra di una temperatura, detta di Néel (corrispondente a quella di Curie nei ferromagneti), l'ordine viene distrutto e la sostanza diviene paramagnetica.

Una sostanza di questo genere non presenta magnetizzazione residua giacché i momenti dei due sottoreticolli si compensano. Se si applica un campo si produce una piccola magnetizzazione e quindi si ha una suscettività positiva. Questa magnetizzazione è relativamente piccola a basse temperature poiché le interazioni fra i due sottoreticolli sono molto forti. Al crescere della temperatura la efficacia della interazione decresce e di conseguenza la magnetizzazione e la suscettività crescono, ciò procede fino alla temperatura alla quale l'ordine viene rotto. Da questa analisi qualitativa si vede che la teoria di Néel è in grado di spiegare l'andamento particolare della suscettività in funzione della temperatura: in figura 5.53 sono riportati i risultati sperimentali (Bizette, Squire, Tsai) sulla suscettività a varie temperature in MnO (misurata in un campo di $4 \cdot 10^5$ Asp/m).

La figura 5.54 (Kittel) paragona l'andamento della suscettività nelle sostanze para, ferro, e antiferromagnetiche e riporta la legge sperimentale per χ nella regione paramagnetica.

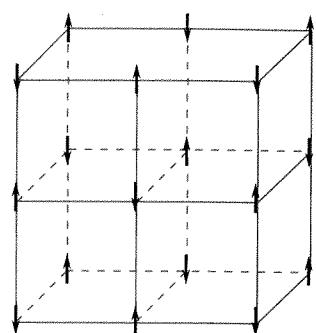


Fig. 5.52

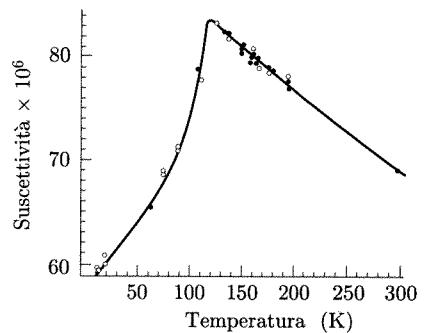


Fig. 5.53

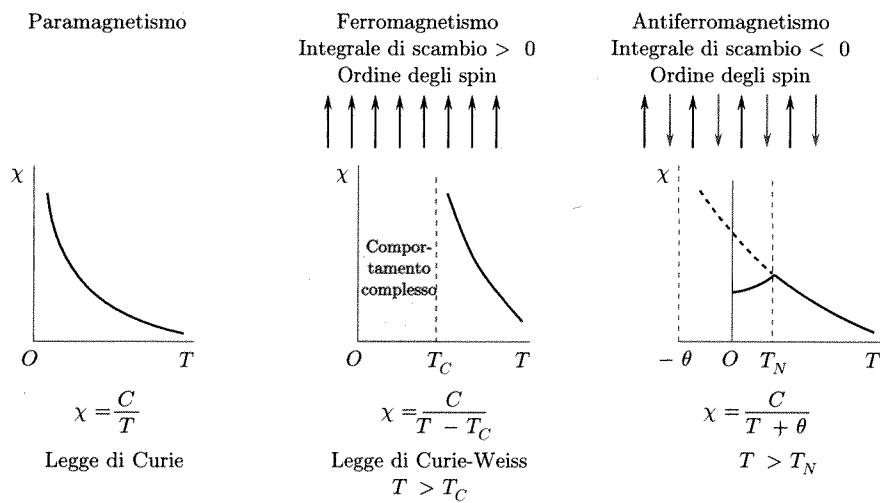


Fig. 5.54

Esistono in natura, o sono stati prodotti, materiali magnetici caratterizzati da situazioni particolari per quanto riguarda la disposizione degli spin di ioni magnetici nell'interno di domini (analoghi questi ultimi a quelli già esaminati nei materiali ferromagneticci). Una prima, e la più importante, categoria è rappresentata da quei materiali noti con il nome di ferriti: ad essa appartengono la magnetite (Fe_3O_4) che

è il minerale magnetico conosciuto fin dall'antichità e numerosi composti di notevole importanza tecnica. L'interpretazione delle loro proprietà assieme allo schema della disposizione degli spin degli ioni nei domini è stata data da Néel (1948). Si tratta di una particolare specie di antiferromagnetismo complesso ed imperfetto che Néel ha contraddistinto con il nome di *ferrimagnetismo*.

Le ferriti hanno tutte una struttura cristallina particolare (caratteristica del minerale spinello) nella quale in ciascuna cella ioni trivalenti di ferro (in numero di sedici) e bivalenti di un metallo (Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Fe, in numero di otto) possono trovarsi in posizioni corrispondenti a due diverse configurazioni (tetraedrica quando uno ione metallico è circondato da 4 ioni ossigeno ai vertici di un tetraedro; ed ottaedrica quando uno ione metallico è circondato da sei ioni ossigeno).

Senza entrare nella complessa discussione delle interazioni che sorgono fra gli ioni magnetici, diremo che la situazione può essere descritta come caratterizzata dalla presenza nel materiale di momenti magnetici contigui di grandezza diversa e fra i quali esiste una interazione antiferromagnetica: gli ioni contigui hanno perciò momenti di dipolo magnetico diretti in verso opposto, che peraltro non si compensano; resta quindi un momento risultante.

La figura 5.55 paragona uno schema della disposizione dei momenti degli ioni in materiali ferromagnetici, antiferromagnetici e ferrimagnetici.

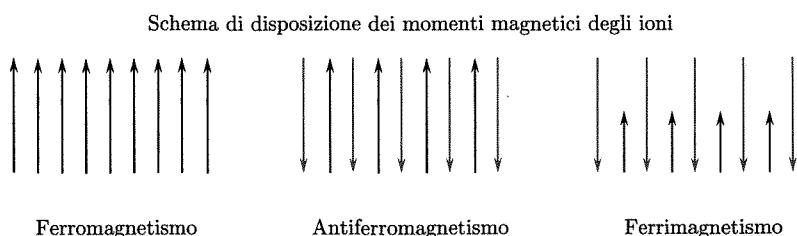


Fig. 5.55

Noi non possiamo entrare nella descrizione della teoria di Néel. Va però detto che essa consente di interpretare soddisfacientemente i vari risultati sperimentali, anche quelli relativi agli andamenti della magnetizzazione e della suscettività con la temperatura.

Una delle caratteristiche più importanti delle ferriti è quella della loro elevata resistività: in corrente continua da 1 a $10^4 \Omega \cdot m$, cioè $10^4\text{-}10^{11}$ volte quella del ferro $10^{-7}\Omega \cdot m$). A differenza di quanto accade nel caso degli agglomerati di polveri di ferro, la bassa conducibilità delle ferriti è dovuta al fatto che gli elettroni di valenza sono localizzati negli ioni e non sono liberi come nei metalli. Esse sono essenzialmente degli isolanti. La elevata resistività consente l'uso di questi materiali magnetici a frequenze elevate.

La permeabilità e le perdite variano notevolmente al variare della frequenza nel campo delle alte frequenze ($1\text{-}10^4$ MHz), per effetto di fenomeni di risonanza di vario genere (risonanza nel moto del contorno dei domini, risonanza di spin). Questi particolari processi hanno conseguenze di grande importanza nelle applicazioni delle ferriti alle alte frequenze (microonde).

La figura 5.56 consente un confronto fra le curve di isteresi del ferro, del permalloy al molibdene e di due ferriti. L'induzione di saturazione è notevolmente più bassa nelle ferriti variando fra $0,15$ e $0,5$ Wb/m 2 ⁽⁶²⁾. Questo fatto pone un limite al loro uso in trasformatori di potenza o di strumenti operanti alle alte induzioni magnetiche. La forma del ciclo di isteresi può essere molto varia andando da quella stretta e di piccola area, utile per la realizzazione di induttori a basse perdite, a quella a forma rettangolare utile per le memorie dei calcolatori. La forma del ciclo è influenzata dalla composizione chimica e dai processi di preparazione.

⁽⁶²⁾ Ciò è essenzialmente dovuto alla presenza nelle ferriti di un notevole numero di ioni ossigeno che non contribuiscono al momento magnetico.

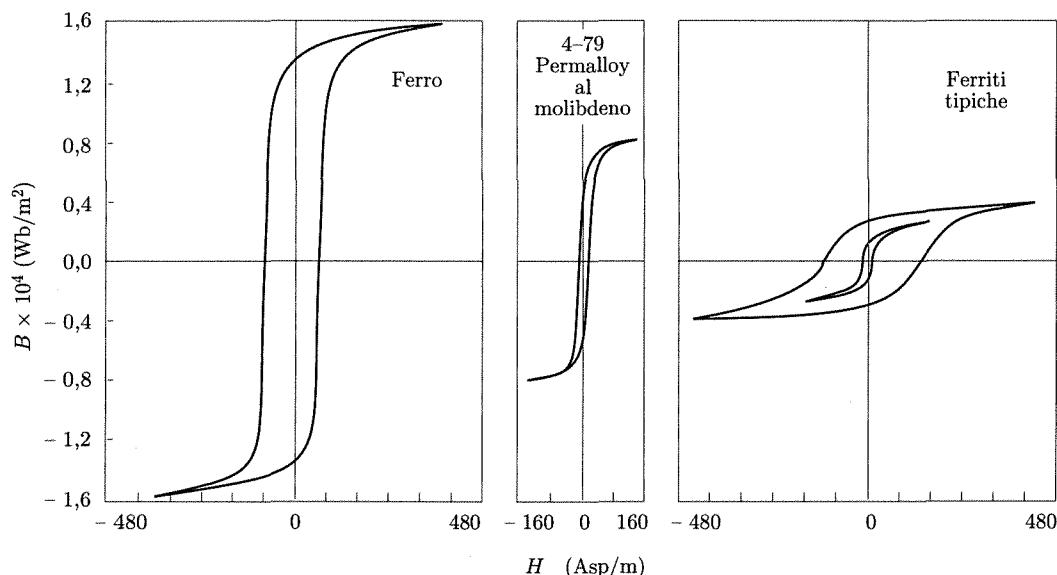


Fig. 5.56

Le ferriti come si è detto sono materiali essenzialmente isolanti: esse presentano valori della costante dielettrica relativa piuttosto elevati e funzione della frequenza: valori tipici a frequenza di 1.000 Hz ed alle frequenze delle microonde (10^9 Hz) sono rispettivamente 10^5 e 10.

■ 5.20. IL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE

Nella Terra ed intorno alla Terra esiste un piccolo campo magnetico. In una prima approssimazione questo campo è simile a quello prodotto da una sfera uniformemente magnetizzata secondo una direzione che forma un piccolo angolo con l'asse di rotazione della Terra. La figura 5.57a mostra l'andamento generale delle linee di induzione del campo magnetico terrestre; la figura 5.57b indica le linee per una sfera uniformemente magnetizzata. Queste ultime linee di induzione sono, al di fuori della sfera, le medesime di quelle che sarebbero ottenute da una sbarra magnetizzata (dipolo) prossima al centro della sfera con l'asse diretto come la magnetizzazione della sfera uniformemente magnetizzata (fig. 5.57c) (63).

Come si vede dalla figura 5.57a il campo magnetico è normale alla superficie della Terra in due punti che sono i poli Nord (prossimo al nord geografico) e Sud (64). Negli altri punti della Terra il campo magnetico forma un angolo diverso da 90° con l'orizzontale e tale angolo prende il nome di inclinazione magnetica: esso è zero sul cosiddetto equatore ma-

(63) L'intensità di magnetizzazione che la sfera uniformemente magnetizzata dovrebbe avere per render conto del campo osservato alla superficie terrestre è di circa 80 Asp/m; il momento magnetico invece del dipolo al centro della sfera nello schema di figura 5.57c dovrebbe avere il valore di circa $8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

(64) Le coordinate dei poli magnetici sono soggette a variare nel tempo; nel 1960 si aveva, all'incirca, per il polo Nord 75° latitudine nord, 102° longitudine ovest e per il polo Sud 67° latitudine sud, 142° longitudine est; come si vede, si tratta di punti non diametralmente opposti.

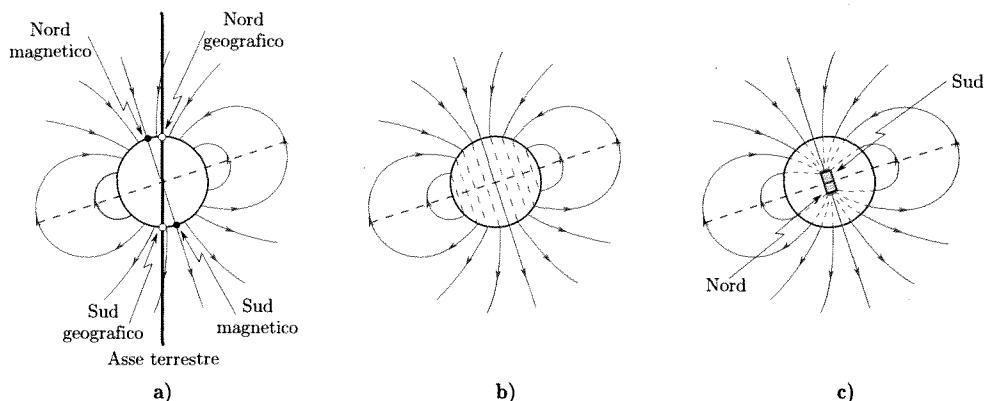


Fig. 5.57

gnetico (linea tratteggiata in fig. 5.57a). Inoltre in ogni punto il campo magnetico forma un angolo con il meridiano e tale angolo prende il nome di declinazione magnetica. A Roma la declinazione è di circa 2° ad ovest del meridiano geografico e l'inclinazione è di circa 58° al di sotto dell'orizzontale.

Il valore del campo sulla superficie terrestre è massimo ai poli (induzione circa $6,2 \cdot 10^{-5}$ Wb/m² ed intensità circa 54 Asp/m); la componente orizzontale è massima all'equatore (induzione circa $3,3 \cdot 10^{-5}$ Wb/m², ed intensità di circa 26 Asp/m).

Si osservi nella figura 5.57a che le linee di induzione del campo magnetico escono dai punti dell'emisfero sud ed entrano in quelli dell'emisfero nord: ciò porta di conseguenza che tale campo, se assimilato a quello creato da una sfera uniformemente magnetizzata, richiede che la magnetizzazione sia diretta nel verso nord-sud (fig. 5.57b); se invece viene assimilata al campo di una sbarra (dipolo) vicino al centro della Terra, richiede che questa sia diretta con il suo polo sud verso il polo nord terrestre magnetico. Ciò è una conseguenza della definizione di magnetismo nord e sud.

La descrizione ora data del campo magnetico terrestre è solo una prima grossolana approssimazione. Variazioni con il tempo e variazioni locali possono osservarsi in seguito a vari effetti.

La parte principale del campo magnetico terrestre sembra essere dovuta a processi che avvengono nell'interno della Terra. Vari studi sulla composizione della Terra portano a riconoscere l'esistenza al suo centro di un nucleo metallico circondato da un guscio di ossidi (il mantello roccioso e la crosta) spesso 2.890 km. Il nucleo metallico è solido al centro per un raggio di 1.215 km circondato da una parte fusa, che produce il campo magnetico terrestre, spessa 2.260 km. Si pensa che il nucleo sia principalmente fatto da silicati di ferro, magnesio e calcio. La temperatura al confine fra il nucleo interno cristallino e il fluido esterno è evidentemente vicina alla temperatura di fusione del materiale del nucleo alla pressione colà esistente. Si pensa che sia 3.500-4.500 K alla superficie del nucleo e salga a 5.000-6.000 K al centro della Terra.

Le sostanze del nucleo alle condizioni in cui si trovano hanno una conducibilità elettrica apprezzabile. La teoria oggi più plausibile circa l'origine della parte più rilevante del campo magnetico terrestre è quella

che correnti elettriche si determinino sul nucleo liquido in conseguenza di correnti convettive per gradienti termici prodotti da sorgenti radioattive o da reazioni chimiche.

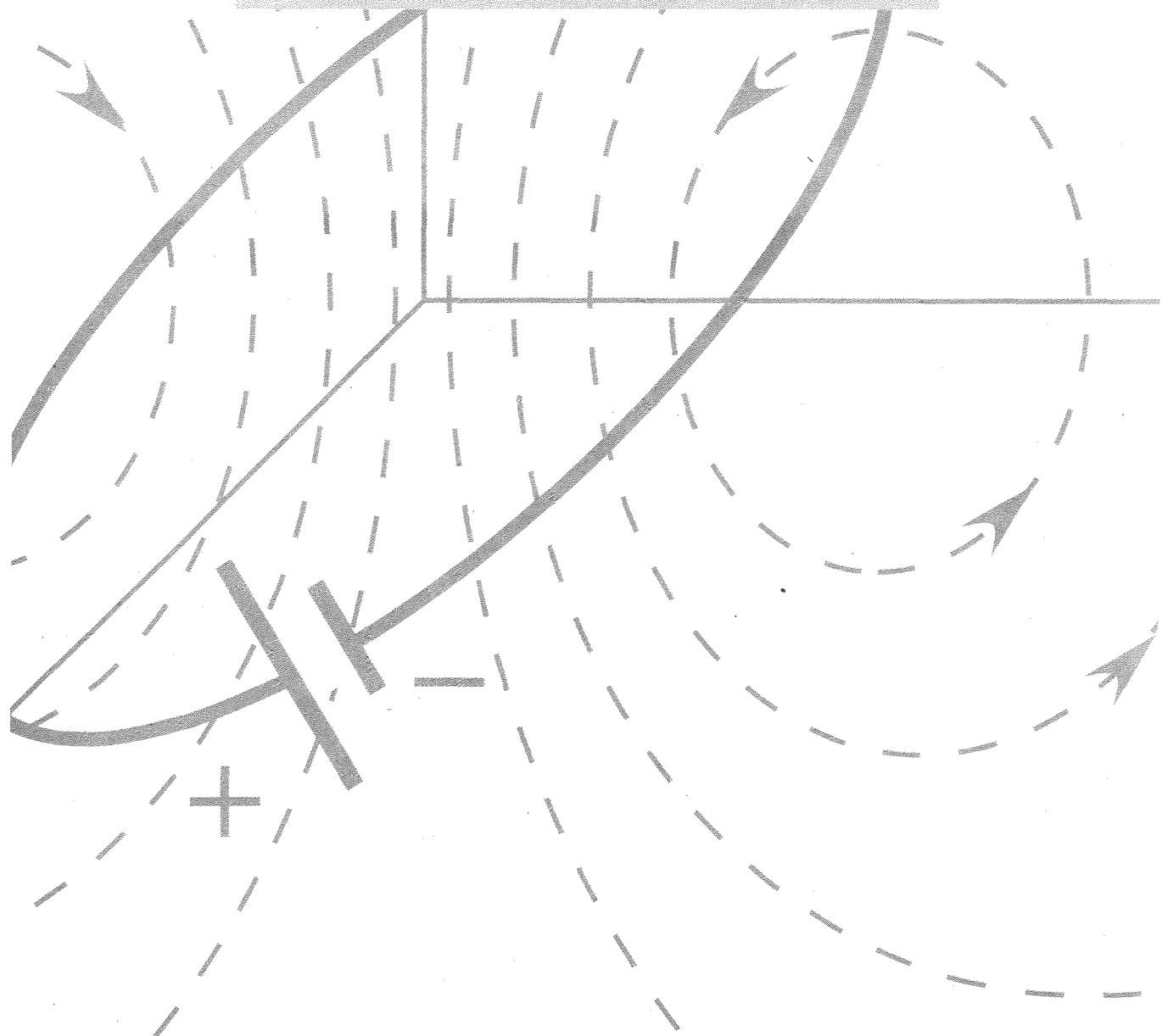
Le variazioni temporali hanno di solito valori piccoli rispetto ai valori del campo, diciamo così, permanente. Esse sono molto complesse ed, a volte, addirittura impredicibili. V'è una variazione regolare con periodo 24 ore (variazione diurna) di un'ampiezza variabile da luogo a luogo; essa varia a sua volta nel corso dell'anno (variazione stagionale) e nel corso del cosiddetto periodo undecennale dell'attività solare (variazione undecennale). Vi sono poi piccole variazioni non periodiche e molto lente (variazioni secolari) ed altre variazioni, anche esse molto piccole, che viceversa sono molto rapide (pulsazioni e micropulsazioni). Accanto a questo, vi sono poi variazioni, relativamente ampie, brusche e irregolari (tempeste magnetiche). Mentre le variazioni secolari sono legate ai processi donde si origina il campo magnetico terrestre nel suo insieme, le altre sono legate a perturbazioni elettromagnetiche nell'atmosfera terrestre (particolarmente nella ionosfera) e nello spazio circumterrestre, essenzialmente correlate con le maree lunisolari e con fenomeni che avvengono sul sole.

Lo studio di questi problemi sta attualmente ricevendo notevole attenzione utilizzando, per la parte sperimentale, le nuove possibilità di ricerca offerta dai satelliti artificiali terrestri e dalle sonde spaziali.

Differenze locali anche notevoli, rispetto ai valori previsti secondo lo schema generale qui presentato, si possono riscontrare e sono in genere causate dalla vicinanza, al punto ove le misure sono fatte, di depositi di materiali ferromagnetici nella crosta terrestre. Lo studio accurato del campo magnetico in regioni della superficie terrestre consente talora di avere utili indicazioni sulla costituzione della crosta terrestre.

L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

✓ L'induzione elettromagnetica conclude il quadro dei fenomeni elettromagnetici e perfeziona in modo definitivo la *seconda equazione di Maxwell*. Il fenomeno è sintetizzato nella legge di Faraday-Neumann-Lenz e sta alla base di tutta una serie di importanti conseguenze e applicazioni.



L'induzione elettromagnetica

6.

■ 6.1. INTRODUZIONE

Nel cap. 4 si è mostrato come ad una corrente stazionaria sia associato un campo magnetico: le esperienze fondamentali sull'argomento sono state, come si è detto, quelle di Oersted (1819). Successivamente a questa scoperta molti ricercatori cercarono sperimentalmente di stabilire se esista un fenomeno, diciamo così, reciproco, se cioè ad un campo magnetico creato da un magnete permanente o da una corrente stazionaria in un avvolgimento sia associata la generazione di una corrente in un altro avvolgimento. Un tale fenomeno non esiste ma Faraday (1831), sperimentando per tale ricerca, mise in evidenza il fatto che una corrente in realtà si stabilisce in un circuito quando la corrente in un altro circuito vicino viene variata. La scoperta di Faraday conduce a riconoscere che un campo elettrico non conservativo viene creato da un campo magnetico variabile ed è fondamentale per tutto l'elettromagnetismo. Alla legge di Faraday e ad alcune sue importanti conseguenze è dedicato il presente capitolo.

■ 6.2. LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

Si considerino le seguenti tre esperienze fondamentali:

esperienza 1 (fig. 6.1): un campo magnetico non uniforme, di induzione **B**, sia creato da una corrente stazionaria in un circuito (fig. 6.1a) o da un magnete (fig. 6.1b); in esso si trovi una spira (*s*) collegata ad un galvanometro (*G*)⁽¹⁾. Si riscontra che, se la spira viene spostata nel campo **B** una corrente circola in essa durante l'intervallo di tempo in cui avviene il movimento;

esperienza 2 (fig. 6.2): gli stessi componenti usati nella prima esperienza siano impiegati nella seconda. In tal caso tuttavia la spira è ferma e viene mossa la sorgente del campo magnetico. Anche in questo caso una corrente circola nella spira durante il moto della sorgente;

⁽¹⁾ In queste esperienze supponiamo per semplicità che nella spira non sia inserito alcun generatore *tradizionale* di f.e.m. (per es. pila, f_p); nel caso lo fosse, la corrente prodotta è la somma di quella causata dalla pila e quella dovuta al processo di induzione, come si può dedurre scrivendo la equazione del circuito.

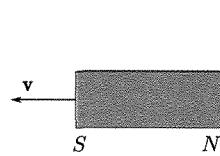
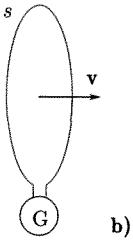
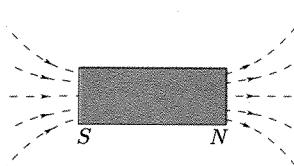
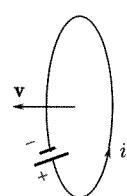
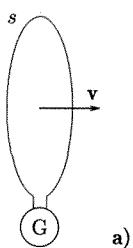
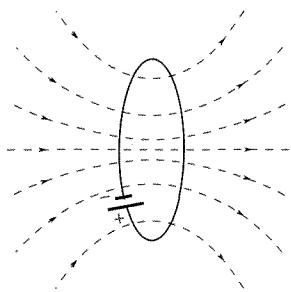


Fig. 6.1

Fig. 6.2

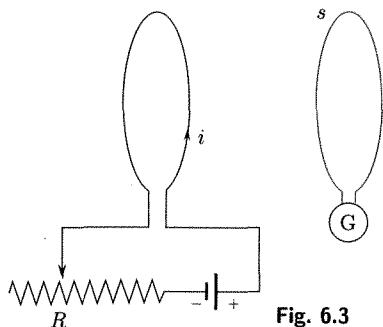


Fig. 6.3

*Induzione
elettromagnetica*

esperienza 3 (fig. 6.3): non esista moto relativo fra la spira ed il circuito che crea il campo, ma quest'ultimo venga variato, per esempio alterando per mezzo del reostato R il valore della corrente nel circuito stesso. Anche in questo caso si nota il fluire di una corrente nella spira mentre varia il campo magnetico.

La corrente nella spira prende il nome di corrente indotta e l'insieme dei processi che la originano prende il nome di induzione elettromagnetica.

All'epoca della scoperta di Faraday non si avevano le conoscenze necessarie per sviluppare una trattazione comune dei vari casi, quello in cui il circuito indotto viene mosso (induzione di movimento, esperienza prima) e quelli in cui il circuito indotto è fermo mentre il campo magnetico nella regione da esso occupata viene variato (esperienze 2 e 3). È merito appunto di Faraday avere mostrato (1831) come tutti i fenomeni di induzione soddisfino ad una unica legge⁽²⁾.

Diciamo innanzitutto che nella descrizione quantitativa di questi effetti conviene fare riferimento non alla corrente indotta, ma alla forza elettromotrice indotta che causa la corrente se il circuito è chiuso. La f.e.m. può essere valutata usando al posto del galvanometro un elettrometro (circuito aperto) oppure, con buona approssimazione, inserendo nel circuito chiuso della spira un galvanometro ed una resistenza molto grande in modo da tenere bassa la corrente e le corrispondenti perdite per effetto Joule.

⁽²⁾ La legge di Faraday (1831) fu formulata in termini qualitativi e lo stesso vale per la legge di Lenz (1834) di cui si dirà fra breve. Si deve a Neumann la trattazione matematica.

Per giungere alla espressione della legge della induzione si scelga sulla linea della spira considerata (più in generale, un circuito qualsiasi) un verso come positivo: è allora determinato per il circuito immerso in un campo magnetico \mathbf{B} il flusso magnetico concatenato: *flusso $\phi(\mathbf{B})$ attraverso una qualsiasi superficie che ha la linea del circuito come bordo e la normale in ogni punto (\mathbf{n}) orientata come il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti seguendo il verso positivo sulla linea* (fig. 6.4, in essa la spira è supposta piana). Al variare di \mathbf{B} nel tempo muta $\phi(\mathbf{B})$.

Flusso magnetico concatenato

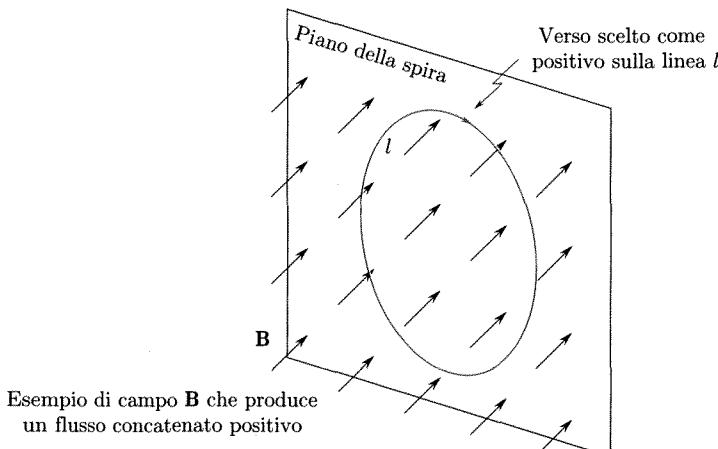


Fig. 6.4

La legge di Faraday-Neumann-Lenz si esprime nella seguente maniera: qualora il flusso concatenato con un circuito venga per una qualsiasi ragione a variare, si presenta nel circuito una f.e.m. (indotta)

$$(1) \quad f_i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}.$$

Legge di Faraday-Neuman-Lenz

Nel caso che il circuito sia chiuso ed R sia la sua resistenza, in esso scorre una corrente di intensità

$$(2) \quad i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{R}.$$

Cerchiamo di illustrare il significato del segno meno che compare al secondo membro. Si osservi che, come si è detto, al verso positivo scelto per la corrente e la f.e.m. nel circuito è accoppiato un verso positivo per il flusso. Si trova allora sperimentalmente che la f.e.m. indotta ha verso opposto a quello di $d\phi/dt$; essa è cioè positiva quando $d\phi/dt$ è negativo, quando cioè il flusso concatenato decresce nel tempo⁽³⁾, è negativa nel caso opposto. Si osservi inoltre che una corrente indotta nel circuito avente verso positivo produce essa stessa un flusso concatenato positivo (fig. 6.5). Si conclude quindi che il verso della f.e.m. indotta nel circuito è quello che tende a far circolare nel circuito stesso una corrente tale che il flusso ma-

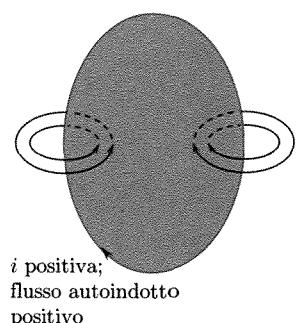


Fig. 6.5

⁽³⁾ Ciò accade per una diminuzione del valore assoluto di ϕ se ϕ è positivo o per un aumento del valore assoluto di ϕ se questo è negativo.

Legge di Lenz

gnetico ad essa associato costituisca una variazione del flusso concatenato opposta alla variazione di flusso che ha originato il processo.

Questa circostanza indica chiaramente la natura di reazione elettromagnetica del processo di induzione e la sua espressione che conduce al segno meno nelle (1) e (2) costituisce la legge di Lenz.

Noi desideriamo nel seguito sottolineare la grande importanza della legge di Faraday ed il fatto fondamentale e nuovo che essa pone in evidenza, cioè, come vedremo, che un campo magnetico variabile crea un campo elettrico, il quale inoltre non è conservativo.

■ 6.3. INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DELLE ESPERIENZE DI INDUZIONE ELETTRONAGNETICA

Nel presente paragrafo cercheremo di esaminare con maggior dettaglio le tre esperienze descritte avanti per vedere come esse si differenzino, come possano essere interpretate sulla base di circostanze a noi già note, e come tutte possano essere rappresentate dalla legge di Faraday ora enunciata.

Per una migliore comprensione di quanto diremo, è opportuno premettere alcune considerazioni generali che presenteremo con riferimento ad una situazione particolare. In un sistema di riferimento x, y, z , si abbia (fig. 6.6a) un campo magnetico uniforme, di induzione B , diretto come z , e una sbarra rettilinea metallica, disposta come y . La sbarra si muova nella direzione x con velocità v costante. Le cariche mobili nell'interno della sbarra sono soggette alla forza di Lorentz ($qv \times B$).

Nella figura 6.6a è indicata la forza su una carica positiva nella sbarra. In conseguenza di queste forze si produce un addensamento di cariche positive ad una estremità della sbarra ed un addensamento di cariche negative all'altra estremità: ciò procede fino a che il campo elettrico che si genera nell'interno della sbarra per la concentrazione di cariche alle estremità eserciti sulle cariche mobili una forza che equilibri la forza di Lorentz:

$$(3) \quad q\mathbf{E} = -qv \times \mathbf{B}.$$

Il campo elettrico di intensità \mathbf{E} , che si stabilisce nella sbarra, è uniforme. Naturalmente la distribuzione di cariche con addensamenti di cariche opposte crea anche un campo esterno alla sbarra. Tale campo, non uniforme, è approssimativamente simile a quello di un dipolo (fig. 6.6b).

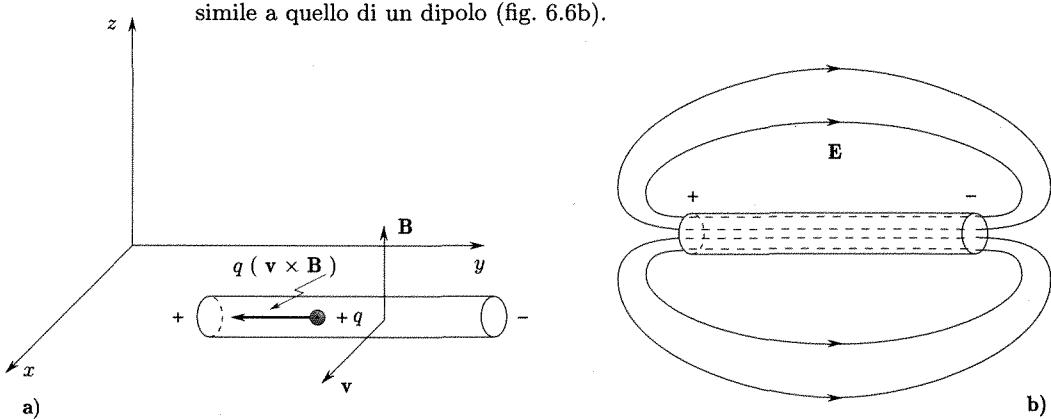


Fig. 6.6

Esaminiamo ora come appaia il processo ad un osservatore che si muova solidalmente con la sbarra, cioè in un sistema di riferimento $x'y'z'$ che scorra nella direzione x' (parallela ad x) con velocità v rispetto ad xyz . Ad un tale osservatore, la terna

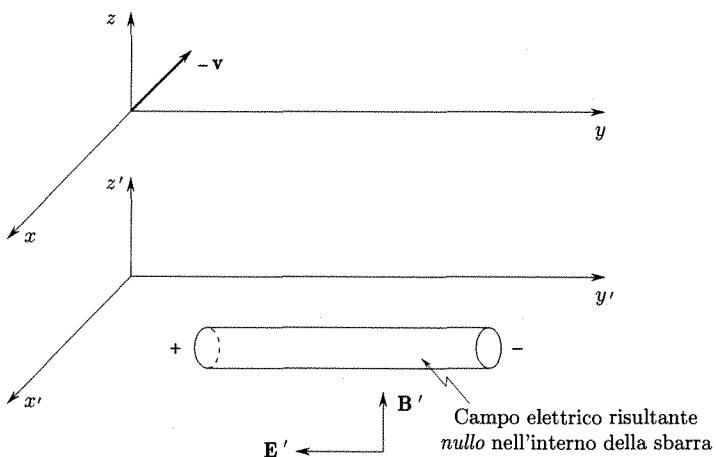


Fig. 6.7

xyz appare muoversi con velocità $-v$. (fig. 6.7). Naturalmente l'addensamento delle cariche di segno opposto alle due estremità deve essere rivelato dall'osservatore in $x'y'z'$ come da quello in xyz . Vogliamo vedere quale è la descrizione che va fatta nel sistema $x'y'z'$. In questo sistema vi sarà un campo magnetico B' ma poiché la sbarra e le cariche in essa sono ferme, la forza di Lorentz non esiste ed il campo magnetico non può essere la causa degli addensamenti di carica. Il fatto che tale addensamento si verifichi deve essere spiegato dall'osservatore in $x'y'z'$ assumendo l'esistenza in tale sistema di un campo elettrico uniforme già in assenza della sbarra e nella direzione della sbarra stessa: in tali circostanze infatti l'introduzione della sbarra conduttrice neutra è seguita da una ridistribuzione di cariche sulla sua superficie con addensamenti di cariche opposte alle due estremità; il campo elettrico deve infatti essere reso nullo nello spazio occupato dalla sbarra.

Il campo elettrico E' che l'osservatore in $x'y'z'$ deve ammettere esistere per spiegare l'esperienza è un campo elettrico reale in tale terna e potrebbe essere rivelato anche con altre esperienze; la sua esistenza è facilmente interpretata con la teoria della relatività. Nel par. 4.13 del cap. 4 abbiamo sottolineato come i vettori \mathbf{B} ed \mathbf{E} si trasformino passando da una terna inerziale ad un'altra e possano essere scritte le relazioni di trasformazione con tutta generalità. Nel caso particolare di due terne inerziali (x, y, z) ed (x', y', z') delle quali la seconda si muova nella direzione x con velocità v , si trova

$$(4) \quad \begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

essendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Nel caso del nostro esempio

$$E_x = E_y = E_z = B_x = B_y = 0.$$

Si ha di conseguenza

$$(5) \quad B' = B'_z = \gamma B_z = \gamma B$$

e se $v \ll c$, $\gamma \simeq 1$

$$(6) \quad B' = B'_z \simeq B.$$

Per il campo elettrico

$$(7) \quad E' = E'_y = -v\gamma B_z \simeq -vB'.$$

Nella terna $x'y'z'$ esiste quindi accanto al campo magnetico B' (non molto diverso da \mathbf{B}) un campo elettrico \mathbf{E}' .

È questo campo quello che, quando si pone la sbarra, produce gli addensamenti di cariche alle estremità in modo da rendere nullo il campo elettrico nell'interno.

Questa distribuzione di cariche (a parte l'effetto della contrazione di Lorentz, che è del secondo ordine) è perfettamente la stessa di quella che rileva l'osservatore in xyz .

Si osservi che la forma del campo elettrico visto dai due osservatori è diverso: per l'osservatore in x, y, z , il campo elettrico è solo quello prodotto dall'addensamento delle cariche alle estremità ed in particolare è uniforme (e diverso da zero) nella sbarra; per l'osservatore in $x'y'z'$ il campo è il risultante di quello uniforme \mathbf{E}' esistente nella terna e di quello creato dall'addensamento di cariche: in particolare esso è nullo nell'interno della sbarra.

a. Induzione di movimento

Consideriamo dapprima l'esperienza in figura 6.8a. In un campo magnetico uniforme \mathbf{B} sia disposto un circuito formato da una spira la quale abbia un lato che, pur mantenendo il contatto metallico con i lati contigui, venga spostato con velocità \mathbf{v} , normale al lato stesso ed a \mathbf{B} , come indicato in figura. Per quanto si è detto una f.e.m. di induzione (di movimento) si manifesta. È facile vedere che in questo caso l'origine della forza elettromagnetica si trova nella forza di Lorentz che agisce sulle cariche libere del conduttore in moto.

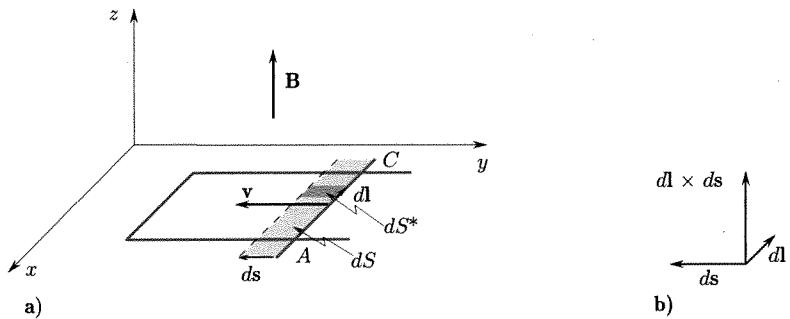


Fig. 6.8

Si ricordi infatti (cap. 3 par. 3.6) che per definizione di f.e.m. in un circuito questa è data dal lavoro totale che tutte le forze (elettriche, magnetiche, di altra origine) compiono per spostare lungo il circuito l'unità di carica positiva. Nel caso in oggetto sulla unità di carica nei punti del circuito agisce:

1. un campo elettromotore dovuto alla forza di Lorentz in corrispondenza a punti del lato in movimento e nel verso AC

$$(8) \quad \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}_L}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

avendo indicato questo campo con \mathbf{E}_i , campo indotto, perché, come presto vedremo, è quello che dà origine alla f.e.m. indotta;

2. un eventuale campo elettrostatico \mathbf{E}_S .

Indicando con \mathbf{E} il campo elettrico totale

$$(9) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i$$

si ha per la f.e.m., in accordo alla definizione,

$$(10) \quad f_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

essendo gli integrali calcolati lungo la linea chiusa del circuito orientata in un verso scelto come positivo (per es. nel verso AC). Il primo integrale nell'ultimo membro è nullo perché \mathbf{E}_S è conservativo; per il secondo si ricordi che \mathbf{E}_i è diverso da zero solo nel tratto AC . Di conseguenza

$$(11) \quad f_i = \int_A^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Si osservi che $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ e per le regole del prodotto misto

$$(12) \quad \int_A^C d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C \mathbf{B} \times d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B d\mathbf{l} \times d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}.$$

Inoltre ($d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}$) è un vettore (fig. 6.8a e b) che ha modulo pari alla superficie dS^* spazzata dall'elemento $d\mathbf{l}$ del lato AC nel tempo dt , direzione normale a tale superficie e verso concorde con \mathbf{B} . L'integrale (12) è quindi pari al flusso di \mathbf{B} , $d\phi_{dS}$, attraverso la superficie dS spazzata dall'intero lato AC nel tempo dt . Tale flusso a sua volta è pari a

$$-d\phi(B)$$

essendo $\phi(B)$ il flusso concatenato con il circuito che chiaramente diminuisce perché diminuisce la superficie.

La (11) si scrive pertanto

$$(13) \quad f_i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

che è l'espressione della legge di Faraday, Neumann, Lenz (1).

Lo stesso risultato si ottiene per orientazioni differenti sia di \mathbf{v} che di \mathbf{B} .

Dopo aver considerato questo semplice caso di induzione di movimento consideriamo quello in cui il circuito non venga deformato (variata la sua superficie) ma esso sia trascinato come un sistema rigido nel campo. Nel caso che il campo sia uniforme ed il circuito si riduca ad una spira rettangolare⁽⁴⁾ disposta come in figura 6.9, si comprende che gli effetti della forza di Lorentz si risentano solamente nei due lati AC e ED (per gli altri due la forza è normale a $d\mathbf{l}$, e quindi $[(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}]$ è nullo).

La forza di Lorentz tuttavia produce nei due lati due f.e.m. uguali ed opposte e nessuna f.e.m. totale di induzione risulta nel circuito: avremo solamente alcune cariche di segno contrario sui due lati paralleli a \mathbf{v} (fig. 6.9). Ciò è in accordo con la legge di Faraday-Neumann-Lenz giacché il flusso concatenato con il circuito non varia.

Differentemente stanno le cose nel caso che il campo magnetico non sia uniforme (fig. 6.10). È questo il caso più generale di induzione di moto ed è quello della esperienza 1 (fig. 6.1). In questo caso si ha per la f.e.m., cioè per il lavoro compiuto dalla forza ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_S$) che agisce sull'unità

Movimento
di un circuito rigido

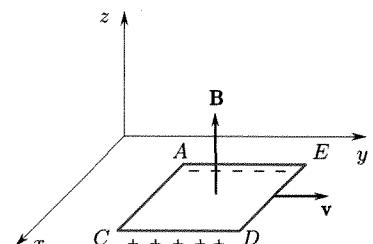


Fig. 6.9

Movimento
di un circuito rigido
in un campo magnetico
non uniforme.

⁽⁴⁾ Nelle seguenti considerazioni faremo spesso riferimento a spire di forma rettangolare opportunamente disposte rispetto ai vettori che intervengono nel processo. Ciò è fatto al solo scopo di semplificare la trattazione; i risultati che si ottengono valgono peraltro con tutta generalità.

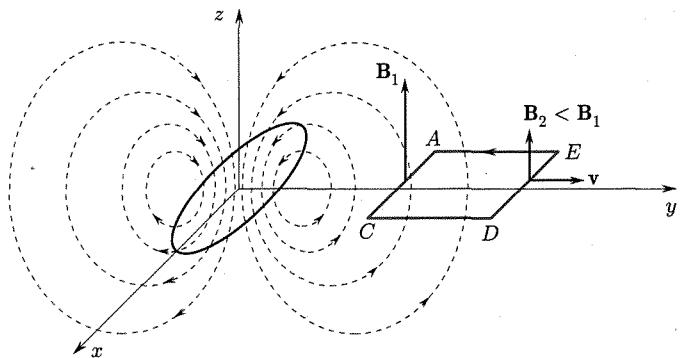


Fig. 6.10

di carica per spostare la carica unitaria stessa lungo il circuito

$$(14) \quad f_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_l \cdot d\mathbf{l}.$$

L'integrale contenente \mathbf{E}_S è al solito nullo perché \mathbf{E}_S è conservativo. Il secondo integrale si riduce ai contributi dei lati normali a \mathbf{v} , giacché per gli altri due la forza $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ è normale a $d\mathbf{l}$. In altri termini il campo elettrico di induzione esiste solo per i punti di quei due lati

$$(15) \quad \begin{aligned} f_i &= \int_A^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_D^E (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \int_A^C d\mathbf{l} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2) \cdot \int_D^E d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Essendo i vettori \mathbf{v} e \mathbf{B} normali fra loro, il loro prodotto vettoriale è un vettore diretto come $d\mathbf{l}$: mentre, peraltro, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$ è diretto nel verso di $d\mathbf{l}$ (verso antiorario scelto come positivo sulla spira), il contrario avviene per $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_2$. Si ha quindi, indicando con l la lunghezza dei lati AC e DE

$$(16) \quad f_i = vl(B_1 - B_2).$$

D'altra parte, e con riferimento alla figura 6.11, è facile riconoscere che la variazione del flusso concatenato con la spira nel tempo dt (durante il quale la spira si sposta di $ds = \mathbf{v} dt$) si può porre

$$(17) \quad d\phi(\mathbf{B}) = (B_2 - B_1)l ds = -(B_1 - B_2)lv dt.$$

Si ha quindi in accordo con la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$(18) \quad f_i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

La prima esperienza e la validità per essa della legge di Faraday-Neumann-Lenz risultano quindi spiegabili per mezzo della forza di Lorentz, che conduce ad un campo elettrico indotto in punti del circuito. Tale campo elettrico non è conservativo dato che l'integrale di linea lungo la linea chiusa del circuito è diverso da zero.

b. Induzione dovuta a campo magnetico variabile

Consideriamo ora la seconda esperienza (fig. 6.2): il circuito indotto è fermo mentre si muove il circuito che crea il campo magnetico od il magnete. È evidente come in questo caso non esista forza di Lorentz (circuito fermo, $\mathbf{v} = 0$). Al tempo in cui le esperienze di Faraday e lo

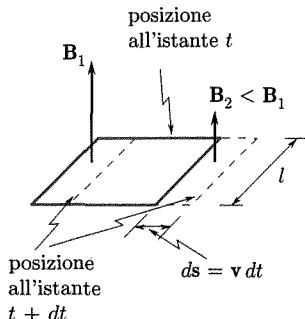


Fig. 6.11

studio dell'induzione elettromagnetica furono fatte, non si conoscevano ragioni che potessero spiegare il presentarsi della f.e.m. indotta in questo caso e quindi fu proprio questo caso quello che manifestò la esistenza di qualcosa di nuovo, in cui essenzialmente la scoperta di Faraday consiste: muovendo la sorgente di un campo magnetico non uniforme si produce una f.e.m. indotta in un circuito fermo. Oggi la spiegazione di un tale effetto può essere ottenuta mediante la teoria della relatività usando ragionamenti dello stesso tipo di quelli che precedentemente (all'inizio del paragrafo) ci hanno fatto riconoscere l'equivalenza delle due situazioni:

- a. campo magnetico statico e sbarra metallica in moto;
- b. sorgenti del campo magnetico in moto e sbarra ferma.

Nel primo caso agisce la forza di Lorentz, nel secondo caso agisce una forza elettrica che è presente nel sistema di riferimento solidale con la sbarra.

Le due descrizioni del tutto equivalenti cui si giunge usando la teoria della relatività per l'esperienza 2 sono le seguenti, con riferimento alla figura 6.12:

- a. per un osservatore in una terna xyz , solidale con la sorgente del campo magnetico B , tale campo non è uniforme nello spazio ma è costante

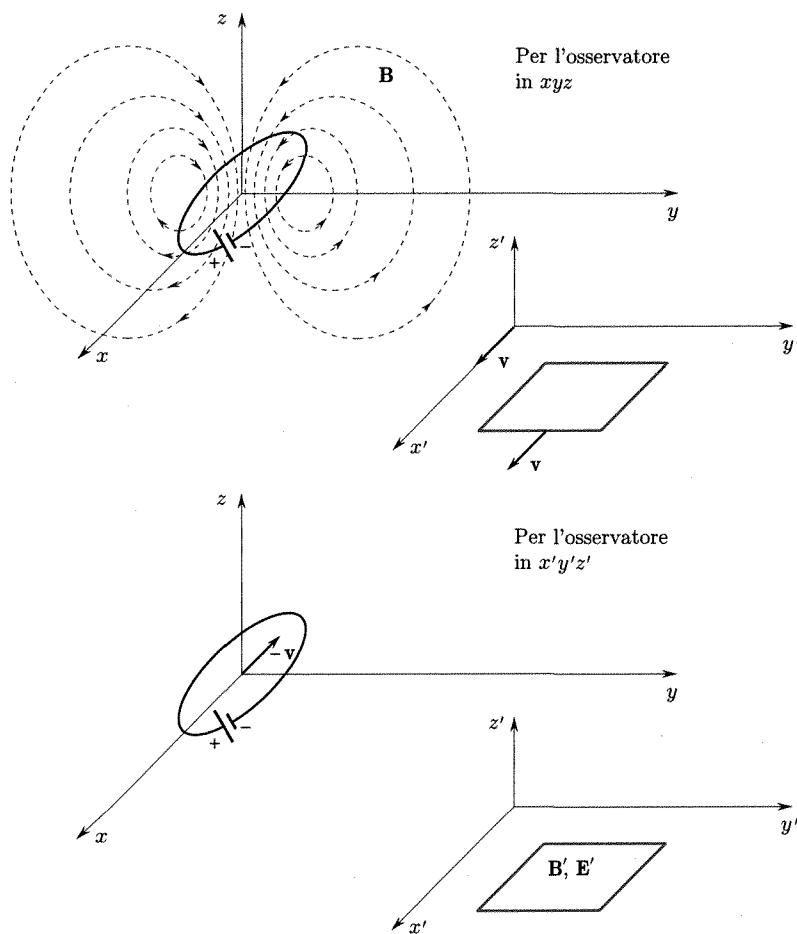


Fig. 6.12

nel tempo; il circuito si muove in esso con velocità \mathbf{v} e si genera una f.e.m. che (esperienza 1) è data dalla (18)

$$f_i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}.$$

b. per un osservatore nella terna $x'y'z'$, la sorgente del campo magnetico si muove con velocità \mathbf{v} , il circuito è fermo. Il moto delle cariche nel circuito deve essere causato da un campo elettrico; tale campo elettrico \mathbf{E} è infatti prodotto assieme ad un campo magnetico, \mathbf{B}' , dalla sorgente del campo magnetico (\mathbf{B}) nel sistema $x'y'z'$ per effetto del suo moto rispetto a $x'y'z'$. La forza e.m. agente nel circuito è pari a

$$(19) \quad f'_i = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\phi(\mathbf{B}')}{dt'}.$$

Queste conclusioni sono entrambe esatte per qualsiasi velocità $v \leq c$ purché si considerino le differenze fra \mathbf{B} e \mathbf{B}' , t e t' .

Nel caso $v \ll c$, \mathbf{B}' è praticamente uguale a \mathbf{B} e la differenza fra t e t' può essere trascurata. In tal caso la (19) coincide con la (18). Si osservi che il campo elettrico \mathbf{E}' è un campo elettrico effettivo che ha la caratteristica di non essere conservativo, dato che l'integrale di linea lungo una linea chiusa è diverso da zero. In questo caso \mathbf{E}' è il campo indotto (\mathbf{E}_i).

Consideriamo infine la terza esperienza (fig. 6.3). In questo caso entrambi i circuiti, inducente e induttore, sono fermi ed il flusso concatenato con il circuito varia perché viene alterata la corrente nell'induttore. È facile convincersi senza calcoli complicati che questa situazione è del tutto equivalente ad una situazione del tipo di quella della esperienza 2 e ciò giustifica il risultato dell'esperienza. Si può infatti immaginare di sostituire allo schema dell'esperienza 3 quello di una esperienza del tipo 2 nella quale il circuito induttore sia configurato in modo tale e venga spostato con velocità opportuna in modo che la variazione del flusso concatenato con il circuito indotto nei due casi sia il medesimo. È evidente, e viene meglio sostanziato nella teoria dei campi, che, per quel che riguarda il circuito indotto, il processo nei due casi deve essere lo stesso e la stessa f.e.m. deve apparire in esso: non è infatti possibile ammettere che, pur essendo uguali nei due casi le variazioni del campo magnetico nella regione del circuito fermo, si abbiano effetti differenti in conseguenza semplicemente della diversa maniera con cui il campo magnetico variabile è creato.

Queste considerazioni mostrano quindi l'equivalenza delle esperienze 1, 2 e 3.

Rimane quindi stabilito, in accordo con Faraday, che si genera una f.e.m. indotta in un circuito tutte le volte che varia il flusso concatenato con esso; ciò avviene qualunque sia la causa della variazione: moto del circuito in un campo magnetico fermo o variazione del campo magnetico (sia per spostamenti della sorgente del campo magnetico, sia per variazioni della corrente nel circuito induttore)

$$(20) \quad \begin{aligned} f_i &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \phi(\mathbf{B}) = \\ &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

S è una superficie che ha la linea del circuito come bordo ed \mathbf{n} , normale ad S , è legata al verso positivo sulla linea secondo la regola della vite destra.

Ricordiamo che [relazione (9)]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i$$

è il campo elettrico totale (forza sull'unità di carica) in un punto del circuito: \mathbf{E}_S è un campo elettrostatico (creato da cariche) eventualmente presente ed \mathbf{E}_i è il campo indotto. Mentre \mathbf{E}_S è conservativo \mathbf{E}_i non è conservativo e per esso non ha significato parlare di funzione scalare potenziale (cap. 1, par. 1.11).

È bene sottolineare che sebbene la (20) sia generale e consenta di ottenere in ogni circostanza risultati esatti in accordo con la sostanziale equivalenza delle esperienze 1, 2, 3, la descrizione microscopica nel *sistema dell'osservatore* è diversa nel caso dell'induzione di movimento e di quella per circuiti fermi. Nel primo caso \mathbf{E}_i è creato dalla forza di Lorentz ed esiste solamente nelle parti del circuito ove questa fa muovere le cariche, nel secondo caso \mathbf{E}_i ha una origine relativistica e la sua esistenza nel sistema solidale con il circuito è indipendente dalla presenza del circuito stesso.

Sarà bene notare che nelle precedenti considerazioni noi abbiamo trattato della f.e.m. indotta in un circuito, facendo la ipotesi che non vi fossero presenti f.e.m. di altra natura. Può accadere, naturalmente, che invece vi siano tali forze elettromotrici. In tal caso nell'analisi dei processi nel circuito indotto un nuovo termine va introdotto in alcune delle relazioni scritte. In particolare, per molte considerazioni, si può prendere come campo elettrico totale (\mathbf{E}_T) la somma di quelli elettrostatico, indotto e del campo elettromotore (\mathbf{E}_m) che rappresenta sinteticamente i processi nella sorgente di f.e.m. di altro tipo

$$(21) \quad \mathbf{E}_T = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_m .$$

Si ha inoltre

$$(22) \quad \oint \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} - \frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = f_p - \frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

e se il circuito è chiuso

$$(23) \quad i = \frac{f_p - \frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}}{R}$$

essendo R la resistenza totale nel circuito.

6.4. ESPRESSIONE DIFFERENZIALE DELLA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN LENZ PER I MEZZI STAZIONARI

Vogliamo ora svolgere alcune importanti considerazioni per il caso della induzione in circuiti fermi (esperienze 2 e 3). La variazione del flusso concatenato ed il processo di induzione sono esclusivamente dovuti al fatto che il campo magnetico nella regione occupata dal circuito varia nel tempo.

In base a ciò si può sostituire nella (20) alla derivata totale quella parziale e si può portare il segno di derivata entro quello di integrale. Si ha quindi

$$(24) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

essendo, ripetiamo, S una qualsiasi superficie limitata dalla linea del circuito e \mathbf{n} orientata come il verso di avanzamento di una vite destra che ruoti nel senso positivo sulla linea.

La legge di Faraday ci dice, come è già stato notato, che quando esiste un campo magnetico (\mathbf{B}) variabile nel tempo si produce un campo elettrico (\mathbf{E}_i): un campo magnetico variabile produce un campo elettrico (non conservativo).

Sulla base dell'interpretazione relativistica offerta in precedenza, il campo elettrico \mathbf{E}_i , non è legato al circuito ed esiste nel sistema solidale con il circuito anche se questo viene rimosso. Questo fatto può fare pensare che la circostanza espressa dalla (24) non sia legata alla presenza effettiva del conduttore che realizza il circuito ma esprima una proprietà fondamentale del campo \mathbf{E}_i .

Per giungere a questa generalizzazione si può anche partire dall'osservazione che la (24), pur essendo stata ottenuta con riferimento ad un circuito indotto reale, non contiene riferimento ad esso se non per la sua forma. Si può allora avanzare l'ipotesi che essa valga per qualsiasi linea chiusa, indipendentemente dalla presenza fisica del conduttore, e che quindi rappresenti una proprietà dei campi \mathbf{E}_i ed \mathbf{E} . La giustificazione principale di tale ipotesi starebbe nel fatto che essa consente di ottenere conclusioni teoriche in accordo con la esperienza nelle situazioni più varie possibili.

In base a quanto detto riterremo la (24) valida in un mezzo fermo per una qualsiasi linea chiusa. Se si applica il teorema di Stokes (cap. 1, par. 1.12) all'integrale di linea si ottiene

$$(25) \quad \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Questa relazione deve valere per qualsiasi S e quindi

Il equazione di Maxwell

$$(26) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}).$$

È questa l'espressione differenziale della legge di Faraday per i mezzi in quiete⁽⁵⁾: essa esprime una proprietà fondamentale dell'elettromagnetismo e costituisce una delle equazioni di Maxwell.

■ 6.5. ALCUNI ESEMPI DI INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Esempi di applicazione della legge della induzione elettromagnetica possono essere presi da un gran numero di tipi diversi di situazioni essendo, l'induzione e.m. fondamentale per tutto l'elettromagnetismo. Così fra l'altro, l'induzione elettromagnetica è alla base di gran parte della moderna

⁽⁵⁾ Per i mezzi in moto si trova, per $v \ll c$,

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) dS$$

essendo \mathbf{v} la velocità con cui si muove la superficie solidale con la materia in moto. Ne segue

$$(28) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Il secondo termine al secondo membro rappresenta l'effetto del moto del circuito indotto ed è presente anche se \mathbf{B} non dipende da t .

elettrotecnica. Noi avremo modo di considerare un numero notevole di applicazioni della legge di Faraday nel seguito del corso.

Ancora più vasta e profonda sarà la considerazione di tali applicazioni nei corsi di elettrotecnica ed elettronica. Vogliamo tuttavia dare qui a titolo orientativo qualche informazione, spesso solamente qualitativa, su taluni casi di induzione elettromagnetica.

Generatori. In una regione in cui si abbia un campo magnetico uniforme di induzione \mathbf{B} si trovi una spira (o una bobina formata da spire uguali e molto vicine fra loro (fig. 6.13). Questa bobina possa ruotare intorno ad un asse che per semplicità supponiamo normale a \mathbf{B} ; gli estremi della bobina siano portati a due anelli conduttori solidali con la bobina ed aventi lo stesso asse della bobina. Sui due anelli premono due sbarrette conduttrici (spazzole, per es. di carbone) che consentono di collegare la bobina (ruotante) con un circuito esterno fisso. Nelle realizzazioni pratiche il campo magnetico può essere formato da un magnete permanente o da un elettromagnete e la bobina è avvolta su un cilindro di materiale ferromagnetico in modo da avere nell'interferro un campo intenso ed uniforme.

La bobina sia tenuta in rotazione: in tali condizioni il flusso concatenato varia ed una f.e.m. viene indotta (induzione di movimento). Per individuare la posizione della bobina si può usare l'angolo $\alpha(t)$ che la normale al piano della bobina stessa orientata in uno dei possibili versi⁽⁶⁾ (fig. 6.14) forma con \mathbf{B} .

Il flusso concatenato con ciascuna spira è allora, indicando con $S = ab$ la superficie piana della spira stessa:

$$(29) \quad \phi(\mathbf{B}) = SB \cos \alpha.$$

La forza e.m. indotta in ciascuna spira risulta

$$(30) \quad f'_i = -SB \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -SB\omega(t) \sin \alpha(t)$$

avendo indicato con $\omega(t)$ la velocità angolare con cui ruota la spira. La f.e.m. indotta nella bobina è

$$(31) \quad f_i = -SBN\omega \sin \alpha.$$

Nel caso in cui la bobina venga tenuta in rotazione con velocità costante,

$$(32) \quad \alpha = \omega t + \beta$$

essendo β il valore (positivo o negativo) di α nell'istante ($t = 0$) in cui si inizia a misurare il tempo, si ha per il flusso concatenato con una spira (fig. 6.15)

$$(33) \quad \phi = SB \cos \alpha = SB \cos(\omega t + \beta)$$

e per la f.e.m. indotta nella bobina (fig. 6.15)

$$(34) \quad f_i = (NSB\omega) \sin(\omega t + \beta) = F \sin(\omega t + \beta).$$

La f.e.m. come si vede varia nel tempo con legge sinusoidale. F è il valore massimo (ampiezza) ed è raggiunto per $(\omega t + \beta) = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

La quantità $(\omega t + \beta)$ è la *fase all'istante t* (o *fase istantanea*) misurata in radianti. β è la *fase iniziale*; essa è zero se si inizia a contare i tempi da un istante in cui $f_i = 0$. Il periodo T è l'intervallo di tempo necessario perché la f.e.m. compia un ciclo completo della sua variazione, perché cioè la fase vari di 2π . La pulsazione ω (che si misura in rad/sec) fornisce la variazione della fase nell'unità di tempo. La frequenza ν dà il numero di cicli di variazione nell'unità di tempo; essa si misura in hertz (1 Hz = 1 ciclo/sec) ed è legata a T ed ω dalle relazioni

$$(35) \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

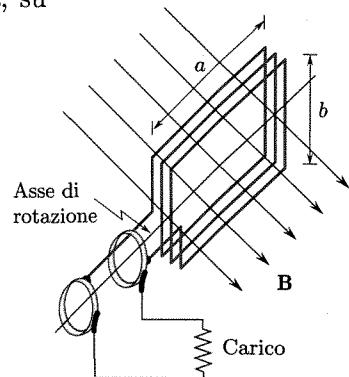


Fig. 6.13

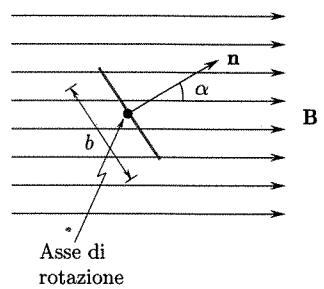


Fig. 6.14

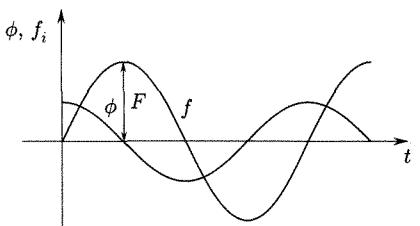


Fig. 6.15

⁽⁶⁾ La scelta del verso della normale fissa il verso positivo per le f.e.m. e le correnti nella bobina (regola della vite destra).

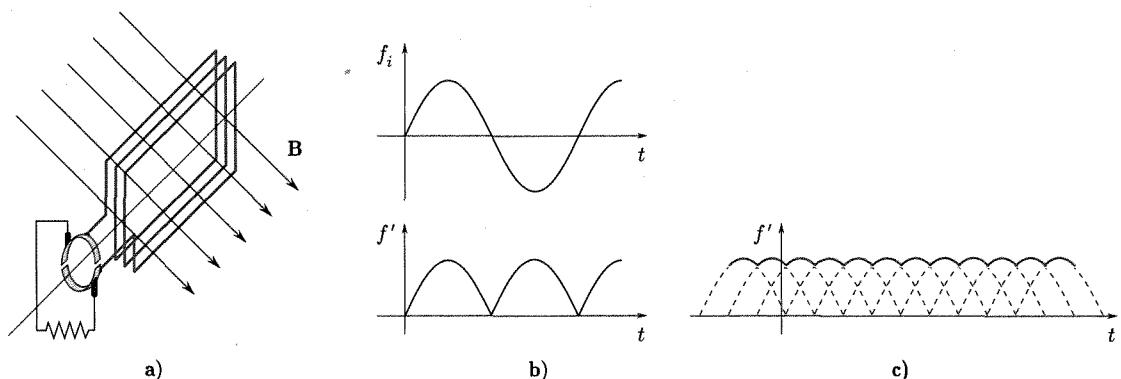


Fig. 6.16

La macchina che genera una f.e.m. alternata secondo lo schema descritto ha ricevuto il nome di alternatore.

È facile modificare lo schema di un alternatore per ottenere ai capi del circuito esterno una f.e.m. (ed una corrente) che pur variando nel tempo non inverta la sua direzione come invece accade ad intervalli di mezzo periodo nel caso del circuito collegato all'alternatore visto precedentemente. Si consideri lo schema in figura 6.16 a. Gli estremi della bobina rotante nel campo magnetico uniforme sono portati a due segmenti di un unico anello, isolati elettricamente fra loro. Un tale dispositivo, chiamato collettore, ha il compito di commutare ogni mezzo periodo i collegamenti fra la spira ed il circuito esterno in maniera che nonostante che la f.e.m. indotta (f_i) nella bobina sia sempre sinusoidale (come per l'alternatore) la f.e.m. (f') ai capi del circuito esterno è sempre nella stessa direzione (pulsante), come indicato nella figura 6.16b.

Nelle realizzazioni tecniche di tali generatori (dinamo) si dispongono molte bobine sulla parte mobile (rotore) ed esse sono spostate angolarmente fra loro; gli estremi di ciascuna bobina sono collegati ad elementi di un collettore più complesso sul quale appoggiano due contatti strisciati (spazzole). Al circuito esterno viene applicato istante per istante una f.e.m. che è la somma di f.e.m. pulsanti dovute alla induzione nelle varie bobine: le singole f.e.m. sono sfasate per la diversa posizione delle bobine nel campo magnetico allo stesso istante e la f.e.m. risultante, pur presentando piccole fluttuazioni, può considerarsi praticamente costante (fig. 6.16c).

Motori. Se in una macchina realizzata secondo lo schema ora descritto si invia dall'esterno attraverso le spazzole una corrente continua, viene ad esercitarsi una forza sui singoli conduttori del rotore e ne risulta una coppia applicata al rotore. Energia elettrica viene trasformata in energia meccanica ed al posto di un generatore si ha un motore in.c.c.

Si osservi che il moto del rotore nel campo magnetico conduce ad induzione e.m. negli avvolgimenti del rotore stesso e la f.e.m. indotta ha direzione opposta a quella della corrente (inviata dall'esterno) negli avvolgimenti.

Tra la d.d.p. applicata dall'esterno (V), la f.e.m. indotta f_i , la corrente I_a e la resistenza vale la relazione

$$(36) \quad V = f_i + RI_a.$$

In genere RI_a è molto piccola rispetto a f_i (qualche per cento). Durante il funzionamento del motore, se ad un certo istante aumenta il carico, il rotore rallenta e di conseguenza f_i diminuisce, I_a e la coppia aumentano.

I motori in.c.c. hanno caratteristiche particolarmente favorevoli per quel che riguarda la coppia alla partenza da fermo e la elasticità, cioè la possibilità di adattarsi rapidamente alle variazioni del carico (7). Essi sono molto usati nella tecnica.

Misura di B. Si abbia in un campo magnetico (fig. 6.17), una bobina di spire uguali e molto ravvicinate e, per semplicità espositiva, supponiamo che il piano mediano

(7) Per tali ragioni sono molto usati nella trazione elettrica (treni, tram).

della bobina sia normale a \mathbf{B} . La bobina è collegata per mezzo di lunghi e flessibili conduttori ad un galvanometro balistico che (cap. 4, par. 4.10) consente di determinare brevi impulsi di corrente che eventualmente lo attraversino

$$q = \int_0^\infty i dt.$$

Il flusso concatenato con la bobina sia $\phi_1(\mathbf{B})$. Si estratta ora rapidamente la bobina portandola in una regione nella quale si conosce non esistere campo magnetico. Durante la variazione di flusso una corrente passa nel circuito. Se R è la resistenza (bobina + conduttori di collegamento + galvanometro) si scrive

$$(37) \quad i = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}.$$

Ne consegue che la quantità di elettricità in gioco nel circuito durante tutto il processo è

$$(38) \quad q = \int_0^\infty i dt = -\frac{1}{R} \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = -\frac{1}{R} (\phi_2 - \phi_1)$$

essendo ϕ_2 il flusso concatenato nella posizione finale; esso è, nello schema descritto, zero. Se quindi l'estrazione è rapida in modo che la quantità di elettricità sia messa in gioco in un tempo sufficientemente breve rispetto al periodo del galvanometro e l'equipaggio riceva l'impulso mentre è ancora fermo, la deviazione massima dell'equipaggio consente di determinare q e ϕ_1 .

Si noti che invece di estrarre la bobina la si può fare ruotare su se stessa di 180° in modo che sia

$$\phi_2 = -\phi_1$$

ed allora

$$(39) \quad q = \frac{2\phi_1}{R}.$$

Nel caso che non si sappia a priori la direzione di \mathbf{B} , questa può essere determinata ripetendo l'esperienza descritta con varie orientazioni della bobina fino a trovare quella per cui ϕ è massimo: \mathbf{B} è allora normale al piano della bobina.

La conoscenza di ϕ_{\max} consente di determinare il modulo medio di \mathbf{B} nella regione in cui si trova la bobina. Detta infatti S la superficie delle spire

$$(40) \quad \phi_{\max} = S B_{\text{medio}}.$$

Facendo la bobina sufficientemente piccola si può praticamente ottenere il valore di \mathbf{B} .

Correnti parassite. Consideriamo lo schema della figura 6.18. Un disco conduttore (per es. di alluminio) ruoti ed un campo magnetico agisca normalmente alla sua superficie su una porzione di esso. Se si considera il segmento OAB (fig. 6.18b) ed

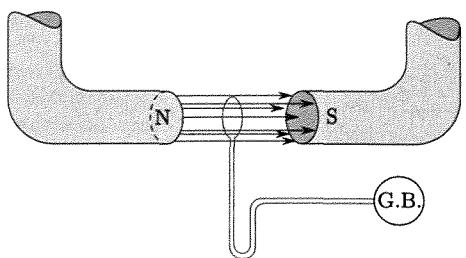


Fig. 6.17

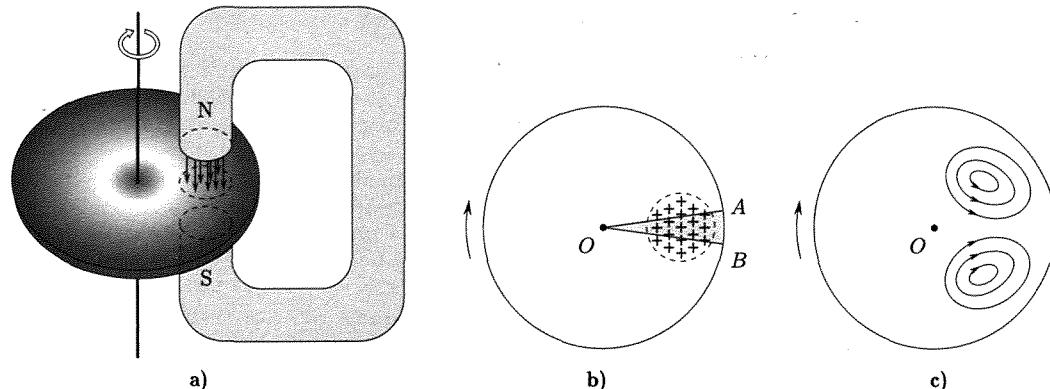


Fig. 6.18

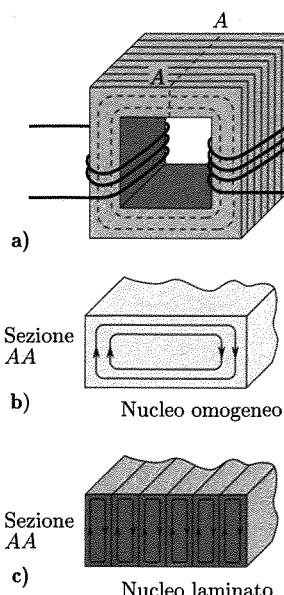


Fig. 6.19

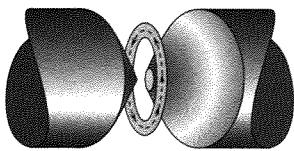


Fig. 6.20

il suo moto attraverso il campo, si comprende che una f.e.m. viene indotta in esso: si determinano nel disco correnti attraverso percorsi che contengono ciascuno un segmento (OAB) ove si genera la f.e.m. e linee di ritorno che si estendono nella regione del disco non sottoposta al campo magnetico. Nella figura 6.18c sono indicate qualitativamente alcune linee di corrente. Per la legge di Lenz la direzione delle correnti è tale da opporsi alla causa che produce il processo, cioè al moto del disco; le forze quindi che il campo magnetico esercita sulle correnti indotte tendono a frenare il disco. Si realizza così un *freno elettromagnetico*. Il passaggio delle correnti nel disco conduce a dissipazione di energia per effetto Joule e per tale ragione le correnti indotte in masse metalliche prendono il nome di *correnti parassite*.

Nelle macchine elettriche si hanno estese masse di materiali conduttori sottoposti a flussi magnetici variabili. Un esempio tipico è quello del trasformatore (vedi cap. 7, par. 7.10) nel quale (fig. 6.19) su un nucleo di materiale ferromagnetico sono disposti due avvolgimenti attraversati da correnti alternate.

Il flusso magnetico nel materiale ferromagnetico varia sinusoidalmente e correnti parassite sono presenti in tutto il suo volume. Per ridurre le perdite di energia per effetto Joule, si usa realizzare il nucleo ferromagnetico non come un unico blocco, ma mediante pacchi di sottili (0,5 mm) lamierini. Questi lamierini sono superficialmente ossidati e ciò produce un isolamento di ciascuno di essi nel nucleo: ciò porta di conseguenza che le correnti parassite sono confinate nei singoli lamierini. La lunghezza dei percorsi delle correnti parassite è enormemente aumentata (rispetto al blocco unico) (vedi figg. 6.19b e c); nei circuiti ove agiscono le f.e.m. indotte, quindi, le resistenze risultano fortemente aumentate e le dissipazioni ridotte.

Betatrone. È una macchina per accelerare elettroni fino a portarli a velocità molto prossime a quelle della luce: in un betatrone da 100 MeV gli elettronni sono portati alla velocità di 0,99986 c.

Lo schema di un betatrone è indicato in figura 6.20. Un potente elettromagnete ha fra i poli, configurati opportunamente (in modo da avere un campo magnetico di forma particolare), una ciambella toroidale evacuata. In essa ad intervalli regolari vengono immessi gruppi di elettroni. Nell'avvolgimento dell'elettromagnete è inviata una corrente alternata in modo che il flusso nell'interferro vari sinusoidalmente (fig. 6.21).

Per le leggi dell'induzione elettromagnetica si crea nella regione della ciambella un campo elettrico (E_i) che è quello che viene usato per portare gli elettroni immessi nella cavità da velocità relativamente basse fino a quelle citate. Si osservi che poiché il campo indotto è alternativo, come ϕ , esso è in condizioni di accelerare gli elettroni solo in un quarto di periodo, cioè mentre passa dal valore zero al valore massimo. Occorre quindi nella macchina predisporre organi che consentano la immissione e la estrazione del pacchetto di elettroni in fasi opportune del ciclo della corrente di alimentazione del magnete. La intensità della corrente va inoltre scelta in modo che si abbia l'effetto desiderato (portare gli elettroni ad una data velocità) in un quarto di periodo. La forma del campo fornito dal magnete va studiata in modo particolare per tenere gli elettronni su una unica orbita durante tutti i giri necessari (nel quarto di periodo della corrente) per la accelerazione.

Vogliamo sottolineare come questa macchina dimostri in maniera chiara la esistenza reale del campo E_i nella regione ove B varia.

Diamagnetismo. Quando una sostanza viene introdotta in un campo di induzione B il moto *orbitale* di ciascun elettrone viene alterato; è possibile mostrare che ne consegue una variazione del momento della quantità di moto di ciascun atomo e si origina un momento magnetico indotto proporzionale a B ma diretto in senso opposto. È questa la spiegazione del diamagnetismo. Questo risultato può essere ottenuto considerando il moto di un elettrone intorno al nucleo in un atomo quando è presente anche la forza di Lorentz dovuta al campo magnetico applicato ed è stato discusso nel cap. 5 par. 5.10. Diamo qui una descrizione che mette in evidenza la natura di reazione elettromagnetica del processo.

Per semplicità si consideri un elettrone ($q = -e$) che si muova su un'orbita circolare intorno ad un nucleo di carica $+Q$ per esempio nel verso indicato in figura 6.22a. L'accelerazione centripeta $\omega_0^2 r$ è prodotta dalla forza coulombiana

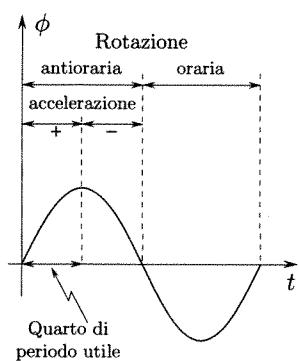


Fig. 6.21

$$(41) \quad \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega_0^2 r$$

essendo ω_0 la velocità angolare; il vettore ω_0 è normale al piano dell'orbita e diretto verso l'interno del foglio della figura. Supponiamo che venga applicato un campo di induzione B perpendicolare al piano dell'orbita, per esempio nel verso indicato in figura 6.22b (verso l'interno del foglio) cioè nello stesso verso di ω_0 . L'effetto di tale campo sull'elettrone è duplice. All'atto dell'applicazione del campo, durante la crescita di B , si produce un fenomeno di induzione elettromagnetica nella spira costituita dall'orbita in cui l'elettrone si muove; la variazione del flusso magnetico concatenato con tale spira induce una f.e.m. (il cui verso è per la legge di Lenz tale che la corrente conseguente origini un flusso che si opponga alla variazione del flusso concatenato) o quel che è lo stesso, origina un campo elettrico che accelera l'elettrone nella sua orbita. Allo stesso tempo una nuova forza agisce sull'elettrone, la forza di Lorentz: tale forza $[-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]$ è nel caso in oggetto diretta verso il nucleo ed ha modulo $e\omega rB$.

Il modulo del campo accelerante E per una variazione dB dell'induzione nel tempo dt può essere ricavato dalla relazione dell'induzione elettromagnetica

$$(42) \quad 2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

e risulta

$$(43) \quad E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

L'aumento totale di velocità angolare per effetto del passaggio del campo di induzione dal valore zero al valore B , qualora si supponga che l'elettrone rimanga sulla medesima orbita iniziale, può ottersi dall'integrale primo dell'impulso

$$(44) \quad m_e \Delta v = m_e r \Delta \omega = \int_0^B -eE dt = \int_0^B \frac{re}{2} dB = \frac{re}{2} B.$$

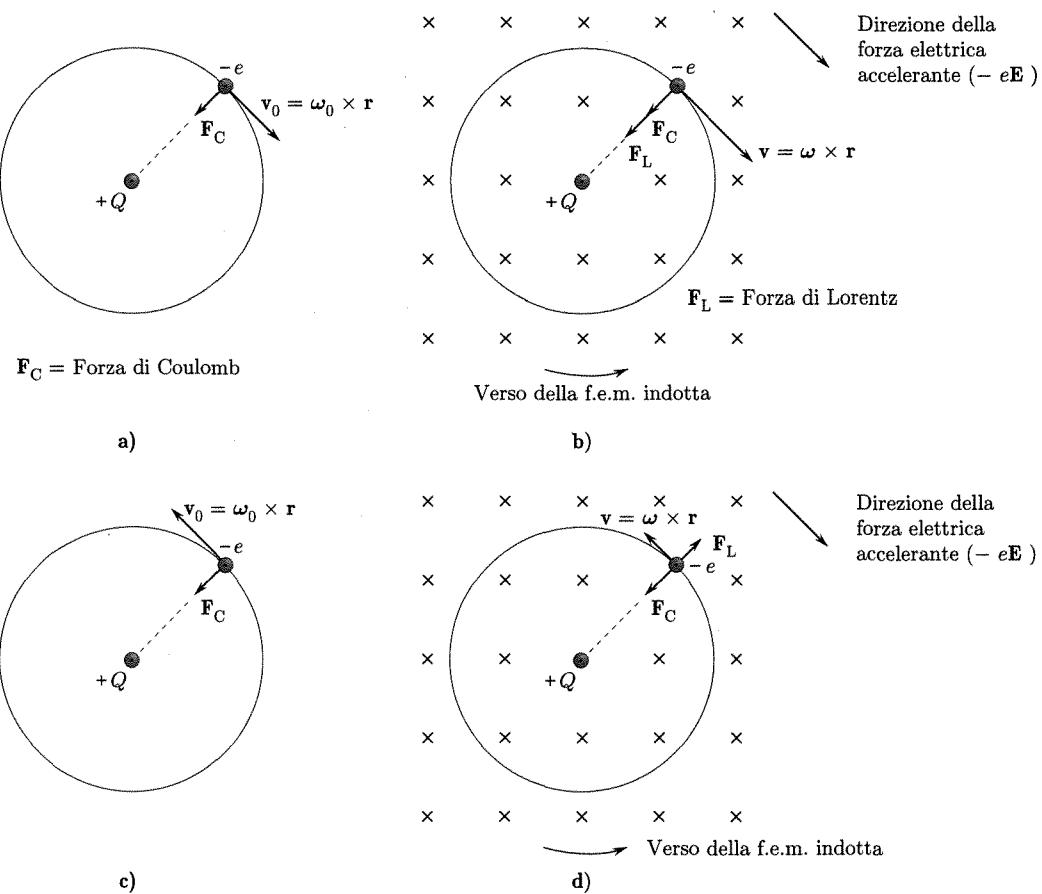


Fig. 6.22

Si ricava

$$(45) \quad \Delta\omega = \frac{e}{2m_e} B.$$

Vettorialmente

$$(46) \quad \Delta\omega = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}.$$

Per costringere l'elettrone a rimanere sulla stessa orbita nonostante che la velocità di rotazione sia mutata, occorre che la forza centripeta venga anche essa aumentata. L'incremento necessario risulta ⁽⁸⁾

$$(47) \quad m_e(\omega_0 + \Delta\omega)^2 r - m_e\omega_0^2 r \simeq 2m_e r \omega_0 \Delta\omega = er\omega_0 B$$

ed è proprio pari alla forza di Lorentz.

Si vede quindi che l'elettrone rimane sull'orbita originaria ma la sua velocità di rotazione è aumentata di $\Delta\omega$ (precessione ⁽⁹⁾ di Larmor). Di conseguenza il momento della quantità di moto ha subito una variazione

$$(48) \quad \Delta\mathbf{b} = m_e(\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{v}) = m_e r^2 \Delta\omega = \frac{er^2}{2} \mathbf{B}$$

e il momento magnetico ha subito la variazione

$$(49) \quad \Delta\mathbf{m} = \gamma \Delta\mathbf{b} = -\frac{\mu_0 e^2 r^2}{4m_e} \mathbf{B}.$$

La variazione di \mathbf{m} è proporzionale a \mathbf{B} ma in verso contrario. Si osservi che la presenza del segno meno è una conseguenza della legge di Lenz: l'aumento della velocità di rotazione dell'elettrone corrisponde ad una corrente di induzione il cui flusso contrasta la variazione del flusso concatenato con l'orbita conseguente alla applicazione del campo \mathbf{B} . Le considerazioni ora svolte si possono ripetere per il caso (fig. 6.22c) in cui l'elettrone si muova originariamente sull'orbita in senso antiorario (ω_0 è diretto verso l'esterno del foglio). In tal caso (fig. 6.22d) l'applicazione del campo \mathbf{B} rallenta il moto ma le variazioni $\Delta\mathbf{b}$ e $\Delta\mathbf{m}$ sono ancora date dalle (48) e (49).

Il moto dell'elettrone in presenza del campo \mathbf{B} è il risultante di quello preesistente e di un moto di rotazione (di precessione) intorno alla direzione di \mathbf{B} con velocità $\Delta\omega$ data dalla (46). Si conclude quindi che indifferentemente dal verso del moto di rotazione iniziale dell'elettrone, l'applicazione del campo \mathbf{B} normalmente al piano dell'orbita conduce ad una variazione del moto dell'elettrone consistente nella sovrapposizione al moto preesistente di un lento moto di precessione intorno alla direzione di \mathbf{B} con velocità

$$(50) \quad \omega_L = \Delta\omega = \frac{eB}{2m_e}$$

6.6. FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA IN CONDIZIONI QUASI STAZIONARIE. COEFFICIENTI DI MUTUA INDUZIONE E AUTOINDUZIONE

Consideriamo il caso in cui il flusso che si concatena con un circuito sia creato da una corrente in un circuito che può essere diverso o lo stesso del primo (fig. 6.23a e b).

Abbiamo visto (cap. 4, par. 4.17) che in condizioni statiche se il mezzo ha permeabilità costante i flussi concatenati sono proporzionali alle correnti che creano il campo magnetostatico. Più precisamente per la situazione

⁽⁸⁾ È sempre $\Delta\omega \ll \omega_0$ (vedi seguito).

⁽⁹⁾ Vedi cap. 5, par. 5.10b.

zione di figura 6.23a si ha per il flusso ϕ_2 (o ϕ_1) creato da i_1 (o i_2)

$$(51) \quad \phi_2(\mathbf{B}) = L_{21}i_1 = Mi_1$$

$$(52) \quad \phi_1(\mathbf{B}) = L_{12}i_2 = Mi_2 .$$

Coefficienti di mutua induzione

$$\phi_1 = Mi_2$$

$$\phi_2 = Mi_1$$

Per la situazione di figura 6.23 b si ha

$$(53) \quad \phi = L_{11}i = Li .$$

Coefficiente di autoinduzione

$$\phi = Li$$

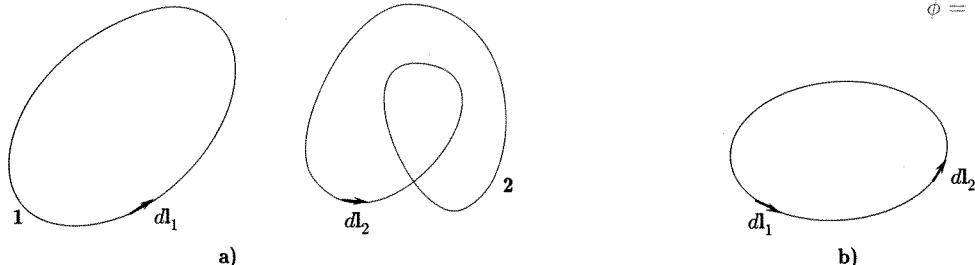


Fig. 6.23

I coefficienti di mutua induzione (M) e di autoinduzione (L) dipendono dalla permeabilità del mezzo e da parametri geometrici che fissano la configurazione del sistema⁽¹⁰⁾.

Supponiamo ora che la corrente che nelle situazioni di figura 6.23a e b crea il campo magnetico vari nel tempo, ma questo avvenga in maniera abbastanza lenta in modo che si possa ammettere che il campo magnetico nella regione che interessa (ove si trova il circuito indotto) sia in ogni punto praticamente pari a quello che si avrebbe in condizioni statiche per una corrente pari al valore istantaneo della corrente⁽¹¹⁾: quando questa ipotesi è verificata si parla di condizioni quasi stazionarie⁽¹²⁾.

Nel presente paragrafo e nei successivi di questo capitolo noi supponiamo valida la ipotesi ora detta. Si ha allora in un mezzo a permeabilità costante⁽¹³⁾ che la f.e.m. indotta in un circuito in conseguenza di una variazione della corrente nell'altro (fig. 6.23a) vale

$$(54) \quad f_{i,1} = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$(55) \quad f_{i,2} = -M \frac{di_1}{dt}$$

Condizioni quasi-stazionarie

F.e.m. indotta in un circuito in conseguenza della variazione della corrente nell'altro

⁽¹⁰⁾ I coefficienti M ed L sono definiti quindi solo se $\mu = \text{cost}$. In realtà si trova utile il loro impiego anche nel caso di mezzi ferromagnetici ove $\mu = \mu(H) = \mu(i)$ purché nella applicazione specifica le correnti siano costanti oppure si abbia che, per le variazioni di i che interessano, la μ resti praticamente costante.

⁽¹¹⁾ Nell'ipotesi posta effetti dovuti alla velocità finita (c) di propagazione delle perturbazioni del campo elettromagnetico non hanno interesse, come se tale propagazione avvenisse con velocità infinita.

⁽¹²⁾ Rientrano in questi limiti i processi a frequenze di decine, centinaia e migliaia di hertz; in particolare i processi alle frequenze delle correnti alternate normalmente usate (50-60 Hz).

⁽¹³⁾ Per mezzi a μ variabile con H ed i , vedi nota (10) precedente.

*F.e.m. autoindotta
in un circuito
in conseguenza della
variazione della corrente
nel circuito stesso*

e quella *autoindotta* (fig. 6.23b)

(56)

$$f_i = -L \frac{di}{dt}.$$

Queste relazioni consentono di dare una nuova definizione dei coefficienti M ed L accanto a quella che si deduce dalle (51) e (53) e che è già stata data nel cap. 4. Ricordiamo che tali coefficienti si misurano in henry = $\Omega \cdot \text{sec}$.

Il calcolo di M ed L va fatto in genere usando le formule di definizione del cap. 4 par. 4.17, modificate per tener conto del fatto che il mezzo, a permeabilità costante, possa essere diverso dal vuoto. Dalla (191) di quel capitolo e con riferimento alla figura 6.23a, b

$$(57) \quad M = L_{12} = L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{12}}$$

$$(58) \quad L = L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_1 \oint_1 \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{12}}.$$

Nella (58) dl_1 e dl_2 sono due elementi dello stesso circuito a distanza r_{12} fra loro.

In alcuni casi semplici può essere più facile determinare per altra via i flussi concatenati con un circuito in funzione della corrente che crea il campo magnetico e dedurre di conseguenza il parametro che interessa.

*Coefficiente di
autoinduzione per un
solenoido $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$*

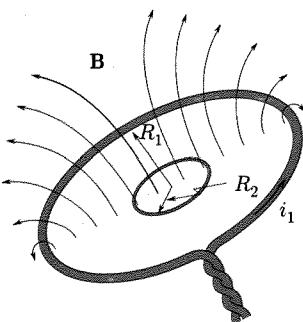


Fig. 6.24

*Coefficiente di mutua
induzione fra due spire
complanari concentriche*

$$M = \mu_0 \frac{\pi}{2} \frac{R_2^2}{R_1}$$

e quindi

(60)

$$\phi = NSB = NS \left(\mu_0 \frac{N}{l} i \right) = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}.$$

Si consideri ora, sempre in aria, il sistema di figura 6.24 formato da due spire concentriche e nello stesso piano; il campo creato da i_1 che attraversa la spira grande nella regione occupata dal secondo circuito, se questo è molto piccolo, può ritenersi costante e pari a quello che si ha al centro della spira in cui circola i_1 (cap. 4, par. 4.7)

(61)

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}.$$

Si ha quindi

(62)

$$\phi_2 = (\pi R_2^2) \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}$$

e

(63)

$$M = \mu_0 \frac{\pi}{2} \frac{R_2^2}{R_1}.$$

Se infine si hanno due solenoidi disposti come in figura 6.25 sul medesimo cilindro con passo diverso, ed uno di essi (per esempio il primo) è percorso da corrente, si ha che lo stesso flusso si concatena con ciascuna spira dei due avvolgimenti. Il campo magnetico nello spazio interno ai solenoidi vale

(64)

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1.$$

(14) Trascurando le disomogeneità del campo agli estremi.

Si ha quindi⁽¹⁵⁾

$$(65) \quad \phi_1 = N_1 SB = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S i_1$$

$$(66) \quad \phi_2 = N_2 SB = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S i_1$$

da cui

$$(67) \quad L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S$$

$$(68) \quad M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S .$$

Analogamente si deduce

$$(69) \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S .$$

Nello studio dei circuiti attraversati da corrente variabile, le f.e.m. di auto e mutua induzione hanno una grande importanza nel determinare l'andamento dei fenomeni. Queste f.e.m. vanno trattate al pari di altre eventualmente presenti (generatori tipo pile, alternatori ecc.) nelle espressioni che si deducono per i valori istantanei della corrente e delle f.e.m. dalle leggi di Kirchhoff.

Ogni elemento di circuito in quanto attraversato da corrente è immerso in un campo magnetico creato da tale corrente ed è caratterizzato da un coefficiente di autoinduzione. Mentre per alcuni elementi, come i conduttori rettilinei, tale coefficiente è piccolo e *di solito* trascurabile, esso assume un'importanza rilevante per avvolgimenti quali sono per esempio le bobine. Questi componenti circuitali pur possedendo una resistenza, sono essenzialmente caratterizzati dal coefficiente di autoinduzione (o induttanza) perché questo determina il loro comportamento nel circuito attraversato da corrente variabile.

Un elemento circuitale che agisce nel circuito per mezzo della autoinduzione prende il nome di induttore e viene indicato con il simbolo mostrato in figura 6.26.

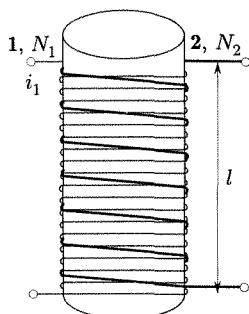


Fig. 6.25

Coefficiente di mutua
induzione fra due
solenoidi coassiali
 $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$

Induttore o induttanza

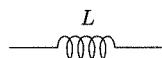


Fig. 6.26

■ 6.7. CIRCUITO RL

Consideriamo un circuito quale quello di figura 6.27a contenente una pila, una bobina, un rivelatore di corrente ed un interruttore. Lo schema del circuito è indicato nella figura 6.27b, avendo riunito in R la resistenza dei vari componenti del circuito, induttore compreso.

Se si chiude l'interruttore e si esamina l'andamento della corrente dopo un tempo sufficientemente lungo, si riscontra, come era da attendere, che la corrente ha raggiunto un valore costante, di regime, che vale in accordo a quanto visto per i circuiti in condizioni stazionarie

$$(70) \quad i = \frac{f}{R}$$

essendo f la f.e.m. della pila.

⁽¹⁵⁾ Si trascurano gli effetti alle estremità e si considera approssimativamente il campo uniforme dappertutto nei solenoidi.

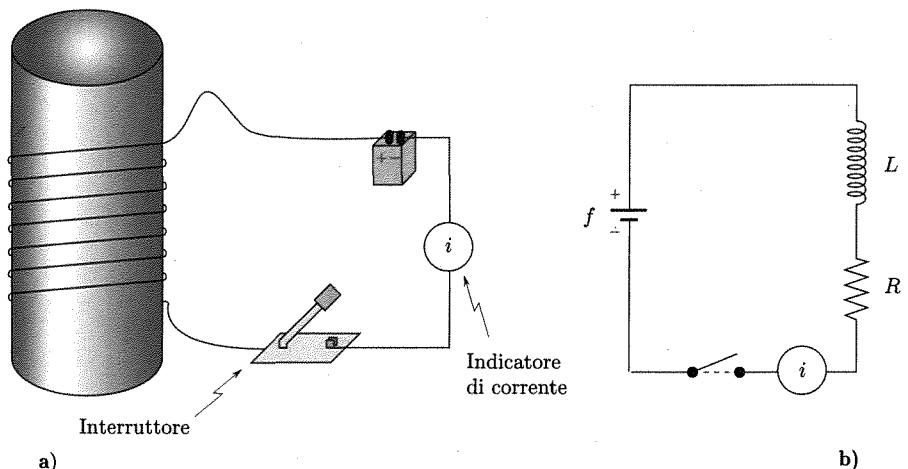


Fig. 6.27

Il passaggio dal valore zero, quando si chiude l'interruttore, a questo valore stazionario avviene con continuità in un transitorio che appunto vogliamo studiare.

In regime variabile i valori istantanei delle f.e.m. e delle correnti sono legati dalla relazione di Kirchhoff per la maglia. Preso come positivo il verso nel quale la pila spinge la corrente, la f.e.m. di autoinduzione è per la legge di Lenz diretta in verso opposto. Si ha

$$(71) \quad f - L \frac{di}{dt} = R i .$$

Questa equazione differenziale si integra facilmente.

Separando le variabili si ha

$$(72) \quad \frac{di}{f - Ri} = \frac{1}{L} dt$$

$$(73) \quad \int \frac{di}{f - Ri} = \frac{1}{L} t .$$

Ponendo $f - Ri = x$, si ha $-Rdi = dx$ e

$$(74) \quad \begin{aligned} \int \frac{di}{f - Ri} &= -\frac{1}{R} \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{R} \log x = \\ &= -\frac{1}{R} \log(f - Ri) . \end{aligned}$$

La soluzione generale della (71) è quindi

$$(75) \quad \begin{aligned} \log(f - Ri) &= -\frac{R}{L} t + \text{cost} \\ f - Ri &= \text{cost} e^{-R/Lt} . \end{aligned}$$

Tenendo presente che deve essere $i = 0$ per $t = 0$ si ottiene la soluzione cercata.

Si ha

Corrente nel transiente di chiusura

$$(76) \quad i(t) = \frac{f}{R} (1 - e^{-R/Lt}) .$$



Fig. 6.28

La corrente (fig. 6.28a) cresce esponenzialmente da zero al valore di regime. La rapidità con cui cresce dipende dalla costante

$$(77) \quad \tau = \frac{L}{R}$$

che evidentemente ha le dimensioni di un tempo e prende il nome di costante di tempo: essa rappresenta il tempo richiesto perché la corrente cresca da zero a $(1 - 1/e) = 0,63$ del suo valore finale⁽¹⁶⁾. Come si vede la induttanza ostacola la crescita della corrente e τ è proporzionale a L . Man mano che la corrente cresce viene creato il campo magnetico associato alla corrente; ciò richiede, come si vedrà nel prossimo paragrafo, parte dell'energia erogata dal generatore durante il transitorio.

Un transitorio analogo a quello esaminato per la chiusura del circuito si presenta nel caso che le condizioni stazionarie del circuito vengano perturbate eliminando la sorgente di f.e.m. (per esempio mediante un cortocircuito ai suoi capi). In tal caso la corrente deve passare con continuità dal valore di regime

$$i = \frac{f}{R}$$

(all'istante $t = 0$) al valore zero.

Durante il transitorio l'equazione del circuito si scrive

$$(78) \quad 0 - L \frac{di}{dt} = Ri .$$

Separando le variabili, risolvendo l'equazione e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$(79) \quad i = \frac{f}{R} e^{-t/\tau} .$$

La corrente decresce (fig. 6.28b) con la stessa costante di tempo del transitorio alla chiusura del circuito.

La stessa cosa avviene se invece di cortocircuitare il generatore si apre il circuito mediante l'interruttore. In questo caso la resistenza del circuito aumenta enormemente perché ora alla resistenza considerata prima si deve aggiungere la resistenza del tratto d'aria fra i contatti dell'interruttore o comunque la resistenza crescente che si manifesta nel momento in cui i due estremi dell'interruttore cominciano a staccarsi. In entrambi i casi la resistenza non è costante. Si può tuttavia vedere che se si considera una sorta di valor medio per questa resistenza, vale ancora approssimativamente la (79), con una costante di tempo molto più breve perché la resistenza è molto più grande.

⁽¹⁶⁾ Ponendo nella (76) $t = \tau$ si ha $i = f/R(1 - e^{-1}) = f/R(1 - 0,37)$.

■ 6.8. ENERGIA IN UN INDUTTORE. DENSITÀ DI ENERGIA NEL CAMPO MAGNETICO

Se si considera attentamente il transitorio quando il generatore nel circuito RL viene cortocircuitato (fig. 6.27b) energia viene dissipata nella resistenza per effetto Joule, e non v’è la pila; tale energia deve evidentemente provenire dal campo magnetico dell’induttore che diminuendo crea la f.e.m. di autoinduzione. Si tratta cioè dell’energia che in condizioni di regime si trovava immagazzinata nel campo magnetico e che viene consumata nel circuito durante il transitorio. Se si pone attenzione all’equazione del circuito (78) e si moltiplicano i due membri per il valore istantaneo della corrente (i) si ottiene per la potenza

$$(80) \quad -Li \frac{di}{dt} = Ri^2$$

e per l’energia dissipata nel tempo dt ,

$$(81) \quad d\mathcal{E} = Ri^2 dt = -Lidi.$$

L’energia che si trova nel campo magnetico dell’induttore è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2$$

L’energia dissipata in tutto il transitorio nel quale la corrente passa dal valore massimo ($i_{\max} = f/R$) a zero è

$$(82) \quad \mathcal{E} = - \int_{i_{\max}}^0 Li \, di = \frac{1}{2} Li_{\max}^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{f}{R} \right)^2.$$

Questa è quindi la energia che si trova nel campo magnetico associato all’induttore quando questo è attraversato dalla corrente i_{\max} .

Naturalmente questa energia è fornita dal generatore all’atto della chiusura del circuito, durante il transitorio in cui i cresce. Se infatti si moltiplica per i la (71) si ha per la potenza

$$(83) \quad fi = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

e per l’energia

$$(84) \quad fi \, dt = Ri^2 \, dt + Lidi.$$

Il termine a primo membro della (84) rappresenta l’energia fornita nell’intervallo dt dal generatore: essa è pari alla somma della energia dissipata per effetto Joule e di quella impiegata per far crescere la corrente vincendo la forza e.m. di autoinduzione. Quest’ultimo termine vale

$$(85) \quad Lidi.$$

ed è chiaro che se la corrente varia da 0 a f/R esso fornisce per l’energia esattamente il valore dell’energia messa a disposizione durante il transitorio in cui il generatore è cortocircuitato.

Si può quindi concludere che l’energia magnetica associata ad un induttore attraversato dalla corrente i vale

$$(86) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2.$$

Dalla espressione (86) si può passare a quella della densità di energia nel campo magnetico considerando il caso particolare di un induttore nel quale il campo magnetico è uniforme e confinato ad un volume ben preciso⁽¹⁷⁾.

Si consideri infatti il caso di un solenoide rettilineo di lunghezza molto grande in un mezzo a permeabilità costante, e poniamo l'attenzione ad un suo tratto di lunghezza l , lontano dagli estremi. La sezione sia S . Il campo magnetico esiste solo nell'interno del solenoide ed è uniforme: ciò porta di conseguenza che l'energia magnetica deve essere uniformemente ripartita nel volume lS . Tale energia è data dalla (86) se L è la induttanza del tratto l di avvolgimento. Si ha quindi per la densità di energia

$$(87) \quad w = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{lS}.$$

D'altra parte per il calcolo del coefficiente L del tratto l si può ripetere quanto è stato detto per tutto il solenoide.

Il campo nel solenoide vale

$$(88) \quad B = \mu ni$$

essendo n il numero di spire per unità di lunghezza. Si ha per il flusso concatenato con le spire del tratto l

$$(89) \quad \phi = ln(\mu ni)S = \mu ln^2 Si.$$

Ne segue

$$(90) \quad L = \mu ln^2 S.$$

Dalle (87) e (90) si ottiene

$$(91) \quad w = \frac{1}{2}\mu n^2 i^2$$

$$(92) \quad w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}.$$

Questa relazione, ricavata in un caso particolare, ha validità generale; è la medesima espressione già ottenuta nel cap. 4 par. 4.17 [eq. (208)]. Essa vale per mezzi a permeabilità costante⁽¹⁸⁾. Usando il vettore \mathbf{H} può anche essere scritta:

$$(93) \quad w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}.$$

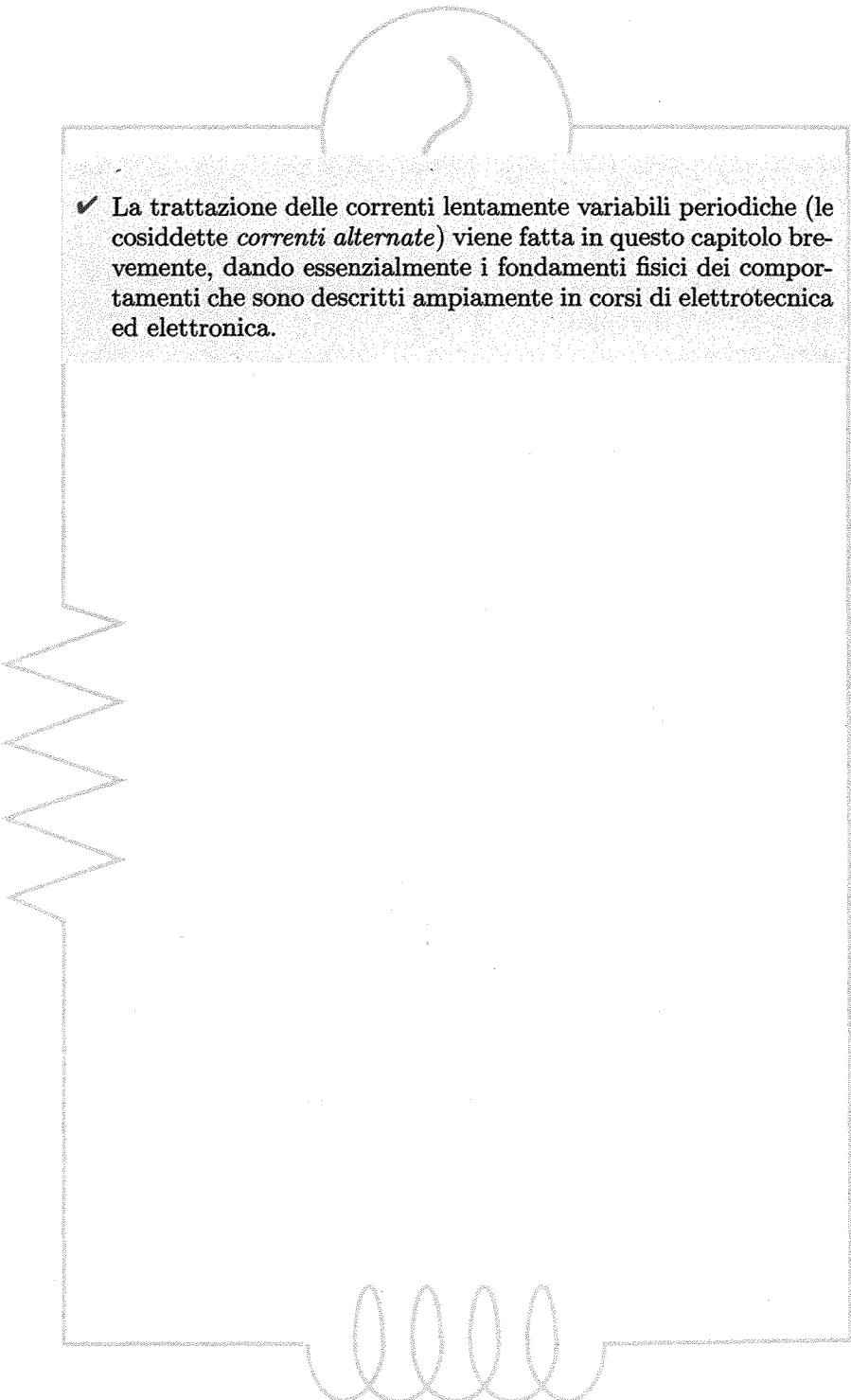
⁽¹⁷⁾ In maniera analoga a quella seguita per ritrovare la densità di energia in un campo elettrico $w = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ considerando l'energia immagazzinata in un condensatore piano (cap. 1, par. 1.19).

⁽¹⁸⁾ Nel caso che la permeabilità non sia costante, si trova per l'energia in corrispondenza ad un campo $B = \mu H$

$$(94) \quad w = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \int_0^B M dB.$$

LE CORRENTI ALTERNATE NELL'APPROSSIMAZIONE DI STATI QUASI-STAZIONARI

- ✓ La trattazione delle correnti lentamente variabili periodiche (le cosiddette *correnti alternate*) viene fatta in questo capitolo brevemente, dando essenzialmente i fondamenti fisici dei comportamenti che sono descritti ampiamente in corsi di elettrotecnica ed elettronica.



■ Le correnti alternate nell'approssimazione di stati quasi-stazionari

■ 7.1. INTRODUZIONE

La trattazione di un gran numero di processi di grande importanza pratica, quelli nei quali le grandezze elettriche e magnetiche variano lentamente nel tempo⁽¹⁾, può essere fatta in maniera semplice ricorrendo all'approssimazione di stati quasi-stazionari. Questa approssimazione può essere usata nel caso di correnti variabili finché l'intervallo di tempo richiesto perché le correnti subiscano variazioni apprezzabili è grande rispetto a quello necessario perché le perturbazioni elettromagnetiche si propaghino per una distanza dell'ordine delle dimensioni del dispositivo sperimentale in esame; ciò significa, nel caso di correnti sinusoidali, finché tutte le distanze che entrano nel particolare problema sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda della perturbazione elettromagnetica (v. più avanti). Non vi sono allora infatti da considerare sfasamenti della corrente nelle varie parti del circuito per effetto del tempo richiesto per la propagazione della perturbazione. Tutto va come se la velocità di propagazione fosse infinita e non vi fossero da considerare fenomeni di propagazione.

Nel presente capitolo noi vogliamo studiare il comportamento di circuiti attraversati da correnti lentamente variabili e, in ispecie, alternate di bassa frequenza (in Europa la frequenza è di 50 Hz).

Le correnti alternate a cui siamo particolarmente interessati sono quelle periodiche. Noi considereremo anzi esclusivamente il caso di correnti sinusoidali al quale, sulla base del teorema di Fourier⁽²⁾, si può ricondurre il caso generale di correnti comunque variabili nel tempo (periodiche non sinusoidali, impulsive ecc.) nei sistemi lineari ai quali noi di norma ci riferiremo.

I circuiti che prenderemo in considerazione sono formati, nel caso generale, da uno o più generatori e da elementi caratterizzati dai parametri: resistenza, auto o mutua induttanza, capacità. In genere lo stesso elemento possiede caratteristiche che per la loro descrizione richiedono più di uno di questi parametri; pure noi spesso parleremo di resistenza pura, induttanza pura, capacità pura intendendo in tal maniera di riferirci ad un elemento per la cui caratterizzazione uno dei parametri diviene preminente rispetto agli altri.

⁽¹⁾ Ciò sarà meglio precisato in seguito. Si tratta di processi originati da correnti in circuiti costituiti essenzialmente, oltre che da generatori, da conduttori filiformi (resistori ed induttori) e da condensatori di piccolo spessore.

⁽²⁾ Si veda il vol. I, cap. 9, par. 9.4.

Gli elementi circuituali possono essere a costanti concentrate od a costanti distribuite: un condensatore a piastre, un induttore costituito da un avvolgimento sono elementi a costanti concentrate; la capacità esistente tra due diversi fili del circuito, l'induttanza propria di un conduttore filiforme corrispondono ad elementi a costanti distribuite. Noi in questo capitolo considereremo essenzialmente elementi a costanti concentrate⁽³⁾.

Vogliamo aggiungere che nei riguardi delle induttanze la definizione dei coefficienti di auto e di mutua induzione richiede che il mezzo sia a permeabilità costante. Noi supporremo quindi che questa circostanza sia soddisfatta, cioè che il mezzo sia di norma diamagnetico o paramagnetico. Come si è già detto (cap. 6, par. 6.6) possiamo con buona approssimazione trattare nella stessa maniera il caso in cui sostanze ferromagnetiche siano presenti [$\mu = \mu(B) = \mu(i)$] purché le variazioni di corrente siano sufficientemente piccole in modo da potere assumere $\mu = \text{cost.}$

A un circuito in condizioni quasi stazionarie si possono applicare le leggi di Kirchhoff stabilite per il caso stazionario purché si usino i valori istantanei delle correnti, delle f.e.m. e delle differenze di potenziale. Naturalmente fra le f.e.m. vanno portate in conto non solo quelle di generatori che trasformano in energia elettrica energia di altra specie, ma anche quelle prodotte dall'induzione elettromagnetica o le d.d.p. dovute a condensatori carichi.

Queste leggi sono state già applicate in alcuni casi di regimi non stazionari e saranno presto usate nel caso di circuiti in corrente alternata sinusoidale.

Prima di far ciò introdurremo nel prossimo paragrafo alcuni metodi di rappresentazione di grandezze sinusoidali.

Ricordiamo qui infine la terminologia usata per grandezze alternative sinusoidali. Riferendosi ad una f.e.m. e ad una corrente agenti in un circuito, si scrive

$$(1) \quad f = f_M \sin \omega t$$

$$(2) \quad i = i_M \sin(\omega t \pm \varphi)$$

f_M ed i_M sono i valori massimi delle grandezze f ed i , $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione (rad/sec), ν la frequenza (hertz), T il periodo. La fase iniziale è stata posta zero per la f ⁽⁴⁾ e $\pm\varphi$ per la i : se si scrive⁽⁵⁾ $(\omega t + \varphi)$, cioè la fase iniziale è positiva, significa che la corrente è in anticipo rispetto alla f.e.m.; se si scrive $(\omega t - \varphi)$, fase iniziale negativa, significa che la i è in ritardo rispetto ad f . La fase istantanea $(\omega t \pm \varphi)$ e quella iniziale sono espresse in radianti.

Grandezze efficaci

Nel campo delle correnti alternate in generale si usano molto le grandezze efficaci. Si definisce per valore efficace, i_e , dell'intensità di una corrente variabile periodicamente in modo qualsiasi, il valore dell'intensità di

⁽³⁾ I valori dei parametri (capacità, induttanza) negli elementi a costanti distribuite sono in genere (nei circuiti comuni per basse frequenze) molto più piccoli di quelli degli elementi a costanti concentrate. Gli elementi a costanti distribuite assumono particolare importanza nei circuiti a frequenze elevate per le quali la trattazione approssimata che qui si compie non è di solito valida.

⁽⁴⁾ Ciò può sempre farsi scegliendo opportunamente l'origine dei tempi. Non v'è tuttavia difficoltà ad introdurre anche nella (1) una fase iniziale come nella (2).

⁽⁵⁾ Supponendo φ positivo.

una corrente continua che passando in una resistenza R dissipia per effetto Joule, nell'intervallo di tempo di un periodo della corrente periodica, la stessa energia che viene dissipata da tale corrente nella stessa resistenza. È facile calcolare i_e . Infatti, per quanto si è detto sui sistemi in condizioni quasi stazionarie, la energia dissipata dalla corrente periodica nella resistenza R in un tempo dt è

$$i^2 R dt$$

e quindi

$$i_e^2 RT = \int_0^T i^2 R dt$$

$$(3) \quad i_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{i^2}.$$

La grandezza efficace della intensità della corrente è il valore quadratico medio dell'intensità istantanea, cioè la radice quadrata della media dei quadrati dei valori assunti dalla corrente in un periodo.

Nel caso di correnti alternate sinusoidali, sostituendo la (2) nella (3) si ha per l'intensità efficace⁽⁶⁾

$$(4) \quad i_e = \frac{i_M}{\sqrt{2}}.$$

La definizione di grandezza efficace viene estesa dalla intensità di corrente ad altre grandezze periodiche. Così per esempio nel caso di f.e.m. sinusoidali (1)

$$(6) \quad f_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt} = \frac{f_M}{\sqrt{2}}.$$

Nel caso di grandezze periodiche non sinusoidali il coefficiente di proporzionalità tra valori efficaci e valori massimi (il cosiddetto coefficiente di forma) assume valori diversi da quello $1/\sqrt{2}$ valido per grandezze sinusoidali. Sta comunque di fatto che valori efficaci e valori massimi sono sempre proporzionali fra loro. Nella pratica si usa generalmente riferirsi ai primi, in quanto caratterizzanti l'energia posta in gioco dalla corrente; ai valori massimi si fa invece riferimento nelle questioni riguardanti problemi di isolamento.

Per correnti sinusoidali è
 $i_e = \frac{i_M}{\sqrt{2}}$

■ 7.2. METODI DI RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE SINUSOIDALI

Nello studio di grandezze alternative sinusoidali occorre spesso considerare, nello stesso processo fisico, varie grandezze omogenee o non omogenee presenti contemporaneamente.

⁽⁶⁾ Si osservi che la media dei valori assunti da i in un periodo

$$(5) \quad \bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$$

è, per una corrente sinusoidale, nulla.

Si può per esempio trattare di intensità di corrente del tipo

$$(7) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi),$$

di differenze di potenziale

$$(8) \quad v = v_M \sin(\omega t - \varphi),$$

o di altre grandezze. L'andamento dei processi dipende in maniera essenziale dai parametri che definiscono ciascuna grandezza: supponendo di avere a che fare con grandezze alternative della stessa frequenza, questi parametri sono le ampiezze (i_M, v_M , ecc.) e le fasi iniziali.

Lo studio dei singoli problemi può essere fatto scrivendo le relazioni fra le varie grandezze fisiche in gioco e conducendo i calcoli con l'aiuto della trigonometria: questi calcoli sono, tranne nei casi più elementari, lunghi e noiosi. Conviene perciò trarre profitto da alcuni metodi di rappresentazione delle grandezze sinusoidali mediante i quali sono più facilmente poste in evidenza le ampiezze e le fasi delle varie grandezze, la loro dipendenza dai parametri caratteristici del circuito e che si prestano ad una più rapida esecuzione delle operazioni matematiche fra grandezze diverse. Questi metodi sono quello dei diagrammi vettoriali e quello della rappresentazione delle grandezze sinusoidali mediante numeri complessi.

a. Metodo dei diagrammi vettoriali

Come già altre volte abbiamo visto [moti armonici di particelle di un mezzo elastico (vol. I, cap. 9, par. 9.6)] una grandezza sinusoidale può essere completamente rappresentata mediante la proiezione su un asse di un opportuno vettore ruotante. Per concretezza si abbia per esempio una grandezza sinusoidale

$$(9) \quad A = A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

e consideriamo un vettore di modulo A_M che ruoti nel piano xy (fig. 7.1) intorno all'origine con velocità ω in verso antiorario e che si trovi all'istante $t = 0$ nella posizione determinata dall'angolo φ fra vettore ed asse x . La rappresentazione grafica viene fatta considerando il vettore all'istante $t = 0$ perché in tal modo si rappresenta facilmente la fase iniziale φ .

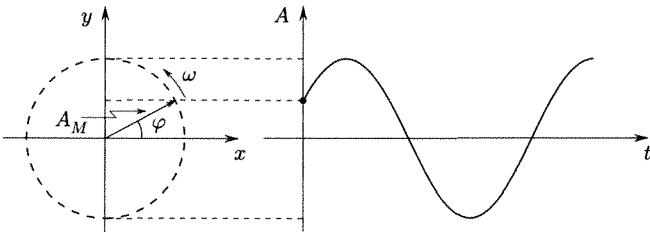


Fig. 7.1

Se si considera la proiezione di tale vettore sull'asse y , essa vale appunto

$$A = A_M \sin(\omega t + \varphi).$$

Nel caso (fig. 7.2) che due o più grandezze, omogenee o no (per es. una intensità di corrente ed una differenza di potenziale) della stessa frequenza (sincrone), siano presenti, la rappresentazione di ciascuna di esse mediante un vettore nella maniera indicata fissa immediatamente la fase di ciascuna grandezza rispetto alle altre e mostra le ampiezze.

Un vantaggio molto rilevante della rappresentazione di grandezze sinusoidali mediante vettori si ha nella maniera con cui si può calcolare la somma (o la differenza) di due (o più) grandezze omogenee della stessa frequenza: la somma di due grandezze sinusoidali omogenee ha come vettore rappresentativo nel diagramma dei vettori un vettore che è somma dei vettori rappresentativi delle due grandezze. Questo risultato è evidente dalla costruzione della figura 7.3. I vettori ⁽⁷⁾ A e B

⁽⁷⁾ Indichiamo qui in questo modo i vettori rappresentativi delle grandezze sinusoidali A e B. Spesso ci si limita ad indicare accanto ad ogni vettore rappresentativo la grandezza che rappresenta, o più semplicemente la sua ampiezza (che è il modulo del vettore).

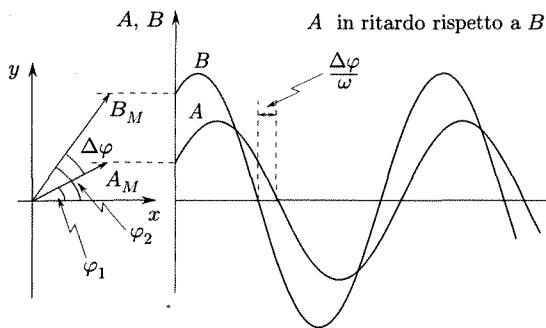


Fig. 7.2

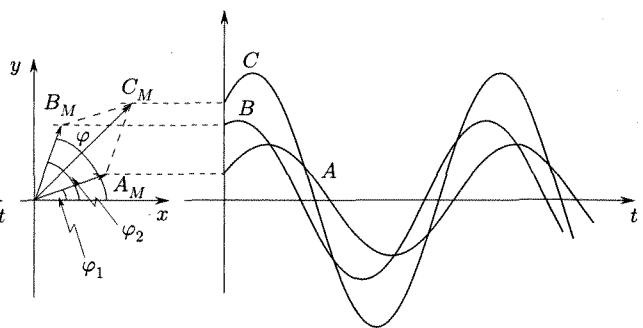


Fig. 7.3

rappresentino per esempio grandezze omogenee e sincrone

$$(10) \quad A = A_M \sin(\omega t + \varphi_1), \quad B = B_M \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Il vettore somma

$$(11) \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

che ruota con la stessa velocità ω , ha una proiezione su y che, istante per istante, è la somma delle proiezioni di \mathbf{A} e \mathbf{B} . Tale proiezione quindi vale

$$(12) \quad C = A_M \sin(\omega t + \varphi_1) + B_M \sin(\omega t + \varphi_2) = C_M \sin(\omega t + \varphi).$$

La costruzione consente di determinare immediatamente la ampiezza C_M e la fase iniziale φ della grandezza sinusoidale risultante (fig. 7.4)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_M^2 = A_M^2 + B_M^2 - 2A_M B_M \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] \\ = A_M^2 + B_M^2 - 2A_M B_M \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \tan \varphi = \frac{A_M \sin \varphi_1 + B_M \sin \varphi_2}{A_M \cos \varphi_1 + B_M \cos \varphi_2} \end{array} \right.$$

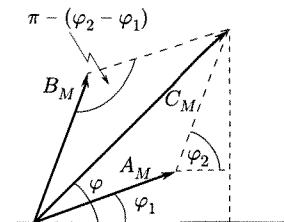


Fig. 7.4

Si supponga ora di avere una grandezza sinusoidale (9)

$$A = A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

e il suo vettore rappresentativo.

Si consideri la grandezza che della A è la derivata rispetto al tempo

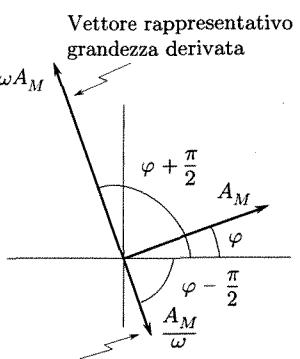
$$(14) \quad \frac{dA}{dt} = A_M \omega \cos(\omega t + \varphi) = A_M \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

essa è una grandezza sinusoidale la cui ampiezza è quella della grandezza di partenza A_M moltiplicata per ω , e la cui fase iniziale è $(\varphi + \pi/2)$. Nel diagramma dei vettori essa è rappresentata da un vettore di modulo ωA_M in anticipo di $\pi/2$ rad (fig. 7.5) rispetto al vettore rappresentativo della grandezza A . Analogamente, se si considera la grandezza integrale

$$(15) \quad \int A_M \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{A_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A_M}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

essa è una grandezza sinusoidale di ampiezza A_M/ω e fase iniziale $(\varphi - \pi/2)$. Essa è rappresentata da un vettore di modulo A_M/ω in ritardo di $\pi/2$ rad rispetto al vettore rappresentativo della grandezza data.

È bene sottolineare che la rappresentazione di grandezze sinusoidali mediante vettori nel piano prescinde dalla natura vettoriale o meno delle grandezze in esame: nel caso che le grandezze siano vettori (per es. l'intensità del campo elettrico, o l'induzione magnetica) la rappresentazione di cui stiamo discutendo si applica esclusivamente per esprimere le variazioni nel tempo dei moduli e delle fasi e non prende in considerazione le caratteristiche vettoriali delle grandezze. Non si confonda il carattere vettoriale posseduto dall'ente che viene associato ad una grandezza (scalare) sinusoidale nella rappresentazione descritta con la eventuale natura vettoriale della grandezza in esame.



Vettore rappresentativo
grandezza derivata
Vettore rappresentativo
grandezza integrale

Fig. 7.5

Si noti infine che se invece di considerare la proiezione sull'asse y dei vettori rotanti si considera quella sull'asse x , si ha il modo di rappresentare funzioni del tipo

$$(16) \quad A' = A_M \cos(\omega t + \varphi) = A_M \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

È quindi nella sostanza indifferente la scelta di considerare le proiezioni sull'asse y o sull'asse x , equivalendo ad una variazione di $\pi/2$ rad della fase iniziale; nello studio di un problema tuttavia la scelta va fatta all'inizio e mantenuta in tutta la trattazione.

Vogliamo infine notare che spesso nell'uso del metodo ora illustrato i vettori rappresentativi delle grandezze sinusoidali (vettore rotante di modulo A_M) vengono contraddistinti con il simbolo della grandezza che rappresentano (A); il vettore rappresentativo inoltre può anche essere preso avente modulo pari al valore efficace della grandezza sinusoidale (proporzionale ad A_M).

b. Metodo della rappresentazione complessa

La base di questo metodo si trova nella relazione di Eulero

$$(17) \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

(essendo $\sqrt{-1} = j$) e nella rappresentazione dei numeri complessi in un piano. Si può nella trattazione dei problemi *sostituire* (fig. 7.6) ad una *funzione* (9)

$$A = A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

la *funzione*⁽⁸⁾

$$(18) \quad A = A_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

convenendo di considerare solamente il coefficiente della parte immaginaria

$$(19) \quad A = \Re[A_M e^{j(\omega t + \varphi)}] = \Re(A).$$

Nel caso che si abbia la funzione

$$(20) \quad A' = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

si può ancora sostituire ad essa la funzione (18) convenendo di considerare solo la parte reale

$$(21) \quad A' = \Re[A_M e^{j(\omega t + \varphi)}] = \Re(A).$$

La scelta, se considerare la parte reale od il coefficiente della parte immaginaria, per la rappresentazione delle funzioni sinusoidali in un problema va fatta all'inizio della sua trattazione.

È opportuno scrivere il numero complesso che rappresenta una funzione sinusoidale separando, nella fase, la fase iniziale (φ) da quella (ωt) che varia con il tempo

$$(22) \quad A = a + jb = A_M e^{j(\omega t + \varphi)} = (A_M e^{j\varphi}) e^{j\omega t} = A_M e^{j\omega t}.$$

La espressione

$$(23) \quad A_M = A_M e^{j\varphi}$$

è un numero complesso che prende il nome di *ampiezza complessa* della funzione sinusoidale considerata (A). La sua conoscenza consente di determinare ad ogni istante il valore della funzione A mediante le seguenti operazioni:

a. si moltipichi A_M per $e^{j\omega t}$ ottenendo A

⁽⁸⁾ Quando ha interesse porre l'attenzione sulle grandezze efficaci (A_e) si può scrivere

$$A = A_e \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Nelle relazioni fra grandezze sinusoidali (rappresentate da numeri complessi) che considereremo, tutti i termini hanno allora il fattore comune $\sqrt{2}$ il quale potrà essere eliminato. Ciò significa che si può convenire di fare uso delle grandezze efficaci invece che dei valori massimi e di prendere per rappresentare la grandezza sinusoidale la funzione

$$A_e = A_e e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

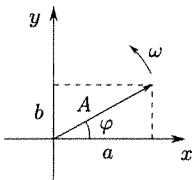


Fig. 7.6

- b. si prenda il valore del coefficiente della parte immaginaria⁽⁹⁾ di A all'istante considerato.

Si osservi che l'ampiezza complessa ha in sé tutti gli elementi per determinare il modulo e la fase iniziale di A e quindi l'ampiezza e la fase iniziale della funzione sinusoidale.

Il grande vantaggio di passare dalle funzioni seno o coseno ad esponenziali (ad esponente immaginario) sta nel fatto che essendo lineari le equazioni differenziali che descrivono i processi che interessano, esse si trasformano in relazioni algebriche fra le ampiezze complesse delle funzioni sinusoidali a causa della particolare forma delle derivate (e degli integrali) della funzione esponenziale: si giunge infatti ad eliminare il fattore $e^{j\omega t}$ che rappresenta la dipendenza dal tempo ed a determinare facilmente le ampiezze e le fasi iniziali delle grandezze in considerazione: di questa circostanza vedremo in seguito numerosi esempi. Si osservi che la rappresentazione di una grandezza sinusoidale mediante un numero complesso (22) secondo le convenzioni ora poste è immediatamente legabile alla rappresentazione mediante vettori descritti nel punto a , se il piano xy in cui si pongono i vettori coincide con il piano complesso (di Gauss), formato cioè dall'asse reale (x) e da quello immaginario ($j \equiv y$). Come è noto infatti i numeri complessi

$$a + jb = A_M e^{j\alpha}$$

possono in genere essere rappresentati da un vettore di modulo

$$(24) \quad A_M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ed argomento

$$(25) \quad \alpha = \arctan \frac{b}{a}$$

Per una grandezza sinusoidale (fig. 7.6) si può quindi considerare una rappresentazione mediante un vettore ruotante e la grandezza è in ogni istante data dalla proiezione della posizione del vettore sull'asse y (o, secondo la scelta fatta all'inizio della trattazione dei problemi, dalla proiezione sull'asse x), oppure si può usare una rappresentazione mediante numeri complessi convenendo di considerare ad ogni istante il coefficiente della parte immaginaria (o la parte reale secondo la scelta).

Nel caso che due o più grandezze omogenee (sincrone o no) operino contemporaneamente e occorra considerare la somma, è facile vedere che il numero complesso rappresentativo della somma non è altro che la somma dei numeri complessi rappresentativi delle singole grandezze. Consideriamo il caso comune di funzioni sinusoidali della stessa frequenza

$$(26) \quad A = A_M \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$(27) \quad B = B_M \sin(\omega t + \varphi_2),$$

rappresentate dai complessi

$$(28) \quad A = a_1 + jb_1 = A_M e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

$$(29) \quad B = a_2 + jb_2 = B_M e^{j(\omega t + \varphi_2)}.$$

Si ha

$$(30) \quad \begin{aligned} A + B &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = A_M e^{j(\omega t + \varphi_1)} + B_M e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \\ &= [A_M \cos(\omega t + \varphi_1) + B_M \cos(\omega t + \varphi_2)] + \\ &\quad + j[A_M \sin(\omega t + \varphi_1) + B_M \sin(\omega t + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Il coefficiente della parte immaginaria è appunto pari alla somma delle funzioni sinusoidali date.

Nelle equazioni ove entrano le funzioni sinusoidali rappresentate da numeri complessi si usano le regole per l'algebra dei numeri complessi: dopo aver compiuto tutte le operazioni occorre ricordare che la soluzione del problema è rappresentata

⁽⁹⁾ Oppure $\Re(A)$ secondo la scelta fatta.

dal coefficiente della parte immaginaria (o dalla parte reale) del numero complesso trovato ⁽¹⁰⁾.

Vogliamo qui solo ricordare che la moltiplicazione di un numero complesso

$$a + ib = A_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

per un numero reale c , fornisce come risultato

$$(31) \quad ac + jbc = cA_M e^{j(\omega t + \varphi)},$$

cioè un numero complesso il cui modulo è moltiplicato per c . Nella rappresentazione che qui interessa ciò corrisponde ad una grandezza sinusoidale che differisce da quella di partenza per avere la ampiezza moltiplicata per il fattore c .

Le operazioni di derivazione e integrazione risultano particolarmente semplici. Il numero complesso

$$[18] \quad A_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

la cui parte immaginaria rappresenta la grandezza

$$[9] \quad A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

se derivato fornisce

$$j\omega A_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

la cui parte immaginaria è

$$[14] \quad \omega A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

che è appunto la derivata della (9).

Analogamente facendo l'integrale del numero complesso (18) si ottiene

$$\int A_M e^{j(\omega t + \varphi)} dt = -\frac{jA_M}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

la cui parte immaginaria è

$$[15] \quad -\frac{A_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

che è l'integrale della (9).

Per avere quindi i numeri complessi che rappresentano rispettivamente la derivata e l'integrale della funzione sinusoidale di partenza (9) basta moltiplicare il numero complesso che la rappresenta rispettivamente per

$$j\omega = \omega e^{j(\pi/2)}$$

(derivata)

$$-\frac{j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j(\pi/2)}$$

(integrale).

Si faccia attenzione peraltro al fatto che le operazioni di prodotto devono essere fatte utilizzando la parte immaginaria (o reale a seconda della scelta iniziale). Si consideri infatti il prodotto di due funzioni sinusoidali A_1 e A_2 del tipo dato dalla (9). È facile verificare che la parte immaginaria del prodotto dei due numeri complessi che li rappresentano non dà lo stesso risultato che invece è ottenuto moltiplicando fra loro le parti immaginarie, che come noto sono ottenute come $(A_1 - A_1^*)/2j$ per A_1 e analoga espressione per A_2 .

In particolare la media temporale del quadrato di una quantità espressa dalla (9), usando la notazione complessa diventa

$$(32) \quad \frac{1}{T} \int_0^T A_M^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A_M^2}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{(A - A^*)^2}{4} \right] dt = AA^*/2$$

⁽¹⁰⁾ Ciò equivale nella rappresentazione mediante vettori a compiere le operazioni indicate dalla relazione fra le grandezze valida per il particolare problema e una volta trovato il vettore che risolve il problema stesso, ottenere la grandezza sinusoidale cercata considerando la proiezione del vettore sull'asse y (o x).

poiché

$$\int_0^T A^2 dt = \int_0^T A_M^2 e^{2j(\omega t + \varphi)} dt = 0 = \int_0^T (A^*)^2 dt$$

quindi in definitiva in notazione complessa

$$(33) \quad \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = AA^*/2.$$

7.3. CIRCUITI SERIE IN CORRENTE ALTERNATA

Nel presente paragrafo vogliamo esaminare il caso di un circuito alimentato da un generatore di f.e.m. sinusoidale di pulsazione ω (cap. 6, par. 6.5) e formato da una resistenza ed almeno un altro componente scelto fra un induttore e un condensatore collegati in serie.

a. Circuito RL

Si abbia (fig. 7.7) un circuito formato da un resistore, un induttore ed un generatore. La resistenza interna del generatore e la sua induttanza siano trascurabili rispetto ai corrispondenti parametri degli elementi esterni o si intendano conglobati con essi. La f.e.m. del generatore sia

$$(34) \quad f = f_M \sin \omega t.$$

La equazione di Kirchhoff per il circuito si scrive considerando i valori istantanei delle grandezze e tenendo presente che in essa agisce oltre la f anche la forza controelettromotrice di autoinduzione. Si ha:

$$(35) \quad f - L \frac{di}{dt} = Ri$$

In queste considerazioni noi siamo interessati al funzionamento di regime e non vogliamo considerare i fenomeni transitori che si hanno all'atto della chiusura e dell'apertura del circuito. Ciò significa che non cerchiamo la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare non omogenea

$$(36) \quad L \frac{di}{dt} + Ri = f,$$

ma solo una soluzione particolare per la i .

Per ragioni di continuità fisica c'è da attendere che tale soluzione particolare rappresenti anche essa un fenomeno periodico con la stessa pulsazione ω della f.e.m. applicata. Si può quindi provare a sostituire nella (36) per la i una espressione del tipo

$$(37) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi)$$

e determinare i parametri i_M e φ in modo che la (37) sia effettivamente la soluzione cercata. È facile vedere che con un tale procedimento si ha

$$(38) \quad Li_M \omega \cos(\omega t - \varphi) + Ri_M \sin(\omega t - \varphi) = f_M \sin \omega t.$$

Usando le espressioni per il seno ed il coseno di una somma di angoli

$$(39) \quad \begin{aligned} & (i_M \cos \omega t)[\omega L \cos \varphi - R \sin \varphi] + (i_M \sin \omega t) \times \\ & \times [\omega L \sin \varphi + R \cos \varphi] = f_M \sin \omega t. \end{aligned}$$

Questa relazione deve valere per ogni valore di t e quindi i coefficienti di $\sin \omega t$ nei due membri devono essere uguali e lo stesso deve valere per

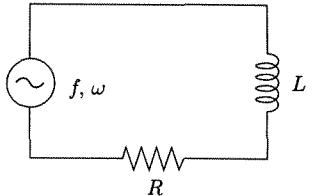


Fig. 7.7

quelli di $\cos \omega t$. Si ottiene il sistema

$$(40) \quad \begin{aligned} \omega L \cos \varphi - R \sin \varphi &= 0 \\ i_M (\omega L \sin \varphi + R \cos \varphi) &= f_M \end{aligned}$$

Dalla prima

$$(41) \quad \tan \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Si osservi che secondo la espressione (37) presa per la i , un valore positivo per φ corrisponde ad un ritardo di i rispetto ad f .

Dalla (41) si ha inoltre

$$(42) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{\omega L}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella seconda delle (40):

$$(43) \quad \begin{aligned} i_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} &= f_M, \\ i_M &= \frac{f_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \end{aligned}$$

Impedenza

L'ampiezza della corrente è $i_M = \frac{f_M}{Z}$

Il rapporto

$$(44) \quad \frac{f_M}{i_M} = Z$$

ha le dimensioni di una resistenza (e quindi si misura in Ω) e prende in maniera del tutto generale il nome di impedenza. Nel caso di circuiti RL l'impedenza vale

$$(45) \quad Z_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

La grandezza

Reattanza (induttiva)

$$(46) \quad X_L = \omega L,$$

che ovviamente ha anche essa le dimensioni di una resistenza, prende il nome di reattanza (induttiva).

Le conclusioni della trattazione sono quindi per lo stato di regime:

1. la corrente è sinusoidale della stessa frequenza della f.e.m. applicata;
2. l'ampiezza della intensità di corrente vale (44)

$$i_M = \frac{f_M}{Z};$$

3. essa è in ritardo rispetto alla f.e.m. di un angolo φ dato dalla (41).

Si osservi in particolare che se la resistenza dell'induttore potesse essere ridotta a zero, $\tan \varphi = \infty$ e quindi $\varphi = \pi/2$: la corrente sarebbe sfasata di $\pi/2$ (in quadratura) in ritardo.

Esaminiamo per il circuito in questione il diagramma dei vettori rappresentativi delle grandezze sinusoidali (fig. 7.8a).

Fissato il vettore rappresentativo della f (di modulo f_M) si trova quello rappresentativo della i osservando che il suo modulo vale f_M/Z e

Uso del metodo vettoriale

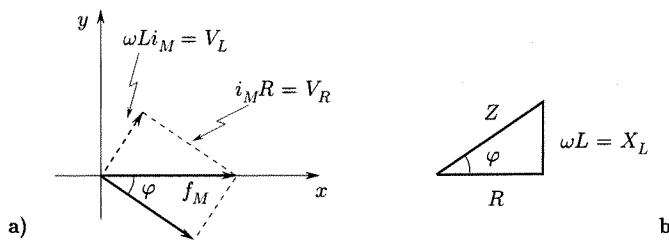


Fig. 7.8

la differenza di fase è un ritardo φ dato dalla (41). Tanto Z quando φ possono essere determinati dalla costruzione di figura 7.8b. Si osservi che se si riportano i vettori rappresentativi dei due termini a primo membro della (38), uno avente modulo Ri_M , direzione e verso quelli del vettore rappresentativo di i e l'altro⁽¹¹⁾ avente modulo ωLi_M e disposto a $\pi/2$ in anticipo rispetto al vettore rappresentativo di i , il loro risultante, che fornisce Zi_M : la costruzione può essere fatta eliminando i_M .

I due vettori (ruotanti) rappresentano rispettivamente le differenze di potenziale v_R e v_L rispettivamente ai capi di R e di L .

Esaminiamo ora l'applicazione del metodo dei numeri complessi. La f.e.m. sia rappresentata, con tutta generalità, dalla espressione

$$f = f_M \sin(\omega t - \varphi_1)$$

essendo φ_1 la fase iniziale. Al suo posto consideriamo la funzione

$$(47) \quad f = f_M e^{j(\omega t - \varphi_1)} = f_M e^{-j\varphi_1} e^{j\omega t} = f_M e^{j\omega t}.$$

In tal maniera resta fissato che le grandezze sinusoidali che a noi interessano sono date dai coefficienti delle parti immaginarie dei numeri complessi che rappresentano le f e le i . Per la i si pone

$$(48) \quad i = i_M e^{j(\omega t - \varphi_2)} = i_M e^{-j\varphi_2} e^{j\omega t} = i_M e^{j\omega t}.$$

Sostituendo nell'equazione del circuito ed eliminando il fattore comune $e^{j\omega t}$ si ottiene

$$(49) \quad \begin{aligned} i_M(R + j\omega L)e^{-j\varphi_2} &= f_M e^{-j\varphi_1} \\ (R + j\omega L)i_M &= f_M. \end{aligned}$$

Diamo ora il nome di impedenza complessa al rapporto fra le ampiezze complesse della f.e.m. (o d.d.p.) applicata e della corrente

$$(50) \quad Z = \frac{f_M}{i_M} \quad i_M = \frac{f_M}{Z}$$

Esso è un numero complesso il cui modulo è

$$(51) \quad Z = \frac{f_M}{i_M}$$

⁽¹¹⁾ Tale vettore rappresenta la grandezza

$$\omega L i_M \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \omega L i_M \cos(\omega t - \varphi)$$

*Uso del metodo
dei numeri complessi*

*Impedenza complessa
 $Z = R + j\omega L$*

ed il cui argomento è pari alla differenza degli argomenti di f_M ed i_M , cioè

$$(52) \quad \varphi = -\varphi_1 - (-\varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1.$$

La reattanza è $X_L = \omega L$

Nel caso presente, dalla (49) si ha

$$(53) \quad Z = R + j\omega L = R + jX_L.$$

con $X_L = \omega L$ (reattanza).

Se ne deduce, dalla (51) e dalla (52):

$$(54) \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$(55) \quad \tan \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{X_L}{R}. \quad \left. \right\}$$

Si determinano quindi i parametri incogniti nella (48) e si ottiene come soluzione del problema [coefficiente della parte immaginaria della (48)] una intensità di corrente di ampiezza

$$(56) \quad i_M = \frac{f_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

in ritardo dell'angolo φ dato dalla (55) rispetto alla f.e.m. applicata:

$$(57) \quad i = \frac{f_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi).$$

Dalla trattazione è evidente come le caratteristiche del circuito siano rappresentate interamente dall'operatore (50) indicato con il nome di impedenza complessa il quale consente di passare dall'ampiezza complessa della f.e.m. (o d.d.p.) applicata al circuito RL alla ampiezza complessa della corrente.

Ammettenza complessa

Molto spesso viene anche usato l'operatore reciproco della Z , chiamato ammettenza complessa:

$$(58) \quad Y = \frac{i_M}{f_M} = \frac{1}{Z}.$$

Conduttanza

$$g = \frac{R}{R^2 + X_L^2}$$

Suscettanza

$$b = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}$$

Nel caso particolare del circuito RL si ha

$$(59) \quad Y = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = g - jb.$$

Le grandezze g e b prendono il nome di conduttanza e suscettanza e si misurano, al pari del modulo di Y , in siemens ($1S = \Omega^{-1}$).

b. Circuito RC

La figura 7.9 dà lo schema. La f.e.m. applicata sia

$$(60) \quad f = f_M \sin \omega t.$$

Nello scrivere la equazione di Kirchhoff si deve tener conto che la d.d.p. ai capi del condensatore (v) tende a far circolare nel circuito una corrente in verso opposto a quella prodotta dalla f : se per esempio si considera il mezzo ciclo nel quale la corrente prodotta dalla f circola in senso antiorario l'armatura a (fig. 7.9) viene a possedere cariche positive e l'armatura b cariche negative; un condensatore così carico tende a far passare nel conduttore che collega le armature una corrente in verso orario.

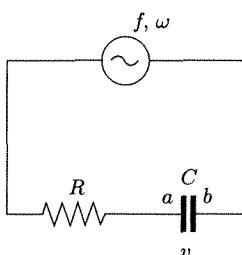


Fig. 7.9

L'equazione del circuito è

$$(61) \quad f - v = Ri.$$

Anche qui la corrente di regime è sinusoidale:

$$(62) \quad i = i_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

e vanno determinati i parametri i_M e φ .

Utilizzando la definizione di capacità ed indicando con q la carica istantanea sul condensatore la (61) si scrive

$$(63) \quad Ri + \frac{q}{C} = f.$$

La carica q è legata alla corrente che passa nel conduttore da

$$(64) \quad i = \frac{dq}{dt}.$$

Derivando la (63) si ottiene l'equazione del circuito nella forma

$$(65) \quad R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{df}{dt}.$$

Sostituendo nella (65) le espressioni per f ed i e procedendo come nel caso precedente si ha

$$(66) \quad i_M = \frac{f_M}{Z}$$

$$(67) \quad \tan \varphi = -\frac{1}{\omega C} = \frac{X_c}{R},$$

essendo la impedenza

$$(68) \quad Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{R^2 + X_c^2}$$

e la reattanza (*capacitiva*)

$$(69) \quad X_c = -\frac{1}{\omega C}.$$

$$\text{Reattanza capacitiva} \\ X_c = -\frac{1}{\omega C}$$

La corrente è in questo caso in anticipo rispetto alla f.e.m. applicata dal generatore. Questo anticipo tende al valore $\pi/2$ rad al tendere di R a zero.

La figura 7.10 mostra la posizione relativa dei vettori ruotanti nella rappresentazione corrispondente. I vettori di modulo $i_M R$ in fase con la corrente e $(1/\omega C)i_M$ in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla corrente, forniscono la d.d.p. ai capi della resistenza (v_R) e del condensatore (v_C).

Uso del metodo vettoriale

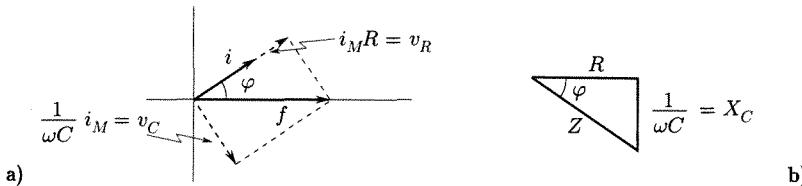


Fig. 7.10

*Uso del metodo
dei numeri complessi*

Nella trattazione con i numeri complessi, supponendo che anche la f.e.m. abbia una fase iniziale

$$(70) \quad f = f_M e^{j(\omega t - \varphi_1)}$$

$$(71) \quad i = i_M e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale del circuito si ottiene la equazione algebrica

$$(72) \quad \begin{aligned} \left(j\omega R + \frac{1}{C} \right) i_M e^{-j\varphi_2} &= j\omega f_M e^{-j\varphi_1}, \\ \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) i_M &= f_M. \end{aligned}$$

Introducendo l'operatore impedenza complessa (50)

$$Z = \frac{f_M}{i_M}$$

si ha

$$(73) \quad Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \frac{1}{\omega C} = R + jX_c = Ze^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Esso è un numero complesso di modulo

$$(74) \quad Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{R^2 + X_c^2}$$

ed argomento

$$(75) \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

tale che

$$(76) \quad \tan \varphi = -\frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_c}{R}.$$

I parametri incogniti nella espressione di i sono quindi determinati per mezzo dell'operatore Z e se ne deduce una corrente

$$(77) \quad i = \frac{f_M}{Z} \sin(\omega t - \varphi_1 - \varphi).$$

L'operatore Y , ammettenza complessa, ha in questo caso la espressione

$$(78) \quad Y = \frac{i_M}{f_M} = \frac{1}{R + jX_c} = \frac{1}{R^2 + X_c^2} - j \frac{X_c}{R^2 + X_c^2} = g - jb.$$

c. Circuito RLC; oscillazioni forzate

Si consideri ora il circuito (fig. 7.11) più generale di quelli visti nei punti precedenti, formato da R, L, C in serie ad un generatore che fornisce la d.d.p.

$$f = f_M \sin \omega t.$$

L'equazione del circuito si scrive:

$$(79) \quad f - L \frac{di}{dt} - v = Ri,$$

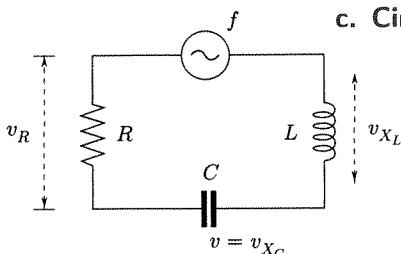


Fig. 7.11

cioè

$$f - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = Ri.$$

Derivando si ha:

$$(80) \quad L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{df}{dt}.$$

È questa una equazione differenziale lineare analoga a quella che regola le oscillazioni forzate di un sistema meccanico⁽¹²⁾

$$(81) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t.$$

Anche qui la soluzione generale è la somma della soluzione della equazione omogenea

$$(82) \quad L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

e di un integrale particolare. La soluzione di regime è tuttavia rappresentata dalla soluzione particolare della equazione completa e ad essa intendiamo qui riferirci, giacché, come si vedrà fra breve (par. 7.9) ed in analogia al caso meccanico, la soluzione dell'equazione omogenea rappresenta termini che si attenuano nel tempo e quindi ha interesse solo nella descrizione dei transitori. La soluzione particolare è una corrente della stessa pulsazione ω della f.e.m. impressa:

$$(83) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi).$$

Per determinare i_M e φ si può procedere come nei casi precedenti. Sostituendo le espressioni di f ed i nella (80) ed indicando con

$$(84) \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

l'impedenza del circuito e con

$$(85) \quad X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

la sua reattanza (totale, somma di quelle induttiva e capacitiva), si ha

$$(86) \quad i_M = \frac{f_M}{Z} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$(87) \quad \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X}{R}. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

Consideriamo il diagramma vettoriale riferendoci ad un esempio numerico (fig. 7.12). Sia $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 314$ rad/s; $R = 150 \Omega$;

Uso del metodo vettoriale

⁽¹²⁾ Si vede nella analogia che si ricava dal confronto fra le (80) e (81) che allo spostamento (x) del punto materiale fa riscontro l'intensità i della corrente nel circuito. Si noti che alla massa che caratterizza l'inerzia del punto materiale e l'energia legata al moto $\frac{1}{2}(mv^2)$ corrisponde la induttanza che caratterizza l'energia magnetica $\frac{1}{2}(Li^2)$ dovuta al fluire della corrente. Alla costante elastica k corrisponde $1/C$ ed alla costante b che determina la forza resistente al moto esercitata dal mezzo in cui si trova il punto materiale, corrisponde la resistenza elettrica del circuito.

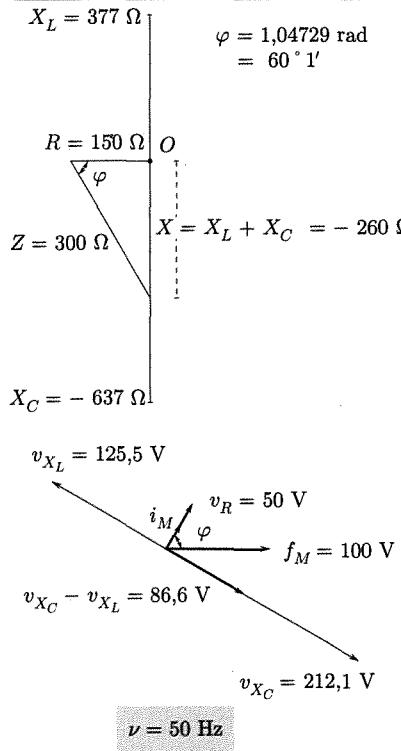


Fig. 7.12

Metodo dei numeri complessi

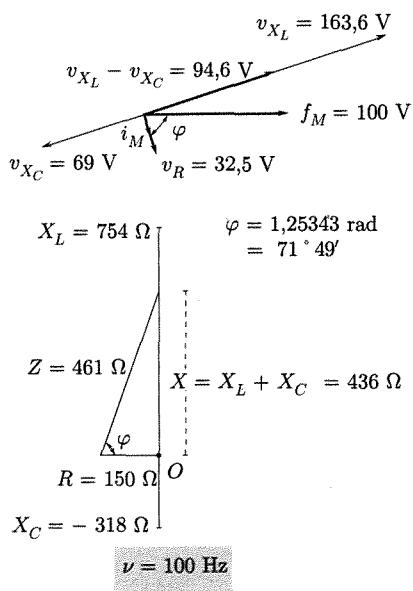


Fig. 7.13

$L = 1,2 \text{ H}$; $C = 5 \mu\text{F}$; $f_M = 100 \text{ V}$. Nel diagramma di figura 7.12 è indicata la determinazione grafica della impedenza Z e di φ ; sono infatti riportati R , $X_L = \omega L = 1,2 \cdot 314 \simeq 377 \Omega$ e $X_C = -1/\omega C = -10^6/(314 \cdot 5) \simeq -637 \Omega$.

Risulta

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{150^2 + 260^2} = 300 \Omega$$

$$\tan \varphi = -\frac{260}{150} = -1,73$$

$$\varphi = -1,04729 \text{ rad} = -60^\circ 1'$$

$$i_M = \frac{f_M}{Z} = \frac{100}{300} = 0,333 \text{ A.}$$

Si considerino i vettori rappresentativi di

$$v_R = Ri_M = 150 \cdot 0,333 = 50 \text{ V}$$

in fase con i_M :

$$v_{X_L} = \omega L i_M = 377 \cdot 0,333 = 125,5 \text{ V}$$

in quadratura in anticipo rispetto ad i_M , e

$$v_{X_C} = \frac{1}{\omega C} i_M = 637 \cdot 0,333 = 212,1 \text{ V}$$

in quadratura in ritardo. Essi, al ruotare di tutti i vettori con velocità ω , forniscono mediante le loro proiezioni sull'asse y i valori istantanei delle d.d.p. ai capi di R , L , C . La loro somma è pari al vettore rappresentativo di f .

Nella figura 7.13 viene considerato il caso in cui nel circuito precedente venga solamente alterata la frequenza portandola da 50 a 100 Hz. In corrispondenza: $\omega = 628 \text{ rad/s}$; $X_L = 754 \Omega$; $X_C = -318 \Omega$; $Z = \sqrt{150^2 + 436^2} = 461 \Omega$; $\tan \varphi = +461/150 = +3,07$; $\varphi = 1,25343 \text{ rad} = 71^\circ 49'$; $i_M = 100/461 = 0,217 \text{ A}$; $v_R = 32,5 \text{ V}$; $v_{X_L} = 163,6 \text{ V}$; $v_{X_C} = 69,0 \text{ V}$.

La trattazione con il metodo dei numeri complessi è la seguente. Sia

$$(88) \quad f = f_M e^{j(\omega t - \varphi_1)}$$

il numero complesso che rappresenta la f.e.m. del generatore e si cerchi quello che rappresenta la corrente di regime della forma

$$(89) \quad i = i_M e^{j(\omega t - \varphi_2)}$$

La introduzione di tali espressioni nella equazione del circuito (80) conduce alla relazione

$$(90) \quad \begin{aligned} & \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] i_M e^{-j\varphi_2} = f_M e^{-j\varphi_1}, \\ & \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] i_M = f_M. \end{aligned}$$

L'impedenza complessa

$$Z = \frac{f_M}{i_M}$$

ha questa volta l'espressione:

$$(91) \quad Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = \\ = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = Ze^{j\varphi}.$$

Si tratta di un numero complesso di modulo Z ed argomento φ pari alla differenza fra gli argomenti di f ed i :

$$(92) \quad \tan \varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X}{R}$$

Si trova quindi per i parametri incogniti nella (89) e nella espressione di i

$$(93) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi_2),$$

$$(94) \quad i_M = \frac{f_M}{Z}$$

e

$$(95) \quad \varphi_2 = -\varphi_1 - \varphi$$

È evidente come questo caso contenga quelli (RL, RC) discussi precedentemente come casi particolari.

Come casi particolari sono anche compresi quelli di una resistenza pura (R), di una induttanza pura (L), di una capacità pura (C). Le corrispondenti impedenze complesse sono:

$$(96) \quad \text{per la resistenza } R \quad Z = R;$$

$$(97) \quad \text{per la induttanza } L \quad Z = j\omega L = jX_L$$

$$(98) \quad \text{per la capacità } C \quad Z = -j \frac{1}{\omega C} = jX_C.$$

Si osservi che nel caso del circuito RLC , in analogia a quanto accade per correnti continue⁽¹³⁾, l'impedenza complessa di più elementi circuitali (resistenze, induttori, capacità) collegati in serie è la somma delle corrispondenti impedenze dei singoli elementi. Vedremo nel prossimo paragrafo la validità generale di questa circostanza.

Ritorneremo in seguito (par. 7.9) a descrivere alcune altre importanti caratteristiche del circuito serie RLC . Vogliamo ora continuare ad esaminare la applicazione delle leggi di Kirchhoff ai circuiti in corrente alternata.

■ 7.4. TRATTAZIONE GENERALE DI RETI IN CORRENTE ALTERNATA MEDIANTE LA RAPPRESENTAZIONE CON NUMERI COMPLESSI

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato casi semplici trattati con diversi metodi in modo da chiarire l'applicazione di tali metodi. Ora

⁽¹³⁾ Ove peraltro gli elementi circuitali sono puramente resistivi.

vogliamo vedere come la trattazione con numeri complessi consenta di trattare agevolmente una qualsiasi rete, in maniera analoga a quella utilizzata per correnti continue.

Le equazioni di partenza non sono altro che le equazioni di Kirchhoff applicate ai valori istantanei delle grandezze

I per ciascun nodo

$$(99) \quad \sum i = 0$$

II per ciascuna maglia, in cui in genere possono esservi generatori esterni (f), forze e.m. autoindotte, forze e.m. di mutua induzione (da circuiti con corrente di intensità i'), d.d.p. ai capi di condensatori (v)

$$(100) \quad f - L \frac{di}{dt} - M \frac{di'}{dt} - v = Ri.$$

III Inoltre vale per i condensatori

$$(101) \quad i = C \frac{dv}{dt}.$$

Impiegando per le grandezze sinusoidali la rappresentazione complessa, cioè ponendo

$$(102) \quad \mathbf{f} = f_M e^{j(\omega t - \varphi)} = \mathbf{f}_M e^{j\omega t}$$

$$(103) \quad \mathbf{i} = i_M e^{j(\omega t - \varphi')} = \mathbf{i}_M e^{j\omega t}$$

$$(104) \quad \mathbf{i}' = i'_M e^{j(\omega t - \varphi'')} = \mathbf{i}'_M e^{j\omega t}$$

le equazioni (99), (100), (101), che servono per le analisi del circuito, si trasformano in equazioni algebriche normali. Si ha infatti (si ricordi che l'operatore d/dt applicato ad una grandezza come i equivale a moltiplicare i per $j\omega$):

I per i nodi

$$(105) \quad \sum i_M = 0$$

II per la maglia

$$(106) \quad \sum (R + j\omega L) i_M + jM\omega i'_M + v_M - \mathbf{f}_M = 0$$

III per i condensatori

$$(107) \quad i_M = j\omega C v_M.$$

Si consideri una rete comunque complicata purché formata da soli elementi passivi, volendosi con ciò intendere resistori, condensatori, auto e mutue induttanze, la quale termini in due punti (A e B , fig. 7.14) ai quali venga applicata una d.d.p. sinusoidale che nel caso più generale si scrive

$$(108) \quad v = v_M \sin(\omega t - \varphi_1).$$

La corrente che esce dal generatore in condizioni di regime è anche essa sinusoidale

$$(109) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Per la linearità delle equazioni (105) (106) (107) si può affermare che nella rappresentazione complessa della i ,

$$(110) \quad \mathbf{i} = i_M e^{j(\omega t - \varphi_2)} = \mathbf{i}_M e^{j\omega t}$$

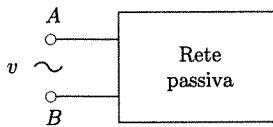


Fig. 7.14

l'ampiezza complessa

$$(111) \quad \mathbf{i}_M = i_M e^{-j\varphi_2}$$

è proporzionale alla ampiezza complessa

$$(112) \quad \mathbf{v}_M = v_M e^{-j\varphi_1}$$

nella rappresentazione complessa della v ,

$$(113) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_M e^{j\omega t}.$$

Il rapporto

$$(114) \quad Z = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{i}_M}$$

prende il nome di impedenza complessa della rete fra i punti A e B . Essa dipende dalla rete e non dalla d.d.p. applicata.

L'impedenza complessa è un numero complesso

$$(115) \quad Z = Z e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = Z e^{j\varphi}$$

che ha come modulo

$$(116) \quad Z = \frac{v_M}{i_M}$$

e come argomento la differenza degli argomenti di \mathbf{v}_M ed \mathbf{i}_M . Tale numero complesso può porsi nella forma

$$(117) \quad \mathbf{Z} = R + jX$$

R rappresenta la resistenza, X la reattanza fra i punti A e B . Analogamente il rapporto

$$(118) \quad Y = \frac{\mathbf{i}_M}{\mathbf{v}_M} = \frac{1}{Z}$$

si chiama ammettenza complessa: il suo modulo è

$$(119) \quad Y = \frac{1}{Z}.$$

Si può porre inoltre

$$(120) \quad \mathbf{Y} = g - jb$$

essendo g la conduttanza (sempre positiva) e b la suscettanza (positiva o negativa) fra A e B .

Noi abbiamo già trovato le espressioni di Z per alcuni casi semplici. In particolare

a. per una resistenza (96)

$$\mathbf{Z} = R$$

cioè la impedenza è reale e positiva e $\varphi = 0$;

b. per una induttanza pura (97)

$$\mathbf{Z} = j\omega L = jX_L$$

cioè la impedenza complessa è un immaginario puro, $\varphi = \pi/2$ e la corrente è in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla d.d.p.

c. per una capacità pura (98)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = jX_c$$

la impedenza complessa è un immaginario puro, $\varphi = -\pi/2$ e la corrente è in anticipo di $\pi/2$ sulla d.d.p.

Supponiamo ora di avere un certo numero 1, 2, 3... di elementi disposti in serie in modo che siano attraversati dalla stessa corrente

$$(121) \quad i = i_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi).$$

La differenza di potenziale v ai capi del complesso sarà in ogni istante pari alla somma delle d.d.p. v_1, v_2, v_3, \dots ai capi dei singoli elementi

$$(122) \quad v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Si ha di conseguenza nella rappresentazione coi numeri complessi che le ampiezze complesse sono legate da

$$(123) \quad v_M = v_{M1} + v_{M2} + v_{M3} + \dots$$

e quindi dividendo per i_M

$$(124) \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \dots$$

In maniera analoga a quello che si è visto per resistenze in serie in regime stazionario, l'impedenza complessa dell'insieme di elementi in serie è pari alla somma delle impedenze complesse dei singoli elementi.

Se si hanno più elementi in parallelo, ai quali è applicata la d.d.p. v , le correnti i_1, i_2, i_3, \dots al nodo danno luogo alla corrente totale

$$(125) \quad i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots$$

e quindi nella rappresentazione complessa si ha per le ampiezze complesse

$$(126) \quad i_M = i_{M1} + i_{M2} + i_{M3} + \dots$$

e dividendo per v_M

$$(127) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \dots$$

Elementi passivi in parallelo presentano nel loro insieme un'ammittenza complessa che è la somma delle ammettenze dei singoli elementi.

Le relazioni (124) (127) assieme alle (114) (118) ed alle espressioni (96) (97) (98) per le impedenze complesse dei singoli elementi che si incontrano a costituire le reti, consentono molto spesso di risolvere i problemi delle reti in c.a. in maniera rapida quando possano essere considerate come formate da semplici impedenze collegate in serie e parallelo.

Esempio

A titolo di esempio si consideri la rete in figura 7.15. La impedenza complessa fra i punti 3 e 6 risulta

$$\mathbf{Z}_8 = \frac{1}{\frac{1}{\mathbf{Z}_5} + \frac{1}{\mathbf{Z}_6}}$$

quella risultante dalle impedenze $\mathbf{Z}_8, \mathbf{Z}_7$ è

$$\mathbf{Z}_9 = \mathbf{Z}_8 + \mathbf{Z}_7.$$

L'ammittenza fra 3 e 5

$$Y = \frac{1}{Z_3 + Z_4} + \frac{1}{Z_9}$$

e la impedenza fra gli stessi punti

$$Z_{10} = \frac{1}{Y}.$$

La impedenza complessiva ai capi del carico

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_{10}.$$

Si calcola quindi rapidamente l'ampiezza complessa della corrente in Z_1 e Z_2

$$i_1 = \frac{f}{Z_{11}}$$

e quindi la d.d.p. fra 3 e 5

$$v_{3,5} = f - i_1(Z_1 + Z_2)$$

e così via di seguito si calcolano le d.d.p. e le correnti nelle singole impedenze mediante le loro rappresentazioni complesse dalle quali si deducono le ampiezze (o i valori efficaci) e le fasi.

Si consideri come esempio numerico la rete di figura 7.16⁽¹⁴⁾. Le impedenze dei singoli componenti siano

$$Z_1 = R_1 = 20 \Omega$$

$$Z_2 = j\omega L = j314 \cdot 0,4 = j125,6$$

$$Z_3 = R_3 = 30 \Omega$$

$$Z_4 = -\frac{j}{\omega C} = -j\frac{10^6}{314 \cdot 50} = -j63,7.$$

Per la impedenza complessiva di Z_3 e Z_4 si ha

$$Y = \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}$$

$$\begin{aligned} Z_{3,4} &= \frac{1}{\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{-j(30 \cdot 63,7)}{30 - j63,7} = \\ &= \frac{[-j(1911)][30 + j63,7]}{30^2 + (63,7)^2} = \frac{121.730,7 - j57.330}{4959} = 24,5 - j11,6. \end{aligned}$$

L'impedenza complessiva ai capi dell'alimentatore è

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_{3,4} = 20 + j125,6 + 24,5 - j11,6 \\ &= 44,5 + j114. \end{aligned}$$

Tale impedenza ha modulo

$$Z = \sqrt{(44,5)^2 + (114)^2} = 122,5 \Omega$$

ed argomento φ dato da

$$\tan \varphi = \frac{114}{44,5} = 2,56$$

$$\varphi = 1,19729 \text{ rad} = 68^\circ 36'.$$

Si ha

$$Z = 122,5 e^{j(1,19729)}.$$

La corrente che viene fornita dal generatore ha quindi valore efficace

$$i_{1,e} = \frac{f_e}{Z} = \frac{100}{122,5} = 0,815 \text{ A}$$

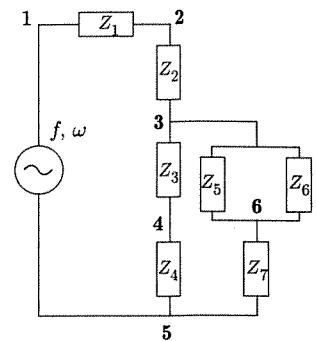


Fig. 7.15

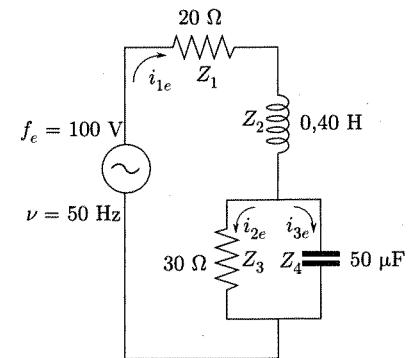


Fig. 7.16

⁽¹⁴⁾ Nello svolgimento di questo esempio vengono usati nella trattazione con i numeri complessi i valori efficaci delle grandezze sinusoidali al posto di quelli massimi, a essi proporzionali (vedi par. 7.2b).

ed è in ritardo rispetto ad f_e di

$$\varphi = 1,19729 \text{ rad}$$

Per la d.d.p. ai capi della resistenza di 20Ω ($V_{R1,e}$) si ha

$$v_{R1,e} = i_{1,e} R_1$$

e

$$v_{R1,e} = i_{1,e} R_1 = 0,815 \times 20 = 16,3 \text{ V.}$$

Tale d.d.p. è in fase con la corrente. Per la d.d.p. ai capi della bobina si ha

$$v_{L,e} = i_{1,e} j \omega L$$

e

$$v_{L,e} = i_{1,e} \cdot \omega L = 0,815 \times 125,6 = 112,3 \text{ V.}$$

La $v_{L,e}$ è in anticipo rispetto alla corrente di $\pi/2$ e quindi in anticipo di $\varphi_1 = (\pi/2 - \varphi) = 0,37350 \text{ rad} = 21^\circ 24'$ rispetto alla d.d.p. del generatore.

La d.d.p. ai capi del parallelo RC è data da

$$v_{3,4,e} = i_{1,e} Z_{3,4} = i_{1,e} (24,5 - j11,6)$$

e

$$\begin{aligned} v_{3,4,e} &= i_{1,e} Z_{3,4} = 0,815 \times \sqrt{(24,5)^2 + (11,6)^2} = \\ &= 0,815 \times 27,1 = 22 \text{ V.} \end{aligned}$$

La relazione di fase fra la d.d.p. $v_{3,4}$ e la corrente in $Z_{3,4}$ è tale che la corrente (i_1) è in anticipo rispetto alla d.d.p. (e quindi questa è in ritardo rispetto alla corrente $i_{1,e}$) per un angolo di fase φ_2 dato da

$$\tan \varphi_2 = -\frac{11,6}{24,5} = -0,47 \quad \varphi_2 = 0,43953 \text{ rad.}$$

La $v_{3,4}$ è quindi in ritardo rispetto alla f.e.m. del generatore di

$$\varphi_3 = \varphi + \varphi_2 = 1,63682 \text{ rad} = 93^\circ 47'.$$

Le correnti $i_{2,e}$, ed $i_{3,e}$ nei due rami del parallelo si ottengono dividendo $v_{3,4}$ per R_3 e $-j(1/\omega C)$.

Si ottiene per i moduli

$$i_{2,e} = \frac{22}{30} = 0,733 \text{ A}$$

$$i_{3,e} = \frac{22}{63,7} = 0,345 \text{ A}$$

e per le fasi i_2 è in fase con $v_{3,4}$ e i_2 è in quadratura in anticipo.

La figura 7.17 riporta i vettori rappresentativi delle varie grandezze.

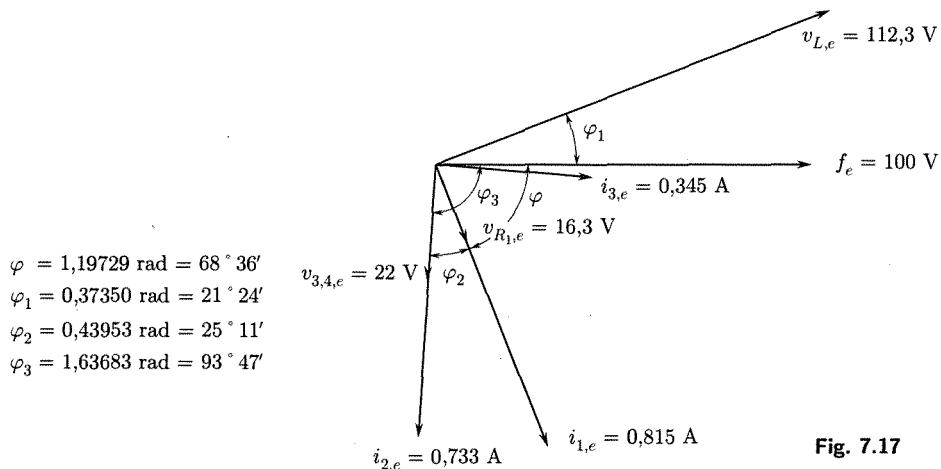


Fig. 7.17

A completare le considerazioni svolte in questo paragrafo sulla trattazione delle reti in corrente alternata va osservato che i teoremi sui circuiti introdotti per il caso di correnti stazionarie al cap. 3. par. 3.12 si estendono al caso di regime quasi stazionario modificandoli opportunamente ed essi consentono molto spesso di semplificare notevolmente i problemi pratici, specie in reti complesse quali quelle che talvolta si impiegano nella trasmissione di informazioni.

Riportiamo qui le espressioni di tali teoremi.

Teorema di sovrapposizione: se una rete di impedenze lineari contiene più di un generatore, la corrente che passa in un qualsiasi punto è la somma delle correnti che ciascun generatore da solo farebbe circolare qualora gli altri generatori fossero sostituiti da impedenze pari alla loro impedenza interna.

Teorema di reciprocità: se una f.e.m. applicata in un ramo di una rete di impedenze lineari produce una certa corrente in un altro ramo qualsiasi, la stessa f.e.m., se inserita in quest'ultimo ramo, produrrebbe la stessa corrente nel primo ramo.

Teorema di Thevenin: una qualsiasi rete formata da impedenze lineari e generatori che ha due terminali può essere sostituita da una f.e.m. che agisce in serie con una impedenza. La f.e.m. è pari alla d.d.p. ai terminali a circuito aperto e l'impedenza è l'impedenza vista ai terminali quando tutti i generatori nella rete sono stati sostituiti da impedenze uguali alle loro impedenze interne.

La dimostrazione di questi tre teoremi si basa sulla linearità delle equazioni di Kirchhoff ed è immediata.

Teorema del massimo trasferimento di potenza: una qualsiasi rete a due terminali assorbe la massima potenza da un generatore quando l'impedenza di carico è coniugata della impedenza interna del generatore. Questo sarà dimostrato al par. 7.6.

*Teorema
di sovrapposizione*

Teorema di reciprocità

Teorema di Thevenin

*Teorema del massimo
trasferimento di potenza*

■ 7.5. POTENZA NEI CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Si abbia (fig. 7.18) una rete qualsiasi (comprendente eventualmente anche generatori e motori nel suo interno) la quale termini con due morsetti (A, B). A tali morsetti venga applicata dall'esterno mediante un generatore una d.d.p.

$$(128) \quad v = v_M \sin \omega t$$

e vi passi una corrente di intensità

$$(129) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi).$$

L'energia assorbita nel tempo dt vale

$$(130) \quad dw = vi dt$$

e la potenza istantanea

$$P = vi = v_M i_M \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)$$

$$(131) \quad P = \frac{v_M i_M}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)].$$

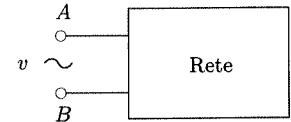


Fig. 7.18

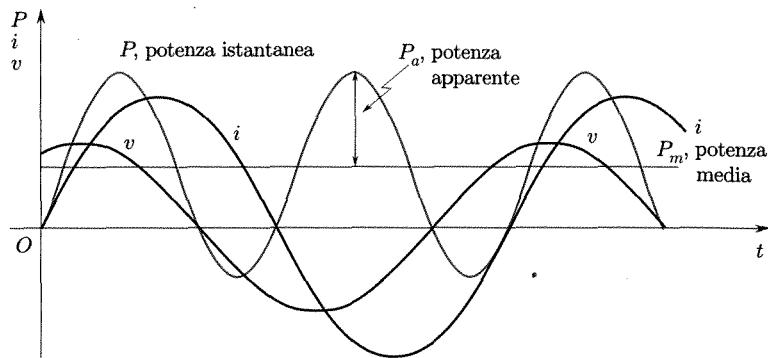


Fig. 7.19

La potenza istantanea oscilla (fig. 7.19) con frequenza doppia della frequenza della corrente, intorno ad un valore medio che prende il nome di potenza media:

*Formula
di Galileo Ferraris*

$\cos \varphi$ è il fattore
di potenza

Potenza apparente

La potenza media
assorbita dipende
da $\cos \varphi$ che deve essere
mantenuto alto

$$(132) \quad P_m = \frac{v_M i_M}{2} \cos \varphi = v_e i_e \cos \varphi,$$

essendo v_e ed i_e i valori efficaci delle grandezze e $\cos \varphi$ il cosiddetto fattore di potenza. La (132) costituisce la cosiddetta relazione di Galileo Ferraris. Altre espressioni per la potenza media sono:

$$(133) \quad P_m = \frac{v_e^2}{Z} \cos \varphi = Z i_e^2 \cos \varphi.$$

L'ampiezza della oscillazione della potenza istantanea è

$$(134) \quad P_a = \frac{v_M i_M}{2} = v_e i_e$$

e prende il nome di potenza apparente. Essa ha importanza nella caratterizzazione della capacità delle macchine elettriche giacché nello studio di queste è possibile vedere che esistono limitazioni su v_e ed i_e essenzialmente indipendenti dallo sfasamento φ tra corrente e tensione.

La potenza media in accordo alla relazione di Galileo Ferraris dipende in maniera essenziale dal fattore di potenza $\cos \varphi$.

Diamo un esempio della importanza pratica del fattore di potenza. I motori essendo costituiti da avvolgimenti con elevati valori di L , sono apparecchi che assorbono corrente in ritardo rispetto alla d.d.p. applicata, cioè per essi esiste un $\cos \varphi$ che in alcuni casi può essere basso (φ elevato). Se si considera uno di questi motori ed una lunga linea di alimentazione che lo collega ad un generatore, è evidente che a parità di potenza media usata e di tensione di alimentazione usata, un $\cos \varphi$ più basso conduce ad una corrente maggiore assorbita. Siccome le perdite sulla linea sono essenzialmente dovute ad effetto Joule, si vede che a parità di potenza media usata dal motore, le perdite di alimentazione crescono man mano che $\cos \varphi$ decresce. Per questa ragione le società di distribuzione di energia elettrica impongono che le utenze abbiano un valore di $\cos \varphi$ che non si discosti molto dall'unità.

Nel caso di utilizzatori caratterizzati da $\cos \varphi$ piccolo, l'aumento del fattore di potenza per la potenza assorbita (rifasamento della corrente) si può conseguire disponendo in parallelo ai motori dei condensatori: in tal caso lo sfasamento della corrente totale assorbita viene ridotto ed il $\cos \varphi$ aumenta.

La potenza media può come si è detto essere scritta nella forma (133)

$$P_m = i_e^2 Z \cos \varphi$$

essendo Z la impedenza fra i punti A e B e φ lo sfasamento fra corrente e d.d.p. prodotto dalla stessa impedenza.

Poiché

$$(135) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{R}{Z}$$

si ha che

$$(136) \quad P_m = i_e^2 R .$$

Ciò significa che la potenza fornita dal generatore e mediata su un periodo viene dissipata nella parte resistiva del circuito. La parte della potenza istantanea (131) che si aggiunge alla potenza media corrisponde ad energia che il generatore fornisce durante parte del ciclo per aumentare l'energia magnetica immagazzinata nell'induttanza e quella elettrica nella capacità; essa peraltro, nella condizione di regime alle quali ci riferiamo, viene completamente restituita al generatore durante il resto del ciclo.

La potenza media fornita dal generatore viene dissipata nella parte resistiva del circuito

7.6. ADATTAMENTO DI IMPEDENZA FRA GENERATORE E CIRCUITO UTILIZZATORE

Si abbia un generatore (fig. 7.20) che sia caratterizzato da una f.e.m. sinusoidale f e da una impedenza interna

$$(137) \quad Z_i = R_i + jX_i .$$

Esso venga collegato ad un utilizzatore del quale si possa variare la impedenza

$$(138) \quad Z_e = R_e + jX_e .$$

Vogliamo determinare la condizione di *adattamento* per il massimo trasferimento di potenza dal generatore all'utilizzatore. Evidentemente le due impedenze sono in serie e per la ampiezza complessa della corrente si ha

$$(139) \quad i_M = \frac{f_M}{Z_i + Z_e} = \frac{f_M}{(R_i + R_e) + (X_i + X_e)} .$$

Se ne deduce per l'ampiezza reale di i

$$(140) \quad i_M = \frac{f_M}{\sqrt{(R_i + R_e)^2 + (X_i + X_e)^2}}$$

e per la potenza media dissipata nell'utilizzatore (R_e)

$$(141) \quad P_e = \frac{1}{2} R_e i_M^2 = \frac{1}{2} \frac{R_e f_M^2}{(R_i + R_e)^2 + (X_i + X_e)^2} .$$

Si faccia ora variare X_e fino ad ottenere il massimo di P_e . Tale massimo si ha per

$$(142) \quad X_e = -X_i$$

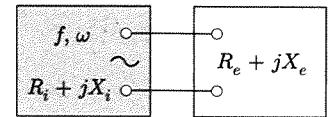


Fig. 7.20

e vale

$$(143) \quad P_e = \frac{1}{2} \frac{R_e f_M^2}{(R_i + R_e)^2} = \frac{1}{2} \frac{f_M^2}{\left(\sqrt{R_e} + \frac{R_i}{\sqrt{R_e}}\right)^2}$$

Al denominatore si ha fra parentesi la somma di due termini il cui prodotto è una costante (R_i). Il minimo di tale somma al variare di R_e si ha quando

$$(144) \quad R_e = R_i.$$

La potenza trasferita è quindi massima, e vale

$$(145) \quad P_{e,\max} = \frac{f_M^2}{8R_i}$$

*La potenza trasferita
è massima quando
 $R_e = R_i$ e $X_e = -X_i$*

quando l'impedenza dell'utilizzatore ha la stessa resistenza interna del generatore e reattanza opposta, quando cioè è rappresentata dal numero complesso coniugato (indicato con asterisco) dell'impedenza del generatore

$$(146) \quad Z_e = R_e + jX_e = R_i - jX_i = Z_e^* = Z_i.$$

■ 7.7. MISURAZIONE DELLE GRANDEZZE NEI CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Per la misurazione di grandezze alternative si possono impiegare apparecchi nei quali accade che la forza sull'equipaggio mobile sia istante per istante proporzionale al quadrato della grandezza in misura: si trova infatti che se il periodo di oscillazione proprio dell'equipaggio è molto superiore a quello della grandezza alternativa, l'equipaggio assume una deviazione proporzionale alla media dei valori della forza, cioè alla media dei quadrati dei valori istantanei della grandezza in misura: si ottiene quindi, in scala quadratica, il valore efficace della grandezza sinusoidale in misura.

Si comprende quindi come per la misurazione di differenze di potenziale alternative si possano usare vari elettrometri o voltmetri elettrostatici (cap. 1, par. 1.23). Per la misurazione di intensità di corrente ed anche di d.d.p. sono tuttavia molto più usati gli strumenti elettrodinamici già esaminati al cap. 4.

Intensità di correnti alternative possono inoltre essere determinate anche con strumenti a filo caldo, giacché l'effetto Joule che in essi si utilizza e che conduce per esempio all'allungamento di un filo (cap. 3, par. 3.6), dipende dal quadrato del valore istantaneo della corrente.

Per misurazioni di intensità di corrente e d.d.p. alternative molto usati sono anche dispositivi formati da un raddrizzatore ed uno strumento a bobina mobile (per c.c.).

La misurazione della potenza è effettuata con wattmetri elettrodinamici (fig. 7.21) del medesimo tipo di quelli usati per c.c. La bobina fissa è percorsa dalla corrente nel circuito (è inserita in serie); la bobina mobile è disposta con una resistenza R in serie ai capi del circuito; essa è attraversata da una corrente di intensità i proporzionale alla tensione: l'autoinduzione della bobina è infatti molto piccola rispetto alla resistenza

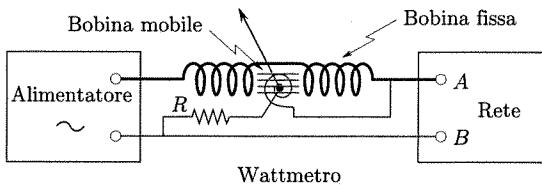


Fig. 7.21

(R) sicché i_e può essere ritenuta pari a v/R essendo v la d.d.p. ai capi del circuito. La coppia sulla bobina mobile è ad ogni istante proporzionale al prodotto della corrente nel circuito e della d.d.p. ai suoi capi e quindi la deviazione, essendo proporzionale al valore medio della coppia, è proporzionale a

$$P_m = v_e i_e \cos \varphi$$

che è la potenza media agente nel circuito.

La misurazione delle resistenze e delle reattanze (induttive e capacitive) viene fatta in genere con circuiti a ponte⁽¹⁵⁾, la cui descrizione esula dagli scopi della presente trattazione e va ricercata in testi di misure elettriche.

■ 7.8. OSCILLAZIONI LIBERE IN UN CIRCUITO *RLC*

Si abbia ancora un circuito *RLC* (fig. 7.22) quale quello di figura 7.11, privo tuttavia del generatore che imprima una sollecitazione a frequenza determinata. Supponiamo che ad un certo istante al circuito venga data una certa energia: ciò può farsi chiudendo un interruttore che dà la continuità al circuito dopo aver caricato il condensatore (caso indicato in figura); può farsi anche trasferendo dell'energia magnetica al circuito tramite un accoppiamento induttivo con un altro circuito.

L'equazione del circuito è in questo caso derivata dalla (80) dalla quale differisce perché priva del termine noto; è cioè l'equazione differenziale lineare omogenea la cui soluzione entra nella soluzione generale della (80)

$$(147) \quad \begin{aligned} -L \frac{di}{dt} - v &= Ri \\ L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0. \end{aligned}$$

Questa equazione è identica a quella che regge il moto di una massa sottoposta ad una forza elastica di richiamo verso una posizione di riposo e soggetta a resistenze passive (proporzionali alla velocità)⁽¹⁶⁾

$$(148) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + hx = 0$$

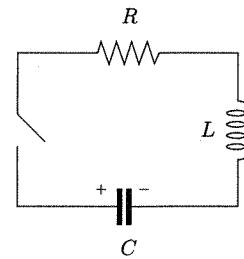


Fig. 7.22

⁽¹⁵⁾ Essi richiamano lo schema del ponte di Wheatstone, ma sono notevolmente più complessi perché l'equilibrio del ponte richiede il soddisfacimento contemporaneo di condizioni particolari per le resistenze e per le reattanze (cioè per le parti reali e per le parti immaginarie delle impedenze complesse) dei rami del ponte.

⁽¹⁶⁾ Si veda vol. I, cap. 2, par. 2.18, in cui abbiamo dato solamente la soluzione generale, desideriamo qui discutere la equazione differenziale.

La soluzione generale dell'equazione differenziale (147) si trova con i normali metodi dell'analisi. Posta la corrente nella forma

$$(149) \quad i = \text{cost} \cdot e^{kt}$$

si deduce, sostituendo nella (147), l'equazione caratteristica

$$(150) \quad Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

che fornisce i valori di k

$$(151) \quad k_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

La soluzione generale è pertanto

$$(152) \quad i(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$$

e contiene *due* costanti che vanno determinate con le condizioni ai limiti, come è sempre per una equazione differenziale del 2° ordine. La espressione della d.d.p. ai capi del condensatore si ottiene dall'equazione del circuito

$$(153) \quad v(t) = -Ri - L \frac{di}{dt} = -A_1(R + Lk_1)e^{k_1 t} - A_2(R + Lk_2)e^{k_2 t}.$$

Le costanti A_1 ed A_2 si possono ottenere se si conoscono i valori di i o di v in due diversi istanti.

Per discutere la soluzione generale occorre porre attenzione al valore del discriminante

$$(154) \quad \Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}.$$

Tre casi sono possibili

a. Se tale discriminante è maggiore di zero le due quantità (151)

$$\frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

$$\Delta > 0$$

sono entrambe negative (tranne se $L = 0$ o $C = \infty$, casi che qui non consideriamo). In tal caso entrambi gli esponenziali nella espressione di $i(t)$ sono decrescenti e quindi per $t \rightarrow \infty$, i tende a zero. Si ha quindi nella corrente un decadimento monotono. Nella figura 7.23 viene considerato il caso di un circuito che viene chiuso all'istante $t = 0$ essendo il condensatore carico alla tensione V_0 . Sia $C = 0,01 \mu\text{F}$, $L = 0,1 \text{ mH}$. La figura 7.23a corrisponde ad una resistenza $R = 500 \Omega$ per cui

$$R^2 - 4\frac{L}{C} = 21 \cdot 10^4 > 0.$$

Si è cioè nelle condizioni discusse. La figura riporta il decadimento monotono di v quale si può dedurre dalla (153) e la corrente $i(t)$.

b. Consideriamo ora il caso

$$\Delta = 0$$

$$(155) \quad \Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} = 0$$

cioè

$$(156) \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

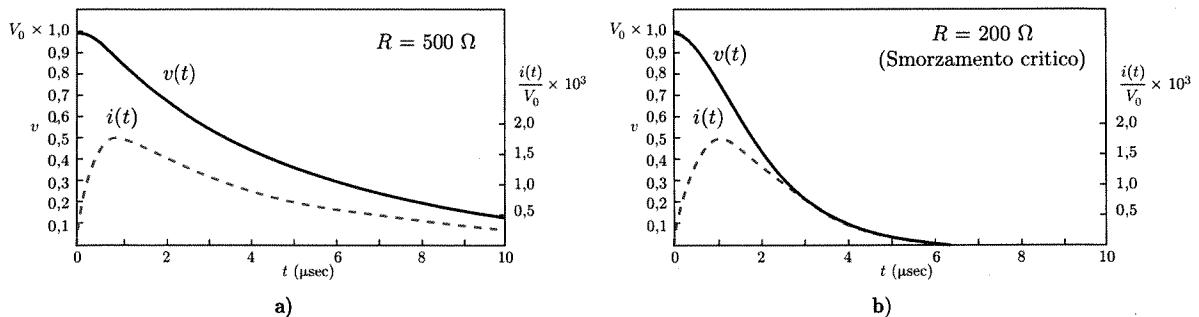
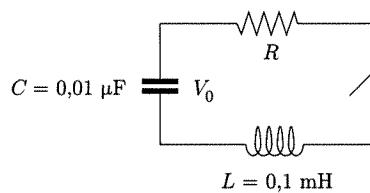


Fig. 7.23 a e b

In tal caso $k_1 = k_2 = k$. Nella (152) la i finirebbe col dipendere da una sola costante arbitraria. Siccome nella soluzione di una equazione generale del 2° ordine vi debbono essere due costanti, la (152) non rappresenta la soluzione generale. È facile vedere, per esempio sostituendo nella (147), che la soluzione generale in questo caso può essere posta nella forma

$$(157) \quad i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{kt}.$$

La soluzione ha la caratteristica di approssimare il valore limite (per $t = \infty$) più rapidamente di tutte le soluzioni che si hanno per $\Delta > 0$. Per tale ragione la condizione (156) prende il nome di condizione di smorzamento critico.

Nella figura 7.23b viene considerato il decadimento della d.d.p. al condensatore carico (d.d.p. iniziale V_0) e la $i(t)$ in condizioni di smorzamento critico per un circuito con L e C uguali a quelli cui si riferisce la figura 7.23a

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-8}}} = 200 \Omega.$$

c. Particolarmente interessante è il terzo caso (piccolo smorzamento)

$$(158) \quad \Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} < 0 \quad \Delta < 0$$

quando k_1 e k_2 divengono complessi. Si ponga

$$(159) \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Ne risulta

$$(160) \quad k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\omega_0.$$

Di conseguenza la soluzione generale è una combinazione lineare delle due soluzioni particolari indipendenti

$$(161) \quad e^{-\frac{R}{2L}t}e^{+j\omega_0 t} \\ e^{-\frac{R}{2L}t}e^{-j\omega_0 t}$$

o di due altre qualsiasi soluzioni anche esse indipendenti. Per ottenere la soluzione generale espressa in termini di funzioni reali conviene scegliere come due soluzioni indipendenti quelle che si ottengono prendendo la semisomma e la semidifferenza moltiplicata per $-j$ delle (161)

$$(162) \quad e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) = e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \omega_0 t$$

$$(163) \quad e^{-\frac{R}{2L}t}(-j) \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) = e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega_0 t.$$

Le espressioni a secondo termine si ottengono facendo uso delle relazioni di Eulero⁽¹⁷⁾. La soluzione generale della (147) può quindi porsi nella forma

$$(164) \quad i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t)$$

o nella forma

$$(165) \quad i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} A \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

essendo le costanti A_1, A_2, A e φ legate dalle relazioni

$$(166) \quad \begin{aligned} A \cos \varphi &= A_1 \\ A \sin \varphi &= A_2. \end{aligned}$$

Per v si ha dalla (147), usando la (165)

$$(167) \quad v(t) = -Ae^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2} \cos(\omega_0 t - \varphi) - L\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) \right].$$

Tanto la $i(t)$ quanto la $v(t)$ hanno un andamento oscillatorio con una ampiezza che decresce nel tempo con una costante (di tempo)

$$(168) \quad \tau = \frac{2L}{R}.$$

Questa costante esprime il tempo richiesto perché l'ampiezza si riduca nel rapporto $1 : e$. Come si vede lo smorzamento è tanto più rapido (τ tanto più piccolo) quanto maggiore è R .

Lo smorzamento relativo in un circuito oscillante del tipo che qui si discute, viene descritto sia mediante il decremento logaritmico⁽¹⁸⁾ sia mediante il fattore di

⁽¹⁷⁾ $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$; $e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$.

⁽¹⁸⁾ Si veda il vol. I, cap. 2, par. 2.18. Il decremento logaritmico esprime il logaritmo del rapporto fra successivi massimi

$$(169) \quad \log \frac{i_{\max,n}}{i_{\max,n+1}} = \frac{R}{2L} T = \frac{\pi}{Q}$$

essendo T il periodo dell'oscillazione.

qualità, Q , il quale fornisce il rapporto

$$(170) \quad Q = 2\pi \frac{\text{energia massima immagazzinata}}{\text{energia dissipata per ciclo}}$$

Esso fornisce, in radianti, l'angolo ωt richiesto perché l'energia si riduca nel rapporto $1/e$. Nel caso presente, l'energia massima immagazzinata è

$$(171) \quad \frac{1}{2} L i_{\max}^2.$$

Quella dissipata per ciclo, supponendo che per un periodo la corrente possa essere considerata sinusoidale,

$$(172) \quad R i_e^2 T = R \frac{i_{\max}^2}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{R}{\omega} i_{\max}^2 \pi$$

Si ottiene quindi

$$(173) \quad Q = \frac{\omega L}{R}.$$

Le oscillazioni avvengono con la frequenza

$$(174) \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{Frequenza propria}$$

che prende il nome di frequenza propria.

Le oscillazioni durano tanto più a lungo quanto minore è R .

Le figure 7.23 c e d rappresentano la d.d.p. ai capi del condensatore nel circuito lì considerato per $R = 50 \Omega$ ed $R = 10 \Omega$.

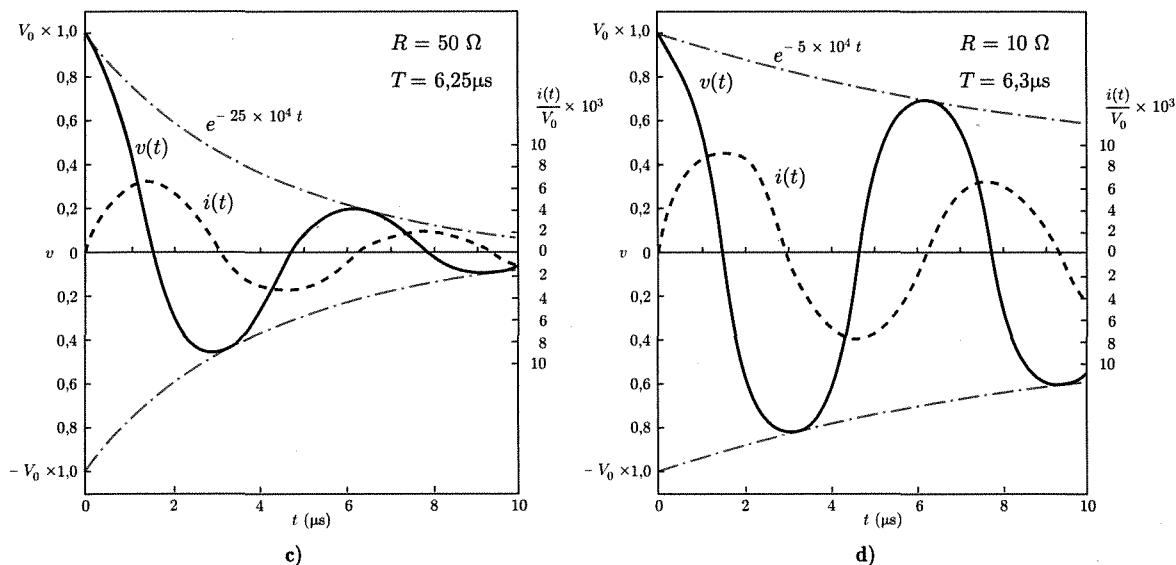


Fig. 7.23 c e d

Nel caso limite $R \rightarrow 0$, le oscillazioni divengono persistenti ($e^{-(R/2L)t}=1$) e la frequenza diviene

$$(175) \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Si osservi che per $R = 0$ la i e la v hanno le espressioni

$$(176) \quad i(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi) = A \sin\left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(177) \quad v(t) = A\omega_0 L \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

La corrente e la tensione ai capi del condensatore sono in quadratura. Il valore massimo dell'energia magnetica

$$(178) \quad \frac{1}{2} L i_M^2 = \frac{1}{2} L A^2$$

ed il valore massimo dell'energia elettrostatica

$$(179) \quad \frac{1}{2} C v_M^2 = \frac{1}{2} C A^2 \omega_0^2 L^2 = \frac{1}{2} L A^2$$

sono uguali. L'energia elettrostatica è massima quando v è massima ed i è nulla; quella magnetica è massima quando i è massima e v nulla. In altri termini in questo caso l'energia muta continuamente da magnetica ad elettrostatica trasferendosi alternativamente dall'induttore al condensatore (fig. 7.24).

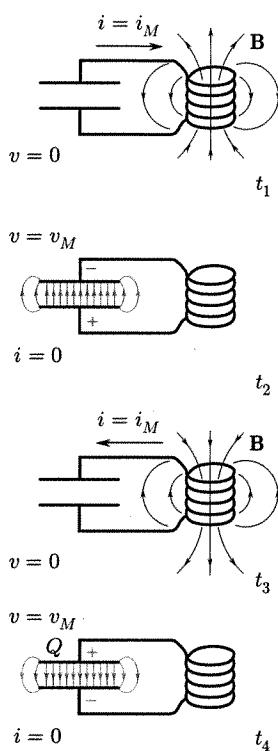
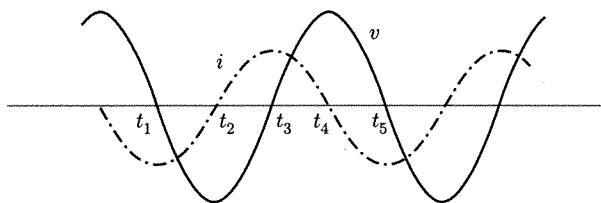


Fig. 7.24



In realtà esiste sempre una resistenza in un circuito ottenuto con un condensatore ed un induttore e quindi le oscillazioni sono smorzate. Oscillazioni persistenti possono essere ottenute da un circuito del tipo di quello di figura 7.22 se in qualche maniera si riesce a trasferire al circuito ad ogni ciclo una quantità di energia pari a quella dissipata nella resistenza. Ciò si fa introducendo nel circuito un elemento attivo (nel senso che fornisce energia al circuito) che compensi gli effetti della resistenza⁽¹⁹⁾. Elementi di questo genere si possono ottenere mediante archi elettrici (fig. 7.25b)⁽²⁰⁾, triodi, transistor.

I circuiti RLC con la introduzione dell'elemento attivo costituiscono il sistema normalmente usato per generare oscillazioni persistenti.

⁽¹⁹⁾ Si tratta di elementi circuituali che presentano una caratteristica corrente-tensione, che almeno in qualche regione del campo delle tensioni di funzionamento ha pendenza negativa: ad un aumento della intensità della corrente corrisponde una diminuzione della tensione. La figura 7.25a si riferisce al caso di un arco elettrico. In genere, nei casi di caratteristiche non lineari se la intensità di corrente (i) cambia di poco (Δi) nell'intorno di un dato valore (punto di lavoro) (V_0, I_0) la reale caratteristica corrente-tensione può essere con buona approssimazione sostituita dalla sua tangente nel punto di lavoro. Il dispositivo è cioè caratterizzato nei limiti delle condizioni specificate da una caratteristica equivalente lineare (come per i componenti ohmici). La pendenza della tangente in un punto di lavoro ad una caratteristica corrente-tensione non lineare prende il nome di *resistenza differenziale*. Gli elementi circuituali non lineari che hanno interesse nelle presenti considerazioni sono a *resistenza differenziale negativa*.

⁽²⁰⁾ Nello schema di figura 7.25b compaiono due bobine di arresto: la loro induttanza è molto grande ed impedisce alla corrente alternata di passare attraverso la batteria. Il circuito oscillante è formato dall'arco in serie con L, R, C .

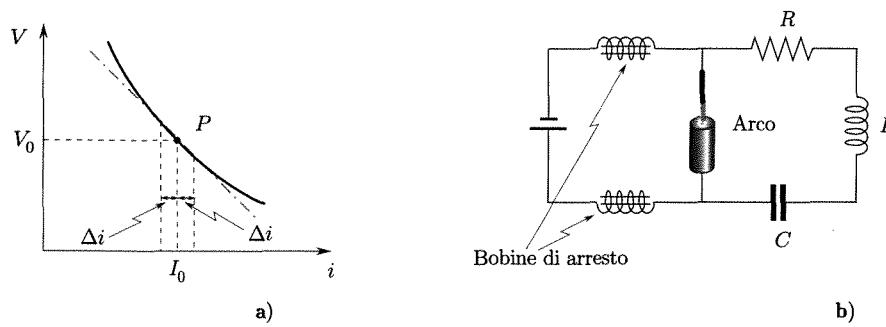


Fig. 7.25

Si osservi, equazione (175), che al crescere della frequenza delle oscillazioni, i valori che i parametri L e C in un circuito oscillante (oscillazioni libere) devono avere, decrescono. Per esempio per $\nu = 100$ Hz il prodotto LC vale $2,5 \cdot 10^{-6}$; per $\nu = 10^6$ Hz il prodotto LC vale $2,5 \cdot 10^{-14}$; per $\nu = 10^8$ Hz, $LC = 2,5 \cdot 10^{-20}$. Al crescere della frequenza di risonanza pertanto i valori dei parametri L e C di un circuito risonante decrescono e divengono talmente piccoli che non è più possibile trascurare la induttanza e la capacità dei conduttori di collegamento nel circuito: si deve di necessità passare a considerare circuiti a costanti distribuite; a tali frequenze elevate inoltre non vale più l'ipotesi di quasi stazionarietà. La analisi di questi importanti problemi e lo studio di nuovi particolari dispositivi (cavità, guide d'onda) vanno fatti considerando gli effetti di propagazione; essi esulano dai limiti del presente testo.

7.9. OSCILLAZIONI FORZATE NEL CIRCUITO RLC . TRANSITORIO E RISONANZA

Riprendiamo ora in considerazione il circuito di figura 7.11 nel quale un generatore di f.e.m., di frequenza ν , fa passare corrente attraverso gli elementi RLC in serie. La equazione generale del circuito è la (80) ed è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea. La sua soluzione generale è la somma della soluzione dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Si osservi che l'equazione omogenea è quella che regge i processi descritti nel paragrafo precedente. Essa quindi rappresenta una corrente che finisce con l'attenuarsi nel tempo con andamento monotono od oscillatorio secondo il valore del discriminante

$$R^2 - 4\frac{L}{C}.$$

Essa ha importanza solo nello studio dei transistori, come quando il circuito di figura 7.11 viene chiuso, o quando il generatore viene eliminato. Per il funzionamento a regime ha quindi solamente importanza la soluzione particolare discussa al paragrafo 7.3c

$$(180) \quad i = i_M \sin(\omega t - \varphi) = \frac{f_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$(181) \quad \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

È interessante osservare come vari la intensità della corrente di regime i al variare di ν , rimanendo costanti gli altri parametri. La corrente ha un massimo quando

$$(182) \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

cioè quando

Risonanza serie

$$(183) \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

In questo caso la frequenza della f.e.m. applicata uguaglia quella (ν_0) delle oscillazioni proprie nel circuito privo di resistenza data dalla (175). Queste condizioni si chiamano di risonanza serie. In tal caso l'impedenza (84) si riduce alla sola resistenza

$$(184) \quad Z = R$$

e la corrente

$$(185) \quad i_{ris} = \frac{f_M}{R} \operatorname{sen} \omega t$$

è in fase con la f giacché

$$(186) \quad \tan \varphi = 0$$

Ciò può anche essere descritto dicendo che l'impedenza complessa

$$(187) \quad Z = R + jX$$

si riduce alla sola parte reale R .

In queste condizioni le d.d.p. ai capi di L e C sono uguali ed opposte. La figura 7.26 mostra il diagramma dei vettori. Le d.d.p. v_{X_L} e v_{X_C} possono essere molte volte la f.e.m. applicata al circuito, se il Q del circuito è elevato. Si ha infatti

$$(188) \quad \frac{v_{X_L,M}}{f_M} = \frac{X_L i_M}{f_M} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q.$$

L'ampiezza della corrente

$$i_{ris,M} = \frac{f_M}{R}$$

cresce con il diminuire di R e tende ad infinito per $R \rightarrow 0$. La figura 7.27 mostra l'andamento di i_M al variare di ω per un circuito avente certi valori fissi di L e C e vari valori di R .

L'acutezza della curva di risonanza è naturalmente legata al Q del circuito. Per frequenze vicine a ω_0 cioè per

$$(189) \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

con $\Delta\omega$ piccolo rispetto ad ω_0 , si può scrivere

$$(190) \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) - \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)}.$$

Poiché $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, si ha

$$(191) \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left[1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} \right] \approx \omega_0 L \left(2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$$

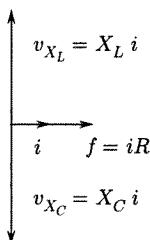


Fig. 7.26

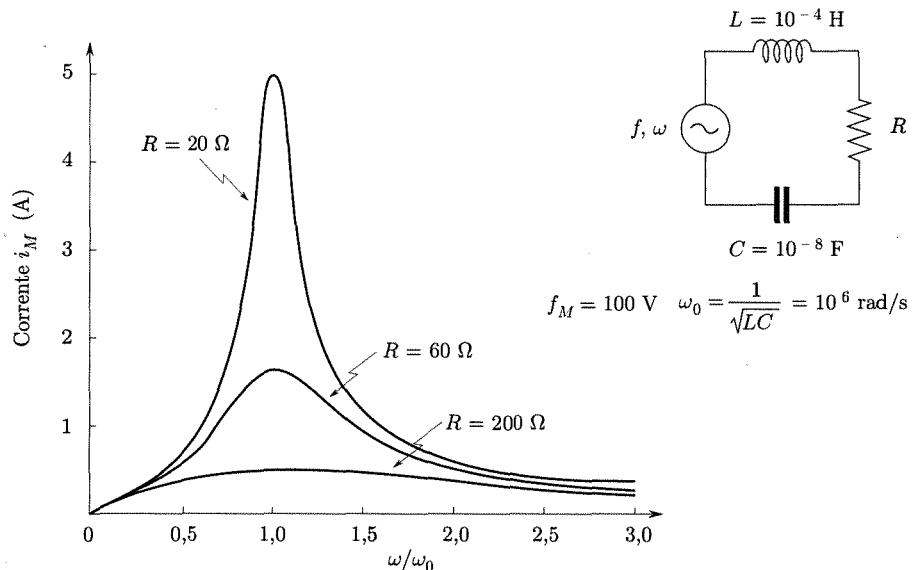


Fig. 7.27

Alla risonanza l'impedenza è

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2}.$$

Se ora si considera una variazione di ω , rispetto ad ω_0 , che riduca l'ampiezza della corrente dal valore di risonanza ad $i_{ris,M}/\sqrt{2}$ ciò corrisponde ad un raddoppio del valore del radicando nella espressione di Z . Si deve cioè avere, perché si abbia l'ampiezza della corrente $i_{ris,M}/\sqrt{2}$:

$$(192) \quad R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = 2R^2$$

cioè

$$(193) \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R.$$

Ciò corrisponde per la (191) a:

$$\omega_0 L \left(2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) = R$$

e

$$(194) \quad 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}.$$

I punti della curva di risonanza per i quali l'ampiezza della corrente è ridotta per un fattore $1/\sqrt{2}$ rispetto al valore massimo sono chiamati *punti di potenza metà*, giacché la potenza è proporzionale al quadrato della corrente. L'intervallo in pulsazione (o frequenza) che separa questi due punti (uno da una parte l'altro dall'altra della risonanza ω_0) considerato in rapporto ad ω_0 , caratterizza l'acutezza della curva di risonanza ed è pari a $1/Q$.

Per quello che riguarda φ , esso varia rapidamente nelle vicinanze di ω_0 passando da valori negativi nella (180) (corrente in anticipo rispetto alla f.e.m.) per $\omega < \omega_0$, quando $X = X_L + X_C$ è una reattanza capacitiva, a valori positivi per $\omega > \omega_0$ quando la reattanza diviene induttiva. La figura 7.28 indica φ per i circuiti di figura 7.27.

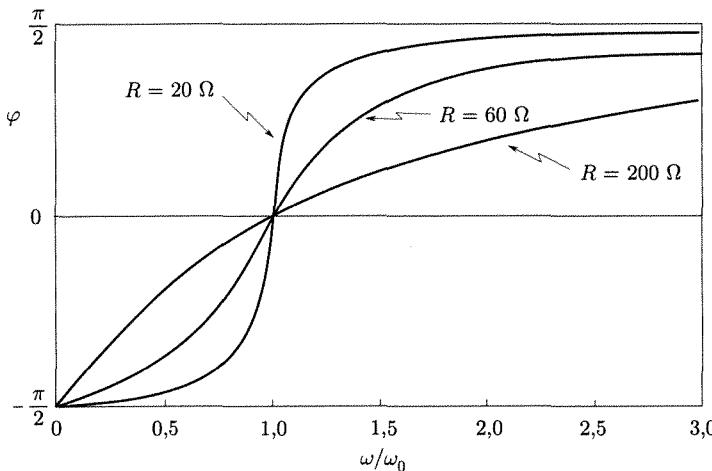


Fig. 7.28

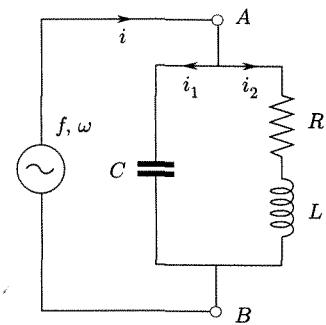


Fig. 7.29

Un circuito R, L, C , può essere alimentato da un generatore, oltre che secondo lo schema serie finora considerato anche secondo lo schema parallelo di figura 7.29 (21).

L'ammettenza complessa per un tale circuito (fra A e B) è la somma delle ammettenze dei due rami in parallelo

$$(195) \quad \mathbf{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

V'è una frequenza per la quale si verifica che tale ammettenza è reale. In questo caso il diagramma dei vettori rappresentativi delle correnti è indicato in figura 7.30.

La corrente totale i è molto più piccola delle correnti i_1 ed i_2 : al limite se R fosse zero la i sarebbe nulla perché le correnti nei due rami dovendo essere sfasate entrambe di $\pi/2$ rispetto a f (una in anticipo e l'altra in ritardo) non potrebbero dare risultante in fase con f e dovrebbero essere uguali ed opposte.

Una tale condizione (22) si chiama risonanza parallelo o antirisonanza. È facile calcolare la corrispondente frequenza $\omega_{0,p}$. Dalla condizione di ammettenza reale si ottiene

$$(196) \quad R^2 + \omega_{0,p}^2 L^2 = \frac{L}{C}$$

e

$$(197) \quad \omega_{0,p} = \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{R^2 C}{L} \right)^{1/2}.$$

(21) In tale schema si è ritenuta trascurabile la resistenza del condensatore (condensatore ideale privo di perdite) e dei suoi collegamenti. È questa una ipotesi di solito abbastanza bene verificata per il fatto che le perdite nel dielettrico del condensatore sono in genere molto piccole.

(22) La condizione di risonanza parallelo è a volte data come quella per cui la ammettenza è minima: in tal caso tuttavia la condizione dipende dalla grandezza che si sceglie di variare per ottenere la risonanza (C, L od ω). La differenza fra le varie condizioni è tuttavia piccola specie se il Q del circuito è elevato.

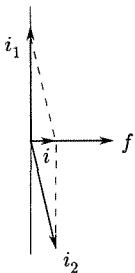


Fig. 7.30

Risonanza parallelo

Come si vede la frequenza di risonanza parallela non coincide con quella di risonanza serie. Essa peraltro non ne è molto discosta. Ciò può vedersi introducendo nella (197) il parametro Q . Per far ciò si ricordi la espressione (173) per Q ; essa darebbe nel caso in oggetto

$$(198) \quad Q = \frac{\omega_{0,p} L}{R}.$$

Se in prima approssimazione, si trascura per il calcolo di Q la differenza fra $\omega_{0,p}$ e $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ per il circuito serie, si ha

$$(199) \quad R^2 = \frac{\omega_0^2 L^2}{Q^2} = \frac{L}{Q^2 C}$$

e quindi dalla (197)

$$(200) \quad \omega_{0,p} = \left(\frac{1}{LC} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{Q^2} \right)^{1/2}.$$

Se si tiene presente che il Q dei circuiti RLC , ove R è essenzialmente la resistenza del conduttore che costituisce la bobina, ha valori dell'ordine di 60-100 ed anche più, si vede che effettivamente le due frequenze di risonanza, serie e parallelo, sono molto vicine. Esse tendono allo stesso valore per $R \rightarrow 0$.

Come si è detto le intensità della corrente in ciascun ramo sono molto superiori alla intensità della corrente complessiva i .

L'ampiezza della corrente i vale, [tenendo conto della (50)]

$$(201) \quad i_M = Yv_M = \frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L^2} v_M = \frac{RCv_M}{L}$$

L'ampiezza della i_1 attraverso il condensatore

$$(202) \quad i_{f,M} = \omega_0 C v_M$$

Il rapporto

$$(203) \quad \left| \frac{i_{1,M}}{i_M} \right| = \frac{\omega_0 L}{R} = Q.$$

Si osservi che tanto nel circuito serie quanto in quello parallelo l'impedenza alla risonanza diviene reale: nel caso del circuito risonante serie l'impedenza è minima alla risonanza, la corrente derivata dal generatore è massima e le d.d.p. ai capi di C e di L sono molto superiori a quella fornita dal generatore.

Nel caso del circuito nello schema parallelo, l'impedenza (inverso della ammettenza) è massima alla risonanza, la corrente derivata dal generatore è piccola e molto inferiore a quella che passa nei rami L e C .

Le figure 7.31 e 7.32 indicano andamenti tipici di Z e di φ per un circuito risonante serie (7.31) e parallelo (7.32) ($\omega_0 = 1.000$ rad/sec).

Si noti che nel circuito serie la reattanza è capacitiva (corrente in anticipo sulla d.d.p.) a frequenza più bassa della risonanza ed induttiva per la frequenza più alta; il contrario accade per il circuito parallelo.

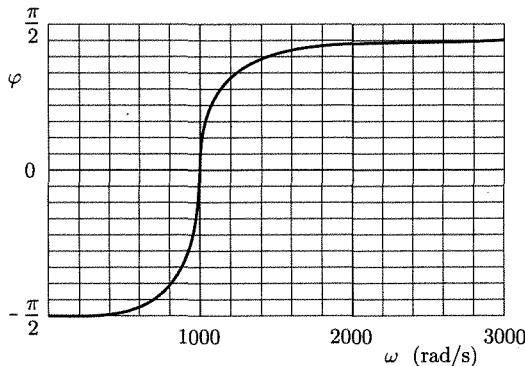
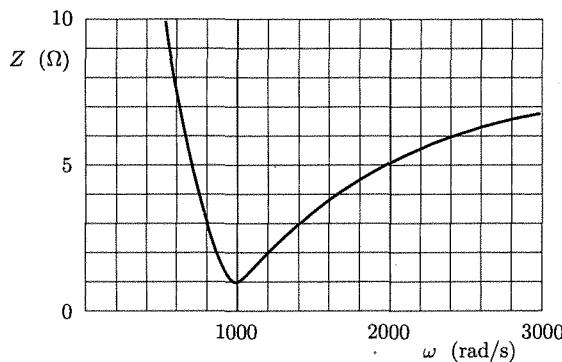


Fig. 7.31

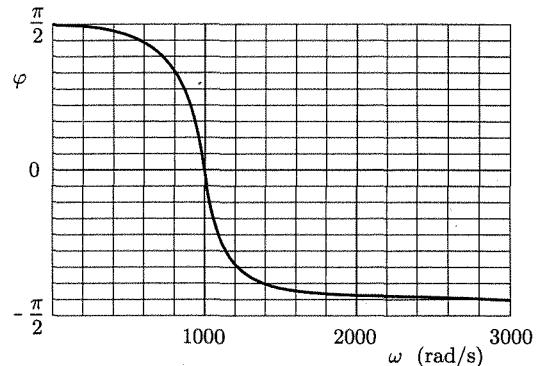
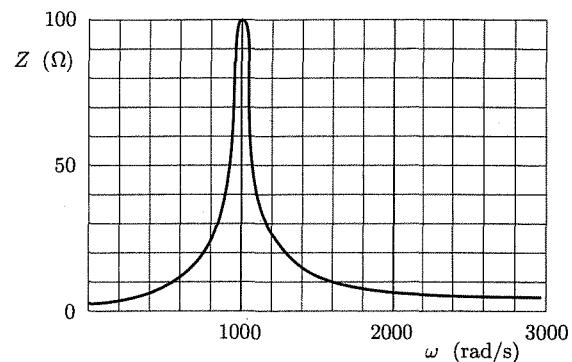


Fig. 7.32

■ 7.10. TRASFORMATORE STATICO

Il trasformatore statico è un dispositivo di grande utilità nel campo delle *correnti variabili*; il suo funzionamento è fondato sulla induzione elettromagnetica. Esso è formato da due avvolgimenti, aventi in genere un numero di spire diverso, separati elettricamente fra loro ma disposti in maniera tale che il medesimo flusso magnetico si concatene con ciascuna spira di entrambi, quando una corrente passi in uno di essi; se cioè si considera il tubo di linee di induzione (**B**) creato dalla corrente che passa in uno degli avvolgimenti esso resta concentrato nello spazio interno ad entrambi gli avvolgimenti⁽²³⁾.

I trasformatori possono essere realizzati in un mezzo quale l'aria come indica lo schema di fig. 7.33a; per molte applicazioni tuttavia riesce utile usare un nucleo di materiale ferromagnetico (fig. 7.33b). Quest'ultima disposizione ha i vantaggi di fare corrispondere ad una data corrente in uno degli avvolgimenti, un valore più grande per **B** e quindi anche per il flusso concatenato, e di consentire una più facile realizzazione della condizione di assenza di flusso che si concatene solo con un avvolgimento, potendosi disporre i due avvolgimenti in corrispondenza a tratti diversi del circuito magnetico. La disposizione presenta peraltro, naturalmente, lo svantaggio della presenza di perdite nel nucleo; per quanto si cerchi di contenere tali perdite, esse costituiscono una grave limitazione per l'impiego di trasformatori a nucleo ferromagnetico alle frequenze molto elevate.

⁽²³⁾ Non v'è flusso disperso intendendo con ciò che non v'è alcuna parte di flusso che si concatene solo con un avvolgimento: questa circostanza si indica a volte dicendo che fra i due avvolgimenti v'è *induzione mutua completa*.

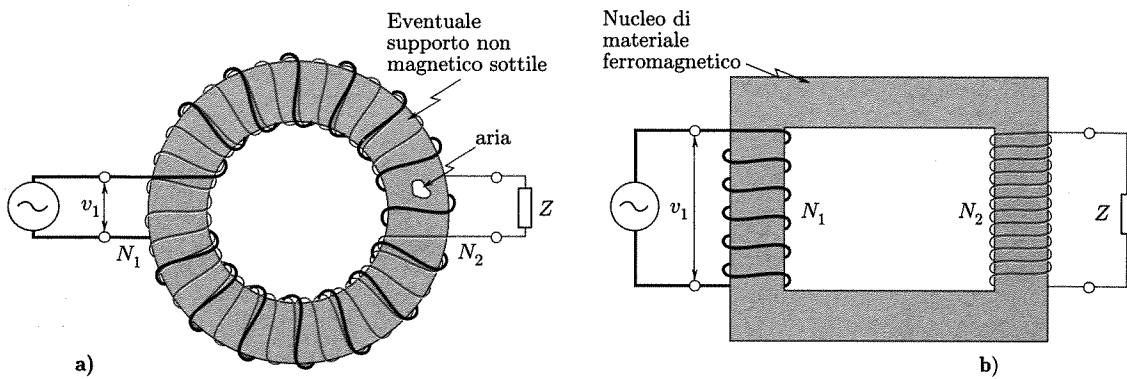


Fig. 7.33

Le principali proprietà caratteristiche dei trasformatori sono le seguenti:

1. essi consentono di alterare i fattori che entrano nella espressione della potenza per correnti alternate, pur lasciando la potenza inalterata. Per queste proprietà i trasformatori sono molto impiegati per es. nei circuiti di distribuzione della energia elettrica con correnti alternate di bassa frequenza, per passare da circuiti ove la d.d.p. è bassa (come quelli degli alternatori) a circuiti ad alta tensione (come le linee di trasmissione a grande distanza) o viceversa da circuiti ad alta tensione a circuiti a bassa tensione (come i comuni utilizzatori);
2. essi consentono di separare due circuiti, nel senso di effettuare una interruzione della continuità fra i conduttori dei due circuiti, pur assicurando l'accoppiamento fra loro; ciò è spesso utile per risolvere vari problemi quali quello dell'isolamento elettrostatico di alcuni circuiti rispetto ad altri;
3. essi consentono di effettuare un adattamento di impedenza fra parti di reti o fra dispositivi caratterizzati da impedenze diverse: per es. tubo elettronico (o transistor) ed altoparlante, microfono e circuito elettrico, circuito di uscita di un tubo elettronico ed antenna. Vedremo infatti che alterando il rapporto del numero delle spire dei due avvolgimenti si altera il rapporto delle relative impedenze.

Per discutere il comportamento di un trasformatore facciamo riferimento allo schema di trasformatore con nucleo ferromagnetico per correnti alternate di bassa frequenza. Ciò che diremo tuttavia vale anche nel caso generale di un trasformatore qualsiasi. Il primo circuito (detto primario) sia formato da N_1 spire e venga collegato con una sorgente di f.e.m. alternativa sinusoidale; il secondario abbia N_2 spire e sia collegato al carico utilizzatore. Nella trattazione semplice che qui faremo, assumeremo valide alcune ipotesi semplificative:

- a. supporremo che non vi sia flusso disperso (mutua induzione completa);
- b. supporremo che si possa ritenere μ_r per il materiale ferromagnetico del nucleo costante nei limiti in cui varia B nel funzionamento del trasformatore. In tali condizioni si può parlare di coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento primario (L_1) e del secondario (L_2) e di coefficiente di mutua induzione (M). Per l'ipotesi posta al punto a. i tre coefficienti

sono legati dalla relazione⁽²⁴⁾

$$(204) \quad M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

*Funzionamento
a secondario aperto*

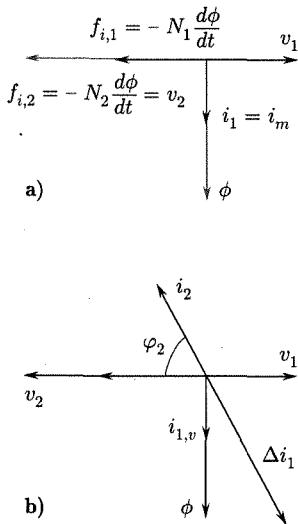


Fig. 7.34

*Rapporto
di trasformazione*

*Funzionamento
con carico*

Prima di stabilire le equazioni che descrivono il comportamento del trasformatore, cerchiamo di illustrare con ragionamenti semplici il suo funzionamento. Si immagini innanzitutto di avere il secondario aperto (senza carico). La corrente del generatore della d.d.p. sinusoidale applicata, assorbita dal circuito primario, è molto limitata e ha una fase rispetto alla d.d.p. applicata (v_1) molto prossima a $\pi/2$ in ritardo, data la elevata reattanza induttiva (ωL_1) dell'avvolgimento rispetto alla resistenza. Nella rappresentazione vettoriale di figura 7.34a si è appunto posto lo sfasamento $\pi/2$. La corrente primaria in quadratura con la d.d.p. (corrente di magnetizzazione i_m) serve a creare il campo magnetico alternativo e non conduce a consumo di potenza. Il flusso creato nel nucleo e quindi quello ϕ che si concatena con ogni spira (primaria o secondaria) è in fase con i_m . In tali condizioni la f.e.m. di autoinduzione

$$(205) \quad f_{i,1} = -\frac{d(N_1 \phi)}{dt} = -N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

equilibra la d.d.p. applicata: si ricordi che l'operazione di derivazione conduce ad un vettore rappresentativo ruotato di $\pi/2$ in anticipo rispetto al vettore rappresentativo di ϕ e quindi il vettore rappresentativo di $f_{i,1}$ è diretto in verso opposto a v_1 . Se consideriamo il secondario la d.d.p. ai capi del circuito è pari alla f.e.m. di induzione

$$(206) \quad f_{i,2} = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = v_2$$

Essa è rappresentata da un vettore diretto come $f_{i,1}$. Si conclude quindi che la d.d.p. ai capi del secondario è in opposizione di fase⁽²⁵⁾ alla d.d.p. v_1 applicata al primario. Per le ampiezze⁽²⁶⁾ si ha dalle (205) e (206)

$$(207) \quad \frac{v_{2M}}{v_{1M}} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

cioè le d.d.p. sono proporzionali ai numeri delle spire dei rispettivi avvolgimenti. Il numero n prende il nome di rapporto di trasformazione.

Se ora il secondario viene chiuso su un carico che per semplicità supponiamo in queste considerazioni elementari resistivo, una corrente circola nell'avvolgimento secondario e questo modifica lo stato magnetico nel nucleo e quindi il flusso: se $R_2 \ll \omega L_2$ la corrente i_2 è in ritardo di circa $\pi/2$ rispetto a v_2 . Il flusso creato da i_2 è, per la legge di Lenz, tale da ridurre il

⁽²⁴⁾ Nel caso, per es., di un nucleo toroidale la cui linea centrale sia lunga l , si trova, in analogia alle (60) e (68) del cap. 6

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 S}{l}; L_2 = \frac{\mu_0 \mu_r N_2^2 S}{l}; M = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 S}{l}$$

essendo S l'area della sezione delle spire, uguale nei due avvolgimenti.

⁽²⁵⁾ Qualora si considerasse la resistenza del primario, le due d.d.p. sarebbero ancora approssimativamente in opposizione, dato il piccolo valore della resistenza rispetto alla reattanza del primario.

⁽²⁶⁾ La relazione (207) è valida, naturalmente, sia come rapporto fra le ampiezze delle grandezze alternative sia come rapporto dei valori efficaci.

flusso ϕ (concatenato con ciascuna spira) che si aveva prima della chiusura del secondario e che origina la v_2 . Ciò produce una diminuzione di $f_{i,1}$ e quindi uno squilibrio fra la d.d.p. applicata al primario v_1 ed $f_{i,1}$; ne consegue un aumento della corrente primaria di magnetizzazione. Questo aumento produce un aumento di flusso, di v_2 , i_2 e così via di seguito fino a che un nuovo equilibrio venga raggiunto.

Se supponiamo che la d.d.p. applicata v_1 non vari per effetto del carico nel secondario, anche $f_{i,1}$, che la equilibra, non deve cambiare per effetto del carico e lo stesso vale per ϕ . Ciò significa che nelle nuove condizioni di equilibrio la forza magnetomotrice totale che determina ϕ deve essere la medesima di quella che si ha a vuoto. Se si indica con $i_{1,v}$ la corrente primaria a vuoto, Δi_1 la variazione per effetto del carico, ed i_2 la corrente secondaria si ha

$$N_1 i_{1,v} = N_1 i_{1,v} + N_1 \Delta i_1 + N_2 i_2$$

e quindi

$$(208) \quad N_1 \Delta i_1 = -N_2 i_2.$$

La corrente aggiunta nel primario è quindi rappresentata nel diagramma dei vettori (fig. 7.34b), da un vettore nella stessa direzione del vettore che rappresenta i_2 , verso opposto e modulo che si deduce da

$$(209) \quad \frac{\Delta i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = n.$$

Il rapporto fra la variazione di corrente primaria dovuta al carico e la corrente secondaria è pari al rapporto di trasformazione. Siccome nelle condizioni di funzionamento $i_{1,v} \ll \Delta i_1$ si può anche porre

$$(210) \quad \frac{i_1}{i_2} \approx \frac{N_2}{N_1}.$$

Si noti che lo sfasamento fra d.d.p. e corrente nel primario è, nelle ipotesi poste, praticamente pari a quello (φ_2) nel secondario; ciò significa che i fattori di potenza ($\cos \varphi$) nei due circuiti sono praticamente gli stessi.

Per la trattazione analitica del problema con il metodo dei numeri complessi, si consideri il circuito della figura 7.35 nella quale si indica con Z_1 una impedenza inserita in serie all'avvolgimento primario e Z_2 la impedenza del carico.

Il generatore consente di applicare al circuito serie della Z_1 e di L_1 la d.d.p.

$$(211) \quad v_1 = v_{1,M} \operatorname{sen} \omega t = v_{1,M} e^{j\omega t}$$

le correnti hanno le espressioni

$$(212) \quad i_1 = i_{1,M} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_1) = i_{1,M} e^{j(\omega t - \varphi_1)} = i_{1,M} e^{-j\varphi_1} e^{j\omega t} = i_{1,M} e^{j\omega t}$$

$$(213) \quad i_2 = i_{2,M} e^{j\omega t}.$$

Le equazioni dei circuiti si scrivono

$$(214) \quad v_{1,M} = (Z_1 + j\omega L_1) i_{1,M} + j\omega M i_{2,M}$$

$$(215) \quad 0 = (Z_2 + j\omega L_2) i_{2,M} + j\omega M i_{1,M}$$

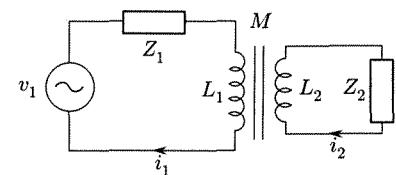


Fig. 7.35

Da tali relazioni, eliminando $i_{1,M}$ o $i_{2,M}$ si ha

$$(216) \quad \frac{v_{1,M}}{i_{1,M}} = Z_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$(217) \quad -\left(\frac{M}{L_1}\right) \frac{v_{1,M}}{i_{2,M}} = Z_2 + Z_1 \left(\frac{L_2}{L_1}\right) + j\omega \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)$$

avendo trascurato nella seconda equazione il termine $(Z_1 Z_2)/(j\omega L_1)$ che è più piccolo di un ordine di grandezza di Z_2 . Supponendo che nel secondario sia $\omega L_2 \gg Z_2$ si ha per l'impedenza totale del primario

$$(218) \quad Z_p = \frac{v_{1,M}}{i_{1,M}} = Z_1 + j\omega L_1 + \omega^2 M^2 \frac{Z_2 - j\omega L_2}{(Z_2 + j\omega L_2)(Z_2 - j\omega L_2)} = \\ = Z_1 + j\omega L_1 + \omega^2 M^2 \frac{Z_2 - j\omega L_2}{Z_2^2 + \omega^2 L_2^2} \simeq Z_1 + Z_2 \frac{M^2}{L_2^2} + j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$$

Nell'ipotesi fatte (*a e b* a pag. 381) vale la (204) e quindi l'ultimo termine della (218) è nullo. Se inoltre si tiene presente che le L sono proporzionali ai quadrati dei numeri di spire dei rispettivi avvolgimenti (nota 24)

$$(219) \quad \left(\frac{L_1}{L_2}\right) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

e

$$(220) \quad \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{1}{n}$$

si ottiene per l'impedenza primaria

$$(221) \quad Z_p = Z_1 + Z_2 \frac{1}{n^2}.$$

Per il circuito secondario si ha dalla (217) che la f.e.m. di induzione vale

$$(222) \quad v_{2,M} = -\frac{M}{L_1} v_{1,M} = -n v_{1,M}.$$

Essa cioè è in opposizione di fase con $v_{1,M}$ e ha un'ampiezza

$$(223) \quad \frac{v_{2,M}}{v_{1,M}} = \frac{1}{n} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Tale f.e.m. agisce in un circuito (secondario) di impedenza

$$(224) \quad Z_s = Z_2 + Z_1 \left(\frac{L_2}{L_1}\right) = Z_2 + Z_1 n^2$$

L'effetto del secondario che assorbe potenza, sul primario è rappresentato, vedi (221), da una impedenza aggiunta al primario (Z_2/n^2) . Si osservi che se $Z_1 = 0$ le impedenze primaria e secondaria hanno un rapporto costante e reale: ciò significa che gli sfasamenti fra d.d.p. e corrente nei due circuiti sono gli stessi e lo stesso vale per i fattori di potenza.

Nei riguardi della potenza si osservi che nell'ipotesi di mancanza di perdite, essa è uguale nel primario e nel secondario; infatti i fattori di potenza sono praticamente uguali, le d.d.p. vengono trasformate nel rapporto n , le correnti nel rapporto $1/n$ e quindi

$$(225) \quad v_{e,1} i_{e,1} \cos \varphi_1 = v_{e,2} i_{e,2} \cos \varphi_2.$$

*Perdite
in un trasformatore*

In realtà, tuttavia, perdite di energia sono sempre presenti. Esamiamo queste perdite nel caso di trasformatori a nucleo ferromagnetico per usi di bassa frequenza e per usi di frequenze più elevate (foniche, radio, microonde) che si hanno nelle telecomunicazioni. La trattazione precedente, da noi presentata per il caso di un trasformatore di bassa frequenza, resta, come si è già detto, essenzialmente invariata alle frequenze più elevate.

Le perdite di un trasformatore sono in genere quelle:

1. per effetto Joule negli avvolgimenti;
2. per isteresi e correnti parassite nel nucleo.

Per tenere le perdite per effetto Joule entro limiti ragionevoli occorre proporzionare le sezioni dei conduttori opportunamente: naturalmente l'avvolgimento con numero inferiore di spire, essendo attraversato da correnti più intense, deve essere realizzato con conduttori di sezione maggiore dell'altro avvolgimento. Il provvedimento generale preso per limitare le perdite per correnti parassite nel nucleo ferromagnetico è quello di frazionarlo: nelle applicazioni di bassa frequenza è sufficiente usare nuclei laminati (cap. 6, par. 6.5); nel caso di applicazioni per frequenze più alte (per es. qualche kHz) si usano nelle telecomunicazioni nuclei formati da polveri ferromagnetiche aggregate con un collante dielettrico. È bene infine notare che per i piccoli nuclei da usare a frequenza radio o delle microonde si usano spesso materiali speciali (ferriti) che pur avendo proprietà magnetiche simili a quelle dei materiali ferromagnetici sono isolanti. Le perdite per isteresi vengono tenute entro certi limiti accettabili ricorrendo a materiali magnetici (dolci) a ciclo di isteresi molto stretto; alcune leghe di ferro al silicio (4%) sono molto usate per trasformatori per applicazioni industriali; leghe speciali $Ni - Fe$ ad elevata permeabilità (permalloy) e notevolmente costose sono di preferenza usate nei piccoli trasformatori delle applicazioni di telecomunicazione.

Le perdite totali di energia nei trasformatori sono tenute entro limiti relativamente piccoli ed il rendimento (rapporto fra potenza fornita dal secondario e potenza consumata nel primario) è di solito superiore allo 0,9 e può raggiungere nei grandi impianti 0,99.

È bene notare che in uno stesso trasformatore le funzioni di primario e secondario possono essere scambiate, consentendo di passare da circuiti a bassa tensione a circuiti ad alta tensione e viceversa.

■ 7.11. CORRENTI TRIFASI

Si è visto (cap. 6, par. 6.5) che in una spira che ruoti a velocità costante in un campo magnetico uniforme si genera una f.e.m. sinusoidale che può essere collegata ad un carico esterno per mezzo di contatti strisciati su anelli solidali con la bobina. Se sullo stesso rotore si dispongono tre spire (o bobine) a $2\pi/3$ rad = 120° fra loro (fig. 7.36) si generano in esse tre f.e.m. sinusoidali della stessa frequenza, che differiscono per l'angolo di fase iniziale: ogni f.e.m. è sfasata di $2\pi/3$ rad rispetto alle altre due, in anticipo per una, in ritardo per l'altra.

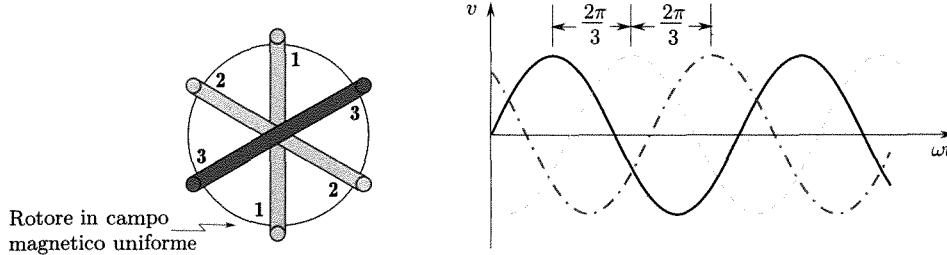
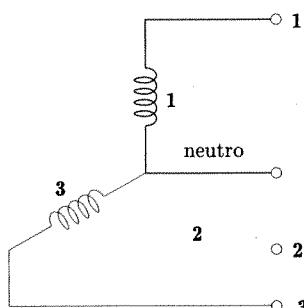
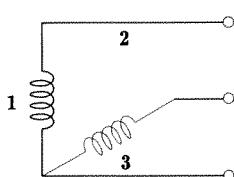


Fig. 7.36

Collegamento
a stella



a) collegamento a stella



b) collegamento a triangolo

Fig. 7.37

Ciascuna di queste f.e.m. potrebbe essere portata a due anelli ed essere utilizzata indipendentemente dalle altre. Il vantaggio del sistema sta invece nelle economie che si possono ottenere ricorrendo a collegamenti particolari dei tre avvolgimenti. La figura 7.37 mostra il collegamento a stella (a) ed a triangolo (b): i collegamenti necessari con i circuiti esterni sono ridotti a 3 giacché il neutro potrebbe, come si vedrà, essere eliminato. Illustriamo il collegamento a stella. I vettori che rappresentano le d.d.p. nei tre avvolgimenti (fig. 7.38a) sono tre vettori di uguale modulo e sfasati di $2\pi/3$ rad uno rispetto agli altri. Tali vettori ruotano con la stessa velocità e le loro proiezioni sull'asse y forniscono i valori istantanei delle d.d.p. che si hanno all'esterno fra ciascun conduttore ed il neutro. Si osservi che si può considerare anche la d.d.p. fra gli estremi di due fasi cioè fra i terminali non comuni di due avvolgimenti (1,2; 2,3; 1,3): essa è rappresentata da un vettore che ha modulo $\sqrt{3}v_M$, è cioè una d.d.p. sinusoidale di tale ampiezza (tensione concatenata). Il sistema trifase consente quindi di disporre di due differenti d.d.p. (una stellare di ampiezza v_M e l'altra concatenata, di ampiezza $\sqrt{3}v_M$). Nel caso che il carico sia ripartito fra le tre fasi in maniera equilibrata, le correnti nei tre avvolgimenti dei generatori hanno la stessa ampiezza e sono sfasate fra loro di $2\pi/3$ rad: esse sono rappresentate da vettori di ugual modulo e sfasati di $2\pi/3$ rad il cui risultante è zero (fig. 7.38b). Nel caso quindi di carico equilibrato la corrente nel conduttore neutro, cioè la somma delle tre correnti, è nulla e quindi il conduttore potrebbe essere tolto o, comunque, realizzato con filo di piccola sezione.

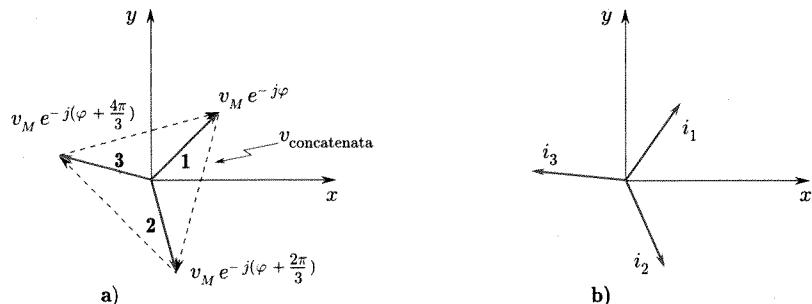


Fig. 7.38

Il sistema trifase consente notevoli economie nella generazione e nella trasmissione di potenza elettrica. Inoltre i motori asincroni trifasi (par. 7.13) sono molto estesamente usati per le loro caratteristiche meccaniche ed, in particolare, per il loro elevato rendimento. Sono queste le principali ragioni dell'uso prevalente del sistema trifase nella distribuzione della energia elettrica per usi industriali.

7.12. CAMPO MAGNETICO ROTANTE

Vogliamo ora esaminare varie maniere mediante le quali si possa ottenere in una regione limitata un campo magnetico di intensità costante la cui direzione ruoti uniformemente in un piano (campo magnetico rotante). Si consideri, innanzitutto, lo schema di figura 7.39: due avvolgimenti (ciascuno formato da due sezioni coassiali che includono la regione in cui si

vuole creare il campo in oggetto) sono disposte con gli assi normali (per es. x e y). La prima sia attraversata da una corrente di intensità

$$(226) \quad i_1 = i_{1,M} \sin \omega t$$

la seconda da una corrente di intensità

$$(227) \quad i_2 = i_{2,M} \sin(\omega t - \varphi)$$

Ciascuna delle bobine attraversate dalla corrente crea un campo alternativo avente la direzione dell'asse della bobina. Il campo risultante ha ad ogni istante come componenti nelle direzioni x ed y (fra loro normali) i due campi \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 creati da i_1 ed i_2 . Se si ricorda la composizione di moti armonici della stessa frequenza su due assi normali ed intorno allo stesso punto O (incrocio delle traiettorie) (vol. I, cap. 1, par. 1.13) si vede immediatamente che il campo magnetico risultante è rappresentato da un vettore con origine in O ed il cui estremo descrive in genere una ellisse la cui forma e posizione dipende dalle ampiezze di B_1 e B_2 e dal relativo sfasamento. Una rotazione completa è fatta nel periodo $T = 2\pi/\omega$. Nel caso particolare in cui $B_{1,M} = B_{2,M}$ e $\varphi = \pi/2$, l'estremo di \mathbf{B} descrive una circonferenza ed il campo rappresenta appunto un campo magnetico rotante di modulo costante.

Una seconda maniera per ottenere lo stesso risultato è quella di disporre (fig. 7.40) tre bobine i cui assi formino angoli di $2\pi/3$ rad fra loro e d'alimentarle con correnti della stessa intensità, sfasate di $2\pi/3$ rad, il che può essere facilmente ottenuto alimentandole con un sistema trifase. In questo caso infatti si hanno tre vettori disposti a $2\pi/3$ rad fra loro i cui moduli variano come

$$(228) \quad \begin{aligned} B_1 &= B_M \cos \omega t \\ B_2 &= B_M \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ B_3 &= B_M \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

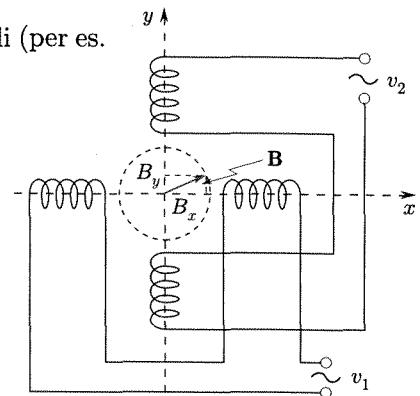


Fig. 7.39

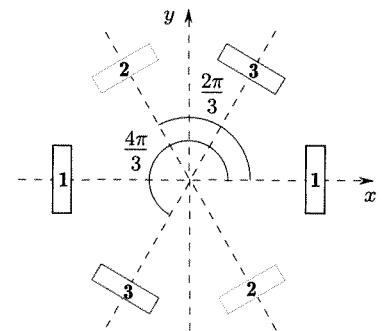


Fig. 7.40

Per mostrare il fatto che effettivamente si ottiene un c.m. rotante, determiniamo le componenti secondo due assi (x ed y) normali fra loro. Per semplicità supponiamo che B_1 sia diretto come x . Si ha

$$(229) \quad \begin{aligned} B_x &= B_M \cos \omega t + B_M \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \frac{2\pi}{3} + \\ &\quad + B_M \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cos \frac{4\pi}{3} = \\ &= B_M \left[\cos \omega t + \cos \omega t \cos^2 \frac{2\pi}{3} - \sin \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega t \cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin \omega t \sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{4\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin \frac{4\pi}{3}$; $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$,

$$(230) \quad B_x = B_M \cos \omega t \left[1 + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{3} \right] = \frac{3}{2} B_M \cos \omega t.$$

Analogamente

$$(231) \quad \begin{aligned} B_y &= B_M \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \frac{2\pi}{3} + \\ &+ B_M \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{3}{2} B_M \sin \omega t. \end{aligned}$$

Il sistema equivale quindi a due campi magnetici oscillanti con la stessa frequenza e la stessa ampiezza con sfasamento di $\pi/2$ secondo due direzioni normali fra loro. Il loro risultante è quindi un campo magnetico rotante di modulo

$$(232) \quad B = \frac{3}{2} B_M.$$

Vogliamo infine notare come il campo alternativo prodotto da una sola bobina (fig. 7.41a),

$$(233) \quad B = B_M \sin \omega t,$$

possa essere sempre considerato come il risultante di due campi rotanti in verso opposto con la stessa velocità angolare (scalare) ω aventi ampiezza $B_M/2$ e fase iniziale nulla. Ciò può vedersi graficamente (fig. 7.41b) osservando che i due vettori che rappresentano i due campi rotanti si compongono ad ogni istante a dare un risultante che è sempre diretto nella direzione dell'asse della bobina ed il cui modulo oscilla sinusoidalmente fra due valori che sono il doppio della ampiezza dei campi componenti.

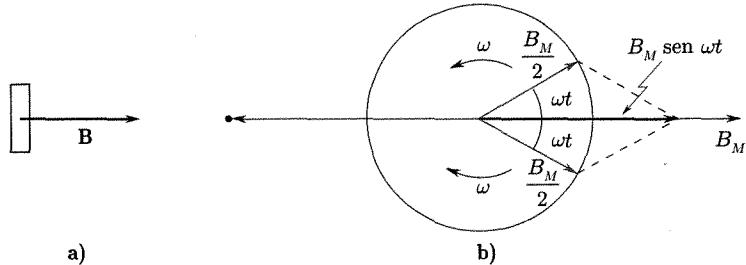


Fig. 7.41

Ciò si può vedere anche analiticamente mediante le formule di Eulero⁽²⁷⁾

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha.$$

Si ha infatti

$$(234) \quad \begin{aligned} B &= B_M \sin \omega t = B_M \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] = \frac{B_M}{2} (-j)(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{B_M}{2} (je^{-j\omega t} - je^{j\omega t}) = \frac{B_M}{2} (e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega t} + e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}) = \\ &= \frac{B_M}{2} [e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\omega t - \frac{\pi}{2})}]. \end{aligned}$$

I due termini nell'ultimo membro sono rappresentati da due vettori di ampiezza $B_M/2$ che ruotano con velocità ω in versi opposti (rispettivamente antiorario ed orario).

⁽²⁷⁾ In particolare: $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$; $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

■ 7.13. GENERATORI E MOTORI

Il principio di funzionamento di un generatore di f.e.m. alternativa sinusoidale (alternatore) è già stato illustrato al capitolo 6 (par. 6.5). Un motore (idraulico, termico ecc.) tiene in rotazione a velocità costante un rotore su cui è disposta una spira in un campo magnetico uniforme; nella spira si induce una f.e.m. sinusoidale che attraverso anelli e contatti strisciati su di essi può essere collegata ad un circuito esterno. Allo scopo d'evitare che intense correnti attraversino i contatti strisciati, si preferisce disporre l'avvolgimento indotto nella parte fissa della macchina (stator) e fare ruotare il dispositivo che crea il campo magnetico. Tale dispositivo può essere un magnete permanente o, nelle grandi macchine, un elettromagnete; in questo ultimo caso una corrente continua deve essere inviata negli avvolgimenti disposti sul rotore ma essa è molto minore della corrente nei circuiti indotti.

Lo schema ora illustrato ha anche il vantaggio di rendere possibile la realizzazione di numerosi poli alternativamente nord e sud sul rotore: in tal maniera un ciclo della corrente alternata generata nell'indotto si produce non per un giro completo del rotore ma per la rotazione $2\pi/p$ rad essendo p il numero di coppie polari. Sullo stator vengono infine disposte bobine in numero di $2\pi/p$ regolarmente spaziate: i fenomeni di induzione in esse avvengono in fase perché ciascuna bobina si trova sempre in un campo magnetico identico a quello delle altre e quindi esse possono essere collegate in serie. Ne risulta per un alternatore monofase lo schema di figura 7.42. Se si dispongono fra gli avvolgimenti ora descritti altri due avvolgimenti in modo che i tre avvolgimenti risultanti abbiano sullo stator bobine regolarmente spostate (in modo che in ogni arco dello stator corrispondente all'angolo fra poli omonimi contigui sul rotore vi sia una bobina di ciascun avvolgimento spostata rispetto alle altre di $1/3$ dell'arco) si ottiene un alternatore trifase: i fenomeni di induzione si ripetono nei tre avvolgimenti con una differenza di fase $\pm 2\pi/3$ rad.

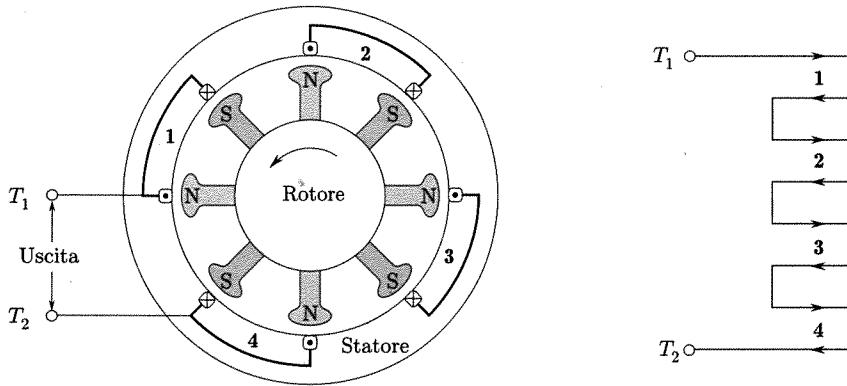


Fig. 7.42

Nei generatori descritti la energia meccanica dei motori (per es. turbine idrauliche nelle centrali idroelettriche) che tengono il rotore in moto (contro le azioni meccaniche di natura elettromagnetica) viene trasformata in energia elettrica delle correnti generate per induzione negli avvolgimenti dello stator collegati con il carico. La macchina può essere

Motore

Motore sincrono

fatta funzionare in modo inverso, fornendo energia elettrica agli avvolgimenti dello statore: si esercitano allora sul rotore forze che lo costringono a ruotare trascinando macchine che compiono lavoro meccanico: si ottiene un motore elettrico. Il motore di cui si parla ha tuttavia caratteristiche e limitazioni particolari che vogliamo illustrare.

Si consideri perciò lo schema molto semplice di figura 7.43. Sullo statore vi sono tre avvolgimenti disposti a $2\pi/3$ rad fra loro ed alimentati da un sistema trifase di correnti: per quello che si è detto al par. 7.12, nella regione centrale si produce un campo magnetico rotante. Il rotore sia costituito da un semplice dipolo magnetico (**m**) (una sbarra magnetica o una bobina attraversata da c.c., che possano ruotare intorno all'asse della macchina). Se il rotore è fermo, il campo magnetico variabile non ha effetto giacché produce una coppia che cambia di segno $2\nu = 2\omega/2\pi$ volte al secondo. Se invece il rotore si muove con velocità ω la coppia non cambia più di segno. La figura 7.44 mostra la posizione dei vettori **B** ed **m**; entrambi ruotano con velocità ω . Se lo fasamento φ con cui **m** insegue **B** resta costante la coppia meccanica che si esercita sul rotore è costante

$$(235) \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

In questo caso, **m** che segue **B**, il vettore **M** ha la stessa direzione del vettore ω e quindi un lavoro positivo viene fatto sul rotore: si tratta di un motore. Si osservi che il passaggio a funzionamento della macchina come generatore corrisponde ad avere **m** che avanza su **B**: in tal caso il lavoro fatto sul rotore è negativo, cioè il rotore fa lavoro per tenere la rotazione ed energia meccanica si trasforma in energia elettrica (nelle bobine dello statore in cui corrente è forzata a passare).

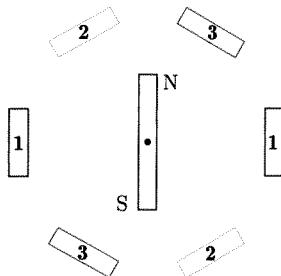


Fig. 7.43

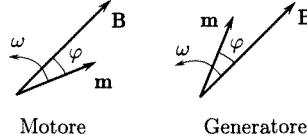


Fig. 7.44

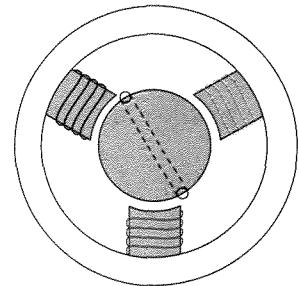


Fig. 7.45

Motore asincrono

Il motore ora illustrato, per la caratteristica ora vista, si chiama sincrono: esso ha l'inconveniente che per poter funzionare richiede che il rotore sia indipendentemente (con un altro motore) portato alla velocità ω ; ha il vantaggio di ruotare sempre a velocità ω , e quindi a velocità costante se ω è costante.

Il motore asincrono polifase, o motore ad induzione, ha uno statore formato anche esso da tre avvolgimenti sfasati di $2\pi/3$ rad uno rispetto all'altro ed alimentati da un sistema trifase di correnti; il rotore è invece costituito da una o più spire in corto circuito avvolte su un nucleo di ferro. Per comprendere il funzionamento si immagini (fig. 7.45) che si abbia una sola spira la quale si trovi immersa in un campo magnetico **B**, rotante con velocità ω fissata dalla pulsazione delle correnti che alimentano lo statore. Nella spira viene indotta una f.e.m. e circola una corrente. Dalla legge di Lenz si comprende immediatamente che la forza di Lorentz su tali correnti,

dovendo tendere a ridurre la variazione di flusso che produce la induzione, agisce in maniera da fare ruotare la spira nello stesso verso del campo rotante: si genera così una coppia che muove il rotore.

Se si indica (fig. 7.46) con $\alpha(t)$ l'angolo di cui in un certo istante il vettore \mathbf{B} (rotante) precede la normale \mathbf{n} al piano della spira (di area S), si ha per la f.e.m. indotta

$$(236) \quad f = -SB \frac{d \cos \alpha}{dt} = SB \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

Indicando con ω_r la velocità angolare relativa di \mathbf{B} (che ruota con la velocità ω) rispetto alla spira che supponiamo ruotare con velocità ω_1 ,

$$(237) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega_r = \omega - \omega_1$$

si ha

$$(238) \quad f = \omega_r SB \sin \alpha.$$

Sia R la resistenza della spira e L la sua induttanza. Si ha per la corrente nella spira nella rappresentazione complessa

$$(239) \quad \mathbf{i} = \omega_r SB \frac{e^{j\alpha}}{R + j\omega_r L}$$

e per il momento magnetico della spira

$$(240) \quad \mathbf{m} = S\mathbf{i} = \omega_r S^2 B \frac{e^{j\alpha}}{R + j\omega_r L}.$$

Prendendo il coefficiente della parte immaginaria risulta

$$(241) \quad m = \omega_r S^2 B \left(\frac{-\omega_r L \cos \alpha + R \sin \alpha}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \right).$$

Il momento meccanico della coppia che agisce sulla spira ha il modulo

$$(242) \quad \mathcal{M} = mB \sin \alpha = \omega_r S^2 B^2 \left(\frac{R \sin^2 \alpha - \omega_r L \cos \alpha \sin \alpha}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \right).$$

Il valore medio di tale coppia si ricava facendo la media al variare di α fra 0 e 2π . Si ottiene

$$(243) \quad \bar{\mathcal{M}} = \frac{S^2 B^2 \omega_r R}{2(R^2 + \omega_r^2 L^2)}.$$

L'andamento della coppia fornita al variare della velocità del rotore ω_1 ($\omega_1 = \omega - \omega_r$) è indicato in figura 7.47. La coppia è massima quando la resistenza della spira uguaglia la sua reattanza ($R = \omega_r L$), e va a zero al sincronismo. Se supponiamo che il rotore non incontri alcuna resistenza al suo moto, esso si porta al sincronismo e la coppia risulta nulla; se in tali condizioni un carico viene collegato al rotore questo ritarda e la sua velocità ω_1 diviene minore di ω (scorrimento).

Si presenta allora una coppia ed energia elettrica viene trasformata in energia meccanica. Si osservi inoltre che una coppia è presente anche quando $\omega_1 = 0$, cioè quando il rotore è fermo: a differenza dei motori sincroni, i motori asincroni sono in condizioni di partire anche con un carico ad essi collegato.

Non indugiamo ulteriormente sulle caratteristiche di questi motori molto usati nella tecnica; diremo solo che in realtà il rotore non ha una sola spira; spesso l'indotto è costituito da un sistema di sbarre parallele collegate alle estremità da anelli (fig. 7.48, gabbia di scoiattolo), il tutto disposto su un nucleo ferromagnetico.

Il rendimento dei motori asincroni trifasi è particolarmente elevato (intorno a 0,9); questi motori sono i migliori motori elettrici di cui attualmente si dispone.

Vogliamo accennare infine al fatto che è possibile realizzare motori asincroni monofasi: si ricordi (par. 7.12), infatti, che un campo magnetico sinusoidale creato da una corrente monofase può essere considerato come costituito da due campi rotanti con la stessa velocità in verso opposto. Se si pone in tale campo una spira disposta su un rotore e questo è fermo le coppie originate per induzione dei due campi sono uguali ed opposte e quindi il rotore resta fermo; se tuttavia si produce in altro

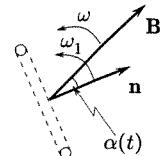


Fig. 7.46

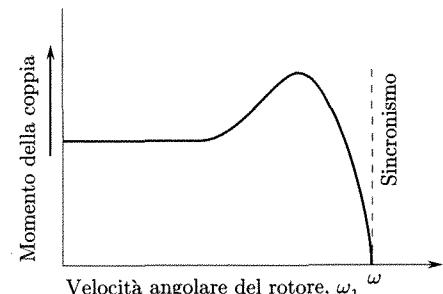


Fig. 7.47

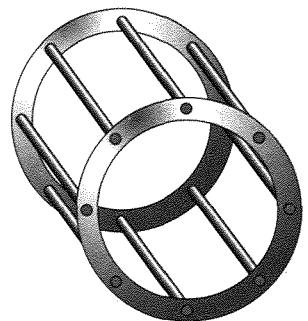


Fig. 7.48

modo (per es. mediante un impulso meccanico) una rotazione nella direzione di una, le due coppie sono diverse, il rotore viene accelerato nella direzione del moto, ed alla fine si ha che il rotore si muove vicino al sincronismo (con un piccolo scorrimento) con uno dei due campi e con una velocità circa 2ω in verso opposto rispetto all'altro: ne segue che la coppia motrice dovuta ad un campo è enormemente superiore a quella opposta (resistente) dovuta all'altro.

7.14. RETI A CATENA DI CELLE T O II

Di notevole importanza nella tecnica sono le reti passive costituite da un numero molto grande (infinito) di gruppi uguali di impedenze (celle) disposti in serie; la rete ha due terminali di ingresso ai quali viene applicata la d.d.p.

Un esempio è dato nella figura 7.49 ove ciascun elemento della catena è formato da due impedenze, una (Z_1) in serie e l'altra (Z_2) in derivazione fra i conduttori collegati ai terminali di alimentazione.

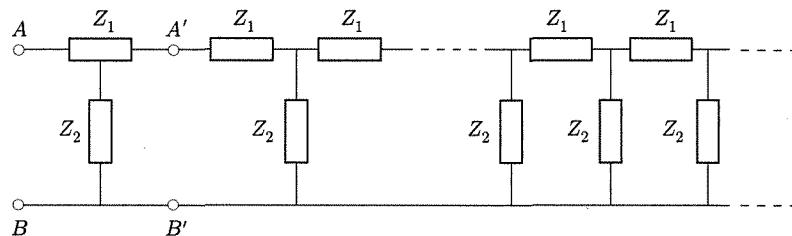


Fig. 7.49

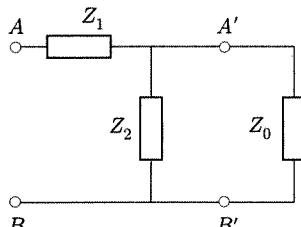


Fig. 7.50

Una rete di questo genere può essere trattata mediante la applicazione delle regole di Kirchhoff. Si può tuttavia molto più rapidamente giungere alla sua caratterizzazione utilizzando proprio il fatto che essa è una struttura a celle uguali di lunghezza infinita. Evidentemente essendo infinito il numero di celle nulla cambia se si taglia la prima cella e si considerano A' , B' come morsetti di ingresso. Se si indica con Z_0 la impedenza vista fra A e B , questa deve essere anche la impedenza vista fra A' e B' una volta rimossa la prima cella. Si deve quindi avere che la impedenza della rete di figura 7.50 deve essere uguale a Z_0

$$(244) \quad Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_0}} = Z_0 \quad , \quad Z_0 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0}.$$

Da tale relazione si deduce

$$(245) \quad Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}.$$

La impedenza Z_0 si chiama impedenza caratteristica della catena infinita considerata. Si osservi che la suddivisione della catena data in celle può essere fatta in varie maniere. Fra queste molto usate sono quelle in cui le celle hanno struttura a T (fig. 7.51) o a II (fig. 7.52).

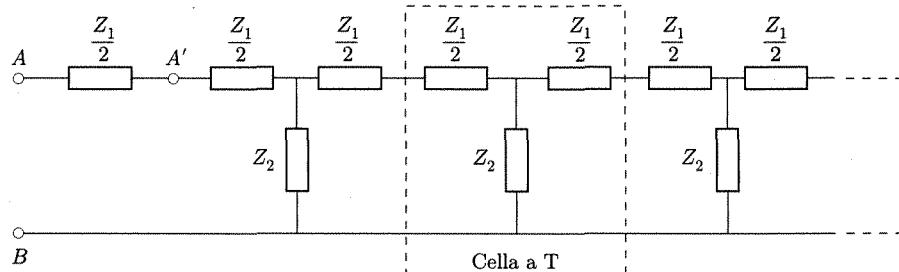


Fig. 7.51

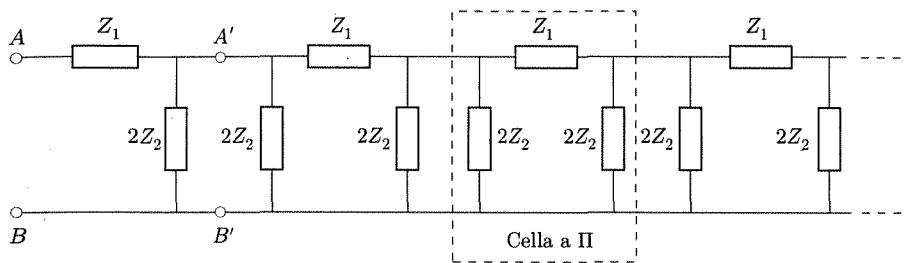


Fig. 7.52

La suddivisione a celle T della catena data è formata da un numero infinito di queste celle alle quali si aggiunge, all'inizio, l'impedenza $Z_1/2$ in serie; la sua impedenza caratteristica è ovviamente data ancora dalla (245). Nel caso che si abbia esclusivamente la catena di celle a T (che cioè manchi l'impedenza iniziale $Z_1/2$ e la catena sia quella a destra dei morsetti A' B nella figura 7.51, si ottiene dalla (245) per l'impedenza caratteristica

$$(246) \quad Z_{0,T} = \left(Z_1 Z_2 + \frac{1}{4} Z_1^2 \right)^{1/2} = (Z_1 Z_2)^{1/2} \left(1 + \frac{Z_1}{4 Z_2} \right)^{1/2}.$$

Analogamente per una catena infinita di celle II (viste fra i morsetti A' , B' di figura 7.52) si ottiene

$$(247) \quad Z_{0,\Pi} = \frac{(Z_1 Z_2)^{1/2}}{\left(1 + \frac{Z_1}{4 Z_2} \right)^{1/2}}$$

e quindi

$$(248) \quad Z_{0,T} Z_{0,\Pi} = Z_1 Z_2$$

Si osservi che il comportamento di una catena formata da un numero limitato di celle è identico a quello di una catena infinita purché essa sia chiusa su una rete di impedenza Z_0 (figura 7.53).

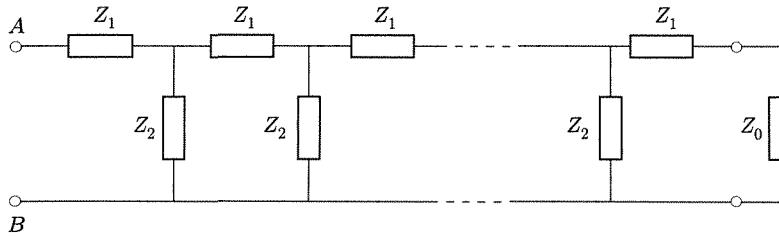


Fig. 7.53

Si noti inoltre che nella catena infinita l'effetto prodotto da ciascuna cella sulla d.d.p. applicata alla cella successiva o sulla corrente in tale cella è sempre lo stesso qualunque sia la cella che si considera. La d.d.p. di frequenza ω applicata alla cella n e la corrente siano scritte nella rappresentazione complessa

$$(249) \quad v_n = v_{n,M} e^{j\omega t}$$

$$(250) \quad i_n = i_{n,M} e^{j(\omega t - \varphi)}.$$

L'ultima relazione esprime il fatto che la d.d.p. v_n all'ingresso della cella n è applicata alla impedenza del resto della catena (Z_0) e la corrente che entra in tale impedenza è i_n .

La differenza inoltre (fig. 7.54) fra v_{n+1} e v_n è dovuta alla corrente i_n che passa in Z_1

$$(251) \quad v_n - v_{n+1} = i_n Z_1 = v_n \frac{Z_1}{Z_0}.$$

Si ottiene così che nel passare da una cella alla successiva

$$(252) \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0} = a.$$

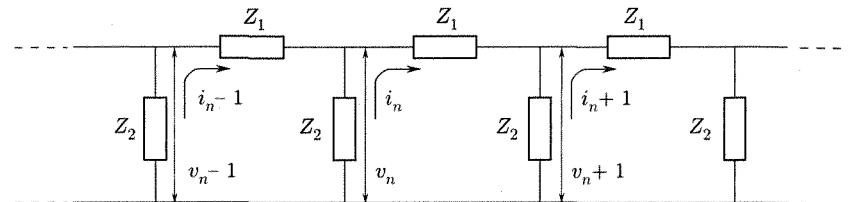


Fig. 7.54

Il numero complesso α prende il nome di fattore di propagazione. Se si pone

$$(253) \quad \alpha = e^{-h} = e^{-(\alpha+j\beta)}$$

si vede che al passare da una cella alla successiva la d.d.p. viene attenuata e subisce una variazione di fase; la costante α caratterizza l'assorbimento e quella β la variazione di fase. Nel passare dalla cella n a quella $(n+m)$ si ha

$$\frac{v_{n+m}}{v_n} = \alpha^m = e^{-hm} = e^{-\alpha m} e^{-j\beta m}$$

cioè

$$(254) \quad v_{n+m} = v_{n,M} e^{-\alpha m} e^{j(\omega t - \beta m)}.$$

Per le correnti, ricordando che

$$v_{n+m} = i_{n+m} Z_0$$

$$v_n = i_n Z_0$$

si ha una relazione analoga alla (254).

Le d.d.p. (o le correnti) nelle varie celle sono legate fra loro come le perturbazioni delle particelle di un mezzo elastico formato da particelle disposte ad eguale distanza (nel mezzo a riposo) e legate fra loro, quando il mezzo è investito da un'onda piana⁽²⁸⁾: ciascuna particella ha un moto sinusoidale che avviene con una ampiezza più piccola di quella della particella precedente ed è sfasato di una quantità costante rispetto ad esso. Per questa ragione si parla spesso di propagazione della d.d.p. (o della corrente) in una catena infinita del tipo descritto come se si trattasse della propagazione di un'onda. Le proprietà della rete sono determinate dalla costante di propagazione, cioè da h o da α e β .

La teoria generale di queste reti consente di determinare α e β in funzione di Z_1 e Z_2 nei casi più generali. Noi qui ci limiteremo ad un caso semplice, quello indicato in figura 7.55, per il quale $Z_1 = j\omega L$ e $Z_2 = 1/j\omega C$. Per vedere immediatamente una importante caratteristica della catena, consideriamo per un momento la catena a T quale appare a destra dei morsetti A' e B . La sua impedenza caratteristica (246) vale

$$(255) \quad Z_{0,T} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}.$$

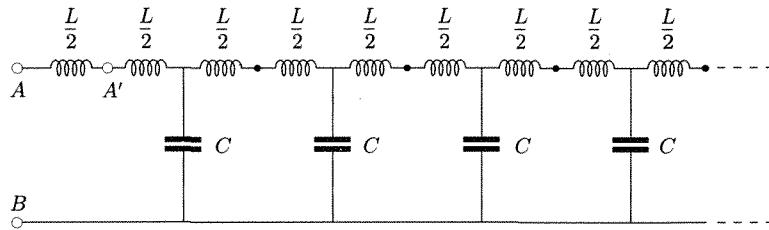


Fig. 7.55

⁽²⁸⁾ Si veda vol. I, cap. 9, par. 9.6. L'analogia sussiste anche con onde elettromagnetiche piane irradiate da una sorgente in un mezzo: si noti che la distanza di propagazione (x) è qui sostituita dal numero della cella raggiunta dalla perturbazione (m); tale numero può prendere solo valori interi.

Il comportamento della rete al variare della frequenza si deduce dalla (255). Si osservi che le frequenze che rendono il discriminante positivo, cioè

$$\frac{L}{C} > \frac{\omega^2 L^2}{4}, \quad \omega^2 < \frac{4}{LC}$$

l'impedenza caratteristica è reale, cioè si riduce ad una resistenza. Ciò significa che energia viene assorbita alla sorgente di d.d.p. da parte della catena. Nonostante quindi che non ci siano resistenze nella rete si ha un assorbimento continuo di energia quando la catena viene collegata ad un generatore. Questa energia fluisce da una cella alla successiva della catena infinita per creare il campo elettrico nei condensatori e quello magnetico negli induttori. L'energia si allontana dalla sorgente come avviene nel caso di un'onda piana progressiva in un mezzo continuo ed infinito. Quando la frequenza è più grande di quella per cui

$$(256) \quad \omega = \sqrt{\frac{4}{LC}}$$

la impedenza caratteristica

$$(257) \quad Z_{0,T} = j\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}}$$

diviene un immaginario puro; nessuna potenza media è assorbita dalla catena e quindi la corrente non si propaga in essa e la perturbazione non penetra profondamente.

Per ottenere la espressione del fattore di propagazione della catena completa (a destra dei morsetti di ingresso AB) va usata nella (252) la espressione (245) per l'impedenza caratteristica

$$(258) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} - j\frac{\omega L}{2}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} + j\frac{\omega L}{2}}.$$

Se la frequenza è inferiore al valore limite (di taglio) cui corrisponde

$$(259) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4}{LC}}$$

il radicando è positivo, i numeri complessi a numeratore e denominatore hanno lo stesso modulo e quindi α ha modulo unitario e può essere posto nella forma

$$(260) \quad \alpha = e^{-j\beta}.$$

Ciò significa che nel passare da una cella alla successiva la d.d.p. (o la corrente) mantiene inalterata la propria ampiezza mentre la fase subisce una variazione costante. Facendo i conti si trova che β è positivo, si tratta cioè di un ritardo. Come si era visto in precedenza, è questo il caso di propagazione dell'energia nella catena. Se invece la frequenza è superiore a quella di taglio, cioè $\omega > \omega_0$ il radicale diviene immaginario ed α un numero reale:

$$(261) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} - \frac{\omega L}{2}}{\sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} - \frac{L}{C}} + \frac{\omega L}{2}}$$

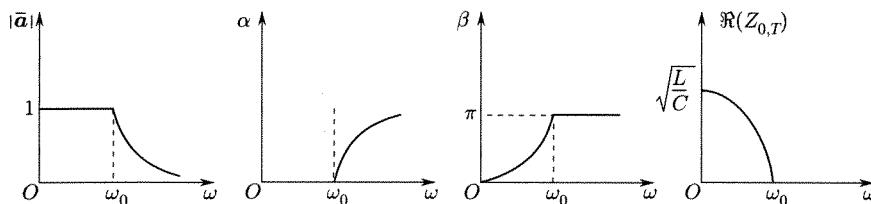


Fig. 7.56

Tale numero è inferiore ad uno. Ciò significa che la d.d.p. nel passare da una cella alla successiva ha l'ampiezza che viene moltiplicata per un fattore minore di uno e che quindi decresce. In questo caso l'ampiezza della perturbazione decade più o meno rapidamente e dopo poche celle scompare: non si ha propagazione. La figura 7.56 mostra qualitativamente come vari il modulo di α con la frequenza, assieme ad α, β ed alla parte reale di $Z_{0,T}$.

■ 7.15. FILTRI

Molto spesso occorre, specie nella tecnica della trasmissione delle informazioni, separare segnali elettrici di diversa frequenza. Ciò viene fatto facendo passare il segnale composto attraverso circuiti o reti le cui caratteristiche dipendono dalla frequenza e che prendono il nome di filtri. Un semplice circuito di tale tipo è rappresentato da un circuito risonante serie o parallelo. Un circuito risonante serie per esempio consente di trarre ai capi dell'induttanza o del condensatore una d.d.p. considerevole solo se nel segnale applicato v'è una componente la cui frequenza è compresa in una stretta banda intorno alla frequenza propria; esso funziona come filtro passa banda.

Molto spesso tuttavia i filtri hanno struttura di reti a catena infinita del tipo che abbiamo descritto nel paragrafo precedente. Ora noi daremo alcuni esempi indicando qualitativamente le loro caratteristiche.

Vogliamo notare che, in realtà, non è possibile avere catene infinite, ma come si è già osservato il comportamento di una catena formata da un numero di celle finito è identico a quello della catena infinita, purché essa sia chiusa sulla impedenza caratteristica (Z_0) della catena infinita. La realizzazione di una rete che presenti in tutto il campo di frequenza una impedenza pari a Z_0 non è cosa facile e di solito ci si limita a realizzare i filtri con un numero ragionevole di celle chiuse su una rete che nel campo di frequenza, che interessa nel particolare problema, abbia impedenza il più prossima possibile a Z_0 ; di tale rete fa naturalmente parte il dispositivo che si vuole alimentare con la d.d.p. filtrata. Il fatto che la catena finita sia chiusa su una impedenza diversa da Z_0 conduce a riflessioni di energia nelle bande passanti, così come accade per un'onda piana alla superficie di separazione di mezzi aventi caratteristiche di propagazione diverse.

a. Filtro passa basso

La catena descritta nel paragrafo precedente, formata da induttanze in serie e capacità in parallelo, ha come abbiamo visto (fig. 7.56) la caratteristica di fare passare segnali di frequenza inferiore alla frequenza di taglio $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ e costituisce pertanto un filtro passa basso.

b. Filtro passa alto

Scambiando la posizione dei condensatori e delle induttanze nello schema del filtro precedente si ha lo schema di figura 7.57a le cui celle a T sono quelle indicate in figura 7.57b. Per un tale filtro il modulo di α , α, β e la parte reale di $Z_{0,T}$ sono dati qualitativamente dalla figura 7.58. Come si vede in tal caso passano indisturbati attraverso la catena i segnali di frequenza superiore a $\nu_0 = \omega_0/2\pi$.

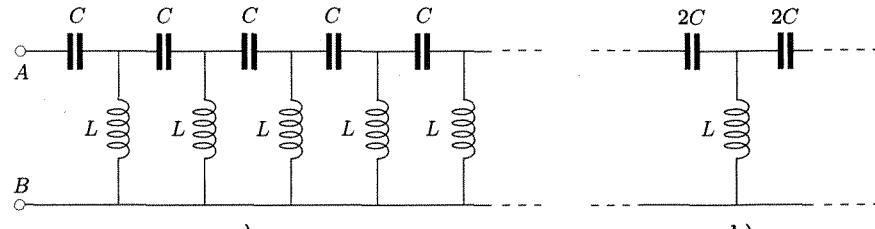


Fig. 7.57

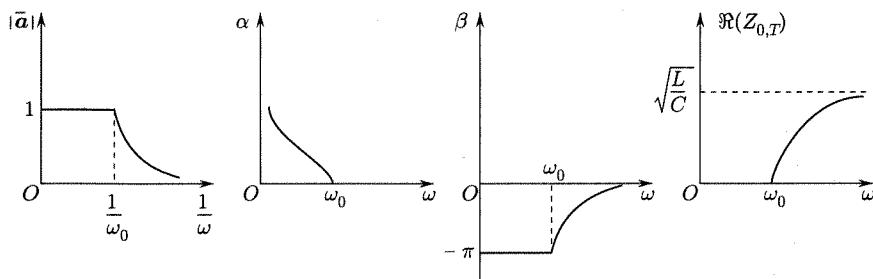


Fig. 7.58

c. Filtri passa banda

Le figure 7.59, 7.60, 7.61 danno alcuni schemi di celle a T per catene che lasciano passare bande di frequenza ed indicano qualitativamente le loro caratteristiche. Le relazioni che legano le frequenze di taglio (ν_1 e ν_2) ai parametri del circuito sono anche date: R è la resistenza di carico.

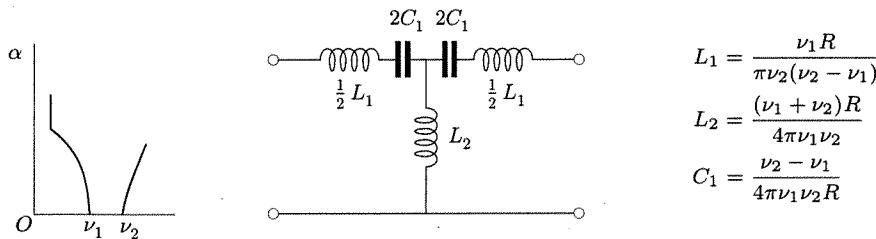


Fig. 7.59

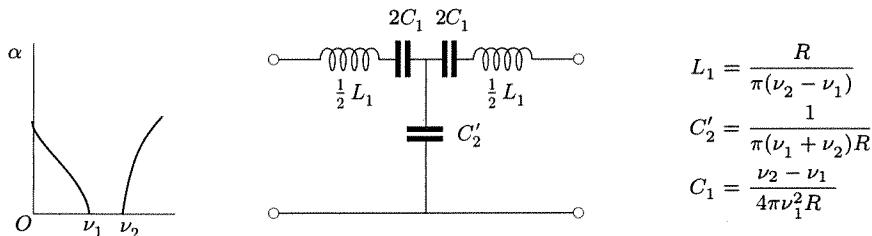


Fig. 7.60

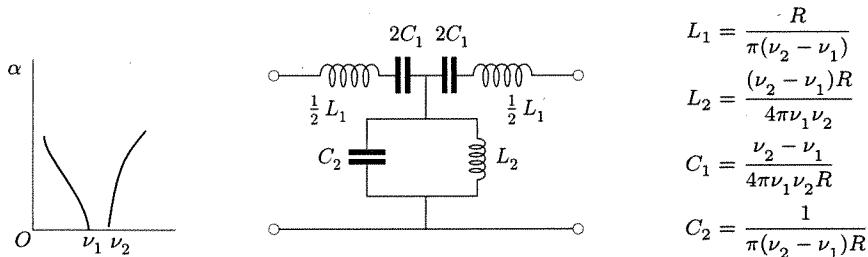


Fig. 7.61

LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LE ONDE ELETTROMAGNETICHE

✓ Questo capitolo chiude la trattazione generale dell'elettromagnetismo con una discussione delle **equazioni di Maxwell** che sintetizzano i fenomeni e mostrano l'esistenza di un nuovo processo: le onde elettromagnetiche, previste da Maxwell e scoperte circa venti anni più tardi da Hertz. Onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda opportuna costituiscono la **luce**. L'**ottica**, che fino ad allora era stata considerata un capitolo staccato della fisica, viene a far parte naturalmente dell'elettromagnetismo.



■ Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

8.

■ 8.1. INTRODUZIONE

Le proprietà del campo elettrico e di quello magnetico finora esaminate sono state tradotte in linguaggio matematico legando i valori dei campi in un punto con quelli in punti vicini. Nei vari capitoli, elettrostatica, magnetostatica, induzione elettromagnetica, abbiamo visto come questo metodo abbia consentito una sintesi molto proficua. Questo procedimento fisico-matematico non si esaurisce nella trattazione dei singoli settori ora accennati, per quanto vasti ed importanti essi siano. Maxwell infatti ha tentato con successo una sintesi globale che porta a fondere il campo elettrico ed il campo magnetico in una unica entità: il campo elettromagnetico. Questo processo di sintesi è stato particolarmente fruttifero perché da una parte ha condotto su basi di logica matematica ad ipotizzare un fenomeno non ancora, a quel tempo, riscontrato nell'esperienza (un campo elettrico variabile crea un campo magnetico), dall'altra ha prodotto una costruzione fisico-matematica di grande bellezza, di estesa validità e di grandissima utilità: le equazioni di Maxwell.

A questi problemi ed in specie alle equazioni di Maxwell è dedicato il presente capitolo. Un esame esaurente di tali equazioni dovrebbe considerare applicazioni in molti settori: noi ci limiteremo essenzialmente a considerare alcuni problemi di propagazione di onde e.m. Ciò viene fatto per varie ragioni. Innanzitutto la previsione della propagazione per onde del campo elettromagnetico fu fatta sulla base delle equazioni di Maxwell ed il riscontro della loro esistenza ha costituito una conferma di importanza eccezionale della trattazione e delle sue ipotesi; inoltre il riconoscimento della natura elettromagnetica della luce e di numerose altre radiazioni (onde radio, raggi infrarossi, ultravioletti, X, γ) mostra chiaramente la importanza del processo di propagazione delle onde elettromagnetiche.

In questo studio, specie per i concetti caratteristici della propagazione per onde, noi faremo frequente riferimento a ciò che è stato stabilito per la propagazione di perturbazioni elastiche. In effetti, dopo aver mostrato la somiglianza delle equazioni differenziali che regolano i processi nei due casi (onde elastiche e onde e.m.) noi spesso useremo risultati ottenuti per le onde elastiche come validi per le onde e.m.: fenomeni di interfezione, onde stazionarie, propagazione di gruppi di onda (velocità di gruppo e velocità di fase), fenomeni di diffrazione, effetto Doppler, pressione di radiazione ecc.

Su taluni di questi processi torneremo in ottica per considerare in particolare il caso delle onde luminose.

Il presente capitolo è chiuso da alcune considerazioni sui limiti e su alcune difficoltà della teoria classica dell'elettromagnetismo. Queste difficoltà si riferiscono ai concetti di singola particella carica e di campo elettromagnetico e purtroppo sono oggi presenti anche nelle più avanzate teorie dei campi.

■ 8.2. CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Nell'effettuare la sintesi delle proprietà del campo elettromagnetico mediante un certo numero di equazioni differenziali che le rappresentano, Maxwell (1864) si accorse della esistenza di una contraddizione nella trattazione matematica di quanto era fino allora noto. Tale incongruenza manifestava la mancanza di completezza nella descrizione dei fenomeni, fatta fino allora.

Si giunge così per questa via matematica a suggerire quale avrebbe potuto essere l'esatta descrizione dei processi; questa ipotesi è stata esaurientemente confermata dall'esperienza.

La contraddizione ora accennata può essere vista nella maniera seguente. L'equazione di continuità che esprime la conservazione della carica elettrica (cap. 3, par. 3.2) si scrive nella maniera più generale

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

D'altra parte è stato stabilito che per il caso di corrente stazionaria ($\partial \rho / \partial t = 0$) il campo magnetico creato dalla corrente stessa in un mezzo isotropo è dato da (cap. 5, par. 5.2) ⁽¹⁾:

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j}.$$

In questo caso le (1) e (2) sono perfettamente compatibili: se si tiene presente che la divergenza di un rotore è sempre nulla qualunque sia il vettore che si considera, entrambe le (1) e (2) danno

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Se tuttavia si cerca di applicare la (2) a processi non stazionari, nascono difficoltà. Per concretare le idee si pensi di considerare il processo di scarica di un condensatore attraverso un conduttore (fig. 8.1). In questo caso

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0,$$

e quindi, per la (1),

$$(3) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0,$$

mentre se valesse la (2), ancora per la proprietà della divergenza di un rotore,

$$(4) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

⁽¹⁾ In mezzi isotropi nei quali μ non cambia nello spazio e non dipende da \mathbf{B} , la (2) diviene

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}.$$

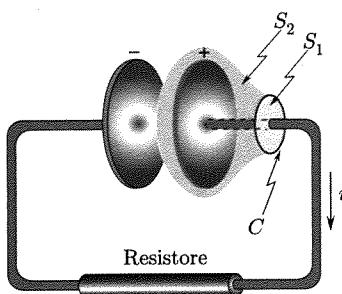


Fig. 8.1

Ecco la incongruenza. Si può mostrare la esistenza della stessa difficoltà se, con riferimento al sistema in figura 8.1, si cerca di calcolare la circuitazione di \mathbf{H} (cap. 5, par. 5.2) lungo una linea quale la C che si concatena con il conduttore che collega le armature durante la scarica, usando diverse superfici che hanno C come bordo. Se si sceglie la superficie piana S_1 , si ha

$$(5) \quad \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = i.$$

Se si sceglie la superficie S_2 che passa nello spazio tra le armature, giacché nessuna corrente di conduzione fluisce attraverso S_2 ,

$$(6) \quad \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

I valori diversi della circuitazione lungo la stessa linea ottenuti seguendo i due procedimenti di calcolo indicano, al pari del confronto fra le (3) e (4), che la (2) non può essere ritenuta valida per processi dipendenti dal tempo.

La modifica della (2) perché abbia validità generale fu suggerita da Maxwell ed essa assomma, dal punto di vista fisico, nell'ammettere la esistenza di un fenomeno simmetrico a quello della induzione elettromagnetica di Faraday. In quel caso, come si è visto, si giunge a vedere che un campo magnetico variabile crea un campo elettrico e vale la relazione

$$(7) \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Il processo che qui viene ammesso esistere consiste nel fatto che un campo elettrico variabile crei un campo magnetico. Un tale processo dovrebbe essere matematicamente rappresentato da una relazione del tipo della (7) con \mathbf{E} e \mathbf{B} scambiati. Si trova in particolare nel sistema di misura che qui si usa (SI) che la relazione che rappresenta il processo ipotizzato *in un mezzo isotropo*⁽²⁾ è:

$$(8) \quad \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Tutto ciò equivale a dire che in fenomeni non stazionari il campo magnetico è creato sia da corrente di conduzione [eq. (2)], sia da campi elettrici variabili [eq. (8)]. Di conseguenza per il campo magnetico nel caso generale va sostituita alla (2) la

$$(9) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \left(\mathbf{j} + \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \right).$$

Si osservi che in tal modo la incongruenza matematica è tolta. Calcolando la divergenza dei vari termini della (9) si ha

$$0 = \text{div } \mathbf{j} + \text{div} \left(\frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Invertendo l'ordine delle derivate spaziali e temporali, si scrive

$$(10) \quad \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0.$$

⁽²⁾ In un mezzo non isotropo $(\epsilon \mathbf{E})$ va sostituito con $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{D}$.

Inoltre per processi di qualsiasi tipo (stazionari o no) ⁽³⁾ vale in mezzi isotropi (cap. 2, par. 2.1) la legge

$$(11) \quad \operatorname{div} \varepsilon_r \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Dalle (10) e (11) si ottiene

$$(12) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

che è l'equazione di continuità (1).

Densità di corrente di spostamento

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}$$

La quantità ⁽⁴⁾

$$(13) \quad \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}$$

ha le dimensioni di una densità di corrente e fu da Maxwell chiamata densità di corrente di spostamento. La corrente di spostamento crea un campo magnetico come una corrente di conduzione. Ciò toglie la incongruenza nel calcolo dell'integrale di linea di $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ nella situazione di fig. 8.1 in quanto fra le armature del condensatore la corrente di spostamento continua la corrente di conduzione.

L'ipotesi di Maxwell è quindi in condizioni di rimuovere le difficoltà descritte; essa ha consentito di sviluppare una teoria completa dell'elettromagnetismo classico e di prevedere importanti processi fra i quali, di particolare importanza, la esistenza delle onde elettromagnetiche. Le brillanti conferme sperimentali ⁽⁵⁾, ed in particolare quelle sulle onde elettromagnetiche (Hertz) che non esisterebbero in assenza del processo ipotizzato da Maxwell, hanno trasformato l'ipotesi di Maxwell nella descrizione di una proprietà fondamentale del campo elettromagnetico.

Può sembrare strano che mentre la esperienza era giunta (Faraday) a mettere in evidenza la creazione di un campo elettrico da parte di un campo magnetico variabile, non era riuscita a scoprire il processo reciproco. Ciò è dipeso in gran parte dal fatto che nelle più comuni disposizioni sperimentali in cui fluiscono correnti di spostamento sono presenti anche correnti di conduzione e, finché le correnti variano non molto rapidamente (condizioni quasi statiche), il campo magnetico in un punto ⁽⁶⁾ dovuto alle correnti di conduzione è di gran lunga maggiore di quello dovuto alle correnti di spostamento. Solo quando la frequenza delle correnti diviene tanto alta che la lunghezza d'onda delle onde elettromagnetiche diviene confrontabile con le dimensioni del dispositivo sperimentale (per es. condensatore) gli effetti delle due correnti [eq. (9)] divengono nettamente separabili.

Le considerazioni ora svolte sulle correnti di spostamento completano quelle presentate nel cap. 3, par. 3.3.

⁽³⁾ Vedi paragrafo successivo.

⁽⁴⁾ La (13) vale per un mezzo isotropo, altrimenti si ha $\partial \mathbf{D} / \partial t$.

⁽⁵⁾ Esperienze dirette per provare l'esistenza di un campo magnetico creato da un campo elettrico variabile nell'interno di un condensatore, e quindi l'esistenza delle correnti di spostamento, sono state eseguite successivamente da Thompson e da Koch.

⁽⁶⁾ Per esempio nell'interno di un condensatore inserito in un circuito attraversato da correnti alternate di bassa frequenza.

■ 8.3. LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Le equazioni di Maxwell, come si è già detto, costituiscono una brillante sintesi matematica delle proprietà del campo elettromagnetico che siamo venuti via via illustrando.

Per una maggiore chiarezza, riassumiamo brevemente queste proprietà prima di scrivere il sistema delle equazioni, supponendo di avere a che fare con mezzi isotropi.

1. La prima proprietà fondamentale del campo elettromagnetico è stata stabilita in elettrostatica ed esprime la relazione fra cariche e campo. La legge di Gauss afferma che il flusso del vettore $\varepsilon_r \mathbf{E}$ (prodotto dell'intensità del campo elettrico per ε_r) uscente da una superficie *chiusa* (S) è pari a $\Sigma q / \varepsilon_0$, essendo Σq la carica totale nell'interno della superficie stessa

$$(14) \quad \int_S \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}.$$

Ricordiamo che nei precedenti capitoli abbiamo mostrato come la trattazione del campo elettrico richieda nel caso generale (mezzi materiali) l'uso di due vettori: noi abbiamo usato \mathbf{E} e \mathbf{P} e poiché quest'ultimo nelle sostanze isotrope può essere posto proporzionale a \mathbf{E} , nella equazione (14) si ritrovano \mathbf{E} e ε_r .

Un'altra scelta spesso usata è quella dei vettori \mathbf{E} e $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$. In tal caso, al posto della (14) si ha

$$(15) \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \Sigma q.$$

In termini differenziali le (14) e (15) si scrivono⁽⁷⁾

$$(16) \quad \operatorname{div}(\varepsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(17) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

l'equazione di Maxwell

Nel caso di mezzo isotropo ed omogeneo ($\varepsilon_r = \text{cost}$ in tutti i punti) si ha anche

$$(18) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Si osservi che tali relazioni sebbene stabilite in elettrostatica, sono valide anche per il caso generale in cui il campo elettrico⁽⁸⁾ è generato sia

⁽⁷⁾ La (17) come la (15) vale anche in mezzi non isotropi.

⁽⁸⁾ Allo scopo di chiarire bene le posizioni che si fanno, vogliamo ricordare che considerando in maniera generale quello che accade nell'interno dei generatori (per es. pile) noi abbiamo parlato di un campo elettromotore (\mathbf{E}_m) ed a volte abbiamo considerato tale campo come una componente del campo elettrico totale nell'interno del generatore: questo è fatto al fine di rappresentare schematicamente il funzionamento dei generatori e l'azione totale che muove le cariche nel loro interno e nei circuiti collegati. *Nei generatori nei quali energia di altra specie* (chimica, meccanica ecc.) *viene trasformata in energia elettrica*, questo campo elettromotore è solo una comoda rappresentazione di azioni di natura varia che conducono alle trasformazioni di energia: mentre quindi esso va considerato per rappresentare schematicamente gli effetti che determinano il moto delle cariche nell'interno dei generatori, non va considerato come un vero e proprio campo elettrico da usare nella applicazione del teorema di Gauss. In altri termini, *convenendo qui* (equazioni di Maxwell)

da cariche sia da campi magnetici variabili. In tal caso infatti

$$(19) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i$$

ove il campo \mathbf{E}_i ⁽⁹⁾ (prodotto per induzione elettromagnetica) ha la proprietà di non avere cariche come sorgenti, di avere linee di forza chiuse e quindi flusso nullo attraverso superfici chiuse.

2. La seconda proprietà fondamentale consiste nel fatto che il campo di induzione magnetica \mathbf{B} non ha sorgenti puntiformi analoghe alle cariche; di conseguenza le linee del campo sono chiuse su se stesse. Essa è espressa, essendo S una superficie chiusa, dalla relazione

$$(21) \quad \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

ed in forma differenziale dalla relazione

III equazione di Maxwell

$$(22) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

3. La terza proprietà fondamentale consiste nel fatto (legge di Faraday) che un campo magnetico variabile crea un campo elettrico (non conservativo).

Per il campo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i$ si scrive⁽¹⁰⁾

$$(23) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \phi(\mathbf{B}).$$

L'integrale di linea va fatto lungo una linea chiusa qualsiasi e $\phi(\mathbf{B})$ è il flusso magnetico concatenato con essa.

In termini differenziali per un mezzo in quiete

II equazione di Maxwell

$$(25) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

di riservare il simbolo \mathbf{E} esclusivamente a

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i$$

occorre notare che tale campo va usato nelle (14), (16), (17), mentre per descrivere l'azione complessiva su una carica nell'interno del generatore va tenuto conto anche di \mathbf{E}_m . Così per la relazione che rappresenta la legge di Ohm si ha

$$(20) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m).$$

L'analisi dei processi nell'interno di ciascun generatore va fatta caso per caso con riferimento alle situazioni particolari che si verificano nel caso in oggetto.

(9) Anche il campo \mathbf{E}_i può essere considerato come elettromotore: si osservi tuttavia che in questo caso particolare a differenza dei generatori nei quali energie diverse vengono trasformate in energia elettrica, l'energia in gioco è sempre elettrica o magnetica e che, come si è visto, il campo \mathbf{E}_i è un effettivo campo elettrico.

(10) Nel caso particolare in cui lungo la linea chiusa di integrazione (per es. linea di un circuito) sia presente anche un generatore (per es. pila, f_p) l'equazione globale si scrive al posto della (23)

$$(24) \quad \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}_m) \cdot d\mathbf{l} = f_p - \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{B}).$$

È questa la relazione che va usata nell'analisi di un circuito. Ricordiamo tuttavia che il campo elettromotore è solo una comoda schematizzazione per processi molto vari che possono avvenire nel generatore (vedi nota 8). Per esprimere la esistenza del fenomeno della induzione elettromagnetica mediante una relazione differenziale (terza equazione di Maxwell) va fatto riferimento al campo elettrico come somma esclusivamente di \mathbf{E}_S ed \mathbf{E}_i ; tale relazione si può cioè dedurre dalla (23).

4. La quarta proprietà fondamentale consiste nel fatto che una corrente, sia essa di conduzione oppure di spostamento, genera un campo magnetico. Essa è espressa dalla relazione:

$$(26) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} + \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}$$

o se si usa il vettore \mathbf{D} (11)

$$(27) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

IV equazione di Maxwell

Si osservi che \mathbf{j} si può scrivere, ricordando che abbiamo convenuto di riservare il simbolo \mathbf{E} alla espressione $(\mathbf{E}_S + \mathbf{E}_i)$

$$(28) \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m).$$

Maxwell ha mostrato come l'insieme delle equazioni che esprimono le quattro proprietà ora dette costituisce un sistema il quale consente di dedurre tutte le caratteristiche del campo elettromagnetico.

Per corpi in quiete (non in moto) le equazioni di Maxwell si scrivono, sempre con l'ipotesi di isotropia

$$(28) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \\ \text{II} & \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III} & \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV} & \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} + \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} + \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} \end{array} \quad \text{Le equazioni di Maxwell}$$

Qualora si facciano comparire i vettori \mathbf{H} e \mathbf{D} le equazioni I e IV si trasformano nella seguente maniera (12)

$$(29) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{IV} & \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array}$$

Nel caso, molto importante in pratica, che il mezzo sia isotropo ed omogeneo [avente costante dielettrica (ε) e permeabilità (μ) costanti] e si trovi in condizioni di quiete, il sistema delle equazioni di Maxwell si scrive

$$(30) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \text{II} & \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III} & \text{div } \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV} & \text{rot } \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{array}$$

(11) La (27) vale anche in mezzi anisotropi.

(12) Le equazioni di Maxwell nella forma (29) valgono anche in mezzi anisotropi.

Si potrebbe, e viene fatto in alcuni testi destinati a studenti che già posseggono i concetti principali che si introducono nell'elettromagnetismo, derivare tutte le proprietà del campo elettromagnetico nella descrizione classica assumendo come postulato di partenza la validità delle equazioni di Maxwell.

Noi abbiamo preferito percorrere gradualmente la via dello studio classico dell'elettromagnetismo e giungere alle equazioni di Maxwell come a una sintesi matematica di inusitata bellezza del pensiero fisico relativo ad un vasto complesso di fenomeni.

Le equazioni di Maxwell consentono, note le caratteristiche del mezzo e la distribuzione nello spazio e nel tempo delle cariche e delle correnti, di determinare ovunque i vettori del campo elettromagnetico (**E** e **B**).

Si può con tutta generalità affermare che la trattazione di tutti i fenomeni di fisica classica può essere fatta affiancando alle quattro equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico le seguenti tre conclusioni sul comportamento fisico della materia:

a. l'espressione della forza che si esercita su una carica in un campo elettromagnetico

Forza di Lorentz

$$(31) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

È questa la relazione che consente di collegare l'elettromagnetismo alla meccanica.

b. il secondo principio della dinamica

Equazione di Newton

$$(32) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} .$$

c. la legge di gravitazione (vol. I, cap. 6) fra i corpi di massa m_1 e m_2 a distanza r

Legge della gravitazione

$$(33) \quad \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

Dalle equazioni di Maxwell si vede chiaramente come i campi elettrico e magnetico siano intimamente legati ed in genere si debba parlare di campo elettromagnetico come di un'unica entità. Solo in situazioni stazionarie (indipendenti dal tempo) le equazioni si riducono ad espressioni che contengono esclusivamente uno dei due vettori **E** e **B**. Si ha infatti in tal caso, per un mezzo isotropo ed omogeneo

$$(34) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \end{cases}$$

È questa la ragione per cui noi abbiamo potuto trattare la elettrostatica considerando solo il vettore **E** (senza **B**) e la magnetostatica tramite solamente il vettore **B** (senza **E**).

Le prime due equazioni infatti sono quelle che noi abbiamo stabilite a conclusione dell'elettrostatica (cap. 2, par. 2.1); le altre due regolano la magnetostatica (cap. 5, par. 5.2).

Le equazioni di Maxwell hanno un campo di applicazione molto esteso. Esse innanzitutto valgono per tutte le considerazioni fatte nei precedenti capitoli sul campo elettrico e sul campo magnetico, tanto nei casi stazionari quanto in quelli dipendenti dal tempo, e che sono di base per la spiegazione di un numero molto grande di processi elettromagnetici e delle loro applicazioni. Inoltre, le equazioni di Maxwell portano a stabilire le modalità con le quali perturbazioni del campo elettromagnetico si trasmettono: l'esistenza delle onde e.m. è stata appunto suggerita dalle equazioni di Maxwell e successivamente provata (H. Hertz, 1887, poco più di vent'anni dopo le previsioni teoriche di Maxwell). Lo studio della propagazione delle onde e.m. costituisce un campo di applicazione delle equazioni di Maxwell la cui importanza è accresciuta dal riconoscimento della natura elettromagnetica delle onde luminose.

Nel seguito di questo capitolo noi daremo esempi di applicazione delle equazioni di Maxwell limitandoci essenzialmente al settore della propagazione delle onde e.m.; esse sono particolarmente importanti e vanno trattate con tali equazioni.

Le equazioni di Maxwell, come si è detto, e tutta la descrizione classica costituiscono una costruzione del pensiero umano molto bella per la sua logica pur in una estensione notevole dei fenomeni da legare ed interpretare.

Ad integrare questo giudizio, vogliamo aggiungere che, a differenza di quello che accade per quell'altra grande teoria classica che è la meccanica classica, l'elettromagnetismo classico non va variato per effetto della relatività: esso è perfettamente compatibile con la relatività e per esso già accade che le leggi che regolano i processi sono sempre le stesse in tutte le terne inerziali (*principio di relatività*). Di ciò noi abbiamo avuto già modo di dare esempi (cap. 4, par. 4.11 e 4.13; cap. 6, par. 6.3). Questa conclusione non deve meravigliare giacché la relatività è nata in seno all'elettromagnetismo ed alcune conclusioni di Einstein (trasformazioni di Lorentz) erano già state trovate da Lorentz nello studio della maniera nella quale le equazioni di Maxwell dovevano trasformarsi passando da un sistema inerziale ad un altro.

Peraltro la teoria classica dell'elettromagnetismo ha alcune limitazioni. Le prime limitazioni derivano dal fatto che l'esperienza mostra come i processi nell'interno dell'atomo, o di sistemi ancora più piccoli, non seguono spesso l'elettromagnetismo classico; in particolare i processi di interazione (emissione ed assorbimento) fra radiazione elettromagnetica e materia, come varie volte abbiamo già detto, non sono processi continui. In questi casi occorre tenere conto di talune caratteristiche particolari dei processi, non comprese nella descrizione classica e che sono descritte dalla teoria quantistica. La trattazione quantistica del campo elettromagnetico esula dai limiti del presente testo.

Altre limitazioni e più gravi all'elettromagnetismo classico ed alle equazioni di Maxwell derivano dalle relazioni fra il concetto di una semplice particella carica ed il concetto di campo elettromagnetico. Alcune difficoltà per coordinare questi concetti sono presenti tanto nella teoria classica quanto, purtroppo, nella teoria quantistica ed in tutti i tentativi teorici finora fatti per sviluppare nuove teorie dei campi.

*Le equazioni di Maxwell
sono invarianti
per le trasformazioni
di Lorentz*

*Limitazioni
dell'elettromagnetismo
classico*

■ 8.4. PROPAGAZIONE DI UNA PERTURBAZIONE ELETTROMAGNETICA IN UN MEZZO DIELETTRICO OMOGENEO, PRIVO DI CARICHE E CORRENTI

La trasmissione di una perturbazione del campo elettromagnetico da un punto a punti lontani costituisce un problema di grande interesse. Per concretare le idee si consideri il caso in figura 8.2; una carica puntiforme all'istante $t = t_1$ venga spostata dalla posizione 1 alla posizione 2. Il campo elettrico per $t < t_1$ è rappresentato dalle linee di forza a tratto pieno; il campo per $t = \infty$ (per $t \gg t_1$) è quello delle linee tratteggiate a colore. Il passaggio da una situazione all'altra richiede del tempo ed in un istante intermedio si avrà una situazione nella quale lo stato delle linee di forza in punti distanti dalla carica più di una certa quantità è ancora quello iniziale, mentre quello per punti vicini è già quello finale. La perturbazione è cioè limitata ad una regione (fig. 8.2b) e si sposta nel tempo (si propaga). Analogamente (fig. 8.3) in un conduttore molto corto (l) venga inviato al tempo $t = t_1$ un impulso di corrente (fig. 8.3b): per $t < t_1$ e per $t = \infty$ il campo elettromagnetico nei punti circostanti è nullo. In un istante intermedio, se si considerano per esempio punti lungo la direzione x (fig. 8.3c), la perturbazione sarà confinata ad un tratto limitato: punti più lontani non sono ancora stati raggiunti dalla perturbazione e si trovano ancora nello stesso stato che si aveva prima che la perturbazione fosse prodotta nella sorgente, punti più vicini sono ritornati allo stato di equilibrio.

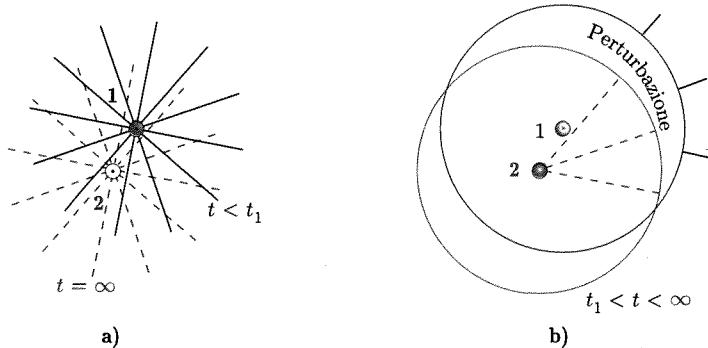


Fig. 8.2

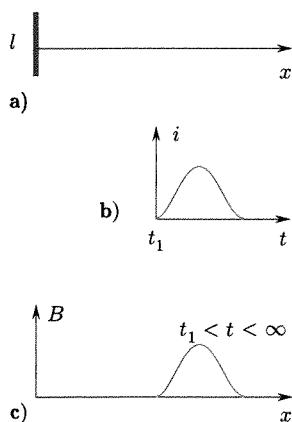


Fig. 8.3

Le equazioni di Maxwell hanno, come si è detto, indicato le modalità con le quali si propaga nello spazio una perturbazione del campo creata in un punto ed hanno consentito di studiare il complesso processo della propagazione delle onde elettromagnetiche.

Una trattazione esauriente di questi problemi esula dai limiti di questo testo e va cercata in libri e corsi specializzati. Ci limiteremo qui a considerare alcune situazioni abbastanza semplici ma particolarmente importanti, sia per riconoscere gli aspetti principali dei processi che si presentano nella propagazione delle onde elettromagnetiche, sia per l'interesse che i risultati hanno per il seguito del corso.

Vogliamo in questo paragrafo stabilire le caratteristiche del campo elettromagnetico in uno spazio infinito, isotropo, omogeneo, privo di cariche libere ($\rho = 0$) ed avente conducibilità nulla ($\sigma = 0$). La costante dielettrica (ϵ) e la permeabilità magnetica (μ) hanno quindi valori costanti.

Le equazioni di Maxwell si scrivono allora nella forma

$$(36) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Equazioni in assenza} \\ \text{di cariche in un mezzo} \\ \text{a conducibilità nulla} \end{array}$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni differenziali. Esso può essere risolto esprimendo una delle due funzioni incognite \mathbf{E} o \mathbf{B} per mezzo dell'altra. Per ottenere ciò si osservi che vale la relazione vettoriale⁽¹³⁾ già altre volte usata e che scriviamo per un vettore qualsiasi \mathbf{L}

$$(37) \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{L}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{L} - \nabla^2 \mathbf{L},$$

essendo il vettore

$$(38) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{L} &= \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial z^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 L_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 L_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Se si applica la (37) alla seconda delle (36), tenendo conto della prima delle (36), si ha

$$(39) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Dalla quarta delle (36), potendosi invertire l'ordine di derivazione fra coordinate spaziali e temporali,

$$(40) \quad \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Si ottiene quindi

$$(41) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Operando in maniera analoga partendo dalla quarta invece che dalla seconda delle (36) si ottiene

$$(42) \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Le equazioni (41) e (42) regolano le variazioni nello spazio e nel tempo rispettivamente di \mathbf{E} e di \mathbf{B} . In altri termini, una perturbazione del campo elettrico o del campo magnetico che per una ragione qualsiasi si verifichi in una regione ed in un istante non resta localizzata e le (41) e (42) legano i valori che \mathbf{E} e \mathbf{B} assumono nei vari posti e nei vari istanti.

Equazioni delle onde

⁽¹³⁾ Vedi appendice II.

Le equazioni differenziali (41) e (42) sono vettoriali e possono essere naturalmente ridotte ad analoghe relazioni scalari fra le componenti dei vettori **E** e **B**. Esempi di tali equazioni relative alle componenti di **E** e **B** sono

$$(43) \quad \nabla^2 E_x = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$(44) \quad \nabla^2 B_x = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}.$$

La forma di queste equazioni è a noi ben nota giacché è stata incontrata nella descrizione della maniera con la quale si propaga una perturbazione elastica in un mezzo elastico⁽¹⁴⁾. Si tratta di quella forma particolare di equazione differenziale chiamata equazione delle onde. La soluzione di equazioni di questo tipo è costituita da funzioni per la grandezza (vettoriale o scalare) cui la equazione si riferisce, caratterizzate dal fatto che la dipendenza dal tempo e dallo spazio avviene attraverso una combinazione lineare di tali variabili. La perturbazione si propaga per onde. Le equazioni di Maxwell conducono quindi a vedere che una qualsiasi perturbazione del campo elettromagnetico si propaga per onde. La velocità di tali onde è data⁽¹⁵⁾

*Velocità di propagazione
delle onde
elettromagnetiche*

$$(45) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

avendo indicato con c

*Velocità delle onde
nel vuoto*

$$(46) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

la velocità di propagazione nel vuoto.

Se si introducono nella (46) i valori di μ_0 ed ε_0 , determinati con esperienze di elettrostatica e magnetostatica, si trova come velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto

$$299.784 \pm 10 \text{ km/sec.}$$

Tale velocità coincide, entro i limiti dell'errore sperimentale, con la velocità della luce nel vuoto. È stata questa circostanza che ha fatto sospettare essere elettromagnetica la natura della luce. Un complesso di esperienze svolte verso la fine del secolo scorso ha mostrato la identità fra onde elettromagnetiche e onde luminose.

■ 8.5. ONDE PIANE IN UN DIELETTRICO OMOGENEO

Allo scopo di esaminare con maggior dettaglio le proprietà delle onde e.m. consideriamo (come del resto abbiamo fatto per le onde elastiche) un caso particolare, quello delle onde piane che si propagano in una direzione che indichiamo con x : in tal caso la perturbazione in punti che hanno la stessa x , che cioè giacciono in un piano normale a x , è in ogni istante la

⁽¹⁴⁾ Si veda il vol. I, cap. 9, par. 9.8 e 9.11.

⁽¹⁵⁾ Si confrontino le (41), (42), (43), (44) con le eq. (34) e (44) del vol. I, cap. 9.

stessa. Il problema diviene unidimensionale e tanto \mathbf{E} quanto \mathbf{B} dipendono solo da x .

Supponiamo ancora di trovarci in un dielettrico omogeneo, privo di cariche. È questa, con ottima approssimazione, la situazione che si ha quando si vuole studiare il campo elettromagnetico irradiato da un dipolo oscillante o, in concreto, da un'antenna radiotrasmittenente a *dipolo* (par. 8.13), a distanze sufficientemente grandi dal dipolo medesimo.

La prima e la terza equazione di Maxwell in assenza di cariche sono

$$(47) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Se si pongono in esse pari a zero le derivate delle componenti dei vettori rispetto a y e z si ottiene

$$(48) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0.$$

Inoltre, le altre due equazioni di Maxwell sono nel nostro caso

$$(49) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

e forniscono per le componenti dei rotori secondo x

$$(50) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0 = \mu \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le (48) e (50) indicano che le componenti secondo x di \mathbf{E} e \mathbf{B} non variano nello spazio e nel tempo: tali componenti, se diverse da zero, rappresentano campi uniformi e costanti che evidentemente non si propagano e quindi non fanno parte dell'onda. Volendo studiare la propagazione di perturbazioni e.m. possiamo prescindere dall'eventuale presenza di questi campi nella direzione x ⁽¹⁶⁾. Si conclude quindi che il campo che si propaga come onde è diretto trasversalmente alla direzione di propagazione (x), cioè che le onde e.m. sono trasversali.

Dalle altre componenti dei rotori (49) si ottiene

$$(51) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} &= \mu \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ Per semplicità si può supporre che tali componenti (E_x, B_x) siano nulle.

I campi **E** e **B** (supponendo zero le componenti secondo x che in ogni caso non interessano per l'onda) sono diretti normalmente ad x ed in genere avranno componenti secondo gli assi y e z , dato che nessuna specificazione è stata posta sulla posizione degli assi. Per semplificare la trattazione supponiamo che il campo **E** abbia solo la componente secondo y , $E_y (E_z = 0)$.

Dopo aver risolto questo caso, sarà facile trovare la soluzione nell'ipotesi che **E** abbia solo la componente E_z ed evidentemente la soluzione nel caso generale sarà una sovrapposizione delle due (vedi in seguito).

Se quindi poniamo $E_z = 0$ nelle (51) esse si riducono a

$$(52) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

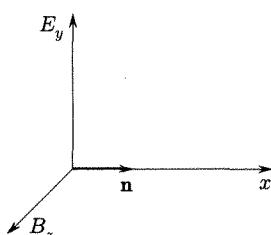


Fig. 8.4

Onda piana polarizzata linearmente

L'ultima relazione mostra che la componente di **B** nella direzione y , se esiste, è costante nello spazio e nel tempo; essa rappresenta cioè un campo uniforme stazionario che non interessa l'onda. Si conclude che il campo magnetico associato all'onda è diretto come z . Si giunge quindi alla importante conclusione che in un'onda piana i campi **E** e **B** sono normali fra loro ed alla direzione di propagazione. Indicando con **n** la direzione di propagazione, i vettori **E**, **B**, **n** formano una terna destra (fig. 8.4).

Ritornando alla situazione rappresentata dalle (52), per ottenere relazioni che leghino fra loro solo le derivate di **E** o di **B**, basta derivare la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t od in successione inversa per ottenere rispettivamente, eliminando le derivate miste,

$$(53) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$(54) \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Queste relazioni sono identiche a quelle stabilite per le onde elastiche piane⁽¹⁷⁾. La velocità di propagazione risulta (45)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}.$$

La soluzione generale della (53) è

$$(55) \quad E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Soluzione generale dell'equazione delle onde: $f_1(x - vt)$ rappresenta un'onda progressiva; $f_2(x + vt)$ rappresenta un'onda regressiva

essendo f_1 ed f_2 due funzioni arbitrarie. Esse rappresentano rispettivamente un'onda progressiva ed una regressiva nella direzione x (fig. 8.5).

⁽¹⁷⁾ Si confronti il vol. I, cap. 9, par. 9.8.

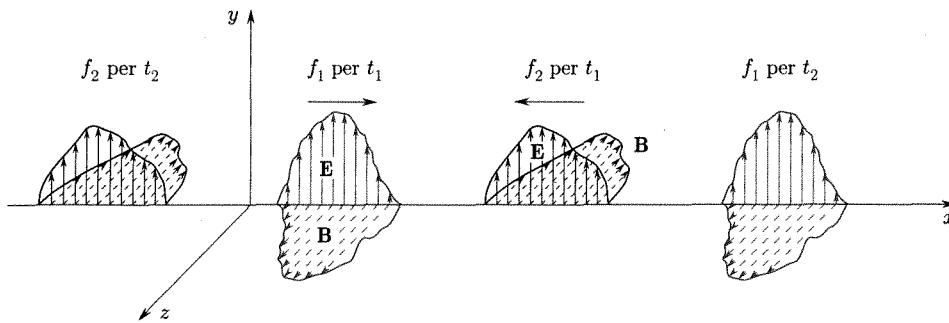


Fig. 8.5

Anche per quanto riguarda B_z si giunge alla conclusione, sulla base della (54) che essa è costituita dalla somma di due onde piane precedenti con la stessa velocità in verso opposto.

La presenza, nella soluzione generale, di un termine rappresentante un'onda regressiva, cioè procedente verso la sorgente, non deve stupire. Infatti, se il mezzo è limitato, sulla superficie limite di esso avvengono, come più avanti vedremo, fenomeni di riflessione, talché, in effetti, nel generico punto del mezzo sarà presente l'onda emanata dalla sorgente, e quindi progressiva, e, insieme, quella riflessasi alla superficie limite, e quindi regressiva; di ciò la soluzione generale dà debito conto. Naturalmente se, come noi abbiamo supposto, il mezzo è illimitato, il termine relativo all'onda regressiva svanisce e la soluzione della equazione delle onde si riduce alla sola onda progressiva.

Per esprimere il legame fra le funzioni arbitrarie che entrano nelle espressioni di E_y e B_z , si osservi che le loro derivate prime sono legate dalle equazioni (52). Dalla seconda delle (52) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\mu \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{v} [f'_1(x - vt) - f'_2(x + vt)] \end{aligned}$$

essendo f' le derivate di f , rispetto all'argomento della funzione. Si ha

$$(56) \quad B = \frac{1}{v} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] .$$

Dal confronto delle (55) e (56) si traggono importanti conclusioni.

- a. Il rapporto fra le intensità del campo elettrico e di quello magnetico ha lo stesso valore assoluto ma segno diverso, positivo per le onde nella direzione positiva di x , negativo per le onde regressive. Questo valore assoluto è costante (in un mezzo non dispersivo, cioè in cui $v = \text{cost}$):

$$(57) \quad \frac{E_y}{B_z} = v .$$

Relazione fra campo elettrico e magnetico per un'onda piana

Molto spesso si considera il rapporto

$$(58) \quad Z_0 = \frac{E_y}{H_z} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} .$$

Esso viene chiamato impedenza caratteristica del mezzo. Tale denominazione è giustificata dal fatto che le dimensioni e l'unità di Z_0 sono quelle di una impedenza⁽¹⁸⁾

$$\frac{\text{volt}/\text{m}}{\text{ampère}/\text{m}} = \text{ohm}$$

e che inoltre esso gioca nella definizione dell'intensità di un'onda e.m. un ruolo analogo a quello che l'impedenza ha per la potenza in un circuito in corrente alternata⁽¹⁹⁾.

Nel caso che il mezzo sia il vuoto si ha come valore numerico

Impedenza del vuoto

$$(59) \quad Z_0 = 376,7 \simeq 377 \Omega.$$

b. Il fatto che il rapporto fra campo elettrico e campo magnetico è costante porta di conseguenza che la forma dell'onda del campo elettrico è la stessa di quella dell'onda del campo magnetico. La perturbazione di \mathbf{E} o \mathbf{B} inoltre si sposta nella direzione x con velocità v senza cambiare forma se il mezzo, come si è supposto, non è conduttore e se esso non è dispersivo (fig. 8.5). Nel caso di un mezzo dispersivo, quando cioè v dipende dalla frequenza, le varie componenti, in cui secondo l'analisi di Fourier la perturbazione iniziale si scomponete, viaggiano con velocità diverse e la forma dell'onda cambia mentre si propaga⁽²⁰⁾.

Il caso più semplice è quello di onde sinusoidali, quando cioè tanto f_1 quanto f_2 sono funzioni sinusoidali.

Varie forme di scrivere la stessa funzione sono

$$(60) \quad \begin{aligned} E_y &= A_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + A_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) = \\ &= A_1 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right) + A_2 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \nu t \right) = \\ &= A_1 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A_2 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) = \\ &= A_1 \cos \omega \left(\frac{x}{v} - t \right) + A_2 \cos \omega \left(\frac{x}{v} + t \right) = \\ &= A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \cos(kx + \omega t). \end{aligned}$$

Forme di un'onda piana sinusoidale

essendo T il periodo, $\nu = 1/T$ la frequenza, $\lambda = v/\nu$ la lunghezza di onda, $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ la pulsazione, $k = 2\pi/\lambda$ il numero d'onda.

Le corrispondenti espressioni per B_z si deducono immediatamente da quelle ora scritte.

Nella figura 8.6 è indicata un'onda progressiva sinusoidale.

Vogliamo aggiungere qualcosa circa la soluzione delle (51) nel caso in cui \mathbf{E} non sia diretto come y . Il vettore \mathbf{E} giace nel piano yz e può quindi essere scomposto in due componenti E_y , E_z , per ciascuna delle quali si può ripetere quanto detto in precedenza per E_y , trovando un campo magnetico B_z associato a E_y ed un campo B_y associato a E_z . Nella figura 8.7 è

⁽¹⁸⁾ Vedi cap. 7.

⁽¹⁹⁾ Vedi relazione (79).

⁽²⁰⁾ Si ricordi (vol. I, cap. 9, par. 9.15) che nel caso di perturbazioni costituenti gruppi d'onda (formate dalla sovrapposizione di onde sinusoidali di frequenza poco diversa) per la propagazione in un mezzo dispersivo v'è da distinguere una velocità di fase per ciascuna componente sinusoidale ed una velocità di gruppo con la quale l'energia si propaga.

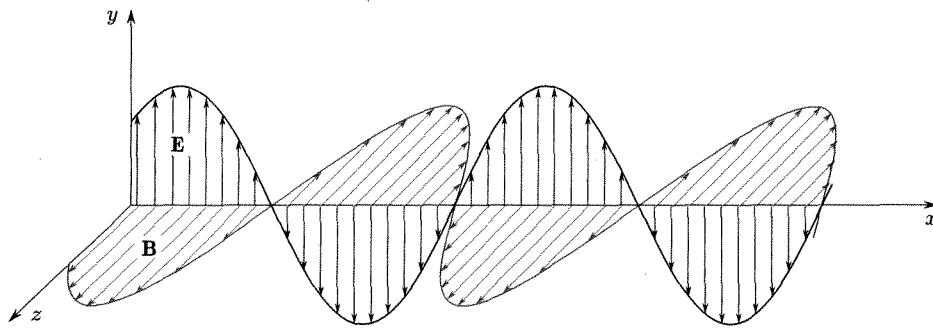


Fig. 8.6

indicata la scomposizione di \mathbf{E} in E_y ed E_z nell'ipotesi che tanto per E_y quanto per E_z vi sia solo il termine che si propaga nel verso positivo di x . La soluzione del nostro problema, essendo le equazioni di Maxwell lineari, è la somma di quelle relative alle componenti dei campi.

Si può quindi dire che la soluzione generale per \mathbf{E} diretto comunque nel piano yz è data da

$$(61) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z) & \mathbf{B} &= (0, B_y, B_z) \\ E_y &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) & B_y &= \frac{1}{v}[-F_1(x - vt) + F_2(x + vt)] \\ E_z &= F_1(x - vt) + F_2(x + vt) & B_z &= \frac{1}{v}[f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]. \end{aligned}$$

Ciò significa che nel caso generale \mathbf{E} è un vettore che, pur giacendo sempre nel piano yz , può cambiare direzione secondo i valori istantanei delle componenti. L'onda può sempre decomporsi in due onde trasversali polarizzate in piani normali fra loro⁽²¹⁾ yx , e zx . Per ogni onda i campi elettrici e magnetici sono normali fra loro.

Nel caso in cui la direzione di propagazione, individuata dal versore \mathbf{n} , non coincida con la direzione x del sistema di riferimento, come finora supposto, è facile trovare la espressione della soluzione generale dell'equazione delle onde.

Se $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sono i coseni della direzione di \mathbf{n} nel sistema x, y, z , si può prendere la direzione di \mathbf{n} come asse x' di un nuovo sistema $x'y'z'$ (fig. 8.8). In questo sistema si ha per il campo elettrico dell'onda (supposto diretto come y'):

$$(62) \quad \begin{aligned} E_{y'} &= f_1(x' - vt) + f_2(x' + vt) = \\ &= f_1(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - vt) + \\ &\quad + f_2(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + vt) \end{aligned}$$

ed indicando con \mathbf{r} il vettore di componenti x, y, z

$$(63) \quad E_{y'} = f_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt) + f_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + vt).$$

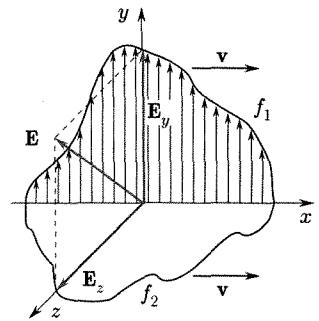


Fig. 8.7

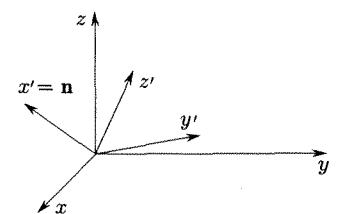


Fig. 8.8

Onda che si propaga nella direzione \mathbf{n}

⁽²¹⁾ Si prende di solito come piano di polarizzazione quello formato dalla direzione di propagazione e dal vettore \mathbf{B} e si indica come *piano di vibrazione* quello determinato dalla direzione di propagazione e da \mathbf{E} .

■ 8.6. ENERGIA DELLE ONDE ELETTRONAGNETICHE. VETTORE DI POYNTING

Le onde elettromagnetiche trasportano energia, così come si è visto per le onde elastiche: si tratta dell’energia associata ai campi elettrico e magnetico.

Ricordiamo che noi abbiamo stabilito le espressioni della densità di energia (energia per unità di volume) nel campo elettrico e nel campo magnetico nei casi statici. Si ha rispettivamente (cap. 1, par. 1.19 e cap. 4, par. 4.17)

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2; \quad \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}.$$

È possibile mostrare che tanto per campi statici quanto per campi variabili la densità di energia totale ha sempre la forma

$$(64) \quad w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right)$$

La dimostrazione è la seguente. Si supponga che in una regione dello spazio, di volume τ , un campo elettrico \mathbf{E} produca una corrente di densità \mathbf{j} . La potenza istantanea che viene dissipata (effetto Joule) è data da

$$(65) \quad \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau.$$

Usando la quarta equazione di Maxwell si ha

$$(66) \quad \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = \int_{\tau} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\operatorname{rot} \mathbf{B}}{\mu} \right) d\tau - \int_{\tau} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\tau.$$

Una relazione vettoriale esprime (vedi appendice II) che

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

Si ha quindi, usando anche la seconda equazione di Maxwell per il $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, che la potenza dissipata vale

$$(67) \quad \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = - \int_{\tau} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\tau - \int_{\tau} \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau - \int_{\tau} \frac{\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\mu} d\tau.$$

Supponendo che ε e μ non varino con il tempo

$$(68) \quad \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) d\tau - \int_{\tau} \frac{\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\mu} d\tau.$$

L’ultimo integrale si può trasformare da integrale esteso al volume ad integrale esteso alla superficie S che racchiude τ (cap. 1, par. 1.8)

$$(69) \quad - \int_{\tau} \frac{\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\mu} d\tau = - \int_S \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

e quindi

$$(70) \quad \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right) d\tau - \int_S \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Questa equazione va interpretata nel senso che la potenza istantanea, cioè la derivata rispetto al tempo della energia elettrica che si trova nel volume τ , è pari alla somma algebrica di due contributi: il primo rappresenta la variazione dell'energia contenuta nel volume (cioè nel campo elettromagnetico), il secondo rappresenta il flusso di energia dall'esterno nel volume.

Ciò significa che l'energia contenuta nell'unità di volume del campo elettromagnetico ha la espressione

$$(71) \quad w = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} \right),$$

come si voleva mostrare.

Inoltre il vettore

$$(72) \quad \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

rappresenta la potenza che esce attraverso l'unità di superficie dalla superficie che limita il volume considerato.

È facile inoltre vedere che i due termini che entrano nella espressione della densità di energia sono fra loro uguali. Si ricordi infatti che (57)

$$\frac{E}{B} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

e quindi

$$(73) \quad \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}.$$

Si ha pertanto anche

$$(74) \quad w = \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}.$$

Per le considerazioni relative al fluire dell'energia associata alle onde è molto utile introdurre il cosiddetto vettore di Poynting

$$(75) \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

esso è un vettore (fig. 8.9) che in ogni punto fornisce con la sua direzione la direzione in cui si propaga l'energia e con il suo modulo l'intensità istantanea (22), e cioè, la potenza istantanea che attraversa una superficie unitaria disposta in direzione perpendicolare al vettore stesso.

Per comprendere bene e semplicemente le sue caratteristiche si consideri il caso di un'onda piana progressiva sinusoidale. In tal caso la direzione di \mathbf{N} è chiaramente la direzione di propagazione dell'onda e del fluire dell'energia. È facile vedere inoltre che il suo modulo è pari alla energia che attraversa in un secondo (cioè alla potenza) una superficie di area unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione. Questa energia è infatti quella contenuta in un cilindro di sezione unitaria e

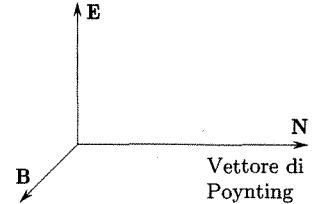


Fig. 8.9

Vettore di Poynting

L'intensità di un'onda è la potenza istantanea che attraversa una superficie unitaria disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione

(22) Si osservi che l'intensità istantanea è funzione del tempo. Questa circostanza è differente da quella che si verifica per le onde elastiche: in quel caso i due contributi all'energia dell'onda in un punto (cioè energia potenziale ed energia cinetica della singola particella oscillante) sono rappresentati da funzioni sinusoidali sfasate di $\pi/2$ e quindi la loro somma è costante: nel caso delle onde e.m. i due termini (energia elettrica ed energia magnetica) sono rappresentati da funzioni sinusoidali in fase come lo sono \mathbf{E} e \mathbf{B} .

lunghezza pari alla velocità di propagazione

$$(76) \quad J_{is} = v \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon v E^2 + \frac{1}{2} \frac{v}{\mu} B^2.$$

Ricordando che

$$\frac{E}{B} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

si ha che tale energia vale

$$(77) \quad J_{is} = \frac{1}{\mu} EB$$

cioè proprio N .

L'intensità istantanea dell'onda in un punto è legata ai valori di N , E , B ad ogni istante. Di solito quando si parla di intensità (J) di una radiazione si intende l'energia media che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie di area unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione⁽²³⁾. Essa è data dal valore medio di N nell'intervallo di un periodo. Nel caso di un'onda sinusoidale detti E_m e B_m i valori massimi di E e B si ha

*Intensità media
di un'onda piana
sinusoidale*

$$(78) \quad J = N = \frac{1}{2\mu} E_m B_m.$$

Per qualsiasi forma delle onde il vettore di Poynting ha sempre la direzione del flusso di energia. Di conseguenza se si ha una sorgente di radiazione qualsiasi e si vuol determinare la potenza emessa, si può, per effettuare il calcolo, prendere una superficie chiusa che circondi la sorgente e determinare il flusso del vettore di Poynting attraverso essa.

Il modulo del vettore di Poynting può anche essere scritto per un'onda sinusoidale od in genere in un mezzo non dispersivo

$$(79) \quad N = \frac{1}{\mu v} E^2 = \varepsilon v E^2 = G_0 E^2 = \frac{1}{Z_0} E^2.$$

La grandezza

$$(80) \quad G_0 = \varepsilon v = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

prende il nome di ammettenza caratteristica del mezzo. Il suo inverso

$$(81) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

è l'impedenza caratteristica del mezzo, già ricordata al par. 8.5.

Il vettore di Poynting è usato in molte considerazioni sulle onde elettromagnetiche.

⁽²³⁾ Naturalmente nel caso che il campo elettrico ed il campo magnetico dell'onda cambino rapidamente nello spazio, per la definizione di intensità, si considera un elemento di superficie normale alla direzione di propagazione nel punto ed il rapporto fra l'energia media che passa nell'unità di tempo attraverso l'elemento e l'area dS dell'elemento stesso.

Per completare le considerazioni relative alla energia delle onde vogliamo ricordare che finché si ha a che fare con onde sinusoidali, o anche con onde complesse ma in un mezzo non dispersivo, l'energia associata all'onda viaggia con una velocità pari alla velocità v (di fase) che finora abbiamo considerato. Nel caso peraltro che il mezzo sia dispersivo le onde sinusoidali componenti un'onda complessa viaggiano con una velocità di fase diversa. Come nel caso delle onde elastiche un gruppo d'onda cambia in continuazione⁽²⁴⁾ di forma e la perturbazione risultante, alla quale è associata l'energia, viaggia con una velocità di gruppo u

$$(82) \quad u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Per un gruppo d'onda in un mezzo dispersivo, la velocità u è quella che si può misurare, proprio perché la misura si effettua determinando come si muove l'energia associata al gruppo.

*Velocità di fase
e velocità di gruppo*

■ 8.7. PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTRONAGNETICHE

Per la propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo materiale o nel vuoto sono valide tutte le considerazioni che sono state svolte per le onde elastiche e che sono legate alla natura ondulatoria del processo⁽²⁵⁾. Noi qui non abbiamo la possibilità di esaminare con il dettaglio dovuto tutte le proprietà di propagazione delle onde e.m. come invece è fatto in corsi specializzati. È perciò particolarmente utile fare riferimento a ciò che è stato visto per la propagazione di onde elastiche (trasversali) ove concetti e proprietà sono stati introdotti ed illustrati in maniera facilmente accessibile.

Come nel caso delle onde elastiche, anche per quelle elettromagnetiche, una forma delle onde (determinata dalla forma delle superfici d'onda) molto importante è quella sferica. A distanze molto grandi dalla sorgente puntiforme, che le crea, quando nel processo che interessa occorra limitarsi a considerare la parte delle onde sferiche in una regione vista dalla sorgente sotto un angolo solido molto piccolo, il sistema di onde sferiche può essere trattato come un sistema di onde piane la cui direzione di propagazione viene indicata come raggio. Le onde e.m. sono trasversali e quindi alla propagazione di una perturbazione in una qualsiasi direzione sono sempre associate (come si è visto per le onde piane nel par. 8.5) due onde che hanno i piani di polarizzazione (contenente la direzione di propagazione ed il vettore \mathbf{B}) normali fra loro.

Onde sferiche

Le caratteristiche assunte dalla propagazione delle onde in un mezzo contenente oggetti dipende fortemente dalle dimensioni di questi rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda sinusoidale che si considera⁽²⁶⁾:

⁽²⁴⁾ Si veda il vol. I, cap. 9, par. 9.11.

⁽²⁵⁾ Abbiamo già fatto talvolta uso di questo fatto. Va, beninteso, tenuto presente che mentre le onde elastiche possono essere longitudinali o trasversali, quelle e.m. sono solo trasversali. Queste ultime inoltre non hanno bisogno di un supporto materiale e quindi si propagano anche nel vuoto.

⁽²⁶⁾ Perturbazioni di altro genere possono essere considerate, per il teorema di Fourier, prodotte dalla sovrapposizione di perturbazioni sinusoidali.

Tabella 8.1

	Lunghezze d'onda λ		Frequenza	Energia del quanto di radiazione $h\nu$	Emettitori assorbitori	Sorgenti	Rivelatori
	cm	unità usate generalmente					
Violetto							
	10^{-14}		10^{14}	$3 \cdot 10^{24}$			tecniche fotoelettriche e fotocromatiche
	10^{-13}		10^{13}	$3 \cdot 10^{23}$			tecniche termiche
	10^{-12}		10^{12}	$3 \cdot 10^{22}$			circuiti elettrici
	10^{-11}	0,001 Å	10^{11}	$3 \cdot 10^{21}$			
	10^{-10}	0,01 Å	10^{10}	$3 \cdot 10^{20}$			
	10^{-9}	0,1 Å	10^9	$3 \cdot 10^{19}$			
	10^{-8}	1 Å	10^8	$3 \cdot 10^{18}$			
	10^{-7}	10 Å	10^7	$3 \cdot 10^{17}$			
	10^{-6}	100 Å	10^6	$3 \cdot 10^{16}$			
	10^{-5}	1000 Å	10^5	$3 \cdot 10^{15}$			
Luce visibile							
Rosso							
	10^{-4}	infra rosso	10^4	$3 \cdot 10^{14}$			
	10^{-3}		10^3	$3 \cdot 10^{13}$			
	10^{-2}		10^2	$3 \cdot 10^{12} = 3000$ Gc/s			
	10^{-1}	microonde	10^1	$3 \cdot 10^{11} = 300$ Gc/s			
	10^0	radar	10^0	$3 \cdot 10^{10} = 30$ Gc/s			
	10^1	onde ultracorte	10^{-1}	$3 \cdot 10^9 = 3$ Gc/s			
	10^2	onde opere	10^{-2}	$3 \cdot 10^8 = 300$ Mc/s			
	10^3	onde medie	10^{-3}	$3 \cdot 10^7 = 30$ Mc/s			
	10^4	onde corte	10^{-4}	$3 \cdot 10^6 = 3$ Mc/s			
	10^5	onde lunghe	10^{-5}	$3 \cdot 10^5 = 300$ Kc/s			
	10^6		10^{-6}	$3 \cdot 10^4 = 30$ Kc/s			

1. nel caso che gli oggetti siano di dimensioni molto grandi rispetto a λ la propagazione può di solito con ottima approssimazione essere trattata per mezzo di onde piane (raggi) che si propagano in varie direzioni e che all'interfaccia fra vari mezzi omogenei subiscono i processi di riflessione e rifrazione;
2. nel caso che le dimensioni degli oggetti siano dello stesso ordine della lunghezza d'onda oppure quando assumano importanza limitazioni particolari alla propagazione (27), la propagazione assume aspetti (fenomeni di diffrazione) che vanno trattati portando adeguatamente in conto la natura delle onde.

In alcuni casi la trattazione approssimata per mezzo del principio di Huygens può essere sufficiente.

Tutti i fenomeni caratteristici della propagazione per onde, quali l'interferenza, le onde stazionarie, l'effetto Doppler (28), la pressione di radiazione, visti per le onde elastiche esistono anche per le onde e.m.

Nel seguito del presente capitolo noi ci limiteremo ad indicare la trattazione di taluni processi ondulatori generali per sottolineare come ciò che fu trovato valido per le onde elastiche valga per le onde e.m. e per svolgere alcune considerazioni legate specificamente al comportamento che mezzi materiali sottoposti a campi elettrici possono avere.

Altre considerazioni saranno fatte quando si tratterà più specificamente la propagazione delle onde e.m. che costituiscono la luce (ottica).

Nella tabella 8.1 è indicato lo spettro delle onde e.m. assieme ai mezzi di generazione ed ai metodi di rivelazione nelle varie bande.

(27) Come quando occorra considerare gli effetti dovuti ai bordi degli oggetti (per es. diffrazione da uno spigolo).

(28) Nei riguardi dell'effetto Doppler è bene sottolineare che la trattazione va fatta con la teoria della relatività. Vi è luogo a considerare un effetto longitudinale quando il moto fra osservatore (O) e sorgente (S) avviene nella direzione OS , cioè nella direzione delle onde, ed un effetto trasversale quando il moto relativo fra O e S è normale ad OS . L'effetto trasversale manca per il caso delle onde elastiche. Va inoltre osservato che nel caso delle onde e.m. non ha significato distinguere se si muove l'osservatore o la sorgente; nel caso delle onde elastiche si è fatta questa distinzione potendosi riferire le posizioni dell'osservatore e della sorgente al mezzo materiale in cui ha luogo la propagazione; ciò non è più possibile per le onde e.m. Nei riguardi dell'effetto Doppler longitudinale si trova per la frequenza osservata (ν)

$$(83) \quad \nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \pm \beta}$$

essendo ν_0 la frequenza delle onde emesse; $\beta = u/c$ il rapporto fra la velocità relativa (u) fra osservatore e sorgente e la velocità della luce. I segni + e - si riferiscono rispettivamente al caso in cui S ed O si allontanano o si avvicinano. Nel caso di moto di avvicinamento si può scrivere con buona approssimazione per $u \ll c$

$$(84) \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c} + \dots \right).$$

Per l'effetto Doppler trasversale si trova

$$(85) \quad \nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right).$$

8.8. RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DI ONDE PIANE

Vogliamo considerare i processi che avvengono quando un'onda incontra la superficie di separazione di due mezzi dielettrici omogenei ($\epsilon_1, \mu_1; \epsilon_2, \mu_2$). Faremo la trattazione nel caso che l'onda sia piana e sinusoidale.

Supponiamo che i mezzi siano molto estesi e che la superficie di separazione sia piana. Scegliamo questo piano come piano $xy(z=0)$ di un sistema di riferimento.

In accordo a quanto visto al par. 8.5 eq. (63) un'onda piana sinusoidale che si propaghi in una direzione qualsiasi individuata dal versore \mathbf{n} ha il vettore elettrico che è dato da una relazione del tipo

$$(86) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) - \delta \right]$$

essendo

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk$$

il vettore che individua la posizione del punto e δ un angolo di fase generico. Tale espressione si riduce ad una del tipo (60) per un'onda che si propaga nella direzione di uno degli assi coordinati. La espressione corrispondente per \mathbf{B} si ottiene considerando la (57).

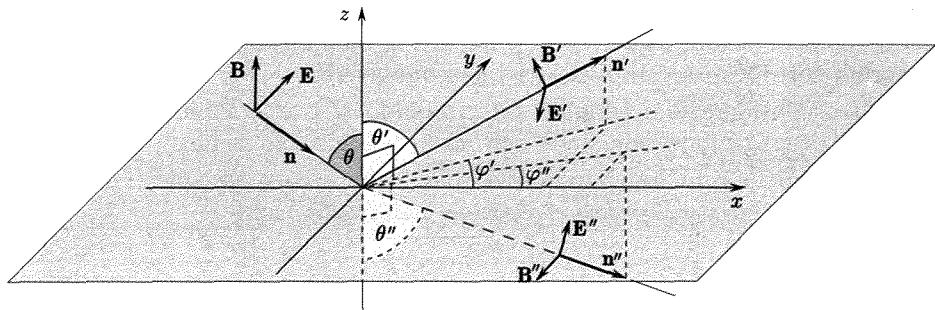


Fig. 8.10

L'onda piana nel nostro caso incide in un punto del piano xy che è preso come origine; sceglieremo la posizione degli assi x, y , in modo che \mathbf{n} sia nel piano xz (piano di incidenza) (fig. 8.10) e l'origine dei tempi in modo che $\delta = 0$. In tal caso per l'onda piana (il raggio incidente) si ha

$$(87) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_m \sin \omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{v_1} \right).$$

Il versore \mathbf{n} è legato all'angolo θ che il raggio forma con (z) la normale al piano di separazione (angolo di incidenza) dalla relazione

$$(88) \quad \mathbf{n} = \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{k}.$$

In genere vi sarà un'onda riflessa (in direzione \mathbf{n}') ed un'onda rifratta (in direzione \mathbf{n}''). Noi non conosciamo a priori nulla di queste onde, né per quanto riguarda la loro frequenza né per la loro direzione. Le espressioni dei campi elettrici delle due onde, riflessa (\mathbf{E}') e rifratta (\mathbf{E}''), avranno quindi espressioni del tipo generale

$$(89) \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_m \sin \left[\omega' \left(t - \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}}{v_1} \right) - \delta' \right]$$

$$(90) \quad \mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_m \sin \left[\omega'' \left(t - \frac{\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r}}{v_2} \right) - \delta'' \right].$$

Per individuare la posizione di \mathbf{n}' ed \mathbf{n}'' rispetto agli assi xyz consideriamo i piani che contengono l'asse z e rispettivamente \mathbf{n}' ed \mathbf{n}'' ed indichiamo con φ' e φ'' gli angoli che tali piani formano col piano xz ; indichiamo inoltre con θ' e θ'' gli angoli che z forma rispettivamente con \mathbf{n}' ed \mathbf{n}'' . Si ha allora

$$(91) \quad \begin{aligned} \mathbf{n}' &= \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{i} + \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{j} + \cos \theta' \mathbf{k} \\ \mathbf{n}'' &= \sin \theta'' \cos \varphi'' \mathbf{i} + \sin \theta'' \sin \varphi'' \mathbf{j} - \cos \theta'' \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Per determinare i parametri che definiscono l'onda riflessa e quella rifratta, noi abbiamo a disposizione le condizioni ai limiti⁽²⁹⁾ che devono essere soddisfatte dai vettori elettrico e magnetico: le componenti tangenziali dei vettori \mathbf{E} ed $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ devono essere continue attraverso la superficie di separazione dei mezzi.

Ciò significa nel nostro caso che per tutti i punti del piano $z = 0$ e per qualsiasi istante si deve avere

$$(92) \quad \begin{aligned} E_x + E'_x &= E''_x & \frac{B_x}{\mu_1} + \frac{B'_x}{\mu_1} &= \frac{B''_x}{\mu_2} \\ E_y + E'_y &= E''_y & \frac{B_y}{\mu_1} + \frac{B'_y}{\mu_1} &= \frac{B''_y}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Si osservi che ciascuna di queste relazioni, essendo ottenuta mediante termini che sono proiezioni di una delle (87) (89) (90), o delle analoghe per \mathbf{B} , su un asse (x od y), è formata da tre termini ciascuno dei quali varia nello spazio e nel tempo come rispettivamente (87) (89) (90).

Perché quindi le relazioni possano essere rispettate per qualsiasi istante e per qualsiasi punto del piano $z = 0$, deve accadere che per ogni punto di tale piano gli argomenti delle funzioni sono delle (87) (89) e (90) siano uguali o differiscano di multipli di π . Si può scrivere:

$$(93) \quad \omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{v_1} \right) = \omega' \left(t - \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}}{v_1} \right) - \delta' = \omega'' \left(t - \frac{\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r}}{v_2} \right) - \delta''.$$

Ciò porta di conseguenza che deve essere:

1. $\omega = \omega' = \omega''$
2. i valori di δ possono essere o zero o π (quest'ultimo caso equivale a cambiare il segno dell'ampiezza).
3. per i punti di $z = 0$

$$(94) \quad \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{v_1} = \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}}{v_1} = \frac{\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{r}}{v_2}.$$

Analizziamo quest'ultima circostanza. Siccome il vettore \mathbf{n} non ha componenti nella direzione y , lo stesso deve accadere per i vettori \mathbf{n}' ed \mathbf{n}'' e quindi φ' e φ'' nelle (91) sono nulli. Ciò si esprime dicendo che tutti i vettori \mathbf{n} , \mathbf{n}' , \mathbf{n}'' giacciono nello stesso piano che contiene anche la normale alla superficie di separazione, cioè: il raggio riflesso giace nel piano (di incidenza) determinato dal raggio incidente e dalla normale nel punto di incidenza alla superficie riflettente (I legge della riflessione); il raggio rifratto giace nel piano di incidenza (I legge di rifrazione).

Legge della riflessione

⁽²⁹⁾ Le condizioni ai limiti, dedotte da noi per condizioni stazionarie, valgono anche per le onde e.m. quando, come è nel presente caso, non vi siano correnti laminari sulle superfici limiti.

Sviluppando le (94) e tenendo conto che $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}''$ hanno componenti solo nelle direzioni x e z , mentre \mathbf{r} per punti del piano $z = 0$ ha componenti solo secondo x ed y , si ha

$$(95) \quad \frac{x \sin \theta}{v_1} = \frac{x \sin \theta'}{v_1} = \frac{x \sin \theta''}{v_2}$$

Dall'eguaglianza del primo e secondo termine si ha

$$\sin \theta = \sin \theta'$$

cioè

$$(96) \quad \theta = \theta'$$

che si esprime: l'angolo formato dal raggio incidente e la normale alla superficie di separazione è pari all'angolo formato dal raggio riflesso con la stessa normale (II legge della riflessione).

Dall'eguaglianza fra il primo ed il terzo termine della (95) si ha

Legge della rifrazione

(97)

$$\frac{\sin \theta}{v_1} = \frac{\sin \theta''}{v_2}.$$

Quest'ultima relazione costituisce la II legge della rifrazione (legge di Snellius-Cartesio). Essa lega gli angoli di incidenza (θ) e rifrazione (θ'') che il raggio incidente e quello rifratto formano con la normale alla superficie di separazione.

Indice di rifrazione

(98)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

n_{12} prende il nome di indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo.

Se il primo mezzo è il vuoto il rapporto

$$(99) \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{c}{v} = n$$

prende il nome di indice di rifrazione assoluto del mezzo materiale.

Si ha nel passaggio da un mezzo 1 di indice di rifrazione assoluto n_1 , ad un mezzo 2 di indice di rifrazione assoluto n_2

$$(100) \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ricordiamo inoltre che (45)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

e quindi

$$(101) \quad n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}.$$

I mezzi dielettrici hanno μ_r molto prossimo all'unità e quindi per essi

$$(102) \quad n = \sqrt{\epsilon_r}.$$

Questa relazione lega l'indice di rifrazione delle onde e.m. alla costante dielettrica del dielettrico: in essa si possono usare i valori statici di ϵ_r (ottenuti per esempio misurando la capacità di un condensatore) solo per

frequenze basse delle onde e.m. Per frequenze alte la costante dielettrica si trova a variare con ν e di conseguenza lo stesso è per $v(\nu)$ e $n(\nu)$. Tale variazione, le cui cause sono state esaminate nello studio dei dielettrici, costituisce il fenomeno della dispersione⁽³⁰⁾.

Si osservi che se $n_2 > n_1$, cioè il raggio passa da un mezzo a velocità v_1 ad uno a velocità v_2 inferiore ($v_2 < v_1$), si ricava dalla (98):

$$\theta > \theta''$$

cioè il raggio rifratto si avvicina alla normale. Esso esiste per qualsiasi θ .

Se invece accade $n_1 > n_2$ (cioè $v_2 > v_1$) si ha che $\theta < \theta''$. In tal caso la rifrazione accade per angoli θ fino al valore limite (θ_L) per cui $\theta'' = \pi/2$ cioè

$$(103) \quad \sin \theta_L = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Riflessione totale

Angolo limite

Per $\theta \geq \theta_L$ la rifrazione manca e tutta l'energia del raggio incidente si trova nel raggio riflesso (riflessione totale).

Per ottenere le ampiezze dei vettori elettrico e magnetico delle onde riflesse e rifatte si può fare uso delle (92). È più opportuno peraltro considerare le componenti di \mathbf{E} (di \mathbf{B}) secondo due direzioni particolari legate al raggio incidente. La prima componente E_i giace nel piano di incidenza (determinato da \mathbf{n} e la normale alla superficie di separazione); la seconda E_s è normale al piano di incidenza, e quindi giacente nel piano tangente alla superficie limite. Ciò corrisponde a considerare ciascuna onda come formata dalla sovrapposizione di due onde polarizzate aventi il vettore elettrico secondo le due direzioni principali ora indicate. Le condizioni (92) di continuità delle componenti tangenziali di \mathbf{E} sulla superficie limite si scrivono separatamente per le onde polarizzate con il vettore elettrico nel piano di incidenza (piano $y = 0$) e per le onde polarizzate con il vettore elettrico lungo y .

Per la prima onda si osservi (fig. 8.11) che essendo i vettori \mathbf{E} normali ai vettori \mathbf{n} , si ha per le componenti nel piano $z = 0$

$$(104) \quad E \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = E \cos \theta.$$

Dall'osservazione della figura si ricavano i segni dei vari termini

$$(105) \quad E_i \cos \theta - E'_i \cos \theta = E''_i \cos \theta''.$$

Per le onde polarizzate con il campo elettrico diretto normalmente al piano di incidenza, la condizione di continuità delle componenti tangenziali (parallele alla superficie di separazione) si scrive

$$(106) \quad E_s + E'_s = E''_s.$$

Analogamente dalle condizioni di continuità per le componenti tangenziali di $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ e dalla relazione che lega il vettore elettrico di un'onda al vettore magnetico (normale al primo) (57)

$$B_y = \frac{E_z}{v}$$

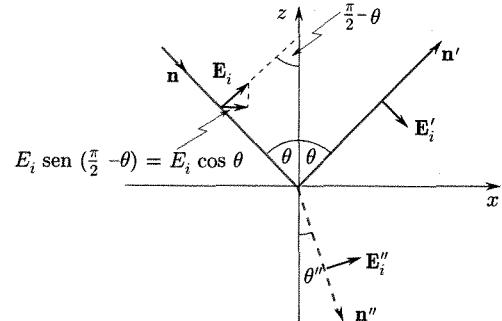


Fig. 8.11

⁽³⁰⁾ In particolari regioni dello spettro in un mezzo dispersivo si ha $n < 1$ e dalla (101) si deduce per la velocità v un valore maggiore di c . Si osservi che v è la velocità di fase, ed il risultato ora detto non contrasta con la teoria della relatività, giacché il postulato che la velocità della luce sia la più elevata velocità raggiungibile si riferisce alla velocità di gruppo, cioè alla velocità con cui un segnale luminoso è trasmesso: tale velocità (u) è minore di c anche nelle regioni dello spettro ove $n = c/v$ è minore di 1 ($v > c$).

si giunge a scrivere altre due relazioni fra i vettori E_i ed E_s . Se si indicano con n_1 ed n_2 gli indici di rifrazione assoluti dei mezzi 1 e 2

$$n_1 = \frac{c}{v_1}; \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

le relazioni sono

$$(107) \quad n_1(E_s - E'_s) \cos \theta = n_2 E''_s \cos \theta''$$

$$(108) \quad n_1(E_i + E'_i) = n_2 E''_i.$$

Il sistema delle quattro equazioni (105) (106) (107) (108) consente di determinare le quattro incognite E'_i, E'_s, E''_i, E''_s .

Se si risolve il sistema ricordando che [(98) e (100)]

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta''}{\sin \theta}$$

si ottiene

$$(109) \quad \begin{aligned} E'_i &= E_i \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \\ E'_s &= -E_s \frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \end{aligned}$$

$$(110) \quad \begin{aligned} E''_i &= E_i \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \\ E''_s &= E_s \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')} \end{aligned}$$

Queste relazioni sono indicate come il nome di relazioni di Fresnel.

Vogliamo ora svolgere qualche ulteriore considerazione per quel che riguarda lo stato di polarizzazione. Noi abbiamo determinato le ampiezze delle due onde componenti polarizzate rispettivamente con il vettore \mathbf{E} nel piano di incidenza dell'onda incidente e normalmente ad esso. Se si vuole tuttavia determinare nello spazio la posizione del vettore \mathbf{E} , cioè la polarizzazione risultante che ciascuna onda possiede, basta osservare che l'angolo fra il piano xy ed il piano determinato da \mathbf{E} e dalla direzione di propagazione (cioè il piano di vibrazione dell'onda) è tale che la sua tangente vale per l'onda incidente E_i/E_s e per le altre due onde rispettivamente E'_i/E'_s e E''_i/E''_s .

Dalla prima relazione di Fresnel si deduce facilmente il verificarsi di una circostanza particolare in condizioni opportune.

In corrispondenza ad un angolo di incidenza particolare θ_p , il cui valore presto determineremo, si ha che i raggi riflesso e rifratto risultano normali fra loro, cioè $(\theta + \theta'') = \pi/2$. In tali condizioni il denominatore di E'_i diviene infinito ed $E'_i = 0$. Ciò significa che il raggio riflesso ha il vettore elettrico (E'_i) diretto normalmente al piano di incidenza. Esso cioè risulta polarizzato normalmente a tale direzione, qualunque sia lo stato di polarizzazione dell'onda e.m. incidente.

Si vede quindi che si può usare il processo di riflessione per ottenere un'onda e.m. polarizzata in una determinata direzione (con il vettore elettrico normale al piano di incidenza, cioè parallelo alla superficie riflettente) partendo da un'onda con una polarizzazione qualsiasi. L'angolo di incidenza θ_p , chiamato angolo di polarizzazione o angolo di Brewster, può essere calcolato dalla legge della rifrazione (98) ponendo

$$(111) \quad \theta_p + \theta'' = \frac{\pi}{2}.$$

Risulta, dalla (98):

$$(112) \quad \tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

La (112) costituisce la cosiddetta relazione di Brewster.

Il metodo ora accennato per ottenere onde e.m. polarizzate in una determinata direzione è molto usato per la luce, in ottica.

Relazioni di Fresnel

Angolo di Brewster

■ 8.9. PROPAGAZIONE IN UN MEZZO CONDUTTORE OMOGENEO

Passiamo ora a considerare la propagazione di onde e.m. in un mezzo conduttore.

Siano σ , ε , μ , la conducibilità, la costante dielettrica, e la permeabilità del mezzo; riterremo questi parametri costanti. Le equazioni di Maxwell differiscono da quelle esaminate per un dielettrico omogeneo solo per la presenza nella quarta equazione del termine che contiene la densità delle correnti di conduzione

$$(113) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Questo sistema può essere risolto in un mezzo privo di cariche libere localizzate ($\rho = 0$) seguendo la stessa strada del par. 8.4 giungendo per il campo elettrico, al posto della (41), alla equazione

$$(114) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Analoga equazione vale per \mathbf{B} .

Per esaminare l'andamento dei fenomeni in maniera semplice, limitiamoci a considerare (come si è fatto per il caso del mezzo dielettrico nel par. 8.5) onde piane propagantesi nella direzione x , e tali che il vettore \mathbf{E} sia diretto come y . In tal caso la (114) si riduce a

$$(115) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Analoga equazione si trova per B_z . La soluzione di queste equazioni e la completa discussione si può trovare in testi specializzati.

Daremo qui le conclusioni principali cui si perviene supponendo per semplicità che la perturbazione in ogni punto sia una funzione sinusoidale del tempo (pulsazione ω).

Innanzitutto, come nel caso dei dielettrici, al campo E_y si associa B_z ⁽³¹⁾. Si trova per i due campi

$$(116) \quad E_y = E_0 e^{-\omega kx} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_c} \right) \right]$$

$$(117) \quad B_z = \sqrt{\frac{1}{v_c^2} + k^2} E_0 e^{-\omega kx} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_c} \right) - \varphi \right]$$

essendo: la velocità nel mezzo conduttore

$$(118) \quad v_c = \frac{\omega}{\sigma} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right)^{1/2}$$

ed inoltre

$$(119) \quad k = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right)^{1/2}$$

$$(120) \quad \tan \varphi = k v_c.$$

⁽³¹⁾ Nel caso di orientazione qualsiasi di \mathbf{E} nel piano (y, z) normale alla direzione di propagazione (x) v'è da considerare due onde per le quali si ha rispettivamente E_y associato a B_z ed E_z associato a B_y , come si è visto nel caso di mezzo dielettrico. Le due onde cioè sono polarizzate perpendicolarmente fra loro.

Il valore E_0 è il valore del campo elettrico per $x = 0$.

Da queste espressioni si deducono importanti proprietà:

- a. I campi hanno la forma di oscillazioni di tipo sinusoidale la cui ampiezza si va attenuando nello spazio.

La costante k caratterizza l'assorbimento; $\omega k = \alpha$ è il coefficiente di assorbimento⁽³²⁾. L'esistenza di questo assorbimento è da spiegarsi con il fatto che il campo elettrico pone in moto nel conduttore le cariche libere, produce cioè correnti alle quali si associa una dissipazione di energia.

- b. In conseguenza appunto dell'esistenza dell'assorbimento, i campi E_x e B_z non sono più in fase fra loro, come nei dielettrici, ma hanno una differenza di fase φ .

- c. La velocità di propagazione risulta funzione della frequenza; il mezzo è cioè dispersivo.

La distanza che un'onda e.m. piana deve percorrere perché la sua ampiezza si riduca ad $1/e$ (cioè 0,368) del valore iniziale prende il nome di profondità di penetrazione. Essa vale

$$(121) \quad d = \frac{1}{\omega k} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu \epsilon}} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right)^{-1/2}.$$

La costante dielettrica non è facile a determinarsi nei conduttori: occorrebbe usare metodi ottici giacché non si possono usare quelli elettrostatici impiegati normalmente per i dielettrici. Non vi sono tuttavia ragioni perché i valori di ϵ nei conduttori debbano essere di un ordine di grandezza diverso da quella nei dielettrici. Si può quindi ammettere che per i conduttori sia

$$(122) \quad \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1.$$

Questa circostanza semplifica le formule (118) (119) e (121). Si ha

$$(123) \quad v_c = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} = \omega d$$

$$(124) \quad d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

La profondità di penetrazione decresce inversamente alla radice quadrata della frequenza, della conducibilità e della permeabilità del mezzo conduttore.

La lunghezza d'onda apparente nel metallo è

$$(125) \quad \lambda_c = \frac{v_c}{\nu} = 2\pi d.$$

Se la profondità di penetrazione è piccola, la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda nel metallo sono molto più piccole dei corrispondenti valori nel vuoto.

La tabella 8.2 indica per il caso del rame ($\sigma = 5,14 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, $\mu_r = 1$) le profondità di penetrazione per onde di varia frequenza; sono anche indicate le lunghezze d'onda nel vuoto e quelle nel metallo.

Tabella 8.2

ν	$3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$	$3 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$	$3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$	$3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$	$3 \cdot 10^4 \text{ Hz}$
d	$2,4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$	$2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$2,4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$2,4 \cdot 10^{-1} \text{ mm}$	$2,4 \text{ mm}$
λ_c	$1,507 \mu$	$15,07 \mu$	$0,1507 \text{ mm}$	$1,507 \text{ mm}$	$15,07 \text{ mm}$
λ_0	10^{-4} m	10^{-2} m	1 m	100 m	10 km

(32) Inverso della lunghezza (Δx) nella quale l'ampiezza dell'onda si riduce nel rapporto $1/e$. Spesso (specie in ottica) la (116) viene scritta nella forma

$$E = E_0 e^{-\frac{\omega k' x}{c}} \sin \omega \left(t - \frac{nx}{c} \right).$$

Espressione analoga per B si deduce dalla (117). Evidentemente $k' = ck$.

La profondità di penetrazione nei cattivi conduttori è maggiore di quella nei buoni conduttori. Essa, come si è visto, dipende anche da μ : ciò è importante per i materiali ferromagnetici. Se per esempio si considera il ferro, si trova che la profondità di penetrazione in esso è circa 1/10 di quella nel rame; infatti σ per il ferro è circa 1/6 di quella del rame, ma μ_r è circa 600 volte maggiore nel ferro.

Noi abbiamo finora considerato la propagazione di un'onda sinusoidale in un mezzo conduttore illimitato.

Molto importanti sono i casi in cui il mezzo è limitato. Uno di questi si ha quando un'onda incide sulla superficie di separazione con un altro mezzo.

Supponiamo di avere un'onda piana che dal vuoto (o dall'aria) incida sulla superficie limite piana di un conduttore. Il caso di incidenza non normale è molto interessante per le caratteristiche di polarizzazione dei vari fasci, analoghe a quelle viste per la riflessione alla superficie di separazione fra dielettrici. Noi ci limiteremo a considerare il caso di una incidenza normale.

In tal caso i vettori \mathbf{E} e \mathbf{B} delle varie onde sono paralleli alla superficie di separazione: ciò è indicato qualitativamente nella figura 8.12 ove le ampiezze e le fasi relative delle onde non sono in scala. Si ha quindi, indicando con i pedici i, r, t le onde incidente, riflessa e trasmessa

$$(126) \quad \begin{aligned} E_i + E_r + E_t &= E \\ \frac{B_i}{\mu_1} + \frac{B_r}{\mu_1} + \frac{B_t}{\mu_2} &= \frac{B_t}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Si trova

$$(127) \quad E_t \simeq \frac{2v_c}{c} E_i$$

$$(128) \quad E_r \simeq - \left(1 - \frac{2v_c}{c} \right) E_i.$$

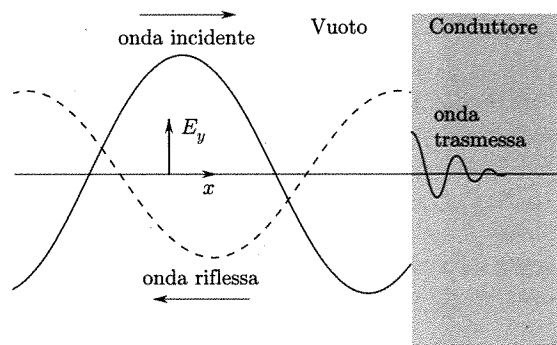


Fig. 8.12

Prendono il nome di coefficiente di riflessione (R_r) e di trasmissione (R_t) le frazioni dell'intensità⁽³³⁾ dell'onda incidente che rispettivamente sono riflesse dalla superficie di separazione o trasmesse attraverso essa.

Si trova per il coefficiente di riflessione

$$(129) \quad R_r = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 \simeq 1 - \frac{2\omega d}{c}$$

e quindi per il coefficiente di trasmissione

$$(130) \quad R_t = 1 - R_r \simeq \frac{2\omega d}{c}.$$

La massima parte dell'energia incidente sulla superficie del conduttore è riflessa: nel caso del rame per un'onda avente lunghezza d'onda nel vuoto 1 cm l'energia che entra nel metallo è solamente 1% di quella che lo colpisce.

È bene osservare che le considerazioni svolte hanno tenuto conto solo della presenza nel conduttore di cariche (elettroni) libere che determinano la conducibilità ed i fenomeni dissipativi ad essa legati. Va tuttavia notato come, nel campo delle frequenze elevate, quali quelle delle onde luminose, assorbimenti di altro genere, dovuti alla eccitazione degli elettroni nei singoli atomi possono essere presenti ed influenzare il coefficiente di riflessione in maniera notevole ad alcune frequenze: a ciò è dovuto il diverso colore presentato dai metalli illuminati con luce bianca.

⁽³³⁾ Energia media dell'onda che passa in un secondo attraverso la superficie unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione (par. 8.6).

8.10. PRESSIONE DI RADIAZIONE

In maniera analoga a quanto vale per le onde elastiche⁽³⁴⁾, le onde elettromagnetiche quando incontrano un ostacolo, quale può essere un corpo conduttore o comunque riflettente od assorbente, esercitano su di esso una pressione di radiazione.

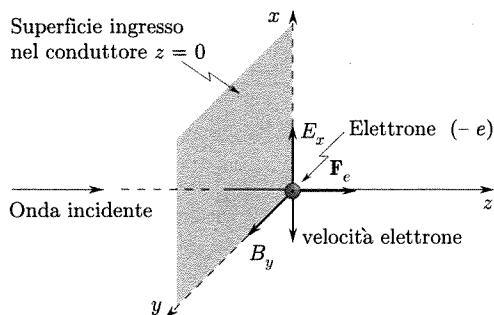


Fig. 8.13

Consideriamo per esempio un'onda piana che si propaga nella direzione z e colpisca la superficie di un conduttore (fig. 8.13) posta nel piano $z = 0$. Il campo elettrico dell'onda sia diretto nella direzione x (E_x) e quindi il campo magnetico sia nella direzione y (B_y).

Il campo elettrico è continuo attraverso la superficie del conduttore; gli elettroni nel conduttore vengono accelerati nella direzione x e si determina una corrente di densità $j_x = \sigma E_x$. Questa corrente si svolge in un campo magnetico che quindi esercita sui singoli elettroni e sulla corrente una forza diretta nella direzione di propagazione dell'onda. Sulla figura sono indicate per un elettrone la direzione della velocità nel moto prodotto da E_x e la direzione della forza esercitata da B_y . Si

noti che anche quando E_x si inverte, la forza è sempre diretta nel verso positivo di z , giacché E_x e B_y cambiano contemporaneamente di direzione. È questa la forza che dà origine alla pressione di radiazione. La forza nella direzione z per unità di volume del materiale è

$$(131) \quad \mathbf{j} \times \mathbf{B} = j_x B_y.$$

La forza su un elemento di volume $dx dy dz$ vale in modulo

$$dF = j_x B_y dx dy dz$$

e quindi per la pressione elementare dovuta ai processi nell'elemento di volume

$$(132) \quad d\Pi = \frac{dF}{dx dy} = j_x B_y dz.$$

La pressione di radiazione, che si esercita sulla superficie di ingresso delle onde nel conduttore, si otterrà integrando rispetto a z fino alla distanza alla quale penetra l'onda

$$(133) \quad \Pi = \int_0^\infty j_x B_y dz.$$

Dalla quarta equazione di Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$$

si ha

$$j_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

e quindi

$$(134) \quad \Pi = -\frac{1}{\mu} \int_0^\infty B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} (B_y^2)_{z=0}$$

essendo $B_y = 0$ per $z = \infty$ e $(B_y)_{z=0}$ il campo alla superficie del conduttore. Nel caso che l'ostacolo sia costituito da un buon conduttore, l'onda incidente è praticamente riflessa e quindi il valore di $(B_y)_{z=0}$ è praticamente il doppio di quello B che compete all'onda incidente. Per questa inoltre la densità di energia è

$$(135) \quad U_{\text{inc}} = \frac{B^2}{\mu}.$$

Si ha quindi che la (134) si può scrivere

$$(136) \quad \Pi = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} (B_y^2)_{z=0} = 2 \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = 2U_{\text{inc}} = U$$

⁽³⁴⁾ Si veda il vol. I, cap. 9, par. 9.29.

cioè la pressione di radiazione è pari alla densità di energia sulla superficie dell'ostacolo.

Considerando situazioni diverse si giunge alla stessa conclusione generale sia per ostacoli costituiti da conduttori sia da qualsiasi altro materiale.

Come per il caso delle onde elastiche, la pressione di radiazione esercitata da un'onda elettromagnetica piana riflessa od assorbita⁽³⁵⁾ da un ostacolo su cui incide normalmente è pari alla densità di energia sulla superficie dell'ostacolo

$$(137) \quad \Pi = \mathcal{U}.$$

Se l'ostacolo è completamente assorbente ed J_{inc} è l'intensità dell'onda incidente

$$(138) \quad \mathcal{U} = \frac{J_{\text{inc}}}{c}$$

se l'ostacolo è completamente riflettente

$$(139) \quad \mathcal{U} = \frac{J_{\text{inc}} + J_{\text{rif}}}{c} = 2 \frac{J_{\text{inc}}}{c} = 2\mathcal{U}_{\text{inc}}$$

essendo \mathcal{U}_{inc} la densità dell'onda incidente.

La (139) vale per incidenza normale dell'onda. Nel caso che sulla superficie incidano onde piane progressive in tutte le direzioni, si trova che solo un terzo della densità totale di energia (\mathcal{U}) è associata ad onde che si propagano normalmente alla superficie. Si ha quindi che nel caso di radiazione e.m. diffusa, la pressione di radiazione che si esercita su una superficie metallica è⁽³⁶⁾

$$(140) \quad \Pi = \frac{1}{3}\mathcal{U}.$$

I valori della pressione di radiazione sono piccoli: nel caso di onde piane progressive, a valori di E di pochi V/m corrispondono pressioni di radiazione dell'ordine di 10^{-9} newton/m². Nonostante la esiguità di tali valori, esperienze che pongano in evidenza la pressione di radiazione della luce sono state fatte (Lebedew, Nichols e Hull). Inoltre, come è noto, è tale pressione quella che produce le code delle comete, quando passano nelle vicinanze del Sole: le code sono sempre dirette verso l'esterno della congiungente Sole-nucleo del corpo della cometa per effetto della pressione che la luce del Sole esercita sulle masse gassose di cui è costituita la coda.

Naturalmente se non v'è materia che reagisce con la radiazione non si può osservare la pressione di radiazione. È possibile tuttavia associare sempre, anche nel vuoto, una quantità di moto alla radiazione. Si trova per la quantità di moto (\mathbf{G}) del volume τ nel quale esiste la radiazione

$$(141) \quad \mathbf{G} = \int_{\tau} \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{N} d\tau$$

ove \mathbf{N} è il vettore di Poynting.

Come in altri casi, la derivata rispetto al tempo della quantità di moto fornisce la forza che si esercita sul volume (sotto forma di forze sulla sua superficie)

$$(142) \quad \mathbf{F}_{\tau} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} d\tau.$$

Molto spesso si considera la densità di quantità di moto⁽³⁷⁾

$$(143) \quad \mathbf{g} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{N} = \frac{1}{c^2} \mathbf{N}.$$

⁽³⁵⁾ Nel caso che l'onda sia solo parzialmente riflessa od assorbita (cioè sia in parte trasmessa) la sollecitazione che si esercita sull'ostacolo si determina facilmente tenendo conto che la pressione totale su una parte qualsiasi dell'ostacolo è pari alla diminuzione della densità di energia dell'onda dopo che ha attraversato la parte in questione.

⁽³⁶⁾ Si veda questa formula nello studio del corpo nero (vol. I, cap. 21, par. 21.4).

⁽³⁷⁾ Per alcuni problemi occorre anche considerare un momento della quantità di moto della radiazione. Esso ha la densità

$$(144) \quad \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{N}$$

essendo \mathbf{r} il vettore di posizione.

Nel caso di onde piane nel vuoto, se \mathbf{n} è la direzione di propagazione

$$(145) \quad \mathbf{g} = \frac{\mathcal{U}}{c} \mathbf{n}.$$

Secondo la (145) la densità di quantità di moto nel caso di onde piane è pari al rapporto fra la densità di energia del campo e.m. e la velocità di propagazione. Nel caso che una tale onda incida normalmente su una superficie conduttrice ove viene riflessa totalmente, la variazione di quantità di moto per unità di area al secondo è

$$(146) \quad 2gc = 2\mathcal{U}_{\text{inc}}$$

dando origine ad una pressione

$$(147) \quad \Pi = 2\mathcal{U}_{\text{inc}}$$

in accordo con la (139).

■ 8.11. ONDE SFERICHE

Nei precedenti paragrafi nei quali abbiamo cercato di illustrare alcune importanti caratteristiche della propagazione delle onde e.m. abbiamo fatto riferimento di preferenza al caso unidimensionale di onde piane. Per la propagazione in un mezzo dielettrico omogeneo l'equazione di propagazione per il vettore \mathbf{E} si può porre nella forma

$$[53] \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

quella per il vettore \mathbf{B}

$$[54] \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Nel caso generale, tuttavia, si ha a che fare con fenomeni tridimensionali e le equazioni per \mathbf{E} e \mathbf{B} , sempre in un dielettrico omogeneo, sono le (41) e (42)

$$[41] \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$[42] \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

La loro soluzione, data la linearità delle equazioni, può essere ottenuta mediante sovrapposizione di onde piane propagantesi nelle direzioni x, y, z ed in genere in tutte le direzioni.

Questa è allora la soluzione generale. In alcuni casi, tuttavia, è conveniente descrivere il campo delle onde in maniera diversa, usando onde di forma speciale, come onde sferiche (che cioè si allargano a partire da un punto, con forma sferica delle superfici d'onda), onde cilindriche ecc.

Nel caso delle onde sferiche, detta

$$(148) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

la distanza del punto generico dall'origine dell'onda, si trova che l'equazione dell'onda (per la generica grandezza ψ) si scrive

$$(149) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2}$$

e la sua soluzione è del tipo

$$(150) \quad \psi = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$

Onda sferica progressiva

essendo f una funzione qualsiasi. Si tratta di un'onda la cui forma dipende da f , che si propaga con simmetria sferica, e la cui ampiezza decresce con r ⁽³⁸⁾.

In realtà nella soluzione matematica del problema occorrerebbe considerare anche una soluzione del tipo

$$\frac{f'\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}$$

ma questa, rappresentando un'onda che procede verso la sorgente, non ha significato fisico. Ciò si vede facilmente considerando una sorgente di onde sferiche all'istante in cui inizia ad emettere: non si può ammettere che prima che la sorgente inizi ad emettere un'onda parta da distanza infinita in modo da giungere alla sorgente proprio all'istante in cui questa inizia ad emettere.

■ 8.12. POTENZIALI ELETTRODINAMICI ED EQUAZIONI DI MAXWELL. SOLUZIONE PARTICOLARE

Nei precedenti paragrafi abbiamo esaminato problemi di propagazione delle onde e.m., specialmente in mezzi omogenei ed estesi. Altri problemi, quali quelli della determinazione della forma del campo di radiazione generato da distribuzioni di cariche in moto, oppure prodotto dalla presenza di corpi diversi, nello spazio interessato dalle onde emesse da una sorgente, possono essere spesso più facilmente trattati dando alle equazioni di Maxwell una nuova forma matematica. Per far ciò è necessario introdurre i potenziali elettrodinamici.

Ricordiamo che se \mathbf{B} dipende dal tempo, il campo \mathbf{E} non è conservativo. Inoltre nei punti ove \mathbf{j} o $\partial\mathbf{E}/\partial t$ sono diversi da zero non è possibile introdurre una funzione scalare che sia il potenziale di \mathbf{B} . Queste sono le circostanze che si hanno per le onde elettromagnetiche, la cui esistenza è appunto resa possibile dall'intimo legame fra campi elettrici e magnetici variabili: un campo magnetico variabile genera un campo elettrico variabile che a sua volta genera un campo magnetico variabile e così via.

Nel cap. 4 par. 4.16 nel trattare il caso di campi magnetici stazionari si è introdotto il concetto di potenziale vettore \mathbf{A} al quale il vettore \mathbf{B} è legato dalla operazione vettoriale

$$(151) \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} .$$

Potenziale vettore

⁽³⁸⁾ Il fatto che l'ampiezza (per es. di \mathbf{E}) decresca con r si può fisicamente giustificare pensando che l'energia trasportata dall'onda (proporzionale ad E^2) si distribuisce su superfici sferiche crescenti con r^2 man mano che l'onda procede.

Facemmo osservare che tale condizione non è sufficiente per definire \mathbf{A} ; per far ciò⁽³⁹⁾ occorre fissare arbitrariamente il valore di $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Nel caso statico si scelse di porre

$$(152) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Si tratta tuttavia di una scelta che nell'esame di un altro genere di problemi può essere modificata in maniera opportuna.

Se si introduce la (151) nella seconda equazione di Maxwell si ha

$$(153) \quad \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Si vede quindi che mentre \mathbf{E} non è conservativo il vettore

$$(154) \quad \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

lo è e quindi può essere posto pari al gradiente di una funzione scalare V qualsiasi. Si può quindi porre

$$(155) \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

Potenziale scalare

e possiamo scegliere V pari al potenziale elettrostatico ordinario. Si ottiene così per \mathbf{E} una espressione in funzione dei potenziali \mathbf{A} e V che si riduce all'espressione nota per il caso stazionario ma che è costruita in modo da soddisfare automaticamente la II equazione di Maxwell.

Si osservi che per ottenere la (155) noi abbiamo usato solo la (151), nulla si è dovuto specificare su $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Piuttosto che mantenere la scelta fatta per i casi stazionari, conviene porre

$$(156) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

Evidentemente, secondo tale scelta, la divergenza si riduce a zero (cioè in accordo con la scelta nel caso statico) quando V non dipenda da t . La scelta (156) è peraltro particolarmente utile, come si vedrà presto, al fine di separare le variabili V ed \mathbf{A} nelle equazioni di Maxwell.

Potenziali
elettrodinamici

La funzione scalare V , e quella vettoriale \mathbf{A} (e le sue componenti A_x, A_y, A_z) scelte in base alle posizioni ora fatte, prendono il nome di potenziali elettrodinamici.

Vediamo ora come le equazioni di Maxwell si trasformano facendo uso di V ed \mathbf{A} . Notiamo innanzitutto che per la definizione di questi potenziali la terza ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$) e la seconda equazione di Maxwell sono automaticamente soddisfatte. Introduciamo quindi le espressioni di \mathbf{E} e \mathbf{B} in funzione di V ed \mathbf{A} nelle altre due equazioni (I e IV), limitandoci al caso in cui μ e ϵ siano indipendenti dalla posizione (mezzo isotropo ed omogeneo). Per la prima⁽⁴⁰⁾ delle (30) si ha

$$(157) \quad -\nabla^2 V - \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

⁽³⁹⁾ Si ricordi (cap. 4, par. 4.16) che \mathbf{A} risulta definito a meno del gradiente di una funzione scalare giacché il $\operatorname{rot} \operatorname{grad}$ di una funzione scalare è zero qualunque sia la funzione.

⁽⁴⁰⁾ Si ricordi che $\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \nabla^2 V$; inoltre

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Per la quarta

$$(158) \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{j}.$$

Tenendo presente la scelta (156), le (157) e (158), che rappresentano le equazioni di Maxwell espresse per mezzo di V ed \mathbf{A} , si riducono a

$$(159) \quad -\nabla^2 V + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$(160) \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{j}.$$

*Equazioni
per i potenziali
elettrodinamici*

Esse differiscono dalle equazioni fondamentali della elettrostatica [cap. 1, par. 1.25, eq. (195)] e della magnetostatica [cap. 4, par. 4.16, eq. (157)] per la presenza di un termine nel primo membro. Si noti che le equazioni differenziali per i potenziali V ed \mathbf{A} (o le sue componenti) hanno il vantaggio di non contenere termini di accoppiamento: la prima equazione contiene V e non \mathbf{A} , la seconda solo \mathbf{A} . Le soluzioni particolari di queste equazioni possono essere poste in una forma molto simile alla soluzione delle equazioni per i casi statici:

$$(161) \quad V(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{[\rho]d\tau}{r}$$

Potenziali ritardati

$$(162) \quad \mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}]d\tau}{r}$$

Queste soluzioni vanno sotto il nome di potenziali ritardati: il loro significato si comprende immediatamente spiegando cosa si intenda per i termini fra parentesi quadre. Si consideri un elemento $d\tau = dx'dy'dz'$ intorno al punto x', y', z' nello spazio (infinito) al quale si riferisce l'operazione di integrazione. In $x'y'z'$ la densità di carica sia $\rho(x', y', z')$. La distanza fra $x'y'z'$ ed il punto in cui si calcola il potenziale (xyz) sia r . Per il calcolo del potenziale in x, y, z all'istante t , occorre considerare la carica in $dx'dy'dz'$ non allo stesso istante t ma ad un istante $(t - r/v)$ che precede t dell'intervallo richiesto perché la perturbazione creata da tale carica viaggi con velocità v da $x'y'z'$ ad xyz . L'espressione quindi di $[\rho]$ equivale a

$$\rho \left[x', y', z', \left(t - \frac{r}{v} \right) \right].$$

Analoghe considerazioni valgono per $[\mathbf{j}]$.

Ciò significa che la perturbazione elettromagnetica in un punto qualsiasi non dipende dalla perturbazione alla sorgente (cariche e correnti) allo stesso istante (t) ma dalla perturbazione alla sorgente in un istante che precede t dell'intervallo di tempo impiegato dalla perturbazione a raggiungere il punto in considerazione. La luce che giunge da una stella ed è osservata ad un certo istante sulla Terra, può darci informazioni relative alla sorgente solo per l'istante in cui fu emessa: quando la luce giunge a noi la emissione della stella può anche essere finita. Le (161) e (162) forniscono quindi la soluzione delle equazioni di Maxwell nel caso più generale. Trovati V ed \mathbf{A} in funzione di (x, y, z, t) si possono calcolare \mathbf{E} e \mathbf{B} mediante le (155) e (151).

Naturalmente nei casi concreti difficoltà matematiche notevoli possono incontrarsi.

Noi esamineremo nei prossimi paragrafi alcuni casi semplici ed importanti, che mostreranno come i problemi vadano affrontati.

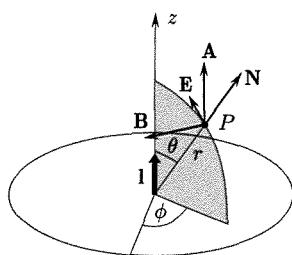


Fig. 8.14

Il potenziale vettore di un corto filo percorso da corrente

8.13. IL CAMPO DI UN DIPOLO OSCILLANTE

Supponiamo di avere un corto conduttore (lunghezza l) nel quale scorra una corrente variabile $i(t)$ ⁽⁴¹⁾. Il conduttore si trovi nel vuoto e sia disposto in corrispondenza all'origine di un sistema di coordinate polari (fig. 8.14) lungo l'asse z . Cerchiamo di calcolare \mathbf{A} mediante la (162). Si osservi che $\mathbf{j}d\tau = i d\mathbf{l}$ e quindi $[\mathbf{j}]d\tau = [i] d\mathbf{l}$. D'altra parte essendo l piccolo, e limitandoci a considerare punti in cui $r \gg l$, si può ritenere che:

1. r non cambi apprezzabilmente nel campo di integrazione;
2. la corrente sia allo stesso istante uguale per tutti gli elementi ($i d\mathbf{l}$)

Si ha quindi

$$(163) \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[i] d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi r} [i] \mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi r} i \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{l}.$$

Questa relazione mostra che \mathbf{A} è ovunque parallelo a \mathbf{l} (fig. 8.14). Per ottenere \mathbf{B} ⁽⁴²⁾

$$(164) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[\frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \mathbf{l} \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \text{rot } \mathbf{l} - \mathbf{l} \times \text{grad} \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right]. \end{aligned}$$

Poiché $\text{rot } \mathbf{l} = 0$, essendo $\mathbf{l} = \text{cost}$, si ha

$$(165) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \times \mathbf{l}.$$

Inoltre se si indica con \mathbf{r}/r il versore nella direzione \mathbf{r} , poiché $i(t-r/c)$ varia nello spazio solo con r

$$(166) \quad \text{grad} \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} = \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}$$

e quindi

$$(167) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{l}.$$

⁽⁴¹⁾ È questo il più semplice schema di un'antenna usata in radiotecnica per generare onde e.m. nello spazio.

⁽⁴²⁾ Si ha $\text{rot}(\varphi \mathbf{s}) = \varphi \text{rot } \mathbf{s} - \mathbf{s} \times \text{grad } \varphi$.

Da questa relazione si vede che \mathbf{B} è normale al piano formato da \mathbf{l} ed \mathbf{r} : esso ha in coordinate sferiche solo la componente B_ϕ (fig. 8.14). Eseguendo la derivazione nella (167), si ha

$$(168) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{1}{rc} \frac{\partial i(t - \frac{r}{c})}{\partial t} \right] \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Campo magnetico emesso dal dipolo oscillante

Il campo \mathbf{B} è la somma di due termini, la cui dipendenza dalla distanza r è notevolmente diversa. Il primo termine decresce con il quadrato della distanza: esso predomina a piccole distanze e coincide con la espressione che sarebbe fornita dalla prima formula di Laplace per una corrente continua avente il valore istantaneo (ritardato)⁽⁴³⁾ della corrente i . Ciò significa che nelle vicinanze della sorgente il campo magnetico (e lo stesso vale per quello elettrico) sono molto simili a quelli esaminati in condizioni statiche. Il secondo termine della (168) prende il nome di campo di induzione. Il secondo termine è presente solo se la corrente non è stazionaria, decresce con la prima potenza della distanza e quindi diviene predominante a grandi distanze. Esso è indicato come campo di radiazione. Esso è proporzionale alla derivata della corrente, cioè alla accelerazione delle cariche⁽⁴⁴⁾. Per ottenere il campo elettrico creato dal nostro sistema di cariche in moto si può procedere in varie maniere: si può determinare V e poi usare la (155); si può usare la seconda equazione di Maxwell una volta determinato \mathbf{B} . Noi tuttavia siamo interessati esclusivamente al valore di \mathbf{E} in punti lontani da \mathbf{l} : in tal caso il termine di induzione in \mathbf{B} può essere trascurato ed inoltre si ha a che fare solo con onde di forma sferica a grande raggio di curvatura.

In una piccola regione tali onde possono essere considerate piane. Il vettore \mathbf{E} è normale a \mathbf{B} ed alla direzione di propagazione ed inoltre (57)

$$(169) \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B}.$$

Per meglio chiarire cosa si debba intendere per vicino o lontano da \mathbf{l} , consideriamo il caso in cui la corrente i vari sinusoidalmente

$$i = i_0 \cos \omega t.$$

Il valore ritardato diviene

$$(170) \quad [i] = i_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

e quindi

$$(171) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_0 \left[\frac{1}{r^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{rc} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Il rapporto delle ampiezze del secondo termine e del primo vale

$$(172) \quad \frac{\omega r^2}{rc} = \frac{2\pi r}{\lambda};$$

⁽⁴³⁾ Nelle immediate vicinanze del conduttore anche l'effetto del ritardo può essere trascurato.

⁽⁴⁴⁾ È questa una conclusione generale dell'elettromagnetismo classico: una carica dotata di moto accelerato irradia energia emettendo onde e.m.

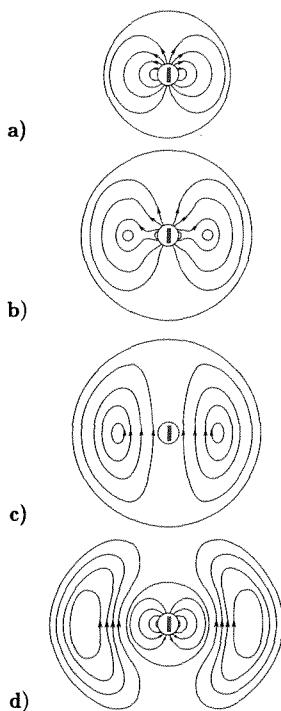


Fig. 8.15

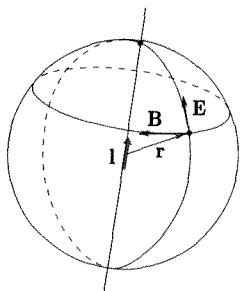


Fig. 8.16

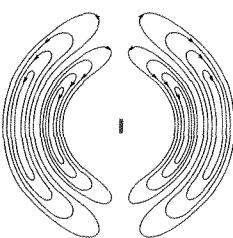


Fig. 8.17

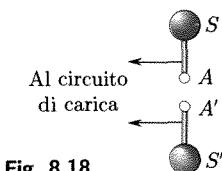


Fig. 8.18

il primo termine è trascurabile rispetto al secondo quando $r \gg \lambda$ (r pari ad alcune centinaia di λ). In tal caso ($r \gg \lambda$)

$$(173) \quad \mathbf{B} = -\left[\frac{\mu_0}{2r\lambda} i_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$(174) \quad \mathbf{E} = -\left[\frac{\mu_0 c}{2r\lambda} i_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left(\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \times \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Nelle immediate vicinanze del segmento \mathbf{l} il campo elettromagnetico è, come si è detto, praticamente determinato, ad ogni istante t , dalle distribuzioni di carica e di corrente su \mathbf{l} allo stesso istante, mentre il campo a distanza grande r , è determinato dalle distribuzioni di carica all'istante $(t - r/c)$, a causa del tempo richiesto per la propagazione della perturbazione. La propagazione della perturbazione è rappresentata in figura 8.15 nell'ipotesi di perturbazione sinusoidale: sono qui riportate le linee di \mathbf{E} ad istanti che differiscono fra loro di $\frac{1}{8}$ di periodo, per una regione fino a distanze non molto grandi da \mathbf{l} . La figura 8.15a corrisponde all'istante di corrente nulla (massimo spostamento della carica nel filo conduttore); negli istanti successivi il fluire della corrente cresce e tende a rimuovere (e poi rovesciare) la differenza di carica fra gli estremi del filo. Ciò causa il fatto che il numero di linee di forza uscenti dalla distribuzione di cariche sul filo prende a decrescere fino ad annullarsi dopo $\frac{1}{4}$ di periodo; contemporaneamente, giacché il campo si propaga, le linee si allontanano dal filo. Di conseguenza alcune linee di forza si chiudono su se stesse e viaggiano chiuse nello spazio. Ad $\frac{1}{4}$ di periodo tutte le linee di \mathbf{E} si sono staccate da \mathbf{l} . Successivamente il fluire della corrente crea spostamento di cariche opposto a quello nel mezzo periodo precedente; nuove linee di forza sono create ed esse sono orientate in verso opposto a quelle esaminate precedentemente. Il campo \mathbf{E} cresce fino a $T/2$ e poi si ripete l'andamento descritto di distacco delle linee di forza di \mathbf{E} da \mathbf{l} : il campo \mathbf{E} è però sulle linee chiuse orientato in verso opposto di quello sulle linee staccatesi nel mezzo periodo precedente. A grandi distanze da \mathbf{l} i moduli dei vettori \mathbf{B} ed \mathbf{E} variano in maniera proporzionale al modulo di $(\mathbf{l} \times (\mathbf{r}/r))$ cioè a $\sin \theta$. Se si considerano punti su una sfera di raggio r (fig. 8.16) e si prende la direzione di \mathbf{l} come asse polare, i moduli dei vettori sono massimi all'equatore e nulli al polo. I vettori \mathbf{B} ed \mathbf{E} sono normali fra loro: il vettore \mathbf{B} (diretto come $(\mathbf{r}/r) \times \mathbf{l}$) oscilla tangenzialmente al parallelo (linea di \mathbf{B}) e quello elettrico oscilla tangenzialmente al meridiano.

Il vettore $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è sempre diretto come \mathbf{r} , cioè la energia si propaga da \mathbf{l} verso l'esterno. La figura 8.17 indica, limitatamente alla emissione per un ciclo, le linee di \mathbf{E} a grande distanza da \mathbf{l} : come si comprende bene esse derivano dalle linee di forza chiuse originate nelle vicinanze di \mathbf{l} .

La trattazione precedente vale anche se invece di inviare la corrente in un conduttore \mathbf{l} , questa si ottiene disponendo a distanza l , due cariche $\pm q$ variabili nel tempo⁽⁴⁵⁾. Va osservato che il calcolo precedente implica che le cariche si muovano con velocità piccola rispetto a c ⁽⁴⁶⁾.

⁽⁴⁵⁾ È questo lo schema del cosiddetto *dipolo di Hertz* (fig. 8.18). Le due sfere grandi S, S' vengono caricate con un circuito non mostrato in figura: quando la d.d.p raggiunge un valore sufficiente a produrre la scarica in aria fra le piccole sfere AA' si realizza un collegamento conduttore diretto fra S ed S' ed il dipolo.

⁽⁴⁶⁾ Si tratta cioè di un calcolo non relativistico. Questa limitazione può essere tolta come è detto al par. 8.15.

Un tale sistema di cariche è un dipolo di momento

$$(175) \quad q\mathbf{l} = \mathbf{p}$$

ed evidentemente si ha

$$(176) \quad i\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Per tale ragione il tipo di radiazione che abbiamo descritto in termini di $i\mathbf{l}$ o di \mathbf{p} prende il nome di radiazione di dipolo. Man mano che la radiazione si allontana radialmente dal dipolo porta con sé energia e tale perdita di energia al secondo può essere determinata usando il vettore di Poynting

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

che punto per punto è diretto radialmente e rappresenta l'energia che passa in un secondo attraverso l'area unitaria disposta normalmente ad \mathbf{N} .

Se supponiamo che il dipolo \mathbf{p} (e la corrente i) sia diretto come z e vari sinusoidalmente nel tempo

$$(177) \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \sin \omega t$$

$$(178) \quad i\mathbf{l} = \omega \mathbf{p}_0 \cos \omega t = (i_0 \cos \omega t)\mathbf{l}$$

si ha, ricordando le (173) e (174) e indicando con θ l'angolo fra \mathbf{l} e \mathbf{r}/r ,

$$(179) \quad N = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = c\mu_0 \left(\frac{\omega p_0}{2r\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Poiché N è proporzionale a $\sin^2 \theta$ è chiaro che il flusso di energia è massimo nella zona equatoriale ed è nullo sull'asse l del dipolo. Il flusso medio di energia si ha considerando la media nel tempo di $\sin^2(t - r/c)$: tale media è $\frac{1}{2}$.

Si ha quindi per l'intensità media:

$$(180) \quad J = \bar{N} = \frac{1}{2} c \mu_0 \left(\frac{\omega p_0}{2r\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta.$$

*L'intensità media
emessa dal dipolo*

Per avere l'energia totale irradiata dal dipolo in un secondo (potenza) occorre integrare la (180) su una superficie sferica di raggio r

$$(181) \quad P = \int_{\text{sfera}} \bar{N} dS.$$

Si consideri la sfera di raggio r tagliata da piani normali a z (fig. 8.19); la superficie viene scomposta in elementi fra coppie di piani successivi avente ciascuno area

$$(2\pi r \sin \theta) r d\theta.$$

Poiché \mathbf{E} , \mathbf{B} ed \mathbf{N} hanno ciascuno modulo uguale per punti di cerchi paralleli sulla sfera

$$(182) \quad P = \int_0^\pi \bar{N} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta.$$

Con un cambio di variabile, ponendo $x = \cos \theta$, si ha

$$(183) \quad P = \pi c \mu_0 \left(\frac{p_0 \omega}{2\lambda} \right)^2 \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = \frac{\pi c \mu_0}{3\lambda^2} (p_0 \omega)^2 = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4.$$

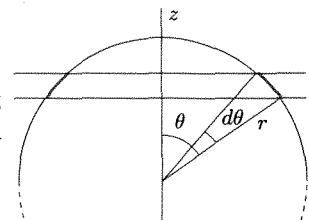


Fig. 8.19

*Potenza irradiata da un
dipolo*
$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4$$

La potenza irradiata dal dipolo è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del dipolo ed alla quarta potenza della pulsazione.

Volendo esprimere la P per mezzo della corrente, basta ricordare la (178) e sostituire $(i_0 l)$ a (ωp_0) essendo i_0 il valore massimo della corrente sinusoidale

$$(184) \quad P = \frac{\pi c \mu_0}{3} i_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

La potenza irradiata deve essere fornita dal sistema che costringe il dipolo ad oscillare, o la corrente a passare in l . Per il generatore che alimenta il sistema delle cariche variabili l'irraggiamento corrisponde ad una perdita di energia che deve essere reintegrata se l'irraggiamento deve proseguire. Per tale ragione si usa indicare con il nome di resistenza di radiazione, R_r , del dipolo una resistenza che attraversata dalla corrente i che si ha nel dipolo condurrebbe alla stessa dissipazione per effetto Joule

$$(185) \quad P = \frac{1}{2} R_r i_0^2.$$

Si ottiene

$$(186) \quad R_r = \frac{2\pi c \mu_0}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 (\Omega).$$

I risultati ottenuti valgono finché la lunghezza del dipolo è piccola rispetto alla lunghezza d'onda. Questo è il caso che si verifica per il moto degli elettroni nell'interno dell'atomo: in tal caso il dipolo è formato dall'elettrone che si muove e da una controparte positiva (nucleo) che si può pensare ferma; le dimensioni del dipolo sono quindi quelle dell'atomo cioè $10^{-10} m$ e pertanto molto più piccole della lunghezza d'onda della luce visibile ($10^{-7} m$). La maggior parte della radiazione luminosa emessa dagli atomi sarebbe dovuta, secondo la teoria classica, ad oscillazione degli elettroni e sarebbe quindi radiazione di dipolo: abbiamo tuttavia a più riprese detto che l'emissione e l'assorbimento di radiazione da parte di sistemi atomici è un fenomeno quantistico e non può essere trattato con l'elettromagnetismo classico. È stato, fra l'altro appunto, la inadeguatezza della descrizione classica del comportamento dell'elettrone nell'interno dell'atomo uno degli elementi che hanno condotto Bohr alla formulazione delle sue ipotesi⁽⁴⁷⁾. Secondo la teoria classica che abbiamo descritta, un elettrone che si muove su un'orbita intorno al nucleo verrebbe a comportarsi come un oscillatore bidimensionale, come cioè un sistema di due dipoli oscillanti e perpendicolari fra loro: esso quindi dovrebbe irradiare continuamente energia e percorrendo una spirale finire sul nucleo. Si trova invece che gli stati elettronici sono stabili (in linguaggio di orbite: l'elettrone permane stabilmente su orbite chiuse intorno al nucleo).

La teoria classica non può quindi applicarsi a problemi atomici ove esistono restrizioni quantistiche. Tuttavia dà buoni risultati in alcuni processi di interazione con elettroni atomici, quali quelli di risonanza e di diffusione (scattering).

■ 8.14. DIFFUSIONE DELLE ONDE ELETTRONICHE

Supponiamo che un'onda e.m. piana passi in una regione in cui esistano atomi e quindi elettroni in essi contenuti. Il campo elettrico associato all'onda agisce sul singolo elettrone e lo pone in moto. Il campo che agisce su un elettrone sia, trascurando la variazione con lo spazio,

$$E_0 \sin \omega t.$$

L'elettrone è sollecitato a muoversi nella direzione (x) del campo. Per scrivere l'equazione del moto dell'elettrone, occorre specificare le al-

⁽⁴⁷⁾ Si veda il vol. I, cap. 12, par. 12.2

tre forze che agiscono su di esso: una forza elastica di richiamo ed una resistenza. La prima esiste perché l'elettrone è legato al nucleo e qualsiasi azione tendente a variare la sua distanza di equilibrio si riflette nella comparsa di una forza che tende a ristabilire l'equilibrio. La forza elastica ($-kx$) fa sì che l'elettrone (di massa m) si comporti come un oscillatore e la frequenza delle oscillazioni libere è (vol. I, cap. 2, par. 2.18)

$$(187) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nel moto dell'elettrone energia viene dissipata (per es. per irraggiamento) e questa si riflette nella presenza nell'equazione del moto di una forza che ostacola il moto (resistenza). Essa può essere posta proporzionale alla velocità; per opportunità nei seguenti calcoli poniamo il coefficiente di proporzionalità nella forma (mb).

L'equazione del moto per l'elettrone sotto l'azione dell'onda è

$$(188) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -mb \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x + eE_0 \sin \omega t.$$

È questa l'equazione dei moti oscillatori forzati, la cui soluzione (vol. I, cap. 2, par. 2.18) fornisce, a parte la fase

$$(189) \quad x = \frac{eE_0 \sin \omega t}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + m^2 b^2 \omega^2}}.$$

L'elettrone che subisce questo spostamento rispetto ad una carica uguale ed opposta del nucleo costituisce un dipolo oscillante di momento

$$(190) \quad p = ex = \frac{e^2 E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} \sin \omega t$$

e restituisce una sorgente secondaria c.m. dando origine al processo di diffusione.

La potenza irradiata dal singolo dipolo si ottiene inserendo la (190) nella (183)

$$(191) \quad P_d = \frac{\mu_0}{12\pi c} \frac{\omega^4 e^4 E_0^2}{m^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2]}$$

Molto spesso per caratterizzare la diffusione si considera la cosiddetta sezione d'urto di diffusione (scattering cross-section) σ , che è pari all'area di una superficie disposta normalmente all'onda piana incidente attraverso alla quale passi tanta energia media dell'onda incidente nell'unità di tempo quanta è l'energia diffusa; essa è quindi pari al rapporto fra la potenza diffusa e il valore medio del modulo del vettore di Poynting

$$(192) \quad \sigma = \frac{P_d}{\bar{N}}.$$

Per un'onda piana sinusoidale

$$N = \frac{1}{\mu_0} BE = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

*L'equazione del moto
di un elettrone
in un atomo
nella direzione
del campo elettrico
associato all'onda*

*Sezione d'urto
per la diffusione*

Si ha quindi

$$(193) \quad \sigma = \frac{32\pi}{3} \frac{\omega^4}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2]} \left(\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2} \right)^2.$$

La quantità fra parentesi tonde è il valore che la teoria classica (cioè non quantistica) assegna al raggio R di un elettrone considerato come una sfera su cui è distribuita la carica e ⁽⁴⁸⁾.

La formula (193) è generale e conduce a risultati diversi secondo il valore che ω assume rispetto ad ω_0 .

Se $\omega \ll \omega_0$ si ha:

Diffusione di Rayleigh

$\omega \ll \omega_0$

$$(196) \quad \sigma = \frac{32\pi}{3} R^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4.$$

La sezione d'urto nel processo di diffusione cresce con la quarta potenza della frequenza. È questa la cosiddetta diffusione di Rayleigh che si trova verificata per la diffusione della luce nell'atmosfera.

Per gli elettroni negli atomi (e quindi nelle molecole di aria nell'atmosfera) ω_0 giace nell'ultravioletto e quindi la luce visibile viene diffusa secondo la (196): le componenti della luce solare verso il blu vengono diffuse più di quelle rosse. Ciò significa che la luce che giunge a noi per diffusione della luce solare nell'atmosfera è in prevalenza blu e questo giustifica il colore con cui noi vediamo il cielo. Per lo stesso processo la luce solare che attraversa l'atmosfera viene privata in maggior misura delle componenti blu e quindi ha componenti rosse in maggior quantità di quanto sia per la luce all'ingresso dell'atmosfera. Questo spostamento del colore della luce trasmessa verso il rosso cresce con lo spessore dell'atmosfera che la luce solare deve attraversare per raggiungere l'osservatore e ciò spiega il colore rosso del Sole (ed anche della Luna) all'alba ed al tramonto.

Se invece si ha $\omega \gg \omega_0$ (193) diviene (diffusione di Thomson)

Diffusione di Thomson

$\omega \gg \omega_0$

$$(197) \quad \sigma = \frac{32\pi}{3} R^2.$$

La sezione d'urto non dipende più dalla frequenza. Questo caso si trova verificato per la diffusione di raggi X dalla materia.

L'ultimo caso è quello in cui $\omega \approx \omega_0$ (diffusione di risonanza).

La diffusione diviene molto cospicua e per la sua trattazione occorre considerare in dettaglio i processi di assorbimento ed emissione di radiazione da parte degli elettroni negli atomi; ciò fa sì che solamente con la teoria quantistica si possa fare un esauriente esame del processo.

⁽⁴⁸⁾ Il calcolo va fatto considerando tutta l'energia che si trova nel campo elettrico ($E = e/4\pi\varepsilon_0 r$) all'esterno della sfera. Chiamando con w la densità di energia, $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. L'energia elettrostatica cercata è

$$(194) \quad U = \frac{e^2}{32\varepsilon_0 \pi^2} \int_R^\infty \frac{4\pi r^2}{r^4} dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ponendo, secondo la teoria della relatività, questa energia pari a mc^2 si ha per il raggio

$$(195) \quad R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2}.$$

Con i valori numerici delle grandezze si trova $R = 1,42 \cdot 10^{-15}$ m. Se l'elettrone è in moto altri termini nell'energia dell'elettrone (energia magnetica, radiazione) andrebbero considerati.

■ 8.15. POTENZIALI ELETTRODINAMICI E CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO PER UNA CARICA IN MOTO QUALSIASI

Nel calcolo del campo di dipolo si è fatta l’ipotesi che le cariche fossero in moto con velocità piccola rispetto a c . Il calcolo può essere fatto anche senza porre restrizioni al moto della carica: questa può essere anche puntiforme e muoversi con una velocità qualsiasi.

Il calcolo dei potenziali elettrodinamici va fatto applicando le formule generali (161) (162) con cura particolare per tenere adeguato conto dello spostamento della carica nel tempo richiesto dalla perturbazione a giungere nel punto in cui i potenziali si considerano.

Si giunge ad espressioni chiamate potenziali di Lienard-Wiechert.

Esse sono (nel vuoto)

$$(198) \quad V(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right]_{\text{rit}}$$

$$(199) \quad \mathbf{A}(P, t) = \mathbf{v}V(P, t)$$

dove: P è il punto in cui si calcolano i potenziali al tempo t ; \mathbf{r} è il vettore che va dalla carica al punto P ; \mathbf{v} è la velocità della carica in un sistema nel quale P è fermo. La quantità, nella parentesi indicata con l’indice, ritardata va calcolata al tempo $t' = t - (r'/c)$ essendo r' la distanza fra carica e punto P all’istante t' .

Dalle (198) (199) si possono calcolare \mathbf{E} e \mathbf{B} . Il calcolo è piuttosto complicato e fornisce le seguenti espressioni date da Feyman:

$$(200) \quad \mathbf{E}(P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right]$$

$$(201) \quad \mathbf{B}(P, t) = \frac{1}{c} (\mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E})$$

Il vettore \mathbf{e}_r è il versore del vettore \mathbf{r} dalla carica al punto P e r la distanza. Il primo termine ha, con la correzione per la distanza ritardata, la struttura del termine coulombiano, gli altri due implicano le derivate prime e seconde del versore che fissa la posizione del punto rispetto alla carica e la derivata prima della distanza. In questi due termini compare la velocità di propagazione della luce, cioè di propagazione del campo e.m.

■ 8.16. MASSA ELETTROMAGNETICA

A conclusione della presentazione dell’elettromagnetismo classico vogliamo presentare il concetto di massa elettromagnetica per l’importanza della nozione e dei problemi ad essa collegati ed in particolare perché dalle considerazioni ad essa relative appaiono evidenti alcune limitazioni di fondo della trattazione basata sulle equazioni di Maxwell. È bene notare dall’inizio che queste limitazioni non si riferiscono alla necessità già menzionata di introdurre la quantizzazione per descrivere alcuni processi (elettromagnetismo quantico) ma alle relazioni fra i concetti di campo elettromagnetico e particelle cariche puntiformi. Si tratta come si vede di una questione di fondo.

Lo studio della massa elettromagnetica è iniziato nel 1881 con J.J. Thomson ed ha avuto un numero molto grande di studiosi (Heaviside, Wien, Kaufmann, Abraham, Lorentz, Poincaré, Einstein, Fermi, Born, Dirac ed altri ideatori delle moderne teorie sul campo e sulle particelle elementari).

Questo problema è quello nel cui ambito ha preso le mosse la teoria della relatività, ed implica questioni tuttora non risolte.

Nonostante sia chiaro che l'elettromagnetismo classico vada modificato quantisticamente, l'esame di questo problema è stato condotto essenzialmente al di fuori della quantizzazione giacché si è visto presto che le difficoltà incontrate non sonolegate alla quantizzazione e si è sperato di poterle risolvere nell'ambito *classico* per poi trasferire la soluzione nell'elettromagnetismo quantico. Gli studi sono stati essenzialmente fatti considerando l'elettrone nella speranza di giungere a conclusioni applicabili anche alle particelle elementari positive e quindi valide per tutta la materia. All'elettrone perciò faremo essenzialmente riferimento nelle nostre considerazioni.

Si abbia una semplice particella carica che immaginiamo come una sfera di raggio a sulla cui superficie si trovi distribuita uniformemente la carica q ⁽⁴⁹⁾. Si osservi che per trattare il caso della carica puntiforme sarà sufficiente fare tendere il raggio a verso zero. Una tale particella in quiete crea un campo elettromagnetico che in realtà consiste nel campo elettrostatico (essendo $\mathbf{B} = 0$). L'energia nel campo si ottiene integrando la espressione della densità di energia

$$(202) \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

in tutto lo spazio, cioè al variare della distanza (r) dal centro della sfera fra a e ∞ . Si trova

$$(203) \quad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}.$$

Nel caso dell'elettrone⁽⁵⁰⁾

$$(204) \quad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{a}.$$

Si supponga ora che l'elettrone si muova in una direzione (x) con una velocità v rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Il campo elettromagnetico ha ora una quantità di moto la cui densità è data da (143)

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{N}}{c^2} = \frac{1}{\mu c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Integrando in tutto lo spazio si ottiene la quantità di moto totale del campo⁽⁵¹⁾. Nell'ipotesi che $v \ll c$, si trova

$$(206) \quad \mathbf{P} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ac^2} \mathbf{v}.$$

Si trova quindi che la quantità di moto totale del campo elettromagnetico è proporzionale a v . Ricordiamo che in meccanica noi abbiamo indicato con il nome di *massa* il coefficiente della velocità nell'espressione della quantità di moto ed è quindi logico indicare con il nome di massa elettromagnetica dell'elettrone il coefficiente

$$(207) \quad (m_e)_{em} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ac^2} = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{U}_0}{c^2}.$$

È possibile ancora vedere che se la velocità dell'elettrone varia (sempre per $v \ll c$) si ha per la variazione della quantità di moto totale del campo

$$(208) \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = (m_e)_{em} \mathbf{a},$$

essendo \mathbf{a} l'accelerazione.

⁽⁴⁹⁾ La trattazione non varia, tranne per coefficienti numerici, se si assume la carica ripartita uniformemente nel volume della sfera.

⁽⁵⁰⁾ Nel sistema CGS e.s.

$$(205) \quad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}.$$

Nelle trattazioni del problema in oggetto si trova di solito impiegato il sistema CGS.

⁽⁵¹⁾ Indichiamo questa quantità di moto con il simbolo \mathbf{p} , nonostante che per la quantità di moto del campo elettromagnetico nel volume τ si sia usato il simbolo \mathbf{G} [vedi eq. (141)].

In meccanica è stata introdotta la massa di un corpo e di una particella senza potere indicare l'origine di essa; la vecchia interpretazione della massa come parametro che specifica la quantità di sostanza non è evidentemente soddisfacente e noi abbiamo introdotto il termine in maniera operativa per rappresentare le proprietà di inerzia e le caratteristiche della gravitazione.

Dalla trattazione dell'elettromagnetismo viene fuori, per la prima volta, una possibile spiegazione dell'origine almeno di una parte della massa di una particella. L'accelerazione di una particella carica richiede una variazione del campo e.m. associato alla particella, una variazione della quantità di moto del campo e quindi l'azione di una forza. Tutto ciò si rispecchia, nella descrizione meccanica, in quella tendenza della particella a mantenere invariata la sua velocità, che è la proprietà caratteristica della inerzia ed è rappresentata dalla massa.

Per un certo periodo alcuni fisici (Abraham, Kaufmann) hanno pensato che tutta la massa (e l'inerzia) dell'elettrone potesse essere di origine elettromagnetica. Si è visto in seguito che ciò non si può ammettere. È interessante esaminare brevemente la successione delle ricerche che hanno condotto a questo risultato.

Se si indica con $(m_e)_m$ una eventuale massa dell'elettrone di origine diversa da quella elettromagnetica (diciamo massa meccanica) la massa totale sarà

$$(209) \quad m_e = (m_e)_m + (m_e)_{em}.$$

La massa meccanica secondo la meccanica newtoniana dovrebbe essere indipendente dalla velocità. Per quanto riguarda invece $(m_e)_{em}$ le cose vanno diversamente. Uno studio accurato per alte velocità, cioè rinunciando dall'ipotesi $v \ll c$, porta a vedere che la quantità di moto totale del campo elettromagnetico deve variare secondo la

$$(210) \quad \begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ac^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} = \\ &= \frac{4U_0}{3c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \end{aligned}$$

La dipendenza della massa elettromagnetica dalla velocità sarebbe quindi

$$(211) \quad (m_e)_{em} = \frac{4U_0}{3c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Questa conclusione fece sperare di potere distinguere le due masse, e di conseguenza stabilire se tutta la massa dell'elettrone sia di origine elettromagnetica, mediante lo studio sperimentale di m in funzione di v . Questa famosa ricerca sperimentale fu condotta (1902) da Kaufmann il quale determinò a varie velocità il rapporto e/m con il metodo dell'esame delle deflessioni simultanee di elettroni prodotte da un campo elettrico e da un campo magnetico. Sulla base di queste esperienze Kaufmann giunse alla conclusione che la massa dell'elettrone sembrerebbe essere esclusivamente di natura elettromagnetica.

Queste ricerche teoriche e sperimentali furono eseguite prima della comparsa della teoria della relatività. Come varie volte si è detto, la teoria della relatività ha avuto origine proprio dall'esame della elettrodinamica di corpi carichi in moto.

Subito dopo l'interpretazione degli esperimenti di Kaufmann nel senso avanti detto, comparve la teoria della relatività secondo la quale, in contrasto con la meccanica newtoniana, la massa di tutti i corpi, qualunque sia la sua origine, deve variare con la velocità nella maniera indicata dalla relazione

$$(212) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ove m_0 è la massa a velocità molto piccola (di riposo).

La teoria della relatività mostra quindi come non si possano usare i risultati dell'esperienza di Kaufmann per distinguere fra massa meccanica e massa elettromagnetica e come quindi la conclusione di Kaufmann non sia lecita.

Si deve notare tuttavia che la teoria della relatività fa corrispondere una massa⁽⁵²⁾ a qualsiasi tipo di energia secondo la relazione

$$(213) \quad m = \frac{\mathcal{E}}{c^2}$$

e quindi assegna alla energia \mathcal{U}_0 la massa

$$(214) \quad (m'_e)_{\text{em}} = \frac{\mathcal{U}_0}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{ac^2}.$$

Tale massa elettromagnetica dell'elettrone derivata dalla teoria della relatività differisce da quella calcolata mediante la quantità di moto del campo (201) per un fattore $\frac{3}{4}$

$$(215) \quad (m'_e)_{\text{em}} = \frac{3}{4}(m_e)_{\text{em}}.$$

La ragione di questo disaccordo va individuata nel fatto che nel fare il calcolo della energia della particella sferica carica, noi abbiamo considerato esclusivamente la energia nel campo all'esterno della particella; in realtà questa non è l'energia totale giacché v'è la parte corrispondente al volume (variabile durante il moto) della particella. Va ora osservato che una distribuzione di cariche di ugual segno su una superficie sferica non può essere in equilibrio se non si ammetta che forze di altro genere (non elettromagnetiche) contrastino le azioni repulsive che si esercitano fra le cariche che si trovano sui vari elementi di superficie. Poincaré introdusse la considerazione delle cosiddette tensioni di Poincaré, di origine non specificata, necessarie per l'equilibrio della sfera (ellissoide durante il moto) carica. Il calcolo dell'energia per la parte corrispondente al volume occupato dalla carica deve contenere i termini che, per così dire, rappresentano le azioni elettromagnetiche della particella carica su se stessa (delle varie parti della particella carica fra loro) ed i termini corrispondenti alle tensioni di Poincaré. Questa situazione va considerata nella applicazione dei principi di conservazione della energia e della quantità di moto. Quando si fa ciò è possibile vedere che la massa totale per l'elettrone che si deduce dal calcolo della quantità di moto coincide con quella che si trova tramite la teoria della relatività. Si vede quindi che in una teoria coerente *non può bastare da solo l'elettromagnetismo a spiegare tutta la fisica riconducendo l'origine della massa ad un fenomeno esclusivamente elettromagnetico*: per l'equilibrio della particella carica già nel caso dell'elettrone è necessario ammettere la presenza di azioni *non elettrodinamiche* (tensioni di Poincaré).

Per l'elettrone considerato in quiete come una sfera di raggio a sulla cui superficie è distribuita la carica, accade che le forze elettromagnetiche fra le varie parti della distribuzione e le forze derivanti dalle tensioni di Poincaré si fanno perfetto equilibrio. Si può mostrare che lo stesso accade per l'elettrone in moto a velocità costante, ma non è più vero quando la particella viene accelerata: è questa una conseguenza dei tempi finiti richiesti perché le azioni elettromagnetiche dovute ad un elemento giungano alle posizioni occupate dagli altri. Ne deriva una forza che *l'elettrone esercita su se stesso* e che è diretta in verso opposto alla accelerazione

(52) La validità generale di tale indicazione della teoria della relatività nel senso della completa trasformabilità della energia in massa fu dimostrata nel 1933 da Blackett e Occhialini mediante l'esperienza della creazione della coppia elettrone-positrone da un raggio γ di energia sufficiente (1,05 MeV). Anche il processo inverso (annichilimento di un elettrone ed un positrone con creazione di un raggio γ di 1,05 MeV) ed i recenti esperimenti con antiprotoni ed antineutroni confermano la relazione (213). Si noti che la validità della (213) toglie la caratteristica di indeterminatezza che l'energia ha in meccanica classica; mentre in meccanica classica hanno interesse solo le differenze di energia e l'energia è determinata a meno di una costante, in relatività ha importanza il valore assoluto dell'energia. Energia e masse sono diversi aspetti del medesimo ente. Questa identità si manifesta a pieno nel campo delle particelle elementari mentre nella fisica dei corpi macroscopici l'energia che resta, per così dire congelata, sotto l'aspetto che chiamiamo massa, è così grande rispetto a quella che entra nelle normali trasformazioni (per es., reazioni chimiche) che si può mantenere la separazione fra masse ed energie e affermare per ciascuna di esse un principio di conservazione che è uno solo e vale per l'ente che si presenta nei due aspetti di massa ed energia.

(autoreazione). L'espressione di questa forza è complessa e può essere espressa come somma di vari termini.

Quello che a noi interessa qui è il primo termine che scriviamo nell'ipotesi che la accelerazione avvenga nella direzione x

$$(216) \quad F = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ac^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \dots$$

α è un coefficiente numerico vicino ad 1. Si vede che il fattore che moltiplica la accelerazione è proporzionale alla massa elettromagnetica dell'elettrone quale data dalla (207) o (214). I termini successivi dipendono dalle derivate superiori di x rispetto a t .

Se ora si vuole passare a considerare l'elettrone come una carica puntiforme in accordo a quello che si è sempre supposto nella trattazione dell'elettromagnetismo, occorre far tendere il raggio a a zero nelle varie relazioni stabilite. Questo porta di conseguenza che la massa elettromagnetica andrebbe ad infinito e dalla⁽⁵³⁾ (216) è chiaro che ciò è dovuto al fatto che la forza dell'elettrone su se stesso va ad infinito.

Questa è una conclusione piuttosto sconcertante: l'elettromagnetismo è stato costruito a partire dalla nozione di cariche puntiformi come sorgenti ed i concetti del campo elettrico sono stati gradatamente sviluppati per giungere alla conclusione che i concetti di campo elettromagnetico e carica puntiforme sono in un certo senso incompatibili.

Molti tentativi sono stati fatti per modificare anche drasticamente la teoria di Maxwell al fine di mantenere nella elettrodinamica il concetto di elettrone come carica elementare puntiforme.

Non possiamo dilungarci su questi tentativi che comprendono tutte le teorie moderne sul campo e sulle particelle elementari⁽⁵⁴⁾. Diremo solo che non si ha ancora una teoria consistente che non conduca ad energia infinita (e massa infinita) per una carica puntiforme (elettrone), né si sa fare una teoria che parta da cariche non puntiformi.

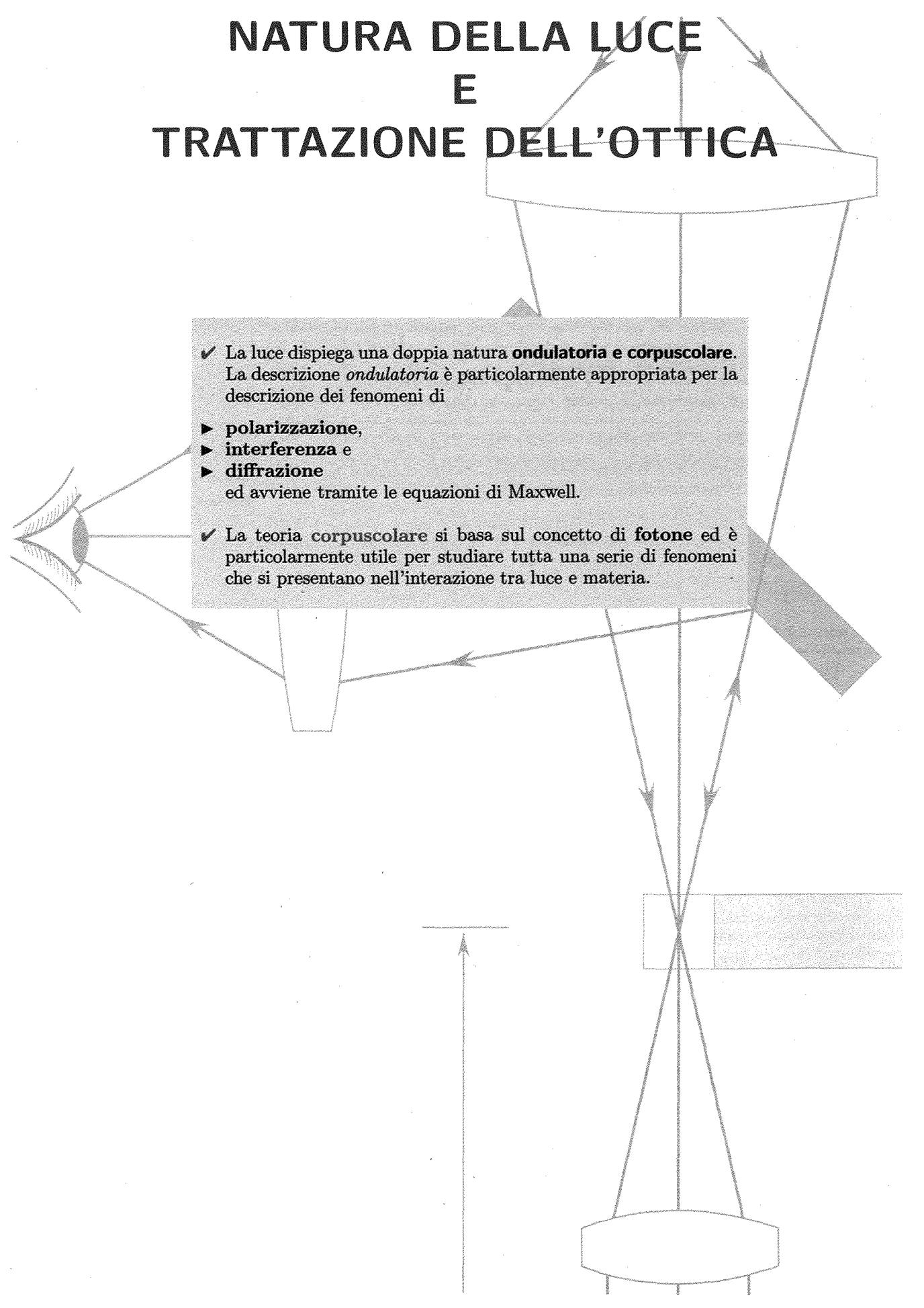
Nei vari tentativi alcuni sono partiti dall'ipotesi che la massa elettromagnetica non esista, modificando di conseguenza le equazioni dell'elettromagnetismo. Anche in questo caso il risultato non è stato soddisfacente. Vogliamo concludere queste considerazioni sulla massa elettromagnetica dicendo che *sebbene la situazione non sia completamente chiara*, vi sono tuttavia indicazioni sperimentali sulla sua esistenza. Tali indicazioni sono state ottenute nel campo delle particelle elementari paragonando le masse di particelle che differiscono solo per la carica; in questi casi la differenza delle masse va indubbiamente assegnata ad effetto elettromagnetico. Il caso più chiaro sembra essere quello dei mesoni π . Se ne hanno di tre tipi: quello neutro ha una massa che espressa in MeV è di 135,0, quelli con carica \pm e hanno massa di 139,6 MeV. Si ritiene appunto che la differenza di 4,5 MeV che rende le particelle cariche di maggiore massa sia di natura elettromagnetica. Il protone (carica $+e$) ed il neutrone presentano nelle varie interazioni fra loro forze nucleari identiche e si differenziano esclusivamente per le interazioni elettromagnetiche (debolì rispetto a quelle nucleari); c'è quindi da aspettare una differenza di massa da ascriversi ad effetto elettromagnetico. La massa del neutrone è 939,5 MeV, quella del protone 938,2. Come si vede la differenza esiste ma, contrariamente a quanto si potrebbe semplicemente attendere, la particella di massa maggiore è quella neutra. Si ritiene che ciò sia dovuto al fatto che il neutrone ha carica totale nulla, ma ha una struttura interna con una distribuzione di cariche⁽⁵⁵⁾ e quindi il calcolo della massa elettromagnetica andrebbe fatto considerando tale distribuzione.

⁽⁵³⁾ Questa conclusione permane anche considerando i termini successivi nella serie (216).

⁽⁵⁴⁾ Un esame panoramico dell'evoluzione del concetto di massa e dello stato attuale della questione che comprende il problema qui in esame si trova in M. Jemmer, *Storia del concetto di massa*, Feltrinelli, Milano, 1974. In tale lavoro è compresa una ricca bibliografia dei lavori originali.

⁽⁵⁵⁾ Si ritiene che il neutrone sia formato da un protone centrale ed una circostante distribuzione spaziale di carica negativa dovuta a π^- .

NATURA DELLA LUCE E TRATTAZIONE DELL'OTTICA

- 
- ✓ La luce dispiega una doppia natura **ondulatoria e corpuscolare**. La descrizione *ondulatoria* è particolarmente appropriata per la descrizione dei fenomeni di
 - ▶ polarizzazione,
 - ▶ interferenza e
 - ▶ diffrazioneed avviene tramite le equazioni di Maxwell.
 - ✓ La teoria corpuscolare si basa sul concetto di **fotone** ed è particolarmente utile per studiare tutta una serie di fenomeni che si presentano nell'interazione tra luce e materia.

Natura della luce e trattazione dell'ottica

■ 9.1. TEORIA ONDULATORIA E CORPUSCOLARE

La natura della luce è stata argomento di discussioni e controversie per secoli. Al momento in cui lo studio sperimentale dei fenomeni ottici cominciò a fornire elementi per indagare sulla natura della luce furono formulate, almeno negli elementi fondamentali, le due teorie, corpuscolare ed ondulatoria. Come è noto, Newton (1642-1727) in contrasto con la idea ondulatoria, iniziò la teoria corpuscolare secondo cui la luce sarebbe costituita da corpuscoli emessi dalla sorgente. R. Hooke (1635-1703) fu invece il primo a pensare ad una spiegazione ondulatoria secondo cui, cioè, la luce sarebbe costituita da fenomeni vibratori che si propagano per onde; tale idea ebbe un grande impulso dai lavori che Huygens (1629-1695) conduceva in quel tempo; il modello proposto assumeva la esistenza, anche nel vuoto, di un mezzo materiale (etero) di supporto per le onde. Questa teoria ricevette successivamente validi sostegni dalle esperienze di interferenza (Young, 1802) e di diffrazione (Fresnel, 1814), ed infine, dalla teoria elettromagnetica di Maxwell, che eliminò l'etero come elemento necessario per la propagazione delle onde.

La descrizione ondulatoria sembra particolarmente appropriata per la descrizione dei fenomeni di interferenza e diffrazione.

All'inizio del XX secolo divenne chiaro, tuttavia, che la spiegazione di alcuni fenomeni non poteva essere raggiunta con la teoria ondulatoria: tali fenomeni sono quelli relativi all'assorbimento ed alla emissione della luce (vol. I, cap. 12), l'effetto fotoelettrico (cap. 16); l'effetto Compton⁽¹⁾ (vol. I, cap. 4, par. 4.15). Fu introdotto allora il concetto di fotone o quanto di radiazione (energia $h\nu$ con ν frequenza della radiazione, h costante di Planck) e la teoria corpuscolare fu ripresa in considerazione.

Da quell'epoca ad oggi vari tentativi sono stati fatti per sviluppare una teoria *unificata* che tratti onde e particelle come aspetti diversi di una stessa entità. Questi tentativi sono stati senza successo. Secondo il punto di vista attuale i concetti di onda e corpuscolo quali si sono svilup-

*La teoria
ondulatoria*

// fotone

⁽¹⁾ Nell'effetto Compton la radiazione colpisce un elettrone (praticamente fermo), in genere appartenente ad un atomo. Questo elettrone viene lanciato in una direzione e la radiazione subisce una variazione di direzione e di lunghezza d'onda. La trattazione ondulatoria conduce a risultati in disaccordo con l'esperienza; la trattazione con una teoria corpuscolare tratta il processo come un normale processo d'urto elastico e giunge a risultati in accordo con la esperienza.

pati indipendentemente uno dall’altro, sulla base della nostra esperienza del mondo macroscopico, non possono essere automaticamente usati nella stessa maniera anche su scala atomica. La realtà in tale scala non può essere descritta interamente in termini di onde o di corpuscoli: occorre accettare di conseguenza, in particolare, il fatto che la luce mostra di avere una natura duale. I fenomeni di propagazione sono meglio spiegati in termini ondulatori mentre l’interazione della luce con la materia richiede una interpretazione corpuscolare.

Energia del fotone

Nella descrizione particellare il fotone associato alla radiazione di frequenza ν viaggia con la velocità c , ha energia

$$(1) \quad \mathcal{E} = h\nu,$$

e quindi, secondo la teoria della relatività (vol. I, cap. 3, par. 3.11), possiede la massa

$$(2) \quad m = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

e quantità di moto

Quantità di moto del fotone

$$(3) \quad p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Lo studio dei fenomeni di interferenza, come è già stato notato al cap. 12 par. 12.4 del vol. I fornisce un modo brillante per legare le descrizioni ondulatoria e particellare dei processi luminosi. L’intensità di un pennello di luce che supponiamo cilindrico (energia che passa in un secondo attraverso una superficie di area unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione) è nella descrizione particellare pari alla energia trasportata dai fotoni che passano in un secondo attraverso la superficie di riferimento. Se si considera un pennello intenso e si considerano fenomeni di interferenza, la descrizione ondulatoria fornisce in maniera accurata la successione delle zone (frange) chiare e scure su uno schermo. Se peraltro la esperienza viene ripetuta successive volte, riducendo gradatamente l’intensità, fino ad arrivare alla situazione in cui il numero di fotoni che arriva in media per unità di area sullo schermo durante il tempo di osservazione⁽²⁾ scenda a valori molto bassi, si osserva che le zone chiare delle frange osservate divengono a poco a poco meno nette ed omogenee e finiscono addirittura per scomparire come tali, mostrando la struttura discontinua (particellare) della luce⁽³⁾. In quest’ultimo caso la descrizione ondulatoria non è più soddisfacente; si può riconoscere tuttavia che la distribuzione prevista dalla teoria ondulatoria per l’intensità sul piano dello schermo fornisce punto per punto la *densità di probabilità* che un particolare fotone arrivi in quel punto. La trattazione ondulatoria appare in questo caso associata alla natura corpuscolare per descrivere le importanti caratteristiche probabilistiche del comportamento di queste particelle, i fotoni.

⁽²⁾ Gli strumenti misuratori dell’intensità della radiazione forniscono in genere l’integrale dell’energia che giunge su di essi in un certo *tempo di osservazione*, caratteristico dello strumento stesso.

⁽³⁾ Se si usano strumenti caratterizzati da tempi di osservazione diversi (per es. occhio e lastre fotografiche esposte per tempi lunghi) può accadere che le frange non più osservabili in un caso lo siano nell’altro.

Come è noto (vol. I, cap. 12, par. 12.4) il riconoscimento della esistenza di fenomeni di diffrazione anche per le particelle materiali (elettroni, neutroni ecc.) ha portato ad associare ai corpi materiali un'onda che serve a descrivere la densità di probabilità per tali corpi: la relazione fra lunghezza dell'onda associata e quantità di moto è (de Broglie) ancora la (3):

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}.$$

Onde materiali

Lunghezza d'onda
di de Broglie

Queste considerazioni sono alla base della teoria quantistica. Noi abbiamo a più riprese accennato ad alcuni dei concetti fondamentali della trattazione quantistica e lo stesso facciamo qui, naturalmente con una notevole incompletezza, al fine tuttavia di presentare tali concetti con una certa gradualità e per indicare il pensiero moderno in settori molto importanti della fisica.

Vogliamo qui osservare che l'essenza del carattere di dualità che la luce (come anche ogni particella materiale) presenta va cercata nel principio di indeterminazione di Heisenberg. Esso afferma che non è possibile stabilire per una particella la posizione (x) e la quantità di moto (p) simultaneamente con una precisione più grande di

$$(4) \quad \Delta p \Delta x = \frac{h}{2\pi}.$$

Principio
di indeterminazione

Ciascuna delle due grandezze può essere misurata con precisione grande quanto si vuole ma ciò influenza la contemporanea misura dell'altra: il prodotto delle due precisioni non può essere inferiore a $h/2\pi = \hbar$. È importante notare che la circostanza non dipende dalla qualità della sperimentazione ma costituisce *un principio*. Occorre di conseguenza accettare che i concetti di posizione e quantità di moto, che in meccanica classica sono ben separati, sono in realtà legati fra loro e che non ha senso cercare di determinare contemporaneamente i loro precisi valori per un corpo (particella). Questo fatto porta come conseguenza la natura duale. Esiste un aspetto particellare ed un aspetto ondulatorio tanto per la luce quanto per la materia in genere e secondo l'esperimento che si considera può essere più evidente un aspetto o l'altro; non si può comunque descrivere completamente né la luce né la materia senza considerare entrambi gli aspetti. Il *principio di complementarietà* di Bohr (1928) afferma che le descrizioni particellare e ondulatoria dei fenomeni sono complementari ed egualmente valide.

Come altre volte è stato notato, il principio di indeterminazione e la natura duale dei fenomeni sono validi per tutti i corpi. Quando tuttavia i corpi sono di notevoli dimensioni (e massa), come accade di solito nella meccanica ordinaria, l'aspetto ondulatorio non si rende evidente e la trattazione dei fenomeni può farsi in termini classici. La dualità è invece evidente per fenomeni fra particelle su scala atomica.

Il legame fra i due aspetti, particellare ed ondulatorio, tanto della luce quanto della materia, è fornito dalla costante di Planck. Bohr ha mostrato che tale costante può essere posta pari al prodotto di due grandezze caratteristiche dell'ente in considerazione ed associate una alla descrizione particellare, l'altra a quella ondulatoria. Questa conclusione può essere scritta in due modi:

$$(5) \quad h = \mathcal{E}T = p\lambda,$$

Complementarità

essendo \mathcal{E} la energia della particella, $T = 1/\nu$ il periodo dell’onda; p la quantità di moto della particella e λ la lunghezza d’onda. Quando accade che la grandezza associata alle proprietà particellari ha valori molto maggiori di quelli della grandezza ondulatoria, il comportamento dell’ente come particella prevale; nel caso opposto è il comportamento ondulatorio quello che viene manifestato. Limitandoci qui a considerare la radiazione elettromagnetica si ha che le proprietà particellari prevalgono nettamente nel caso di onde molto corte (frequenza elevata: raggi X, raggi γ). Quando invece le radiazioni sono di lunghezza d’onda relativamente elevata (frequenza bassa: onde radio, raggi infrarossi) accade il contrario ed è l’aspetto ondulatorio il prevalente e solo in esperienze particolari si può porre in evidenza l’aspetto particellare. V’è una regione di lunghezze d’onda della radiazione in cui i due fattori nella (5) sono comparabili ed in tal caso la dualità si presenta nei vari processi; questa regione comprende quella della luce visibile.

Le precedenti considerazioni generali illustrano le ragioni di fondo della complessità dei fenomeni legati alla luce ed in genere alla radiazione e.m. e le difficoltà che si incontrano in una completa presentazione dell’ottica⁽⁴⁾. Per un esame esauriente dei fenomeni conviene considerare separatamente tre trattazioni in ciascuna delle quali è possibile fare una particolare approssimazione:

- a. In un primo caso si suppone che l’aspetto particellare sia trascurabile (energia dei fotoni molto piccola): lo studio può essere allora fatto senza considerare la meccanica quantistica e servendosi esclusivamente della teoria elettromagnetica classica. Questa trattazione è in genere indicata con il nome di ottica ondulatoria od ottica fisica.
- b. Nel secondo caso si suppone, in aggiunta a quanto ammesso in a, che le lunghezze d’onda siano molto piccole (praticamente che si sia nel limite $\lambda \rightarrow 0$); si tratta di una approssimazione grossolana; essa conduce all’ottica geometrica, la cui validità risulta naturalmente limitata (cap. 10).

⁽⁴⁾ Il termine deriva dal greco e significa “scienza della visione”. Per lungo tempo, infatti, il campo di interesse dell’ottica fu ristretto ai soli fenomeni legati, in un modo o nell’altro, a sensazioni visive. Molto si discusse sul fatto se il “fenomeno della luce” consistesse appunto nel “fenomeno della visione”; a tali discussioni, estremamente interessanti in quanto riguardano il problema generale della conoscenza che l’uomo si forma del mondo attraverso i sensi e l’intelletto, portarono contributi decisivi grandi scienziati del XIX secolo, e particolarmente Helmholtz, concludendo, nel senso ancor oggi accettato, che le sensazioni visive, intrinsecamente soggettive, sono determinate da un ente, la luce, avente carattere oggettivo: l’ottica venne così configurandosi come quella parte della fisica che si occupa dei fenomeni luminosi, inerenti cioè all’ente (la luce) capace di stimolare nell’occhio sensazioni visive. Sulle parallele discussioni relative alla natura della luce abbiamo già accennato. Vogliamo ancora notare che accertatasi la natura elettromagnetica della luce, si comprese come i fenomeni luminosi debbano essere considerati come una parte di quelli dovuti alle onde e.m. Ciò ha portato ad un allargamento dei limiti dell’ottica, che attualmente comprende oltre che lo studio fisico dei fenomeni luminosi anche quello delle proprietà fisiche di alcune radiazioni invisibili, raggi infrarossi e raggi ultravioletti, che vanno studiati con le stesse tecniche sperimentali della luce. Altre radiazioni (onde radio, raggi X, raggi γ) dello spettro delle onde elettromagnetiche vanno indagate con tecniche diverse, ed il loro studio non fa parte dell’ottica, almeno nella comune accezione di oggi; esse presentano, naturalmente, fenomeni in gran parte uguali a quelli studiati in ottica. In questa sistemazione essenzialmente fisica dei fenomeni “ottici” non trovano posto, altro che marginalmente, i fenomeni della visione, tutti legati a processi fisiopsicologici. Di essi si occupa in realtà una speciale disciplina, l’ottica fisiologica, che in gran parte esula dalla fisica.

- c. Nel terzo caso si suppone che le lunghezze d'onda siano molto piccole, l'energia dei quanti (foton) molto grande rispetto alla sensibilità degli strumenti e l'aspetto ondulatorio può essere trascurato.

Noi ci occuperemo qui essenzialmente dell'ottica fisica e dell'ottica geometrica.

■ 9.2. SORGENTI DI LUCE

I limiti del campo di lunghezze d'onda nel vuoto⁽⁵⁾ della radiazione e.m. capace di impressionare l'occhio e che va comunemente sotto il nome di luce sono all'incirca 4.000 Å(violetto)-7.000 Å(rosso). Nel cap. 8 al par. 8.7, è stato riportato in dettaglio lo spettro della radiazione e.m. dalle onde radio ai raggi γ ; il campo della luce è una piccola porzione di esso.

L'emissione da parte delle sorgenti di luce si verifica quando elettroni degli atomi della sorgente, precedentemente portati su uno stato energetico eccitato, compiono una transizione ad uno stato di energia più bassa. Il quanto di energia ($h\nu$) è legato alle energie dei livelli di partenza (\mathcal{E}_1) e di arrivo (\mathcal{E}_2) nella transizione dalla relazione:

$$(6) \quad \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = h\nu.$$

Abbiamo varie volte accennato a questa spiegazione quantistica della emissione di radiazione e.m. (per es. vol. I, cap. 12, par. 12.5) e su di essa ritorneremo. Nel caso di atomi isolati (per es. in un gas monoatomico) i livelli consentiti per gli elettroni sono separati da intervalli di energia piuttosto notevoli sicché, nelle normali condizioni di eccitazione che si hanno nelle sorgenti, pochi livelli sono interessati nelle transizioni che avvengono e quindi solo treni di onde e.m. aventi una lunghezza d'onda fra poche possibili sono emessi: si ha allora che la luce è formata da componenti ben distinte, possiede cioè uno spettro a righe. Quando invece la sorgente è formata da sistemi in cui più atomi sono presenti e tenuti in modo da influenzarsi reciprocamente, le transizioni elettroniche consentite si infittiscono e si possono avere spettri a bande (gas di molecole) o continui (gas ad alta pressione, liquidi, solidi).

Per un insieme di atomi in equilibrio termodinamico ad una certa temperatura si ha una distribuzione statistica degli elettroni degli atomi fra i livelli energetici consentiti: la emissione di radiazione che si osserva corrisponde ai passaggi di elettroni da livelli superiori ad inferiori. Naturalmente questa energia irradiata deve essere restituita al sistema poiché la temperatura deve restare costante (o sotto forma di energia raggianti assorbita o di energia termica o di altra forma di energia).

Al variare della temperatura alla quale è tenuto un sistema atomico, varia lo spettro emesso; naturalmente, al crescere della temperatura aumentano i livelli che possono essere implicati nelle transizioni. Spesso si parla per la stessa sostanza (elemento) allo stato gassoso di *spettri*

La luce visibile ha lunghezze d'onda comprese fra 4.000 e 7.000 Å

Emissione

Spettri

⁽⁵⁾ Come è tradizionale nell'ottica, ci riferiamo alla lunghezza d'onda nel vuoto anziché, come sarebbe meglio, alla frequenza, che come si sa è indipendente dalla natura del mezzo in cui si propaga la radiazione e.m. Osserviamo anzi al riguardo che quando nel seguito parleremo di lunghezza d'onda senza ulteriori specificazioni intendiamo sempre la lunghezza d'onda nel vuoto.

di fiamma, di arco e di scarica. Gli spettri di fiamma sono quelli che si ottengono quando la sostanza è tenuta in una fiamma a gas (fino a 1.800 °C circa) e le linee spettrali osservate di solito sono dovute al passaggio da stati elettronici eccitati allo stato fondamentale. Gli spettri ottenuti ponendo la sostanza in un arco elettrico tra elettrodi di carbone (4.000-7.000 °C) contengono anche linee dovute al passaggio da uno stato eccitato ad uno stato ancora eccitato ma di energia inferiore. Gli spettri di scarica contengono ancora un maggior numero di linee a causa delle temperature ancor più alte raggiunte dal sistema.

Allo stato di equilibrio di un insieme di atomi tenuti ad una certa temperatura, corrisponde un equilibrio fra energia raggianti emessa ed assorbita in modo che la densità di energia a ciascuna delle frequenze presenti (che può essere emessa ed assorbita) resti costante.

Nel caso dei solidi, per i quali lo spettro di emissione è continuo, noi abbiamo già considerato il caso fondamentale del corpo nero (vol. I, cap. 21 par. 21.4). Ricordiamo come lo studio di questo problema abbia costituito il punto di partenza per la teoria quantistica. Planck ha stabilito per la densità di energia, u_λ , nell’interno di una cavità che realizza il corpo nero, la fondamentale relazione

Leggi del corpo nero

Legge di Planck

$$(7) \quad u_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{hc}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right).$$

La maggior parte dei solidi ad alta temperatura (per es. il Sole) presentano una radiazione molto prossima a quella del corpo nero. Ricordiamo (vol. I, cap. 21 par. 21.5) come dalla relazione di Planck (7), che fornisce la radiazione emessa alle varie frequenze, si possano dedurre le relazioni di Wien sullo spostamento del massimo della radiazione in funzione di λ , al variare di T , e la legge di Stefan-Boltzmann che fornisce l’energia totale irradiata (in tutto lo spettro) dall’unità di superficie nell’unità di tempo

$$(8) \quad \begin{cases} e & = \sigma T^4 \\ \sigma & = 5,69 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2(\text{K})^4}. \end{cases}$$

Sorgenti termiche

Radiazione incoerente

Coerenza

Laser

Nelle sorgenti fin qui considerate (sorgenti termiche) gli eventi di emissione dei singoli quanti sono completamente indipendenti fra loro e questo porta di conseguenza che i treni di onde e.m. che costituiscono la luce emessa sono del tutto incorrelati fra loro: le fasi iniziali per i vari treni che si succedono sono del tutto a caso. Si parla in questo caso di radiazione incoerente, e se si considerano due sorgenti di questo tipo, della medesima lunghezza d’onda, non può esistere alcuna relazione stabile fra le fasi delle onde e.m. emesse. Noi vedremo che per alcune esperienze (interferenza) è di fondamentale importanza l’esistenza di una stabilità temporale di fase, o di un grado di correlazione fra due treni d’onda, cioè l’esistenza di coerenza della radiazione. Esamineremo in quella occasione gli artifici da usare per eseguire esperienze di interferenza usando la luce emessa da sorgenti primarie termiche.

È possibile tuttavia oggi realizzare sorgenti di luce monocromatica coerente (laser): in esse il sistema atomico emettitore non è in equilibrio termico ed è tenuto in particolari condizioni metastabili. In tali condizioni è possibile realizzare una emissione stimolata, nella quale cioè un fotone pilota la emissione di un altro fotone e così via, e quindi i vari fotoni emessi

non sono distribuiti a caso ma si ottiene che i corrispondenti treni siano fra loro correlati in fase.

■ 9.3. VELOCITÀ DELLA LUCE

La velocità di propagazione della luce nello spazio libero (e nel vuoto) costituisce uno dei parametri più importanti della fisica. Ancor prima di riconoscere questo fatto, la sua misurazione ha costituito un problema di grande interesse al quale fisici si sono dedicati a più riprese a partire dal tempo di Galileo. Galileo infatti fu il primo a tentare una misura della velocità della luce, ma il metodo da lui usato non gli consentì di raggiungere altre conclusioni oltre che la velocità della luce deve avere un valore molto elevato.

La prima vera determinazione fu fatta dal danese Roemer nel 1666 mediante lo studio dettagliato del moto dei satelliti di Giove⁽⁶⁾, una seconda determinazione astronomica fu fatta nel 1727 dall'inglese Bradley⁽⁷⁾. Le determinazioni astronomiche non avevano una precisione molto elevata.

La prima determinazione di c con un metodo interamente terrestre fu fatta dal francese Fizeau (nel 1849) secondo lo schema di figura 9.1a. La luce emessa dalla sorgente S è concentrata, per mezzo di una lente⁽⁸⁾ L_1 , in un punto immagine T e poi, trasformata in un fascio parallelo (dalla lente L_2), viene inviata a una certa distanza (qualche km) ove, dopo aver attraversato la lente L_3 , colpisce uno specchio e ritorna indietro. Nella disposizione si trova, presso la lente L_1 uno specchio semitrasparente⁽⁹⁾ G , opportunamente inclinato, il cui scopo è quello di deviare di 90° parte del fascio di luce riflesso da M . In tali condizioni un osservatore posto dietro la lente L_4 vede l'immagine luminosa della sorgente formata dalla luce che è stata riflessa in M . Si ponga ora in T , nel piano normale all'asse ST , una ruota dentata (fig. 9.1b) in modo che secondo la sua posizione il fascio luminoso possa passare fra due successivi denti o sia fermato da un dente. Se ora si pone in rotazione la ruota, la luce che dalla sorgente riesce ad andare sullo specchio M , risulta formata da impulsi; se si aumenta la velocità della ruota accade ad un certo momento che l'osservatore vede scomparire l'immagine di S : in tali condizioni il tempo ($2l/c$) impiegato dalla luce a percorrere la distanza $2l$ è pari a quello richiesto perché allo spazio vuoto fra due denti si sostituisca un dente (θ/ω , se θ è la distanza

⁽⁶⁾ Roemer prese in considerazione gli intervalli di tempo (circa 42 ore) fra successive eclissi di un satellite di Giove (punto luminoso) nel suo moto intorno a Giove, visto dalla Terra; facendo molte determinazioni successive egli osservò che tali intervalli risultano più lunghi del valore medio quando la Terra si allontana da Giove, e più brevi quando essa si avvicina. Egli ritenne, giustamente, che tali variazioni siano dovute alla variazione di distanza Terra-Giove ed alla velocità finita della luce. Egli trovò per c il valore

$$2,143 \cdot 10^8 \text{ m/sec.}$$

⁽⁷⁾ Bradley studiò la cosiddetta aberrazione stellare, cioè la variazione apparente della posizione delle stelle sulla volta celeste durante un anno, in conseguenza del moto della Terra: a causa di tale moto una stella descrive sulla volta celeste in un anno una piccola ellisse detta ellisse di aberrazione, le cui dimensioni dipendono, oltre che dalla distanza della stella, dalla velocità della luce e dalla velocità orbitale della Terra. Egli trovò per c il valore

$$3 \cdot 10^8 \text{ m/sec.}$$

⁽⁸⁾ Le funzioni delle lenti saranno considerate in dettaglio al cap. 10.

⁽⁹⁾ Esso fa passare in parte la luce che lo colpisce, riflettendone la parte rimanente.

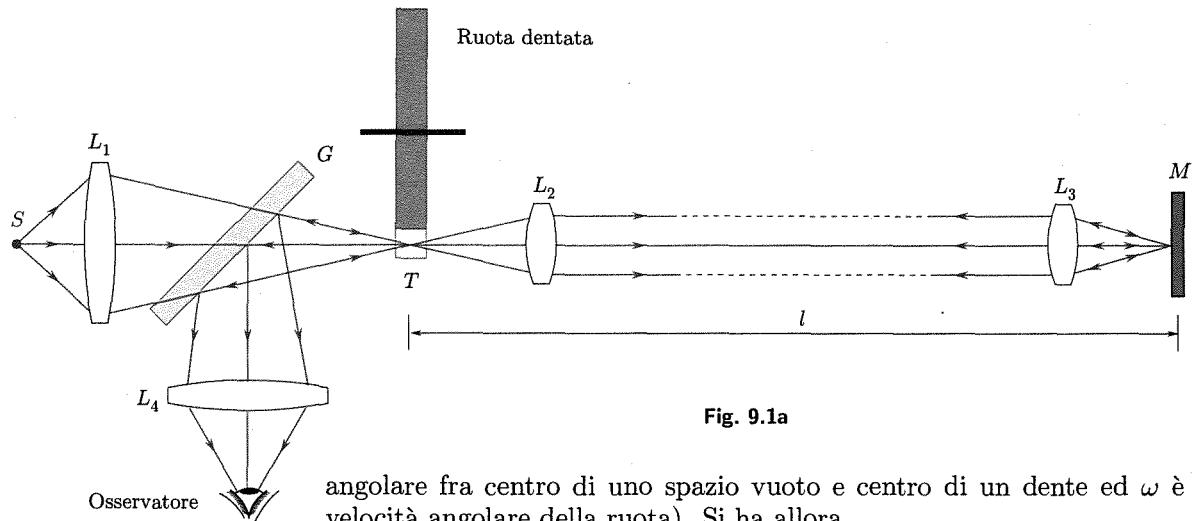


Fig. 9.1a

angolare fra centro di uno spazio vuoto e centro di un dente ed ω è la velocità angolare della ruota). Si ha allora

$$(9) \quad \frac{2l}{c} = \frac{\theta}{\omega}, \quad c = \frac{2l\omega}{\theta}$$

e dalla misura di ω si ricava c . Il valore che è stato ottenuto dalla Fizeau fu di $3,15 \cdot 10^8$ m/sec.

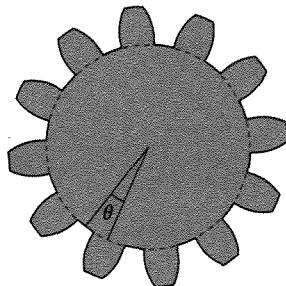


Fig. 9.1b

Un altro metodo fu sviluppato da Foucault nel 1850⁽¹⁰⁾; in esso si fa uso di uno specchio rotante in una situazione simile a quella della ruota dentata di Fizeau. La variazione di posizione dello specchio, dovuta alla sua rotazione nel tempo impiegato dal fascio luminoso a viaggiare verso uno specchio fisso e ritornare, produce una variazione nella direzione dell'immagine prodotta dallo specchio rotante stesso e da questa è possibile risalire a c .

Numerosi altri metodi sono stati successivamente impiegati: ne ricorderemo tre. Un primo metodo⁽¹¹⁾ è quello di determinare con gran precisione ϵ_0 ricordando che, in accordo con la teoria di Maxwell, è (cap. 8, par. 8.4)

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ed inoltre μ_0 ha nel Sistema Internazionale un valore ben preciso (cap. 4, par. 4.8).

Il secondo metodo si basa sulla possibilità di modulare un'onda luminosa in ampiezza a frequenza relativamente elevata e nota con alta precisione: ciò può essere fatto per esempio utilizzando effetti elettro-ottici quali l'effetto Kerr. Se un'onda continua di questo genere viene inviata verso un ostacolo che la riflette a distanza nota e l'onda che ritorna dopo la riflessione viene comparata con l'onda in emissione, si trova uno sfasamento nelle modulazioni che dipende dal tempo impiegato dall'onda ad

⁽¹⁰⁾ La disposizione sperimentale richiede lunghezze di propagazione molto inferiori a quelle del metodo di Fizeau e perciò è stata usata per determinare la velocità di propagazione della luce anche in mezzi diversi dall'aria (per es. acqua).

⁽¹¹⁾ Un tale metodo è equivalente a quello della determinazione del rapporto fra le unità elettromagnetica ed elettrostatica di corrente (o di carica) (appendice I, par. AI.3).

andare fino all'ostacolo e tornare⁽¹²⁾. Sistemi di misura del tempo di transito per impulsi molto brevi di energia a microonde sono stati sviluppati (sistemi radar ad impulsi) ed anche essi possono essere usati per la determinazione di c , se è nota la distanza fra la sorgente e l'ostacolo che riflette l'energia verso la sorgente.

Un ultimo metodo è quello nel quale vengono usate microonde con le quali si realizzano onde stazionarie in particolari strutture (cavità, linee, guide); dalla conoscenza della frequenza e dalla determinazione della lunghezza d'onda della radiazione, si ricava la velocità in base alla relazione

$$c = \lambda\nu.$$

Nella tabella 9.1 sono riportati i valori di c determinati in alcuni dei principali esperimenti nell'ultimo secolo; è indicato anche il metodo usato.

Una analisi critica di tutti i valori sperimentali ottenuti finora fa ritenerne come miglior valore (più probabile) per c

$$c = 299.792,5 \pm 0,10 \text{ km/sec}.$$

*Velocità della luce
nel vuoto*

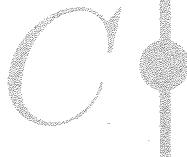
Il valore della velocità della luce nel vuoto in molte considerazioni pratiche viene preso approssimativamente pari a 300.000 km/sec.

Tabella 9.1 Misure di velocità della luce nello spazio libero

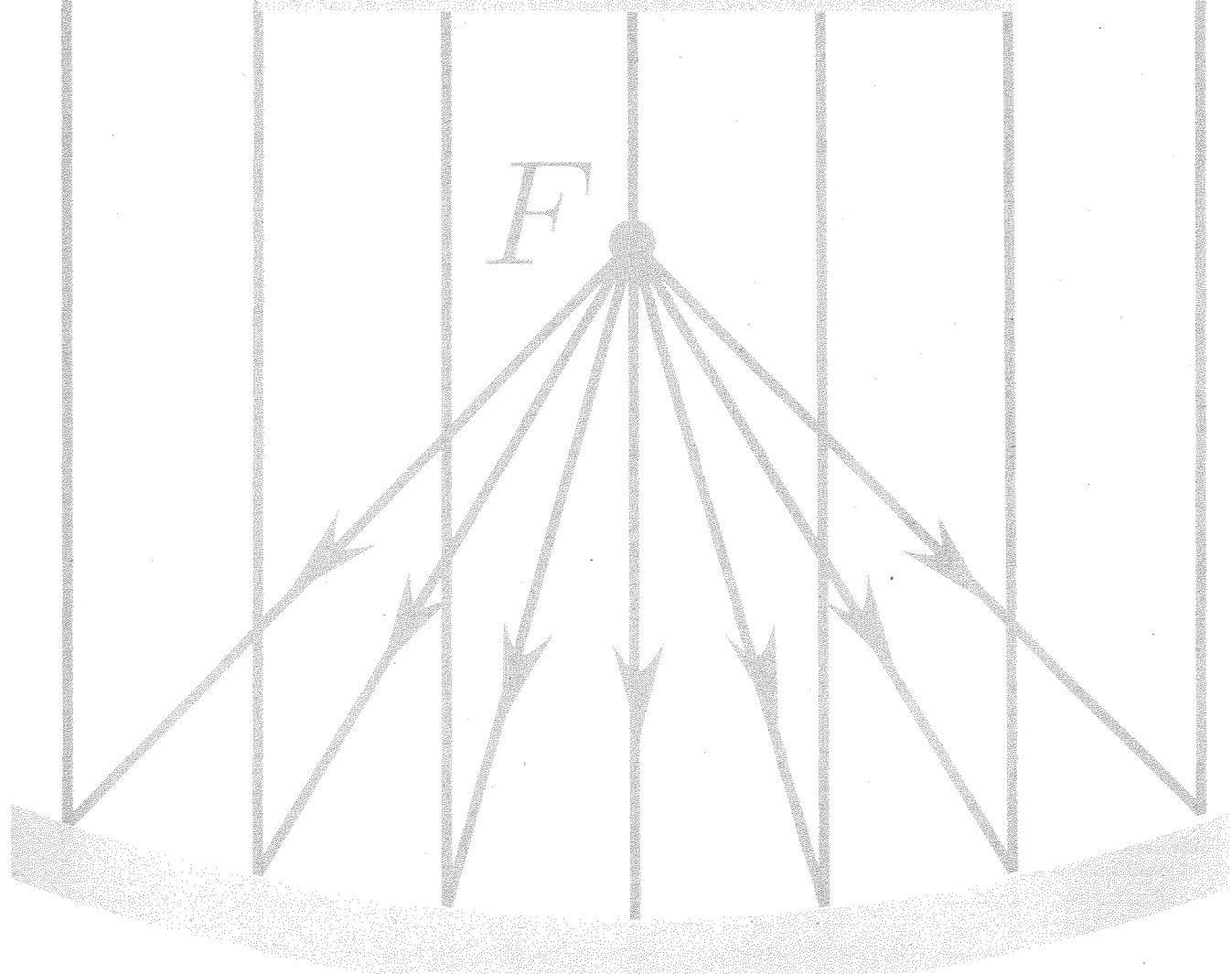
Sperimentatore	Metodo	c (km/sec)	
1876 Cornu (Francia)	ruota dentata	299.990	± 200
1880 Michelson (USA)	specchio rotante	299.910	± 50
1883 Newcombe (Gran Bretagna)	specchio rotante	299.860	± 30
1906 Rosa e Dorsey (USA)	misura di ε_0	299.781	± 10
1923 Mercier (Francia)	microonde	299.782	± 15
1926 Michelson (USA)	specchio rotante	299.796	± 4
1928 Karolus e Middelstadt (Germania)	cella di Kerr	299.778	± 10
1940 Huettel (Germania)	cella di Kerr	299.768	± 10
1950 Bergstadt (Svezia)	cella di Kerr	299.793,1	$\pm 0,3$
1950 Essen (Gran Bretagna)	microonde	299.792,5	± 3
1950 Hansen e Bol (USA)	microonde	299.789,3	$\pm 0,4$
1953 Froome (Gran Bretagna)	microonde	299.793,0	$\pm 0,3$
1955 Plyler	spettrometro infrarosso	299.792	± 6
1956 Edge (Svezia)	cella di Kerr	299.792,9	$\pm 0,2$
1957 Bergstrand (Svezia)	cella di Kerr	299.792,85	$\pm 0,16$
1958 Froome (Gran Bretagna)	microonde	299.792,50	$\pm 0,10$

⁽¹²⁾ L'esperimento può essere invertito e se si conosce la velocità della luce consentire la determinazione della distanza dell'ostacolo (su tale tipo di esperimenti si basano i sistemi di localizzazione radar).

OTTICA GEOMETRICA



- ✓ La teoria dell'**ottica geometrica** che si sviluppò inizialmente su basi euristiche e che può essere ricavata dalla trattazione elettromagnetica con opportune approssimazioni, è sufficiente per spiegare la formazione delle immagini date da un gran numero di sistemi ottici.
Essa viene qui applicata allo studio degli specchi (piani e curvi), dei sistemi ottici centrati (lenti e sistemi di lenti) e di alcuni dispositivi ottici (occhio, macchina fotografica, proiettore, microscopio, cannocchiale, prisma e spettroscopio, ecc.).



Ottica geometrica



10.1. INTRODUZIONE

Se si considera una sorgente puntiforme che illumini uno schermo opaco il quale termini con uno spigolo ad orlo lineare, la radiazione al di là dello schermo è presente *quasi esclusivamente* in uno dei due sempispazi determinati dalla sorgente e dallo spigolo. Vedremo (cap. 14) che a causa della diffrazione il passaggio dalla *zona di luce* a quella di *ombra* non è repentino: per la lunghezza d'onda della luce visibile, i fenomeni di diffrazione hanno peraltro importanza in una regione in genere molto ristretta. Analoghe considerazioni valgono per il caso in cui la radiazione incontri aperture in schermi, oppure ostacoli aventi dimensioni lineari grandi rispetto a λ : la radiazione è di solito essenzialmente compresa (od esclusa) in un cono di luce (o di ombra) determinato dalla sorgente puntiforme (al finito) e l'orlo dell'apertura (o dell'ostacolo visto dalla sorgente).

In un numero molto grande di situazioni di importanza pratica le particolarità della distribuzione dell'intensità delle onde luminose nelle vicinanze degli orli delle regioni di luce ed ombra, prodotte dalla diffrazione, non hanno interesse e possono essere trascurate. In tali casi si può usare una trattazione dei fenomeni ottici notevolmente più semplice della teoria ondulatoria e che, dal punto di vista matematico, può ottenersi da quella considerando il limite per $\lambda \rightarrow 0$. Una tale trattazione è praticamente coincidente con quella che si può sviluppare partendo da teorie corpuscolari sulla natura della luce. In essa le leggi dell'ottica possono essere formulate con il linguaggio della geometria. È quest'ultima circostanza quella che giustifica il nome di ottica geometrica dato alla trattazione in oggetto.

Non è nostra intenzione dedurre matematicamente le posizioni dell'ottica geometrica dalle equazioni di Maxwell⁽¹⁾; cercheremo solo di illustrare alcuni punti base della teoria.

In precedenza (cap. 8, par. 8.7) si è avuto modo di introdurre la locuzione raggio ottico *passante per un punto* per indicare la direzione ed il verso della linea per il punto lungo la quale avviene il flusso di energia, cioè la linea di flusso del vettore di Poynting (cap. 8, par. 8.6): nei mezzi isotropi⁽²⁾ le linee di flusso dell'energia sono rette normali ai fronti d'onda,

Ottica geometrica

Raggio ottico

⁽¹⁾ Ciò può trovarsi in libri specializzati quale: M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford.

⁽²⁾ Nel resto del presente capitolo considereremo mezzi isotropi.

ed i raggi coincidono con esse. Abbiamo usato anche un'altra introduzione del concetto di raggio, che è equivalente (vol. I, cap. 9, par. 9.25). Per onde di varia forma, considerate a distanze notevoli (rispetto a λ) dalla sorgente ed in zone limitate dello spazio, si è visto possibile sostituire ai fronti d'onda effettivi, fronti piani e abbiamo indicato con il nome di raggio per un punto⁽³⁾ la direzione di propagazione delle onde piane equivalenti. Un tale ragionamento può applicarsi a partire da una distanza dalla sorgente tanto più piccola quanto minore è λ e pertanto può applicarsi già a partire dalla sorgente nel caso limite che a noi qui interessa di $\lambda \rightarrow 0$. Al posto delle onde che sono irradiate dalla sorgente e che viaggiano nello spazio, si possono allora considerare raggi lungo i quali si propaga l'energia luminosa.

Le leggi dell'ottica geometrica

Propagazione rettilinea

Leggi della riflessione e della rifrazione

Dopo aver ricordato il concetto di raggio, possiamo introdurre gli elementi base dell'ottica geometrica con le seguenti posizioni:

1. in un mezzo isotropo ed omogeneo la luce si propaga lungo linee rette, dette raggi;
2. sulle superfici limite di mezzi diversi valgono le leggi geometriche della riflessione e della rifrazione *per i singoli raggi*:
 - a. il raggio incidente, quello riflesso, quello rifratto e la normale alla superficie di discontinuità nel punto di incidenza giacciono in un medesimo piano
 - b. gli angoli formati con la normale alla superficie nel punto di incidenza dal raggio incidente (i), dal raggio riflesso (i') e dal raggio rifratto (r) soddisfano le relazioni

Legge della riflessione

(1)

$$i = i'$$

Legge della rifrazione

(2)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

essendo n_1 e n_2 gli indici di rifrazione del primo e del secondo mezzo rispetto al vuoto e n_{21} l'indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo (cap. 8, par. 8.8).

L'ottica geometrica consiste nella applicazione dei criteri e delle leggi suddette; essa è quindi concettualmente molto semplice, anche se notevoli complicazioni pratiche possono intervenire nei problemi concreti.

Trattandosi di una teoria ove i fenomeni di interferenza e diffrazione non esistono ($\lambda = 0$), essa non può essere usata quando questi fenomeni sono dominanti o comunque non possono essere trascurati. I limiti di impiego di strumenti ottici (poteri risolutivi), come vedremo, dipendono dai fenomeni di diffrazione giacché le dimensioni, necessariamente limitate, di tali strumenti impongono l'utilizzazione solo di una parte delle superfici di onda che giungono dalle sorgenti nel posto ove lo strumento si trova. È chiaro quindi che l'ottica geometrica può essere usata esclusivamente per un certo tipo di considerazioni e come, talvolta, queste vadano integrate da altre che solo la teoria ondulatoria consente di fare. Ciononostante il campo di problemi pratici che possono essere trattati con l'ausilio della semplice ottica geometrica è molto esteso.

⁽³⁾ Sempre in mezzi isotropi.

■ 10.2. SISTEMI OTTICI E IMMAGINI

L'ottica geometrica trova la sua più importante applicazione nello studio⁽⁴⁾ di quei dispositivi formati da mezzi ottici aventi forma, dimensioni e caratteristiche opportune per il compito particolare da assolvere e che prendono il nome generale di sistemi ottici.

In ottica geometrica un corpo indicato con il nome di oggetto è considerato come un insieme di sorgenti puntiformi indipendenti, da ciascuna delle quali partono i raggi. Il compito di un sistema ottico è quello di rac cogliere, almeno in parte, tali raggi e deviarli in maniera tale che i raggi provenienti da un punto dell'oggetto convergano in un punto (immagine del punto oggetto considerato) e che questi punti di convergenza siano disposti nello stesso ordine dei punti oggetto corrispondenti. Punti oggetto e punti immagine corrispondenti si chiamano punti coniugati (rispetto al sistema considerato). Il sistema ottico fornisce in tale modo una rappresentazione simile⁽⁵⁾ dell'oggetto (nello spazio) che è chiamata immagine: tale immagine è fornita in una posizione non coincidente con l'oggetto ed ha in genere dimensioni diverse.

Le ragioni per desiderare di disporre di un'immagine possono essere varie: può, per esempio, essere necessario per osservare oggetti non accessibili direttamente all'occhio (così accade, per es., per lo specchio da toletta, per il periscopio), per osservare oggetti molto piccoli (microscopio) o molto distanti (telescopio), per osservare proiezioni su uno schermo di figure registrate (diascopi, episcopi). Le immagini fornite da un sistema ottico possono essere di due tipi: reali e virtuali. Nelle immagini reali, i raggi di luce provenienti dall'oggetto sono fisicamente convogliati a formare l'immagine (fig. 10.1a): questa può essere osservata ponendo nel posto in cui si forma un rivelatore (schermo opaco oppure traslucido per la osservazione diretta, lastra fotografica per la registrazione) e può essere usata come oggetto per un secondo sistema ottico.

Punti coniugati

Immagini reali

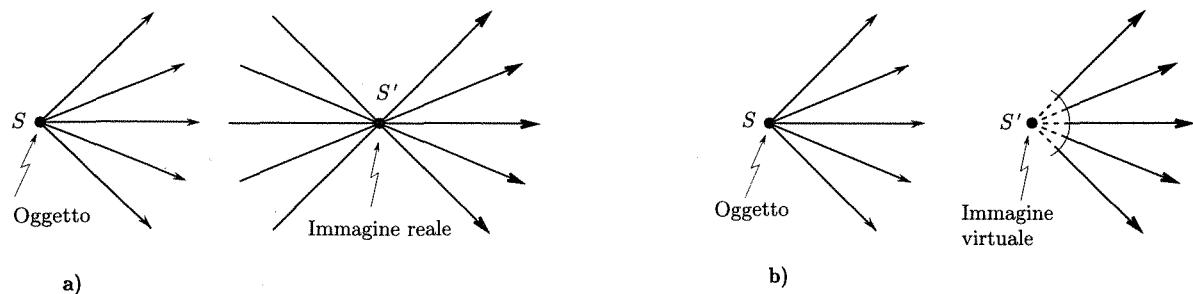


Fig. 10.1

Nelle immagini virtuali, invece, i raggi di luce in realtà non passano per l'immagine; questa è ottenuta prolungando idealmente i raggi e determinando le corrispondenti intersezioni (fig. 10.1b). È ovvio che una immagine siffatta non può essere raccolta su uno schermo; l'immagine

Immagini virtuali

⁽⁴⁾ Spesso non esauriente, per le limitazioni intrinseche già specificate.

⁽⁵⁾ Ci riferiamo a sistemi perfetti, privi di aberrazioni o, come si usa dire, a *sistemi ortoscopici*; in realtà, appunto a causa delle aberrazioni o di altri difetti, spesso le immagini non sono perfettamente simili agli oggetti (par. 10.9).

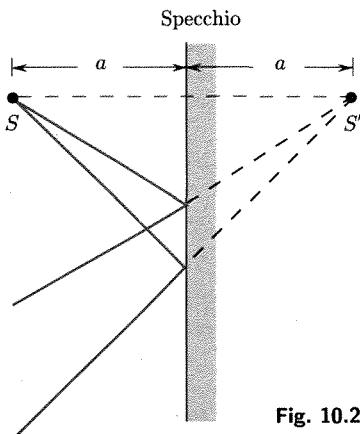


Fig. 10.2

*Asse ottico**Ingrandimento lineare trasversale**Ingrandimento lineare longitudinale**Ingrandimento angolare**Ingrandimento visuale**Verso dell'immagine**Immagine speculare**Reversibilità dei percorsi luminosi*

può tuttavia essere osservata mediante un altro sistema che ne fornisca una immagine reale; un tale sistema può, per es., essere l'occhio opportunamente adattato. Un caso tipico di immagini di questo genere è quello formato dal noto specchio piano (fig. 10.2).

Le dimensioni dell'immagine fornita da un sistema ottico sono in genere diverse da quelle dell'oggetto. È utile di conseguenza avere una misura dell'effetto prodotto a tale riguardo dal sistema ottico. Si considerano allo scopo tre rapporti indicati con i nomi di ingrandimento lineare trasversale, ingrandimento lineare longitudinale ed ingrandimento angolare. Prima di distinguere i significati di questi diversi parametri è bene precisare che i sistemi ottici comuni hanno un asse caratterizzato dal fatto che un oggetto piano normale a tale asse ha una immagine che, a parte piccole deviazioni (aberrazioni), è anche essa normale ad esso. Si consideri ora un oggetto piano normale all'asse del sistema e la sua immagine: se entrambi sono a distanza finita dal sistema (per esempio, diapositiva e sua proiezione su uno schermo) è facile paragonare le loro dimensioni e si indica come ingrandimento lineare trasversale il rapporto di una dimensione lineare dell'immagine e della corrispondente dimensione dell'oggetto.

Nel caso di oggetti ed immagini che si estendono nella direzione dell'asse del sistema ottico, ha interesse considerare il rapporto delle dimensioni assiali corrispondenti dell'immagine e dell'oggetto: esso rappresenta l'ingrandimento longitudinale. Di norma quando si parla di ingrandimento (lineare) senza ulteriori specificazioni, ci si riferisce all'ingrandimento trasversale.

Quanto all'ingrandimento angolare, esso è definito come il rapporto tra l'apertura del fascio di raggi che concorrono nel punto immagine dato dal sistema e l'apertura del corrispondente fascio di raggi uscenti dal punto oggetto. La considerazione di tale ingrandimento riesce particolarmente utile nei casi in cui l'oggetto, ovvero l'immagine, siano a distanza infinitamente grande dal sistema.

Nel caso poi di sistemi ottici destinati ad aiutare l'occhio nella visione di oggetti molto lontani (telescopi) o di oggetti molto piccoli (lenti di ingrandimento, microscopi), s'introduce un particolare ingrandimento angolare, il cosiddetto ingrandimento visuale, che è una misura convenzionale della capacità del sistema di dar luogo, sulla retina dell'occhio, a immagini più estese di quelle che si avrebbero nella visione diretta, a occhio nudo; tale ingrandimento è il rapporto tra l'angolo sotto cui l'occhio dell'osservatore vede l'immagine (virtuale) fornita dal sistema e l'angolo sotto il quale l'occhio vede l'oggetto nella visione diretta.

A prescindere dall'ingrandimento, l'immagine può risultare diritta, capovolta, ribaltata, rispetto all'oggetto (fig. 10.3); in particolare, un'immagine non ingrandita né impiccolita, diritta e ribaltata si chiama immagine speculare.

Vogliamo terminare questo paragrafo sui sistemi ottici sottolineando la proprietà della reversibilità del percorso dei raggi che per essi vale, secondo la quale il percorso di un raggio nel sistema è lo stesso per le due direzioni di propagazione possibili: la corrispondenza fra i punti oggetto

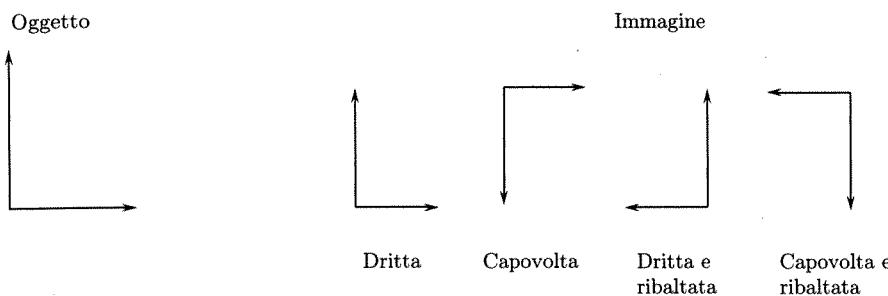


Fig. 10.3

(A) e quelli immagine (A') è biunivoca e quindi i punti A sono immagini per punti oggetto A' .

10.3. FORMAZIONE DI IMMAGINI PER RIFLESSIONE

Non ci fermeremo molto a considerare ancora la riflessione su una superficie piana. I raggi provenienti da un oggetto puntiforme (sorgente) originano raggi riflessi: i prolungamenti di tali raggi riflessi al di là dello specchio si intersecano in un punto (immagine della sorgente) che è disposto nella posizione simmetrica della sorgente rispetto allo specchio (fig. 10.2): l'immagine è virtuale. Un oggetto esteso, formato cioè da molti punti, dà luogo ad un'immagine diritta e ribaltata (immagine speculare), avente le stesse dimensioni geometriche; l'ingrandimento lineare ha valore unitario.

Naturalmente molti altri tipi di specchi⁽⁶⁾ possono essere considerati ed il comportamento di ciascuno di essi ha particolarità che possono essere di caso in caso esaminate in relazione alla forma dello specchio ed alla posizione e dimensione delle sorgenti (oggetti). In genere il comportamento di uno specchio non piano è piuttosto complesso e tranne per situazioni particolari, i raggi uscenti da un punto sorgente non sono riflessi in raggi che passano (direttamente o con i loro prolungamenti) attraverso un medesimo punto (immagine). Si consideri per esempio il caso di uno specchio costituito da una grande porzione di una sfera (fig. 10.4) e si considerino i raggi che partono da un punto S , sull'asse della calotta e non coincidente con il centro della sfera: applicando le leggi della riflessione ai singoli raggi si trova che essi non passano per lo stesso punto: la intensità della luce riflessa ha una concentrazione su una superficie di rotazione, chiamata caustica di riflessione. Il profilo di tale superficie si può ottenere considerando una serie di raggi che escono da S con diversi θ e le intersezioni di ciascun raggio con il successivo al variare con regolarità di θ . Da queste considerazioni appare evidente che nel caso dello specchio sferico, se si vuole che si possa ritenere che i raggi uscenti da S originino per riflessione raggi passanti per un altro punto (immagine S'), occorre limitare

Specchio piano

Specchi sferici

Caustica

⁽⁶⁾ Con il termine generico di specchio si indica una superficie (piana, sferica, paraboloidica ecc.), caratterizzata da elevato potere riflettente per la luce. Tali superfici vengono ottenute con una accurata lavorazione meccanica di corpi metallici, di vetro, di quarzo e successivi trattamenti particolari (argentatura, alluminatura, cromatura ecc.).

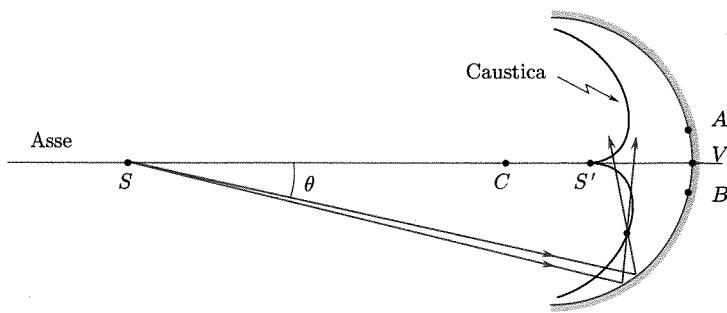


Fig. 10.4

la calotta sferica a dimensioni (AB) piccole rispetto al raggio della sfera. Possiamo meglio dire che perché uno specchio sferico fornisca un punto immagine di una sorgente puntiforme⁽⁷⁾, occorre che le dimensioni dello specchio siano piccole rispetto al suo raggio e che la sorgente invii nello specchio raggi con incidenza approssimativamente normale.

Vogliamo ora considerare con maggior dettaglio il caso dello specchio sferico cercando di precisare le condizioni in cui si può ottenere l'immagine di un oggetto da una tale superficie riflettente.

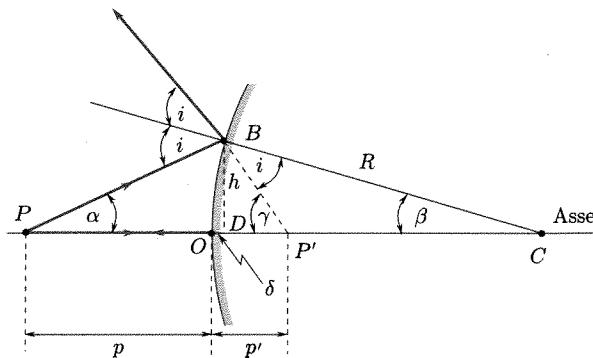


Fig. 10.5

La figura 10.5 indica uno specchio sferico con raggio di curvatura R ; è segnato con O il vertice della calotta, con C il centro della superficie sferica: \overline{OC} fornisce l'*asse* dello specchio. La luce incida da sinistra (specchio convesso). Si consideri un punto P sull'asse ad una distanza p dal vertice e due raggi che escano da esso; il primo, diretto come l'asse, incide normalmente sulla superficie dello specchio ed è riflesso nella stessa direzione; il secondo forma un angolo α con l'asse e incide sulla superficie riflettente in un punto B con l'angolo i . Sulla figura sono indicati con γ e β gli angoli formati con l'asse rispettivamente dal raggio riflesso e dalla normale alla superficie riflettente in B . Semplici relazioni fra gli angoli esterni di un triangolo consentono di scrivere:

$$(3) \quad \begin{aligned} i &= \alpha + \beta, \\ \gamma &= i + \beta; \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ In generale un sistema ottico che dà immagini puntiformi di sorgenti puntiformi si dice *stigmatico* (o *anastigmatico*); se non ha tale proprietà si dice invece *astigmatico*.

si ha quindi

$$(4) \quad \alpha - \gamma = -2\beta.$$

Si ha per questi angoli, con riferimento alla figura,

$$(5) \quad \tan \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{PD}} = \frac{h}{p + \delta},$$

$$(6) \quad \tan \gamma = \frac{\overline{BD}}{\overline{DP'}} = \frac{h}{p' - \delta},$$

$$(7) \quad \tan \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{h}{R - \delta}.$$

Se si ammette che α, β, γ siano tanto piccoli da potere per essi confondere le tangenti con l'angolo e di conseguenza che possa essere trascurata (rispetto a p, p', R) la distanza (δ) fra il vertice O ed il piede (D) della perpendicolare da B all'asse, si ottiene dalla (4):

$$(8) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R}.$$

Si ottiene così una relazione nella quale non compare α ; ciò significa che tutti i raggi uscenti da P e che soddisfano le condizioni poste passano per uno stesso punto (immagine di P). La (8) specifica la posizione di tale immagine sull'asse dello specchio. I raggi che escono dalla sorgente e che giungono sulla superficie riflettente vicino all'asse ed in direzione all'incirca parallela all'asse stesso si chiamano raggi parassiali; le condizioni anzidette per α, β, γ equivalgono al fatto che sullo specchio giungano dalla sorgente esclusivamente raggi parassiali; ciò corrisponde alle condizioni indicate inizialmente che lo specchio abbia dimensioni piccole rispetto al suo raggio di curvatura e sia investito da raggi approssimativamente normali alla sua superficie. Se ci si allontana da queste condizioni (per es. ingrandendo le dimensioni dello specchio) i raggi uscenti da un punto oggetto posto sull'asse una volta riflessi incontrano l'asse non in un punto ma in vari punti nell'interno di un segmento (lo specchio allora non è un sistema stigmatico): si produce quella che si chiama aberrazione sferica⁽⁸⁾.

Vogliamo ora esaminare il comportamento di uno specchio sferico quando al posto di un oggetto puntiforme si abbia un oggetto esteso, cioè formato da numerosi oggetti puntiformi. È innanzitutto chiaro che se l'oggetto fosse su una superficie sferica concentrica con lo specchio (fig. 10.6) per ciascun punto di esso si potrebbero ripetere le considerazioni avanti svolte per un punto sull'asse e si giungerebbe alla conclusione che lo specchio sferico fornisce di un oggetto bidimensionale disposto su una tale superficie sferica una immagine disposta su di un'altra superficie sferica; per le posizioni (i raggi) di queste sfere varrebbe la (8)⁽⁹⁾. Ciò porta di conseguenza che se si considera un oggetto bidimensionale in un piano

Equazione degli specchi sferici

Approssimazione parassiale

Immagini date dallo specchio sferico

⁽⁸⁾ È facile collegare queste considerazioni con quelle fatte sulla caustica. Nelle condizioni di raggi parassiali, all'oggetto S corrisponde l'immagine S' (fig. 10.4); al crescere delle dimensioni dello specchio, i raggi riflessi incontrano l'asse in un segmento che è la proiezione sull'asse della caustica.

⁽⁹⁾ In questa relazione le distanze p, p' vanno allora valutate sulla retta passante per il centro di curvatura dello specchio (C) e P, P' .

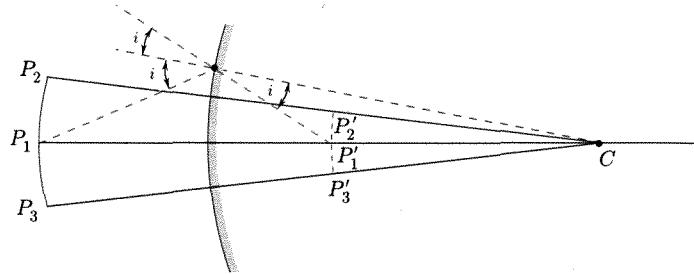


Fig. 10.6

normale all'asse, come la freccia \overline{PQ} in figura 10.7, ad esso corrisponde una immagine formata da punti che non si trovano né su un piano normale all'asse né su una sfera concentrica con lo specchio, giacché i vari punti oggetto hanno distanze diverse dallo specchio. Questo effetto (curvatura di campo) è piccolo e può essere trascurato finché la estensione dell'oggetto non è molto grande.

Si può quindi riteneere, in prima approssimazione, che uno specchio sferico fornisca per un oggetto piano, disposto normalmente all'asse dello specchio stesso, una immagine in un piano, anche esso normale all'asse, finché la estensione dell'oggetto sia tale che le distanze dei vari punti dell'oggetto dallo specchio non siano molto diverse. Sotto questa condizione, nella (8) le distanze p (*ascissa del punto oggetto*) e p' (*ascissa del punto immagine coniugato*) sono, per punti sull'asse o fuori asse, le distanze del piano π_p normale all'asse in cui giace l'oggetto e del piano $\pi_{p'}$ normale all'asse in cui si forma l'immagine dal piano, anch'esso normale all'asse, tangente allo specchio nel vertice V di questo (fig. 10.7).

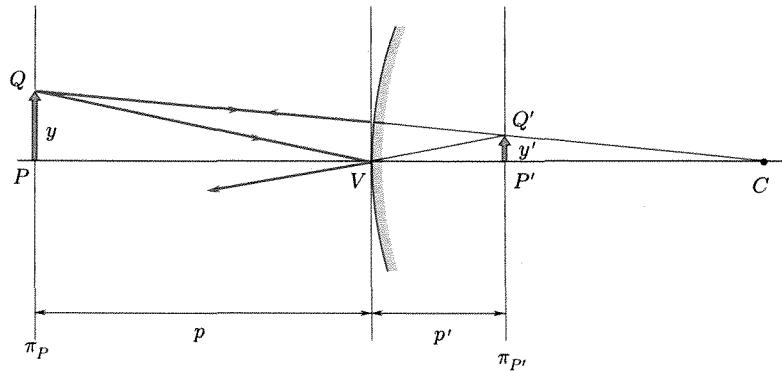


Fig. 10.7

Nella figura 10.7 l'immagine $\overline{P'Q'}$ dell'oggetto \overline{PQ} è costruita tenendo conto che il raggio PV ritorna su se stesso.

Per quanto riguarda l'ingrandimento trasversale si ha

$$(9) \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} .$$

10.4. CONVENZIONI SUI SEGNI PER GLI SPAZI OGGETTO E IMMAGINE

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il caso di un oggetto posto di fronte ad una superficie riflettente sferica ed abbiamo accennato alla maniera con cui si può procedere per determinare l'immagine prodotta. Naturalmente diverse situazioni possono verificarsi secondo che il centro di curvatura della superficie riflettente si trovi entro o fuori della regione dello spazio libero per la propagazione, secondo la posizione dell'immagine rispetto alla superficie dello specchio ecc. Appare immediatamente l'interesse di cercare di stabilire relazioni che possano servire a trattare tutti i possibili casi.

Circostanze analoghe si presenteranno in seguito quando si studierà l'effetto di superfici rifrangenti sul percorso dei raggi.

Una tale procedura richiede di fissare in maniera chiara alcune convenzioni sui segni algebrici da dare alle grandezze geometriche che individuano la posizione degli oggetti e delle immagini rispetto alle superfici sferiche di discontinuità, le dimensioni degli oggetti e delle immagini, la posizione dei centri di curvatura. Varie convenzioni possono essere e sono usate. Noi seguiranno quelle qui sotto specificate:

1. tutti i diagrammi sono fatti supponendo che la luce proceda da sinistra verso destra;
2. la distanza p dell'oggetto è positiva se il punto è a sinistra della superficie riflettente (o rifrangente);
3. la distanza p' dell'immagine è positiva se l'immagine è a destra della superficie riflettente (o rifrangente);
4. il raggio di curvatura della superficie è positivo se il centro di curvatura è a destra della superficie;
5. le eventuali dimensioni trasversali dell'oggetto (y) e dell'immagine (y') sono positive al di sopra dell'asse.

Nel caso dello specchio convesso di figura 10.5 p , p' , R sono positivi e come si è visto vale la (8). La figura 10.7 mostra la situazione nel caso che l'oggetto abbia dimensioni trasversali e in tal caso y ed y' hanno lo stesso segno e l'ingrandimento (9) è positivo: ciò significa che l'immagine è diritta rispetto all'oggetto. Si consideri il caso in cui lo specchio sia concavo (R negativo): le figure 10.8a e b sono le analoghe delle 10.5 e 10.7 per uno specchio convesso. Per trovare la posizione dell'immagine (fig. 10.8a) si può scrivere

$$(10) \quad \begin{aligned} \beta &= \alpha + i, \\ \gamma &= \beta + i, \\ \alpha + \gamma &= 2\beta. \end{aligned}$$

D'altra parte, nel caso in cui α , β , γ siano piccoli è con buona approssimazione:

$$(11) \quad \alpha = \frac{h}{p}, \quad \gamma = -\frac{h}{p'}, \quad \beta = -\frac{h}{R};$$

di conseguenza,

$$(12) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R}.$$

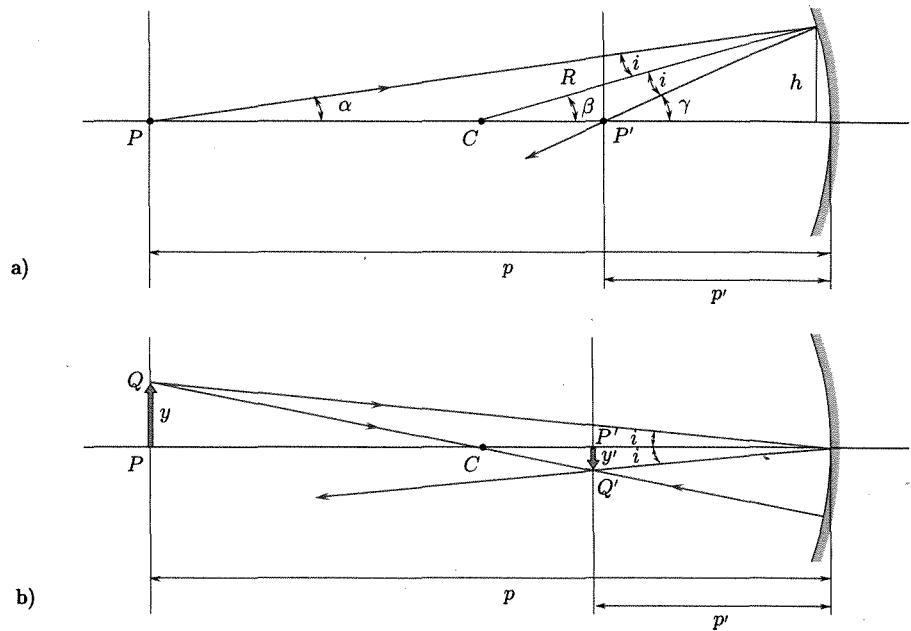


Fig. 10.8

Questa è ancora l'equazione (8), che quindi è valida anche per gli specchi concavi, se opportuna attenzione è data ai segni delle grandezze che vi intervengono.

Per l'ingrandimento, giacché (fig. 10.8b)

$$\tan i = \frac{y}{p} = \frac{-y'}{-p'} = \frac{y'}{p'},$$

si ha

Ingrandimento trasversale

$$(13) \quad m = \frac{y'}{y} = \frac{p'}{p}.$$

Come si può facilmente verificare, e come vedremo meglio tra breve, può accadere che p e p' abbiano segni opposti (fig. 10.8b), talché l'ingrandimento è negativo: ciò significa che l'immagine è capovolta rispetto all'oggetto.

■ 10.5. DISTANZA FOCALE. FORMULA DEGLI SPECCHI SFERICI. COSTRUZIONE GRAFICA DELLE IMMAGINI

Con le precisazioni sui segni date nel paragrafo precedente, la relazione che lega le posizioni (per dir meglio le ascisse) dell'oggetto e dell'immagine formata da uno specchio di raggio R è [eq. (8) e (12)]

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R}.$$

Nel caso che l'oggetto sia a distanza infinita ($p \rightarrow \infty$)⁽¹⁰⁾, l'immagine

⁽¹⁰⁾ In pratica perché l'oggetto possa cosiderarsi "all'infinito" basta che p sia molto grande rispetto ad R .

tende ad una posizione cui corrisponde la distanza

$$p'_F = \frac{R}{2}.$$

Se l'oggetto è puntiforme e sull'asse, considerarlo all'infinito equivale a considerare che sullo specchio incida un fascio di raggi paralleli all'asse; l'immagine è allora il punto F dell'asse a distanza p'_F dal vertice. Il segno di p'_F è lo stesso di quello di R . Nel caso perciò di specchio convesso ($R > 0$) l'immagine F è a destra dello specchio ed è quindi virtuale (fig. 10.9a); nel caso di specchio concavo ($R < 0$) l'immagine F giace a sinistra dello specchio ed è reale (fig. 10.9b). Considerare poi un oggetto puntiforme e all'infinito *ma non sull'asse* dello specchio significa considerare un fascio di raggi paralleli incidente obliquamente sullo specchio; nei limiti in cui tali raggi possono essere considerati parassiali (angolo di incidenza i sufficientemente piccolo), l'immagine è il punto P' (fig. 10.9c e d) intersezione del piano π_F per F normale all'asse con la retta a condotta per il centro di curvatura C dello specchio parallelamente al fascio (vedremo tra poco la giustificazione di tale costruzione).

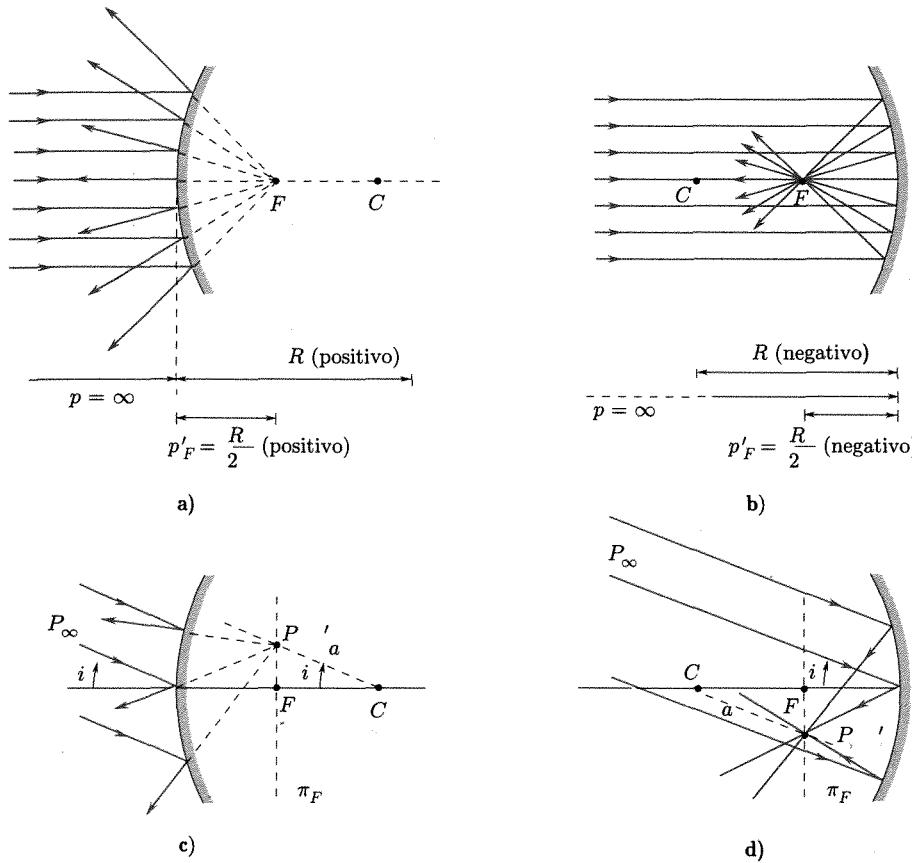


Fig. 10.9

Analogamente, l'immagine va all'infinito ($p' = -\infty$) quando l'oggetto si trova alla distanza

$$p_F = -\frac{R}{2}.$$

Se si tratta di uno specchio convesso (R positivo) p_F è negativo, ciò significa che un fascio di raggi che in assenza dello specchio convergerebbe in F viene trasformato dallo specchio in un fascio parallelo all'asse (fig. 10.10a). Se invece R è negativo, cioè lo specchio è concavo, p_F risulta positivo: il punto F è a sinistra dello specchio; se in tale punto viene posto un oggetto i raggi da esso emergenti sono trasformati dallo specchio in un fascio di raggi paralleli all'asse (fig. 10.10b).

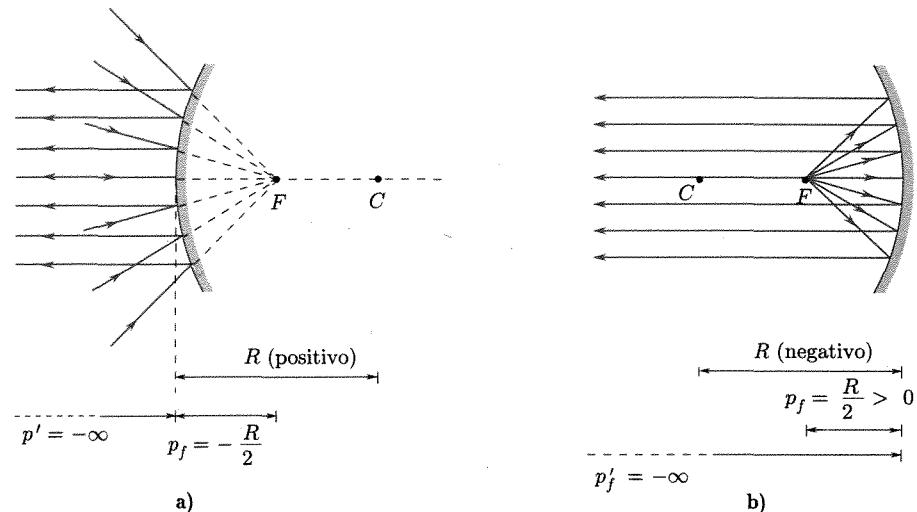


Fig. 10.10

Il punto F prende il nome di fuoco⁽¹¹⁾, e il piano π_F quello di piano focale. Il fuoco può essere considerato come il punto immagine (reale o virtuale) del punto all'infinito nella direzione dell'asse. È anche il punto che gode della proprietà che i raggi che convergerebbero in esso, in assenza dello specchio se questo è convesso ($R > 0$), o che derivano da esso, se lo specchio è concavo ($R < 0$), sono trasformati per riflessione in raggi paralleli all'asse.

La distanza di F dal vertice prende il nome di distanza focale (f): il suo valore è pari alla metà del raggio di curvatura dello specchio. V'è ancora da aggiungere qualcosa sul segno algebrico da dare a tale distanza focale. Precisamente, si conviene⁽¹²⁾ di porre

$$(14) \quad f = -\frac{R}{2}$$

Distanza focale di uno specchio sferico

con l'appropriato segno per R ; così nel caso degli specchi convessi ($R > 0$) la distanza focale viene assunta negativa, mentre nel caso degli specchi concavi ($R < 0$) essa viene assunta positiva.

⁽¹¹⁾ Lo specchio sferico ha un solo fuoco, a differenza del diottro sferico (par. 10.6).

⁽¹²⁾ La convenzione è scelta in modo da avere una descrizione analoga a quella valida per le lenti (che vedremo in seguito): per distanza focale positiva il sistema è tale da trasformare un fascio di raggi incidente paralleli all'asse in un fascio di raggi che realmente passa per un punto (immagine reale del punto all'infinito nella direzione dell'asse).

Usando questa convenzione la formula che lega le ascisse dell'oggetto e dell'immagine e quella relativa all'ingrandimento si scrivono, in generale

$$(15) \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \quad m = \frac{p}{p'}.$$

L'impiego di tali formule⁽¹³⁾ per la soluzione di problemi concreti è abbastanza semplice; occorre fare attenzione al corretto uso delle convenzioni sui segni.

Molto spesso è utile costruire graficamente l'immagine di un oggetto. Un metodo semplice è quello di costruire l'immagine di alcuni punti dell'oggetto fuori dell'asse ottico i quali consentano di determinare l'immagine intera dell'oggetto. Per trovare l'immagine di un punto fuori asse è sufficiente determinare l'intersezione di *due* raggi riflessi ed è chiaro che conviene scegliere i raggi in partenza dall'oggetto in modo che i raggi riflessi si sappiano costruire facilmente. In genere si considerano due dei seguenti raggi:

1. il raggio parallelo all'asse, che viene trasformato in raggio passante per il fuoco;
2. il raggio passante per il fuoco, che viene trasformato in raggio parallelo all'asse;
3. il raggio passante per il centro di curvatura, che viene riflesso su se stesso.

La figura 10.11a e b mostra come questi raggi possano essere usati per determinare l'immagine (reale o virtuale) data da uno specchio concavo e da uno specchio convesso.

In base a questi criteri grafici, è facile costruire l'immagine data da uno specchio concavo o convesso di oggetti variamente distanti dallo specchio medesimo: la figura 10.12 illustra sinteticamente la situazione nei vari casi. L'esame di tale figura porta ad alcune interessanti osservazioni:

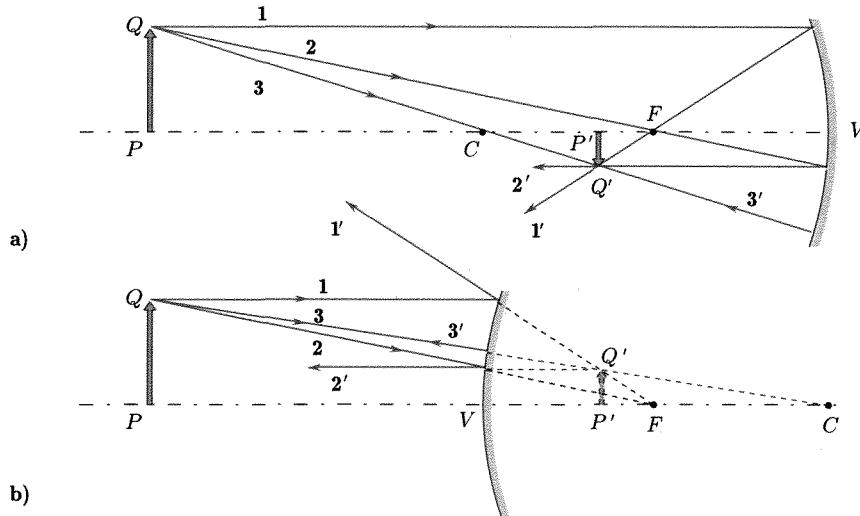


Fig. 10.11

⁽¹³⁾ Insistiamo ancora sul fatto che tali formule sono valide soltanto per specchi di piccola apertura e per raggi parassiali.

*Costruzione grafica
delle immagini*

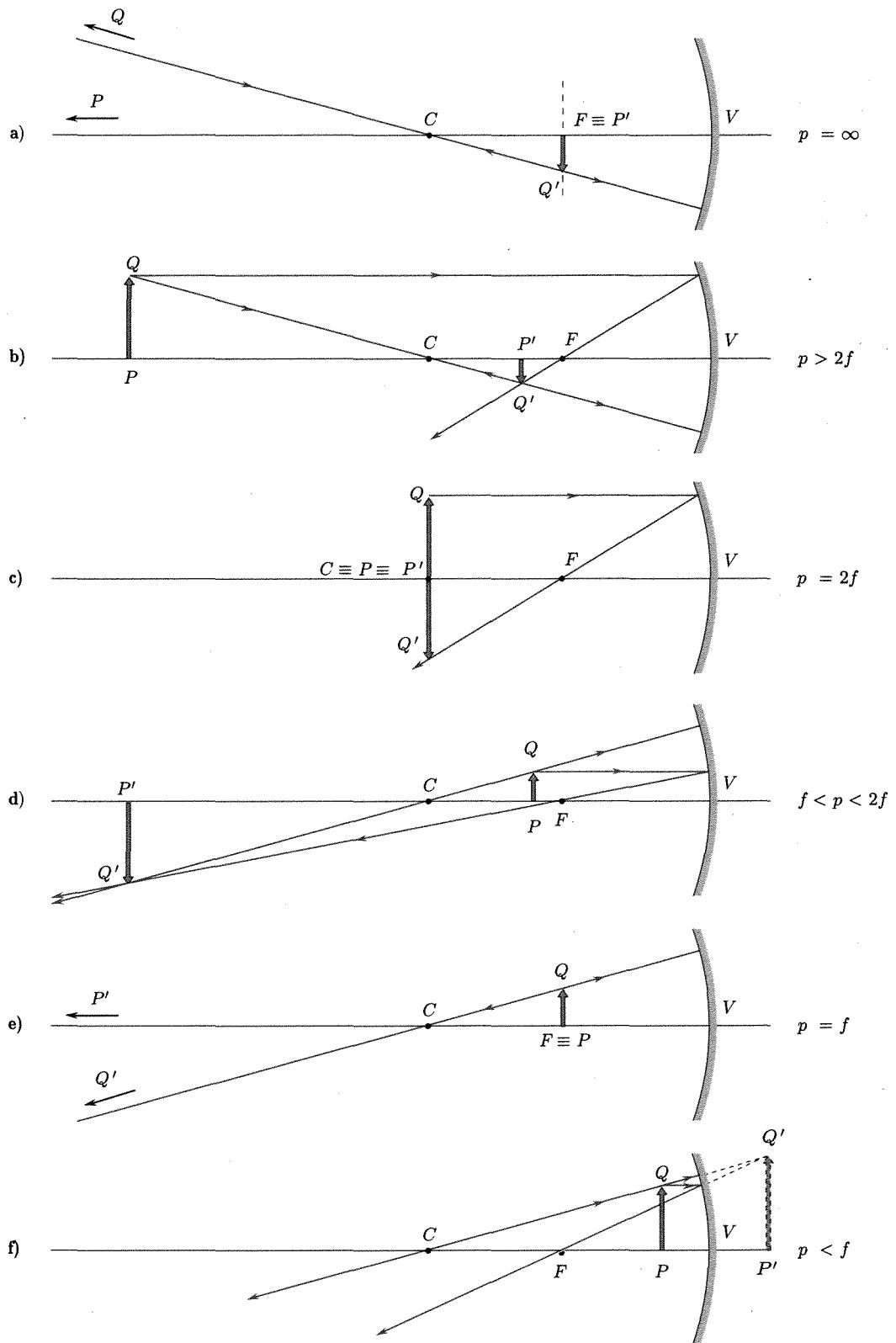


Fig. 10.12

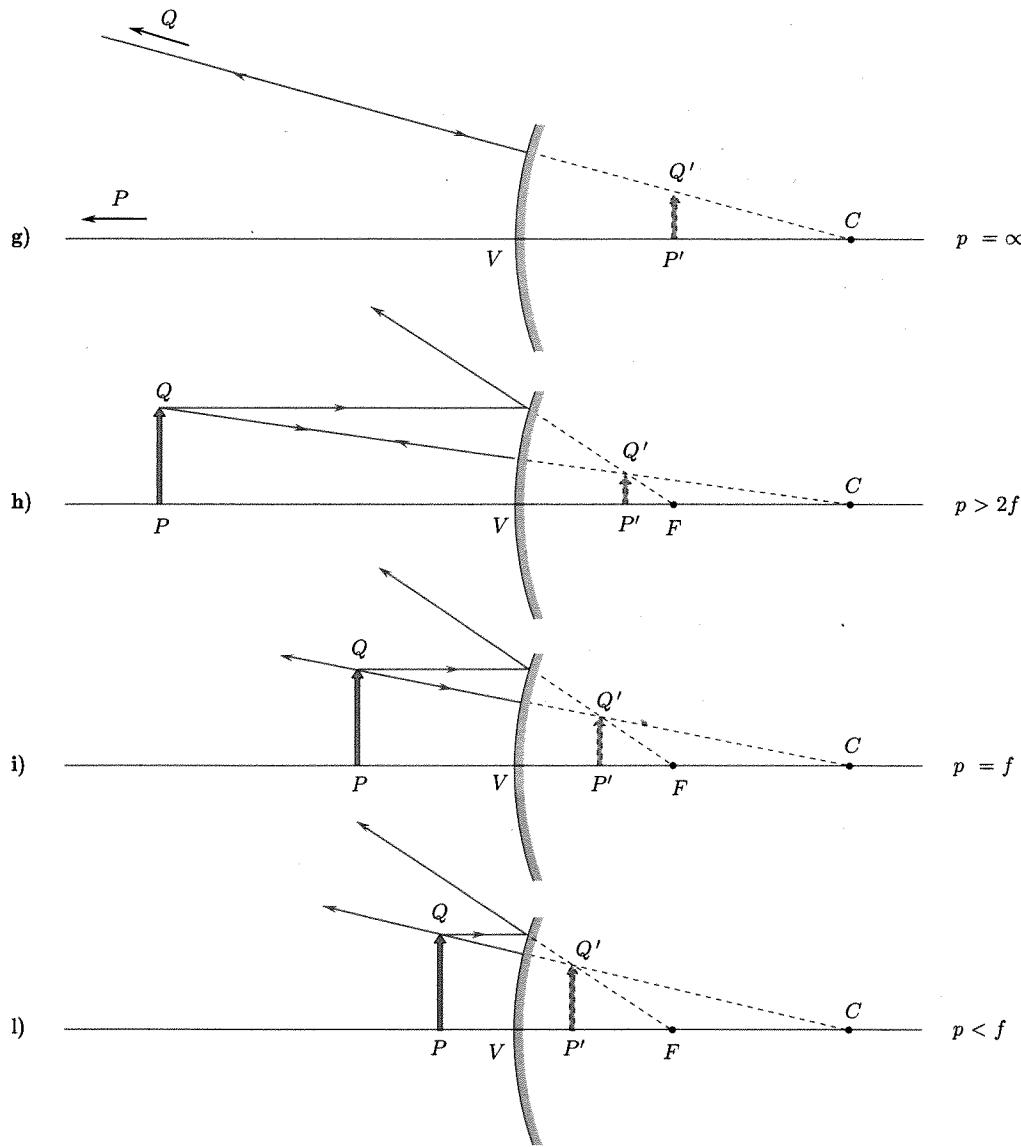


Fig. 10.12 (segue)

1. uno specchio concavo dà immagini reali, capovolte, impiccolite (che cadono tra il fuoco e il centro) se l'oggetto è tra l'infinito e il centro ($p \geq 2f$); immagini reali, capovolte, ingrandite (che cadono tra il centro e l'infinito) se l'oggetto è tra il centro e il fuoco ($2f > p \geq f$); immagini virtuali (come tali al di là dello specchio), diritte, ingrandite se l'oggetto è tra il fuoco e lo specchio ($p < f$). Situazioni significative: oggetto all'infinito ($p = \infty$), immagine (reale, impiccolita) nel piano focale; oggetto nel piano per il centro e normale all'asse ($p = 2f$), immagine (reale, di uguale grandezza) nello stesso piano, oggetto nel fuoco ($p = f$), immagine (reale, infinitamente grande) all'infinito.

Specchio concavo

2. uno specchio convesso dà sempre immagini virtuali, diritte, impiccolite (al limite, per oggetti infinitamente vicini allo specchio, immagini virtuali, diritte, di uguale grandezza).

Specchio convesso

Naturalmente, quanto ora osservato è direttamente deducibile dalla corretta applicazione, nei vari casi, delle (15).

Si faccia attenzione che il metodo grafico descritto vale negli stessi limiti delle approssimazioni poste per dedurre le (15), e quindi non consente di considerare eventuali aberrazioni.

■ 10.6. FORMAZIONE DI IMMAGINI PER RIFRAZIONE

In precedenza parlando di rifrazione ad una superficie di separazione (cap. 8, par. 8.8) abbiamo considerato esclusivamente onde piane incidenti su una superficie piana; le onde rifratte sono ancora piane e per esse valgono le leggi della rifrazione.

In particolare fra gli angoli che le direzioni di propagazione delle onde incidenti (*i*) e rifratte (*r*) formano con la normale alla superficie piana di separazione dei mezzi 1 e 2, la velocità di propagazione nei due mezzi e i loro indici di rifrazione $n_1 = c/v_1$ ed $n_2 = c/v_2$ valgono le relazioni:

$$(16) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Ricordiamo (cap. 8, par. 8.8) che nel caso $n_2 < n_1$ (cioè $v_2 > v_1$) il fascio rifratto viene a mancare per angoli di incidenza superiori al valore limite

$$(17) \quad \sin i_L = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

e si ha *riflessione totale*.

Queste considerazioni valgono in ottica geometrica per i singoli raggi incidenti su una qualsiasi superficie. È importante tuttavia notare che se si considerano i raggi uscenti da un punto oggetto nel mezzo 1 essi non sono in genere trasformati per rifrazione su superficie piana in un fascio di raggi passante per un punto nel mezzo 2⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾. Nel caso poi che la superficie limite sia sferica (diottero sferico), un fascio di raggi incidenti paralleli od uscenti da un punto nel primo mezzo non è, di solito⁽¹⁶⁾, trasformato per rifrazione in un fascio di raggi rispettivamente paralleli e concorrenti in un punto. Ciò significa che in realtà, in generale, non è possibile avere l'immagine di un punto oggetto per rifrazione su superfici sferiche; solo imponendo limitazioni al fascio di raggi che escono da un punto oggetto e che si rifrangono su una superficie sferica (limitazioni all'estensione dell'onda incidente) si può fare in modo che i raggi rifratti

⁽¹⁴⁾ Ciò significa che un'onda sferica incidente non è trasformata in onda sferica nel secondo mezzo; questo accade solo se il primo punto (nel mezzo 1) sta a distanza infinita dalla superficie di separazione (talché le onde incidenti possano essere considerate piane).

⁽¹⁵⁾ Il fatto che l'occhio veda distintamente oggetti posti sott'acqua nonostante che le onde rifratte provenienti da un punto oggetto non siano sferiche è dovuto al fatto che nell'occhio stesso entra solo una piccolissima parte di ciascuna onda rifratta e tale parte si differenzia molto poco da un'onda sferica; tutto va cioè come se ciascuna onda rifratta fosse sferica.

⁽¹⁶⁾ Un'onda incidente piana o sferica non produce di solito un'onda piana o sferica nel secondo mezzo. Si dimostra che esistono solo due punti (aplanatici) tali che un'onda sferica che ha origine nel primo (posto nel primo mezzo) è trasformata per rifrazione sulla superficie sferica di separazione in un'onda sferica con centro nel secondo punto. Tali punti nel caso che la superficie limite diventi piana vanno all'infinito (vedi nota 14).

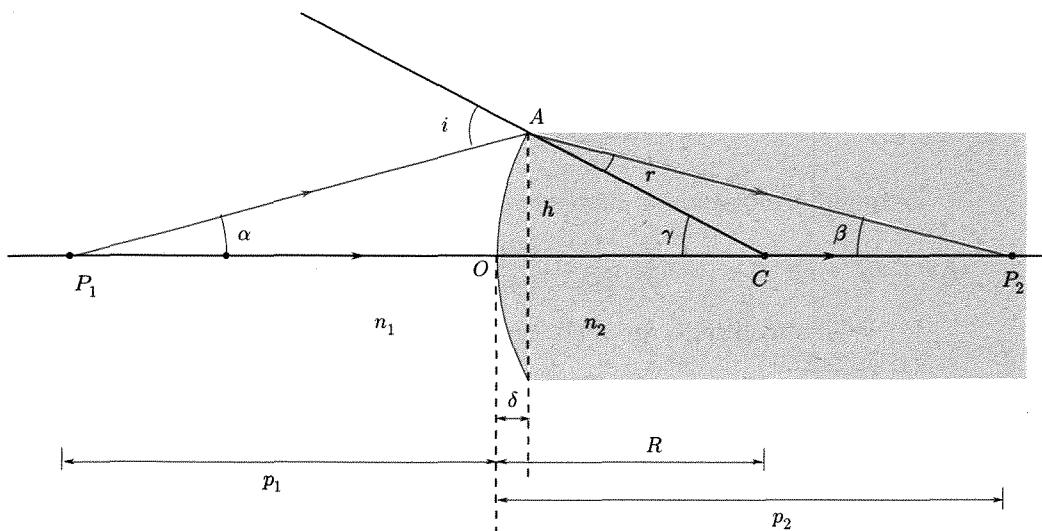


Fig. 10.13

passino molto vicino ad uno stesso punto che si può prendere come punto immagine. Preciseremo immediatamente queste limitazioni, necessarie per tenere entro certi limiti accettabili le *aberrazioni di sfericità*.

La figura 10.13 indica lo schema della situazione. Una superficie sferica separa due mezzi ad indici di rifrazione n_1 ed n_2 . Nella figura il centro di curvatura è nel mezzo a destra della superficie: secondo le convenzioni sui segni (par. 10.4) già specificate e che qui vengono mantenute, ciò corrisponde a R positivo (le deduzioni valgono naturalmente in generale e quindi anche se R fosse negativo). Si consideri una sorgente puntiforme P_1 nel primo mezzo e come *asse relativo* a P_1 ⁽¹⁷⁾ la retta per P_1 e per il centro di curvatura C . Il raggio $\overline{P_1O}$ incide normalmente sulla superficie di rifrazione e continua il suo percorso nel secondo mezzo nella stessa direzione. Si consideri un altro raggio, $\overline{P_1A}$; esso è rifratto in $\overline{AP_2}$. Sulla figura sono indicati i significati dei simboli per gli angoli α , i , r , β , γ , e per le distanze p_1 , p_2 , δ : essi sono analoghi a quelli considerati nella figura 10.5 per lo specchio sferico, tranne per gli angoli i ed r che qui rappresentano rispettivamente l'angolo di incidenza e di rifrazione.

Si osservi peraltro che nel caso presente la propagazione avviene nel primo mezzo (a sinistra) per il raggio incidente e nel secondo per quello rifratto⁽¹⁸⁾.

⁽¹⁷⁾ Per un diottro sferico si hanno infiniti assi, ciascuno relativo ad un particolare punto oggetto. In quel che segue, parlando di asse intenderemo di averne scelto uno (relativo ad un punto, per es. P_1) e di riferirci sempre ad esso. Naturalmente nelle realizzazioni pratiche la superficie sferica di separazione dei due mezzi, cioè la superficie del diottro, sarà realizzata in genere limitatamente ad una calotta sferica piuttosto piccola; è chiaro allora che conviene scegliere P_1 in modo che l'asse sia anche asse di simmetria della calotta. Spesso quindi si parla di *asse* del diottro a forma di calotta sferica, volendo indicare la retta centro-vertice della calotta stessa.

⁽¹⁸⁾ Nel caso dello specchio la propagazione avviene esclusivamente nel mezzo a sinistra della superficie di discontinuità.

Applicando il teorema dei seni ai triangoli P_1AC e P_2AC si ha

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{p_1 + R}{R} &= \frac{\sin(\pi - i)}{\sin \alpha} = \frac{\sin i}{\sin \alpha}, \\ \frac{p_2 - R}{R} &= \frac{\sin r}{\sin \beta}, \end{aligned}$$

e quindi utilizzando la espressione della legge della rifrazione (16),

$$(19) \quad \frac{p_1 + R}{p_2 - R} = \frac{\sin i}{\sin r} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{n_2 \sin \beta}{n_1 \sin \alpha}.$$

Gli angoli β , α , i , r sono legati fra loro, si ha infatti (angoli esterni di triangoli)

$$(20) \quad \begin{aligned} i &= \alpha + \gamma, \\ \gamma &= r + \beta, \end{aligned}$$

e quindi

$$(21) \quad \beta = i - r - \alpha.$$

Se si tengono presenti la (19) e la (21) si vede che ai raggi uscenti da P_1 con vari angoli α corrispondono diversi valori di p_2 , cioè varia per ciascuno di essi la posizione del punto P_2 intersezione del raggio rifratto con il raggio OC .

Supponiamo ora di limitare il fascio di raggi provenienti da P_1 che giunge sulla superficie sferica a valori di α così piccoli (condizione di piccola vergenza) che per gli angoli α e β la tangente ed il seno possano essere confusi. Il fascio è formato da raggi vicini all'asse e si sposta di poco da un fascio parallelo all'asse (raggi parassiali). La teoria che consegue a questa ipotesi va sotto il nome di teoria di Gauss del diottro sferico. Nella ipotesi posta, si può trascurare δ rispetto a p_1 e p_2 e quindi si ha

$$(22) \quad \begin{aligned} \sin \alpha &\simeq \tan \alpha = \frac{h}{p_1 + \delta} \simeq \frac{h}{p_1}, \\ \sin \beta &\simeq \tan \beta = \frac{h}{p_2 - \delta} \simeq \frac{h}{p_2}. \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$(23) \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Sostituendo nella (19) si ha:

$$(24) \quad \frac{p_1 + R}{p_2 - R} = \frac{n_2}{n_1} \frac{p_1}{p_2}.$$

Si noti che in tale relazione è scomparso α : cioè tutti i raggi uscenti da P_1 e che soddisfano le condizioni poste tagliano il raggio OC nello stesso punto P_2 (immagine di P_1). La (24) si può anche scrivere nella forma, più comunemente usata:

Equazione del diottro sferico

$$(25) \quad \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Le relazioni (23) e (25) sono generali e valgono anche nel caso di superficie del diottro concava (R negativo). Si ricordi che le distanze p_1

(oggetto) e p_2 (immagine) sono positive rispettivamente a sinistra e a destra del vertice O ⁽¹⁹⁾.

Nel caso che il diottro sia investito da un fascio di raggi paralleli all'asse (punto P_1 nel primo mezzo a distanza $+\infty$), l'immagine si trova in un punto F_2 , chiamato secondo punto focale, la cui distanza $p_2 = f_2$ indichiamo come seconda distanza focale. Risulta dalla (25)

$$(27) \quad f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R. \quad \text{Secondo fuoco}$$

Tale fuoco F_2 è reale (fig. 10.14a) se R è positivo (diottro convesso) e virtuale (fig. 10.14b) se R è negativo (diottro concavo) se $n_2 > n_1$ come è di solito. Analogamente, il fascio rifratto risulta formato da raggi paralleli all'asse (immagine all'infinito) quando i raggi nel primo mezzo (od i loro prolungamenti) escono da un punto F_1 , che viene chiamato primo punto focale⁽²⁰⁾. La prima distanza focale vale

$$(28) \quad f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R, \quad \text{Primo fuoco}$$

ed è positiva (fuoco reale, a sinistra del diottro) o negativa (fuoco virtuale, a destra del diottro) secondo che la superficie sferica è, nel verso di propagazione della luce (da sinistra a destra secondo le convenzioni) convessa o concava.

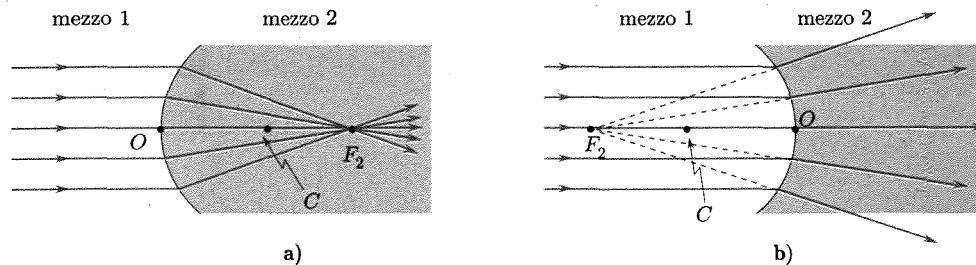


Fig. 10.14

Con l'ausilio delle (27) e (28), la (25) può scriversi:

$$(29) \quad \frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1. \quad \text{Equazione del diottro}$$

⁽¹⁹⁾ Si osservi che nel caso $R = \infty$ la superficie sferica si riduce a un piano e la (25) dà la relazione

$$(26) \quad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{n_2}{n_1},$$

che consente di determinare la posizione dell'immagine di un punto posto di fronte alla superficie piana di separazione dei due mezzi. L'immagine è sempre virtuale: ciò corrisponde al fatto che un fascio divergente non può essere trasformato in un fascio convergente per effetto della rifrazione su una superficie piana.

⁽²⁰⁾ In conseguenza della reversibilità del percorso dei raggi (par. 10.2), se si considera la propagazione in senso inverso a quello fin qui considerato, si vede che F_1 non è che l'immagine nel primo mezzo di un punto oggetto disposto nel secondo mezzo a distanza infinita nella direzione dell'asse.

Per il diottro si possono ripetere le stesse considerazioni relative alla immagine di oggetti estesi svolte per il caso degli specchi. Solo per oggetti aventi dimensioni trasversali relativamente piccole⁽²¹⁾, giacenti in un piano normale all'asse, si può ammettere, approssimativamente, che l'immagine sia piana e giaccia in un piano anche esso normale all'asse.

La posizione dell'immagine di un punto fuori dell'asse può determinarsi considerando due raggi rifratti. Anche qui conviene scegliere i raggi in maniera opportuna e precisamente due tra i seguenti (fig. 10.15):

1. il raggio per Q_1 parallelo all'asse, che è rifratto in un raggio passante per F_2 ;
2. il raggio passante per Q_1 e per il centro di curvatura C del diottro, che non è deviato;
3. il raggio che passa per Q_1 e per F_1 , che è rifratto parallelamente all'asse.

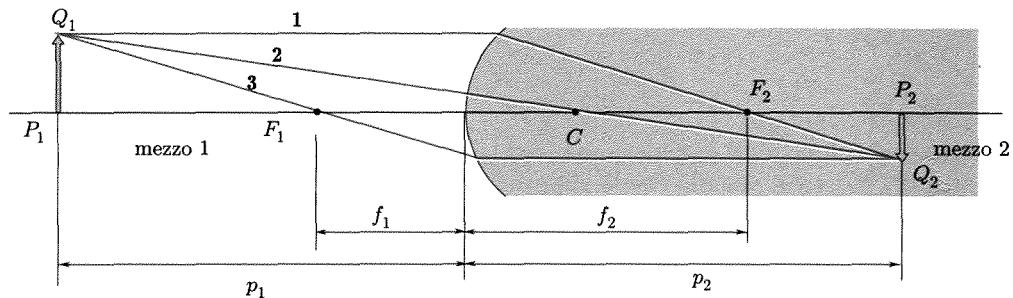


Fig. 10.15

Per quanto riguarda l'ingrandimento lineare (fig. 10.16a), si ha (essendo l'immagine capovolta):

$$(30) \quad -\frac{y_2}{y_1} = \frac{\overline{P_2C}}{\overline{P_1C}} = \frac{p_2 - R}{p_1 + R},$$

Cosicché, in accordo alla (19) si ha:

Ingrandimento lineare

(31)

$$m = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Questa relazione prende il nome di formula di Abbe⁽²²⁾. Si noti che nella sua deduzione non è stata usata la limitazione di considerare esclusivamente i raggi parassiali. In quest'ultimo caso la (31) si riduce [usando la (23)] alla relazione:

*Ingrandimento lineare
nell'approssimazione
parassiale*

(32)

$$m = -\frac{n_1}{n_2} \frac{p_2}{p_1}.$$

⁽²¹⁾ In modo che le distanze dei vari punti dell'oggetto dal diottro non si differenzino che per quantità trascurabili rispetto alle distanze stesse.

⁽²²⁾ Essa può anche scriversi (prendendo i valori assoluti):

$$n_1 y_1 \sin \alpha = n_2 y_2 \sin \beta.$$

Il prodotto dell'indice di rifrazione (n), della dimensione trasversale (y) e del seno della vergenza è dunque costante: tale costante prende il nome di *invariante di Abbe*.

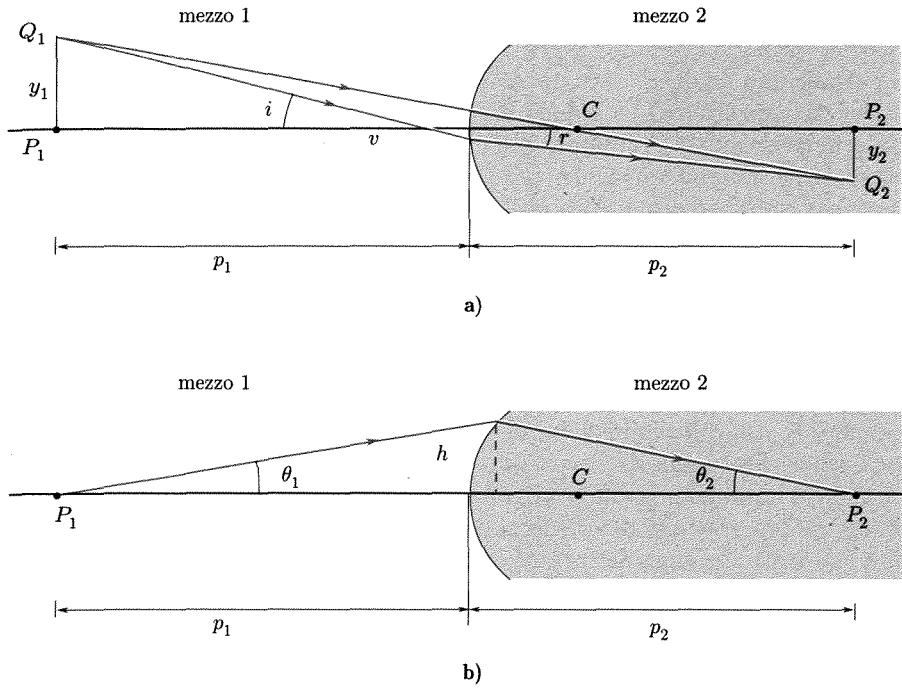


Fig. 10.16

L'ingrandimento lineare è indipendente da y e quindi oggetto ed immagine risultano simili.

Per l'ingrandimento angolare M , rapporto delle aperture angolari (vergenze) dei fasci che convergono nel punto immagine (θ_2) ed oggetto (θ_1) (fig. 10.16b), si ha

$$(33) \quad M = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{h/p_2}{h/p_1} = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{n_1}{n_2 m}.$$

Ingrandimento angolare

Vogliamo infine notare come il caso della riflessione su una superficie sferica (cioè dello specchio sferico trattato nel par. 10.3) possa rientrare come un caso particolare del diottro ora esaminato. La differenza fra la trattazione della riflessione e della rifrazione sta nel fatto che in un caso va usata la legge degli angoli valida per la riflessione e nell'altro quella valida per la rifrazione. Nello studio della riflessione si è soliti dare lo stesso segno all'angolo di incidenza (i) ed a quello di riflessione (che indichiamo qui con r). Se si adotta invece una convenzione coerente con quella usata per la rifrazione, la legge della riflessione andrebbe scritta $i = -r$ (e non $i = r$). Con questa convenzione risulta immediatamente che la legge della riflessione può essere considerata formalmente deducibile da quella della rifrazione se si pone $n_2 = -n_1$. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} n_1 \sin i &= -n_1 \sin r, \\ i &= -r. \end{aligned}$$

Ne segue che la relazione per la riflessione sulle superfici sferiche (specchio sferico) si debba poter dedurre da quella per il diottro ponendo $n_2 = -n_1$. Dalla (25) infatti si ha allora (ponendo $p_1 = p$; $p_2 = p'$)

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = -\frac{2}{R},$$

cioè la (8).

■ 10.7. PROPRIETÀ GENERALI DEI SISTEMI OTTICI CENTRATI

Passiamo a considerare un sistema ottico formato da una successione di mezzi trasparenti⁽²³⁾ aventi diversi indici di rifrazione e separati da superfici sferiche⁽²⁴⁾. Supporremo che i centri delle superfici sferiche giacciono tutti su una retta che prende il nome di asse del sistema ottico centrato; supporremo ancora che la propagazione sia limitata a raggi parassiali, molto prossimi ed all'incirca paralleli all'asse. In tali condizioni i raggi che entrano nel sistema provenienti da un punto sono trasformati in corrispondenza a ciascuna superficie sferica in un fascio di raggi ancora concorrenti (direttamente e coi loro prolungamenti) in un punto, sicché anche il fascio di raggi uscenti dal sistema passa per un unico punto: ciò significa che ad un punto oggetto il sistema fa corrispondere un punto immagine. La determinazione dell'immagine si può ottenere applicando la (29) ed effettuando la costruzione indicata al paragrafo precedente per ottenere l'immagine (reale o virtuale) fornita dal primo diottro; una tale immagine va considerata come oggetto per il secondo diottro e così via fino a trovare l'immagine fornita dall'ultimo diottro: questa è l'immagine fornita dall'intero sistema per il punto oggetto iniziale.

Una tale procedura è lunga e noiosa e può essere evitata facendo alcune osservazioni generali sul comportamento di un sistema ottico centrato che, come vedremo, consentono di realizzare semplici costruzioni grafiche per risolvere i problemi pratici.

Punti focali È facile stabilire l'esistenza e determinare la posizione di quattro punti (detti cardinali)⁽²⁵⁾ del sistema, i due fuochi e i due punti principali.

Si consideri (fig. 10.17) un raggio (1) parallelo all'asse che incida sul primo diottro. Dopo aver attraversato il sistema, esso è deviato in un raggio (1') che taglia l'asse nel secondo punto focale F_2 : tale fuoco è l'immagine (reale o virtuale) nell'ultimo mezzo ottico del punto all'infinito nella direzione dell'asse, nel primo mezzo ottico. Analogamente, il primo punto focale può essere definito come l'immagine (reale o virtuale) nel primo mezzo del punto all'infinito nella direzione dell'asse situato nell'ultimo mezzo⁽²⁶⁾. I piani perpendicolari all'asse per F_1 e F_2 si chiamano rispettivamente primo e secondo piano focale.

Punti principali Per definire i punti principali procediamo nella seguente maniera.

Si consideri (fig. 10.17) un qualsiasi raggio, 1, nel primo mezzo e parallelo all'asse; ad esso, come sappiamo, corrisponde un raggio emergente 1', che passa per il fuoco F_2 ; indichiamo con R_2 l'intersezione delle direzioni

⁽²³⁾ Cioè una successione di superfici rifrangenti: un sistema del genere si chiama *sistema diottrico*. Se si avesse a che fare con superfici riflettenti, si parlerebbe di *sistema cataottico*, e se le superfici fossero alcune rifrangenti, altre riflettenti si parlerebbe di *sistema catadiottico*. Naturalmente quel che diremo sui sistemi diottrici vale, con gli opportuni adattamenti, nel più generale caso di un *sistema catadiottico*.

⁽²⁴⁾ Alcune delle quali possono avere raggio di curvatura infinito, cioè possono essere piane.

⁽²⁵⁾ In realtà con il nome di punti cardinali si intendono anche altri due punti sull'asse del sistema chiamati *punti nodali*. Essi sono caratterizzati dalla circostanza che il raggio proveniente da un punto oggetto fuori asse passante per il primo punto nodale è trasformato, nello spazio immagine, in un raggio parallelo al primo che passa per il secondo punto nodale. La conoscenza delle posizioni dei punti nodali può semplificare a volte la soluzione di problemi pratici. Nella presente trattazione noi non considereremo in dettaglio questi punti nodali e baseremo le nostre deduzioni sui punti focali e principali.

⁽²⁶⁾ Se cioè si considera un fascio di raggi paralleli all'asse e precedente da destra a sinistra, tali raggi sarebbero deviati dal sistema ottico in modo da passare tutti per F_1 .

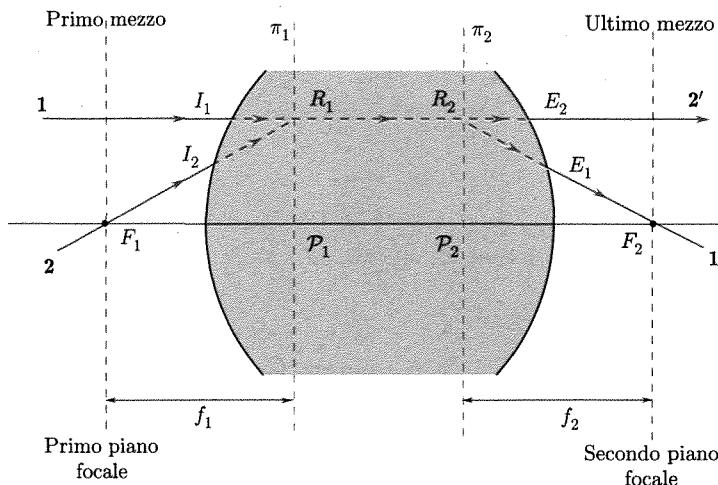


Fig. 10.17

dei due raggi: quale che sia il percorso effettivo dei raggi nel sistema, possiamo lecitamente sostituire ad esso l'equivalente percorso fittizio $I_1R_2E_1$, essendo I_1 il punto di incidenza di 1 ed E_1 il punto di emersione di $1'$ dal sistema. Consideriamo poi il raggio, $2'$, emergente dal sistema nel punto E_2 sul prolungamento del raggio $1'$, e quindi parallelamente all'asse: ad esso corrisponde un raggio, 2, passante per il fuoco F_1 . Indichiamo con R_1 l'intersezione delle direzioni dei due raggi 2 e $2'$: anche stavolta potremo assumere come percorso equivalente nel sistema la spezzata $I_2R_1E_2$. Or bene, il punto R_1 , in cui concorrono le direzioni dei raggi incidenti 1, 2, può essere assunto come punto oggetto⁽²⁷⁾ cui corrisponde il punto immagine R_2 ⁽²⁸⁾: da esso si dipartono le direzioni dei raggi emergenti $1', 2'$ corrispondenti a 1, 2. Indicando con P_1, P_2 l'intersezione con l'asse dei piani π_1 e π_2 normali all'asse medesimo e contenenti R_1 e R_2 rispettivamente, è, evidentemente, $P_1R_1 = P_2R_2$. Il ragionamento precedente vale per ogni coppia di punti corrispondenti (nel senso testé precisato) dei piani π_1 e π_2 ; tali piani, detti piani principali del sistema, godono dunque della proprietà che immaginando un oggetto disposto su uno di essi, l'immagine data dal sistema giace sull'altro ed è, rispetto all'oggetto, diritta e di identiche dimensioni (ingrandimento $m = +1$). I punti P_1 e P_2 , intersezione con l'asse dei piani principali, sono i due punti principali del sistema.

Nella figura 10.17 i punti principali cadono nell'interno del sistema e i fuochi sono esterni al segmento che ha per estremi i punti principali: è bene osservare che tale situazione è particolare, nel senso che le posizioni dei punti principali rispetto ai fuochi e rispetto alle superfici rifrangenti che limitano, da una parte e dall'altra, il sistema possono essere varie in relazione alla natura dei mezzi rifrangenti, alla curvatura e alla posizione reciproca delle superfici che li separano. A titolo di esempio, la figura 10.18 riporta la posizione dei piani principali per una serie di sistemi aventi la stessa distanza focale e formati da due diottri sferici a distanza non piccola fra loro, i quali separano due mezzi diversi (lente spessa).

⁽²⁷⁾ Cioè considerato come un punto dello spazio oggetto, anche se fisicamente esso stia nell'interno del sistema e non a sinistra della prima superficie diottica del sistema.

⁽²⁸⁾ Cioè considerato come un punto dello spazio immagine anche se fisicamente si trovi nell'interno del sistema e non a destra dell'ultimo diotto.

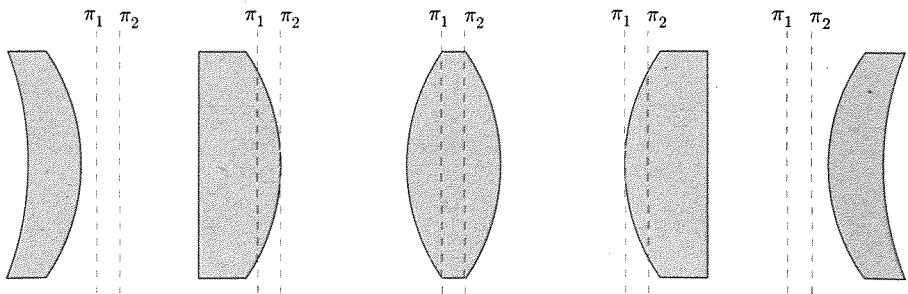


Fig. 10.18

È con riferimento ai piani principali che conviene misurare le distanze dei punti oggetto (P_1) ed immagine (P_2). In accordo alle convenzioni fatte, sempre immaginando che la propagazione avvenga da sinistra verso destra, le distanze per i punti oggetto (p_1) sono positive a sinistra del primo piano principale e quelle (p_2) per i punti immagine a destra del secondo piano principale. Le distanze del primo fuoco dal primo piano principale e del secondo fuoco dal secondo piano principale si indicano come, rispettivamente, prima (f_1) e seconda (f_2) distanza focale del sistema.

*Costruzione
dell'immagine*

La figura 10.19 mostra la costruzione da seguire per determinare l'immagine (Q_2) di un punto (Q_1) fuori asse fornita dal sistema, una volta note le posizioni dei punti principali e dei fuochi. Basta considerare i due raggi per Q_1 rispettivamente parallelo all'asse e passante per il primo fuoco: essi sono trasformati in un raggio per F_2 ed un raggio parallelo all'asse, rispettivamente. Si considerino le intersezioni (R_1, S_1) dei due raggi scelti con il primo piano principale (π_1): i coniugati di tali punti (R_2, S_2) si trovano sul secondo piano principale e su rette per R_1 e S_1 , parallele all'asse. Tali punti possono quindi essere facilmente determinati e per ciascuno di essi passa uno dei due raggi emergenti. La costruzione di questi ultimi è di conseguenza immediata, e così quella del punto immagine Q_2 , intersezione dei raggi in questione.

Ci proponiamo ora di stabilire alcune relazioni riguardanti proprietà generali dei sistemi centrati.

Dalla figura 10.19 si vede che

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{\overline{P_1 S_1}}{\overline{R_1 S_1}},$$

$$\frac{f_2}{p_2} = \frac{\overline{P_2 R_2}}{\overline{R_2 S_2}}.$$

Sommendo membro a membro e tenendo presente che

$$\overline{P_1 S_1} + \overline{P_2 R_2} = \overline{P_1 S_1} + \overline{P_1 R_1} = \overline{R_1 S_1} = \overline{R_2 S_2},$$

si ha:

Formula di Gauss

$$(34) \quad \frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1.$$

È questa una prima relazione tra le posizioni di punti coniugati per un sistema ottico centrato riferite ai punti principali: essa va sotto il nome di formula di Gauss. Se si preferisce riferire le posizioni dei punti coniugati

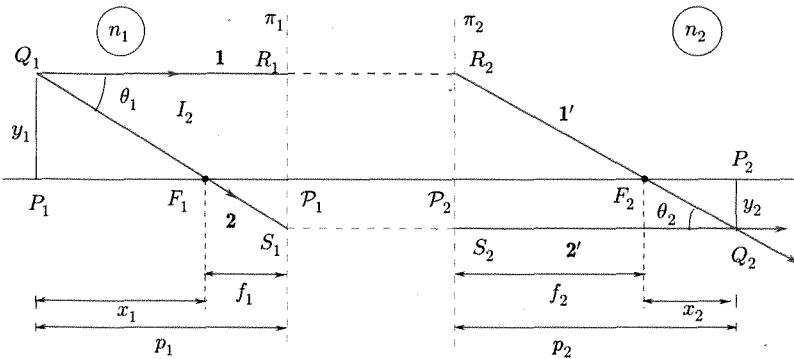


Fig. 10.19

ai fuochi, indicando con x_1, x_2 le ascisse che individuano tali posizioni, è (fig. 10.19):

$$p_1 = f_1 + x_1, \quad p_2 = f_2 + x_2,$$

e quindi la (34) diviene:

$$(35) \quad x_1 x_2 = f_1 f_2.$$

Formula di Newton

Questa espressione va sotto il nome di formula di Newton.

Da quanto detto sinora risulta che un sistema ottico, comunque complesso, può essere sostituito, ai fini della determinazione delle immagini, dalla rappresentazione grafica usata nella figura 10.19, in cui in definitiva come elementi caratteristici del sistema compaiono l'asse, i due fuochi e i due piani principali; poiché in questo schema si immagina che i raggi provenienti dall'oggetto incidano su uno dei piani principali e i raggi correnti nell'immagine emergano dall'altro: le cose vanno come se il primo piano limitasse il primo mezzo (spazio oggetti), di indice di rifrazione n_1 , e il secondo limitasse l'ultimo mezzo, di indice di rifrazione n_2 . Anzi, poiché tra un piano principale e l'altro si immagina che i raggi procedano parallelamente all'asse, si può spingere un poco oltre la schematizzazione e pensare che *l'insieme* dei due piani principali sia in definitiva assimilabile a una sorta di "superficie di separazione" tra i due mezzi di indice n_1 e n_2 . In questo ordine di idee conservano la loro validità le considerazioni svolte nel paragrafo precedente a proposito dell'ingrandimento delle immagini date da un diottro [formule (32) e (33)], salvo, beninteso il fatto che le distanze p_1 e p_2 , là valutate a partire dalla superficie del diottro, vanno ora valutate, come già più volte precisato, a partire dall'uno e dall'altro dei due piani principali. Potremo così scrivere, per l'ingrandimento lineare:

$$(36) \quad m = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{p_2}{p_1},$$

Ingrandimento lineare

essendo y_1 e y_2 dimensioni corrispondenti dell'oggetto e dell'immagine (fig. 10.19); e per l'ingrandimento angolare

$$(37) \quad M = \frac{\theta_2}{\theta_1} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{1}{m} = \frac{p_1}{p_2},$$

Ingrandimento angolare

essendo θ_1 e θ_2 le vergenze di fasci corrispondenti nello spazio oggetto e nello spazio immagine (v. ancora fig. 10.19).

Combinando la (34) e la (36) si perviene a un'importante relazione tra le distanze focali del sistema e gli indici di rifrazione dei due mezzi al di qua e al di là del sistema medesimo. Precisamente, eliminando p_1 tra le due formule anzidette si ha:

$$\frac{f_1}{p_2 - f_2} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{1}{m}.$$

Applichiamo tale relazione a un oggetto posto su un piano principale: sappiamo che l'immagine giace sull'altro piano principale ($p_2 = 0$) e l'ingrandimento m vale +1; si ottiene così

Relazione fra fuochi e indici di rifrazione

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

(38)

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Osserviamo subito che essendo n_1 e n_2 grandezze per loro natura positive, segue dalla (38) che f_1 e f_2 hanno sempre lo stesso segno, vale a dire che i due fuochi sono entrambi esterni o entrambi interni al segmento dell'asse compreso tra i punti principali.

Dalla (38) segue un'altra notevole circostanza. Se $n_1 = n_2$, necessariamente è $f_1 = f_2$; vale a dire, se il primo e l'ultimo mezzo sono identici, le due distanze focali coincidono. È superfluo osservare che questo è il caso che si dà nella maggior parte dei casi pratici. Indicando con f il comune valore delle due distanze focali, le formule dianzi date assumono in questo caso le più semplici forme

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} &= \frac{1}{f}, \\ m &= \frac{y_2}{y_1} = -\frac{p_2}{p_1}, \\ M &= \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la costruzione grafica delle immagini, è chiaro che in questo caso è sufficiente per essa la conoscenza della posizione di tre soli punti cardinali (i due punti principali e un fuoco, oppure i due fuochi e un punto principale).

■ 10.8. LENTI SFERICHE SOTTILI

Sistemi ottici centrati relativamente semplici e di grande importanza pratica sono le lenti. Si tratta, in generale, di sistemi formati da un mezzo trasparente (per es. vetro) limitato da due superfici (facce) una almeno delle quali sia curva (sferica, cilindrica ecc.); se le facce sono sferiche oppure una sferica e l'altra piana (raggio di curvatura infinitamente grande), si parla di lenti sferiche. Considerando appunto lenti sferiche, chiameremo asse della lente la retta che congiunge i centri di curvatura delle due facce (se una di esse è piana, l'asse è la normale a quest'ultima condotta per il centro di curvatura dell'altra). Nel caso che lo spessore della lente, valutato parallelamente all'asse, sia piccolo rispetto ai raggi di curvatura delle facce, si parla di lente sottile; altrimenti, si parla di lente spessa. Ci limiteremo a considerare il caso di lenti sferiche sottili, rinviano per le lenti non sferiche e non sottili a quanto detto nel paragrafo precedente per i sistemi ottici in generale.

Per il caso delle lenti sottili è facile trovare la relazione che lega le posizioni dei punti coniugati e l'espressione delle distanze focali. In figura 10.20 è considerato lo schema di una lente di tale tipo. I raggi di curvatura della prima e della seconda superficie (incontrate nel verso di propagazione della luce da sinistra a destra) siano R_1 ed R_2 : tali raggi vengono assunti positivi o negativi secondo che la superficie è convessa o concava. Essendo la lente sottile, le distanze dell'oggetto e dell'immagine possono essere valutate a partire dal piano medio normale all'asse, per entrambi i diottri che saranno considerati. Con tale piano si può ritenere che coincidano i due piani principali del sistema, i due punti principali venendo a coincidere nel punto, detto centro della lente, intersezione del piano in questione con l'asse; il centro gode dell'importante proprietà che un raggio passante per esso non viene deviato⁽²⁹⁾.

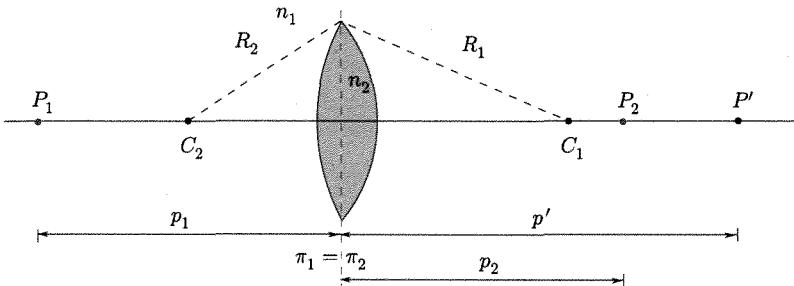


Fig. 10.20

Si consideri ora un punto oggetto sull'asse della lente ed a sinistra della lente, P_1 . Si può facilmente trovare l'immagine, P' , determinata dal primo diotro⁽³⁰⁾. Dalla (25)

$$(40) \quad \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}.$$

Tale immagine può essere considerata come oggetto⁽³¹⁾ per il secondo diotro; in tal caso la distanza dell'oggetto dal diotro è $-p'$. L'immagine fornita dal secondo diotro, che è poi l'immagine fornita dalla lente, si trova ad una distanza p_2 data dalla relazione

$$(41) \quad -\frac{n_2}{p'} + \frac{n_1}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}.$$

Dalle (40) e (41) si ha:

$$(42) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Ponendo rispettivamente p_1 o p_2 pari a ∞ si trova per le distanze focali

$$(43) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

Fuochi della lente sottile

⁽²⁹⁾ Ciò in quanto nel centro vengono a coincidere anche i due punti nodali.

⁽³⁰⁾ Immaginando naturalmente che tutto lo spazio a destra del primo diotro sia occupato dal mezzo di indice n_2 .

⁽³¹⁾ Un tale oggetto è virtuale se l'immagine fornita dal primo diotro è reale e viceversa.

e quindi (formula delle lenti sottili di piccola apertura):

Equazione della lente sottile

(44)

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}.$$

Si ritrova, in accordo a quanto detto per i sistemi, che essendo la lente immersa in un unico mezzo $f_1 = f_2$ e la (44) si può ricavare dalla (34). La quantità $1/f$ si chiama potere diottico (o convergenza) e se f è espresso in metri, tale potere risulta espresso in diottrie.

L'ingrandimento lineare prodotto da una lente può essere trovato con la stessa procedura usata nel determinare l'immagine; esso è pari al prodotto degli ingrandimenti dovuti alla formazione di immagini da parte di ciascun diottro. L'ingrandimento prodotto in seguito alla rifrazione al primo diottro vale, in accordo con la (32):

L'ingrandimento lineare della lente sottile è
 $m = -\frac{p_2}{p_1}$

$$m_1 = -\frac{n_1}{n_2} \frac{p'}{p_1},$$

essendo p' la distanza dell'immagine prodotta dal primo diottro. Per il secondo diottro $p_1 = -p'$, e quindi è

$$m_2 = -\frac{n_2}{n_1} \frac{p_2}{(-p')};$$

risulta perciò

$$(45) \quad m = m_1 m_2 = -\frac{p_2}{p_1}.$$

La costruzione dell'immagine di un oggetto fornita da una lente si effettua con le norme già viste: un oggetto in un piano normale all'asse ha una immagine in un altro piano anche esso normale all'asse. Basta quindi determinare le immagini di pochi punti fuori asse dell'oggetto: per ciò basta considerare alcuni raggi che partono da ciascun punto oggetto considerato per i quali è facile determinare l'effetto della lente; l'intersezione dei raggi deviati dalla lente fornisce il punto immagine cercato. Si considerano di solito i seguenti raggi (fig. 10.21):

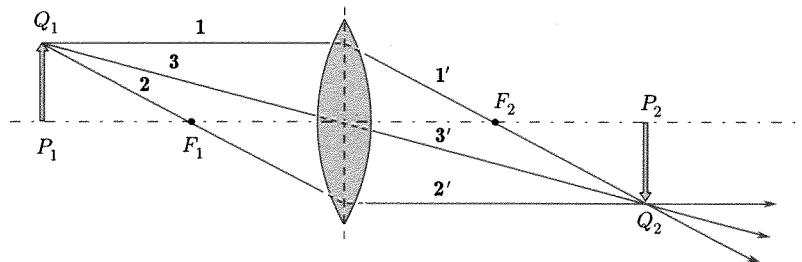
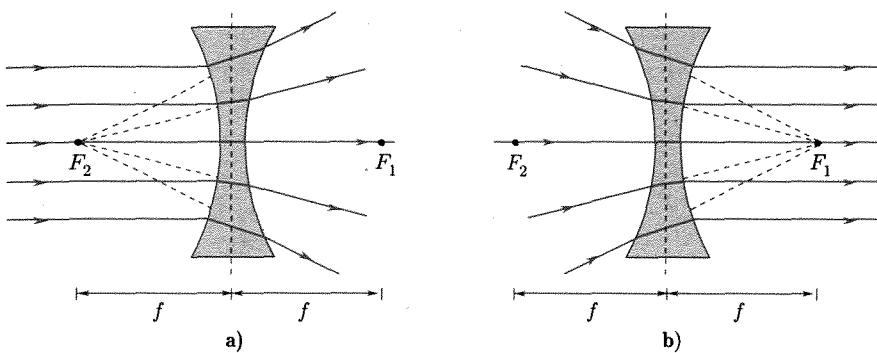


Fig. 10.21

1. quello parallelo all'asse, che è deviato in modo da passare per il secondo fuoco;
2. quello per il primo fuoco, che emerge parallelo all'asse;
3. quello per il centro della lente, che non è deviato.

Lenti convergenti e divergenti

Le lenti si dicono convergenti o divergenti secondo che f è positivo o negativo.



Come mostra la (43), il segno di f dipende sia dal valore relativo degli indici di rifrazione del materiale di cui è fatta la lente (n_2) e del mezzo in cui la lente è immersa (n_1), sia dal valore relativo dei raggi di curvatura delle facce (R_1, R_2). Nel caso, normale, in cui n_2 è maggiore di n_1 (per es., ordinarie lenti di vetro in aria), si deduce che una lente sottile è convergente oppure divergente a seconda che essa sia più spessa al centro oppure più spessa ai bordi; il contrario accade nel caso, invero non normale, che il materiale della lente sia meno rifrangente del mezzo circostante. Nel seguito, e specialmente nelle figure, supporremo sempre di trovarci nel caso normale: così le figure 10.21 e 10.22 mostrano le posizioni dei fuochi di una lente convergente e di una divergente, mentre la figura 10.23 mostra le forme tipiche di lenti convergenti e divergenti.

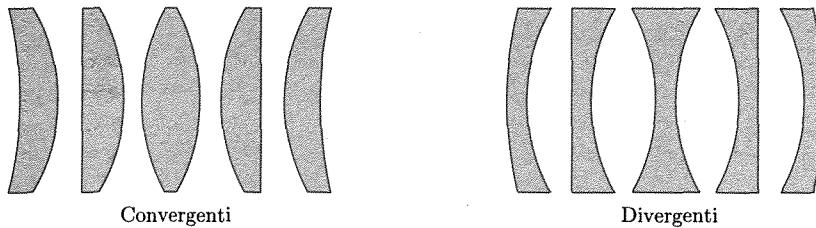


Fig. 10.23

Dalla (44) e dalla (45) si deduce che una lente divergente dà sempre immagini virtuali, diritte, impiccolite (uguali all'oggetto nel caso limite di un oggetto a contatto con la lente) (fig. 10.24).

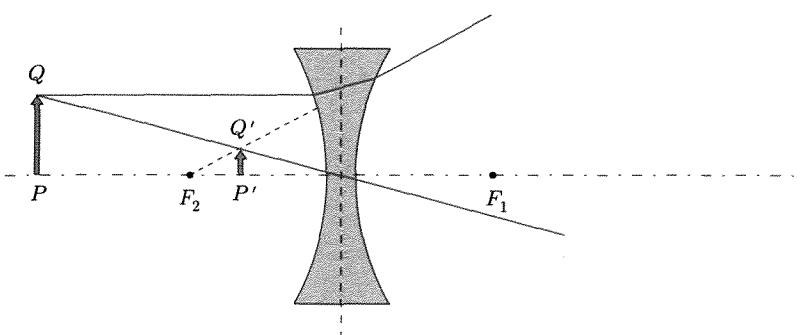


Fig. 10.24

Una lente convergente invece può fornire immagini reali o virtuali secondo la posizione dell'oggetto. Se l'oggetto è a sinistra di F_1 ($p_1 > f$) l'immagine è reale e capovolta (fig. 10.25 a, b, c); le sue dimensioni crescono man mano che il punto si avvicina ad F_1 . Per $p_1 = 2f$ (fig. 10.25b) l'ingrandimento è unitario e $p_2 = p_1$. Per $p_1 = f$, l'immagine va all'infinito nella direzione determinata dal punto oggetto e dal centro della lente

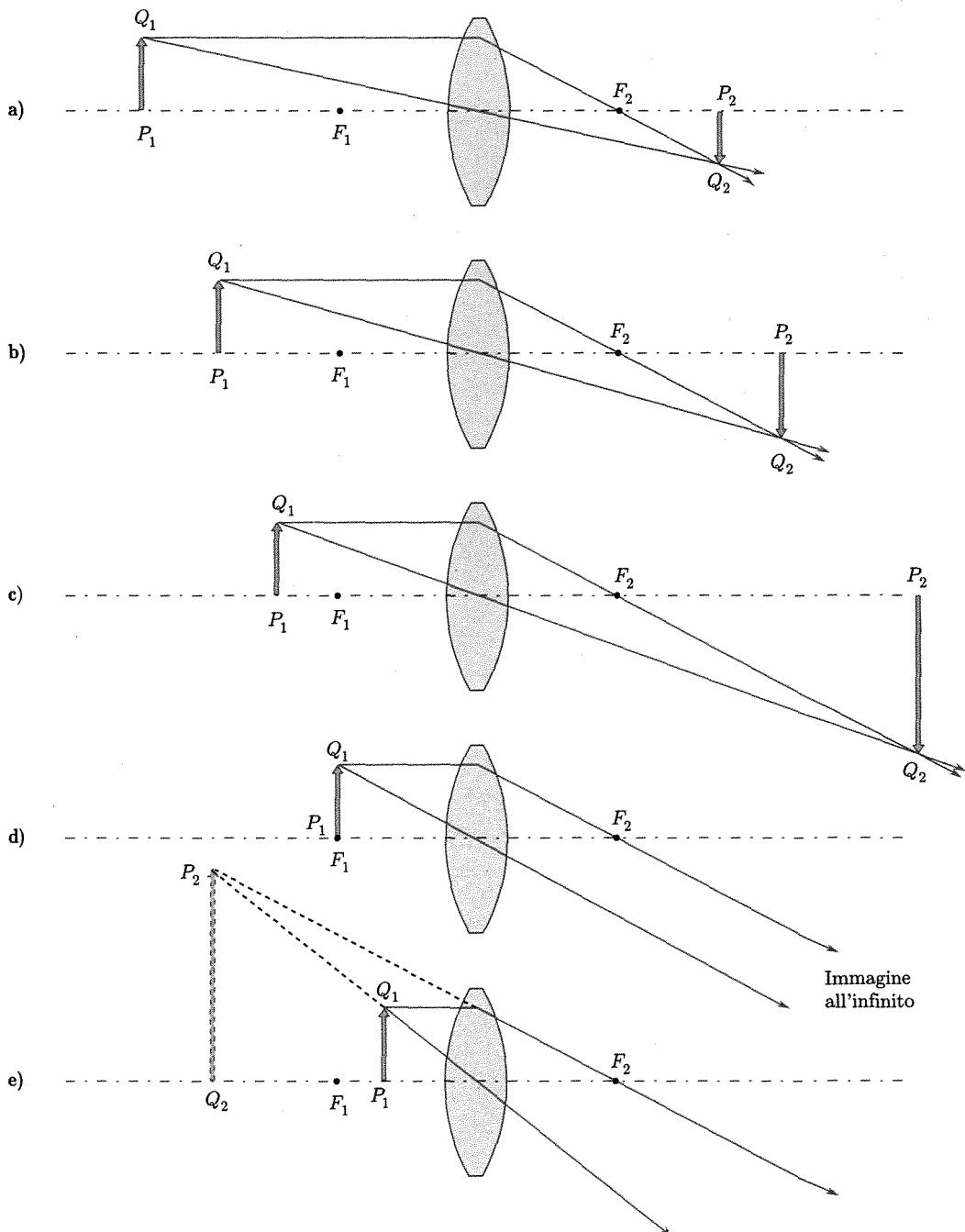


Fig. 10.25

(fig. 10.25d). Per p_1 positivo e minore di f (fig. 10.25e) l'immagine è virtuale, diritta e ingrandita (uguale però all'oggetto nel caso limite che questo sia a contatto della lente). Costruzioni analoghe si possono fare per p_1 negativo (oggetto e immagine della figura 10.25 si scambiano di ruolo).

Nel caso di un sistema formato da due lenti sottili a contatto, potendosi trascurare lo spessore di tutto il complesso si può scrivere approssimativamente per le due lenti

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{-p'} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f_2}$$

essendo p' la distanza dell'immagine fornita dalla prima lente dal piano mediano del sistema⁽³²⁾ normale all'asse.

Per il sistema si ha

$$(46) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}.$$

Ciò significa che il potere diottrico $1/f$ è pari alla somma dei due poteri diottrici (fig. 10.26).

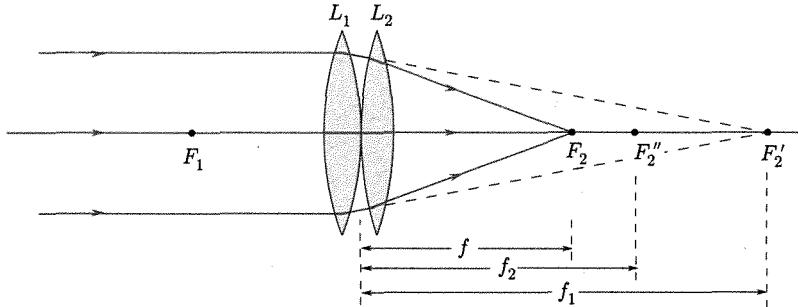


Fig. 10.26

Nel caso generale della composizione di due sistemi diottrici coassiali, al quale tutti gli altri si riducono, si ottengono le relazioni qui di seguito riportate. I parametri caratteristici dei due sistemi componenti sono indicati in figura 10.27, ove

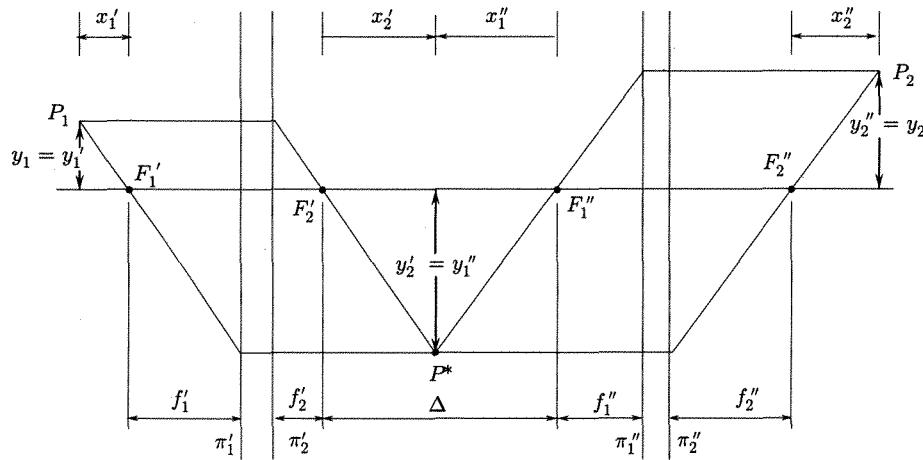


Fig. 10.27

⁽³²⁾ Con cui si può immaginare vengano a coincidere i due piani principali.

sono anche costruite, per un punto oggetto P_1 , le immagini fornite dal primo sistema componente (P^*) e dal sistema composto, (P_2). Siano f'_1 ed f'_2 le distanze focali del primo sistema, f''_1 e f''_2 quelle del secondo sistema; sia Δ la distanza di F''_1 da F'_2 contata positivamente se il primo fuoco del secondo sistema (F''_1) è a destra del secondo fuoco del primo sistema. Si trova per la distanza del primo piano principale (π_1) del sistema composto da F'_1 (con le normali convenzioni sui segni)

$$(47) \quad x_1 = f'_1 \frac{f''_1 + f'_2}{\Delta}$$

ed analogamente per la distanza del secondo piano principale da F''_2

$$(48) \quad x_2 = f''_2 \frac{f''_1 + f'_2}{\Delta}.$$

Le posizioni dei fuochi rispetto a π_1 e π_2 sono date da

$$(49) \quad \begin{aligned} f_1 &= -\frac{f_1 f'_1}{\Delta} \\ f_2 &= -\frac{f'_2 f''_2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Le precedenti formule si applicano immediatamente al caso di due lenti sottili a distanza $D = (f_1 + \Delta + f_2)$ ⁽³³⁾ e divengono

$$(50) \quad x_1 = f_1 \frac{f_1 + f_2}{D - f_1 - f_2}$$

$$(51) \quad x_2 = f_2 \frac{f_1 + f_2}{D - f_1 - f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2}.$$

10.9. ABERRAZIONI DELLE LENTI

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente sono approssimate per varie ragioni. Il comportamento reale si differenzia da quello descritto in base al quale ad un punto in un oggetto piano corrisponde un punto in una immagine piana: in queste deviazioni dal comportamento schematizzato consistono le aberrazioni⁽³⁴⁾. Un esame dettagliato di tali aberrazioni esula dagli scopi del presente testo e ci limiteremo ad indicare i nomi delle principali aberrazioni.

L'aberrazione cromatica è dovuta al fatto che la posizione dell'immagine fornita da una lente⁽³⁵⁾ dipende dalla lunghezza d'onda della luce usata a causa del fatto che l'indice di rifrazione dei materiali con cui tali dispositivi sono realizzati dipende da λ (fig. 10.28): ciò porta di conseguenza nel caso di luce policromatica che immagini di un oggetto piano (una per ciascuna λ) si formino su piani paralleli diversi e che su un piano non si possa ottenere altro che una immagine leggermente sfuocata e con gli orli colorati. Si cerca di ridurre l'effetto globale di tale aberrazione usando

⁽³³⁾ In tal caso $f_1 = f'_1 = f'_2$; $f_2 = f''_1 = f''_2$ essendo le lenti immerse in aria.

⁽³⁴⁾ Si badi bene che come tali intendiamo imperfezioni delle immagini dovute a proprietà ottiche intrinseche di lenti *perfette*: prescindiamo cioè da imperfezioni dovute a difetti delle lenti, quale per es. irregolarità della superficie oppure inomogeneità di composizione o di struttura del materiale di cui le lenti son fatte.

⁽³⁵⁾ Questa circostanza non si verifica nel caso degli specchi.

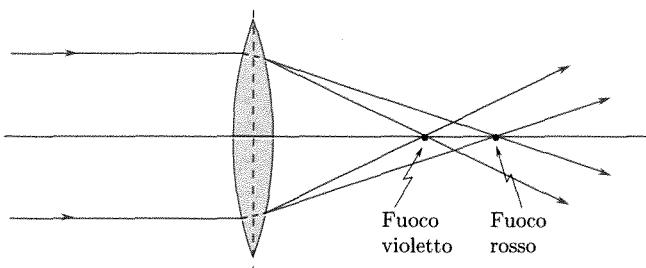


Fig. 10.28

al posto di semplici lenti, complessi di lenti a contatto caratterizzate da aberrazioni cromatiche che si compensino.

L'aberrazione sferica, simile a quella vista per gli specchi, è dovuta al fatto che la trattazione di Gauss è una approssimazione e che in realtà i raggi uscenti da un punto oggetto sull'asse con diverse inclinazioni sono trasformati dalla lente in raggi che incontrano l'asse in punti diversi. Questa aberrazione può essere ridotta limitando mediante diaframmi la inclinazione dei raggi che, provenienti dall'oggetto, possono passare attraverso la lente, e ricorrendo a sistemi di lenti, al posto della singola lente, in modo che venga ridotta la deviazione che i raggi subiscono a ciascuna superficie sferica di discontinuità, pur ottenendosi la stessa deviazione totale necessaria per la formazione dell'immagine nella posizione desiderata.

Altre aberrazioni legate alle approssimazioni poste nella teoria e spesso non valide nei casi concreti si presentano nella formazione di immagini di punti oggetto fuori asse (coma, astigmatismo, distorsione).

Aberrazione sferica

10.10. LUMINANZA DELL'OGGETTO E DELL'IMMAGINE

Lo scopo dei sistemi ottici è quello di fornire degli oggetti di interesse immagini in posizione e condizioni opportune. Prima di passare a considerarne alcuni dei più caratteristici vogliamo introdurre alcune nozioni relative ai flussi di energia che vanno dai punti oggetto a quelli immagine.

Va innanzitutto osservato che le valutazioni di tipo energetico relative alla luce possono essere fatte per mezzo delle normali grandezze fisiche (grandezze radiometriche) o mediante grandezze la cui definizione tiene conto delle caratteristiche fisiologiche dell'occhio. Queste ultime grandezze si chiamano fotometriche. Una trattazione esauriente delle grandezze radiometriche e fotometriche può essere trovata in trattazioni più ampie.

Si supponga di avere una disposizione (fig. 10.29) nella quale la luce che entra nel sistema ottico sia quella proveniente da una sorgente costituita da un piccolo elemento piano di area ΔS_1 intorno al punto T_1 e normale all'asse del sistema. Il fascio di luce uscente da ciascun punto della sorgente che ha interesse per la formazione dell'immagine è quello irradiato in un angolo Ω_1 , determinato dalla posizione di T_1 e da quello fra diaframmi e contorni di lenti del sistema, che pone le condizioni più restrittive alle dimensioni del fascio stesso⁽³⁶⁾. La potenza raggiante, o

*Grandezze
radiometriche
e fotometriche*

⁽³⁶⁾ Il diaframma effettivo, od un diaframma equivalente immaginato posto avanti al sistema per fissare Ω_1 , si chiama *diaframma di apertura* o *di ingresso*.

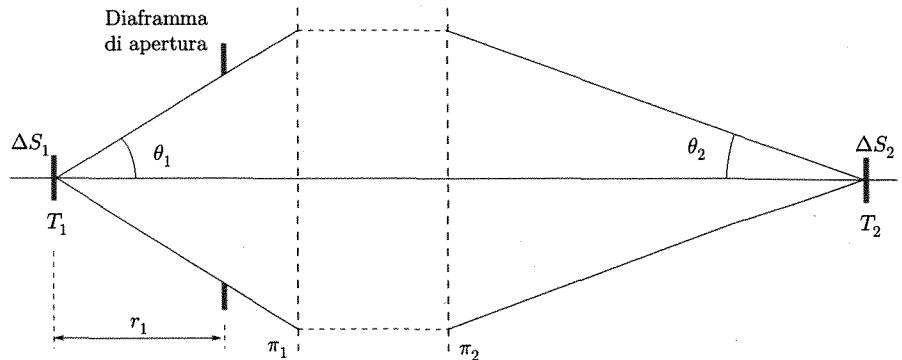


Fig. 10.29

flusso, emessa dalla sorgente, che entra nel sistema e va verso l'immagine, valutata in grandezze fisiche (radiometriche) può scriversi

Radianza

$$(52) \quad \Delta P = N \Delta S_1 \Omega_1 \quad (\text{watt})$$

essendo N una quantità fisica caratteristica della sorgente chiamata radianza (dimensioni MT^{-3}); essa va misurata in watt/steradiante · m².

La valutazione della stessa energia mediante grandezze fotometriche è fatta ponendo per il flusso luminoso

$$(53) \quad \Delta P'_1 = \phi_1 = B_1 \Delta S_1 \Omega_1.$$

Luminanza

Tale flusso si misura nell'unità fotometrica lumen⁽³⁷⁾.

La grandezza B caratteristica della sorgente prende il nome di luminanza⁽³⁸⁾.

Supponendo che sia piccola la semiapertura angolare del fascio che entra nel sistema, θ_1 , si ha approssimativamente per Ω_1

$$(54) \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{r_1^2} (r_1 \sin \theta_1)^2 = \pi \sin^2 \theta_1.$$

Si ha quindi

$$(55) \quad \phi_1 = \pi B_1 \Delta S_1 \sin^2 \theta_1.$$

Analogamente per il flusso che converge nell'immagine si può scrivere

$$(56) \quad \phi_2 = \pi B_2 \Delta S_2 \sin^2 \theta_2$$

ove B_2 è la luminanza dell'immagine.

L'energia luminosa nell'attraversare il sistema resta immutata in assenza di perdite; altrimenti decresce. Si può quindi scrivere

$$(57) \quad \phi_1 \geq \phi_2$$

$$(58) \quad B_1 \sin^2 \theta_1 \Delta S_1 \geq B_2 \sin^2 \theta_2 \Delta S_2.$$

⁽³⁷⁾ Per le grandezze fotometriche il *campione* è stato scelto per la grandezza *intensità luminosa* in una direzione $J' = \Delta P'/\Omega$ (flusso nell'angolo solido unitario intorno alla direzione fissata). Il campione è la *candela* definita come l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hertz e che ha una intensità di radiazione in quella direzione di $1/683$ watt per steradiante. Il *lumen* è il flusso luminoso emesso nell'angolo solido unitario da una sorgente puntiforme avente intensità luminosa uniforme di una candela.

⁽³⁸⁾ Tale grandezza era indicata con il nome di *splendore*. Si misura in candela/m².

Siccome il rapporto delle superfici dell'immagine e dell'oggetto può esprimersi per mezzo dell'ingrandimento lineare (m) e di quello angolare (M) prodotto dal sistema [eq. (36) e (37)] si ha

$$(59) \quad \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = m^2 = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}.$$

Nel caso di piccoli angoli θ_1 e θ_2 (per i quali vale la trattazione), si giunge alla relazione:

$$(60) \quad \frac{B_1}{B_2} \geq \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2.$$

Supponendo che non vi siano perdite nel sistema e che lo stesso mezzo sia all'ingresso ed all'uscita dal sistema ($n_1 = n_2$), si trova che la luminanza (splendore) dell'immagine è pari a quella dell'oggetto.

■ 10.11. DISPOSITIVI OTTICI PER LA FORMAZIONE DI IMMAGINI

Nel presente paragrafo vogliamo descrivere brevemente alcuni dei principali dispositivi ottici impiegati per formare immagini nelle posizioni più opportune per l'osservazione, per la analisi o la registrazione. Lo studio di questi dispositivi costituisce il campo principale di applicazione dell'ottica geometrica.

Premetteremo che di solito si dà il nome di obiettivo ad una lente o ad un sistema ottico che di un oggetto fornisce una immagine reale da poter essere osservata, registrata od ulteriormente trattata; prende il nome di oculare un sistema di lenti che fornisce di un oggetto una immagine in posizione tale da essere comodamente osservata dall'occhio.

a. Occhio

La figura 10.30 mostra una sezione schematica dell'occhio. L'occhio è protetto da una membrana dura ed opaca di forma approssimativamente sferica, la quale diviene trasparente sulla parte anteriore (cornea) per consentire il passaggio della luce. La curvatura in corrispondenza alla cornea è un po' più grande di quella del resto del globo. Al di là della cornea v'è un diaframma, l'iride, che costituisce il diaframma di apertura dell'occhio. Il diametro del diaframma può essere variato fra 1,5 e 5 mm secondo il flusso luminoso totale che investe l'occhio. Subito dopo l'iride v'è una lente, il cristallino, formato da sostanza gelatinosa avente un indice di rifrazione

Occhio

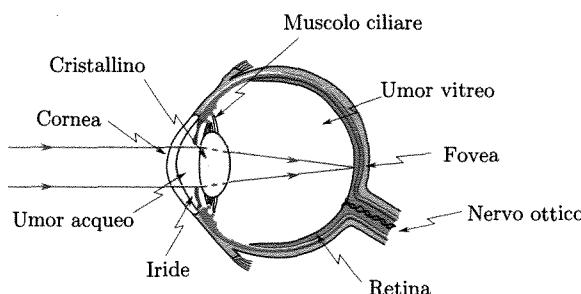


Fig. 10.30

che cresce dalla periferia verso il centro (³⁹); l'indice di rifrazione medio è 1,44 ed è maggiore di quello dell'acqua ($\approx 1,34$). La curvatura del cristallino viene variata dai muscoli ciliari (*accomodamento del cristallino*). Lo spazio fra cornea e cristallino è riempito di un liquido trasparente (umore acqueo) mentre al di là del cristallino si trova una sostanza gelatinosa (umor vitreo); entrambi questi liquidi hanno un indice di rifrazione 1,34, pari all'incirca a quello dell'acqua. Sul fondo dell'occhio si trova la retina, una pellicola di cellule sensibili alla luce ed in comunicazione con le fibre del nervo ottico, che trasmette le sensazioni al cervello. La retina contiene due tipi principali di cellule sensibili, i bastoncini ed i coni.

I coni sono responsabili della visione dei colori, essi sono particolarmente concentrati nella parte centrale della retina (fovea): questa regione (diametro 2 mm) è quella che consente una visione più dettagliata rispetto ad altre zone della retina; quando si guarda ad un oggetto gli occhi ruotano automaticamente in modo che questa zona della retina sia interessata alla visione. I bastoncini invece predominano nelle regioni della retina più esterne; non sono molto selettivi per il colore, ma sono quelli che più rispondono alla eccitazione prodotta da sorgenti di piccola intensità (⁴⁰).

L'occhio è un sistema ottico che ha il compito di formare sulla retina l'immagine degli oggetti osservati; la rifrazione avviene essenzialmente alla superficie di ingresso (cornea) ed in corrispondenza al cristallino. È appunto il processo di accomodamento del cristallino quello che consente di avere sulla retina immagini di oggetti di volta in volta a distanza diversa. La posizione di un oggetto alla più piccola distanza alla quale si ha ancora visione distinta si chiama punto vicino della visione distinta dell'occhio. Tale posizione dipende dalle caratteristiche di elasticità del cristallino e dalla capacità di contrazione dei muscoli ciliari; la sua distanza dall'occhio varia con l'età da circa 7 cm a 10 anni, e circa 25 per gli adulti, a circa 200 cm a 60 anni. In questo progressivo allontanamento del punto vicino consiste la presbiopia.

Il sistema ottico costituito dall'occhio non è privo di aberrazioni (cromatica, di sfericità ecc.); nell'occhio normale tuttavia l'entità di tali aberrazioni è tale che esse non hanno alcun effetto pratico (⁴¹) giacché le aberrazioni di sfericità e cromatica non sono tali da allargare l'immagine di un punto tanto che la macchia luminosa sulla retina interessa più di un cono; per quanto riguarda le altre aberrazioni esse avrebbero importanza per raggi molto fuori asse, ma l'occhio automaticamente si aggiusta per avere l'immagine degli oggetti che interessano nella zona centrale.

(³⁹) Una lente siffatta ha aberrazioni di sfericità inferiori a quelle di una lente omogenea.

(⁴⁰) La sensazione di visione (non del colore) richiede una illuminazione minima della retina. La soglia per l'occhio *normale* (per il significato di normale si veda vol. I, cap. 10, par. 10.10) se si usa luce monocromatica nella regione di maggiore efficienza luminosa ($\sim 5.100 \text{ \AA}$) si ha per un flusso di potenza per area unitaria di $6,2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$; ad esso corrisponde una potenza di $28 \cdot 10^{-17} \text{ W}$ ricevuti sulla superficie ($\sim 45 \text{ mm}^2$) della pupilla dilatata; in termini di quanti di radiazione ciò equivale all'arrivo di circa 750 quanti al secondo. La più piccola quantità di energia che sotto forma di impulso (flash) è in condizioni di produrre la sensazione di luce è stata trovata sperimentalmente pari a 50-100 quanti per radiazione di $\lambda = 5.100 \text{ \AA}$.

(⁴¹) Ciò porta di conseguenza che non si ha un miglioramento della visione, per un occhio normale, usando dispositivi che cerchino di ridurre le aberrazioni.

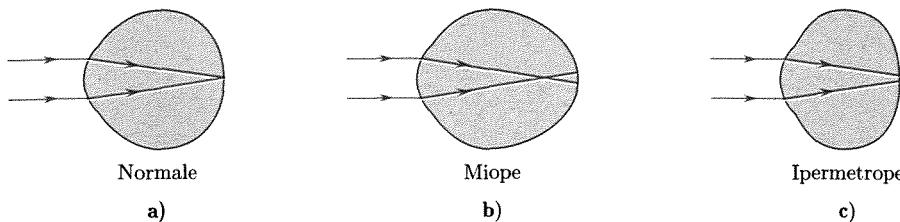


Fig. 10.31

Spesso invece si hanno difetti dell'occhio. I più comuni sono:

1. miopia: nell'occhio normale quando il cristallino è in posizione rilassata si ha che un fascio di raggi paralleli è focalizzato sulla retina (fig. 10.31a); nel caso di miopia il fuoco in condizioni rilassate si trova avanti alla retina (fig. 10.31b): un tale occhio può vedere chiaramente solo oggetti vicini. Tale difetto può essere corretto ponendo avanti all'occhio una lente divergente (fig. 10.32).
 2. ipermetropia: il fuoco del sistema, in condizioni rilassate cade, oltre la retina (fig. 10.31c). Per correggere questo difetto e fare formare sulla retina l'immagine di un oggetto a distanza finita dall'occhio occorre usare una lente convergente (fig. 10.33).
 3. astigmatismo: questo difetto è generato da una mancanza di simmetria nelle superfici rifrangenti dell'occhio (di solito la cornea) in maniera che anche un fascio di raggi parallelo che entra nell'occhio diretto verso la fovea non è trasformato in un fascio che passa per un punto (stigmatico). L'astigmatismo rende per esempio impossibile focalizzare contemporaneamente sulla retina linee verticali ed orizzontali presenti in un oggetto. Esso si corregge con lenti che hanno curvature diverse, e quindi forniscono ingrandimenti diversi, in due direzioni ortogonali fra loro (lenti cilindriche, toroidali: fig. 10.34).

Un altro elemento va considerato per caratterizzare l'occhio; esso è il limite nella capacità a distinguere, come separati, due punti oggetto a piccola distanza fra loro. Da tale proprietà dipende la chiarezza nel dettaglio delle immagini formate. Questa proprietà è l'acuità visiva e corrisponde al potere risolutivo del sistema ottico occhio. Ritneremo a considerare questo potere risolutivo per tutti i sistemi ottici; diremo qui solo che nell'occhio normale l'acuità visiva corrisponde ad una separazione angolare di circa un minuto d'arco⁽⁴²⁾ e ciò corrisponde ad una separazione di circa 4 micron sulla retina nelle condizioni medie del cristallino ($f \approx 15\text{mm}$).

b. Macchina fotografica

La macchina fotografica è uno strumento ottico che ha uno schema (fig. 10.35) molto simile a quello dell'occhio. Un obiettivo è disposto per formare l'immagine reale di un oggetto sul piano ove è disposta la pellicola. La figura mostra la posizione del diaframma di campo e di quello di apertura; quest'ultimo è in genere realizzato in modo che il suo diametro possa essere variato. Vi è inoltre un otturatore (non indicato in figura).

I difetti dell'occhio

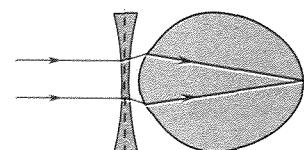


Fig. 10.32

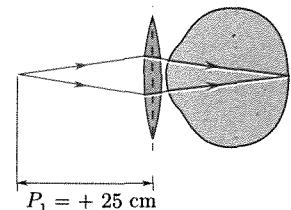
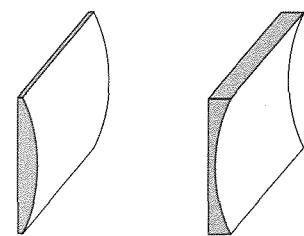


Fig. 10.33



Lenti cilindriche

Fig. 10.34

Macchina fotografica

(⁴²) 1 radiante = 3.438 minuti d'arco.

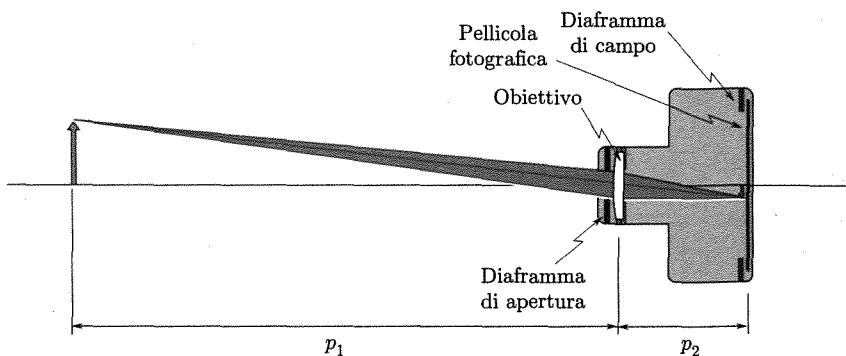


Fig. 10.35

che ha il compito di far entrare luce nell'apparecchio solo per il tempo necessario ad impressionare la pellicola. Nella figura l'obiettivo è mostrato come una semplice lente convergente: nelle buone macchine si tratta di un sistema formato da parecchie lenti e studiato in modo da ridurre le aberrazioni entro limiti tollerabili anche quando il diaframma di apertura è grande (campo di 50° ed oltre).

La quantità di energia che entra nell'obiettivo proveniente da una sorgente è proporzionale alla luminanza della sorgente ed all'angolo solido sotteso dal diaframma di apertura visto dalla sorgente. Se la sorgente è ad una distanza p_1 dalla lente molto maggiore del diametro del diaframma di apertura d ($p_1 \gg d$), tale angolo solido (Ω) vale $\pi d^2/4p_1^2$.

L'illuminanza dell'immagine è data dalla quantità di energia che cade sull'unità di area dell'immagine valutata in unità fotometriche⁽⁴³⁾: a parità di luminanza della sorgente, l'illuminanza dell'immagine è direttamente proporzionale ad Ω ed inversamente proporzionale al quadrato dell'ingrandimento lineare (m). Si ha quindi che tale illuminanza è proporzionale a

$$\frac{d^2}{p_1^2} \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2} = \left(\frac{d}{p_2}\right)^2 \simeq \left(\frac{d}{f}\right)^2 = \left(\frac{1}{F}\right)^2.$$

Si è fatto uso del fatto che per oggetti non vicinissimi all'obiettivo la distanza della pellicola dall'obiettivo è all'incirca pari alla distanza focale. Il parametro F è chiamato apertura relativa ed è molto usato per caratterizzare gli obiettivi. In realtà a questo scopo si usa indicare il valore del rapporto f/F . Così per esempio un obiettivo la cui lunghezza focale è due volte il diametro dell'apertura è indicato con $f/2$. Se si considerano due obiettivi fotografici aventi la stessa f il diametro cresce al diminuire di F : la figura 10.36 indica per esempio un caso di lente con $f/2$ (a sinistra) e di lente con $f/1$. L'obiettivo con $f/1$ raccoglie una maggiore quantità di luce (per un fattore 4) proveniente da una certa parte dell'oggetto, rispetto all'obiettivo $f/2$; siccome le dimensioni delle immagini che di un oggetto sono capaci di fornire i due obiettivi sono le stesse perché f è la stessa, si vede che l'immagine ottenuta con l'obiettivo $f/1$ ha una illuminanza quattro volte maggiore di quella ottenuta con il secondo

⁽⁴³⁾ Tale grandezza è ancora diffusamente chiamata *illuminazione* od *illuminamento*. L'unità di misura è il *lux*, che è quell'illuminanza che si ha quando la superficie di un metro quadro riceve uniformemente distribuito il flusso di un lumen.

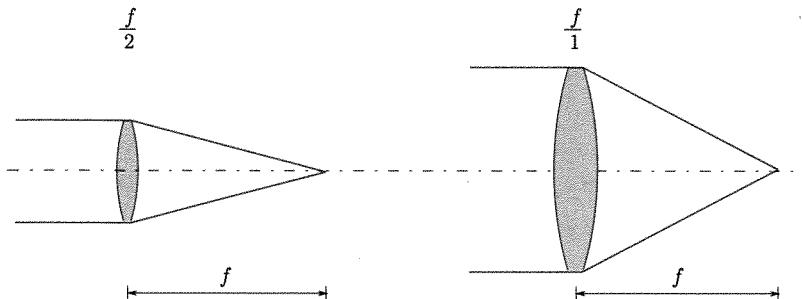


Fig. 10.36

obiettivo. Si comprende quindi che i tempi di esposizione per ottenere la impressione della pellicola in una macchina fotografica dipendono da F (o da f/F): essi crescono con il quadrato di F . Tutto ciò giustifica in qualche modo il termine tecnico-commerciale di *velocità dell'obiettivo* dato a f/F .

Secondo la trattazione dell'ottica geometrica, fatta con la approssimazione di Gauss, sul piano della pellicola dovrebbero formarsi nette esclusivamente le immagini di punti oggetti che si trovano nel piano coniugato: oggetti in piani normali all'asse disposti avanti o dietro al piano coniugato dovrebbero produrre sulla pellicola tracce non nette (sfocate). In realtà, per effetto delle aberrazioni, non si ha una corrispondenza rigorosa punto oggetto-punto immagine: il fascio di raggi uscente dal punto oggetto è trasformato in un fascio che non passa per un punto e come immagine va presa la sezione più piccola del fascio rifratto (cerchio di confusione minima). Questo fatto porta di conseguenza che in realtà non c'è una distinzione netta, per quanto riguarda l'immagine registrata, nella maniera in cui si presentano le immagini di un punto oggetto sul piano coniugato del piano immagine e su piani di poco discosti da quello: si parla di profondità di campo per indicare l'intervallo di distanze dall'obiettivo dell'oggetto per cui si ha sul piano della pellicola una immagine ugualmente nitida (a fuoco): la profondità di campo degli obiettivi cresce al diminuire del diaframma di apertura, cioè al crescere di F .

c. Proiettori

I proiettori hanno lo scopo di fornire su uno schermo una immagine ingrandita, ed in genere molto luminosa, di un oggetto in modo che sia agevole la sua osservazione da un numero notevole di persone. Essi constano essenzialmente di due parti: una prima serve ad illuminare intensamente l'oggetto e l'altra ne fornisce l'immagine ingrandita. Quest'ultima funzione viene assolta da una lente, od un complesso di lenti, del tutto simile all'obiettivo di una macchina fotografica: in questo caso peraltro, dovendo essere l'immagine reale ed ingrandita, l'oggetto si trova vicino all'obiettivo, a distanza un po' maggiore della distanza focale.

Proiettori

Per illuminare vivamente l'oggetto si possono usare due sistemi: illustriamo dapprima quello (diascopico) di impiego molto corrente giacché si usa nel caso che l'oggetto consista in una fotografia stampata su supporto trasparente (lastre, diapositive, pellicole ecc.). In questo caso (fig. 10.37) la luce emessa da una sorgente intensa (arco, lampade ad incandescenza

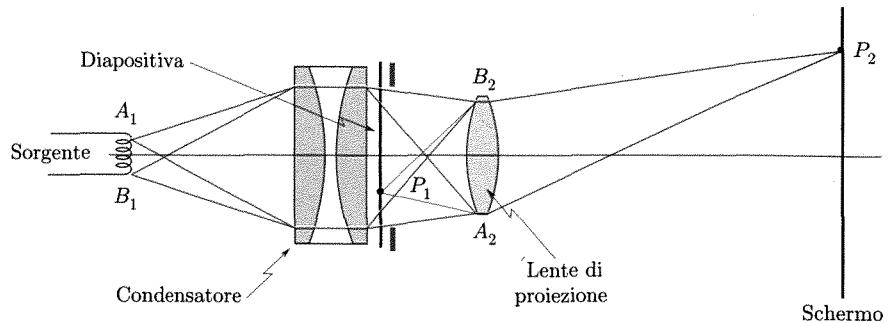


Fig. 10.37

speciali) giunge ad una lente convergente⁽⁴⁴⁾ (o un sistema di lenti) di grandi dimensioni, chiamata condensatore, e disposta vicino all'oggetto. Il fascio di luce che esce dal condensatore illumina l'oggetto: il diametro del condensatore deve essere sufficientemente grande per illuminare uniformemente tutto l'oggetto. La lente di proiezione (o sistema di lenti) va aggiustata in modo da fornire l'immagine ingrandita dell'oggetto sullo schermo: se si cambia la posizione dello schermo va aggiustata la posizione della lente di proiezione e varia l'ingrandimento. Per utilizzare la lente di proiezione nella sua intera dimensione, è opportuno disporre il condensatore in modo che fornisca l'immagine della sorgente sul piano mediano della lente di proiezione e che questa occupi l'intero diametro della lente stessa; è questa la posizione indicata in figura 10.37.

Nel caso in cui l'oggetto di cui si vuole avere l'immagine sullo schermo sia una figura su un foglio di carta, o in genere un oggetto diverso da una diapositiva, il sistema di illuminazione dal retro qui descritto non può essere impiegato ed occorre ricorrere al sistema episcopico nel quale l'oggetto viene illuminato dal davanti e si utilizza la luce riflessa per formare l'immagine. In genere l'oggetto viene disposto su un piano orizzontale ed è illuminato dalla parte superiore; uno specchio a 45° prende la luce riflessa e la invia verso l'obiettivo.

Molto spesso si costruiscono apparecchi (epidiascopi) che consentono i due tipi di illuminazione descritti.

d. Microscopio semplice o lente di ingrandimento

Le dimensioni apparenti di un oggetto dipendono dalle dimensioni dell'immagine che di esso si forma sulla retina e queste sono proporzionali all'angolo di visione, cioè all'angolo sotteso dall'oggetto a partire dall'occhio.

Per vedere i dettagli di un oggetto è quindi bene portarlo il più vicino possibile all'occhio; ciò può farsi fino a che la sua distanza dall'occhio uguagli la distanza (d_o) del punto vicino: a distanza minore l'immagine non sarebbe netta (a fuoco). Se y è la dimensione trasversale dell'oggetto, l'angolo massimo sotteso dall'occhio nella visione diretta è (fig. 10.38a):

$$\alpha = \frac{y}{d_o}.$$

⁽⁴⁴⁾ Non è necessario che il condensatore sia completamente corretto per aberrazioni giacché non serve a formare una immagine da osservare.

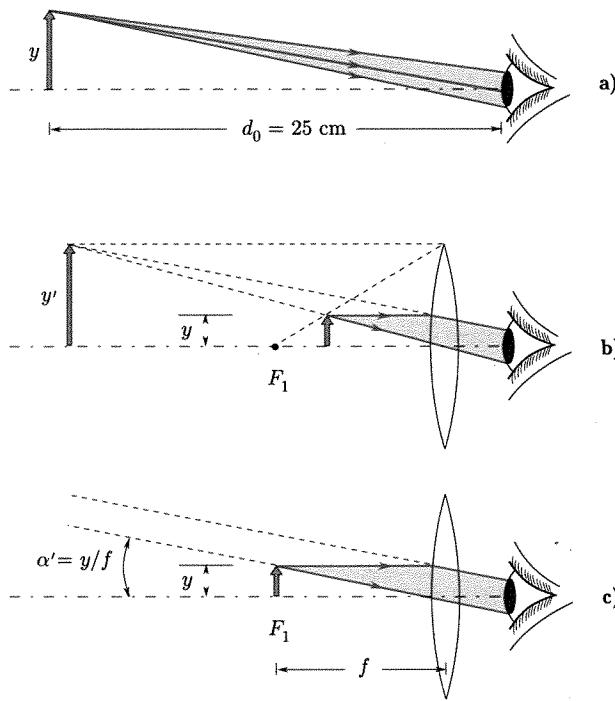


Fig. 10.38

Come si è detto, per gli occhi normali di persone adulte $d_0 = 25 \text{ cm}$ e tale è il valore che *convenzionalmente* si assume per la distanza minima della visione distinta. Se tuttavia si pone avanti all'occhio una lente convergente (in modo da aumentare il potere convergente del sistema occhio e lente) è possibile ottenere l'immagine sulla retina pur portando l'oggetto a distanza dall'occhio minore di d_0 . Una lente convergente usata a tale scopo costituisce il microscopio semplice o lente di ingrandimento. L'immagine che la lente di per sé produce è virtuale (oggetto a distanza dalla lente minore od uguale alla distanza focale f) ed è posta ad una distanza dall'occhio fra d_0 ed infinito, ove può essere osservata senza difficoltà. Le figure 10.38b e c mostrano il funzionamento per due diverse distanze dell'oggetto dalla lente. Le dimensioni massime dell'immagine si hanno quando l'oggetto è nel piano focale della lente. L'angolo sotteso dall'occhio è in questo caso (fig. 10.38c)

$$\alpha' = \frac{y}{f},$$

e si ha, in corrispondenza, per l'ingrandimento angolare (visuale)⁽⁴⁵⁾:

$$(61) \quad M = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d_0}{f} = \frac{25}{f(\text{cm})}$$

⁽⁴⁵⁾ Tale ingrandimento, in quanto definito in rapporto al valore convenzionale di 25 cm per d_0 , è anche chiamato *ingrandimento convenzionale* della lente; l'ingrandimento massimo effettivo può risultare maggiore o minore per ciascun osservatore a seconda dell'effettivo valore soggettivo di d_0 .

L'ingrandimento cresce riducendo f ; tuttavia un limite all'ingrandimento ottenibile con una lente semplice è posto dalle aberrazioni (in pratica non si va oltre $5 \div 10$). Se si usano sistemi corretti, l'ingrandimento ottenibile con il microscopio semplice può raggiungere il valore di 20. Per ottenere ingrandimenti maggiori si ricorre al microscopio composto.

e. Microscopio composto

È formato da due sistemi di lenti corrette, di cui il primo (obiettivo), a distanza focale molto piccola, serve a fornire dell'oggetto un'immagine reale ingrandita e l'altro (oculare) serve a fare osservare questa immagine dall'occhio nelle migliori condizioni. L'oculare, cioè, funziona da microscopio semplice per osservare (come oggetto) l'immagine data dall'obiettivo: esso ne fornisce una immagine virtuale disposta a distanza dall'occhio tra d_0 ed infinito. La figura 10.39 dà lo schema: i sistemi di lenti costituenti l'obiettivo e l'oculare sono indicati per semplicità come lenti semplici. L'oggetto è disposto a distanza dall'obiettivo molto piccola, ma superiore alla distanza focale f_1 : l'immagine è reale, ingrandita e capovolta. Tale immagine si forma nello spazio fra l'oculare ed il suo fuoco F'_1 . La distanza tra obiettivo ed oculare è fissa; per ottenere immagini nitide (cioè, come si usa dire, per mettere a fuoco le immagini) il tubo che porta obiettivo ed oculare viene spostato quanto occorre rispetto all'oggetto (serve allo scopo un apposito comando a cremagliera).

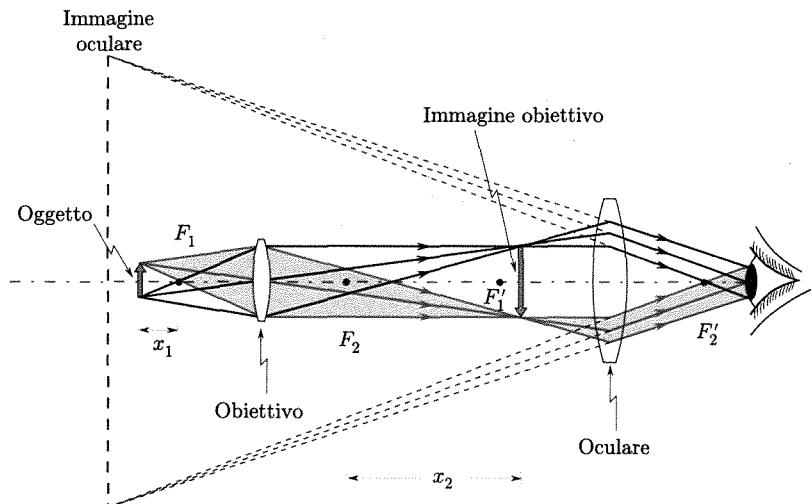


Fig. 10.39

L'ingrandimento angolare totale del microscopio composto è il prodotto dell'ingrandimento lineare m_1 dell'obiettivo e dell'ingrandimento angolare dell'oculare. L'ingrandimento lineare dell'obiettivo vale⁽⁴⁶⁾ (36)

$$(62) \quad m_1 = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{x_2 + f_1}{x_1 + f_1} = -\frac{x_2}{f_1}$$

⁽⁴⁶⁾ Se si moltiplica numeratore e denominatore per x_2 si ha, ricordando che per la (35) $x_1 x_2 = f_1^2$

$$\frac{x_2 + f_1}{x_1 + f_1} = \frac{x_2^2 + x_2 f_1}{x_1 x_2 + x_2 f_1} = \frac{x_2(f_1 + x_2)}{f_1^2 + x_2 f_1} = \frac{x_2(f_1 + x_2)}{f_1(f_1 + x_2)} = \frac{x_2}{f_1}.$$

essendo x_1 e x_2 le distanze dell'oggetto e dell'immagine fornita dall'obiettivo rispettivamente dal primo e dal secondo punto focale dell'obiettivo. L'ingrandimento angolare dell'oculare è (61)

$$(63) \quad M_2 = \frac{25}{f_2},$$

essendo f_2 la distanza focale (in cm) dell'oculare stesso. Si ha quindi per l'ingrandimento angolare (visuale) del microscopio:

$$(64) \quad M = m_1 M_2 = -\frac{x_2}{f_1} \frac{25}{f_2},$$

tutte le lunghezze essendo in cm. I costruttori danno di solito i valori di m_1 e M_2 per gli obiettivi ed oculari i quali possono essere in genere accoppiati in maniera diversa.

Vedremo più oltre i limiti all'ingrandimento ottenibile con un microscopio; per ora diremo che un valore di circa 1.000 può essere preso come limite superiore per microscopi che lavorano con luce visibile.

f. Cannocchiale

Il cannocchiale o telescopio serve ad osservare oggetti molto lontani; al pari del microscopio composto è formato da un obiettivo che fornisce una immagine reale dell'oggetto, e da un oculare che consente l'osservazione da parte dell'occhio dell'immagine data dall'obiettivo, nelle migliori condizioni. A parte quello che tra un po' diremo sulla distanza focale dell'obiettivo, una differenza costruttiva tra microscopio e telescopio è che in quest'ultimo l'oculare può essere spostato rispetto all'obiettivo, al fine di mettere a fuoco l'oggetto.

La figura 10.40 mostra lo schema di un cannocchiale disposto per l'osservazione di oggetti molto lontani (disposizione astronomica): in tal caso l'immagine data dall'obiettivo si forma nel piano focale (distanza focale f_1). Si osservi che in tale sistema come diaframma di apertura funziona l'orlo dell'obiettivo. Per determinare l'ingrandimento totale si osservi che l'angolo sotteso dall'oggetto a partire dal centro dell'obiettivo è praticamente lo stesso che sarebbe sotteso dall'occhio nudo; esso vale AB/f_1 . L'angolo sotto il quale l'occhio, posto dopo l'oculare (distanza focale f_2), vede l'immagine fornita dall'obiettivo I , vale CD/f_2 . Dalla figura si vede che $AB = CD = y'$ essendo y' l'altezza della immagine I . Si ha perciò per l'ingrandimento angolare (in valore assoluto)

$$(65) \quad M = \frac{CD/f_2}{AB/f_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

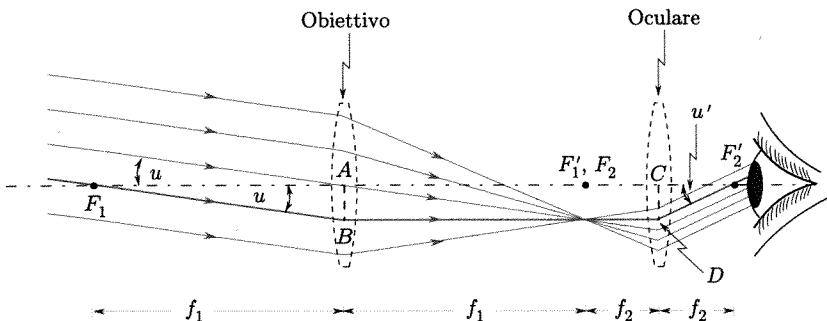


Fig. 10.40

Esso è pari al rapporto delle distanze focali dell'obiettivo e dell'oculare.

Discuteremo in seguito i limiti dell'ingrandimento conseguibile con un telescopio. Per il momento osserviamo che, come si vede dalla (65), mentre nel microscopio per avere forti ingrandimenti conviene che la distanza focale dell'obiettivo sia piccola [v. (64)], nel cannocchiale conviene che l'obiettivo abbia grande distanza focale: il che comporta, se si vogliono aperture relative sufficienti (almeno dell'ordine di 1/20), che il diametro utile dell'obiettivo sia grande in proporzione (il cannocchiale all'osservatorio di Yerkes, Chicago, ha un obiettivo del diametro di circa 1 m e distanza focale di circa 17 m). L'immagine data dallo strumento è capovolta. Quest'ultima circostanza non costituisce un inconveniente per osservazioni astronomiche. Per osservazioni terrestri è preferibile avere immagini dritte: ciò può ottersi interponendo fra obiettivo ed oculare un'altra lente convergente il cui scopo è solo quello di rovesciare ancora una volta l'immagine.

Nel caso che l'oggetto da osservare non sia all'infinito (disposizione non astronomica), come capita per i cannocchiali che equipaggiano vari strumenti di misurazione, per l'ingrandimento angolare (visuale) valgono le considerazioni svolte per il microscopio composto e quindi vale la (64).

Si osservi che nel telescopio a lenti la lunghezza del dispositivo è all'incirca pari a $(f_1 + f_2)$. Per molte applicazioni è utile disporre di un apparecchio che abbia una lunghezza minore; ciò può ottersi ripiegando su se stesso, per così dire, l'asse ottico mediante due prismi a riflessione totale, i quali effettuano anche il raddrizzamento delle immagini: si hanno allora i cosiddetti cannocchiali prismatici. I binocoli (fig. 10.41) sono in genere costituiti da due cannocchiali del genere, accoppiati.

Accenneremo infine al telescopio di Galileo (1609), che ha uno schema analogo a quello del telescopio astronomico con la differenza che l'immagine data dall'obiettivo peraltro serve come *oggetto virtuale* per l'oculare (fig. 10.42). L'immagine finale data dall'oculare è quindi diritta. Un tale telescopio è più corto di quello astronomico: ha però lo svantaggio di un campo di vista più piccolo. I binocoli da teatro sono di questo tipo.

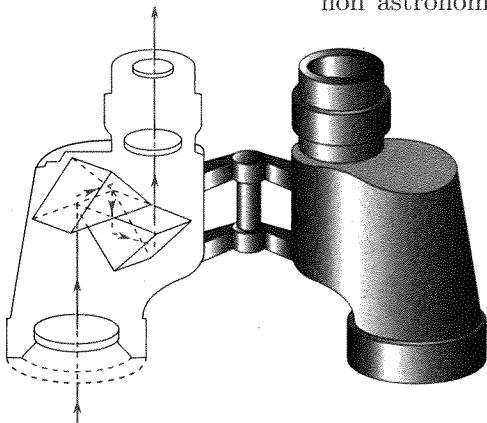


Fig. 10.41

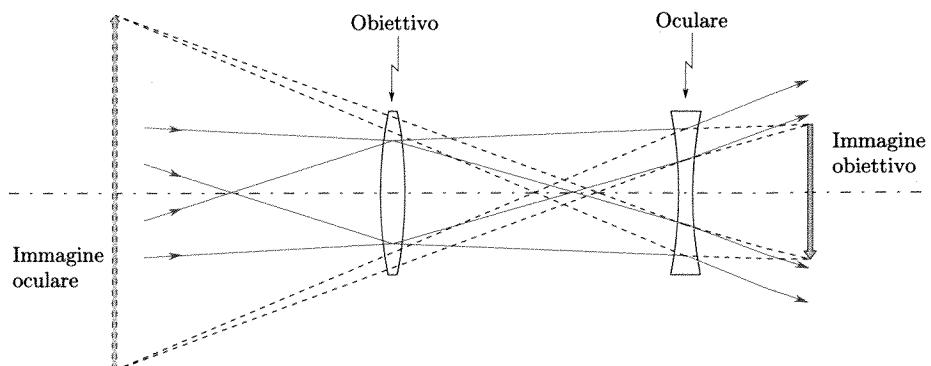
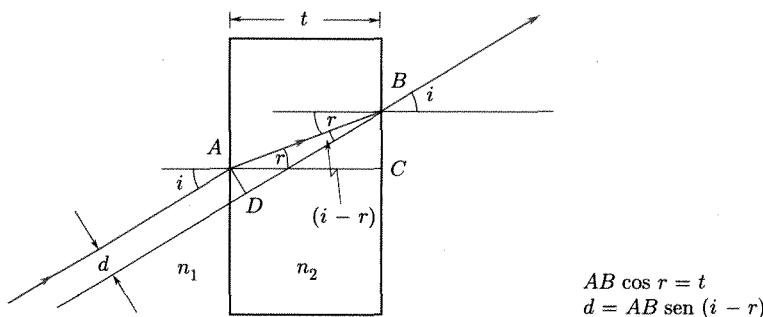


Fig. 10.42

10.12. RIFRAZIONE ATTRAVERSO LASTRA A FACCE PIANE. PRISMA



$$AB \cos r = t \\ d = AB \sin(i - r)$$

Fig. 10.43

Si consideri ora una lastra a facce piane parallele di un materiale trasparente avente indice di rifrazione n_2 , immersa in un mezzo ad indice n_1 . Se un raggio di luce monocromatica incide su una faccia con un angolo i (fig. 10.43) esso emerge, dopo aver subito due rifrazioni, parallelamente alla direzione originaria ma subisce uno spostamento laterale d . Semplici considerazioni trigonometriche per i triangoli (ABC) e (ABD) assieme alla legge della rifrazione consentono di scrivere

$$(66) \quad d = \frac{t}{\cos r} \sin(i - r) = t \sin i \left[1 - \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos i}{\cos r} \right].$$

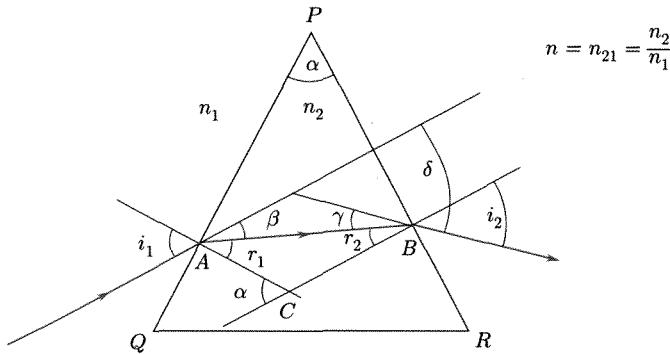
Per incidenza normale $d = 0$.

Nel caso della lastra a facce parallele le deviazioni dovute alla rifrazione sulle due facce quindi si compensano esattamente.

Passiamo ora a considerare il caso importante in cui un raggio subisce ancora due rifrazioni su facce piane ma queste non siano parallele; si tratta cioè non più di una lastra, ma di un prisma. Supponiamo di avere un prisma a sezione normale triangolare quale quello indicato in figura 10.44 e limitiamoci a considerare il caso in cui il raggio incidente e quelli originati per rifrazione si trovino tutti in un piano normale agli spigoli del prisma (piano della figura). Il raggio attraversa il prisma incontrandone due facce che formano fra loro l'angolo α (angolo rifrangente del prisma). Dalla costruzione dei raggi rifratti risulta evidente che le deviazioni prodotte dalle due successive rifrazioni si sommano.

Prisma

Vogliamo ora determinare la espressione valida per la deviazione di un raggio di luce monocromatica (lunghezza d'onda, λ).



$$n = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

Fig. 10.44

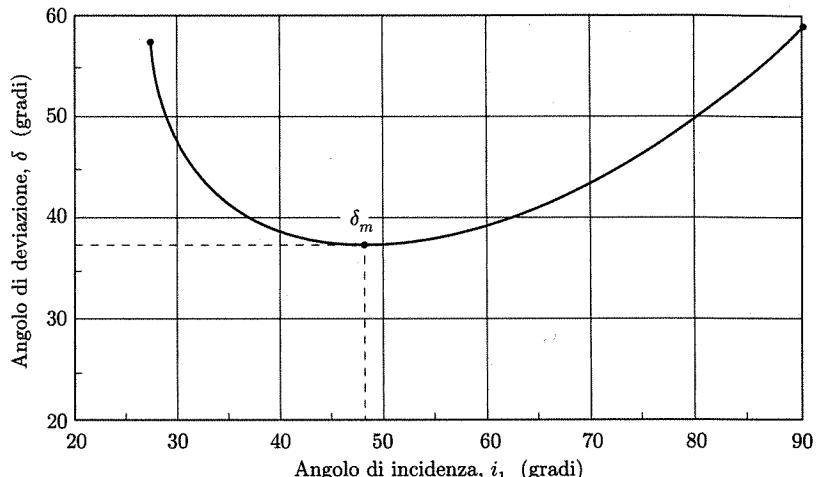


Fig. 10.45

La legge della rifrazione consente di scrivere

$$(67) \quad \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n = \frac{\sin i_2}{\sin r_2}.$$

Gli angoli di deviazione sono β per la rifrazione sulla prima faccia, γ per la rifrazione sulla seconda faccia, e per la deviazione totale δ si ha

$$(68) \quad \delta = \beta + \gamma.$$

Le normali alle facce determinano un angolo (α) pari a quello fra le facce stesse; dal triangolo ABC si ha

$$(69) \quad \alpha = r_1 + r_2.$$

Da semplici relazioni fra angoli, deducibili dalla figura, e facendo uso delle (68) e (69) si ha infine

$$(70) \quad \delta = \beta + \gamma = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - \alpha.$$

Se, lasciando fisso il punto A di incidenza, il prisma viene ruotato intorno ad un asse parallelo agli spigoli, i_1 varia e lo stesso accade per δ ; partendo da un piccolo angolo di incidenza ed aumentandolo si trova che δ decresce, raggiunge un minimo e cresce nuovamente. La figura 10.45 si riferisce ad un prisma di vetro avente $n_2 = 1,50$ e angolo rifrangente di 60° .

Il valore della deviazione minima (δ_m) può trovarsi annullando la derivata di $\delta(i_1)$ rispetto a i_1

Dalla (70)

$$(71) \quad \frac{d\delta}{di_1} = 1 + \left(\frac{di_2}{di_1} \right)$$

La condizione di minimo per δ porta a

$$(72) \quad \left(\frac{di_2}{di_1} \right) = -1.$$

Dalla (69) si ha inoltre

$$(73) \quad \frac{dr_1}{di_1} = - \frac{dr_2}{di_1},$$

e dalla (67) si ha:

$$(74) \quad \begin{aligned} \cos i_1 &= n \cos r_1 \frac{dr_1}{di_1}, \\ \cos i_2 \frac{di_2}{di_1} &= n \cos r_2 \frac{dr_2}{di_1}. \end{aligned}$$

Deviazione minima

$$\delta_m = 2i_1 - \alpha$$

quando $i_1 = i_2$

Ne segue:

$$(75) \quad \frac{di_2}{di_1} = -\frac{\cos i_1 \cos r_2}{\cos r_1 \cos i_2}.$$

Sostituendo nella (72):

$$(76) \quad \frac{\cos i_1 \cos r_2}{\cos r_1 \cos i_2} = 1.$$

Quadrando ed usando le (67)

$$(77) \quad \frac{1 - \sin^2 i_1}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i_1} = \frac{1 - \sin^2 i_2}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i_2}.$$

Tale relazione è soddisfatta se:

$$(78) \quad i_1 = i_2.$$

La deviazione minima si ha quando gli angoli i_1 e i_2 risultano uguali, i raggi incidenti ed emergenti sono disposti simmetricamente rispetto alla sezione del prisma ed il percorso del raggio è nell'interno del prisma parallelo alla base. Il valore minimo della deviazione è allora

$$(79) \quad \delta_m = 2i_1 - \alpha.$$

Ne segue per l'angolo di incidenza sulla prima faccia:

$$(80) \quad i_1 = \frac{1}{2}(\delta_m + \alpha),$$

e per quello di rifrazione dalla (69), essendo $r_1 = r_2$,

$$(81) \quad r_1 = \frac{1}{2}\alpha.$$

Si ha allora per l'indice di rifrazione del materiale del prisma rispetto al mezzo in cui è immerso

$$(82) \quad n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(\delta_m + \alpha) \right]}{\sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

La (82) mostra come la misurazione dell'angolo di deviazione minima consenta la determinazione di n .

■ 10.13. DISPERSIONE DEL PRISMA. SPETTROSCOPI A PRISMA

Supponiamo ora che un prisma sia investito da un raggio di luce polychromatica. In conseguenza del fatto che la velocità della luce nel mezzo di cui è fatto il prisma dipende in genere dalla lunghezza d'onda (dispersione) l'indice di rifrazione e la deviazione del prisma dipendono da λ :

$$(83) \quad n = n(\lambda),$$

$$(84) \quad \delta = \delta(\lambda).$$

La quantità

$$(85) \quad \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda},$$

Dispersione del prisma

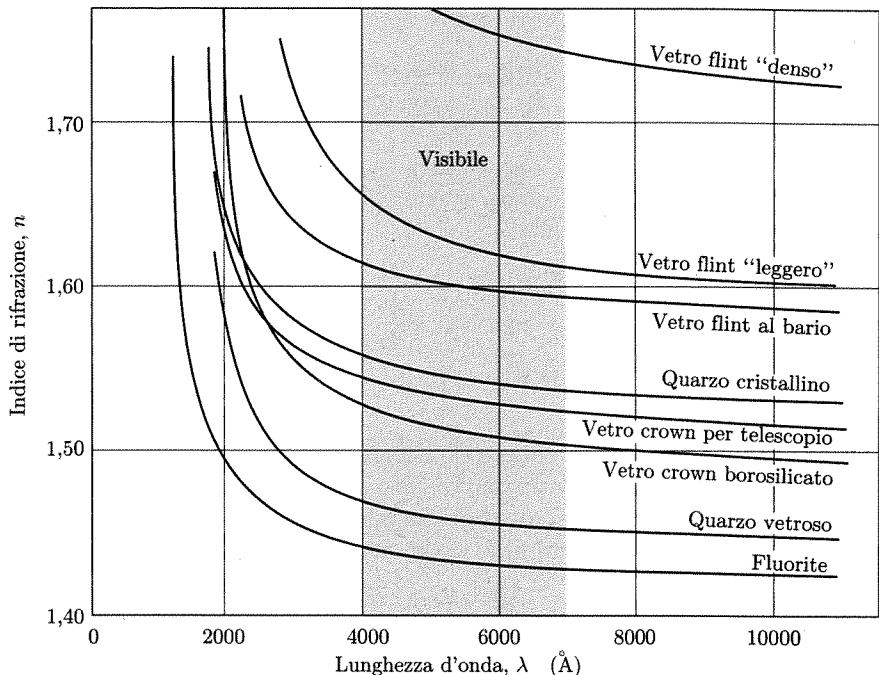
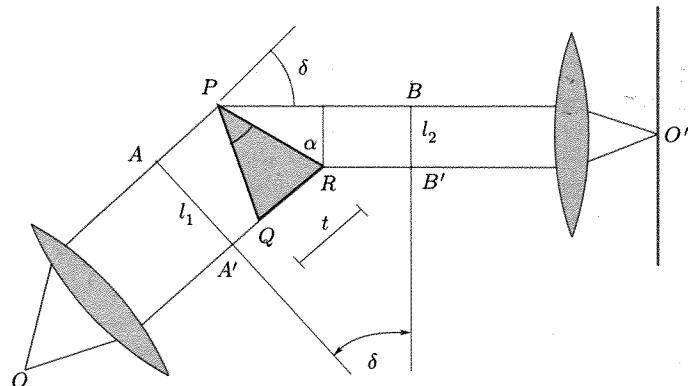


Fig. 10.46

ad angolo di incidenza i_1 costante prende il nome di dispersione del prisma e permette di determinare come vari δ al variare della lunghezza d'onda della radiazione. Come si vede, la dispersione del prisma è il prodotto di due fattori. Il primo di essi caratterizza geometricamente la disposizione del prisma, mentre il secondo dipende dalle caratteristiche strutturali del mezzo di cui il prisma è costituito. La figura 10.46 riporta la funzione $n(\lambda)$ per alcuni materiali usati per lenti e prismi.

Si trova che il fattore geometrico, nel caso che il fascio incidente investa la faccia del prisma in tutta la sua larghezza, in condizioni prossime a quelle di deviazione minima, è semplicemente il rapporto t/l_2 , fra la base del prisma (t) (fig. 10.47) e la apertura lineare (l_2) del fascio emergente (⁴⁷).

La possibilità del prisma di separare le componenti di diversa lunghezza d'onda presenti in un fascio ha condotto alla realizzazione di spettroscopi (⁴⁸) a prisma. Lo schema generale è indicato in figura 10.48.



Spettroscopi a prisma

Fig. 10.47

(⁴⁷) In condizioni di minima deviazione $l_1 = l_2$.

(⁴⁸) Spettrografi, se in luogo dell'osservazione visuale si ricorre alla registrazione fotografica.

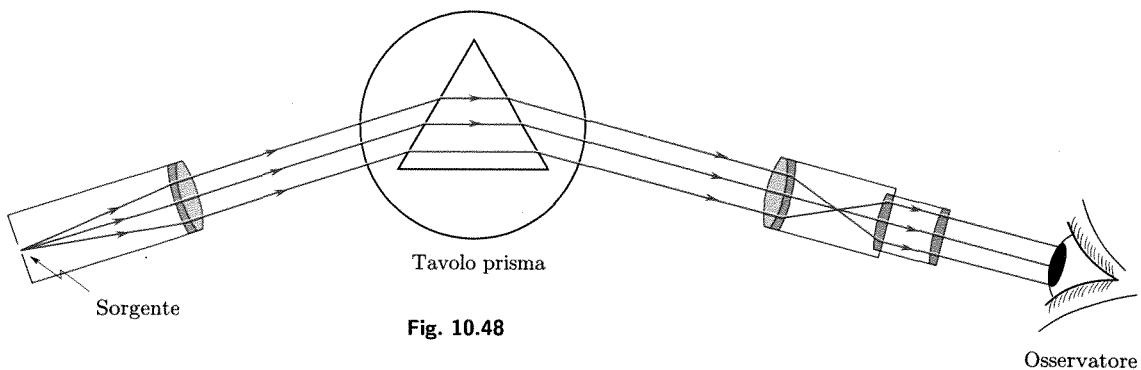


Fig. 10.48

Allo scopo di avere una maggiore quantità di luce le sorgenti usate sono in genere lineari, ottenute con fenditure (illuminate da una sorgente primaria) disposte parallelamente agli spigoli del prisma.

Il potere risolutivo cromatico rappresenta la capacità del prisma a fornire in uno spettroscopio immagini della sorgente (linee) separate per lunghezze d'onda poco differenti. Tale potere è fissato dai fenomeni di diffrazione relativi alla apertura dello strumento e più precisamente è definito come la quantità (cap. 14, par. 14.13)

$$(86) \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

essendo $\Delta\lambda$ (limite di risoluzione) la differenza tra due lunghezze d'onda per le quali lo strumento fornisca due immagini della sorgente appena separate secondo il criterio di Rayleigh, per le quali cioè il prisma introduce una differenza di deviazione $\Delta\delta$ pari al potere risolutivo della apertura.

Supponendo che il fascio investa tutta la larghezza della faccia del prisma e che si sia in condizioni prossime a quelle di deviazione minima, si calcola per il potere risolutivo:

$$(87) \quad R = t \frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$$

essendo Δn la differenza di indice per due lunghezze d'onda per le quali ci si trova al limite di risoluzione secondo Rayleigh. La differenza di lunghezza d'onda che corrisponde a tale Δn dipende dalle caratteristiche di dispersione del materiale del prisma. Si osservi che sul potere risolutivo non ha influenza n , e come questo dipenda dalla estensione della base del prisma (t). Sostituendo i valori per il vetro flint, si trova che un prisma con una base di 10 cm è necessario per risolvere differenze di circa 1/10 della differenza fra linee del doppietto del sodio e per realizzare un potere risolutivo di 10^4 .

Si osservi che poteri risolutivi molto maggiori si possono ottenere con i reticolati (cap. 14, par. 14.13). Reticoli della lunghezza totale di 10 cm possono essere realizzati senza gravi difficoltà in modo che osservando gli spettri di secondo ordine il potere risolutivo sia di 10^5 . Questo fatto spiega l'uso molto più diffuso che oggi si fa dei reticolati rispetto ai prismi, come dispersori per produrre spettri. Si osservi peraltro che nel caso degli spettroscopi a reticolo solo una parte della radiazione incidente si trova nello spettro che si esamina, mentre nel caso degli spettroscopi a prisma tutta l'energia è utilizzata.

Potere risolutivo cromatico

IL PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL

- ✓ Il principio di Huygens-Fresnel è un metodo pratico per trattare la propagazione di onde con una approssimazione sufficiente in un gran numero di casi.
- ✓ Dopo aver presentato l'enunciato e avere mostrato come esso permetta di ritrovare le leggi della riflessione e della rifrazione dell'ottica geometrica, viene data la sua espressione matematica nella forma data da Kirchhoff-Fresnel.

■ 11.1. INTRODUZIONE

Abbiamo avuto modo, nel cap. 9, di accennare ai meccanismi di emissione di energia raggiante da parte dei sistemi atomici ed alle proprietà di coerenza delle sorgenti: nelle sorgenti normali i fotoni sono emessi a caso ed i corrispondenti treni d'onda hanno fasi iniziali incorrelate; nelle sorgenti perfettamente coerenti, particolari processi conducono alla emissione stimolata di fotoni ed i corrispondenti treni d'onda hanno fasi iniziali legate fra loro; la frequenza della radiazione la cui emissione corrisponde al passaggio di elettroni da un livello energetico ad un altro (radiazione monocromatica) è contenuta in un intervallo molto più stretto nel caso delle sorgenti coerenti rispetto a quello delle sorgenti incoerenti (larghezza di linea minore).

Pur essendo quella della coerenza o dell'assenza di coerenza (in genere, del grado di coerenza)⁽¹⁾ una caratteristica fondamentale della luce emessa da una sorgente, molte considerazioni dell'ottica tradizionale possono essere fatte senza considerare questa caratteristica. Diremo anzi che, pur essendo costretti a fare considerazioni sulla proprietà di coerenza dei fasci di luce emessi dalle sorgenti reali per alcune esperienze (interferenza), la maggior parte dei problemi viene trattata nell'ottica tradizionale supponendo di avere a che fare con onde e.m. continue⁽²⁾ ed applicando ad esse la teoria di Maxwell. I risultati che si ottengono sono confortati dalla esperienza e sono in accordo con quelli che si possono ottenere con tecniche più avanzate.

Nell'ambito della applicazione della teoria di Maxwell ai processi ottici la trattazione consiste nella soluzione delle equazioni di Maxwell per il caso concreto tenendo presente le caratteristiche del mezzo o dei mezzi e le condizioni ai limiti.

Non è naturalmente nostra intenzione presentare qui la trattazione più generale possibile del problema, del resto già indicata nel capitolo sulle onde e.m. (cap. 8), ma solo fornire indicazioni sui metodi più comunemente usati per esaminare, in casi concreti di ottica, come un'onda che rappresenta il campo e.m., originata in un punto, si propaghi in tutto lo spazio che interessa e come le caratteristiche di tale propagazione deter-

⁽¹⁾ Cap. 13, par. 13.5.

⁽²⁾ Piane, sferiche ecc.

minino gli aspetti osservati dei processi. Da questo punto di vista, nello studio dell'ottica fisica è di grande importanza il principio di Huygens, capace di solito per conto suo di dare ragione, con sufficiente approssimazione dei risultati sperimentali. Noi presentiamo in questo capitolo questo principio che sarà utilizzato in seguito nello studio di numerose situazioni particolari.

11.2. PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL

L'originario principio di Huygens fornisce un metodo pratico per trattare la propagazione di onde con una approssimazione sufficiente in un gran numero di casi. Esso, sebbene formulato inizialmente (1678) per le onde luminose, si applica a qualsiasi tipo di onda e noi lo abbiamo già considerato per le onde elastiche (vol. I, cap. 9, par. 9.19). In quella occasione abbiamo già indicato come la formulazione originaria di Huygens abbia bisogno di ulteriori specificazioni per risultare soddisfacente. Nella formulazione originaria il principio è il seguente: in un mezzo attraversato da onde, ogni punto che si trova su un fronte d'onda⁽³⁾ ad un certo istante può essere considerato come una nuova sorgente di onde sferiche che si propagano con la velocità di fase relativa al punto; una posizione successiva del fronte d'onda si ottiene costruendo l'involucro delle onde secondarie emesse da tutte le sorgenti puntiformi distribuite sulla posizione iniziale del fronte stesso.

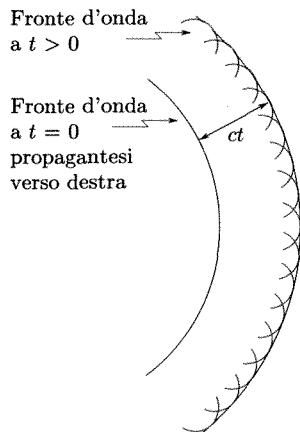


Fig. 11.1

Il metodo che ne consegue è illustrato nella figura 11.1 per un caso semplice. Si abbia in un mezzo omogeneo un fronte di onda ad un dato istante ($t = 0$) e si desideri determinare la posizione raggiunta dallo stesso fronte ad un istante successivo (t). Per ottenere ciò si consideri ciascun punto del fronte all'istante $t = 0$ sorgente d'onde sferiche (ondine) che si propagano con una velocità che è quella caratteristica del mezzo; tali ondine all'istante t hanno raggio ct e con il loro involucro determinano il fronte d'onda cercato.

Nel cap. 9 del vol. I si è già visto come la formulazione originaria, su riportata, del principio vada corredata da due importanti limitazioni:

1. dobbiamo considerare esclusivamente l'involucro delle ondine all'istante t per avere la posizione del fronte d'onda, ma la perturbazione nello spazio fra i fronti d'onda all'istante $t = 0$ e t non è data dalla sovrapposizione delle perturbazioni sferiche (ondine);
2. va considerato solo l'involucro spostato nella direzione di propagazione rispetto al fronte d'onda all'istante $t = 0$.

Queste limitazioni possono essere tolte in una trattazione più generale (Fresnel) che porta a riconoscere che le ondine secondarie, oltre che ad essere sferiche, sono caratterizzate da una opportuna dipendenza della ampiezza in funzione della direzione (dell'angolo formato tra la direzione

⁽³⁾ Il fronte d'onda si riferisce ad una perturbazione impulsiva e rappresenta il luogo dei punti raggiunti ad un dato istante dalla perturbazione stessa. Per le perturbazioni periodiche (per es. sinusoidali) v'è luogo a considerare le superfici luoghi dei punti ove ad un dato istante la perturbazione ha una determinata fase (per es. massima perturbazione): tali superfici sono le superficie d'onda. Per le nostre considerazioni si può far riferimento ad un fronte o ad una superficie d'onda indifferentemente.

di propagazione dell'onda incidente nel punto origine dell'ondina e la direzione di propagazione dell'ondina nel punto considerato) e da una opportuna relazione della fase dell'ondina rispetto a quella dell'onda incidente. Per tali ragioni il principio, nella formulazione più esatta, va sotto il nome di principio di Huygens-Fresnel.

In molte situazioni, come quelle in cui noi saremo interessati ad applicare il principio, risultati soddisfacenti sono ottenuti dall'applicazione del principio stesso nella formulazione originaria, tenendo conto delle due osservazioni limitative fatte sopra.

Come esempio semplice di applicazione del principio consideriamo il caso della rifrazione di un fronte piano incidente su una superficie piana di separazione di due mezzi aventi rispettivamente indici di rifrazione assoluti⁽⁴⁾ $n_1 = c/v_1$, $n_2 = c/v_2$. L'angolo di incidenza (fra la normale al fronte d'onda e la normale alla superficie di separazione dei mezzi) sia θ (fig. 11.2). Si consideri il tratto \overline{AB} del fronte d'onda all'istante $t = 0$ in cui l'estremo A raggiunge la separazione dei mezzi e si voglia determinare la posizione dell'onda all'istante t in cui l'estremo B raggiunge nel mezzo 1 la separazione.

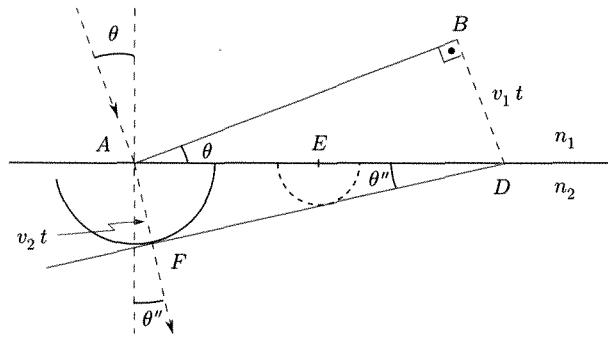


Fig. 11.2

La perturbazione che raggiunge la superficie limite si propaga successivamente sia nel mezzo 1, sia in quello 2. Possiamo applicare il principio di Huygens nel primo mezzo e si ottiene l'onda riflessa come inviluppo delle posizioni all'istante t dei fronti d'onda sferici originati nei punti della superficie di separazione via via interessati dal fronte d'onda originario nell'intervallo $(0 - t)$: possiamo applicare il principio nel secondo mezzo e costruire il fronte rifratto. Nella figura 11.2 è fatta la costruzione relativa a questa seconda applicazione. Si osservi che la ondina originata in A all'istante $t = 0$ avrà all'istante t la forma di onda sferica di raggio $v_2 t$; la ondina originata in D all'istante t avrà allo stesso istante raggio zero; l'ondina originata in E (punto medio fra A e D) all'istante $t/2$, avrà all'istante t raggio $v_2(t/2)$. Si vede chiaramente che l'inviluppo delle ondine originate dal fronte d'onda piano incidente è un piano e che l'angolo formato fra normale al fronte d'onda rifratto e piano di separazione è l'angolo θ'' indicato in figura. Dalla considerazione dei due triangoli rettangoli ABD e AFD si ricava

$$\frac{\overline{AD} \sin \theta}{\overline{AD} \sin \theta''} = \frac{v_1 t}{v_2 t}$$

e quindi

$$(1) \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Si ritrovano le leggi della rifrazione già stabilite da noi (cap. 8, par. 8.5) applicando le equazioni di Maxwell.

⁽⁴⁾ Cioè di ciascuno dei mezzi rispetto al vuoto.

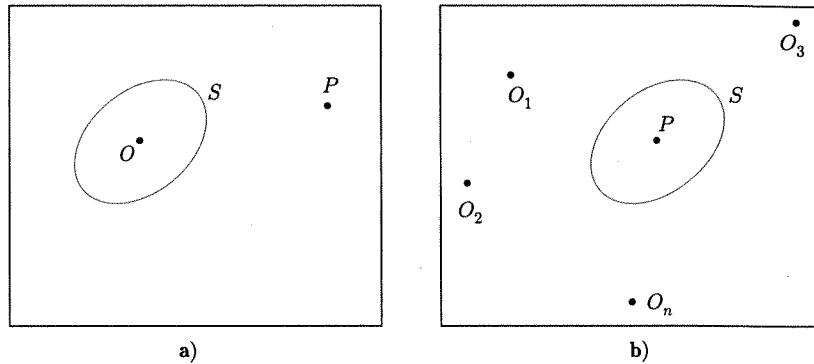


Fig. 11.3

Si osservi che la base del principio sta nel riconoscere il fatto che caratteristica fondamentale della propagazione per onde è quella che lo stato di perturbazione si propaga gradualmente e con continuità sicché appare logico ritenere che la perturbazione in un punto debba essere determinata esclusivamente dalle condizioni esistenti nei punti vicini. Se per semplicità (fig. 11.3a) si suppone di considerare una sorgente puntiforme O di onde sferiche ed una superficie S che la racchiude⁽⁵⁾, è chiaro che perché la perturbazione raggiunga punti esterni ad S , essa deve attraversare la superficie stessa. Se a questa proprietà si uniscono la validità del principio di sovrapposizione per le onde ed, in particolare, i concetti sviluppati nello studio dell'interferenza delle onde⁽⁶⁾ (Young e Fresnel all'inizio dell'Ottocento) sembra logico attendere che la perturbazione in punti esterni ad S debba potersi ottenere pensando che i vari punti di S investiti dalla perturbazione divengano essi stessi sorgenti di nuove perturbazioni aventi caratteristiche opportune e sovrappONENTI nel mezzo di propagazione.

Questo tipo di ragionamento, suscettibile di una precisa formulazione matematica, è quello che condusse Fresnel a modificare e completare il principio di Huygens. Si tratta praticamente di determinare le caratteristiche che devono avere sorgenti distribuite con continuità su S in modo da produrre, in un qualsiasi punto P ed in qualsiasi istante, un campo e.m. coincidente con quello prodotto dalla sorgente originaria disposta nell'interno di S .

Sebbene noi vogliamo giungere ora semplicemente alla espressione del principio di Huygens-Fresnel, faremo cenno ad un tipo di calcolo che in realtà è dovuto a Kirchhoff⁽⁷⁾ in quanto esso consente di precisare, meglio

⁽⁵⁾ Analoghe considerazioni possono essere svolte se si considera un punto P ed una superficie S chiusa che lo circondi; perturbazioni generate al di fuori di S (sorgenti $O_1, O_2 \dots$) devono attraversare S per giungere in P (fig. 11.3b).

⁽⁶⁾ Le principali caratteristiche dell'interferenza di onde sono già state studiate nel cap. 9 del vol. I, su di esse torneremo con maggior dettaglio nel cap. 13 del presente volume.

⁽⁷⁾ Kirchhoff ha stabilito (1882) un famoso teorema (*teorema integrale*) il quale, sotto l'ipotesi che la funzione che rappresenta la disturbanza ottica (per es. il potenziale V) abbia derivate prime e seconde continue nei punti di una superficie chiusa S che circonda un punto qualsiasi P , per il quale si vuol determinare il valore della disturbanza, consente di determinare la soluzione dell'equazione omogenea delle onde in P , $V(P)$, mediante un integrale esteso ad S effettuato sui valori di V e della sua derivata prima. È possibile mostrare che il principio di Huygens-Fresnel, che fra poco esprimeremo, può essere considerato come una forma approssimata del teorema integrale di Kirchhoff; l'approssimazione consiste essen-

di quanto fece Fresnel, le caratteristiche direzionali delle onde secondarie. Diremo subito che questi calcoli possono essere fatti con riferimento ad una qualsiasi grandezza connessa con la perturbazione che si propaga e che quindi può essere presa a descrivere la disturba ottica. Grandezze di questo genere sono le componenti dei campi (elettrico o magnetico) o i potenziali elettrodinamici⁽⁸⁾: la propagazione di ciascuna di esse è descritta dalle stesse relazioni. Noi faremo qui uso del potenziale elettrodinamico V . Si trova che il contributo al potenziale in P all'istante t della sorgente localizzata in un elemento dS della superficie chiusa S egualia quello di un'onda partita da dS all'istante $t - (r/v)$ essendo r pari alla distanza di P da dS , in modo da giungere in P all'istante t . Per caratterizzare ciascuna di queste onde secondarie occorre trovare esplicitamente l'espressione della funzione che le rappresenta. Limitandoci a considerare il caso semplice⁽⁹⁾ per il quale nell'interno di S vi sia una sola sorgente puntiforme di onde sferiche, si può scrivere per il potenziale elettrodinamico V in un punto di S , usando per le grandezze sinusoidali la notazione complessa, la espressione seguente:

$$(2) \quad V_S = \frac{A e^{j\omega(t-\frac{r_1}{c})}}{r_1}.$$

In essa (fig. 11.4) \mathbf{r}_1 è il vettore che ha origine in O e termina nel punto O_i che si considera su S . Indichiamo inoltre con \mathbf{n} la normale

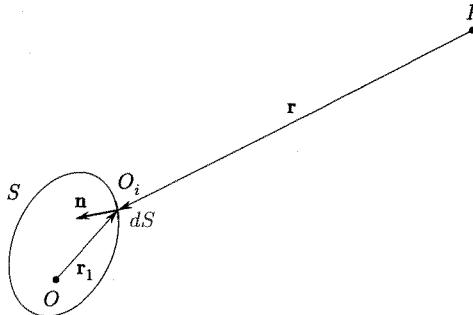


Fig. 11.4

ad S in O_i diretta verso la regione dello spazio in cui non si trova P e con \mathbf{r} il vettore che ha origine in P e termina in O_i . Si trova allora, facendo l'approssimazione, di solito ben verificata in ottica, che r_1 e r siano entrambi grandi rispetto a λ , che il contributo della sorgente di estensione dS intorno ad O_i , al potenziale in P all'istante t ha la forma:

$$(3) \quad dV = j \frac{A}{2\lambda r_1} \frac{1}{r} e^{j\omega(t-\frac{r+r_1}{c})} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)] dS.$$

zialmente nel ritenere molto grandi rispetto a λ le distanze dalla sorgente tanto di S , (r_1), quanto di P , (r).

⁽⁸⁾ Vedi cap. 8.

⁽⁹⁾ Nel caso generale si hanno più sorgenti puntiformi nell'interno di S ; esso quindi può essere considerato equivalente alla sovrapposizione di più situazioni in ciascuna delle quali si abbia una sola sorgente.

Tale espressione descrive perfettamente le ondine del principio di Huygens-Fresnel. Esse hanno le seguenti caratteristiche:

- a. sono onde sferiche emesse da ciascun punto di S in modo da giungere in P all'istante t . Il fatto che siano sferiche è mostrato dalla circostanza che l'ampiezza dell'onda irradiata da un punto di S decresce come $1/r$. Si osservi inoltre che il fattore che fissa la dipendenza temporale $[e^{j\omega\{(t-r_1/c)-r/c\}}]$ contiene il ritardo corrispondente alla propagazione per la distanza r ;
- b. l'onda secondaria emessa da ciascun punto di S è sfasata di $\pi/2$ in anticipo e ciò è indicato dalla presenza del fattore j . Si badi che nessun particolare significato fisico va attribuito a ciò ed esso è solo un risultato matematico;
- c. l'ampiezza dell'onda secondaria è:
 1. proporzionale a dS ;
 2. proporzionale alla ampiezza dell'onda primaria incidente su dS e data dalla (2);
 3. inversamente proporzionale a λ . Essa inoltre varia con la direzione secondo un fattore di direzione

Fattore di direzione

$$(4) \quad K = \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)}{2}.$$

Si osservi che il fattore di direzione assume un valore prossimo a 1 se \mathbf{r} e \mathbf{r}_1 sono all'incirca nella stessa direzione e verso opposto, e prossimo a zero se sono all'incirca nella stessa direzione e nello stesso verso. È questa la circostanza che conduce alla eliminazione di una delle due soluzioni previste dal principio di Huygens nella forma originale per le superfici d'onda al tempo $t + \Delta t$ originate da un'unica superficie all'istante t .

Dalla (3) si ottiene infine il potenziale in P all'istante t integrando i contributi dV su tutta la superficie S

$$(5) \quad V = \int_S \frac{jA}{\lambda r r_1} K e^{j\omega(t-\frac{r+r_1}{c})} dS.$$

Formula di Fresnel-Kirchhoff

Formulazione del principio di Huygens-Fresnel

Il principio di Huygens-Fresnel si esprime quindi dicendo che la disturba otica in un punto P in un istante generico t si può ottenere dalla conoscenza della disturba in funzione del tempo sui punti di una superficie chiusa che circonda la sorgente⁽¹⁰⁾, immaginando che tali punti siano sorgenti di ondine sferiche dalle caratteristiche indicate nei punti a, b, c le quali interferiscono fra di loro. Se in particolare la superficie S è una superficie d'onda all'istante t , la sovrapposizione delle ondine delle caratteristiche specificate emesse dai punti di S all'istante t e propagantesi per un intervallo di tempo Δt fornisce la posizione del fronte dell'onda originata all'istante $(t + \Delta t)$. È quest'ultima la comune formulazione del principio di Huygens-Fresnel. Ricordiamo che tale principio fornisce una soluzione approssimata della equazione omogenea delle onde, valida finché r ed r_1 sono grandi rispetto a λ ; questa considerazione è di solito soddisfatta in ottica.

⁽¹⁰⁾ Si può mostrare che le stesse conclusioni valgono se la superficie chiusa circonda P .

Vogliamo aggiungere che per molti problemi una soluzione già soddisfacente si ottiene applicando il princípio di Huygens nella formulazione originaria, scartando come non valido fisicamente l'inviluppo delle ondine che si propaga in direzione opposta a quella dell'onda di partenza.

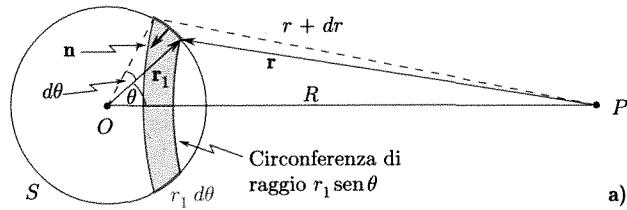
A complemento di quanto sopra detto vogliamo mostrare come l'applicazione della (5) al caso di una situazione molto semplice conduca al risultato cercato.

Si supponga (fig. 11.5a) di avere in O una sorgente puntiforme e si scelga per la superficie S una sfera con un centro in O e raggio r_1 . Sia il punto P a distanza R dalla sorgente. Il potenziale elettrodinamico V (e qualsiasi altra grandezza caratteristica) si propaga per onde sferiche. Esso vale per un punto sulla sfera S (in notazione complessa)

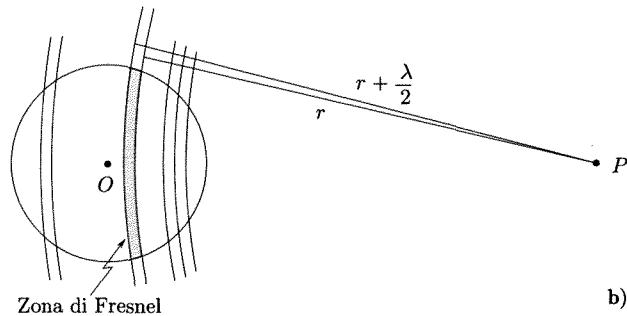
$$(6) \quad V = \frac{Ae^{j\omega(t-\frac{r_1}{v})}}{r_1}$$

e nel punto P

$$(7) \quad V_P = \frac{Ae^{j\omega(t-\frac{R}{v})}}{R}.$$



a)



b)

Fig. 11.5

Noi ora vogliamo fare vedere che lo stesso risultato (7) per V_P si ottiene come sovrapposizione delle onde sferiche aventi le caratteristiche indicate in precedenza, originate dagli elementi dS in cui la superficie della sfera può immaginarsi decomposta, cioè che il valore (7) può essere ottenuto come risultato della integrazione (5) estesa alla superficie della sfera:

$$(8) \quad V = \frac{jAe^{j\omega(t-\frac{r_1}{v})}}{2\lambda r_1} \int_S \frac{e^{-j\frac{\omega r}{v}}}{r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] dS,$$

ove ricordiamo che \mathbf{r} è il vettore da P a dS e si è tenuto conto che r_1 è costante e che l'angolo fra \mathbf{n} ed \mathbf{r}_1 è π .

L'integrale di superficie può essere utilmente trasformato in un integrale nella variabile r . Si consideri, per effettuare tale trasformazione, una serie di sfere con centro in P e raggio crescente fra il valore $r_{\min} = R - r_1$; $r_{\max} = R + r_1$. Esse

intersecano la sfera S e l'area dS compresa fra le intersezioni determinate dalle sfere di raggio r ed $(r + dr)$ è data da $dS = 2\pi r_1^2 \sin \theta d\theta$, essendo θ l'angolo formato in O fra \mathbf{r}_1 ed \overline{OP} e $d\theta$ la variazione di θ corrispondente a dr (fig. 11.5a). Si osservi che nel triangolo di lati r_1, r, R si ha

$$r^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos \theta,$$

e quindi, differenziando,

$$(9) \quad 2r dr = 2Rr_1 \sin \theta d\theta.$$

Si ottiene così

$$(10) \quad dS = \frac{2\pi r_1 r dr}{R}.$$

Prendendo come nuova variabile di integrazione r si ottiene per V :

$$(11) \quad V = \frac{j\pi A e^{j\omega(t - \frac{r_1}{v})}}{\lambda R} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} e^{-j\frac{\omega}{v}r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] dr.$$

Una valutazione approssimata dell'integrale nella (11) (integrale di Fresnel) si ottiene con il metodo delle zone di Fresnel⁽¹¹⁾. Si considerino (fig. 11.5b) sfere con centro P e raggi crescenti dal valore minimo $r_{\min} = R - r_1$ per incrementi pari a $\lambda/2$; ciascuna zona ($1, 2, \dots, n$) è determinata su S dalle intersezioni di due successive sfere con centro in P . Se quindi la superficie S viene divisa in n zone di Fresnel l'integrale nella (11) si riduce alla somma di n contributi ognuno relativo ad una zona. I contributi di due zone contigue sono quasi esattamente opposti⁽¹²⁾ e quindi con buona approssimazione si eliminano.

Per vedere più precisamente a quanto è uguale l'integrale, si osservi che esso si riduce ad una somma di n termini,

$$s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + s_n,$$

a venti segni alternativamente positivi e negativi e valori che decrescono molto lentamente. La somma può scriversi

$$\frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2} \right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2} \right) + \dots + \left(\frac{s_{n-2}}{2} - s_{n-1} + \frac{s_n}{2} \right) + \frac{s_n}{2}$$

ed essa vale approssimativamente, se n è dispari⁽¹³⁾, $(s_1 + s_n)/2$ giacché, data la lenta variazione del valore numerico dell'integrale passando da una zona alla successiva, si ha con buona approssimazione

$$(12) \quad s_h = \frac{s_{h-1} + s_{h+1}}{2}.$$

Si vede quindi che per determinare approssimativamente il valore dell'integrale nella (11) è sufficiente considerare i contributi della prima zona e dell'ultima.

Si osservi inoltre che il contributo relativo all'ultima zona (s_n) può essere posto pari a zero giacché per esso l'angolo fra \mathbf{n} ed \mathbf{r} approssima π e quindi $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ è praticamente pari a (-1) e $[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1]$ è praticamente zero.

⁽¹¹⁾ È bene osservare che questo metodo ha un interesse molto grande perché costituisce la via comunemente usata per risolvere importanti problemi (cap. 14, par. 14.3).

⁽¹²⁾ Si osservi che per due zone contigue, l'area ed il fattore di direzione $\frac{1}{2}[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)]$ hanno valori che differiscono di molto poco, mentre i fattori esponenziali di ciascun addendo sono

$$e^{-j\frac{\omega}{v}r} = e^{-j2\pi\frac{r}{\lambda}}; \quad e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\lambda}{2})} = e^{-j2\pi\frac{r}{\lambda}} e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{\omega}{v}r}.$$

essendo $e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi = -1$.

È bene sottolineare, come è possibile facilmente mostrare, che le aree delle successive zone di Fresnel costituiscono una serie i cui termini diminuiscono molto lentamente, tanto che in alcune considerazioni fatte nell'impiego delle zone di Fresnel si assume, in prima approssimazione, che tutte le zone abbiano stessa area.

⁽¹³⁾ Se n è pari essa vale $(s_1 - s_n)/2$, ma ciò non altera il seguente ragionamento.

Resta quindi esclusivamente il contributo della prima zona per la quale si può porre $[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] = 2$. Si conclude quindi

$$\begin{aligned}
 V &\simeq \frac{j\pi A e^{j\omega(t - \frac{r_1}{v})}}{\lambda R} \int_{R-r_1}^{R-r_1+\frac{\lambda}{2}} e^{-j\frac{\omega}{v}r} dr = \\
 (13) \quad &= \frac{j\pi}{\lambda} \frac{A e^{j\omega(t - \frac{r_1}{v})}}{R} \left(-\frac{v}{j\omega} \right) \left[e^{-j\frac{\omega}{v}r} \right]_{(R-r_1)}^{\left(R-r_1+\frac{\lambda}{2} \right)} = \\
 &= -\frac{A e^{j\omega(t - \frac{r_1}{v})}}{2R} \left[e^{-j\frac{\omega}{v}(R-r_1)} \left(e^{-j\pi} - 1 \right) \right] = \frac{A}{R} e^{j\omega(t - \frac{R}{v})}
 \end{aligned}$$

Tale risultato coincide con il valore atteso (7).

POLARIZZAZIONE

- ✓ La polarizzazione è una delle caratteristiche della luce che può essere ben spiegata dalla sua natura ondulatoria. Vengono definite la polarizzazione
 - rettilinea
 - circolare
 - ellitticae si mostra come sia possibile avere polarizzazione per riflessione da luce non polarizzata o per doppia rifrazione nel caso di uso di corpi anisotropi.
- ✓ L'ottica dei corpi anisotropi, che fa parte di una trattazione per corsi più avanzati, viene solo discussa nella sua parte essenziale limitandosi a *cristalli uniassici*, introducendo l'*ellissoide degli indici* e i criteri per stabilire la costruzione delle onde ordinaria e straordinaria.
- ✓ Vengono poi discussi alcuni metodi per ottenere polarizzazione (**prisma di Nicol, dicroismo** ecc.) e vari effetti.

12.1. INTRODUZIONE

Le onde e.m. e quindi la luce sono onde di tipo trasversale e per esse v'è da considerare la polarizzazione (cap. 8, par. 8.5; vol. I, cap. 9, par. 9.2). A differenza del caso di onde longitudinali, la direzione del vettore caratteristico non è individuata, esclusivamente, dalla direzione di propagazione (\mathbf{n}), giacché tale vettore può avere tutte le possibili direzioni in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

Con riferimento al caso delle onde elettromagnetiche (fig. 12.1), per onde piane sinusoidali si chiama piano di vibrazione il piano formato da \mathbf{E} e \mathbf{n} e piano di polarizzazione⁽¹⁾ quello ad esso normale formato da \mathbf{B} ed \mathbf{n} .

Piano di vibrazione
Piano di polarizzazione

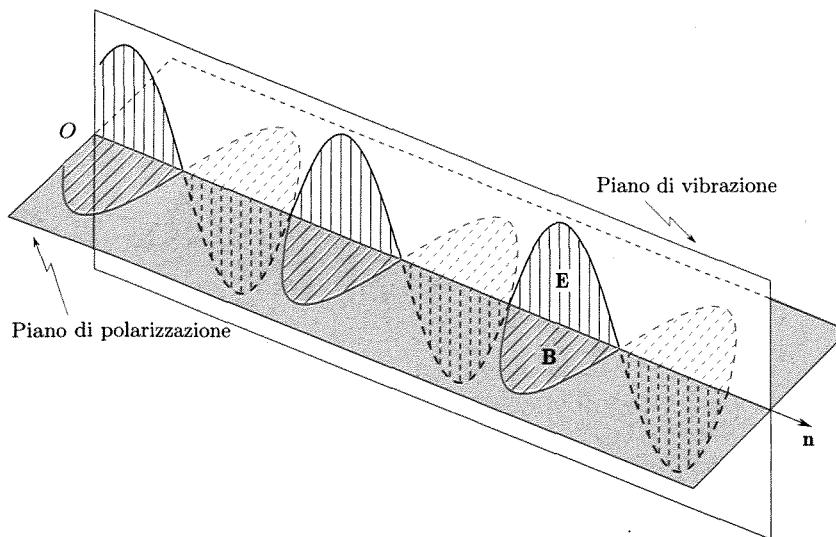


Fig. 12.1

Nel caso generale la giacitura di questo piano varia con il tempo e noi ora vogliamo fare alcune considerazioni, essenzialmente geometriche, per

⁽¹⁾ Alcuni autori chiamano piano di polarizzazione quello formato da \mathbf{E} e \mathbf{n} . La scelta di un piano come piano di polarizzazione è arbitraria, e quindi entrambe le definizioni sono lecite. Occorre perciò stare attenti alla scelta fatta all'inizio di una trattazione della polarizzazione.

distinguere i vari tipi di polarizzazione che un'onda può presentare. Faremo ciò con riferimento ad onde piane. Ricordiamo che il vettore elettrico di un'onda e.m. piana che si propaga nella direzione n

$$(1) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - vt),$$

è sempre normale a \mathbf{n} ma può avere ampiezza e direzione che variano con il tempo. Se si considerano le componenti di \mathbf{E} secondo le due direzioni fisse (x, y) normali a \mathbf{n} , ciò si rispecchia nella variazione con il tempo di E_x ed E_y .

Consideriamo il caso di un'onda piana sinusoidale (monocromatica). In tal caso le due componenti secondo x ed y si scrivono (indicando con z la direzione di propagazione)

$$(2) \quad \begin{aligned} E_x &= A_x \sin[(\omega t - kz) + \varphi_x] \\ E_y &= A_y \sin[(\omega t - kz) + \varphi_y]. \end{aligned}$$

Le caratteristiche di polarizzazione dell'onda si possono descrivere considerando come nel piano xy la direzione del vettore \mathbf{E} in un punto cambi con il tempo. Ciò può essere fatto osservando come si muove sul piano xy l'estremo del vettore \mathbf{E} . Le equazioni parametriche della curva descritta da tale punto sono:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= E_x(t) \\ y &= E_y(t). \end{aligned}$$

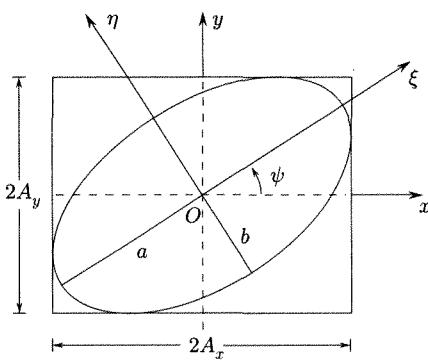


Fig. 12.2

e rappresenta in genere una ellisse. Tale ellisse è iscritta nel rettangolo con lati paralleli agli assi e di lunghezza rispettivamente $2A_x$ e $2A_y$ (fig. 12.2). Gli assi dell'ellisse (ξ, η) in genere non coincidono con x ed y . La geometria analitica consente di determinare i semiassi principali dell'ellisse (a, b) e l'inclinazione (ψ) dell'asse maggiore

$$(5) \quad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= A_x^2 + A_y^2 \\ \tan 2\psi &= \cos \Delta\varphi (\tan 2\alpha) \\ \tan \alpha &= \frac{A_y}{A_x} \end{aligned}$$

Inoltre il segno di $\sin \Delta\varphi$ individua il verso con cui la traiettoria è descritta. Esso è positivo se guardando il piano xy in verso opposto ad \mathbf{n} il punto terminale di \mathbf{E} si muove in senso orario, negativo nell'altro caso (fig. 12.3). Queste osservazioni giustificano il nome di luce polarizzata ellitticamente dato ad un'onda e.m. piana per la quale il vettore \mathbf{E} , in un

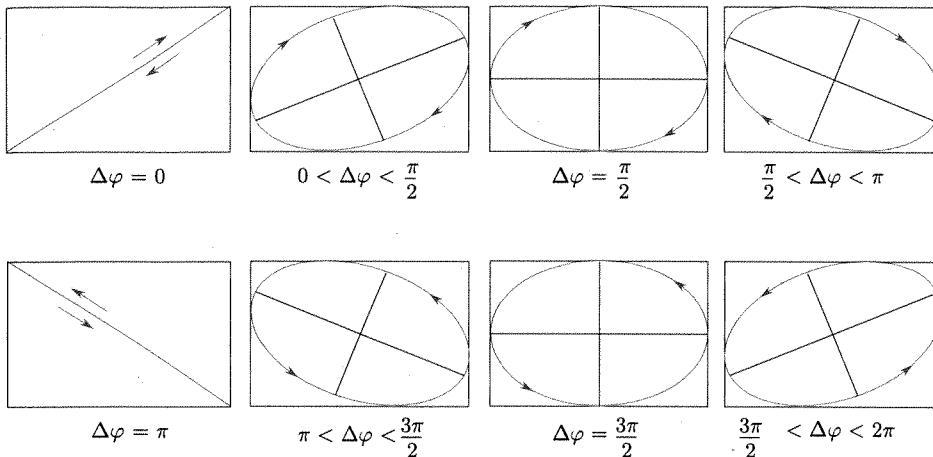


Fig. 12.3

punto varia nel tempo in modo che il suo estremo descriva una ellisse. La luce si dice a polarizzazione ellittica destra o sinistra secondo che il punto terminale di \mathbf{E} si muova sulla sua traiettoria vista in direzione opposta ad \mathbf{n} in verso orario ($\sin \Delta\varphi > 0$) o antiorario (2).

Luce polarizzata ellittica

La polarizzazione ellittica è la forma di polarizzazione più generale per un'onda piana sinusoidale. Due casi particolari di grande importanza si hanno quando l'ellisse degenera in una retta o si riduce ad un cerchio.

Il primo caso si realizza quando

$$(6) \quad \cos \Delta\varphi = m\pi,$$

Polarizzazione rettilinea

con $m = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$. Si parla allora di polarizzazione rettilinea e se si dirigono opportunamente gli assi di riferimento il campo elettrico associato all'onda può essere diretto lungo uno di tali assi (E_y) (vedi fig. 12.4a).

Il secondo caso richiede che siano soddisfatte le due condizioni

$$(7) \quad \begin{aligned} A_x &= A_y \\ \Delta\varphi &= m\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

Polarizzazione circolare

con $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Si ha allora polarizzazione circolare, destra o sinistra secondo che $\sin \Delta\varphi$ è maggiore o minore di zero.

Le precedenti considerazioni hanno fatto riferimento ad una semplice onda piana sinusoidale. Se si considera il caso della luce emessa da una sorgente termica, i treni d'onda corrispondenti ai vari fotoni sono del tutto indipendenti anche per quanto riguarda la polarizzazione. Ne segue che la luce ordinaria può essere considerata come la sovrapposizione di treni d'onda per i quali, vettori \mathbf{E} , pur essendo sempre normali alla direzione di propagazione, hanno direzioni distribuite a caso, così come avviene per le fasi relative: una luce di tale tipo si dice non polarizzata in quanto non presenta alcun fenomeno particolare legato alla polarizzazione. La figura 12.4b mostra come possono essere distribuiti in un istante ed in un

(2) È questa una convenzione che viene mantenuta per tradizione ed è opposta a quella che invece sembrerebbe più logica, cioè a quella di chiamare la polarizzazione destra o sinistra seconda che la rotazione di \mathbf{E} intorno a \mathbf{n} risulti quella di una vite destra o sinistra.

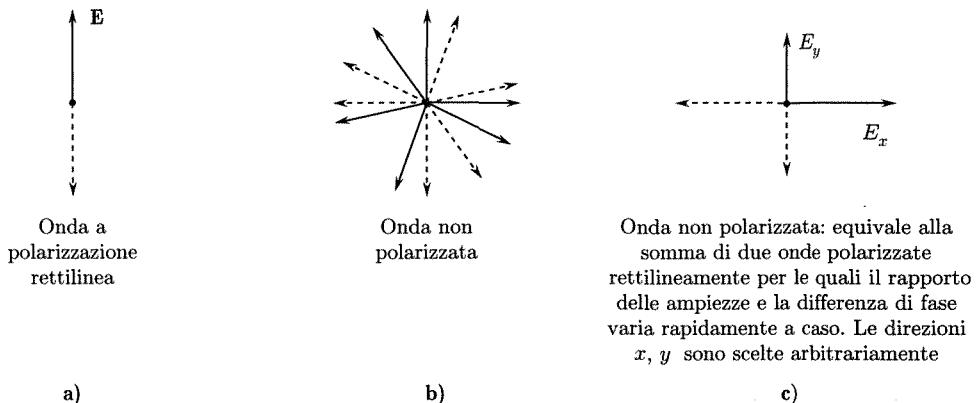


Fig. 12.4 Campo elettrico per onda piana propagarsi normalmente al foglio.

punto i vettori \mathbf{E} dei vari treni d'onda che si sovrappongono a costituire la luce. Una maniera equivalente per rappresentare lo stato delle cose per luce non polarizzata è quella di ritenere l'onda come dovuta alla sovrapposizione di due onde polarizzate in due direzioni mutuamente ortogonali scelte ad arbitrario (x, y), per le quali peraltro il rapporto delle ampiezze e la differenza di fase fluttui a caso; il valore medio dell'intensità è tuttavia uguale per le due onde (vedi fig. 12.4c).

Nei paragrafi successivi discuteremo alcune esperienze di polarizzazione; in esse di norma vengono usate onde piane. A rigore la estensione dei fronti d'onda in una qualsiasi direzione nel piano dovrebbe essere infinita; in pratica è sufficiente che tale estensione sia molto maggiore della lunghezza d'onda. Prendendo una locuzione dell'ottica geometrica (cap. 10, par. 10.1) si parla in tali casi di *fascio di raggi paralleli* o semplicemente *fascio parallelo di luce*, essendo il raggio per un punto coincidente con la direzione di propagazione dell'energia in quel punto⁽³⁾. Spesso inoltre per descrivere l'andamento dei fenomeni che interessano il sistema di onde piane, si parla di ciò che accade ad un raggio, inteso come rappresentativo del fascio parallelo che va considerato al posto delle onde piane.

■ 12.2. POLARIZZAZIONE PER RIFLESSIONE

Vogliamo ora fermarci ad esaminare un primo metodo per ottenere luce polarizzata rettilineamente da luce non polarizzata ed una esperienza che metta in evidenza la polarizzazione della luce.

Nello studio della riflessione e rifrazione di un'onda e.m. piana sinusoidale incidente sulla superficie (piana) di separazione di due dielettrici (cap. 8, par. 8.8), abbiamo visto come il vettore elettrico per ciascuna onda possa utilmente essere decomposto in due componenti, una giacente nel piano di incidenza (formato dalla direzione di propagazione \mathbf{n} dell'onda incidente e dalla normale al piano di separazione dei mezzi) ed una ad esso normale. Ciò equivale a considerare ciascuna onda come ottenuta

⁽³⁾ In mezzi isotropi, o nei quali comunque nella particolare direzione di propagazione che si considera, la velocità di propagazione non dipenda dalla direzione di polarizzazione dell'onda, il raggio in un punto è normale alla superficie d'onda.

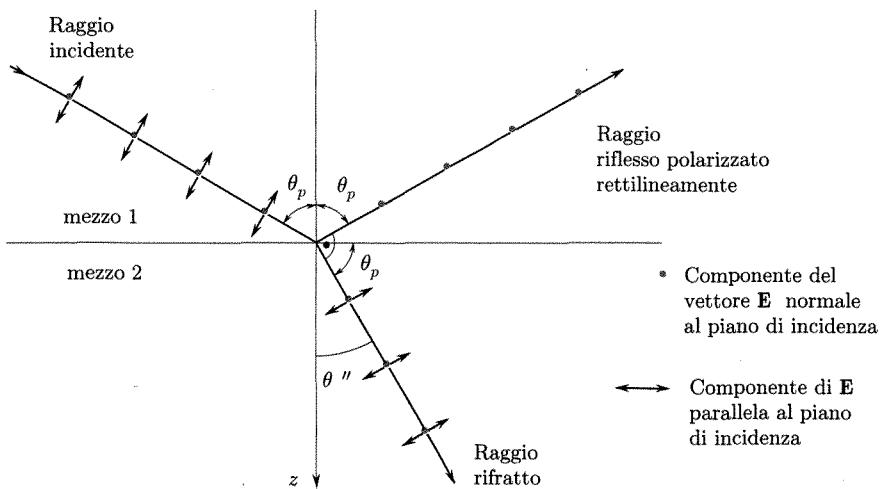


Fig. 12.5

dalla sovrapposizione di due onde polarizzate rettilineamente con i vettori elettrici nelle due direzioni assegnate.

Quando i raggi riflesso e rifratto (fig. 12.5) sono normali fra loro, cioè

$$\theta_p + \theta'' = \frac{\pi}{2}$$

l'angolo di incidenza soddisfa la condizione di Brewster⁽⁴⁾.

$$(8) \quad \tan \theta_p = n_{12} = \frac{v_1}{v_2},$$

Angolo di Brewster

essendo n_{12} l'indice di rifrazione nel passaggio dal primo al secondo mezzo. In tali condizioni, come è stato mostrato, il raggio riflesso è formato solamente da un'onda avente il vettore elettrico normale al piano di incidenza, cioè parallelo alla superficie di separazione dei due dielettrici.

Questa circostanza ci fornisce un primo metodo per avere da luce non polarizzata luce polarizzata con il vettore **E** in una determinata giacitura giacché è evidente che il ragionamento svolto per un'onda piana polarizzata rettilineamente con il vettore **E** in una qualsiasi direzione può ripetersi per i vari treni costituenti la luce non polarizzata incidente: se l'angolo di incidenza è quello di Brewster il fascio riflesso è composto esclusivamente da treni aventi il vettore **E** normale al piano di incidenza (parallelo alla superficie riflettente).

Cerchiamo ora di illustrare una esperienza⁽⁵⁾ che ponga in chiara evidenza il fenomeno della polarizzazione. Supponiamo di avere due lastre piane di vetro: in tal caso a frequenze ottiche l'indice di rifrazione rispetto all'aria è prossimo a 1,5 e θ_p è vicino a 57° . Si consideri la disposizione di figura 12.6. Un fascio parallelo di luce non polarizzata proveniente da una sorgente *S* colpisca la superficie della prima lastra (polarizzatore) con

Polarizzatore

⁽⁴⁾ L'indice di rifrazione e l'angolo di Brewster dipendono dalla frequenza. Per esempio per l'acqua si ha a frequenze ottiche per l'indice di rifrazione rispetto all'aria $n_{12} = 1.3$ e $\theta_p = 53^\circ$, mentre a frequenze radio n_{12} è circa 9 e $\theta_p = 84^\circ$.

⁽⁵⁾ La prima esperienza del genere, che portò alla scoperta della polarizzazione per riflessione, fu eseguita da E.L. Malus (1808).

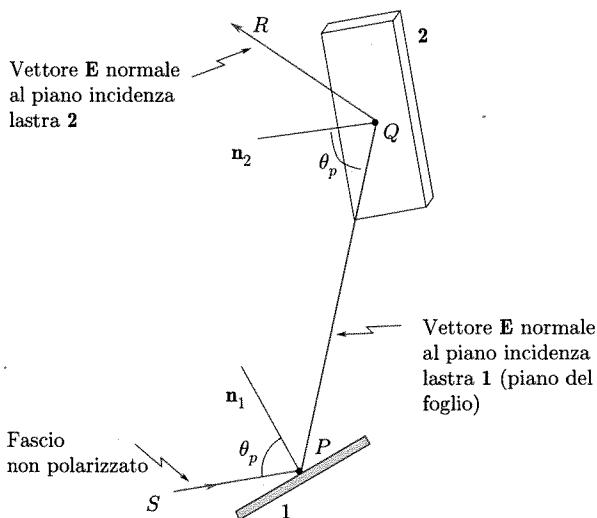


Fig. 12.6

un angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster (θ_p). La luce riflessa, in accordo alle considerazioni precedenti, è polarizzata con il vettore elettrico normale al piano di incidenza. Questo secondo fascio è portato a riflettersi sulla seconda lastra di vetro; l'angolo di incidenza è ancora θ_p sicché il secondo fascio riflesso è anche esso polarizzato ed ha il vettore elettrico normale al nuovo piano di incidenza. Si osservi che in genere il vettore **E** del primo fascio polarizzato non è normale al secondo piano di incidenza (determinato da PQ e dalla normale alla lastra 2), e che può avere infinite orientazioni pur nel rispetto della condizione che l'angolo fra PQ ed n_2 sia (θ_p)⁽⁶⁾.

Di conseguenza il vettore **E** dell'onda incidente sulla seconda lastra può decomporsi in due componenti e solo quella normale al secondo piano di incidenza determina il secondo fascio riflesso. È chiaro che facendo ruotare la lastra 2 intorno a PQ , mantenendo l'angolo di incidenza θ_p , l'intensità della luce riflessa QR sarà massima quando il piano di incidenza sulla seconda lastra viene reso normale al vettore **E** proprio del fascio PQ , e sarà nulla quando esso viene reso parallelo ad **E**⁽⁷⁾. Ruotando quindi la lastra 2 nella maniera detta (mantenendo sempre l'angolo di incidenza pari a θ_p) l'intensità del fascio riflesso passa per due valori massimi e due valori zero per ogni rotazione completa.

Il dispositivo indicato consente di verificare e confermare le considerazioni già svolte sulla polarizzazione e costituisce un primo esempio di apparecchio per l'esame pratico dello stato di polarizzazione (polariscopio): la prima lastra prende il nome di polarizzatore e la seconda di analizzatore.

Polariscopio

⁽⁶⁾ Si può pensare di far ruotare la seconda lastra intorno ad un asse diretto come PQ : l'angolo di incidenza è sempre θ_p e la normale alla lastra nel punto di incidenza descrive un cono di semiapertura θ_p .

⁽⁷⁾ Indicando con α l'angolo fra il vettore **E** dell'onda polarizzata incidente e la normale al piano di incidenza sulla seconda lastra, l'ampiezza dell'onda emergente dalla lastra 2 è proporzionale a $E \cos \alpha$ e quindi la sua intensità è proporzionale a $(E \cos \alpha)^2$ (legge di Malus).

Per completare la indicazione dei risultati sperimentali relativi alle considerazioni precedentemente svolte, la figura 12.7 (O.D. Chwolson) riporta la intensità della luce riflessa da una lastra di vetro ($n = 1,52$, $\theta_p = 56^\circ 40'$) al variare dell'angolo di incidenza per onde polarizzate con il vettore **E** normale al piano di incidenza (curva *a*), parallelo al piano stesso (curva *c*) e per onde non polarizzate (curva *b*). La curva *b* ha per ogni ascissa una ordinata che è pari alla media di quelle per le curve *a* e *c*; si vede bene che per $\theta = \theta_p$ solo l'onda con **E** normale al piano di incidenza viene riflessa.

12.3. POLARIZZAZIONE PER DOPPIA RIFRAZIONE

Nello studio dei materiali dielettrici cristallini si trova che questi, ad eccezione dei cristalli a reticolo cubico, presentano una anisotropia nella costante dielettrica e quindi nell'indice di rifrazione e nel comportamento ottico (anisotropia ottica). Da una tale situazione deriva il fenomeno della doppia rifrazione consistente nel fatto che quando un fascio parallelo (onda piana) di luce monocromatica *non polarizzata* (o polarizzata linearmente) incide sulla superficie di una lamina di un cristallo anisotropo trasparente, tranne che ciò accada in direzioni particolari, emergono dalla lamina due fasci paralleli di luce. La figura 12.8 mostra (Kodansha) un fascio parallelo di luce che entra in un cristallo di calcite e i due fasci che emergono: la figura 12.9 indica lo schema di principio della suddivisione del fascio per incidenza normale. Si trova che:

1. i due fasci emergenti sono polarizzati in direzioni perpendicolari fra loro⁽⁸⁾ e le posizioni spaziali delle direzioni di vibrazione del vettore elettrico dipendono dalla giacitura cristallografica della lamina e dalla direzione di incidenza;
2. facendo esperienze con una stessa lamina e variando l'angolo di incidenza si trova che uno dei due fasci rifratti segue le leggi normali della rifrazione. In particolare la sua direzione di propagazione giace nel piano (di incidenza) determinato dalla direzione di propagazione del fascio incidente e dalla normale al piano di incidenza ed inoltre

$$(9) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n_0,$$

con n_0 costante. Questo *fascio* per le ragioni ora dette si chiama fascio ordinario⁽⁹⁾. L'altro fascio, tranne per direzioni particolari del fascio

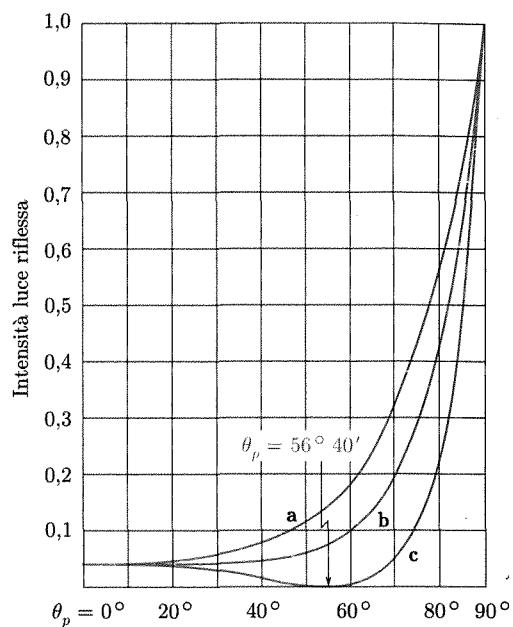


Fig. 12.7

Fascio ordinario

⁽⁸⁾ Ciò può vedersi usando come analizzatore una lastra di vetro sulla quale i due fasci incidano con un angolo pari a quello di Brewster. Ruotando lo specchio, sempre nel rispetto della condizione di Brewster, si trovano due posizioni in ciascuna delle quali si ha estinzione di uno dei fasci riflessi. Tali posizioni differiscono tra loro per una rotazione di 90° del piano di incidenza: la estinzione indica che il vettore elettrico giace nel piano di incidenza (par. 12.2). Continuando a ruotare l'analizzatore si trovano altre due posizioni, spostate di 180° rispetto alle prime, per le quali le condizioni di estinzione si presentano.

⁽⁹⁾ Riferendosi alla direzione di propagazione del fascio parallelo (onda piana) si parla anche di *raggio ordinario*.

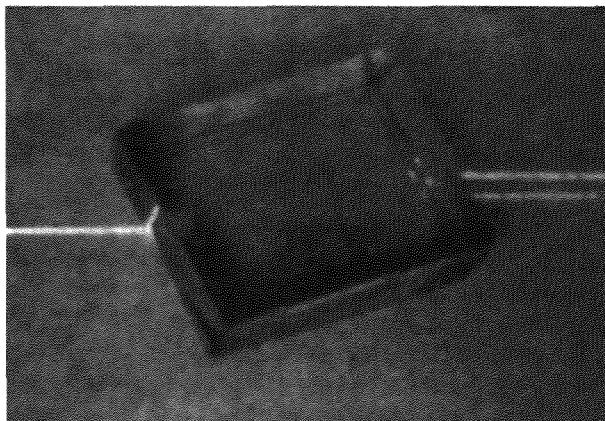


Fig. 12.8 Doppia rifrazione in calcite (Kodansha).

incidente, ha direzione di propagazione che non giace nel piano di incidenza ed inoltre il rapporto

$$(10) \quad \frac{\sin i}{\sin r}$$

può variare fra due estremi di cui uno è pari a n_0 mentre l'altro, n_1 , può essere superiore o inferiore a n_0 . Il verificarsi di questa circostanza si rende evidente per incidenza normale (fig. 12.9), in corrispondenza alla quale si osserva in genere (per giacitura cristallografica qualsiasi della lamina) una separazione dei fasci: il fascio ordinario procede nella stessa direzione del fascio incidente come è richiesto dalla (9). Il fascio che non segue le leggi ordinarie della rifrazione prende il nome di fascio straordinario⁽¹⁰⁾.

Fascio straordinario

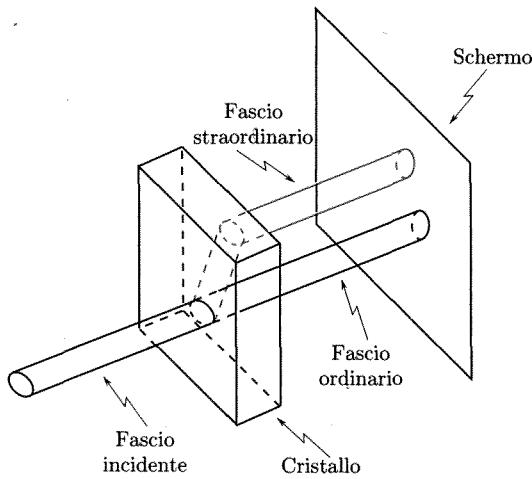


Fig. 12.9

⁽¹⁰⁾ Si parla anche di raggio straordinario con riferimento alla direzione di propagazione dell'energia (tale raggio *non* è in genere normale alle superfici d'onda).

12.4. ONDE PIANE IN CRISTALLI

In un dielettrico anisotropo⁽¹¹⁾ non resta valida la relazione stabilita per i dielettrici isotropi (cap. 2, par. 2.1)

$$(11) \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

con χ , suscettività, costante nelle varie direzioni. Limitandosi a considerare dielettrici anisotropi lineari⁽¹²⁾, essa va sostituita dalle relazioni

$$(12) \quad \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) \end{aligned}$$

le quali esprimono il fatto che le componenti di \mathbf{P} sono funzioni lineari delle componenti di \mathbf{E} . La suscettività in questo caso è rappresentata dalla matrice

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{vmatrix}$$

e vale la circostanza⁽¹³⁾

$$(14) \quad \chi_{ij} = \chi_{ji}.$$

La suscettività è un tensore simmetrico di secondo rango. Le medesime circostanze valgono per le costanti dielettriche, relative ed assolute:

$$(15) \quad \begin{aligned} (\epsilon_r)_{ij} &= \chi_{ij} + 1 \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_0 (\epsilon_r)_{ij}. \end{aligned}$$

Per effetto della anisotropia i vettori \mathbf{E} e \mathbf{P} non sono in genere più paralleli e lo stesso accade per i vettori \mathbf{E} e \mathbf{D} , restando peraltro sempre valida la relazione:

$$(16) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Nello scrivere le (12) gli assi x, y, z sono stati presi senza una particolare scelta. Sulla base delle condizioni (14) è possibile stabilire con considerazioni di geometria analitica che le (12) si semplificano per una particolare scelta degli assi: tali assi, legati alle caratteristiche del cristallo, prendono il nome di assi dielettrici principali. Facendo riferimento ad essi, che per semplicità indicheremo ancora xyz , si hanno le relazioni

$$(17) \quad \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 \chi_x E_x \\ P_y &= \epsilon_0 \chi_y E_y \\ P_z &= \epsilon_0 \chi_z E_z \end{aligned}$$

Relazioni riferite agli assi principali

⁽¹¹⁾ I cristalli dielettrici che non siano cubici presentano tutti, in grado diverso, effetti di anisotropia; inoltre l'applicazione di campi elettrici abbastanza intensi induce anisotropia in materiali (solidi, liquidi) normalmente isotropi. Questi effetti sono in genere piccoli e di scarso interesse per le applicazioni dei dielettrici stessi in campi continui o di bassa frequenza, ma assumono importanza nei riguardi della propagazione di onde e.m.

⁽¹²⁾ Per i quali cioè i vettori \mathbf{P} e \mathbf{D} sono funzioni lineari di \mathbf{E} , e quindi è valido il principio di sovrapposizione.

⁽¹³⁾ Tale circostanza vale tranne nei casi nei quali la sostanza presenti una asimmetria che faccia distinguere una forma (cristallografica) destra da una sinistra.

$$(18) \quad \begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 \epsilon_{rx} E_x \\ D_y &= \epsilon_0 \epsilon_{ry} E_y \\ D_z &= \epsilon_0 \epsilon_{rz} E_z \end{aligned}$$

Ciò significa che se il campo elettrico è applicato nella direzione di uno dei tre assi principali i vettori \mathbf{P} e \mathbf{D} hanno la stessa direzione di \mathbf{E} , come accade nei mezzi isotropi.

L'applicazione delle equazioni di Maxwell per lo studio della propagazione in un dielettrico anisotropo va fatta come nel caso dei mezzi isotropi con la sola differenza che per caratterizzare il mezzo al posto della relazione ⁽¹⁴⁾

$$(19) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

vanno usate le relazioni che si ricavano dalle (12), o dalle (17) nel caso che il sistema di riferimento usato sia quello formato dagli assi principali. Noi considereremo quest'ultima scelta degli assi e quindi le relazioni tra \mathbf{D} ed \mathbf{E} sono date dalle (18). Naturalmente potremo in genere ancora supporre che il mezzo sia magneticamente isotropo (μ_r indipendente dalla direzione) ed anzi nei cristalli trasparenti che qui interessano supporremo $\mu_r = 1$.

In maniera del tutto generale, se si considera un'onda piana monocromatica ⁽¹⁵⁾, di frequenza $\nu = \omega/2\pi$, che si propaga in un mezzo anisotropo in una direzione individuata dal versore \mathbf{s} normale al fronte d'onda, con la velocità di fase $v_f = c/n$, le equazioni di Maxwell mostrano che:

- a. i vettori \mathbf{B} (ed \mathbf{H}) e \mathbf{D} risultano normali a \mathbf{s} ; siccome peraltro in genere \mathbf{E} non è parallelo a \mathbf{D} ma forma con esso un angolo α (fig. 12.10), il vettore \mathbf{E} non è perpendicolare a \mathbf{s} ed ha quindi una componente parallela a \mathbf{s} ;
- b. se si considera il vettore di Poynting

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

esso ha direzione (τ) normale a \mathbf{B} ed \mathbf{E} e quindi il flusso di energia avviene in una direzione diversa dalla direzione di propagazione del fronte d'onda. La velocità (*del raggio o dell'energia*) v_r con cui si propaga l'energia è legata alla velocità di fase dalla relazione

$$(20) \quad v_f = v_r \cos \alpha$$

e v'è luogo a considerare un indice di rifrazione, detto *di raggio o dell'energia*,

$$(21) \quad n_r = \frac{c}{v_r},$$

- c. I vettori \mathbf{s} , τ , \mathbf{D} ed \mathbf{E} giacciono nello stesso piano (normale a \mathbf{B}) (fig. 12.10).

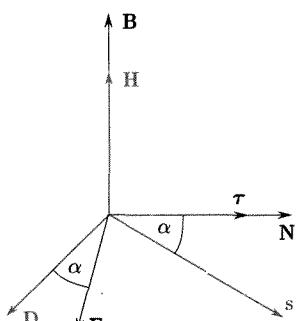


Fig. 12.10

⁽¹⁴⁾ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$.

⁽¹⁵⁾ Si ricordi che in genere le costanti dielettriche dipendono dalla frequenza (dispersione). Nelle considerazioni che qui si fanno ci si limita ad onde monocromatiche.

Queste conclusioni sono generali perché dedotte dalle equazioni di Maxwell applicate ad un mezzo anisotropo qualsiasi (**D** ed **E** aventi diverse direzioni) e possono essere rese più particolari se si tiene conto delle relazioni che esprimono per un materiale dielettrico **D** (o **P**) in funzione di **E**.

Si trova allora che la struttura di un mezzo anisotropo, quale descritta dalle (18), è tale che in una direzione qualsiasi (**s**) si possono propagare due onde aventi i vettori **D** (\mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2) normali tra loro e velocità di fase v_f diverse⁽¹⁶⁾.

È possibile mostrare che una costruzione geometrica abbastanza semplice può essere usata per associare ad ogni **s** le direzioni dei vettori \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 e le velocità di propagazione. Scelti come assi x , y , z , gli assi dielettrici principali del cristallo, si consideri la superficie avente equazione

$$(22) \quad \frac{x^2}{\varepsilon_{rx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{ry}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{rz}} = 1.$$

Si tratta di un ellissoide (fig. 12.11) avente semiassi nelle direzioni x , y , z rispettivamente pari a $\sqrt{\varepsilon_{rx}}$, $\sqrt{\varepsilon_{ry}}$, $\sqrt{\varepsilon_{rz}}$. Se si ricorda che l'indice di rifrazione è

$$(23) \quad n = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\varepsilon_r} \sqrt{\mu_r}$$

si comprende il nome di ellissoide degli indici⁽¹⁷⁾ dato alla superficie (22).

Si osservi bene che ciascun semiasse fornisce l'indice di rifrazione relativo ad un'onda che ha il vettore **D** nella direzione del semiasse. Indichiammo questi indici con i simboli

$$(24) \quad n_x = \frac{c}{v_{fx}}, \quad n_y = \frac{c}{v_{fy}}, \quad n_z = \frac{c}{v_{fz}}.$$

Si badi che l'indice (x, y, z) si riferisce non alla direzione di propagazione (**s**) ma alla direzione di vibrazione di **D**. Se, per esempio, si considera un'onda che si propaga avendo il vettore **D** nella direzione del semiasse x , la direzione di propagazione potrebbe essere una qualsiasi direzione normale ad x e la propagazione avverrebbe sempre con la velocità di fase v_{fx} (ed indice n_x).

L'utilità dell'ellissoide degli indici si palesa nel caso che si consideri una direzione di propagazione **s** diversa da uno degli assi principali. Si è detto che la teoria mostra che si hanno due onde caratterizzate da vettori **D** normali ad **s** e che si propagano con velocità di fase diverse. È possibile mostrare la validità della seguente regola.

Si riporti (fig. 12.12) **s** dal centro dell'ellissoide (**C**) e si consideri un piano per **C** normale ad **s**; esso interseca l'ellissoide secondo una ellisse: le direzioni dei suoi semiassi sono quelle dei vettori **D** (\mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2) associati ad **s** e le lunghezze dei due semiassi forniscono gli indici di rifrazione c/v_f relativi alle due onde. La terna **s**, \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 è ortogonale.

Si può inoltre mostrare che per la determinazione delle direzioni di vibrazione del vettore **E** per le due onde associate alla direzione **T** (vettore di Poynting) del

Ellissoide degli indici

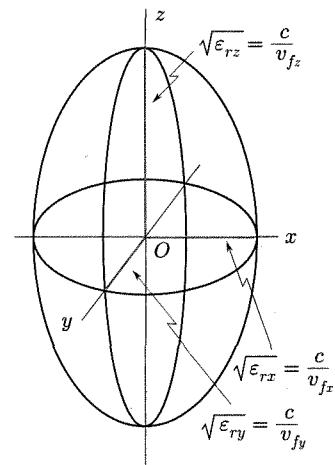


Fig. 12.11

Uso dell'ellissoide degli indici

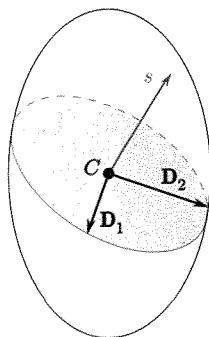


Fig. 12.12

⁽¹⁶⁾ Le stesse conclusioni si ottengono facendo riferimento ai vettori **E** (\mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2) (normali a **r**) ed alle velocità di raggio.

⁽¹⁷⁾ Esso è chiamato anche ellissoide di Fresnel.

flusso di energia si può considerare, in maniera analoga, il cosiddetto *ellissoide dei raggi*

$$(25) \quad \varepsilon_{rx}x^2 + \varepsilon_{ry}y^2 + \varepsilon_{rz}z^2 = 1.$$

Il piano normale a τ per il centro dell'ellissoide taglia tale superficie lungo un'ellisse che gode delle proprietà:

1. i vettori \mathbf{E} per le due onde sono diretti come gli assi;
2. le lunghezze dei semiassi forniscono i valori di

$$\frac{v_r}{c}.$$

La terna formata da τ e dai vettori \mathbf{E} per le due onde è ortogonale.

I vari sistemi cristallografici possono essere suddivisi in tre gruppi a seconda della forma particolare che prendono gli ellissoidi ora considerati. Il primo gruppo è quello per il quale l'ellissoide (degli indici o dei raggi) si riduce ad una sfera ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$); esso comprende solamente il sistema cubico: il cristallo è otticamente isotropo ed equivale ad un corpo amorfo.

Per il secondo gruppo gli ellissoidi sono di rotazione: v'è una direzione particolare (z) (asse ottico) tale che la sezione dell'ellissoide con un piano normale a z per il centro è un cerchio ($\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$). Questo gruppo comprende i sistemi trigonale, tetragonale ed esagonale ed i cristalli si dicono otticamente uniassici.

Il terzo gruppo è caratterizzato dal fatto che per i tre assi principali $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$; esso comprende i sistemi triclini, monoclini ed ortorombici ed i cristalli si dicono otticamente biassici⁽¹⁸⁾.

Continueremo le nostre considerazioni limitandoci al caso di *cristalli uniassici*.

12.5. ONDE ORDINARIA E STRAORDINARIA IN CRISTALLI UNIASSICI

Nel presente paragrafo vogliamo indicare i risultati che si ottengono applicando le equazioni di Maxwell alla propagazione di onde piane in un cristallo uniassico; vogliamo cioè vedere come si esprimano in dettaglio in questo caso le considerazioni del paragrafo precedente.

Indichiamo con z l'asse ottico. Nella figura 12.13 sono riportate le due possibili forme dell'ellissoide degli indici secondo che il semiasse nella direzione dell'asse ottico ($\sqrt{\varepsilon_z} = c/v_z$) sia maggiore (a) o minore (b) del raggio della sezione normale all'asse ottico per il centro ($\sqrt{\varepsilon_x} = \sqrt{\varepsilon_y} = c/v_x = c/v_y$).

Per una direzione s , la costruzione indicata al paragrafo precedente consente di determinare le direzioni dei vettori $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ delle due onde associate a s : la sezione dell'ellissoide con un piano normale a s per il centro è un'ellisse e le direzioni cercate sono quelle dei suoi semiassi, mentre le velocità di fase corrispondenti sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei semiassi.

⁽¹⁸⁾ Il nome deriva dalla circostanza nota dalla geometria che esistono due direzioni (inclinate rispetto agli assi principali) caratterizzate dal fatto che la sezione dell'ellissoide con piani per il centro ad esse normali sono cerchi.

Materiali isotropi

Uniassici

Biassici

Caratteristiche
delle onde

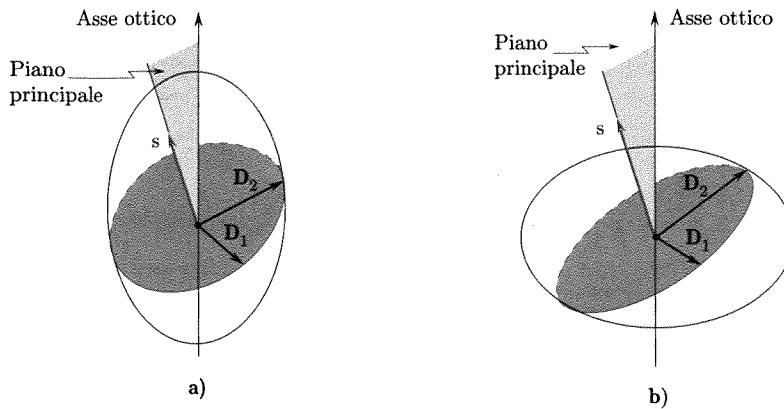


Fig. 12.13

Vogliamo caratterizzare ulteriormente le due onde. Si consideri perciò in corrispondenza ad una direzione di propagazione s il piano determinato da s e dall'asse ottico (z): esso prende il nome di piano principale. È evidente che i vettori D per le due onde associate ad s giacciono rispettivamente nel piano principale (D_2) e normalmente ad esso (D_1). Si osservi ancora che al variare di s il vettore D che vibra normalmente al piano principale (cioè D_1) corrisponde ad un'onda che si propaga nella direzione s con una velocità indipendente da tale direzione: il semiasse corrispondente della ellissi intersezione con l'ellissoide degli indici del piano normale a s per il centro ha sempre la stessa lunghezza. È possibile inoltre mostrare che per quest'onda accade che il vettore E è parallelo a D e quindi normale alla direzione di propagazione (fig. 12.14a). Si conclude quindi che l'onda avente il vettore D (ed E) vibrante in direzione normale al piano principale ha la seguente proprietà:

1. si propaga con la stessa velocità di fase qualunque sia s ;
2. la direzione di propagazione dell'energia (τ) e la velocità corrispondente (v_r) coincidono rispettivamente con la direzione dell'onda (s) e con la velocità di fase.

Sono queste le proprietà delle onde piane propagantesi in un mezzo dielettrico isotropo ordinario e perciò l'onda in considerazione prende il nome di onda ordinaria. D'ora in poi indicheremo con un indice particolare i vettori corrispondenti $D_0 = D_1$; $E_0 = E_1$; $v_0 = v_f$.

Onda ordinaria

La seconda onda associata a s , quella caratterizzata da un vettore D (cioè D_2) vibrante nel piano principale è tale che il corrispondente vettore E (cioè E_2) ha direzione diversa da D : esso peraltro giace nel piano determinato da s e l'asse ottico (fig. 12.14b) ed è complanare con D e τ . La direzione di propagazione dell'energia (τ) e la corrispondente velocità (v_r) non coincidono rispettivamente con la direzione di propagazione dell'onda (s) e con la velocità di fase. Quest'ultima inoltre varia con s , più propriamente

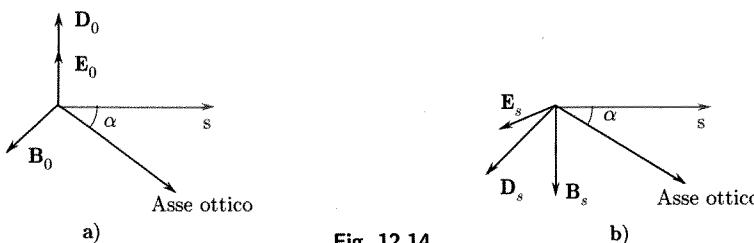


Fig. 12.14

Onda straordinaria

mente dipende dall'angolo (α) fra \mathbf{s} e l'asse ottico; essa varia fra il valore v_0 (per $\alpha = 0$) ed un altro valore limite v_s per $\alpha = \pi/2$. Questa onda, per la quale il vettore \mathbf{D} vibra nel piano principale, ha, come si vede, caratteristiche notevolmente diverse da quelle delle onde nei mezzi isotropi e prende il nome di onda straordinaria. Indicheremo con un pendice s , i vettori \mathbf{D} ed \mathbf{E} ad essa relativi: $\mathbf{D}_s = \mathbf{D}_2$; $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_2$.

È bene osservare che ai due tipi di ellisoidi di rotazione possibili per i cristalli uniassici di figura 12.13 corrispondono le seguenti condizioni per le velocità delle onde ordinarie e straordinarie; ellissoide di figura 12.13a: $v_0 > v_s$, l'onda ordinaria viaggia con velocità superiore a quella dell'onda straordinaria ed il cristallo è detto *uniassico positivo* (per es. quarzo).

Ellissoide di figura 12.13b: $v_0 < v_s$, l'onda ordinaria è più lenta della straordinaria ed il cristallo uniassico è detto *negativo* (per es. calcite).

La tabella 12.1 indica i valori di $n_0 = c/v_0$ ed $n_s = c/v_s$ per alcuni cristalli uniassici per la luce monocromatica del sodio ($\lambda = 5.890 \text{ \AA}$):

Tabella 12.1

	n_0	n_s	$n_0 - n_s$
Quarzo (SiO_2)	1,309	1,313	+0,004
Wurzite (ZnS)	2,356	2,378	+0,009
Calcite (CaCO_3)	1,658	1,486	-0,172
Dolomite ($\text{CaO} ; \text{MgO} ; 2\text{CO}_2$)	1,681	1,500	-0,181

12.6. DOPPIA RIFRAZIONE IN CRISTALLI UNIASSICI

La spiegazione del fenomeno della doppia rifrazione sulla base delle considerazioni dei paragrafi precedenti, cioè dell'applicazione delle equazioni di Maxwell alla propagazione nei mezzi anisotropi, può essere fatta seguendo la stessa via usata (cap. 8, par. 8.8) per la rifrazione al passaggio fra due mezzi isotropi; imponendo cioè le condizioni di continuità per il vettore campo elettrico (componente tangenziale) sulla superficie di separazione.

Tuttavia una maniera abbastanza approssimata per le nostre considerazioni intese a mostrare in modo essenzialmente qualitativo il presentarsi del fenomeno, si può avere estendendo la applicabilità del principio di Huygens ai mezzi anisotropi.

Ricordiamo che secondo tale principio per ottenere il fronte d'onda nell'istante $(t + \Delta t)$ dal fronte d'onda all'istante t , occorre supporre che i punti del fronte d'onda all'istante t divengano sorgenti puntiformi di nuove onde e l'inviluppo dei fronti d'onda di tali ondine dopo la propagazione per un intervallo Δt fornisce il fronte d'onda cercato. Se si vuole applicare questo principio ad un mezzo anisotropo occorre tenere presente che per ogni direzione sono possibili due onde che si propagano con diverse velocità ed occorre determinare la forma delle ondine procedenti da un punto. È chiaro che il fronte dell'onda emergente da un punto dopo un intervallo Δt è il luogo dei punti raggiunti dalla perturbazione all'istante considerato.

Nel caso di un mezzo isotropo, quando la velocità di propagazione è la stessa in tutte le direzioni, il fronte dell'onda emergente da una sorgente puntiforme dopo un tempo Δt di propagazione è una sfera di raggio $(v\Delta t)$. Per ottenere la forma delle due superfici d'onda emergenti da una sorgente puntiforme in un mezzo anisotropo si può fare la costruzione in figura 12.15: per ogni direzione uscente dal punto si riportino due segmenti pari a $v\Delta t = (c/n)\Delta t$ per l'onda ordinaria e straordinaria

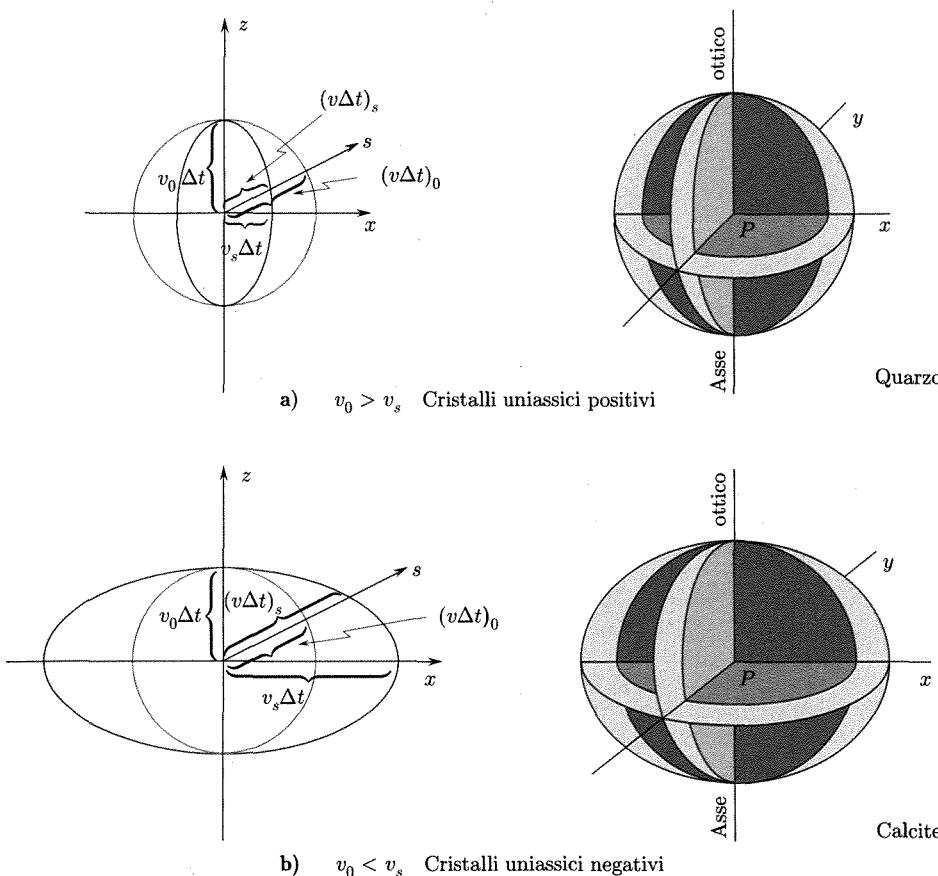


Fig. 12.15

in quella direzione [rispettivamente $(v\Delta t)_0$ e $(v\Delta t)_s$]: il fronte d'onda è il luogo dei punti terminali di tali segmenti. La forma della superficie d'onda per l'onda ordinaria è una sfera come per il mezzo isotropo: la superficie d'onda per l'onda straordinaria è un ellissoide di rotazione avente l'asse di rotazione coincidente con la direzione dell'asse ottico nel cristallo. La sfera e l'ellissoide sono tangenti nel punto di intersezione con l'asse ottico.

Nella figura sono indicate come appaiono nello spazio le superfici d'onda ottenute con la costruzione ora illustrata per cristalli uniassici positivi e negativi.

Cerchiamo ora di esaminare la rifrazione in cristalli anisotropi uniassici: per concretezza riferiamoci ad un caso particolare, per es. la calcite. La figura 12.16 mostra⁽¹⁹⁾ la forma del cristallo e la posizione dell'asse ottico. Si supponga (fig. 12.17) che un'onda piana monocromatica proveniente dal vuoto (o dall'aria) incida su una superficie piana del cristallo e, per il momento, supponiamo ancora che l'asse ottico giaccia nel piano di incidenza (piano del foglio, nella figura). Consideriamo il caso di incidenza normale e poniamo attenzione all'onda incidente ed alle onde rifatte⁽²⁰⁾. Il fronte d'onda investa all'istante $t = 0$ il tratto AC della superficie. Ciascun punto P (come A, B, C) diviene sorgente di due ordine nel mezzo anisotropo e queste dopo un tempo Δt hanno la forma di una mezza sfera di raggio $v_0\Delta t$ e di un mezzo ellissoide. Quest'ultimo è tangente alla sfera nel punto in cui questa incontra la retta per P avente la direzione dell'asse ottico; l'altro semiasse dell'ellissoide (normale all'asse

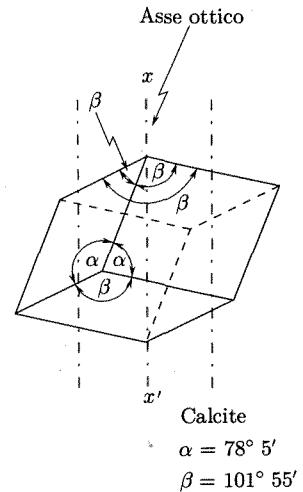


Fig. 12.16

⁽¹⁹⁾ Il cristallo di calcite ha la forma di romboedro e ciascuna faccia è un parallelogramma avente angoli pari a $78^\circ 5'$ e $101^\circ 55'$. L'asse ottico ha la direzione di una retta che passa per il vertice meno acuto e che forma angoli uguali con le tre facce che concorrono nel vertice.

⁽²⁰⁾ Non si consideri cioè l'onda riflessa.

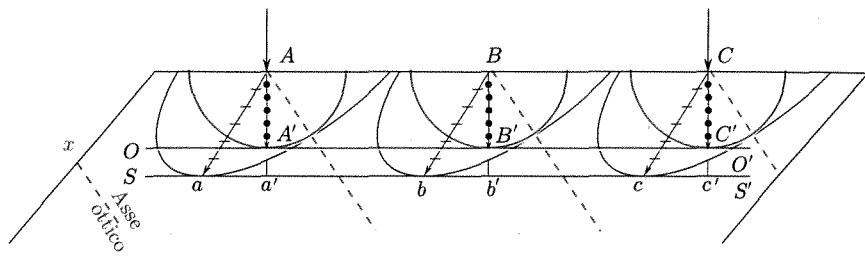


Fig. 12.17

ottico) ha lunghezza pari a $v_s \Delta t$. L'inviluppo delle mezze sfere fornisce il fronte d'onda (OO') dell'onda ordinaria e quello degli ellisoidi il fronte (SS') dell'onda straordinaria. Se si congiunge un punto qualsiasi della superficie di separazione (per es. B) con il punto di tangenza dell'ondina da esso precedente con il fronte d'onda all'istante ($t + \Delta t$) si ottiene sia per l'onda ordinaria sia per quella straordinaria la direzione di propagazione del raggio e dell'energia. I rapporti $BB'/\Delta t$ e $Bb/\Delta t$ forniscono per le due onde le velocità di raggio, cioè la velocità con cui si propaga la energia: per onda ordinaria essa coincide con la velocità (di fase) con cui l'onda avanza nella direzione normale alla superficie d'onda; per l'onda straordinaria la velocità di raggio è diversa (nel caso considerato della calcite è maggiore) della velocità $Bb'/\Delta t$ (di fase) con cui l'onda avanza attraverso il cristallo in direzione normale alla superficie d'onda.

Nel caso considerato in figura, in cui l'asse ottico giace nel piano della figura i punti di tangenza dei fronti d'onda con le ondine procedenti da punti della superficie di separazione che si trovano nel piano della figura giacciono nel piano stesso.

La polarizzazione (vettore \mathbf{D}) dell'onda ordinaria è normale al piano della figura che è il piano principale, mentre quella dell'onda straordinaria è nel piano della figura.

Nel caso considerato in figura 12.17 è evidente che l'onda ordinaria è normale alla superficie di separazione in accordo al fatto già riscontrato che per essa sono valide le leggi comuni stabilite per la rifrazione in un mezzo isotropo. Questo non è vero per l'onda straordinaria.

L'andamento del processo dipende notevolmente, sempre per l'incidenza normale, dalla posizione dell'asse ottico. Noi abbiamo, nel caso ora esaminato, supposto che l'asse ottico giesesse nel piano del foglio. Se ciò non è l'inviluppo delle ondine è tangente ad uno qualsiasi degli ellisoidi costruiti a partire da un punto P sulla superficie di separazione posta sul foglio, in un punto P' che è fuori dal foglio; ciò significa che il raggio straordinario non giace nel piano di incidenza.

Particolarmente interessante è il caso in cui l'asse ottico è parallelo o perpendicolare alla superficie di separazione. Le figure 12.18a e b si riferiscono ancora a cristalli di calcite. In entrambi i casi i raggi, ordinario e straordinario, procedono nella stessa direzione del raggio incidente ed inoltre le velocità di raggio sono pari alle velocità (di fase) con cui il fronte d'onda avanza in direzione normale ad esso. Nel caso peraltro che l'asse ottico sia parallelo alla superficie di separazione (b) le velocità delle due onde sono diverse (per la calcite l'onda straordinaria avanza più rapidamente di quella ordinaria) e ciò ha notevoli conseguenze sul comportamento delle lame attravurate da luce, dato che le due onde (ordinaria e straordinaria) hanno polarizzazioni normali fra loro. Nel caso invece di asse ottico normale alla superficie di separazione (fig. 12.18a) i due raggi procedono con la stessa velocità.

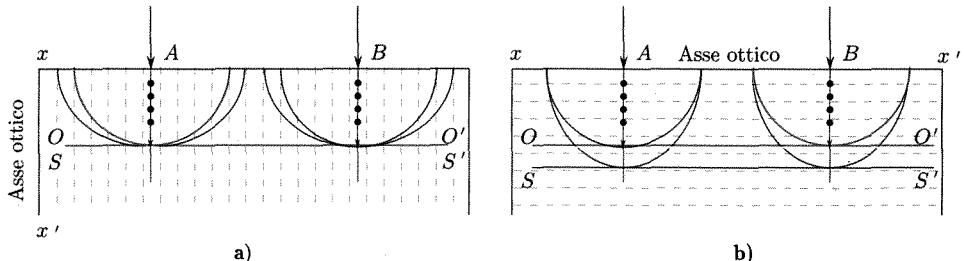


Fig. 12.18

Le costruzioni precedenti possono essere estese al caso di incidenza non normale. Supponiamo ancora che l'asse ottico giaccia nel piano di incidenza e che si tratti ancora della calcite (fig. 12.19). Il fronte d'onda AC di un'onda piana incida con l'angolo i sulla superficie del cristallo e raggiunga tale superficie in A all'istante $t = 0$. Si consideri la situazione all'istante $t = CB/c$ cioè quando C raggiunga la superficie.

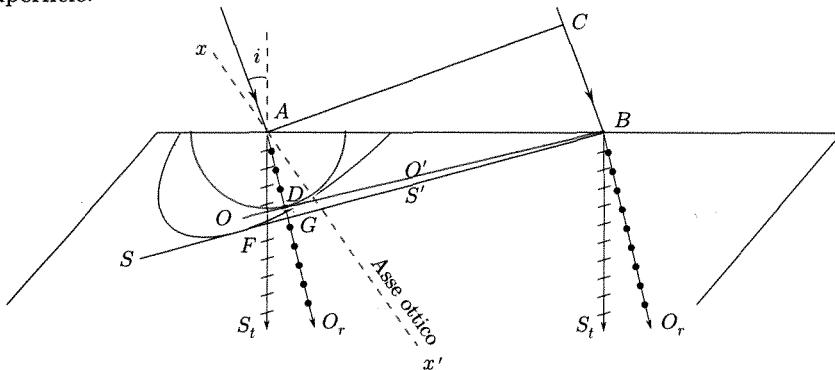


Fig. 12.19

Le onde emesse nel mezzo anisotropo all'istante $t = 0$ in A raggiungono una posizione che si costruisce con le regole già date; i fronti d'onda cercati sono piani che hanno come tracce nel piano del disegno le tangenti da B rispettivamente alla semisfera ed al semiellissoide.

La figura 12.20 mostra le costruzioni nel caso che l'asse ottico sia parallelo (a, b) e perpendicolare (c) alla superficie di separazione.

Se l'asse ottico non si trova nel piano di incidenza, il raggio straordinario non giace nel piano di incidenza.

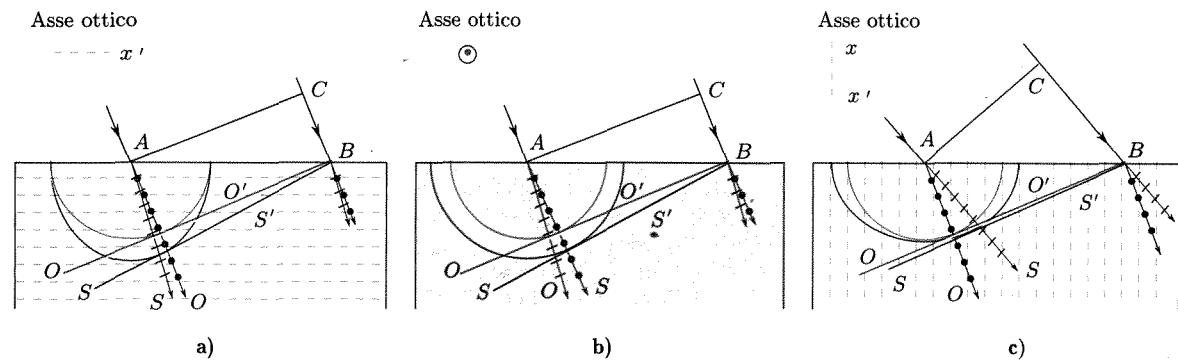


Fig. 12.20

■ 12.7. POLARIZZATORI PER DOPPIA RIFRAZIONE. PRISMA DI NICOL

Il fenomeno della doppia rifrazione può essere usato per ottenere da un fascio di luce monocromatica non polarizzata un fascio polarizzato.

Se infatti si invia un fascio parallelo (onda piana) di luce monocromatica naturale su una lamina di un materiale anisotropo avente sufficiente spessore, secondo lo schema di figura 12.9 si possono avere emergenti due fasci polarizzati linearmente, paralleli fra loro e sufficientemente distanti in modo che uno di essi possa essere eliminato.

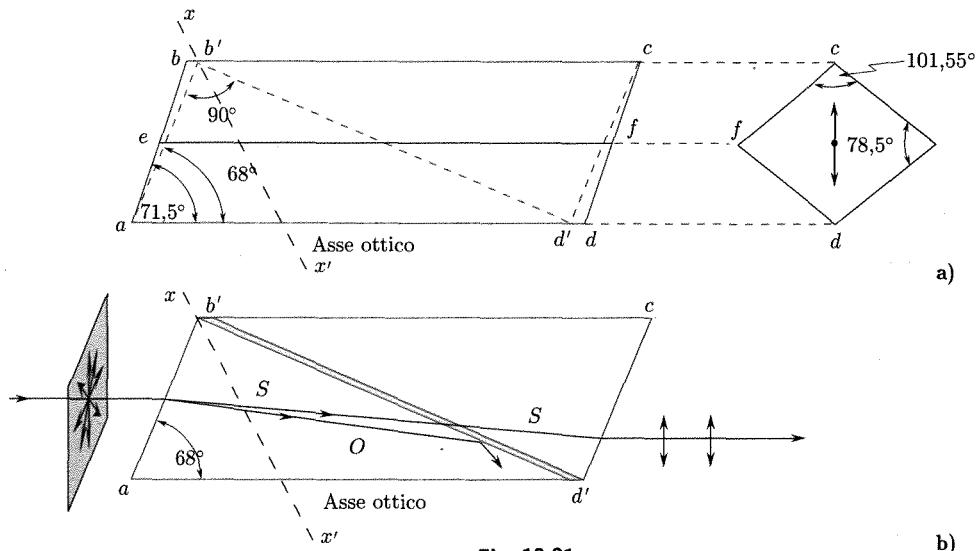


Fig. 12.21

Prisma di Nicol

Un metodo usato molto più comunemente per ottenere fasci polarizzati di notevoli dimensioni trasversali, senza ricorrere a cristalli molto spessi, è quello del prisma di Nicol. Tale prisma è costruito a partire da un cristallo di calcite. La forma di una sezione di un tale cristallo è indicata a tratto continuo nella figura 12.21a. Il cristallo naturale viene lavorato levigando le due superfici terminali in modo da rendere gli angoli acuti in a e c ancora più acuti (da $71,5^\circ$ a 68°); il cristallo viene inoltre tagliato lungo la diagonale corta $b'd'$ e le due parti sono cementate di nuovo fra loro con l'interposizione di balsamo del Canada, un mastice trasparente avente indice di rifrazione pari a circa 1,53. Se si considera un fascio parallelo di luce naturale che incida sulla faccia $b'a$ nella direzione parallela a $b'c$ ⁽²¹⁾ si origina un fascio ordinario ed uno straordinario che hanno le posizioni indicate in figura 12.21b. Si trova che l'indice di rifrazione per il raggio ordinario, $n_0 = 1,66$, è maggiore di quello del balsamo, mentre quello per il raggio straordinario, $n = 1,49$, è inferiore a quello del balsamo stesso.

Per il raggio ordinario, all'interfaccia cristallo-balsamo si può verificare la riflessione totale ed infatti essa si verifica per l'angolo di incidenza che è realizzato⁽²²⁾: tale raggio è successivamente eliminato lateralmente dal cristallo. Il raggio straordinario attraversa il dispositivo ed emerge nella direzione del raggio incidente. La direzione di vibrazione del vettore D per il raggio straordinario emergente giace nel piano della sezione principale.

I prismi di Nicol sono molto usati come polarizzatori ed analizzatori in disposizioni per lo studio dei processi in luce polarizzata.

12.8. DICROISMO

Alcuni cristalli birifrangenti posseggono la proprietà di assorbire in maniera diversa onde piane polarizzate rettilineamente con il vettore E che vibra in due particolari direzioni normali fra loro (vibrazioni ordinaria e straordinaria); questo fenomeno prende il nome di dicroismo. Un cristallo di questo tipo è la tormalina.

Si comprende come una lamina di un cristallo di questo genere, purché abbia sufficiente spessore, può essere usata per ottenere da un fascio parallelo di luce naturale luce polarizzata secondo lo schema di figura 12.22.

⁽²¹⁾ O al più formante un piccolo angolo ($< 10^\circ$) con tale direzione.

⁽²²⁾ La riflessione totale per il raggio ordinario alla prima superficie di separazione calcite-balsamo avviene per un angolo di incidenza maggiore di 69° .

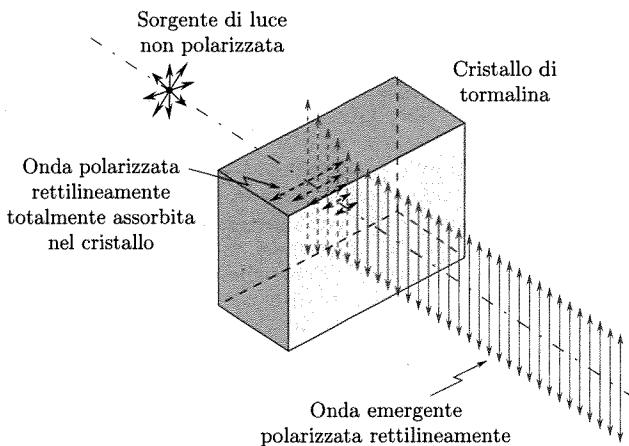


Fig. 12.22

La proprietà del dicroismo è posseduta, per luce di tutte le lunghezze d'onda, anche da cristalli sintetici di solfati di iodochinino; ciò ha consentito di sviluppare materiali (lamine polaroid *H*) formate da un supporto plastico trasparente in cui sono disposti cristalli aghiformi di solfato di iodochinino aventi assi paralleli. Lamine di questi materiali funzionano bene come polarizzatori per fasci di grande sezione.

Più recentemente è stato sviluppato un altro materiale polarizzante (lamine polaroid *K*) in cui non vi sono cristalli; si tratta di un foglio di una sostanza plastica [alcool polivinilico ($-\text{CH}_2 - \text{CHOH}-$)_{*n*}] caratterizzata da molecole molto lunghe.

Si è trovato che stirando meccanicamente il foglio in una direzione si produce un allineamento delle lunghe molecole e se successivamente si introduce mediante impregnazione iodio nel foglio, esso acquista un forte dicroismo.

■ 12.9. LAMINE RITARDATRICI

Le proprietà ottiche di lamine di cristalli uniassici possono essere utilizzate per alterare lo stato di polarizzazione di un'onda piana.

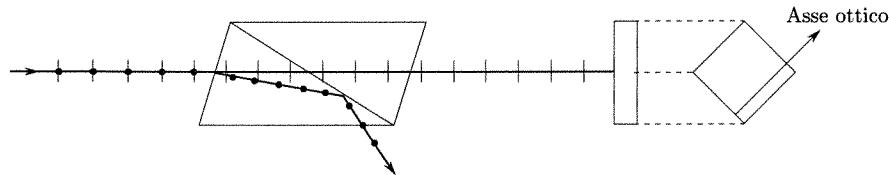
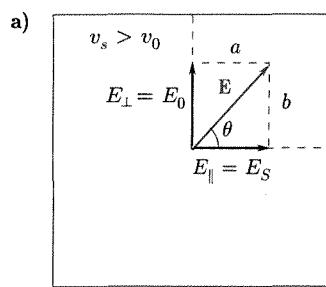
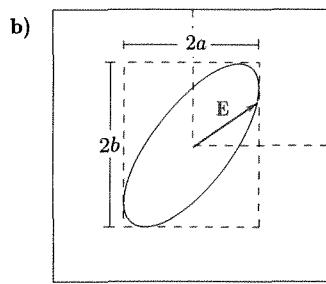


Fig. 12.23

Consideriamo (fig. 12.23) un'onda piana polarizzata rettilineamente, quale per esempio quella emergente da un prisma di Nicol, che incida *normalmente* su una lamina di un cristallo uniassico (calcite) tagliata in modo che l'asse ottico sia parallelo alle facce di ingresso ed uscita. In tal caso l'onda incidente entra nella lamina in direzione perpendicolare all'asse ottico, e come detto al par. 12.3 le onde ordinaria e straordinaria che si producono si propagano nella stessa direzione dell'onda incidente con velocità diversa: l'onda straordinaria ha il vettore elettrico nella



Asse ottico
Superficie di ingresso
della lamina



Asse ottico
Superficie di uscita
della lamina

Fig. 12.24

Lamina a quarto d'onda

direzione dell'asse ottico e, nel caso della calcite, la sua velocità (v_s) è maggiore di quella dell'onda ordinaria. All'uscita della lama le due onde si ricombinano a dare nel mezzo esterno alla lama un'onda che ha in genere una polarizzazione diversa da quella dell'onda incidente. Nella figura 12.24 è indicata la posizione del vettore \mathbf{E} dell'onda incidente, in corrispondenza alla faccia di ingresso di una lama, per es. di calcite, e la sua decomposizione nei vettori parallelo e normale all'asse ottico che sono i vettori campo elettrico rispettivamente delle onde straordinaria e ordinaria che hanno origine nel cristallo. Le ampiezze di questi campi (e quindi delle onde) dipendono dall'ampiezza dell'onda incidente e dell'angolo θ fra \mathbf{E} e l'asse ottico. A causa della diversa velocità di propagazione delle due onde nel cristallo la posizione relativa dei vettori elettrici in corrispondenza alla superficie di uscita sarà in genere diversa da quella sulla faccia di ingresso ed il vettore risultante dalla loro composizione, che è il vettore campo elettrico dell'onda emergente, varierà la sua posizione nel tempo; il suo estremo descrive una ellisse inscritta nel rettangolo indicato in figura 12.24b di lati $2a$ e $2b$. L'onda emergente è in genere a polarizzazione ellittica; per spessori particolari la polarizzazione può divenire rettilinea, quando la ellisse viene a degenerare in una delle due diagonali del rettangolo di lati $2a$ e $2b$.

Particolarmente interessante è il caso in cui l'onda che incide normalmente sulla lama lo faccia in modo che le due componenti E_{\parallel} e E_{\perp} siano uguali (angolo $\theta = \pi/4$) ed inoltre lo spessore della lama sia tale da introdurre uno sfasamento fra le due componenti sulla superficie di uscita di $\pi/2$ o $3\pi/2$. Le normali regole di composizione dei moti armonici di uguale periodo, di uguale ampiezza, su assi normali ed intorno al medesimo punto, fanno vedere che in questo caso l'onda emergente ha una polarizzazione circolare (in un verso o nell'altro, figura 12.25).

È facile calcolare lo spessore, l , della lama perché si abbia lo sfasamento $\delta = \pi/2$. La differenza di tempo richiesto dalle due onde per propagarsi della distanza l è (supponendo $v_0 < v_s$)

$$(26) \quad \Delta t = \frac{l}{v_0} - \frac{l}{v_s} = \frac{l}{c} (n_0 - n_s).$$

Ad esso corrisponde una differenza di fase:

$$(27) \quad \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

essendo $T = 1/\nu$ il periodo delle onde. Perché si abbia $\delta = \pi/2$ risulta

$$(28) \quad l = \frac{1}{n_0 - n_s} \frac{\lambda}{4}.$$

La lama di questo spessore, che consente di trasformare la polarizzazione di un'onda piana da rettilinea a circolare, viene comunemente indicata come lama a quarto d'onda.

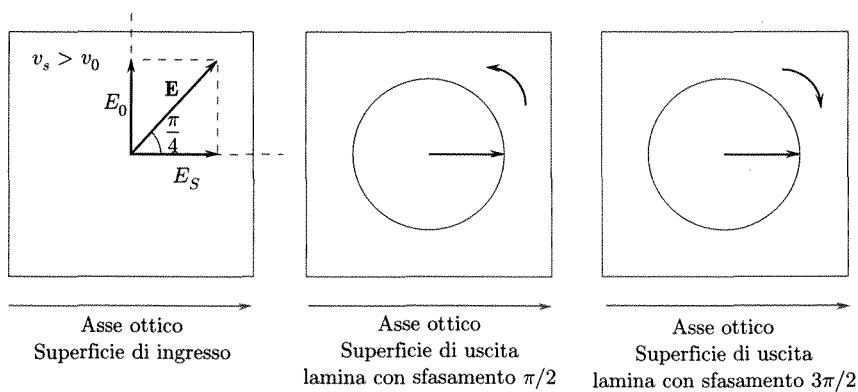


Fig. 12.25

12.10. MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO DELLA LUCE

Si è visto che un'onda elettromagnetica polarizzata rettilineamente possiede una quantità di moto che può essere trasferita ad un corpo che la assorba (cap. 8, par. 8.10).

Nel caso di luce polarizzata circolarmente c'è da attendersi che l'onda possieda anche un momento della quantità di moto. Ciò infatti si riscontra in accordo con la teoria (classica e quantistica). Nel 1936 Beth mostrò sperimentalmente che contemporaneamente alla produzione di luce polarizzata circolarmente in una lamina birifrangente si osserva l'azione di una coppia sulla lamina.

L'esistenza del momento della quantità di moto è di grande importanza per spiegare le particolarità della emissione della luce da atomi e di raggi γ da nuclei.

Il valore della densità del momento delle quantità di moto che si calcola sia classicamente sia in meccanica quantistica è:

$$(29) \quad \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{N},$$

essendo \mathbf{N} il vettore di Poynting.

Il momento per unità di volume è parallelo od antiparallelo con la direzione di propagazione secondo che la polarizzazione circolare sia destra o sinistra.

12.11. ROTAZIONE DEL PIANO DI POLARIZZAZIONE

Alcune sostanze cristalline, alcuni liquidi ed alcune soluzioni liquide di sostanze organiche hanno la proprietà che, se attraversate da un'onda piana monocromatica polarizzata rettilineamente, producono una rotazione del piano di polarizzazione.

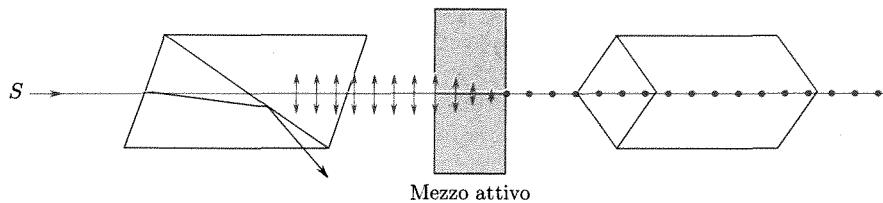


Fig. 12.26

Lo schema dell'esperienza è indicato in figura 12.26: la sostanza in questione sotto forma di un cilindro (o parallelepipedo) viene introdotta fra il polarizzatore e l'analizzatore di un polariscopio, precedentemente disposti in quadratura, e si determina la rotazione (verso e grandezza) che l'analizzatore deve subire per ristabilire le condizioni di estinzione.

Si trova che per qualsiasi sostanza che ha la proprietà descritta, chiamata attività ottica o potere rotatorio, l'angolo di rotazione è proporzionale alla lunghezza del percorso della luce nel mezzo: ciò significa che l'effetto accade con continuità nel mezzo e non è un effetto di superficie. La figura 12.27 mostra la rotazione del piano di vibrazione nel caso di un cristallo (quarzo). La rotazione secondo i casi avviene in un verso o nell'altro e le sostanze si chiamano *otticamente attive* destrorse o sinistrorse secondo che esse producano una rotazione in verso orario od antiorario del piano di polarizzazione della luce guardata in verso contrario a quello di propagazione.

L'attività ottica è mostrata da cristalli che possono esistere in forme strutturali asimmetriche destra e sinistra e da liquidi o soluzioni di sostanze le cui molecole

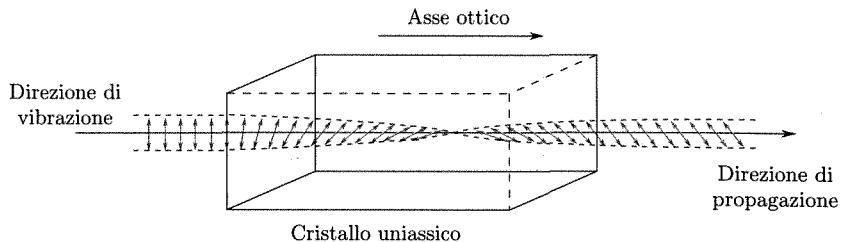


Fig. 12.27

hanno gli atomi disposti secondo strutture che anche esse godono di simmetria speculare; le due forme possibili di un cristallo attivo o di molecole attive sono cioè una l'immagine speculare dell'altra e si differenziano tra loro come una vite destra si differenzia da una vite sinistra.

Esempi di cristalli di questo genere sono quelli di quarzo (fig. 12.28) per i quali l'effetto è massimo per propagazione nella direzione dell'asse ottico. Fra i liquidi attivi ricordiamo la turpentina; fra le soluzioni sono ben note quelle di zucchero. Questi ultimi si distinguono proprio per il verso di rotazione del piano della luce polarizzata. Nelle soluzioni l'attività, misurata dall'angolo di rotazione per unità di percorso dell'onda, è in genere proporzionale alla concentrazione della sostanza attiva. Questo fatto conduce a metodi di analisi quantitativa per determinare la concentrazione di una sostanza attiva nota in una certa soluzione: ciò è fatto in polariscoli adatti all'esame di soluzioni, in recipienti standard, e che vanno sotto il nome di polarimetri. L'attività di liquidi puri e delle soluzioni è molto minore di quella dei cristalli: per esempio l'attraversamento di 1 cm di turpentina (liquida) produce una rotazione di $3,7^\circ$ mentre lo stesso spessore di quarzo produce una rotazione di $217,2^\circ$.

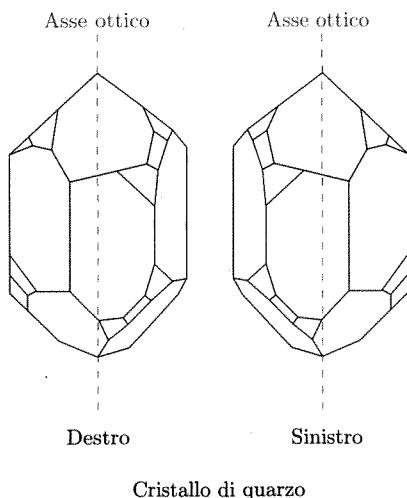


Fig. 12.28

L'origine del fenomeno della rotazione del piano di polarizzazione sta nel fatto che le sostanze (cristalli o molecole) in questione sono caratterizzate proprio per la loro struttura da velocità di propagazione diverse per onde piane a polarizzazione circolare destra o sinistra. Osservando che un'onda piana polarizzata rettilineamente può essere ritenuta⁽²³⁾ la risultante di due onde piane di uguale ampiezza polarizzate circolarmente in versi opposti è chiaro che se queste si propagano nella sostanza in questione con velocità diverse, la perturbazione deve emergere come un'onda a polarizzazione rettilinea con il piano di polarizzazione ruotato rispetto a quello dell'onda incidente.

12.12. BIRIFRANGENZA PRODOTTA DA TENSIONI MECCANICHE. FOTOELASTICITÀ

Vetri ed altre sostanze trasparenti (per es. plexiglas, fogli di plastica ecc.) divengono anisotropi, e quindi assumono proprietà birifrangenti, se sottoposti a tensioni elastiche. Per esempio un parallelepipedo di vetro sollecitato a compressione o trazione uniforme su due facce si comporta come un cristallo uniassico con l'asse ottico nella direzione della compressione (cristallo positivo per sollecitazione di trazione e negativo per

⁽²³⁾ Ciò può vedersi con lo stesso ragionamento visto (cap. 7, par. 7.12) per risolvere un campo magnetico unidirezionale sinusoidale nella somma di due campi magnetici ruotanti in versi opposti.

compressione). La differenza fra i due indici di rifrazione (ordinario e straordinario) dipende dal valore della tensione elastica.

Queste circostanze hanno consentito di sviluppare un ramo particolarmente fertile dell'ottica con onde polarizzate, per lo studio di strutture elastiche (fotoelasticità). La trattazione consente di legare le componenti del tensore dielettrico alle componenti dello sforzo elastico o della deformazione elastica e queste relazioni sono alla base del metodo.

Un'indagine della distribuzione degli sforzi in strutture elastiche (ponti, pezzi di macchine di forma non semplice, travi speciali, ecc.), che non risulti possibile con una precisa trattazione matematica, sia per la forma complessa delle strutture sia per le condizioni ai limiti molto particolari, può essere fatta con questo metodo. Si realizza un modello prismatico in plastica trasparente (per es. plexiglas) avente la sezione della struttura che si vuole studiare e la si pone fra polarizzatore ed analizzatore di un polarscopio: l'analizzatore venga disposto in quadratura con il polarizzatore sicché non si osserva luce sullo schermo posto oltre l'analizzatore. Se ora si sollecita il modello nella maniera desiderata si produce una birifrangenza che punto per punto dipende dallo sforzo elastico ivi presente: si comprende quindi che la luce che da ciascun punto (P) della sezione del modello va nel corrispondente punto (P') oltrepassando l'analizzatore, dipende dallo sforzo esistente in P . L'analisi della luce trasmessa dall'analizzatore può consentire un esame accurato della distribuzione in grandezza e direzione degli sforzi nella struttura in esame. Si osservano sullo schermo linee (frange) chiare e scure: ciascuna di esse è una linea di uguale sforzo. La figura 12.29 mostra il tipo di figure che si ottengono (M. Cagnet, M. Francon, J.C. Thier) nel caso di una sbarra prismatica appoggiata su due supporti cilindrici e caricata al centro della faccia superiore (carichi crescenti nelle foto dall'alto in basso).

L'analisi con diversa posizione dell'analizzatore consente di determinare anche punto per punto le direzioni principali dello sforzo, cioè quelle due direzioni normali fra loro nelle quali è nullo lo sforzo di taglio.

Fotoelasticità

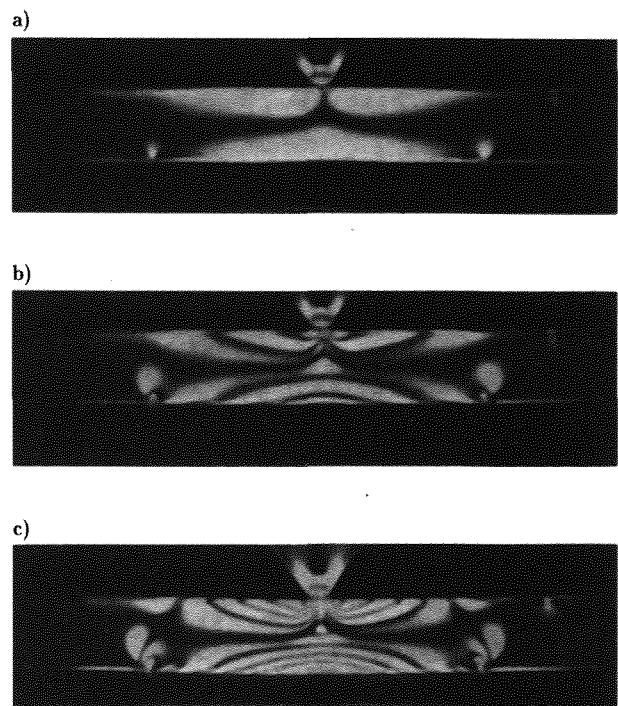


Fig. 12.29 Fotoelasticità in una sbarra appoggiata su supporti cilindrici e caricata al centro della faccia superiore. Carichi crescenti dall'alto in basso. (M. Cagnet, M. Francon, J.C. Thier).

12.13. BIRIFRANGENZA PRODOTTA DA CAMPI ELETTRICI O MAGNETICI INTENSI

Esistono vari effetti elettro-ottici o magneto-ottici che si manifestano mediante una variazione dello stato di polarizzazione di un'onda che attraversa un dielettrico quando il campo elettrico o quello magnetico nel dielettrico raggiunge valori elevati: questi campi possono essere quelli associati all'onda o prodotti dalla sovrapposizione a questi di altri (variabili o continui). Esamineremo taluni effetti di questo tipo.

Nelle considerazioni fatte in precedenza noi abbiamo sempre ammesso che il dielettrico con cui si ha a che fare sia *lineare*; in tal caso il vettore \mathbf{P} (o ciascuna delle sue componenti nel caso di dielettrico anisotropo) è una funzione lineare del vettore \mathbf{E} (o delle sue componenti) e la *suscettività, la costante dielettrica, l'indice di rifrazione sono parametri indipendenti da E* . Questo è vero solo approssimativamente; in realtà questi parametri dipendono, sia pure molto poco intensamente, da E e la relazione fra P ed E non è lineare (v. cap. 15). Dovendo considerare la propagazione di onde e.m. nel dielettrico fissiamo l'attenzione sull'indice di rifrazione; si può dire che esso in genere dipende da E e può essere espresso per mezzo di una serie di potenze di E : il coefficiente della prima potenza e quelli delle successive sono piccoli, sicché gli effetti della *non linearità fra P ed E* si rendono evidenti solo a campi molto intensi.

Gli effetti elettro-ottici vengono spesso distinti a seconda del termine che nello sviluppo in serie di n occorre considerare per la loro spiegazione: noi accenneremo agli effetti lineare e quadratico (si noti che si tratta sempre di effetti non lineari se ci si riferisce alla relazione fra P ed E).

a. Effetto elettro-ottico lineare

Consideriamo dapprima il caso in cui un'onda e.m. di piccola ampiezza si propaga in un cristallo dielettrico al quale è anche applicato un campo elettrico continuo. Consideriamo in particolare il caso di cristalli cubici. Ricordiamo innanzitutto che cristalli di questo tipo in condizioni normali, fuori cioè da altri campi che non siano quelli associati all'onda, si comportano nei riguardi della propagazione di un'onda e.m. di piccola ampiezza come materiali isotropi e quindi l'ellissoide degli indici si riduce per essi ad una sfera. Alcuni di questi cristalli (come per es. il diamante e la blenda) alterano il loro comportamento nei riguardi della propagazione di un'onda e.m. qualora un campo elettrico continuo intenso agisca su di essi e ciò accade in maniera diversa secondo la direzione del campo. La figura 12.30 illustra il fenomeno: il segno a tratto pieno è la traccia della sfera degli indici a campo elettrico continuo nullo. Il campo elettrico venga applicato nella direzione z , (E_z); la superficie degli indici si deforma; nella figura sono indicate le tracce nel piano xy per campo E_z positivo e negativo. Il tipo di deformazione del solido dipende dalla classe cristallografica, mentre l'entità della deformazione dipende dal particolare materiale del cristallo. Si trova che applicando un campo elettrico in una direzione [100] (spigolo del cubo), l'indice di rifrazione per la componente di un'onda elettromagnetica avente il campo nella stessa direzione non varia, almeno fino al primo ordine, mentre per la componente con il vettore elettrico normale alla direzione del campo applicato l'*indice di rifrazione varia di poco ma linearmente con il campo*. Questo effetto viene mostrato, anche più intensamente, da alcuni cristalli tetragonali (e quindi uniassici e per natura bifrangenti) come i fosfati acidi di potassio (KDP, con formula chimica KH_2PO_4) ed ammonico (ADP con formula $\text{NH}_3\text{H}_2\text{PO}_4$).

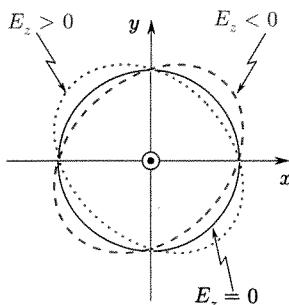


Fig. 12.30

Noi abbiamo ora considerato il caso in cui un campo elettrico continuo agisca sul dielettrico mentre l'onda si propaga; le stesse considerazioni valgono praticamente anche se il campo varia a frequenza bassa rispetto a quella dell'onda (effetto Pockels). Tale effetto consente quindi di realizzare taluni modulatori di intensità di un'onda luminosa. La figura 12.31 dà uno schema possibile per quest'ultimo scopo. La luce (onda piana monocromatica) non polarizzata colpisce dapprima un polarizzatore ed in seguito un cristallo, per es. cubico, orientato come indicato in figura. Le facce del cristallo normali ad un asse [100] sono metallizzate e fra esse è applicata una d.d.p. intensa (di modulazione) che varia a frequenza bassa (rispetto a quella della luce) seguendo il segnale che si vuole trasferire mediante la modulazione dell'onda luminosa. Un ultimo polarizzatore (di uscita) è disposto sul percorso della luce orientato in modo (quadratura) da lasciar passare la luce con vettore \mathbf{E} normale alla direzione che tale vettore ha per la luce emergente dal primo polarizzatore (di entrata). Se nessuna tensione è applicata al cristallo, la luce polarizzata dal polarizzatore di entrata è eliminata da quello di uscita e nessun'onda emerge dal dispositivo. Se invece si applica una tensione, il cristallo altera lo stato di polarizzazione giacché la componente dell'onda avente \mathbf{E} normale al campo applicato

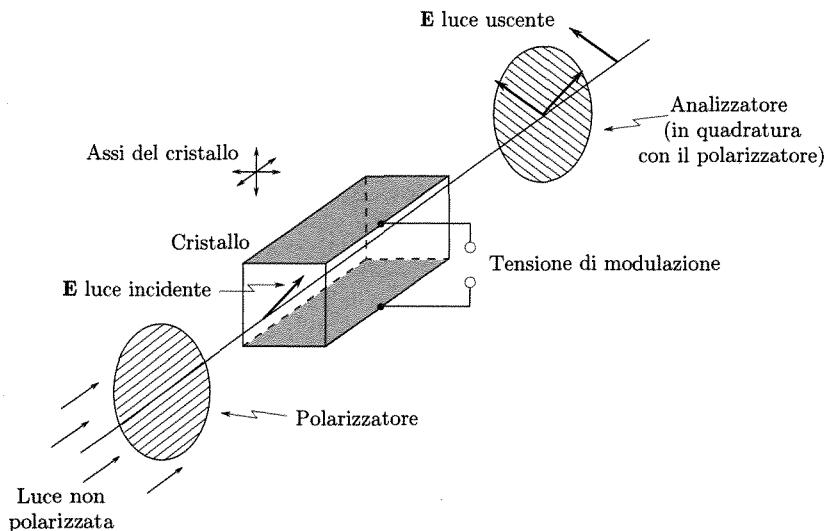


Fig. 12.31

viaggia con velocità diversa di quella con \mathbf{E} parallelo. Di conseguenza la luce non è in genere completamente eliminata dal polarizzatore di uscita ed una componente polarizzata esce dal dispositivo. Tale componente varia con la d.d.p. applicata al cristallo.

L'efficienza di questo tipo di modulatore non è molto elevata: occorrono campi dell'ordine di 10^6 V/m per ottenere uno sfasamento di 180° fra le due componenti dell'onda aventi campi elettrici parallelo e normale al campo applicato.

Schemi più efficienti possono essere realizzati. L'effetto Pockels comunque fornisce un metodo per la modulazione dei fasci laser ed ha una grande importanza per lo sviluppo delle loro applicazioni alle telecomunicazioni.

b. Effetto elettro-ottico quadratico o effetto Kerr

In questo caso la sfera degli indici di un materiale isotropo è distorta dalla applicazione di un campo elettrico in un ellissoide con l'asse maggiore nella direzione del campo: le variazioni peraltro non dipendono dalla polarità del campo applicato. In altri termini nello sviluppo dell'indice di rifrazione n in serie di potenze del campo applicato manca il termine lineare e quello che ha importanza è quello quadratico:

$$(30) \quad n = n_0 + n_0 E^2.$$

Nei solidi questo effetto è molto piccolo, mentre è ragguardevole in alcuni liquidi polari (nitrobenzolo, CS_2). Ciò è dovuto al fatto che nel caso di liquidi oltre alla piccola anisotropia dovuta alla deformazione delle molecole prodotte dal campo, vi può essere una orientazione di molecole originariamente anisotrophe. Celle di Kerr realizzate con tali liquidi hanno ricevuto vari importanti impieghi: sono usate come interruttori di luce, facendola passare in un polariscopio solo quando una d.d.p. è applicata alla cella; sono usati inoltre per variare la polarizzazione di fasci luminosi e modularli fino alle frequenze delle microonde.

Un effetto analogo a quello elettro-ottico di Kerr è prodotto da un campo magnetico trasversale al percorso della luce in un liquido (effetto magneto-ottico Cotton-Mouton). Tale effetto è notevole in alcuni liquidi (per es. nitrobenzolo) ed è dovuto all'allineamento di molecole otticamente anisotrophe dotate di un momento magnetico proprio o indotto. L'effetto è proporzionale al quadrato dell'induzione magnetica.

c. Effetto Faraday

Le sostanze otticamente isotrophe, ed in grado particolare quelle ad elevato indice di rifrazione, acquistano una attività ottica se poste in un campo magnetico sufficientemente intenso. La rotazione del piano di polarizzazione di un'onda piana polarizzata rettilineamente avviene solo per la luce che si propaga nella direzione delle linee di induzione magnetica.

L'esperienza può essere fatta disponendo per esempio, un blocco di vetro fra le espansioni di un elettromagnete il quale abbia un piccolo foro lungo l'asse dell'interferro in modo da poter far passare attraverso il blocco di vetro un fascio di luce nella direzione delle linee di induzione magnetica. La rotazione (θ) per ciascuna sostanza è proporzionale tanto al valore di B quanto allo spessore attraversato (t):

$$(31) \quad \theta = CBt.$$

La rotazione (e la costante C) è positiva per un'onda che si propaga nel verso di \mathbf{B} quando la rotazione del piano è nel verso con cui ruota una vite destra che avanza nel verso di \mathbf{B} . In genere l'effetto è positivo nelle sostanze diamagnetiche ed è negativo in quelle para- e ferro-magnetiche. L'entità della rotazione varia notevolmente da sostanza a sostanza: nel caso dell'acqua la rotazione è di $2^\circ 10'$ per cm di spessore e per un campo di induzione di 1 Wb/m^2 ; in vetri flint è di 5° per cm di spessore e per lo stesso campo; nel caso di fili sottili di ferro è di 130° per uno spessore di 10^{-3} cm per lo stesso valore del campo.

L'origine del fenomeno può spiegarsi con semplicità lungo le seguenti linee. Un'onda piana polarizzata rettilineamente (cioè con il vettore \mathbf{E} che oscilla in una ben determinata direzione normale alla direzione di propagazione) può considerarsi prodotta dalla sovrapposizione di due onde piane (di ampiezza metà di quella dell'onda risultante) polarizzate circolarmente in verso opposto⁽²⁴⁾. Il fatto che nell'attraversare il dielettrico immerso nel campo magnetico nelle condizioni indicate il piano di polarizzazione dell'onda piana ruota (in un verso o nell'altro) corrisponde a riscontrare che la velocità di propagazione di onde piane polarizzate circolarmente che si propagano nel mezzo nella direzione delle linee magnetiche, è diverso secondo il verso della polarizzazione circolare: in ciò nella essenza consiste l'effetto Faraday.

La spiegazione di questo fatto può essere facilmente indicato in termini classici per sostanze trasparenti comuni, per le quali l'effetto Faraday è positivo. Un'onda e. m. piana polarizzata circolarmente agisce su un elettrone qualsiasi del mezzo con il suo campo \mathbf{E} ⁽²⁵⁾ sollecitandolo a muoversi di moto circolare intorno alla direzione di propagazione. Al moto preesistente degli elettroni si sovrappone un moto circolare uniforme⁽²⁶⁾ con la frequenza dell'onda; le caratteristiche di tale moto dipendono

(24) Vedi cap. 7, par. 7.12 per la decomposizione di un vettore che oscilla sinusoidalmente in una direzione fissa in due vettori ruotanti.

(25) Nel caso di onde a polarizzazione circolare il vettore \mathbf{E} che agisce su un singolo elettrone del mezzo ha ampiezza costante e ruota con velocità ω .

(26) Indichiamo con \mathbf{r} il vettore che fissa la posizione dell'elettrone in questo moto circolare rispetto al centro dell'orbita. Abbiamo già visto che in prima approssimazione e per piccoli spostamenti, la forza di origine coulombiana che sollecita elettrone e nucleo e tende a riportarli alla distanza di equilibrio, dipende linearmente dallo spostamento e può essere considerata come una forza elastica di richiamo. Il moto dell'elettrone avviene sotto l'azione di \mathbf{E} e della forza di tipo elastico. Si ha per il secondo principio della dinamica

$$(32) \quad -m\omega^2 \mathbf{r} = e\mathbf{E} - k\mathbf{r}.$$

Ne segue, con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$(33) \quad \mathbf{r} = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E}.$$

Il modulo di \mathbf{r} determina il raggio dell'orbita descritta dall'elettrone per effetto dell'onda e. m. imposta. Per calcolare l'indice di rifrazione si osservi che al singolo elettrone ed alla corrispondente carica positiva centrale tenuta a distanza r si associa un momento di dipolo

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$$

Se N è il numero di questi dipoli per unità di volume, e, per un calcolo di prima approssimazione, si suppone che per tutti gli elettroni interessati ω_0 sia lo stesso, si ha per l'intensità di polarizzazione

$$(34) \quad \mathbf{P} = N\mathbf{p} = N(-e\mathbf{r}) = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

Ricordando che $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, si ha

$$(35) \quad \epsilon_r = 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

esclusivamente dalla entità della forza elastica di richiamo che agisce sull'elettrone assieme ad \mathbf{E} .

Nel caso di onde che si propagano in un mezzo dielettrico qualsiasi in una direzione qualsiasi la velocità di propagazione è, in genere, la stessa per onde polarizzate circolarmente, indipendentemente dal verso di polarizzazione.

Se peraltro si considera il dielettrico in presenza di un campo magnetico e la propagazione nella direzione delle linee magnetiche, gli elettroni sono soggetti alla forza di Lorentz che si aggiunge alla sollecitazione che su essi esercita il campo elettrico dell'onda polarizzata⁽²⁷⁾. Tale forza è diretta nella stessa direzione del campo \mathbf{E} dell'onda ma ha versi opposti secondo il verso di rotazione dell'elettrone (e di \mathbf{E}). Ne segue una intensità di polarizzazione diversa per onde a polarizzazione circolare destra o sinistra e quindi valori diversi per ϵ_r , n e per la velocità di propagazione. Si trova che per onde che si propagano nella direzione e nel verso di \mathbf{B} la velocità per le onde a polarizzazione circolare destra (v_d) è minore di quella per le onde a polarizzazione sinistra (v_s); per onde che si propagano in verso opposto a \mathbf{B} si ha $v_d > v_s$. Di conseguenza si trova, in accordo con l'esperienza, che il mezzo ha una attività ottica sinistra (il piano di polarizzazione di un'onda piana è ruotato a sinistra) se la propagazione dell'onda avviene nel verso di \mathbf{B} , ed una attività destra in verso opposto. Questo risultato è particolare, nel senso che esso è diverso da quello che si ha nelle sostanze attive naturali, ove non si osserva la variazione da attività destra e sinistra invertendo il verso di propagazione. Si ha di conseguenza che se un'onda polarizzata rettilineamente dopo aver attraversato il mezzo attivo per effetto Faraday viene riflessa indietro e rattraversa il mezzo, il suo piano di polarizzazione ruota ancora nello stesso verso della rotazione relativa al primo attraversamento ed emerge con una rotazione totale doppia di quella di ciascun attraversamento. Una esperienza analoga con un mezzo attivo normale conduce a luce emergente con la stessa polarizzazione della luce incidente.

e quindi, per un mezzo non ferromagnetico ($\mu_r \sim 1$)

$$(36) \quad n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \epsilon_r + 1 + \frac{N}{\epsilon_0} \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Questa espressione ottenuta per l'indice di rifrazione nel caso di propagazione di un'onda a polarizzazione circolare, è la stessa che si sarebbe ottenuta per polarizzazione rettilinea, giacché la (34) può essere stabilita anche per questo caso.

(27) La forza di Lorentz è nelle condizioni specificate diretta come \mathbf{r} , cioè secondo il raggio dell'orbita descritta dall'elettrone. Se supponiamo che il campo \mathbf{B} sia diretto nella direzione e nel verso di propagazione della luce (asse x), la forza di Lorentz vale $(-eB\omega\mathbf{r})$ se la rotazione dell'elettrone è antioraria (cioè se la luce che produce il moto di rotazione è a polarizzazione circolare sinistra) e vale $(+eB\omega\mathbf{r})$ se la rotazione è oraria. In queste condizioni il II principio della dinamica si scrive [al posto della (32)]

$$(37) \quad -m\omega^2\mathbf{r} = -e\mathbf{E} - k\mathbf{r} \pm eB\omega\mathbf{r},$$

essendo il segno meno valido per luce a polarizzazione circolare sinistra. Ne seguono, sempre per onde che si propagano nel verso positivo di \mathbf{B} , indici di rifrazione diversi per polarizzazione circolare sinistra (n_s) e destra (n_d):

$$(38) \quad n_s^2 = 1 + \frac{N \frac{e^2}{\epsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{eB\omega}{m}}$$

$$(39) \quad n_d^2 = 1 + \frac{N \frac{e^2}{\epsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{eB\omega}{m}}.$$

In tal caso $n_d > n_s$. Nel caso di luce che si propaga nella direzione negativa di \mathbf{B} il segno del termine contenente B nelle (37) (38) (39) per le onde a polarizzazione destra e sinistra cambia segno. In tal caso $n_d < n_s$.

INTERFERENZA

- ✓ Se sovrapponendo due o più fasci luminosi la distribuzione dell'intensità varia da punto a punto fra massimi che eccedono la somma delle intensità dei singoli fasci e minimi che possono anche essere di assenza totale di luce, si parla di *interferenza*.
Per avere interferenza è necessario che le onde che si sovrappongono siano fra loro **coerenti**.
L'esperienza di base che viene introdotta per discutere l'interferenza è l'esperienza di Young.
- ✓ Si discutono anche alcune situazioni di interferenza ottenute mediante riflessione su uno strato e, fra i tanti, un tipo di interferometro: l'**interferometro di Michelson**.

■ 13.1. INTRODUZIONE

Perturbazioni luminose provenienti da due o più sorgenti possono, in opportune condizioni che specificheremo, dare luogo a particolari distribuzioni di intensità nella regione di sovrapposizione, perfettamente analoghe a quelle viste nella sovrapposizione di onde elastiche della stessa frequenza (vol. I, cap. 9, par. 9.16 e 9.17) ed indicate con il nome di fenomeni di interferenza. Le caratteristiche di questi fenomeni sono immediatamente e semplicemente spiegate da teorie ondulatorie ed hanno avuto importanza nello stabilire l'aspetto ondulatorio della luce.

Da un punto di vista generale, con il nome di interferenza andrebbero indicati tutti quei fenomeni che derivano dalla sovrapposizione di onde luminose diverse in una certa regione: in realtà ci si limita a considerare sotto questo nome esclusivamente quei processi nei quali si osserva che la distribuzione dell'intensità prodotta in una regione da ciascuna delle singole onde individualmente, viene drasticamente alterata dalla presenza contemporanea delle altre: si può passare (frange di interferenza) da punti ove l'ampiezza è all'incirca la somma delle ampiezze delle singole onde o più grande a punti ove la perturbazione è praticamente nulla.

Si osservi che in tale maniera non vengono considerati qui quei processi, che sono ancora dovuti a sovrapposizione di onde, i quali conducono alla produzione di un'onda polarizzata circolarmente da due onde a polarizzazione rettilinea⁽¹⁾ (cap. 12, par. 12.1). Inoltre quei particolari processi causati da limitazioni spaziali imposte da ostacoli alla estensione dei fronti d'onda, che pure vanno spiegati mediante sovrapposizione di onde, non sono considerati nella trattazione dell'interferenza ma in quella della diffrazione (cap. 14).

I fenomeni di interferenza di maggior interesse e che considereremo nel presente capitolo sono quelli prodotti da due onde di ugual frequenza. Il presentarsi, nella regione di sovrapposizione di due onde luminose della stessa frequenza, di una distribuzione di intensità con netti massimi e minimi, dipende dal variare, nello spazio, delle fasi con cui le onde si sovrappongono: ne segue che condizione essenziale per osservare i fenomeni è che le onde siano coerenti fra loro⁽²⁾.

*Per avere interferenza
le onde devono essere
coerenti*

⁽¹⁾ Onde piane della stessa frequenza procedenti nella stessa direzione, sfasate di $\pi/2$, e polarizzate in piani ortogonali.

⁽²⁾ Nel caso di interferenza di onde elastiche, che vengono emesse con continuità per

Nel caso pertanto di onde luminose formate dai treni d'onda corrispondenti ai singoli fotoni, ciò richiede l'impiego di sorgenti primarie coerenti od il ricorso a sorgenti secondarie realizzate con opportuni artifici a partire da una stessa sorgente primaria. Come si è già detto, infatti, nelle sorgenti normali i treni d'onda dei vari fotoni sono completamente incorrelati e nella sovrapposizione di fasci provenienti da sorgenti primarie diverse (della stessa frequenza) non può verificarsi una differenza di fase per i treni successivi delle due radiazioni che resti costante per un tempo sufficientemente lungo (che comprende l'arrivo di molti treni d'onda in successione) da consentire l'osservazione dei fenomeni di interferenza. Quest'ultima condizione può ottenersi invece se i due fasci che sono portati ad interferire derivano dalla stessa sorgente primaria puntiforme.

Esistono vari artifici per ottenere questo scopo ed i metodi usati possono essere distinti in due categorie: nella prima il fascio della sorgente primaria è suddiviso in due parti facendolo passare attraverso aperture o riflettere da specchi disposti in modo che il fronte d'onda originario venga diviso in parti spazialmente separate (divisioni del fronte d'onda). L'altro corrisponde alla suddivisione del fascio primario per mezzo di superfici parzialmente riflettenti (divisione di ampiezza); in tal caso i fronti d'onda delle onde risultanti possono avere la stessa estensione del fronte dell'onda incidente; l'ampiezza è naturalmente inferiore. Nel seguito del capitolo considereremo alcuni casi semplici di interferenza.

Vogliamo premettere la nozione di percorso ottico (o cammino ottico) della radiazione luminosa; si tratta di un concetto che ha particolare importanza nell'ambito dell'ottica geometrica, ma che ha anche interesse nelle considerazioni geometriche che si fanno nei processi di interferenza quando c'è da considerare la propagazione da un punto ad un altro. Se la luce si propaga in un mezzo di indice di rifrazione $n = c/v$ per una distanza d , si definisce percorso ottico la lunghezza

$$(1) \quad l_{\text{ottico}} = nd = \frac{d}{v}c$$

pari alla distanza che la radiazione percorrerebbe nel vuoto nello stesso tempo impiegato a percorrere la distanza d nel mezzo in oggetto. Se la radiazione per passare da un punto ad un altro si propaga per tratti successivi (d_i) in mezzi di indice di rifrazione diversi (n_i) il percorso ottico è pari a

$$(2) \quad l_{\text{ottico}} = \sum_i n_i d_i.$$

La somma si trasforma in integrale nel caso di mezzi il cui indice di rifrazione vari con continuità.

13.2. ESPERIENZA DI YOUNG

Per concretare le idee sui fenomeni di interferenza consideriamo la esperienza di Young che tanta importanza ebbe (1801) nel riconoscere la natura ondulatoria della luce. Lo schema è dato nella figura 13.1a. Sia una sorgente monocromatica e puntiforme che chiameremo primaria;

effetto della vibrazione di sorgenti stabili, ciò è facilmente ottenuto, ed i fenomeni di interferenza si osservano facilmente (vol. I, cap. 9, par. 9.16 e 9.17).

ritorneremo presto sulle ragioni di queste limitazioni: come è suggerito dallo schema, la realizzazione della sorgente puntiforme S può effettuarsi ponendo un diaframma con un foro molto piccolo davanti ad una lampada. S_1 e S_2 sono due sorgenti secondarie coerenti ottenute praticando due fori molto piccoli su uno schermo disposto in modo che la congiungente di S con il punto medio del segmento S_1S_2 sia normale allo schermo stesso. Dalle due sorgenti secondarie emergono treni di onde sferiche coerenti e per esse si possono ripetere le considerazioni già fatte per il caso di due sorgenti di onde elastiche sferiche (vol. I, cap. 9, par. 9.17).

Nel campo risultante si possono considerare iperbolidi aventi fuochi in S_1S_2 e che sono luoghi dei punti caratterizzati da una differenza di cammino ottico, per le onde provenienti dalle due sorgenti secondarie, uguali a multipli pari di $\lambda/2$ o a multipli dispari di $\lambda/2$. In corrispondenza ai punti degli iperbolidi della prima famiglia le onde provenienti dalle due sorgenti giungono in fase e l'ampiezza della disturba ottica risultante è massima. In corrispondenza ai punti degli iperbolidi della seconda famiglia le onde giungono in opposizione di fase e l'ampiezza della disturba ottica risultante è minima. La figura 13.1b, simile alla figura 9.30 del cap. 9, vol. I, schematizza ciò che si può osservare, naturalmente senza rispetto di scale per le grandezze geometriche: sono qui segnati i fronti d'onda procedenti dalle sorgenti sia in corrispondenza alla perturbazione massima positiva (linea continua) sia in corrispondenza alla perturbazione massima negativa (linea a punti). Le linee di massimo si hanno o in corrispondenza alle intersezioni di due cerchi a tratto continuo o di due cerchi a punti (linea in colore continua); le linee di minimo si hanno in corrispondenza alle intersezioni di un cerchio continuo ed uno a punti (linea in colore tratteggiata).

Se si dispone uno schermo (M) normale all'asse della disposizione (SP_0 , fig. 13.1a) si osservano su di esso alternate li-

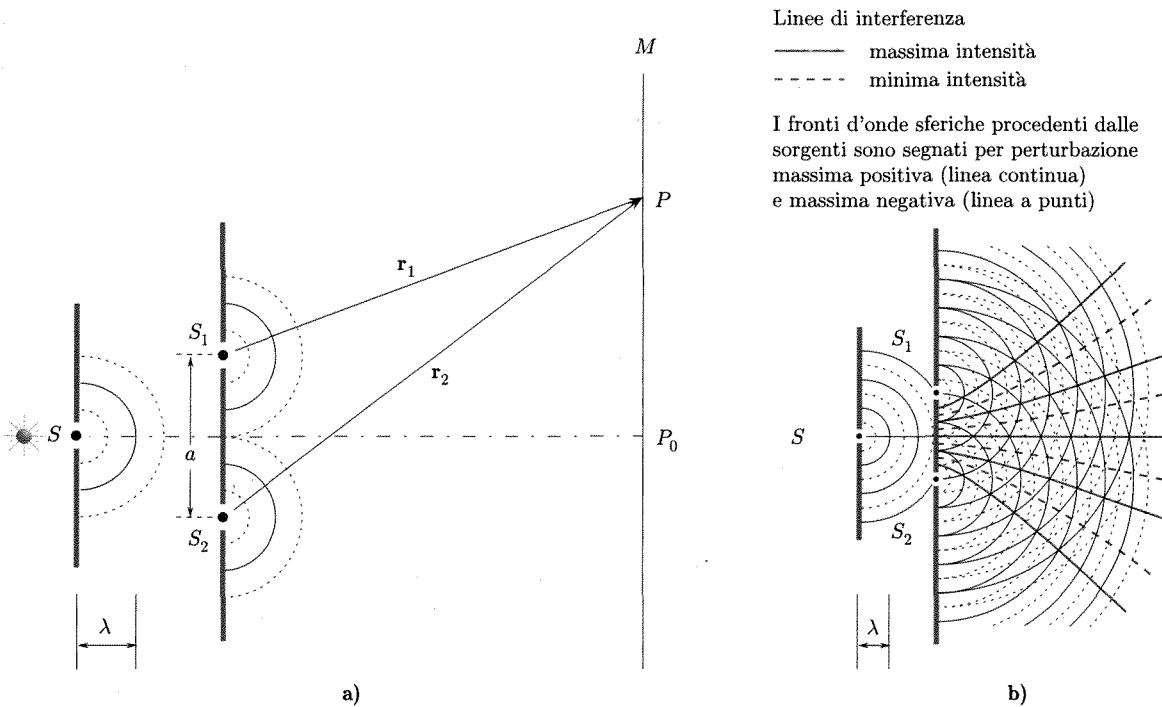


Fig. 13.1

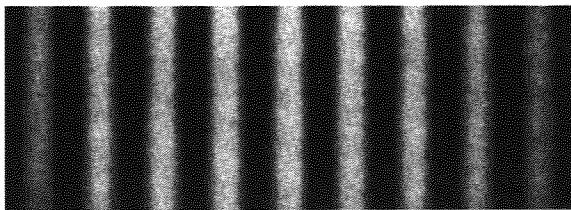


Fig. 13.2

nee chiare e scure e queste costituiscono una tipica figura di interferenza “a frange” (fig. 13.2), e corrispondono alle osservazioni sperimentali fatte da Young.

Per giungere ad una descrizione quantitativa della distribuzione dell'intensità della luce sullo schermo (M), si consideri (fig. 13.1a) un punto P su di esso. Le distanze di P dalle due sorgenti siano r_1 ed r_2 e di conseguenza le onde provenienti da tali sorgenti percorrono distanze che differiscono per $s = r_2 - r_1$. Se si suppone che tanto r_2 quanto r_1 siano molto maggiori di s , \mathbf{r}_2 ed \mathbf{r}_1 si possono considerare approssimativamente paralleli.

Indichiamo con \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E} i vettori campo elettrico in P dell'onda che perviene da S_1 , di quella che perviene da S_2 e dell'onda risultante, rispettivamente. Cominciamo con l'osservare che è in generale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e che, in particolare, è $E = E_1 + E_2$ se \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 sono costantemente paralleli: ciò si dà se la direzione di propagazione delle due onde è la stessa e se, inoltre, le due onde sono costantemente polarizzate allo stesso modo. Queste due circostanze sono verificate nel nostro caso; la prima in quanto \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono approssimativamente paralleli; la seconda in quanto, in virtù dell'artificio adottato, le due onde derivano in realtà da una medesima onda (quella che da S incide sullo schermo forato). Per quanto riguarda dunque la relazione spaziale tra le onde potremo scrivere:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

E_1 e E_2 sono grandezze variabili periodicamente nel tempo con la stessa frequenza; esse sono in fase nei punti S_1 e S_2 , mentre in P esse sono sfasate della quantità (costante) ⁽³⁾:

$$(3) \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} s = ks.$$

Così per quanto riguarda la relazione di fase tra le due onde, indicando con A_1 e A_2 le loro ampiezze, con T il loro periodo e scegliendo l'istante iniziale in modo da rendere nulla la fase iniziale di E_1 potremo scrivere:

$$(4) \quad \begin{aligned} E_1 &= A_1 \sin \frac{2\pi t}{T} \\ E_2 &= A_2 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \delta \right) = A_2 \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \delta - A_2 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin \delta. \end{aligned}$$

L'intensità J dell'onda risultante in P è, come sappiamo ⁽⁴⁾, propor-

⁽³⁾ s è da intendersi come la differenza dei percorsi ottici.

⁽⁴⁾ Si ricordi (cap. 8, par. 8.6) che l'intensità di un'onda è l'energia *media* che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie di area unitaria disposta normalmente alla

zionale al valore quadratrico medio $\overline{E^2}$ di E :

$$(5) \quad \overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (E_1 + E_2)^2 dt = \overline{E^2}_1 + \overline{E^2}_2 + 2A_1 A_2 \cos \delta.$$

Così sempre rifacendoci alla definizione dell'intensità di un'onda, potremo scrivere, indicando con J_1 e J_2 le intensità delle due onde interferenti,

$$(6) \quad J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta.$$

L'intensità nell'esperienza di Young

L'intensità prodotta dalla sovrapposizione dei fasci è quindi pari alla somma di quelle dovute ai singoli fasci e di un termine (il terzo) che si dice "d'interferenza". Quest'ultimo, secondo il valore di δ , assume valori tra i limiti $\pm 2\sqrt{J_1 J_2}$. Nel caso per esempio che sia $J_1 = J_2$, si ha di conseguenza che l'intensità in P varia nello spazio fra i valori $J = 4J_1$ e $J = 0$ secondo la relazione

$$(7) \quad J = 4J_1 \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right) = 4J_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

che quindi rende conto del verificarsi delle frange.

È chiaro che se si considera (fig. 13.1a), il punto P_0 sullo schermo M determinato dalla perpendicolare ad esso tirata dal punto medio del segmento $S_1 S_2$, ad esso corrisponde un punto luminoso ed una linea (frangia) luminosa (normalmente al piano del disegno): in tal caso r_1 ed r_2 sono uguali e $\delta = 0$.

Cerchiamo di determinare la posizione delle successive frange luminose da una parte e dall'altra di questa frangia centrale.

Con l'ipotesi che la distanza (a) fra i fori sia molto piccola rispetto alla distanza D fra piano delle sorgenti e schermo si può ritenere, con buona approssimazione (fig. 13.3),

$$(8) \quad s = a \sin \theta \simeq a\theta$$

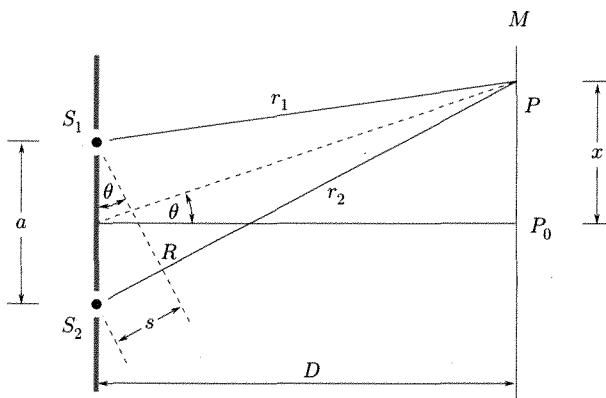


Fig. 13.3

direzione di propagazione. Per un'onda e.m. essa vale $\overline{E^2}/Z$, essendo $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ l'impedenza caratteristica del mezzo.

Si hanno frange luminose quando
 $\theta = m \frac{\lambda}{a}$

essendo θ l'angolo sotto cui è visto P dal punto centrale del segmento $S_1 S_2$ ⁽⁵⁾. In tali condizioni la frangia luminosa si ha quando

$$(9) \quad \delta = ks = \frac{2\pi a\theta}{\lambda} = m(2\pi),$$

con m intero positivo o zero.

La (9) può scriversi

$$(10) \quad \theta = m \frac{\lambda}{a}.$$

Il numero intero m prende il nome di ordine della frangia. La distanza x_m sullo schermo della frangia luminosa di ordine m da quella centrale (ordine zero) può essere posta, essendo $D \gg a$, pari a

$$(11) \quad x_m = D\theta = m \frac{D}{a} \lambda.$$

Analogamente, l'intensità luminosa è nulla (frangia oscura) per

$$\delta = ks = \frac{2\pi a\theta}{\lambda} = (2m+1)\pi,$$

cioè per

Si hanno frange oscure
 $\text{quando } \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2a}$

$$(12) \quad \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2a},$$

con $m = 0, 1, 2, \dots$

Si osservi come un esperimento di questo tipo consenta, in base alla (9), mediante la misurazione della distanza fra frange luminose successive, di determinare la lunghezza d'onda della radiazione.

La figura 13.4 riporta come è distribuita l'intensità dell'onda lungo la direzione x sullo schermo M : essa è il grafico, secondo la (7), di J in funzione di δ . Si osservi che il fenomeno dell'interferenza conduce ad una ridistribuzione dell'energia, ma che ovviamente l'energia media è pari alla somma delle energie trasportate dalle singole onde.

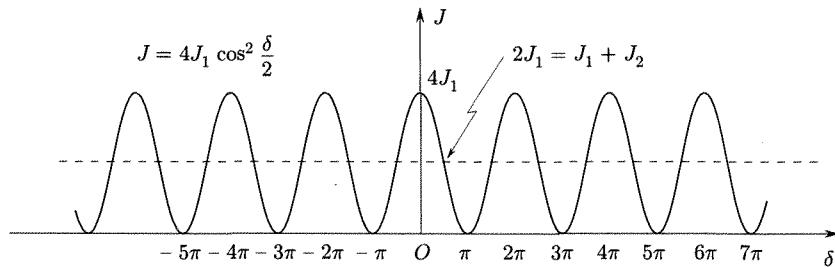


Fig. 13.4

Nel caso che le sorgenti che producono le onde che si sovrappongono non siano coerenti, l'intensità risultante si può ancora ottenere dalla (5) tenendo presente che in tal caso i treni d'onda che si sovrappongono in

⁽⁵⁾ Nelle condizioni poste, come si è detto, r_1, r_2 sono praticamente paralleli e l'angolo $S_2 S_1 R$ è praticamente pari a θ .

istanti successivi hanno differenze di fase che variano in maniera del tutto casuale e di conseguenza nelle operazioni di media, necessarie per ottenere l'intensità, il termine di interferenza scompare. Si ha allora, al posto della (6):

$$(13) \quad J = J_1 + J_2.$$

L'intensità è costante lungo lo schermo e pari alla somma delle intensità che sarebbero prodotte da ciascuno dei due fasci indipendentemente.

Nella descrizione dell'esperienza di Young abbiamo posto le condizioni di monocromaticità e di estensione molto limitata (puntiforme) della sorgente primaria S . Vogliamo cercare di illustrare le ragioni di queste limitazioni. Si osservi innanzi tutto che, in accordo alla (11), la posizione delle frange luminose di vario ordine (m), cioè la loro distanza da O sullo schermo M , dipende da λ . Se la sorgente non è monocromatica, o meglio non emette in una banda sufficientemente stretta (approssimativamente monocromatica) accade che le frange di interferenza per le singole componenti della radiazione emessa hanno distanze fra loro diverse; ciò porta di conseguenza che la frangia centrale (luce non deviata per tutte le lunghezze d'onda) ha lo stesso colore della luce incidente mentre le componenti nelle frange laterali sono separate; si osservano in questo caso solo poche frange nette da una parte e dall'altra della linea centrale giacché il passo diverso delle frange per le componenti di ordine diverso fa sì che a partire da una certa distanza dalla frangia centrale si sovrappongono in ogni posizione frange di ordini diversi di diverso colore, dando luogo ad una illuminazione uniforme.

Passiamo ora a considerare le limitazioni relative alla estensione della sorgente primaria S . Una sorgente monocromatica estesa può essere ritenuta come formata da un gran numero di sorgenti puntiformi, incoerenti fra loro: gli effetti di interferenza che si potranno produrre sullo schermo M (fig. 13.1) sono ottenuti dalla sovrapposizione delle frange di interferenza che le sorgenti S_1 e S_2 produrrebbero se investite esclusivamente dall'onda che proviene da ciascuna sorgente puntiforme. Si comprende allora che se la sorgente S invece che essere puntiforme è una sorgente che si estende esclusivamente in direzione normale a S_1S_2 , per ciascuna delle sorgenti puntiformi (S') in cui essa potrà essere decomposta accade che la perturbazione giunge da S' a S_1 e S_2 in fase e quindi i fenomeni di interferenze osservabili su M sono linee in direzione normale a S_1S_2 che si sovrappongono perfettamente: ne conseguono frange di interferenza rettilinee, egualmente nette come nel caso di sorgente primaria puntiforme, e più luminose. Diversamente stanno le cose se la sorgente primaria è estesa nella direzione S_1S_2 ; in tal caso, decomponendo ancora la sorgente primaria in tante sorgenti puntiformi, si trova che le distanze di ciascuna di queste (S') da S_1 e S_2 sono diverse e quindi la perturbazione giunge da S' in S_1 ed S_2 con una differenza di fase che varia con la sorgente puntiforme considerata; questa differenza di fase viene mantenuta fra i campi [del tipo (4)] che provenienti dalle due sorgenti producono l'interferenza sullo schermo. Ciò porta di conseguenza che i sistemi di frange dovute alle interferenze delle onde coerenti procedenti da S_1 ed S_2 in relazione a ciascuna S' , scorrono nella direzione S_1S_2 allo spostarsi di S' lungo la sorgente primaria. La figura 13.5 mostra questo fatto riportando la distribuzione dell'intensità su M nell'esperienza di Young ottenuta con la sorgente primaria S equidistante da S_1 ed S_2 e (in colore) con un'altra

Se la sorgente non è monocromatica frange prodotte da λ diverse non si sovrappongono

Se la sorgente è estesa normale a S_1S_2 si ha interferenza

Se la sorgente è estesa lungo S_1S_2 le frange scompaiono

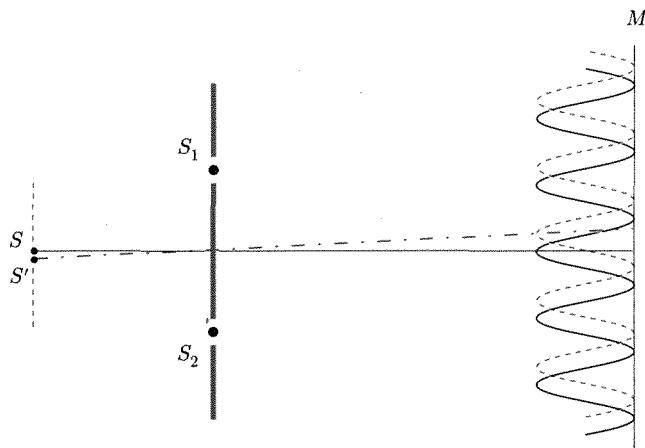


Fig. 13.5

sorgente puntiforme (S') spostata nella direzione S_1S_2 . Ciò che naturalmente si osserva sullo schermo M è la sovrapposizione dei sistemi di frange prodotti da tutte le sorgenti primarie S' . Si comprende quindi che l'estensione della sorgente primaria nella direzione S_1S_2 conduce a frange più larghe, meno nette rispetto al caso di semplice sorgente puntiforme e che tale estensione aumenta si giunge alla scomparsa delle frange⁽⁶⁾.

Frange prodotte da una fenditura sottile

L'osservazione che l'estensione della sorgente nella direzione normale a S_1S_2 non deteriora la figura di interferenza ma anzi la rende più brillante rispetto al caso di sorgente puntiforme, fa sì che nelle disposizioni sperimentali il diaframma a foro circolare della figura 13.1 viene di fatto sostituito da una sottile fenditura nella direzione indicata. Analogamente si possono sostituire i fori a punti di spillo con sottili fessure in direzione normale a S_1S_2 per ottenere le sorgenti secondarie coerenti. Come sarà precisato in seguito (cap. 14, par. 14.5 e 14.10) lo spessore di queste fessure deve essere molto piccolo (inferiore a λ) perché la distribuzione dell'intensità sullo schermo non sia influenzata in maniera notevole da un altro processo (diffrazione alle fessure).

Vogliamo osservare che nell'esperienza che si è discussa frange di interferenza si possono osservare comunque si sposti lo schermo nello spazio in cui le onde si sovrappongono. La forma naturalmente varia essendo le frange osservate niente altro che le linee di intersezione tra il piano dello schermo e le superfici (iperboloidi nelle ipotesi poste) luogo dei punti in cui le onde provenienti dalle due sorgenti (secondarie) coerenti giungono con differenze di fase pari a $m2\pi$ o $(2m+1)\pi$. In situazioni di questo genere si parla di frange non localizzate

■ 13.3. INTERFERENZA MEDIANTE RIFLESSIONI SU UNO STRATO

Alcuni fenomeni di interferenza sono prodotti dalle riflessioni di fasci luminosi sulle superfici limiti di sottili strati (bolle di sapone, strato di olio su liquidi, fessure in pezzi di vetro ecc.). Si hanno effetti molto belli

⁽⁶⁾ Ciò equivale a dire che le sorgenti secondarie S_1 ed S_2 divengono incoerenti.

la cui osservazione è abbastanza comune. Noi qui ci limiteremo a considerare alcuni casi i quali basteranno ad illustrare il tipo di processi che si verificano.

a. Frange con strati a facce parallele

Consideriamo una lastra a facce piane parallele di un materiale trasparente (per es. vetro)⁽⁷⁾ ed una sorgente puntiforme, monocromatica S (fig. 13.6). In un qualsiasi punto P dalla stessa parte di S rispetto alla lastra, giungono due raggi riflessi rispettivamente dalla prima e dalla seconda faccia della lastra⁽⁸⁾ ed in tale punto si ottiene un aumento od una diminuzione della disturbanza ottica che sarebbe prodotta dalla prima onda riflessa, a seconda del valore dello sfasamento in P fra le due onde riflesse. Si potranno quindi osservare frange di interferenza non localizzate nel semispazio che contiene S .

Si osservi che tali frange, se osservate in piani paralleli alla lastra, sono, per ragioni di simmetria, archi di cerchi concentrici aventi centro nell'intersezione del piano con la perpendicolare (SN) da S alla lastra: di conseguenza una frangia che si presenta in corrispondenza ad un punto P è normale al piano SNP . Nel caso che la sorgente S non sia puntiforme ma si estenda parallelamente alla lastra le frange divengono meno nette fino a scomparire se l'estensione è notevole (la visibilità delle frange decresce): ciò è conseguenza della sovrapposizione di sistemi di frange circolari con centri spostati.

A quest'ultima circostanza v'è una eccezione nel caso che il fenomeno di interferenza venga osservato a distanza infinita dalla lastra: ciò si può ottenere facilmente in pratica disponendo una lente come in figura 13.7 ed osservando il processo sul piano focale di essa; è questa la situazione che si realizza osservando le frange direttamente con l'occhio rilassato (aggiustato per avere sulla retina l'immagine di un punto a distanza infinita).

In queste condizioni i due raggi che convergono in P da S ($SADP$ e $SABCEP$) derivano dallo stesso raggio incidente SA e si allontanano paralleli dalla lastra. È abbastanza semplice calcolare la differenza di fase con cui arrivano in P ; essa è pari alla differenza di tempo impiegato a percorrere per un raggio la distanza AN nel mezzo 1 (di indice n_1) e per l'altro la distanza $ABC = 2AB$ nel mezzo 2 (indice n_2). Con le grandezze indicate in figura si ha come differenza di cammino ottico:

$$\Delta l_{\text{ottico}} = n_2 2AB - n_1 AN.$$

Si ha inoltre

$$AB = \frac{d}{\cos \theta_r}$$

$$AN = AC \sin \theta = 2d \tan \theta_r \sin \theta$$

$$n_2 \sin \theta_r = n_1 \sin \theta.$$

e quindi

$$(14) \quad \Delta l_{\text{ottico}} = 2n_2 d \cos \theta_r.$$

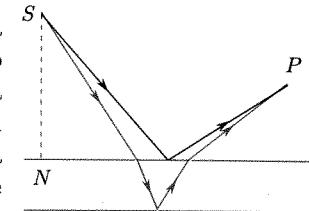


Fig. 13.6

*Frange localizzate
all'infinito*

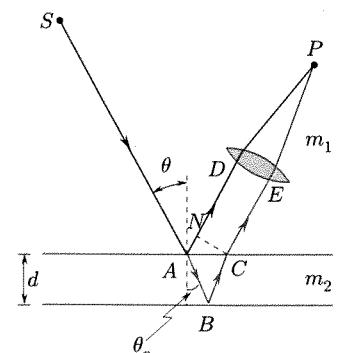


Fig. 13.7

(7) Le stesse considerazioni si possono fare per uno strato fluido a facce parallele.

(8) Supponiamo che si possano trascurare le riflessioni multiple nell'interno dello strato.

Ad esso corrisponde una differenza di fase

$$(15) \quad \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos \theta_r$$

essendo λ_0 la lunghezza d'onda nel mezzo 1.

In realtà la differenza di fase tra i due raggi in P è la somma della (15) e di un altro addendo che è originato dal fatto che le riflessioni avvengono per un raggio alla separazione aria-mezzo della piastra (per es. vetro, otticamente più denso dell'aria) e per l'altro alla separazione vetro-aria (da mezzo più denso a mezzo meno denso). Si può mostrare che secondo la polarizzazione dell'onda primaria, la differenza di fase introdotta per questa ragione è $\pm\pi$. Si ha quindi come differenza di fase totale in P :

$$(16) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos \theta_r \pm \pi = \frac{4\pi d}{\lambda_0} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \pm \pi.$$

Questa relazione mostra che, essendo θ determinato esclusivamente dalla posizione di P nel piano focale della lente (nel piano di osservazione all'infinito) e non dipendendo affatto dalla posizione di S , tutte le coppie di raggi che giungono in P provenienti da uno stesso punto della sorgente hanno la stessa differenza di fase. Ciò significa che le frange sono ugualmente nette per una sorgente puntiforme e per una sorgente estesa. Questa circostanza si verifica solo per il piano di osservazione considerato e pertanto si dice che le frange sono localizzate, più precisamente localizzate all'infinito.

Le frange risultano luminose quando δ dato dalla (16) è

$$(17) \quad \delta = m2\pi$$

con $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, ed oscure per

$$(18) \quad \delta = (2m + 1)\pi,$$

con $m = 0, 1, 2, \dots$

Ciascuna frangia è caratterizzata da un valore di θ_r (e di θ) e perciò esse prendono il nome di frange di ugual inclinazione.

b. Frange ottenute con strati sottili

Supponiamo ora di avere uno strato sottile (film) trasparente, limitato da superfici piane, in genere non parallele fra loro. Esso sia illuminato dalla luce proveniente da una sorgente S monocromatica. Nei nostri ragionamenti supporremo di essere in condizioni da potere trascurare gli effetti delle riflessioni multiple nello strato. Un qualsiasi punto P che si trovi dalla stessa parte di S è raggiunto da due raggi riflessi ciascuno da uno dei piani che limitano lo strato (in fig. 13.8 SAP e SBCDP). Come nel caso precedente si generano figure di interferenza non localizzate nel semispazio.

Per le differenze di cammino ottico e di fase si ritrovano espressioni analoghe a quelle viste nel caso precedente eq. (14), (16).

La loro deduzione in questo caso si ottiene nella seguente maniera, usando le notazioni indicate in figura 13.8.

La differenza di cammino ottico vale

$$(19) \quad \Delta l_{\text{ottico}} = n_1(SB + DP - SA - AP) + n_2(BC + CD).$$

Siano ora N_1 ed N_2 i piedi delle perpendicolari da A ai raggi BC e CD rispettivamente. Ricordando che lo strato è sottile, si può ritenere che il tempo impiegato da

un'onda piana a percorrere la distanza SA nel mezzo 1 sia con buona approssimazione pari a quello impiegato a percorrere la distanza SB nel mezzo 1 e BN_1 nel mezzo 2. Una analoga considerazione può farsi per il percorso AP nel mezzo 1 da una parte ed il percorso formato dal tratto N_2D nel mezzo 2 e DP nel mezzo 1. Si può porre cioè:

$$n_1 SA \simeq n_1 SB + n_2 BN_1$$

$$n_1 AP \simeq n_1 DP + n_2 N_2 D,$$

e quindi

$$(20) \quad \Delta l_{\text{ottico}} \simeq n_2(N_1 C + CN_2).$$

Se inoltre l'angolo fra le due superfici piane è piccolo e si indicano con N'_1 e N'_2 i piedi delle perpendicolari tirate su BC e CD rispettivamente dal punto E che si trova ove la perpendicolare in C alla superficie inferiore dello strato incontra la superficie superiore si può porre:

$$(21) \quad \overline{N_1 C} + \overline{C N_2} \simeq \overline{N'_1 C} + \overline{C N'_2} = 2d \cos \theta'.$$

La (21) introdotta nella (20) consente di ottenere una relazione coincidente con la (14).

Nel caso di strati sottili a superfici piane che formano fra loro un piccolo angolo si ha per la differenza di cammino ottico per i due raggi che giungono in P la relazione:

$$(22) \quad \Delta l_{\text{ottico}} \simeq 2n_2 d \cos \theta';$$

essendo θ' l'angolo indicato in figura 13.8.

Di conseguenza, la differenza di fase risulta

$$(23) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos \theta' \pm \pi,$$

ove è portata in conto la variazione di fase di π che uno dei due raggi ha rispetto all'altro per effetto della riflessione. Si generano frange non localizzate per una sorgente S puntiforme.

Si osservi che, per un dato punto P , se si considera una diversa posizione di S vengono a variare nelle (22) e (23) tanto d quanto θ' e ciò ha come conseguenza che se la sorgente è anche di poco estesa le frange di interferenza dovute ai vari punti della sorgente si sovrappongono spostate e ben presto ogni effetto scompare⁽⁹⁾. V'è tuttavia un caso particolare in cui si possono osservare frange localizzate con una sorgente estesa. È il caso in cui P si trovi proprio sulla superficie superiore del film e tale superficie venga osservata facendone una immagine mediante un sistema di lenti: queste possono essere quelle di un microscopio o quelle dell'occhio. In figura 13.9 è indicata una lente che fa convergere in P' i raggi provenienti da P . Con una tale disposizione si ha:

1. tutte le coppie di raggi provenienti da punti diversi della sorgente estesa che passano per P sono caratterizzati da valori di d praticamente coincidenti;
2. giungono in P' solo quei raggi che riescono ad entrare nel sistema ottico che fornisce l'immagine di P .

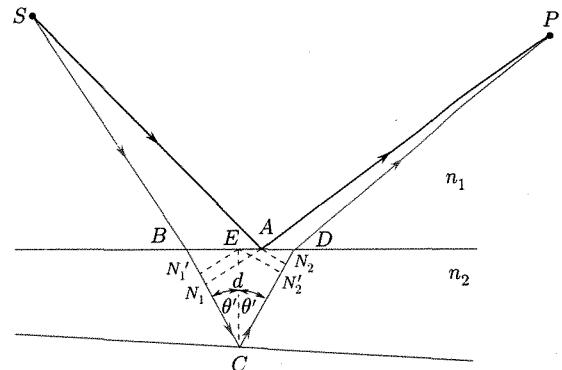


Fig. 13.8

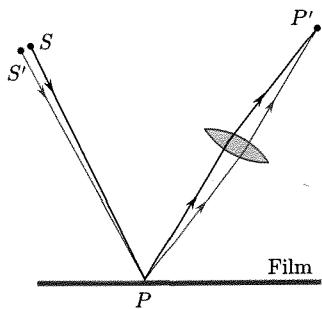


Fig. 13.9

⁽⁹⁾ Le variazioni di δ per le varie coppie di raggi che provengono da punti diversi di S giungono in P divengono molto grandi.

Quest'ultima circostanza limita i valori di θ' e $\cos \theta'$ per le coppie di raggi che giungono in P' . Questa limitazione può essere anche ottenuta limitandosi ad osservare la superficie dello strato in direzione praticamente normale ad esso ($\cos \theta'$ molto prossimo al valore massimo).

Se si indica $\cos \bar{\theta}'$ il valore medio di $\cos \theta'$, supposto che tale quantità possa assumere valori in un campo molto ristretto, si può scrivere per il ritardo di fase tra due raggi provenienti dallo stesso punto della sorgente S che giungono in P' :

$$(24) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \overline{\cos \theta'} \pm \pi.$$

Quando accade che

$$(25) \quad \delta = m2\pi \quad m = 0, 1, 2 \dots,$$

cioè

$$(26) \quad 2n_2 d \overline{\cos \theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,$$

ciascuna coppia di raggi, indipendentemente dal punto di S dal quale proviene, interferisce costruttivamente in P' e quindi in P' si ha un massimo dell'intensità.

Quando

$$(27) \quad \delta = (2m + 1)\pi,$$

$$(28) \quad 2n_2 d \overline{\cos \theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_0}{2},$$

si ha in P' un minimo di intensità.

Frange di uguale spessore

Le considerazioni precedenti sono state fatte considerando uno strato sottile a pareti piane; per quello che riguarda i raggi che passano per P sulla superficie superiore dello strato ed in P' sua immagine, ha interesse, nei limiti delle approssimazioni fatte, solamente il valore del prodotto $n_2 d$ (*spessore ottico*) in P e non in altri punti dello strato. Di conseguenza tali considerazioni possono essere ritenute valide anche per strati sottili a pareti non piane purchè l'angolo fra i piani tangenti alle due superfici limiti rimanga piccolo. Le frange che si osservano con la disposizione di figura 13.9 sono quindi il luogo dei punti di ugual spessore ottico nello strato e perciò prendono il nome di frange di uguale spessore (localizzate sulla superficie superiore dello strato).

La figura 13.10 riporta un esempio di frange di questo genere (illuminazione ed osservazione in direzione normale) in una lamina sottile di vetro comune (vetrino da microscopio); la differenza di spessore fra due frange luminose successive è di $\lambda_0/2n_2$.

Le frange di ugual spessore possono essere ottenute per lo strato di aria compreso fra le superfici piane

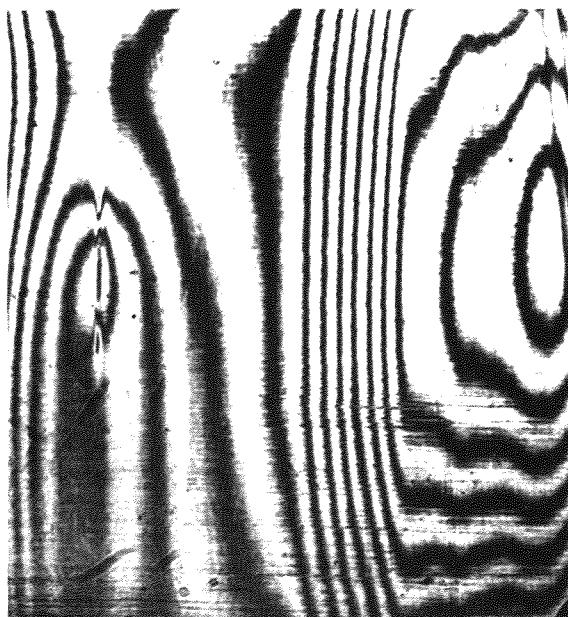


Fig. 13.10

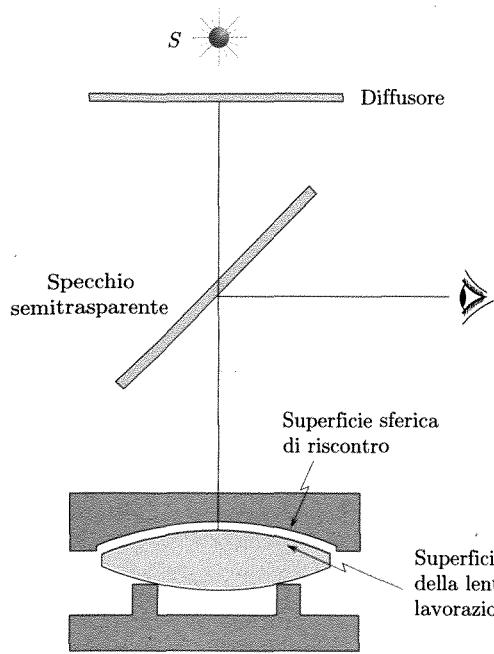


Fig. 13.11

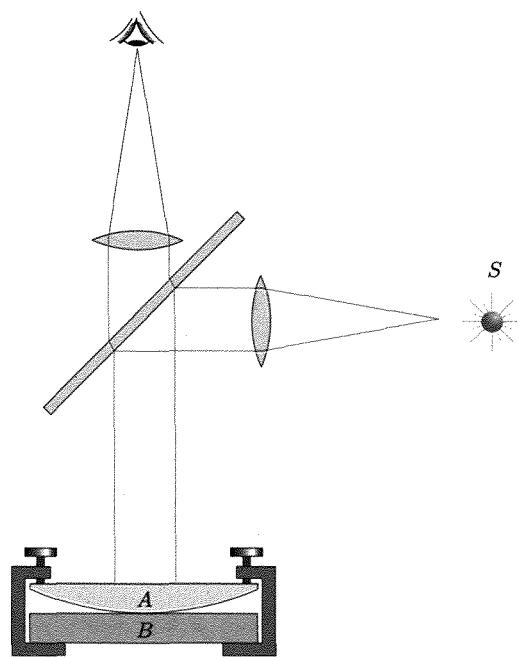


Fig. 13.12

di due lastre trasparenti. Metodi interferometrici che fanno uso di questo tipo di frange sono molto usati nella tecnica di finitura delle superfici ottiche per mostrare deviazioni dalla planarità o dalla sfericità di una faccia, variazioni di indice di rifrazione nelle varie regioni di una lastra ecc. (lavorazione cosiddetta a frange). La figura 13.11 mostra una disposizione per esaminare le deviazioni dalla sfericità della superficie di una lente durante la sua lavorazione.

Un caso particolare di frange di ugual spessore in uno strato di aria fra superfici riflettenti si ha nella celebre esperienza degli anelli di Newton, usata da quest'ultimo per le sue considerazioni sulla natura della luce. La figura 13.12 mostra lo schema: lo strato di aria è quello compreso fra un piano di riferimento (B) e la superficie sferica di una lente (A); l'osservazione è fatta in direzione normale al piano e di conseguenza le frange di ugual spessore sono cerchi concentrici (fig. 13.13).

Indicando (fig. 13.14) con R il raggio di curvatura della superficie sferica e con r la distanza dall'asse OC di un punto sulla superficie sferica, si ha per lo spessore

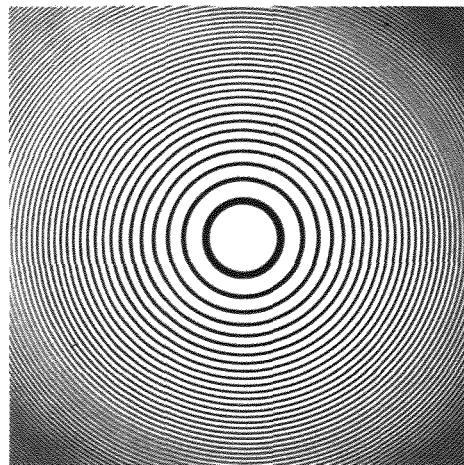


Fig. 13.13

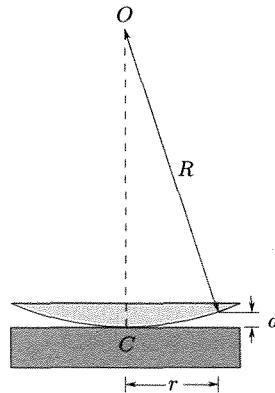


Fig. 13.14

d del film in corrispondenza al punto stesso considerato

$$(29) \quad d = R - \sqrt{R^2 - r^2} \simeq \frac{r^2}{2R}.$$

Nell'ultimo membro della (29) si sono trascurati termini del quarto ordine. Introducendo la (29) nelle (26) e (28) si ha la possibilità di determinare la posizione delle frange luminose e scure. Siccome i diametri delle frange vengono a dipendere da λ si comprende come si possa dalla loro determinazione giungere ad una valutazione di tale grandezza.

Nella disposizione che si sta considerando, nel caso che il contatto stesso sia perfetto (non ci siano grani di polvere fra le superfici; queste non siano deformate ecc.) la frangia centrale risulta oscura in dipendenza dello sfasamento di π fra i raggi riflessi dalle due superfici (riflessione sulla superficie vetro-aria per uno dei raggi che interferiscono e sulla superficie aria-vetro per l'altro).

Si osservi che se le due superfici vengono allontanate (separandole fra loro) lo spessore dello strato viene alterato ed i punti dello strato corrispondenti ad un certo valore di d si muovono verso l'interno (verso C): ciò porta di conseguenza che man mano che le due superfici vengono separate in direzione normale alla superficie piana, le frange si rimpiccioliscono e ne scompare al centro una per ogni spostamento di $\lambda/2$: questa circostanza fornisce un nuovo metodo di determinare λ .

L'osservazione con luce monocromatica consente di vedere un gran numero di anelli di Newton; nel caso che invece si usi una sorgente bianca si riesce a vedere solo pochi anelli con le superfici a contatto o distanti pochi multipli di $\lambda/2$. Ciò è dovuto al fatto che i diametri degli anelli, dipendendo da λ , sono diversi per le varie componenti spettrali della luce. Per es., nella disposizione in cui si abbia un contatto perfetto, si ha per tutte le lunghezze d'onda una frangia oscura al centro e lo stesso è per la luce bianca: le prime frange successive appaiono colorate ma ben presto le frange di diametro maggiore con colori diversi si vengono a sovrapporre disordinatamente e producono un campo bianco in cui le frange stesse sono scomparse.

Altri esempi di frange colorate di eguale spessore prodotte per interferenza in film sottili sono quelle che si osservano alla luce diurna per riflessione su bolle di sapone, strati di olio su superfici liquide ecc.

Vogliamo infine osservare che fenomeni del tutto analoghi a quelli descritti come interferenza di raggi riflessi da film sottili, si ottengono osservando raggi trasmessi da uno strato sottile.

13.4. INTERFEROMETRO DI MICHELSON

Vogliamo ora descrivere un apparecchio, l'interferometro di Michelson, che può essere usato per misure accurate di distanze o di parametri della radiazione (λ) e del mezzo di propagazione (n). In esso viene usato il metodo di divisione di ampiezza per ottenere sorgenti secondarie coerenti da una sorgente primaria incoerente e potere osservare i fenomeni di interferenza.

Lo schema di tale strumento è dato in figura 13.15. Si abbia una sorgente monocromatica ed estesa: essa è in genere realizzata mediante un vetro smerigliato L , investito dalla luce proveniente da una sorgente primaria monocromatica A .

Il fascio di luce che entra nello strumento investe una lastra di vetro a facce parallele (G_1) che ha la superficie posteriore ricoperta da un sottile strato di argento (segnato in figura mediante la linea spessa) sicché essa è semitrasparente: lo spessore di argento è tale che l'onda trasmessa e quella riflessa abbiano praticamente la stessa ampiezza. La lastra è disposta in modo che i due fasci, trasmesso e riflesso, risultino a 90° gradi fra loro. Ciascuno di questi due fasci incontra uno specchio (S_1 o S_2), ritorna

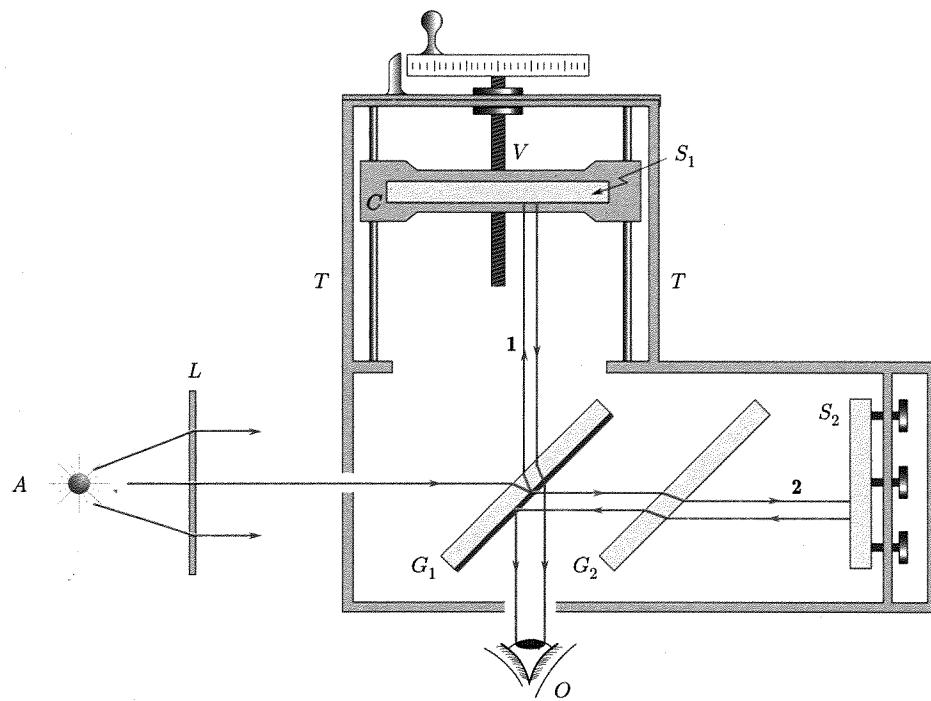


Fig. 13.15

indietro sulla lastra G_1 ove viene ancora in parte riflesso ed in parte trasmesso⁽¹⁰⁾. Il fascio (1) proveniente da S_1 e che attraversa G_1 e quello (2) proveniente da S_2 , riflesso da G_1 si sovrappongono e determinano le frange di interferenza viste dall'osservatore (O). Ci limiteremo a considerare il caso in cui gli specchi S_1 e S_2 siano aggiustati in modo da risultare perfettamente perpendicolari ed a 45° con G_1 . L'osservatore O che guarda verso lo specchio S_1 vede

1. S_1 completamente illuminato (essendosi usata la sorgente estesa L);
2. una immagine (anche essa completamente illuminata) S'_2 dello specchio S_2 ;
3. frange circolari.

Per quanto riguarda l'osservatore lo schema dello strumento può essere essenzialmente ridotto a quello indicato nella figura 13.16. La luce della sorgente estesa L riflessa in parte dallo specchio S_1 ed in parte da S_2 e G_1 è come se provenisse da due sorgenti secondarie L_1 e L_2 , che sono le immagini di L prodotte da S_1 ed S'_2 (immagine virtuale quest'ultima di S_2 prodotta dalla superficie metallizzata di G_1)⁽¹¹⁾. Se a partire da un punto P qualsiasi di L si considerano i punti corrispondenti (P_1, P_2) su L_1 ed L_2 , essi vanno considerati come sorgenti luminose coerenti. La distanza d fra S_1 ed S'_2 dipende dalle distanze da G_1 di S_1 e di S_2 e può essere variata spostando, mediante la vite senza fine V , il carrello C che porta S_1 ; ad una

⁽¹⁰⁾ Nel caso che l'interferometro venga usato con luce non monocromatica ma bianca, è necessario far sì che i percorsi nel vetro dei fasci (1) e (2) siano uguali: è questa la ragione della presenza della lastra G_2 che può essere omessa nell'esperienza in luce monocromatica che si sta descrivendo.

⁽¹¹⁾ Ci riserviamo fra breve di precisare l'effetto prodotto sui due fasci dal fatto che per uno di essi la riflessione su G_1 è nell'interno del vetro, per l'altro è all'esterno.

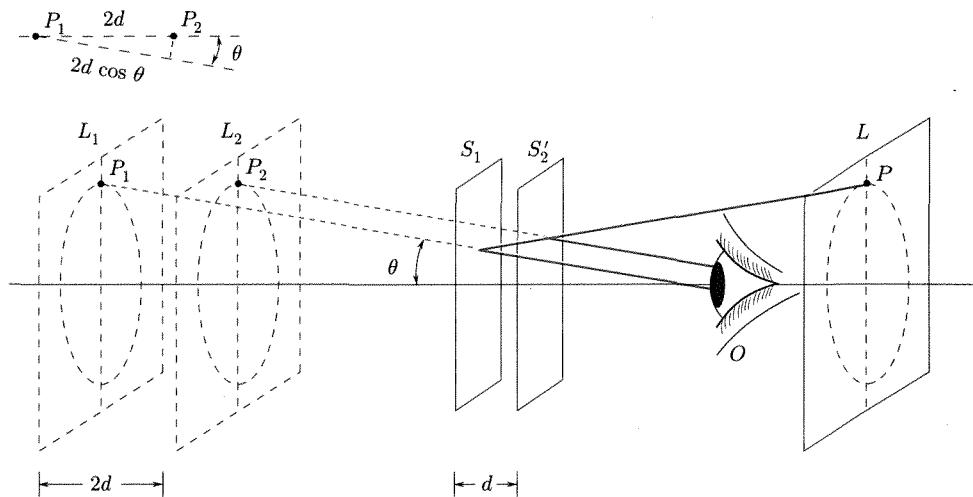


Fig. 13.16

distanza d fra S_1 e S'_2 corrisponde una separazione $2d$ fra le sorgenti secondarie L_1, L_2 . Supponiamo che l'occhio dell'osservatore (O) sia aggiustato in modo da ricevere solo raggi paralleli⁽¹²⁾: se si considerano due punti corrispondenti su L_1 ed L_2 (sorgenti puntiformi coerenti) dovremo considerare, come giungenti all'occhio, i due raggi paralleli con inclinazione θ : essi raggiungono l'occhio con percorsi le cui lunghezze differiscono per

$$2d \cos \theta.$$

A questo diverso cammino corrisponde una differenza di fase

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \theta.$$

La differenza di fase con cui le due onde si sovrappongono in O è in effetti

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos \theta + \phi,$$

essendo ϕ la differenza di fase introdotta fra le due onde provenienti da L_1 e L_2 per il fatto che per una (proveniente da L_1) la riflessione su G_1 è interna al vetro⁽¹³⁾ e per l'altra avviene sul deposito metallico esterno: con buona approssimazione si può nelle considerazioni che qui svolgiamo porre $\phi = \pi$.

Si avrà quindi che le due onde in O provenienti da P_1 e P_2 interferiscono costruttivamente quando

$$(30) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta + \pi = m2\pi$$

e distruttivamente quando

$$(31) \quad \delta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta + \pi = (2m+1)\pi,$$

con $m = 0, 1, 2, 3 \dots$

Si osservi che se d, λ, θ sono tali che la (30) o la (31) è soddisfatta per un punto P di L (o P_1 e P_2 di L_1 e L_2) con un certo valore di m , essa è soddisfatta contemporaneamente per tutti i punti della circonferenza passante per P (ed analogamente delle circonferenze per P_1, P_2) con centro nel piede della perpendicolare da O ad L .

⁽¹²⁾ Una tale condizione è meglio soddisfatta se per l'osservazione si fa uso di un piccolo telescopio, di un sistema ottico cioè capace di dare in un piano l'immagine di oggetti a distanza infinita (cap. 10, par. 10.11).

⁽¹³⁾ Se i fasci 1 e 2 si riflettessero rispettivamente sulle superfici vetro-aria ed aria-vetro lo sfasamento sarebbe $\phi = \pi$. In realtà la superficie del vetro è ricoperta da un sottile strato metallico.

(o L_1, L_2) giacché per tutti questi punti θ è lo stesso. Ciò spiega perché le frange viste dall'osservatore sono circolari. Ogni frangia luminosa corrisponde ad un diverso valore (intero) di m nella (30): queste frange sono di uguale inclinazione.

Si osservi che se si considera il punto centrale del sistema di frange, la (31) diviene

$$(32) \quad 2d = m\lambda$$

poiché $\theta = 0$. Quando questa condizione è soddisfatta il punto centrale del sistema di frange è oscuro. Se si varia d , spostando S_1 , la validità di tale condizione si stabilisce successivamente per spostamenti

$$(33) \quad \Delta d = \frac{\lambda}{2}.$$

Vediamo ora come le frange circolari appaiano per diversi valori di d e come cambino al variare di questo parametro. Se si parte da una posizione di S_1 per cui S_1 si trovi dietro S'_2 di alcuni centimetri⁽¹⁴⁾ le frange si presentano sotto forma di numerosi e sottili cerchi come in figura 13.17a. Si osservi infatti che piccole variazioni di θ sono sufficienti a soddisfare la (30) quando m varia di una unità. Se la distanza d viene ridotta, le frange assumono l'aspetto di cerchi più grossi e distanziati (fig. 13.17b): durante lo spostamento dello specchio si può osservare che ciascuna frangia circolare diminuisce il suo raggio fino a scomparire al centro. Questa circostanza diviene evidente se si pone attenzione alla (31) o (30) giacché per un dato valore di m se d decresce deve aumentare $\cos\theta$, cioè θ deve diminuire.

Quando continuando a decrescere la distanza d si verifica la condizione $d = 0$, le frange scompaiono (fig. 13.17c); in tal caso infatti la differenza di percorso è zero per tutti gli angoli θ : si può pensare che la frangia centrale si è allargata ad occupare tutto il campo. Muovendo ancora nella stessa direzione S_1 questo si sposta davanti a S'_2 , le frange riappaiono originandosi dal centro ed allargandosi verso l'esterno (fig. 13.17d,e).

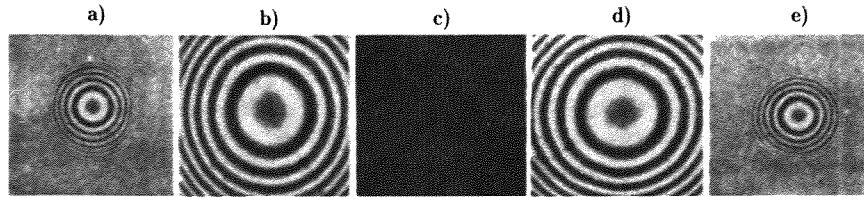


Fig. 13.17 Frange all'interferometro di Michelson (White).

L'interferometro di Michelson viene spesso impiegato per la misurazione accurata di distanze in termini di lunghezze d'onda della luce monocromatica: ciò viene fatto determinando il numero di frange che scompaiono o compaiono al centro della figura di interferenza quando S_1 è spostato della lunghezza in esame. Michelson con tale strumento determinò il valore della lunghezza d'onda della linea rossa del cadmio paragonandola con il metro. Tale linea ha costituito per parecchio tempo il campione primario in spettroscopia⁽¹⁵⁾, la sua lunghezza d'onda è

$$\lambda_r = 6438,4696 \text{ \AA}.$$

⁽¹⁴⁾ Usando l'interferometro di Michelson con luce monocromatica le frange si possono osservare anche per d di varie decine di cm; nel caso si usasse luce bianca le frange si vedono solo per d pari a poche lunghezze d'onda.

⁽¹⁵⁾ Attualmente si fa riferimento alla riga arancione del cripton 86 (vol. I, Introd., par. 3)

$$1 \text{ m} = 1.650.763,73 \lambda_c.$$

Nel 1960 la Conferenza Generale dei Pesi e Misure definì il metro in questa maniera. Nel 1983 ha invece definito il metro con riferimento alla velocità della luce nel vuoto (vedi appendice I).

Interferometri di questo e di altri tipi sono usati anche per determinare l'indice di rifrazione (n) di una sostanza introdotta sul percorso di uno dei fasci dell'interferometro: siccome la velocità di propagazione in tale sostanza è più piccola della velocità nel vuoto (o nell'aria) la sua presenza introduce uno sfasamento fra i fasci che sono portati ad interferire e tale sfasamento si manifesta in una variazione della figura di interferenza.

Vogliamo infine menzionare il fatto che un interferometro di questo tipo fu usato in una celebre esperienza (Michelson e Morley, 1881). In quel tempo era prevalente l'idea che le onde luminose, come avviene per le onde elastiche, richiedano per propagarsi la presenza di un mezzo materiale, e quindi si ipotizzava l'esistenza di un tale mezzo (etero), pur dovendo riscontrare che esso dovrebbe avere proprietà non rilevabili con i metodi ordinari (per es., privo di peso). In queste condizioni si potrebbe parlare di velocità di propagazione della luce con riferimento a tale mezzo, come avviene per il suono in aria, e la velocità sarebbe diversa in sistemi in moto relativo rispetto a tale mezzo. Naturalmente non sarebbe possibile individuare il sistema di riferimento solidale con tale mezzo, ma certo questo non potrebbe essere in quiete rispetto alla Terra, dato che questa si muove di moto di rotazione intorno al Sole (velocità orbitale di un punto sulla superficie pari a circa 30 km/sec) e tutto il sistema solare si muove verso la costellazione di Ercole con una velocità di circa 19 km/sec.

L'esperienza di Michelson e Morley tendeva appunto a determinare, mediante misure di velocità della luce in diverse direzioni in un sistema solidale con la Terra, la velocità (u) nel moto con cui la Terra si sposta attraverso l'etero, rispetto a tale mezzo, ammesso che le ipotesi fatte siano esatte e tale moto esista.

In queste esperienze l'interferometro è trascinato dal moto orbitale della Terra. Supponiamo che esso sia dapprima disposto in modo che la direzione di uno dei due raggi (per es. la direzione G_1S_2 in figura 13.18) sia nella direzione del moto relativo Terra-etero, supposto esistente, e quindi la direzione dell'altro (G_1S_1) sia in direzione normale. In tali condizioni le velocità di propagazione della luce per i raggi che viaggiano fra G_1 e S_2 e viceversa e fra G_1 ed S_1 sarebbero diverse come indica

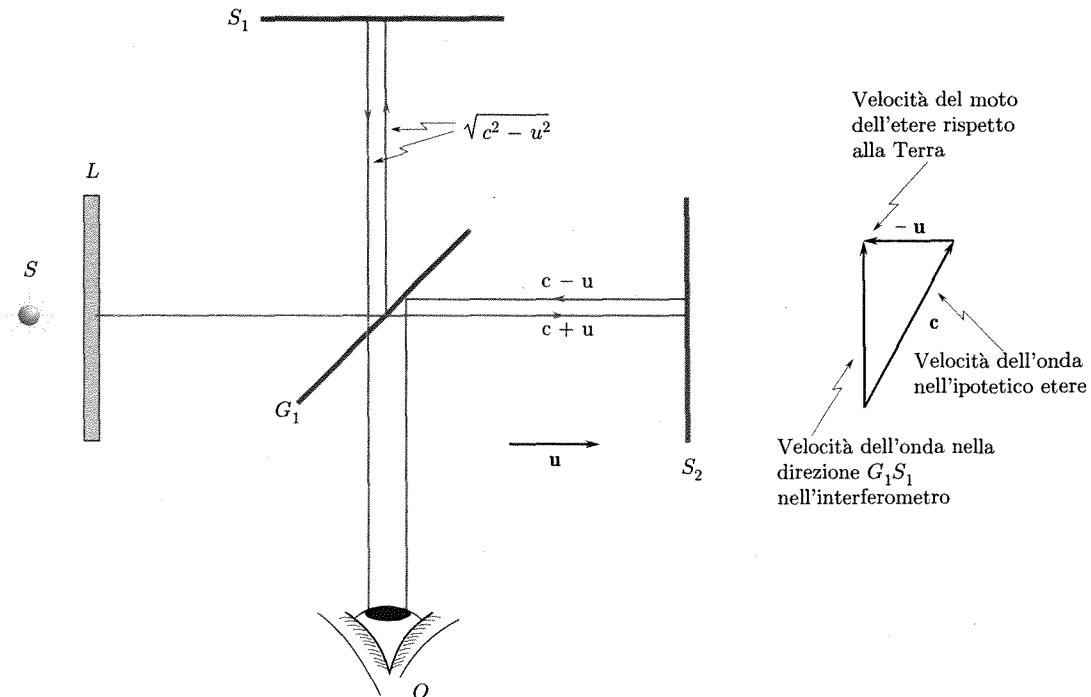


Fig. 13.18

per i moduli la figura 13.18. Si determinerebbe una differenza di cammino ottico per questa ragione fra i raggi che interferiscono in O e tale differenza cambierebbe di segno se l'interferometro venisse ruotato di 90° in modo che G_1S_1 sia ora nella direzione di u e G_1S_2 in direzione normale: ciò si rispecchierebbe in uno scorrimento delle frange di interferenza durante la rotazione dell'interferometro.

L'interferometro fu montato con una sensibilità sufficiente in modo che lo scorrimento si sarebbe dovuto vedere chiaramente se la velocità della Terra rispetto al mezzo (etero) in cui la luce si propaga fosse stata dell'ordine della velocità orbitale della Terra. Michelson e Morley osservavano la posizione delle frange di interferenza mentre l'interferometro veniva lentamente ruotato. L'esperienza fu negativa nel senso che nessuno scorrimento fu osservato. Questo risultato dette origine a molte discussioni finché nel 1905 Einstein suggerì una interpretazione rivoluzionaria rispetto alle idee classiche. Essa costituisce l'ipotesi posta a base della teoria della relatività speciale e cioè che la velocità di propagazione della luce nello spazio libero è la stessa, qualunque possa essere la velocità relativa della sorgente e dell'osservatore: di conseguenza la rotazione dell'interferometro nella esperienza di Michelson e Morley (come anche la rotazione della Terra) non produce alcun effetto: la velocità della luce è la stessa per tutti i percorsi considerati.

Si badi che tutto ciò serve a dire che i risultati dell'esperienza di Michelson e Morley sono in accordo con la teoria della relatività ma non che sono una prova delle ipotesi a base di tale teoria.

13.5. COERENZA

Si è osservato all'inizio del capitolo che condizione necessaria per la osservazione dei fenomeni di interferenza è la coerenza delle sorgenti. Le sorgenti primarie sono costituite da un gran numero di atomi eccitati ciascuno dei quali dissecitandosi emette un breve treno d'onda. Tali treni d'onda sono caratterizzati da una frequenza media propria della transizione ed hanno durata molto breve, dell'ordine di $10^{-8} - 10^{-10}$ sec. La luce che viene osservata è formata dalla sovrapposizione di tutti i treni d'onda emessi nei processi di dissecchezza degli atomi eccitati della sorgente. Poiché il processo di emissione è un processo puramente statistico, si comprende come la esatta composizione della luce non possa essere determinata istante per istante in modo rigoroso, ma vada trattata con criteri statistici. La coerenza delle sorgenti è quindi un tipico aspetto statistico di fenomeni fisici e va trattata a rigore con teorie statistiche (funzioni di correlazione fra valori della disturbanza ottica in due o più punti, in due o più istanti successivi). Noi naturalmente non abbiamo qui la possibilità neanche di introdurre gli elementi base della teoria statistica della coerenza⁽¹⁶⁾. Peraltro vogliamo svolgere alcune considerazioni utilizzando i risultati dei paragrafi precedenti per precisare il concetto di coerenza, il modo di funzionare delle sorgenti e come la coerenza possa ricevere una prima valutazione quantitativa, almeno nei termini della descrizione classica.

Già nella analisi dell'esperienza di Young noi abbiamo visto che la luce proveniente da due sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 secondarie di una sorgente primaria anch'essa puntiforme (S) (fig. 13.1), produce sullo schermo M (di piccole dimensioni e a distanza da S_1 e S_2 grande rispetto a $\overline{S_1S_2}$) frange la cui intensità è distribuita come indicato nella figura 13.4 (lo sfasamento

⁽¹⁶⁾ Una trattazione introduttiva chiara è fatta da M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press.

δ è legato direttamente alla coordinata spaziale normale alle frange sullo schermo M); tale intensità varia fra $4J_1$ e 0 essendo $J_1 = J_2$ l'intensità che sarebbe prodotta da ciascuna delle sorgenti S_1 ed S_2 . Se si introduce un parametro particolare, la visibilità delle frange, definito in termini dei valori massimo e minimo delle intensità rispettivamente di una frangia luminosa ed una oscura contigua sullo schermo M ,

Visibilità delle frange

$$(34) \quad V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

esso vale 1 per il caso esaminato di sorgenti S_1 ed S_2 coerenti, meglio completamente coerenti⁽¹⁷⁾ e solo per esso. Dalla trattazione dell'esperienza di Young si è anche ricavato che se⁽¹⁸⁾ le sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 invece di essere secondarie d'una stessa sorgente primaria puntiforme fossero esse stesse primarie qualsiasi, il termine di interferenza nella (6) verrebbe a mancare; le frange non sono più visibili ed in questo caso, ovviamente $V = 0$. Si parla di sorgenti completamente incoerenti. Vi possono essere naturalmente casi intermedi, nei quali, sempre in una esperienza alla Young, le sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 producono radiazione che solo in parte è correlata. La maniera più semplice di ottenere ciò è di far sì che la sorgente primaria S non sia puntiforme ed abbia una estensione limitata nella direzione $\overline{S_1 S_2}$. Si parla allora di sorgenti parzialmente coerenti; le frange risultano meno nette su un fondo non più scuro e la *visibilità* assume valori intermedi fra 1 e 0. Si vede che questo parametro, visibilità delle frange, può essere preso per rappresentare in qualche modo le proprietà di coerenza delle due sorgenti S_1 ed S_2 usate nell'esperienza.

Vogliamo ora cercare di caratterizzare con maggiore precisione il funzionamento delle singole sorgenti *primarie* e le proprietà di coerenza della radiazione.

a. Coerenza temporale

Supponiamo perciò inizialmente di fare osservazioni con un interferometro di Michelson aggiustato per l'osservazione di frange circolari. Supponiamo ancora di partire da distanze all'incirca uguali dei due specchi (S_1, S_2 , figura 13.15) dal divisore del fascio (G_1) e di allontanare gradatamente lo specchio S_1 . Le frange, molto nette all'inizio, restano nette per uno spostamento abbastanza grande, ma poi si affievoliscono e finiscono per scomparire. La spiegazione va data nella seguente maniera.

Supponiamo che la luce usata corrisponda ad una *linea* emessa in un tubo a scarica riempito di un gas (per es. Hg) ed isolata dalle altre. *La emissione avviene per i treni d'onda emessi a caso, ed un gran numero di essi è emesso nel tempo richiesto per l'osservazione interferometrica.*

Non considerando per il momento importanti ragioni che rendono il fenomeno più complesso, possiamo immaginare che ciascuno di questi treni sia un gruppo d'onda della stessa durata Δt , nel quale oscillazioni della stessa ampiezza sono contenute in un certo numero e che il periodo (meglio l'intervallo fra massimi successivi) di queste oscillazioni corrisponda alla frequenza ν_0 di un'onda elettromagnetica: ciascun treno ha la stessa lunghezza. Esso entra nell'interferometro ed è diviso in due treni ancora

⁽¹⁷⁾ Nell'ordine delle considerazioni approssimate che qui si fanno.

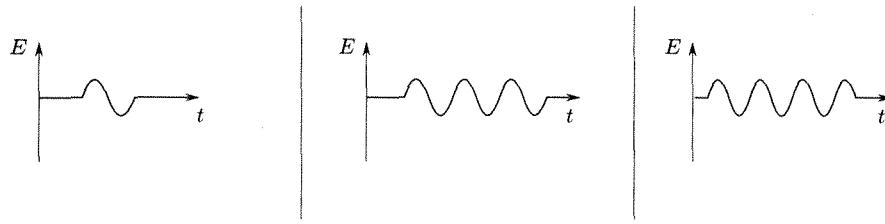
⁽¹⁸⁾ Si ottiene lo stesso risultato usando un'unica sorgente comune (per es. termica) primaria S , purché sufficientemente estesa in direzione $\overline{S_1 S_2}$.

della stessa lunghezza dallo specchio semi-trasparente; tali treni riflessi rispettivamente da S_1 ed S_2 sono riportati all'osservatore in O . Perché i due treni possano produrre interferenza in O è necessario che uno arrivi prima che l'altro sia interamente passato e quindi che la differenza di cammino nei due rami dell'interferometro sia inferiore alla lunghezza dei treni. In caso contrario ciascun treno riflesso da uno specchio (per es. S_1) si sovrapporrebbe a treni riflessi dell'altro (S_2) i quali provengono da treni originari diversi. La differenza di fase fra questi treni è una grandezza che fluttua a caso data la natura statistica del processo di emissione. Nel tempo necessario a fare l'osservazione molti di questi treni vengono ad agire sicché ciò che si osserva è una media dei loro effetti: in conseguenza della fluttuazione a caso della fase relativa dei treni (treni completamente incorrelati) tale media corrisponde ad assenza di fenomeni osservabili di interferenza.

Si osservi che una sorgente del tipo avanti specificato non è rigorosamente monocromatica proprio perché l'emissione consiste in gruppi d'onda, e non in un'onda sinusoidale continua: sappiamo (vol. I, cap. 9, par. 9.15) che un gruppo d'onda è prodotto dalla sovrapposizione di onde sinusoidali di frequenze molto vicine: nell'analisi di Fourier le componenti aventi ampiezza diversa da zero sono contenute in un intervallo che diviene sempre più piccolo quanto più lungo è il treno (al limite per un treno di durata infinita si ha l'onda monocromatica).

La figura 13.19 riporta, a titolo d'esempio, per gruppi d'onda di durata diversa (a, b, c) i grafici dello spettro di Fourier, cioè l'intensità delle componenti armoniche. Si trova che la cosiddetta larghezza di linea $\Delta\nu$, definita come l'intervallo di frequenza in cui le componenti armoniche sono apprezzabilmente diverse da zero, è dell'ordine di grandezza dell'inverso

Forma del gruppo d'onda



Intensità delle componenti nell'analisi di Fourier

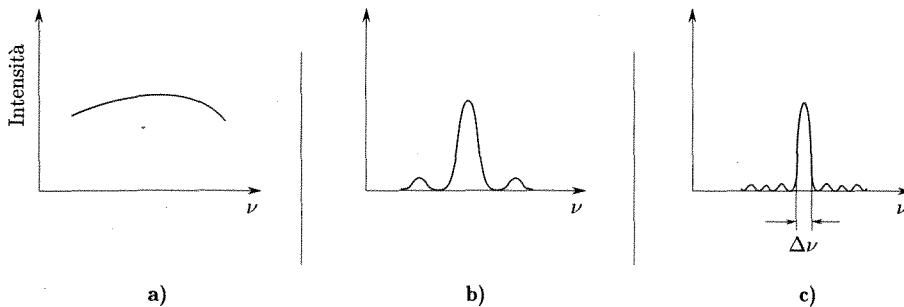


Fig. 13.19

della durata dei treni

$$(35) \quad \Delta\nu \simeq \frac{1}{\Delta t}.$$

In realtà vi sono altre ragioni che producono allargamenti della linea, come l'effetto Doppler causato dal moto degli atomi emettitori ed il disturbo durante l'emissione da parte di un atomo, prodotto dagli atomi vicini. È possibile tuttavia, sempre per una sorgente *approssimativamente monocromatica*, introdurre due quantità $\Delta\nu$ e Δt che possono essere interpretate rispettivamente come una estensione media dello spettro di Fourier ed una durata media dei treni d'onda di cui è formata la distanza ottica. Si mostra che è ancora⁽¹⁹⁾:

$$(36) \quad \Delta\nu \simeq \frac{1}{\Delta t}.$$

*La larghezza di linea
è l'inverso del tempo
di coerenza*

Il tempo Δt prende il nome di tempo di coerenza della luce emessa dalla sorgente e la lunghezza

$$(37) \quad \Delta l = c\Delta t \simeq \frac{c}{\Delta\nu}$$

lunghezza di coerenza. Il tempo di coerenza o la lunghezza di coerenza sono quindi parametri che consentono di caratterizzare le proprietà di coerenza temporale della luce emessa da una sorgente: effetti di interferenza potranno essere osservati in interferometri tipo Michelson purché la differenza di cammino dei fasci sia piccola rispetto alla lunghezza di coerenza; le frange di interferenza si attenuano e finiscono con lo scomparire quando questa differenza di cammino diviene dell'ordine o supera la lunghezza di coerenza.

La determinazione della visibilità delle frange di interferometri di questo tipo consente di valutare la lunghezza di coerenza.

Nelle sorgenti ordinarie (per es. termiche) Δl è di qualche centimetro; nel caso di laser Δl è dell'ordine di 10^7 metri.

Questo dato mostra eloquentemente le proprietà dei laser come sorgenti coerenti.

b. Coerenza spaziale

Consideriamo ora il campo creato da una sorgente quasi-monocromatica (nel senso specificato al punto precedente) spazialmente estesa e due punti P_1 e P_2 in esso: supponiamo che le distanze di P_1 e P_2 dalla sorgente siano molto grandi rispetto a λ .

Desideriamo porre a confronto le distanze ottiche in P_1 e P_2 : ciò si può fare sperimentalmente usando P_1 e P_2 come sorgenti secondarie di una esperienza alla Young e determinando la visibilità delle frange. C'è da attendersi che se P_1 e P_2 sono sufficientemente vicini tra loro le distanze ottiche (dovute ai contributi dei vari punti della sorgente primaria estesa) non saranno indipendenti tra loro tanto in ampiezza quanto in fase. Sembra anzi lecito assumere che se P_1 e P_2 sono tanto vicini fra loro che la differenza dei cammini da ciascun punto della sorgente a P_1 e P_2 è piccola rispetto alla lunghezza d'onda media della sorgente, le distanze in P_1 e P_2 siano praticamente le stesse e che qualche correlazione esista ancora

⁽¹⁹⁾ Si può dimostrare la validità della (36) anche sulla base del principio di indeterminazione di Heisenberg.

se P_1 e P_2 vengono separati purché le differenze di cammino da ciascun punto della sorgente a P_1 e P_2 sia inferiore alla lunghezza di coerenza (37). Si giunge quindi a considerare intorno ad un qualsiasi punto nel campo dell'onda luminosa una regione di coerenza spaziale.

La coerenza (spaziale e temporale) viene quindi precisata come proprietà dei campi elettromagnetici, naturalmente legata alle proprietà delle sorgenti. La teoria della coerenza (classica o quantistica) consente di caratterizzare meglio questa proprietà dei campi mediante un'opportuna media della disturbanza ottica in più punti ed in istanti successivi.

DIFFRAZIONE

- ✓ Il primo riferimento a fenomeni di **diffrazione** si trova in Leonardo da Vinci. Ma una descrizione accurata fu data per la prima volta in un libro dell'abate Grimaldi, pubblicato postumo nel 1665. La possibilità di spiegare gli effetti di diffrazione, applicando la costruzione di Huygens, fu tuttavia mostrata solo nel 1818 da Fresnel.
- ✓ I problemi di diffrazione sono fra i più difficili in ottica. Fresnel e Fraunhofer hanno sviluppato metodi approssimati per trattare gli effetti quando sorgente e schermo d'osservazione si trovano a **distanza finita** dall'ostacolo (Fresnel), o a **distanza infinita** (Fraunhofer).
- ✓ La diffrazione da una *fenditura semplice* è un caso in cui è possibile dare una soluzione analitica semplice che viene qui discussa. Il risultato permette di introdurre il concetto di *potere risolutivo*. I risultati sono poi estesi al caso di **apertura circolare**.
- ✓ I casi di due o più fenditure e dei *reticolii* di diffrazione con la loro applicazione alla spettroscopia nel visibile o infrarosso e la loro estensione ai reticolii tridimensionali formati da cristalli con la loro applicazione al campo dei raggi X vengono trattati in modo approssimato e semplificato, dando solo le notizie essenziali.

14.1. INTRODUZIONE

Nello svolgere molte considerazioni per illustrare i fenomeni associati alla propagazione per onde di una perturbazione (elastica od elettromagnetica) si suppone di avere superfici d'onda (sferiche, piane, cilindriche ecc.) geometricamente regolari e, tranne che nel caso di superfici sferiche, di estensione infinita; ciò equivale a non tenere conto degli effetti prodotti da ostacoli fra sorgente ed osservatore, nel caso che siano presenti, e, di solito, delle dimensioni finite delle sorgenti. Si tratta di una approssimazione molto spesso buona, ma v'è da attendere che si debbano presentare situazioni nelle quali l'ipotesi non sia valida. I fenomeni di diffrazione consistono in distribuzioni particolari dell'ampiezza (e dell'intensità) della perturbazione trasmessa per onde, che hanno appunto la loro origine in limitazioni spaziali dei fronti delle onde che vanno dalla sorgente all'osservatore imposte da ostacoli frapposti o dalle dimensioni finite di alcune sorgenti.

Trattando della propagazione delle onde elastiche sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, abbiamo già indicato alcune situazioni in cui si presentano fenomeni di diffrazione: quando un fascio di onde elastiche incide su un ostacolo con un bordo netto, la perturbazione al di là dell'ostacolo si estende in una zona che può giungere ad invadere tutto il semispazio (vol. I, cap. 9, par. 9.26); un fascio di onde che incida su una fenditura lineare o su un foro di piccole dimensioni produce su uno schermo una distribuzione dell'ampiezza corrispondente a figure (di diffrazione) particolari; il fascio di onde emesso da una sorgente piana di dimensioni limitate presenta, in una sezione trasversale, una distribuzione dell'ampiezza pari a quella che si avrebbe se un fascio di onde piane investisse un foro di dimensioni pari a quelle della sorgente (vol. I, cap. 9, par. 9.27; cap. 10, par. 10.6).

Per osservare i fenomeni di diffrazione ottica bisogna di solito porsi in particolari condizioni che cercheremo di descrivere nei paragrafi successivi. Vi sono tuttavia alcuni effetti facilmente osservabili quali quelli che si presentano se si guarda il Sole od una sorgente puntiforme abbastanza lontana (per es. un lampione) attraverso una tela sottile: al posto di una sola sorgente luminosa bianca, appaiono successioni di immagini colorate di sorgenti nelle due direzioni della trama e dell'ordito del tessuto; così pure, socchiudendo le palpebre mentre si guarda un oggetto, fino a realizzare con esse una sottile fessura, i contorni dell'oggetto sfumano e si estendono e così via. I problemi di diffrazione vanno trattati mediante l'impiego del

principio di Huygens-Fresnel (cap. 11); la trattazione matematica è, tranne che in casi molto semplici, piuttosto complessa. Nei successivi paragrafi noi discuteremo alcuni casi di diffrazione ponendo l'enfasi sulla essenza fisica del problema; la trattazione matematica completa esula dai limiti di questo volume e va cercata in trattati specializzati. È bene ulteriormente sottolineare che sebbene nella trattazione teorica della diffrazione si studieranno gli effetti mediante la sovrapposizione di onde come richiesto nell'uso del principio di Huygens-Fresnel, i fenomeni di diffrazione non vanno confusi con quelli di interferenza: i primi sono una caratteristica della propagazione per onde quando i fronti d'onda hanno limitazioni spaziali ed il considerare la sovrapposizione di opportune ondine è solo un metodo di analisi dei fenomeni stessi; i secondi invece come si è visto nel capitolo precedente sono dovuti alla effettiva sovrapposizione di sistemi indipendenti di onde (che cioè possono esistere indipendentemente).

Nel seguito noi supporremo, di solito, di avere a che fare con sorgenti monocromatiche. Come nel caso dei fenomeni di interferenza, le distanze fra le frange di diffrazione dipendono da λ : ciò porta di conseguenza che le figure di diffrazione ottenibili con sorgenti policromatiche siano formate da sistemi di frange ciascuno corrispondente ad uno solo dei colori presenti nella radiazione, spostati fra loro. Questa circostanza rende di solito le figure di diffrazione osservabili con luce policromatica (per es. bianca) meno nette e più complesse di quelle ottenibili con radiazione monocromatica.

■ 14.2. DIFFRAZIONE DI FRESNEL E DI FRAUNHOFER

Lo schema più semplice per una esperienza di diffrazione è indicato nella figura 14.1. Una sorgente puntiforme monocromatica (O) emette onde sferiche ed un ostacolo di opportune dimensioni limita il libero propagarsi della perturbazione: tale ostacolo può essere rappresentato da un diaframma che consente la propagazione esclusivamente attraverso una zona limitata del suo piano (fig. 14.1a) oppure un oggetto che impedisca la propagazione attraverso una regione limitata (fig. 14.1b).

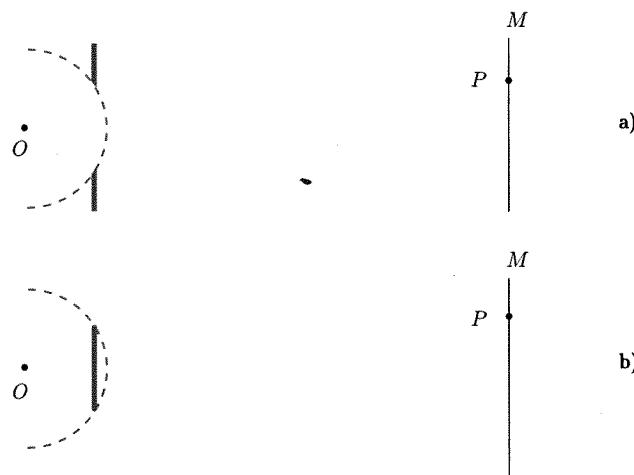


Fig. 14.1

Il valore della perturbazione in un punto qualsiasi P al di là dell'ostacolo può essere trovato con buona approssimazione, applicando il principio di Huygens-Fresnel (cap. 11, par. 11.2) ai punti del fronte d'onda che in corrispondenza all'ostacolo si trovano nella regione in cui è consentita la propagazione. Si comprende quindi come tale valore possa dipendere in maniera critica dalla posizione di P rispetto all'ostacolo ed in particolare dalla distanza di P dai vari punti sorgenti di ondine nell'applicazione del principio di Huygens-Fresnel (parte del fronte d'onda in corrispondenza all'ostacolo).

Il caso comune di osservazione del fenomeno di diffrazione è quello nel quale la sorgente e lo schermo sul quale si esamina la distribuzione della perturbazione (figura di diffrazione) si trovano a distanza finita dall'ostacolo: si parla di diffrazione di (o alla) Fresnel. La trattazione matematica del problema è di solito piuttosto complessa.

Di considerevole interesse per le applicazioni in apparati ottici è il caso in cui tanto la distanza sorgente-ostacolo, quanto quella ostacolo-piano di osservazione siano rese infinite; ciò significa che l'ostacolo è investito da onde piane e che onde piane raggiungono i singoli punti dello schermo di osservazione (in ciascun punto P giungono solo raggi paralleli). Questo caso particolare di diffrazione prende il nome di diffrazione di (o alla) Fraunhofer. La realizzazione delle condizioni per la osservazione della diffrazione di Fraunhofer può essere facilmente ottenuta, facendo uso di lenti convergenti (fig. 14.2) e disponendo la sorgente puntiforme nel primo fuoco di una prima lente e lo schermo nel secondo piano focale di una seconda lente. La trattazione matematica della diffrazione di Fraunhofer è molto più semplice di quella di Fresnel.

Diffrazione di Fresnel

Diffrazione di Fraunhofer

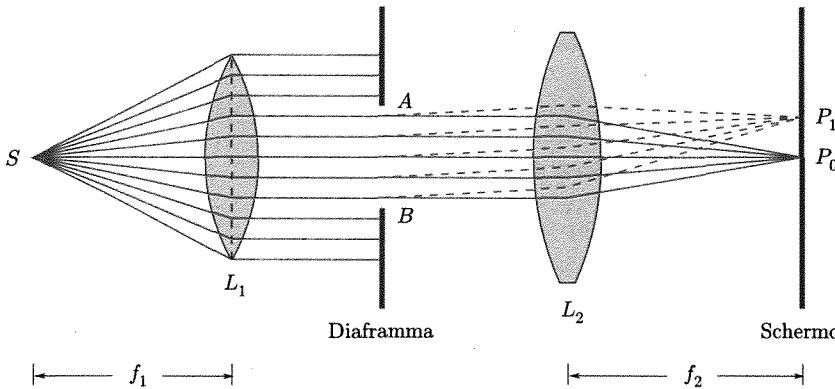


Fig. 14.2

Allo scopo di dare un'idea qualitativa degli aspetti che la diffrazione di Fresnel e di Fraunhofer possono prendere, sono riportate nella figura 14.3 (C. Slater) le figure di diffrazione di Fresnel calcolate per una fenditura orizzontale alta 5λ , infinitamente lunga ed illuminata da un fascio di luce parallelo (sorgente a distanza infinita dalla fenditura) a varie distanze dalla fenditura stessa. Nella figura 14.3a è mostrato lo schema della disposizione e sono indicate le distanze alle quali sono determinate le distribuzioni della perturbazione; le figure 14.3b-3g riportano le distribuzioni della perturbazione sullo schermo posto nelle posizioni $b-g$ di figura 14.3a; il tratto spesso sulle ascisse corrisponde alla proiezione geometrica (dalla sorgente) della

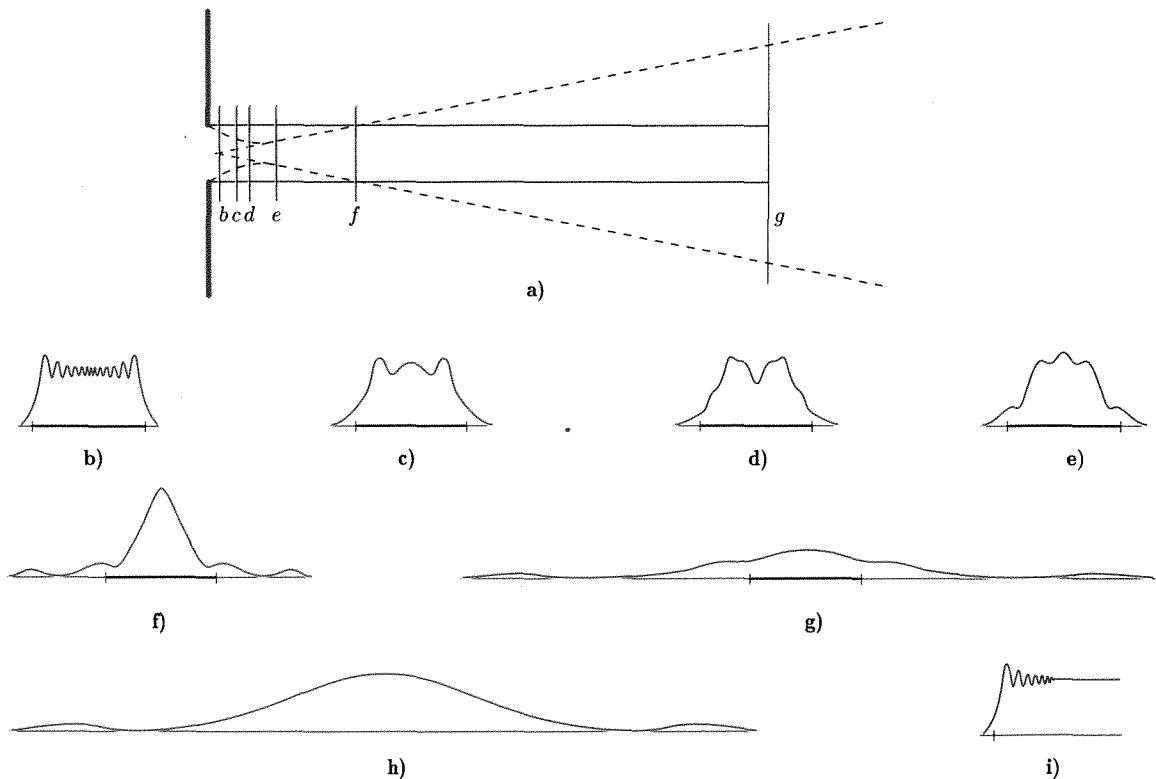


Fig. 14.3

fenditura sullo schermo in modo che risulti chiaro l'estendersi della zona investita dalla perturbazione alle varie distanze al di là dei limiti di tale proiezione. Le linee tratteggiate nella figura 14.3a indicano la posizione dei massimi della perturbazione vicino agli orli della zona illuminata, alle varie distanze.

La figura 14.3h mostra la perturbazione su uno schermo a distanza infinita, cioè la figura di diffrazione di Fraunhofer. Nella stessa figura (fig. 14.3i) è riportata la figura di diffrazione di Fresnel prodotta da uno spigolo rettilineo infinitamente lungo introdotto al posto della fenditura nello schema di figura 14.3a. Si confronti tale distribuzione con le due parti periferiche (di destra e sinistra) di figura 14.3b.

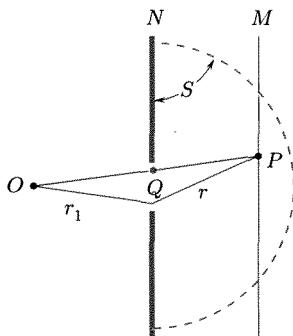


Fig. 14.4

14.3. DIFFRAZIONE DI FRESNEL

Facciamo riferimento alla disposizione della figura 14.1. Il calcolo della disturbanza ottica in un punto qualsiasi P dello schermo M può essere eseguito applicando il principio di Huygens-Fresnel partendo da una superficie chiusa S che circondi la sorgente o il punto P (cap. 11). Conviene scegliere opportunamente tale superficie. Se per esempio l'ostacolo consiste in una apertura in uno schermo piano N si può prendere (fig. 14.4) come superficie S che circonda P un tratto del piano dello schermo N che comprenda la apertura ed una semisfera (in colore nella figura). Un risultato sufficientemente approssimato si ottiene allora facendo l'ipotesi che l'ampiezza dell'onda incidente dalla sorgente O sulla superficie S sia:

1. la stessa che si avrebbe in assenza di ostacolo in corrispondenza alle zone non impeditate dall'ostacolo (cioè dall'apertura);
2. nulla nei punti impediti dall'ostacolo.

Il problema può essere trattato in maniera analoga qualunque sia la forma dell'ostacolo.

La trattazione matematica del problema consiste nel calcolo per il potenziale in P dell'integrale (cap. 12, par. 12.2)

$$(1) \quad V(P, t) = \int \frac{jA}{2\lambda} \frac{1}{rr_1} e^{j\omega[t-(r+r_1)/c]} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)] dS,$$

essendo l'integrale esteso alla parte di S non impedita dall'ostacolo. Questo è sempre abbastanza complesso e può divenire addirittura impossibile appena la forma degli ostacoli non sia particolarmente semplice. Noi ci limiteremo ad individuare qualitativamente gli aspetti principali della figura di diffrazione osservabile su M , facendo uso delle zone di Fresnel (cap. 11, par. 11.2).

Volendo considerare la disturbanza in un punto P prodotto da una sorgente puntiforme (O) in presenza di una apertura nello schermo N , si consideri la retta congiungente O con P e la intersezione, Q , con il piano di N (fig. 14.4). Per il punto Q si ha che $(r + r_1)$ ha il valore minimo. Si segnino ora su N le linee così caratterizzate:

1. per i punti di ciascuna di esse $(r + r_1)$ è costante ⁽¹⁾;
2. per due linee successive i valori di $(r + r_1)$ differiscono per $\lambda/2$.

Due linee successive individuano su N una zona di Fresnel.

Ricordiamo che i contributi all'ampiezza del potenziale in P dovuti a zone successive sono di segno opposto; il contributo dovuto alla sola zona centrale (prima zona) è pari al doppio dell'ampiezza prodotta dall'intera onda. Inoltre nel caso che al potenziale P concorrono un numero finito di zone, ciascuna con il suo intero contributo, il potenziale in P è pari alla semisomma od alla semidifferenza dei contributi della prima e dell'ultima zona a seconda che le zone siano in numero dispari o pari.

Si comprende quindi che il valore della disturbanza in P dipenderà dal numero e dalla estensione delle zone di Fresnel costruite con riferimento a tale punto, che non sono ostruite dall'ostacolo.

In figura 14.5 supponiamo che l'apertura nello schermo N (fig. 14.4) sia di forma quadrata ed esaminiamo come si presentino le cose secondo la posizione di P su M . Sulle figure 14.5b, c, d sono segnate tanto l'apertura quanto le zone di Fresnel attorno al punto Q , per tre posizioni di P . Se P_1 si trova molto all'interno del cono che da O proietta l'apertura su M (zona illuminata in senso geometrico), la posizione dell'apertura rispetto alle zone di Fresnel (aventi centro in Q_1) è quella indicata in figura 14.5b. Il contributo della zona centrale e di alcune delle successive è lo stesso di quello che si avrebbe in assenza di ostacolo; in quanto alle zone successive si ha che per un certo numero di esse il contributo è solo una parte di quello che esse darebbero in assenza di ostacolo, mentre per altre il contributo è completamente eliminato. Si osservi inoltre che per le

⁽¹⁾ Si tratta quindi delle intersezioni con il piano di N di ellissoidi aventi fuochi in O e P . Se OP non si scosta molto dalla normale al piano di N , tali linee sono approssimativamente cerchi con centro in Q .

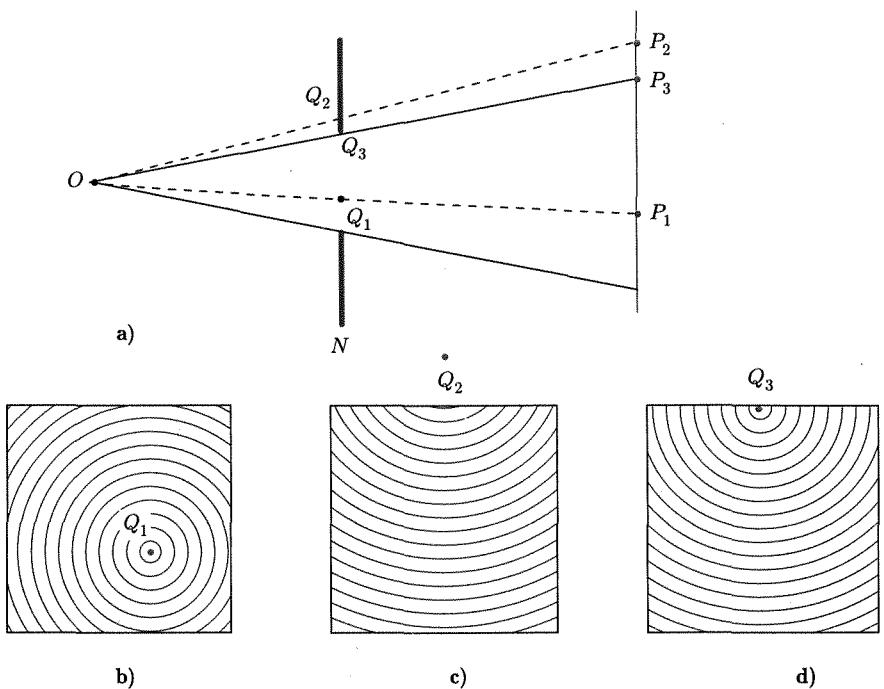


Fig. 14.5

zone parzialmente ostruite la entità della ostruzione varia gradualmente passando da una zona alla successiva e ciò porta di conseguenza che i contributi di due zone successive alla disturbanza in P risultano ancora con buona approssimazione uguali e contrari (così come avviene in assenza di ostacolo); di conseguenza la disturbanza in P può ancora essere presa pari alla semisomma dei contributi della prima e dell'ultima zona interessata. Siccome d'altra parte il contributo dell'ultima zona è praticamente nullo poiché la sua area è molto piccola, si trova che la disturbanza ottica in un punto ben all'interno del cono che dalla sorgente proietta l'apertura (zona geometricamente illuminata) è pari alla metà della disturbanza prodotta dalla sola zona di Fresnel centrale ed è quindi uguale a quella che si avrebbe in assenza dell'ostacolo.

Si consideri ora un punto P_2 che si trovi ben al di là della proiezione da O dell'apertura su M (ombra geometrica). Le zone di Fresnel (intorno a Q_2) sono tagliate dall'orlo della apertura come in figura 14.5c. Le prime zone non danno contributo: lo stesso accade per le zone al di là di un certo ordine. Per le zone intermedie, quelle che sono parzialmente scoperte dalla apertura, il contributo prima va crescendo (al pari della frazione di area scoperta della singola zona) se si passa da una zona alla successiva e poi decresce. La somma dei contributi di tutte queste zone, essendo pari alla semisomma o semidifferenza del primo o dell'ultimo è praticamente zero dato che questi contributi sono entrambi molto piccoli. Si giunge così alla conclusione che per punti ben dentro all'ombra geometrica, la disturbanza ottica è nulla⁽²⁾. Si consideri infine il caso di un punto (P_3) che si trovi

⁽²⁾ Questo risultato può sembrare in contrasto con quello stabilito per le onde elastiche (vol. I, cap. 9, par. 9.27); si è allora visto che la perturbazione spesso invade tutto (o in

molto prossimo all'orlo della proiezione su M della apertura. In tal caso la prima zona può essere parzialmente oscurata e dare un contributo inferiore a quello in cui è libera; si può anche avere che la prima zona sia oscurata e le successive parzialmente libere. In questi casi le differenze dei contributi di zone successive possono essere molto forti e quindi viene a perdere valore la regola approssimata di prendere per la somma dei contributi delle varie zone la semisomma dei contributi della prima e dell'ultima zona scoperta.

Si possono avere come risultato valori più grandi e più piccoli di quelli in assenza di ostacolo e variazioni notevoli per piccoli spostamenti di P . Ciò spiega l'apparire delle frange vicino agli orli dell'ombra geometrica. Queste considerazioni spiegano qualitativamente le figure di diffrazione per le situazioni illustrate in figura 14.3.

■ 14.4. ESTENSIONE DELLE FIGURE DI DIFFRAZIONE NELLA ZONA D'OMBRA. PROPAGAZIONE RETTILINEA

Abbiamo già rilevato che l'osservazione dei fenomeni di diffrazione, molto comune in acustica, richiede in ottica attenzione particolare. Ciò, come si è detto, è dovuto alle dimensioni dagli oggetti ed alle distanze dagli oggetti alle quali la disturbanza ottica viene osservata, rispetto alla lunghezza d'onda.

Vogliamo ora precisare quantitativamente l'estensione della regione nella zona d'ombra geometrica nella quale v'è una disturbanza ottica apprezzabile. Faremo ciò con riferimento al caso della diffrazione di Fresnel da un orlo rettilineo alla quale si riferisce la distribuzione della perturbazione di figura 14.3i. La disposizione sperimentale sia quella indicata nella figura 14.6. Nella zona d'ombra geometrica l'intensità della perturbazione decresce rapidamente man mano che ci si allontana dall'orlo della zona stessa. È possibile mostrare, facendo un caso concreto, che se $a = b = 1$ m, il valore della x (distanza dall'orlo della zona d'ombra geometrica) per il punto P nella zona d'ombra sullo schermo M

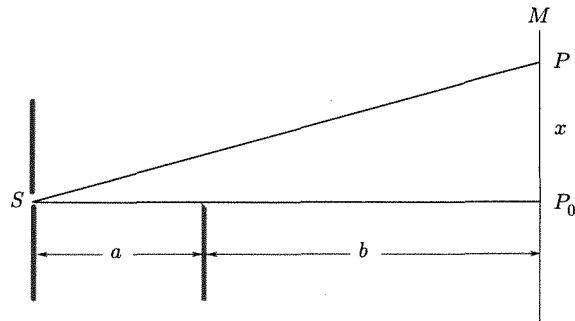


Fig. 14.6

gran parte) il semispazio al di là dell'ostacolo. La differenza è dovuta esclusivamente alle dimensioni degli ostacoli comunemente usati rispetto alla lunghezza d'onda della luce e del suono. Il raggio della prima zona di Fresnel vale praticamente (trascurando $\lambda^2/4$ rispetto a r_0) $\sqrt{\lambda r_0}$ essendo r_0 la distanza del centro dell'apertura dallo schermo. Se per esempio si pone $r_0 = 1$ m e $\lambda = 5.890 \text{ \AA}$ (lunghezza d'onda della luce gialla del sodio) si ha per tale raggio 0,76 mm: se si considerano aperture comuni, aventi dimensioni dell'ordine di vari cm, si vede che occorre considerare varie zone di Fresnel e si ottiene il risultato trovato. Se si considera invece un suono per es. della frequenza di 3.000 Hz in aria si ha circa $\lambda = 120$ cm ed il raggio della prima zona di Fresnel è 109,4 cm. Di conseguenza, se si considerano aperture ancora di cm o di decine di cm in uno schermo, si ha che l'apertura si trova interamente nella prima zona di Fresnel e ciò fa sì che l'energia diffonda in tutte le direzioni e non si possa avere interferenza distruttiva fra i contributi delle varie zone. È in altri termini questa interferenza distruttiva quella che fa sì che l'energia di un fascio di luce che giunge su una apertura resti concentrata nel fascio originario (propagazione geometrica) anche al di là della apertura.

per cui l'intensità è ridotta a 1/80 dell'intensità in assenza di ostacolo vale

$$(2) \quad x = 2\sqrt{\lambda}.$$

Per $\lambda = 0,5 \text{ } \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ è

$$x = 2 \cdot 7,08 \cdot 10^{-4} = 1,416 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,4 \text{ mm}.$$

Si conclude⁽³⁾ che la zona dello schermo nella zona d'ombra a distanza superiore a 1,5 mm è praticamente priva di disturbanza ottica. Questi valori numerici confermano che l'influenza dei fenomeni di diffrazione è limitata a piccole regioni vicino ai limiti delle zone d'ombra prodotte da ostacoli e che, in ottica, l'energia rimane essenzialmente concentrata nella regione dello spazio che corrisponde alla proiezione dalla sorgente delle aperture. Si osservi che una tale conclusione è tanto più vicina al vero quanto minore è λ [eq. (2)], e che l'energia sarebbe contenuta interamente nella regione *illuminata* geometricamente nel caso limite $\lambda \rightarrow 0$.

Appare quindi che, pur essendo la luce costituita da onde, le caratteristiche di lunghezza d'onda, di dimensione degli oggetti nel campo che normalmente ci circonda, di distanze dalle sorgenti e dagli ostacoli alle quali la radiazione viene di solito osservata, sono tali che l'energia della perturbazione resta essenzialmente confinata nelle zone illuminate geometricamente dalle sorgenti. Quando quindi non sia necessario considerare in dettaglio ciò che accade ai limiti tra le zone illuminate e d'ombra in senso geometrico, si può, con notevole semplificazione, supporre che la luce sia costituita da fasci di raggi rettilinei (propagazione geometrica). Questa approssimazione è tanto più valida quanto minore è λ .

■ 14.5. DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER. FENDITURA SEMPLICE

Passiamo ora a considerare la diffrazione di Fraunhofer che, come si è detto, è quella che si verifica quando le distanze della sorgente e dello schermo di osservazione dall'ostacolo sono entrambe infinite. Nella figura 14.2 abbiamo visto uno schema che può essere seguito per osservare il processo senza essere costretti ad usare distanze molto grandi. La figura 14.7 ripresenta essenzialmente quello schema, ove tuttavia si impiega

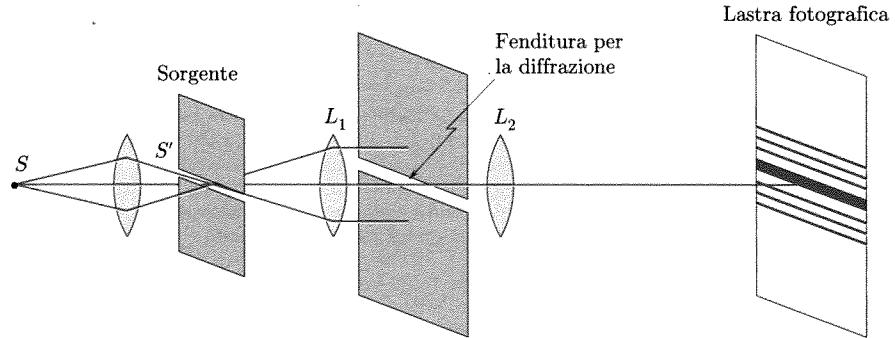


Fig. 14.7

⁽³⁾ Si osservi, che con le stesse distanze a, b si ha in acustica (es. per $\lambda = 1 \text{ m}$) $x = 2 \text{ m}$.

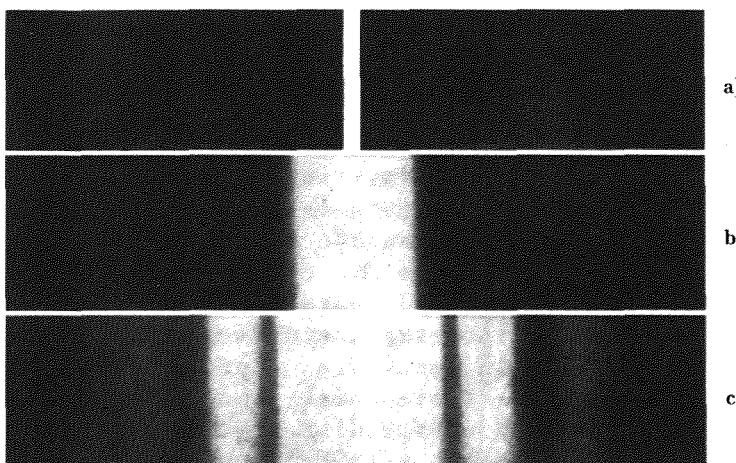


Fig. 14.8 Difrazione di Fraunhofer per fenditura semplice: i tempi di esposizione nelle riprese sono stati fatti crescere da 1 a 2 ed a 3 per poter registrare le frange superiori (F.A. Jenkins, H.E. White).

una sorgente secondaria lineare ottenuta da una prima fenditura illuminata dalla sorgente puntiforme. La figura di diffrazione di Fraunhofer prodotta dalla seconda fenditura è registrata su una lastra fotografica. La figura 14.8 riporta la figura osservata (Jenkins, White): data la grande differenza di luminosità nelle varie parti della figura sono presentate tre riprese a diverse esposizioni; nella seconda e terza la parte centrale è sovraesposta, ma si rendono ben visibili sulla fotografia le zone laterali illuminate. La figura di diffrazione è formata da una linea centrale molto luminosa e, separate da zone oscure, linee luminose laterali.

La trattazione matematica del problema va fatta ancora mediante la teoria generale di Huygens-Fresnel valutando l'integrale (1); nel caso specifico alcune semplificazioni nel calcolo sono possibili a causa della posizione particolare della sorgente e dello schermo (distanza infinita) rispetto all'ostacolo (fenditura). Noi non faremo qui la trattazione matematica completa con la soluzione dell'integrale (1); cominceremo con il vedere, in base a semplici considerazioni, le ragioni fisiche della comparsa delle frange nella maniera osservata e presenteremo in seguito un calcolo semplificato che consente l'analisi dei risultati sperimentali.

Si faccia riferimento al caso dello schema in figura 14.9a: la fenditura sia illuminata da un fascio d'onde piane che incida normalmente al piano della fenditura. I punti della fenditura si trovano sullo stesso fronte d'onda e quindi le onde che si devono considerare nell'applicazione del principio di Huygens-Fresnel procedono da tali punti partendo in fase. Dovendosi considerare la interferenza di tali onde su un piano (schermo) a distanza infinita, si può sostituire a ciascuna onda sferica un insieme di raggi (onde piane procedenti nella direzione di ciascun raggio); inoltre in ciascun punto dello schermo interferiscono raggi che partono paralleli dai punti della fenditura. Data la lunghezza (in direzione normale ad AB) molto grande della fenditura (supposta praticamente infinita), potremo svolgere le nostre considerazioni considerando, per determinare i valori della perturbazione in punti dello schermo nel piano della figura, esclusivamente le onde procedenti dai punti della fenditura giacenti nel piano della figura stessa (tratto AB): tali considerazioni restano quali-

*Spiegazione qualitativa
della comparsa
delle frange*

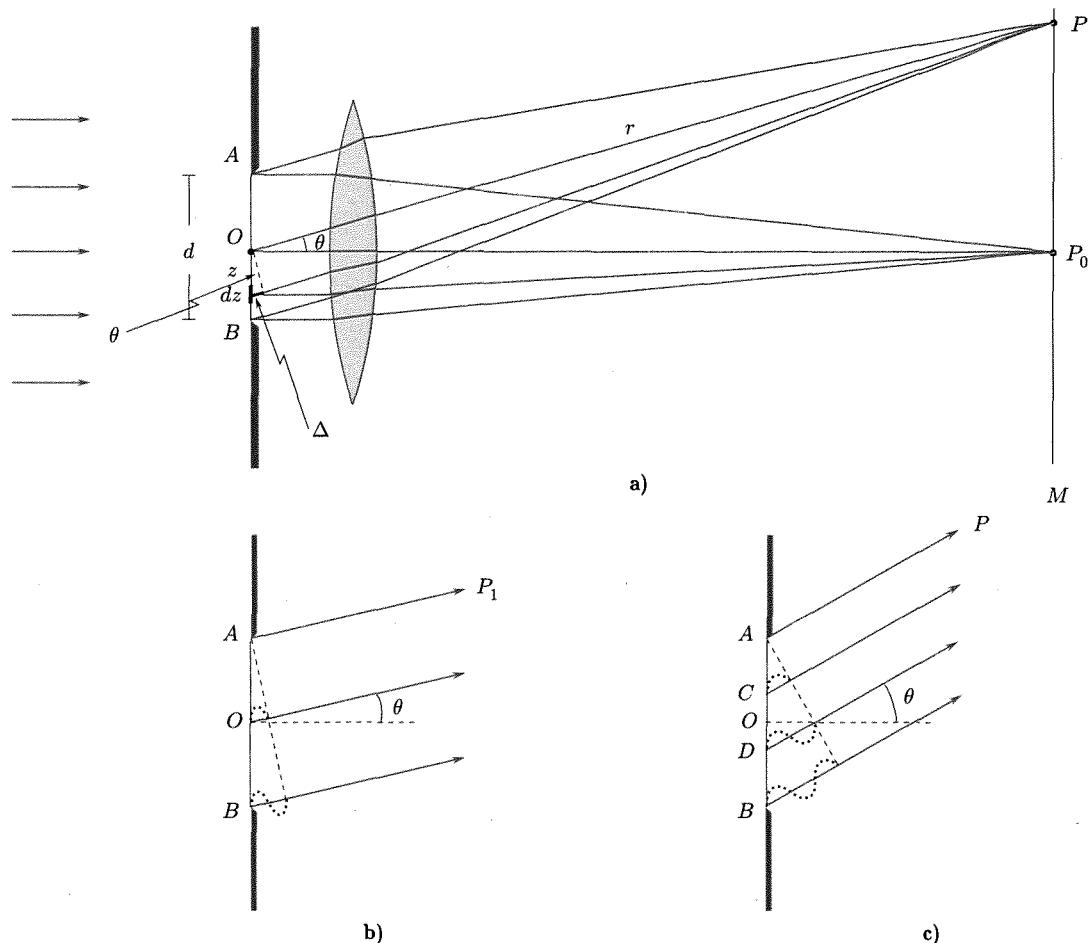


Fig. 14.9

tativamente invariate per ragioni di simmetria, qualora si consideri tutta la fenditura ed i valori della perturbazione in questo secondo caso sono proporzionali a quelli ottenuti nel primo. Se si considera l'ampiezza della perturbazione in P_0 (fig. 14.9a) posto sull'asse della fenditura occorre considerare l'interferenza di onde piane (raggi) provenienti dai punti della fenditura e propagantisi nella direzione dell'asse stesso: tutte queste onde sono emesse in fase, e, poiché percorrono la stessa distanza, giungono in P_0 in fase: l'interferenza è costruttiva e l'ampiezza della disturbanza ha il valore massimo possibile giacché tutti i contributi si sommano in fase.

Consideriamo ora sullo schermo un punto P_1 , tale che la differenza dei percorsi dei raggi provenienti dagli estremi della fenditura sia λ (fig. 14.9b). In tal caso il contributo del raggio proveniente dall'estremo A e quello dal centro O della fenditura (poiché la differenza di percorso è $\lambda/2$) sono in opposizione fra loro e danno contributo totale nullo; lo stesso accade per i raggi provenienti da coppie di punti della fenditura che si trovano di una stessa quantità al di sotto di A ed O ; si conclude che la interferenza di tutte le onde che dai punti della fenditura giungono in P_1 è tale che la perturbazione ottica è nulla. Lo stesso accade per tutti quei punti sullo schermo in cui giungono raggi paralleli aventi una direzione

tale che la differenza di percorso fra i raggi provenienti dagli estremi della fenditura (A e B) è pari ad un multiplo intero di λ ($\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ ecc.).

Se si considera un punto sullo schermo per il quale accade che la differenza di percorso dei raggi provenienti da A e B ha un valore diverso da $n\lambda$ (n intero) è facile vedere che la perturbanza ottica è diversa da zero ma inferiore a quella in P_0 . In figura 14.9c è considerato il caso in cui la differenza di percorso dei raggi da A e B è $\frac{3}{2}\lambda$. Il ragionamento fatto in precedenza mostra che l'interferenza dei raggi provenienti da punti fra A e D danno un risultato nullo e quindi la disturbanza è quella prodotta dai raggi provenienti dai punti fra D e B : tale disturbanza è inferiore a quella in P_0 , sia perché solo parte dei punti della fenditura è efficiente, sia perché i contributi non giungono tutti in fase fra loro. È chiaro pertanto che accanto alla frangia centrale in P_0 si presentino zone oscure e zone (frange) luminose meno intense della frangia centrale.

Il calcolo della distribuzione della perturbazione sullo schermo può essere fatto abbastanza facilmente, proprio sfruttando la circostanza che in ciascun punto dello schermo giungono dai punti della apertura onde piane (raggi) parallele emesse in fase e che la direzione di tali onde che interferiscono in P dipende proprio dalla posizione di P . Un tale calcolo fu già presentato nel caso delle onde elastiche (vol. I, cap. 9, par. 9.27) e viene qui ripetuto, per comodità, mediante l'impiego del calcolo differenziale.

La fenditura (fig. 14.9a) sia molto lunga nella direzione normale alla figura ed abbia una larghezza d . Su di essa giunga un sistema di onde piane in direzione normale al piano della fenditura stessa.

Una lente al di là della fenditura consente di concentrare sul piano dello schermo M fasci di raggi paralleli incidenti su di essa quali quelli equivalenti, in ciascuna direzione ed a grande distanza dalla fenditura, alle onde sferiche in cui secondo l'analisi di Huygens-Fresnel si può pensare di risolvere la perturbazione al di là della fenditura. L'origine delle coordinate z nel piano della fenditura sia al centro di essa. La fenditura può immaginarsi decomposta in tante strisce parallele di altezza dz . La striscia situata all'origine produce una perturbazione in P che può porsi nella forma

$$(3) \quad dV_0(P) = \frac{adz}{r} \sin(\omega t - kr),$$

avente cioè ampiezza direttamente proporzionale a dz ed inversamente proporzionale alla distanza r fra O e P , e fase iniziale proporzionale alla distanza r ; a è una costante. Se si considera una striscia dz posta a distanza z dall'origine, la perturbazione prodotta in P ,

$$(4) \quad dV_z = \frac{adz}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

avrà praticamente la stessa ampiezza della (3) ma una differenza di fase φ , in dipendenza della diversa lunghezza del percorso (Δ : vedi fig. 14.9a). Si ha:

$$(5) \quad \varphi = k\Delta = kz \sin \theta,$$

essendo θ l'angolo che la direzione \overline{OP} forma con la normale al piano della fenditura. Tale differenza di fase, per la posizione di P sullo schermo indicata in figura, è in ritardo per z negativo (posizione della striscia rispetto al piano per O normale al piano della fenditura e della retta \overline{AB} , opposta a quella in P) ed in anticipo per z positivo. La perturbazione risultante

Calcolo della distribuzione della luce sullo schermo

in P è la somma dei contributi delle varie strisce in cui è stata suddivisa la fenditura. Per fare questa somma, risulta conveniente accoppiare i contributi delle strisce in posizione $+z$ e $-z$; si ha

$$(6) \quad dV_{+z} + dV_{-z} = \frac{adz}{r} [\sin(\omega t - kr - kz \sin \theta) + \sin(\omega t - kr + kz \sin \theta)] = \\ = \frac{adz}{r} 2 \cos(kz \sin \theta) \sin(\omega t - kr).$$

La perturbazione totale in P si ottiene mediante integrazione della (6) fra i limiti 0 e $d/2$

$$(7) \quad V(P) = \frac{2a}{r} \sin(\omega t - kr) \int_0^{d/2} \cos(kz \sin \theta) dz = \\ = \frac{2a}{r} \left[\frac{\sin(kz \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]_0^{d/2} \sin(\omega t - kr).$$

Si tratta di una perturbazione armonica (pulsazione ω), la cui ampiezza,

$$(8) \quad A = \frac{ad}{r} \frac{\sin \frac{1}{2}(kd \sin \theta)}{\frac{1}{2}kd \sin \theta},$$

dipende dalla posizione sullo schermo di P , giacché da questo dipende θ . Se si introduce la nuova variabile

$$(9) \quad \alpha = \frac{1}{2}kd \sin \theta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda},$$

pari alla metà della differenza di fase fra i contributi in P provenienti dagli estremi della fenditura, e si pone

$$(10) \quad A_0 = \frac{ad}{r}$$

la (8) si può scrivere

$$(11) \quad A = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Per l'intensità della perturbazione si ha

$$(12) \quad J \sim A^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}.$$

La figura 14.10 mostra i grafici di A e J ottenuti ponendo $A_0 = 1$.

La curva dell'intensità ha l'andamento richiesto per spiegare i risultati dell'esperienza. La massima intensità si ha per $\alpha = 0$ cioè per il punto (P_0) dello schermo sull'asse della fenditura. Per $\alpha = 0$ infatti $\sin \alpha / \alpha = 1$ e $A = A_0$.

Accanto alla frangia centrale di intensità massima, sono disposte simmetricamente frange luminose di intensità rapidamente decrescente. Le posizioni di perturbazione nulla si hanno per

$$(13) \quad \alpha = n\pi$$

($n = 1, 2, 3, \dots$), cioè per i valori di α tali che $\sin \alpha / \alpha = 0$.

I punti a perturbazione nulla si hanno per
 $\alpha = n\pi$

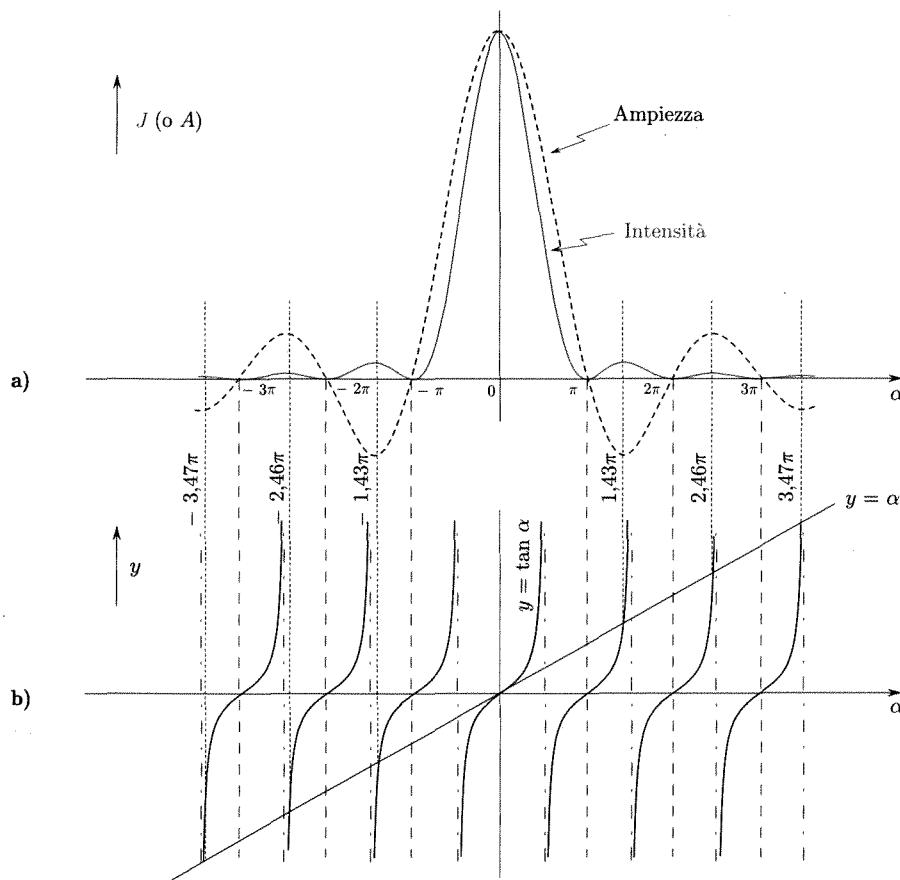


Fig. 14.10

È bene notare che le direzioni delle rette che congiungono il centro della fenditura con i punti sullo schermo ove si hanno i primi minimi (fig. 14.11) formano con l'asse della disposizione un angolo

$$(14) \quad \theta_1 \simeq \sin \theta_1 = \pm \frac{\lambda}{d}.$$

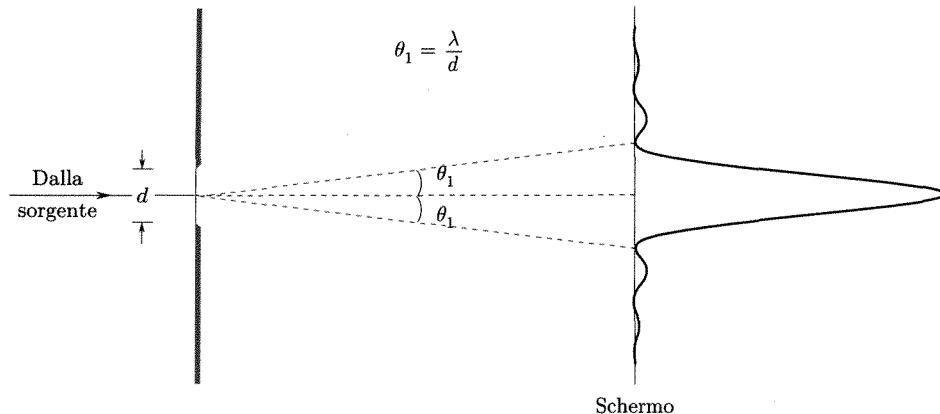


Fig. 14.11

I massimi secondari non coincidono sul diagramma con i punti di mezzo dei segmenti fra due valori successivi di α per cui $A = 0$, ma sono spostati di poco verso la frangia centrale.

*I massimi
di perturbazione
si hanno per
 $\alpha = \tan \alpha$*

Fenditura rettangolare

Tali posizioni possono trovarsi analiticamente imponendo l'annullarsi della derivata della (11); si ha la condizione:

$$\tan \alpha = \alpha.$$

Le soluzioni di questa equazione sono indicate nella parte inferiore della figura 14.10, ove è riportato, con opportune scale, il grafico della funzione $y = \tan \alpha$ e la retta $y = \alpha$.

Le intensità dei massimi secondari possono essere calcolati inserendo nella (12) i valori corrispondenti di α . Si hanno, posto il massimo centrale pari a 1, per i massimi successivi le intensità $1/22,2, 1/61,7, 1/121, \dots$

Nel caso in cui la fenditura non abbia lunghezza molto grande rispetto alla larghezza, ma queste due dimensioni siano comparabili, la distribuzione che si ottiene comprende frange nelle due direzioni. Questo è illustrato nello schema della figura 14.12 e nella fotografia della figura 14.13. Le frange si presentano più ravvicinate nella direzione di maggiore estensione della fenditura.

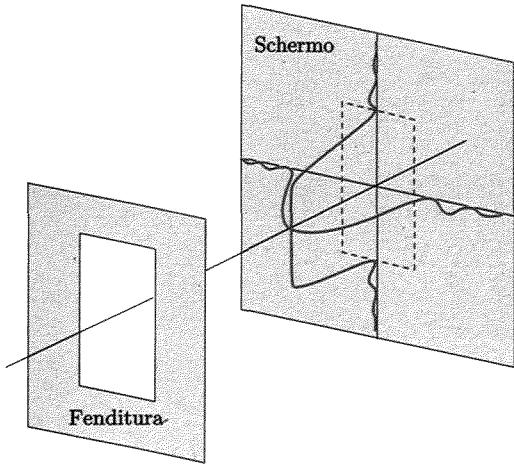


Fig. 14.12

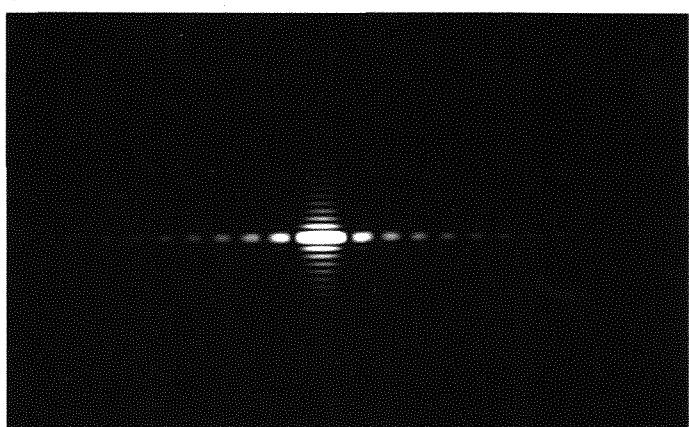


Fig. 14.13 Diffrazione di Fraunhofer da fenditura rettangolare; rapporto dei lati 1:3.

■ 14.6. POTERE RISOLUTIVO DI UNA FENDITURA RETTANGOLARE

Su una lunga fenditura rettangolare giungano due fasci di onde piane provenienti da sorgenti (S_1, S_2) disposte all'infinito e separate fra loro per un piccolo angolo δ (fig. 14.14). Ciascun fascio produce, su uno schermo a distanza anche essa infinita, una figura di diffrazione del tipo esaminato al paragrafo precedente; le due figure si sovrappongono e sullo schermo potrà essere osservata una distribuzione della intensità che è la somma di quelle relative alle due figure di diffrazione. Uno schema che consente di realizzare l'esperienza senza usare distanze molto grandi è indicato nella figura 14.15: la radiazione proveniente dalle due sorgenti S_1, S_2 lineari e perpendicolari al piano della figura, incida su due lenti, disposte una

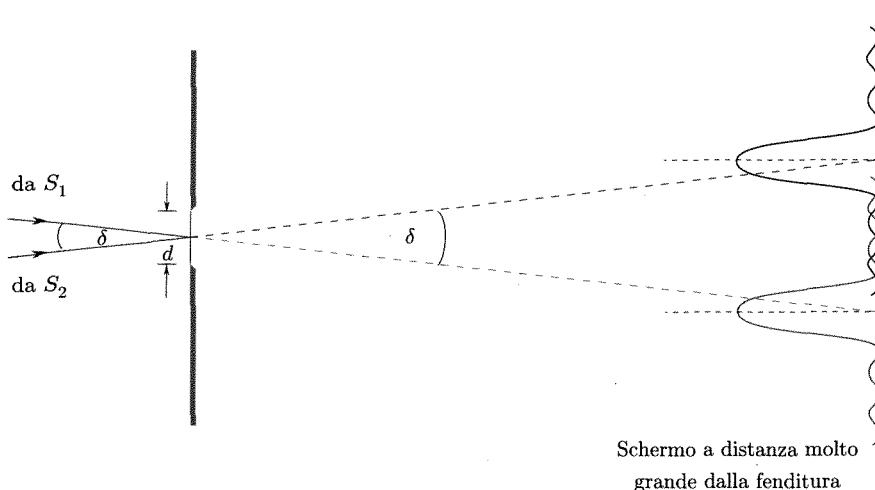


Fig. 14.14

prima ed una dopo la fenditura e le cui lunghezze focali sono tali che sullo schermo M si formino le due figure di diffrazione: sul piano dello schermo le lenti fanno convergere i raggi provenienti da S_1 e separatamente da S_2 sicché si parla di immagini S'_1 e S'_2 di S_1 ed S_2 , ma come si è visto si tratta in realtà delle figure di diffrazione prodotte dalla fenditura e non di concentrazione dell'energia in punti geometrici: come punto immagine di S_1 ed S_2 (S'_1 ed S'_2) possono essere presi i massimi delle due figure di diffrazione. La possibilità di distinguere su M i due fasci provenienti da S_1 ed S_2 , cioè le due immagini S'_1 ed S'_2 (massimi delle figure di diffrazione), dipende dal fatto che nella sovrapposizione delle due figure i due massimi siano ben distinguibili e ciò è determinato da δ .

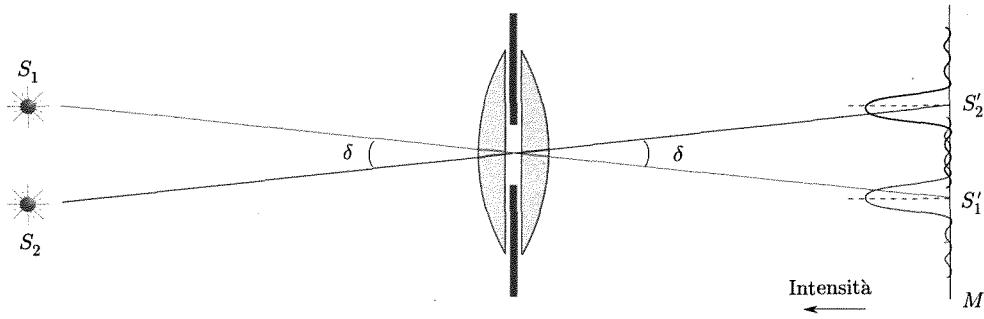


Fig. 14.15

Nella figura 14.16 sono mostrate le distribuzioni dell'intensità per le due figure di diffrazione dei due fasci separatamente (a tratto sottile continuo e tratteggiato) e per la figura risultante (a tratto spesso) in corrispondenza a diversi valori di δ . Si vede che per $\delta = 2\theta_1$, essendo θ_1 il valore di θ corrispondente [eq. (14)] ad $\alpha = \pi$, il massimo principale di ciascuna delle due distribuzioni cade in corrispondenza al secondo minimo dell'altra; tali massimi restano perfettamente separati nella distribuzione risultante e lo stesso è quindi per le immagini S'_1 ed S'_2 . Se δ viene ridotto, i massimi delle due distribuzioni si avvicinano ed è evidente che per

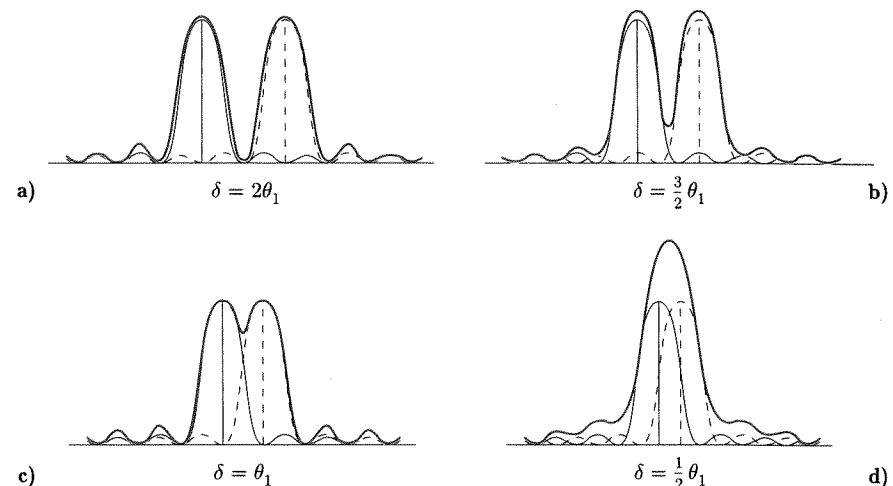


Fig. 14.16

$\delta = \theta_1$ si è vicini ad una situazione limite. Per valori di δ più piccoli di θ_1 diventa ben presto impossibile distinguere i due fasci, cioè risolvere le due immagini S'_1 ed S'_2 .

Criterio di Rayleigh

Potere risolutivo

Sulla base di queste considerazioni Rayleigh introdusse il concetto di potere risolutivo *di una fenditura rettangolare*, definito come il più piccolo angolo fra due fasci di onde piane incidenti sulla fenditura per i quali è ancora possibile distinguere le relative figure di diffrazione, e prese, arbitrariamente, a sua misura l'angolo

$$(15) \quad \delta = \theta_1 = \frac{\lambda}{d}.$$

La capacità della fenditura a risolvere i due fasci aumenta al diminuire di θ_1 , cioè, a parità di λ , al crescere di d ⁽⁴⁾.

La considerazione dei poteri risolutivi di aperture che limitano i fasci provenienti da sorgenti puntiformi è fondamentale nello studio degli apparecchi ottici; in essi infatti si fa uso di fasci di dimensioni finite essendo tali limitazioni introdotte talvolta da fenditure rettangolari, ma molto più spesso da aperture circolari (diaframmi, piani, lenti). Il potere risolutivo per aperture circolari sarà precisato fra breve (par. 14.8).

Sottolineiamo comunque già nel caso delle fenditure rettangolari che il potere risolutivo è determinato dai fenomeni di diffrazione provocati dalla fenditura stessa.

14.7. DIFFRAZIONE DI FRAUNHOFER CON APERTURA CIRCOLARE

Un sistema di onde piane incida normalmente sul piano di una apertura circolare. La figura di diffrazione di Fraunhofer può essere calcolata con il solito metodo matematico facendo per ogni punto P dello schermo

⁽⁴⁾ Si ricordi che nella figura di diffrazione di una fenditura la curva intorno al massimo è tanto più stretta quanto maggiore è d .

la somma dei contributi delle onde piane parallele che si può ritenere equivalgano, ai fini della interferenza in P , alle onde sferiche emesse in corrispondenza ai punti della apertura in accordo al principio di Huygens.

La trattazione matematica implica in questo caso l'uso delle funzioni di Bessel del primo ordine e la formula che si ottiene è un po' più complessa di quella valida per il caso di fenditura lineare. È facile comprendere tuttavia come, per ragioni di simmetria, la figura di diffrazione debba avere una simmetria circolare e debba quindi essere formata da cerchi⁽⁵⁾ concentrici, luminosi ed oscuri (fig. 14.17). In maniera qualitativa e grossolana si potrebbe pensare di ottenere la distribuzione per una apertura di diametro D da quella trovata lungo una linea normale alle frange per il caso di una fenditura rettangolare di larghezza $d = D$, facendola ruotare intorno ad un asse normale alla figura per la frangia centrale. Il risultato è solo orientativo e non è preciso: si trova in realtà che nel caso dell'apertura circolare l'intensità decresce più lentamente passando da una frangia alla successiva di quanto accada per la fenditura rettangolare e che i massimi e minimi hanno distanze che seguono una distribuzione leggermente diversa.

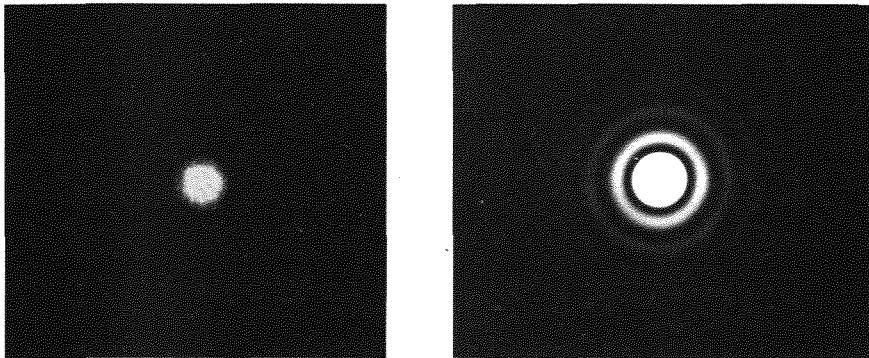


Fig. 14.17 Difrazione di Fraunhofer da un foro circolare del diametro di 1 mm.
La seconda foto risulta sovraesposta nella zona centrale per poter registrare le frange di ordine superiore.

Come nel caso della fenditura lineare, conviene introdurre come parametro, (α), la metà della massima differenza di fase tra i raggi che giungono in un punto dello schermo (direzione θ) provenienti dall'apertura. Giacché si tratta di punti estremi di un diametro della apertura, si ha:

$$\alpha = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \simeq \frac{\pi D \theta}{\lambda}.$$

La figura 14.18 riporta i risultati che si ottengono per l'intensità J in funzione di α .

Nel caso della fenditura lineare si è trovato che le posizioni dei minimi dell'intensità sono determinate

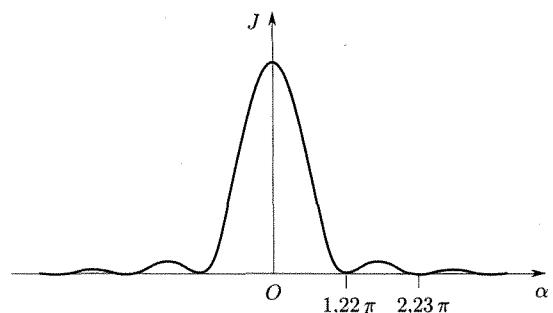


Fig. 14.18

⁽⁵⁾ Il disco centrale, molto luminoso, è spesso indicato con il nome di *disco di Airy* dal nome del fisico che risolse (1835) il problema matematico del calcolo della distribuzione della intensità.

dai valori di θ che soddisfano alla condizione ($\alpha = n\pi$)

$$(16) \quad \sin \theta \simeq \theta = \frac{n\lambda}{d},$$

con $n = 1, 2$.

Una formula analoga può essere usata per esprimere la posizione dei cerchi oscuri nel caso della figura di diffrazione dell'apertura circolare, ma in tal caso i valori di n non risultano interi. Tali valori sono riportati in tabella assieme alle posizioni⁽⁶⁾ ed intensità relative dei massimi (J_{\max}) ed alla potenza luminosa nell'intero anello espressa come frazione di quella nel disco centrale ($J_{(\text{anello})}$).

Anello	n	J_{\max}	$J_{(\text{anello})}$
centrale	0	1	1
1° oscuro	1,220		
2° luminoso	1,635	0,01750	0,084
2° oscuro	2,233		
3° luminoso	2,679	0,00416	0,033
3° oscuro	3,238		
4° luminoso	3,699	0,00160	0,018
4° oscuro	4,241		
5° luminoso	4,710	0,00078	0,011
5° oscuro	5,243		

Si vede che una parte molto rilevante dell'energia è concentrata nel disco luminoso centrale (84%) e che entro il secondo cerchio oscuro v'è più del 90% dell'energia. Al pari di quanto accade per la fenditura lineare, le dimensioni della figura di diffrazione sono inversamente proporzionali alla estensione della apertura: in particolare l'angolo θ_1 sotto cui si vede il raggio del disco luminoso centrale (di Airy) dal centro della apertura è dato da

$$(17) \quad \theta_1 = 1,220 \frac{\lambda}{D}.$$

■ 14.8. POTERE RISOLUTIVO PER APERTURA CIRCOLARE

Anche per l'apertura circolare è importante considerare la situazione in cui due fasci paralleli giungano su di essa con una separazione angolare $\delta = \Delta\theta$. Sullo schermo si osserva una figura che è la sovrapposizione di quelle prodotte da ogni singolo fascio, cioè la sovrapposizione di due sistemi di frange circolari che si differenziano esclusivamente per la posizione del centro.

La possibilità di distinguere i due fasci dipende dalla distanza che intercorre fra le posizioni ove sullo schermo cadono i centri delle due figure di diffrazione: se questa distanza è piccola rispetto al raggio del disco centrale luminoso (di Airy) le due figure non sono distinguibili, se invece questa

⁽⁶⁾ Queste posizioni sono date in termini del numero n da introdurre nella (16) per ottenere θ .

distanza è molto maggiore di tale raggio le due figure sono chiaramente distinte. Anche in questo caso per la misura del potere risolutivo dell'apertura, della capacità cioè dell'apertura di distinguere fasci provenienti da direzioni diverse, Rayleigh ha introdotto, arbitrariamente, un criterio che è quello di ritenere distinguibili mediante una apertura circolare due fasci paralleli se la distanza fra i centri delle corrispondenti figure di diffrazione è almeno pari al raggio del disco luminoso centrale (di Airy) di ciascuna di esse; questa posizione limite corrisponde ad una separazione angolare fra i due fasci (fig. 14.19)

$$(18) \quad \Delta\theta = \theta_1 = 1,220 \frac{\lambda}{D}.$$

Criterio di Rayleigh

Tale angolo prende perciò il nome di angolo minimo di risoluzione. Si osservi che le considerazioni ora fatte hanno una grande importanza per lo studio degli strumenti ottici. Nel caso per esempio che si voglia studiare la luce proveniente da punti molto distanti dall'osservatore (per es. stelle), questa viene raccolta con un dispositivo ottico (lente, specchio) e concentrata su uno schermo; le dimensioni finite dello strumento limitano la estensione dei fronti delle onde piane in arrivo che entrano in esso: gli orli delle lenti o degli specchi che effettuano queste limitazioni corrispondono ad aperture circolari; l'apparato equivale ad una apertura circolare ed un sistema ottico che concentra sullo schermo la radiazione che ha attraversato l'apertura. Di conseguenza ciò che si osserva sullo schermo sono in realtà le figure di diffrazione del tipo avanti esaminato.

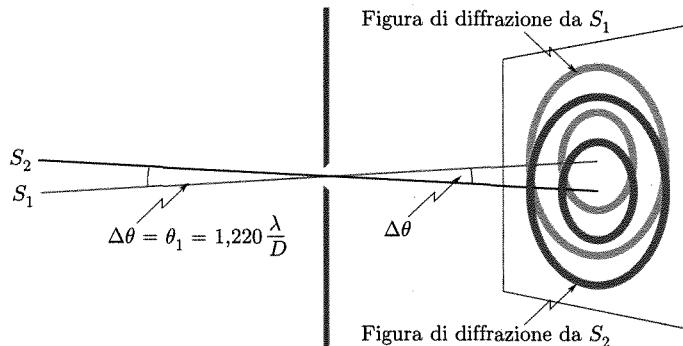


Fig. 14.19

La figura 14.20 mostra le figure di diffrazione ottenute con una lente che concentra su uno schermo la luce proveniente da due sorgenti puntiformi molto lontane: la figura a) corrisponde a due fasci appena risolti (criterio di Rayleigh, massimo di una distribuzione in corrispondenza al primo minimo dell'altra $\Delta\theta = \theta_1$). Il potere risolutivo di una apertura cresce con il suo diametro. Questa è una delle ragioni⁽⁷⁾ per usare nelle osservazioni astronomiche apparecchi aventi apertura circolare la più grande possibile.

⁽⁷⁾ Un'altra ovvia ragione è quella di raccogliere una maggiore energia.

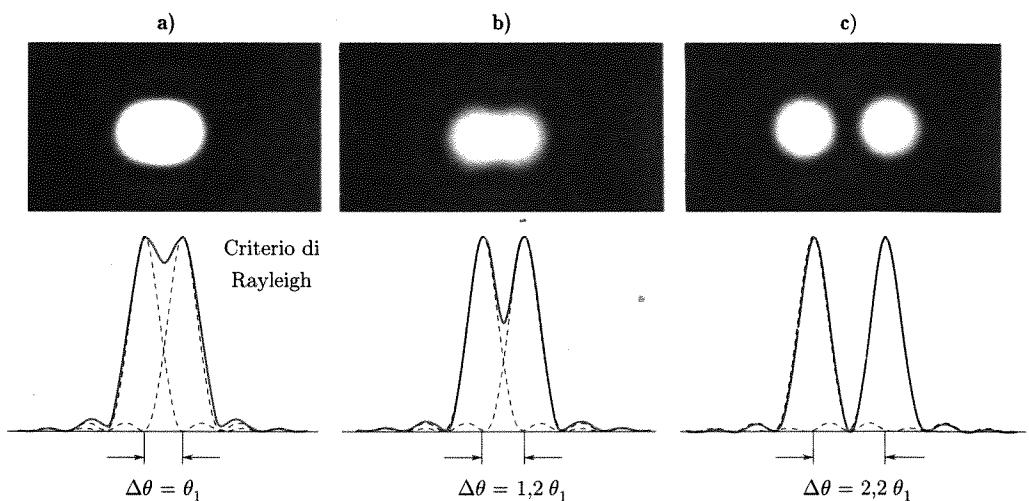


Fig. 14.20 Potere risolutivo e criterio di Rayleigh.

14.9. POTERE RISOLUTIVO DI SISTEMI OTTICI CHE FORNISCONO IMMAGINI

Il potere risolutivo di un sistema ottico che fornisca l'immagine di un oggetto serve ad indicare fino a quale misura il sistema stesso ha capacità di riprodurre nell'immagine il dettaglio dell'oggetto, cioè di dare separate le immagini di punti oggetto vicini tra loro. La trattazione dell'ottica geometrica ha mostrato che secondo questa teoria, supponendo di potersi trovare in assenza di aberrazioni, i raggi uscenti da un punto oggetto sono deviati in modo da incontrarsi in un punto immagine e quindi ad un punto oggetto dovrebbe corrispondere una immagine netta, puntiforme. Questa teoria è peraltro solo una approssimazione ed in realtà al posto dei raggi occorre considerare le superfici d'onda che hanno origine nel punto oggetto e che si propagano attraverso il sistema verso l'immagine. Ora accade che i fronti d'onda che entrano nel sistema ottico vengono limitati dalle dimensioni finite dell'apertura del sistema stesso e quindi occorre considerare i fenomeni di diffrazione prodotti da questa apertura.

Dal punto di vista fisico, in realtà, l'immagine di un punto oggetto data da un sistema ottico non è l'intersezione dei raggi provenienti dall'oggetto, ma la figura di diffrazione prodotta sul piano dell'immagine stessa dalle onde che, provenienti dall'oggetto, passano attraverso il sistema.

Mentre per molte considerazioni, come si è visto, l'ottica geometrica è una buona approssimazione, l'analisi dei limiti di risoluzione di un sistema ottico deve essere fatta con l'ottica fisica, essendo tali limiti fissati dalle caratteristiche dei fenomeni di diffrazione. Abbiamo visto nei paragrafi precedenti il criterio di Rayleigh per la risoluzione dell'immagine di due punti. Vediamo ora come si traduce quantitativamente un tale criterio in alcuni casi concreti. È bene, peraltro, premettere ancora che la valutazione del limite di risoluzione di un sistema ottico che fornisce una immagine può essere espressa, secondo i casi, o per mezzo di un angolo $\Delta\theta$ o per mezzo di una distanza Δx ; il potere risolutivo è il reciproco di tale quantità.

Trattiamo dapprima il caso del telescopio nella disposizione astronomica; ad esso si riferiscono le poche considerazioni sul potere risolutivo

svolte nel par. 14.8. I punti oggetto (stelle) sono a distanza molto grande dall'obiettivo dello strumento e le immagini si formano nel piano focale dell'elemento ottico (lente, specchio) di ingresso: i fronti d'onda sono in genere limitati dall'orlo dell'elemento stesso. Per ciascun punto oggetto la corrispondente figura di diffrazione è proprio quella di Fraunhofer relativa all'apertura dello strumento (diametro D). Si è visto che in tal caso la separazione angolare limite ($\Delta\theta$) tra due fasci paralleli che colpiscono l'apertura dello strumento (provenienti da due punti oggetto all'infinito) e per i quali si verifichi la condizione di Rayleigh⁽⁸⁾, è data da:

$$(19) \quad \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \text{ rad.}$$

È questa quindi la separazione angolare minima che due stelle devono avere perché possano essere viste separatamente. Il potere risolutivo è definito come $1/\Delta\theta$.

È bene notare che l'immagine formata dall'obiettivo è osservata con un oculare; la sua grandezza dipende quindi dall'ingrandimento di quest'ultimo: è chiaro peraltro che l'oculare può migliorare le condizioni di osservazione ma non introdurre dettagli non presenti nell'immagine fornita dall'obiettivo. Sono quindi esclusivamente le caratteristiche dell'obiettivo quelle che determinano il potere risolutivo dell'apparecchio⁽⁹⁾.

Il potere risolutivo di un telescopio cresce con D . Il grande telescopio esistente a Monte Palomar ha uno specchio di ~ 5 m di diametro. Ad esso corrisponde (per $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ m) $\Delta\theta = 1,3 \cdot 10^{-7}$ rad = $0,026''$ come separazione angolare limite.

Passiamo a considerare il caso dell'occhio. Di solito la distanza dell'oggetto dall'occhio è molte volte la distanza focale. La situazione è pertanto molto simile a quella sopra esaminata per il telescopio: una apertura circolare, una lente che forma nel piano di osservazione le figure di diffrazione di Fraunhofer (immagini del punto oggetto). Si può quindi usare con buona approssimazione la (19) per determinare la separazione angolare minima di due oggetti che possono essere visti separati (acuità visiva, vedi cap. 10, par. 10.11a).

In questo caso, ponendo come valore medio del diametro della pupilla⁽¹⁰⁾ 2,5 mm e facendo il calcolo per $\lambda = 5,6 \cdot 10^{-7}$ m si ha:

$$(20) \quad \Delta\theta = \frac{1,22 \times 5,6 \cdot 10^{-7}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 2,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \simeq 1'.$$

È questo il valore dell'acuità visiva da noi già riportato (cap. 10, par. 10.11a).

⁽⁸⁾ $\Delta\theta$ è anche pari all'angolo θ_1 sotto cui dal centro dell'apertura dello strumento si vede il raggio del primo cerchio oscuro della figura di diffrazione della luce proveniente da uno dei due punti oggetto. Nel caso che una lente di lunghezza focale f sia usata per ottenere su un piano la figura di diffrazione (immagine) il valore del raggio del primo cerchio oscuro (y) è

$$y = f \tan \theta_1 \simeq f \theta_1.$$

⁽⁹⁾ L'oculare fornisce un ingrandimento delle figure di diffrazione dei punti oggetto che costituiscono l'immagine data dall'obiettivo. Se l'ingrandimento dell'oculare cresce al di là di certi limiti l'immagine da esso fornita diviene poco netta (sfuocata) e nulla si guadagna in dettaglio.

⁽¹⁰⁾ Tale diametro varia, secondo le condizioni di illuminazione, fra 1,5 e 5 mm.

Per una distanza focale media del cristallino di 1,5 mm, a tale separazione limite corrisponde sulla retina una distanza⁽¹¹⁾ fra i due punti immagine di $f\Delta\theta \sim 40$ micron.

Microscopio

Nel caso del microscopio la situazione si presenta in modo diverso; mentre con il telescopio si osservano punti a separazione angolare piccola ma a distanze dallo strumento molto grandi, il microscopio è impiegato per oggetti molto vicini all'obiettivo e quest'ultimo (fig. 14.21) sottende un angolo ($2\theta_1$) piuttosto grande dal generico punto oggetto: l'immagine tuttavia si forma in un piano (α_2) a distanza dalla lente molto maggiore della distanza oggetto-lente, sicché a formare l'immagine di ciascun punto concorrono raggi molto poco inclinati fra loro e si può ritenere con buona approssimazione che ciascuna di tali immagini sia costituita da una figura di diffrazione di Fraunhofer. Si osservi inoltre che nel caso del microscopio noi siamo interessati alla più piccola distanza ($y_{1,\min}$) fra due punti oggetto (P_1, Q_1) cui corrispondono immagini (P_2, Q_2) appena risolte secondo il criterio di Rayleigh, ed il potere risolutivo sarà espresso per mezzo di tale distanza ($1/y_{1,\min}$).

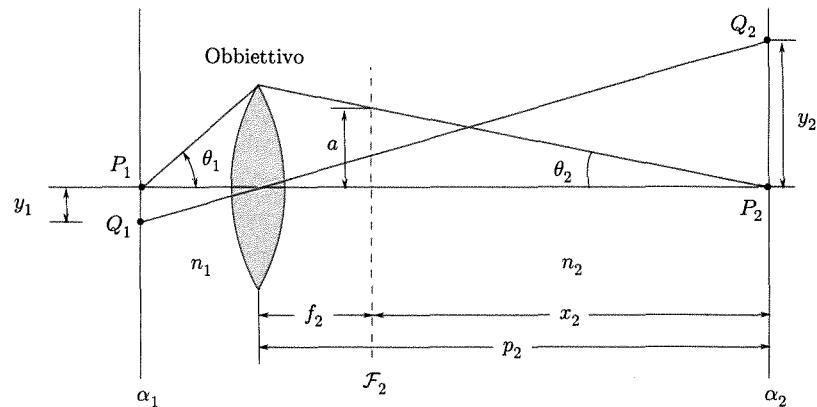


Fig. 14.21

Cerchiamo ora di determinare $y_{1,\min}$ nell'ipotesi che i vari punti dell'oggetto si comportino come sorgenti puntiformi *incoerenti fra loro*, sicché si possano applicare senz'altro le medesime considerazioni svolte nei casi precedenti per determinare la risoluzione massima.

Con riferimento alla figura 14.21 sia α_1 il piano dell'oggetto in un mezzo ad indice di rifrazione n_1 e α_2 il piano immagine nel mezzo ad indice n_2 . Siano F_2 il secondo piano focale⁽¹²⁾, P_1 il punto oggetto sull'asse del sistema (immagine P_2) e Q_1 un punto ad esso vicino a distanza y_1 . Siano ancora θ_1 e θ_2 le semiaperture dei fasci che investono la lente da P_1 o che convergono in P_2 ed a il raggio della regione (circolare) sul piano F_2 investita dai raggi che convergono in P_2 . Si ha, essendo θ_2 molto piccolo:

$$(21) \quad \theta_2 = \frac{a}{x_2}.$$

⁽¹¹⁾ È possibile mostrare che la precisione con cui nell'occhio normale sono realizzati il sistema rifrangente e la distribuzione delle cellule sensibili corrisponde a questo limite: la qualità delle lenti e la accuratezza della distribuzione delle cellule nervose sono giusto quelle necessarie per utilizzare il sistema fino ai limiti posti dalla diffrazione.

⁽¹²⁾ Le distanze dei due piani focali dalla lente sono diverse se $n_1 \neq n_2$.

Si noti inoltre che essendo la distanza, p_2 , fra lente e piano α_2 molto grande rispetto alla distanza focale, x_2 non differisce molto da p_2 e di conseguenza la distanza y_2 per cui si ha che Q_2 cada sul primo cerchio oscuro della figura di diffrazione relativa a P_2 è

$$(22) \quad y_{2,\min} = \Delta\theta p_2 \simeq \Delta\theta x_2$$

essendo, in accordo con quanto visto per la deduzione della (19),

$$(23) \quad \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda_2}{2a} \text{ rad},$$

$\lambda_2 = \lambda_0/n_2$ la lunghezza d'onda nello spazio immagine e λ_0 la lunghezza d'onda nel vuoto. Si ha quindi

$$(24) \quad y_{2,\min} = 0,61 \frac{\lambda_2}{a} x_2 = 0,61 \frac{\lambda_2}{\theta_2} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n_2 \theta_2}.$$

In base alla formula di Abbe [cap. 10 eq. (31)] si ha:

$$(25) \quad n_1 y_{1,\min} \sin \theta_1 = n_2 y_{2,\min} \sin \theta_2;$$

essendo θ_2 piccolo, $\sin \theta_2 \simeq \theta_2$ e si ottiene

$$(26) \quad n_1 y_{1,\min} \sin \theta_1 = n_2 y_{2,\min} \theta_2.$$

Occorre fare sistema della (24) e della (26).

Si ottiene come espressione della distanza tra due punti oggetto che il microscopio riesce a risolvere in condizioni limite, *per illuminazione incoerente*,

$$(27) \quad |y_{1,\min}| \simeq 0,61 \frac{\lambda_0}{n_1 \sin \theta_1}.$$

L'espressione $n_1 \sin \theta_1$ prende il nome di apertura numerica dell'obiettivo: il potere risolutivo ($1/|y_{1,\min}|$) cresce con l'apertura numerica. Il risultato dato dalla (27) può essere usato con buona approssimazione nelle condizioni comuni di illuminazione di un oggetto per la osservazione al microscopio.

Il limite di risoluzione ($y_{1,\min}$) dipende dal rapporto fra la lunghezza d'onda della radiazione usata e l'apertura numerica.

Se l'oggetto si trova in aria, il valore più alto che si può ottenere per l'apertura numerica è di circa 0,95 ($\theta_1 \simeq 70 \div 75^\circ$) e se si lavora in luce bianca ($\lambda_{\text{medio}} = 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$) si ha $y_{1,\min} \simeq 0,35 \text{ micron}$. Un miglioramento si può ottenere usando i cosiddetti obiettivi ad immersione: in tal caso l'oggetto è immerso in un olio avente n_1 di circa 1,5. Il valore massimo ottenibile per l'apertura numerica è 1,6 cui corrisponde⁽¹³⁾, in luce bianca, circa $y_{1,\min} \simeq 0,2 \mu\text{m}$. Valori più piccoli per il limite di risoluzione si possono ottenere usando sorgenti di luce ultravioletta (minore λ) e rivelazione fotografica, oppure, sempre operando con luce visibile, adottando speciali tecniche (interferenziali, a contrasto di fase ecc.).

⁽¹³⁾ Da questi elementi si può calcolare il limite utile di ingrandimento di un microscopio che lavora in luce bianca. Supponiamo che si usi un obiettivo ad immersione e che si abbia $y_{1,\min} = 0,2 \mu\text{m}$. Se l'oggetto fosse disposto ad una distanza dall'occhio pari alla distanza minima della visione distinta (0,25 m), ad una separazione fra due punti oggetto pari a $y_{1,\min}$ corrisponderebbe un angolo dalla posizione dell'occhio pari all'incirca a

$$\frac{0,2 \cdot 10^{-6}}{0,25} \text{ rad.}$$

La risoluzione dell'occhio è $1' \simeq 10^{-3}/3 \text{ rad}$. Perché quindi i due punti possano essere visti dall'occhio come distinti in condizioni limiti per l'occhio stesso, occorre che il microscopio abbia un ingrandimento tale da fornire nell'immagine disposta alla distanza della visione distinta immagini dei due punti ad una distanza fra loro che sottenda dall'occhio l'angolo

Microscopio elettronico

Un miglioramento sostanziale nel potere risolutivo si ha passando dai microscopi normali a quelli elettronici; in questi ultimi viene usato un fascio di elettroni aventi tutti la stessa velocità v (cioè la stessa energia cinetica: elettroni monoenergetici). Essi presentano fenomeni ondulatori (cap. 9, par. 9.1) e la lunghezza dell'onda associata risulta essere

$$(29) \quad \lambda = \frac{h}{mv},$$

con h , costante di Planck, m massa dell'elettrone. Se elettroni a velocità iniziale praticamente nulla vengono accelerati nel campo elettrico esistente fra due piastre fra le quali è applicata una differenza di potenziale, si ha che al variare di detta d.d.p fra 100 e 10^5 V, si ottengono valori di λ fra circa 1,2 Å e 0,04 Å.

I valori di λ possono essere quindi circa 10^5 volte più piccoli di quelli della luce visibile ($4.000 \div 7.000$ Å). La costruzione dei microscopi elettronici incontra difficoltà di vario genere per la realizzazione dei dispositivi, svolgenti funzioni analoghe alle lenti ordinarie, per focalizzare e far rifrangere il fascio di elettroni (lenti elettrostatiche, elettromagnetiche); essa ha tuttavia consentito di avere limiti di risoluzione ($y_{1,\min}$) di qualche Å. Non indugiamo qui a descrivere particolari, peraltro importanti, della costruzione dei microscopi elettronici e della tecnica speciale della microscopia elettronica; ci limitiamo a riportare in figura 14.22 alcune immagini ottenibili. La figura 14.22a mostra la spaziatura regolare (3.138 Å) dei piani reticolari in una sottile lamina di silicio (V.A. Phillips, H.J. Hugo); la figura 14.22b mostra con un ingrandimento di 125.000 diametri le tracce lasciate in sottili lame di mica da frammenti di fissione (R.L. Fleischer, P.B. Price, R.M. Walker); la figura 14.22c è una micrografia dei geni che producono la sostanza RNA: le molecole di RNA sono i sottili filamenti mentre i geni o DNA sono le spine delle strutture a forma di carota (O. Miller Jr.).

14.10. DOPPIA FENDITURA

Prendiamo in considerazione il caso in cui un'onda piana monocromatica incida normalmente su un piano nel quale vi siano due fessure parallele, molto lunghe, aventi entrambe larghezza d , disposte a distanza e , una dall'altra (fig. 14.23). Ci proponiamo di studiare la diffrazione di Fraunhofer che si determina.

È bene osservare che un sistema di due fessure investito da un'onda piana e monocromatica è già stato da noi investigato nello studio dell'interferenza (esperienza di Young, con sorgenti lineari, cap. 13, par. 13.2). In quel caso noi abbiamo avvertito che le fessure da usare devono essere

$10^{-3}/3$ rad. L'ingrandimento risulta:

$$(28) \quad \frac{\frac{1/3 \cdot 10^{-3}}{0,2} \cdot 10^{-6}}{0,25} \simeq 400.$$

Per ingrandire la più piccola distanza fra punti dell'oggetto risolvibile dall'obiettivo ai limiti di risoluzione dell'occhio occorre dunque un ingrandimento di 400.

In pratica conviene ingrandire un po' di più per una visione confortevole. Il limite di 1000 può essere preso come limite di ingrandimento per un microscopio che lavori con luce visibile. Un ingrandimento superiore non produce alcun miglioramento nel dettaglio dell'immagine.

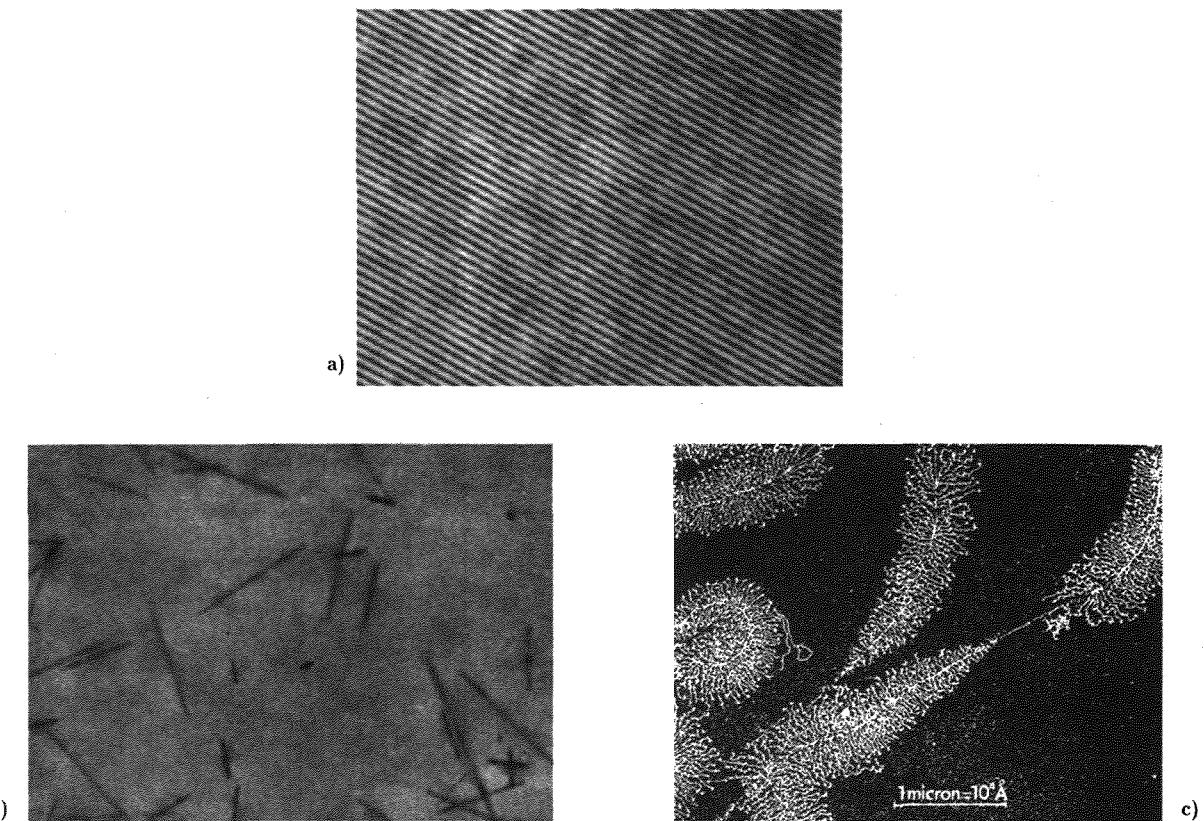


Fig. 14.22. a) Micrografia al microscopio elettronico che indica la spaziatura regolare dei piani reticolari in un cristallo di silicio (3.138 \AA , faccia III) (V.A. Phillips, H.J. Hugo).
 b) Micrografia con ingrandimento 125.000 diametri che indica le tracce prodotte da frammenti di fissione in sottili lamine di mica (R.L. Fleischer, P.B. Price, R.M. Walker).
 c) Molecole di RNA (sottili filamenti) prodotte da geni o DNA (spine delle strutture a carota) (O. Miller Jr.).

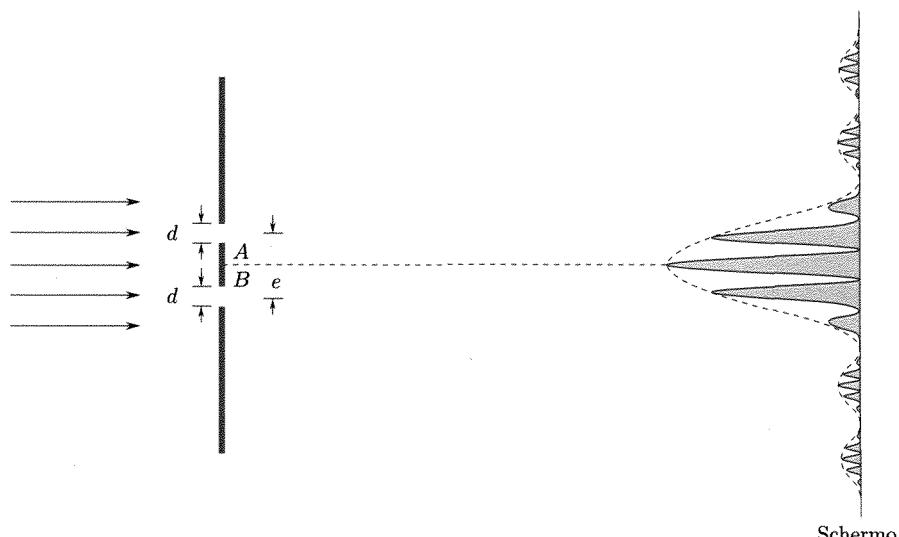


Fig. 14.23

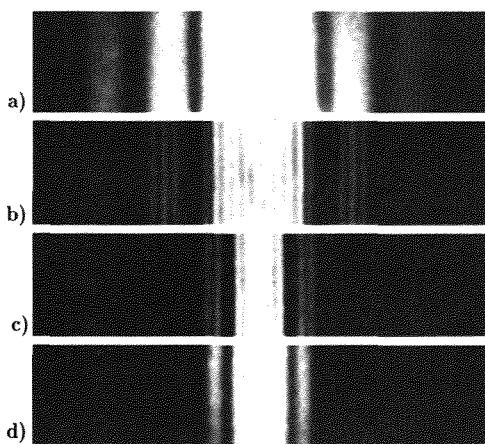


Fig. 14.24 Frange di diffrazione per fenditure di due larghezze: a) per una fenditura stretta; b) per due fenditure strette; c) per due fenditure più larghe; d) per una fenditura più larga (F.A. Jenkins, H.E. White).

molto sottili, aventi addirittura larghezza inferiore a λ : in tal caso la diffrazione fa sì che la radiazione al di là di ciascuna fenditura si trovi distribuita in un angolo molto ampio e quindi la sovrapposizione nella regione in cui si studia l'interferenza può essere considerata fra fasci di intensità approssimativamente costante (fra onde approssimativamente cilindriche).

Nel caso che qui consideriamo, invece, le fenditure hanno larghezza maggiore, comparabile con la distanza fra di esse (e) e ciò porta di conseguenza che la radiazione diffratta da ciascuna fenditura e che va nel primo massimo della corrispondente figura di diffrazione si trova concentrata in un angolo (dietro la fenditura) piuttosto limitato.

Nella figura 14.24 (Jenkins, White) vengono presentate le figure di diffrazione ottenute per una coppia di fenditure in due casi. Nel primo (14.24b) le fenditure sono abbastanza strette e nel centro della figura si ha un sistema di frange aventi all'incirca la stessa intensità; esse richiamano le frange osservate

nell'esperienza di Young. Si osservi che questo accade per una zona limitata e ben presto l'intensità delle frange decade allontanandosi dal centro fino a ridursi a zero; le frange riappaiono peraltro nelle zone ove si ha radiazione diffratta da ogni singola fenditura. Ciò si vede immediatamente confrontando la figura 14.24b con la 14.24a ove è indicata la figura di diffrazione ottenibile se si chiude una (non importa quale) delle due fenditure. Nel secondo caso (fig. 14.24c) le due fenditure, pur rimanendo alla stessa distanza e fra loro, sono più larghe che nel primo caso. La figura è simile a quella ottenuta nel primo caso, ma i sistemi di sottili frange (di interferenza) sono limitati a regioni più ristrette, corrispondenti alle zone delle frange di diffrazione delle singole sorgenti (fig. 14.24d). Si noti che la distanza fra le sottili frange è nei due casi (b, c) la stessa; come presto vedremo essa dipende da e .

La determinazione della distribuzione dell'intensità nella figura di diffrazione può farsi con il solito metodo generale, estendendo il calcolo dell'integrale (1) alla superficie delle fenditure. Il risultato tuttavia può essere ottenuto rapidamente con semplici considerazioni. L'effetto della diffrazione per ciascuna fenditura è quello di far sì che l'intensità della perturbazione che giunge sullo schermo sia data in funzione dell'angolo θ ⁽¹⁴⁾ dalla relazione (12):

$$(30) \quad J = J_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = J_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2}.$$

Tutto va quindi come se si avessero nei centri A e B delle fenditure due sorgenti coerenti la cui radiazione ha una ampiezza dipendente dalla direzione secondo la (30) (vedi fig. 14.25).

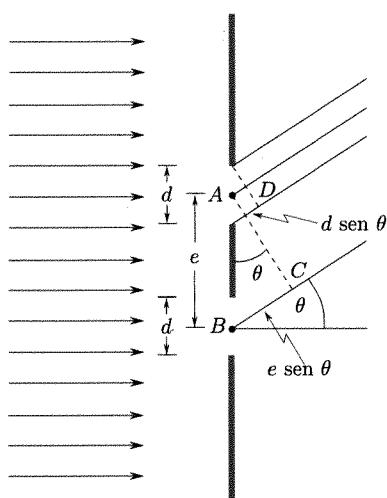


Fig. 14.25

⁽¹⁴⁾ Legato ad α dalla relazione (9).

Il problema allora consiste nel determinare la distribuzione risultante dalla sovrapposizione delle radiazioni di due sorgenti identiche e coerenti, spostate nello spazio della lunghezza e . È questo lo stesso problema esaminato nella interferenza. Nel caso della esperienza di Young le sorgenti erano tali che si poteva ammettere che l'ampiezza fosse uguale in tutte le direzioni θ e si è trovato per l'intensità⁽¹⁵⁾ (cap. 13, par. 13.2)

$$(31) \quad J = 4J_1 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

essendo δ lo sfasamento corrispondente ai diversi percorsi che la radiazione deve compiere per giungere nel punto dello schermo che si considera dalle due sorgenti. Nel caso presente, invece, l'ampiezza della radiazione emessa da ciascuna sorgente varia con θ e nella (31) la J_1 va considerata variare con la legge (30).

Si ottiene quindi come risultante:

$$J = J'_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2} \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Con riferimento alla figura 14.25 si trova che

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} e \sin \theta \right) = \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda},$$

e quindi (ponendo $J'_0 = J_0$)

$$(32) \quad J = 4J_0 \left[\frac{\sin^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2} \right] \cos^2 \left(\frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} \right).$$

Distribuzione dell'intensità nella diffrazione da una doppia fenditura

La distribuzione dell'intensità è rappresentata dal prodotto di due fattori (a parte J_0), che sono comunemente indicati come fattore di diffrazione il primo e fattore di interferenza il secondo⁽¹⁶⁾.

Nella figura 14.26 sono indicate per il caso di doppia fenditura per il quale $e = 3d$:

- la curva $\sin^2 \alpha / \alpha^2$, proporzionale al fattore di diffrazione (30);
- la curva $\cos^2 \delta / 2$, corrispondente al fattore di interferenza;
- la curva (32), le cui ordinate sono proporzionali al prodotto delle ordinate delle curve a e b.

Le distribuzioni così calcolate risultano in accordo con quelle indicate dall'esperienza (fig. 14.24).

⁽¹⁵⁾ $J_1 = J_2$ è l'intensità prodotta da ciascuna delle sorgenti isolatamente.

⁽¹⁶⁾ Entrambi derivano dalla sovrapposizione di onde, come è reso evidente dal metodo generale di calcolo [eq. (1)]; è tuttavia utile tenere distinti gli effetti che possono essere ricondotti alla sovrapposizione di un *numero finito* di radiatori coerenti, come nell'esperienza di Young (*interferenza*), da quello della sovrapposizione di un numero infinito di radiatori infinitesimali coerenti con cui l'analisi della radiazione emergente da un ostacolo del tipo fenditura semplice deve essere fatta (*diffrazione*).

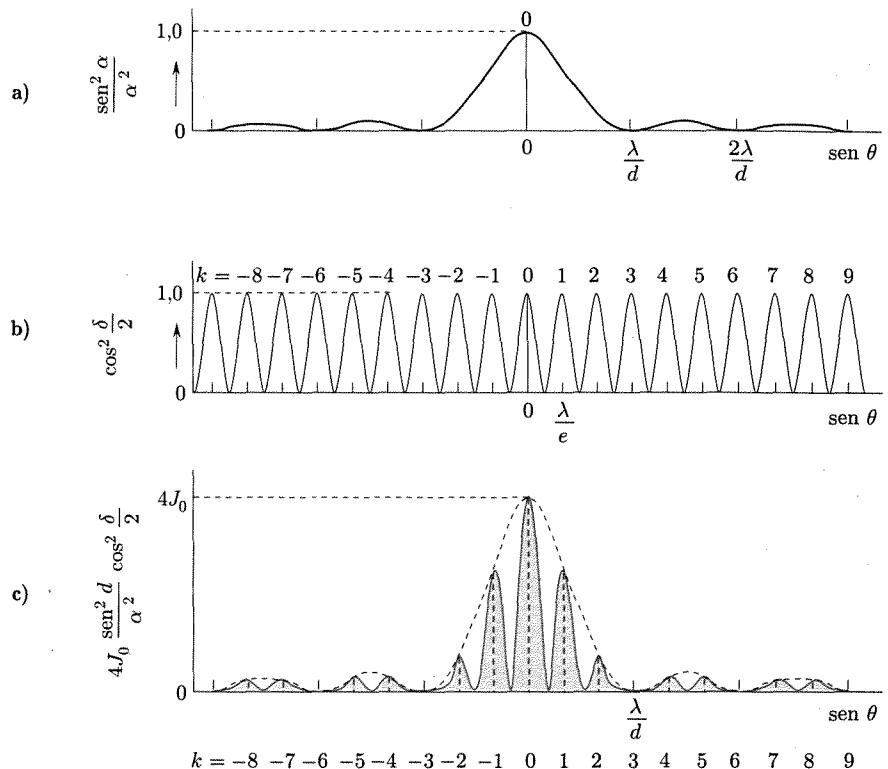


Fig. 14.26

Vogliamo ancora osservare che le posizioni di zero nell'intensità fra le sottili frange di interferenza si verificano in corrispondenza alla condizione

$$\cos \frac{\delta}{2} = 0,$$

cioè

$$\frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} = \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Si ha quindi

Punti di intensità zero

(33)

$$\sin \theta = (2n+1) \frac{\lambda}{2e}.$$

Come si vede la posizione dei punti di zero e quindi delle frange di interferenza dipende (oltre che da λ) esclusivamente da e e quindi non cambia se la larghezza (d) delle fenditure varia rimanendo costante e : il verificarsi di questa circostanza è già stato sottolineato all'inizio del paragrafo (fig. 14.24). Il variare della larghezza d ha influenza solo sul fattore di diffrazione. Se d è piccolo rispetto ad e , la larghezza del massimo centrale nella figura di diffrazione nella singola fenditura è molto grande rispetto alla distanza fra zeri successivi nel fattore di interferenza e quindi nella parte centrale della figura che si osserva sullo schermo (piccoli valori di θ) si ha un sistema di frange di luminosità all'incirca uguale.

Considerando questa parte della figura si ha che i massimi delle intensità (centro delle frange di interferenza) si hanno (al centro fra due punti

di zero) per

$$\sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{e}$$

$$(34) \quad \sin \theta = \pm k \frac{\lambda}{e};$$

Massimi di intensità

k (intero positivo) prende il nome di ordine della frangia di interferenza e rappresenta la differenza, espressa in lunghezze d'onda, dei cammini ottici dei raggi che giungono dalle due fenditure nel punto dello schermo ove si trova la frangia. Nel caso considerato in figura 14.26, l'ordine delle frange è indicato in relazione alle curve b e c .

È bene sottolineare che la posizione della frangia d'ordine zero sullo schermo è indipendente dalla lunghezza d'onda della radiazione, giacché la condizione relativa,

$$\sin \theta = 0,$$

non dipende da λ . Le posizioni delle frange di ordine superiore dipendono invece da λ e precisamente si ha che la distanza sullo schermo dalla frangia centrale della generica frangia d'ordine k cresce con λ . Se perciò, invece che una sorgente primaria monocromatica, si usa una sorgente policromatica, si trova che mentre la frangia centrale (d'ordine zero) è ancora composta come la sorgente, le altre sono formate da linee separate di colore diverso essendo, in ogni frangia, le componenti rosse più deviate di quelle violette.

■ 14.11. RETICOLO DI DIFFRAZIONE

Dal sistema di due fenditure uguali e parallele trattate nel paragrafo precedente è semplice passare alla considerazione del reticolo di diffrazione. Questo è costituito da un numero N di fenditure parallele di uguale larghezza (d) disposte su uno schermo piano opaco in una successione tale che la distanza fra le fenditure successive sia costante. Tale reticolo sia illuminato da un fascio parallelo di luce e la figura di diffrazione si osservi a distanza molto grande dallo schermo. Uno schema equivalente di disposizione ottica è indicato nella figura 14.27. S (sorgente secondaria) è una fenditura fortemente illuminata e disposta nel fuoco di una lente, L_1 ; le fenditure sullo schermo opaco sono parallele ad S ; la lente L_2 consente di osservare la figura di diffrazione nel suo piano focale.

Anche in questo caso la situazione che si determina può essere analizzata nella seguente maniera:

1. l'effetto della diffrazione per ogni singola fenditura equivale ad avere al centro di ciascuna di esse una sorgente direzionale, che irradia nelle varie direzioni secondo la legge (12);
2. occorre considerare l'interferenza dovuta a sorgenti coerenti che irradiano con le stesse caratteristiche e le cui perturbazioni, per giungere nel punto di osservazione, percorrono distanze che variano con regolarità passando da una sorgente alla successiva.

La radiazione, cioè, che giunge sullo schermo, può essere rappresentata in funzione dell'angolo (θ), che fissa la direzione, dal prodotto di

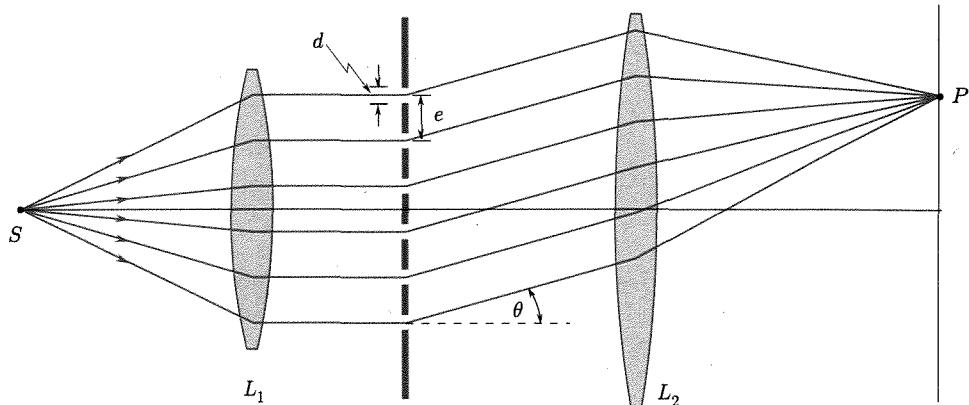


Fig. 14.27

un fattore di diffrazione ed un fattore di interferenza. L'effetto della diffrazione è rappresentato in maniera identica a quella considerata per la doppia fenditura (30),

$$J_1 = J_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = J_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2},$$

e da tale espressione si deduce il fattore di diffrazione.

Il fattore di interferenza si differenzia da quello trovato per la doppia fenditura giacché in questo caso occorre considerare l'interferenza multipla di fasci che arrivano con ritardi uguali uno rispetto al precedente. Si trova per l'interferenza multipla

$$(35) \quad J = J_1 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi e \sin \theta}{\lambda} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} \right)} = J_1 \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta},$$

con $\beta = (\pi e \sin \theta)/\lambda$ ed il fattore di interferenza è

$$(36) \quad \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}.$$

Cerchiamo di esaminare le caratteristiche dell'interferenza e del fattore (36). È innanzitutto evidente che la J data dalla (35) sarà massima in quelle direzioni (θ) per le quali accada che le differenze di cammino per i raggi provenienti da due fenditure successive sia nulla o pari ad un numero intero di λ :

$$(37) \quad e \sin \theta = k\lambda,$$

$$(38) \quad \sin \theta = k \frac{\lambda}{e},$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Si osservi che se i contributi delle singole fenditure sono rappresentati da vettori di uguale ampiezza sfasati uno rispetto al precedente di un angolo corrispondente alla differenza di percorso dei raggi, e questi contributi si compongono per avere la disturbanza risultante nel punto dello

schermo considerato, la (37) significa che per i punti sullo schermo individuati dalle direzioni θ che la soddisfano, i contributi delle N fenditure sono rappresentati da vettori nella stessa direzione e nello stesso verso. La figura 14.28a corrisponde ad uno di questi casi per $N = 6$.

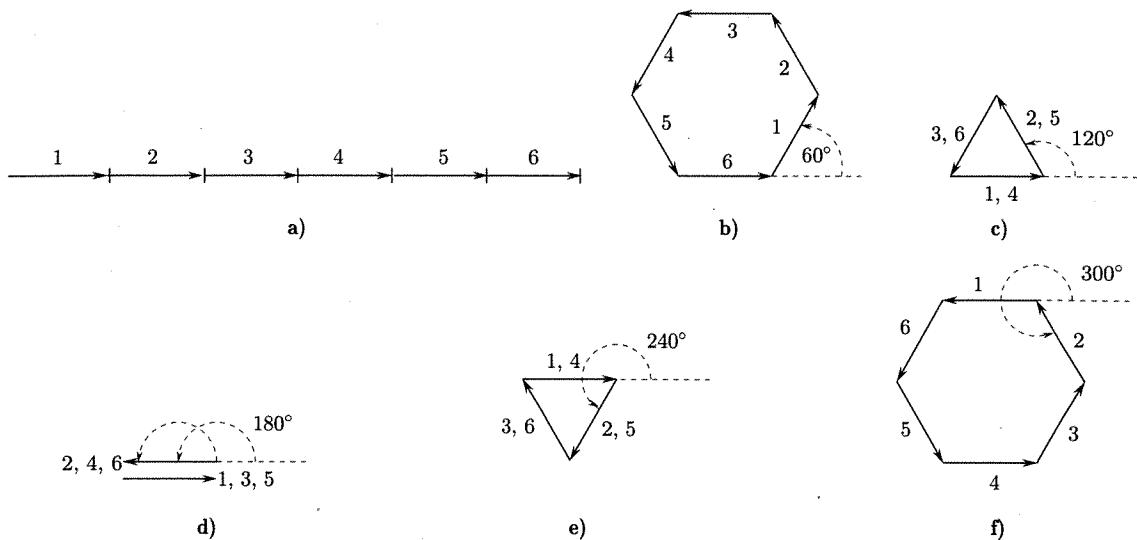


Fig. 14.28

Quando è soddisfatta la (37) il fattore di interferenza (36) assume il valore unitario; ciò è naturalmente in accordo con il fatto che tanto il numeratore quanto il denominatore nella (36) vanno a zero:

$$(39) \quad \beta = \frac{\pi e \sin \theta}{\lambda} = k\pi,$$

$$N\beta = Nk\pi.$$

La relazione (38), che fissa la posizione di alcuni massimi (massimi principali) per il fattore di interferenza, è la stessa di quella (34) stabilita per la doppia fenditura (essa non dipende da N). Fra due massimi successivi, peraltro, mentre nel caso della diffrazione da due fenditure v'è un solo punto di zero per il fattore di interferenza (vedi per es. fig. 14.26b), nel caso di N fenditure vi sono $(N - 1)$ punti di zero e di conseguenza altri $(N - 2)$ massimi relativi (fig. 14.29).

Il verificarsi di questa circostanza può essere giustificato analiticamente o per mezzo dei diagrammi vettoriali usati per il calcolo della disturbanza ottica sullo schermo. L'espressione (36) del fattore di interferenza mostra che il numeratore va a zero più frequentemente del denominatore: è sufficiente infatti che sia

$$(40) \quad N\beta = p\pi,$$

con $p = 0, 1, 2, \dots$. Per quelle direzioni in cui si annulla tanto il numeratore quanto il denominatore si hanno i massimi già esaminati (39); quando si annulla solo il numeratore si hanno direzioni per le quali il fattore di interferenza è nullo. La (40) si scrive:

$$(41) \quad \frac{N\pi e \sin \theta}{\lambda} = p\pi,$$

$$e \sin \theta = p \frac{\lambda}{N};$$

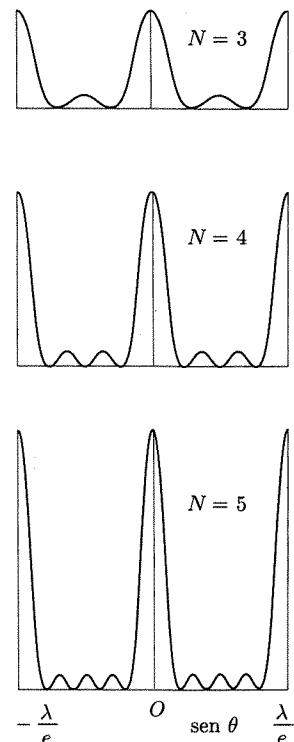


Fig. 14.29

è facile vedere come fra due posizioni di massimo date dalla (37) si vengano a trovare altre $(N - 1)$ posizioni di zero date dalla (41). Per esempio, tra il massimo centrale $k = 0$ nella (38) ed il primo massimo ($k = 1$) posto nella direzione θ_1 tale che

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{e},$$

si hanno le posizioni di zero per il fattore di interferenza

$$(42) \quad \sin \theta = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{e}, \sin \theta = \frac{2}{N} \frac{\lambda}{e}, \dots, \sin \theta = \frac{N-1}{N} \frac{\lambda}{e}.$$

Se la disturbanza ottica è calcolata con il diagramma dei vettori il verificarsi della condizione di annullamento del fattore di interferenza fra due massimi, corrisponde a direzioni per le quali il diagramma formato con i vettori componenti (di uguale ampiezza ed ugualmente sfasati uno rispetto al precedente) risulta chiuso (vettore somma nullo nonostante che i singoli contributi siano diversi da zero). La figura 14.28b-f mostra il verificarsi di queste circostanze nel caso $N = 6$, gli angoli di sfasamento sono quelli per cui $\sin \theta$ vale

$$\frac{1}{6} \frac{\lambda}{e}, \frac{2}{6} \frac{\lambda}{e}, \frac{3}{6} \frac{\lambda}{e}, \frac{4}{6} \frac{\lambda}{e}, \frac{5}{6} \frac{\lambda}{e}.$$

Fra due direzioni di zero indicate dalle (42) (o equivalenti) v'è un massimo relativo: dalla costruzione del diagramma vettoriale ora considerato per ottenere l'ampiezza della perturbazione risultante diventa tuttavia chiaro che tale ampiezza è sempre molto più piccola di quella che si ha quando è soddisfatta la (38), quando cioè i vettori che rappresentano i contributi si sommano nella stessa direzione e nello stesso verso.

La figura 14.30 mostra per $N = 6$ l'andamento del numeratore e del denominatore nell'espressione (36) del fattore di interferenza ed anche l'andamento del loro quoziente, cioè del fattore stesso.

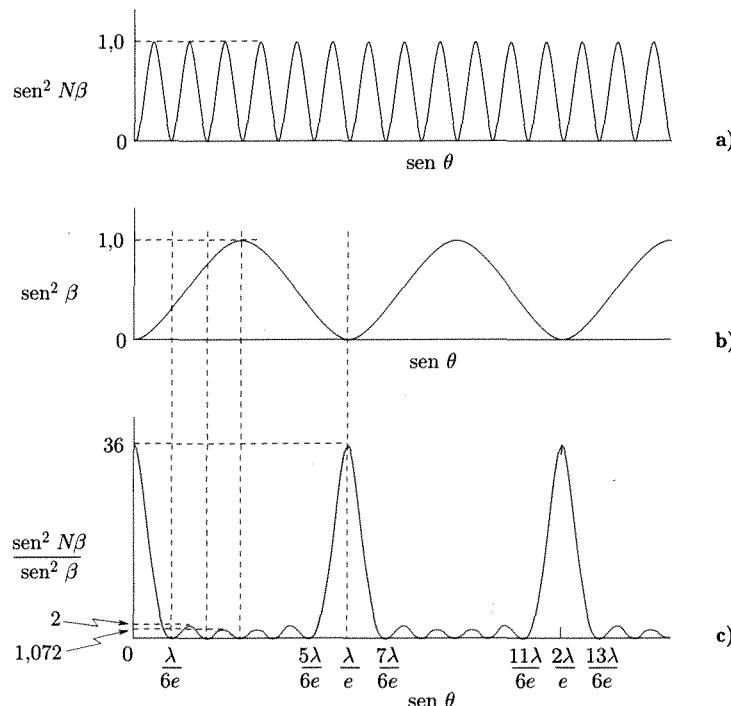


Fig. 14.30

Dalle considerazioni ora svolte segue che la distribuzione dell'intensità nella figura di diffrazione che si ha per N fenditure ha la forma:

$$(43) \quad J = J_0 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \text{sen} \theta}{\lambda}\right)^2} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{N \pi e \text{sen} \theta}{\lambda}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi e \text{sen} \theta}{\lambda}\right)}$$

Distribuzione d'intensità da N fenditure

Come nel caso della doppia fenditura, il grafico della (43) può ottenersi da quelli della (30) (cioè del tipo di quello in fig. 14.26a) e della (36) (del tipo di quello di fig. 14.30c): ciò è indicato schematicamente nella figura 14.31.

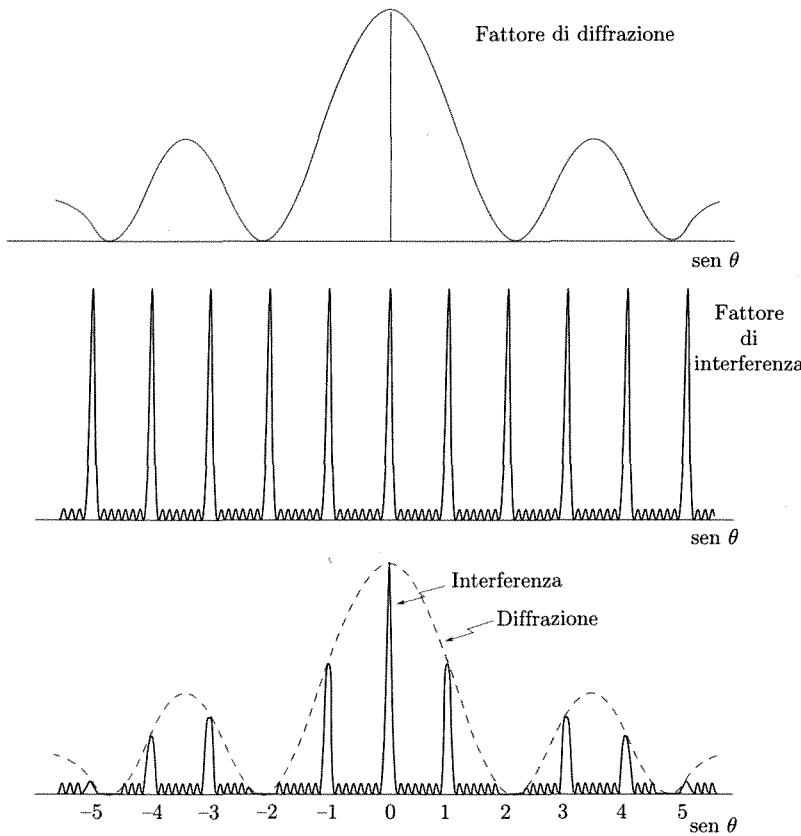


Fig. 14.31

La figura di diffrazione è formata da picchi principali molto acuti (linee luminose) poste nelle posizioni (38), fra i quali si trovano massimi relativi molto poco intensi. La posizione delle linee luminose, che prendono il nome di linee di ordine k , come si è detto, non dipende da N ma solo da e . Da N , invece, dipende la forma dei picchi principali. Al crescere di N tali picchi divengono sempre più stretti; contemporaneamente i massimi secondari decrescono di ampiezza e, per N sufficientemente grande, divengono praticamente invisibili; in tal caso la figura di diffrazione è formata da sottili linee molto luminose disposte nelle direzioni (38).

Nella figura 14.32 (F.A. Jenkins, H.E. White) è indicata la figura di diffrazione da una sola fenditura (a), e quelle per le fenditure uguali a quel-

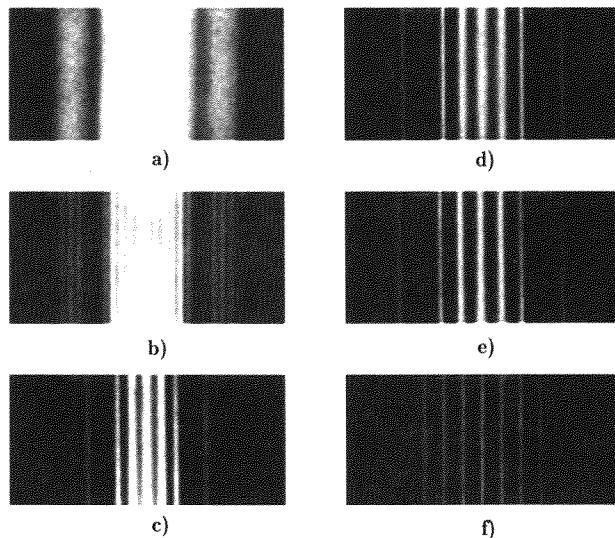


Fig. 14.32 Figura di diffrazione per sistemi di fenditure uguali e ad uguale distanza una dall'altra: a) fenditura singola; b) due fenditure; c) tre fenditure; d) quattro fenditure; e) cinque fenditure; f) venti fenditure (F.A. Jenkins, H.E. White).

la di figura 14.27 disposte parallelamente (a distanze uguali una dall'altra) in numero crescente da b a f. La figura (b) si riferisce a due fenditure e quella f a 20 fenditure. Si vede come al crescere di N i massimi principali divengano più netti e la figura finisca per essere formata da linee sottili.

14.12. RETICOLI E SPETTRI

La figura di diffrazione (Fraunhofer) formata da un reticolo di diffrazione illuminato da un fascio parallelo di luce monocromatica, appena N comincia ad avere valori di alcune decine, è praticamente formata da linee luminose ben separate.

Nel caso in cui il piano del reticolo sia normale al fascio incidente, le direzioni θ che determinano le posizioni delle linee sono date dalla (38):

Formula del reticolo

$$(44) \quad \sin \theta = k \frac{\lambda}{d},$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Il numero k , come si è detto, determina l'ordine della linea.

Reticolo in luce policromatica

Si abbia ora che la luce che illumina il reticolo sia policromatica. La figura di diffrazione è data dalla sovrapposizione delle figure relative alle singole lunghezze d'onda. La posizione della riga di ordine zero ($k = 0$) è la stessa per tutte le lunghezze d'onda; per le righe di ordine superiore la situazione è diversa e la figura di diffrazione risultante è formata per ogni ordine da tante righe di colori diversi quante sono le lunghezze d'onda presenti. L'insieme delle righe dell'ordine k costituisce quello che si indica con il nome di spettro di ordine k .

L'importanza molto rilevante dei reticolati sta proprio nella possibilità che essi offrono di separare le componenti di una luce composta anche quando le loro lunghezze d'onda sono molto vicine fra loro. Se la sorgente

emette radiazione che comprende solo un numero discreto di λ si ottengono spettri a linee; se invece la sorgente emette radiazione la cui lunghezza d'onda è distribuita con continuità in un intervallo, si ottengono spettri continui: in ogni caso le componenti a maggiore λ (rosso) sono deviate più di quelle a minore λ (violetto). La figura 14.33 (F.A. Jenkins, H.E. White) mostra gli spettri ottenuti con una sorgente che emette su $\lambda_1 = 4.000 \text{ \AA}$ (a), con una sorgente $\lambda_2 = 5.000 \text{ \AA}$ (b) e con una sorgente che emette contemporaneamente le due radiazioni λ_1 e λ_2 ; sulle figure sono indicati gli ordini (k) delle righe (a, b) e egli spettri (c).

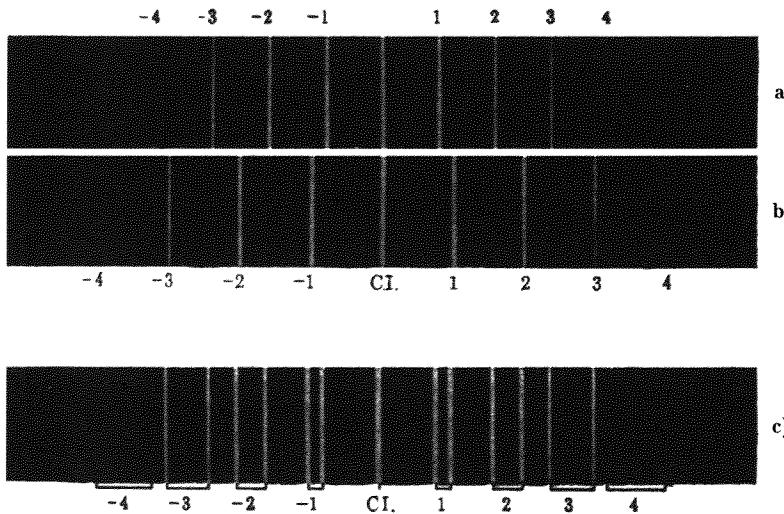


Fig. 14.33

Lo schema dell'apparecchio per ottenere tali spettri, cioè dello spettroscopio a reticolo, è indicato in figura 14.34. La luce della sorgente illumina una fenditura (sorgente lineare secondaria) cui segue un sistema ottico (collimatore) che rende parallelo il fascio di raggi prima che esso incida sul reticolo: la radiazione deviata viene raccolta da un altro sistema ottico (telescopio). Il telescopio può ruotare intorno ad un asse parallelo

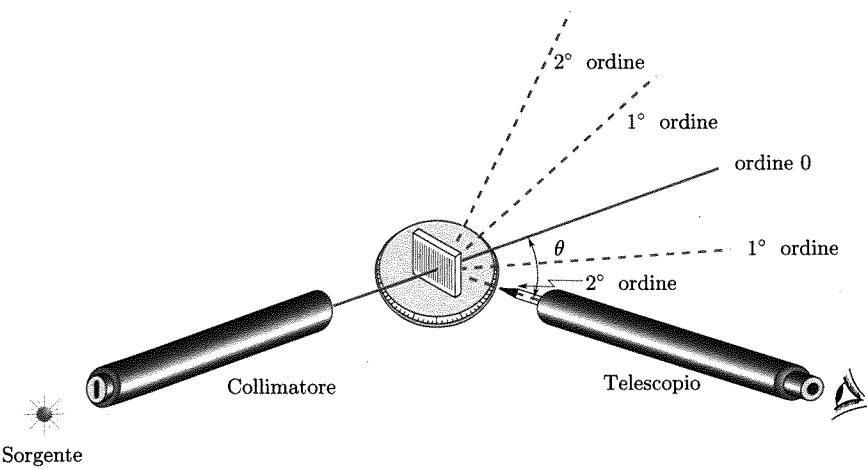
Spettroscopio a reticolo

Fig. 14.34

alle fenditure del reticolo e passante per il reticolo stesso in modo da fare osservazioni a diversi θ : negli spettroscopi per ricerca le differenze in θ per i vari ordini sono notevoli sicché la radiazione esaminata dal telescopio è di solito quella dello spettro di un solo ordine (come in figura).

L'impiego degli spettroscopi a reticolo consente di giungere ad una valutazione assoluta delle λ della radiazione: basta infatti, in accordo alla (38), misurare θ per la corrispondente linea dell'ordine k : e è una grandezza nota per il reticolo usato.

I parametri di interesse nell'impiego dei reticolari sono due: potere dispersivo e potere risolutivo cromatico. Il potere dispersivo nello spettro di ordine k è una misura della rapidità con cui varia, nell'interno dello spettro, l'angolo θ al variare della λ della radiazione: esso risulta espresso da

$$(45) \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{k}{e \cos \theta}.$$

Il potere dispersivo è direttamente proporzionale a k ed inversamente proporzionale alla separazione (e) fra fenditure successive nel reticolo.

Il potere risolutivo cromatico, che caratterizza il reticolo nei riguardi della capacità di separare linee corrispondenti a λ diverse e molto vicine, è il parametro

$$(46) \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

essendo λ la lunghezza d'onda media fra quelle delle due linee spettrali che si riesce appena a separare e $\Delta\lambda$ la differenza fra le loro lunghezze d'onda.

Si trova che il potere risolutivo è pari a

$$(47) \quad R = kN$$

cioè al prodotto dell'ordine dello spettro che si considera e del numero totale N delle fenditure nel reticolo. Si noti che esso (a differenza dal potere dispersivo) è indipendente dalla separazione (e) fra le fenditure contigue.

Per comprendere l'interesse di un tale parametro si supponga di volere separare due linee che differiscano di $0,1 \text{ \AA}$ fra loro e al centro dello spettro visibile ($\sim 5.500 \text{ \AA}$). Il potere risolutivo richiesto è $\lambda/\Delta\lambda = 55.000$. Se si usa uno spettroscopio a reticolo e si pensa di osservare il secondo spettro ($k = 2$) è facile determinare, mediante la (47) il numero totale N di fenditure del reticolo da impiegare.

$$N = \frac{5,5 \cdot 10^4}{2} = 27.000.$$

Il potere risolutivo può giungere a valori dell'ordine di 400.000

I primi reticolari furono realizzati da Fraunhofer (1820) tendendo sottili fili metallici tra i filetti di due viti a passo molto piccolo, poste parallelamente. Oggi i reticolari migliori vengono fatti incidendo con una punta di diamante sottili linee su lastre di cristallo; speciali macchine di grande precisione vengono usate allo scopo.

I reticolari ottenuti per incisione su lastra di vetro sono molto costosi; si sono perciò sviluppate particolari tecniche, che consentono di ottenere repliche fotografiche o repliche plastiche su supporti di vetro. I reticolari che si usano di solito hanno all'incirca 6000 linee (fenditure) per cm; le dimensioni sono di solito $5 \times 12 \text{ cm}^2$. Una particolare tecnica (olografia) che usa luce coerente da laser, consente di ottenere reticolari (detti olografici) di alta qualità a prezzi molto contenuti.

I reticolari fin qui considerati sono chiamati reticolari per trasmissione giacché la radiazione diffratta è osservata al di là del reticolo. Si realizzano anche reticolari per riflessione incidendo solchi paralleli su una superficie metallica molto levigata e riflettente. Per essi è ancora valida la teoria svolta per i reticolari per trasparenza con gli opportuni adattamenti formali.

Vogliamo accennare ad un reticolo particolare. Esso si verifica quando un sistema di onde elastiche piane di alta frequenza (ultrasuoni) si propaga in un mezzo materiale trasparente alla luce: tali onde producono una successione regolare di strati più o meno densi che si comporta come un reticolo nei riguardi di un fascio parallelo di luce che incida in direzione normale a quella di propagazione degli ultrasuoni⁽¹⁷⁾. Abbiamo già accennato a questo processo che è alla base dei metodi di visualizzazione del campo sonoro usati per la descrizione di molti fenomeni di propagazione (vol. I, cap. 9 e 10).

*Reticoli prodotti
da ultrasuoni*

Oltre ai reticoli unidimensionali finora considerati è possibile avere anche disposizioni bi- e tridimensionali di corpi diffrangenti. Un reticolo bidimensionale è per esempio quello realizzato da una sottile stoffa a trama incrociata. Tali reticoli non hanno peraltro una grande importanza pratica.

I reticoli tridimensionali invece sono di grande interesse poiché di tale tipo sono i reticoli formati dalle disposizioni regolari di atomi nei cristalli. Di essi parleremo nel prossimo paragrafo.

14.13. RETICOLI TRIDIMENSIONALI. DIFFRAZIONE DI RAGGI X

La diffrazione di radiazione elettromagnetica prodotta da una parte di un reticolo tridimensionale ha un notevole interesse poiché di questo tipo è il fenomeno che si presenta nell'interazione tra onde e. m. di opportuna lunghezza d'onda e cristalli.

I cristalli sono formati da celle che si succedono in una distribuzione regolare a tre dimensioni; ogni cella è caratteristica del cristallo ed è formata da atomi o ioni, la cui natura e posizione sono anche esse caratteristiche del cristallo. Un cristallo quindi equivale ad una successione di ostacoli in sequenza regolare separati da spazi vuoti, in modo analogo a quanto avviene per un reticolo di diffrazione (ad una dimensione) esaminato nei precedenti paragrafi. È bene sottolineare come diversa sia la natura dell'interazione per un reticolo, diremo così, tradizionale e per un cristallo, pur ottenendosi un risultato analogo nei due casi. Nelle celle cristalline gli elementi costitutivi (atomi, ioni) essendo formati da cariche elettriche, sono posti in oscillazione forzata dall'onda e.m. incidente e divengono sorgenti di onde coerenti: sono queste le onde che si sovrappongono per dare, dopo l'interazione con il cristallo, la nuova distribuzione spaziale della radiazione. In realtà quindi il tipo di interazione nel caso di un cristallo è quello di diffusione (scattering) da parte di una distribuzione di diffusori, disposti secondo un reticolo tridimensionale: da tutti i diffusori investiti dall'onda incidente si originano onde coerenti che vanno sovrapposte come nel caso della diffrazione. Si osservi peraltro che:

1. le onde nel caso di cristalli sono reali (emesse dai diffusori) mentre nel calcolo della diffrazione, le ondine che si originano nei punti delle aperture non sono reali ma sono considerate in funzione della rappresentazione della realtà per mezzo del principio di Huygens;
2. le onde hanno origine dagli ostacoli e non dalle aperture. A parte queste precisazioni l'interazione della radiazione e. m. ed un cristallo può essere trattata come se si trattasse di un processo di diffrazione, giacché il processo consiste nella sovrapposizione di onde coerenti aventi origine in punti disposti secondo un reticolo spaziale regolare.

⁽¹⁷⁾ Si osservi che a causa dell'enorme differenza nella velocità di propagazione della luce e del suono, la stratificazione prodotta dalle onde ultrasonore va considerata ferma nell'interazione con la luce.

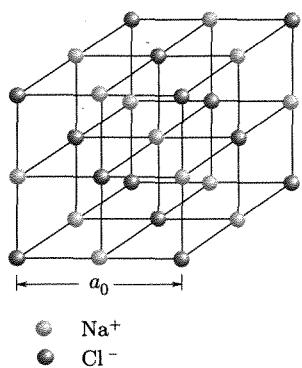


Fig. 14.35

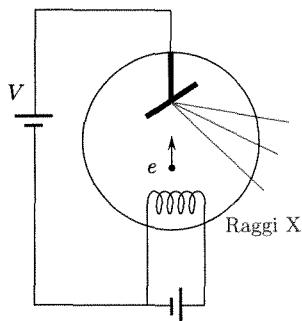


Fig. 14.36

Le distanze fra gli elementi costitutivi di un cristallo (atomi, ioni), e le dimensioni delle celle cristalline sono dell'ordine degli angstrom: la figura 14.35 mostra per esempio la cella cubica del cristallo di NaCl; la lunghezza dello spigolo è $a_0 = 5,62737 \text{ \AA}$. Di conseguenza, nessun apprezzabile effetto di diffrazione reticolare si produce nell'interazione con luce visibile (λ fra 4.000 e 7.000 Å); effetti del genere sono invece da attendere per onde elettromagnetiche aventi lunghezza d'onda dell'ordine dell'angstrom, cioè per raggi X: questo effetto fu previsto da Laue (1913) e successivamente verificato da Friedrich e Knipping.

I raggi X vengono prodotti in laboratorio inviando un fascio di elettroni aventi una sufficiente energia cinetica contro un elettrodo metallico: nella più semplice disposizione (fig. 14.36) gli elettroni sono emessi da un filamento riscaldato (per effetto termoelettronico)⁽¹⁸⁾, come avviene nei normali tubi termoelettronici, e sono accelerati dal campo esistente fra il filamento (*catodo*) ed un elettrodo metallico (*anticatodo*); essi urtano tale elettrodo con una energia cinetica

(48)

$$T = eV,$$

essendo V la differenza di potenziale applicata fra gli elettrodi. La radiazione (X) che viene emessa dall'anticatodo ha uno spettro che è composto da alcune righe e da un fondo continuo: queste componenti hanno origine in due processi diversi che possono avvenire nell'urto elettrone-metallo.

L'elettrone che giunge sulla superficie metallica con elevata velocità può far saltare fuori da un atomo un elettrone che si trova su un'orbita interna, piuttosto prossima al nucleo: ciò richiede una notevole energia, pari all'energia di legame dell'elettrone interno; quando ciò accade un elettrone periferico dello stesso atomo passa ad occupare il posto interno libero perché ciò è energeticamente favorevole ed emette un quanto di radiazione. La radiazione emessa in eventi di questo tipo è di solito nel campo dei raggi X e può avere solo un numero discreto di frequenze, corrispondenti ai salti possibili fra i livelli elettronici dell'atomo investito (spettro a righe). L'altro processo che conduce ad emissione di radiazione X è dovuto al frenamento degli elettroni che giungono sulla superficie del metallo (*radiazione di frenamento* o, con termine tedesco di uso internazionale, *bremsstrahlung*): si è visto (cap. 8, par. 8.13) come una carica in moto accelerato emetta radiazioni. L'arresto dell'elettrone può avvenire in un solo evento, ed in tal caso la frequenza della radiazione emessa ha il valore (ν_{\max})

(49)

$$h\nu_{\max} = T$$

oppure può richiedere vari urti successivi. In quest'ultimo caso vengono emessi quanti di radiazione di frequenze diverse, tutte peraltro inferiori a ν_{\max} . Lo spettro continuo che si origina quando un fascio di elettroni aventi energia cinetica (48) urta una superficie metallica ha come limite superiore la frequenza ν_{\max} .

Per giungere ad una semplice descrizione delle esperienze fondamentali che si fanno con cristalli investiti da raggi X, cominciamo con il considerare lo schema di figura 14.37a. La radiazione monocromatica emessa da una sorgente è, mediante uno schermo assorbente (piombo), limitata ad un sottile fascio, approssimativamente parallelo⁽¹⁹⁾. Tale fascio urta contro un cristallo e si osserva la radiazione deviata con un rivelatore, che può essere una lastra fotografica od un dispositivo elettronico. Nella figura 14.37b sono indicati i piani reticolari, supposti paralleli alla superficie di incidenza del cristallo. L'onda piana che incide con l'angolo⁽²⁰⁾

⁽¹⁸⁾ Tale effetto sarà considerato in dettaglio in seguito (cap. 16, par. 16.10).

⁽¹⁹⁾ Con i raggi X non è possibile usare le normali lenti, giacché i materiali di cui queste sono fatte hanno indice di rifrazione pari ad uno alle frequenze dei raggi X.

⁽²⁰⁾ Nel campo dei raggi X si usa considerare l'angolo formato dalla direzione di propagazione con il piano reticolare (θ) invece dell'angolo con la sua normale ($\pi/2 - \theta$).

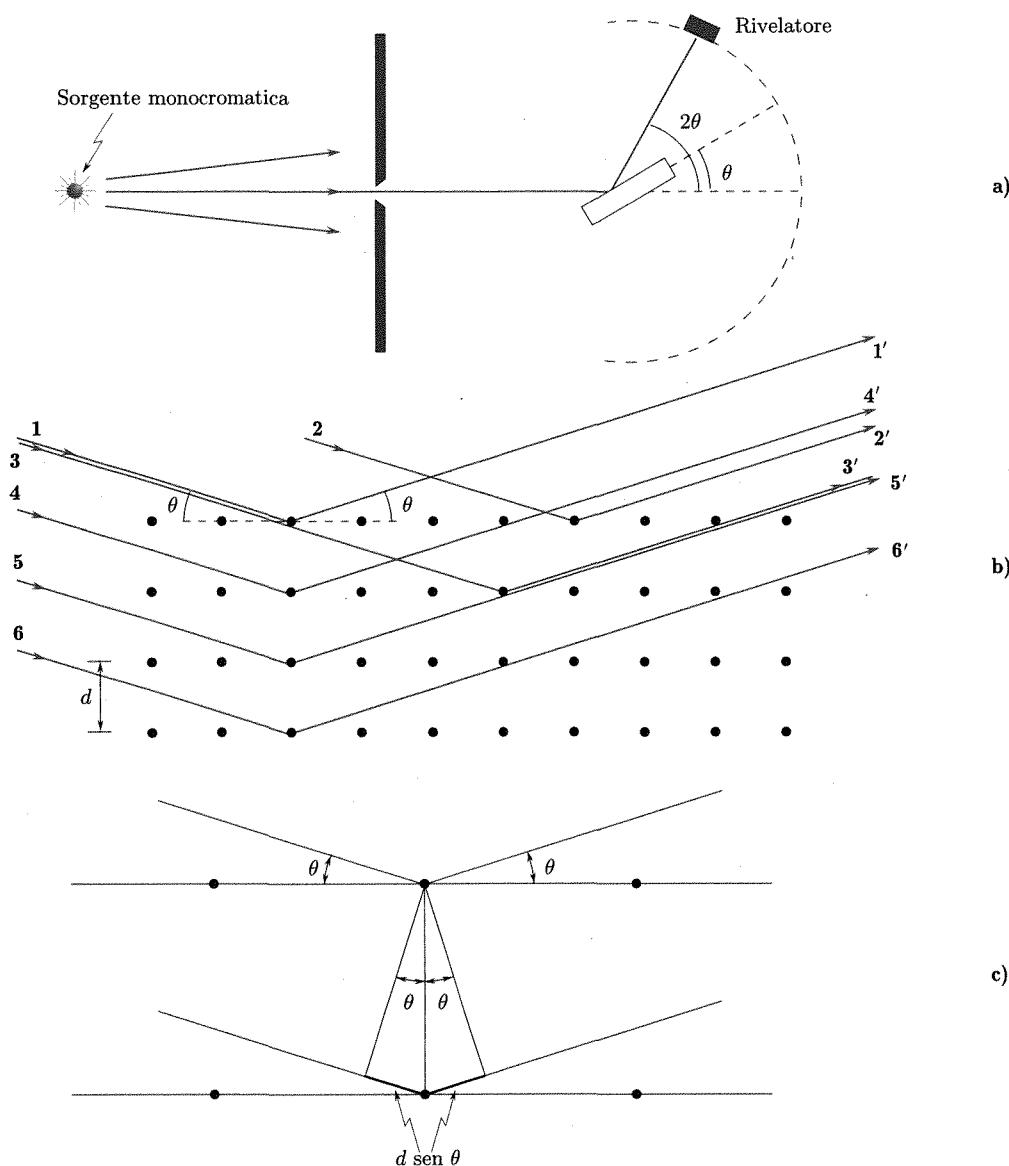


Fig. 14.37

$(\pi/2) - \theta$ viene diffusa dai vari atomi i quali divengono sorgenti coerenti di radiazione secondaria. Se ci si limita a considerare le onde emesse dagli atomi del primo piano reticolare si ha sempre interferenza costruttiva nella direzione di riflessione speculare qualunque sia l'angolo di incidenza. Vi sono peraltro particolari direzioni di incidenza per le quali accade che si ha interferenza costruttiva anche per le onde diffuse dagli atomi nei piani reticolari interni paralleli a quello superficiale. La condizione richiesta perché ciò accada è evidentemente che il maggior percorso della radiazione per due piani reticolari successivi sia un multiplo intero della lunghezza d'onda (fig. 14.37c):

(50)

$$2d \sin \theta = n\lambda ,$$

Legge di Bragg

con n intero⁽²¹⁾. Quando questa circostanza si verifica, quando cioè la radiazione emergente dal cristallo nelle condizioni di figura 14.37 è prodotta da un fenomeno collettivo al quale partecipano gli atomi in piani reticolari successivi del cristallo si parla di riflessione alla Bragg e la (50) prende il nome di legge di Bragg.

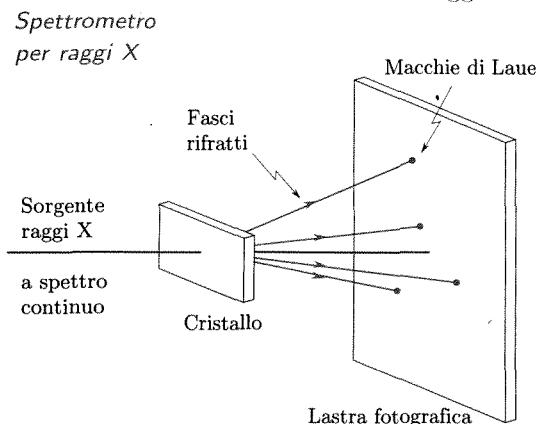


Fig. 14.38

Secondo lo schema dell'esperienza di figura 14.37a si può realizzare uno spettrometro per raggi X, il quale consente di determinare la λ della radiazione usando un cristallo per il quale d è noto⁽²²⁾. Essa può essere usata analogamente per studiare la struttura cristallina (determinando d) se λ è noto.

Vogliamo ora accennare a due diversi tipi di esperienze che sono comunemente fatte per lo studio dei cristalli mediante l'uso di raggi X.

1. Lo schema della prima è indicato in figura 14.38: un fascio parallelo di raggi X provenienti da una sorgente *a spettro continuo* viene inviato su un campione cristallino; la radiazione che attraversa il cristallo è raccolta su una lastra fotografica. Si osserva

in questa maniera una figura di diffrazione (diagramma di Laue o lauegramma) formata da un certo numero di macchie luminose disposte regolarmente intorno alla macchia centrale che corrisponde al fascio di raggi non deviati dal cristallo.

La figura 14.39 dà i risultati per un cristallo di NaCl; il fascio centrale non deflesso è stato fermato prima della lastra. La struttura di questa figura di diffrazione può essere qualitativamente compresa con facilità nella seguente maniera. Nell'interno di un cristallo si hanno famiglie di piani cristallografici paralleli; nella figura 14.40, per esempio, si sono segnate per un cristallo a reticolo cubico le tracce dei piani appartenenti a tre (1, 2, 3) famiglie di questo genere. In ciascun piano gli atomi (o gruppi di atomi secondo il tipo di cristallo) sono disposti in maniera regolare. Se si invia nel cristallo un fascio di raggi X, per ciascuna famiglia di piani paralleli si possono ripetere le considerazioni avanti svolte per illustrare la riflessione alla Bragg. Ad ogni famiglia di piani cristallografici corrisponde un particolare valore della distanza d tra piani successivi; in corrispondenza esistono alcune λ per le quali la relazione (50) di Bragg è soddisfatta. Siccome la sorgente usata ha uno spettro continuo, accade che per ogni famiglia di piani cristallografici si ha energia diffratta solo in alcune ben determinate direzioni. Poiché i fasci dei piani paralleli cristallografici su cui si può avere riflessione alla Bragg sono in numero finito ed hanno giaciture relative ben precise dipendenti dalla struttura del cristallo, la figura di diffrazione è fatta da macchie disposte regolarmente ed in numero finito, una per ogni direzione di fascio di raggio diffratto alla Bragg. La distribuzione spaziale delle macchie nella figura di diffrazione consente di avere importanti indicazioni sulle strutture del cristallo, più precisamente sulle distanze d dei piani nelle varie famiglie di piani cristallografici paralleli⁽²³⁾. È possibile vedere come la distribuzione dell'intensità nelle macchie consenta di avere informazioni sulle caratteristiche strutturali

⁽²¹⁾ n ha una limitazione nel fatto che $\sin \theta$ deve essere minore di 1.

⁽²²⁾ Il valore di d può essere ottenuto per cristalli a struttura semplice dalla densità (ρ) e dal numero di Avogadro (N_0). Per cristalli con atomi di un solo elemento (peso atomico A) a cella cubica si trova

$$d = \sqrt[3]{A/\rho N_0}$$

⁽²³⁾ Ciò è analogo al fatto che in un reticolo unidimensionale le direzioni dei fasci diffratti dipendono dalle caratteristiche del reticolo (dalla distanza e) e non da quelle della singola fenditura.

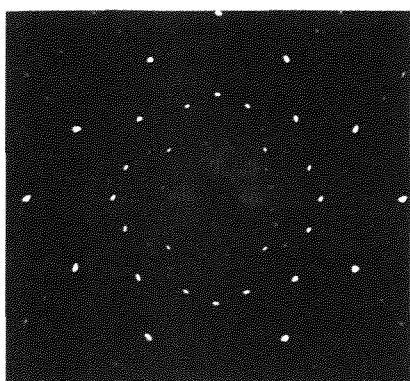


Fig. 14.39.

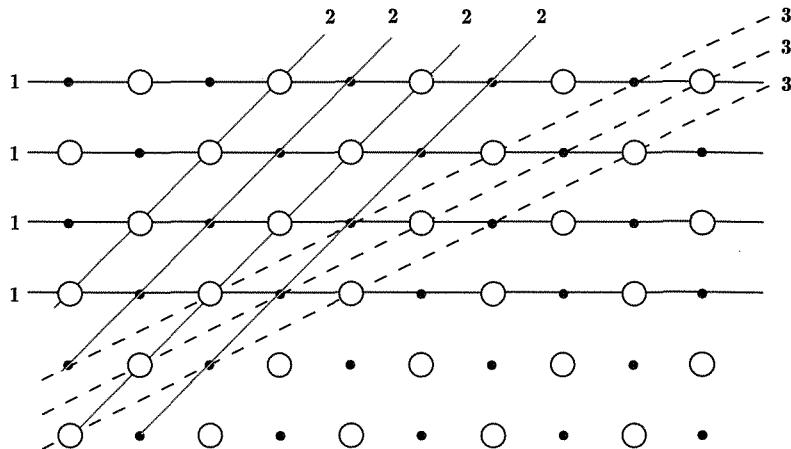


Fig. 14.40

delle celle cristalline che qui funzionano come unità diffrangenti⁽²⁴⁾. Si comprende il grande ausilio che l'impiego dei raggi X può dare per lo studio delle proprietà di simmetria dei cristalli e della struttura delle celle di cui essi sono formati.

2. La figura 14.41 dà invece lo schema della cosiddetta disposizione di Debye-Scherrer. In tal caso la sorgente è *monocromatica* ed il campione è formato da polvere compresa. La polvere consiste in cristalli disposti in tutte le possibili orientazioni. Essendo la radiazione di una sola λ , la condizione di Bragg è soddisfatta solo per certi angoli fra il fascio incidente e ciascuna famiglia di piani cristallografici paralleli: in altri termini la riflessione alla Bragg avviene per una famiglia di piani paralleli solo in quei cristalli che si trovano orientati in precise posizioni. Si osservi che lo stesso angolo θ fra fascio incidente e una famiglia di piani paralleli si ha per tutte le infinite posizioni del cristallo che si ottengono ruotandolo intorno alla direzione del fascio incidente. Ciò porta di conseguenza che la figura di diffrazione che si ottiene è fatta da cerchi concentrici, i cui diametri sono legati alla struttura cristallina.

La figura 14.42 si riferisce al caso di polvere di alluminio.

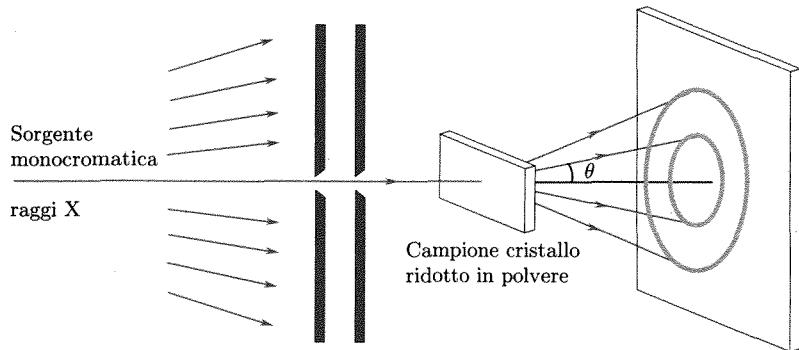


Fig. 14.41

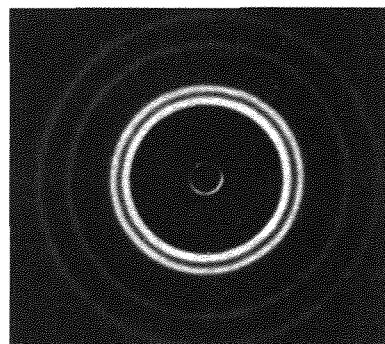


Fig. 14.42

⁽²⁴⁾ Ciò è analogo al fatto che in un reticolo unidimensionale le intensità delle linee di diffrazione dipendono dalle proprietà di diffrazione della singola fenditura (cioè da d , larghezza della fenditura).

LASER E OTTICA NONLINEARE

- ✓ Una sorgente di luce con proprietà completamente differenti da quelle di tutte le sorgenti ordinarie che conosciamo è il laser. La luce di un laser è **coerente** sia spazialmente che temporalmente (monocromatica).
- ✓ I campi elettrici che è possibile avere nell'onda elettromagnetica di un laser focheggiato sono così intensi che con essi si possono avere tutta una serie di fenomeni dovuti al fatto che la polarizzazione non è più una semplice funzione lineare del campo elettrico. Compare così una nuova branca dell'ottica che va sotto il nome di ottica non lineare. Nel presente capitolo si dà una semplice motivazione dell'esistenza della polarizzazione nonlineare utilizzando il modellino dell'elettrone nell'atomo come un oscillatore e si tratta la produzione di *seconda armonica* e la dipendenza dell'indice di rifrazione dall'intensità dell'onda.
- ✓ Infine viene mostrato come le nonlinearità ottiche possano dare, al pari di altri tipi di nonlinearità già viste nel primo volume, **bistabilità e caos**.

■ 15.1. INTRODUZIONE

Fino a ora abbiamo trattato molti fenomeni ottici considerando essenzialmente onde piane. Sorgenti di tali onde non esistono, e si può solo considerare che le onde piane siano una buona approssimazione nel caso di onde sferiche considerate in una regione di dimensioni molto piccole rispetto al raggio di curvatura dell'onda sicché la superficie d'onda, nel dominio d'interesse, possa essere approssimata dal piano tangente.

Le sorgenti ordinarie di luce, anche se puntiformi, non hanno quelle caratteristiche di coerenza che noi abbiamo definito a suo tempo e che sono indispensabili per avere fenomeni d'interferenza, per esempio. A questo abbiamo ovviato costruendo sorgenti secondarie coerenti mediante vari metodi.

Esiste, tuttavia, la possibilità di costruire sorgenti di luce coerenti con caratteristiche tutt'affatto diverse da quelle delle sorgenti ordinarie con cui usualmente abbiamo a che fare e che basano il loro funzionamento su fenomeni diversi da quelli all'origine delle sorgenti ordinarie. Tali sorgenti sono indicate col termine *laser*⁽¹⁾ ed è presentata una sommaria spiegazione del loro funzionamento nel prossimo paragrafo.

I laser hanno caratteristiche di monocromaticità e coerenza tali che la loro luce può essere concentrata su aree piccolissime, dell'ordine di poche centinaia di micron quadrati. Questo rende possibile ottenere campi elettrici associati all'onda enormemente più intensi di quelli che si possono ottenere con sorgenti ordinarie e prossimi in valore a quelli esistenti negli atomi. La risposta dei sistemi atomici a campi così intensi porta a una dipendenza della polarizzazione che non è più lineare nel campo elettrico (cap. 2, par. 2.13) e questo permette di aprire un nuovo campo nell'ottica, l'ottica nonlineare, oggetto del resto del capitolo.

■ 15.2. IL LASER

Nel considerare i processi d'interazione della radiazione con sistemi atomici utilizzando i concetti della meccanica quantistica, che possono benissimo per i nostri scopi essere riassunti dall'atomo di Bohr, si sono considerati finora solo due processi: l'assorbimento di radiazione e la sua spontanea emissione.

⁽¹⁾ Laser: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, cioè amplificazione di luce mediante emissione stimolata di radiazione.

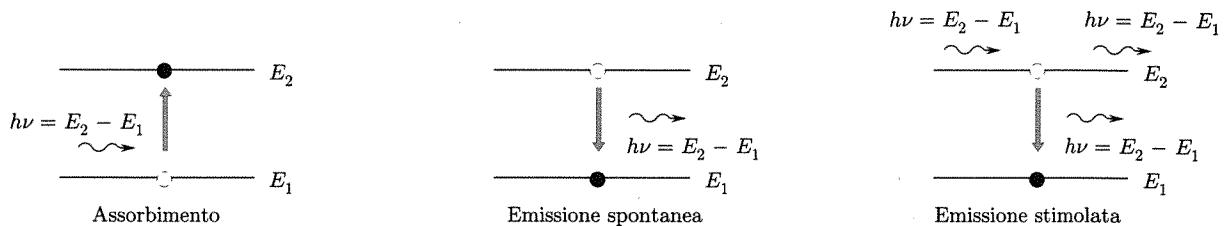


Fig. 15.1

Emissione stimolata

Si ha assorbimento (fig. 15.1) quando un fotone incide su un atomo e colpisce un elettrone avendo esattamente l'energia corrispondente alla differenza di energia fra quella che compete all'orbita su cui si trova l'elettrone e quella di un'orbita superiore che sia libera. Il fotone scompare e cede tutta la sua energia all'elettrone che salta sull'orbita a energia più alta: il processo si chiama assorbimento.

Il processo inverso, che è quello usuale di emissione delle radiazioni luminose, consiste nello spontaneo ritorno dell'elettrone nell'atomo da un livello più alto — nel quale esso sia venuto in qualche modo a trovarsi — al suo livello più basso. In tale transizione viene emesso un fotone la cui energia è pari alla differenza ΔE fra i livelli in questione e la cui frequenza è pari a $\Delta E/h$, essendo h la costante di Planck. I fotoni emessi in questi atti spontanei d'irraggiamento non sono correlati fra loro, né temporalmente, né spazialmente: la radiazione così emessa è intrinsecamente incoerente, come abbiamo più volte evidenziato.

La transizione dal livello più alto al livello fondamentale può però avvenire oltreché spontaneamente, anche attraverso un diverso processo che prende il nome di emissione stimolata. Ciò accade se l'elettrone, che si trova al livello superiore, interagisce con un fotone avente la frequenza ν prima detta. In questo caso l'elettrone, in conseguenza dell'interazione, si diseggita ed emette un fotone (pure di frequenza ν) coerente con quello che ha stimolato l'emissione, vale a dire avente una fase iniziale correlata con quella del fotone stimolante e la sua stessa direzione di propagazione. Il fotone stimolante prosegue il suo cammino insieme a quello stimolato.

Si consideri ora un sistema atomico e si fissi l'attenzione su due livelli energetici elettronici: un livello fondamentale, di energia E_1 (livello o stato 1), e un livello eccitato, di energia E_2 (livello o stato 2), fra i quali sia possibile una transizione con emissione di radiazione (radiativa). Si immagini di inviare sul sistema una radiazione elettromagnetica la cui frequenza corrisponda al salto energetico fra i due livelli, cioè di frequenza

$$(1) \quad \nu_{21} = (E_2 - E_1)/h.$$

Per ogni fotone di frequenza ν_{21} vi sono due possibilità di interazione con gli elettroni dei livelli 1 e 2; precisamente, se il fotone interagisce con un elettrone che si trova nello stato 1 vi è una certa probabilità p_{12} che esso venga assorbito, avendosi corrispondentemente il salto dell'elettrone da 1 a 2. Se invece il fotone interagisce con un elettrone nello stato 2 v'è una probabilità p_{21} che esso provochi (per emissione stimolata) la diseggitazione dell'elettrone e l'emissione di un fotone coerente. Einstein ha dimostrato che le probabilità p_{12} e p_{21} sono uguali; è pertanto chiaro che globalmente la radiazione che colpisce il sistema subirà un'attenuazione o un'amplificazione a seconda che il numero N_1 di atomi il cui elettrone è nello stato 1 sia maggiore o minore del numero N_2 di atomi il cui elettrone è nello stato 2. In condizioni di equilibrio termodinamico N_1 è molto maggiore

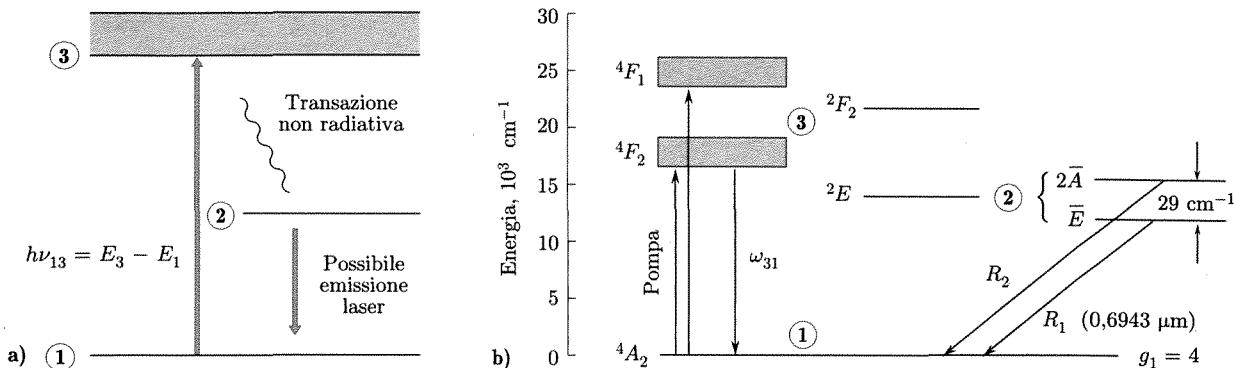


Fig. 15.2

di N_2 ; però è possibile, con metodi cui accenneremo tra poco, rendere N_2 maggiore di N_1 o, come suol dirsi, ottenere l'inversione di popolazione fra i livelli 1 e 2. In tali condizioni il sistema atomico si comporta come un amplificatore (accordato alla frequenza ν_{21}).

Si noti che, anche se il fotone incidente sul sistema atomico ha prodotto altri fotoni con esso coerenti, le caratteristiche di coerenza globali del campo emergente dal sistema sono le stesse di quelle del campo incidente. In altri termini, se i fotoni incidenti erano non correlati, nella radiazione uscente si avrà assenza di correlazione; ciò è quello che accade se si invia sul sistema la radiazione incoerente emessa da una sorgente ottica ordinaria. In questo modo il sistema funziona come un amplificatore della radiazione incoerente incidente. Siccome l'interesse principale è produrre un campo coerente, i laser vengono essenzialmente usati come oscillatori generando essi stessi la radiazione che poi amplificano in modo coerente.

Per capire come possano ottenersi l'inversione e l'oscillazione, si consideri lo schema dei livelli di figura 15.2a: il livello 1 è quello fondamentale, mentre il livello 2 e la banda di livelli 3 corrispondono a stati eccitati. Si immagini ora di illuminare il materiale con una radiazione (luce di pompa) la cui frequenza corrisponda al salto energetico tra i livelli 1 e 3:

$$(2) \quad \nu_{13} = \frac{E_3 - E_1}{h}.$$

All'assorbimento di fotoni di tale frequenza corrisponde l'eccitazione di elettroni dal livello 1 a uno dei livelli della stretta banda 3. Si supponga ora che gli elettroni da questa banda possano passare sul livello inferiore 2 senza irraggiare fotoni (transizione non radiativa), cedendo cioè l'eccesso di energia al reticolo. Se l'elettrone resta abbastanza a lungo sul livello 2 prima di tornare sul livello 1, emettendo un fotone, e l'intensità della luce di pompa è abbastanza grande, si arriva così a ottenere un'inversione di popolazione fra i livelli 2 e 1.

Il primo laser realizzato (Maiman, 1960) utilizzava degli ioni di cromo in una matrice cristallina di sesquiossido di alluminio (rubino). Gli ioni di cromo hanno proprio una disposizione dei livelli come quella discussa più sopra (fig. 15.2b)⁽²⁾. Lo schema generale di montaggio del laser è

⁽²⁾ La notazione usata per indicare i vari livelli è quella propria degli spettroscopisti e deriva dalla loro rappresentazione nella teoria dei gruppi. L'energia è misurata come l'inverso di una lunghezza (cm^{-1}). La (1) infatti può scriversi $1/\lambda = (E_2 - E_1)/hc$ e l'energia può ottenersi moltiplicando $1/\lambda$ per $hc = 1,986 \cdot 10^{-23} \text{ joule}/\text{cm}$; 1 cm^{-1} è uguale a $1,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$.

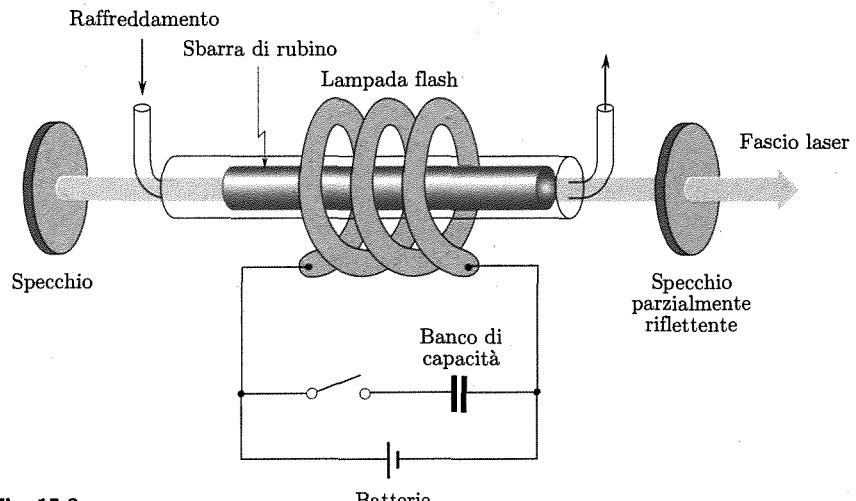


Fig. 15.3

Laser a rubino

mostrato nella figura 15.3. Una sbarra di rubino a forma cilindrica con le estremità lavorate piane e parallele fra loro è contenuta all'interno di una lampada flash, che nella figura ha forma a serpentina. Il tutto viene poi messo in un cilindro a pareti riflettenti (non mostrato nella figura). La lampada flash eccitata per la scarica di un sistema di capacità emette la luce di pompa che è centrata su 5.600 \AA (luce verde) e provoca l'eccitazione dal livello 1 ai livelli della banda 3. I livelli si diseggiano sul livello 2 (che in realtà è formato da due livelli molto vicini, ma che per i nostri scopi possiamo considerare come un livello unico) senza emettere radiazione, cedendo l'energia in eccedenza al reticolo sotto forma di vibrazioni. Se la luce di pompa è abbastanza intensa si può ottenere così inversione di popolazione tra il livello 2 e il livello fondamentale 1 con emissione di radiazione a 6.943 \AA .

Appena un fotone viene emesso spontaneamente, si innesca una valanga di fotoni emessi per emissione stimolata che viaggiano avanti e indietro lungo l'asse della sbarra riflessi dagli specchi. Uno di essi è parzialmente trasparente e lascia sfuggire parte del fascio verso l'esterno. Fotoni emessi secondo direzioni inclinate rispetto all'asse del cristallo compiono un percorso relativamente piccolo nel cristallo medesimo e subiscono quindi un'amplificazione relativamente piccola; i fotoni che sono invece emessi parallelamente all'asse della bacchetta subiscono una serie di riflessioni sulle estremità, percorrendo cammini relativamente lunghi e subendo un'amplificazione relativamente grande. Se il guadagno lungo l'asse del cilindro è superiore alle perdite che si hanno agli specchi (il coefficiente di riflessione è sempre minore di uno), il sistema entra in oscillazione. In tali condizioni, se R è il coefficiente di riflessione complessivo degli specchi alle estremità del cristallo, la frazione $1 - R$ dei fotoni generati nel cristallo parallelamente all'asse viene, in piccola parte, assorbita agli specchi e, nella maggior parte, attraversa l'estremità semitransparente, dando lungo al fascio laser emergente, formato dunque da raggi sensibilmente paralleli di luce costituita da onde elementari coerenti fra loro. Tale luce è inoltre monocromatica.

L'emissione di un laser a rubino pompato con una lampada flash, come descritto, è impulsata. In condizioni normali l'impulso dura circa

1 millisecondo ed è formato da un gran numero di impulsi più brevi (spikes), come mostrato nella figura 15.4. La potenza di picco emessa è dell'ordine dei KW. Con tecniche di controllo speciali (*Q-switching*) è possibile ottenere impulsi molto più brevi, nanosecondi o picosecondi, con potenze più elevate, dell'ordine anche delle centinaia di MW e oltre.

Un tipo di laser differente che usa un gas come mezzo attivo e che è molto diffuso è il laser a elio-neon. In questo laser il meccanismo che viene impiegato per creare l'inversione di popolazione è costituito dagli urti fra atomi.

Si consideri un tubo in cui viene creata una scarica elettrica, riempito con una miscela di elio e neon. I livelli elettronici di questi due gas sono mostrati nella figura 15.5. Si trova che gli atomi di elio sono eccitati più facilmente di quelli di neon dagli urti con gli elettroni della scarica. I primi

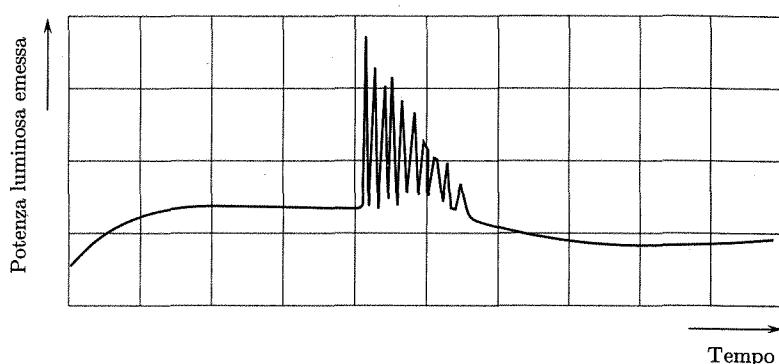


Fig. 15.4

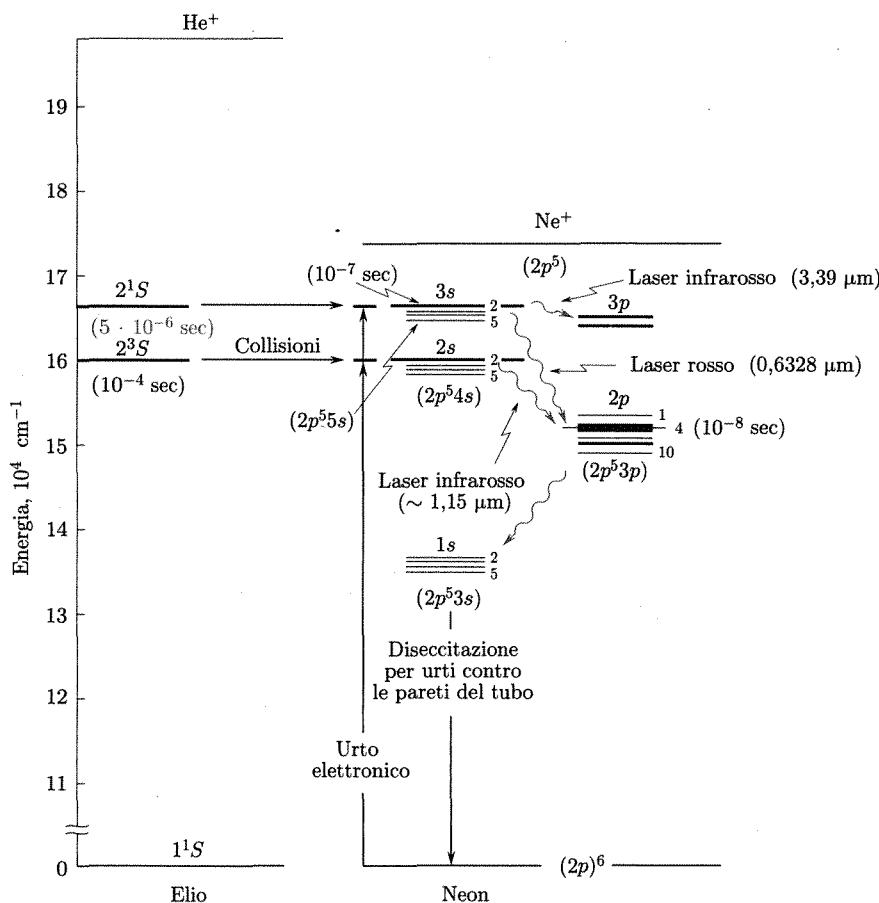
Laser elio-neon

Fig. 15.5

livelli eccitati dell'elio, indicati nella figura con la loro notazione spettroscopica 2^1S e 2^3S , hanno vita relativamente lunga prima di decadere sul livello fondamentale 1^1S . Questi due livelli eccitati hanno circa la stessa energia di una serie di livellini $2s$ e $3s$ del neon⁽³⁾.

Se un atomo di elio urta un atomo di neon che si trova nello stato fondamentale, avviene uno scambio d'energia e l'atomo di neon è eccitato al livello $2s$ o $3s$, mentre l'atomo di elio si diseca e torna sullo stato fondamentale. In questo modo si ha un meccanismo di popolamento selettivo che aumenta il numero di atomi di neon eccitati sui livelli $2s$ e $3s$, mentre lascia poco popolati i livelli $3p$, $2p$ e $1s$.

Attraverso un complesso gioco in cui hanno ruolo fondamentale i tempi di vita dei vari livelli è ora possibile avere emissione laser nelle transizioni

$$3s \rightarrow 3p \quad a \quad \lambda = 3,39 \text{ } \mu\text{m} \quad \text{infrarosso ,}$$

$$3s \rightarrow 2p \quad a \quad \lambda = 0,633 \text{ } \mu\text{m} \quad \text{rosso ,}$$

$$2s \rightarrow 2p \quad a \quad \lambda = 1,15 \text{ } \mu\text{m} \quad \text{infrarosso .}$$

È questo il primo laser a gas costruito (Javan, Bennet e Herriott). Lo schema sperimentale è mostrato nella figura 15.6. Una mistura di neon a pressione di circa 0,1 torr ed elio a pressione di circa 1 torr è contenuta in un tubo in cui viene prodotta la scarica elettrica in c.c. o in c.a., e che termina con due specchi riflettenti. Scegliendo opportunamente gli specchi, viene selezionata la lunghezza d'onda di operazione. L'emissione avviene in modo continuo a bassa potenza (tipicamente pochi mW).

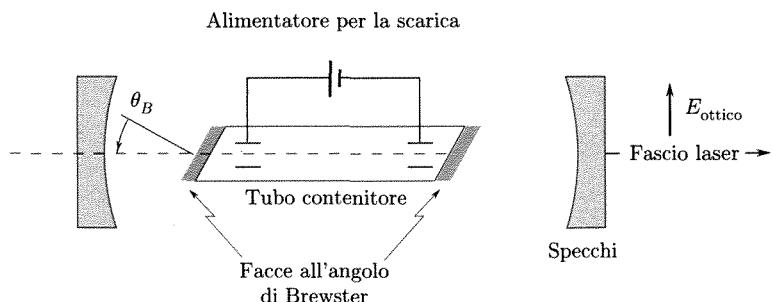


Fig. 15.6

Oggi esistono centinaia di laser diversi con caratteristiche molto varie da emissione continua a emissione impulsata anche con impulsi cortissimi dell'ordine di femtosecondi, utilizzando i materiali più diversi in una miriade di configurazioni dei livelli, lunghezze d'onda e dimensioni. Alcuni di questi sono anche accordabili su un certo intervallo di lunghezze d'onda.

⁽³⁾ Le notazioni con cui vengono indicati i livelli dell'elio e del neon sono diverse e traggono origine dal diverso modo in cui in questi due atomi gli spin degli elettroni si accoppiano con i momenti orbitali.

■ 15.3. OTTICA NONLINEARE

Le proprietà di coerenza del fascio laser fanno sì che sia possibile focheggiarlo su regioni molto piccole, di dimensioni trasversali dell'ordine di alcune lunghezze d'onda. È così possibile avere campi elettrici dell'onda che hanno valori elevatissimi, sufficienti a produrre una serie di effetti nonlineari.

Fino a ora si è considerata la propagazione di radiazione elettromagnetica nel caso lineare in cui la polarizzazione è proporzionale al campo elettrico che la induce. Si considereranno ora alcune delle conseguenze delle proprietà dielettriche nonlineari presentate da alcuni materiali in cui la polarizzazione P è una funzione più complessa del campo che — come già accennato nel cap. 2, par. 2.13 — può essere espressa come una somma di termini di cui il primo è lineare nel campo e i successivi sono prodotti da potenze via via crescenti del campo elettrico:

$$(3) \quad P = \epsilon_0 \chi E + \chi^{(2)} E E + \chi^{(3)} E E E .$$

La risposta nonlineare può dar luogo a uno scambio di energia fra campi elettromagnetici a frequenze diverse. Alcune delle applicazioni più importanti di questo, se si considera solamente il termine successivo a quello lineare, cioè il termine che contiene la seconda potenza del campo elettrico (quadratico), sono:

- a. la generazione di seconde armoniche in cui parte dell'energia di un'onda ottica a pulsazione $\omega = 2\pi\nu$ che si propaga in un cristallo è convertita in quella di un'onda a 2ω ;
- b. l'oscillazione parametrica in cui un'intensa onda a pulsazione ω_3 causa la simultanea generazione in un cristallo nonlineare di radiazioni a pulsazione ω_1 e ω_2 , con $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$;
- c. la conversione di frequenza in cui, per es., un segnale debole a bassa pulsazione ω_1 è convertito in un segnale a pulsazione ω_3 mescolandolo con un forte campo laser a pulsazione ω_2 con $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$.

Se si considerano invece termini dello sviluppo in cui compare il campo elettrico al cubo (termini del terz'ordine), è possibile avere generazione di terze armoniche (3ω), combinazioni di frequenze e vari altri effetti, fra cui uno dei più interessanti consiste nel produrre un cambiamento nell'indice di rifrazione del mezzo, proporzionale all'intensità dell'onda stessa.

Noi qui considereremo a titolo di esempio la produzione di seconda armonica, nei materiali nonlineari quadratici, e la variazione dell'indice di rifrazione con l'intensità dell'onda, nei materiali cubici. Prima però vogliamo dare una giustificazione della presenza delle nonlinearità nei materiali sottoposti a forti campi elettrici.

■ 15.4. GIUSTIFICAZIONE DELLA PRESENZA DI UNA RISPOSTA NONLINEARE DELLA MATERIA

L'interazione tra un campo elettromagnetico e un mezzo, a livello microscopico, può essere descritta dal modello dell'oscillatore armonico, come si è visto nel cap. 8, par. 8.14.

Se la forza esercitata dal campo elettrico dell'onda diventa confrontabile con la forza di Coulomb fra elettrone e nucleo, l'oscillatore viene

perturbato (oscillatore anarmonico) e, al livello più basso della perturbazione, si può scrivere:

$$(4) \quad \ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + Dx^2(t) = -(e/m)E(t)$$

che differisce dalla (188) del cap. 8 solo per la presenza del termine $Dx^2(t)$ che descrive l'anarmonicità del sistema e che può essere considerato assai piccolo.

La soluzione della (4) può esprimersi come somma di due termini

$$(5) \quad x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$$

in cui $x^{(1)}(t)$ si ottiene risolvendo la (4) senza il termine anarmonico, mentre $x^{(2)}(t)$ è considerata una piccola correzione della soluzione al prim'ordine $x^{(1)}(t)$ ed è ricavata utilizzando $x^{(1)}(t)$ nel termine anarmonico

$$(6) \quad \ddot{x}^{(2)}(t) + \sigma \dot{x}^{(2)}(t) + \omega_0^2 x^{(2)}(t) = -\frac{eE(t)}{m} - D[x^{(1)}(t)]^2.$$

In questo modo considerando il caso che il campo elettrico forzante sia costituito dalla somma di due campi a pulsazioni diverse

$$(7) \quad E(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t = \frac{1}{2}[E_1 e^{-j\omega_1 t} + E_2 e^{-j\omega_2 t} + c.c.]$$

si ha la soluzione al prim'ordine

$$(8) \quad x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(\omega_1)e^{-j\omega_1 t} + x^{(1)}(\omega_2)e^{-j\omega_2 t} + c.c.]$$

e successivamente quella al second'ordine, risolvendo la (6) con l'uso della (8)

$$(9) \quad x^{(2)}(t) = \frac{1}{2}[x^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)e^{-j(\omega_1 + \omega_2)t} + x^{(2)}(\omega_1 - \omega_2)e^{-j(\omega_1 - \omega_2)t} + x^{(2)}(2\omega_1)e^{-j2\omega_1 t} + x^{(2)}(2\omega_2)e^{-j2\omega_2 t} + c.c.]$$

in cui

$$(10) \quad x^{(2)}(\omega_1 \pm \omega_2) = -\frac{1}{2} \frac{\frac{D(e/m)^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2 + j\sigma\omega_1)(\omega_0^2 - \omega_2^2 + j\sigma\omega_2)}}{\frac{E_1 E_2}{[\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2 + j\sigma(\omega_1 \pm \omega_2)]}}.$$

$$x^{(2)}(2\omega_k) = -\frac{1}{2} \frac{D(e/m)^2 \cdot E_k^2}{(\omega_0^2 - \omega_k^2 + j\sigma\omega_k)^2 (\omega_0^2 - 4\omega_k^2 + j\sigma\omega_k)}; \quad k = 1, 2.$$

Si vede quindi che la soluzione del second'ordine porta alla generazione di oscillazioni a una frequenza differente da quelle del campo forzante. In particolare è possibile avere pulsazioni pari alla somma o alla differenza delle pulsazioni del campo o al doppio (seconda armonica). È utile inoltre sottolineare che le formule precedenti restano valide anche se è presente un solo campo forzante a pulsazione ω . In tal caso $x^{(2)}(t)$ sarà la somma di un termine a seconda armonica (2ω) e di uno a pulsazione nulla (termine di rettificazione ottica).

Ricordando ora l'espressione per la polarizzazione del mezzo, si vede che si può scrivere

$$(11) \quad P(t) = -Ne[x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)]$$

dove N è il numero di dipoli per unità di volume; cioè

$$(12) \quad P(t) = P_L(t) + P_{NL}(t)$$

che confrontata con la (3) consente di scrivere

$$(13) \quad \begin{aligned} P_L &= \varepsilon_0 \chi^{(1)} E \\ P_{NL} &= \chi^{(2)} E \cdot E. \end{aligned}$$

■ 15.5. PRODUZIONE DI SECONDA ARMONICA

Le proprietà nonlineari nella regione ottica furono dimostrate per la prima volta nel 1961 da Franken e collaboratori in una esperienza di generazione di seconda armonica. Facendo attraversare un cristallo di quarzo dalla luce rossa di un laser a rubino ($\lambda = 6.943 \text{ \AA}$) essi osservarono luce ultravioletta. Lo schema dell'esperimento, molto semplice in verità, è mostrato nella figura 15.7. Un fascio di un laser a rubino era focheggiato sulla superficie del cristallo di quarzo. La radiazione emergente era esaminata con uno spettrometro e si trovò che essa conteneva radiazione a frequenza doppia di quella incidente (cioè a $\lambda = 3.471,5 \text{ \AA}$).

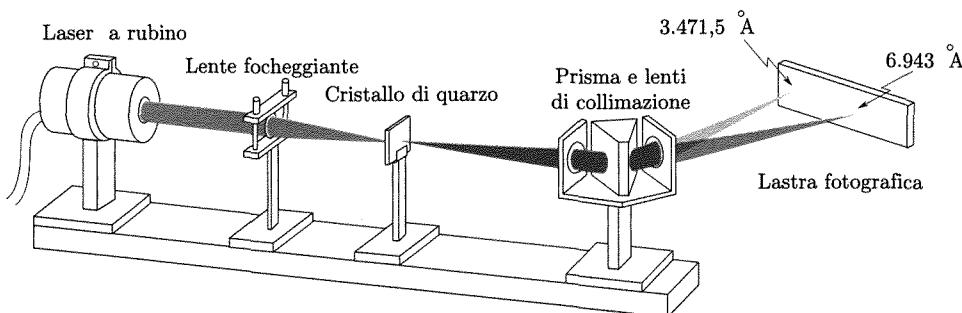


Fig. 15.7

Per descrivere il fenomeno è necessario osservare che in molti materiali cristallini la polarizzazione nonlineare dipende dalla direzione di propagazione, dalla polarizzazione del campo elettrico e dall'orientazione dell'asse ottico del cristallo. Poiché in tali materiali i vettori \mathbf{P} e \mathbf{E} non sono necessariamente paralleli, il coefficiente χ deve essere trattato come un tensore. La polarizzazione del second'ordine può essere rappresentata da una relazione del tipo

$$(14) \quad P_i^{(2)} = \sum_{j,k} d_{ijk} E_j E_k$$

dove i, j, k rappresentano le coordinate x, y, z . La maggior parte dei coefficienti d_{ijk} , tuttavia, sono di solito zero e solo pochi di essi, quindi, devono essere considerati.

Solo i cristalli non-centrosimmetrici possono possedere un tensore d_{ijk} non nullo. Si consideri infatti un cristallo isotropo. In questo caso d_{ijk} è indipendente dalla direzione e quindi è costante. Se ora si inverte la

direzione del campo elettrico, deve cambiare segno anche la polarizzazione, cioè

$$-P_i^{(2)} = \sum d_{ijk}(-E_j)(-E_k) = \sum d_{ijk}E_j E_k = +P_i^{(2)}.$$

Si vede quindi che non potendo essere $-P_i^{(2)} = +P_i^{(2)}$ deve essere nullo d_{ijk} . Inoltre, poiché non può essere attribuito nessun significato fisico a uno scambio di E_j con E_k , ne segue che deve essere $d_{ijk} = d_{ikj}$.

Se si considerano ora le equazioni di Maxwell scrivendo esplicitamente

$$(15) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

si ha

$$(16) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \mu \mathbf{j} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

La polarizzazione può essere scritta come somma di un termine lineare più uno nonlineare

$$(17) \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_L \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL}$$

dove nel caso di materiali con non linearità del second'ordine, per es., è

$$(18) \quad (P_{NL})_i = \sum d_{ijk} E_j E_k.$$

La (16) può quindi essere scritta, supponendo $\mathbf{j} = 0$

$$(19) \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mathbf{P}_{NL}}{\partial t}$$

da cui

$$(20) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}.$$

Se si considera il caso unidimensionale di propagazione lungo una direzione z , si ha

$$(21) \quad \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 (P_{NL})_i}{\partial t^2}.$$

Consideriamo ora tre campi monocromatici a pulsazioni $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ usando la notazione complessa

$$(22) \quad \begin{aligned} E_i^{(\omega_1)}(z, t) &= \frac{1}{2} [E_{1i}(z) e^{j(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.] \\ E_k^{(\omega_2)}(z, t) &= \frac{1}{2} [E_{2k}(z) e^{j(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c.] \\ E_j^{(\omega_3)}(z, t) &= \frac{1}{2} [E_{3j}(z) e^{j(\omega_3 t - k_3 z)} + c.c.] \end{aligned}$$

dove gli indici i, j, k possono rappresentare le componenti x o y .

La polarizzazione a pulsazione $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$, per es., dalla (18) e dalle (22) risulta

$$(23) \quad P_i^{(\omega_1)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} d_{ijk} E_{3j}(z) E_{2k}^*(z) e^{j[(\omega_3 - \omega_2)t - (k_3 - k_2)z]} + c.c.$$

Sostituendo le (22) nella (21) per la componente E_{1i} è necessario calcolare

$$(24) \quad \frac{\partial^2 E_i^{(\omega_1)}}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_{1i}(z) e^{j(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.] .$$

Se si suppone

$$(25) \quad \frac{dE_{1i}}{dz} k_1 \gg \frac{d^2 E_{1i}}{dz^2}$$

si ha

$$(26) \quad \frac{\partial^2 E_i^{(\omega_1)}}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \left[k_1^2 E_{1i}(z) + 2jk_1 \frac{dE_{1i}(z)}{dz} \right] e^{j(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c.$$

con espressioni simili per

$$\frac{\partial^2 E_j^{(\omega_2)}}{\partial z^2} \text{ e } \frac{\partial^2 E_k^{(\omega_3)}}{\partial z^2} .$$

Sostituendo infine le (26) e (23) nella (21) si ha

$$(27) \quad \frac{dE_{1i}(z)}{dz} = -j \frac{\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \sum d_{ijk} E_{3j} E_{2k}^* e^{-j(k_3 - k_2 - k_1)z} + c.c.$$

e in modo analogo

$$\frac{dE_{2k}^*}{dz} = \frac{j\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \sum d_{kij} E_{1i} E_{3j}^* e^{-j(k_1 - k_3 + k_2)z} + c.c.$$

(28)

$$\frac{dE_{3j}}{dz} = -\frac{j\omega_3}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_3}} \sum d_{jik} E_{1i} E_{2k} e^{-j(k_1 + k_2 - k_3)z} + c.c..$$

La generazione di seconda armonica è ottenuta immediatamente dalle (27) e (28) per il caso che $\omega_1 = \omega_2$ e $\omega_3 = 2\omega_1$. Basta quindi considerare solo, per es., la (27) e l'ultima delle (28). Per semplificare ulteriormente l'analisi possiamo assumere che la potenza persa dalla radiazione a pulsazione ω_1 (fondamentale) sia trascurabile, per cui

$$(29) \quad \frac{dE_{1i}}{dz} \simeq 0.$$

È allora sufficiente considerare solo l'ultima delle (28)

$$(30) \quad \frac{dE_{3j}}{dz} = -j\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \sum d_{jik} E_{1i} E_{1k} e^{j\Delta k \cdot z}$$

dove

$$\omega = \omega_1 = \frac{\omega_3}{2}$$

e

$$(31) \quad \Delta k = k_3^{(j)} - k_1^{(i)} - k_1^{(k)}.$$

Nella (31) $k_1^{(i)}$ è la costante di propagazione del fascio a ω_1 polarizzato nella direzione i . La soluzione della (30) per $E_{3j}(0) = 0$ per un cristallo di lunghezza L è

$$E_{3j}(L) = -j\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \sum d_{jik} E_{1i} E_{1k} \frac{e^{j\Delta k \cdot L} - 1}{j\Delta k}$$

o

$$(32) \quad I(L) = |E_{3j}(L)|^2 = \frac{\mu_0}{\epsilon} \omega^2 \left| \sum d_{jik} E_{1i} E_{1k} \right|^2 L^2 \frac{\sin^2(\Delta k \cdot L/2)}{(\Delta k \cdot L/2)^2}.$$

Secondo la (32) un requisito per una generazione efficiente di seconda armonica è che $\Delta k = 0$, ovverosia dalla (31) con $\omega_3 = 2\omega$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$(33) \quad k^{(2\omega)} = 2k^{(\omega)}.$$

Se $\Delta k \neq 0$ l'onda di seconda armonica generata a un generico piano z_1 che si propaga fino a un altro piano z_2 non è in fase con quella generata in z_2 . Questo dà luogo a una interferenza descritta dal fattore

$$\frac{\sin^2(\Delta k \cdot L/2)}{(\Delta k \cdot L/2)^2}$$

nella (32).

La condizione (33) non è mai in pratica soddisfatta perché, per il fenomeno della dispersione, l'indice di rifrazione dipende da ω . Si ha quindi

$$(34) \quad \Delta k = k^{(2\omega)} - 2k^{(\omega)} = \frac{2\omega}{c} (n^{(2\omega)} - n^{(\omega)})$$

essendo

$$(35) \quad k^{(\omega)} = \frac{\omega n^{(\omega)}}{c}$$

e quindi

$$\Delta k \neq 0.$$

È tuttavia possibile riportarsi a una condizione di $\Delta k = 0$ (condizione di phase-matching o accordo di fase) usando vari artifici di cui il più usato sfrutta la birifrangenza naturale dei cristalli anisotropi. Dalla (34) si vede che $\Delta k = 0$ implica

$$(36) \quad n^{(2\omega)} \simeq n^{(\omega)}$$

cosicché gli indici di rifrazione della seconda armonica e dell'onda a frequenza fondamentale devono essere uguali. Nei materiali a dispersione normale, l'indice dell'onda ordinaria e di quella straordinaria lungo una data direzione aumentano con ω , come può essere visto dalla tabella 15.1. Questo rende possibile soddisfare la (36) quando entrambi i fasci sono dello stesso tipo (cioè entrambi straordinari o ordinari). Oppure, si può soddisfare la (36), in certi casi, usando un'onda ordinaria e una straordinaria.

Per illustrare questo punto si consideri la dipendenza dell'indice di rifrazione dell'onda straordinaria in un cristallo uniasiso, dall'angolo ϑ fra la direzione di pro-

Tabella 15.1

$\lambda, \mu\text{m}$	Indice	
	n_o (raggio ordinario)	n_s (raggio straordinario)
0,2000	1,622630	1,563913
0,3000	1,545570	1,498153
0,4000	1,524481	1,480244
0,5000	1,514928	1,472486
0,6000	1,509274	1,468267
0,7000	1,505235	1,465601
0,8000	1,501924	1,463708
0,9000	1,498930	1,462234
1,0000	1,496044	1,460993
1,1000	1,493147	1,459884
1,2000	1,490169	1,458845
1,3000	1,487064	1,457838
1,4000	1,483803	1,456838
1,5000	1,480363	1,455829
1,6000	1,476729	1,454797
1,7000	1,472890	1,453735
1,8000	1,468834	1,452636
1,9000	1,464555	1,451495
2,0000	1,460044	1,450308

pagazione e l'asse ottico (z) del cristallo. Essa è data da

$$(37) \quad \frac{1}{n_s^{2(\omega)}} = \frac{\cos^2 \vartheta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{n_s^2}.$$

Se $n_s^{(2\omega)} < n_o^{(\omega)}$ esiste un angolo ϑ_n a cui $n_s^{(2\omega)}(\vartheta_n) = n_o^{(\omega)}$. In questo caso se il fascio fondamentale (a pulsazione ω) è fatto propagare lungo ϑ_n come un raggio ordinario, il fascio di seconda armonica sarà generato lungo la stessa direzione di un fascio straordinario. La situazione è illustrata nella figura 15.8. L'angolo ϑ_n è determinato dall'intersezione fra la sfera (mostrata come un cerchio nella figura) che corrisponde alla superficie d'indice del fascio ordinario a ω con l'ellisse dell'indice del raggio straordinario. L'angolo ϑ_n , per cristalli uniaxiali negativi (cioè per cristalli per cui $n_s^{(2\omega)} < n_o^{(\omega)}$) è dato da

$$(38) \quad \frac{\cos^2 \vartheta_n}{[n_o^{(2\omega)}]^2} + \frac{\sin^2 \vartheta_n}{[n_s^{(2\omega)}]^2} = \frac{1}{[n_o^{(\omega)}]^2}$$

cioè

$$(39) \quad \sin^2 \vartheta = \frac{[n_o^{(\omega)}]^{-2} - [n_o^{(2\omega)}]^{-2}}{[n_s^{(2\omega)}]^{-2} - [n_o^{(2\omega)}]^{-2}}.$$

Secondo la (32), se si devia dalla condizione di accordo in fase, per una fissata lunghezza L del cristallo nonlineare, si ha una riduzione nella potenza di seconda armonica generata per il fattore

$$(40) \quad \frac{P^{(2\omega)}}{P_{\max}^{(2\omega)}} = \frac{\sin^2 (\Delta k \cdot L/2)}{(\Delta k \cdot L/2)^2}.$$

Questa relazione può essere verificata molto facilmente variando l'angolo $\sigma = \vartheta - \vartheta_n$ fra la direzione di index matching e la direzione di propagazione. Un grafico della potenza di seconda armonica in funzione di σ è mostrato nella figura 15.9 (dove è anche mostrata la curva teorica $\sin^2 x/x^2$).

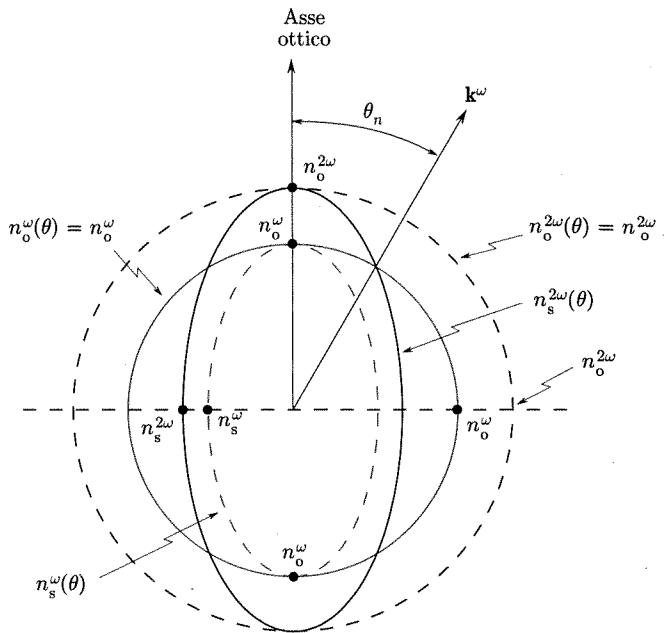


Fig. 15.8

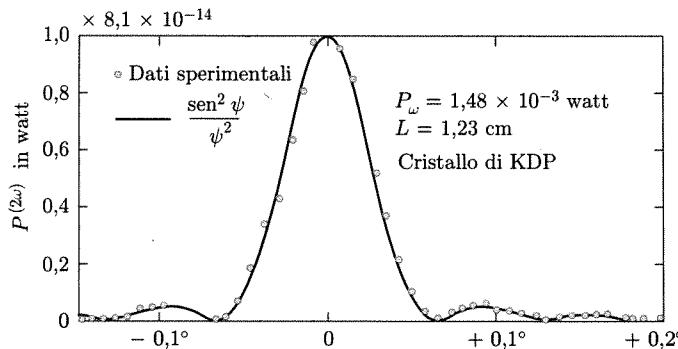


Fig. 15.9

■ 15.6. EFFETTI DEL TERZ'ORDINE. AUTOFOCHEGGIAMENTO E AUTOSFOCHEGGIAMENTO

Consideriamo ora una polarizzazione del terz'ordine della forma

$$(41) \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} + \chi^{(3)}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \mathbf{E}.$$

Ricordando che nel caso lineare $\chi = \varepsilon_r - 1$ e $n = \sqrt{\varepsilon_r}$, si può scrivere

$$(42) \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \left\{ \chi + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \right\} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi' \mathbf{E}$$

$$(43) \quad \chi' = \chi + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E|^2 = \varepsilon_r - 1 + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E|^2 = \varepsilon'_r - 1$$

essendo

$$(44) \quad \varepsilon'_r = \varepsilon_r + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E|^2.$$

Poiché ora nel caso lineare è

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_r}$$

nel caso nonlineare si avrà

$$(45) \quad n = \sqrt{\varepsilon'_r} = \sqrt{\varepsilon_r} \left\{ 1 + \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E|^2 \right\}^{1/2} \simeq \sqrt{\varepsilon_r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E|^2 \right\}$$

ossia

$$(46) \quad n = n_0 + n_2 I$$

essendo

$$(47) \quad I = |E|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0}} \quad , \quad n_2 = \frac{\chi^{(3)}}{2c\varepsilon_0^2 n_0}.$$

Un comportamento di questo genere dell'indice di rifrazione viene chiamato effetto Kerr ottico.

La soluzione delle equazioni di Maxwell per un mezzo il cui indice di rifrazione abbia l'andamento dato dalla (46) è troppo complicata per poterla trattare qui. Possiamo tuttavia intuitivamente comprendere cosa succede a un fascio laser che attraversi un mezzo il cui indice segua la (46). Occorre osservare a questo punto che l'intensità di un fascio laser non è costante attraverso una sua sezione. Essa è massima sull'asse del fascio e decresce gradualmente verso i bordi.

Se un tale fascio attraversa un mezzo il cui indice di rifrazione è dato dalla (46) con $n_2 > 0$, essendo la velocità della luce $v = c/n$, ne segue che n aumenta sull'asse del fascio e diminuisce sui bordi e quindi la velocità di propagazione del fascio è minore al centro rispetto ai lati. Di conseguenza una superficie d'onda piana che incida sul cristallo diventa concava man mano che l'onda si propaga nel mezzo (fig. 15.10). L'onda si concentra quindi verso l'asse: cioè si autofoceggia. Per questo motivo al fenomeno viene dato il nome di

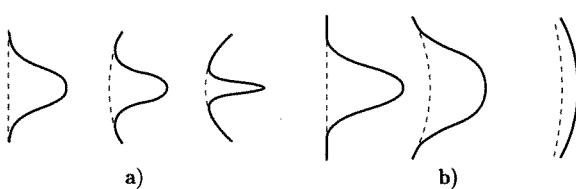


Fig. 15.10 a) Evoluzione di un campo d'onda piano in un fascio autofoceggiato in un mezzo autofoceggiante. b) Sfoceggiamento di un'onda piano in un mezzo autosfoceggiante.

autofocussaggio del fascio (*self-focusing*). Viceversa se $n_2 < 0$ si ha autosfocussaggio.

In fenomeno dell'autofocussaggio può produrre degli effetti assai interessanti. Si consideri infatti che un fascio di sezione finita che si propaga in un mezzo qualsiasi per il fenomeno della diffrazione tende ad allargarsi. Se però il mezzo è nonlineare del terz'ordine con $n_2 > 0$, la nonlinearità agisce al contrario e tende a focussarlo, cioè a restringerlo. Se si sceglie opportunamente il valore dell'intensità del fascio, i due effetti si possono compensare esattamente e il fascio si può propagare mantenendo la sua sezione invariata. Quando questo avviene si parla di solitone spaziale.

In generale è possibile sfruttare le nonlinearità del mezzo per compen-sare in vario modo l'effetto di diffrazione e avere tutta una classe di campi che sono in grado di propagarsi mantenendo la distribuzione d'intensità invariante sul piano ortogonale alla direzione di propagazione. Si parla di fasci che si propagano senza diffrazione.

15.7. EFFETTI ELETTROOTTICI

Nel cap. 12, par. 12.13 abbiamo considerato alcuni effetti elettroottici. Uno di essi, il cosiddetto effetto elettroottico lineare, consiste in una variazione dell'indice di rifrazione di un mezzo quando viene applicato un campo elettrico statico o variabile a bassa frequenza (effetto Pockels). La variazione dell'indice di rifrazione è lineare nel campo.

*L'effetto Pockels
è un effetto ottico
quadratico*

Questo effetto può essere considerato un effetto ottico quadratico in cui uno dei due campi che danno luogo al termine di polarizzazione nonlineare è un campo elettrico statico o a bassa frequenza invece che il campo rapidamente variabile dell'onda.

La polarizzazione in questo caso può essere scritta

$$(48) \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \chi^{(2)} E_0 \mathbf{E}$$

dove E_0 è il campo statico ed \mathbf{E} è il campo variabile dell'onda. Con gli stessi ragionamenti del par. 15.6 si può scrivere

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi + \chi^{(2)} E_0) \mathbf{E} \quad \chi^{\text{equiv}} = \chi + \chi^{(2)} E_0$$

$$(49) \quad \begin{aligned} \epsilon_r &= 1 + \chi^{\text{equiv}} = 1 + \chi + \chi^{(2)} E_0 \\ n &= \sqrt{\epsilon_r} = (1 + \chi)^{1/2} \left(1 + \frac{\chi^{(2)} E_0}{1 + \chi} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e quindi per la parte lineare dell'indice di rifrazione si ha

$$(50) \quad n_0 = (1 + \chi)^{1/2}$$

e l'indice in generale diventa

$$(51) \quad n \cong n_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi^{(2)} E_0}{n_0^2} \right) = n_0 + n_{NL} E_0$$

dove

$$(52) \quad n_{NL} = \frac{\chi^{(2)}}{2n_0}.$$

In modo analogo l'effetto elettroottico quadratico (effetto Kerr) in cui l'indice di rifrazione varia proporzionalmente al quadrato di un campo elettrico statico può essere visto come una manifestazione di un fenomeno del terz'ordine in cui si ha interazione fra due campi statici e uno variabile rapidamente nel tempo costituito dal campo dell'onda elettromagnetica.

■ 15.8. BISTABILITÀ OTTICA

La caratteristica di un fascio luminoso di poter variare l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga fa sì che la sua fase sia funzione della sua intensità. È possibile sfruttare questo effetto per creare dei dispositivi bistabili, in cui cioè a uno stesso valore dell'intensità ottica in entrata possano corrispondere due diversi valori dell'intensità in uscita.

Un modo per ottenere questo può farsi utilizzando un materiale con proprietà nonlineari del terz'ordine che riempia uniformemente un interferometro di tipo Fabry-Perot.

Un interferometro di Fabry-Perot consiste essenzialmente, come abbiamo già visto, in due specchi piani, paralleli, altamente riflettenti. La luce che entra nel sistema viene riflessa avanti e indietro dagli specchi e subisce fenomeni d'interferenza. Consideriamo un'onda piana che si propaghi perpendicolarmente agli specchi posti a una distanza L fra loro (fig. 15.11):

$$(53) \quad E_e = E_e(z, t) = E_0 \exp(ikz - i\omega t).$$

Chiamiamo E_r l'ampiezza dell'onda riflessa a uno degli specchi (che supponiamo abbiano la stessa riflettività), ed E_t l'ampiezza dell'onda trasmessa. Non consideriamo gli spostamenti di fase che si potrebbero avere alla riflessione e trasmissione (v. le formule di Fresnel del cap. 8, par. 8.8). I coefficienti di riflessione d'ampiezza e di trasmissione d'ampiezza sono definiti:

$$(54) \quad r = \frac{E_r}{E_e} \text{ e } t = \frac{E_t}{E_e}.$$

Se supponiamo che gli specchi non siano assorbenti, per la conservazione dell'energia

$$(55) \quad r^2 + t^2 = 1.$$

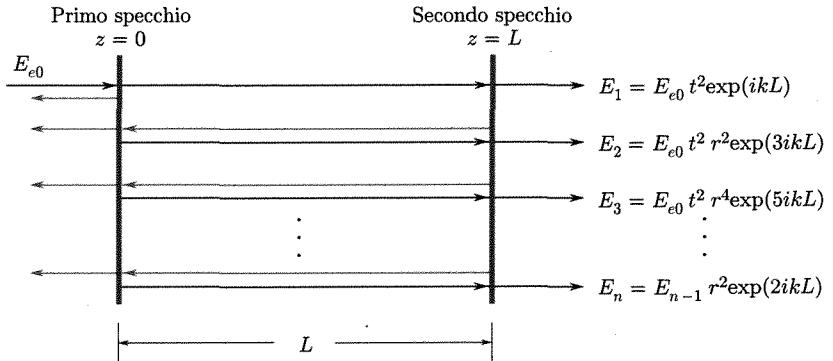


Fig. 15.11

Con queste ipotesi, l'ampiezza del campo elettrico immediatamente dietro lo specchio di sinistra (fig. 15.11) è

$$(56) \quad E_t = t E_e(0, t) = t E_{e0}.$$

Dopo il passaggio attraverso il secondo specchio si ha

$$(57) \quad E_1 = t E_t e^{ikL} = E_{e0} t^2 e^{ikL}.$$

Il termine $\exp(ikL)$ tiene conto del fattore di fase a causa della distanza L fra i due specchi. Parte dell'onda incidente sul secondo specchio è riflessa indietro

$$(58) \quad E_{1r} = trE_{e0}e^{ikL}$$

e viaggia indietro verso il primo specchio. Dopo un'ulteriore riflessione al primo specchio la luce che passa di nuovo il secondo specchio è

$$(59) \quad E_2 = E_{e0}t^2r^2e^{ik3L}.$$

Questa radiazione ha subito due trasmissioni (t^2) e due riflessioni (r^2) e ha subito uno spostamento di fase $k3L$. È facile vedere che dopo n passaggi completi attraverso gli specchi il campo è

$$(60) \quad E_n = E_{n-1}r^2e^{ik2L} = E_{e0}t^2e^{ikL}r^{2(n-1)}e^{ik2(n-1)L}; \quad n = 2, 3, \dots$$

Tutte le onde piane ottenute dopo uno, due, tre, ... passaggi si sovrappongono dietro il secondo specchio per dare il campo risultante E_a

$$(61) \quad \begin{aligned} E_a &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n = E_{e0}t^2e^{ikL} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2(n-1)}e^{ik2(n-1)L} = \\ &= E_{e0}t^2e^{ikL} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}e^{ik2nL} = \\ &= E_{e0}t^2e^{ikL} \sum_{n=0}^{\infty} (r^2e^{ik2L})^n. \end{aligned}$$

La somma è una serie geometrica che può scriversi come

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ per } |q| < 1$$

con $q = r^2 \exp(ik2L)$. L'ampiezza in uscita dallo strumento è quindi

$$(62) \quad E_a = E_{e0}t^2e^{ikL} \frac{1}{1 - r^2e^{ik2L}}.$$

Come sempre siamo in grado di misurare solo l'intensità. Introducendo lo spostamento di fase δ subito in un viaggio completo attraverso gli specchi

$$(63) \quad \delta = k2L$$

si può scrivere l'intensità in uscita come

$$(64) \quad \begin{aligned} I_t &= |E_a|^2 = |E_{e0}|^2 t^4 \frac{1}{(1 - r^2e^{i\delta})(1 - r^2e^{-i\delta})} = \\ &= I_e t^4 \frac{1}{1 + r^4 + 2r^2 \cos \delta} \end{aligned}$$

dove $I_e = E_e E_e^* = E_{e0} E_{e0}^*$ è l'intensità in entrata allo strumento. Considerando che

$$(65) \quad \cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$$

e

$$r^2 + t^2 = 1$$

si può anche scrivere

$$(66) \quad I_t = \frac{I_e}{1 + K \sin^2(\delta/2)}.$$

La grandezza

$$(67) \quad K = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$$

viene chiamata coefficiente di finezza.

La trasmissione d'intensità del Fabry-Perot è data da

$$(68) \quad T_I = \frac{I_t}{I_e} = \frac{1}{1 + K \sin^2(\delta/2)}.$$

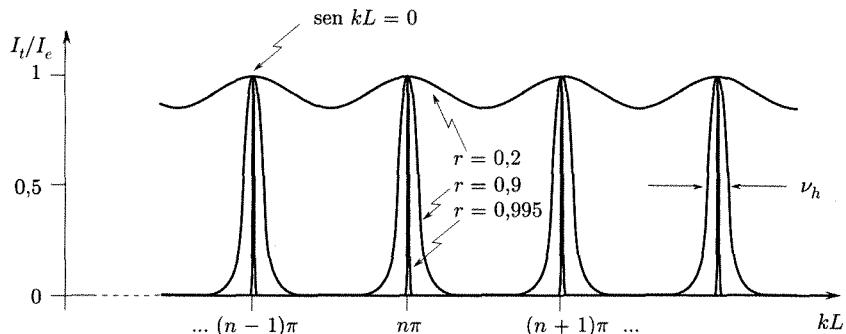


Fig. 15.12

Questa funzione è chiamata funzione di Airy ed è mostrata nella figura 15.12. La funzione è periodica in L e k . Per es., se si tiene fisso L e si varia k , cioè la lunghezza d'onda, si osserva che periodicamente si riottiene la stessa trasmittanza. In particolare si riottiene periodicamente trasmissione unitaria, cioè trasmissione completa, per le lunghezze d'onda per cui

$$kL = 2\pi n.$$

Noi non studieremo qui l'impiego del Fabry-Perot come strumento per analisi spettroscopiche, ma solo il suo impiego in un dispositivo che può mostrare bistabilità.

Se un Fabry-Perot è riempito con un mezzo nonlineare del terz'ordine, poiché l'indice di rifrazione varia con l'intensità, la trasmissione di un fascio monocromatico attraverso l'interferometro dipende dall'intensità del fascio. Per es., se la distanza fra gli specchi dell'interferometro è tale che la trasmissione in regime lineare (cioè per basse intensità) sia massima, aumentando l'intensità del fascio la fase δ cambia e l'interferometro non è più accordato per la massima trasmissione.

In generale la trasmissione dell'interferometro nonlineare di Fabry-Perot è una funzione altamente nonlineare dell'intensità del fascio e dipende dalla trasmissione iniziale dell'interferometro.

L'operazione bistabile è illustrata nella figura 15.13. La curva di trasmissione T in funzione della fase δ nella figura 15.13a è descritta dall'equazione (66). A causa del cambiamento dell'indice di rifrazione indotto dall'intensità del fascio dentro l'interferometro, il ritardo di fase per un passaggio completo dipende dall'intensità.

Ponendo

$$(69) \quad \Delta n = n_2 I$$

si può scrivere

$$(70) \quad \delta = \delta_0 + \gamma I_e T$$

dove δ_0 e γ sono delle costanti. La (70) descrive una linea retta nella figura 15.13a, la cui pendenza è inversamente proporzionale all'intensità incidente I_e . Per un dato valore di I_e , il punto d'operazione dell'interferometro è determinato dalla soluzione delle (68) e (70) corrispondente al punto d'intersezione della linea retta con la curva di trasmissione del Fabry-Perot. Si vede nella figura 15.13a che se I_e è sufficientemente grande, può

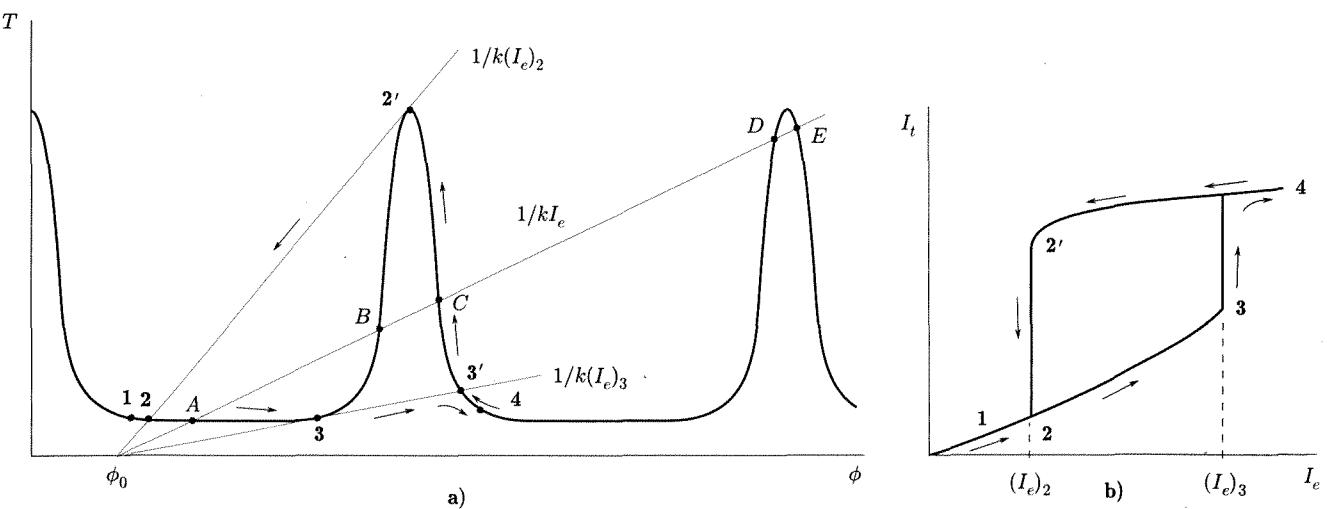


Fig. 15.13 a) Metodo grafico per trovare i punti d'operazione di un interferometro Fabry-Pérot nonlineare. Quando I_e cresce, il punto d'operazione si muove lungo il cammino 1-2-A-3-3'-4, quando I_e diminuisce, il punto d'operazione si muove lungo il cammino 4-3'-C-2'-2-1.

b) I_t in funzione di I_e ha la forma di un ciclo d'isteresi corrispondente al cammino d'operazione descritto dalla a).

esistere più di un punto d'intersezione. Alcuni di essi (come i punti B e C nella figura) sono instabili. Fra quelli stabili, il punto d'operazione reale è selezionato in base alla circostanza che se il punto d'operazione viene variato, l'interferometro sceglie il nuovo punto d'operazione muovendosi in modo continuo lungo la curva.

Così, come mostrato nella figura 15.13a, quando I_e aumenta, il punto d'operazione si dovrebbe muovere lungo 1-2-A-3-3'-4, ma quando I_e diminuisce, si dovrebbe muovere lungo 4-3'-C-2'-2-1. Come risultato, la corrispondente intensità in uscita dall'interferometro I_t in funzione di I_e , mostrata nella figura 15.13b, prende la forma di una curva d'isteresi. Per I_e fra $(I_e)_2$ e $(I_e)_3$, l'uscita può avere un valore alto o un valore basso a seconda del cammino d'operazione.

Questo comportamento bistabile è la base per elementi di commutazione ottica binaria.

15.9. CAOS OTTICO

Intensi fasci ottici interagenti in un mezzo nonlineare soffrono di instabilità quando le loro intensità eccedono certi valori critici. Allora può avvenire che un regime stazionario diventi instabile rispetto a piccole fluttuazioni e possa evolvere verso uno stato caotico.

Il verificarsi di tali effetti in ottica nonlineare fornisce una ulteriore e conclusiva dimostrazione dell'universalità di certe caratteristiche, già trovate e descritte nel vol. I, cap. 11, di altri sistemi dinamici nonlineari in meccanica e idrodinamica. Poiché la trattazione analitica di questi fenomeni è molto complessa, illustreremo qualitativamente solo due esempi.

a. Bistabilità

Lo studio dei dispositivi ottici bistabili dette l'impulso iniziale all'esame delle instabilità ottiche.

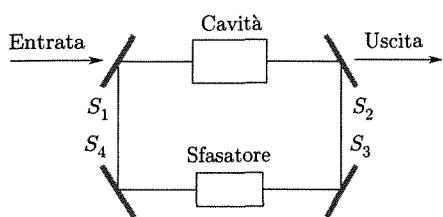


Fig. 15.14

Una possibile instabilità in questi sistemi si ha considerando il tempo impiegato a propagare il campo elettrico dallo specchio di uscita a quello di entrata in una disposizione del tipo di quella mostrata nella figura 15.14, in cui il Fabry-Perot nonlineare è contenuto in una cavità ad anello formato da quattro specchi S_i . Se il tempo di risposta del mezzo τ_M è molto più breve del tempo t_R per un percorso completo nella cavità, si vede che si possono avere oscillazioni periodiche, raddoppio del periodo e caos.

Il campo $E(t)$ dopo un percorso completo compiuto nel tempo t_R può scriversi come

$$E(t) = A + BE(t - t_R)e^{i[|E(t-t_R)|^2 - \beta_0]}$$

dove A e B sono dei parametri. Se si traccia la serie temporale $E_n \equiv E(nt_R)$ al crescere del parametro A , che è proporzionale al campo incidente, si trova che E_n subisce successive biforcati formando un insieme periodico di 2^1 punti, 2^2 punti, 2^3 punti, ... successivamente, che alla fine termina in un comportamento caotico.

Il raddoppio del periodo qui significa che al crescere di A la prima instabilità fa sì che E_n oscilli fra due valori tali che E_1, E_3, E_5, \dots sono tutti uguali fra loro ed E_2, E_4, E_6, \dots sono anche uguali fra loro ma $E_1 \neq E_2$.

Nel successivo raddoppio del periodo, quattro t_R sono necessari perché la forma d'onda completa un periodo e vi sono quattro differenti valori di E ecc.

La figura 15.15 mostra un diagramma di biforcazione. Il campo (E) è disegnato sull'asse verticale e il valore del parametro del sistema (A) è messo sull'asse orizzontale. Per ogni differente valore del parametro di controllo, la natura della soluzione è rivelata dal numero di punti sulla corrispondente linea verticale. Un numero finito di punti indica una soluzione periodica; una zona confusa indica una soluzione irregolare, caotica. La figura 15.16 mostra il comportamento temporale del campo e il suo spettro di potenza per alcuni valori del campo di entrata. L'ultimo diagramma si riferisce a una situazione di caos deterministico.

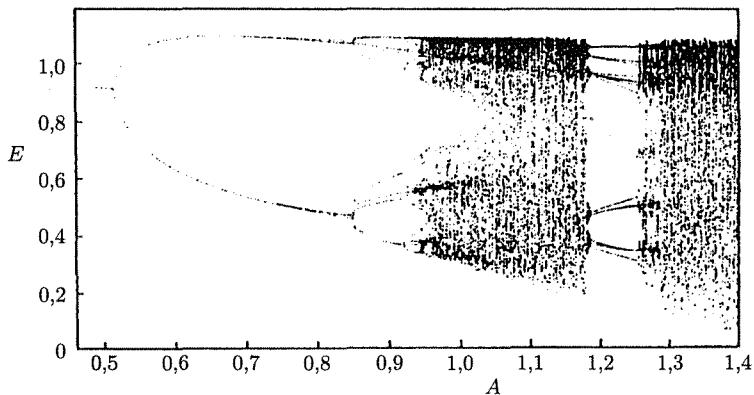


Fig. 15.15

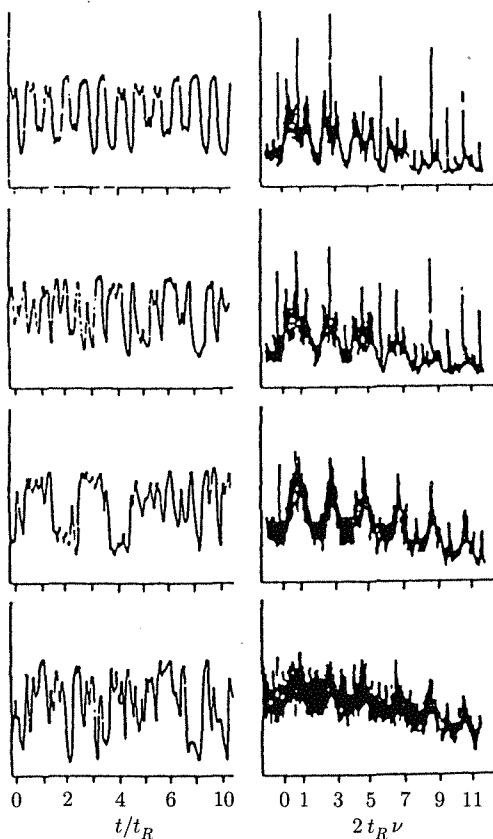


Fig. 15.16 La colonna di sinistra mostra le pulsazioni nel tempo dell'intensità. A destra il corrispondente spettro di potenza.

È anche possibile avere situazioni caotiche nella distribuzione dell'intensità in un piano ortogonale alla direzione di propagazione.

b. Laser

In un sistema laser il grado d'inversione di popolazione che dà luogo all'emissione laser dipende dalle caratteristiche del pompaggio e dal modo in cui l'emissione avviene. I complessi fenomeni sono descritti da equazioni differenziali che accoppiano il campo elettrico dell'onda emessa con la concentrazione degli atomi eccitati e con l'intensità della radiazione di pompa. Avviene che per opportuni valori dell'intensità di pompa o variando qualche altro parametro, come può essere la frequenza della radiazione che viene riflessa avanti e indietro nella cavità Fabry-Perot o altro, l'emissione risulti instabile.

Nel 1975 Haken ha mostrato che esiste un isomorfismo fra le equazioni di Lorenz introdotte per descrivere la dinamica di un fluido e le equazioni che descrivono un laser.

Nel caso di un laser a tre livelli si possono scrivere le equazioni per il laser nella forma

$$\dot{q} = -q + nq$$

$$\dot{n} = p - bn - 2nq$$

dove q è proporzionale al numero di fotoni presenti nella cavità laser, n è proporzionale alla differenza di popolazione fra il livello superiore e quello inferiore della emissione laser, p è proporzionale alla potenza di pompa e b è una costante di decadimento della differenza di popolazione n . Il sistema ha soluzioni stazionarie, cioè $\dot{q} = 0$ e $\dot{n} = 0$ quando

$$\begin{aligned} 0 &= (-1 + n)q \\ 0 &= p - bn - 2nq. \end{aligned}$$

La prima equazione è soddisfatta se $q = 0$ o $n = 1$. Per entrambe questi valori esiste una soluzione della seconda equazione, ma le soluzioni fisicamente accettabili sono quelle per le quali $q \geq 0$. Le due soluzioni stazionarie sono quindi

$$\begin{array}{lll} \text{prima soluzione} & q = q_1 = 0 & n = n_1 = p/b \\ \text{seconda soluzione} & q = q_2 = (p - b)/2 & n = n_2 = 1. \end{array}$$

La prima soluzione non è interessante. Essa descrive il sistema sotto la soglia laser. Poiché deve essere $q \geq 0$, la seconda soluzione è accettabile fisicamente solo se $p \geq b$. Essa descrive il laser in operazione. La soglia laser è $p = b$. La luce non è emessa finché p non è maggiore di b .

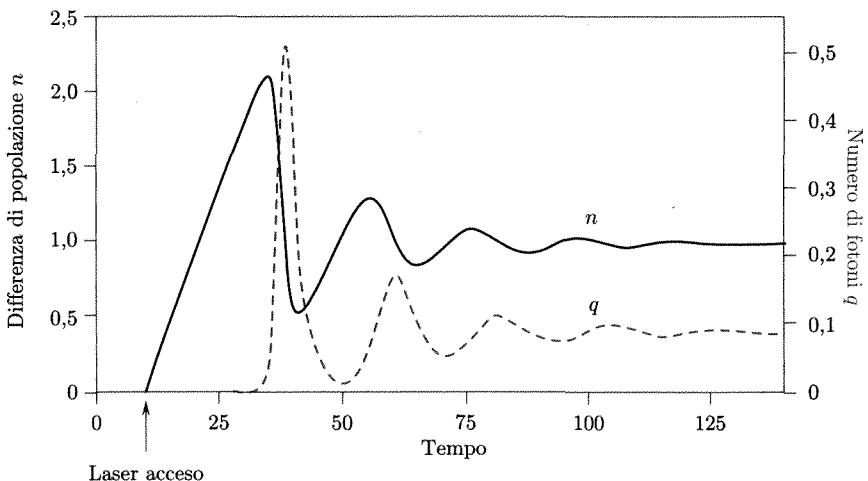


Fig. 15.17 Numero di fotoni q e differenza di popolazione n quando il laser viene acceso. Al tempo indicato dalla freccia il termine di pompa è variato da un valore $p = 0$ a un valore $p = p_0 = 0,1$ (costante di decadimento $b = 0,01$).

Quando il laser è acceso, l'intensità della luce, proporzionale a q , raggiunge lo stato stazionario attraverso una serie di oscillazioni (di rilassamento) mostrate nella figura 15.17. Accendendo il laser e facendo passare il termine di pompa p da 0 a un valore costante positivo, le soluzioni stazionarie stabili possono dar luogo a una dinamica più complessa, dipendente dal tempo. Per es. se la pompa è modulata $p = p(t)$, come avviene quando si usa il laser per comunicazioni, anche con una modulazione puramente sinusoidale

$$p(t) = p_0(1 + p_n \sin \omega t)$$

l'intensità della luce può non seguire la modulazione ma oscillare a una frazione della frequenza di modulazione o anche in modo completamente erratico senza mai ripetersi. Questo comportamento, osservato per una varietà di semplici equazioni deterministiche, corrisponde al caos deterministico.

Consideriamo un tale comportamento per un laser a quattro livelli con una modulazione di pompa periodica. Le equazioni si scrivono

$$\dot{q} = -q + nq + sn$$

$$\dot{n} = p_0(1 + p_n \sin \omega t) - bn - nq.$$

In esse p_n è il grado di modulazione ($0 \leq p_n \leq 1$), p_0 è il termine di pompa costante e s descrive il contributo dell'emissione spontanea. La figura 15.18 mostra alcune soluzioni che si ottengono alterando la pulsazione ω . Nella figura sono disegnate le traiettorie stabili (attrattori) nello spazio delle fasi (o dello stato), cioè nel piano delle variabili che definiscono lo stato del sistema, n e q .

Ogni traiettoria rappresenta il risultato dell'evoluzione temporale del sistema attraverso una rappresentazione del suo stato $n(t)$ e $q(t)$ a istanti consecutivi t . Per es. per $\omega = 0,0145$ si ottiene una oscillazione alla frequenza di modulazione (periodo 1). Diminuendo la pulsazione si osserva una oscillazione a pulsazione metà (periodo 2) e poi a pulsazione $\omega/4$ (periodo 4).

Questi raddoppi del periodo si ripetono spesso infinitamente al diminuire di ω . I valori della pulsazione a cui si ha raddoppio del periodo si accumulano a un valore limite finito di ω , dove la soluzione diventa di periodo infinito, cioè aperiodica. Oltre questo valore limite sono possibili varie soluzioni periodiche e aperiodiche. Un esempio di una soluzione aperiodica, erratica, è dato nella figura 15.18d. Si ha un gran numero di anelli ma, per quanto a lungo il sistema possa oscillare, non torna mai a costruire una soluzione periodica.

Si ha un attrattore caotico.

Un altro modo di descrivere il processo è quello di costruire un *diagramma di biforcazione* (nel nostro caso, per raddoppio di periodo). In tale rappresentazione bidimensionale una delle variabili è scelta (secondo l'aspetto di particolare interesse) fra i *parametri di controllo* che entrano a definire le equazioni del sistema, mentre l'altra è una delle variabili di stato del sistema stesso. Nel nostro caso si può scegliere come parametro la pulsazione di pompa ω , e come variabile di stato $n(t)$. Nel grafico vengono riportati per ogni ω i valori assunti da $n(t)$ ad una certa fase della pulsazione ω , cioè

$$n(t_0), n(t_0 + T), n(t_0 + 2T), n(t_0 + 3T), \dots$$

essendo t_0 un intervallo che serve ad eliminare il transitorio iniziale dopo la partenza dell'azione di pompa.

In figura 15.18a si è visto che esiste una soluzione periodica alla frequenza di modulazione: per essa tutti i valori di n ad intervalli T coincidono. Di conseguenza nel diagramma si avrà in corrispondenza ad ω un punto: ciò avviene ancora al variare di ω finché si resta nel *bacino di attrazione* del relativo attrattore. Si è peraltro visto che facendo crescere ω si presentano attrattori a periodi $2T, 4T \dots$

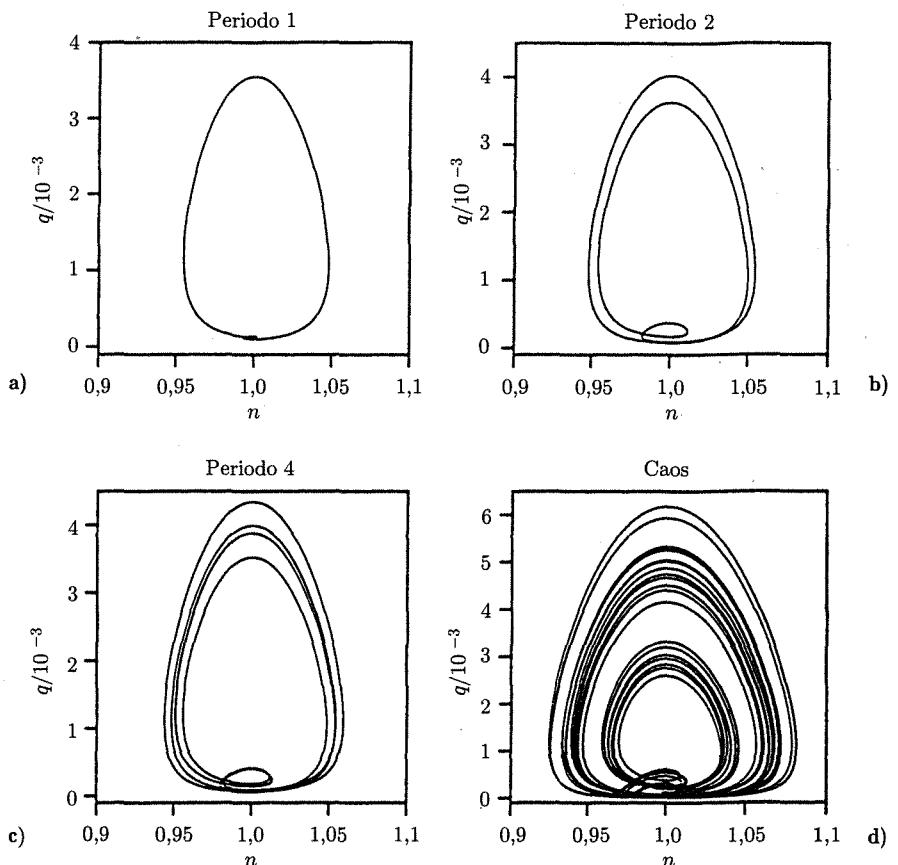


Fig. 15.18 Traiettorie degli attrattori (soluzioni stazionarie). I grafici sono ottenuti per a) $\omega = 0,0145$, b) $\omega = 0,01385$, c) $\omega = 0,01375$, d) $\omega = 0,0136$ (attrattore caotico). Gli altri parametri sono: $s = 10^{-7}$, $p_0 = 6 \cdot 10^{-4}$, $p_n = 1$ e $b = 0$.

Quando si presenta l'attrattore $2T$ nel diagramma si presenta una prima *biforcazione* e ad un valore di ω si hanno due valori di n sulle ordinate

$$n(t_0) = n(t_0 + 2T) = n(t_0 + 4T) = \dots$$

$$n(t_0 + T) = n(t_0 + 3T) = n(t_0 + 5T) = \dots$$

Si noti che necessariamente

$$n(t_0) \neq n(t_0 + T)$$

altrimenti l'oscillazione avrebbe periodo T .

In modo simile si presentano successive biforazioni fino a giungere al caos deterministico (attrattore caotico).

La figura 15.19 mostra un simile diagramma di biforcazione.

Vari diagrammi di biforcazione possono essere considerati variando il parametro di controllo scelto e la variabile di stato. Una descrizione completa del sistema è notevolmente complessa.

La teoria moderna ha mostrato che la dinamica caotica è ovunque in natura. Non dobbiamo stupirci di trovare caos anche nei laser che sono un tipico sistema nonlineare.

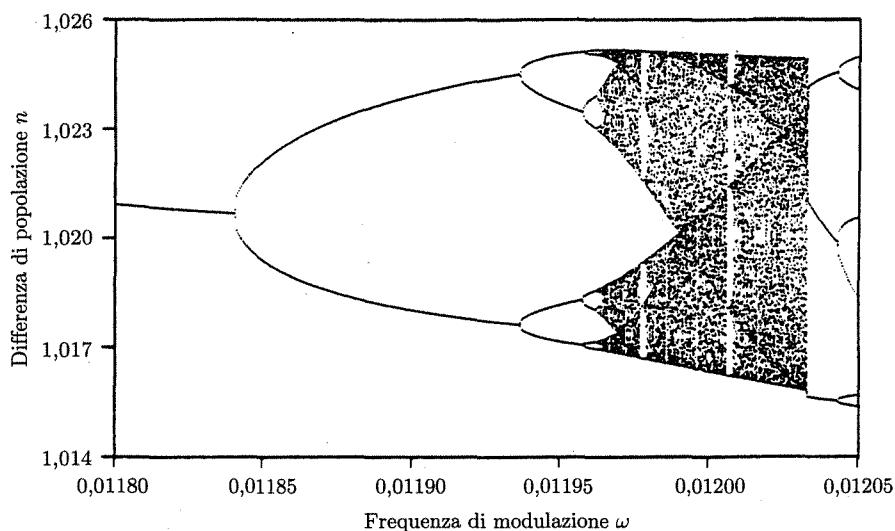


Fig. 15.19

Il laser è quindi divenuto, come lo è stata l'idrodinamica all'inizio, un oggetto di ricerca nel caos deterministico ed è anzi un sistema fisico in cui le equazioni di Lorenz hanno trovato un buon riscontro.

ELETTRONI NEI CRISTALLI E PROCESSI LEGATI ALLE LORO PROPRIETÀ NEI METALLI

- ✓ In questo capitolo vengono dati alcuni cenni di applicazione di concetti della meccanica quantistica a completamento della teoria della conduzione nei metalli e si discutono alcuni effetti (*effetto Volta, effetti termoelettrici, emissione termica di elettroni, effetto photoelettrico esterno ed interno*) di grande importanza nelle applicazioni che sulla base di tali concetti trovano una semplice spiegazione.

Elettroni nei cristalli e processi legati alle loro proprietà nei metalli

16.

16.1. INTRODUZIONE

Nel presente capitolo si vogliono esaminare brevemente alcuni effetti che sono legati alle proprietà degli elettroni nei metalli e che hanno una grande importanza sia per precisare il comportamento di tali sistemi sia per le loro applicazioni pratiche. Ci riferiamo in particolare agli effetti legati alle barriere di potenziale che trattengono gli elettroni nell'interno di campioni metallici e ai processi emissivi che si presentano quando alcuni elettroni del metallo riescono a superare la barriera superficiale.

Per poter fare una trattazione di tali argomenti, anche se non particolarmente approfondita, occorre premettere alcune considerazioni sullo stato degli elettroni in un solido.

Quando abbiamo accennato alla conduzione nei metalli e alla interpretazione di Drude degli elettroni liberi considerati come costituenti un gas di elettroni confinato nel campione che segue la statistica classica di Maxwell-Boltzmann (cap. 3, par. 3.17 e 3.18), abbiamo avvertito che si trattava di una teoria approssimata e che in realtà la trattazione va fatta con la teoria quantistica. Non desideriamo qui presentare una tale teoria ma ci limiteremo solo alla illustrazione di alcune idee fondamentali.

Si è già detto (vol. I, cap. 12, par. 12.5-12.6) che negli atomi isolati gli elettroni possono occupare solo un numero discreto di livelli energetici e che per essi vale il principio di esclusione di Pauli secondo il quale nello stesso sistema atomico due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantico, non possono cioè avere, per descriverli, la stessa serie dei quattro numeri quantici. Quest'ultima circostanza può essere espressa in altro modo usando il concetto approssimato delle orbite consentite per gli elettroni intorno al nucleo atomico (Bohr), essendo ciascuna orbita determinata da tre dei numeri quantici, con esclusione di quello che caratterizza il momento della quantità di moto nella rotazione dell'elettrone su se stesso (spin)⁽¹⁾. Il principio di Pauli si può esprimere dicendo che su ciascuna orbita consentita per gli elettroni in un atomo possono al massimo trovarsi due elettroni a spin opposti.

Principio di esclusione

⁽¹⁾ Tale momento può avere due sole orientazioni e dare contributo al momento totale della quantità di moto dell'elettrone $\pm \frac{1}{2}(h/(2\pi))$; in corrispondenza, il quarto numero quantico (di spin) può avere i due valori $\pm \frac{1}{2}$.

Vedremo fra breve come anche nei sistemi atomici formati da molti atomi il numero di stati quantici disponibili siano in numero discreto e gli elettroni si dispongano a occuparli seguendo non la statistica classica ma una delle due statistiche quantistiche, precisamente quella (Fermi-Dirac) per particelle che rispettano il principio di esclusione.

Prima di considerare come il modello degli elettroni liberi nei metalli vada trattato in teoria quantistica, vogliamo accennare brevemente alle caratteristiche principali delle statistiche quantistiche.

■ 16.2. STATISTICHE QUANTISTICHE

Considerazioni statistiche possono essere fatte per sistemi costituiti da un gran numero di componenti simili. Per semplicità ci riferiamo al caso in cui i gradi di libertà dei componenti siano tre: questo è il caso dei gas ideali. Non vi sono difficoltà a estendere le considerazioni al caso più generale.

La statistica cerca di determinare proprietà globali dell'insieme mediante lo studio della distribuzione dei componenti fra gli stati in cui ciascuno di essi può venirsi a trovare.

In problemi di statistica classica dei gas abbiamo già visto l'utilità di considerare uno spazio (molecolare) delle fasi aventi sei (in genere il doppio dei gradi di libertà) dimensioni: tre corrispondenti alle normali dimensioni spaziali (x, y, z) e tre corrispondenti alle componenti della velocità (v_x, v_y, v_z), oppure, come noi faremo, alle tre componenti della quantità di moto $p_x(mv_x)$, $p_y(mv_y)$, $p_z(mv_z)$.

Riportando i valori che le sei grandezze hanno a un certo istante per le N molecole che costituiscono il gas si ottiene una nuvola di n punti che rappresenta lo stato dinamico del sistema in un certo istante. Si divida ora lo spazio delle fasi in celle di ugual volume, essendo (*in statistica classica*) tale volume scelto in modo da essere sufficientemente piccolo sicché le caratteristiche dinamiche (posizione e quantità di moto) delle molecole i cui punti rappresentativi cadono in una singola cella siano praticamente le stesse, e sufficientemente grande in modo che in ciascuna cella vi siano parecchi punti rappresentativi. Ricordiamo (vol. I, cap. 15, par. 15.9) che in statistica classica le molecole vanno immaginate *distinguibili* come se ciascuna avesse un indice e che un microstato del sistema in un certo istante corrisponde a una certa distribuzione degli N punti rappresentativi delle molecole in un certo numero di celle. Una variazione dello stato di due o più molecole del gas tale che i corrispondenti punti rappresentativi si scambino fra loro rimanendo nella stessa cella, non produce una variazione del microstato giacché le proprietà dinamiche delle molecole i cui punti stanno nella stessa cella sono praticamente le stesse. Invece una variazione che faccia scambiare i punti rappresentativi di due molecole appartenenti a celle diverse conduce a un nuovo microstato poiché le molecole hanno mutato le loro proprietà dinamiche.

Lo stato del sistema quale si può rilevare con la misura di grandezze globali ($p, V, T,$) cioè il macrostato, a un certo istante, dipende esclusivamente dalla occupazione complessiva delle singole celle dello spazio delle fasi da parte dei punti rappresentativi e non dal fatto che il punto rappresentativo di ciascuna particolare molecola si trovi in una determinata cella.

Per giungere alla funzione di distribuzione che descrive lo stato di equilibrio fornendo il numero medio di particelle che posseggono le varie energie, si può (Gibbs) calcolare la probabilità termodinamica ⁽²⁾ W di un generico macrostato caratterizzato dall'avere N_1, N_2, \dots, N_r molecole nelle celle $1, 2, \dots, r$ e determinare quel macrostato (di equilibrio) caratterizzato dall'avere la probabilità W massima consentita nel rispetto delle condizioni che il numero dei componenti del sistema e la loro energia totale restino costanti.

La trattazione classica conduce per questa via alla funzione di distribuzione di Boltzmann.

Richiamiamo la attenzione sui seguenti punti fondamentali posti a base della trattazione classica

1. le molecole sono distinguibili;
2. il volume delle celle viene fissato con criteri di opportunità ma non deve necessariamente avere un valore preciso prefissato;
3. il numero di punti rappresentativi di molecole in una cella può essere qualsiasi.

La statistica classica dei gas (e degli altri sistemi) si applica con successo alla maggior parte dei gas; in alcuni casi, peraltro, essa cade in difetto e si rendono necessarie trattazioni quantistiche: ciò si verifica nel caso di sistemi in cui il numero di particelle è molto elevato come nei gas che possono essere portati a temperature molto basse (He). Tali statistiche quantistiche ammettono la statistica classica come caso limite.

Noi qui ci limiteremo a dare alcune brevi informazioni intese a chiarire alcuni fondamenti e le conclusioni delle statistiche quantistiche.

La prima caratteristica delle statistiche quantistiche è quella che il volume delle celle dello spazio delle fasi ha un preciso valore.

La teoria quantistica associa infatti ciascuna cella dello spazio delle fasi a uno stato quantico, e di conseguenza fissa il volume delle celle; nulla invece viene specificato nei riguardi della forma (la teoria cioè non fornisce un'una maniera di stabilire gli stati quantici). Nel caso che la forma delle celle sia parallelepipedo la regola che fissa il loro volume si esprime per un gas (3 gradi di libertà) nella maniera

$$(1) \quad \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &= h \\ \Delta y \Delta p_y &= h \\ \Delta z \Delta p_z &= h \end{aligned}$$

e il volume risulta h^3 (nel caso generale di sistemi a n gradi di libertà il volume della cella è h^n).

La circostanza che la forma delle celle non è specificata può essere sfruttata in modo da scegliere la forma delle celle nella maniera più conveniente; in particolare, in modo che tutti i sistemi in ciascuna cella, cioè in uno stato quantico, abbiano la stessa energia (livello di energia).

Statistiche quantistiche

⁽²⁾ Essa dipende dal numero di microstati che realizzano lo stesso macrostato e dalla probabilità a priori dei microstati. La meccanica statistica consente di stabilire che tutti i microstati hanno la stessa probabilità a priori, cioè che, avendo le celle ugual volume, il punto rappresentativo di una certa molecola può trovarsi con eguale probabilità in una qualsiasi cella.

Una interessante osservazione riguardante il principio di indeterminazione si può fare in termini delle celle ora introdotte. Il principio di indeterminazione afferma che non è possibile determinare posizione e quantità di moto di una particella meglio di

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &= h \\ \Delta y \Delta p_y &= h \\ \Delta z \Delta p_z &= h \end{aligned}$$

cioè più accuratamente di quanto è richiesto perché la particella stessa appartenga a una certa cella dello spazio molecolare delle fasi. Qualsiasi tentativo di determinare la posizione (o ciascuna delle componenti di p) con maggiore accuratezza perturberebbe il sistema in modo che il punto rappresentativo verrebbe a spostarsi in maniera non prevedibile nell'interno della cella. Ciò significa che non si può pensare di preparare un sistema con particelle che posseggano posizioni e quantità di moto determinate con precisione grande quanto si voglia, e che quindi si debba descrivere il sistema dicendo la frazione di particelle in ciascuna cella (o stato quantico).

Si noti infine che mentre in meccanica classica lo stato dinamico di una particella (a tre gradi di libertà) è specificato da 6 numeri, in meccanica quantistica, in accordo con l'esistenza delle relazioni (2), tale stato dinamico (se la particella è priva di spin) richiede solo tre numeri (quantici).

Particelle identiche nelle statistiche quantistiche sono indistinguibili

La seconda caratteristica fondamentale delle statistiche quantistiche ha a che fare con la distinguibilità delle particelle costituenti il sistema. Secondo le statistiche quantistiche, a differenza della statistica classica, particelle identiche non sono distinguibili e di conseguenza due distribuzioni di molecole fra gli stati possibili che differiscono perché due molecole identiche risultano scambiate fra due celle dello spazio molecolare delle fasi corrispondono allo stesso microstato (e non a due diversi microstati come nella statistica classica). Per chiarire questo punto facciamo un esempio semplice e naturalmente non reale: supponiamo di avere tre molecole identiche (a, b, c) e tre celle a disposizione; supponiamo ancora che una molecola si trovi nella prima cella e le altre due nella seconda. Esse possono disporsi secondo le permutazioni ($3! = 6$) indicate in tabella 16.1.

Tabella 16.1

Cella	1	2	3
N_i	1	2	0
	a a	b c c b	
	b b	a c c a	
	c c	a b b a	

Secondo la statistica classica le sei distribuzioni corrisponderebbero a tre microstati giacché la permutazione delle due molecole nella stessa (seconda) cella non produce variazione del microstato; secondo le statistiche quantistiche, invece, tutte e sei le distribuzioni delle tre identiche molecole corrispondono allo stesso stato: dal momento che non v'è alcun mezzo fisico per distinguere fra loro queste distribuzioni esse non possono essere portate in conto come stati diversi. Uno stato quindi è descritto semplicemente per mezzo dei numeri di particelle N_i che si trovano nelle singole celle i ; lo scambio di molecole identiche fra le celle non varia lo stato.

È possibile allora stabilire che vi sono due sole maniere in meccanica quantistica per soddisfare le condizioni che derivano da questa posizione (indistinguibilità delle particelle componenti il sistema) ed esse conducono alle due statistiche quantistiche, quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac: resta all'esperienza di vedere quali sistemi seguono ciascuna delle due statistiche.

Nella statistica di Bose-Einstein ciascuno stato del sistema di N particelle identiche è descritto da una serie di numeri N_i che danno il numero di particelle in ciascuna cella i , potendo N_i avere qualsiasi valore compatibile

Statistica di Bose-Einstein

con la condizione

$$(3) \quad \sum_i N_i = N$$

e tutti questi stati hanno la stessa probabilità a priori di essere realizzati.

Nella statistica di Fermi-Dirac accanto alla (3) v'è l'ulteriore condizione che i singoli N_i non possono avere che i valori 0 o 1: ciò equivale ad ammettere la validità del principio di esclusione di Pauli per cui non è possibile per due particelle identiche (molecole nel caso di gas) occupare contemporaneamente lo stesso stato quantico, cioè la stessa cella dello spazio molecolare delle fasi.

È bene osservare subito che, come meglio vedremo in seguito, la statistica classica di Boltzmann può essere ottenuta come limite di entrambe le statistiche nel caso di sistemi a densità molto bassa, quando cioè vi siano pochissime molecole da distribuire in un numero molto grande di celle. In tal caso la occupazione delle celle nella statistica classica sarà zero per la maggioranza delle celle, 1 per alcune di esse e maggiore di 1 solo eccezionalmente; queste distribuzioni di particelle fra gli stati possibili si avvicinano a quella della statistica di Fermi e tendono a essa al diminuire della densità del sistema. Analogamente le distribuzioni di molecole fra i vari stati consentiti nella statistica di Bose-Einstein, quando il numero di particelle diviene molto piccolo rispetto al numero di celle in cui le particelle possono con uguale probabilità disporsi, sono tali che gli N_i solo raramente differiscono da zero o 1, e la statistica di Bose-Einstein finisce per coincidere con quella di Fermi-Dirac.

*Statistica
di Fermi-Dirac*

■ 16.3. FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DELLE STATISTICHE FERMI-DIRAC E BOSE-EINSTEIN

Il calcolo della funzione di distribuzione che descrive lo stato di equilibrio nelle statistiche quantistiche si fa seguendo la stessa via (Gibbs) accennata per la statistica classica: si tratta di determinare quella distribuzione di particelle fra le celle cioè quella serie di N_i per cui la probabilità termodinamica diviene massima (entropia massima) soddisfacendo le condizioni di costanza tanto dell'energia totale quanto del numero di particelle. Nella statistica di Fermi-Dirac se si indica con $g(\varepsilon)d\varepsilon$ il numero di celle che hanno energia fra ε e $(\varepsilon + d\varepsilon)$ e con $dN(\varepsilon)$ il numero di particelle in tali celle, si ottiene la legge

$$(4) \quad dN(\varepsilon) = N(\varepsilon)d\varepsilon = g(\varepsilon) \frac{1}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1} d\varepsilon$$

essendo ε_F una costante, a una certa temperatura, avente le dimensioni di un'energia.

La (4) può anche scriversi facendo riferimento al numero di particelle per unità di volume

$$(5) \quad n(\varepsilon)d\varepsilon = g'(\varepsilon) \frac{1}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1} d\varepsilon$$

avendo g' l'opportuno valore.

*Statistica
di Fermi-Dirac*

La f è la probabilità che un dato stato di energia sia occupato

Si osservi che siccome ogni cella può essere occupata solo da una particella, la funzione (che ha sempre valore ≤ 1)

$$(6) \quad f_F(\varepsilon) = \frac{N(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{n(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1}$$

fornisce la probabilità che a un certo istante un dato stato di energia ε sia occupato. La funzione $f_F(\varepsilon)$ va comunemente sotto il nome di funzione di distribuzione di Fermi. Il numero di particelle aventi energia compresa fra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ risulta pari a

$$(7) \quad g(\varepsilon) \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1} d\varepsilon$$

e il numero totale di particelle è dato da

$$(8) \quad N = \int_0^\infty g(\varepsilon) \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1} d\varepsilon.$$

Energia di Fermi

La costante ε_F è la cosiddetta energia di Fermi⁽³⁾. Il suo valore va calcolato utilizzando la relazione (8). Alla fine del paragrafo considereremo il calcolo di ε_F per un gas perfetto.

Si osservi che in corrispondenza a $T = 0$, la $f_F(\varepsilon)$ ha il valore costante 1 per $\varepsilon < \varepsilon_F$ e ha il valore zero per $\varepsilon > \varepsilon_F$; ciò significa che tutti gli stati di energia inferiore a ε_F sono completamente occupati e quelli di energia superiore a ε_F sono completamente vuoti. In tal caso l'energia di Fermi appare come il limite in energia degli stati occupati e la funzione $f_F(\varepsilon)$ ha la forma della spezzata 1 nella figura 16.1.

Per temperature T diverse dallo zero, l'andamento della $f(\varepsilon)$ dipende da T e $(\varepsilon - \varepsilon_F)$. Va innanzitutto notato che per $\varepsilon = \varepsilon_F$ il valore della funzione è $\frac{1}{2}$: lo stato di energia pari alla energia di Fermi, ha cioè uguale probabilità di essere pieno o vuoto. Inoltre

$$(9) \quad \begin{aligned} 1 - f_F(\varepsilon) &= \frac{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1 - 1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1} = \\ &= \frac{1}{e^{(\varepsilon'-\varepsilon_F)/kT} + 1} = f(\varepsilon'). \end{aligned}$$

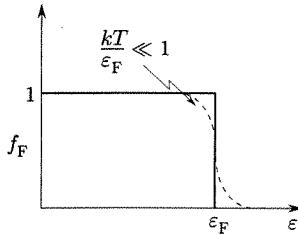


Fig. 16.1

In altri termini la somma dei valori che la funzione assume per due energie, ε ed ε' (una minore e una maggiore di ε_F) che differiscono ugualmente in valore assoluto da ε_F [$(\varepsilon' - \varepsilon_F) = -(\varepsilon - \varepsilon_F)$] è uguale a uno. Ciò significa che la curva è simmetrica con centro di simmetria nel punto $\frac{1}{2}\varepsilon_F$. La curva tratteggiata nella figura 16.1 mostra l'andamento della funzione per T non eccessivamente elevata. Le variazioni di interesse, rispetto alla distribuzione allo zero assoluto, si presentano nelle vicinanze dell'energia di Fermi: il passaggio dagli stati occupati a quelli vuoti non avviene più bruscamente e alcuni livelli al di sotto e al di sopra di ε_F , hanno una probabilità di essere occupati diversa da zero e uno. Va notato che le estensioni della banda d'energia $(\varepsilon - \varepsilon_F)$ al di sopra di ε_F , e di quella $(\varepsilon_F - \varepsilon)$ al di sotto di ε_F nelle quali si hanno i livelli parzialmente occupati, sono dell'ordine di grandezza di kT [per $(\varepsilon - \varepsilon_F) = 3kT$, $f_F \simeq \frac{1}{20}$].

⁽³⁾ A volte viene considerata una temperatura di Fermi, definendola come quella temperatura θ_F per cui

$$k\theta_F = \varepsilon_F$$

Ritorneremo fra breve sulla funzione di Fermi per esaminare la importanza del valore di ε_F rispetto a kT nel determinare il comportamento del sistema.

In maniera analoga a quella accennata per la derivazione della distribuzione di Fermi si procede nel caso della statistica di Bose-Einstein. Si ottiene come numero di particelle per unità di volume nei $g(\varepsilon)d\varepsilon$ stati di energia tra $\varepsilon(\varepsilon + d\varepsilon)$ la espressione

$$(10) \quad n(\varepsilon)d\varepsilon = g(\varepsilon) \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)/kT} - 1} d\varepsilon$$

e la funzione

$$(11) \quad f_B(\varepsilon) = \frac{n(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)/kT} - 1}$$

rappresenta la legge di distribuzione di Bose-Einstein. ε_0 è una energia costante da determinare con la considerazione che la somma dei numeri di particelle nei vari stati consentiti deve essere pari al numero totale di particelle del sistema. Come si vede la forma matematica di f_B è molto simile a quella di f_F . Si osservi però che f_B può avere valori maggiori di uno: più di una particella può trovarsi in uno stesso stato quantico: addirittura $f_B = \infty$ per $\varepsilon = \varepsilon_0$. Quest'ultima circostanza fa vedere che ε_0 rappresenta nella statistica di Bose-Einstein una energia inferiore alla energia di qualsiasi stato del sistema.

Nella figura 16.2 sono riportate in funzione di $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ le tre funzioni $1/(e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)/kT} + 1)$ (curva a), $1/(e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)/kT} - 1)$ (curva c), $1/(e^{(\varepsilon-\varepsilon_0)/kT})$ (curva b) che rappresentano le leggi di distribuzione di Fermi ($\varepsilon_0 = \varepsilon_F$), di Bose e di Boltzmann. Come si vede la distribuzione di Boltzmann è intermedia fra le due distribuzioni statistiche. Si osservi inoltre che nella statistica di Fermi v'è una limitazione al numero delle particelle negli stati di energia più bassa e quindi, per così dire, una tendenza a spingere le particelle sui livelli più alti. Nella statistica di Bose v'è una concentrazione di particelle negli stati di energia più bassa.

Vogliamo ora presentare il calcolo della energia di Fermi per un caso particolare di notevole interesse per le nostre considerazioni future: per il caso cioè di un gas perfetto (monoatomico). È facile calcolare la distribuzione degli stati consentiti in funzione dell'energia (di traslazione) in assenza di campi esterni. Supponiamo che le molecole del gas siano confinate in un parallelepipedo di volume V : di conseguenza si può scrivere per la dimensione delle celle nello spazio molecolare delle fasi

$$(12) \quad \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z (\Delta x \Delta y \Delta z) = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z V = h^3.$$

Pertanto se ora noi (fig. 16.3) consideriamo uno spazio $p_x p_y p_z$ vi è un punto rappresentativo di uno stato consentito per ogni volume h^3/V .

D'altra parte nello spazio ora considerato è facile individuare i punti di uguale energia traslazionale essendo questa ultima data da $p^2/2m = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$. A tutti i punti di una sfera con centro nell'origine e raggio p corrisponde la stessa energia.

Il numero pertanto di stati consentiti che hanno energia inferiore a ε è dato dal rapporto fra il volume della sfera di raggio $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ e il volume

*Statistica
di Bose-Einstein*

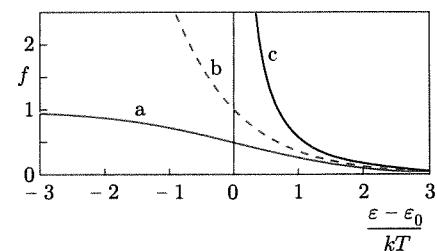


Fig. 16.2

*Calcolo di ε_F
per un gas perfetto*

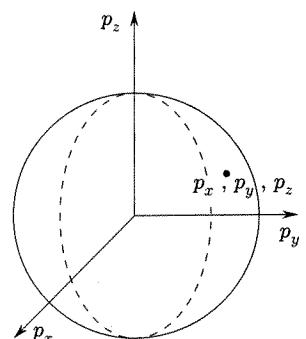


Fig. 16.3

h^3/V esso quindi vale

$$(13) \quad \frac{4}{3}\pi(2m\varepsilon)^{3/2} \frac{V}{h^3}.$$

Differenziando si ha il numero di stati dg con energia fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$

$$(14) \quad dg = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon.$$

Il valore dell'energia di Fermi per la distribuzione allo zero assoluto, quando cioè le molecole riempiono tutti gli stati consentiti fino a una certa energia ($\varepsilon_{F,0}$), si ottiene ponendo il numero degli stati consentiti (13) con energia inferiore a $\varepsilon_{F,0}$ pari al numero N di molecole presenti. Si ha

$$(15) \quad \varepsilon_{F,0} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{4\pi} \right)^{2/3}$$

essendo n il numero di particelle per unità di volume.

Per quanto riguarda il valore dell'energia di Fermi a temperature superiori allo zero assoluto, è possibile dare una espressione in serie di potenze della temperatura. Fermadosi ai due primi termini si ha

$$(16) \quad \varepsilon_F = \varepsilon_{F,0} - \frac{\left(\frac{d^2g}{d\varepsilon^2} \right)_o \pi^2}{\left(\frac{dg}{d\varepsilon} \right)_o} \frac{6}{6} (kT)^2.$$

L'indice o nelle derivate del numero di stati consentiti (g) rispetto alla energia, significa che esse sono calcolate per $\varepsilon_F = \varepsilon_{F,0}$.

L'espressione (16) mostra che la variazione di ε_F è dovuta alla variazione della densità $dg/d\varepsilon$ degli stati con l'energia; se infatti la distribuzione degli stati fosse uniforme $d^2g/d\varepsilon^2 = 0$ e ε_F risulterebbe indipendente da T nei limiti di approssimazione dei primi due termini della serie.

La relazione generale (16) diviene, per un gas perfetto, usando la (14) valida in questo caso,

$$(17) \quad \varepsilon_F = \varepsilon_{F,0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_{F,0}} \right)^2 \right].$$

Nel caso, che come vedremo è particolarmente importante, $\varepsilon_{F,0} \gg kT$ si vede dalla (17) che ε_F pur decrescendo leggermente con T è sempre molto prossima a $\varepsilon_{F,0}$, sicché non si commette grave errore nel ritenere ε_F pari a $\varepsilon_{F,0}$ a tutte le temperature di interesse.

Vogliamo infine osservare che le (13) e (14) possono essere trasformate per dare il numero di celle comprese in un determinato intervallo fra v_x e $(v_x + dv_x)$, v_y e $(v_y + dv_y)$, v_z e $(v_z + dv_z)$:

$$(18) \quad \frac{Vm^3}{h^3} dv_x dv_y dv_z$$

e di conseguenza il numero di molecole gassose in questo intervallo di velocità risulta per unità di volume

$$(19) \quad n(v)dv = \frac{m^3}{h^3} \frac{1}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1} dv_x dv_y dv_z.$$

16.4. APPLICABILITÀ DELLE VARIE STATISTICHE

Abbiamo già detto che la statistica classica è un'ottima approssimazione di entrambe le statistiche quantistiche nel caso che il numero di particelle sia molto piccolo rispetto al numero degli stati che possono essere occupati. Se, per esempio, si ha un sistema che dovrebbe seguire la statistica di Fermi, in questo caso limite tutti gli $n(\varepsilon)$ sono molto piccoli e quindi il denominatore nel secondo membro della (5), cioè $[e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT} + 1]$ deve essere molto grande rispetto al numeratore [1]; di conseguenza l'unità può trascurarsi rispetto a $e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT}$. Si ottiene allora

$$n(\varepsilon) = g(\varepsilon)e^{(\varepsilon_F-\varepsilon)/kT}$$

che con una opportuna scelta di ε_F coincide con la distribuzione di Boltzmann. Un ragionamento analogo mostra che anche la legge di distribuzione di Bose-Einstein ammette come limite quella di Boltzmann.

Le statistiche quantistiche assumono quindi importanza quando il numero di particelle è notevole rispetto al numero di stati disponibili. Nel caso dei gas reali questo si verifica a temperature molto basse e quindi per quelle sostanze (He) che permangono gassose a temperature vicine allo zero assoluto. Per l'elio (He, massa atomica 4) la statistica che vale è quella Bose-Einstein. Questa statistica si applica anche a un sistema (gas) di fotoni e consente di stabilire con tutto rigore la legge di Planck per la radiazione del corpo nero.

Data la grande importanza che, per i casi che a noi interessano, assume la statistica di Fermi-Dirac, vogliamo svolgere alcune ulteriori considerazioni sui sistemi che richiedono l'uso di questa statistica e per i quali l'approssimazione costituita dalla legge di Boltzmann non è soddisfacente.

Da quello che finora è stato detto risulta chiaro che la legge di distribuzione di Fermi si differenzia in maniera essenziale da quella di Boltzmann tutte le volte che $kT \ll \varepsilon_F$: abbiamo visto infatti che in tal caso tutti gli stati di energia inferiore a ε_F e che distino da ε_F per più di $2 \div 3kT$ sono completamente pieni come allo zero assoluto e che il campo in energia in corrispondenza al quale si ha occupazione parziale è 4-6 volte kT . In tal caso al crescere della temperatura solo un limitato numero di particelle si sposta dai livelli vicini a ε_F occupati allo zero assoluto. Come si vede per i gas in queste condizioni, le considerazioni della quantizzazione dell'energia di traslazione e della validità del principio di Pauli portano a una distribuzione completamente diversa da quella di Boltzmann. Se invece $kT \gg \varepsilon_F$, le particelle hanno tutte le energie fino a quelle dell'ordine di kT e accade che gli $n(\varepsilon)$ sono piccoli per tutte le energie; ciò significa che le particelle sono distribuite su un gran numero di stati, la quantizzazione dell'energia di traslazione delle molecole del gas e le limitazioni poste dal principio di Pauli perdono interesse e, a temperature di poco superiori a 0 K, l'approssimazione di Boltzmann diviene valida.

È evidente quindi la importanza del valore numerico di ε_F nei vari sistemi che dovrebbero seguire la statistica di Fermi-Dirac nel determinare la necessità di considerare tale statistica o la possibilità di usare come approssimazione quella di Boltzmann. RiconSIDERIAMO perciò la (15)

$$\varepsilon_{F,0} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{4\pi} \right)^{2/3}$$

e cerchiamo di applicarla a qualche gas che può essere tenuto a temperature basse (n elevato). L'isotopo raro di massa 3 dell'elio che dovrebbe seguire la statistica di Fermi, bolle a 3,2 K a pressione normale. A questa temperatura n , numero di molecole per unità di volume, è $2,3 \cdot 10^{27}$ molecole/m³. Si ottiene

$$\varepsilon_{F,0} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} \left(\frac{3 \cdot 2,3 \cdot 10^{27}}{4\pi} \right)^{2/3} = 2,96 \cdot 10^{-23} \text{ joule} = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

mentre a $T = 3,2$ K

$$kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3,2 = 4,42 \cdot 10^{-23} \text{ joule} = 2,76 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

Risulta quindi $\varepsilon_{F,0} < kT$ e quindi le deviazioni dalla statistica classica sono piccole e trascurabili. Per quanto riguarda gli altri gas, quelli di massa minore o molto vicina (H_2 , He di massa 4) seguono la statistica di Bose-Einstein, gli altri hanno massa notevolmente maggiore di quella dell'elio di massa tre e quindi a essi corrisponde una $\varepsilon_{F,0}$ ancora più piccola rispetto a kT di quanto non lo sia nell'esempio citato. Si conclude quindi che per i gas reali la statistica di Fermi ha scarsa importanza e l'approssimazione costituita dalla statistica di Boltzmann è ottima per tutti i gas che dovrebbero seguire la statistica di Fermi.

La vera importanza della statistica di Fermi è relativa al caso del sistema di elettroni in un metallo. Nel caso di un gas di elettroni, quale si può pensare si abbia in un metallo, la massa delle particelle è notevolmente più bassa di quella delle molecole del gas più leggero ($1/1.839$ della massa dell'atomo di idrogeno) e il numero di particelle per unità di volume è maggiore di quello che si ha nei gas anche alle temperature basse. Di conseguenza i valori di $\varepsilon_{F,0}$ sono, come vedremo in seguito, dell'ordine di 5 eV e quindi molto maggiori di kT a tutte le temperature ordinarie⁽⁴⁾.

16.5. ELETTRONI NEI METALLI E STATISTICA DI FERMI-DIRAC

Gli elettroni nei metalli si comportano come un gas che segue la statistica di Fermi-Dirac e la funzione di distribuzione è data dalla (6).

Nel caso degli elettroni nei metalli $\varepsilon_{F,0}$, l'energia di Fermi alla temperatura dello zero assoluto è dell'ordine di 5 eV⁽⁵⁾. In tal caso, inoltre, le variazioni di ε_F con la temperatura sono molto piccole, sicché spesso si può ammettere, senza grave errore, che l'energia di Fermi abbia a tutte le temperature lo stesso valore ($\varepsilon_{F,0}$).

La figura 16.4 mostra l'andamento della (6) per gli elettroni liberi nell'argento per tre diverse temperature.

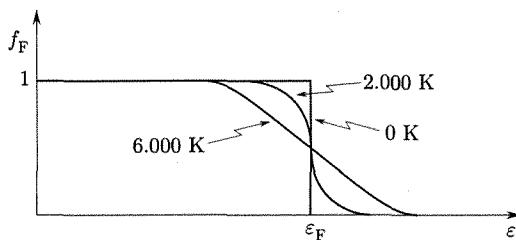


Fig. 16.4

Una brillante affermazione della statistica di Fermi è stata conseguita nel problema del calcolo del contributo degli elettroni al calore specifico di un metallo; le indicazioni classiche sono infatti in contrasto con i risultati sperimentali. Vogliamo qui stabilire questo risultato.

⁽⁴⁾ I valori di kT espressi in eV alle temperature appresso indicate sono:
 $(1,38 \cdot 10^{-23})/(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 10 = 8,64 \cdot 10^{-4}$ a 10 K; $8,64 \cdot 10^{-3}$ a 100 K; $2,59 \cdot 10^{-2}$ a 300 K (temperatura ambiente); $8,64 \cdot 10^{-2}$ a 1.000 K; $8,64 \cdot 10^{-1}$ a 10.000 K.

⁽⁵⁾ Tali energie sono dell'ordine delle energie di ionizzazione degli atomi e molto superiori ai valori di kT a tutte le temperature di interesse.

Allo scopo di valutare l'energia interna del gas elettronico, ricordiamo che il numero di stati quantici consentiti alle molecole di un gas perfetto monoatomico di energia inferiore a ε è dato dalla (13).

Nel caso degli elettroni occorre osservare che per individuare lo stato dell'elettrone occorre specificare, oltre alla cella nello spazio delle quantità di moto, anche il valore dello spin (che come è noto può avere due soli valori): ciò equivale a dire che nelle celle determinate per un gas monoatomico, quando si tratta di un gas di elettroni possono trovarsi posto due elettroni. Di conseguenza il numero di stati consentiti per gli elettroni aventi energie inferiori a ε è dato da

$$(20) \quad 2 \left[\frac{4}{3} \pi (2m\varepsilon)^{3/2} \frac{V}{h^3} \right].$$

In corrispondenza allo zero assoluto, mentre in meccanica classica la energia cinetica di tutte le particelle sarebbe zero, gli N elettroni si dispongono a occupare gli stati consentiti, uno per ciascuno stato quantico (determinato da quattro numeri quantici: tre per definire lo stato dinamico e uno per lo spin) o, se si vuole, due, con spin opposto per ciascuna delle celle dello spazio delle quantità di moto viste per il caso di gas molecolari. Saranno quindi riempiti tutti gli stati fino alla energia di Fermi ($\varepsilon_{F,0}$) tale che

$$(21) \quad N = 2 \left[\frac{4}{3} \pi (2m\varepsilon_{F,0})^{3/2} \frac{V}{h^3} \right].$$

L'energia di Fermi allo zero assoluto vale quindi

$$(22) \quad \varepsilon_{F,0} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

Se si differenzia l'espressione (20) che dà il numero di stati con energia inferiore a ε , si ha il numero di stati dg la cui energia è compresa fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$

$$(23) \quad dg = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

e quindi il numero dN di elettroni con energia fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$ ⁽⁶⁾

$$(24) \quad dN = f_F dg = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1}.$$

Questa relazione consente di calcolare l'energia interna, cioè l'energia cinetica totale del sistema, alle varie temperature. In particolare allo zero assoluto, quando $f_F = 1$ per $\varepsilon < \varepsilon_F$ e $f_F = 0$ per $\varepsilon > \varepsilon_F$, si ha

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_{F,0}} \varepsilon \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{F,0}} \varepsilon \frac{dg}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{(\varepsilon_{F,0})^{5/2}}{2}.$$

Usando la (21), si ha

$$(27) \quad U_0 = \frac{3}{5} N \varepsilon_{F,0}.$$

L'energia interna del gas d'elettroni a una temperatura T può essere calcolata mediante una serie della quale è in genere sufficiente considerare i primi due termini (fino al termine in T^2). Si ha

$$(28) \quad U - U_0 = \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\varepsilon_{F,0}}.$$

⁽⁶⁾ Analogamente si può calcolare il numero di stati cui corrispondono velocità in un determinato intervallo dv_x, dv_y, dv_z . Dalla (18) si ha

$$(25) \quad \frac{2Vm^3}{h^3} dv_x dv_y dv_z$$

e di conseguenza il numero di elettroni per unità di volume in tale intervallo risulta

$$(26) \quad n(v) dv = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_F)/kT} + 1} dv_x dv_y dv_z$$

Ne segue il calore specifico per mole ($N = N_0$, numero di Avogadro)

$$(29) \quad C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{\varepsilon_{F,0}}.$$

È questa una quantità piccola rispetto al valore previsto dalla teoria classica ($\frac{3}{2}R$) proprio perché kT è piccolo rispetto a $\varepsilon_{F,0}$. Nei metalli si è detto che $\varepsilon_{F,0}$ è dell'ordine di 5 eV mentre kT per $T = 1000$ K vale 0,086 eV.

La statistica di Fermi consente quindi di spiegare il contributo degli elettroni al calore specifico, a differenza della statistica classica: in un metallo ove ε_F è notevolmente elevato rispetto a kT solo un numero relativamente piccolo di elettroni è, alla temperatura T , spostato dagli stati occupati allo zero assoluto a stati di energia superiore e ciò si rispecchia in un piccolo assorbimento di energia termica da parte degli elettroni liberi, quando la temperatura viene innalzata di un grado, per passare alla nuova distribuzione di equilibrio.

16.6. FORMAZIONE DELLE BANDE DI LIVELLI ENERGETICI CONSENTITI AGLI ELETTRONI NEI CRISTALLI

Lo studio delle proprietà elettriche dei solidi cristallini va fatto nella teoria quantistica considerando, sia pure con l'impiego di ipotesi semplificative, il comportamento di ciascun elettrone sotto l'influenza dei nuclei positivi degli atomi disposti con una periodicità caratteristica e di tutti gli altri elettroni presenti.

Il concetto più importante che ne deriva è quello dell'esistenza di bande di livelli energetici permessi per gli elettroni in un cristallo e di bande di energia non consentite.

Noi cercheremo qui di introdurre tale concetto con una trattazione di validità limitata ma molto semplice, partendo dalle caratteristiche dei singoli atomi che entrano a costituire il cristallo.

In un cristallo gli atomi sono disposti regolarmente occupando posizioni ben determinate in celle elementari che si ripetono nello spazio; le distanze (reticolari) fra atomi contigui, a parte piccole fluttuazioni nel tempo dovute alla agitazione termica, hanno valori precisi, determinati dall'equilibrio fra azioni attrattive e repulsive. La determinazione dei livelli consentiti per gli elettroni in un cristallo può essere effettuata immaginando di formare il cristallo partendo da un insieme di N atomi (tanti quanti ne entrano nel cristallo) a distanze tanto grandi fra loro che essi non interagiscono e portandoli sempre più vicini secondo una configurazione simile a quella del cristallo finale.

È chiaro che finché gli atomi sono tanto lontani da non interagire, tanto lontani cioè che gli stati quantici (*le orbite*) degli elettroni di ciascun atomo non sono influenzati dagli elettroni degli altri atomi, il sistema di N atomi equivale a N sistemi isolati identici, se gli atomi sono dello stesso elemento, come qui per semplicità supponiamo. La situazione degli stati quantici (livelli) consentiti per gli elettroni del sistema è allora coincidente con quella degli atomi isolati (si veda vol. I, cap. 12, par. 12.5).

Nella figura 16.5a è riportato il potenziale elettrostatico (positivo) nelle vicinanze di un nucleo di idrogeno ($V = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}e/r = 13,3 \cdot 10^{-10}/r$ volt, con r in m); nella figura 16.5b è indicato il profilo dell'energia potenziale per un elettrone nelle vicinanze dello stesso nucleo ($\varepsilon = -(4\pi\varepsilon_0)^{-1}e^2/r$ J = $-(4\pi\varepsilon_0)^{-1}e/r$ (eV)). Nella figura 16.5b le linee orizzontali tratteggiate rappresentano l'energia cinetica, l'energia potenziale e quella totale (livello di energia) per uno stato consentito. Nella figura 16.5c sono indicati

i livelli energetici per l'atomo di idrogeno. Passando ad atomi più complessi si può, come già noto, in prima approssimazione supporre che i livelli energetici si dispongano come per l'idrogeno e vadano riempiti ciascuno da due elettroni con spin opposti, al crescere della carica del nucleo, in accordo con il principio di Pauli (vol. I, cap. 12, par. 12.6).

Quando gli atomi vengono avvicinati al punto che le distribuzioni spaziali (orbite) relative agli elettroni più esterni (di valenza) cominciano a sovrapporsi, hanno inizio interazioni e il sistema degli N atomi va considerato come un unico sistema quantistico. Di conseguenza tali elettroni (di valenza) che si trovavano su uno stesso livello negli atomi separati, non possono più, per il principio di Pauli, rimanere su questo unico livello: l'interazione che ha origine deve causare uno spostamento in energia di ciascuno degli N livelli: al posto cioè di un solo livello da considerarsi N volte, v'è un insieme di N livelli differenti ma molto vicini. La situazione è analoga a quella che si ha se si hanno N oscillatori meccanici (o elettrici) i quali abbiano isolatamente la stessa frequenza di oscillazione propria: qualora essi vengano accoppiati, per esempio per mezzo di molle (o di mutue induttanze), le frequenze di oscillazione si modificano leggermente.

Ritornando al sistema atomico, se si riduce ulteriormente la distanza reticolare, la interazione cresce e di conseguenza varia la differenza di energia fra gli N livelli. Inoltre al diminuire della distanza reticolare si giunge alla sovrapposizione delle distribuzioni spaziali anche per il primo, secondo, ecc. livello elettronico inferiore in energia rispetto a quello degli elettroni di valenza, sicché si ripete anche per questi livelli il fenomeno della separazione in energia.

Lo stesso ragionamento può ripetersi per livelli che nell'atomo isolato sono superiori a quelli normalmente occupati dagli elettroni di valenza e che vengono occupati solamente in corrispondenza a stati eccitati degli atomi: per questi livelli quantici la separazione in energia avviene a distanze reticolari più grandi di quelle alle quali il fenomeno si presenta per gli stati stazionari degli elettroni di valenza.

Nella figura 16.6 viene illustrato qualitativamente questo processo per un caso ideale molto semplice: una linea di 6 atomi di idrogeno. A distanze reticolari grandi, i livelli $1s$, $2s$ sono gli stessi per tutti gli atomi del sistema.

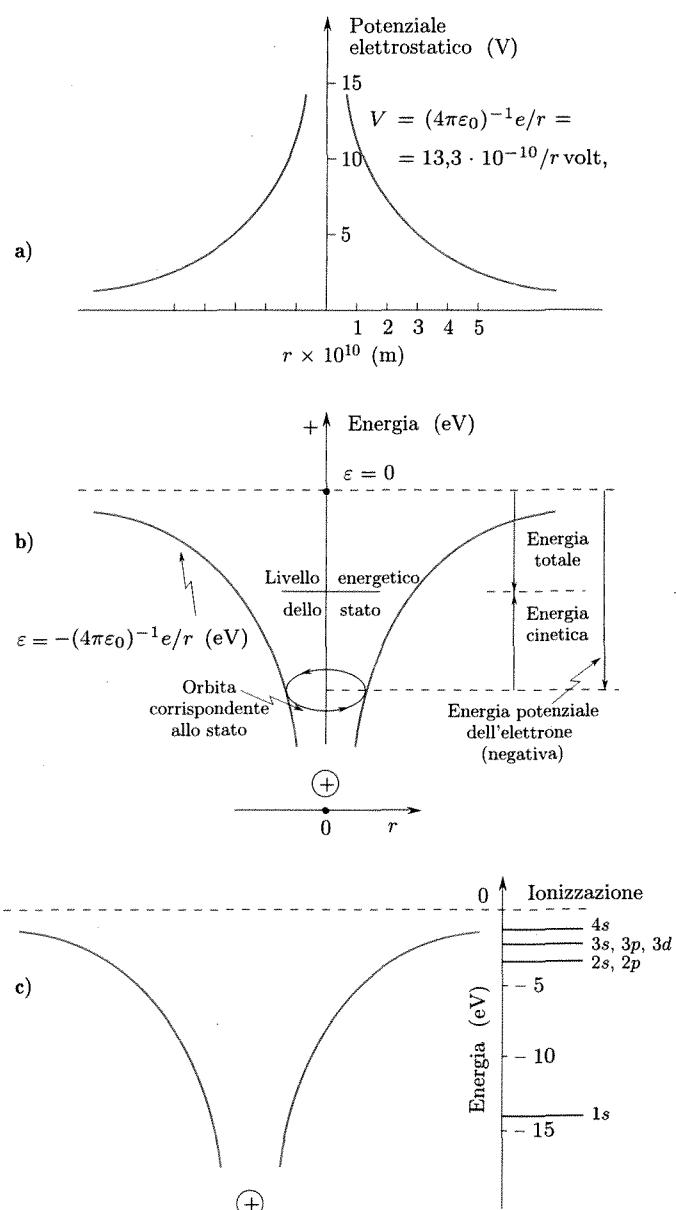


Fig. 16.5

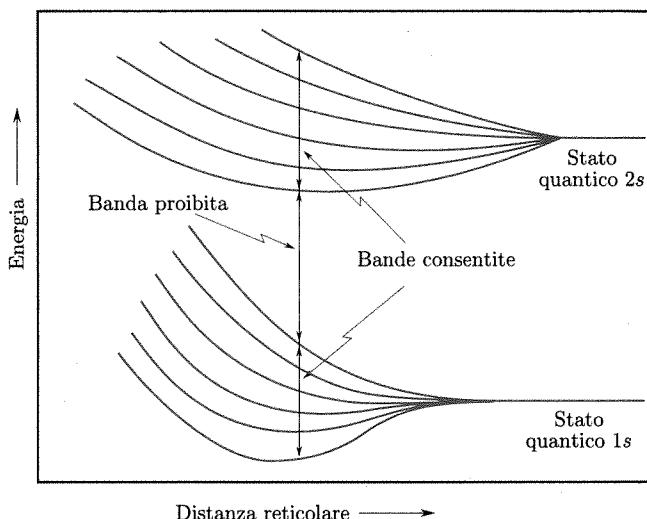


Fig. 16.6

Al ridursi della distanza reticolare il fenomeno descritto inizia prima per i livelli $2s$ poi per quelli $1s$: come si vede i livelli energetici consentiti per gli elettroni nel cristallo corrispondenti agli stati quantici atomici si trovano concentrati in certe bande (consentite) separate da intervalli di energia proibita.

Due proprietà fondamentali di ciascuna banda sono le seguenti:

1. *il numero di livelli (stati quantici) in ciascuna banda è finito e pari al numero di stati quantici atomici da cui essa è stata generata;*
2. *le energie del livello più basso e di quello più alto di una banda nei cristalli di una certa struttura e composizione dipendono esclusivamente dalla distanza reticolare e non dipendono dal numero di atomi che entrano nel cristallo.*

Di conseguenza *al crescere delle dimensioni del cristallo di un certo tipo, i livelli si infittiscono nell'interno di una banda*, riducendosi la differenza di energia fra due livelli contigui. Queste differenze, anche per dimensioni di cristalli relativamente piccoli, sono tanto esigue che in molte considerazioni si può ritenere approssimativamente che tutti i valori dell'energia, nei limiti di ciascuna banda consentita, siano possibili; va tuttavia tenuto presente che il numero di livelli e quindi di elettroni che possono trovarsi nei corrispondenti stati quantici è *finito*.

Da calcoli di questo genere si può determinare la distribuzione dei livelli consentiti nel cristallo reale, cioè per il valore sperimentale della distanza reticolare. La situazione si presenta in genere secondo lo schema in figura 16.7 che peraltro non si riferisce a nessun caso particolare. In tale figura, per semplicità di rappresentazione e senza nulla togliere alla validità delle conclusioni, si fa riferimento a una fila di atomi (invece che a una disposizione tridimensionale). Nella figura 16.7a è anche indicato l'andamento della curva dell'energia potenziale⁽⁷⁾: l'energia è zero per un

⁽⁷⁾ Si noti la forma della curva dell'energia potenziale all'estremità della fila degli atomi: essa corrisponde nei cristalli reali alla situazione in corrispondenza alle superfici limiti del cristallo.

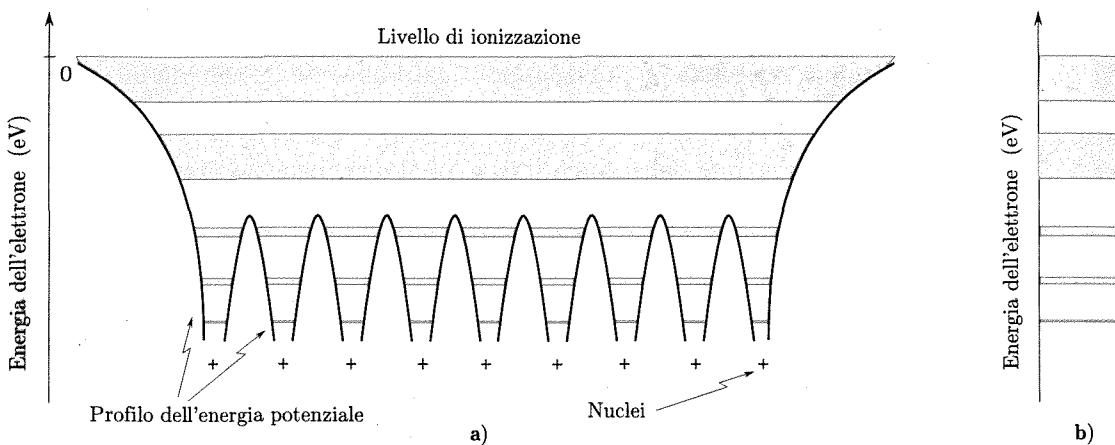


Fig. 16.7

elettrone portato fuori del cristallo e va a valori molto bassi vicino ai nuclei. In corrispondenza alla distanza reticolare di equilibrio si hanno in genere alcuni stati quantici non perturbati rispetto a quelli atomici: sono quelli di energia più bassa che corrispondono a stati (orbite) più vicini ai nuclei; ciò significa che alla distanza raggiunta dai nuclei nessuna interazione esiste fra i corrispondenti elettroni. Di conseguenza i livelli energetici si ripetono identici per tutti gli atomi e sono completamente occupati come per gli atomi isolati. Man mano che si passa a considerare livelli di energia maggiore e in particolare il livello degli elettroni di valenza e livelli superiori, si presenta la formazione di bande; ciascuna banda che deriva da uno stato quantico atomico ha N (numero di atomi nel cristallo) livelli distinti. Nella figura 16.7b è indicato il diagramma dei livelli consentiti nella forma comunemente usata.

Va osservato che molto spesso le bande consentite derivanti da livelli atomici di energia elevata si sovrappongono formando un'unica banda che evidentemente ha un numero di livelli pari alla somma di quelli delle bande componenti. Un esempio è quello delle bande derivanti dai livelli $3d$, $4s$, $4p$ nel rame, dato nella figura 16.8 (M. Krutter). In tale figura non compaiono

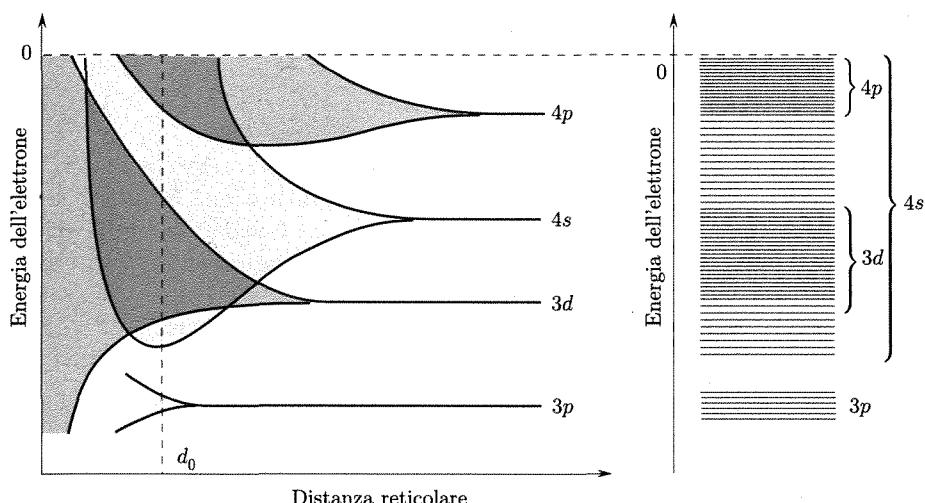


Fig. 16.8

i livelli inferiori al $3p$ e, sulla destra, sono indicati i livelli consentiti alla distanza reticolare (d_0) di equilibrio: naturalmente in realtà in un cristallo i livelli nelle bande consentite sono molto più fitti di quanto indicato in figura.

Conduttori

Gli elettroni del sistema (cristallo) si dispongono a occupare gli stati consentiti seguendo la statistica Fermi-Dirac. È evidente perciò che possono presentarsi due situazioni nettamente distinte. Nella prima (fig. 16.9) gli elettroni allo zero assoluto occupano tutti i livelli disponibili fino a un livello (di Fermi) interno a una banda. In tal caso l'aumento della temperatura, come già discusso, produce solo una variazione nella occupazione dei livelli prossimi ($\pm 3kT$) al livello di Fermi, in perfetto accordo con quanto è stato visto in precedenza. Gli elettroni in questa banda parzialmente piena possono muoversi nella direzione di un campo elettrico applicato in accordo con quanto è stato specificato nella trattazione della teoria degli elettroni liberi: gli elettroni in questa banda parzialmente piena (o di conduzione) costituiscono per così dire gli elettroni liberi o il mare di Fermi. Il cristallo è un conduttore.

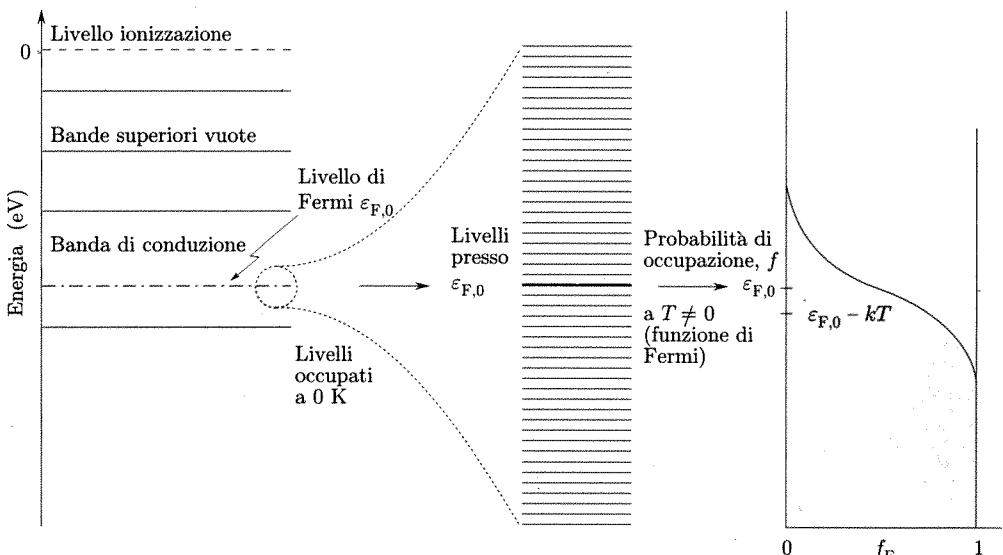


Fig. 16.9

Isolanti

La figura 16.10 illustra l'altra situazione: allo zero assoluto sono occupati tutti gli stati fino a completare perfettamente una banda (di valenza) mentre la banda superiore (di conduzione) è separata dalla prima da un notevole salto (gap) di energia⁽⁸⁾. In questo caso l'energia di Fermi è al centro fra le due bande e, anche a temperature elevate, non è frequente il passaggio di elettroni dalla banda di valenza a quella di conduzione, che solo può produrre cariche libere e conducibilità. Il cristallo è un isolante.

Semiconduttori

Un caso particolare della seconda situazione illustrata si ha, sempre in un cristallo omogeneo, se il salto di energia tra la banda di valenza e

⁽⁸⁾ Nel caso del cristallo di diamante (C) il valore di tale gap è di circa 6 eV.

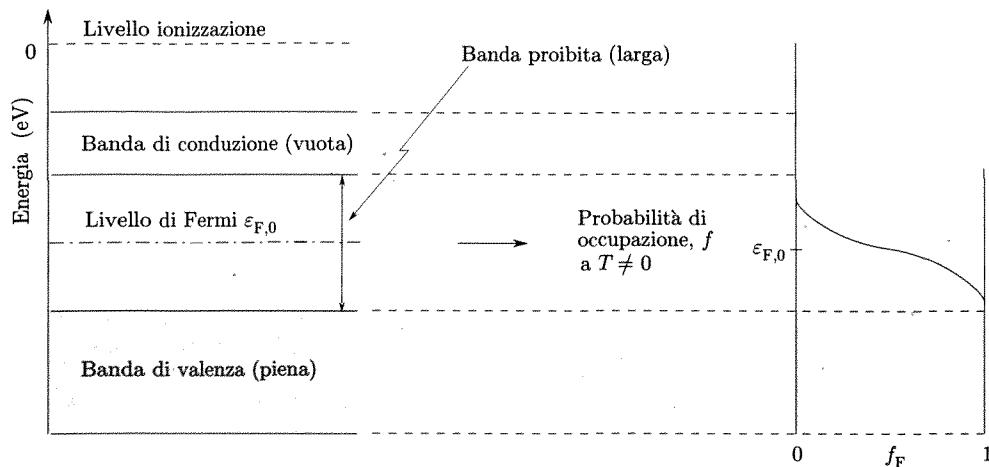


Fig. 16.10

quella di conduzione è molto piccolo (fig. 16.11). Il livello di Fermi allo zero assoluto è ancora nel mezzo della banda proibita; in questo caso però, a temperature non eccessivamente elevate si produce una popolazione nei livelli della banda di conduzione e una riduzione della popolazione nella banda di valenza, la quale quindi non è più completamente piena. Sono pertanto create le condizioni per una sia pur limitata conduzione in campo elettrico. Queste sostanze sono semiconduttori intrinseci. Il salto di energia fra le due bande è 0,1 eV in stagno grigio, 0,71 eV in germanio, 1,11 eV in silicio.

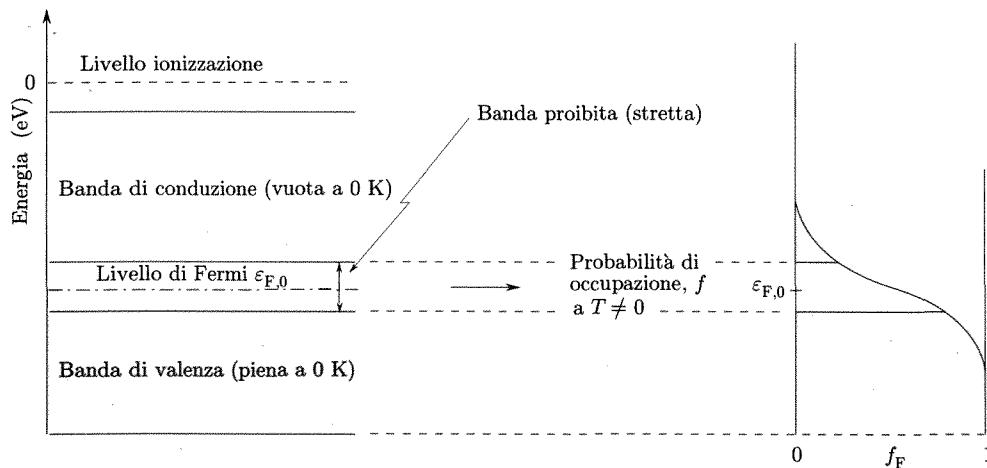


Fig. 16.11

16.7. EFFETTO VOLTA, O DEL POTENZIALE DI CONTATTO. LAVORO DI ESTRAZIONE

Alcune celebri esperienze di Alessandro Volta mostrano che fra due metalli diversi a contatto, in condizioni di equilibrio, esiste una differenza di potenziale (di contatto, effetto Volta) che non dipende dalla forma ed

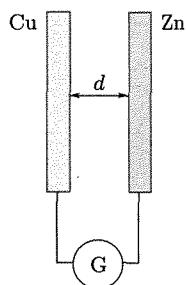


Fig. 16.12

estensione del contatto ma solo dalla natura dei conduttori⁽⁹⁾. Una dimostrazione di questo effetto può essere ottenuta con semplicità realizzando un condensatore con armature di conduttori diversi (per es. rame e zinco) e collegando le armature stesse⁽¹⁰⁾ attraverso un galvanometro balistico (fig. 16.12). Se esiste una differenza di potenziale V fra le armature del condensatore la carica su ciascuna di esse per una certa distanza d_1 fra loro è $Q_1 = C_1 V$. Se la distanza viene variata rapidamente, la capacità del condensatore e la carica passano a nuovi valori C_2 e $Q_2 = C_2 V$; la carica $Q_2 - Q_1 = V(C_2 - C_1)$ viene misurata dallo strumento. È così possibile determinare V per coppie di metalli e anche mostrare che se diversi metalli sono posti in serie a costituire una catena che termina con le due piastre del condensatore, la d.d.p. che si misura dipende solo dalla natura dei metalli che terminano la catena, costituenti le due piastre del condensatore. È possibile ordinare i metalli secondo la d.d.p. che ciascuno di essi assume rispetto a un metallo di riferimento. Usando il rame come metallo di riferimento si ha:

Cs	2,3 V
Na	1,8
Mg	0,5
Ag	-0,6

La spiegazione dell'effetto Volta può ottersi abbastanza facilmente ponendo attenzione alla distribuzione degli elettroni nell'interno dei metalli sui livelli energetici consentiti. Nella figura 16.13 sono riportati l'energia potenziale per gli elettroni e i livelli occupati allo zero assoluto per una linea di atomi uguali regolarmente spaziati che può rappresentare schematicamente la situazione in un cristallo conduttore che termina a destra con una superficie. Allo zero assoluto il livello occupato più elevato è il livello di Fermi; a temperature superiori elettroni possono trovarsi su livelli superiori in accordo alla funzione di distribuzione della statistica Fermi-Dirac. L'energia potenziale al di là dell'ultimo atomo a destra cresce e approssima asintoticamente il valore (linea tratteggiata) che corrisponde all'elettrone portato a distanza infinita dal cristallo (ionizzazione). Ciò equivale a dire che mentre gli elettroni di conduzione sono liberi di muoversi nell'interno del conduttore, per potere uscire devono superare una barriera di potenziale corrispondente al salto di energia Φ , cioè pari a Φ/e ; tutto va come se in corrispondenza alla superficie e a causa della discontinuità nella distribuzione delle particelle si determinasse un doppio strato di cariche e un salto di potenziale. È questa barriera che

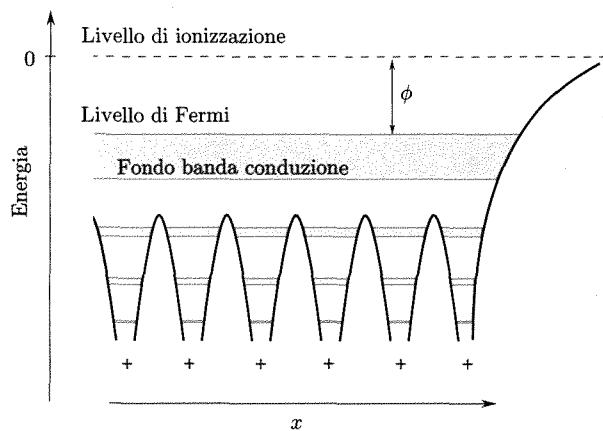


Fig. 16.13

⁽⁹⁾ La d.d.p. di contatto dipende, sia pure in maniera molto limitata, dalla temperatura del sistema dei due conduttori. Nelle considerazioni che si vogliono fare in questo paragrafo le variazioni delle d.d.p. di contatto con la temperatura possono essere trascurate.

⁽¹⁰⁾ La natura del conduttore con cui sono realizzati il galvanometro e i collegamenti non ha importanza, come vedremo fra poco.

impedisce quindi agli elettronni di conduzione di uscire dal metallo, tranne che essi abbiano una energia cinetica sufficiente a superarla.

La differenza (Φ) fra l'energia del livello che corrisponde alla ionizzazione (ε_∞) e l'energia di Fermi (ε_F) determina l'altezza della barriera che un elettrone deve superare per uscire dal metallo; essa è una caratteristica del sistema di bande del singolo metallo e prende il nome di lavoro di estrazione o funzione lavoro.

Supponiamo ora di avere due metalli diversi in un primo tempo separati e a grande distanza fra loro: i diagrammi delle energie siano quelli in figura 16.14a ove ci si è limitati a riportare i livelli delle bande di conduzione e si è contratta enormemente la distanza fra le superfici limiti (parallele) del campione. Il livello di ionizzazione, cioè l'energia potenziale per un elettrone a distanza infinita da ciascun conduttore (e da entrambi), ε_∞ , è lo stesso per i due diagrammi; i lavori di estrazione sono diversi ($\Phi_1 < \Phi_2$). Quando i metalli sono posti a contatto (fig. 16.14b) è evidente che il sistema complessivo deve portarsi in condizioni di energia minima e quindi alcuni elettroni passano, durante un transitorio, dal metallo a funzione di lavoro minore (1) su livelli liberi dell'altro (2) che si trovano a energie più basse; naturalmente facendo così producono un eccesso di carica negativa nel metallo 2 e una carenza di cariche negative, cioè un eccesso di carica positiva, nel metallo 1. Si determina quindi una differenza di potenziale fra i due metalli e una barriera di potenziale fra essi che serve appunto a fermare il flusso netto di cariche negative dal metallo 1 al metallo 2.

In condizioni di equilibrio il livello di Fermi deve essere uguale in tutto il sistema⁽¹¹⁾.

L'effetto della barriera di potenziale fra i due metalli nei riguardi dei livelli di energia è quello di abbassare l'energia potenziale degli elettroni sui livelli del conduttore a lavoro di estrazione più basso (1): un elettrone di questo metallo per poter essere portato a distanza infinita deve ora superare una barriera più elevata perché le cariche positive disposte sulla superficie si oppongono a un suo allontanamento. Il numero di elettroni che effettivamente passano da un metallo all'altro è una frazione piccolissima del numero di elettroni presenti.

La differenza di potenziale che si stabilisce fra i due metalli è pari a

$$(30) \quad V_{C_{12}} = \frac{1}{e}(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{1}{e}(\varepsilon_{F_1} - \varepsilon_{F_2})$$

⁽¹¹⁾ La situazione è perfettamente analoga a quella di un sistema termodinamico generico a due fasi e vari componenti: perché ci sia equilibrio termodinamico è necessario (vol. I, cap. 19, par. 19.5) che il potenziale chimico (μ) per ciascuna specie chimica sia lo stesso nelle due fasi. Nel caso presente il potenziale chimico per il componente costituito dagli elettroni liberi è pari alla energia di Fermi ε_F .

Funzione
lavoro

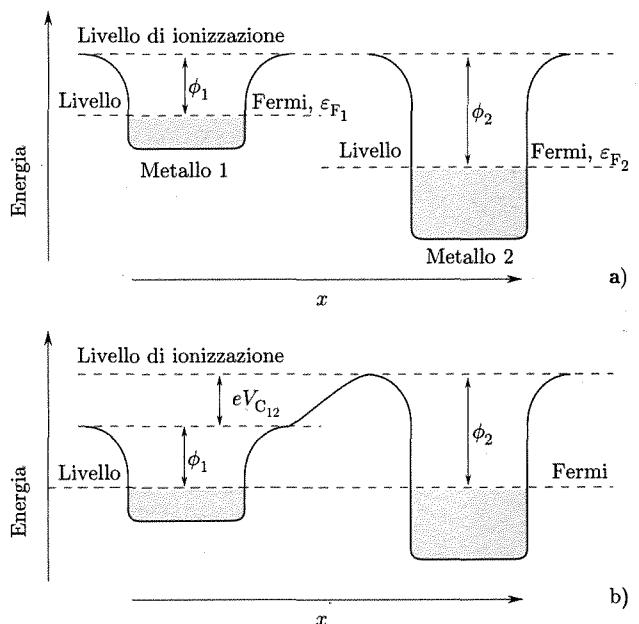


Fig. 16.14

essendo ε_{F_1} ed ε_{F_2} le energie di Fermi per i due metalli isolati. Questa formula può ricavarsi immaginando che un elettrone si sposti nella seguente maniera, ritornando nello stesso punto con la stessa energia potenziale:

1. l'elettrone del metallo 1 che ha una energia pari a quella di Fermi (ε_{F_1}) venga spostato dalla superficie del metallo fino a un punto immediatamente fuori del metallo; il lavoro che bisogna compiere è pari alla energia Φ_1 (negativo);
2. venga ora spostato (nel vuoto) fino a un punto molto vicino alla superficie del metallo 2; il lavoro che bisogna compiere è ($eV_{C_{12}}$);
3. esso si porti ora nell'interno del metallo 2 sul livello di Fermi (ε_{F_2}); l'elettrone in questo caso cede energia in quantità pari a Φ_2 ;
4. l'elettrone ritorni attraverso il contatto fra i metalli nella posizione originaria sempre a energia ε_{F_1} ; il lavoro compiuto in questa parte del ciclo è (da ritenersi) nullo.

Il lavoro complessivo nel campo conservativo, poiché gli stati iniziali e finali coincidono, è nullo. Si ha quindi

$$(31) \quad -\Phi_1 - eV_{C_{12}} + \Phi_2 = 0$$

da cui la (30).

L'effetto Volta è dovuto quindi alla differenza dei lavori di estrazione o, quello che è lo stesso, alla differenza delle energie di Fermi nei sistemi isolati dei metalli a contatto. Si comprende bene, dalle considerazioni svolte, la ragione del fatto sperimentale che, nel caso di una catena di conduttori diversi, la differenza di potenziale fra gli estremi dipenda esclusivamente dalla natura dei metalli terminali: le differenze di potenziale dovute ai metalli interni alla catena si compensano esattamente.

È anche evidente come non si possa utilizzare la differenza di potenziale dovuta all'effetto Volta per far passare una corrente in un circuito metallico a temperatura costante, come cioè non si possa realizzare un generatore elettrico: infatti, non appena i due conduttori sono in contatto i loro livelli di Fermi si uguaggiano, l'equilibrio si stabilisce e non vi può essere successivamente un moto preferenziale per gli elettroni.

Le funzioni lavoro dei metalli, e quindi le d.d.p. di contatto fra due di essi, dipendono in maniera rilevante dallo stato delle superficie: per ottenere risultati ripetibili occorre eliminare dalle superfici impurità presenti, gas adsorbiti ed evitare contaminazioni durante le esperienze: perciò esperienze tendenti a determinare Φ vanno fatte nel vuoto dopo aver opportunamente purificato i campioni.

La tabella 16.2 indica i valori ottenuti con vari metodi per il potenziale di estrazione $V_{es} = \Phi/e$ in alcuni metalli.

Tabella 16.2

Metallo	V_{es} (volt)
Cs	1,81
Na	2,2
K	2,2
Ba	2,4
Al	3,0
Cd	4,1
Cu	4,1
Zn	4,3
Sn	4,4
Mo	4,4
W	4,54
Ag	4,7
Fe	4,7
Au	4,9
Ni	5,03
Pt	5,40

16.8. EFFETTI TERMOELETTRICI

Un circuito chiuso formato da conduttori metallici diversi e mantenuto a temperatura uniforme si trova, come si è visto, in equilibrio nel senso che le f.e.m. di contatto che si generano alle varie giunzioni si compensano esattamente; il livello di Fermi è lo stesso in tutto il sistema e nessuna corrente netta fluisce.

La situazione cambia quando viene rotto o l'equilibrio termico, stabilendo una differenza di temperatura fra due punti, oppure l'equilibrio

elettrico forzando (mediante la inserzione di una pila nel circuito o mediante fenomeni di induzione) una corrente attraverso il circuito. Se si tiene conto che al flusso di elettroni è associato un trasporto di energia cinetica e quindi un flusso di calore, e viceversa, si comprende come la rottura di uno dei due equilibri (termico o elettrico) debba portare alla rottura dell'altro. V'è quindi da attendere, in condizioni di questo genere la comparsa di particolari effetti termoelettrici.

a) Effetto Seebeck; forza termoelettromotrice

Si supponga di avere un circuito formato da due metalli (fig. 16.15a), per esempio rame-ferro, e di scaldare una delle giunzioni mantenendo l'altra a temperatura costante (per es. $0\text{ }^{\circ}\text{C}$): è possibile vedere, per esempio ponendo nelle vicinanze un ago magnetico, che una corrente fluisce nel circuito: ciò significa che una f.e.m. è presente nel circuito stesso. Per fare determinazioni quantitative si possono disporre le cose come in figura 16.15b, inserendo fra due punti C, C' del circuito originario un misuratore di f.e.m.: se i punti C, C' sono alla stessa temperatura e i due metalli terminali del dispositivo di misura sono gli stessi, nessuna nuova f.e.m. viene introdotta dal misuratore nel circuito e quindi la misura non altera la f.e.m. presente nel circuito originario. Gli effetti termoelettrici che si possono osservare nei metalli sono essenzialmente tre, ma essi non sono indipendenti tra loro.

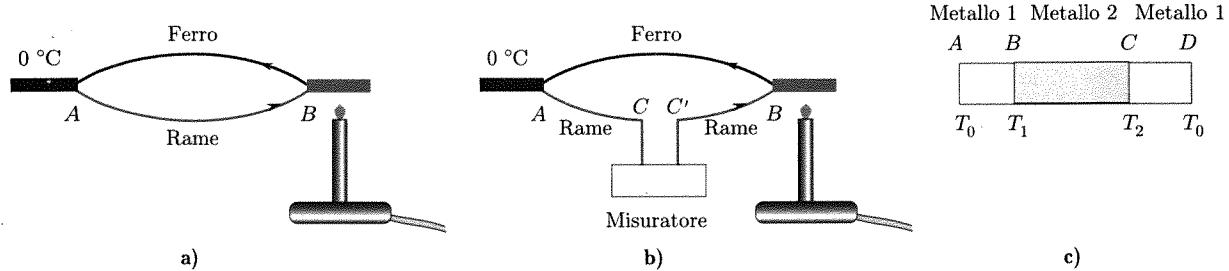


Fig. 16.15

In maniera generale (fig. 16.15c) dati due conduttori metallici 1,2 le cui giunzioni sono a temperatura T_1 e T_2 , si definisce forza termoelettromotrice θ_{12} la d.d.p. ($V_A - V_D$) fra gli estremi aperti della catena tenuti alla stessa temperatura (T_0); tale valore è indipendente da T_0 . La figura 16.16 mostra i risultati sperimentali nel caso del sistema formato da ferro e rame tenendo una giunzione a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e scaldando l'altra. Come si vede la f.e.m. cresce fino a raggiungere un massimo (per una temperatura della giunzione calda di $275\text{ }^{\circ}\text{C}$) e poi decresce fino a diventare zero a $550\text{ }^{\circ}\text{C}$; cambia successivamente verso e cresce fino alla temperatura di fusione del rame.

La forza termoelettromotrice prodotta da una differenza di temperatura dT può essere posta sotto la forma

$$(32) \quad d\theta_{12} = \alpha_{12}(T)dT$$

e quella fra le temperature T_1 e T_2

$$(33) \quad \theta_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{12}(T)dT .$$

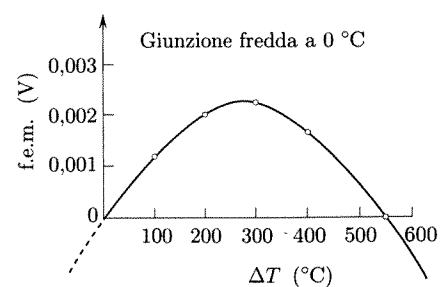


Fig. 16.16

Il coefficiente α_{12} dà la forza elettromotrice per grado di differenza di temperatura fra le giunzioni ed è anche chiamato potere termoelettrico.

La comparsa di una f.e.m. in un circuito aperto quale quello di figura 16.15c formato da due metalli le cui giunzioni sono a temperature diverse è dovuta a due effetti di diffusione dei portatori di carica; tali effetti risultano dipendenti dalla temperatura. Il primo è quello già esaminato che si determina all'istante del contatto di due metalli diversi e che ha come conseguenza il determinarsi di un unico livello di Fermi nella struttura e la formazione di una f.e.m.

$$V_{C_{12}} = \frac{1}{e} (\varepsilon_{F_1} - \varepsilon_{F_2})$$

essendo ε_{F_1} , ε_{F_2} i livelli di Fermi originari nei due metalli isolati. Se si hanno due giunzioni fra gli stessi metalli come in figura 16.15c alla stessa temperatura le due f.e.m. di contatto, $V_{C_{12}}$ e $V_{C_{21}}$, si equilibrano perfettamente. Se le giunzioni sono a temperature diverse è facile vedere che

$$(34) \quad V_{C_{12}} \neq V_{C_{21}}.$$

Infatti la energia di Fermi varia con la temperatura. Per un gas perfetto si ha

$$[17] \quad \varepsilon_{F,T} = \varepsilon_{F,0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_{F,0}} \right)^2 \right].$$

Nel caso degli elettroni nei metalli $\varepsilon_{F,0} \gg kT$ e per l'esame di molte situazioni si può trascurare il termine quadratico; in tal caso $\varepsilon_{F,T} = \varepsilon_{F,0}$ a tutte le temperature. Nel caso presente degli effetti termoelettrici ciò non è possibile e occorre tenere conto del termine in T^2 nella (17). Si vede allora che per ciascun metallo $\varepsilon_{F,T}$ varia leggermente con la temperatura e lo stesso deve di conseguenza avvenire per il lavoro di estrazione e per le forze elettromotrici al contatto fra due metalli. Naturalmente si tratta di un effetto molto piccolo.

Se quindi le due giunzioni fra i metalli 1 e 2 non sono alla stessa temperatura le due f.e.m. di contatto non sono più uguali e opposte e si manifesta una f.e.m. risultante. È questo uno dei due contributi alla f.e.m. termoelettrica. Il secondo contributo, dello stesso ordine di grandezza del primo, è dovuto alla diffusione dei portatori di carica in ciascuno dei due conduttori omogenei che costituiscono la coppia, per effetto del gradiente termico in essi esistente. Esso viene considerato separatamente sotto il nome di effetto Thomson.

b) Effetto Thomson

Il secondo effetto termoelettrico⁽¹²⁾ è presente in un qualsiasi conduttore che non si trovi in equilibrio termico. Supponiamo (fig. 16.17a) di considerare un conduttore lineare isolato e supponiamo di portare le sue estremità A, B a temperature diverse ($T_1 > T_2$). Poiché le velocità termiche alla temperatura T_1 sono maggiori di quelle alla temperatura T_2 ,

⁽¹²⁾ Esso è stato il terzo a essere messo in evidenza in ordine di tempo: fu previsto con considerazioni termodinamiche da Thomson nel 1851. L'effetto Seebeck fu trovato nel 1822 e quello Peltier nel 1834.

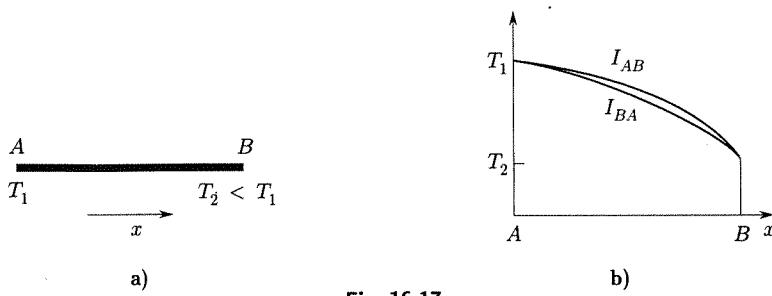


Fig. 16.17

all'atto in cui la differenza di temperatura viene stabilita, elettroni (supposti essere le cariche mobili, come di solito è per i metalli) si allontanano dall'estremo *A* verso quello *B* in numero maggiore di quello degli elettroni che giungono in *A* per diffusione nel verso contrario: ciò ha per effetto uno sbilancio di cariche mobili con un eccesso di elettroni nella zona *B* e un difetto nella *A*; si crea perciò una d.d.p. e un campo elettrico che ostacola l'ulteriore moto degli elettroni da *A* a *B* e consente il raggiungimento dell'equilibrio statistico. In ciò consiste l'effetto Thomson (Lord Kelvin). La differenza di potenziale fra punti del metallo la cui temperatura differisce di dT si può porre nella forma

$$(35) \quad dV_t = h(T)dT$$

e prende il nome di f.e.m. di temperatura. Il coefficiente $h(T)$ è detto coefficiente di Thomson e rappresenta la d.d.p. termica che esiste fra punti di un conduttore le cui temperature differiscano di un grado. L'effetto Thomson è reversibile. La d.d.p. è di solito diretta dalla parte ad alta temperatura verso quella a bassa (effetto Thomson positivo); vi sono casi in cui è diretta in senso inverso: si tratta di quei metalli (per es. ferro) nei quali la situazione degli elettroni è tale che tutto va come se i portatori liberi fossero positivi (cavità).

Se un conduttore omogeneo viene chiuso su se stesso secondo una linea e le varie parti del circuito sono tenute a temperature diverse, nessuna corrente passa in esso poiché le f.e.m. di temperatura si compensano esattamente: questo risultato, confermato dall'esperienza, è analogo a quello che si ha in circuiti formati da metalli diversi (effetto Volta) a temperatura uniforme.

La misura dell'effetto Thomson è piuttosto difficoltosa. Supponiamo di avere un conduttore isolato *AB* (fig. 16.17a) i cui estremi siano tenuti a temperature T_1 e $T_2 (< T_1)$; lungo esso la temperatura ha una certa distribuzione legata alla modalità della trasmissione del calore fra conduttore e ambiente: in esso ha sede la f.e.m. di temperatura (35) diretta da *A* a *B* (se l'effetto Thomson è positivo). Se ora viene inviata una corrente (I) si hanno due effetti termici: il primo, quello Joule, non dipende dal verso della corrente e corrisponde sempre a energia dissipata, cioè a quantità di calore sviluppata e di conseguenza produce un aumento delle temperature dei punti intermedi del conduttore (sempre comprese fra T_1 e T_2) rispetto a quelle che si avevano nel conduttore isolato. Il secondo è dovuto alla presenza della f.e.m. di temperatura e pone in gioco una quantità di calore al secondo fra due sezioni che distano fra loro di dx

$$(36) \quad dP = I h(T) \frac{dT}{dx} dx.$$

Si osservi però che questa quantità di calore è positiva, cioè corrisponde a energia trasformata in calore, se la corrente I e la d.d.p. di temperatura hanno lo stesso segno, altrimenti è negativa e corrisponde a energia termica sottratta all'ambiente.

Di conseguenza se si rilevano le due distribuzioni di temperatura lungo il conduttore ottenute successivamente quando corrente di una certa intensità viene fatta passare in un verso o nell'altro, mantenendo sempre gli estremi alle temperature T_1 e T_2 , si hanno differenze (fig. 16.17b) imputabili all'effetto Thomson, le quali possono essere utilizzate per calcolare h . Il valore di h a temperatura ordinaria è per il rame $+2,2 \mu\text{V/K}$, per il ferro $-8,4 \mu\text{V/K}$.

In accordo con la (36) si dice a volte che l'effetto Thomson consiste nel fatto che se una corrente I passa fra due punti di un conduttore omogeneo fra i quali esista una differenza di temperatura ΔT , viene assorbita o emessa una quantità di calore al secondo

$$(37) \quad \Delta P = hI\Delta T.$$

c) Effetto Peltier

L'effetto Seebeck mostra che una differenza di temperatura in un circuito chiuso formato da conduttori diversi può produrre una corrente: viceversa il passaggio di una corrente in un tale circuito produce una differenza di temperatura fra punti del circuito stesso. Questa seconda conclusione si trae dall'esame di un terzo effetto termoelettrico, l'effetto Peltier⁽¹³⁾. Esso consiste nel fatto che facendo passare una corrente attraverso la giunzione di due diversi conduttori tenuta a temperatura costante viene assorbito o liberato, secondo il verso della corrente, del calore in aggiunta a quello prodotto per effetto Joule.

L'esperienza può essere condotta con lo schema di figura 16.18: due giunzioni Bi—Cu sono poste in due palloni contenenti aria e collegati fra loro per mezzo di un tubo capillare che in una regione orizzontale contiene una goccia d'acqua. Questa goccia separa i volumi d'aria che sono a contatto con ciascuna giunzione e costituisce un indice (C) per valutare le variazioni di questi volumi. Le due giunzioni sono da una parte collegate fra loro e dall'altra con un generatore di corrente. Se si fa passare la corrente nel verso indicato in figura l'indice liquido si sposta a sinistra in seguito al riscaldamento dell'aria nel pallone 2 e al raffreddamento di quella nel pallone 1. Se si inverte il verso della corrente l'effetto si rovescia. L'effetto è reversibile e nettamente distinto dall'effetto Joule: quest'ultimo infatti, dipendendo dal quadrato della corrente, non cambia con la direzione della corrente.

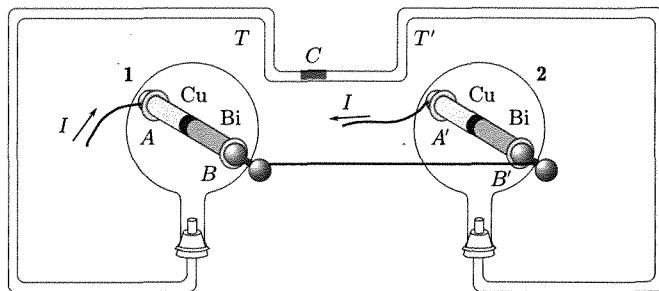


Fig. 16.18

⁽¹³⁾ Si dice spesso che gli effetti Seebeck e Peltier sono uno inverso dell'altro: ciò vuole esprimere solamente l'osservazione ora fatta, in quanto i due effetti sono sostanzialmente diversi.

Per descrivere quantitativamente l'effetto Peltier si può misurare la potenza termica, cioè la quantità di calore messa in gioco in un secondo a una giunzione: si trova che essa è proporzionale all'intensità di corrente I e può porsi nella forma

$$(38) \quad P_t = \Pi_{12} I$$

Π_{12} è chiamato coefficiente di Peltier e rappresenta la quantità di calore emessa per secondo quando la corrente unitaria fluisce dal metallo 1 a quello 2. La reversibilità del processo significa che $\Pi_{21} = -\Pi_{12}$. Si osservi che il coefficiente di Peltier, Π , ha le dimensioni di una forza elettromotrice e spesso viene anche indicato come f.e.m. Peltier.

La misura di Π può essere fatta con uno schema analogo a quello di figura 16.18 introducendo qualche perfezionamento: in particolare una delle giunzioni può essere posta in un calorimetro in modo da misurare con esattezza la quantità di calore sviluppata in un secondo (P_t). Se r è la resistenza elettrica dell'elemento contenente la giunzione posto nel calorimetro e la corrente passa nel verso 1 → 2

$$(39) \quad P_{t_1} = \Pi_{12} I + rI^2.$$

Rovesciando il senso della corrente si ha

$$(40) \quad P_{t_2} = -\Pi_{12} I + rI^2.$$

Le (39) e (40) consentono la determinazione di Π_{12} ; si osservi che per avere una buona precisione occorre rendere il termine rI^2 piccolo rispetto all'altro; ciò può ottersi facendo di notevole sezione i conduttori che realizzano la giunzione e che si trovano nel calorimetro.

Le f.e.m. di Peltier sono in genere dell'ordine del mV. Così per esempio a 0 °C:

bismuto-rame	21 mV
ferro-rame	3 mV
rame-zinco	$3 \cdot 10^{-2}$ mV

In queste giunzioni si ha sviluppo di calore se la corrente passa dal primo al secondo metallo.

Il verso dell'effetto, cioè il fatto che si abbia sviluppo o assorbimento di calore quando la corrente passa in corrispondenza alla giunzione dal metallo 1 a quello 2 (fig. 16.15c), è ovviamente legato al verso della f.e.m. termoelettrica (effetto Seebeck): se infatti quando questa giunzione è più calda rispetto all'altra la f.e.m. termoelettrica è diretta nel verso 1 → 2, l'effetto Peltier deve produrre in corrispondenza a una corrente nel verso 1 → 2 un abbassamento di temperatura e quindi un assorbimento di calore. Ciò è richiesto dalla conservazione dell'energia perché in caso contrario si avrebbe un innalzamento della temperatura della giunzione e quindi una f.e.m. termoelettrica diretta come la corrente: di conseguenza si produrrebbe un aumento della corrente stessa e così via; si otterebbe cioè una specie di moto perpetuo.

L'origine dell'effetto Peltier può essere vista nella maniera seguente. Se si prendono due metalli isolati essi posseggono livelli di Fermi diversi e gli elettroni liberi al livello di Fermi hanno diverse energie cinetiche e in genere diverse concentrazioni. Quando si crea il contatto, la f.e.m. di contatto fa sì che il livello di Fermi divenga unico nel sistema: ciò è ottenuto variando solamente l'energia potenziale dei livelli di uno dei due metalli: in conseguenza gli elettroni al livello di Fermi nei due metalli in

contatto non hanno la stessa energia cinetica, inoltre la loro concentrazione può essere differente.

Se non ci fossero queste differenze dovrebbe essere possibile una volta stabilito il contatto fra i due metalli far passare un elettrone da un metallo nell'altro senza variazione della sua energia.

Le differenze sono piccole (implicano termini di secondo ordine nello sviluppo in serie delle formule della statistica di Fermi); esse possono spesso essere trascurate e in prima approssimazione si può ritenere esatta l'affermazione ora fatta sul passaggio di un elettrone da un metallo all'altro. Se però si portano in conto queste differenze si trova che il passaggio di un elettrone da un metallo all'altro è accompagnato dalla liberazione alla interfaccia di una certa quantità di energia (positiva in una direzione e negativa nell'altra).

Se per esempio T_1 è l'energia cinetica di un elettrone al livello di Fermi nel primo metallo, T_2 quella nel secondo metallo e la differenza di potenziale al contatto $V_{C_{21}}$ è tale da accelerare l'elettrone nel verso $1 \rightarrow 2$, un elettrone che passa dal metallo 1 al metallo 2 attraverso la giunzione dovrebbe possedere l'energia cinetica

$$T_1 + eV_{C_{21}}$$

mentre esso si ritrova con l'energia cinetica T_2 : ciò significa che esso deve aver perduto la differenza nell'attraversare la giunzione cedendola all'ambiente. In ciò consiste l'effetto Peltier. Il processo è reversibile e, al pari di V_C , dipende dalla temperatura.

I tre effetti termoelettrici non sono indipendenti fra loro. Considerazioni termodinamiche consentono di stabilire le due relazioni (di Thomson):

$$(41) \quad \Pi_{12} = \alpha_{12}T$$

$$(42) \quad T \frac{d\alpha_{12}}{dT} = h_1 - h_2.$$

Esse consentono di determinare i coefficienti di Peltier e Thomson mediante misure della dipendenza dalla temperatura delle f.e.m. termoelettriche.

16.9. COPPIE TERMOELETTRICHE

Un sistema formato da due conduttori differenti le cui giunzioni sono tenute a temperature diverse, secondo lo schema di figura 16.15b, è in genere indicato con il nome di coppia termoelettrica.

Le coppie termoelettriche trovano una importante applicazione nella conversione diretta di energia termica in energia elettrica. Esse sono anche estesamente usate per misure di temperatura, collegate a millivoltmetri o, nei casi in cui occorra una maggiore precisione, a dispositivi potenziometrici per misure di f.e.m. Per tali misure esse hanno numerosi pregi come quelli della piccolissima capacità termica della giunzione che va posta a contatto con il corpo di cui si vuole determinare la temperatura, del piccolo volume, della notevole robustezza meccanica ecc. La risposta di una termocoppia è fornita in genere da una curva del tipo di quella di figura 16.16. Naturalmente nelle misure di temperatura conviene stare nella parte più ripida della risposta di una termocoppia in modo da avere

una sensibilità maggiore; per questa ragione si ricorre a coppie formate da diversi metalli nelle varie regioni di temperatura. A temperature prossime a quella ambiente si usa molto spesso la coppia ferro-costantana che fornisce circa $50 \mu\text{V}/\text{K}$. A temperature elevate fino a 1.800 K si usano coppie platino (platino-rodio) che danno circa $10-20 \mu\text{V}/\text{K}$. A temperature molto basse le coppie termoelettriche sono in genere poco sensibili: la coppia più usata è quella rame-lega di oro con circa l'1% di cobalto.

Le f.e.m. termoelettriche che si hanno nelle coppie sono dell'ordine di parecchi $\mu\text{V}/\text{K}$. Il valore esatto in una coppia dipende da molti fattori, come per esempio la presenza di impurità nei materiali, specie in corrispondenza alle giunzioni. Nell'uso pratico delle coppie, perciò, ciascuna coppia va calibrata.

Coppie termoelettriche sono anche usate per la realizzazione di misuratori di corrente ad alta frequenza e di energia raggiante (bolometri). Nel primo caso (fig. 16.19) la corrente in misura passa in una resistenza disposta nel vuoto: a contatto di questo elemento v'è la termocoppia la quale rivela la temperatura alla quale la resistenza si porta a causa dell'energia in essa dissipata per effetto Joule; questa temperatura è funzione della corrente.

Un bolometro molto sensibile è costituito (fig. 16.20) da un certo numero di coppie uguali in serie ($AB + AB + AB \dots$) le cui giunzioni sono alternativamente a contatto con un disco annerito che assorbe l'energia raggiante e con un corpo a temperatura fissa (T_0). Questi bolometri possono giungere a rilevare fasci di radiazione incidente aventi intensità di circa 10^{-9} W/cm^2 .

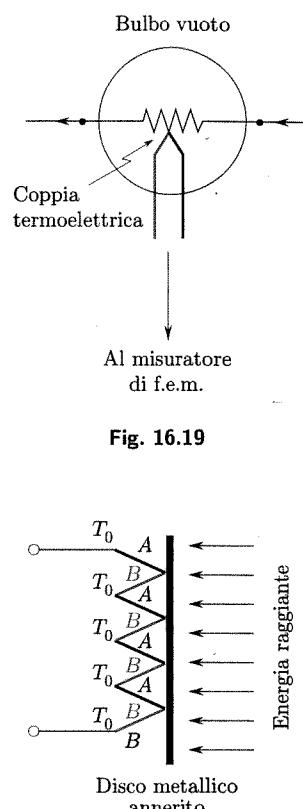


Fig. 16.19

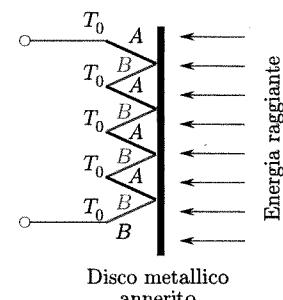


Fig. 16.20

16.10. EMISSIONE TERMICA DI ELETTRONI

È abbastanza semplice mostrare qualitativamente il fatto che da un metallo portato a una temperatura sufficientemente alta sfuggono particelle caricate negativamente (emissione termica). Si può per esempio pensare (fig. 16.21) a una lunga sbarra che viene scaldata a un estremo mediante una fiamma: un elettroskopio carico positivamente posto molto vicino alla superficie di una qualsiasi zona della sbarra si scarica rivelando la cattura di cariche negative. Numerose altre esperienze possono essere fatte in maniera da controllare meglio il processo, facendolo avvenire nel vuoto; alcune di queste, nelle quali le cariche emesse vengono fatte muovere in un campo elettrico e in un campo magnetico, permettono di determinare il rapporto q/m e di riconoscere che le cariche emesse, qualunque sia il metallo, sono elettroni; l'effetto di conseguenza prende il nome di *emissione termica di elettroni* o effetto termoelettronico⁽¹⁴⁾.

Uno studio quantitativo del processo può essere fatto secondo lo schema di figura 16.22. Una piastra del metallo in esame (per es. tungsteno) disposta nell'interno di un bulbo di vetro nel quale è fatto il vuoto spinto, viene scaldata per effetto Joule da una corrente che la attraversa direttamente o che passa in un resistore in contatto termico con la piastra: variando la tensione di alimentazione varia la temperatura della piastra. Nell'interno del bulbo di vetro è disposto, ad alcuni millimetri di distanza

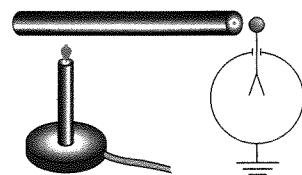


Fig. 16.21

⁽¹⁴⁾ Molto spesso questo effetto è indicato con il nome improprio di termoionico.

dalla prima piastra, un altro elettrodo metallico anche esso a forma di piastra (anodo) il quale mediante una seconda batteria (B) può essere portato a un potenziale diverso da quello del metallo in esame (catodo); un galvanometro è inserito nel circuito catodo-anodo per rivelare l'eventuale passaggio di una corrente.

Se la batteria A non è inserita nel circuito di riscaldamento del catodo questo è a temperatura ambiente come l'anodo e nessuna corrente passa nel galvanometro anche se la d.d.p. fra catodo e anodo è di centinaia di volt e tale da rendere positivo l'anodo. Se si scalda il catodo, quando questo raggiunge una temperatura sufficientemente elevata, si può rilevare una corrente.

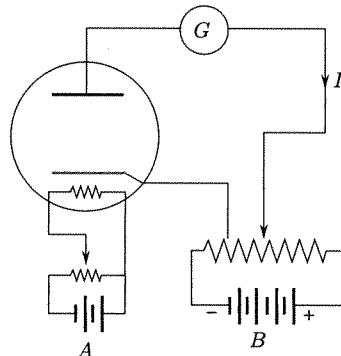


Fig. 16.22

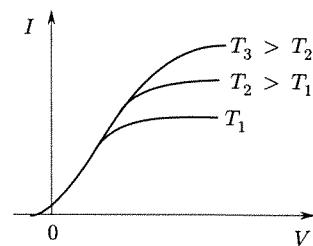


Fig. 16.23

Mantenendo fissa la corrente di riscaldamento del catodo, cioè la sua temperatura, e variando la d.d.p. fra catodo e anodo si ottengono curve come quelle in figura 16.23. La corrente che si ha per piccole tensioni negative è molto esigua; per tensioni positive la corrente cresce rapidamente (all'incirca proporzionalmente a $V^{3/2}$) e infine raggiunge un valore di saturazione caratteristico per ciascuna temperatura del catodo. Il numero di elettroni che fuoriescono al secondo dal catodo per unità di superficie può raggiungere valori molto elevati (10^{19} elettroni/cm²s) e a tali flussi corrispondono nel circuito correnti di parecchie diecine di milliamperi.

La saturazione corrisponde evidentemente al fatto che nelle corrispondenti condizioni di campo elettrico fra catodo e anodo tutti gli elettroni che sono emessi in un secondo dalla superficie del catodo vengono raccolti dall'anodo.

La emissione termoelettronica trova la sua spiegazione nel fatto che all'aumentare della temperatura aumenta l'energia cinetica media posseduta dagli elettroni liberi e un numero crescente di essi finisce per avere energia sufficiente a compiere il lavoro di estrazione (Φ), a superare cioè la barriera di potenziale che alla superficie del campione si oppone alla fuoriuscita degli elettroni.

Il calcolo della corrente di saturazione I_s può essere fatto usando la statistica di Fermi.

Supponiamo che la superficie del catodo sia normale a x . Potranno lasciare il metallo quegli elettroni liberi che giungono sulla superficie limite con una velocità superiore a un certo valore v_{x_0} determinato dalla condizione che la corrispondente energia cinetica sia pari al lavoro di estrazione

$$(43) \quad \frac{1}{2}mv_{x_0}^2 = \Phi.$$

D'altra parte il numero di elettroni con velocità comprese fra $(v_x \text{ e } v_x + dv_x)$, $(v_y \text{ e } v_y + dv_y)$, $(v_z \text{ e } v_z + dv_z)$ che provenendo dall'interno del metallo colpiscono la unità di superficie del metallo disposta normalmente a x in un secondo può essere posta nella forma

$$(44) \quad v_x f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z .$$

Di conseguenza il valore (assoluto) della corrente di saturazione che è data dal prodotto della carica elettronica per il numero di elettroni che giungono dall'interno sulla superficie con velocità nella direzione x maggiore di v_{x_0} (qualunque siano le componenti della velocità nelle altre due direzioni) risulta, per unità di superficie del catodo,

$$(45) \quad j_s = e \int_{v_{x_0}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f dv_x dv_y dv_z .$$

La funzione $f(v_x, v_y, v_z)$ va espressa facendo uso della statistica di Fermi⁽¹⁵⁾. In tale statistica

$$(46) \quad n(v) dv = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_F)/kT} + 1} dv_x dv_y dv_z .$$

Supponendo $(\epsilon - \epsilon_F) \gg kT$ e trascurando 1 rispetto all'esponenziale, si ottiene dalla (45)

$$(47) \quad j_s = \frac{4\pi emk^2}{h^3} T^2 e^{-\Phi/kT}$$

e introducendo i valori dei vari parametri

$$(48) \quad j_s = 120,4 T^2 e^{-\Phi/kT} \left(\frac{A}{\text{cm}^2} \right) .$$

Questa è la equazione di Richardson-Dushman. Una trattazione più precisa deve portare in conto:

1. il fatto che l'energia di Fermi e quindi Φ cambia leggermente con T ;
2. il fatto che in realtà elettroni con energia cinetica superiore al lavoro d'estrazione hanno una probabilità inferiore a uno di uscire effettivamente. Ciò si rispecchia nella introduzione nella (48) di un coefficiente minore di 1.

I risultati sperimentali per la corrente di saturazione, misurata a tensioni anodiche abbastanza elevate in modo che tutti gli elettroni che possono essere emessi dal catodo per emissione termica siano catturati dall'anodo, ma non tanto elevate che altri effetti (Schottky) assumano importanza, sono in accordo con una espressione di tipo (49)

$$(49) \quad j_s = AT^2 e^{-\Phi/kT} .$$

Il valore effettivo di A dipende in maniera notevole dallo stato della superficie e da impurità presenti. Si osservi che la misura di j_s in funzione di T consente la determinazione del lavoro di estrazione. La figura 16.24 mostra alcuni grafici che riportano il logaritmo di j_s/T^2 in funzione di $1/T$: si ottengono rette la cui inclinazione consente il calcolo di Φ .

La tabella 16.3 mostra valori sperimentali della costante A e del lavoro di estrazione ottenuti in questa maniera; sono anche indicati, per confronto, i lavori di estrazione determinati mediante misure di effetto fotoelettrico.

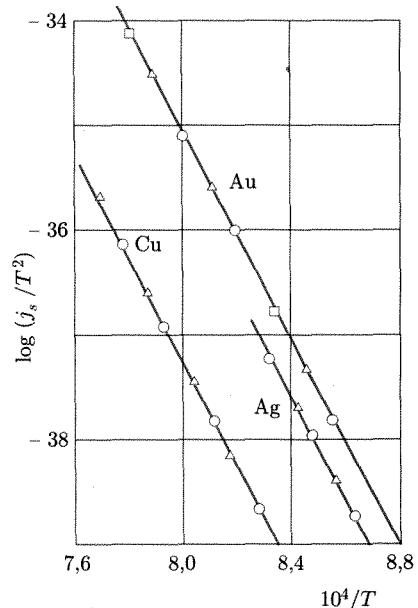


Fig. 16.24

⁽¹⁵⁾ L'uso della distribuzione di Maxwell nella (45) conduce a

$$(46) \quad j_s = en \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\Phi/kT}$$

essendo n la densità degli elettroni liberi.

Essa coincide con la prima formula empirica data da Richardson:

$$(47) \quad j_s = A \sqrt{T} e^{-eb/kT}$$

con A e b costanti.

Tabella 16.3

Metallo	$A \left(\frac{A}{\text{cm}^2(\text{K})^2} \right)$	Lavoro di estrazione Φ (eV)	
		Emissione termoelettronica	Effetto fotoelettrico
Cu	110	4,5	4,1
Ag	107	4,3	4,7
Au	100	4,25	4,8
Mo	50-115	4,2	
W	20-60	4,5	4,49
Pt	30	5,3	6,2
Ni	120	4,5	4,9
Th su W	60	2,6	
Ba su W	1,5	1,56	
Cs su W	3,2	1,36	
Cr	48	4,60	4,37

16.11. EFFETTO FOTOELETTRICO ESTERNO

L'effetto fotoelettrico esterno consiste nella liberazione di elettroni, attraverso la superficie di un solido, in conseguenza dell'assorbimento di energia raggiante; è questa l'energia che presa dall'elettrone gli consente di superare la barriera di potenziale che in condizioni di equilibrio lo tiene nella struttura. Si tratta di un effetto analogo a quello già visto (cap. 8, par. 8.2) che conduce alla liberazione di elettroni da molecole di un gas colpito da radiazione ultravioletta. Noi qui consideriamo il caso dei solidi metallici ma considerazioni analoghe valgono per gli altri tipi di solidi.

Una semplice dimostrazione dell'effetto si può avere con l'esperienza schematizzata in figura 16.25: luce ultravioletta proveniente da un arco o da una lampada a vapori di mercurio a pareti di quarzo (trasparenti alla luce ultravioletta) incide su una lastra di zinco collegata al conduttore centrale di un elettroscopio. Se l'elettroscopio è inizialmente caricato negativamente, all'arrivo della luce si vedono le foglie gradatamente ridurre la loro divergenza, cioè l'elettroscopio si scarica: ciò indica che il conduttore centrale perde cariche negative. Se l'elettroscopio è inizialmente carico positivamente l'arrivo della luce non produce una riduzione della carica dello strumento. Questa esperienza si interpreta pensando che la luce provochi la fuoriuscita di un certo numero di elettroni dal metallo: nella prima situazione essi si allontanano producendo una perdita della carica del conduttore centrale, nel secondo caso essi ritornano sul metallo attratti dalla carica positiva di questo.

Il fatto che le cariche che escono dal conduttore sotto l'azione della radiazione siano elettroni può essere provato da una misura della loro carica e dalla determinazione del rapporto q/m effettuata osservando la loro traiettoria in un campo magnetico.

Ciò premesso si può condurre uno studio quantitativo dell'effetto con lo schema della figura 16.26. In una ampolla di quarzo sono disposti una piastra del metallo in esame e una griglia; nell'ampolla è fatto il vuoto. Fra piastra e griglia è applicata una d.d.p., V e sulla piastra, attraverso la griglia, incide la luce. Con una tale disposizione si possono fare le seguenti due esperienze fondamentali per la caratterizzazione del processo.

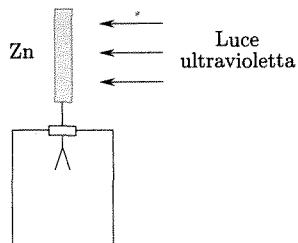


Fig. 16.25

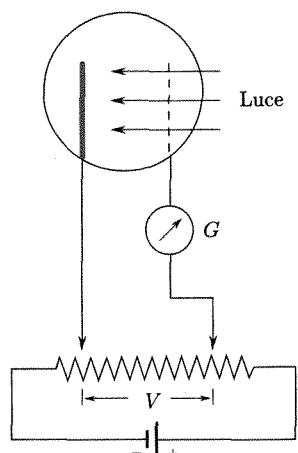


Fig. 16.26

- Se la illuminazione della piastra è tenuta costante e si varia V , si osserva una corrente come quella indicata nella curva a in figura 16.27.

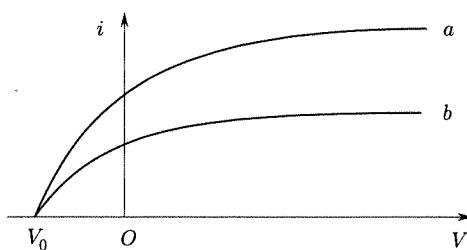


Fig. 16.27

Per tensioni che rendono la griglia positiva la corrente cresce con V fino a un valore di saturazione; per tensioni che rendono la griglia negativa decresce rapidamente e si annulla per una tensione V_0 di interdizione.

Ripetendo l'esperienza per una illuminazione diversa (per esempio minore) si trova una curva (b) che ha lo stesso valore di V_0 e una corrente di saturazione differente (più bassa). Il fatto che si possano avere correnti per piccole tensioni negative di griglia, che cioè elettroni emessi dalla piastra possano raggiungere la griglia nonostante il campo ritardante esistente fra placca e griglia, indica che alcuni elettroni che fuoriescono dal metallo possiedono un'energia cinetica. Il valore massimo di questa energia è dato da

$$(52) \quad T_{\max} = eV_0 .$$

2. Se si ripetono esperienze di questo genere con luci di diversa frequenza si trova un andamento della tensione di interdizione con la frequenza come quello di figura 16.28, che dà i risultati di Millikan per il sodio: è evidente che c'è una frequenza di soglia ν_0 al di sotto della quale la corrente fotoelettrica non può avversi, cioè l'effetto manca. La frequenza di soglia⁽¹⁶⁾ è caratteristica del materiale che costituisce la piastra illuminata.

È facile vedere come questi risultati non possano essere spiegati dalla teoria classica. In particolare:

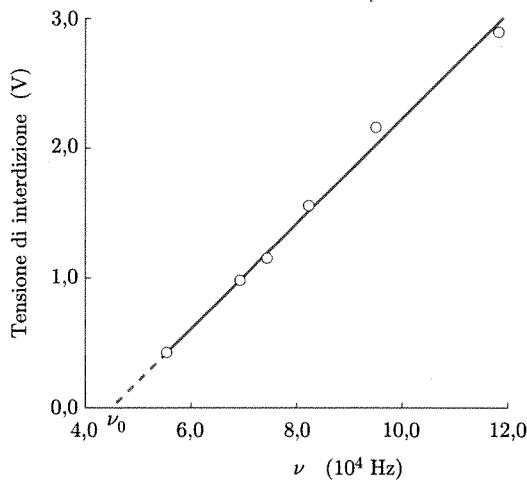


Fig. 16.28

⁽¹⁶⁾ ν_0 giace nel visibile solo per i metalli alcalini, bario e stronzio. Per gli altri metalli giace nell'ultravioletto.

1. la teoria classica farebbe prevedere che al crescere dell'intensità della radiazione, cioè dell'ampiezza dell'onda incidente (e dell'illuminazione della piastra) dovrebbe crescere l'energia cinetica degli elettroni emessi, al contrario si vede che la tensione di interdizione V_0 , che misura la massima energia cinetica degli elettroni, non dipende dalla intensità della luce;
2. la teoria classica farebbe prevedere che l'effetto si verifichi a qualsiasi frequenza purché la luce sia sufficientemente intensa; essa non indica l'esistenza di una frequenza di soglia (ν_0).

Come a più riprese è stato accennato, i risultati sperimentali sono brillantemente spiegati (Einstein) dalla ipotesi quantistica e questa spiegazione è stata storicamente un importante elemento per l'accettazione dell'ipotesi stessa. Ricordiamo che Planck aveva già introdotto l'idea della quantizzazione dell'energia limitatamente ai processi di emissione e assorbimento: nonostante che energia raggiante di frequenza ν venisse emessa e assorbita discontinuamente per quanti di grandezza $h\nu$, Planck riteneva che essa si propagasse nello spazio sotto forma di un'onda e.m. continua. Einstein fece l'ipotesi che la radiazione anche durante la propagazione conservasse la quantizzazione come se fosse un fascio di particelle (fotoni) di energia $h\nu$.

Questa ipotesi consente di spiegare completamente l'effetto fotoelettrico. Quando un fotone, colpendo la piastra costituita da un dato metallo, trasferisce la sua energia a un elettrone e questo fuoriesce, si può scrivere (Einstein)

$$(53) \quad h\nu = \Phi + T$$

essendo Φ il lavoro di estrazione e T l'energia cinetica con cui l'elettrone esce. Si vede allora che perché l'effetto fotoelettrico possa avvenire la frequenza della radiazione deve essere almeno tale (ν_0) che l'energia del fotone uguagli il lavoro di estrazione⁽¹⁷⁾

$$(54) \quad h\nu_0 = \Phi.$$

Se $\nu > \nu_0$, la differenza di energia

$$(55) \quad h\nu - h\nu_0 = T$$

rappresenta l'energia cinetica con la quale l'elettrone lascia il metallo: l'energia cinetica massima, e quindi la tensione di interdizione V_0 , (52), non dipende dalla intensità della luce che incide sulla superficie del metallo ma solo dalla sua frequenza. La intensità della luce determina esclusivamente il numero di quanti presenti, cioè il numero massimo di elettroni che possono essere emessi nell'unità di tempo e che, se raccolti completamente dalla griglia (anodo), determinano il valore della corrente di saturazione nel circuito di figura 16.26.

Questa corrente di saturazione è, per luce di una certa frequenza, rigorosamente proporzionale alla intensità luminosa. Su questo fatto è basato l'impiego di tubi come quello di figura 16.26 (celle fotoelettriche a vuoto) alimentate con tensioni sufficientemente alte per essere sicuramente nella regione di saturazione, per la misura della intensità luminosa o per altre misure fotometriche.

⁽¹⁷⁾ Lo studio dell'effetto fotoelettrico fornisce quindi un metodo per la determinazione del lavoro di estrazione relativo al metallo di cui è costituita la piastra illuminata.

16.12. EFFETTO FOTOELETTRICO INTERNO

Anche nel caso dei semiconduttori, come nel caso dei metalli, energia raggiante che incide sulla superficie di un campione può causare la fuoriuscita di elettroni, se la frequenza della radiazione è tanto elevata che l'energia del fotone sia sufficiente a portare un elettrone dal livello che esso occupa, per es. nella banda di valenza, al livello di ionizzazione. L'effetto è del tutto analogo a quello esaminato nel caso dei metalli e gli elettroni emessi dal semiconduttore irraggiato possono essere raccolti da un elettrodo disposto a un potenziale positivo rispetto all'emettitore: questo effetto fotoelettrico, che implica la fuoriuscita di elettroni dal cristallo, viene chiamato esterno, per distinguerlo da un altro che può verificarsi nel caso dei semiconduttori (e degli isolanti) e che consiste nel superamento di bande proibite di energia da parte di elettroni che assorbano un quanto di energia; in questo caso non si produce una fuoriuscita di elettroni dal cristallo ma si altera, in genere in maniera sostanziale, la densità dei portatori di carica e la conducibilità del cristallo. Questo secondo processo viene chiamato effetto fotoelettrico interno.

Consideriamo come esso gioca nel variare la conducibilità di un semiconduttore.

La conducibilità di un campione semiconduttore omogeneo può variare notevolmente quando esso è investito da una radiazione elettromagnetica (fotoconducibilità); le variazioni che si osservano dipendono dalla lunghezza d'onda della radiazione in una maniera piuttosto complessa a causa di vari processi che si possono verificare.

Il processo più importante che può produrre una variazione di conducibilità del semiconduttore illuminato è quello che corrisponde al passaggio di un elettrone dalla banda di valenza a quella di conduzione per effetto fotoelettrico interno: in questo caso due portatori di carica (elettrone e cavità) sono creati in ciascun evento e, purché la ricombinazione non avvenga in un tempo molto breve, l'assorbimento della radiazione produce un apprezzabile aumento della conducibilità. Tale effetto dovrebbe avere una soglia ben definita (come per l'effetto fotoelettrico esterno): solo quando ciascun fotone ha una energia ($h\nu$) maggiore della separazione (ϵ_g) fra le bande di valenza e conduzione, l'effetto fotoelettrico interno dovrebbe avvenire. La figura 16.29 mostra la fotoconducibilità in funzione della lunghezza d'onda per il germanio: la soglia calcolata da

$$(56) \quad h\nu_0 = h \frac{c}{\lambda_0} = \epsilon_g$$

(c = velocità di propagazione della luce) dovrebbe essere a $1,8 \mu\text{m}$ e questo è in realtà il valore che si ottiene estrapolando il tratto rettilineo discendente della curva al crescere di λ ; si vede però che è presente una coda che estende la fotoconduttività a $1,9-2 \mu\text{m}$.

Le ragioni di questa coda sono essenzialmente due: la prima è che il valore di ϵ_g ha, nell'interno del cristallo, piccole fluttuazioni dovute alla esistenza di distorsioni locali del reticolo causate da stati di tensione o dalle fluttuazioni termiche della densità. Di conse-

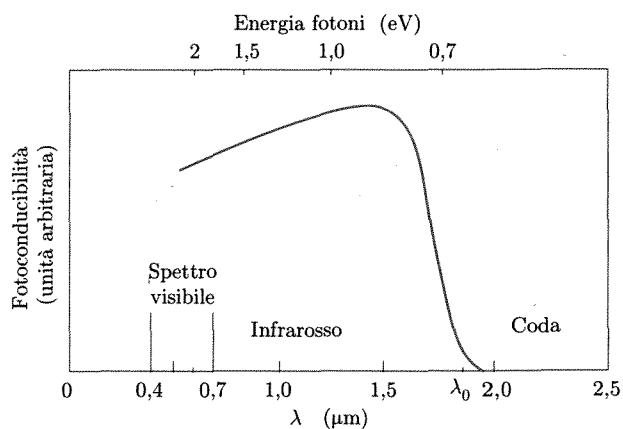


Fig. 16.29

Tabella 16.4

Semi-conduttore	λ_0 a 300 K (Å)
ZnS	3.400
ZnO	3.800
ZnSe	4.800
CdS	5.100
GaP	5.200
ZnTe	5.900
Se	6.000
Sb ₂ S ₃	6.300
CdSe	7.200
AlSb	7.800
CdTe	8.600
GaAs	9.200
InP	10.000
Si	11.000
Ge	18.000
GaSb	18.500
PbS	31.000
InAs	35.000
PbTe	40.000
PbSe	50.000
InSb	77.000

guenza un fotone avente energia di poco inferiore al valore medio ε_g ha una probabilità, sia pure piccola, di produrre una coppia potendo essere assorbito in una regione del cristallo ove il valore istantaneo del salto di energia è leggermente inferiore al valore medio ε_g . La seconda causa è dovuta alla circostanza che l'energia ε_g necessaria al passaggio di un elettrone dalla banda di valenza a quella di conduzione può essere messa a disposizione da un processo cooperativo nel quale scompaiano un quanto di radiazione elettromagnetica (fotone) e un quanto di vibrazione del reticolo (fonone). In tal caso vale infatti

$$(57) \quad h\nu_{\text{fotone}} = \varepsilon_g - (h\nu)_{\text{fonone}}$$

La tabella 16.4 riporta i valori della lunghezza d'onda di soglia (λ_0) per molti semiconduttori, calcolati a partire dalla (56).

La fotoconducibilità trova applicazione nella realizzazione di numerosi dispositivi che trasformano segnali luminosi in segnali elettrici e che vanno sotto il nome comune di celle fotoconduttrive. Lo schema più semplice per la attuazione di una di tali celle è indicato in figura 16.30. Un blocco semiconduttore munito di due contatti ohmici (realizzati mediante due piastre metalliche saldate alle estremità del blocco) è inserito in un circuito contenente un generatore di f.e.m. continua e un indicatore di corrente. Una radiazione elettromagnetica di frequenza opportuna che colpisca il semiconduttore produce una variazione della corrente nel circuito il cui valore dipende dal flusso luminoso incidente. Il passaggio da un valore di regime a un altro avviene in un tempo che è essenzialmente determinato dalle caratteristiche del processo di ricombinazione delle coppie in eccesso generate dalla radiazione. La durata del transitorio della corrente quando cambia il flusso luminoso limita il campo di frequenza di modulazione della luce per la cui rivelazione il dispositivo può essere impiegato. In realizzazioni pratiche di celle fotoconduttrive i tempi di salita e di decadimento dei segnali variano da circa un microsecondo ad alcune centinaia di microsecondi.

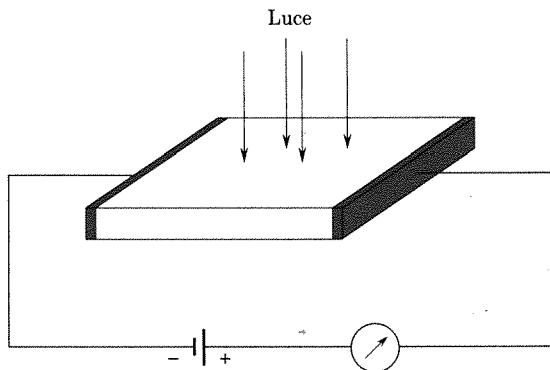


Fig. 16.30

La risposta di questi dispositivi al variare della frequenza della radiazione dipende dal semiconduttore usato. Nella tabella 16.4 sono state riportate le lunghezze d'onda di soglia per i vari conduttori intrinseci che possono essere usati. È evidente che, dato i valori bassi del salto di energia fra le bande di valenza e conduzione, è possibile avere con i semiconduttori degli efficienti rivelatori nel campo dell'infra-rosso.

La luce viene assorbita negli strati più superficiali del blocco semiconduttore, sicché nella realizzazione delle celle conviene che il materiale semiconduttore sia molto sottile; ciò consente di ottenere elevate variazioni percentuali della corrente nel dispositivo prodotte dalla radiazione incidente.

APPENDICI



Appendice I

I sistemi di unità di misura in elettromagnetismo

AI.1. INTRODUZIONE

Nel corso del testo si è fatto uso *essenzialmente* del Sistema Internazionale di Unità (SI) che, come si è detto, nella parte che si riferisce all'elettromagnetismo ha fatto proprie le scelte a base del sistema MKSA razionalizzato, proposto da G. Giorgi⁽¹⁾.

A volte abbiamo anche usato unità che non appartengono a questo sistema (per es. gauss, eV, barn). Le relazioni tuttavia sono state di norma scritte nel Sistema Internazionale.

Esistono altri sistemi, dei quali due sono ancora in uso più o meno esteso (CGS elettrostatico, CGS elettromagnetico). Per tale ragione noi desideriamo dare un cenno su di essi e indicare come le relazioni si trasformino nel passare da un sistema a un altro.

Va premesso, come noi abbiamo varie volte detto, che quando si esamina una certa parte della fisica (per es. la meccanica) la differenza fra le relazioni indipendenti tra grandezze fisiche e il numero di queste determina il numero di grandezze fondamentali e di conseguenza anche quello delle grandezze derivate. Per le grandezze fondamentali va fissata la unità mediante la scelta arbitraria di un campione.

È bene osservare che si può ridurre il numero di grandezze fondamentali aggiungendo in maniera arbitraria alle relazioni indipendenti fra le grandezze fisiche una nuova relazione: ciò può essere fatto utilmente assegnando un valore arbitrario a un coefficiente (parametro costante) che entra in una legge fisica. In ciò consiste quella che si chiama una convenzione di coordinazione. Per fare un esempio, nel caso della meccanica noi abbiamo considerato sistemi nei quali le grandezze fondamentali sono tre (per esempio lunghezza, massa, intervallo di tempo). Se si esamina la legge di gravitazione universale scritta nella maniera seguente

$$(1) \quad F = k \frac{mm'}{r^2}$$

e si conviene di considerare in tale relazione il coefficiente come una grandezza adimensionata (numero puro) di dato valore,

$$(2) \quad k = 1$$

si riduce a due il numero delle grandezze fondamentali.

⁽¹⁾ Vedi par. AI.6 e AI.9.

Se si esamina la propagazione della luce nel vuoto e la relazione che lega lo spazio percorso dall'onda e l'intervallo di tempo

$$(3) \quad x = ct$$

e si conviene di porre

$$(4) \quad c = 1,$$

il numero delle grandezze fondamentali si riduce a uno.

Se si prende la relazione che esprime l'energia di un quanto di radiazione

$$(5) \quad \varepsilon = h\nu$$

e si pone

$$(6) \quad h = 1,$$

si ottiene un sistema nel quale non c'è bisogno di introdurre un campione per alcuna grandezza, essendo le unità per le grandezze lunghezza, massa e intervallo di tempo fissate dalla condizione che esse devono soddisfare le posizioni (2) (4) e (6). Naturalmente quello ora indicato sarebbe un caso limite al quale non conviene ridursi altrimenti l'analisi dimensionale non sarebbe più possibile: non vi sarebbero più grandezze fondamentali. Si perderebbe cioè la grande utilità che l'analisi dimensionale ha nell'esame delle relazioni fisiche ai fini di evidenziare eventuali errori grossolani o di consigliare strutture di relazioni incognite. Procedere nel senso di fissare il numero di grandezze fondamentali pari alla differenza fra numero di relazioni indipendenti fra le grandezze fisiche fornite dallo studio dei problemi fisici e il numero delle grandezze stesse (scegliendo di conseguenza le unità mediante campioni) oppure introdurre un certo numero di convenzioni di coordinazione, è solo una questione di convenienza in metrologia.

Naturalmente secondo la scelta che si fa delle grandezze fondamentali e delle convenzioni di coordinazione, cambiano le dimensioni delle grandezze derivate. È evidente di conseguenza che le dimensioni di una grandezza fisica non rappresentano alcun carattere intrinseco della grandezza, ma dipendono dal sistema; l'analisi dimensionale inoltre va fatta nell'interno di ciascun sistema.

AI.2. SISTEMA CGS ELETTROSTATICO

Questo sistema ha come grandezze fondamentali meccaniche la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo, per le quali vengono scelte come unità il centimetro, il grammo e il secondo.

Per quello che riguarda le grandezze elettromagnetiche, invece di introdurre una quarta grandezza fondamentale, si usa una convenzione di coordinazione legata alla legge di Coulomb e da tale circostanza il sistema trae il suo nome di elettrostatico⁽²⁾.

⁽²⁾ Questa scelta, come quella del sistema CGS e.m. fu inizialmente fatta senza una precisa conoscenza della situazione, sperando di potere ricondurre le grandezze elettriche a grandezze meccaniche (per tale ragione questi sistemi presero il nome di *assoluti*). Si è poi visto che ciò non è in realtà possibile e quindi che la caratteristica dei sistemi CGS elettrici di esprimere le grandezze elettriche per mezzo delle grandezze meccaniche, in seguito

Ricordiamo (cap. 1, par. 1.2) che la legge di Coulomb è data, per quanto riguarda il modulo della forza, dalla espressione

$$(7) \quad F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

e che il coefficiente k_1 contiene in sé qualcosa che caratterizza il mezzo in cui le cariche si trovano. La condizione di coordinazione usata nel sistema che qui si descrive è quella di porre nel *vuoto*,

$$(8) \quad k_{1,0} = 1$$

cioè porre il coefficiente k_1 come privo di dimensioni e numericamente pari a uno nel vuoto. La (7) diviene, nel vuoto,

$$(9) \quad F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

L'unità elettrostatica di carica è quella carica puntiforme che posta nel vuoto alla distanza di un cm da una carica uguale, la respinge con la forza di una dine⁽³⁾.

Dalle posizioni poste scendono le dimensioni e le unità per le varie grandezze elettriche. Diamo qualche esempio.

Dalla relazione

$$(10) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

si vede che l'unità di intensità del campo elettrico è l'intensità di quel campo che esercita la forza di una dine sulla carica unitaria. La differenza di potenziale fra due punti vale una unità elettrostatica quando per portare la carica unitaria dal primo al secondo punto è svolto il lavoro di un erg. La capacità di un condensatore è unitaria quando dando alle sue armature la carica ± 1 si determina la differenza di potenziale di una unità elettrostatica.

Le dimensioni della carica, secondo la (9), sono

$$(11) \quad [Q] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}];$$

quelle del campo elettrico e del potenziale sono

$$(12) \quad [E] = \left[\frac{\text{forza}}{\text{carica}} \right] = [L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}],$$

$$(13) \quad [V] = \left[\frac{\text{lavoro}}{\text{carica}} \right] = \frac{[L^2 M T^{-1}]}{[L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}]} = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

alle posizioni poste, non è molto illuminante e costituisce in un certo senso un difetto di questi sistemi; ciò si rispecchia, fra l'altro, in dimensioni delle grandezze elettriche che sono espresse da relazioni complesse contenenti potenze frazionarie dei simboli delle grandezze fondamentali (L, M, T) (vedi tabella AI.2).

(3) A tale unità di carica del sistema CGS e.s. fu dato nel passato il nome di franklin. La maggior parte delle unità CGS e.s. non ha peraltro un nome, sicché per indicarle occorre nominarle per disteso: per es., "unità CGS e.s. di differenza di potenziale", "unità CGS e.s. di intensità del campo elettrico", e così via. Per ovviare all'uso di dizioni di questo genere, piuttosto scomode, è stato proposto di usare per le unità CGS il nome della corrispondente unità SI con il prefisso "stat" (che richiama il termine elettrostatico): così per es., lo statcoulomb (simbolo: statC), lo statvolt (statV), lo statvolt per metro (stat V/m) indicano, rispettivamente, le unità CGS e.s. di carica elettrica, di potenziale (o d.d.p.), di intensità del campo elettrico.

Per la capacità si ha

$$(14) \quad [C] = \left[\frac{\text{carica}}{\text{d.d.p.}} \right] = [L],$$

cioè le dimensioni sono quelle di una lunghezza sicché la capacità di un condensatore si misura in cm⁽⁴⁾.

Per il momento di dipolo elettrico l'unità è quella della unità di carica moltiplicata per il centimetro (statC · cm). Per l'intensità di polarizzazione (momento di dipolo per unità di volume) le dimensioni sono:

$$(15) \quad [P] = \left[\frac{QL}{L^3} \right] = \left[\frac{Q}{L^2} \right] = [L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}],$$

cioè le stesse di quelle del campo elettrico.

La espressione del teorema di Gauss nel vuoto assume le forme

$$(16) \quad \int_{S, \text{ chiusa}} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \sum q,$$

$$(17) \quad \text{div} \mathbf{E}_0 = 4\pi\rho,$$

e in presenza di un mezzo caratterizzato dall'intensità di polarizzazione \mathbf{P}

$$(18) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi(\rho - \text{div} \mathbf{P})$$

$$(19) \quad \text{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho.$$

Il vettore spostamento dielettrico assume la forma

$$(20) \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

e, al pari di \mathbf{P} , ha le stesse dimensioni di \mathbf{E} .

La relazione fra \mathbf{E} e \mathbf{D} si scrive

$$(21) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \mathbf{E}.$$

Si noti che in questo sistema la costante dielettrica assoluta è adimensionata: essa è numericamente pari alla costante dielettrica relativa nel Sistema Internazionale e per tale ragione la indichiamo con ϵ_r .

La suscettività dielettrica è definita mediante la relazione

$$(22) \quad \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E},$$

e quindi è

$$(23) \quad \epsilon_r = 1 + 4\pi\chi_e.$$

Va osservato che la suscettività nel sistema CGS e.s. differisce da quella nel Sistema Internazionale per un fattore 4π .

Passando alla corrente elettrica, l'unità CGS e.s. di intensità (statampere, stat A) è quella di una corrente che trasporta in un secondo una carica unitaria; le sue dimensioni sono

$$(24) \quad [i] = \left[\frac{\text{carica}}{\text{tempo}} \right] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}].$$

⁽⁴⁾ Per sottolineare il fatto che trattasi di una casuale coincidenza di dimensioni tra lunghezza e capacità elettrica, si usa parlare di *cm di capacità* o, meglio ancora, di *statfarad*.

Si può procedere in modo analogo per dedurre le dimensioni e le unità per le grandezze magnetiche (vedi tabella AI.2). Va però avvertito che il sistema CGS e.s. è essenzialmente usato per i calcoli in elettrostatica giacché nel magnetismo e nell'elettromagnetismo si usa di solito il sistema CGS e.m.

Vogliamo notare che l'avere posto l'espressione della legge di Coulomb nella forma (7), indicando il coefficiente di proporzionalità semplicemente con k_1 , porta di conseguenza la comparsa del fattore 4π al secondo membro della legge di Gauss: il flusso di \mathbf{E}_0 attraverso una superficie chiusa che circonda una carica q è $4\pi q$. In questo caso la presenza del fattore 4π potrebbe avere una ragione d'essere, in quanto si è effettuata una integrazione per angoli solidi estesa all'intero spazio e la misura dello spazio in steradiani è appunto 4π . In altri casi, e sono la maggior parte, non è così; per es., la formula che dà nel sistema CSG e.s. la capacità di un condensatore piano è $\epsilon_r S / 4\pi d$, e quella che dà la capacità di una sfera è $\epsilon_r r$: qui il fattore 4π compare in un caso in cui non v'è una configurazione sferica (condensatore piano) e non compare invece in un caso in cui tale configurazione esiste (condensatore sferico). Per queste ragioni Heaviside (1892) espresse il giudizio che la formula fondamentale della legge di Coulomb scritta nella forma (7) e formule analoghe in altri sistemi conducono a risultati che sembrano *formalmente irrazionali*.

È per un tale giudizio che il sistema CGS elettrostatico è quello che si chiama un sistema *non razionalizzato*. La sua razionalizzazione si può effettuare se si pone la legge di Coulomb nella forma

$$(25) \quad F = \frac{k'_1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

e si sceglie come prima

$$(26) \quad k'_{1,0} = 1.$$

In tal modo il fattore 4π scompare dalla formula della legge di Gauss, dalla capacità del condensatore piano e compare in risultati relativi a situazioni a simmetria sferica; per es. la capacità di un condensatore sferico diviene

$$(27) \quad C = 4\pi \epsilon_r R.$$

Ma in effetti il sistema CGS e.s. non viene razionalizzato e il suo uso è ormai di scarso interesse pratico.

AI.3. SISTEMA CGS ELETTRONAGNETICO

Questo sistema fa uso delle stesse tre grandezze fondamentali meccaniche del sistema precedente e di una convenzione di coordinazione che questa volta si riferisce alla legge di Coulomb magnetica. Dette m_1^* e m_2^* le masse magnetiche di due poli alla distanza r , tale relazione⁽⁵⁾ si scrive

$$(28) \quad F = k_2 \frac{m_1^* m_2^*}{r^2}.$$

⁽⁵⁾ Si ricordino le osservazioni fatte al cap. 5, par. 5.6, sulla validità di tale relazione. Si comprendono quindi le critiche che si possono fare sulla realizzazione dell'unità di misura di m^* . Per tale ragione molto spesso il sistema CGS e.m. viene introdotto facendo riferimento

La convenzione di coordinazione che viene posta è che il coefficiente k_2 sia adimensionato e nel vuoto valga 1:

$$(29) \quad [k_2] = [L^0 M^0 T^0]$$

$$k_{2,0} = 1.$$

L'unità di massa magnetica è quella di un polo puntiforme che posto nel vuoto a distanza di 1 cm da un altro polo uguale esercita su di esso la forza di una dine. Per le dimensioni e le unità delle altre grandezze si procede come per il sistema eletrostatico⁽⁶⁾. Per quanto riguarda l'unità d'induzione magnetica essa viene introdotta facendo riferimento alla relazione che esprime la forza su un conduttore rettilineo (lunghezza l) percorso da una corrente in un campo magnetico (cap. 4, par. 4.4)

$$(32) \quad \mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

L'unità d'induzione magnetica in unità e.m. è l'induzione del campo che esercita la forza di una dine per unità di lunghezza (1 cm) di un conduttore rettilineo in cui scorra la corrente unitaria e che è disposto normalmente al campo magnetico.

In questo sistema si trova che i vettori \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} hanno le stesse dimensioni e sono legati da

$$(33) \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$$(34) \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_r\mathbf{H}.$$

In questo caso μ è adimensionato; esso è pari a μ_r nel sistema MKSA e per questa ragione lo indicheremo con μ_r . Inoltre

$$(35) \quad \mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$$

$$(36) \quad \mu_r = 1 + 4\pi\chi_m.$$

Per quanto riguarda l'unità della intensità di corrente si utilizza la espressione della forza fra due elementi di corrente (30)

$$d\mathbf{F}_1 = i_1 i_2 \frac{dl_1 \cdot (dl_2 \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1^3}.$$

alla forza fra elementi di corrente (cap. 4, par. 4.8)

$$(30) \quad d\mathbf{F} = k_3 i_1 i_2 \frac{dl_1 \times (dl_2 \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1^3}$$

ponendo

$$(31) \quad k_{3,0} = 1$$

e assumendo tale coefficiente adimensionato.

⁽⁶⁾ Anche per le unità del sistema CGS e.m. v'è una situazione analoga a quella delle unità CGS e.s. per quanto riguarda la denominazione: sono molto poche infatti le unità cui nel passato fu dato un nome (per es., oersted, unità di intensità del campo magnetico; gauss, unità di induzione magnetica; maxwell, unità di flusso di induzione magnetica).

È stato perciò proposto di usare per tali unità lo stesso nome delle corrispondenti unità SI con il prefisso "ab" (che, dal latino "absolutus" richiama il fatto che si tratta di un sistema assoluto di unità); così, per es., la abamperspira al metro (simbolo: abAsp/m), l'abweber al metro quadrato (abWb/m²), l'abweber (abWb) indicano, rispettivamente, l'unità CGS e.m. di intensità del campo magnetico, di induzione magnetica, di flusso di induzione magnetica e per le grandezze elettriche l'abampere (abA), l'avolt (abV) ecc. indicano le unità CGS e.m. di intensità di corrente, di d.d.p. ecc.

Se si calcolano le dimensioni di alcune grandezze si ha,

$$(37) \quad [m^*] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}] \quad (\text{massa magnetica})$$

$$(38) \quad [B] = [H] = [L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}]$$

$$(39) \quad [i] = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}] .$$

Se si considerano i due sistemi CGS, elettrostatico ed elettromagnetico, si vede che per ogni grandezza elettrica essi forniscono in termini delle stesse grandezze fondamentali (L , M , T), dimensioni che sono diverse, e lo stesso vale per le unità di misura. Vogliamo ora esaminare il legame fra i due sistemi e vedere il rapporto fra le unità per la stessa grandezza elettrica nei due sistemi.

Se si considerano le dimensioni della intensità di corrente nei due sistemi si riconosce che il rapporto

$$(40) \quad \frac{[i]_{\text{e.s.}}}{[i]_{\text{e.m.}}} = [L T^{-1}]$$

ha le dimensioni di una velocità.

Se si compiono esperimenti misurando forze fra cariche e fra correnti nei due sistemi si trova che numericamente

$$(41) \quad \begin{aligned} 1 \text{ unità e.m. di carica} &= 2,998 \cdot 10^{10} \text{ unità e.s. di carica} \\ 1 \text{ abcoulomb} &= 2,998 \cdot 10^{10} \text{ statcoulomb} \end{aligned}$$

$$(42) \quad \begin{aligned} 1 \text{ unità e.m. di corrente} &= 2,998 \cdot 10^{10} \text{ unità e.s. di corrente} \\ 1 \text{ abampere} &= 2,998 \cdot 10^{10} \text{ statampere.} \end{aligned}$$

La velocità di $2,998 \cdot 10^{10}$ cm/sec che appare come rapporto fra le unità di carica o fra quelle di intensità di corrente nei due sistemi è quindi pari alla velocità della luce nel vuoto, c ,

$$(43) \quad \frac{i \text{ (in unità e.s.)}}{i \text{ (in unità e.m.)}} = c \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec.}$$

Il verificarsi di una tale circostanza non deve meravigliare se si pensa che la velocità di propagazione delle onde e.m. è legata a quelle caratteristiche elettriche e magnetiche del mezzo che sono rispecchiate nei coefficienti k_1 e k_2 .

Ricordiamo a tal riguardo che nel Sistema Internazionale abbiamo posto la legge di Coulomb nella forma

$$(44) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

e inoltre la legge di Coulomb magnetica è risultata (cap. 5, par. 5.6), nella forma (per il modulo)

$$(45) \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1^* m_2^*}{r^2} .$$

In tale sistema si è trovato per la velocità delle onde e.m. *nel vuoto* la relazione

$$(46) \quad c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1 .$$

Anche nel caso delle altre grandezze il rapporto delle corrispondenti unità nei due sistemi e.s. ed e.m. è sempre pari a una potenza a esponente intero (positivo o negativo) di c ⁽⁷⁾.

Vediamo per esempio di determinare i rapporti delle unità per la d.d.p. e la resistenza. Si osservi che il prodotto della corrente per la d.d.p. fornisce la potenza e che questa in entrambi i sistemi va misurata nella medesima unità (erg/sec). Ne segue che si deve avere

$$(47) \quad \frac{v \text{ (in unità elettrostatiche)}}{v \text{ (in unità elettromagnetiche)}} = \frac{1}{c}.$$

Dalla espressione della legge di Ohm si ricava poi per le resistenze che

$$(48) \quad \frac{R \text{ (u.e.s.)}}{R \text{ (u.e.m.)}} = \frac{1}{c^2}.$$

Si noti che anche il sistema elettromagnetico non è razionalizzato. Le stesse considerazioni fatte nel caso del sistema elettrostatico concernenti la comparsa del fattore 4π in formule nelle quali non si vede la ragione della sua presenza, possono essere ripetute: per es. tale fattore è presente nella espressione del teorema della circuitazione e in quello che dà l'induttanza di un solenoide rettilineo.

Anche questo sistema si può razionalizzare in maniera analoga a quella accennata per il sistema elettrostatico ma non indugiamo su questo punto poiché il sistema e.m. razionalizzato non è usato.

AI.4. SISTEMA MISTO O DI GAUSS

Il sistema CGS elettrostatico è stato usato essenzialmente nel campo dell'elettrostatica e quello elettromagnetico nella magnetostatica. Nel campo dell'elettromagnetismo viene a volte usato (specie in lavori teorici) un *sistema misto* nel senso che vengono usate unità e.m. per le grandezze magnetiche e unità elettrostatiche per le grandezze elettriche. Ciò implica di dover tener presente, nello scrivere le equazioni in cui intervengono grandezze dei due sistemi, del rapporto fra le loro unità (che sono come si è visto potenze intere, positive o negative, di c).

Così, per es., se si considera la legge di Ohm essa si scrive

$$(49) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

in quanto in essa compaiono tutte grandezze elettriche, da misurare tutte con unità prese dal sistema e.s.

Per ottenere invece le equazioni di Maxwell va ricordato che \mathbf{j} espresso in unità e.m. è $1/c$ volte \mathbf{j} espresso in unità e.s. e che \mathbf{E} in unità e.m. è c volte \mathbf{E} espresso in e.s. Si ottiene (usando \mathbf{D} e \mathbf{H})

$$(50) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c} \end{aligned}$$

⁽⁷⁾ Di conseguenza i numeri che nei due sistemi misurano una stessa grandezza sono molto diversi.

assieme a

$$(51) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$(52) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mathbf{H}.$$

Si ricordi che in questo sistema ϵ e μ sono grandezze adimensionate (ϵ_r , μ_r) che nel vuoto valgono 1.

Il sistema di Gauss è ancora un sistema non razionalizzato.

AI.5. SISTEMA PRATICO

Le unità del sistema pratico furono ottenute (1873)⁽⁸⁾ da quelle del sistema CGS e.m. moltiplicandole per opportune potenze di 10 in modo da renderle di grandezza opportuna per l'impiego pratico. Le unità e.m. risultano infatti o troppo grandi o troppo piccole rispetto alle grandezze con cui si ha di solito a che fare. Si ha in particolare

$$(53) \text{ un'unità pratica di carica (coulomb)} = 10^{-1} \text{ unità e.m. di carica}$$

$$(54) \text{ un'unità pratica di potenziale (volt)} = 10^8 \text{ unità e.m. di potenziale}$$

La tabella AI.1 indica i nomi delle principali unità pratiche e i fattori numerici di conversione nella unità CGS, e.s. ed e.m. (assumendo $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$).

Tabella AI.1

Grandezza	Unità pratica	Fattori di moltiplicazione per passare dalla grandezza espressa in unità pratiche alla grandezza in	
		unità e.s.	unità e.m.
carica	coulomb	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
intensità di corrente	ampère	$3 \cdot 10^9$	10^{-1}
potenziale	volt	1/300	10^8
potenza	watt	10^7	10^7
resistenza	ohm	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$	10^9
induttanza	henry	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$	10^9
capacità	farad	$9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}

Per quanto riguarda le unità meccaniche si è mantenuto il secondo come unità di intervallo di tempo, mentre per unità di lunghezza si è preso 10^9 cm (un quarto del meridiano terrestre) e per unità di massa 10^{-11} g .

⁽⁸⁾ In seguito (1881) accanto alle *unità pratiche assolute* definite mediante le unità del sistema CGS e.m., furono introdotte delle *unità pratiche internazionali* definite mediante campioni: per es. l'unità di corrente, l'ampere, fu definita mediante la quantità di sostanza che si deposita agli elettrodi in un ben determinato voltmetro, in un secondo.

La differenza fra le unità pratiche assolute e internazionali è molto piccola e di solito trascurabile.

La variazione delle unità meccaniche è resa necessaria dalla opportunità di avere tanto in meccanica quanto in elettromagnetismo l'energia e la potenza nelle stesse unità (joule e watt). I sistemi che soddisfano queste condizioni si dicono *coerenti* e tutti i sistemi che qui esaminiamo lo sono.

■ AI.6. SISTEMA MKSA E SI

Il sistema MKSA è costruito utilizzando le unità elettriche del sistema pratico e quelle meccaniche: metro, kilogrammo massa, e secondo. Ciò è reso possibile da una fortunata circostanza messa in evidenza da Giorgi nel 1901: le potenze di 10 scelte come rapporti fra le unità di corrente e di differenza di potenziale del sistema pratico e quelle del sistema CGS e.m. si combinano a far sì che le potenze hanno in elettricità come unità di misura il watt (10^7 erg); la stessa unità vale in meccanica se si scelgono come unità delle tre grandezze fondamentali il metro, il kg e il secondo.

In un tale sistema, come varie volte si è detto, viene scelta come quarta unità fondamentale l'ampère e il campione viene definito utilizzando la relazione che esprime la forza fra elementi di corrente. Sarebbe perfettamente equivalente fissare un'altra unità elettrica del sistema pratico.

Il sistema MKSA esiste nella forma non razionalizzata e in quella razionalizzata. Secondo una convenzione internazionale, alla quale hanno aderito quasi tutte le nazioni, compresa l'Italia, è stato deciso di usare tale sistema nella forma razionalizzata come parte del Sistema Internazionale di Unità (SI) (⁹); così abbiamo fatto nel testo, e così faremo nelle considerazioni che seguono.

La formula di Coulomb si scrive

$$[44] \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

La formula di Ampère per la forza fra due elementi di corrente [cap. 4, par. 4.8, eq. (53)] si scrive

$$(55) \quad dF = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{dl_1 \times (dl_2 \times \mathbf{r}_1)}{r_1^3}.$$

L'azione fra due elementi di corrente, come si è visto nel testo è, in realtà, nel magnetismo equivalente alla legge di Coulomb fra cariche puntiformi in elettrostatica. Per questo la (55) è qui considerata al posto della relazione che esprime la forza fra masse magnetiche che pure talvolta è presentata per introdurre il sistema MKSA. Va osservato inoltre che la forma di quest'ultima relazione (forza fra masse magnetiche) è influenzata dalla scelta che si compie nella definizione del momento magnetico di una spira e dalla funzione che nella trattazione del magnetismo assumono i vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} . Nella trattazione da noi seguita il vettore \mathbf{B} è stato usato quasi esclusivamente, dato che esso entra assieme a \mathbf{E} nell'espressione della forza che si esercita su una carica in moto. In tal caso noi abbiamo definito come momento magnetico di una spira (cap. 4, par. 4.9)

$$(56) \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n}.$$

(⁹) 11^a Conferenza Generale Pesi e Misure (1960). Una presentazione globale del SI che si riferisce a tutte le grandezze fisiche è fatta nel par. AI.9. Nei paragrafi seguenti useremo in maniera equivalente nell'elettromagnetismo le dizione MKSA razionalizzato e SI.

Ne consegue per il momento della coppia che si esercita su di essa quando è immersa in un campo \mathbf{B}

$$(57) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

La forza fra due masse magnetiche (con le limitazioni illustrate al cap. 5, par. 5.6) si scrive allora in modulo

$$(58) \quad F = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{m_1^* m_2^*}{r^2}.$$

Se invece si scegliesse di usare il vettore \mathbf{H} per esprimere le azioni sui dipoli magnetici, la definizione di momento magnetico di una spira va posta nella forma (cap. 4, par. 4.9)

$$(59) \quad \mathbf{m}' = \mu_0 \mu_r i S \mathbf{n}.$$

Ne segue

$$(60) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$$

e

$$(61) \quad F = \frac{1}{4\pi \mu_0 \mu_r} \frac{m_1'^* m_2'^*}{r^2}.$$

Dalla (55) si calcola facilmente la forza fra due conduttori paralleli (a distanza r) di lunghezza molto grande (infinita). La forza sul tratto l di uno dei conduttori, attrattiva o repulsiva secondo che le correnti hanno verso concorde o meno, ha modulo

$$(62) \quad F = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{l}{r}.$$

L'unità (ampère) per la quarta grandezza fondamentale (intensità di corrente) viene definita come quella corrente costante che passando in due lunghi e sottili conduttori paralleli disposti a distanza di 1 m nel vuoto produce su ciascuno di essi una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro di lunghezza.

Dalla (62) si deduce che deve essere

$$(63) \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$$

cioè il valore numerico di μ_0 risulta

$$(64) \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}.$$

Come si vede l'ampere è scelto proprio in modo che μ_0 assuma precisamente il valore semplice ora indicato. Si vede quindi che la scelta della unità per la quarta grandezza fondamentale (ampère), tutto sommato equivale alla scelta *a priori* del valore (64) per il coefficiente μ_0 .

Si osservi che nel sistema MKSA ε_0 e μ_0 sono grandezze dimensionate, e precisamente risulta

$$(65) \quad [\varepsilon_0] = [L^{-3} M^{-1} T^4 I^2],$$

$$(66) \quad [\mu_0] = [L M T^{-2} I^{-2}].$$

Tabella AI.2

Grandezza	Simbolo	CGS e.s.		CGS e.m.		MKSA razionalizzato		u.e.m.	u.MKSA raz.	u.MKSA raz.
		Dimensioni	unità	Dimensioni	unità	Dimensioni	unità			
lunghezza		L	centimetro (cm)	L	centimetro (cm)	L	metro (m)	1	10^2	10^2
massa	m	M	grammo (g)	M	grammo (g)	M	chilogrammo (kg)	1	10^3	10^3
tempo	t	T	secondo (s)	T	secondo (s)	T	secondo (s)	1	1	1
forza	F	LMT^{-2}	dine	LMT^{-2}	dine	LMT^{-2}	newton (N)	1	10^5	10^5
lavoro	L	L^2MT^{-2}	erg	L^2MT^{-2}	erg	L^2MT^{-2}	joule (J)	1	10^7	10^7
potenza	W	L^2MT^{-3}	erg/sec	L^2MT^{-3}	erg/sec	L^2MT^{-3}	watt (W)	1	10^7	10^7
carica	Q	$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	u.e.s. (franklin)	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$	u.e.m.	IT	coulomb (C)	c	$10^{-1}c$	10^{-1}
intensità di corrente	i	$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	u.e.s.	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	u.e.m.	I	ampère (A)	c	$10^{-1}c$	10^{-1}
differenza di potenziale, f.e.m.	V, f	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}t^{-1}$	u.e.s.	$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	u.e.m.	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	volt (V)	c^{-1}	10^8c^{-1}	10^8
resistenza	R	$L^{-1}T$	u.e.s.	LT^{-1}	u.e.m.	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ohm (Ω)	c^{-2}	10^9c^{-2}	10^9
capacità	C	L	u.e.s.	$L^{-1}T^2$	u.e.m.	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	farad (F)	c^2	$10^{-9}c^2$	10^{-9}
coeff. di auto o mutua induzione	L, M	$L^{-1}T^2$	u.e.s.	L	u.e.m.	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henry (H)	c^{-2}	10^9c^{-2}	10^9
intensità campo elettrico	E	$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	u.e.s.	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	u.e.m.	$LMT^{-3}I^{-1}$	volt/m	c^{-1}	10^6c^{-1}	10^6
spostamento elettrico	D	$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	u.e.s.	$L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}$	u.e.m.	$L^{-2}TI$	coulomb/m ²	c	$4\pi 10^{-5}c$	$4\pi 10^{-5}$
induzione magnetica	B	$L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}$	u.e.s.	$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	gauss	$MT^{-2}I^{-1}$	weber/m ²	c^{-1}	10^4c^{-1}	10^4
flusso magnetico	ϕ	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$	u.e.s.	$L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	maxwell	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	weber	c^{-1}	10^8c^{-1}	10^8
intensità del campo magnetico	H	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	u.e.s.	$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$	oersted	$L^{-1}I$	$\frac{\text{amperspire}}{\text{m}} \left(\frac{\text{Asp}}{\text{m}} \right)$	c	$4\pi 10^{-3}c$	$4\pi 10^{-3}$
costante dielettrica (permittività)	ϵ	—	—	$L^{-2}T^2$	u.e.m.	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	$\frac{\text{farad}}{\text{m}} \left(\frac{\text{F}}{\text{m}} \right)$	c^2	$[8,859 \cdot 10^{-12}]^{-1}$	$[8,859 \cdot 10^{-12}]^{-1}c^{-2}$
permeabilità magnetica	μ	$L^{-2}T^2$	u.e.s.	—	—	$LMT^{-2}I^{-2}$	$\frac{\text{henry}}{\text{m}} \left(\frac{\text{H}}{\text{m}} \right)$	c^{-2}	$[4\pi \cdot 10^{-7}]^{-1}c^{-2}$	$[4\pi \cdot 10^{-7}]^{-1}$

* Nella tabella per c va preso il valore numerico $3 \cdot 10^{10}$ (cm/sec).

* Le unità del sistema CGS e.s. per le grandezze elettriche si indicano anche mediante il nome della corrispondente unità del sistema MKSA preceduto dal prefisso stat.

* Le unità del sistema CGS e.m. per le grandezze elettriche si indicano anche mediante il nome della corrispondente unità del sistema MKSA preceduto dal prefisso ab.

Si ha quindi

$$(67) \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{farad}}{\text{m}} \left(\text{o} \frac{\text{coulomb}^2}{\text{newton} \cdot \text{m}^2} \right)$$

$$(68) \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{henry}}{\text{m}} \left(\text{o} \frac{\text{weber}^2}{\text{ampère} \cdot \text{m}} \right).$$

L'impiego del sistema MKSA ha il grande vantaggio di esprimere i risultati dei calcoli in elettromagnetismo direttamente nelle unità pratiche che vanno usate quando i risultati stessi devono essere trasferiti in pratiche applicazioni.

AI.7. CONFRONTO FRA DIMENSIONI E UNITÀ NEI VARI SISTEMI

Nella tabella AI.2 sono indicate per le principali grandezze le dimensioni nei vari sistemi, le unità e i rapporti fra le unità per la stessa grandezza nei vari sistemi. In quest'ultima parte sono ripetuti i risultati già riportati nella tabella AI.1. Il valore di c nella tabella può essere preso pari a $3 \cdot 10^{10}$ (cm/sec). Si osservi che nelle colonne delle unità dei sistemi CGS sono poste, per le unità elettriche, le dizioni u.e.s. (unità CGS elettrostatica) o u.e.m. tranne che per le poche che hanno ricevuto un nome particolare. Come si è già detto, tuttavia, si è convenuto di indicare le unità elettriche dei due sistemi usando gli stessi nomi dell'unità MKSA precedute dal prefisso *stat* per le unità CGS e.s. e dal prefisso *ab* per le unità CGS e.m.

Nella tabella AI.2 non sono menzionati i momenti magnetici, la intensità di magnetizzazione (momento magnetico per unità di volume) e le masse magnetiche per il fatto che il momento magnetico della spira può essere definito nelle due maniere

$$[56] \quad \mathbf{m} = iS\mathbf{n}$$

$$[59] \quad \mathbf{m}' = \mu_0 iS\mathbf{n},$$

cui conseguono per il momento della coppia le espressioni

$$[57] \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$[60] \quad \mathcal{M} = \mathbf{m}' \times \mathbf{H}$$

come si è descritto nel testo e ricordato nel precedente paragrafo. Non vi sono difficoltà a trovare le dimensioni e le unità nei vari sistemi per le varie grandezze una volta effettuata la scelta.

È bene notare che la tabella AI.2 fornisce i rapporti fra le unità per la stessa grandezza nei vari sistemi. Per esempio per la lunghezza il rapporto

$$\frac{\text{u. MKSA}}{\text{u.e.s.}} = 10^2$$

corrisponde al fatto che

$$1\text{m} = 10^2\text{cm}.$$

Naturalmente per una data lunghezza (per es. distanza fra A e B) il numero che la rappresenta (per es. 8,8) nel sistema MKSA è 10^{-2} volte quello che la rappresenta in un sistema CGS

$$L = 8,8\text{m} = 880\text{ cm}.$$

Ciò significa che per passare da una qualsiasi grandezza espressa per es. nel sistema MKSA al valore della stessa grandezza nel sistema CGS e.m. (o CGS e.s.) occorre moltiplicare la sua misura nel sistema MKSA per il rapporto $u_{\text{MKSA}}/u_{\text{e.m.}}$ (o rispettivamente $u_{\text{MKSA}}/u_{\text{e.s.}}$).

Una corrente di 5 A equivale a

$$5 \text{ A} = 0,5 \text{ u.e.m. (ab A)} = 0,5 \text{ c u.e.s. (stat A).}$$

Una induzione magnetica di 0,5 Wb equivale

$$0,5 \text{ Wb} = 0,5 \cdot 10^4 \text{ u.e.m.} = 5.000 \text{ ab Wb (gauss).}$$

■ AI.8. FORMULE EQUIVALENTI NEI VARI SISTEMI

Sulla base di quanto è stato detto nei paragrafi precedenti è possibile determinare di caso in caso quale espressione assuma in ciascun sistema una qualsiasi delle relazioni fisiche che abbiamo stabilito durante il corso.

A titolo di aiuto per lo studente vogliamo svolgere alcune considerazioni riassuntive. Tutto sommato i vari sistemi differiscono per il diverso valore che alcuni parametri vengono ad assumere. Possiamo allora scrivere le principali relazioni introducendo degli opportuni parametri ai quali vanno per ciascun sistema assegnati valori particolari: si ha in questo modo la possibilità di passare facilmente dalla espressione di una relazione fisica ottenuta in un sistema a quella valida in un sistema diverso. Per far ciò scriviamo la relazione di Coulomb nella forma

$$(69) \quad F = \frac{\alpha}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

e la relazione della forza fra due elementi di corrente

$$(70) \quad d\mathbf{F} = \frac{\alpha \mu_0}{4\pi \beta^2} i_1 i_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

Si hanno qui quattro parametri: $\alpha, \beta, \epsilon_0, \mu_0$.

È possibile vedere che le differenze fra i vari sistemi si assommano nei diversi valori dati a questi quattro parametri. Essi sono indicati nella tabella AI.3 per i sistemi da noi considerati.

Riuniamo in tabella AI.4 le principali formule scritte facendo uso dei quattro parametri. Ripetiamo che la espressione da esse assunte in un particolare sistema si ottiene inserendo in ciascuna formula i valori dei parametri $\alpha, \beta, \epsilon_0, \mu_0$ in quel sistema.

Le formule sono presentate sottolineando la corrispondenza fra relazioni analoghe nel campo elettrico e nel campo magnetico.

La velocità di propagazione delle onde è

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad , \quad c = \beta \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Il vettore di Poynting è

$$\mathbf{N} = \frac{\beta}{\alpha \mu_0 \mu_r} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Tabella AI.3

	CGS e.s.	CGS e.m.	misto (Gauss)	MKSA (raz.)
α	4π	4π	4π	1
β	1	1	$c \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)$	1
ϵ_0	1	$c^{-2} \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \right)$	1	$8,859 \cdot 10^{-12}$
μ_0	$c^{-2} \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} \right)$	1	1	$4\pi \cdot 10^{-7}$

Tabella AI.4

<p><i>Campo elettrico</i></p> <p>Forza fra cariche puntiformi [cap. 1, eq. (9); cap. 2, eq. (49)]</p> $F = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_r r^2}$ <p>Forza su una carica nel campo</p> $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ <p>Spostamento elettrico nell'intorno di una carica puntiforme</p> $D = \alpha \frac{q}{4\pi r^2}$ <p>Intensità del campo creato da una carica puntiforme [cap. 2, eq. (48)]</p> $\mathbf{E} = \frac{\alpha q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ <p>Intensità del campo e potenziale</p> $\mathbf{E} = -\nabla V$ <p>Condensatore</p> $V = \frac{q}{c}$ <p>Capacità di un condensatore piano [cap. 2, eq. (37)]</p> $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\alpha d}$ <p>Legge di Ohm</p> $V = iR \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ <p>Relazione fra \mathbf{E} e \mathbf{D} [cap. 2, eq. (28)]</p> $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ <p>Suscettività elettrica [cap. 2, eq. (22)]</p> $\chi = \frac{\epsilon_r - 1}{\alpha}$ <p>Intensità di polarizzazione</p> $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \alpha \mathbf{P}$ <p>Energia potenziale di un dipolo (\mathbf{p}) nel campo [cap. 1, eq. (114)]</p> $\mathcal{U} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ <p>Densità di energia nel campo [cap. 2, eq. (54)]</p> $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2\alpha} = \frac{D E}{2\alpha}$ <p>Relazioni fondamentali per il campo statico e stazionario [cap. 1, eq. (56), (75); cap. 2, eq. (24)]</p> $\left\{ \begin{array}{l} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \text{rot} \mathbf{E} = 0 \\ \text{div} \mathbf{E} = \alpha \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \end{array} \right.$	<p><i>Campo magnetico</i></p> <p>Forza fra elementi di corrente [cap. 4, eq. (62)]</p> $d\mathbf{F} = \frac{\alpha \mu_0 \mu_r}{4\pi \beta^2} i_1 i_2 \frac{dl_1 \times (dl_2 \times \mathbf{r}_1)}{r^3}$ <p>Forza su un elemento di corrente [cap. 4, eq. (28)]</p> $dF = \frac{i}{\beta} (dl \times \mathbf{B})$ <p>Intensità intorno a un conduttore rettilineo infinito [cap. 4, eq. (210)]</p> $H = \frac{\alpha}{\beta} \frac{i}{2\pi r}$ <p>Prima relazione di Laplace [cap. 4, eq. (43)]</p> $dB = \frac{\alpha \mu_0 \mu_r}{\beta} i \left(\frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$ <p>Induzione in un solenoide infinitamente lungo [cap. 5, eq. (9)]</p> $B = \frac{\alpha}{\beta} \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{l}$ <p>Avvolgimento [cap. 4, eq. (195); cap. 5 eq. (51)]</p> $\phi(B) = \frac{1}{\beta} Li$ <p>Induttanza di un solenoide [cap. 5, eq. (60)]</p> $L = \alpha \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l}$ <p>Relazione fra \mathbf{H} e \mathbf{B} [cap. 5, eq. (24)]</p> $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$ <p>Suscettività magnetica [cap. 5, eq. (25)]</p> $\chi = \frac{\mu_r - 1}{\alpha}$ <p>Intensità di magnetizzazione</p> <p>a) se si usa per il dipolo magnetico la definizione (59) di questa appendice e si usa la (60) per il momento meccanico si ha</p> $\mathbf{M} = \mu_0 \chi \mathbf{H} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}$ <p>b) se si usa per il dipolo magnetico la definizione (56) e si usa la (57) per il momento meccanico si hanno le formule (26) e (27) del cap. 5 del sistema SI.</p> <p>Energia potenziale di un dipolo in campo magnetico [cap. 4, eq. (75)]</p> <p>a) se si usa la definizione (59)</p> $\mathcal{U} = -\mathbf{m}' \cdot \mathbf{H}$ <p>b) se si usa la definizione (57)</p> $\mathcal{U} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ <p>Densità di energia [cap. 5, eq. (31)]</p> $\frac{B^2}{2\alpha \mu_0 \mu_r} = \frac{H B}{2\alpha}$ <p>Relazioni fondamentali per il campo stazionario [cap. 4, eq. (212), (213)]</p> $\left\{ \begin{array}{l} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\alpha}{\beta} i \\ \text{rot} \mathbf{H} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{j} \end{array} \right.$ <p>da cui si ricavano le relazioni per \mathbf{B}. Inoltre</p> $\text{div} \mathbf{B} = 0$ <p><i>Campo elettromagnetico</i></p> <p>Legge di Faraday-Neumann-Lenz [cap. 6, eq. (1)]</p> $f_i = -\frac{1}{\beta} \frac{d\phi}{dt}$ <p>Equazioni di Maxwell [cap. 8, eq. (28)] in un mezzo isotropo omogeneo</p> $\text{div} \mathbf{E} = \alpha \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}; \quad \text{div} \mathbf{B} = 0; \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \left[\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{j} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$
---	---

AI.9. SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ

È il sistema coerente adottato dalla Conférence Générale des Poids et Mesures e da convenzioni internazionali. Esso è costituito da sette unità di base e due (adimensionate) supplementari.

Le unità di base e le grandezze cui si riferiscono sono indicate nelle tabelle A1.5 e A1.6.

Tabella A1.5

Grandezza	Unità	Simbolo	Definizione
Lunghezza	metro	m	è la lunghezza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo della durata di $1/299.792.458$ s (delibera della 17 ^a Riunione, 1983)
Massa	kilogrammo	kg	è pari alla massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres) (delibera della 1 ^a Riunione, 1889). In Italia un campione secondario è conservato presso il Ministero dell'Industria (Servizio Metrico), Roma.
Intervallo di tempo	secondo	s	è la durata di $9.192.631.770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133. (Delibera 13 ^a Riunione 1967). In Italia il campione è presso l'Istituto Elettrotecnico Galileo Ferraris, Torino.
Intensità di corrente elettrica	ampère	A	è l'intensità di corrente che, mantenuta costante in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, e posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produce fra i due conduttori la forza di $2 \cdot 10^{-7} N$ su ogni metro di lunghezza. (Delibera 9 ^a Riunione, 1948). In Italia un tale campione è realizzato presso l'Istituto Elettrotecnico Galileo Ferraris.
Temperatura termodinamica	kelvin	K	è la frazione $\frac{1}{273,16}$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua (delibera 13 ^a Riunione, 1967). La delibera ha anche precisato che il kelvin va usato per esprimere sia la temperatura termodinamica, sia un intervallo (o differenza) di temperature. In Italia la scala termodinamica delle temperature è ottenuta mediante campioni presso l'Istituto di Metrologia Colonnetti del C.N.R. (Torino).
Quantità di sostanza	mole	mol	è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante quantità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni ecc., ovvero gruppi specificati di tali particelle. (Delibera 14 ^a Riunione, 1971).
Intensità luminosa	candela	Cd	è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ hertz e che ha una intensità di radiazione in quella direzione di 1/683 watt per steradiane. (Delibera 16 ^a Riunione, 1979).
Le due unità supplementari (adimensionate) sono:			
Angolo piano	radiane	rad	è l'angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.
Angolo solido	steradiane	sr	è l'angolo solido al centro che su una sfera intercetta una calotta di area uguale a quella del quadrato il cui lato ha la lunghezza del raggio.

Tabella AI.6

Grandezza	Unità SI	Simbolo	Espressione dell'unità in termini delle	
			unità di base	altre unità SI
frequenza	hertz	Hz	S^{-1}	
forza	newton	N	$m \ kg \ s^{-2}$	J/m
pressione	pascal	Pa	$m^{-1} \ kg \ s^{-2}$	N/m^2 , J/m^3
energia, lavoro, quantità di calore	joule	J	$m^2 \ kg \ s^{-2}$	Nm
potenza	watt	W	$m^2 \ kg \ s^{-3}$	J/s
quantità di elettricità, carica elettrica	coulomb	C	As	
differenza di potenziale forza elettromotrice	volt	V	$m^2 \ kg \ s^{-3} \ A^{-1}$	W/A, J/C
capacità elettrica	farad	F	$m^{-2} \ kg^{-1} \ s^4 \ A^2$	C/V
resistenza elettrica	ohm	Ω	$m^2 \ kg \ s^{-3} \ A^{-2}$	V/A
conduttanza	siemens	S	$m^{-2} \ kg^{-1} \ s^3 \ A^2$	A/V
flusso di induzione magnetica	weber	Wb	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ A^{-1}$	Vs
induzione magnetica	tesla	T	$kg \ s^{-2} \ A^{-1}$	Wb/m ²
induttanza	henry	H	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ A^{-2}$	Wb/A

La tabella indica per molte grandezze derivate le unità nel SI, i simboli e le espressioni dell'unità in termini delle unità di base e di altre unità SI



Appendice II

Calcolo vettoriale

AII.1. SINTESI DELLE REGOLE

Per comodità dello studente vengono raccolte nella presente appendice alcune regole di calcolo vettoriale che abbiamo introdotto e usato durante il corso. Esse sono in aggiunta a quelle presentate nelle nozioni sui vettori contenuti nel primo volume.

1. Prodotto scalare di due vettori **A** (di componenti A_x, A_y, A_z secondo gli assi ortogonali x di versore **i**, y di versore **j**, z di versore **k**) e **B** (B_x, B_y, B_z)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

essendo A, B i moduli dei vettori e θ l'angolo da essi determinato. Il prodotto scalare di un versore per se stesso vale 1; quello per un diverso versore della terna di assi ortogonali vale zero.

Il prodotto scalare di due vettori normali fra loro è nullo.

2. Prodotto vettoriale

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - B_y A_z) + \mathbf{j}(A_z B_x - B_z A_x) + \mathbf{k}(A_x B_y - B_x A_y)$$

Il prodotto vettoriale **A** × **B** è un vettore normale al piano determinato da **A** e **B** diretto nel verso dal quale si vede il vettore **A** ruotare in verso antiorario per spostarsi verso **B** percorrendo l'angolo $\theta < \pi$ determinato dai vettori. Il modulo del vettore è

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta.$$

Il prodotto vettoriale di un versore per se stesso è zero; il prodotto vettoriale di un versore per un versore normale fornisce un versore normale ai due

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.

3. Prodotto misto e uno scalare

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

Segue dallo scambio delle righe nel determinante la regola

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

4. Operatore nabla. Si tratta di un operatore differenziale vettoriale che può essere applicato tanto a grandezze scalari quanto a grandezze vettoriali e può entrare in prodotti scalari e vettoriali

$$\nabla(\) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(\) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(\) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(\)$$

avendo indicato con $()$ la grandezza su cui opera.

5. Gradiente di una funzione scalare $\mathcal{U}(x, y, z)$ continua e differenziabile della posizione (x, y, z) è il vettore

$$\text{grad } \mathcal{U} = \nabla \mathcal{U} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right)$$

6. Campi conservativi. Un campo vettoriale \mathbf{A} si dice conservativo se accade che per qualsiasi linea chiusa l nel campo è

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

In tal caso esiste una funzione scalare della posizione (funzione potenziale) $\mathcal{U}(x, y, z)$ tale che

$$A_x = - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$$

$$A_y = - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$$

$$A_z = - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}$$

e quindi

$$\mathbf{A} = - \text{grad } \mathcal{U}.$$

7. Divergenza di un vettore. Sia \mathbf{A} il vettore. Si definisce divergenza di \mathbf{A} lo scalare

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

È facile vedere che

$$\text{div } \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \nabla \cdot \mathbf{A}.$$

8. Flusso di un vettore e teorema della divergenza. Se si considera un elemento di superficie dS in un campo vettoriale \mathbf{A} e si orienta la normale \mathbf{n} a S in uno dei due versi possibili, si definisce flusso attraverso dS

$$d\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Il flusso attraverso una superficie finita è

$$\phi_S(\mathbf{A}) = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Il teorema della divergenza (cap. 1, par. 1.7) dice che se le componenti di \mathbf{A} sono continue e derivabili e si considera una *superficie chiusa* S il flusso uscente da essa vale

$$\phi_S(\mathbf{A}) = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau$$

essendo τ il volume racchiuso da S . E per un elemento di volume

$$d\phi(\mathbf{A}) = \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau.$$

La divergenza di un vettore quindi serve a rappresentare il flusso uscente da un elemento di volume.

Un campo vettoriale per il quale in ogni punto $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ si dice solenoidale.

9. Rotore di un vettore. Esso è un vettore (vol. 1, cap. 8, par. 8.9) definito da

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{curl} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

È immediato vedere che

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Un campo vettoriale per il quale accade che in ogni punto sia $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ si chiama irrotazionale. Vedremo fra breve che in tal caso esiste una funzione scalare della posizione $\mathcal{U}(x, y, z)$ tale che $\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \mathcal{U}$.

Se si applica l'operatore div a un vettore $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ è facile vedere che il risultato totale è zero

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0.$$

10. Teorema di Stokes (cap. 1, par. 1.11). In un campo vettoriale \mathbf{A} si consideri una curva chiusa, γ , e una qualsiasi superficie S che ha γ come orlo. Si scelga su γ un verso positivo di percorrenza, e si consideri positiva la normale \mathbf{n} all'elemento dS orientata nel verso da vedere antiorario il verso positivo di percorrenza della γ . Se il vettore \mathbf{A} è ovunque continuo e derivabile si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

essendo $d\mathbf{l}$ l'elemento di γ . La circuitazione del vettore \mathbf{A} lungo γ è pari al flusso del $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ attraverso S .

Da questa relazione si vede che se il campo è irrotazionale ($\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ ovunque) deve essere per qualsiasi γ

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

cioè il campo \mathbf{A} è conservativo e quindi esiste una funzione potenziale $\mathcal{U}(x, y, z)$ tale che

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} \mathcal{U}.$$

11. Operatori del secondo ordine; operatori di Laplace. Abbiamo considerato tre operatori (grad, div, rot). Si può pensare di ripetere due operazioni successivamente e si ottengono nuovi operatori tutti del secondo ordine.

Le combinazioni possibili sono

- a. div grad \mathcal{U} essendo \mathcal{U} una funzione scalare
- b. rot grad $\mathcal{U} = 0$
- c. grad div \mathbf{A}
- d. div rot $\mathbf{A} = 0$
- e. rot rot \mathbf{A}

Gli operatori b), d) come si è detto (punto precedente e 9.) danno sempre risultato nullo.

L'operatore a) prende il nome di operatore di Laplace (Δ) o laplaciano.

Facendo i calcoli si ha

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathcal{U} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2}.$$

Usando l'operatore nabla

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \mathcal{U} = \nabla^2 \mathcal{U}.$$

Il laplaciano è molto frequentemente indicato come ∇^2 . Si noti che questo operatore agisce su una grandezza scalare e fornisce una grandezza scalare.

Gli altri due operatori del secondo ordine (c, e) non vengono usati separatamente ma nella combinazione

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Si tratta di un vettore che ha come componenti

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \Delta A_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \Delta A_y$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \Delta A_z$$

Abbiamo indicato queste componenti come $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ perché ciascuna di esse rappresenta il laplaciano delle componenti A_x, A_y, A_z . Di conseguenza l'operatore (grad div – rot rot) prende il nome di operatore di Laplace vettoriale

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = i\Delta A_x + j\Delta A_y + k\Delta A_z = \nabla^2 \mathbf{A}$$

In conclusione si può avere un operatore di Laplace che agisce su una funzione scalare e dà uno scalare

$$\nabla^2 \mathcal{U} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2}$$

e un operatore di Laplace (vettoriale) che agisce su un vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i} \nabla^2 A_x + \mathbf{j} \nabla^2 A_y + \mathbf{k} \nabla^2 A_z$$

e che fornisce un vettore avente come componenti secondo x, y, z i laplaciani di A_x, A_y, A_z .

12. Relazioni fra grad, div, rot, ∇^2 . Esprimendo gli operatori div, grad, rot e ∇^2 si ottengono varie utili relazioni vettoriali. Si stia attenti a non cambiare l'ordine fra operatore e grandezza su cui opera:

- a. tutti gli operatori sono lineari: applicati cioè a una somma di grandezze danno un risultato che è la somma di quelli ottenuti applicando l'operatore a ciascuna grandezza successivamente.
- b. se u, v sono funzioni scalari e \mathbf{A}, \mathbf{B} funzioni vettoriali si trova, usando l'espressione di ∇^2 ,
 1. $\text{div}(u\mathbf{A}) = u \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } u$
 2. $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$
 3. $\text{rot}(u\mathbf{A}) = u \text{ rot } \mathbf{A} + \text{grad } u \times \mathbf{A}$
- c. Alla lista conviene aggiungere le relazioni già stabilite nei paragrafi precedenti.
 4. $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$
 5. $\text{rot grad } u = 0$
 6. $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$
e la
 7. $\text{grad}(u v) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u$
che si deduce dalla definizione di gradiente.

Bibliografia

- [1] G. BARZILAI, *Fondamenti di elettromagnetismo*, Siderea, Roma, 1960.
- [2] R. BECKER, *Teoria dell'elettricità*, Sansoni, Firenze, 1949.
- [3] M. BORN, E. WOLF, *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [4] G. BRUHAT, *Cours de physique générale - Electricité*, Masson, Paris, 1963.
- [5] W. CRAWFORD DUNLAP, *An introduction to semiconductors*, Wiley, New York, 1957.
- [6] E.G. CULLWICK, *Electromagnetism and relativity*, Longmans Green, London, 1957.
- [7] W. EHRENBERG, *Electric conduction in semiconductors and metals*, Clarendon, Oxford, 1958.
- [8] N.B. HANNAY, *Semiconductors*, Reinhold, New York, 1960.
- [9] G.P. HARNWELL, *Principles of electricity and electromagnetism*, McGraw Hill, New York, 1949.
- [10] A.F. IOFFE, *Physics of semiconductors*, Infarssearch Limited, London, 1957.
- [11] H.H. JEANS, *The mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge.
- [12] P. KIRÉEV, *La physique des semiconducteurs*, MIR, Moscou, 1975.
- [13] C. KITTEL, *Introduzione alla fisica dello stato solido*, Boringhieri, Torino, 1971.
- [14] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *The classical theory of fields*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1951.
- [15] H. MARGENAU, G.M. MURPHY, *The mathematics of physics and Chemistry*, Van Nostrand Co, Princeton, 1956.
- [16] P.M. MORSE, H. FESHBACH, *Methods of theoretical physics*, McGraw Hill, New York, 1953.
- [17] E. PERSICO, *Introduzione alla Fisica Matematica*, Zanichelli, Bologna.
- [18] S.A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves*, Van Nostrand, Princeton, 1943.
- [19] J.N. SHIVE, *I semiconduttori*, Ed. Ambrosiana, Milano, 1964.
- [20] W. SHOCKLEY, *Electrons and holes in semiconductors*, Van Nostrand, New York, 1950.
- [21] J.C. SLATER, N.H. FRANK, *Electromagnetism*, McGraw Hill, New York, 1947.
- [22] R.A. SMITH, *Semiconductors*, University Press, Cambridge, 1961.
- [23] A. SOMMERFELD, *Electrodynamics*, Academic Press, New York, 1952.
- [24] E. SPENKE, *Electronic semiconductors*, McGraw Hill, New York, 1958.
- [25] J.A. STRATTON, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Einaudi, Torino, 1952.
- [26] N. TRALLI, *Classical electromagnetic theory*, McGraw Hill, New York, 1963.
- [27] T. VON KARMAN, M.A. BIOT, *Mathematical methods for Engineering*, McGraw Hill, New York.

Indice analitico

- Ab (prefisso delle unità del sistema CGS e.m.), 682, 689
- Abbe
 - formula di, 478
 - invariante di, 478
- aberrazione, 490-1
 - cromatica, 490
 - sferica, 491
 - stellare, 455
- Abraham, 443 ss.
- accumulatori, 136
- acuità visiva, 495, 591
- adattamento di impedenza (gen.), 367-8
- ago magnetico, 264, 267-70
- alternatore (gen.), 330, 389
 - monofase, 389
 - trifase, 389
- ammettenza
 - caratteristica del mezzo, 418
 - complessa nei circuiti elettrici, 354, 356, 361-3, 378
 - in parallelo, 362
- Ampère, André Marie, 189
- ampère, unità di misura
 - dell'unità di corrente, 8, 11, 122, 216-8, 687, 688, 692
 - dell' (def.), 216-8, 687
- Ampère
 - legge della forza magnetica di, 216, 217
 - teorema della circuitazione di, 231-5
 - teorema di equivalenza di, 190, 219
- amperometri
 - a filo caldo, 134
 - a magnete permanente, 221 ss.
 - elettrodimanici, 221 ss.
 - modifica della portata degli, con gli shunt, 145
- analizzatore (di polarizzazione), 524, 536
- anastigmatico, 464
- anelli di Newton, 559
- anello carico
 - campo el. creato da un, sui punti dell'asse, 23
- anello di guardia, 69
- angolo di Brewster, 426, 523
- angolo limite, 425
- anisotropia
 - ferromagnetica, 298-300
 - ottica, 525, ss., 527
- annichilazione (della coppia elettrone-positrone), 15
- antenne
 - a dipolo, 47
 - a dipolo oscillante, 436 ss.
- antiferromagnetismo, 310-3
- antirisonanza, 378
- apertura numerica, 593
- apertura relativa, 496
- aplanatici (punti), 480
- approssimazione parassiale, 465
- arco elettrico, 161, 374
- asse
 - della lente, 484
 - ottico, 462, 530-2, 536
- assi sieletrici principali, 527
- assorbimento
 - fenomeno dell', della radiazione, 613
 - di onde e.m. di un conduttore, 428-9
- astigmatico, 464
- astigmatismo, 491, 495
- Aston, spazio scuro di, 158
- atomo, 4, 10 ss.
- attività ottica, 539
- autofocheggiamento, 626
- autoinduzione, v. coefficiente di autofocheggiamento, 626
- azioni, v. forze e coppie
- bande (per gli elettroni nei cristalli), 172, 650 ss., 671
- bastoncini, 494
- betatron, 332
- bilancia di corrente, 218
- binocolo, 502
- Biot e Savart, legge di, 610
- bistabilità ottica, 628-9, 632
- bobine, v. solenoide
- Bora M., 443
- Bragg, legge di, 609-10
- bremssstrahlung, (radiazione di frenamento), 608
- Brewster, angolo di, 426, 523
- bussola, 270 (v. anche ago magnetico)
- calamita, 263
- calore specifico, 650
 - per mole, 180
- cammino ottico, 548
- campi vettoriali (v. anche vettori)
 - conservativi (def.), 696
 - irrotazionali (def.), 697
- campo coercitivo, 262
- campo demagnetizzante, 265
- campo di Lorentz, 111-3
- campo di Onsager, 113
- campo elettrico (v. anche forze el., intensità del, linee di forza del,)
 - elettrostatico nei dielettrici (gen.), cap. 2, 83-117
 - elettrostatico nel vuoto (gen.), 18-81
 - alla superficie di un conduttore, 34
 - alla superficie di separazione di due dielettrici, 92-3
- creato da
 - distribuzioni di cariche puntiformi, 20
 - una carica puntiforme, 20
 - una distribuzione di cariche a simmetria sferica, 32
 - una distribuzione di volume di cariche, 21

- una distribuzione superficiale di cariche, 22
- una distribuzione uniforme in un cilindro, 33
 - di un dipolo, 48
 - di un doppio strato, 35
 - di uno strato piano, 24, 34
 - energia del, 62-5, 95-6
 - leggi fondamentali, 73-4
 - linee di forza, 25, 66
 - locale, 111, 293
 - macroscopico, 84, 103
 - sull'asse di un anello, 23
 - unità di misura, 19
- campo elettromagnetico, cap. 6, 317 ss., cap. 8, 399 ss.
 - (v. anche induzione e.m., intensità del campo el., induzione magnetica, ecc.)
- campo elettromotore, 136
- campo magnetico (v. anche forze magnetiche, induzione magnetica, intensità del campo magnetico, energia del, ecc.)
 - magnetostatico nella materia (gen.), capo. 5, 251 ss.
 - magnetostatico nel vuoto (gen.), cap. 4, 189 ss.
 - alla separazione di due mezzi, 258-60
 - creato da correnti, 209
 - creato da una carica in moto, 210
 - microscopico, 84
 - molecolare, 293
- campo magnetico rotante, 386-8
- campo magnetico terrestre, 313-5
- campo, profondità di, 497
- candela, 492
- cannocchiale, 501
 - prosmatico, 502
- caos ottico, 631-7
- capacità (gen.), 58-62, 131
 - coefficienti di, 57
 - dei condensatori, v. condensatori
 - unità di, 58
- caratteristica tensione corrente
 - per componenti circuituali attivi, 374
 - per un conduttore, 127, 129, 132
 - per un gas, 154 ss.
- carica di un condensatore, 186
- carica elettrica (v. anche campo el., forze, densità di, corrente el., ecc.) (gen.), 3 ss.
- campo e.m. creato da una, in moto, 443 ss.
- conservazione della, 14
 - dell'elettrone, 13, 72-3
 - densità di, v. densità
 - determinazione del segno di una, col campo magnetico, 194
 - di polarizzazione, 92
 - equazione di conservazione della, 123
 - immagine, 78 ss.
 - invarianza relativistica della, 222-4
 - quantizzazione della, 4, 13-8
 - unità di misura della, 8, 11-2, 679, 683, 685, 688, 693
- cassetta di resistenze, 148
- caustica, 463, 465
- celle fotoconduttrive, 672
- celle fotoelettriche, 136
- celle T o II, v. reti
- CGS, sistema di unità, v. sistemi ciclo d'isteresi, 262, 304-8
- ciclotrone, 199
- circuitazione
 - di un vettore (def.), 412, 697
 - dell'induzione magnetica, 231 ss.
 - dell'intensità del campo elettrico, 36, 41 ss.
 - dell'intensità del campo magnetico, 248
 - teorema della, (di Ampère), 231 ss.
 - teorema della, (di Stokes), 697
- circuito elettrico (v. anche componenti circuituali, reti, ecc.) (def.), 123 ss., 130-3
- forza su, 206 ss., 242 ss.
- in corrente alternata, v. correnti alternate
- in serie
 - in c.a., 351 ss.
 - in c.c., 138 ss.
- oscillante, 369 ss.
- potenza in un
 - in c.a., 365-7 ss.
 - in c.c., 133-4 ss.
- potenziometrico, 146
- regole di Kirchoff in un, 142 ss.
- relazioni energetiche fra,
- RC
 - in c.a., 354-6 ss.
 - in condizioni quasi stazionarie, 185-7
- RL
 - in c.a., 351-4 ss.
 - in condizioni quasi stazionarie, 338 ss.
- RLC
 - oscillazioni forzate, 356-9, 375-9
 - oscillazioni libere, 369-75
 - struttura del, 130-3
- teoremi sui
 - in c.a., 365
 - in c.c., 149-151
- circuito magnetico, 270 ss.
- Clausius-Mossotti, formula, 98, 112 ss.
- coefficiente
 - di assorbimento delle onde e.m. nei conduttori, 428
 - di auto e mutua induzione, 245 ss., 335 ss.
 - unità di misura dei, 245-6
 - di capacità, 57
 - di finezza di un interferometro Fabry-Perot, 629
 - di forma per le grandezze alternate, 345
 - di Hall, 202 ss.
 - di induzione, 57
 - di Peltier, 663
 - di potenziale, 56-7
 - di riflessione delle onde e.m., 429
 - di temperatura della resistività dei materiali, 128-9, 172
 - di Thomson, 661
 - di trasmissione delle onde e.m., 429
- coerenza, 454, 509, 565-9
- spaziale, 568
- temporale, 566
- collettore, 330
- colonna positiva, 159, 161
- coma, 491
- componenti circuituali (v. anche circuiti, induttori, condensatori, resistori, generatori di f.e.m.) (gen.), 130 ss., 343-4
 - a costanti concentrate o distribuite, 344, 374
 - a resistenza differenziale, 374
 - attivi, 374
 - non ohmici, 132-33
 - passivi, 360
 - puramente ohmici (def.), 131-3
- condensatore ottico, 498
- condensatori, 58-63 (v. anche componenti circuituali, corrente alternata, transistori)
 - capacità dei, con dielettrico, 91 ss.
 - capacità dei, nel vuoto, 58 ss.
 - cilindrico, 59-60
 - piano, 60-1
 - sferico, 59
 - unità di, 59, 693 (v. anche sistemi di unità)

- carica e scarica dei, su una resistenza, 185 ss.
- collegamento in parallelo dei, 61
- collegamento in serie dei, 62
- energia immagazzinata in un, 62-3
- forza fra le armature dei, piani nel vuoto, 68-9
- forza sul dielettrico dei, piani, 99 ss.
- conducibilità elettrica, 128 ss. 177-70
- unità della, 128
- conducibilità termica nei metalli, 179
- conduttanza, 127, 354 ss.
- unità della, 127, 354
- conduttori (v. anche componenti circuituali) (def.), 4, 654
- azioni magnetiche fra, percorsi da corrente, v. forze magnetiche, coppie
- campo el. all'interno dei, isolati carichi, 31 ss., 53 ss.
- campo el. in vicinanza della superficie dei, isolati, carichi, 34 ss., 66
- capacità dei, 58
- carica dei, per induzione, 6-7
- carica su un, 31 ss.
- cavi in relazione al campo el. ed alle azioni di schermo e.s., 31 ss., 53 ss.
- densità di carica sulla superficie dei, 65 ss.
- distribuzione delle cariche sui, 31 ss.
- forze sui, carichi, 66 ss.
- forze sui, in presenza di dielettrico, 96 ss.
- in campo elettrico, 53-7
- ohmici, 129, 133-4
- propagazione di onde e.m. nei, 427 ss.
- resistenza elettrica nei, v. resistenza
- conduzione, banda di, 654
- conduzione elettrica
 - nei gas, 152-63
 - nei liquidi, 163-72
 - nei solidi, 172-3
- conduzione elettrolitica, 164
- coni, 494
- conservazione della carica, 14, 15, 123
- contrazione di Lorentz-Fitzgerald, 224
- convenzione di coordinazione, 675
- convenzioni sui segni in ottica geometrica, 467 ss.
- convergente, lente, 486 ss.
- convergenza, 486
- coppia di Cooper, 184
- coppia, momento della
 - sul rotore di un motore asincrono, 391
 - su una sbarra cilindrica magnetizzata in campo magnetico, 268
 - su una spira in campo magnetico, 206 ss., 245 ss.
 - su un circuito in relazione all'energia magnetica, 244
 - su un dipolo elettrico in campo el., 53
 - su un dipolo magnetico in campo magnetico, 219 ss.
 - su un solenoide in campo magnetico, 209
- coppie termoelettriche, 664-5
- cornea, 493-4
- corpo nero, 454
- corrente elettrica (v. anche corrente el. alternata, intensità di corrente, densità di, ecc.)
- azioni fra, v. forze
- continua, 122
- di conduzione, 123 ss.
- di convezione, 123
- di magnetizzazione, 253
- di spostamento, 123 ss., 400 ss.
- indotta, 318
- parassita, 331 ss.
 - nei trasformatori! 332, 385
- stazionaria (continua) cap. 3, 119 ss.
- trifase, 385-6
- verso della corrente, 121
- corrente el. alternata (v. anche grandezze sinusoidali, intensità della), (gen.) cap. 7, 343 ss.
- circuiti complessi in c.a., v. reti
- circuiti serie in c.a., 351 ss.
- misura delle grandezze nei circuiti in c.a., 368-9
- potenza nei circuiti in c.a., 365 ss.
- rifasamento della, 366
- valore efficace della intensità della, 344 ss.
- correnti atomiche, 252 ss.
- costante dielettrica
 - andamento con la frequenza, 109, 114
 - formula di Mossotti-Clausius per la, nei liquidi non polari, 98, 112 ss.
 - in funzione della temperatura, 109, 114
- nella materia
- assoluta, 89
- relativa, 89
- nel vuoto, 12
- unità della, 12, 688 (v. anche sistemi di unità)
- costante di tempo
- nei circuiti RC, 186
- nei circuiti RL, 339
- costruzione grafica delle immagini, 468-74
- Coulomb
 - unità della carica el., 8, 11, 20, 685, 688, 693 (v. anche sistemi di unità)
- Coulomb,
 - forza di, 13 (v. legge di,)
 - legge (el.) di
 - nei dielettrici, 95
 - nel vuoto, 8 ss., 18, 19
 - teorema di, 35
- Coulomb, legge magnetostatica di, 270
- cristalli uniassiali, 530-5
- cristallino, 493
- criterio di Rayleigh, 586, 589
- Crookes, spazio oscuro di, 158, 160
- Curie
 - legge di, 282-3
 - temperatura di, 261
- Curie-Weiss, legge di, 283, 295
- curva di magnetizzazione, 304-8
- curvatura di campo, 466

- DAΦNE, 202
- debye, 106
- declinazione magnetica, 314
- demagnetizzazione, fattore di, 265
- densità
 - della corrente, 120-3, 176
 - di carica
 - libere e di polarizzazione nei dielettrici, 84 ss.
 - lineare, 22
 - spaziale, 20
 - unità della, 21
 - sulla superficie, 65 ss.
 - superficiale, 21
 - di corrente
 - di conduzione, 120 ss., 176 ss.
 - unità della, 122
 - di spostamento, 123 ss., 400 ss.
- di energia
 - del campo e.m., 416 ss.
 - del campo e.s.
 - nel vuoto, 63 ss.
 - in un dielettrico, 95
 - del campo magnetico, 247 ss., 257, 340 ss.

- di quantità di moto della radiazione e.m., 430
- deviazione minima di un prisma, 504
- diagramma di Laue, 610
- diamagnetismo, v. materiali magnetici
- dicroismo, 536-7
- dielettrici (v. anche campo elettrico, polarizzazione, ecc.)
- campo e.s. nei, cap. 2, 83 ss.
- forze sui, 96 ss.
- polarizzazione dei, 83 ss., 101 ss.
- diffrazione delle onde e.m., 421, (gen.) cap. 14, 571 ss., 578 ss.
- da una fenditura semplice, 578 ss.
- da una doppia fenditura, 594 ss.
- da un reticolo, 599 ss.
- di Fraunhofer, 572 ss.
- apertura circolare, 586 ss.
- fenditura semplice, 578 ss.
- di Fresnel, 572 ss., 574-8
- di raggi X, 607 ss.
- diffusione delle onde e.m., 440 ss.
- dinamo, 136, 330
- diodo, 132
- diottrie, 486
- diottro sferico, 474 ss.
- dipolo elettrico, 46 ss., 51 ss. (v. anche dipolo oscillante)
- approssimazione di, per una distribuzione di cariche qualsiasi, 49 ss.
- azioni su un dipolo in campo el., 51 ss.
- campo elettrico e potenziale creato da un, a grandi distanze, 46 ss.
- di Hertz, 439
- energia di un, in campo elettrico, 51 ss.
- linee di forza e superfici equipotenziali del, 39 ss.
- momento di (def.), 46 (v. anche momento di,) di una distribuzione di cariche qualsiasi, 51
- di un dielettrico in campo elettrico, 85 ss.
- dipolo magnetico, 190, 209, 219 ss.
- momento di un, v. momento magnetico
- dipolo oscillante, 47, 411, 436 ss.
- campo e.m. creato da un, 436 ss.
- di Hertz, 439
- potenza irradiata da un, 439 ss.
- Dirac, P.A.M., 443
- Dirichlet, problema di, 76
- disco di Airy, 587
- dispersione, 109, 425, 505
- dissociazione elettrolitica, 166
- distanza focale, 468 ss.
- distorsione dell'immagine da una lente, 491
- distribuzione di cariche (v. anche campo el. creato da, potenziale dovuto a, strato, ecc.)
- approssimazione di dipolo per le, qualunque, 49 ss.
- lineari, 22
- nel problema generale dell'elettrostatica, 73 ss.
- spaziali, 20 ss.
- su conduttori isolati, 31 ss., 53 ss.
- superficiali, 21-2
- uniforme su un piano infinito, campo creato da, 34
- disturbanza ottica, 513
- divergenza (v. anche operatori)
- di un vettore (gen.), 26, 696 ss.
- teorema della, (di Gauss), 26 ss., 696 ss.
- divergente, lente, 486 ss.
- domini
- ferromagneticci, 292 ss.
- magnetici, 300 ss.
- doppia fenditura, diffrazione da una, 594 ss.
- doppia rifrazione, 525 ss.
- doppio strato, campo el., 35
- Doppler, effetto per le onde e.m., 421
- Drude, teoria di, 173 ss.

- effetto
- Compton, 449
- corona, 162-3
- Doppler (per le onde e.m.), 421
- elettroottici, 627-8
- elettroottico lineare, 542-3
- elettroottico quadratico, 543
- Faraday, 543 ss.
- fotoelettrico esterno, 668 ss.
- fotoelettrico interno, 671 ss.
- Hall, 202 ss.
- isotopico, 183-4
- Joule, 133 ss.
- Kerr, 543
- Kerr ottico, 626, 628
- magneto ottico Cotton-Mouton, 543
- Meissner, 182
- Peltier, 662 ss.
- Pockels, 542-3, 627
- Seebeck, 659 ss.
- termoelettrici, 658-65
- Thomson, 660 ss.
- Tolman, 174
- triboelettrico, 2
- Volta, 53, 655 ss.
- Einstein, A., 443
- elettrizzazione, 2
- per contatto, 4 ss.
- per induzione, 6 ss.
- per strofinio, 2 ss.
- positiva (vetrosa) e negativa (resinosa), 2
- stato di, 2
- elettrodinamica (v. anche potenziali elettrodinamici) (gen.), cap. 4, 189 ss.
- dei corpi in moto, 227 ss.
- elettrodinamometri, 222
- assoluti, 218
- elettrolisi, 165 ss.
- elettrolita, 164 ss.
- elettromagnetismo (v. induzione e.m., onde e.m., equazione di Maxwell, potenziali elettrodinamici, massa elettromagnetica, ecc.)
- elettrometri, 69 ss.
- assoluto (di Kelvin), 69 ss.
- a fibra di quarzo, 70
- a foglie, 70
- a quadranti, 70 ss.
- elettrone, 4, 6, 11, 13-5
- campo e.m. creato da un, in moto, 444 ss.
- carica dello, 6, 13
- massa elettromagnetica, 444 ss.
- moto dell'elettrone nell'atomo, 104 ss., 441 ss., 544-5, 619 ss.
- nei cristalli, cap. 16, 639 ss.
- rapporto e/m, 194 ss.
- elettrone-volt, 15
- elettroni liberi nei metalli, 173-84
- eletroskopio (v. anche elettrometri), 4 ss.
- a fibra di quarzo, 70
- a figlie, 5, 70
- esperienza ed uso dell', 4 ss., 54, 665
- elettrostatica (gen.), cap. 1, 1 ss., cap. 2, 83 ss.
- esperienze di, con corpi elettrizzati, 2 ss.
- nei dielettrici cap. 2, 83 ss.
- nel vuoto, cap. 1, 1 ss.
- problema generale della, 73 ss.
- strumenti di, 69 ss.
- elettrostrizione, 98-9
- ellissoide degli indici, 529-30
- emissione
- di luce, 453, 614

- elettronica secondaria, 153 ss., 157, 161
- spontanea, 614
- stimolata, 454, 614
- termica degli elettroni, 665-8
- energia (v. anche densità di, vettore di Poynting, intensità delle onde e.m., ecc.)
- dei generatori, 68
- delle onde e.m., 416 ss.
- di Fermi, 644 ss.
- di scambio, 298
- di un condensatore, 62 ss.
- di un dipolo in un campo elettrico, 51 ss.
- di un dipolo in un campo magnetico, 220 ss.
- elettrostatica, 15-8
 - densità della, 62-5
 - di un sistema di cariche nel vuoto, 25 ss., 63 ss.
 - immagazzinata dai condensatori, 62 ss.
 - in relazione al potenziale e.s., 38 ss.
 - magnetica, 244 ss.
 - mutua fra correnti, 244 ss.
 - potenziale, 16 ss., 38 ss.
 - potenziale di una carica, 39
 - potenziale di un sistema di cariche, 63 ss.
 - relazione relativistica fra massa ed, 226
- epidiascopi, 498
- equazioni
 - degli specchi sferici, 465
 - delle onde, 410 ss.
 - di continuità, 123
 - di Fresnel (relazioni di Fresnel), 425 ss.
 - di Laplace, 73-8, 130
 - di Maxwell (gen.), cap. 8, 399 ss. (v. anche Maxwell)
 - di Poisson, 73-8
 - di Richardson-Dushman, 667
- equivalente chimico, 168
- espansione
 - degli intervalli di tempo (v. relatività), 225
- esperienza di Geiger-Marsden, 10 ss.

- Fabry-Perot, interferometro, 628 ss.
- Farad, unità di capacità, 58, 688 (v. anche sistemi di unità)
- Faraday, Michael, 85, 317
- Faraday
 - criterio di, per le linee di forza, 25, 56
 - esperienza di, nei condensatori con dielettrico, 85 ss.
 - legge di Neuman-Lenz, 317 ss., 327 ss.
 - leggi di Faraday, per l'elettrolisi, 169
 - pozzo di, 54-5
 - fascio ordinario (doppia rifrazione), 525
 - fascio straordinario (doppia rifrazione), 526
 - fattore
 - di demagnetizzazione, 265
 - di direzione, 514
 - di merito, 275
 - di potenza, 366
 - di propagazione in catene di celle, 395
 - di qualità (Q), 372
 - fenditura
 - diffrazione, 578 ss.
 - potere risolutivo (f. rettangolare), 584 ss.
 - Fermi, E., 443
 - Ferraris Galileo
 - relazione di, per la potenza el., 366 ss.
 - ferrimagnetismo, 310 ss
 - ferriti, 311 (v. materiali magnetici)
 - ferromagnetismo, 292 ss.
 - (v. materiali magnetici)
 - filtri elettrici, 396 ss.
 - filtri di velocità per particelle cariche, 197
 - flusso
 - di un vettore (def.), 25 ss., 696 ss.
 - dell'induzione magnetica, 230 ss., 242 ss.
 - concatenato, 319 (v. anche legge di Faraday)
 - misurazione del, 331
 - unità del, 688 (v. anche sistemi di unità di misura)
 - dell'intensità del campo el., 26 ss. (v. anche legge di Gauss) nel teorema della divergenza! 26 ss., 696 ss.
 - formazione delle bande nei cristalli, 650 ss.
 - formula
 - degli specchi sferici, 468-74
 - del reticolo, 604
 - di Laplace
 - prima, 209 ss., 248
 - seconda, 205 ss.
 - deduzione della, dal pot. vettore, 240
 - di Neumann per l'energia mutua fra due circuiti, 246
 - equivalenti nei vari sistemi di unità, 690 ss.
 - forza controelettromotrice, 139-40
 - forza di Lorentz, 193, 320 ss.
 - (v. anche forze magnetiche)
 - forza elettromotrice (f.e.m.), 134 ss. (v. anche generatori di, componenti circuitali, ecc.)
 - analogia idraulica della, 137-8
 - di decomposizione, 170
 - indotta ed autoindotta, 318 ss. (v. legge di Faraday)
 - in condizioni quasi-stazionarie, 335 ss.
 - misurazioni di, 137
 - col circuito potenziometrico, 146 ss.
 - unità della, (v. unità del potenziale)
 - forza equivalente, di un generatore di f.e.m., 136
 - forza magnetomotrice, 271
 - forze elettriche (v. anche intensità del campo el., legge di Coulomb, linee di forza, elettrodinamica, ecc.)
 - fra cariche puntiformi nei dielettrici, 94 ss.
 - fra cariche puntiformi nel vuoto, 8 ss.
 - in confronto a quelle gravitazionali e nucleari, 13, 14
 - in relazione a cariche in moto, 192, 222 ss., 229 ss., 320 ss.
 - in relazione alle forze magnetiche, 192, 222 ss., 229 ss., 320 ss.
 - su cariche all'interno di un involucro, 10
 - su cariche espresse mediante l'energia potenziale e.s., 16
 - su conduttori carichi, 66 ss.
 - su conduttori in presenza di dielettrico e sul dielettrico stesso, 96 ss.
 - du un dipolo in campo el., 52 ss.
 - forze magnetiche, 190-209
 - (v. anche induzione magnetica, linee di forza, elettrodinamica, ecc.)
 - fra correnti, 190 ss., 216 ss.
 - in relazione alla relatività, 227 ss.
 - legge delle, di Ampère, 216 ss.
 - nei circuiti in relazione all'energia, 242 ss.
 - su cariche in moto (di Lorentz), 192, 222 ss., 229 ss., 320 ss.

- in relazione alle forze elettriche, 192, 222 ss., 229 ss., 320 ss.
- su una corrente, 205 ss.
- photoelasticità, 546
- fonone, 183-4
- fotone, 11, 15, 449 ss., 613 ss.
- fovea, 494
- frange di interferenza, 547 ss.
- con strati a facce parallele, 555-60
- di uguale inclinazione, 556
- di uguale spessore, 558
- localizzate all'infinito, 555 ss.
- non localizzate, 554
- visibilità delle, 566
- ordine della, 552
- Franklin (unità CGS di carica), 12, 679, 688
- freno elettromagnetico, 332
- frequenza propria di un circuito oscillante, 373
- Fresnel, equazioni di, 426
- fronte d'onda, 510
- funzione
 - di Boltzmann, 175, 641, 645
 - di Brillouin, 289, 294 ss.
 - di distribuzione di Fermi, 643 ss. (v. anche statistica di Fermi-Dirac)
 - di Langevin, 107 ss., 282 ss., 293
 - di lavoro per l'estrazione di un elettrone da un metallo, 659 ss. (v. anche lavoro di estrazione)
- di Maxwell, 175
- fuoco
 - di un diottro sferico, 477
 - di un sistema ottico centrato, 480 ss.
 - di una lente sottile, 491 ss.
 - di uno specchio, 470 ss.
- Galileo-Ferraris, formula di, 366
- galvanometri, 146, 221 ss.
- balistici, 222, 656
- Gauss, unità di induzione magnetica, 192, 682, 688
- Gauss
 - formula di, per i sistemi ottici centrati, 482
 - legge di, 18, 27 ss.
 - nel sistema CGS e.s., 680-1
 - sistema di unità di, 684 ss.
- teorema di, (della divergenza), 26 ss., 696 ss.
- teoria di, nella costruzione delle immagini, 476
- Geiger e Marsden, esperienza di, 10
- generatori di f.e.m., 131, 134 ss., 329 ss.
- forza equivalente dei, 136
- ideali, 138
- in corrente continua, 330
- resistenza interna dei, 137
- sinusoidali (alternatori), 329 ss., 389 ss.
- termoelettrici, 136
- generatori di van der Graaf, 116 ss.
- Giorgi, sistema di unità, v. sistemi di unità
- gluon, 14
- gradiente (def.), 696
- espressione del, col nabla, 26, 41, 696
- grado di coerenza, 509
- grandezze alternate (v. anche correnti alternate)
 - sinusoidali
 - ampiezza complessa delle, 348 ss.
 - metodi di rappresentazione delle, 345 ss.
 - dei diagrammi vettoriali, 346 ss.
 - dei numeri complessi, 348 ss.
 - valore efficace delle, 344 ss.
- grandezze fotometriche, 491
- grandezze radiometriche, 491
- guaina catodica, 158
- Heaviside, 443
- Henry, unità del coefficiente di auto e mutua induzione, 246, 336, 688
- Hopkinson, legge di, 271 ss.
- Huygens, principio di, 421, cap. 11, 509 ss., 532 ss.
- illuminamento, 496
- illuminanza, 496
- illuminazione, 496
- immagine
 - speculare, 462
 - costruzione della, 482
- immagini
 - cariche, 78 ss.
 - metodo delle, 78 ss.
 - per riflessione, 463-6
 - per rifrazione, 474-9
 - reali, 461
 - virtuali, 461
- impedenza (el.)
 - adattamento di, 151, 367-8
 - caratteristica di una catena di celle, 392 ss.
 - complessa nei circuiti in c.a., 352 ss.
 - unità della, v. unità della resistenza
- impedenza caratteristica di un mezzo, 413-4, 418
- inclinazione magnetica, 313
- indice di rifrazione, 113, 114, 424
- assoluto di un mezzo, 424
- non lineare, 626
- relativo fra due mezzi, 424
- induttanza, v. coefficiente di autoinduzione
- induttore, 338 (v. anche componenti circuituali, coefficiente di autoinduzione)
- induzione
 - elettromagnetica, cap. 6, 317 ss.
 - di movimento, 318, 322 ss.
 - dovuta a campo magnetico variabile, 324 ss.
 - esperienze, interpretazione microscopica delle, 320 ss.
 - elettrostatica, 6 ss., 55 ss.
 - coefficienti di, 57
 - nell'interno di un involucro carico, 10, 53 ss.
- induzione magnetica (B)
 - (v. anche campo magnetico, intensità del campo magnetico, forze magnetiche, induzione e.m., linee di forza, ecc.), 190 ss.
 - alla superficie di separazione fra due mezzi, 258 ss.
 - circuitazione della, 231 ss.
 - creata da conduttori percorsi da corrente, 209 ss., 240 ss., (v. anche spira, solenoide, ecc.)
 - creata da un dipolo oscillante, 436 ss.
 - dimensioni ed unità della, 192, 682, 688 (v. anche sistema di unità)
 - flusso della, 230 ss.

- in relazione a cariche in moto, forze elettriche e relatività, v. forze magnetiche
- microscopica e macroscopica, 252 ss.
- misura della, 205-6, 330-1
- nei solidi, 259
- nei magneti permanenti, 262 ss.
- nei materiali ferromagnetici, 262 ss.
- nella materia, 251 ss.
- nel vuoto, 221, 248-9
- possibilità della misura della, nei solidi, 259
- unità della, 249, 682, 688 (v. anche sistemi di unità)
- intensità delle onde e.m., 417 ss. (v. anche vettore di Poynting)
- irradiata da un dipolo oscillante, 439 ss.
- intensità di corrente (v. anche corrente elettrica, corrente el. alternata, densità di, forze, ecc.)
- di conduzione, 8, 120 ss.
- misure assolute della, 218
- strumenti di misura della, 221 ss. (v. anche amperometri, galvanometri)
- unità della, 8, 11, 122, 218, 687, 688 (v. anche sistemi di unità)
- di magnetizzazione, 253 (v. anche correnti atomiche)
- di spostamento, 123 ss., 400 ss.
- intensità di magnetizzazione, 251 ss.
- nei materiali ferromagnetici, 262 ss.
- unità della, 254
- intensità di polarizzazione, 86 ss.
- non lineare, 115 ss., 619 ss.
- origine della, 102 ss.
- interazione di scambio, 286
- interferometro
- di Fabry-Perot, 628 ss.
- di Michelson, 560 ss.
- interfero, 264
- inversione di popolazione atomica, 615
- ione, 152-3
- ionizzazione, 152-3
- ionosfera, 153
- ipermetropia, 495
- ipotesi di Weiss, 292 ss.
- iride, 493
- isolanti, v. dielettrici
- isteresi magnetica, v. ciclo d'
- intensità del campo magnetico (H) (v. anche induzione magnetica campo magnetico, ecc.)
- alla superficie di separazione di due mezzi, 258 ss.
- coercitivo nel ciclo d'isteresi, 262
- creata da magneti permanenti, 262 ss.
- demagnetizzante, 265
- nei materiali ferromagnetici, 262 ss.
- nella materia, 251 ss.
- nel vuoto, 221, 248-9
- possibilità della misura della, nei solidi, 259
- unità della, 249, 682, 688 (v. anche sistemi di unità)
- intensità delle onde e.m., 417 ss. (v. anche vettore di Poynting)
- irradiata da un dipolo oscillante, 439 ss.
- intensità di corrente (v. anche corrente elettrica, corrente el. alternata, densità di, forze, ecc.)
- di conduzione, 8, 120 ss.
- misure assolute della, 218
- strumenti di misura della, 221 ss. (v. anche amperometri, galvanometri)
- unità della, 8, 11, 122, 218, 687, 688 (v. anche sistemi di unità)
- di magnetizzazione, 253 (v. anche correnti atomiche)
- di spostamento, 123 ss., 400 ss.
- intensità di magnetizzazione, 251 ss.
- nei materiali ferromagnetici, 262 ss.
- unità della, 254
- intensità di polarizzazione, 86 ss.
- non lineare, 115 ss., 619 ss.
- origine della, 102 ss.
- interazione di scambio, 286
- interferometro
- di Fabry-Perot, 628 ss.
- di Michelson, 560 ss.
- interfero, 264
- inversione di popolazione atomica, 615
- ione, 152-3
- ionizzazione, 152-3
- ionosfera, 153
- ipermetropia, 495
- ipotesi di Weiss, 292 ss.
- iride, 493
- isolanti, v. dielettrici
- isteresi magnetica, v. ciclo d'
- Joule, legge di, 133 ss.
- Kausmann, 443 ss.
- Kelvin
- elettrometro assoluto di, 69
- Kirchhoff
- formula di, 512 ss.
- regole di
- in condizioni non stazionarie, 185
- per i circuiti in c.a., 351, 354, 360 ss.
- per i circuiti in c.c., 142 ss.
- per i circuiti magnetici, 271
- lamina a quarto d'onda, 538
- lamine ritardatrici, 537-8
- Langevin
- funzione di, 107 ss., 282 ss., 293
- teoria, 282 ss.
- Laplace
- equazione di, 76, 130
- formule di, 190 ss., 205 ss., 209 ss.
- operatore di, v. Laplaciano
- Laplaciano (operatore)
- scalare, 75, 698
- vettoriale, 698-9
- larghezza di linea, 567 ss.
- laser, 454, cap. 15, 613 ss.
- a rubino, 615 ss.
- caos nel, 633 ss.
- elio-neon, 617 ss.
- lavoro di estrazione, 655 ss., 670 (v. anche funzione di lavoro)
- legge
- della riflessione, 423 ss., 460
- della rifrazione, 424, 460
- di Ampère, 231 ss.
- di Coulomb nel dielettrici, 95
- di Coulomb nel vuoto, 8 ss.
- di Curie, 282-3, 289 ss.
- di Curie-Weiss, 283, 295
- di Malus, 524
- di Ohm, 126 ss., 132
- di Ohm generalizzata, 141 ss.
- di Ohm microscopica, 129 ss.
- di Paschen, 157
- leggi dell'ottica, 460
- lente
- di ingrandimento, 498
- sottile, 484 ss.
- equazione della, 486
- fuochi, 485 ss.
- spessa, 481 ss., 484
- lenti
- aberrazioni delle, 490 ss.
- convergenti, 486 ss.
- divergenti, 486 ss.
- magnetiche, 198
- potere risolutivo, 588 ss.
- sferiche, 484 ss.
- Lenz, v. Faraday
- legge di, 320
- LEP, 202

- LHC, 202
 Lienard-Wiechert, potenziali di, 443 ss.
 linee di forza (v. anche campo elettrico, induzione magnetica, campo magnetico, ecc.)
 — dell'intensità del campo elettrico, 24 ss., 39 ss., 55 ss., 58, 66, 78 ss.
 in relazione alle superfici equipotenziali, 39 ss.
 rifrazione delle! 94
 — della induzione magnetica, 210 ss., 213 ss., 230 ss., 263 ss., 313 ss.
 rifrazione delle, 259 ss.
 rilevamento delle, con la limatura di ferro, 301 ss.
 Lorentz, 443
 — contrazione di, - Fitzgerald! 224
 — forza di, v. forze magnetiche
 luce (v. anche onde e.m.)
 — diffusione della, 441 ss.
 — polarizzazione della, cap. 12, 519 ss.
 — velocità della, nel vuoto, 410
 lumen, 492
 luminanza, 491-3
 luminosità negativa nelle scariche di gas, 160
 lunghezza d'onda di de Broglie, 451
 lunghezza di coerenza, 568
 lux, 496
- macchina fotografica, 495
 macchine acceleratrici, 199 ss., 332
 maglie (el.) (v. anche circuiti, reti)
 — regola delle, (Kirchhoff), 143 ss., 360
 magneti
 — in relazione all'analogia con i dipoli el., 267 ss.
 — interazioni fra, 269 ss.
 — permanenti, 189, 262 ss.
 campo magnetico creato da, 262 ss.
 linee di forza dei, 262 ss.
 — potenziale scalare per i, 269
 — progetto dei, 273 ss.
 magnetismo, v. magnetostatica, campo magnetico, forze magnetiche, ecc.
 magnetismo residuo, 262
 magnetite, 189
 magnetizzazione, v. intensità di, intensità di corrente di,
 magnetone di Bohr, 284, 289
- magnetostatica
 — nella materia (gen.), cap. 5, 251 ss.
 — nel vuoto (gen.), cap. 4, 189 ss.
 — legge della (di Coulomb), 270
 magnetostruzione, 298 ss.
 magnetron, 198
 Malus, legge di, 524
 massa elettromagnetica, 443 ss.
 massa magnetica, 267 ss.
 — unità della, nel CGS e.m., 682
 massimo trasferimento di potenza, teorema del, 151, 365
 materiali magnetici
 — antiferromagnetici, 310 ss.
 — diamagnetici, 260, 280 ss., 333 ss.
 — ferriti, 311 ss.
 — ferromagnetici, 260 ss., 292 ss., 308 ss.
 dolci, 308
 duri, 309
 impiego dei, 262 ss.
 — paramagnetici, 260, 281 ss., 288 ss.
 Maxwell, James Clerk, 399, 401
 Maxwell, unità di flusso magnetico, 682, 688 (v. anche sistemi di unità di misura)
 Maxwell equazioni di (gen.), cap. 8, 328
 — limiti di validità delle, 440
 — in relazione ai potenziali elettrodinamici, 433 ss.
 — nei conduttori, 427 ss.
 — nei dielettrici, 403 ss.
 — nel sistema di unità di Gauss, 684-5
 metalli, v. conduttori
 metodi
 — delle immagini, 78 ss.
 — di rappresentazione delle grandezze sinusoidali, 345 ss.
 — voltamporometrico, 149
 mezzo dispersivo, 414
 Michelson, interferometro, 560 ss.
 Michelson e Morley, esperienza di, 564-5
 microfarad, 58
 microscopio
 — composto, 500 ss.
 — semplice, 498 ss.
 Millikan, esperienza di, 13, 72 ss.
 miopia, 495
 MKSA, sistema di unità, 686 ss.
 mobilità (el.), 155, 178
 moltiplicazione per urto, 153
 momento della quantità di moto della luce, 539
 momento (elettrico)
- di dipolo, 46 ss. (v. anche dipolo elettrico)
 delle molecole d'acqua, 47
 per una distribuzione di cariche qualunque, 51
 — di quadrupolo, 49
 momento (magnetico) (v. anche dipolo magnetico)
 — atomici, 277-87
 — di una sbarra cilindrica uniformemente magnetizzata, 264
 — di una sfera uniformemente magnetizzata, 263
 — di una spira, 218 ss.
 — di un solenoide, 218 ss.
 momento meccanico! v. coppie motori
 — asincrono, 390 ss.
 — in c.a., 390 ss.
 — in c.c., 132, 330
 — sincrono, 390
 muscoli ciliari, 494
 mutua induzione, 242 ss.
 — coefficienti di, v. coefficienti nabla (v. anche operatori) (def.), 26, 696
 — espressioni di grad, div, e rot col, 26, 41, 696 ss.
 nervo ottico, 494
 Neumann (v. anche Faraday)
 — formula di, 246
 — problema di, 76
 neutrino, 15
 neutrone, 4, 14, 15
 Newton
 — anelli di, 559 ss.
 — formula di, 483
 nodi di corrente
 — regola dei, v. Kirchhoff
 nord, v. poli magnetici
 nucleo, 4, 10
- obiettivo, 493, 495 ss., 500 ss.
 — velocità dell'obiettivo, 497
 occhio, 493 ss.
 oculare, 493, 500 ss.
 Oersted, Hans Christian, 189, 317
 Oersted, unità dell'int. del campo magnetico nel CGS e.m., 682, 688
 Ohm, Georg Simon, 126
 Ohm, unità della resistenza, impedenza, reattanza, 127, 688
 Ohm, legge di, 126 ss.
 — generalizzata, 141 ss.
 — in condizioni di non stazionarietà, 185

- microscopica, 129 ss.
- scostamenti dalla, 132 ss.
- onda
 - ordinaria (doppia rifrazione), 530 ss., 532 ss., 536, 537 ss.
 - straordinaria, 530 ss., 532 ss., 536 ss.
- onde elettromagnetiche (gen)
 - (v. anche radiazione e.m.)
 - pressione di radiazione, ecc.)
 - (gen.), cap. 8, 399 ss.
- diffusione delle, 440 ss.
- equazione delle, 409 ss.
- energia delle, 416 ss. (v. anche, vettore di Poynting)
- generate da dipoli oscillanti, 436 ss.
- intensità delle, 417 ss.
- piane in dielettrico omogeneo, 410 ss.
- progressive e regressive, 412 ss.
- sinusoidali, 414 ss.
- soluzione generale per le, 412 ss.
- polarizzazione delle, 412 ss., 519 ss.
- propagazione delle, 419 ss.
- in relazione alle dimensioni degli oggetti incontrati, 419 ss. (v. anche diffrazione)
- in un dielettrico omogeneo, privo di cariche e correnti, 408 ss., 410 ss.
- in un mezzo conduttore omogeneo, 427 ss.
- riflessione e rifrazione di, piane, 422 ss.
- sferiche, 419, 432 ss.
- tabella dello spettro di frequenze, dei generatori e rivelatori delle, 420
- velocità di propagazione delle, 410, 412, 414, 419, 424-5, 427 ss., 455 ss.
- operatori (v. singole voci)
 - del second'ordine (combinazioni di), 698 ss.
 - relazioni fra, 699
- oscillazioni elettriche nei circuiti RLC
 - forzate, 356 ss., 375 ss.
 - libere, 369 ss.
 - persistenti, 373 ss.
 - smorzate, 371 ss.
- oscurio, v. spazio ottica
 - fisica, 452-3, 510 ss.
 - geometrica, 452-3, 459 ss.
 - nonlineare, 116, 619 ss.
 - ondulatoria, 452
 - origine del ternine, 452
- trattazione dell', 449 ss.
- ottupoli, 49
- paramagnetismo, v. materiali magnetici
- pareti di Bloch, 303 ss.
- Paschen, legge di, 157
- Pauli, principio di, 286, 297, 639, 643, 647, 651 (v. anche principio di esclusione)
- percorso ottico, 548
- perdite nei dielettrici e rigidità, 114-5
- permeabilità magnetica
 - nel vuoto, 210
 - nella materia (assoluta e relativa), 253
 - per i materiali magnetici, v. materiali
 - unità della, 210, 688 (v. anche sistemi di unità)
- perturbazioni e.m.! v. onde e.m.
- phase-matching, 624 ss.
- piani principali, di un sistema ottico centratò, 481 ss., 485
- piano
 - di polarizzazione (onde e.m.), 415, 519
 - rotazione del, 539 ss.
 - di vibrazione (onde e.m.), 415, 519
 - focale, 470, 480 ss.
 - principale, 531
- picofarad, 58
- pila, v. generatori di f.e.m.
 - a secco, 172
 - di Daniel, 172
 - voltaica, 171
- plasma, 150
- Poincaré, 443
 - tensioni di, 446
- Poisson, equazione di, 75 ss.
- polarimetri, 540
- polariscopio, 524, 540
- polarizzabilità
 - atomica o ionica, 105 ss., 113
 - di orientamento, 106 ss.
 - e costante dielettrica di mezzi densi, 110 ss.
 - elettronica, 104 ss.
 - in funzione della frequenza, 110 ss.
 - molecolare, 112 ss.
- polarizzatore, 523 ss.
- polarizzazione nei dielettrici, 86 ss., 101 ss. (v. anche intensità di polarizzazione)
- nonlineare, 115-6, 621 ss.
- polarizzazione delle o.m.
 - (v. anche onde e.m.)
- angolo di, (Brewster), 426
- circolare, 521 ss.
- ellittica, 520 ss.
- per riflessione, 522 ss.
- piano di, 415, 519
- rettilinea, 521 ss.
- polaroid, 537
 - poli magnetici, 267 ss.
 - della terra, 313 ss.
- ponte di Wheatstone, 147 ss.
- positrone, 15
- potenza (el.)
 - apparente, 366
 - dissipata in un tratto di circuito in c.c., 133 ss.
 - fattore di potenza, 366 ss.
 - massimo trasferimento di, fra generatore e utilizzatore, 151, 367-8
 - media, 366
 - misura della, 148 ss., 368 ss.
 - nei circuiti in c.a., 365 ss.
- relazione di Galileo Ferraris, 366 ss.
- potenziale elettrostatico,, 36 ss., 43 ss. (v. anche campo e.s., intensità del campo e.s., linee di forza, forze el., ecc.)
- coefficienti di, 57
- di una sfera conduttrice, 58 ss.
- di un conduttore isolato carico, 53 ss.
- dovuto a
 - cariche di polarizzazione, 87 ss.
 - cariche puntiformi, 43 ss., 95
 - in vicinanza di una sfera conduttrice, 79 ss.
 - di un disco carico, 45
 - di uno strato piano carico, 46
 - distribuzioni di cariche, 44 ss., 46, 49 ss.
 - nell'approssimazione di dipolo, 49 ss.
 - un dipolo el. a grandi distanze, 46 ss.
 - un filo carico, 46
 - un quadrupolo per punti dell'asse, 49
- in relazione all'energia e.s., 38
- misura e strumenti di misura della differenza di, 69 ss., 148 ss.
- nel problema generale dell'elettrostatica, 73 ss.
- superfici equipotenziali, v. superfici
- unità di misura del, 38, 135, 688
- potenziali elettrodinamici, 433 ss., 443 ss.

- per una carica in moto qualsiasi, 443 ss.
- ritardati, 435, 443 ss. di Lienard-Wiechert, 443
- potenziale scalare (magn.), 235 ss., 434
- dovuto a una sbarra cil. unif. magnetizzata, 269
- dovuto a una spira, 238-9
- potenziale vettore, 239 ss., 433 ss.
- dovuto a un dipolo oscillante, 436 ss.
- in relazione all'energia magnetica, 244 ss.
- potenziometrico, circuito, 146
- potere diottico, 486
- potere dispersivo, 606
- potere risolutivo
 - cromatico, di un prisma, 507
 - cromatico di un reticolo, 606
 - di una fenditura rettangolare, 584 ss.
 - di un'apertura circolare, 588 ss.
 - di sistemi ottici, 590 ss.
- potere rotatorio, 539
- potere termoelettrico, 660
- Poynting, vettore di, 416 ss.
 - per la radiazione di dipolo, 439
- pozzo di Faraday, 54 ss.
- precessione di Larmor, 279 ss., 334
- prebiopia, 494
- pressione di radiazione, 430 ss.
- prima distanza focale, 477
- primo coefficiente di Townsend, 156
- primo fuoco, 477
- primo piano focale, 480
- primo punto focale, 477
- principi
 - di complementarità, 451
 - di esclusione, 297, 639, 643 (v. anche Pauli)
 - di Huygens (onde e.m.), 421, cap. 11, 509 ss., 532 ss.
 - di indeterminazione, 451
 - di Pauli, v. esclusione
 - di sovrapposizione per i circuiti elettrici, v. teoremi per il campo elettrico, 22, 56 per le forze el., 10
- prisma, 503 ss.
 - di Nicol, 535 ss.
 - dispersione del, 505 ss.
- problema
 - di Dirichlet, 76 ss.
 - di Neumann, 76 ss.
 - generale dell'elettrostatica, 73 ss.
- profondità di penetrazione di onde e.m. in conduttori, 428 ss.
- proiettori, 497 ss.
- propagazione in un dielettrico anisotropo, 528 ss.
- propagazione, fattore di, 394
- protone, 4 ss., 14 ss.
- protosincrotroni, v. sincrotroni
- punte, effetti elettrici delle, 66, 116
- punti
 - aplanatici, 474
 - cardinali, 480
 - coniugati, 461
 - focali, 480
 - nodali, 480
 - principali, 480 ss.
- quadrupolo (el.), 49
- quantità di moto della radiazione e.m., 431
- quark, 14
- quantizzazione spaziale, 284 ss.
- radianza, 492
- radiazione e.m. (v. anche onde e.m.)
 - campo di, 437
 - di dipolo, 439
 - pressione di, 430 ss.
 - quantità di moto della, 431-2
 - densità della, 431-2
 - per un elettrone in moto, 445
 - momento della, 431-2
 - resistenza di, 440
- raggi parassiali, 465, 476
- raggi X, 608 ss.
- raggio
 - di un sistema di onde piane, 419
 - ottico, 459
- raggio dell'elettrone, 442
- ramo, di un circuito, 142
- rapporto e/m, determinazione del, 194
- Rayleigh, diffusione di, 442
- reattanza
 - (capacitiva) nei circuiti RC, 355
 - (induttiva) nei circuiti RL, 352
 - unità della, v. unità di resistenza
- reciprocità
 - teorema di, 150, 365
 - teorema di, in elettrostatica, 56
- regione anodica, 161
- regola
 - dei nodi, 142
 - delle maglie, 143
- relatività, teoria della
 - complementi di, 224 ss.
 - conferme sperimentali della, 445 ss.
 - in relazione all'elettromagnetismo, 227 ss., 320 ss.
- reostati, 131-2
- resistenza (el.), 126 ss. (v. anche componenti circuitsli, resistori)
 - campione, 148
 - differenziale, 157, 374
 - fisse e variabili, 132, 148
 - interna dei generatori, v. generatori
 - in serie e parallelo, 138 ss., 144 ss.
 - misura delle
 - col metodo voltamperometrico, 149
 - col ponte di Wheatstone, 147
 - realizzazione pratica delle, 148
 - unità della, 127, 688 (v. anche sistemi di unità)
- resistenza di radiazione, 440
- resistenza magnetica, v.
 - riluttanza
- resistività, 128 ss.
 - unità della, 128
- resistori, 131, 148 (v. anche resistenza)
 - vari tipi di, 148
- reti (el.) (v. anche circuiti, filtri)
 - a catene di celle T o Π, 392 ss.
 - passive, 392
 - teoremi sulle, 365
 - trattazione generale delle, coi numeri complessi, 359 ss.
- reticolo di diffrazione, 599 ss.
- retina, 494
- rifasamento di correnti alternate, 366
- riflessione di onde e.m., 422 ss.
 - alla Bragg, 610
 - coefficiente di, 429
 - su una parete conduttrice, 429
 - totale, 425, 474
- rifrazione
 - delle linee di forza del campo elettrico, 94
 - delle linee di forza dell'induzione magnetica, 259 ss.
 - delle onde e.m., 422 ss.
 - indice di, v. indice
- rilassamento, 108 ss.
- riluttanza, 271 ss.
- unità della, 271

- risonanza (el.)
 — diffusione di, 442
 — in circuiti RCL parallelo, 378 ss.
 — in circuiti RCL serie, 376 ss.
 rotore (v. anche operatori)
 — di un vettore (def.), 41, 697
 — divergenza del, 697
 — espressione del, col nabla, 26, 41, 697
 Rutherford, 10
- saturazione magnetica, 261
 Savart, v. Biot
 scarica
 — a bagliore, 154 ss.
 — alla Townsend, 157 ss.
 — autosostenentesi, 156 ss.
 — dei condensatori, v. condensatori
 — non autosostenentesi, 155
 — oscura, 154 ss.
 scattering di onde e.m., v.
 — diffusione
 schermo elettrostatico, 32 (v.
 — anche pozzo di Faraday), 78
 seconda armonica, produzione di, 621 ss.
 seconda distanza focale, 477
 secondo fuoco, 477
 secondo piano focale, 480
 secondo punto focale, 477
 semiconduttori, 129, 172, 180 ss., 654 ss.
 sezione d'urto di diffusione delle onde e.m., 441
 shunt, 145
 SI, 11 ss. (v. anche sistemi di unità di misura)
 Siemens, unità della conduttanza, 127
 sincrociclotroni, 201
 sincrotroni, 201
 sistema
 — catadiottrico, 480
 — cataottico, 480
 — diottrico, 480
 — episcopico, 498
 sistemi di unità di misura
 — App. I (gen.), 675 ss.
 — assoluto, v. convenzione di coordinazione
 — CGS elettromagnetico, 681 ss.
 — CGS e.s. non razionalizzato, 12, 676 ss.
 — CGS e.s. razionalizzato, 681
 — coerenti, 686
 — confronto delle dimensioni ed unità delle grandezze nei vari, 689 ss.
 — di Gauss (misto), 684 ss.
- formule equivalenti nei vari, 690 ss.
 — Giorgi, v. MKSA,
 — MKSA razionalizzato (Giorgi), 686 ss.
 — pratico assoluto, 685 ss.
 — pratico internazionale, 685 ss.
 — rapporti delle unità nei, CGS e.s. e CGS e.m., 683, 688, 689
 — SI (sistema internazionale), 686 ss., 692 ss.
 — tabelle riassuntive dei, 688 ss.
 sistemi
 — ortoscopici, 461
 — ottici, 461
 — ottici centrati, 480 ss.
 smorzamento critico, 371
 Snellius-Cartesio, legge di, 424
 solenoide (def.), 209
 — azioni meccaniche su un, in campo magnetico, 209
 — campo magnetico creato da un, 215 ss., 218 ss., 234, 249, 253 ss.
 — coefficiente di autoinduzione di un, 336 ss.
 — coefficiente di mutua induzione per due, 337
 — intensità del campo magnetico all'interno di un, 249
 — momento magnetico di un, 218 ss.
 sollecitazioni, v. forze, coppie
 soluzioni elettrolitiche, 166 ss.
 sorgenti termiche (di luce), 454
 sostanze
 — non polari, 112
 — polari, 113
 sovrapposizione, v. principi
 spazio
 — oscuro, 158 ss.
 — oscuro anodico, 158 ss.
 — oscuro catodico (di Crookes), 158 ss.
 — oscuro di Faraday, 159 ss.
 — oscuro primario (di Aston), 158 ss.
 spazzole, 330
 specchi
 — concavo, 467 ss.
 — convesso, 464 ss.
 — piano, 463
 — sferico, 463 ss.
 spettri (gen.), 453 ss., 604 ss.
 — a bande, 453
 — a righe, 453
 — di arco, 454
 — di fiamma, 453
 — di scarica, 454
 spettrografi, 506
 spettrometro
 — di massa, 197
- per raggi X, 610
 spettroscopio
 — a prisma, 505 ss.
 — a reticolo, 605 ss.
 spin, 285
 spira
 — azioni meccaniche su una, in campo magnetico, 206 ss., 218 ss., 245
 — campo magnetico creato da una, 213 ss., 219 ss.
 — equivalenza della, ad un ago magnetico, 264, 270
 — momento magnetico di una, 219 ss.
 — potenziale magnetico scalare dovuto ad una, 236 ss.
 splendore, 492
 spostamento elettrico (D), 90 ss. (v. anche intensità del campo elettrico, intensità di polarizzazione, ecc.)
 — alla superficie di separazione di due dielettrici, 92 ss.
 — nel sistema CGS e.s., 680
 — unità dello, 688 (v. anche sistemi di unità)
 stat (prefisso delle unità del sistema CGS e.s.), 679, 688
 statcoulomb, 12
 statistica
 — di Boltzmann, v. statistica di Maxwell-Boltzmann
 — di Bose-Einstein, 642 ss.
 — di Fermi-Dirac, 643 ss., 648 ss.
 — di Maxwell-Boltzmann, 639 ss.
 statistiche quantistiche, 640 ss.
 statore, 389
 stigmatico, 464
 Stokes
 — teorema di, (della circolazione), 41 ss., 697
 strato piano carico
 — calcolo del campo el. creato da uno, in punti dell'asse, 24, 34 ss.
 — doppio, calcolo del campo creato da uno, 35 ss.
 — linee di forza e superfici equipotenziali per lo, 39 ss.
 — potenziale di uno, 46
 strumenti elettrostatici, 69 ss.
 sud, v. poli magnetici
 superfici equipotenziali (gen.), 39, 66
 — e linee di forza, 39 ss.
 superfici d'onda, 510
 superconduttività, 128, 180 ss.
 superconduttori, 180 ss.
 — ad alta temperatura, 184
 suscettanza, 354 ss., 361 ss.

- suscettività dielettrica, 89
 — suscettività magnetica, 256, 276
 — in relazione ai materiali magnetici, v. materiali
 — suscettività paramagnetica, 289
- telescopio, 501 ss.
 — di Galileo, 502
 temperatura
 — critica nei superconduttori, 180
 — di Curie ferromagnetica, 294 ss., 298
 tempo
 — costante di, v. costanti
 — di coerenza, 568
 — espansione degli intervalli di, v. relatività
 tensioni di Poincaré, 446
 teorema
 — del massimo trasferimento di potenza, 151
 — della divergenza, 27
 — di esistenza e unicità, 75
 — di reciprocità, 150
 — di sovrapposizione, 150
 — di Thevenin, 150, 365
 teoria della relatività, v. relatività
 Thevenin, teorema di, 150, 365
 teoria di Drude della conduzione nei metalli, 174 ss.
 tesla, 192
 Thomson J.J., 443
- Thomson, diffusione di, 442
 Townsend, 154
 — primo coefficiente di, 156
 transitorio, 375 ss.
 trasformatore statico, 380 ss.
 — adattamento di impedenza col — in relazione alle correnti parassite
 trasformazione, rapporto di, 382
 trasformazioni relativistiche, 225
 triboelettrico, effetto, 2
 tubi
 — a gas, 132
 — a raggi catodici, 191
- umor vitreo, 494
 umore acqueo, 494
 unità di misura, v. sistemi di unità
 utilizzatori (el.), v. componenti circuitali
- van der Graaf, generatore di, 116 ss., 136
 vasca elettrolitica, 77
 velocità
 — del raggio, 528 ss.
 — della luce nel vuoto, 410, 455 ss.
 — delle onde e.m., v. onde e.m.
 — di fase, 414, 419
 — di gruppo, 414, 419
- di scorrimento dei portatori di carica, 121, 176
 — trasformazioni relativistiche della, 225 ss.
 vergenze, 479
 vettore di Poynting, v. Poynting vettori, 695 ss. (v. anche vol. I)
 visione distinta, 494
 Volt (unità di potenziale e f.e.m.), 38, 135, 688 (v. anche sistemi di unità)
 voltametri, 132, 169
 voltmetri, 149
- wattmetri, elettrodinamici, 368
 Weber, (unità di flusso magnetico), 192
 Wheatstone, ponte di, 147
 Wiedeman Franz, legge di, 179
 Wien, 443
- Young, esperienza di, 548 ss.
- zona
 — dell'arco, 154
 — di Aston, 160
 — luminosa anodica, 159
 — luminosa negativa, 158
 — luminosa positiva, 161
 — oscura di Faraday, 160 ecc.
 zone di Fresnel, 516