

# **FISICA**

12 CFU A.A. 2017/18  
Germano Massimo  
Alippi Adriano

[migno.gioele@gmail.com](mailto:migno.gioele@gmail.com)

## CINEMATICA (studio movimento dei corpi, come variazione di posizione nello spazio)

### PUNTO MATERIALE

Si considera un corpo come un punto materiale, quando le sue dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza da esso percorsa

### SISTEMA DI RIFERIMENTO

Un sistema di riferimento è costituito da un sistema di assi cartesiani  $O(x,y,z)$  e uno temporale  $t$ .

### TRAIETTORIA

È il luogo dei punti dello spazio occupati dal punto materiale

### EQUAZIONE ORARIA ( $s = s(t)$ )

Conoscendo la traiettoria di un punto, si può individuare un'equazione, detta appunto oraria, che descrive la posizione del punto nello spazio, in un dato istante

### MOTORETTILINEO UNIFORME

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v \quad x(t) = x_0 + vt$$

↳ Velocità scalare media = Velocità istantanea

### MOTORETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\frac{v - v_0}{t - t_0} = a \quad v(t) = v_0 + at \quad x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

### MOTORETTILINEO CON TRAIETTORIA GIACENTE SU UN PIANO

Il punto nel piano può essere individuato tramite il vettore posizione  $r(t)$

$$r(t) = \hat{i} x(t) + \hat{j} y(t)$$

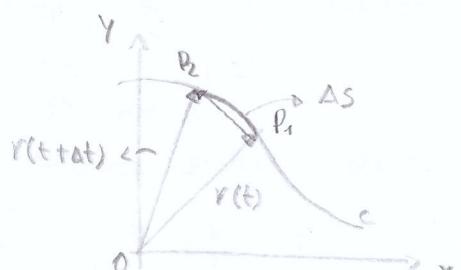
### Velocità scalare

Una volta conosciuta la traiettoria del punto, andiamo a calcolare la VELOCITÀ SCALARE MEDIA:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Quella istantanea, si ricava mediante il limite del rapporto incrementale

$$v_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$



## • Velocità vettoriale

Per ricavare tale valore si ragiona come nel caso scalare, ma al posto dello spostamento  $\Delta s$  sulla traiettoria, si usa la differenza del vettore spostamento  $r(t)$  di due istanti esaminati.

La **VELOCITÀ VETTORIALE MEDIA** è quindi data:

$$v_{\text{m}}(t) = \frac{\Delta r(t)}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} \quad (\text{corda come la PP}_1)$$

### VELOCITÀ VETTORIALE ISTANTANEA

$$v_{\text{is}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr(t)}{dt} = v_{\text{is}}(t)$$

Tale velocità ha **DIREZIONE TANGENTE** alla traiettoria nel punto esaminato (P).

#### - **MODULO** Velocità vettoriale istantanea

Poiché al limite la corda  $\overline{PP_1}$  tende all'arco  $\widehat{PP_1}$ , si ha che il modulo è pari al valore della velocità scalare istantanea.

Quindi la velocità vettoriale istantanea è possibile rappresentarla come:

$$v_{\text{is}}(t) = v_{\text{is}}(t) \cdot \hat{t} \quad (\text{Dove } \hat{t} \text{ è il versore della tangente nel punto})$$

Si può anche rappresentare mediante il vettore di posizione  $r(t)$ .

$$v_{\text{is}}(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d(\hat{i}x(t) + \hat{j}y(t))}{dt} = \hat{i} \frac{dx(t)}{dt} + \hat{j} \frac{dy(t)}{dt}$$

Notiamo quindi che la velocità può essere decomposta nelle due componenti  $x$  e  $y$ .

## • Accelerazione vettoriale

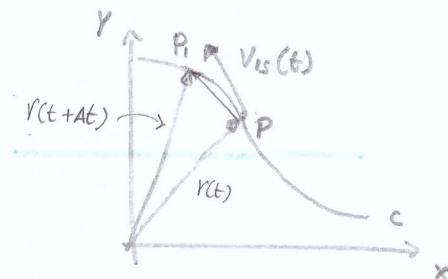
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (\text{Accelerazione vettoriale media})$$

Portando al limite ottengono l'**ACCELERAZIONE VETTORIALE ISTANTANEA**

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Usando il vettore posizione ottengono:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \hat{i} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \hat{j} \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$



Sfruttando la rappresentazione della velocità vettoriale istantanea mediante il versore tangente  $\tau$  ( $v(t) = \tau(t) \cdot \tau$ )

Otteniamo per l'accelerazione:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v(t))}{dt} \cdot \tau + v(t) \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

Notiamo quindi che l'accelerazione può essere decomposta in una componente tangente alla curva, accelerazione tangenziale ( $\frac{d(v(t))}{dt} \cdot \tau$ ) ed una normale alla tangente, accelerazione normale ( $v(t) \cdot \frac{d\tau}{dt}$ )

Si dimostra che tali accelerazioni sono normali allo seguente equazione:

$$\tau \cdot \tau = |\tau|^2 = 1$$

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \Leftrightarrow |v|^2 = v \cdot v$$

Dunque entrambi i membri ottengono:

$$2\tau \cdot \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad (\text{quindi, poiché il prodotto scalare è } 0) \quad (\tau \perp \frac{d\tau}{dt})$$

### MOTORE ARMONICO

Quando un punto materiale percorre ripetutamente la sua traiettoria, allora la sua equazione oraria è necessariamente periodica; ad esempio sinusoidale:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

Con ' $A$ ' rappresentiamo l'ampiezza massima o la distanza massima raggiunta rispetto ad  $0$ ,  
 $\omega t$  è chiamato angolo di fase.



Poiché l'argomento del seno deve essere adimensionato, non possiamo usare solamente  $t$ , è necessario  $\omega$  per rimuovere la dimensione temporale.

Essendo la funzione seno periodica di  $2\pi$ , e l'equazione oraria del punto periodica di  $T$  si deve avere:

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi$$

Da cui:

$$\omega T = 2\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$\omega$  prende il nome di PULSAZIONE e là si misura in rad/s

Nel caso in cui il centro di oscillazione non coincida con l'origine dell'asse si ha

$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{dove } \varphi \text{ è la fase iniziale al tempo } t=0)$$

- Velocità scalare:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \sin(\omega t))}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$$

- Accelerazione tangenziale:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

### Moto CIRCOLARE

In tale moto, il punto materiale descrive una traiettoria circolare, si individua quindi lo spostamento con l'arco  $L$

$$s(t) = L(t)$$

- Velocità scalare istantanea:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \dot{L}(t)$$

- Velocità vettoriale istantanea, essa ha modulo pari alla velocità scalare, e direzione tangente alla curva nel punto esaminato, variando quindi ad ogni istante.

- Velocità ANGOLARE

Se invece di considerare lo spostamento mediante l'arco  $L$ , individuiamo il punto mediante l'angolo  $\varphi$  otteriamo la velocità angolare.

- Velocità angolare scalare

$$|\omega| = \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (\text{misurato in rad/s})$$

- Velocità angolare vettoriale

Tale vettore ha direzione normale al piano di rotazione (Asse  $z$ ), e dipende dal verso di rotazione (Come una vite nel legno).

Avere modulo pari alla velocità angolare scalare si ha:



$$\omega = \dot{\varphi} \hat{k}$$

$\hat{k}$  (Versore Asse  $z$ )

## MOTO CIRCOLARE UNIFORME

In tale caso l'equazione oraria è del primo ordine (Lineare) si ha quindi:

$$L(t) = v \cdot t \quad L(t) = \text{arco percorso dal punto}$$

Poiché l'arco è in relazione con l'angolo ed il raggio:

$$(L(t) = R \cdot \varphi(t))$$

Si ha:

$$R \cdot \varphi(t) = v \cdot t \quad \varphi(t) = \frac{v}{R} \cdot t$$

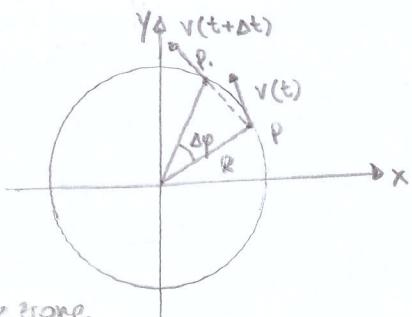
### • Velocità angolare scalare:

$$|\omega| = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d(\frac{v}{R} \cdot t)}{dt} = \frac{v}{R}$$

Essendo il moto periodico si ha anche:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot R}{v}$$

### • Accelerazione normale



Per ricavare l'accelerazione occorre calcolare  $\Delta v$ .

$$\Delta v = v(t+delta t) - v(t)$$

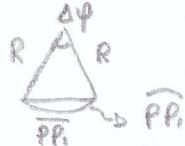
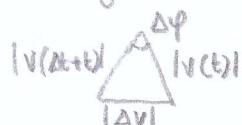
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

### Direzione

Dal diagramma vettoriale si nota che  $\Delta v$  punta, al caso limite, proprio al centro della circonferenza, quindi: l'accelerazione sarà necessariamente normale alla velocità.

### Modulo

Poiché nel nostro caso il modulo della velocità non varia,  $|v(t+At)| = |v(t)|$  avremo quindi un triangolo isoscele con angolo al vertice pari a  $\Delta\varphi$ .



Avereblo lo stesso angolo sul vertice, i due triangoli isosceli sono simili: si ha quindi la seguente relazione:

$$\frac{|\Delta v|}{|v(t)|} = \frac{R}{R}$$

Portando  $\Delta t$  al limite, possiamo approssimare il segmento  $\overline{PP_i}$  con l'arco  $\widehat{PP_i}$ .

$$\widehat{PP_i} = R \cdot \Delta\varphi = R \cdot \dot{\varphi} \Delta t = v \Delta t$$

Si ha quindi:

$$\frac{R \cdot |\Delta v|}{|v(t)|} = \frac{v \Delta t}{R} \Leftrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Il modulo dell'accelerazione normale sarà uguale:

$$|a| = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

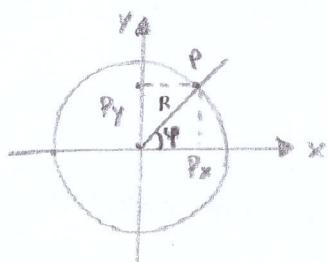
$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

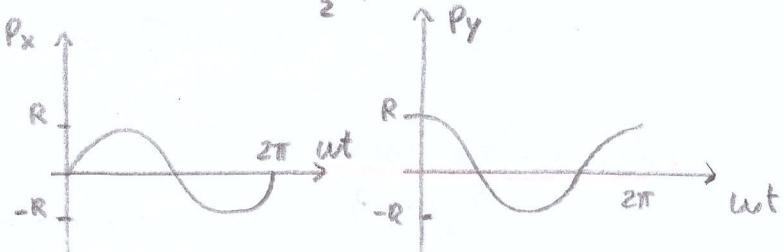
$$|v(t)| = v$$

### MOTORE CIRCOLARE UNIFORME (STUDIO CON MOTI ARMONICI COMPONENTI)

Il moto circolare uniforme può essere studiato anche usando i moti armonici componenti, ovvero mentre il punto materiale ruota nel piano, le due componenti  $x$  ed  $y$  descrivono un moto armonico sfalsato tra loro di  $\frac{\pi}{2}$ .



$$\varphi = \omega t$$



Per la seguente analisi consideriamo che il punto parte con fase iniziale nulla, ovvero si trovi sull'asse  $x$  ( $\varphi = \omega t$ ), (con la fase iniziale  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ )

#### Equazioni orarie

Nelle due componenti avremo quindi le seguenti equazioni orarie:

$$\begin{cases} x = R \cos(\omega t) \\ y = +R \sin(\omega t) \end{cases}$$

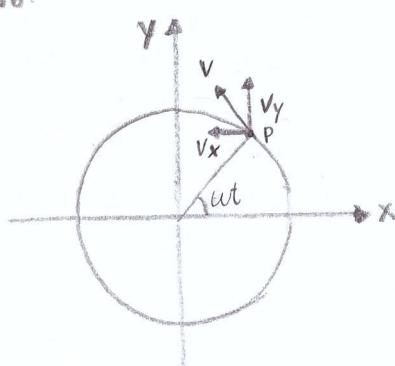
#### Velocità

Andiamo a derivare le equazioni orarie dei moti componenti:

$$\begin{cases} v_x = -R\omega \sin(\omega t) \\ v_y = R\omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

La velocità complessiva sarà data da Pitagora:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$



## • Accelerazione normale

Dervando le componenti della velocità otteniamo:

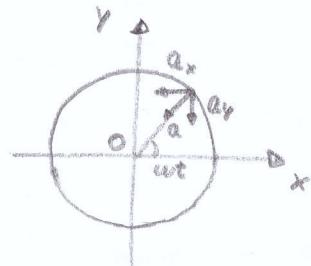
$$\begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x \\ a_y = -R\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases}$$

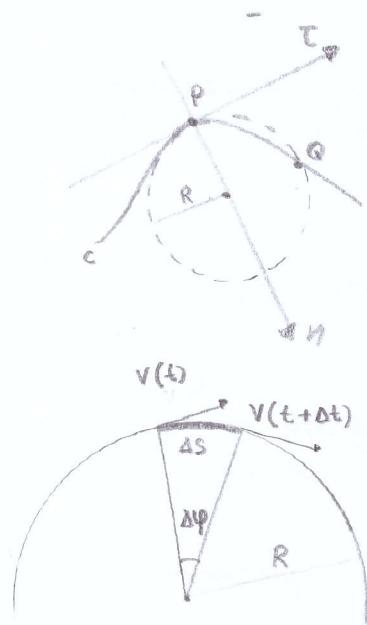
Complessivamente abbiamo:

$$a_n = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Tale accelerazione sarà diretta verso il centro della circonferenza.



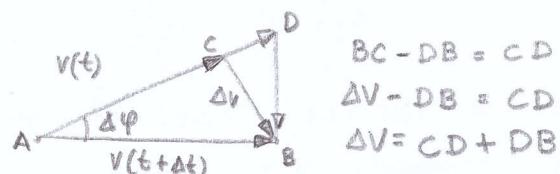
## ACCELERAZIONE IN UN MOTO GIACENTE SU UN PIANO



Per calcolare l'accelerazione in un punto P, approssimiamo il tratto percorso mediante il CERCHIO OSCULATORE, disegnato imponendo il centro sulla normale tangente alla traiettoria in P. Tale cerchio avrà la medesima tangente alla traiettoria, e avrà con essa in comune il punto P ed uno Q, portando Q il più vicino possibile a P, si ricava la CIRCONFERENZA OSCULATRICE.

Per ricavare l'accelerazione dobbiamo ricavare  $\Delta v$ , per farlo, ragioneremo sul seguente diagramma vettoriale: ( $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$ )

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CD + DB}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CD}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{DB}{\Delta t} = a_t + a_n \end{aligned}$$

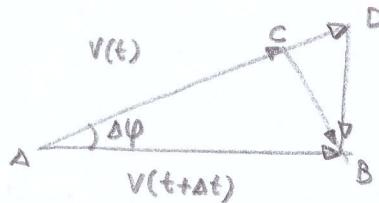


$$\begin{aligned} BC - DB &= CD \\ \Delta v - DB &= CD \\ \Delta v &= CD + DB \end{aligned}$$

Possiamo quindi suddividere l'accelerazione in due componenti, quella tangenziale, dipendente dal tratto percorso ( $a_t(t)$ ), e l'altra normale dipendente dalla variazione della traiettoria.

## Accelerazione normale

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{DB}{\Delta t}$$



$\overline{DB}$  essendo un cateto di un triangolo isoscele e' dato:

$$\overline{DB} = |V(t)| \cdot \sin(\Delta\varphi) = v \cdot \sin(\Delta\varphi)$$

Poiche' siano in infinitesimo:

$$\overline{DB} = v \cdot \Delta\varphi$$

Ottieniamo quindi:

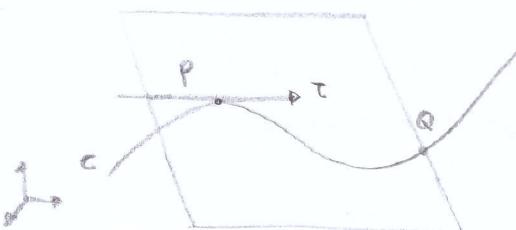
$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \dot{\varphi} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R}$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \right.$$

$$\left| \dot{\varphi} = \omega = \frac{v}{R} \right.$$

Si ha quindi in moto qualsiasi, posto su un piano, sempre un'accelerazione normale, eccetto per il moto con traiettoria rettilinea in cui  $R = \infty$  ( $a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$ )

## MOTO DI UN PUNTO CON TRAIETTORIA NELLO SPAZIO



Consideriamo una qualsiasi traiettoria nello spazio, in un qualunque punto P, si puo' studiare il moto mediante il PIANO OSCULATORE avente su di esso la tangente in P e in comune alla traiettoria il punto P e Q, in modo da far tendere Q a P.

Una volta spostati sul piano possiamo fare i ragionamenti precedenti e mediante il cerchio osculatore ricavare le accelerazioni.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Nel caso di traiettoria sghemba, nel senso che non esiste nessun piano che la contenga interamente, la si scomponga in diversi piani osculatori.

## MOTO CENTRALE

Per moto centrale si intende quello in cui ad ogni istante il vettore accelerazione è diretto verso un medesimo punto fisso.

### • Velocità Areolare

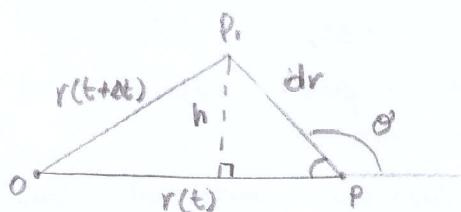
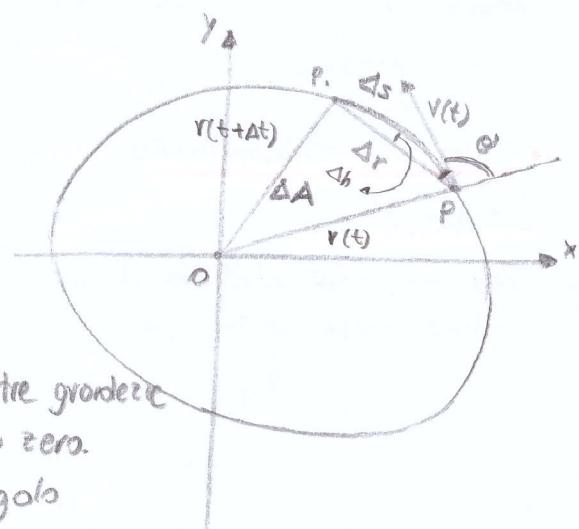
Nei moti centrali, necessariamente piani, è utile introdurre la velocità areolare poiché essa rimane sempre costante durante il moto.

In tale caso è utile porre l'origine del sistema di riferimento coincidente con il punto in cui è diretta l'accelerazione.

Consideriamo il punto P, individuato dal vettore  $r$ , nei due istanti  $t$  e  $t+\Delta t$  ( $r(t)$ ,  $r(t+\Delta t)$ ).

Il nostro scopo è calcolare l'area spazzata dal vettore  $r$  nel tempo  $\Delta t$ , portando al limite tale grandezza, la differenza tra triangoli rettilineo e mistilineo tende a zero più rapidamente delle altre grandezze poiché prodotto da  $\Delta h$  e  $\Delta r$  entrambi tendenti a zero.

Si può quindi approssimare  $\Delta A$ , all'area del triangolo rettilineo, (per infinitesimi).



$$\Delta A = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r \cdot dr \cdot \sin(\pi - \theta)}{2} = \frac{1}{2} r \cdot dr \cdot \sin \theta$$

$$|\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)|$$

Dalla precedente approssimazione possono sostituire  $dr$  con  $ds$ :

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot ds \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot dt \cdot \sin \theta$$

Si definisce quindi la velocità areolare come:

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot \sin \theta$$

Nel caso infinitesimo

$$v = \frac{ds}{dt}$$

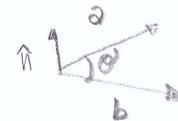
Dato che  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori  $r$  e  $v$ , si ha vettorialmente:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

### PRODOTTO VETTORIALE

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{n} |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta$$

La velocità vettoriale areolare è quindi perpendicolare sia al vettore posizione che a quelli della velocità tangenziale.



## MOTI RELATIVI

Il moto di un punto materiale puo' essere descritto in diversi sistemi di riferimento, in ognuno di essi si avranno traiettorie ed equazioni orarie differenti.

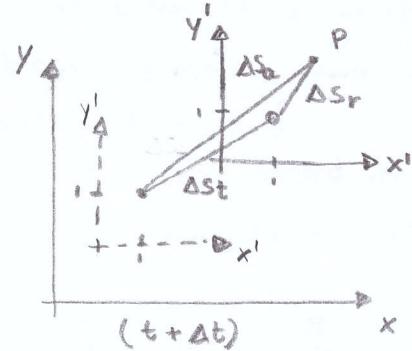
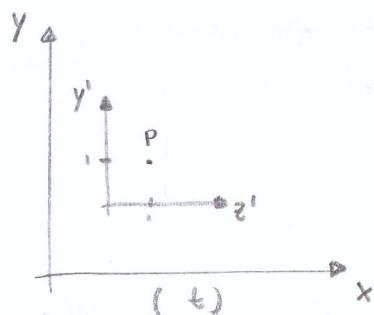
Consideriamo il caso in cui ci sia un sistema di riferimento fisso  $O(x, y, z)$  ed uno in movimento detto mobile  $O'(x', y', z')$ .

Il moto del punto materiale nel sistema fisso e' chiamato ASSOLUTO, nel sistema mobile RELATIVO. Il moto del sistema mobile nel sistema fisso e' detto di TRASCINAMENTO.

### MOTO DI TRASCINAMENTO

#### - TRASLATORIO

Per semplicita' studiamo il caso del moto su un piano; i risultati sono comunque valide anche nello spazio:



Nei precedenti grafici indiciamo lo spostamento di un punto rispetto ai due sistemi di riferimento. ( $\Delta S_t$  = Spostamento sistema riferimento mobile)

( $\Delta S_a$  = Spostamento del punto rispetto al sistema fisso). ( $\Delta S_r$  = Spostamento nel sistema mobile)

Notiamo che lo spostamento assoluto puo' essere scomposto:

$$\Delta S_a = \Delta S_r + \Delta S_t$$

Di conseguenza; passando per infinitesimi  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $dS_a = dS_r + dS_t$ )

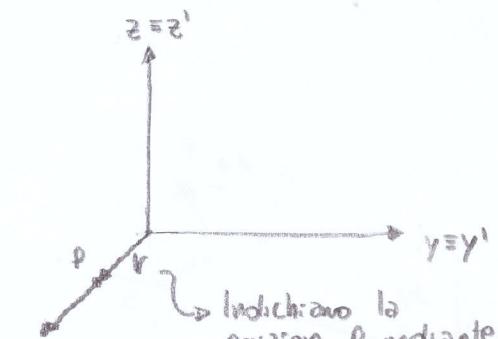
$$V_a(t) = V_r(t) + V_t(t)$$

$$a_a(t) = a_r(t) + a_t(t)$$

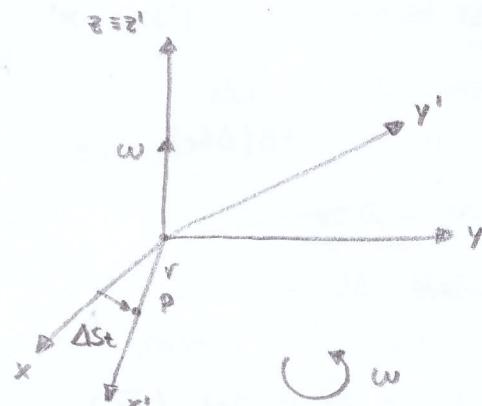
## ROTAZIONE

Nel seguente moto di trascinamento, i due sistemi di riferimento hanno in comune l'asse verticale  $z = z'$ . Il sistema mobile ruota intorno all'asse  $z$ .

## ACCELERAZIONE E VELOCITÀ MOTO DI TRASCINAMENTO



(istante  $t$ )



(istante  $t+\Delta t$ )

Lo spostamento traslatorio è dato da: ( $\Delta t \gg 0$ )

$$|ds_t| = v \cdot dt = \omega \cdot r \cdot dt$$

Vettorialmente, essendo  $\omega \perp r$  e  $\omega \perp \Delta s$

(Spostamento)  $ds_t = (\omega \times r) dt (= dr)$  (Al limite)

(Velocità)  $\frac{ds_t}{dt} = v_t = \omega \times r$

In questo caso la velocità del moto di trascinamento dipende da  $r$ , e quindi dalla posizione.

Ricaviamo quindi l'accelerazione di trascinamento

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d\omega \times r}{dt} + \omega \times \frac{dr}{dt}$$

Sopra abbiamo approssimato  $\Delta s$  con  $dr$  ( $dr = (\omega \times r)dt$ ), abbiamo quindi:

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r$$

Considerando l'accelerazione angolare  $\omega$  costante abbiamo:

$$\begin{aligned} a_t &= \omega \times \frac{dr}{dt} = \omega \times (\omega \times r) \\ &= \omega(\omega \cdot r)^0 - r(\omega \cdot \omega) \\ &= -|\omega|^2 \cdot r \end{aligned}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{r}$$

### PRODOTTO VETTORIALE

$$a \times b = \hat{n} |a||b| \cdot \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} (\omega \times r)dt &= \omega \times r dt \\ &= \omega dt \times r \end{aligned}$$

### DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \Leftrightarrow v \cdot v = |v|^2$$

$$v \cdot w = 0 \text{ se } v \perp w$$

Quindi nel caso di moto di trascinamento di rotazione l'accelerazione dipende dalla posizione del punto ( $r$ ).

### Accelerazione e velocità assolute e relative

Consideriamo il caso precedente ( $z=z'$ ), per semplificare l'esposizione il punto si muove lungo l'asse  $x'$ .

In questo caso  $\Delta s_a$  è dato dalla somma di  $\bar{AP}$  e  $PB(\Delta s_r)$

$$\Delta s_a = \bar{AP} + \Delta s_r$$

Facendo tendere  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta s_t$ ,  $\Delta s_r$ ,  $\Delta \varphi$  e  $\Delta s_a$  tendono a zero.

La differenza tra  $\bar{AP}$  e  $\Delta s_t$  ( $\bar{AC}$ ) è data da:

$$\bar{AC} = \Delta s_r \cdot \tan(\Delta \varphi) \quad (\text{Al limite} = \Delta s_r \cdot \Delta \varphi)$$

Al limite, essendo il prodotto di due grandezze tendenti a zero, esso va a zero più velocemente delle altre grandezze, si può quindi approssimare  $\bar{AP}$  con  $\Delta s_t$ .

Si ha quindi:

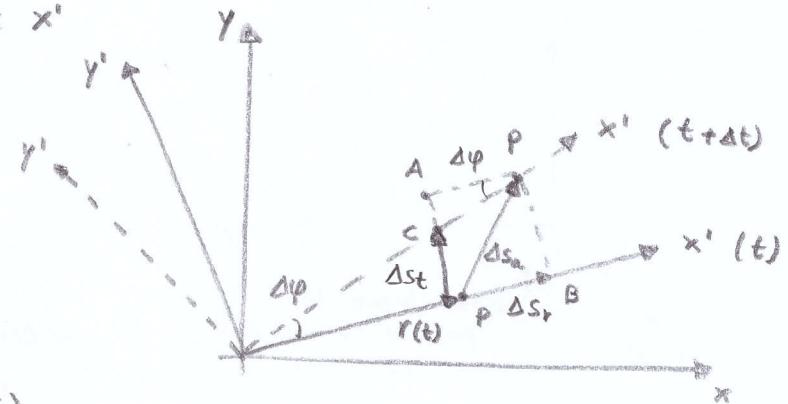
$$ds_a = ds_t + ds_r$$

$$v_a = v_t + v_r = \omega_x r + v_r$$

Per l'accelerazione si ricava in meccanica razionale:

$$a_a = a_r + a_t + \underbrace{2\omega \times v_r}_{\text{ACCELERAZIONE DI CORIOLIS}}$$

L'ultimo addendo è detto ACCELERAZIONE DI CORIOLIS



## DINAMICA

Studio dei moti dei corpi in riferimento alle cause che lo determinano.

### SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

Un sistema di riferimento si dice INERZIALE se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un altro sistema. Ovvero un sistema nobile si dice inerziale se ha moto di traslazione uniforme rispetto a quello assoluto.

La posizione di un punto materiale nel sistema nobile inerziale, rispetto a quello assoluto è data: (mediante il vettore posizione  $r$ )

$$r_a = r_o + r_r + v_t \cdot t \quad O(x, y, z) \text{ ASSOLUTO}$$

Posizione nel sistema nobile  $\hookrightarrow$  Velocità costante sistema nobile  $O'(x', y', z') \text{ MOBILE (RELATIVO)}$

### 1° LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI INERZIA)

Un punto materiale non soggetto a forze esterne, (o forza totale agente su di essa nulla) non subisce variazioni di velocità.

La velocità del punto è misurata rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Un punto si trova quindi in un sistema inerziale se soddisfa il 1° principio della dinamica.

### FORZA

Le forze sono la causa della variazione di velocità di un punto materiale in un sistema inerziale fissato.  $[F] = [L M T^{-2}] = \text{Newton}$

### MASSA INERZIALE

La massa inerziale è una proprietà intrinseca di un corpo, che lega la forza applicatagli alla variazione di velocità. Subito.  $[m] = \text{Kilogrammo} [Kg]$

### 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$F = m a$$

Tale principio è valido nei sistemi inerziali in cui  $F$  è data dalla somma di tutte le FORZE REALI agenti sul corpo, ovvero quelle forze dovute all'azione di altri corpi.

### APPLICAZIONI NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

Nel sistemi non inerziali la si può utilizzare, ma considerando, oltre le forze reali, anche le FORZE APPARENTI (o fittizie) derivanti dalle accelerazioni del sistema stesso.

### • PROIEZIONE SUGLI ASSI

L'equazione vettoriale del 2° principio, proiettata sugli assi diventa:

$$\begin{cases} F_x = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y = m a_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ F_z = m a_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

### • PRINCIPIO DI INDEPENDENZA DELLE AZIONI SIMULTANEE

Nei casi in cui la forza applicata ad un corpo è dunque alla somma di più forze, si può scomporre l'accelerazione che subisce come la somma di quelle dorate alle singole forze:

$$F = \sum F_i = \sum m a_i = m \sum a_i = \ddot{a}$$

#### - Stato di quiete

Un corpo si dice in equilibrio quando la somma delle forze agenti su di esso è pari a 0.

$$F = \sum F_i = 0$$

In tal caso il corpo avrà velocità costante.

### QUANTITÀ DI MOTORE

La quantità di moto è definita come:

$$p = m v \quad [p] = [MLT^{-1}]$$

Essa è un vettore definito da Newton per formulare il 2° principio della dinamica.

### • 2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA (QUANTITÀ DI MOTORE)

Newton formulò tale principio inizialmente tramite la quantità di moto:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Tale forma è usata nei casi in cui la massa varia nel tempo, (es relativity oppure un razzo che consuma carburante e quindi si alleggerisce)

### • 1° PRINCIPIO DELLA DINAMICA (QUANTITÀ DI MOTORE)

Utilizzando la quantità di moto si può esprimere il 1° principio nel seguente modo:

In un sistema di riferimento inerziale, un corpo in cui la risultante delle forze è nulla, mantiene inalterata la propria quantità di moto

$$F = 0 = \frac{dp}{dt} \Leftrightarrow p \text{ costante}$$

## IMPULSO ELEMENTARE

Dalla formulazione del 2° principio della dinamica ( $F = \frac{dp}{dt}$ ) si ha:

$$F dt = dp$$

$F dt$  e' detto IMPULSO ELEMENTARE DELLA FORZA nell'intervallo  $(t, t+dt)$ ,  
si considera quindi la forza istantanea ( $dt \rightarrow 0$ )

Per intervalli di tempo maggiori, integrando il caso elementare; si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \Delta p$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta p}$$

## 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

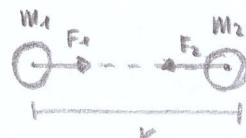
Ad ogni azione, che un corpo A esercita su un corpo B, corrisponde una reazione uguale e contraria diretta lungo la congiungente dei due corpi.

## LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Ogni punto materiale avente massa  $M_1$  attira un altro punto di massa  $M_2$  con una forza  $F$  diretta lungo la congiungente dei due punti.

Tale forza e' data:

$$\boxed{F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}}$$



$G$  e' detta COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE:  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

## FORZA PESO

Ogni corpo sulla Terra subisce un'attrazione verso il centro di essa a causa della gravità. Tale forza prende il nome di PESO.

Oltre alla forza di gravità, il corpo subisce una forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra, tale entità e' esigua in relazione all'altra e quindi la si puo' ignorare.

La forza peso e':  $\boxed{P = mg}$  dove  $g$  e' l'accelerazione imposta dalla gravità, e la si puo' considerare costante, in piccole zone.

Tramite la legge di gravitazione universale si ricava  $g$ :

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$M$  = massa Terra  
 $R$  = Raggio Terra

## REAZIONI VINCOLANTI

Nel 2° principio, andiamo a considerare la somma di tutte le forze agenti sul corpo, nel caso di moto in un sistema inerziale si considerano solo le forze reali. Esse si dividono in: FORZE ATTIVE o esterne e REAZIONI VINCOLANTI.

Le forze attive sono quelle imposte al corpo dall'esterno (del sistema), le reazioni vincolanti sono invece causate dalle limitazioni di movimento imposte al corpo (es. piano di appoggio, rotore di un treno).

La reazione vincolante si manifesta al momento in cui il corpo tende a superare un vincolo, tale reazione è sempre normale ad esso ed opposta alla forza e avente modulo pari a  $F$ .

Tale reazione è quindi giustificata dal 3° principio della dinamica.

## ATTRITO

Dall'esperienza notiamo che se imprimiamo una forza ad un oggetto esso percorrerà qualche centimetro per poi fermarsi, la forza che si oppone allo spostamento è detta FORZA DI ATTRITO.

### VERSO FORZA DI ATTRITO

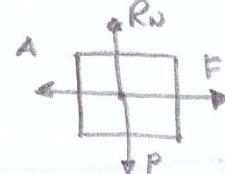
Il verso è sempre opposto allo spostamento

### Modulo

Empiricamente si ricava che la forza di attrito è sempre proporzionale alla reazione normale al vincolo.

ponendo un oggetto su di un piano orizzontale e applicandogli una forza esso non si muoverà fino a quando:

$$F \leq \mu_s R_N$$



Ricaviamo quindi che nel moto incipiente l'attrito è dato da:

$$A = \mu_s R_N \quad \mu_s = \text{Coefficiente di attrito statico.}$$

Una volta messo in moto il corpo, la forza necessaria a farlo procedere di moto rettilineo uniforme è minore della precedente ( $< \mu_s R_N$ )

In questo caso si ricava che la forza necessaria è data da:

$$F = \mu_d R_N = A \quad \mu_d = \text{Coefficiente di attrito dinamico}$$

## RESISTENZE IN UN FLUIDO

Oltre all'attrito vi e' un'altra resistenza passiva, ovvero quella in un fluido, dovuta alla viscosa (es. acqua, olio, aria)

Nel caso di basse velocita' si ha:

$$F = -b v$$

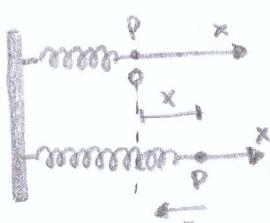
Il coefficiente  $b$  va calcolato in base alla viscosita' del fluido e alla forma del corpo. Per un corpo sferico si ha:

$$b = 6\pi r \eta \quad | \eta = \text{Coeficiente di viscosita'} \\ r = \text{Raggio sfera}$$

## FORZE ELASTICHE

Tutti i corpi se soggetti a sollecitazioni si deformano e si oppongono con forza uguale e opposta a quella esterna, per tornare nella posizione di partenza.

Prendiamo in considerazione una molla:



La forza di richiamo sara' sempre opposta al verso della deformazione, ed e' proporzionale ad essa per spostamenti piccoli.

Nel nostro caso, considerando una retta; la forza e' data da:

$$F = -Kx \hat{i} \quad | K = \text{Costante elastica } (K > 0) \\ \hat{i} = \text{Versore asse } x$$

Nel caso piu' generale, indicando la posizione del punto tramite il vettore di posizione  $r$  si ha:

$F = -K r$

## PROCESSI OSCILLATORI

Applicando il secondo principio a forze elastiche (es molla) studiamo il moto armonico che si genera.

### • Oscillazioni libere

Consideriamo una molla poggiate su di un piano orizzontale privo di attrito, applicando una forza, in modo da allungare la molla, e poi togliendola genera un moto armonico.

Sapendo che la forza elastica è  $F = -kx\hat{i}$ , applicando il 2° principio si ha:

$$ma = -kx\hat{i} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Risolvendo tale equazione differenziale ottiene la seguente equazione oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

Per ottenere la PULSAZIONE PROPRIA  $\omega_0$ , ovvero la velocità (rad/s) con cui avvengono le oscillazioni, è sufficiente sostituire la soluzione nell'eq differenziale

$$x = A \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{k}{m}A \cos(\omega_0 t) = 0$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Prendendo l'istante  $t=0$  si ricava:

$$-\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\text{Da cui, essendo } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### - Ampiezza Massima

Considerando l'istante iniziale ( $t=0$ ) e una fase iniziale ( $\varphi \neq 0$ ) si ha:

$$x(0) = A \cos(\varphi) = A \cos(\omega_0 \cdot 0) \quad (x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi))$$

Derivando si ricava la velocità iniziale:

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A\omega_0 \sin(\varphi)$$

Abbiamo quindi le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = A \cos(\varphi) \\ v_0 = -A \omega_0 \sin(\varphi) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{v_0}{\omega_0} = -A \sin(\varphi)$$

Elevando entrambe al quadrato e sommando membro a membro:

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \Leftrightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

### Fase iniziale

Per ricavare  $\varphi$  (Fase iniziale) basta ripetere le due equazioni precedenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = A \cos(\varphi) \\ v_0 = -A \omega_0 \sin(\varphi) \end{array} \right.$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{v_0}{x_0} = -\frac{\omega_0 \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\tan(\varphi) = -\frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0}$$

### Oscillazioni smorzate

Prendiamo il caso di una molla che subisce una resistenza passiva, come ad esempio quella di un fluido.

La forza di tale resistenza e':

$$F = -b v$$

Il corpo collegato alla molla e' quindi soggetto a due forze, quella elastica e quella causata dalla resistenza del fluido; applicando il 2° principio:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x - b \frac{dx}{dt}$$

Si ha quindi la seguente eq. differenziale:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0$$

Equivalentemente:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \mid \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

L'equazione caratteristica associata e' data:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Usando la formula ridotta, ricavo  $\lambda$  (Tale formula si usa se  $\frac{b}{m}$  e' pari)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Si avranno quindi tre casi a seconda del  $\Delta$

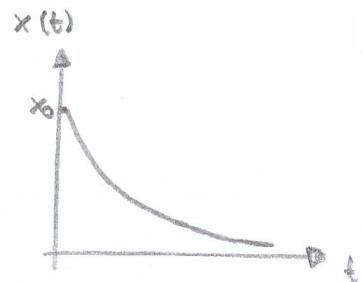
### - Smorzamento forte ( $\Delta > 0$ )

In tal caso si ha una soluzione del tipo:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t}$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left( A_1 e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t} \right)$$

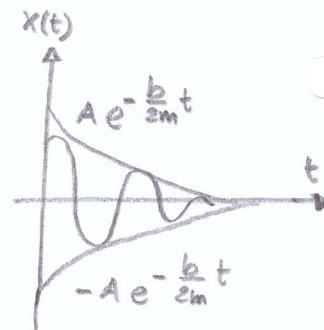


### - Smorzamento debole ( $\Delta < 0$ )

Questa volta si avra' una soluzione del tipo:

$$x(t) = A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + A_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (\alpha \pm i\beta)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ A_1 \cos(\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t) + A_2 \sin(\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}t) \right]$$

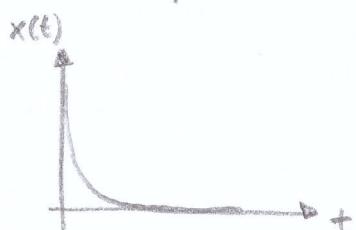


### - Smorzamento critico ( $\Delta = 0$ )

In tal caso si ha  $\lambda = -\frac{b}{2m}$  ed una soluzione del seguente tipo:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (A_1 + A_2 t)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} (A_1 + A_2 t)$$



- In questa situazione il punto torna all'origine procedendo minime oscillazioni.

### • Oscillazioni forzate

In questo caso il punto e' soggetto anche ad una forza esterna che varia nel tempo:  $F = \cos(\omega t)$

L'equazione sara' quindi:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

Tale eq differenziale avra' come soluzione quella del calo precedente sommata alla soluzione non omogenea.

La soluzione omogenea e' presente negli istanti initiali (TRANSITORIO), successivamente si attenua fino ad essere trascurabile.

La soluzione non omogenea invece rappresenta lo stato di moto (REGIME) essa ha la seguente forma:

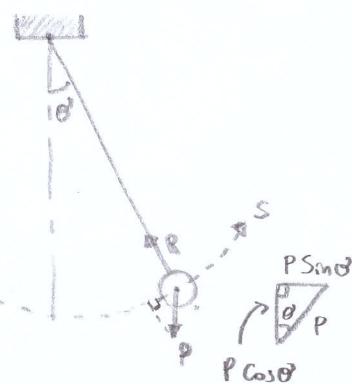
$$x(t) = BF \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\left| \begin{array}{l} B = \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{bw}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \end{array} \right.$$

L'ampiezza massima  $BF$  dipende dal rapporto

$\frac{\omega}{\omega_0}$ , ovvero tra la pulsazione imposta e quella libera

## PENDOLO SEMPLICE



Il pendolo semplice e' formato da una corda inestensibile avente all'estremita' una massa m.

Il punto percorre una traiettoria circolare, l'equazione oraria la si ottiene applicando il 2<sup>o</sup> principio nella situazione in cui il punto si trova spostato di un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale.

Consideriamo l'ascissa curvilinea s, positiva nella rotazione verso destra (antiorario). La forza totale e' data:

$$F = P + R$$

Proiettata sulla traiettoria curvilinea: (R essendo  $\perp$  non dà alcun contributo)

$$ma = -mg \sin \theta$$

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin\left(\frac{s}{l}\right)$$

$$| s = l\theta$$

Per semplificare la risoluzione di tale equazione consideriamo anzitutto i dati: ( $\sin \theta \approx \theta$ )

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \left(\frac{s}{l}\right)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s$$

La soluzione e' la medesima del moto armonico:  $s(t) = A \cos(\omega t)$

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -Aw \sin(\omega t) \\ \ddot{s}(t) = -Aw^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad -Aw^2 \cos(\omega t) = -\frac{g}{l} A \cos(\omega t)$$

Considerando l'istante  $t=0$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

N.B.

Il periodo del pendolo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione

Il periodo T e' dato

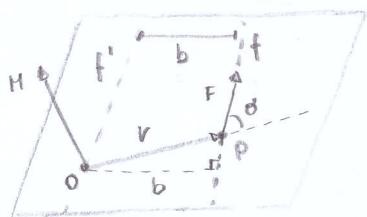
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Non essendo un moto rettilineo si ha anche un'accelerazione centripeta, ricevuta proiettando le forze sulla corda:

$$ma_c = R - mg \cos \theta$$

## MOMENTO DI UNA FORZA

### • RISERPO AD UN POLO



Individuiamo il punto, P tramite il vettore posizione  $r$ , avente origine in O.

Applicando una forza  $F$  in P si genera il MOMENTO DI UNA FORZA, dato da:

$$M = r \times F$$

Tale vettore ( $H$ ) è normale al piano formato da  $r$  e  $F$ , ha modulo:

$$|H| = |r| \cdot |F| \cdot \sin \theta$$

PRODOTTO VETTORIALE

Poiché  $r \cdot \sin \theta = b$  (braccio) il modulo si può anche scrivere come:

$$|H| = |F| \cdot b \quad [H] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}] \quad (N \cdot m)$$



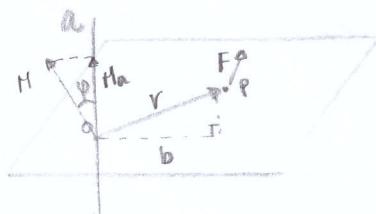
$$a \times b = \hat{n} (a||b) \cdot \sin \theta$$

Si può notare dalla definizione, guardando l'immagine, che facendo scorrere il punto sulla retta f, oppure muovendo il polo o su f', il momento della forza non varia, poiché in conseguenza alle variazioni anche  $\theta$  varia.

Se un corpo è soggetto a n forze, il momento risultante sarà dato dalla somma dei momenti delle singole forze:

$$M = r \times F = r \times \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n H_i$$

### • RISERPO AD UN ASSE



$$M_a = M_0 \cdot a = (r \times F) \cdot a$$

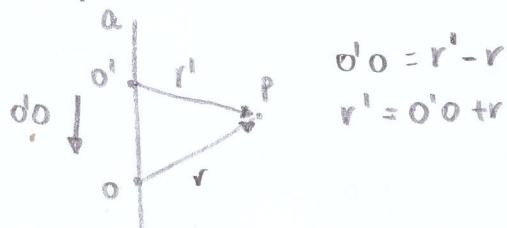
$$|M_a| = |M_0| |a| \cdot \cos \varphi$$

PRODOTTO SCALARE



$$a \cdot b = a b \cos \varphi = (a||b) \cos \varphi$$

Si dimostra che il momento assiale non dipende dal punto scelto, poiché esso è la proiezione del momento di una forza rispetto ad un polo vediamo come varia passando da O a O'



$$M_{O'} = r' \times F = (O' O + r) \times F = \underbrace{O' O \times F}_{0} + r \times F$$

$$M_{O'} = r \times F$$

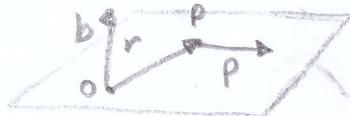
Poiché  $O'$  a  $O' O$  è quindi ad a non dà nessun contributo

## MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

### • RISPETTO AD UN POLO

$$[b] = [L^2 \text{MT}^{-1}]$$

$$b = r \times p$$



Il vettore quantità di moto ( $p$ ) può essere scomposto:

$$p = mv_n + mv_r$$

Si ha quindi

$$b = r \times (mv_n + mv_r) = r \times mv_n + r \times mv_r = r \times mv_n$$

$$|b| = rmv_n \cdot \sin(90^\circ) = rmv_n \quad \rightarrow r \parallel v_r \Rightarrow r \times v_r = 0$$

### Momento d'inerzia

Nei casi particolari in cui vi è solo la componente normale della velocità  $v_n$ , si ha un moto circolare. In tal caso il vettore  $w$  (velocità angolare) e  $b$  sono paralleli e i moduli hanno le seguenti relazioni:

$$|b| = rmv_n = mr^2w$$

$$|w| = \frac{v}{r}$$

In questo si ha una notevole somiglianza tra il momento della quantità di moto e la quantità di moto ( $p=mv$ ). La velocità  $v$  è sostituita dalla velocità angolare  $w$ , e la massa  $m$  dal MOMENTO D'INERZIA ( $mr^2$ ) (rispetto ad un punto)

### • RISPETTO AD UN ASSE

Il momento della quantità di moto rispetto ad un asse è dato dalla proiezione del momento della quantità di moto rispetto ad un polo  $O$ , su di un asse passante per  $O$  (come nel caso del momento di una forza)

## TEOREMA DEL TORRENTE DELLA QUANTITA' DI MOTTO

Vediamo ora la relazione tra il momento della quantità di moto e di una forza. Iniziamo dal 2° principio della dinamica (sistema di riferimento inerziale)

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Facendo il prodotto vettoriale ad entrambi i membri con il vettore posizione  $r$  ottengono:

$$r \times F = r \times \frac{dp}{dt} \quad M = r \times \frac{dp}{dt} \quad | M = r \times F$$

Derrivando la definizione di momento q.m.

$$\frac{db}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} \quad | b = r \times p$$

Unendo i risultati:

$$\frac{db}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + M$$

OSS

[In ogni caso si ha:

$$\frac{dr}{dt} = v_r \quad (\text{Velocità relativa nel sistema inerziale})$$

### Polo FISSO

Poiché il sistema mobile (ovvero anche il punto O) non si muove, rispetto a quello assoluto, nell'equazione dei momenti si ha  $v_r = v_a = v$

$$\frac{db}{dt} = \underbrace{v_r \times mv}_{(v_r \equiv v) \Rightarrow = 0} + r \times \frac{dp}{dt} \quad (v \text{ indica la velocità assoluta } v_a)$$

RISPETTO AD UN ASSE

$$\frac{db}{dt} = r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = \frac{db}{dt}$$

$$Ma = \frac{d ba}{dt}$$

### Polo mobile

Poiché in questo caso vi è moto traslatorio uniforme del sistema mobile la velocità relativa è data da:

$$V = v_a = v_r + v_t$$

$$V = v_r + v_o$$

$$v_r = V - v_o$$

$v_o$  = Velocità del polo

Quindi si ha:

$$\frac{db}{dt} = \underbrace{v_r \times mv}_{= 0} - v_o \times mv + r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = \frac{db}{dt} + v_o \times p$$

## IMPULSO ELEMENTARE ANGOLARE

Come nel caso di una forza si definisce un impulso per il momento angolare (momento q.m.):

$$M dt$$

## TEOREMA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE (Quantità di moto)

Dal teorema del momento della q.m. si ha:

$$M = \frac{db}{dt} \quad M dt = db$$

Integrando si ottiene:

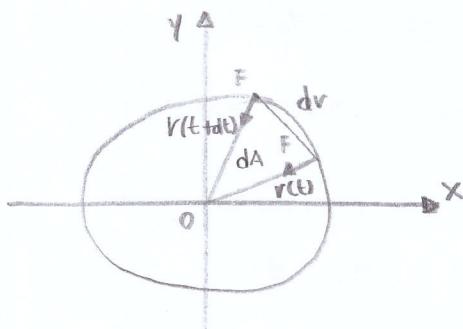
$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{b_1}^{b_2} db = \Delta b$$

Nel caso particolare in cui il momento della forza totale agente su di un corpo è NULLO rimane inalterato il MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTORE (TEOREMA CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE) ( $b$  costante)

## • APPLICAZIONE (MOTORE CENTRALE)

Il precedente teorema può essere usato per dimostrare che nel moto centrale la velocità aureolare si conserva.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \times v \quad (\text{Velocità aureolare})$$



In tale moto la forza a cui è soggetto il punto è sempre rivolta verso il centro  $O$ , rispetto a tale polo il momento di una forza  $M$  è uguale a zero, poiché il braccio è nullo. ( $M=0 \Rightarrow b$  costante)

Si ha quindi:  $b = r \times p = r \times m v = \text{costante}$

Prendendo un'infinitesimo  $dt$ :

$$b dt = r \times m v dt = m (r \times ds)$$

$$V = \frac{ds}{dt}$$

Poiché siamo in infinitesimi:

$$b dt = m (r \times dr) = 2 m dA$$

$$dA \approx \frac{1}{2} r \times dr$$

$$b = 2m \frac{dA}{dt} = \text{Costante}$$

## LAVORO ED ENERGIA

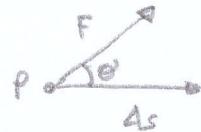
### LAVORO

Introduciamo il concetto di lavoro per distinguere situazioni in cui: una forza, applicata ad un punto, esegue uno spostamento e quando il punto rimane fermo.

Per un moto rettilineo con  $F$  costante, si definisce lavoro:

$$L = F \cdot \Delta s$$

$$|L| = F \Delta s \cdot \cos\theta$$



Possiamo generalizzare tale definizione considerando una traiettoria qualsiasi: come la somma di tratti  $ds$  di moto rettilineo; in cui la forza  $F$  resta costante.

$$dL = F \cdot ds$$

Il lavoro totale sarà dato dalla somma dei lavori infinitesimi nella traiettoria (es. c)

$$[L] = [H L^2 T^{-2}] [\text{Joule}] \quad L_{12} = \int_{1C}^{2C} dL = \int_{1C}^{2C} F \cdot ds$$

I vettori  $F$  e  $ds$  possono essere decomposti nei loro componenti

$$L_{12} = \int_{1C}^{2C} [(F_x dx) + (F_y dy) + (F_z dz)]$$



### OSS (LAVORO NEGATIVO)

Nel caso in cui l'angolo formato dalla forza e dallo spostamento è ottuso il lavoro è negativo, ciò sta a significare che l'ente che esercita la forza SUBISCE il lavoro eseguito dalla reazione del punto materiale



### POTENZA

#### POTENZA MEDIA

$$\bar{W} = \frac{L}{t_2 - t_1}$$

$$[W] = [H L^2 T^{-3}] = [\text{Watt}]$$

#### POTENZA INSTANTANEA

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v \quad (\rightarrow \text{Velocità istantanea})$$

$$W = F \cdot V$$

## ENERGIA CINETICA

Un corpo dotato di velocità e massa ha un'energia chiamata CINETICA che gli consente di eseguire un lavoro.

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Tale equazione si ricava applicando il 2° principio della dinamica alla definizione di lavoro

$$dL = F \cdot ds = ma \cdot ds = m \frac{dv}{dt} \cdot ds = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt$$

OSS

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(v \cdot v)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} \cdot v$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

PRODOTTO SCALARE

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \quad (v \equiv v)$$

$$\Leftrightarrow |v|^2 = v \cdot v$$

Si ha quindi:

$$dL = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} m dv^2 = dT$$

## TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (o delle forze vive)

Se consideriamo la precedente equazione infinitesima, eseguendo l'integrazione per due posizioni (o stati) 1 e 2; ricaveremo il lavoro totale:

$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \Delta T \quad (\text{Variazione energia cinetica})$$

Il lavoro compiuto da una qualsiasi forza su un punto materiale è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo. (Teorema energia cinetica)

OSS (Forza che contrasta il moto di un corpo)

Consideriamo il caso in cui l'energia cinetica del corpo finale sia nulla ( $v=0$ ) si ha:

$$L_{12} = -T_1 \quad T_1 = -L_{12}$$

In questo caso il lavoro compiuto da una forza esterna sul corpo è negativo; quindi l'ente che esercita tale forza, che contrasta il moto del punto, subisce tale lavoro. ( $L_{12}$ )

In generale un corpo dotato di velocità e massa ha la capacità di compiere lavoro sull'ente che si oppone al suo moto

## ENERGIA CINETICA NEI VARI MOTI

Nel caso di moti uniformi ( $\frac{du}{dt} = 0$ ) si ha che la variazione di energia cinetica è pari a zero.

### • MOTO CIRCOLARE

Nel caso di moto circolare l'energia cinetica può essere espressa come:

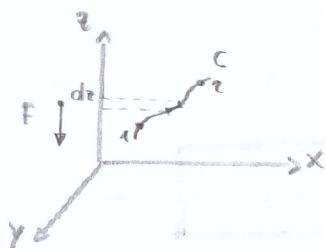
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad | \quad \omega = \frac{v}{R}$$

dove  $mR^2$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto al centro di rotazione.

## CAMPIONE DI FORZA CONSERVATIVO

Tali tipi di campo godono della proprietà per cui il lavoro compiuto da una forza su un corpo, per portarlo da una posizione 1 a una 2, non dipende dal percorso seguito, ma solo dalle due posizioni:

### • CAMPIONE DI FORZE UNIFORMI (Es forza di gravità)



In tal caso la forza è uniforme in verso, direzione e modulo, nel nostro sistema di riferimento F è diretta in verticale verso il basso, quindi ha solo componente z

$$dL = F \cdot ds = -F dz \quad \text{Proiezione}$$

Per ottenere il lavoro totale integriamo:

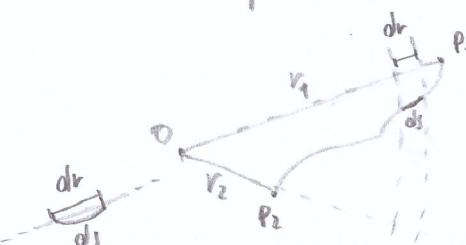
$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 -F dz = -F(z_2 - z_1) = mg h$$

$$F = P = mg$$

$$h = \Delta z$$

### • CAMPIONE DI FORZE CENTRALI

In questo tipo di campo vi è una forza diretta verso un punto O, la cui intensità dipende dalla distanza da O.



Dipendendo solo da r (distanza) la forza si può scrivere:

$$F = \pm |F(r)| \hat{r}$$

Il lavoro elementare:

$$dL = F \cdot ds = \pm |F(r)| \hat{r} \cdot ds \\ = \pm |F(r)| dr$$

$$\hat{r} \cdot ds = dr$$

Il lavoro totale:

$$L_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dL = \int_{r_1}^{r_2} \pm |F(r)| dr \quad \text{Non si ha più alcun riferimento al percorso, ma solo alla distanza tra } r_1 \text{ e } r_2.$$

## • PERCORSO CHIUSO

poiché il lavoro non dipende dal percorso, si ha che il lavoro totale eseguito su una linea chiusa, in un campo conservativo, è sempre nullo



$$L_{TOT} = L_{12} + L_{21} = \int_1^2 dl + \int_2^1 dl = \int_1^2 dl - \int_1^2 dl = 0$$

## ENERGIA POTENZIALE

Sfruttando la proprietà dei campi conservativi definiamo una nuova funzione che data la differenza tra due posizioni restituisca il lavoro necessario per spostare un punto materiale.

Consideriamo il caso di uno spostamento da un punto di riferimento O ad uno generico P:

$$U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z) = L_{OP}$$

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - L_{OP} = \text{Cost} - \int_0^P dl$$

$$\begin{array}{c} O(x_0, y_0, z_0) \\ \downarrow \\ P(x, y, z) \end{array}$$

Per uno spostamento generico  $P_1 \rightarrow P_2$  si sfrutta O (punto di riferimento) come punto di passaggio.

$$L_{12} = L_{10} + L_{02} = \int_1^0 dl + \int_0^2 dl = - \int_0^1 dl + \int_0^2 dl$$

$$L = -\Delta U$$

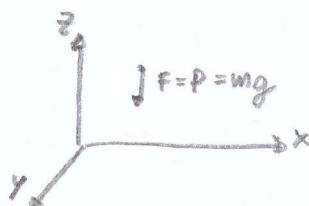
$$\begin{aligned} &= U(x_1, y_1, z_1) - \cancel{\text{Cost}} + \cancel{\text{Cost}} - U(x_2, y_2, z_2) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) \\ &= -\Delta U_{12} \end{aligned}$$

L'ENERGIA POTENZIALE quindi esprime la capacità di compiere lavoro da parte delle forze del campo conservativo

## • CAMPIONE DELLA FORZA DI GRAVITÀ

In questo caso si considera solo la componente verticale (z)

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U(z) = \text{Cost} - L_{OP} = \text{Cost} - \int_0^P F \cdot ds \\ &= \text{Cost} - \int_{z_0}^{z_2} mg dz = \text{Cost} + mgz - mgz_0 \end{aligned}$$



Ponendo l'energia potenziale uguale a zero nel punto di riferimento ( $\text{Cost} = 0$ ) e  $z_0 = 0$

$$U(z) = mgz$$

### • Campo di forze centrali

Proviamo come esempio le forze gravitazionali ed elettrostatiche, esse sono del tipo:

$$F = |F(r)| \hat{r} = \pm \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

$$|F(r)| = \pm \frac{k}{r^2}$$

+ forza repulsiva



Ricaviamo quindi l'energia potenziale in questo caso:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -L_{OP} = - \int_0^P \pm \frac{k}{r^2} \hat{r} \cdot ds + \text{cost} \\ &= - \left( \int_{r_0}^r \pm \frac{k}{r^2} dr \right) + \text{cost} \\ &= \pm k \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + \text{cost} \end{aligned}$$

$$\hat{r} \cdot ds = dr$$

Imponendo  $r_0 = +\infty$  e in tale punto porre l'energia potenziale nulla ( $\text{cost} = 0$ )

$$U(x, y, z) = \pm \frac{k}{r}$$

### • Campo di forze elastiche

$$F = -Kx \hat{i}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= -L_{OP} = - \int_0^P F \cdot ds + \text{cost} = \int_0^P Kx \hat{i} \cdot ds + \text{cost} \\ &= \int_{x_0}^x Kx dx + \text{cost} = K \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) + \text{cost} \end{aligned}$$

Ponendo  $x_0 = 0$  e  $\text{cost} = 0$ :

$$U(x) = \frac{1}{2} Kx^2$$

## DESCRIZIONE CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE MEDIANTE EN. POTENZIALE

Dalla conoscenza dell'energia potenziale punto per punto di un campo di forze conservative è possibile descrivere completamente il campo di forze. Possiamo quindi definire la direzione, modulo e verso delle forze:

### • DIREZIONE

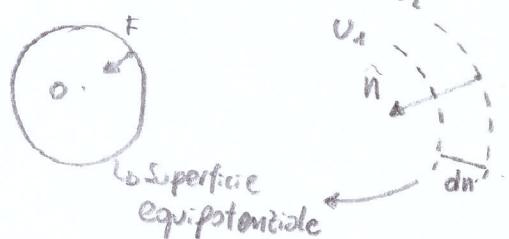
I punti in cui l'energia potenziale non varia descrivono le SUPERFICI EQUIPOTENZIALI, le forze del campo sono sempre normali ad esse.

Ad esempio nel caso della forza di gravità le superfici equipotenziali sono quelle orizzontali.

Quindi le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali.

### • MODULO

Per ricavare il modulo consideriamo un campo di forze costante:



Consideriamo la normale alla superficie, tale forza avrà quindi la medesima direzione

Dalla definizione di  $U$  si ha:

$$dU = -d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\mathbf{F} \cdot dn$$

$$= -F_n dn$$

Si ha quindi:

$$F_n = -\frac{dU}{dn}$$

Scomponendo il vettore  $n$  nelle sue componenti e descrivendo  $dU$  mediante i differenziali: (\*)

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \left[ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right] = -[F_x dx + F_y dy + F_z dz]$$

$$F = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right) = -\nabla U$$

(\*)

$$\left| \begin{array}{l} f(x) - f(x_0 + h) = \frac{df}{dx}(x - x_0) \\ du = \frac{\partial U}{\partial x} dx \end{array} \right.$$

## CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

Il teorema delle forze vive (o dell'energia cinetica) nel caso in cui tutte le forze che agiscono sul punto sono conservative assume la seguente forma:

$$L_{12} = \Delta T_{12} = -\Delta U_{12} \Leftrightarrow T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

Quindi:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \quad E_2 = E_1 \quad \boxed{E \text{ costante}}$$

La somma tra energia cinetica e potenziale è detta ENERGIA MECCANICA e tale energia, in questo caso, si conserva (E costante) durante il moto.

## ENERGIA MECCANICA NELL'OSCILLATORE ARMONICO

Prendiamo sempre il caso di uno molla, una volta distesa e rilasciata, si mette in moto armonico (no attrito).

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

In questo caso la forza è semplicemente diretta verso il centro (0):

$$F = -kx \hat{i}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'energia cinetica è data:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\left| \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega^2 m = k \right.$$

In ogni istante l'energia meccanica è data:

$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2} k A^2 \end{aligned}$$

## VARIAZIONE ENERGIA MECCANICA

Nel caso siano presenti forze non conservative che agiscono su di un corpo, l'energia meccanica durante il moto varia. Per la risoluzione dei problemi occorre quindi utilizzare il teorema dell'energia cinetica valido con tutti i tipi di forze:

$$L_{TOT} = \Delta T$$

Possiamo quindi dividere il lavoro totale in due parti: quello eseguito da forze cons. e quello eseguito da forze non conservative.

$$L_{TOT} = L_{NC} + L_c = L_{NC} - \Delta U = \Delta T$$

$$| L_c = -\Delta U$$

$$L_{NC} + U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

$$\begin{aligned} L_{NC} &= T_2 + U_2 - T_1 - U_1 = T_2 + U_2 - (T_1 + U_1) \\ &= E_2 - E_1 = \Delta E \end{aligned}$$

Ricaviamo quindi che il lavoro fatto dalle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica:

$$L_{NC} = \Delta E$$

## MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Finora abbiamo studiato il moto dei corpi approssimandoli a punti materiali; tale approssimazione non la si può applicare in casi come una rotazione su se stessa oppure nel caso di un corpo che durante il moto esplode (es. proiettile).

Possiamo tuttavia considerare un corpo come costituito da punti materiali; per determinarne il moto non è necessario conoscere la posizione degli infiniti punti del sistema, ma si possono fare approssimazioni studiando un singolo punto astratto detto CENTRO DI MASSA.

### FORZA APPLICATA AD UN SISTEMA (CENTRO DI MASSA)

Quando il sistema è soggetto ad una forza ogni punto che lo compone ne subisce gli effetti. La forza esercitata  $F$  si divide in tutti i punti ( $F = \sum F_j$ )

Ogni punto è quindi soggetto ad una forza  $F_j$  ( $j=1 \dots n$ ), tale forza la si può decomporre in due tipi: quella esercitata da altri punti del sistema e quella esercitata da punti esterni:

$$F_j = F_j^{(\text{est})} + F_{jk}^{(\text{int})} = m_j \frac{d^2 r_j}{dt^2}$$

Forza esercitata  
dal punto  $k$  sul punto  
 $j$  preso in esame

Per determinare la forza totale agente sul sistema occorre sommare tutte le forze applicate ai singoli punti

$$F = \sum_{j=1}^n F_j = \sum F_j^{(\text{est})} + \sum F_{jk}^{(\text{int})} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d^2 r_j}{dt^2} = 0$$

Nella sommatoria le forze interne si annullano dato che ad ogni forza  $jk$  corrisponde una  $kj$  di segno opposto.

Individuando un punto C (CENTRO DI MASSA), tale equazioni si può scrivere

$$r_c = \frac{\sum m_j r_j}{m}$$

$$m = \sum m_j \quad F = m \frac{d^2 r_c}{dt^2}$$

N.B.  
Tale relazione si riferisce alle sole forze esterne

Nel caso continuo; il punto C si individua nel seguente modo

$$r_c = \int \frac{r dm}{m} = \frac{1}{m} \int_V p r dv \quad p = \frac{dm}{dv} \quad (\text{densità})$$

Quando il sistema di punti materiali puo' essere approssimato mediante il centro di massa, in cui si considera presente l'intera massa del sistema e applicata la somma delle forze esterne.

### ADDITIVITA' DEL CENTRO DI MASSA

A volte per ricavare il centro di massa e' utile scomporre il sistema in sottosistemi, ricavare i rispettivi centri di massa e poi ricavare il centro di massa dei centri di massa dei singoli sottosistemi.

$$r_c = \frac{1}{m} \int_V p r dv = \frac{\int_{V_1} p r dv + \int_{V_2} p r dv}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r_{c1} + m_2 r_{c2}}{m_1 + m_2}$$

### QUANTITA' DI MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

Come fatto con una forza applicata ad un sistema, analizziamo come si calcola la quantita' di moto di un sistema:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dr_i}{dt} \quad (\text{il sistema e' costituito da } n \text{ punti})$$

Sfruttando il centro di massa si ottiene:

$$p = m \frac{dr_c}{dt} = m v_c$$

$$\left| \begin{array}{l} r_c = \frac{\sum m_i r_i}{m} \\ m v_c = \sum m_i v_i \end{array} \right.$$

Si ha quindi che la quantita' di moto del sistema e' data dalla massa del sistema e dalla velocita' del centro di massa

### 1° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

Prendendo l'equazione ricavata per le forze esterne applicate al sistema si ricava la 1° equazione cardinale:

$$F_{est} = m \frac{d^2 r_c}{dt^2} = m \frac{dv_c}{dt} = \frac{d(m v_c)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad | p = m v_c$$

Tale equazione esprime un concetto fondamentale, se un sistema non e' soggetto a forze esterne, mantiene la propria quantita' di moto.

Ad esempio nel moto parabolico di un proiettile, nel caso d'esplosione (teoria) il sistema non varia quantita' di moto in seguito all'esplosione dato che si tratta di una forza interna. La quantita' di moto varia a causa della forza di gravità; quindi durante il moto il centro di massa descrive la traiettoria parabolica come se nulla fosse accaduto.

## TEOREMA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

Data la seguente equazione:

$$f_{est} = \frac{dp}{dt}$$

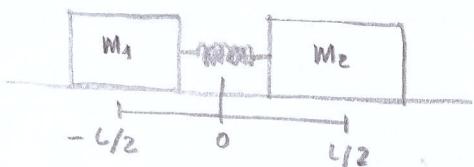
Notiamo che se la somma delle forze esterne applicate al sistema e' pari a zero, si mantiene la quantita' di moto.

Quindi: Un sistema isolato di punti materiali, durante il moto, mantiene costante la propria quantita' di moto

OSS

Dato che  $P = \sum p_i$ , le singole componenti  $p_i$  possono variare, ma solo mantenendo costante  $P$  totale.

### ESEMPIO



Consideriamo due masse poggiate su un piano privo di attrito e collegate mediante una molla tenuta compressa da un filo.

Bruciando il filo, le due masse subiscono una forza che accelerera i due corpi.

Poiche' la forza (potenziale) della molla e' interna, la quantita' di moto si conserva; inizialmente i corpi erano fermi, quindi:

$$0 = M_1 V_1 + M_2 V_2$$

Da cui possiamo ricavare le velocita' in relazione alla massa:

$$V_1 = -\frac{M_2}{M_1} V_2$$

Un'altra caratteristica e' che il centro di massa in questo caso rimane fisso, dato che la quantita' di moto inizialmente e' zero e necessariamente anche durante il moto delle masse, la velocita'  $V_c$  del centro di massa rimane zero:

$$P = m V_c = 0 \Leftrightarrow V_c = 0$$

$$x_c = \frac{M_1(-V_2) + M_2(V_1)}{M_1 + M_2} = \frac{L/2(M_2 - M_1)}{M_1 + M_2} = \frac{L(M_2 - M_1)}{2(M_1 + M_2)} = \text{costante nel tempo.}$$

## MOMENTO DI UNA FORZA

Definiamo il momento di una forza agente su un sistema di punti materiali come:

$$H = \sum_i^n H_i = \sum_i^n (r_i \times F_i)$$

Ogni  $H_i$  si riferisce al momento della forza  $F_i$  applicata al punto, tutti calcolati con il medesimo polo.

## MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Analogamente al caso precedente:

$$b = \sum_i^n b_i = \sum_i^n (r_i \times p_i)$$

## TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Nel caso di un singolo punto materiale abbiamo ricavato che il momento di una forza è in relazione a quello della quantità di moto, tramite:

$$H = \frac{db}{dt} \quad H = \frac{db}{dt} + v_0 \times p$$

Vediamo quindi il caso di un sistema di punti materiali:

Per ogni singolo punto si ha:

$$H_i = H_i^{\text{int}} + H_i^{\text{est}} = \frac{db_i}{dt} + v_0 \times p_i \quad | \quad p_i = m_i v_i$$

Andando a sommare il primo membro, in modo da ricavare il momento totale, deduciamo che il momento delle forze interne si annulla dato che ad ogni forza corrisponde una reazione.

$$H = \sum H_i^{\text{int}} + \sum H_i^{\text{est}} = \sum \left( \frac{db_i}{dt} + v_0 \times p_i \right)$$

Si ha quindi:

$$\boxed{H^{\text{est}} = \frac{db}{dt} + v_0 \times p} \quad | \quad \begin{aligned} b &= \sum b_i \\ p &= \sum p_i \\ H^{\text{est}} &= \sum H_i^{\text{est}} \end{aligned}$$

Tale equazione si riduce a  $H^{\text{est}} = \frac{db}{dt}$  se il polo è fisso ( $v_0 = 0$ ),  $p = 0$  oppure se il polo coincide con il centro di massa.

$$H^{\text{est}} = \frac{db}{dt} + v_c \times m v_c = \frac{db}{dt} \quad | \quad p = mv$$

Come nel caso di un singolo punto materiale si introduce i momenti rispetto ad un asse, ovvero la proiezione su di un asse passante per il polo del momento rispetto a tale polo. Si ha quindi:

$$M_a^{\text{est}} = \frac{db}{dt}$$

## 2° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

L'equazione ricavata nel teorema precedente è detta 2° eq cardinale:

$$\boxed{I^{\text{est}} = \frac{db}{dt} + V_0 \times p}$$

### MOMENTO DI INERIA ASSIALE

Nel caso in cui si ha un moto rotatorio rispetto ad un medesimo asse, il momento della quantità di moto si dà, per un singolo punto:

$$|b_{a,i}| = r_i p_i = r_i m_i v_i = \underbrace{m_i r_i^2}_\text{momento di inerzia} w_i$$

$$\left| \begin{array}{l} b = r \times p \\ w = \frac{v}{r} \end{array} \right.$$

Considererò un sistema in cui ogni punto ha la medesima velocità  $w$ :

$$|b_a| = \sum (m_i r_i^2 w) = \underbrace{(\sum m_i r_i^2)}_\text{momento di inerzia assiale} \cdot w = I_a \cdot w$$

Il teorema della quantità di moto rispetto ad un asse si può scrivere:

$$\boxed{|M_a| = \frac{d I_a w}{dt} = \frac{d I_a \cdot \dot{w}}{dt}}$$

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} = w}$$

### PRINCIPIO CONSERVAZIONE MOMENTO QUANTITÀ DI MOTTO

Nel caso in cui un sistema è isolato  $F^{\text{est}} = 0$ , e quindi  $I^{\text{est}} = 0$  si ha:

$$M^{\text{est}} = \frac{db}{dt} = 0 \Rightarrow b \text{ costante}$$

## TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

Il lavoro fatto da ogni singolo punto del sistema:

$$L_i = \int_{t_1}^{t_2} (F_i^{\text{est}} + F_i^{\text{int}}) ds_i = \frac{1}{2} m v_{i2}^2 - \frac{1}{2} m v_{i1}^2$$

↳ 2 pos.      ↳ 1 pos.

Per l'intero sistema si ha che il lavoro è dato dalla somma di tutti i-esimi lavori eseguiti da tutte le forze (interne ed esterne):

$$L = \sum_i L_i$$

L'energia cinetica è data dalla somma delle energie di ciascun punto

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum M_i v_i^2$$

Il teorema si può quindi indicare:

$$L = \sum_i L_i = T_2 - T_1$$

## TEOREMA DI KÖNIG

L'energia cinetica di un sistema può essere espressa anche in un altro modo introducendo, oltre al sistema fisso, un sistema mobile solidale con il centro di massa.

Le velocità saranno legate nel seguente modo:

$$v_a = v_r + v_t \quad v_i = v_{ci} + v_c$$

L'energia cinetica è data: (come ricavato prima)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_i \cdot v_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (v_{ci} + v_c) \cdot (v_{ci} + v_c) \end{aligned}$$

Sviluppando il "quadrato":

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_{ci}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 + \sum m_i v_{ci} \cdot v_c$$

L'ultimo membro è poi a zero poiché la quantità di moto di un sistema è data da:

$$P = \sum m_i v_i = m v_c \quad \sum m_i \cdot v_{ci} = m \cdot v_{cc} \quad v_{cc} = \text{Velocità del centro di massa rispetto a se stesso}$$

Quindi si ha:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_{ci}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_{ci}^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

$$m = \sum m_i$$

$v_i$  = Velocità assoluta  
 $v_{ci}$  = Velocità rispetto a C  
 $v_c$  = Velocità centro di massa  
 $i$  = Singolo punto del sistema

### NORMA DI UN VETTORE

$$|v| = v$$

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

$$|v|^2 = v^2 = v \cdot v$$

L'energia cinetica di un sistema e' quindi data dalla somma dell'energia cinetica del centro di massa, avente l'intera massa del sistema, e dell'energia cinetica totale di tutti i punti, rispetto al centro di massa

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i V_{ci}^2$$

### PROCESSI D'URTO

Diremo che due corpi si "urtano" quando la distanza fra essi e' tale da influenzare il moto dei singoli corpi per un brevissimo lasso di tempo. Durante l'urto la forza interna che si scambiano i corpi coinvolti e' molto maggiore, in un breve istante, di tutte le forze esterne (attrito e gravità) quindi il sistema puo' considerarsi isolato ( $F_{est}=0$ ), valgono quindi i principi di conservazione della quantita di moto e del momento della quantita di moto:

$$F_{est} = \frac{dp}{dt} = 0 \quad (p \text{ costante}) \quad H_{est} = \frac{db}{dt} = 0 \quad (b \text{ costante})$$

#### URTI NORMALI CENTRALI

Per semplicita' consideriamo il caso di urti normali centrali, ovvero i corpi non ruotano, si muovono di moto rettilineo uniforme e l'urto e' diretto lungo la congruente (CASO UNIDIMENSIONALE)

Vi sono tre diversi tipi di urti (in tutti i tipi si puo' usare la conservazione della quantita di moto)

#### URTO ELASTICO

In questo caso durante l'urto l'energia cinetica dei due corpi non varia si ha quindi:

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$$

In aggiunta la conservazione della quantita di moto:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

Dividendo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{\frac{1}{2} m_1 (V_1'^2 - V_1^2)}{m_1 (V_1 - V_1')} = \frac{\frac{1}{2} m_2 (V_2'^2 - V_2^2)}{m_2 (V_2 - V_2')}$$

$$\left| \begin{array}{l} V = \text{Velocità prima (scabre)} \\ V' = \text{Velocità dopo (scabre)} \end{array} \right.$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$V_1 + V_1' = V_2 - V_2'$$

Equivalentemente:

$$U_1 - U_2 = U_2 - V_1$$

Tale equazione indica che le velocità dopo l'urto si invertono.

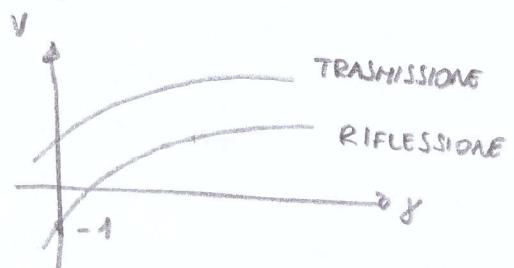
Dalle seguenti due equazioni:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 ; \quad V_1 + V_2 = U_2 + U_1$$

possiamo ricavare le velocità finali in relazione a quelle iniziali.

Considerando la seconda massa come un bersaglio fisso inizialmente  $V_2 = 0$  si ha:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \quad \left( \begin{array}{l} \frac{V_1}{U_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (\text{Coefficiente di riflessione}) \\ \frac{V_2}{U_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \quad (\text{Coefficiente di trasmissione}) \end{array} \right)$$



### - URTO ANAELASTICO

In questo caso, durante l'urto, vi è variazione di energia cinetica.

Si può solo usare la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

### - URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO

Durante l'urto i due corpi convolti s: fondono insieme e procedono come un unico corpo con velocità \$V\$.

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = (m_1 + m_2) V$$

Soltanamente nei problemi con urti anaelastici si specifica la variazione di energia cinetica (\$\alpha\$)

$$(1-\alpha) \left( \frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

(\*)

Si può generalizzare tale caso ( $V_2 = 0$ ) ponendosi in un sistema di riferimento solidale con il secondo corpo.

## MECCANICA DEI CORPI RIGIDI

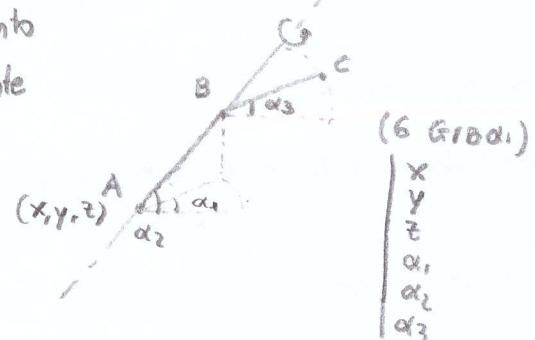
### CORPO RIGIDO

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali in cui le distanze fra i punti non variano mai nel tempo anche se soggetto a forze esterne. Tali corpi sono modelli astratti che approssimano oggetti poco deformabili nella realtà.

#### • INDIVIDUAZIONE NELLO SPAZIO

Una volta fissata la distanza tra i punti, il corpo rigido ha 6 gradi di libertà (3 coordinate e 3 angoli).

Tramite le 3 coordinate individuano un punto A  $(x, y, z)$ , di conseguenza un punto B mediante gli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , i punti A e B fissano l'asse di rotazione e tramite  $\alpha_3$  fissano la posizione



### DENSITÀ

Per descrivere la distribuzione della massa nello spazio, e quindi indicare la distanza tra i punti, si usa il concetto di densità:

La DENSITÀ MEDIA è data:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V}$$

In un intorno di un punto s: ha:

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

Tale misura è utile nel caso di distribuzione non uniforme, ad esempio quando un corpo è formato da materiali diversi.

## CINEMATICA

Il moto di un corpo rigido puo' essere decomposto in due moti semplici:

### TRASLAZIONE

L'intero corpo, come se fosse un sistema di riferimento mobile, si muove di moto traslatorio e quindi e' necessario conoscere il moto di un singolo punto (es centro di massa) per determinare quello dell'intero corpo.

### ROTAZIONE RISPETTO AD UN ASSE

Prendendo un qualsiasi asse, (tornando alla descrizione precedente, esso e' formato da : punti A e B) tutti i punti ruotano attorno ad esso descrivendo un moto circolare, con velocita'  $\omega$ , nei piani perpendicolari all'asse preso in esame.

### MOTO ROTOTRASLATORIO

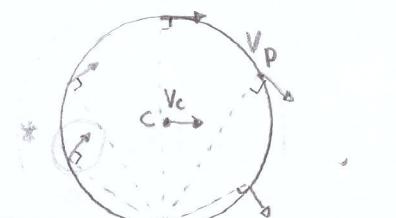
Combinando questi due moti semplici, si ottiene un moto rototraslatorio, se si ha una rotazione costante, unita ad una traslazione lungo l'asse, costante, si ottiene il moto di una vite.

### CONCLUSIONI

Per la descrizione del moto di un corpo rigido si puo' quindi scomporre il suo moto in due componenti semplici (rotazione e traslazione).

### ESEMPIO

Scomponiamo il moto di rotolamento di una ruota:

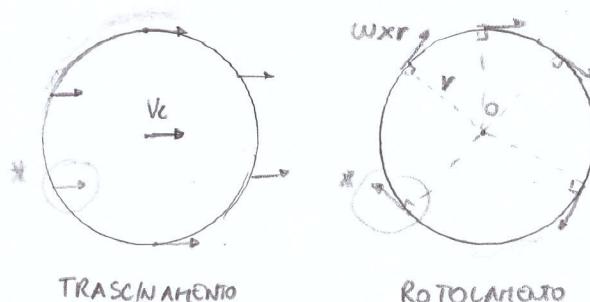


### OSS

Ad ogni istante

$$V_p = V_c + \omega \times r$$

Si puo' notare che tale moto puo' essere decomposto:



## DINAMICA

Un corpo rigido soggetto a sollecitazioni subisce uno spostamento, tale moto puo' essere decomposto nella traslazione del centro di massa sommata ad una rotazione rispetto ad un asse passante per C.

Si necessitano quindi di 3 coordinate per il punto C, 2 parametri per definire l'asse (passante per c) e 1 parametro che specifica la velocità angolare w.

Si hanno quindi 6 incognite.

Date le equazioni cardinali:

$$F_e = \frac{dp}{dt} \quad (p = m v_c)$$

$$M_e = \frac{db}{dt}$$

Esse se proiettate sugli assi x, y, z producono 6 equazioni, sufficienti per determinare il moto del corpo.

Nel caso in cui un corpo e' vincolato ad un punto, conviene calcolare il momento della quantita' di moto rispetto a tale punto. Solitamente lo si calcola rispetto a C.

## SISTEMI DI FORZE EQUIVALENTI

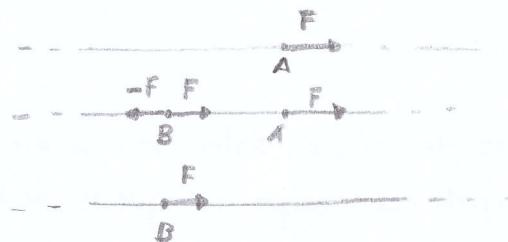
Dalle equazioni cardinali, poiche' si riferiscono alla somma delle forze esterne, non tengono conto del punto di applicazione, quindi ad ogni configurazione di sollecitazioni si puo' ricavare una p.m. semplice dalle infinite combinazioni che dà come risultante  $F_e$  ed  $M_e$ . Tali sistemi di forze si dicono EQUIVALENTI.

Di seguito le operazioni per semplificare i sistemi di forze.

### OPERAZIONI ELEMENTARI

Un insieme di forze applicate in un punto possono essere sommate, e' possibile eseguire anche l'operazione inversa.

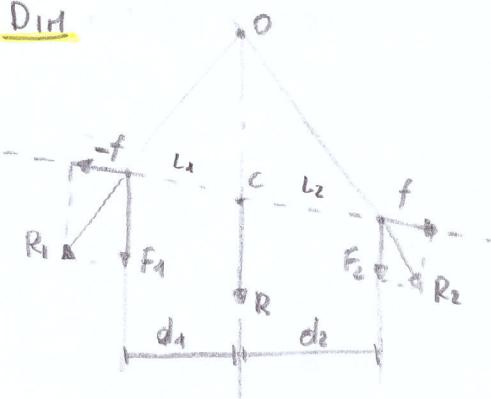
Sfruttando tali operazioni si ricava che una forza puo' essere spostata sulla retta di azione.



## • FORZE PARALLELE NELLO STESSO VERSO

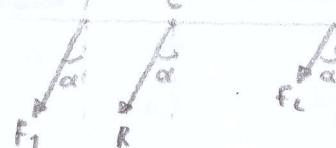
In tale caso si puo' ricavare una forza risultante  $R$  posizionata lungo la congiungente delle due forze nel punto  $C$  detto CENTRO DEI DUE FORZE PARALLELE. Tale punto si ricava in relazione alle intensità delle forze (piu' vicino alla forza maggiore).

- DIM



Applico una forza  $f$  sulla congiungente e di conseguenza  $-f$ , sommo  $f$  con  $F_i$ ; così da ricavare  $R_i$ . Spostando  $R_1$  e  $R_2$  in  $O$  e sommandole ricavo  $R$  la cui traslazione porta all' individuazione di  $c$ .

$$d_1 \quad d_2$$



Con tale risoluzione non si deve voltare il momento totale, calcolando tutti i momenti rispetto a  $C$  si ha:

$$M_R = M_{F_1} + M_{F_2} \quad 0 = F_1 \cdot (-d_1) + F_2 \cdot d_2$$

Da tale relazione si puo' quindi ricavare la posizione di  $c$ :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$-d_1 \quad c \quad d_2$$

## - ESEMPIO (BARICENTRO)

In tal caso le forze parallele sono date dalla forza di gravità ed il centro delle forze e' detto BARICENTRO.

Come fatto prima cerchiamo di determinare la posizione del baricentro.

Ricordiamo che  $R = \sum F_i$  e  $M_R = \sum M_{F_i}$

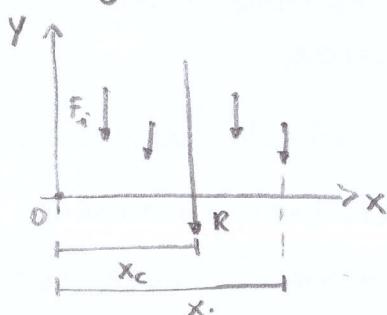
Si ha quindi

$$R \cdot x_c = \sum F_i \cdot x_i \quad x_c = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{R} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}$$

Per ricavare le altre coordinate  $(y_c, z_c)$  e' necessario ruotare tutte le forze di  $90^\circ$

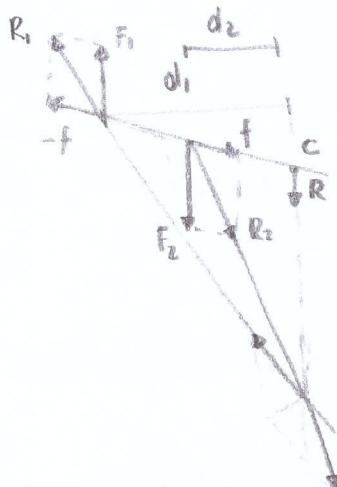
OSS

Il baricentro coincide con il centro di massa solo se l'accelerazione di gravità e' costante nello spazio occupato dal corpo, in questo modo c'e' proporzionalita costante tra massa e peso.



## • FORZE PARALLELE DISCORDI CON DIVERSA INTENSITÀ

Nel caso di due forze parallele opposte di diversa intensità  $F_1 \neq F_2$  esse si possono ridurre ad un'unica forza data dalla differenza delle due direzioni concorde con la maggiore. Il punto c si trova sulla congiungente, ma esterno al segmento che unisce le due forze.



Come nei casi precedenti il momento di R deve essere uguale alla somma dei momenti di  $F_1, F_2$  (calcolati rispetto a C)



$$M_R = M_{F_1} + M_{F_2}$$

$$0 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Da cui

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

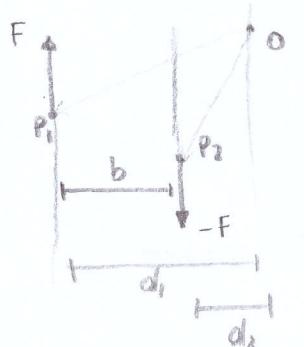
## • FORZE PARALLELE DISCORDI DI UGUALE INTENSITÀ (COPPIA)

Nel caso in cui le due forze  $F_1$  e  $F_2$  sono di eguale intensità, il punto C si considererebbe posto a distanza infinita ( $R=0$ )

Un tale sistema di forze è irriducibile poiché esse hanno un momento proprio indipendente dal polo con cui si calcola, non può essere quindi ridotto ad una singola forza poiché essa avrebbe momento nullo se calcolato con polo giacente alla sua linea di azione.

### DIMOSTRAZIONE HOMOGENIO PROPRIO DI UNA COPPIA

Prendendo in considerazione un polo "O" qualsiasi: calcoliamo il momento totale:



$$M = M_1 + M_2 = OP_1 \times F + OP_2 \times (-F) = OP_1 \times F - OP_2 \times F$$

$$M = (OP_1 - OP_2) \times F = \overline{P_2 P_1} \times F$$

Notiamo quindi che il momento non dipende dal polo scelto, ma solo dalla distanza tra le due forze

Proiettando i vettori che individuano le distanze ricaviamo il modulo del momento:

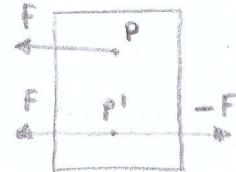
$$|M| = F d_1 - F d_2 = F(d_1 - d_2)$$

$$|M| = F b$$

## SOLLECITAZIONI DI UN CORPO RIGIDO

Dallo studio dei sistemi di forze equivalenti deduciamo che una qualsiasi sollecitazione può essere decomposta in una coppia e una forza applicata in punto a proprio.

Se ad esempio si volesse spostare la forza  $F$  da  $P$  a  $P'$  occorre aggiungere in tale punto  $F$  e  $-F$  in modo da non variare la somma delle forze totali.



N.B. Si ha quindi una forza applicata in  $P'$  e una coppia con braccio  $\overline{PP'}$ .

Se un corpo ha forza totale nulla allora la sollecitazione a cui è sottoposto equivale ad una coppia.

Se rispetto ad un polo il sistema ha momento nullo allora la sollecitazione equivale ad una forza applicata in tale polo.

Le precedenti relazioni non sono sempre possibili, si potrebbe ad esempio non trovare alcun polo per cui il momento totale è nullo.

## CORPO RIGIDO VINCOLATO AD UN ASSE

Nel caso il corpo sia vincolato ad un asse fisso determinato, la posizione del corpo nello spazio passa da 6 a 1 grado di libertà (angolo di rotazione) rispetto l'asse

### SPOSTAMENTO DEL CORPO

Per conoscere il moto del corpo è quindi necessario conoscere solamente come varia l'angolo  $\varphi$  nel tempo, per fatto usiamo la 2<sup>a</sup> eq. coordinata rispetto all'asse fisso  $a$ .

$$M_a = \frac{d\mathbf{ba}}{dt}$$

Il momento  $M_a$  è dato dalle sole forze attive, le reazioni del vincolo perché perpendicolari ad  $a$  danno contributo nullo



In tal caso il momento della quantità di moto si può scrivere usando il momento di inerzia assiale:

$$\begin{aligned} I_{bal} &= \sum r_i m_i v_i = \sum r_i^2 m_i w_i = (\sum m_i r_i^2) w \\ &= \int_V r^2 p \, dv = w \int_V r^2 p \, dv = I_a w \end{aligned}$$

$$p = \frac{dm}{dv}$$

Averendo posto

$$I_a = \int_V p r^2 dv (= \int_H r^2 dm) \rightarrow \text{Ogni massa } dm \text{ si trova ad una distanza } r \text{ rispetto all'asse } a.$$

Riprenderebbe la 2<sup>o</sup> equazione coordinate:

$$M_a = \frac{d ba}{dt} = \frac{d I_a w}{dt} = I_a \frac{dw}{dt} = I_a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$I_a = \int_H r^2 dm$$

$$M_a = I_a \frac{d w}{dt}$$

In questa forma si nota una somiglianza con la seconda legge della dinamica

$$F = m a = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (\text{Lo spostamento e' sostituito dall'angolo})$$

Con tale equazione si puo' quindi determinare la posizione del corpo rigido (vincolato ad un asse)

### • ENERGIA CINETICA DEL CORPO

Mediante il momento di inertie assiale si puo' esprimere anche l'energia cinetica.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \int_H dm v^2 = \frac{1}{2} \int_V p v^2 dv$$

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{dm}{dv} \\ w^2 = \frac{v^2}{r^2} \end{array} \right.$$

$$T = \frac{1}{2} w^2 \int_V p r^2 dv = \frac{1}{2} I_a w^2 = \frac{1}{2} I_a \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_a w^2$$

### • LAVORO

Nel caso di un corpo rigido il lavoro delle forze interne e' nullo poiche' ad ogn' azione corrisponde una reazione, entrambe producono il medesimo spostamento, ma il lavoro e' opposto ( $F, -F$ ).

Il lavoro delle forze esterne invece non e' identicamente nullo, nel caso di un corpo vincolato ad un asse, le uniche componenti di una forza che eseguono lavoro giacciono sul piano normale all'asse  $a$ , le forze parallele ad  $a$  non eseguono lavoro.

$$dL_i = F_i \cdot ds_i = F_i \cos \beta \cdot ds_i = F_i \cos \beta \cdot r_i \cdot d\varphi = F_i \sin \gamma \cdot r_i \cdot w dt$$

Poiche'  $\gamma$  e' l'angolo tra  $r_i$  e  $F_i$ :

$$dL_i = M_a \times w dt$$



La somma di tutti i lavori infinitesimi delle singole forze:

$$dL = \sum dL_i = \sum H_i \times w_{olt}$$

Proiettando sull'asse a

$$dL = I_a W_a dt = I_a d\varphi \quad | I_a = \sum H_i a$$

Il lavoro totale sarà:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dL = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_a(\varphi) d\varphi$$

$$( \cong L = F \cdot ds ) ( F \rightarrow Ma ; s \rightarrow \varphi )$$

- Teorema del lavoro ed energia cinetica

$$L = T_2 - T_1 = \Delta T \quad Ma d\varphi = d\left(\frac{1}{2} I_a \dot{\varphi}^2\right) \quad (\text{Per infinitesimi})$$

### • QUANTITA' DI MOTO

Per un corpo rigido vincolato ad un asse la quantità di moto è data:

$$P = I_a w$$

Se il corpo è isolato si può usare la conservazione della quantità di moto (1° eq. cardinale)

$$F_{est} = \frac{dp}{dt} = 0 \quad p \text{ costante}$$

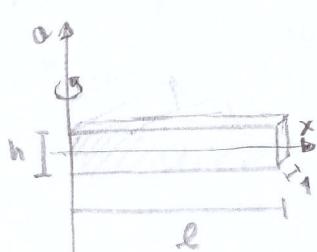
### • MOMENTO D'INERTIA

- Teorema di Huygen

Il momento di inerzia di un corpo, rispetto ad un asse a, è dato dalla somma del momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse parallelo ad a e passante per c, e del momento di inerzia del centro di massa (avente la massa totale) rispetto all'asse a.

$$I_a = I_{ac} + m d^2 \quad | d = \text{"distanza di c da a"}$$

- Inerzia barra vincolata ad un estremo



$$\text{In generale si ha } I_a = \int_H r^2 dm$$

$$I_a = \int_V pr^2 dv = \int_0^l p x^2 h dx$$

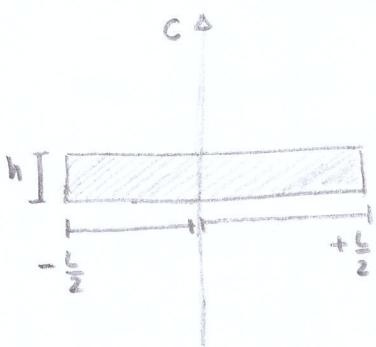
$$I_a = ph \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l = ph \frac{l^3}{3} = \frac{m \cdot h \cdot l^3}{3}$$

$$| p = \frac{dm}{dx} = \frac{dm}{h \cdot dx}$$

$$| \ln \text{ questo caso} \\ | r = x$$

$$I_a = m \frac{l^2}{3}$$

### - Inerzia barra vincolata nel centro di massa



$$I_c = \int_V \rho x^2 dv = \rho h \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$P = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{dx \cdot h}$$

$$I_c = \rho h \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \rho h 2 \frac{L^3}{24} = \rho h \frac{L^3}{12}$$

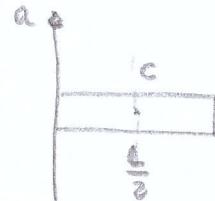
$$I_c = M \frac{L^2}{12}$$

$$m = \rho L h$$

### OSS (Teorema Huygens: barra)

Dai due casi precedenti possiamo verificare il teorema di Huygens:

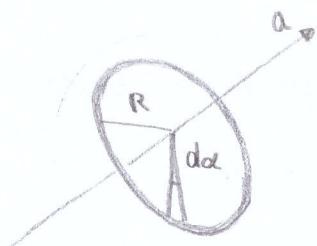
$$\begin{aligned} I_a &= I_{ac} + m d^2 = m \frac{L^2}{12} + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \\ &= m \frac{L^2}{3} \end{aligned}$$



Equivalent al risultato precedente (barra vincolata ad un estremo)

$$I_a = M \frac{L^2}{3}$$

### - Inerzia anello sottile



Individuiamo la massa infinitesima  $dm$  mediante l'angolo  $\alpha$

$$\begin{aligned} I_a &= \int_H r^2 dm = \int_H R^2 dm = \int_H R^2 \lambda dl \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\alpha \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

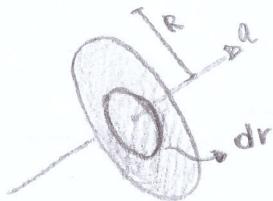
$$I_a = R^2 \lambda R 2\pi, \quad I_a = M R^2$$

$$dl = R d\alpha$$

$$\begin{cases} H = \lambda \cdot L \\ = \lambda \cdot 2\pi R \end{cases}$$

### - Inerzia disco sottile

In tal caso possiamo usare il risultato precedente considerando il disco formato da anelli:



$$I_a = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr$$

$$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{2\pi r dr}$$

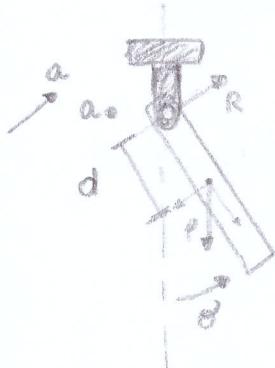
$$= 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_a = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\begin{cases} M = \int_0^R \sigma 2\pi r dr \\ = \sigma 2\pi R \frac{R^2}{2} \end{cases}$$

## ESEMPI CORPI RIGIDI VINCOLATI

### Pendolo composto



Applicando la 2° eq cardinale ricaviamo l'equazione del moto.

$$M_a = I_a \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Calcoliamo quanti momenti assiali rispetto all'asse a

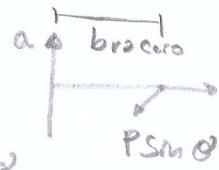
$$M_a = M_{ap} + M_{ar} = M_{ap}$$

$$M_{ar} = 0 \text{ Poiché il braccio è nullo.}$$

Per calcolare il momento assiale occorre considerare solo la componente tangenziale della forza peso, la componente normale infatti è nulla rispetto all'asse a

$$M_a = M_{ap} = -mg \sin\theta \cdot d$$

→ Negativo perché opposto al vero punto di g



Si ha quindi:

$$-mg \sin\theta \cdot d = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Per precegliere  $\theta$ :

$$-mg \theta' d = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-\frac{mgd}{I_a} \theta' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

### PENDOLO SEMPLICE

$$-\frac{g}{l} s = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Avendo la stessa soluzione del pendolo semplice porta ai medesimi risultati:

$$w = \sqrt{\frac{mgd}{I_a}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{mgd}}$$

OSS

Per il teorema di Huygens si può calcolare:

$$I_a = I_c + M d^2$$

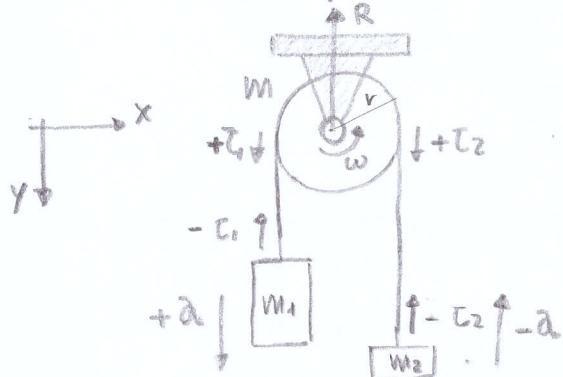
Si ha quindi:

$$w = \sqrt{\frac{mgd}{I_c + M d^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_c + M d^2}{mgd}}$$

## Puleggia

Consideriamo il caso di una puleggia con due masse appese collegate da una fune priva di massa e inextensibile.



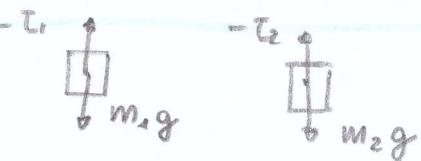
Poiché le masse ( $m_1$  e  $m_2$ ) sono differenti entrambi sono soggetti alla medesima accelerazione ma di segno opposto.

Per ricavare tale accelerazione useremo la 2° eq cordinale e il 2° principio della dinamica.

$$M_a = (T_1 - T_2)r = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Applichiamo la 2° legge della dinamica e proiettando lungo gli assi (solo y)

$$\begin{cases} M_1 g - T_1 = M_1 a \\ M_2 g - T_2 = M_2 (-a) \end{cases}$$



Sottraendo membro a membro si ha:

$$(M_1 - M_2)g - (T_1 - T_2) = a(M_1 + M_2)$$

Sostituiamo  $(T_1 - T_2)$

oss  $(M_1 - M_2)g - \frac{I_a \dot{\omega}}{r} = a(M_1 + M_2)$   $\left| \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \right.$

L'accelerazione angolare  $\dot{\omega}$  è legata a quella lineare nel seguente modo

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{r} = \frac{a}{r} \quad \left| \omega = \frac{\theta}{t} \right.$$

L'inerzia  $I_a$ , essendo la puleggia un disco di raggio  $r$ , è uguale:

$$I_a = \frac{1}{2} m r^2$$

Si ha quindi:

$$a = \frac{(M_1 - M_2)}{\left(\frac{1}{2}m + M_1 + M_2\right)} \cdot g$$

$M \rightarrow$  massa puleggia

## ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO LIBERO (TEO KÖNIG)

Nel caso dei sistemi di punti materiali avevano ricavato il teorema di König in cui si calcolava l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ci}^2$$

Nel caso di corpi rigidi si ha:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \cdot w_c^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w_c^2$$

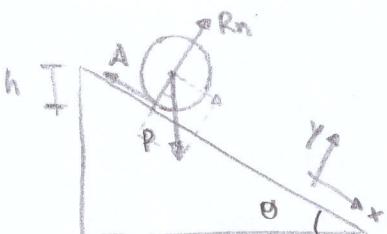
N.B.

Anche in questo caso sono validi tutti i teoremi riguardo energia e lavoro.

## CILINDRO CHE ROTOLA SU UN PIANO INCLINATO

Tale problema puo' essere affrontato mediante le equazioni fondamentali oppure dal punto di vista energetico.

### USO EQUAZIONI FONDAMENTALI



$$\begin{cases} mg \sin \theta - A = m a_c \\ R_n = mg \cos \theta \end{cases}$$

Accelerazione  
centro di massa

$$F_e = m a_c = mg \sin \theta - A$$

Calcoliamo quindi il momento delle forze rispetto all'asse di rotazione, le uniche forze che generano momento e' la forza di attrito.

$$|M_a| = r A = I_a \frac{d w_c}{dt} \quad (2^{\circ} \text{ eq cordinale})$$

Sostituendo l'inerzia (disco)

$$r A = \frac{1}{2} m r^2 \frac{1}{r} \frac{d v_c}{dt} = \frac{1}{2} m r a_c$$

$$I_a = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{Disco})$$

$$w_c = \frac{v_c}{r}$$

Ricavando A e sostituendo nell'equazione delle forze:

$$m a_c = mg \sin \theta - \frac{1}{2} m a_c$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

Usando le equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} v_c(t) = a_c t \\ s(t) = \frac{1}{2} a_c t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_c(t) = a_c \sqrt{\frac{2s(t)}{a_c}} \\ t = \sqrt{\frac{2s(t)}{a_c}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$v_c = \sqrt{2s a_c} = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin \theta} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

### Condizioni di puro rotolamento

Abbiamo ricavato dalla seconda equazione cartesiana l'espressione della forza di attrito:

$$A = \frac{1}{2} m a_c = \frac{1}{2} m \frac{2}{3} g \sin \theta = \frac{1}{3} m g \sin \theta$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

Come nel caso del punto materiale si ricava che per non scivolare si deve avere:

$$A < \mu_s R_n$$

L'attrito infatti può assumere il massimo valore pari a  $\mu_s R_n$  ( $A = \mu_s R_n$  MOTO INCIPIENTE)

Per avere MOTO DI PURO ROTOLAMENTO:

$$\frac{1}{3} m g \sin \theta < \mu_s R_n = \mu_s m g \cos \theta$$

$$R_n = m g \cos \theta$$

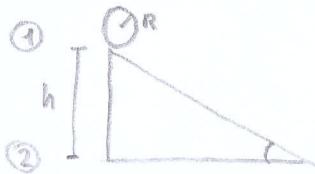
Da cui:

$$\frac{1}{3} m g \sin \theta < \mu_s m g \cos \theta$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \tan \theta < \mu_s}$$

## • STUDIO DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO

Poiché in questo caso l'unica forza che compie lavoro è la forza peso, possiamo usare il teorema della conservazione di energia meccanica.



$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$mgh = T_2$$

L'energia cinetica  $T_2$  si ricava dal teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w_c^2$$

Da cui:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{4} m v_c^2 = \frac{3}{4} m v_c^2$$

$$\begin{cases} I_c = \frac{1}{2} m r^2 \\ w^2 = \frac{v^2}{r^2} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$mgh = \frac{3}{4} m v_c^2$$

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

## MECCANICA DEI CORPI DEFORMABILI

In meccanica abbiamo studiato i corpi rigidi; tuttora essi sono modelli ideali, nella realtà qualunque corpo è deformabile se soggetto a forze. In alcuni casi però la deformazione è talmente ridotta da poter essere trascurata.

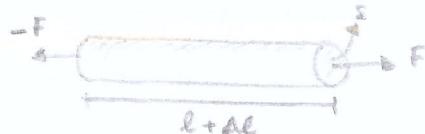
I corpi possono essere distinti in tre diverse tipologie:

- Solido: è un corpo dotato di VOLUME e FORZA PROPRIO.
- Liquido: è dotato di VOLUME PROPRIO, ma assume la forma del contenitore
- Gas: assume forma e volume del recipiente

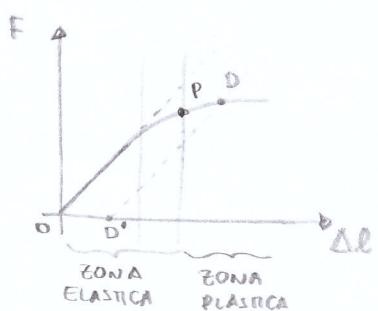
In questa parte ci limitiamo a considerare le deformazioni che subisce un corpo SOLIDO OMogeneo ed ISOTROPO.

### ZONA ELASTICA E ZONA PLASTICA

Consideriamo un corpo solido, se soggetto ad una forza esso subisce una deformazione. Prendiamo come esempio una barra di sezione  $S$  e lunghezza  $l$ , con applicazione di due forze uguali ed opposte (poste orizzontalmente) subisce un allungamento  $\Delta l$  e una riduzione uniforme della sezione  $S$ .



Raffigurante tramite un grafico la correlazione tra  $F$  e  $\Delta l$  individuiamo due zone:

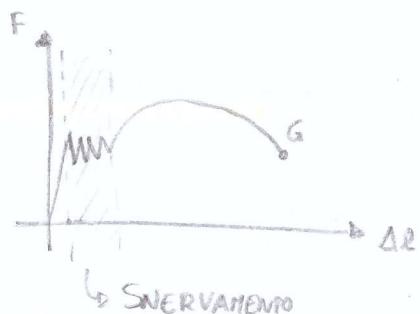


- ZONA ELASTICA: In cui alla rimozione delle forze la barra torna alle dimensioni iniziali. In tale zona inizialmente c'è una relazione lineare poi all'aumentare di  $F$ , una NON lineare

- ZONA PLASTICA: Se  $F$  supera un certo punto P detto LIMITE DI ELASTICITÀ, le deformazioni alla rimozione delle forze non scompaiono completamente. Se ad esempio

si si trova sul punto D alla rimozione di  $F$  il corpo segue la linea tratteggiata mantenendo un allungamento  $\Delta l$  pari a  $\overline{OD}'$ , detta DEFORMAZIONE RESIDUA

Il comportamento generale fino al punto di rottura G è dato dal grafico a lato. Nel tratto evidenziato avviene lo SNERVAMENTO in cui anche alla rimozione di  $F$  vi è un allungamento  $\Delta l$ .



L'analisi e quindi il grafico precedente era riferito ad una barra con una forma geometrica ben definita composta da un determinato materiale.

### • DEFORMAZIONI A PRESCINDERE DALLA FORMA

Se vogliano generalizzare le conclusioni fatte sulle deformazioni indipendentemente dalla forma del solido facciamo le seguenti modifiche nell'andare:

- Sostituiamo l'allungamento  $\Delta L$  con il rapporto  $\Delta e/e$  che elimina la dipendenza dalla lunghezza iniziale
- Considerando che  $F$  si ripartisca uniformemente sulla superficie, considerare al posto di  $F$ , il rapporto  $F/s$ .

In tal modo il grafico si riferisce solamente alle proprietà del materiale.

### DEFORMAZIONE

Una deformazione qualsiasi puo' essere scomposta in diverse deformazioni omogenee, ognuna delle quali la si puo' considerata come somma di due tipi di deformazioni:

- DEFORMAZIONE DI VOLUME: Avviene una variazione di volume ( $\Delta V/V$ ) ma la forma rimane invariata.
- DEFORMAZIONE DI SCORRIMENTO: Altera la forma lasciando inalterato il volume.

### FORZE ESTERNE E SFORZI

Se un corpo e' soggetto ad una forza esterna, all'interno si crea uno STATO DI TENSIONE costituito dagli SFORZI.

### • FORZE ESTERNE

Un corpo puo' essere soggetto a due tipi di forze esterne:

- FORZA DI VOLUME (o DI MASSA): Tale forza agisce su ogni elemento di massa del corpo (es gravità)
- FORZA DI SUPERFICIE: Tale forza agisce solo sulla superficie

Nella nostra analisi trascuriamo le forze di volume poiche' solitamente molto piccole, e in relazione a quelle superficiali possono essere ignorate.

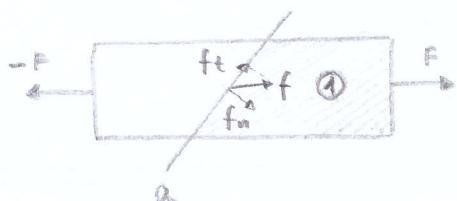
Come detto precedentemente consideriamo il rapporto per una forza  $d\vec{F}_{ext}$  su una superficie  $ds$  come:

$$\frac{d\vec{F}_{ext}}{ds} = \vec{\psi}$$

$\vec{\psi}$  = Rapporto forza esterna  
su superficie

### • SFORZI

Consideriamo una barra con due forze uguali ed opposte applicate.



Pensiamo di dividere la barra in due attraverso un piano  $a$ , studiamo la parte ①.  
In tale parte per mantenerla in equilibrio occorre introdurre una forza  $f$  pari a  $(-F)$ .

La forza  $f$  rappresenta le forze interne a cui è soggetto il corpo durante una sollecitazione esterna.

Come fatto con le forze esterne si ha il seguente rapporto:

$$\frac{df}{ds} = \vec{\phi}$$

$\vec{\phi}$  = Rapporto forza interna su superficie  
(SFORZO)

La forza interna  $\vec{f}$  può essere decomposta in forza normale  $\vec{f}_n$  e forza tangenziale  $\vec{f}_t$ . Si definiscono quindi gli SFORZI per entrambe le componenti:

$$\sigma = \frac{df_n}{ds}$$

SFORZO  
NORMALE

$$\tau = \frac{df_t}{ds}$$

SFORZO  
TANGENZIALE

Se gli sforzi sono uguali su tutti i punti del piano  $a$ , si dice che la SOLLECITAZIONE è OROGENEA.

Dato che la forza interna è uguale a quella esterna si egualano i rapporti e quindi:

$$d\vec{F}_{ext} = d\vec{f}$$

$$\sigma = -\psi_n$$

$$\tau = -\psi_t$$

## LEGGE DI HOOKE

Entro certi limiti detti di LINEARITA' ELASTICA si ha che la deformazione e' proporzionale alle sollecitazioni esterne e quindi agli sforzi:

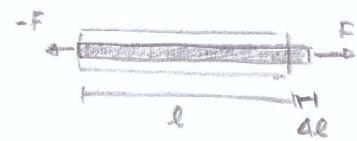
La deformazione e' proporzionale agli sforzi

## APPLICAZIONE LEGGE DI HOOKE

Consideriamo alcuni tipi di deformazione applicando la legge di Hooke.

- TRAZIONE BARRA (MODULO YOUNG E MODULO DI POISSON)

Consideriamo una barra soggetta a due forze opposte,



avranno una deformazione che andrà ad allungare la barra e ridurre la sezione

- Variatore lunghezza

Applicando Hooke si ha:

$$\epsilon_e = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = \text{Sfoco} \\ \epsilon = \text{Modulo Young} \end{array} \right.$$

$$\left| \sigma = \frac{F}{s} \right.$$

- Variatore sezione

In questo caso i segni sono opposti poiché all'aumentare dello sforzo diminuisce la sezione D.

$$\epsilon_d = \frac{\Delta D}{D} = -\frac{\mu}{E} \sigma = -\mu \epsilon_e$$

$$\mu = \text{Modulo Poisson}$$

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{F}{s}$$

- COMPRESSEIONE DI VOLUME

Consideriamo un cubo soggetto ad una pressione costante  $\frac{F}{s}$  in tutti i lati

considera la diagonale del cubo, applicando Hooke si ha:



$$\epsilon_c = \frac{\Delta l_d}{l_d} = -\frac{1}{3K} p$$

$$\left| p = \frac{F}{s} \right.$$

Il segno meno e' dovuto al fatto che aumentano la pressione P la diagonale  $l_d$  diminuisce.

la costante di proporzionalità è stata posta  $\frac{1}{3K}$  per la seguente considerazione che ci consente di scindere la variazione di volume.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(l^3)}{l^3} = \frac{3l^2}{l^3} \Delta l = 3 \frac{\Delta l}{l} = 3 E_c \quad | E_c = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{3K} p$$

Abbiamo considerato  $\Delta V$  come un differenziale

La variazione di volume sarà:

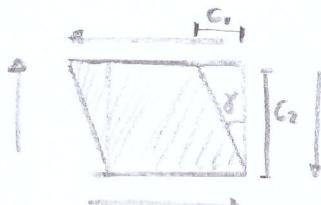
$$\frac{\Delta V}{V} = 3 E_c = 3 \frac{1}{3K} p$$

$$E_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}$$

|  $K$  = Modulo compressione di volume

### • DEFORMAZIONE DI SCORRIMENTO

Consideriamo un prisma e deformiamolo nel seguente modo:



$$\frac{C_1}{C_2} = \tan \gamma \approx \gamma$$

$$\epsilon_s = \gamma = \frac{1}{G} \tau$$

$$\tau = \frac{F}{s}$$

|  $G$  = Modulo di scorrimento

### LEGAME FRA LE COSTANTI

Le diverse costanti incontrate nei precedenti casi sono legate dalle seguenti equazioni:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

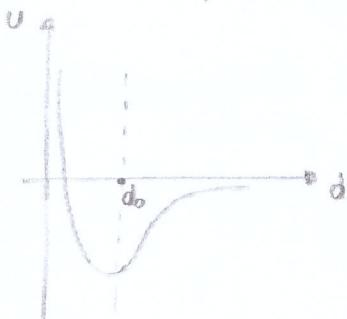
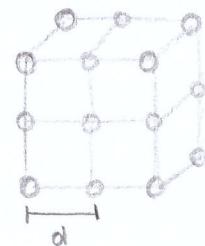
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

|  $E$  = Modulo di Young  
 $\mu$  = Modulo di Poisson  
 $K$  = Modulo compressione volumetrica  
 $G$  = Modulo di scorrimento

Attraverso tali relazioni è possibile ricavare le altre costanti del materiale così da poter descrivere completamente le sue proprietà elastiche.

## ORIGINE PROPRIETA' ELASTICHE NEI SOLIDI

I corpi solidi sono costituiti da reticolati di atomi, in condizioni di equilibrio sono posti ad una distanza  $d_0$ , tale distanza è inferiore rispetto alla normale distanza fra due atomi poiché il singolo atomo del reticolo sente, oltre alla forza repulsiva di quelli accanto, anche quella attrattiva di quelli più lontani.



Il grafico rappresenta l'energia potenziale di un atomo rispetto al reticolo.

Quando una forza esterna avvicina o allontana gli atomi, in un intorno di  $d_0$ , l'energia potenziale che acquisce si oppone alla deformazione cercando di riportare la distanza a  $d_0$  (energia potenziale minore)



## LIQUIDI IDEALI

In questa parte studiamo la statica dei liquidi, per farlo considereremo un LIQUIDO IDEALE che ha le seguenti caratteristiche:

- INCOPRESSIBILITÀ: Quindi la densità  $\rho$  non varia in relazione ad una sollecitazione esterna.

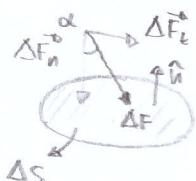
- ASSERZA VISCOSITÀ: Il liquido cambia forma senza spesa quindi gli sforzi di taglio sono nulli

Nella realtà molto spesso si può considerare un liquido come ideale, soprattutto per casi statici;

Le conclusioni successive si riferiscono in generale a FLUIDI IDEALI i quali comprendono LIQUIDI e GAS, tuttavia le approssimazioni fatte sono più robuste nei fluidi.

### PRESSIONE IN UN FLUIDO

Consideriamo una superficie  $\Delta S$ , e la sua normale  $\hat{n}$ , di un fluido. Tale superficie è soggetto ad una forza  $\Delta \vec{F}$ .



Tale forza può essere decomposta nella parte normale ( $\Delta \vec{F}_n$ ) e nella parte tangenziale ( $\Delta \vec{F}_t$ ) quest'ultima può essere ignorata dato che un fluido ideale non ha sforzi di taglio (tangenziali).

Definiamo quindi la PRESSIONE su una superficie come:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta F_n|}{\Delta S}$$

$|\Delta F_n|$  = Modulo componente normale della forza esterna

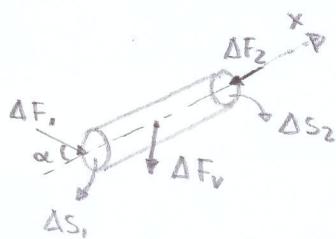
La pressione  $P$  è una grandezza scalare con unità di misura

$$[P] = [N/m^2] = [\text{Pascal (Pa)}]$$

## • INDIPENDENZA DELLA PRESSIONE

Vogliano ora dimostrare che la pressione su una superficie  $\Delta S$  è indipendente dalla sua orientazione.

Consideriamo un fluido:



La forza esterna  $\Delta F_v$  è detta **FORZA DI VOLUME**, in questo caso causata dalla forza di gravità:

$$\Delta F_v = \Delta m g = \Delta V p g$$

$$p = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Poiché il corpo è in quiete tutte le forze si annullano, in particolare quella sull'asse  $x$

Abbiamo quindi:

$$\Delta F_1 \cdot \cos \alpha - [\Delta F_v]_x - \Delta F_2 = 0 \quad p_1 \cos \alpha \Delta S_1 - \Delta V p g_x - p_2 \Delta S_2 = 0$$

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$p_1 \cos \alpha \Delta S_1 - (\Delta S \cdot \Delta x) p g_x - p_2 \Delta S_2 = 0$$

Se facciamo tendere a zero  $\Delta S$  e  $\Delta x$ , la forza di volume  $F_v$  può essere trascurata poiché è il prodotto di due termini tendenti a zero ( $\Delta S \cdot \Delta x \cdot p g_x$ ).

Si ha quindi:

$$p_1 \cos \alpha = p_2 \cos \alpha$$

Ma poiché nel tendere a zero le due superfici tendono a passare per uno stesso punto si ha (in tale punto)

$$\Delta S_1 \cos \alpha = \Delta S_2$$

Quindi:

$$p_1 = p_2$$

Per  $\Delta S \cdot \Delta x \rightarrow 0$  e quindi  $F_v = 0$

Si può quindi definire la pressione in un punto indipendentemente dall'orientazione della superficie che lo contiene.

N.B.

Nel caso in cui la forza di volume non sia presente, la pressione è uguale in tutti i punti del fluido.

## EQUAZIONE STATICA DEI FLUIDI

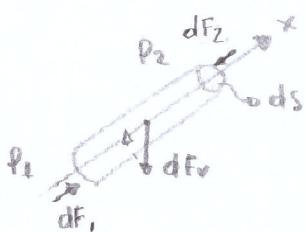
Consideriamo un cilindro di fluido soggetto ad una forza di volume qualsiasi  $dF_v$ . Indichiamo con  $g_F$  la forza di volume totale su unità di massa:

$$g_F = \frac{dF_v}{dm}$$

OSS

Se la forza di volume è solo quella di gravità  $g_F$  corrisponde all'accelerazione di gravità  $g$

Oltre alla forza di volume vi sono due forze opposte, poiché il fluido è in equilibrio si deve avere lungo l'asse  $x$ :



$$dF_1 - dF_2 - dF_{vx} = 0$$

Da cui:

$$P_1 ds - P_2 ds - g_{Fx} p dv = 0$$

La pressione  $P_2$  può essere scritta mediante differenziale come:

$$P_2 = P_1 + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Si ha quindi:

$$P_1 ds - \left( P_1 + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) ds - g_{Fx} p dv = 0 \quad P_1 ds - P_1 ds - \frac{\partial P}{\partial x} dv - g_{Fx} p dv = 0$$

Da cui:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g_{Fx} p$$

Se si svolge lo stesso calcolo per gli altri assi si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = g_{Fx} p \\ \frac{\partial P}{\partial y} = g_{Fy} p \\ \frac{\partial P}{\partial z} = g_{Fz} p \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} p = \vec{g}_F p$$

$$\vec{g}_F = \frac{\vec{dF}_v}{dm} \rightarrow \text{FORZA DI VOLUME}$$

## STATICA DEI CORPI PESANTI

Consideriamo il caso in cui la sola forza di volume  $F_v$  a cui è soggetto il corpo sia quella di gravità, poiché quest'ultima è CONSERVATIVA possiamo scrivere l'EQUAZIONE DELLA STATICA DEI FLUIDI nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} P \\ \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y} P \\ \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial z} P \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} P = - \vec{\nabla} U \cdot P$$

$$\vec{g}_{F_x} = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

(VEDI DINAMICA)

Si ha quindi:

$$dP = - dU \cdot P$$

Globalmente, considerando  $P$  costante

$$\int_{P_0}^P dP = \int - dU \cdot P$$

$$P = P_0 - UP$$

### • LEGGE DI STEVINO

Nel caso della forza di gravità l'energia potenziale dipende dalla quota  $z$ , considerando una massa unitaria ( $m=1$ ) si ha:

$$U = g z$$

Prendendo una quota di riferimento  $z_0$  in cui è presente una pressione  $P_0$ , l'equazione per i fluidi pesanti diventa

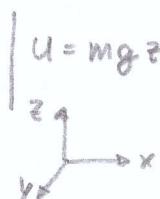
$$P - P_0 = - [g(z - z_0)] P \quad P - P_0 = g(z_0 - z) P$$

Portando il dislivello tra  $z$  e  $z_0$  uguale ad  $h$  si ottiene la LEGGE DI STEVINO:

$$P = P_0 + P g h$$

OSS

Poiché l'energia potenziale dipende unicamente dalla quota si ha che le superfici orizzontali hanno la medesima pressione (ISOBARICHE). Dalla legge di Stevino si ha che la pressione aumenta con la "distanza" da  $P_0$ , si deduce quindi che un fluido è in equilibrio in posizione orizzontale quando pressione uguale in ogni punto



$$P = P_0 - UP$$



### • PARADOSSO DELL' IDROSTATICA

Dalla legge di Stevino si ha che la pressione è relazionata solo alla colonna di liquidi, indipendentemente dal volume.

Si ha quindi che nei tre casi seguenti sul fondo si ha la medesima pressione



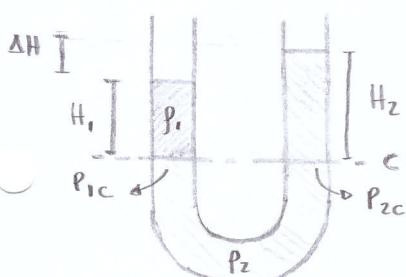
Si osservi che le basi dei tre contenitori sono le medesime, ma la massa dei tre liquidi è differente, poiché di diversa forma e riempiti allo stesso livello.

Tale fenomeno può essere giustificato considerando la reazione normale del fluido rispetto al contenitore, se tale reazione è decomposta si nota che le componenti orizzontali si annullano, al contrario di quelle normali che si sommano.



### • VASI comunicanti

Consideriamo un contenitore a forma di U che contiene due fluidi non miscelabili, aventi densità diverse.



Per la legge di Stevino si ha che le superfici orizzontali sono ISOBARICHE (stessa pressione), quindi al livello c si deve avere la medesima pressione. (La pressione esterna  $P_0$  si considerano costante per il piccolo dislivello  $Ah$ )

$$P_{1c} = P_{2c}$$

Si ha quindi

$$P_0 + \rho_1 g H_1 = P_0 + \rho_2 g H_2$$

Da cui il rapporto:

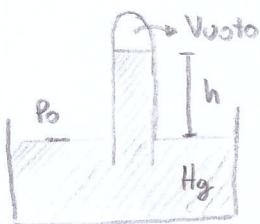
$$P_{1c} = P_0 + \rho_1 g H_1$$

$$P_{2c} = P_0 + \rho_2 g H_2$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{H_2}{H_1}$$

## - Misura pressione atmosferica

Mediente il principio dei vasi comunicanti, Torricelli misura la pressione atmosferica.



Per tale misurazione occorre prendere una canna di vetro riempita di mercurio ( $Hg$ ) e capovolgerla in un contenitore pieno di mercurio in modo che nella canna non vi sia aria.

Si ha per Stevino la pressione atmosferica sul livello del contenitore ( $P_0$ ) pari a:

$$P_0 = \rho_{Hg} h g$$

L'altezza  $h$  varia a seconda dell'altitudine, e con essa varia anche l'accelerazione  $g$ .

Si definisce quindi una nuova unità di misura per la pressione chiamata ATMOSFERA.

1 Atmosfera è la pressione che esercita una colonna di mercurio di 76 cm a  $0^{\circ}C$  posta al livello del mare ( $g = 9,806 \text{ m/s}^2$ ):

$$1 \text{ atm} = (13,595 \cdot 10^3) \cdot 0,76 \cdot 9,806 = 101,32 \text{ kPa}$$

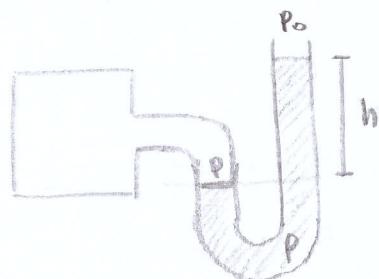
$$1 \text{ atm} = 101,32 \text{ kPa} = 1,013 \text{ bar}$$

$$\left| \begin{array}{l} P_{Hg} = 13,595 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ (0^{\circ}C) \end{array} \right.$$

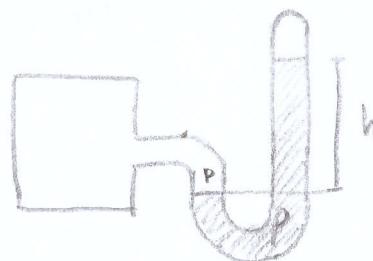
$$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

## - Misura pressione fluido

Un metodo di misura della pressione di un fluido in contenitore è dato dai seguenti strumenti. (In un caso estremità aperta, nell'altro chiusa)



$$(P = P_0 + \rho g h)$$



$$(P = \rho g h)$$

OSS

Ovviamente in entrambi i casi il fluido da misurare non deve miscelarsi con il fluido usato per la misurazione.

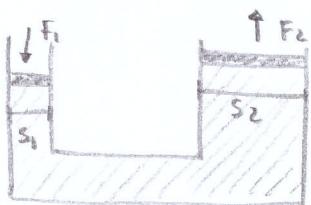
## PRINCIPIO DI PASCAL

Abbiamo visto nella statica dei liquidi che nel caso in cui il fluido è soggetto solo alla forza di gravità, la pressione è proporzionale all'energia potenziale in quel punto. Quindi la differenza di pressione tra due punti dipende dalla quota e dalle densità.

Se applichiamo una pressione esterna  $\Delta P$  in un punto, anche nell'altro punto ci sarà il medesimo aumento di pressione (consideriamo il fluido ideale, quindi non compressibile), mantenendo così la differenza di pressione che c'era precedentemente. Il fenomeno precedente è detto PRINCIPIO DI PASCAL.

### • PRESA IDRAULICA

Un'applicazione è la seguente, si consideri il seguente contenitore, in cui ad estremità c'è un pistone.



Se applico una forza \$F\_1\$ sull'estremità più stretta si avrà una forza \$F\_2\$ sull'altra estremità, legate dal fatto che la variazione di pressione \$\Delta P\$ è uguale per entrambi i punti:

$$\Delta P = \frac{F_1}{S_1}$$

$$P = \frac{F}{S}$$

La forza \$F\_2\$ sarà:

$$F_2 = \Delta P \cdot S_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

$$\Delta P = \frac{F_1}{S_1} \quad \Delta P = \frac{F_2}{S_2}$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

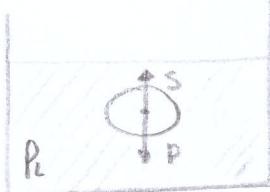
Si ha quindi un aumento di forza nel secondo punto, relazionato ai rapporti tra le superfici:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

## PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Se un corpo è immerso in un fluido esso subisce una forza verticale diretta dal basso verso l'alto uguale per intensità alla forza peso del volume del fluido spostato. Tale forza è detta SPINTA DI ARCHIMEDE

La forza  $F$  totale a cui è soggetto il corpo è data:



$$F = S - P = P_L V \cdot g - P_C V g$$

$$F = (P_L - P_C) V g = m a$$

Il corpo, avente massa  $m$  subisce un accelerazione pari a:

$$m a = (P_L - P_C) V g \quad a = \frac{(P_L - P_C)}{m} V g = \frac{(P_L - P_C)}{P_C \cdot V} V g$$

Quindi:

$$P_C = \frac{m}{V}$$

$$a = \left( \frac{P_L}{P_C} - 1 \right) g$$

- Corpo immerso

Se vogliamo impostare che un corpo immerso (in parte) di un coefficiente  $\alpha$  ( $\alpha v$ ) si deve porre l'equazione delle forze a zero.

$$F = P_L (\alpha v) g - P_C V g = 0 \quad (P_L \alpha v - P_C) V g = 0$$

In questo caso il volume di liquido spostato è  $\alpha v$  ( $V = \text{Volume corpo}$ )

Il coefficiente  $\alpha$  è quindi dato:



$$\alpha = \frac{P_C}{P_L}$$

$P_C = \text{Densità corpo}$
$P_L = \text{Densità fluido}$

OSS

Se le densità  $P_L$  e  $P_C$  sono uguali, il coefficiente  $\alpha = 1$  e quindi il corpo è completamente immerso

## TERMOLOGIA

In questa parte introduciamo le basi per lo studio della termodinamica, introducendo il concetto di temperatura e quantità di calore.

### PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Se due corpi A e B sono in equilibrio termico con un corpo C, allora sono in equilibrio anche fra di loro.

### SCALE TERMOMETRICHE

Per misurare la temperatura di un corpo si può pensare di usare le proprietà di alcuni materiali come ad esempio la variazione di resistenza oppure l'espansione di un fluido come il mercurio all'interno di un bulbo.

Tuttavia le relazioni che intercorrono tra le variazioni di grandezze e la temperatura sono diverse a seconda delle proprietà esaminate e del materiale. Ad esempio una scala termometrica definita linearmente per la resistenza di un conduttore può non essere lineare per un'altra caratteristica di un altro materiale.

#### • SCALA CENTRIGRADA

Si è trovato tuttavia che i gas molto rari fatti si comportano tutti allo stesso modo. In ambito scientifico si considera quindi una scala che metta in relazione lineare il volume di un gas, mantenendo la pressione costante, con la temperatura. Si può fare anche l'inverso (variazione di pressione a volume costante).

Considerando la temperatura in gradi Centigradi si ha:

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

$$P = P_0 (1 + \alpha t)$$

$$t = \frac{\text{Temperatura}}{\text{in } [^{\circ}\text{C}]}$$

$$\alpha = \frac{1}{273,15}$$

La scala centigrada [ $^{\circ}\text{C}$ ] è definita mediante i due punti di cambiamento dell'acqua a pressione atmosferica (760 mm Hg) (1 Atm)

$0\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow$  Fusione acqua

$100\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow$  Ebollizione

N.B.

I valori  $V_0$  e  $P_0$  si riferiscono a valori assunti allo zero Centigradi  $T_0 = 273,15\text{ K}$

## • SCALA KELVIN

Le equazioni precedenti si possono riscontrare con usando scala scelta a piacere come quella centigrada, ma che siano legate alla proprietà ininseste dei gas perfetti, ovvero al coefficiente  $\alpha$ .

Ponendo la nuova temperatura di riferimento  $T_0$  come:

$$T_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{273,15}$$

Le precedenti equazioni si scrivono:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t}{T_0}\right) = V_0 \left(\frac{T_0 + t}{T_0}\right) = V_0 \frac{T}{T_0} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Temperatura in} \\ \text{gradi kelvin} \end{array}$$

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

Stessa cosa vale per la pressione.

Si hanno quindi le seguenti relazioni, che legano la temperatura in gradi kelvin direttamente alle variazioni fissate dei gas:

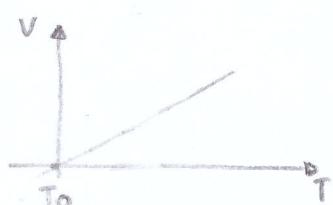
$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$T = [\text{kelvin}]$$

$$\text{kelvin} = ^\circ\text{C} + 273,15$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K}$$



Dal punto di vista ideale  
la temperatura  $T_0$  (detta zero assoluto)  
è quella in cui il volume del gas è nullo.

## QUANTITA' DI CALORE

Un corpo varia la sua temperatura in relazione alla quantità di calore ceduta o acquistata. Essa dipenderà dalla variazione di temperatura, dalla massa del corpo e dal tipo di materiale.

La quantità di calore  $Q$  ha quindi la seguente relazione con la variazione della temperatura:

$$Q = cm(t_2 - t_1)$$

$c \rightarrow$  Calore specifico del materiale

$cm \rightarrow$  Capacità termica

$m \rightarrow$  Massa del corpo

La quantità di calore è misurata in KILOCALORIA, 1 Kilocaloria equivale alla quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua da  $14,5^\circ\text{C}$  a  $15,5^\circ\text{C}$

## PRIHO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

In termologia abbiano considerato il calore come se fosse una sostanza che possono far scambiare tra due corpi; tale considerazione viene meno se consideriamo processi di attrito in un cui c'è aumento di temperatura senza scambi di calore. Successivamente ricaveremo la vera natura del calore.

Prima di tutto introduciamo i concetti alla base della termodinamica.

### SISTEMA TERMODINAMICO

Un sistema è formato da un numero elevato di particelle, grandi nozioni di SISTEMA TERMODINAMICO se può essere descritto globalmente tramite poche grandezze tra cui la TEMPERATURA.

#### • EQUILIBRIO TERMODINAMICO

Un sistema termodinamico se isolato, raggiunge dopo un certo tempo uno stato di EQUILIBRIO TERMODINAMICO. In tale stato non ci sono mutamenti macroscopici tra le parti, e le grandezze globali, come la temperatura, sono uniformi in ogni punto.

#### • VARIABILI DI STATO

Lo stato di equilibrio di un sistema è descritto tramite diverse grandezze dette VARIABILI DI STATO. Un particolare stato di equilibrio è definito unicamente dai valori che assumono le variabili di stato, indipendentemente dal modo in cui si raggiunge tale stato.

Le variabili di stato sono di due tipi:

- INTENSIVE: Non dipendono dalla dimensione del sistema
- ESTENSIVE: Dipendono dalla quantità di materia che costituisce il sistema.

Nel caso di un gas omogeneo

- Intensive (Temperatura e Pressione)
- Estensive (Volume)

### - Equazione di Stato

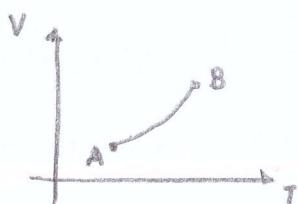
Le variabili di stato di un sistema termodinamico non sono indipendenti, ma legate ad EQUAZIONI DI STATO che dipendono dalla natura del sistema stesso.

### TRASFORMAZIONI

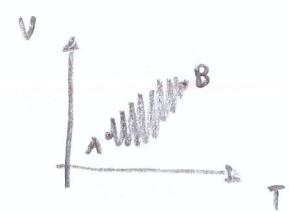
Un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio ad un altro mediante TRASFORMAZIONI.

Vi sono due tipi di trasformazioni:

— TRASFORMAZIONE REVERSIBILE: Il processo avviene molto lentamente (quasi statico) in modo che si possa considerare in equilibrio termodinamico ad ogni istante. In tal caso NON devono essere presenti processi dissipativi come l'attrito. Tale trasformazione puo' anche essere invertita



— TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE: Un esempio e' quella di far espandere rapidamente un gas, in tal caso NON e' possibile definire equilibri termodinamici intermedi, ma solo iniziali e finali. Tali processi non possono essere invertiti.



### LAVORO IN TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

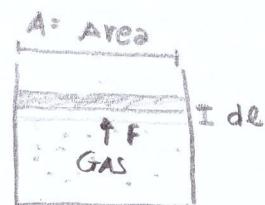
Un sistema termodinamico durante una qualsiasi trasformazione puo' compiere lavoro, nel caso di trasformazioni reversibili tale lavoro puo' essere CALCOLATO.

Tra i sistemi IDEALI da noi considerati l'unico che puo' compiere lavoro e' il GAS IDEALE poiché a differenza dei SOLIDI E LIQUIDI IDEALI non possiede un volume proprio, ma assume quello del contenitore.

Consideriamo quindi un gas molto rarefatto in modo da potersi considerare ideale, lo mettiamo in un contenitore avente come tappo un pistone che e' libero di muoversi (senza attrito) con l'espansione spontanea del gas, che immaginiamo avvenga molto lentamente in modo da avere una trasformazione reversibile.

Il lavoro sara' dato:

$$\Delta L = F \cdot \Delta x = P \cdot A \Delta x = P \Delta V$$



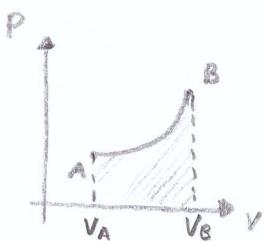
$$\left| \begin{array}{l} \Delta V = A \Delta x \\ P = \frac{F}{A} \end{array} \right.$$

Poiche' tale trasformazione e' reversibile possiamo rappresentarla graficamente, mettendo in relazione  $P$  e  $V$ .

Il lavoro totale sara' (Dal volume  $V_A$  a  $V_B$ )

$$L_{AB} = \int_A^B P dV$$

Come da definizione di integrale il lavoro e' dato dall'area sottostante la curva descritta dalla trasformazione.



N.B.

S: deduce quindi che il lavoro eseguito da un sistema termodinamico nel passare da uno stato di equilibrio all'altro DIPENDE dal TIPO DI TRASFORMAZIONE seguita.

Il lavoro eseguito per una variazione elementare di volume NON e' un differentiale esatto, poiche' dipende dalla trasformazione.

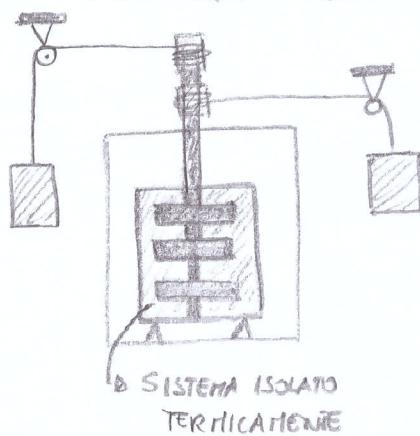
$$\boxed{dL = P dV}$$

| Lavoro elementare espansione gas  
|  $d$  → Differentiale non esatto.

## EQUIVALENTE MECCANICO DELLA CALORIA

Nel studio della meccanica si è notato che in processo dissipativo (es. attrito) l'energia meccanica non si conserva, essa viene convertita in altri tipi di energia come ad esempio il calore.

Vediamo quindi tramite l'ESPERIMENTO DI JOULE come è legato il lavoro meccanico alla caloria (QUANTITÀ DI CALORE).



Consideriamo un contenitore pieno di acqua isolato termicamente, facendo cadere i due pesi: le pale immerse nel fluido ruotano e per attrito scaldano il sistema ( $H_2O$ ), fanno quindi lavoro sul sistema ( $L_{SUL} = -L$ )

Successivamente si riporta il sistema alla temperatura iniziale, sottraendo calore ( $Q_{SOT} = -Q$ )

Si ottiene che il rapporto tra lavoro e calore è sempre costante, in tutti i processi come quello di Joule.

Tale rapporto è:

$$\frac{L}{Q} = J$$

$$J = 4,18 \text{ Joule/cal}$$
$$= 4,18 \cdot 10^3 \text{ Joule/Kcal}$$

## PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Abbiamo precedentemente ricavato che il lavoro eseguito da un sistema termodinamico dipende dal tipo di trasformazione eseguita, tale dipendenza è valida anche per la quantità di calore infatti lavoro e calore sono in relazione ( $L = J\alpha$ ).

Il 1° principio definisce una nuova grandezza detta ENERGIA INTERNA ( $U$ ) la cui variazione NON dipende dal tipo di trasformazione, ma solo dagli stati iniziali e finali, per quali vi è scambio di calore e viene eseguito o subito lavoro dal sistema. " $U$ " è quindi una FUNZIONE DI STATO.

Tale variazione è data dalla somma del calore scambiato e lavoro fatto:

$$\Delta U = Q + L$$

Tuttavia poiche' per convenzione si definisce:

- QUANTITA' DI CALORE POSITIVO: se assorbito dal sistema

- LAVORO NEGATIVO: Se eseguito sul sistema

Riferendosi al sistema si scrive il 1° principio nel seguente modo:

$$\Delta U = Q - L$$

$\Delta U$  = Variazione energia interna del sistema

$Q$  = Calore assorbito dal sistema

$L$  = Lavoro fatto sul sistema

Poiche'  $U$  e' una funzione di stato, il suo differenziale e' esatto e si puo' scrivere il 1° principio come

$$dU = dQ - dL$$



## SISTEMI TERMODINAMICI GASOSI

Le nozioni precedenti erano più o meno generali, ora vediamo il caso particolare dei sistemi termodinamici costituiti da GAS PERFETTI, nella realtà essi si possono considerare tali se molto rarefatti.

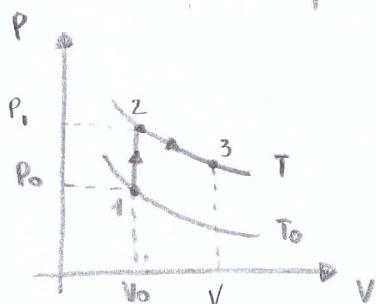
### EQUAZIONE DI STATO

Per un gas perfetto valgono le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P \cdot V = P_0 V_0 & T = \text{Cost} \quad (\text{ISOTERMA}) \\ P = P_0 \frac{T}{T_0} & V = \text{Cost} \quad (\text{ISOCORA}) \\ V = V_0 \frac{T}{T_0} & P = \text{Cost} \quad (\text{ISOBARA}) \end{array} \right.$$

Per ricavare l'equazione di stato, eseguiamo le seguenti trasformazioni:

1. ISOCORA (Passo da 1 a 2)



$$P_1 = P_0 \frac{T}{T_0}$$

2. ISOTERMA (Da 2 a 3)

$$P_1 V_0 = P V$$

Eliminando  $P_1$  si ottiene:

$$P_0 \frac{T}{T_0} = \frac{P V}{V_0}$$

$$\frac{P V}{T} = P_0 \frac{V_0}{T_0}$$

Il secondo membro è una costante, esso può essere posto:

$$P_0 \frac{V_0}{T_0} = n R$$

$n$  = numero di moli

$R$  = Costante universale per i gas

$$R \approx 8,31$$

L'equazione si pone quindi:

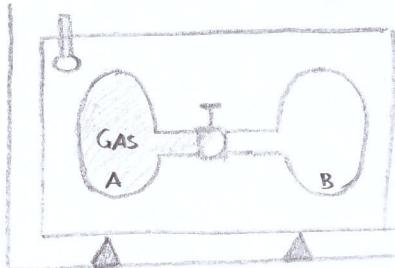
$$P V = n R T$$

1 mole è la quantità di sostanza che contiene un numero molecolare pari alla costante di Avogadro ( $N_A$ )

$$N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$$

## ENERGIA INTERNA DI UN GAS PERFETTO

Tramite la seguente esperienza detta ESPERIENZA DI JOULE si deduce che l'energia interna di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura.



Consideriamo un sistema isolato termicamente costituito da due contenitori A e B immersi in un fluido conduttore (es: acqua).

I due contenitori sono divisi da uno valvola.  
Nel contenitore A c'è presente un gas molto rarefatto ( $\approx$  IDEALE), quello B è vuoto.

All'apertura della valvola si nota che la temperatura del sistema non varia in relazione all'espansione del gas.

Applicando il 1° principio si ha:

1° PRINCIPIO

$$\Delta U = Q - L$$

La quantità di calore  $Q$  è nulla poiché non c'è variazione di temperatura, il lavoro è nullo dato che nel contenitore B vi è il vuoto.

Quindi l'energia interna del sistema è rimasta invariata.

Nel caso di un gas l'energia interna è funzione di pressione, volume e temperatura.  $[U(P, V, T)]$  se la pressione la si mette in funzione al volume e temperatura si ha  $U(P, V, T) = U[P(V, T), V, T] = U(V, T)$

Poiché  $U(V, T)$  è una funzione di stato. Si:  $\frac{\partial U}{\partial T} \neq 0$  quindi differenziabile.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad \left| \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \right. = \text{Derivato di } U \text{ rispetto a } T, \text{ mantenendo } V \text{ costante}$$

Poiché  $dU = 0$ ; e  $dT = 0$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Dato che  $dV \neq 0$ , poiché il gas ha cambiato volume si ricava che  $U$  non varia in relazione alla variazione di volume.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

Si ricava quindi che l'energia interna di un gas ideale e' funzione unicamente della temperatura:

$$U(T)$$

### TRASFORMAZIONI GAS PERFETTI

In termologia abbiamo ricavato:

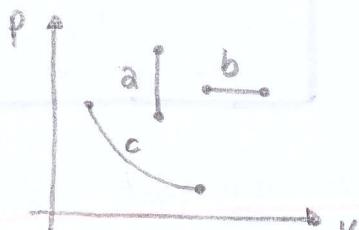
$$Q = cm(t_2 - t_1) = C_T(t_2 - t_1)$$

Il prodotto  $cm$  lo abbiamo chiamato CAPACITA' TERMICA ( $C_T$ ).

Successivamente attraverso Joule abbiamo dedotto che il lavoro e' di conseguenza la quantita' di calore  $Q$ , dipende dal tipo di trasformazione eseguita.

Data la precedente relazione si intuisce che anche  $C_T$  dipende dal tipo di trasformazione.

Nel grafico accanto (PIANO DI CLAPEYRON) sono rappresentate tre diverse trasformazioni:



- a- ISOCORA (Volume costante)
- b- ISOBARA (Pressione costante)
- c- ISOTERMA (Temperatura costante)

Vediamo ora queste tre trasformazioni per un gas ideale e come in base ad esse variano i lavori eseguiti e la capacita' termica.

OSS

[ La capacità termica se calcolata per  $m=1\text{kg}$  restituisce il CALORE SPECIFICO, se calcolata per una mole  $m=1\text{M}$  restituisce il CALORE MOLARE ]

### • TRASFORMAZIONE ISOCORA

In tal caso il gas è mantenuto a VOLUME COSTANTE e di conseguenza il lavoro è nullo. La capacità termica la indiciamo con  $C_V$ .

Dall'espressione ricavata in termodinamica e dal 1° principio si ha:

$$dQ = C_V dT \quad dQ = dL + du$$

Da cui:

$$C_V dT = dL + du$$

Poiché non c'è variazione di volume il lavoro è nullo;

Quindi riassumendo tutte le relazioni valide in questo caso:

$$C_V = \left( \frac{du}{dT} \right)_V$$

$$L = 0$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0}$$

1° PRINCIPIO  
 $du = dQ - dL$

$| dL = P dv$

### • TRASFORMAZIONE ISOBARA

In tale trasformazione la pressione è costante.

L'equazione di stato di un gas ideale per 1 mole è:

$$PV = RT$$

Derivandola si ottiene:

$$d(PV) = d(RT) \quad dP \cdot V + P \cdot dv = R \cdot dT \quad Pdv = RdT$$

EQ GENERALE

$$PV = nRT$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} \rightarrow \text{kg} \\ M &\rightarrow \text{Hole} \\ n &= \frac{1000}{1000} = 1 \end{aligned}$$

$| dp = 0$

Come fatto nel caso precedente:

$$C_P dT = Pdv + du \quad C_P dT = RdT + C_V dT$$

Lavoro

In questo caso si ha:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} dL = \int_{V_1}^{V_2} P dv = P(V_2 - V_1)$$

$$dQ = C_P dT$$

$$dQ = dL + du$$

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

$$| dL = Pdv$$

Riassumendo:

$$C_P = R + C_V$$

$$L = P(V_2 - V_1)$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

## • TRASFORMAZIONE ISOTERMA

In tal caso non si ha variazione di temperatura, in tal caso la capacità termica tende a +∞ infatti si ha:

$$\frac{Q}{\delta} = C_T \quad (C_T \rightarrow +\infty)$$

$$Q = C_T \Delta T$$

Lavoro

Il lavoro in questa trasformazione è dato da:  
(usando l'equazione dei gas)

$$EQ GAS$$

$$PV = nRT$$

$$L = \int_1^2 \delta L = \int_1^2 P dv = \int_1^2 \frac{nRT}{v} dv \quad | P = \frac{nRT}{v} \quad | \delta L = P dv$$

Da cui:

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Quindi:

$$C_T \rightarrow +\infty$$

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$PV = P_0 V_0$$

## TRASFORMAZIONE ADIABATICA

Un ulteriore tipo di trasformazione è quella adiabatica in cui il sistema NON scambia calore con l'esterno. ( $Q = 0$ ).

Ricaviamo qui l'espressione per tale trasformazione (ovviamente in tal caso la capacità termica è nulla)

Dal 1° principio si ha:

$$du + \delta L = 0 \quad C_V dT + P dv = 0$$

1° PRINCIPIO

$$du = \delta Q - \delta L$$

Riprendendo l'equazione dei gas (per 1 mole) si ha:

$$d(PV) = d(RT) \quad dP \cdot V + P dv = R dT$$

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

$$\delta L = P dv$$

EQ GAS

$$dT = \frac{dP \cdot V}{R} + \frac{P dv}{R}$$

$$PV = nRT$$

1 Kilonole

$$PV = RT$$

Sostituendo  $dT$  nella precedente equazione:

$$C_V \left( \frac{dP \cdot V + dV \cdot P}{R} \right) + P \cdot dV = 0$$

$$\begin{cases} C_V dT + P dV = 0 \\ dT = \frac{dP \cdot V + P \cdot dV}{R} \end{cases}$$

Da cui:

$$\frac{C_V dP}{P} + P \cdot dV \left( \frac{C_V + R}{R} \right) = 0 \quad C_V dP/V + P dV/C_P = 0$$

$$\left| C_P = C_V + R \right.$$

Globalmente:

$$\int C_V \frac{dP}{P} + \int C_P \frac{dV}{V} = \text{Costante}; \quad C_V \ln(P) + C_P \ln(V) = \text{Cost}$$

$$\ln(P) + \frac{C_P}{C_V} \ln(V) = \text{Cost} ; \quad P V^{\frac{C_P}{C_V}} = e^{\text{Cost}} = \text{Cost} \quad \left| \begin{array}{l} a \ln(b) = \ln(b^a) \\ \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b) \end{array} \right.$$

Lavoro

Anche se non lo abbiamo ricavato, il lavoro in tal caso e':

$$L = \int_1^2 dL = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Quindi:

$$C_{aa} = 0$$

$$L = -\Delta U$$

$$P V^{\frac{C_P}{C_V}} = \text{Cost}$$

## TRASFORMAZIONE POLITROPICA

Tutte le precedenti trasformazioni possono essere riassunte nelle seguenti equazioni:

$$P V^K = \text{Cost}$$

$$C_K = C_V + \frac{R}{1-K}$$

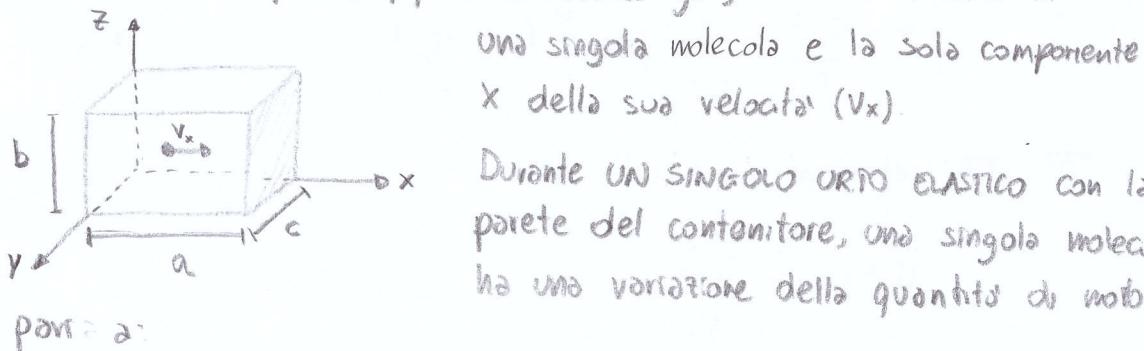
K	TRASFORMAZIONE
0	P cost (ISOBARA)
1	T cost (ISOTERMA)
$\frac{C_P}{C_V}$	$dQ=0$ (ADIABATICA)
$\infty$	V cost (ISOCORA)

## TEORIA CINETICA DEI GAS IDEALI

Consideriamo un gas costituito da  $N$  molecole, ognuna delle quali si approssima a puntiforme, non vi sono quindi urti tra una molecola ed un'altra.

Tramite la TEORIA CINETICA riusciamo a mettere in relazione l'energia cinetica media ( $\bar{E}$ ) di una molecola di un gas, con la temperatura  $T$  del gas. (espresso in gradi Kelvin)

Consideriamo un parallelepipedo contenente gas, studiamo il moto di



una singola molecola e la sola componente  $x$  della sua velocità ( $v_x$ ).

Durante UN SINGOLO URTO ELASTICO con la parete del contenitore, una singola molecola ha una variazione della quantità di moto:

pari a:

$$(\Delta p_m)_{\substack{1 \text{ molecola} \\ 1 \text{ urto}}} = m_i v_{xi} - (-m_i v_{xi}) = 2 m_i v_{xi}$$

QUANTITÀ DI MOTO  
 $\vec{p}_m = m \vec{v}$

Dal Teorema dell'impulso si ha:

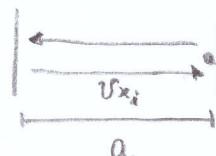
$$\Delta p_i = \int F_i dt$$

Quindi la forza totale applicata da una singola molecola in un'unità di tempo è data:

$$F_i = \Delta p_i \cdot f \xrightarrow{\substack{\text{Numero di urti} \\ \text{nell'unità di tempo}}}$$

La frequenza può essere ricavata considerando il tempo impiegato da una molecola per attraversare il contenitore (lungo l'asse  $x$ ) e tornare ( $T = \text{Periodo}$ )

$$T = \frac{2a}{v_{xi}}$$



$$v = \frac{s}{T}$$

La frequenza e' quindi:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v_{xi}}{2a}$$

$$\left| \begin{array}{l} f = \frac{1}{\tau} \\ \tau = \frac{2a}{v_{xi}} \end{array} \right.$$

La forza totale applicata sulla parete dalle  $N$  molecole e' quindi:

$$F = \sum_i^N F_i = \sum_i^N \Delta P_i \cdot f = \sum_i^N \left( m_i \frac{v_{xi}^2}{a} \right)$$

$$\left| \Delta P_i = 2m_i v_{xi} \right.$$

La pressione esercitata sul lato A (b.c) sara':

$$P = \sum_i^N \left( m_i \frac{v_{xi}^2}{a} \cdot \frac{1}{b \cdot c} \right) = \sum_i^N \left( m_i \frac{v_{xi}^2}{V} \right)$$

$$\left| P = \frac{F}{A} \right.$$

Considerando una velocita' media

$$\bar{v}_x^2 = \frac{\sum v_{xi}^2}{\sum N_i}$$

E poiche' le molecole hanno tutte la medesima massa  $m$

Si ha:

$$P = N \left( \frac{m \bar{v}_x^2}{V} \right)$$

$$PV = N m \bar{v}_x^2$$

Dato che ogn molecola ha la medesima probabilita' di muoversi lungo un asse ( $x, y, z$ ):

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$$

$$PV = N m \frac{\bar{v}^2}{3}$$

$$PV = \frac{2}{3} N \left( \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right)$$

ENERGIA CINETICA

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{E}$$

$\bar{E}$  = Energia cinetica media  
di una molecola

Per esprimere tale equazione mediante la temperatura del gas usiamo l'equazione dei gas:

$$NRT = \frac{2}{3} N \bar{\epsilon}$$

$$NRT = \frac{2}{3} n N^P \bar{\epsilon}$$

$$N = n N^P$$

EQ GAS

$$PV = nRT$$

$$\begin{cases} n = \text{numero mol} \\ R = \text{costante gas} \end{cases}$$

Quindi:

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} \frac{R}{N^P} T$$

Energia cinetica media di una molecola

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k T$$

$$\begin{cases} k = \text{costante di Boltzmann} \\ k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \\ T = \text{temperatura gas (kelvin)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = \text{numero molecole} \\ n = \text{numero mol} \\ N^P = \text{costante Avogadro} \\ N^P = \text{numero molecole contenute in 1 mole} \end{cases}$$

### GAS REALI

#### • ENERGIA

Nel calcolo dell'energia cinetica  $\bar{\epsilon}$ , il numero "3" si riferisce alle 3 direzioni possibili e quindi ai gradi di libertà della molecola puntiforme ( $x, y, z$ ).

In generale si ha:

$$\bar{\epsilon} = f \frac{1}{2} k T$$

$f = \text{gradi di libertà}$

L'energia interna del gas, ( $U$ ) può quindi essere scritta come la somma delle energie cinetiche medie di ognuna delle  $N$  molecole

$$U = N \bar{\epsilon} = N f \frac{1}{2} k T$$

$N$  molecole

Per 1 mole di sostanza si ha:

$$U = n N^P f \frac{1}{2} k T$$

$$U = f \frac{1}{2} R T$$

1 mole

$$\begin{cases} N = n N^P \\ n = \text{numero mol} \\ N = 1 \\ \frac{R}{N^P} = k \end{cases}$$

## • CALORE MOLARE

In precedenza abbiamo calcolato le CAPACITA' TERMICHE dei gas ideali per ogni trasformazione. Se tale capacità sono considerate per 1 kg si ricava il calore specifico; se considerate per 1 mole, il CALORE MOLARE.

Vediamo come variano i calori molare in relazione ai gradi di libertà.

Abbiamo visto che l'energia interna  $U$  per 1 mole è data

$$U = f \frac{1}{2} R T$$

Trasformazione Isocora

Il calore molare  $C_V$ , poiché legato ad  $U$  è dato da:

$$C_V = \frac{du}{dT} = \frac{d(f \frac{1}{2} RT)}{dT}$$

$$C_V = f \frac{R}{2}$$

Calore molare  
ISOCORA

Trasformazione Isobara

Poiché il calore molare  $C_P$  è legato a  $C_V$ , si ha:

$$C_P = f \frac{R}{2} + R$$

$$C_P = \frac{(f+2)}{2} R$$

Calore molare  
ISOBARA

$$C_P = C_V + R$$

Vediamo ora come variano tali valori per due tipi di gas reali:

### - Gas con molecole monoatomiche

In questo le molecole possono considerarsi puntiformi e quindi come se fossero gas ideali (es: elio He, o vapori di mercurio Hg)

Si ha allora ( $f=3$ )

$$U = \frac{3}{2} R T$$

$$C_V = \frac{3}{2} R$$

$$C_P = \frac{5}{2} R$$

CALORI MOLARI - MONOATOMICI

## - Gas con molecole batomiche

Consideriamo un gas reale avente le molecole costituite da due atomi.

In tal caso i gradi di libertà f aumentano.

Il legame tra i due atomi lo raffigurano

tramite una molla, poiché essi si possono avvicinare, ma poi si respingono.



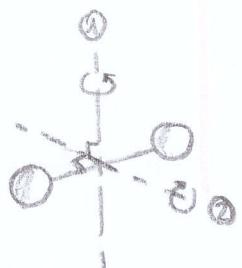
I modi in cui la molecola puo' distribuire energia sono:

(+3) - Traslazione: In tal caso i gradi di libertà sono 3

$$[\text{Energia} = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} m v_x^2 \right)]$$

(+2) - Rotazione: Gli atomi possono ruotare rispetto a due assi, i gradi di libertà sono quindi 2

$$[\text{Energia} = 2 \left( \frac{1}{2} I_x w_x^2 \right)]$$



(+2) - Vibrazione: In tal caso vi e' un unico "modo di vibrare" ma ad esso corrispondono l'energia cinetica e potenziale rispetto al legame (nullo), quindi si hanno 2 gradi di libertà.

$$[\text{Energia} = 1 \left( \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} C s^2 \right)]$$

ENERGIA POT. MOLARE  
 $\frac{1}{2} C s^2$   
 Gestire elastica  $\rightarrow$  Spostamento

Dal TEOREMA DI MAXWELL di equipartizione di energia  
 ognuno dei precedenti termini che esprimono l'energia sono uguali.  
 Sono tutti:  $\frac{1}{2} k T$

Quindi poiché vi sono in totale 7 gradi di libertà:

$$U = \frac{7}{2} R T$$

$$C_V = \frac{7}{2} R$$

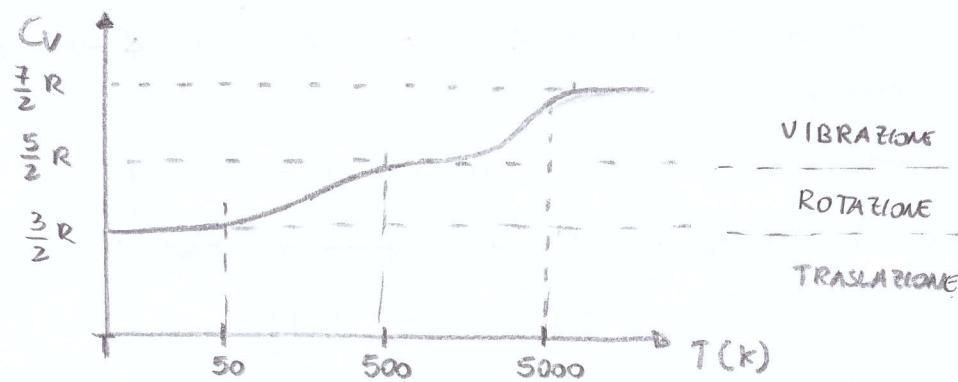
$$C_P = \frac{9}{2} R$$

GAS BIATOMICO AD ALTE TEMPERATURE

N.B.

I valori ricavati precedentemente sono verificati sperimentalmente  
Sop ad alte temperature, in altri casi sono minori, c' come se alle  
basse temperature alcuni modi per distribuire energia non siano possibili

Il calore molare Cv segue il seguente andamento



La motivazione c' data dalla teoria quantistica

## SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il 2° principio della termodinamica nasce con l'obiettivo di limitare il 1° principio, infatti quest'ultimo consente di far passare calore da una sorgente fredda ad una calda NATURALMENTE, oppure creare lavoro illimitatamente da un corpo ad elevata capacità termica (es. oceano). Tali fenomeni non sono realizzabili nella realtà. Prima di enunciare il 2° principio ragioniamo sulla trasformazione di calore in lavoro:

1° PRINCIPIO

$$dU = dQ - dL$$

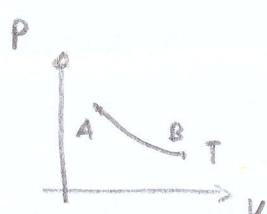
## MACCHINE TERMICHE

In generale una MACCHINA TERMICA è un dispositivo che scambia calore (assorbire o cedere) e lavoro (fare o subire) con l'esterno.

Il nostro obiettivo è quello di ideare una macchina che prendendo calore da una SORGENTE TERMICA (cioè un corpo che cedendo calore non varia la propria temperatura) lo trasformi con continuità in lavoro. Si potrebbe pensare di utilizzare un gas ideale con trasformazione ISOTERMICA in modo da trasformare tutto il calore in lavoro, tuttavia nella realtà il lavoro prodotto andrebbe diminuendo a causa della riduzione del pressione.

$$\begin{aligned} U(T) &= \text{costante} \\ \Delta U &= Q - L \\ Q &= L \end{aligned}$$

Si deduce che occorre ripetere ciclicamente il processo, ma in tal modo si arrebbiere lavoro totale nullo, poiché nel ripetere il gas da B ad A, faccio lavoro opposto a quello fatto precedentemente.

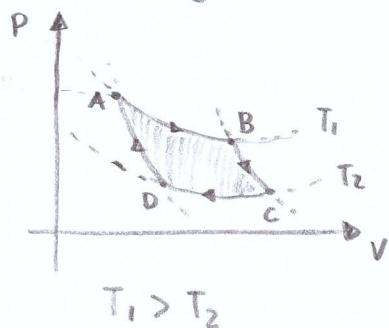


Una macchina termica quindi per produrre lavoro con continuità deve utilizzare due diverse sorgenti in modo che nella trasformazione circolare il lavoro totale sia diverso da zero.

## • MACCHINA TERMICA DI CARNOT (CICLO DI CARNOT)

Dalle precedenti conclusioni abbiamo ottenuto che una macchina per produrre lavoro con continuità deve operare ciclicamente e usare due sorgenti a temperature diverse.

Il ciclo su cui si basano tali macchine prende il nome di **CICLO DI CARNOT** ed è il seguente: (Considerando un gas ideale)



1- **(A  $\rightarrow$  B) ISOTERMA:** In tale trasformazione si fa espandere il gas mantenendolo alla temperatura della sorgente  $T_1$ , prendendo quindi una quantità di calore  $Q_1$  da essa.

2- **(B  $\rightarrow$  C) ADIABATICA:** Si rimuova la sorgente  $T_1$  e si isoli il gas in modo che non vi siano scambi di calore con l'esterno. In tale trasformazione il gas si espanderà raffreddandosi fino alla temperatura  $T_2$ . (Uguale alla 2° sorgente)

3- **(C  $\rightarrow$  D) ISOTERMA:** Si ponga il gas a contatto con la seconda sorgente avente la sua stessa temperatura ( $T_2$ ). Lo si comprima in modo da ridurne il volume, per farlo rimanere a temperatura costante, la sorgente  $T_2$  assorbe una quantità di calore  $Q_2$ .

4- **(D  $\rightarrow$  A) ADIABATICA:** Si isoli nuovamente il gas e lo si comprima in modo da portarlo alle condizioni iniziali.

### - Lavoro

Si osservi che non tutto il calore preso da  $T_1$  ( $Q_1$ ) è stato trasformato in lavoro, poiché una parte ( $Q_2$ ) è stata ceduta alla seconda sorgente  $T_2$ .

Il lavoro totale è rappresentato nel ciclo dalla area racchiusa tra le linee.

Dato che è una trasformazione ciclica, l'energia interna  $U$  non cambia complessivamente. Dal 1° principio si ha:

$$0 = (Q_1 - Q_2) - L$$

Calore preso      Calore ceduto

$$L = Q_1 - Q_2$$

$$\Delta U = Q - L$$

## • RENDIMENTO CICLO DI CARNOT

### - Caso generale

Si definisce rendimento: di una macchina termica

$$\eta = \frac{L}{Q}$$

Ovvero e' il rapporto tra il lavoro eseguito e il calore Q assorbito

Nel caso del ciclo di Carnot:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}}$$

Il rendimento non puo' mai essere uguale ad 1, poche'  $Q_2$  deve necessariamente essere maggiore di zero

### - Caso di un gas ideale

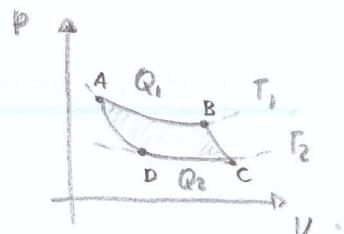
Calcoliamo il rendimento della macchina di Carnot nel caso si usi un gas ideale.

Dato che nei tratti AB (assorbe  $Q_1$ ) e CD (cede  $Q_2$ )

si ha una trasformazione ISOTERMA, l'energia interna del gas non varia ( $\Delta U = 0$ ) dal 1° principio nei due casi, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = L_1 = nRT_1 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \\ Q_2 = L_2 = nRT_2 \ln \left( \frac{V_C}{V_D} \right) \end{array} \right.$$

Considero da D → C in modo che  $Q_2$  sia (+)



$$\Delta U = Q - L$$

$$L = \int P dV$$

$$PV = nRT$$

$$L_{ISOT} = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Considerano le relazioni tra PV iniziale e finale in ogni trasformazione (2 ISOTERME + 2 ADIABATICHE)

$$A \rightarrow B \quad P_A V_A = P_B V_B$$

$$C \rightarrow D \quad P_C V_C = P_D V_D$$

$$B \rightarrow C \quad P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$$

$$D \rightarrow A \quad P_D V_D^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

### GAS PERFETTI

#### • ISOTERME

$$PV = Cost$$

#### • ADIABATICHE

$$PV^\gamma = Cost$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Moltiplicando membro a membro, e semplificando si ottiene:

$$V_A V_C V_B^{\delta} V_D^{\delta} = V_B V_D V_C^{\delta} V_A^{\delta}$$
$$\frac{V_A V_C}{(V_A V_C)^{\delta}} = \frac{V_B V_D}{(V_B V_D)^{\delta}}$$

Quindi:

$$V_A V_C = V_B V_D$$
$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Di conseguenza  $\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$

Dividendo membro a membro le equazioni precedenti

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\begin{cases} Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) \end{cases}$$

Il rendimento è allora:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

$$\begin{cases} \eta = \frac{L}{Q} \\ \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \end{cases}$$

$$(T_1 > T_2)$$

## 2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il 2° principio è costituito da due enunciati che sono del tutto equivalenti

### KELVIN

Non è possibile realizzare una trasformazione in cui si trasformi una quantità di calore, estratto da una sorgente, in lavoro, come unico risultato finale.

OSS

Infatti nel ciclo di Carnot, oltre ad estrarre calore, lo si cede alla seconda sorgente.

### CLAUSIUS

Non è possibile realizzare una trasformazione in cui si trasferisce una quantità di calore da un corpo  $T_1$  ad uno a temperatura maggiore  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) come unico risultato finale.

OSS

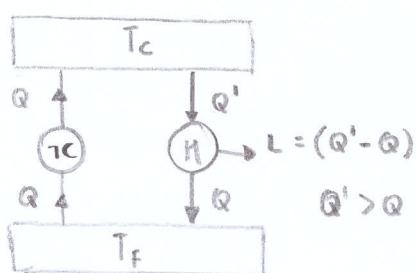
Tale processo è possibile se contemporaneamente viene speso lavoro

## • DIMOSTRAZIONE UGUAGLIANZA ENUNCIATI

Possiamo dimostrare la loro uguaglianza, negando uno e vedere che viene negato anche l'altro.

### - Negazione Clausius

Neghiamo Clausius considerando una macchina termica  $T_C$  (hot clausius) che trasferisce calore da una sorgente "fredda"  $T_F$  ad una piu' "calda"  $T_C$ .



( $T_C = \text{Negazione Clausius}$ )

$$T_C > T_F$$

presa dalla sorgente  $T_C$  in lavoro andando a negare kelum

La quantita' di calore trasferito e'  $Q$ .

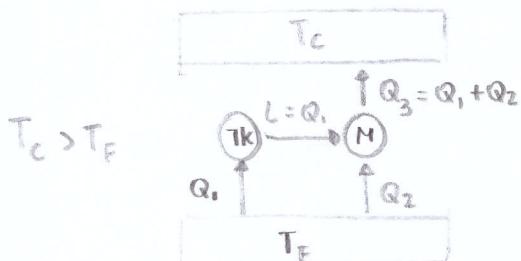
Ora prendiamo una seconda macchina  $M$  che prenda calore  $Q' > Q$  dalla sorgente  $T_C$ , una parte ( $= Q$ ) la cede a  $T_F$ , l'altra ( $Q' - Q$ ) lo usi per eseguire lavoro  $L$ .

Poiche'  $T_F$  complessivamente non scambia calore, si ha come unico risultato finale la trasformazione di una quantita' di calore presa dalla sorgente  $T_C$  in lavoro andando a negare kelum

$$T_{\text{Clausius}} \Rightarrow T_{\text{kelum}}$$

### - Negazione kelum

Consideriamo una macchina  $T_K$  che converte una quantita' di calore  $Q_1$  estratto da  $T_F$  completamente in lavoro  $L = Q_1$ , andando quindi contro kelum.



Una seconda macchina  $M$  subisca il lavoro  $L$  e quindi riceva una quantita' di calore  $Q_1$  da  $T_K$ , inoltre prelevi  $Q_2$  da  $T_F$  e ceda  $Q_3 = Q_1 + Q_2$  a  $T_C$ .

Si ha quindi come unico risultato finale il passaggio di calore da  $T_F$  a  $T_C$  negando Clausius dato che  $T_F < T_C$

$$T_{\text{kelum}} \Rightarrow T_{\text{Clausius}}$$

Si ha quindi l'uguaglianza

$$\text{kelum} \Leftrightarrow \text{Clausius}$$

□

## TEOREMA DI CARNOT

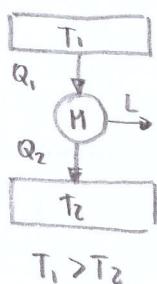
Il teorema di Carnot dice che fissate due sorgenti termiche, TUTTE le macchine termiche reversibili hanno il medesimo rendimento. Inoltre le macchine irreversibili non hanno rendimento maggiore di quelle reversibili.

### • DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo entrambe le affermazioni:

#### - Uguaglianza rendimento.

Consideriamo due macchine reversibili, ognuna lavora nel seguente modo:



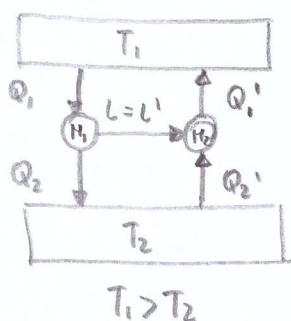
I rendimenti saranno:

$$\eta_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta_2 = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} \quad | \eta = \frac{L}{Q}$$

Supponiamo per assurdo che

$$\eta_1 > \eta_2$$

Per dimostrare che c'è un assurdo facciamo lavorare la 1° macchina direttamente e la 2° inversamente



Le facciano lavorare in modo tale che  $L = L'$   
e quindi

$$Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2$$

Dall'assurdo si ha:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} \quad (Q'_1 > Q_1)$$

Sostituendo  $Q'_1$  e  $Q_1$  si ha (in  $Q'_1 > Q_1$ )

$$(Q_1 - Q_2) + Q_2' > (Q'_1 - Q'_2) + Q_2 \quad (Q'_2 > Q_2)$$

Da tale disegualità risulta come unico risultato finale il trasferito

$$\begin{cases} Q'_1 > Q_1 \\ Q'_2 > Q_2 \end{cases} \quad \text{di calore da una sorgente più fredda } T_2 \text{ a uno più calda } T_1, \text{ in contrasto con il 2° principio}$$

Abbiamo quindi dimostrato che il rendimento  $\eta_1$  non puo' essere maggiore di  $\eta_2$ , per dimostrare che  $\eta_1 = \eta_2$  occorre negare che  $\eta_2$  sia maggiore di  $\eta_1$ , per farlo basta invertire i ruoli delle macchine. Alla fine si ottiene:

$$\eta_1 = \eta_2$$

□

### - Rendimento macchine irreversibili

Si consideri il caso precedente in cui la prima macchina che lavora direttamente sia irreversibile e la seconda sia reversibile.

Come fatto precedentemente si ricava che  $\eta_1 = \eta_{IRR}$  non e' maggiore di  $\eta_2 = \eta_{REV}$ . Poiche' la prima macchina non puo' lavorare inversamente NON e' possibile dimostrare l'altra diseguaglianza, si ha quindi

$$\eta_{IRR} \leq \eta_{REV}$$

□

### ENTROPIA

In natura qualsiasi sistema fisico se lasciato a se' stesso subisce spontaneamente delle variazioni che lo portano ad uno stato di equilibrio, man mano che si avvicina all'equilibrio esso perde la capacita' di compiere lavoro. Si prende come esempio l'espansione spontanea di un gas, quest'ultimo una volta "diffuso" nell'ambiente perde la propria Capacita' di compiere lavoro, nessun processo spontaneo lo riporterà in un contenitore

Vogliano quindi introdurre una nuova funzione di stato ENTROPIA che data la sua differenza tra i due stati (iniziale e finale) di un sistema ci dia indicazioni riguardo la perdita della capacita' di compiere lavoro

L'entropia poiché è una funzione di stato dipende solo dagli stati iniziali e finali e non dalla particolare trasformazione, tuttavia siamo in grado di calcolare tale variazione solo per trasformazioni reversibili.

Prendiamo il caso del ciclo di Carnot basato su un gas ideale si era ricavato

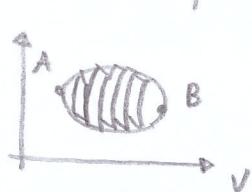
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \right.$$

Poiché  $Q_1$  è il calore assorbito dal sistema dalla sorgente  $T_1$  ( $+Q_1$ ) e  $Q_2$  è il calore ceduto alla sorgente  $T_2$  ( $-Q_2$ ), considerando i segni si ha:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

Qualsiasi trasformazione reversibile CICLICA può essere considerata come data dalla somma di cicli di Carnot infiniti ognuno dei quali dà un contributo:



$\frac{dQ}{T} \rightarrow$  Calore scambiato

$T \rightarrow$  Temperatura sorgente con cui si scambia calore

Si può quindi scrivere in generale per una trasformazione reversibile

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \oint \frac{dQ}{T} \rightarrow \text{Integrale di Clausius}$$

Con tale espressione si è espresso il concetto che la macchina di Carnot non ha varato la propria capacità di compiere lavoro.

#### • CIRCUITAZIONE NEL CASO GENERALE (INTEGRALE DI CLAUSIUS)

In generale la circuitazione è data:

$T =$  Temperatura della sorgente

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

$= 0$  TRASF REVERSIBILE

$< 0$  TRASF IRREVERSIBILE

La circuitazione dell'entropia è nulla se avvengono trasformazioni reversibili, altrimenti è minore di zero

## DEFINIZIONE ENTROPIA

L'entropia di un sistema in un determinato stato è:

$$ds = \frac{dq}{T}$$

$dq$  = Calore scambiato

$T$  = Temperatura del sistema

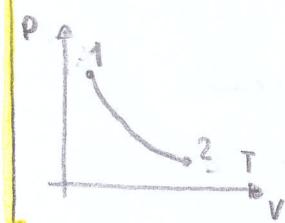
La sua variazione per una trasformazione reversibile è data:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T} \quad | \begin{array}{l} \text{Passaggio da } 1 \rightarrow 2 \\ \text{reversibile} \end{array}$$

## INDIPENDENZA DALLA TRASFORMAZIONE

Vediamo ora il fatto che la variazione dell'entropia del sistema non dipende dalla trasformazione. Calcoliamo  $\Delta S$  per un ISOTERMA reversibile e irreversibile.

Reversibile



$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dq}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dq = \frac{1}{T} Q_{12}$$

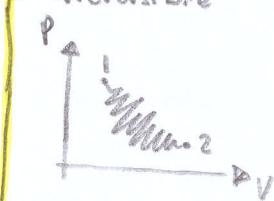
$$\Delta S = \frac{L_{12}}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Delta U = Q - L$$

$$Q = L$$

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Irreversibile



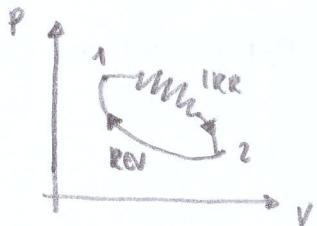
Poiché nel calcolo di  $\Delta S$  contiamo solo gli stati 1 e 2 possiamo pensare tale trasformazione come se fosse reversibile

Ricavando quindi il medesimo valore

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

## DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS

Consideriamo un trasformazione ciclica in cui passo irreversibilmente da 1 a 2 e poi reversibilmente da 2 a 1.



Passo scomponere l'integrale di Clausius in due parti:

$$\int_{1 \text{ IRR}}^2 \frac{dQ}{T} + \int_{2 \text{ REV}}^1 \frac{dQ}{T} \leq 0$$

INT CLAUSIUS

$$\oint \frac{dQ}{T}$$

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Nel caso della trasformazione reversibile posso sostituire l'integrale con la variazione di entropia

$$\int_{1 \text{ (IRR)}}^2 \frac{dQ}{T} + (S_1 - S_2) \leq 0$$

$$\boxed{\int_{1 \text{ (IRR)}}^2 \frac{dQ}{T} \leq S_2 - S_1}$$

$$\Delta S = \int_{\text{CREV}}^2 \frac{dQ}{T}$$

### • CASO TRASFORMAZIONE ADIABATICA

Consideriamo il nostro sistema isolato e che quindi non scambi calore con l'esterno. La diseguaglianza di Clausius e' quindi

$$0 \leq S_2 - S_1$$

$$\boxed{S_2 \geq S_1}$$

Cio' significa che in generale l'entropia di un sistema isolato nella realtà aumenta sempre, non vi e' variazione solo nel caso in cui la trasformazione e' completamente reversibile

## VARIAZIONE TOTALE DI ENTROPIA (SISTEMA + UNIVERSO)

### • TRAZFORMAZIONE REVERSIBILE

Se si esegue una trasformazione reversibile passando dallo stato 1 allo stato 2, il sistema si "appoggia" all'universo circostante.

Quindi mentre il sistema varia la propria entropia, l'universo fa lo stesso ma la sua variazione è uguale ed opposta a quella del sistema  $\Delta S_{\text{TOT}} = \Delta S_{\text{SIST}} - \Delta S_{\text{UN}} = 0$

Si ha quindi una variazione totale di entropia NULLA considerando (Sistema + Universo.)

$$\boxed{\Delta S_{\text{TOT}} = 0}$$

### • TRAZFORMAZIONE IRREVERSIBILE

In tal caso il sistema varia naturalmente il proprio stato senza il supporto dell'universo. Il sistema quindi varia la propria entropia al contrario dell'universo che non subisce variazione.

Quindi si ha una variazione totale di entropia maggiore di zero

$$\Delta S_{\text{TOT}} = \Delta S_{\text{SIST}}$$

$$\boxed{\Delta S_{\text{TOT}} > 0}$$

## VARIAZIONE DI ENTROPIA DI UN GAS IDEALE

Vediamo come calcolare la variazione di Entropia nelle diverse trasformazioni studiate (Tali risultati sono validi anche per trasformazioni irreversibili.)

In generale per un gas ideale:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{du + dv}{T} = \int_1^2 \frac{nC_V dT + P dv}{T}$$

$$= \int_1^2 \frac{n C_V dT}{T} + \frac{n R dv}{v} \quad | \quad PV = NRT$$

$$\boxed{\Delta S = n C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

$$du = dQ - dU$$

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

Se  $C_V$  e' il calore molare, per ricavare l'intera variazione di  $du$  per il gas, occorre moltiplicare per  $n$  (numero di mol)

- TRASFORMAZIONE ISOTERMA

In tal caso nel c'e' variazione di temperatura e quindi  $T_2 = T_1$

$$\boxed{\Delta S_T = n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

ISOTERMA

- TRASFORMAZIONE ISOCORA

Il volume e' costante  $V_2 = V_1$

$$\boxed{\Delta S_v = n C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

ISOCORA

- TRASFORMAZIONE ISOBARA

In tale trasformazione si ha la seguente relazione:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}}$$

Quindi:

$$\Delta S_p = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \cdot [n(C_V + R)]$$

$$\boxed{\Delta S_p = n C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

ISO BARA

$$C_p = C_V + R$$

## • TRASFORMAZIONE ADIABATICA

In tal caso  $dQ=0$  quindi:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0$$

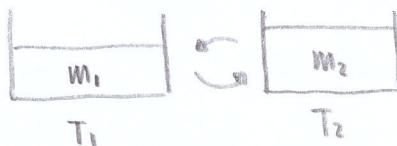
$$\boxed{\Delta S = 0}$$

ADIABATICA

## VARIAZIONE DI ENTROPIA NEL MESCOLAMENTO DI DUE LIQUIDI

Considerano due liquidi a temperature diverse  $T_1, T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) mescolabili insieme raggiungono una temperatura  $T$  intermedia.

Vogliano calcolare la variazione di entropia, naturalmente



essendo lo scambio di calore in questo  
spontaneo e quindi irreversibile ci  
aspettiamo che la variazione totale sia  
maggiorre di zero.

= 1° Bacinella ( $T_1 \rightarrow T$ )

$$\Delta S_{B_1} = \int_{T_1}^T \frac{dQ}{T} = C_1 m_1 \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} \quad \Delta S_{B_1} = C_1 m_1 \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} dQ = C_m dT \\ \text{Calore Specifico} \end{array} \right.$$

= 2° Bacinella ( $T_2 \rightarrow T$ )

$$\Delta S_{B_2} = C_2 m_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} \quad \Delta S_{B_2} = C_2 m_2 \ln\left(\frac{T}{T_2}\right)$$

• ESEMPIO ( $C_1 m_1 = C_2 m_2$ )  $T_1 = 100$ ;  $T_2 = 50$

Ricaviamo  $T$ :

$$-Q_1 = +Q_2 \quad -C_1 m_1 (T - T_1) = C_2 m_2 (T - T_2)$$

Calore Ceduto

$$T_1 - T = T - T_2 \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 75 \text{ K}$$

La variazione di entropia totale sarà:

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{B_1} + \Delta S_{B_2} = C_m \left[ \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T}{T_2}\right) \right] = C_m \cdot 0,118 \frac{J}{K}$$

Poiché  $C_m > 0$ , la variazione totale di entropia è positiva come ci aspettavamo.

## - Verifica diseguaglianza di Clausius

Troviamo verificata anche la diseguaglianza di Clausius.

Pianiamo come esempio la bacchetta "fredda"  $T_2$ :

$$B_2 \text{ assorbe calore } +Q = cm(T - T_2) = cm 25$$

Se consideriamo  $cm=1$ :

$$+Q = 25 \text{ J}$$

Quindi l'integrale di Clausius è pari a

$$\oint \frac{dQ}{T_{\text{SORG}}} = \frac{Q}{T_1} = 0,25 \text{ J/K} \quad \left| \begin{array}{l} \text{In questo caso la} \\ \text{sorgente è } T_1 \end{array} \right.$$

La variazione di entropia per la 2° bacchetta è:

$$\Delta S_{B_2} = C_2 m_2 \ln \left( \frac{T}{T_2} \right) = 0,406 \text{ J/K}$$

E' quindi verificata la diseguaglianza di Clausius

$$0,25 < 0,406$$

DISEGUAGLIANZA DI CLAUSIUS

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq \Delta S$$

## ELETROSTASICA

Studio di cariche elettriche in condizioni statiche

### LEGGE DI COULOMB

Dall'esperienza si ricava che una carica 2 subisce una forza da un'altra carica 1 relazionata nel seguente modo

$$K_0 \approx 8,99 \cdot 10^9 \quad F_2 = K_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$


Le proprietà fondamentali della legge di coulomb sono:

- La forza elettrostatica è di tipo centrale, e quindi conservativa
- L'intensità dipende inversamente dal quadrato della distanza
- Vi è la sovrapposizione degli effetti, ovvero la forza che subisce una carica è data dalla somma delle singole forze esercitate dalle altre cariche

### UNITÀ DI MISURA DI UNA CARICA

L'unità di misura è chiamata COULOMB ed è definita:

$$q = i t \quad | i \rightarrow \text{corrente elettrica [A]}$$

1 coulomb è pari all'è quantità di cariche che passano in un secondo in un filo filiforme percorso da una corrente di 1 ampere

### FORMA ALTERNATIVA DELLA LEGGE DI COULOMB

Per semplificare i calcoli nella pratica (applicazione th Gauss) si pone la legge di Coulomb nella seguente forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Dove:

$$\epsilon_0 \rightarrow \text{Costante dielettrica del vuoto} \quad \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$$

## PROPRIETA' DI UN SISTEMA DI CARICHE

### QUANTIZZAZIONE

Si ricava dall'espressiona che qualiasi particella carica ha una carica proporzionale (in valore assoluto) a quella dell'elettrone:

$$q = n e \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$

Quindi una particella carica ha una carica sempre quantizzata e che non puo' assumere qualsiasi valore.

### CONSERVAZIONE DELLA CARICA TOTALE

Un sistema ISOLATO formato da particelle cariche, mantiene invariata la carica totale.

### PARTICELLA ED ANTI PARTICELLA

La precedente proprietà è legata al fatto che ad ogni particella carica corrisponde un'altra "antiparticella" di segno opposto.

### RELATIVISTICAMENTE INVARIANTE

Osservatori posti in diversi sistemi di riferimento (inerti o non) misurano la medesima carica.

## ENERGIA POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE

Poiché la forza tra due cariche è conservativa (forza di tipo centrale) si può introdurre la funzione potenziale fissando una carica  $q_1$  e calcolare l'energia potenziale che ha un'altra carica  $q_2$  rispetto ad essa.

$$U(x, y, z) = - \int_{P_0}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \text{Costante}$$

Ponendo il punto di riferimento  $P_0$  ad  $r = \infty$  e quindi la costante nulla si ricava

$$U(x, y, z) = - \int_{P_0}^P \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} + \text{Cost} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \quad \left| \begin{array}{l} dr = \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} \\ \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = dl \end{array} \right.$$

Quindi:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Stesso ragionamento lo si fa con un sistema di  $n$  cariche:

• Esempio 3 cariche:  $(q_1, q_2, q_3)$

Devo quindi portare la carica  $q_1$  vicino la carica  $q_2$  ( $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ ) e poi la carica  $q_3$  vicino alle cariche  $q_1$  e  $q_2$  ( $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ )

Ho quindi in totale:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

•  $N$  CARICHE

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_1^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Il fattore  $\frac{1}{2}$  e' dovuto al fatto che nella sommatoria conto due volte:

$\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$  e  $\frac{q_2 q_1}{r_{21}}$  che sono equivalenti.

Campo ELETTRICO

Un sistema di cariche genera intorno a se' un campo elettrico il quale esercita un'azione su di una carica esterna proporzionale ad essa:

$$F = q E_0 \quad E_0 \rightarrow \text{Campo elettrico generato dal sistema di cariche}$$

Per misurare il campo elettrico  $E_0$  si deve utilizzare una carica  $q$  molto piccola in modo da non influenzare il campo:

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} \quad [N/C]$$

OSS

[Nella realtà  $q$  non potra' mai arrivare a zero per la proprietà della quantizzazione di una carica.]

Per determinare le azioni che un sistema di cariche esercita su una nuova carica posta nel campo elettrico, è necessario conoscere quest'ultimo che sarà dipendente dalla struttura del sistema.

- CAMPIONE ELETTRICO DI UNA CARICA Q

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$Q \rightarrow$  Carica che genera il campo  
 $q \rightarrow$  Carica di prova

- CAMPIONE ELETTRICO DI UN SISTEMA DI CARICHE

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i \right) \cdot \frac{1}{q}$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left( \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right)$$

- CAMPIONE ELETTRICO IN SISTEMI AVENTI DISTRIBUZIONI CONTINUE

In questo caso si può introdurre la DENSITÀ DI CARICA:

$$\rho = \frac{dq}{dv} \quad dv \rightarrow \text{Volume infinitesimo}$$

Il campo è quindi dato:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dv$$

Stesso ragionamento può essere fatto per distribuzioni lineari o superficiali:

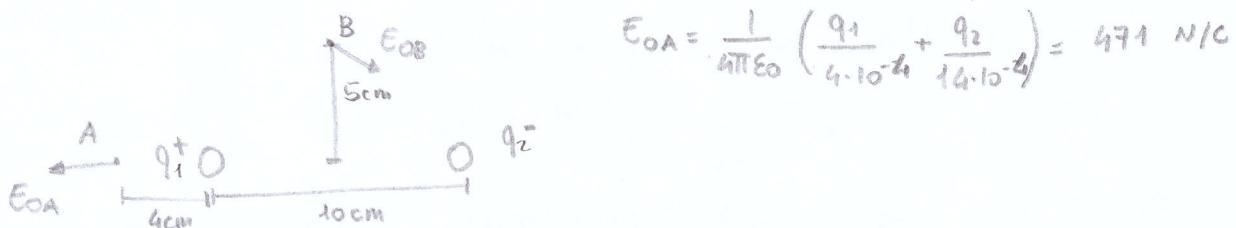
$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

## CAMPIONE ELETTRICO IN DIVERSE DISTRIBUZIONI

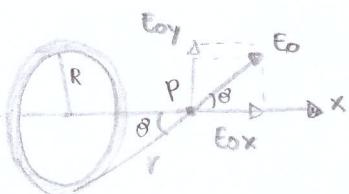
### • DISTRIBUZIONE DISCRETA DI DUE CARICHE

In tale esempio si vuole sottolineare le difficoltà nei calcoli vettoriali anche nei casi più semplici ( $q_1 = 10^{-10} \text{ C}$ ;  $q_2 = -2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ )



Per il calcolo di

### • ANELLO UNIFORME



In tal caso il campo  $E_0$  nel punto  $P$  è dato solo dalla componente  $E_{ox}$ , dato che le componenti  $E_{oy}$  complessivamente si annullano.

Consideriamo l'anello avente una carica totale uniforme  $Q$

$$|E_0| = |E_{ox}| = \int dE_x = \int dE_0 \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{\cos \theta}{r^2} dq$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r^2}$$

In tal caso  $r$  e  $\theta$  sono costanti

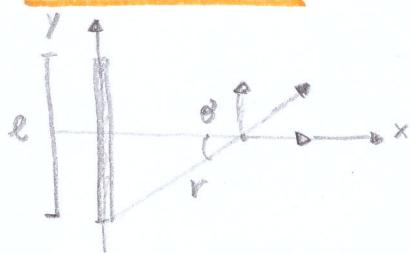
$$|E_{ox}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int_0^Q dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} Q$$

poiché  $X = \cos \theta \cdot r$  e  $r = \sqrt{R^2 + X^2}$

$$E_{ox} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{X}{r^3} Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + X^2)^{3/2}} \frac{X}{r}$$

$$E_{ox} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + X^2)^{3/2}} \frac{X}{r}$$

### ASTA UNIFORME



Come nel caso precedente le componenti  $E_{0y}$  nella somma si annullano, si ha:

$$|E_0| = E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{\cos\theta}{r^2} dQ$$

Usando la distribuzione lineare:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\cos\theta}{r^2} \lambda dy \quad | \lambda = \frac{dQ}{dy}$$

In tal caso  $\theta$  e  $r$  non sono costanti, per risolvere l'integrale conviene portare tutto in relazione ad  $\theta$ .

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\cos\theta}{r^2} \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$$

Sostituisco  $r$ : ( $x = \cos\theta \cdot r$ )

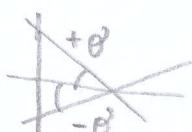
$$\left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} x \\ \theta \\ r \end{array} \\ \begin{array}{c} y \\ \tan\theta \\ \frac{y}{x} \end{array} \end{array} \right\| \begin{cases} y = \sin\theta \cdot r \\ x = \cos\theta \cdot r \end{cases} \quad \frac{y}{x} = \tan\theta \quad \frac{dy}{dx} = \left( \frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta$$

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\cos\theta}{\left(\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)} \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \cos\theta d\theta$$

Quindi:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left[ \sin\theta \right]_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left( \sin(\theta_{max}) - \sin(\theta_{min}) \right)$$

Poiché  $\theta_{max} = -\theta_{min}$



$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left( \sin(\theta) - \sin(-\theta) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} 2 \sin\theta$$

Togliendo l'angolo:

$$\frac{l}{2x} = \tan\theta \quad \theta = \arctan\left(\frac{l}{2x}\right)$$

$$\left| \begin{array}{c} x \\ \theta \\ r \end{array} \right\| \frac{\frac{l}{2}}{x} = \tan\theta$$

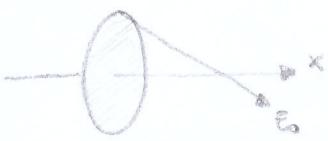
$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \cdot 2 \sin\left(\arctan\left(\frac{l}{2x}\right)\right)$$

Se l'asta è infinita:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{x}$$

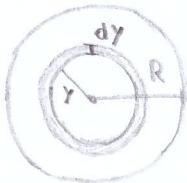
$$\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \right.$$

## • DISCO UNIFORME



In tal caso per calcolare  $E_0$  consideriamo il disco come formato da infinitesimi anelli.

Ogni anello avrà la seguente carica infinitesima  $dQ$ :



$$dQ = \sigma 2\pi y \cdot dy$$

$$\sigma = \frac{dQ}{ds} = \frac{dQ}{2\pi y \cdot dy}$$

Spessore  
disco

Il campo  $E_0$  è quindi dato:

$$E_{0x} = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dQ$$

ANELLO

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sigma 2\pi y dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} y dy$$

Risolviamo l'integrale per sostituzione:

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{x}{t^{3/2}} \frac{1}{2} dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left[ -\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t \\ 2y dy = dt \end{cases}$$

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left( -\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)$$

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow t=x^2 \\ y=R \Rightarrow t=x^2+R^2 \end{cases}$$

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)$$

Se  $R \gg x$  (Piano infinito)

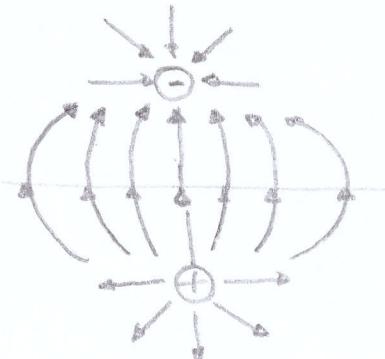
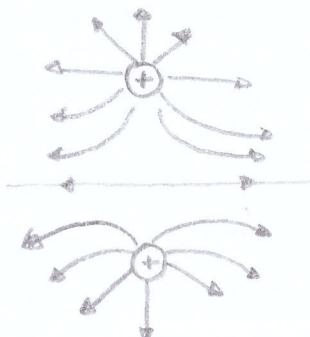
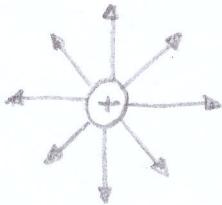
$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- Se  $x \gg R$

$$E_{0x} = 0$$

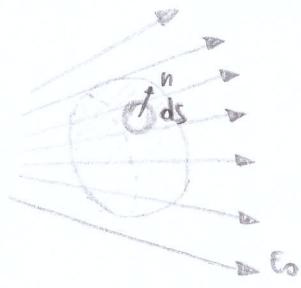
## RAPPRESENTAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO

Un utile rappresentazione del campo elettrico e' data dall'uso di linee di forza:



In tale rappresentazione le linee di forza indicano l'intensità del campo in una superficie perpendicolare alle linee. Le linee di forza sono uscenti dalle cariche positive ed entranti in quelle negative.

## FLUSSO DI UN VETTORE



Si definisce il flusso elementare di un vettore attraverso una superficie infinitesima als:

$$d\phi_s(E_0) = E_0 \cdot \hat{n} ds$$

$\hat{n}$  → Versore normale alla Superficie

Per l'intera superficie

$$\phi_s(E_0) = \int_S E_0 \cdot \hat{n} ds$$

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA (Th GAUSS)

Nel caso che nel calcolo del flusso di un vettore la superficie e' chiusa si ha il seguente risultato:

$$\phi_s(E_0) = \oint_S E_0 \cdot \hat{n} ds = \int_V \text{div}(E_0) dV$$

$V$  → Volume racchiuso dalla superficie

, Dove  $\text{div}(E_0)$  e' la divergenza del vettore del campo  $E_0$

$$\text{div}(E_0) = \nabla \cdot E_0 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$$

$$\text{div}(E_0) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

## Dimostrazione Th Gauss

Immaginiamo la superficie chiusa formata da cubi infinitesimi di volume ( $d\tau = dx dy dz$ ) e ricaviamone il flusso infinitesimo:

Il flusso totale sarà dato dalla somma dei flussi uscenti dalle 6 facce.

Prendiamo in esame due facce, quelle perpendicolari all'asse  $y$  (1 e 2) con i relativi versori normali  $\hat{n}$ .

$$d\phi_1 = -Ey ds = -Ey dx dz$$

$$d\phi_2 = Ey ds = \left(Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz$$

Il flusso tramite le due facce 1 e 2 è quindi:

$$\begin{aligned} d\phi_{12} &= -Ey dx dz + \left(Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz \\ &= \left(-Ey + Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz = \frac{\partial Ey}{\partial y} dz \end{aligned}$$

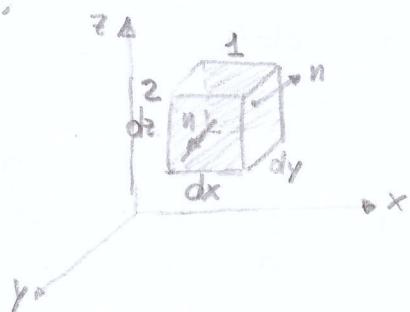
Sommendo tutte le 6 facce:

$$d\phi_s(E_0) = \left( \frac{\partial Ex}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial Ez}{\partial z} \right) dz = \text{div}(E_0)$$

□

### OSS

Nella somma di tutti gli infinitesimi flussi uscenti dai cubi si nota che i cubi interni hanno flusso totale nullo e quindi si ottiene solo il flusso uscente dalla superficie  $s$ .



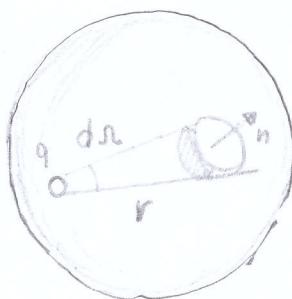
### DIFERENZIALE

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0)$$

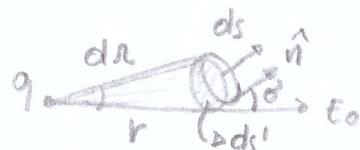
$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} dx$$

## LEGGE DI GAUSS

Vogliano ora ricavare il flusso uscente da una superficie chiusa contenente una carica elettrica.



Individuiamo la carica  $q$  mediante un cono infinitesimo avente un angolo solido con  $q$  pari a  $d\Omega$ , ricaviamo quindi il flusso infinitesimo passante per la superficie piana del cono pari alla proiezione della superficie della sfera



$$d\phi_s(E_0) = E_0 \cdot \hat{n} \, ds = E_0 \, ds \cos\theta = E_0 \, ds' = E_0 \, r^2 \, dr \quad | \quad ds' = r^2 \, dr$$

$$d\phi_s(E_0) = \frac{1}{4\pi E_0} \frac{q}{r^2} \, r^2 \, dr = \frac{1}{4\pi E_0} q \, dr$$

Per l'intera superficie:

$$\Phi_s(E_0) = \int_S E_0 \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi E_0} q \, dr = \frac{q}{4\pi E_0} \int_0^{4\pi} dr$$

$$\boxed{\Phi_s(E_0) = \frac{q}{E_0}}$$

Si ricava quindi che la distanza o la dimensione della superficie, contenente una carica, non influenza il flusso totale.

OSS

Nel caso in cui la carica sia ESTERNA alla superficie il flusso totale su di essa è nullo

## SISTEMI DI CARICHE

### - Caso discreto

$$\boxed{\Phi_s(E_0) = \sum \frac{q}{E_0}}$$

### - Caso continuo

$$\boxed{\Phi_s(E_0) = \frac{1}{E_0} \int_0^Q dq = \frac{1}{E_0} \int_V \rho \, dv} \quad | \quad \rho = \frac{dq}{dv}$$

- Legge di Gauss (in infinitesimi) (1° EQUAZIONE DI MAXWELL)

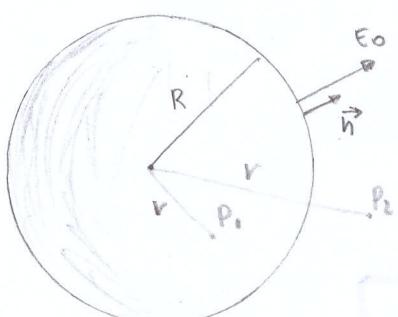
$$\oint_S \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}_0) \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V p \, dV$$

Da cui:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}_0) = \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{p}{\epsilon_0}$$

### APPLICAZIONI TEOREMA DI GAUSS

- CAMPIONE ELETTRICO DISTRIBUZIONE DI CARICHE A SIMMETRIA SFERICA



Per il teorema di Gauss possiamo considerare una qualsiasi superficie contenente la medesima. Conca, per semplicità usiamo una sfera.

Per il calcolo del campo elettrico si distinguono due casi:

-  $r \leq R$

$$E_0 / 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V p \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r p \, 4\pi r^2 \, dr$$

Se  $p$  costante:

$$E_0 = \frac{P}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{TOT} \cdot \frac{r}{R^3} \quad (r \leq R)$$

-  $r > R$

$$E_0 / 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R p \, 4\pi r^2 \, dr$$

Se  $p$  costante:

$$E_0 = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r^2} \quad (r > R)$$

$$\oint_S \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V p \, dV$$

Superficie sfera =  $4\pi r^2$

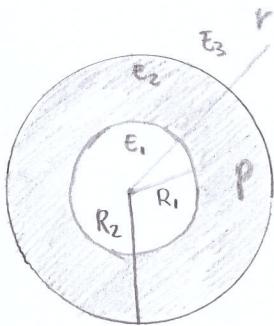
$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Considero la sfera divisa in gusci di volumi  $dV$

$$P = \frac{Q_{TOT}}{V} = \frac{Q_{TOT}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{Q_{TOT}}{Volume}$$

$\int_0^R p r^2 \, dr$  Poiché dopo di esso non vi è alcun contributo

## GUSCIO SFERICO CON INTERNO VUOTO



Consideriamo un guscio vuoto avente una distribuzione di carica  $p$ .

Calcoliamo i tre campi:  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  facendo variare  $r$ .

-  $0 \leq r \leq R_1$

$$E_1 4\pi r^2 = \int_C \frac{p}{\epsilon_0} dr \quad | E_1 = 0$$

-  $R_1 < r \leq R_2$

$$E_2 4\pi r^2 = \int_C \frac{p}{\epsilon_0} dr = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r p 4\pi r^2 dr$$

Se  $p$  costante:

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{p}{\epsilon_0} 4\pi \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right] \quad | E_2 = \frac{p}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

-  $r > R_2$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r p 4\pi r^2 dr$$

Se  $p$  costante:

$$E_3 = \frac{p}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_2^3}{r^2} - \frac{R_1^3}{r^2} \right) = \frac{Q_{TOT}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}$$

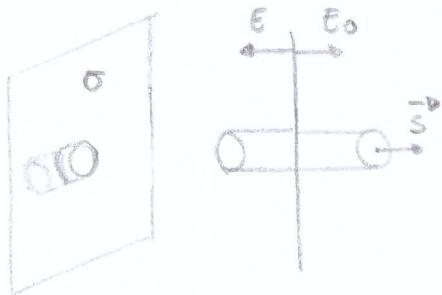
$$| E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r^2}$$

OSS

Nei punti del confine i campi si equilibrano:

$$E_1(R_1) = E_2(R_1) \quad E_2(R_2) = E_3(R_2)$$

### • PIANO CARICO



Per sfruttare il teorema di Gauss nel caso di una superficie carica, consideriamo il flusso passante per un cilindro posto in mezzo al piano.

Poiché le superfici laterali del cilindro sono perpendicolari al campo, esse non vanno considerate, prenderemo in considerazione solo le basi.

$$E_0 \cdot 2S = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

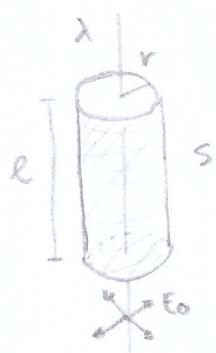
Devo considerare i flussi: entrambi uscenti dalle due facce

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q_{INT}}{S}$$

### • ASTA INFINITA

Per considerare il campo uniforme esamino il caso di un'asta infinita. Applico Gauss mettendo l'asta in un cilindro in modo da sfruttare la sua simmetria:



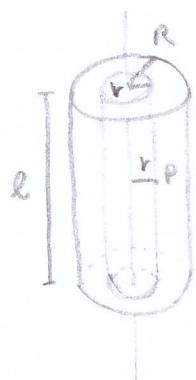
In questo caso consideriamo la superficie laterale, perpendicolare ad E₀.

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q_{INT}}{l}$$

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{l}{r}$$

## • BACCHETTA CON SPESORE



Vediamo come varia il campo  $E_0$  con  $r$ , nei due casi,  $p$  interno e esterno. La bacchetta ha una carica  $p$ . Anche in questo caso consideriamo la superficie laterale

-  $r \leq R$

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{p}{\epsilon_0} \pi r^2 l$$

$$E_0 = \frac{p}{2\epsilon_0} r$$

$$p = \frac{Q_{INT}}{V}$$

$$V = \pi r^2 l$$

-  $r > R$

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{p}{\epsilon_0} \pi R^2 l$$

$$E_0 = \frac{p}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

OSS

Nel caso  $r > R$  si può considerare la bacchetta carica come se la carica fosse concentrata in un'asta interna con densità lineica  $\lambda$

$$E_0 = \frac{p}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{r}$$

$$\lambda = \frac{Q}{l} ; p = \frac{Q}{V}$$

$$\lambda l = pV = p\pi R^2 l$$

$$p = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

## • DOPPIO STRATO PIANO

Consideriamo due piani paralleli, posti ad una distanza  $d$ .

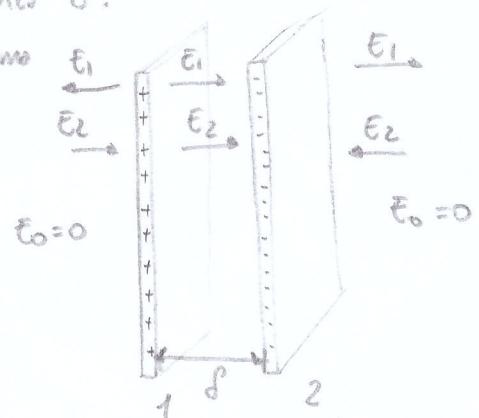
- I due piani hanno cariche opposte, ma hanno lo stesso  
densità  $\sigma$

Si ricava che all'esterno il campo totale  $E_0$  è nullo.

All'interno invece:

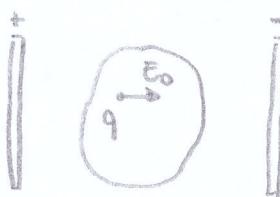
$$E_0 = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

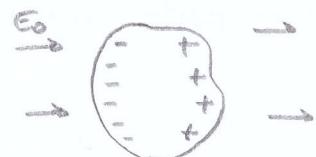


## CONDUTTORI ALL'EQUILIBRIO STATICO

Consideriamo un corpo di materiale conduttivo posto in un campo elettrico uniforme, esempio tra due piani:



Poiché il conduttore ha all'interno elettroni liberi le cariche si posizioneranno lungo la superficie.



Si avrà quindi che il campo elettrico all'interno sarà nullo, a conferma del colui vi è il teorema di Gauss.

$$E_0 \vec{s} = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 (\text{interno}) = 0$$

## Teorema di Coulomb

Se in altri modi carichiamo un conduttore, ad esempio per contatto, ricaviamo che il campo sulla sua superficie (o nelle immediate vicinanze) è pari:

$$E_0 ds = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0} \quad | \quad E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q_{INT}}{ds}$$

## POTENZIALE ELETROSTATICO

Poiché la forza di coulomb è conservativa abbiamo potuto introdurre l'energia potenziale che ha una carica rispetto ad un sistema di cariche.

Dato che anche il campo  $E_0$  è conservativo, consideriamo un'energia potenziale che ha una carica positiva unitaria rispetto ad  $E_0$ .

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B E_0 \cdot \mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_B = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{l} + \text{Cost} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) + \text{Cost}$$

Consideriamo un spostamento di 1 di una carica positiva unitaria.

$$\mathbf{f} = \frac{E_0}{q} = \frac{E_0}{1}$$

$$q = +1$$

Considerando  $r_A$  di riferimento posto a distanza infinita in cui il potenziale è nullo ( $\text{Cost} = 0$ ). Si ha:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}$$

La differenza di questo tipo di energia potenziale e' che si riferisce ad una carica unitaria e quindi ha le seguenti dimensioni

$$[V_0] = [\text{Joule/Coulomb}] = [J/C] = [\text{Volt}]$$

Come negli altri casi, la conoscenza dell'energia potenziale elettrostatica in ogni punto definisce il campo  $E_0$ :

$$E_0 = -\nabla V_0$$

OSS.

La seguente energia potenziale elettrostatica e' legata a quella precedentemente introdotta, mediante:

$$U(x, y, z) = q V_0(x, y, z)$$

## POTENZIALE ELETTROSTATICO DI DIVERSE DISTRIBUZIONI

- SINGOLA CARICA

Come ricavato nella definizione di Volt:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}$$

- SISTEMA DI CARICHE

In tal caso il potenziale nel punto B sara' dato dalla somma dei potenziali delle singole cariche:

- CASO DISCRETO

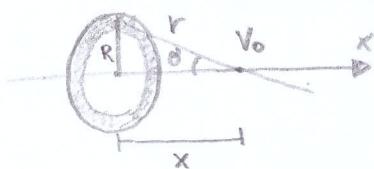
$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( \frac{q_i}{r_i} \right)$$

- CASO CONTINUO

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{1}{r} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T P \frac{1}{r} dc$$

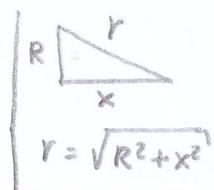
$$P = \frac{dq}{dc}$$

### • ANELLO CARICO



$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$



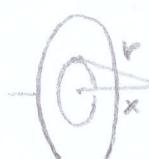
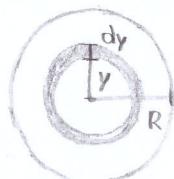
Poiché il campo  $E_0$  è relazionato al potenziale:

$$E_{0x} = - \frac{dV_0}{dx} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d(R^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -\frac{1}{2} (R^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \right)$$

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Stesso risultato ottenuto con la legge di Coulomb

### • DISCO CARICO



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r}$$

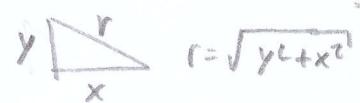
$$\sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{\partial q}{2\pi y \, dy}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi y \sigma}{r} dy = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi y \sigma}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{x^2}}^{\sqrt{x^2+R^2}} 2\pi \sigma dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2})$$

$$t = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y \, dy$$



Poiché  $\sqrt{x^2} = \pm x$  si hanno i seguenti risultati:

$$\begin{cases} V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} - y) & y > 0 \\ V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} + y) & y < 0 \end{cases}$$

Derrivando il potenziale, secondo  $x$ , si ricava il campo elettrico  $E_{0x}$  ricavato con la legge di Coulomb.

## DIPOLO ELETTRICO

Un dipolo e' costituito da un sistema formato da due cariche uguali di segno opposto poste ad una distanza  $\delta$  infinitesima.

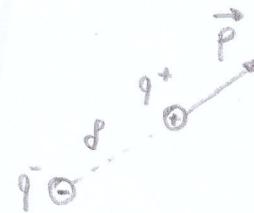
### • Momento di Dipolo

Un dipolo e' completamente descritto dal vettore MOMENTO DI DIPOLO

$$\vec{P} = q\vec{d}$$

[Orientando la distanza  $d$  da  $q^-$  a  $q^+$ ]

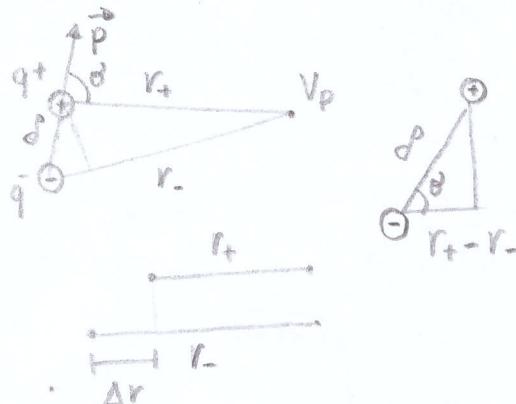
$$|P| = qd$$



### • POTENZIALE ELETTRICO GENERATO DAL DIPOLO

Calcoliamo il potenziale elettrico di un punto  $P$  distante  $r_i$  dalle cariche. In questo caso consideriamo distanze  $r_i$  molto maggiori rispetto alle mire distanze ( $r \gg \delta$ )

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$



$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_+ - r_-}{r_+ \cdot r_-}$$

$$\begin{cases} r_+ \approx r_- \approx r \\ r_+ \cdot r_- = r^2 \\ r_+ - r_- = \delta \cos\theta \end{cases}$$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos\theta$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|P| \cos\theta}{r^2}$$

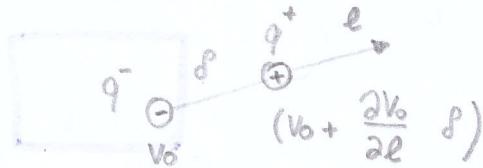
Poiche'  $\theta$  e' l'angolo tra il momento di dipolo e vettore  $r$ :

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

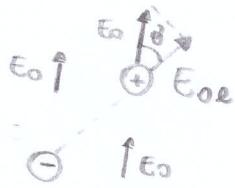
## • ENERGIA POTENZIALE DI UN DIPOLO IMMERSO IN CAMPO ELETTRICO

Nel caso in cui un dipolo e' immerso in un campo  $E_0$  esso ha un'energia potenziale  $U$ :

$$U = \sum U_i = -qV_0 + q\left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial l} \cdot l\right)$$



$$U = q\left(-V_0 + V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial l} \cdot l\right) = q \frac{\partial V_0}{\partial l} \cdot l = |P| \cdot (-E_{oe})$$



N.B.

$E_{oe}$  e' la proiezione del campo  $E_0$  sul vettore  $\hat{l}$  che ha la medesima direzione di  $\vec{P}$  ( $\hat{P} = \hat{l}$ )

$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$
$U = qV_0$
$ P  = qd$
$\frac{\partial V_0}{\partial l} = E_{oe}$

Quindi:

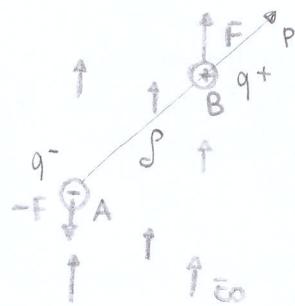
$$U = -|P| E_{oe} = -|P| \vec{E}_0 \cdot \hat{l} = -|P| \hat{P} \cdot \vec{E}_0$$

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0$$

$E_0 \rightarrow$  Campo in cui si trova il dipolo

## • MOMENTO DI UNA COPPIA SU UN DIPOLO

Se il dipolo si trova in un campo uniforme  $E_0$  (lo si puo' approssimare come uniforme date le piccole molte distanze tra le cariche), esso e' soggetto ad una coppia di forze (perche'  $F = qE_0$ ).



Dalla dinamica si ha che il momento di una coppia, indipendente dal polo, e' dato:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$

$\vec{d} \rightarrow$  distanza orientata delle due forze

In questo caso:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{d} \times q \vec{E}_0 = \vec{d} q \times \vec{E}_0$$

$\vec{F} = q \vec{E}_0$

$$M = \vec{P} \times \vec{E}_0$$

$\vec{P} = q \vec{d}$

## CAPACITA' ELETTRICA

Per capacità elettrica di un conduttore si intende la quantità di carica che è in grado di immagazzinare in relazione al proprio potenziale (rispetto al potenziale nullo).

$$C = \frac{q}{V}$$

$$[C] = [C/V] = [F]$$

### • CAPACITA' DI UNA SFERA

Consideriamo un conduttore carico isolato di forma sferica avente raggio  $R$  calcoliamo quindi la sua capacità:

$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$



## CONDENSATORE

Il condensatore è un sistema formato da due conduttori aventi la medesima carica ma di segno opposto ( $q^+$ ,  $q^-$ ). In questo caso si dice che vi è INDUZIONE COMPLETA dato che le linee di forza escono da una superficie ed entrano nell'altra.

Il nome "condensatore" deriva dal fatto che aggiungendo il secondo conduttore aumenta l'energia immagazzinata a pari di potenziale.

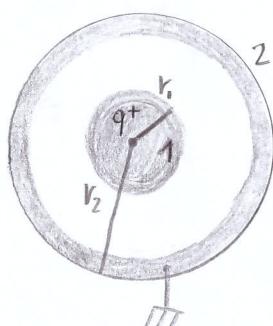
Nel caso di un condensatore la sua capacità si dà da:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{\Delta V}$$

$\Delta V \rightarrow$  Differenza di potenziale tra le due superfici

### • CONDENSATORE SFERICO

La sfera interna è carica positivamente, quella esterna è posta a terra, per ricavare la capacità occorre calcolare la differenza tra le due superficie, data dal potenziale nello spazio vuoto.



Per una sfera si ha: ( $r > R$ ) ( $R$  raggio sfera)

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Ricordiamo che il campo  $E_0$  è relazionato al potenziale:

$$E_0 = - \frac{dv}{dr}$$

Si ha quindi:

$$dv = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Per ricavare il potenziale tra lo spazio vuoto occorre sommare i potenziali infinitesimi  $dv$  da  $V_1$  a  $V_2$ .

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dv = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

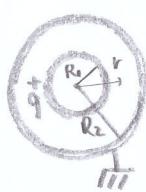
$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

La capacità è quindi:

$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

#### • CONDENSATORI CON CILINDRI COASSIALI



Consideriamo il caso di due cilindri coassiali, quello interno carico positivamente, quello esterno posto a massa. Se i raggi sono molto più piccoli rispetto alla lunghezza, le armature si possono reputare infinite e quindi il campo  $E_0$  uniforme e perpendicolare alla superficie.

Considero il cilindro diviso per strati contenenti una carica  $q_e$  ( $Q = q_e l$ ).

$$E_0 2\pi r = \frac{q_e}{\epsilon_0} \quad E_0 = \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$q_e \rightarrow$  Carica per unità di lunghezza  
 $Q = q_e l$

$$dv = -E_0 dr$$

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dv = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr = - \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = - \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln r_1 - \ln r_2 \right] = \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

La capacità sarà:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{q_e \cdot l}{\frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

### CONDENSATORE PIANO

Tale sistema è costituito da due piani posti ad una distanza molto minore rispetto alla loro superficie, così da poter considerare il campo  $E_0$  intorno uniforme.

All'interno si avrà:

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$dv = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dr$$

$$\sigma = \frac{q}{s}$$

$$E_0 = -\frac{dv}{dr}$$

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dv = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_2 - r_1) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$V_2 - V_1 = d$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{Q}{\frac{q}{s} \frac{d}{\epsilon_0}}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{s}{d}$$

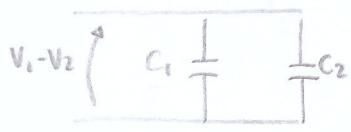
$$\sigma = \frac{q}{s}$$

### CONDENSATORI IN PARALLELO

Collegando due condensatori in parallelo (armature in comune) si aumenta la capacità. Ponendoli entrambi alla medesima differenza di potenziale si avranno le seguenti singole cariche:

$$q_1 = C_1(V_1 - V_2) \quad q_2 = C_2(V_1 - V_2)$$

La capacità complessiva sarà quindi:



$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q_1 + q_2}{V_1 - V_2} = C_1 + C_2$$

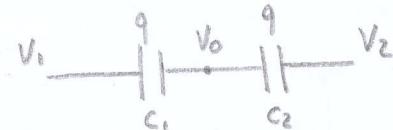
$$C = C_1 + C_2$$

## CONDENSATORI IN SERIE

Nel caso in cui si volesse ridurre la d.d.p. sulle armature di un singolo condensatore, lì si puo' collegare in serie in modo da ripartire la tensione; le armature essendo collegate avranno le medesime cariche ma saranno poste ad una d.d.p. diversa:

Le d.d.p. saranno:

$$V_1 - V_0 = \frac{q}{C_1} \quad V_0 - V_2 = \frac{q}{C_2}$$



$$| C = \frac{q}{V}$$

Il condensatore risultante avrà:

$$\frac{1}{C} = \frac{V_1 - V_2}{q} = \frac{V_1 - V_0}{q} + \frac{V_0 - V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

## ENERGIA IMMAGAZINATA IN CONDENSATORE

Partendo da condensatore scarico, si considera l'energia immagazzinata in un condensatore pari al lavoro necessario per portare le cariche dal potenziale più basso a quello più alto, contro la forza del campo elettrostatico.

Consideriamo tale processo scomposto in lavoro infinitesimi necessari a spostare una carica dq. Poiché il potenziale V rappresenta il lavoro necessario per spostare una carica unitaria positiva si ha:

$$dU = V(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

Quindi:

$$\left| \begin{array}{l} V(q) \rightarrow \text{Potenziale del condensatore dipendente da } q \\ V = \frac{Q}{C} \end{array} \right.$$

$$U = L = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} C V^2}$$

OSS:

Vi è analogia nell'energia potenziale di una molla.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 \quad K \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$x \rightarrow Q$$

## DENSITA' DI ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

Nel caso precedente abbiamo ricavato l'energia potenziale immagazzinata da un condensatore in relazione alla sua carica  $Q$  e d.d.p.  $V$ .

Ora vediamo l'energia potenziale del campo  $E_0$  presente tra le armature, per ricavare la densità useremo il condensatore piano, il risultato ha comunque validità generale.

Esprimiamo l'energia potenziale  $U$  in termini del campo  $E_0$ :

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \cdot \frac{d}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{1}{2} \sigma^2 S \frac{d}{\epsilon_0}$$

$$\left| \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} C V^2 \\ C = \frac{Q}{V} \end{array} \right.$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S d$$

### CONDENSATORE PIANO

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{Q}{S} \end{array} \right.$$

Ricaveremo quindi la densità di energia:

$$U = \frac{U}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S d$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

## ENERGIA IMMAGAZZINATA DA UNA SFERA

Calcoliamo l'energia che immagazzina una sfera conduttrice isolata, per farlo useremo l'energia elettrostatica e poi equivalentemente la densità di carica.

### • ENERGIA ELETTROSTATICA



$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot Q^2$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} Q^2$$

### • DENSITA' DI CARICA

In questo caso dobbiamo sommare tutte l'energie dei singoli volume infinitesimi, dividendo il volume in gusci semplifichiamo il calcolo:

$$U = \int_U U d\tau = \int_U \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 d\tau = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 4\pi r^2 dr$$

$$\left| \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \\ d\tau = 4\pi r^2 dr \end{array} \right.$$

OSS

Gli estremi, rispetto ad  $r$ , vanno da  $R$  a  $\infty$  poiché il campo è nullo all'interno della sfera ( $0 < r < R$   $E_0 = 0$ )

$$U = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_0^2 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2 \cdot 4\pi r^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 r^4} dr \quad \left| \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right.$$

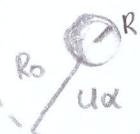
$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \quad \boxed{U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}}$$

I risultati sono quindi del tutto equivalenti.

### Esercizio

Si vuole calcolare il quale volume, circondante la sfera e' presente una certa percentuale  $\alpha$  dell'energia totale immagazzinata

Riprendiamo l'integrale di prima:



$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr$$

Imparendo il suo valore a  $\alpha U$  e cambiando l'estremo superiore con  $R_o$ .

$$\frac{1}{8\pi \epsilon_0} Q^2 \int_R^{R_o} \frac{1}{r^2} dr = \alpha \left( \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right)$$

$$\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} \right) = \frac{\alpha}{R} \left( \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \right) \quad \frac{1}{R_o} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{R}$$

Da cui:

$$\boxed{R_o = \frac{R}{(1-\alpha)}}$$

es

$$\alpha = 90\%$$

$$R_o = \frac{R}{0,1} = 10R$$

$$U_{TOT} = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

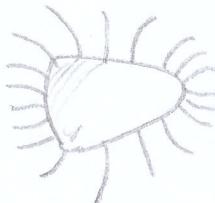
$U_\alpha \Rightarrow$  Percentuale  $\alpha$  di energia totale

$R_o \rightarrow$  Distanza dalla superficie

## DENSITA' DI CARICA SU CONDUTTOREI NON SIMMETRICI

Nel caso di una sfera abbiano notato che le cariche si distribuisce uniformemente sulla sua superficie, tuttavia nel caso dei corpi irregolari vi sarà una densità di energia superficiale maggiore nei punti aventi curvatura minore

Tale caratteristica la si può dimostrare collegando con un filo metallico molto lungo (con capacità zero), due sfere di raggio diverso. Collegando il filo esso si porterà ad una tensione V comune



Dato che sono collegate esse avranno la medesima tensione, ma capacità diverse e quindi cariche diverse.

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \cdot V \quad q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 \cdot V$$

$$\left| \begin{array}{l} C = 4\pi\epsilon_0 R \\ C = \frac{Q}{V} \end{array} \right.$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Le densità saranno:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2} \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$$\left| \sigma = \frac{Q}{S} \right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

La densità di carica superficiale è quindi inversamente proporzionale al raggio

## CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE

Per corrente stationaria si intende che essa non varia di intensità nel tempo.

### VELOCITÀ DI DERIVA

Normalmente le cariche presenti in un conduttore (es filo metallico) si muovono in modo casuale ma mantenendo una velocità complessiva nulla, come se mediamente stessero ferme:

Se il filo è posto ad una differenza di potenziale, al moto caotico delle cariche si aggiunge una velocità di scorrimento, per convenzione si considerano le cariche positive che si spostano

dal potenziale maggiore a  
quello minore. Ovviamente tale velocità



$V_d$  (Velocità di deriva)  
costante

$V_d$  è dovuta al campo elettrico che esercita  
sulla carica  $q$  la forza  $F = q E_0$

### INTENSITÀ DI CORRENTE

Rappresenta la quantità di carica che passa in un conduttore  
nell'unità di tempo.

$$I = \frac{dq}{dt} [C/S] [A]$$

La carica totale  $Q$  che passa nel filo sarà:

$$Q = \int dq = \int_{t_0}^t I dt$$

### DENSITÀ DI CORRENTE

Il modulo di tale vettore è dato da:

$$|J| = \frac{dq/dt}{ds}$$

Il verso è concorde con quello della velocità di scorrimento  $\vec{V}_d$ , la superficie  $ds$  è perpendicolare a  $\vec{V}_d$ .

Tale grandezza rappresenta il numero di cariche che passa attraverso la  
una superficie unitaria nell'unità di tempo.

Essa può essere considerata come un flusso.

## DENSITA' DI CARICA ESPRESSA DALLA VELOCITA' DI DERIVA

Come fatto con il teorema di Gauss, la carica che attraversa la superficie in  $dt$  sarà data dal numero di cariche che tron nel cilindro posto dopo la superficie con altezza dipendente da  $dt$ .

Si ha quindi che la carica totale contenuta dal cilindro infinitesimo:

$$dq = V_d dt ds \cdot n q$$

$n \rightarrow$  numero di cariche per unità di Volume

$$|J| = \frac{dq}{dt} \frac{1}{ds} = \frac{V_d n q dt ds}{dt ds}$$

$$|J| = V_d n q$$

Nel caso si abbiano più tipi di cariche

$$|J| = \sum V_{di} n_i q_i$$

OSS

I termini saranno sempre positivi: dato che  $V_d$  è concorde con  $q$

## INTENSITA' DI CORRENTE

Se si vuole ricavare la corrente attraverso una superficie qualsiasi: si ha:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \phi_s(J)$$

$$|J| = \frac{dq/dt}{ds} = \frac{I}{ds}$$

$$I = |J| ds$$

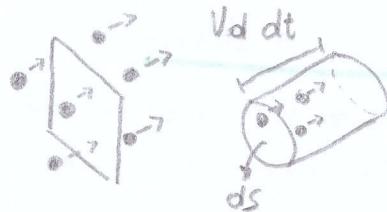
Ovvero l'intensità di corrente è pari al flusso del vettore  $\vec{J}$  attraverso la superficie  $S$ .

## LEGGE DI OHM

Alcuni materiali detti ohmici, se tenuti ad una temperatura costante, si ricava dall'espressione che la d.d.p a cui sono posti, è proporzionale alla corrente che li attraversa.

$$V = RI \quad [R] = [\text{Ohm}] [\Omega]$$

Si deduce quindi che la resistenza è una proprietà intrinseca del conduttore.



## RESISTENZA

La resistenza di un conduttore dipende dal materiale e dalla forma, considerando un filo di sezione  $s$  e lunghezza  $l$  si ricava:

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{s}$$

$\rho \rightarrow$ Resistività
$\sigma \rightarrow$ Conduttorza

$\rho$  e  $\sigma$  sono costanti dipendenti dal materiale impiegato

La resistività di un materiale la si può attribuire al moto caotico delle cariche nel suo interno che ostacolano il moto dei portatori liberi.

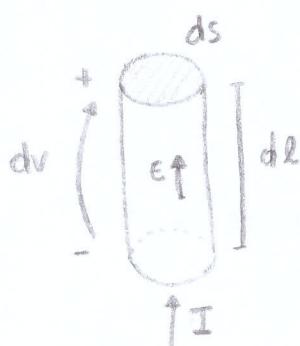
La resistività nei materiali metallici, per piccole variazioni di temperatura, varia linearmente:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$$

$\rho_0 \rightarrow$ Resistività a $t_0$
$t_0 \rightarrow$ Temperatura di riferimento

## LEGGE MICROSCOPICA DI OHM

Applichiamo i risultati ottenuti nella legge di Ohm ad un conduttore formato da un cilindro infinitesimo orientato come il verso della corrente.



$$V = R I$$

$$-dv = \rho \frac{dl}{ds} \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$-dv = \rho \frac{dl}{ds} J ds$$

$$-\frac{dv}{dl} = \rho J$$

N.B.

Il segno (-) in  $dv$   
è dovuto al fatto  
che la corrente  
è positiva nel  
verso in cui  $dv$   
decresce

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$J = \frac{I}{ds}$$

Dato che  $-\frac{dv}{dl} = E_0$

$$\vec{E}_0 = \rho \vec{J}$$

O equivalentemente

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\sigma} \vec{J}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_0$$

## POTENZA DI UN TRATTO DI CIRCUITO

Considerando un tratto di circuito posto ad una d.d.p pari a  $V$  l'energia necessaria per spostare una carica  $dq$  dal potenziale maggiore a quello minore e' dato:

$$dE = dq V$$



$$dE = IV dt$$

$$P = \frac{dE}{dt} = IV$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

### • POTENZA NEI CONDUTTORI OHMICI

Applicando la legge di Ohm si ha (Validita' solo per materiali ohmici)

$$P = I^2 R$$

$$V = RI$$

## GENERATORE ELETTRICO

Un generatore e' un dispositivo che trasforma reversibilmente un'energia qualsiasi in energia elettrica.

Un importante parametro del generatore e' la propria forza elettromotrice:

$$\text{f.e.m.} = \frac{dE}{dq} \quad [\text{J/c}] \quad [\text{Volt}]$$

Tale grandezza rappresenta la quantita' di energia che viene trasformata in energia elettrica per unita' di carica, ha lo stesso nome del potenziale, ma ha un significato completamente diverso.

### • CAMPIONE ELETROMOTORE

Il generatore per produrre energia elettrica sposta le cariche  $dq$  da un elettrodo all'altro applicandogli una forza  $dF$ , poiche' quest'ultima dipende dalla carica, all'interno del generatore si ha un campo detto ELETROMOTORE:



$$E_m = \frac{df}{dq}$$

$$df = dq E_m$$

Il campo elettromotore è opposto a quello elettrico, quest'ultimo sposta le cariche dal potenziale maggiore a quello minore, quello elettromotore fa il contrario.

N.B.

Il campo elettromotore NON è conservativo

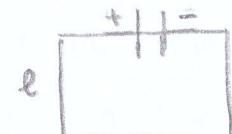
- FORZA ELETTROMOTRICE (DEFINIZIONE TRAMITE CAMPO TOTALE)

Il campo totale  $E$  a cui sono sovrapposte le cariche è dato dalla somma del campo elettrico e quello elettromotore:

$$E_{TOT} = E_S + E_M$$

Se si considera una linea chiusa che attraversa il generatore ed eseguendo l'integrale su tale linea (chiusa):

$$\oint_C E_{TOT} dl = \oint_C E_S dl + \oint_C E_M dl$$



Dato che il campo elettrico è conservativo l'integrale di circuazione è nullo; si ottiene quindi che la circuazione del campo totale è pari all'integrale del campo elettromotore all'interno del generatore dato che esso altrove è nullo. Tale integrale equivale al lavoro necessario per spostare una carica unitaria da un terminale all'altro nella direzione di  $E_M$ ; ovvero f.e.m.

$$\oint_C E_{TOT} dl = \oint_C E_M dl = f.e.m.$$

$$f.e.m. = \oint_C E_M dl$$

- MISURA F.E.M. DI UN GENERATORE A CIRCUITO APERTO

Se nessun carico è collegato, all'interno del generatore i due campi si equivalgono in modulo, il generatore è in equilibrio.

Si ha quindi:

$$E_S + E_M = 0$$

$$E_s \cdot dl = - E_m \cdot dl$$



Integrando entrambi i membri nel tratto A-B si ha:

$$\int_A^B E_s \cdot dl = \int_B^A E_m \cdot dl$$

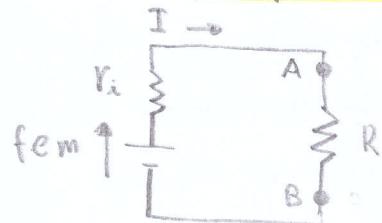
$$\boxed{f.e.m. = V_A - V_B}$$

Si ha quindi che a circuito aperto la f.e.m. equivale alla d.d.p. tra i due terminali del generatore.

### GENERATORI CON CARICO

Quando si collega un carico (resistore) ad un generatore e quindi scorre corrente la d.d.p. che si misura è inferiore allo f.e.m. misurato a circuito aperto, tale perdita si può giustificare considerando il generatore dotato di una propria resistenza interna.

### - Calcolo d.d.p. ai capi del generatore



Applicando il principio di conservazione dell'energia la potenza fornita dal generatore deve eguagliare quella dissipata dai carichi ( $r_i$  "Resistenza interna" e  $R$ )

$$P = IR^2 \quad (\text{Resistors Ohmici})$$

$$f \cdot I = r I^2 + R I^2$$

Ricavando quindi la corrente  $I$

$$I = \frac{f}{r+R}$$

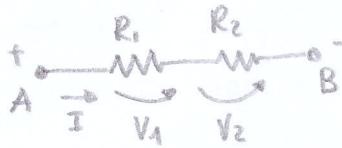
Ai capi del resistore e quindi del generatore si avrà una d.d.p. pari a:

$$V = R \cdot I = R \frac{f}{r+R}$$

$$\boxed{V_{AB} = f \frac{R}{r+R}}$$

## RESISTORE

### RESISTORI IN SERIE



In tale configurazione i resistori sono attraversati dalla medesima corrente.

Ogni resistore avrà ai suoi capi una tensione diversa:

$$V_1 = R_1 \cdot I ; V_2 = R_2 \cdot I$$

$$V = R \cdot I$$

Poiché  $V_{AB} = V_1 + V_2$ :

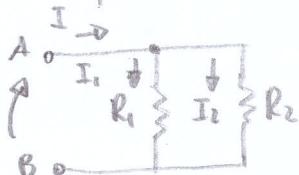
$$R \cdot I = V_{AB} = (R_1 + R_2) \cdot I$$

$$R = R_1 + R_2$$

### RESISTORI IN PARALLELO

In questa configurazione i resistori sono collegati alla medesima d.d.p.

Ogni resistore sarà percorso da una corrente:



$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}$$

La corrente totale sarà:

$$\frac{V_{AB}}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

## LEGGI DI KIRCHHOFF

### LEGGI DELLE CORRENTI

La somma algebrica delle correnti dei rami di un nodo deve essere sempre nulla.

$$\sum I_i = 0$$

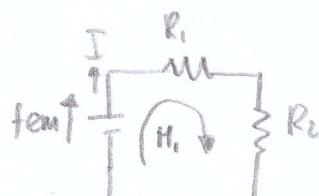


$$I - I_1 - I_2 = 0$$

### LEGGE DELLE TENSIONI

La somma delle f.e.m in una maglia è uguale alla c.d.t. di tensione di ogni resistore

$$\sum f.e.m = \sum R_i I_i$$



$$fem = IR_1 + IR_2$$

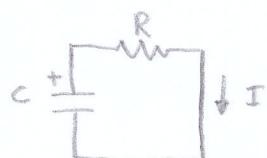
## CONDENSATORE IN TRANSITORIO

Le leggi di Kirchoff e di Ohm sono state stabilite per circuiti in condizioni stazionarie: vi sono tuttavia processi lenti i quali permettono di considerare il circuito in condizioni stazionarie ad ogni istante.

Tale approssimazione permette di usare le suddette leggi nei circuiti in condizione quasi stazionarie, considerando i valori istantanei delle grandezze ( $i(t)$   $v(t)$ ). Ad esempio la carica e scarica di un condensatore:

### • SCARICA DI UN CONDENSATORE

Consideriamo un condensatore carico e studiamo il processo di scarica tramite il collegamento di un resistore:



Applichiamo Kirchoff:

$$\frac{Q}{C} = iR = \frac{dq}{dt} R$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Al crescere della carica  $q$  che passa attraverso  $R$  la carica  $Q$  immagazzinata nel condensatore diminuisce, si ha quindi:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$$

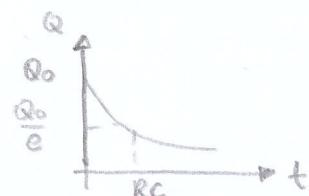
L'equazione diventa:

$$\frac{Q}{C} = -\frac{dQ}{dt} \cdot R$$

Tale equazione differenziale si può risolvere tramite separazione di variabili:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt \quad \ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) = -\frac{1}{RC} t \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



O equivalentemente

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

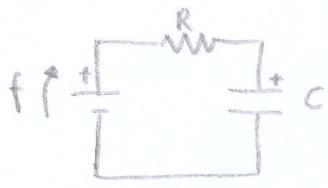
$$C = \frac{Q}{V}$$

$$RC = T \text{ [Tempo]}$$

Dopo circa 3-4T si può considerare scarico

## CARICA DI UN CONDENSATORE

Collegando un condensatore ad un generatore ed ad una resistenza questo si carica.



OSS

Una volta carica il condensatore si comporta come un interruttore aperto non facendo passare corrente, si avrà che la tensione finale al capo di C sarà uguale a f  $Q_0 = 0 \quad Q_{\text{finale}} = C \cdot f$  (Regime)

Applico Kirchoff:

$$f = iR + \frac{Q(t)}{C} \quad f = \frac{dq}{dt} R + \frac{Q(t)}{C}$$

In questo caso al crescere della corrente passante per R aumenta anche la carica sul condensatore:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Corrente} \\ \text{Condensatore} \end{array}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

Risolviamo tale equazione tramite sostituzione e poi separando le variabili.

$$-RC \frac{dx}{dt} = x(t)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt \quad x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$x(t) = \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC} \frac{dQ}{dt}$$

Tornando alla variabile iniziale:

$$\frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \left( \frac{f}{R} - \frac{Q_0}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \frac{f}{R} - \frac{\dot{Q}(t)}{RC} = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \left| Q_0 = 0 \right.$$

$$Q(t) = Cf \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$V(t) = f \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



## • CORRENTE DURANTE IL TRANSITORIO

### - Scarica del condensatore

Derivando l'equazione della carica otteniamo come varia la corrente:

$$\frac{dQ}{dt} = Q_0 \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \\ \frac{dQ}{dt} = -\frac{dq}{dt} \\ \frac{Q_0}{C} = V_0 \end{cases}$$



### - Carica del condensatore

Procediamo come nel caso precedente:

$$\frac{dQ}{dt} = Cf e^{-\frac{t}{RC}} \quad \frac{dq}{dt} = f e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} Q(t) = Cf(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

## • VARIAZIONE DI CARICA DI UN CONDENSATORE (CASO GENERALE)

Poss capire che un condensatore varia la propria carica in base alla variazione di tensione ai suoi capi, quindi si puo caricare o scaricare in modo da raggiungere la nuova tensione.

L'equazione che esprime tale variazione avrà la seguente forma: (vedi casi precedenti)

$$Q(t) = a + b e^{-\frac{t}{RC}}$$

$R = R_{eq} \rightarrow$  Resistenza vista dal condensatore

Dalle situazioni iniziali e finali ricaviamo i coefficienti:

$$\begin{cases} Q_{iniziale} = Q(t=0) = a + b \\ Q_{finale} = Q(t=+\infty) = a \end{cases} \quad \begin{cases} a = Q_{finale} \\ b = Q_{iniziale} - Q_{finale} \end{cases}$$

Quindi

$$Q(t) = Q_f + (Q_i - Q_f) e^{-\frac{t}{RC}}$$

### ESEMPIO

$$\text{CARICA: } Q(t) = Cf - Cf e^{-\frac{t}{RC}} = Cf(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\text{SCARICA: } Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

## CAMPAGNATO DI CORRENTI STAZIONARIE

### FORZA DI LORENZ

Dall'esperienza si ricava che se una carica  $q$ , avente una velocità  $\vec{v}$ , si trova in una zona dello spazio in cui c'è presente un campo magnetico, subisce una forza detta FORZA DI LORENZ:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

$$[B_0] = [V/S/m^2] = [Wb/m^2] = [T]$$

Dove  $\vec{B}_0$  rappresenta l'intensità del campo magnetico ma che per convenzione è chiamato INDUZIONE MAGNETICA.

$\vec{B}_0$  ha le seguenti dimensioni:

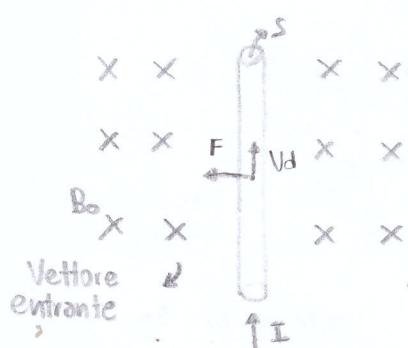
$$[B_0] = [V/S/m^2] = [Weber (wb)/m^2] = [Tesla (T)]$$

Nello spazio in cui si trova la carica  $q$  c'è presente anche un campo elettrico  $E_0$  il complesso delle forze a cui c'è soggetto è pari a:

$$F = q\vec{E}_0 + q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

### SECONDA LEGGE DI LAPLACE

Tale legge esprime la forza a cui c'è soggetto un filo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme. Tale forza sarà data dalla somma delle forze a cui sono soggette le singole cariche che si muovono nel filo.

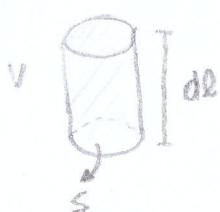


Consideriamo il caso specifico in cui la corrente  $I$  è normale al vettore  $B_0$ .

Ogni carica presente in un tratto unitario del filo ( $dl$ ) sarà soggetta alla forza di Lorentz:

$$dF_i = q V dI B_0$$

Per ricavare la forza sul tratto  $dl$ , dobbiamo sapere il numero di cariche presenti. Consideriamo un tratto infinitesimo di filo con sezione  $s$ :



$$q = n V \quad V = dl \cdot s$$

$$q = n s dl \quad \left| \begin{array}{l} \text{Numero di cariche} \\ \text{presenti} \end{array} \right.$$

$n \rightarrow$  Numero di cariche per unità di volume

$V \rightarrow$  Volume

La forza nel tratto del sesto:

$$dF = (n s dl) q Vd B_0$$

Ricordando che:

$$J = n Vd q$$

$$I = J \cdot s$$

$$I = n s q Vd$$

$$J = \frac{dq/dt}{ds} = \frac{I}{ds}$$

Quindi:

$$dF = i dl B_0$$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}_0 \quad (\text{In generale})$$

Sull'intero filo:

$$F = \int_l i d\vec{l} \times \vec{B}_0$$

$$F = i \vec{l} \times \vec{B} \quad (\text{Filo rettilineo})$$

### DIPOLO MAGNETICO

In analogia al dipolo elettrico, nel magnetismo indichiamo come dipolo una spira percorso da corrente, ed immersa in un campo magnetico uniforme creato ad esempio da due magneti permanenti.

Analizziamo quindi il suo comportamento:

#### - LATI ① e ③

In tal caso le forze agenti sul filo hanno linea di azione lungo l'asse O, tali forze sono opposte ed uguali e si annullano.

$$F_1 = i b B_0 \sin(\theta)$$

$$F_1 = -F_3$$



#### - LATI ② e ④

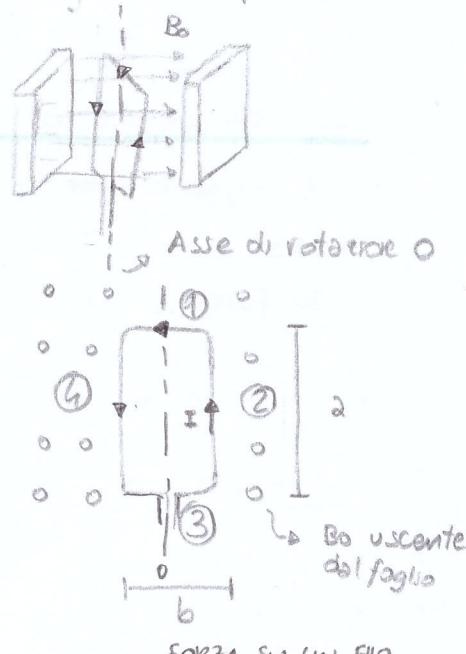
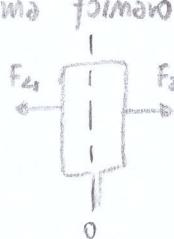
In tal caso le forze sono uguali ed opposte, ma formano una coppia che tenderà a far allineare la spira in modo che la corrente I, passante nei lati 1 e 3, sia perpendicolare al campo  $B_0$ .

$$F_2 = i a B_0 \sin(90^\circ)$$

(Sul lato verticale)

$$F_2 = -F_4$$

I è sempre perpendicolare a  $B_0$

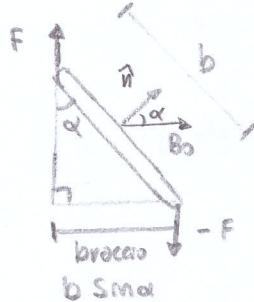


$$F_2 = -F_4$$

$$F = i l \times B_0$$

### MOMENTO DI UNA SPIRA

Sui lati ② e ④ vi è quindi una coppia con braccio ( $b \sin \alpha$ )



$$|M| = b \sin \alpha \cdot i \cdot a \cdot B_0$$

$$|M| = i \cdot S \cdot B_0 \cdot \sin \alpha$$

Vettorialmente:

$$\vec{M} = i \cdot S \cdot (\hat{n} \times \vec{B}_0)$$

### MOMENTO DI UNA COPPIA

$$M = r \times F$$

$$|M| = \text{braccio} \cdot F$$

$$F = i \cdot a \cdot B_0$$

$$\text{braccio} = b \sin \alpha$$

$$\left| \begin{array}{l} ab = S \text{ (Superficie)} \\ \text{Spira} \end{array} \right.$$

### MOMENTO MAGNETICO

Si definisce momento magnetico, in riferimento ad una spira immersa in un campo magnetico e percorso da corrente, il vettore:

$$\vec{m} = i \cdot S \cdot \hat{n}$$

$i \rightarrow$  Corrente

$S \rightarrow$  Superficie spira

$\hat{n} \rightarrow$  Versore superficie

Il momento fisico che subisce una spira può essere espresso mediante il vettore:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

### MOMENTO DIPOLO ELETTRICO

$$\vec{H} = \vec{P} \times \vec{E}_0$$

$$\vec{P} = \vec{J} q$$

### PRIMA LEGGE DI LAPLACE

Dall'esperienza si ricava che una carica  $q$  che si muove con velocità  $\vec{v}$  crea intorno a se un campo magnetico.

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} q (\vec{v} \times \hat{r})$$

$\mu_0 \rightarrow$  Permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 \approx 12,6 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A m}}$$

$r \rightarrow$  Distanza ;  $\hat{r}$  versore  $r$

Come nel caso elettrico, il campo magnetico presente in un punto è dato dalla somma di quelli prodotti dalle sorgenti cariche.

### • PRIMA LEGGE DI LAPLACE PER UN FILO PERCORSO DA CORRENTE

Una forma molto utile nella pratica e' quella che si riferisce ad un filo percorso da corrente. Iniziamo per un tratto infinitesimo  $dl$ :



Dato che  $B_0$  e' dato dalla somma dei contributi delle singole cariche devo ricavare il numero di cariche  $q$  nel filo  $dl$ .



Se  $n$  e' la densita' di carica per volume; il numero di cariche sarà:

$$N = nsdl$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} n = \frac{q}{V} \\ V = dl \cdot s \end{array} \right.$$

Il prodotto  $q \cdot \vec{v}$  si può porre:

$$q \vec{v} = N q \vec{v} = (nsq \vec{v}) dl = i \vec{dl}$$

Sul filo infinitesimo si avrà quindi:

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(\vec{dl} \times \hat{r})}{r^2}$$

N.B.

Tale formula vale solo nel caso che la distanza  $r$  sia molto maggiore della sezione del filo

Sull'intero filo:

$$B_0 = \int dl B_0 = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(\vec{dl} \times \hat{r})}{r^2}$$

### CAMPIONE MAGNETICO PER ALCUNE DISTRIBUZIONI DI CARICHE

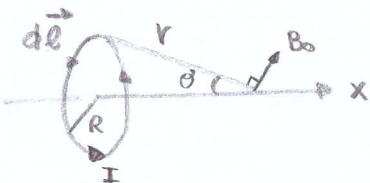
Come fatto per il campo elettrico formato da conduttori conici, vediamo il campo magnetico generato da diverse distribuzioni di cariche in movimento, applicando la prima legge di Laplace (considerando la corrente  $I$  costante)

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

### • FILO CIRCOLARE

Consideriamo un filo circolare percorso da corrente e studiamo come varrà il campo magnetico sull'asse x in relazione alla distanza



Prendiamo un tratto  $d\vec{e}$  in modo da considerarla rettilinea, si avrà per quel tratto un contributo

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{e}}{r^2} \sin(90^\circ)$$

$\hookrightarrow r \perp d\vec{e}$   
sempre

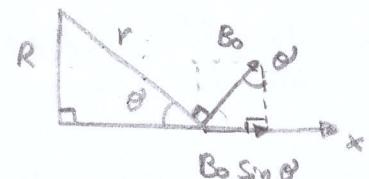
$$\left| dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2} \right.$$

Poiché rispetto all'asse x, nella sommatoria i contributi  $dB_y$  si annullano (ognuno ha il proprio opposto) consideriamo solo  $dB_x$ .

$$dB_x = dB_0 \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta$$

Sommiamo per l'intero filo:

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \theta}{r^2} 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0}{2} I \frac{\sin \theta}{r^2} R = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{r^3} \end{aligned}$$



$$B_0 \sin \theta$$

$$l = 2\pi R$$

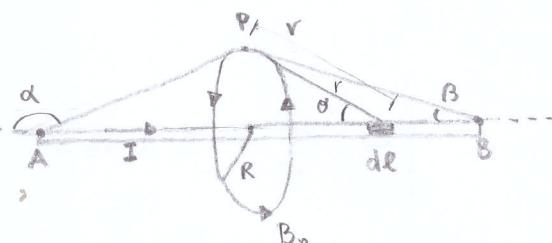
$$R = \sin \theta r$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

### • FILO RETTILINEO

Vediamo ora il campo magnetico generato da un filo rettilineo, la posizione in cui vorremo calcolare  $B_0$  verrà individuata mediante un raggio  $R$  e due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che fissano gli estremi del filo con  $R$ . (PUNTO P)



Per calcolare  $B_0$  nel punto P consideriamo il filo (AB) composto da tratti infinitesimi  $d\vec{e}$  individuato mediante un angolo  $\theta$ , e collegato a P mediante  $r$ .

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{e}}{r^2} \sin \theta$$

$$\left| dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2} \right.$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_A^B \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

$$d\vec{e} \times \hat{r} = dl \sin \theta$$

Дата la rappresentazione mediante gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  e l'individuazione del tratto  $dl$  con l'angolo  $\theta$ , occorre cambiare variabile

$$dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

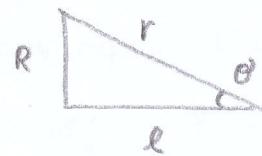
$$\left| \begin{array}{l} l = R \tan^{-1} \theta \\ \frac{d \tan^{-1} \theta}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \theta}{r^2} \left( -\frac{R}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \cdot \left( -\frac{R}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} -\frac{\sin \theta}{R} d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \beta - \cos \alpha)$$



$$\left| \begin{array}{l} R = \sin \theta \cdot r \\ l = \cos \theta \cdot r \\ \frac{R}{l} = \tan \theta \end{array} \right.$$

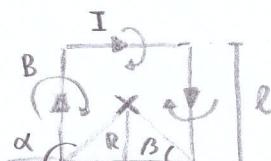
$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

$$r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$l = R \cos \theta \quad \int -\sin \theta d\theta = \cos \theta + C$$

### Esempio (spira quadrata)

Prendiamo in considerazione una spira quadrata con lati da considerarsi tratti di filo rettilineo



Vogliamo calcolare  $B_0$  totale al centro della spira, ogni lato  $l$  darà un contributo:

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{l} [\cos 45^\circ - \cos 135^\circ] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\sqrt{2}}{l}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = 135^\circ \\ \beta = 45^\circ \\ R = \frac{l}{2} \end{array} \right.$$

Essendoci quattro lati:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{l}$$

### Filo RETTILINEO INFINITO (LEGGE DI BIOT E SAVART)

Un caso particolare è quello di un filo con lunghezza infinita oppure approssimabile ad essa data la piccola distanza  $R$  in relazione alla lunghezza  $l$ .

In tal caso gli angoli saranno ( $\alpha = 180^\circ$  e  $\beta = 0^\circ$ )

$$\alpha \approx 180^\circ \quad \beta \approx 0^\circ$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (1 - (-1))$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} [\cos \beta - \cos \alpha]$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

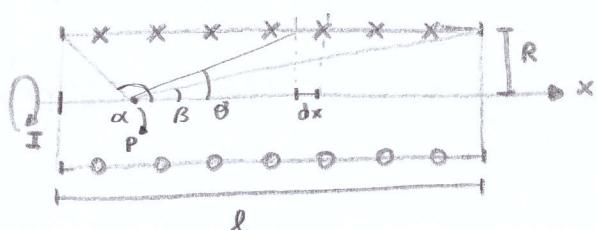
LEGGE DI BIOT-SAVART

## • SOLENOIDE

Il solenoide è un dispositivo formato da numerosi avvolgimenti di un filo lungo un asse. Ogni avvolgimento può essere considerato come una spira data la loro vicinanza. Naturalmente ogni filo è isolato.

In questo caso siamo interessati al campo magnetico interno lungo l'asse x.

Individuiamo gli estremi del solenoide mediante due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  (cone fatto con il filo rettilineo).



Individuiamo il punto P sull'asse x mediante  $\alpha$  e  $\beta$ , consideriamo poi il campo in tale punto come quello dato dalla somma dei tratti  $dx$  individuati tramite l'angolo  $\theta$ .

Ogni tratto  $dx$  dà un contributo  $dB$  dato dal campo prodotto da una singola spira, moltiplicato per il numero di spire presenti nel tratto  $dx$ .

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \cdot (n_e \cdot dx)$$

Poiché individuiamo P mediante gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  occorre cambiare variabile  $dx \rightarrow d\theta$

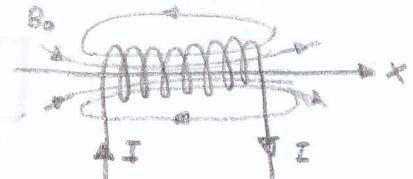
$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} n_e \cdot \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta}\right) d\theta$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \cdot \frac{\sin^3 \theta}{R^3} n_e \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta}\right) d\theta$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} n_e (-\sin \theta) d\theta$$

Sommiamo tutti i contributi  $dB_x$  da  $\alpha$  a  $\beta$ :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2} n_e \int_{\alpha}^{\beta} (-\sin \theta) d\theta = \frac{\mu_0 I}{2} n_e [\cos \theta]_{\alpha}^{\beta}$$



$$\begin{cases} n_e = \frac{N}{l} & (\text{Numero di spire per unità di lunghezza}) \\ N = n_e \cdot l \end{cases}$$

### $B_{ox}$ SPIRA CIRCOLARE

$$B_{ox} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\begin{array}{c} r \\ \theta \\ x \end{array} \quad R \quad \frac{R}{x} = \tan \theta$$

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$r^3 = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

$$R = \sin \theta \cdot r$$

$$r^3 = \frac{R^3}{\sin^3 \theta} = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2} n_e (\cos \beta - \cos \alpha)$$

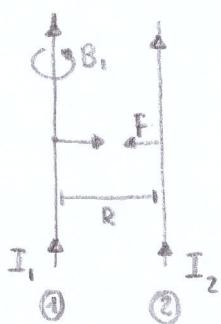
## - Solenoide infinito

Nel caso in cui la sezione del solenoide è molto piccola in relazione alla lunghezza  $l$ , e quindi  $R \ll l$ , si può considerare il solenoide infinito ( $\alpha = 180^\circ$ ,  $B = 0^\circ$ )

$$B_x = \mu_0 I N_e$$

## DEFINIZIONE DI AMPERE

Vediamo come si definisce 1 Ampere mediante la forza di attrazione tra due fili percorsi da corrente.



Il primo filo crea un campo magnetico intorno a sé dato da:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Sul secondo filo agirà una forza  $F$  dovuta al campo  $B_1$

$$F = I_2 l B_1 \sin 90^\circ = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Considerando  $I_1 = I_2 = I$  si ricava la forza per unità di lunghezza:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R}$$

Si definisce 1 ampere la corrente che passando per due fili esercita fra di loro una forza per unità di lunghezza pari a:

$$\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$$

### LEGGE BIOT-SAVART

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

### 2° LEGGE LAPLACE

$$F = i \vec{l} \times \vec{B}$$

$$\left| \begin{array}{l} I = 1 \text{ A} \\ R = 1 \text{ m} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \end{array} \right.$$

## PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CAMPO MAGNETICO

Come nel caso del campo elettrico, descriviamo le proprietà del vettore  $\vec{B}_0$  (induzione magnetica) mediante il flusso attraverso una superficie chiusa e la circuitazione (integrale di linea lungo una curva chiusa)

### FLUSSO $B_0$

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

### CIRCUITAZIONE $B_0$

(CASO STAZIONARIO)

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

### • Flusso $B_0$ (3° EQUAZIONE DI MAXWELL)

Nell' studio del campo magnetico generato da diverse cariche in movimento abbiamo notato che le linee di campo si chiudono sempre; di conseguenza il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo

$$\Phi_S(B_0) = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = 0$$

Non esistono quindi sorgenti del campo magnetico, ma solo dipoli

Applicando il Teorema della divergenza:

(3° EQ MAXWELL)

$$\operatorname{div}(\vec{B}_0) = 0$$

Tale legge è valida sempre anche se  $B_0$  varia nel tempo

### Th divergenza

$$\Phi_S(B_0) = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{div} \vec{B}_0 \, ds$$

### • CIRCUITAZIONE $B_0$

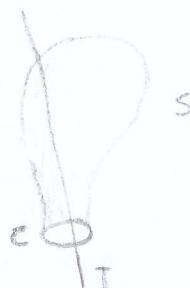
Consideriamo la circuitazione di  $B_0$  generato da un filo infinito percorso da corrente  $I$  stazionario (costante) (LEGGE DI BIOT-SAVART).

In tal caso si distinguono due casi: in base al fatto se la linea chiusa sia CONCATENATA o meno con la corrente  $I$ .

Si osserva che una linea (corrente  $I$ ) è concatenata con una curva chiusa  $C$  se TUTTE le superficie, aventi come contorno  $C$ , sono attraversate da  $I$ .

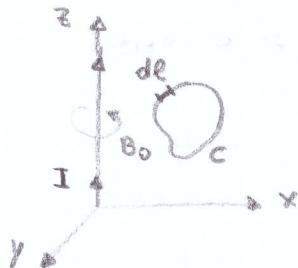
Una definizione intuitiva è data pensando ad

palloncino gonfi in cui  $C$  è il collo e la superficie è data dal "corpo"



### - Caso NON concatenato

La linea chiusa e' "esterna" al filo percorso dalla corrente I costante.



Consideriamo il filo posto sull'asse z.

Dobbiamo fare l'integrale di circuazione lungo c

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}$$

Dividiamo c in tratti di infinitesimi e li proiettiamo sul piano xy, dove giacciono le linee di forza di  $B_0$ .

Si ha quindi:

$$\vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 R d\alpha \quad (\text{Proiezione})$$

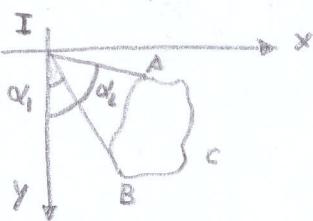
Con Biot-Savart:

$$d\vec{l} = R d\alpha$$

BIOT-SAVART

$$B_0 R d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi R} I R d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$



Poiché la distanza R è scomparsa, l'unico riferimento è l'angolo da che per un tratto AB va da  $\alpha_1$  ad  $\alpha_2$  ma per una linea chiusa va da  $\alpha_1$  a  $\alpha_1$ , annullando quindi l'integrale.

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_1} d\alpha = 0$$

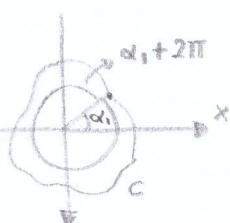
$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

(CASO STAZIONARIO)  
(NON CONCATENATO)

### - Caso Concatenato (LEGGE DI AMPERE)

I ragionamenti fatti nel caso precedente sono validi anche in questo.

Cambiamo però gli estremi di integrazione dato che questa volta I è interno alla linea chiusa dd varia da  $\alpha_1$  a  $\alpha_1 + 2\pi$ .



$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\alpha_1 + 2\pi - \alpha_1)$$

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{cond}}$$

Se la linea chiusa e' attraversata da più correnti la circuazione e' data dalla somma algebrica delle correnti considerando il segno (+ o -) in base al verso di percorrenza.

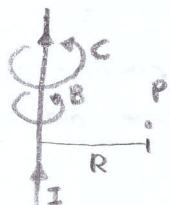
LEGGE DI AMPERE  
(I COSTANTE)

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 Z I_i \quad (\text{costante})$$

## APPLICAZIONE LEGGE DI AMPERE

Come nel caso del campo elettrico (legge di Gauss) anche con il campo magnetico possiamo ricavare  $B_0$  creato da diverse distribuzioni aventi simmetria.

### • FILO RETTILINEO INFINITO



In questo caso la linea chiusa è una circonferenza avente centro in  $I$ .

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi R} B_0 dl = B_0 2\pi R$$

$$\vec{B}_0 \parallel d\vec{l}$$

$$\vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 dl$$

$$B_0 2\pi R = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

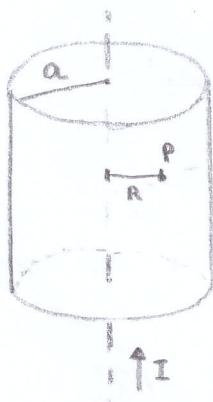
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Ampere

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

### • FILO RETTILINEO INFINITO CON SPESSEZZO

In tal caso consideriamo un filo avente uno spessore e vogliamo calcolare  $B_0$  all'interno di esso (fuori è equivalente al caso precedente)



$$- R \leq a$$

Applichiamo Ampere come fatto sopra:

$$B_0 2\pi R = \mu_0 I_R$$

In questo caso  $I$  non è totale ma dipende da  $R$ , sfruttiamo quindi  $\vec{J}$  considerandolo costante

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$I_R = J \int_S ds = J \pi R^2$$

Sì ha quindi:

$$B_0 2\pi R = \mu_0 J \pi R^2$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 J R}{2}$$

Poiché la corrente  $I$  del filo è data da:

$$I = J \pi a^2$$

$a \rightarrow$  Raggio conduttore

Sì ha:

$$B_0 = \frac{\mu_0 R}{2} \frac{I}{\pi a^2}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R}{a^2}$$

$$R \leq a$$

## TEOREMA DI STOKES

Un teorema molto importante per il calcolo vettoriale e' quello di Stokes che mette in relazione la circuitazione  $\mathbf{C}$  di un vettore  $\mathbf{A}$ , con il flusso attraverso una superficie (avente  $\mathbf{C}$  come contorno) di un altro vettore  $\text{rot}(\mathbf{A})$  ( $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ )

Tale teorema e' dato dalla seguente uguaglianza:

$$\oint_{\mathbf{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

$\mathbf{C} \rightarrow$  Linea chiusa  
 $S_C \rightarrow$  Superficie avente  $\mathbf{C}$  come contorno.

### OPERATORE ROTORE ( $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ )

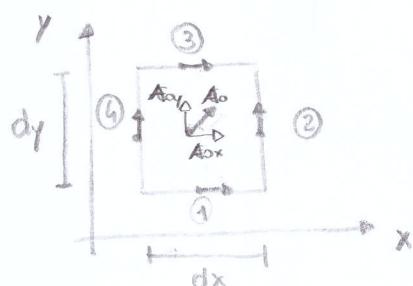
Si definisce il vettore  $\text{rot}(\mathbf{A})$  o  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

### DIMOSTRAZIONE TEOREMA DI STOKES

Prendiamo una qualsiasi linea chiusa  $\mathbf{C}$  e poi disegniamo una curva fra due punti  $A$  e  $B$ , abbiamo quindi due percorsi chiusi  $C_1$  e  $C_2$ , la somma delle circuitazioni su  $C_1$  e  $C_2$  dà come risultato quella di  $\mathbf{C}$  (tra  $A$  e  $B$  la risultante e' nulla).

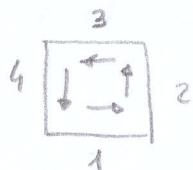
Faccendo ripetutamente questa operazione otteniamo superfici quadrate di forma infinitesima, prendiamo come esempio una superficie ed s normale all'asse  $z$ , parallela al piano  $xy$ .



Al centro di  $d\mathbf{s}$  consideriamo presente un vettore  $\mathbf{A}_0$ , lungo  $z$ ; lati l'intensità sono date da quella di  $\mathbf{A}_0 \pm \frac{1}{2}$  il differenziale

$$\textcircled{1} A_{0x} - \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad \textcircled{2} A_{0y} + \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\textcircled{3} A_{0x} + \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad \textcircled{4} A_{0y} - \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$



Sommando i singoli contributi scegliendo il segno in base alla direzione si ha:

$$\oint \vec{A}_0 \cdot d\vec{l} = \left( A_{0x} - \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) + \left( A_{0y} + \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left( A_{0x} + \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left( A_{0y} - \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$$

Si ottiene quindi la componente  $z$  di  $\vec{\nabla} \times \vec{A}_0$  se si fa il procedimento analogo con le superficie perpendicolari a  $x$  e  $y$  si ricava:

$$\oint_{\mathbf{C}} \vec{A}_0 \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_0) \cdot d\vec{s}$$

## LEGGE DI AMPERE PER INFINITESSI (ROTORE DI $B_0$ )

Come nel caso della legge di Gauss, anche per la legge di Ampere  
ne esiste una forma infinitesima.

Dalla legge di Ampere globale si ha:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Applicando il Teorema di Stokes:

$$\mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_L (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Portando dentro l'integrale  $\mu_0$ , e dato che si hanno  
i medesimi estremi di integrazione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

(4° EQUAZIONE DI MAXWELL)  
PER CASI STAZIONARI

$$I = \oint_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Suposicione che  $S_L$  è  
come contorno

TEOREMA STOKES

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot}(\vec{B})$$



## INDUZIONE MAGNETICA

Abbiamo quindi appreso che una corrente elettrica  $I$  produce un campo magnetico, ora esaminiamo il processo opposto, ovvero se un circuito, immerso in un campo magnetico, presenta una corrente al suo interno

Tramite esperienza si è scoperto che si genera corrente nel circuito se:

- Si sposta il circuito in un campo  $B_0$  non uniforme ( $B_0$  varia)
- Si sposta la sorgente del campo  $B_0$  e rimane fisso il circuito
- Si fa variare il campo  $B_0$  tenendo circuito e fonte fermi.

## LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LЕНЦ

Tutte le precedenti esperienze sono giustificate dalla seguente legge che si riferisce poi alla f.e.m nel circuito, invece che direttamente alla corrente di induttore  $I$ . Si abbia un circuito elettrico  $C$ , la f.e.m. che si genera è poi a mezzo la variazione del flusso di  $B_0$  attraverso la superficie che ha come contorno  $C$ .

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\Phi_{Sc}(B_0)}{dt}$$



### • LEGGE DI LENZ

Il segno (-) nell'espressione è necessario per rispettare la conservazione dell'energia. (oppure il principio di azione - reazione) infatti la f.e.m. nel circuito cerca di opporsi alla variazione di flusso.

Ad esempio se il flusso  $\Phi_B$  cala, la derivata è negativa e quindi f.e.m. è positivo, la corrente ridotta genera lei stessa un campo  $B_0$  che compensa la variazione, al contrario se il flusso aumenta la f.e.m. è negativa, e la corrente si muove nel verso opposto andando a contrastare l'aumento di  $\Phi_B$ .

### OSS.

La variazione di  $\Phi_B$  può essere fatta anche variando la dimensione del circuito e quindi  $S_c$ .

### • CORRENTE INDUTTA

Usando la legge di Ohm si deduce che la corrente  $I$  che circola è data da:

$$I = \frac{\text{f.e.m.}}{R}$$

$R \rightarrow$  Resistenza circuito

## LEGGI DI FARADAY-NEUHANN-LENTZ DIFFERENZIALE (2° EQUAZIONE DI MAXWELL)

Nella definizione di f.e.m (si ricordi non conservativa) è dato per un circuito dalle seguenti espressioni:

$$\oint_C \vec{E}_{\text{TOT}} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_S \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

(Poiché conservativo)      (non conservativo)       $\hookrightarrow$  Campo elettromotore

Si avrà quindi:

$$\text{f.e.m.} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{\text{TOT}} \cdot d\vec{l} \quad (= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l})$$

La legge di Faraday diventa:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d(\oint_{S_c} \vec{B}_0 \cdot d\vec{s})}{dt} = - \oint_{S_c} \frac{d\vec{B}_0}{dt} \cdot d\vec{s}$$

Dal teorema di Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_c} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} \quad (\text{Derivata parziale})$$

Quindi:

$$\oint_{S_c} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \oint_{S_c} \frac{d\vec{B}_0}{dt} \cdot d\vec{s} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Poiché hanno i} \\ \text{medesimi estremi} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$$

(2° EQUAZIONE DI MAXWELL)  
(Valido per i mezzi in quiete)

OSS

La presenza o meno del circuito fisico reale non varia tale legge, anche senza mezzo fisico in quello spazio si ha una circolazione di  $E$  (non conservativo)

## DIMOSTRAZIONE DELLA LEGGE DI FARADAY-NEUHANN-LENTZ

Cerchiamo ora di giustificare la legge di Faraday mediante leggi alternative, per i casi in cui vi è movimento visivo la forza di Lorentz, altrimenti la Relatività in relazione ai campi.

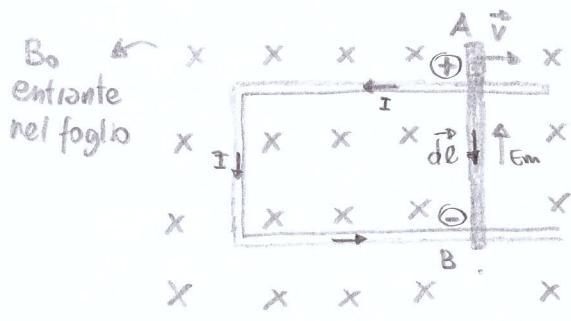
Esamineremo:

- Aumento superficie circuito in relazione al movimento di un lato (Forza di Lorentz)
- Circuito in movimento in un campo NON uniforme (forza di Lorentz)
- Bacchetta in movimento in un sistema di riferimento inerziale con l'asta (Relatività)

## VARIAZIONE SUPERFICIE

### - Forza di Lorentz

Consideriamo un circuito immerso in campo  $B_0$  UNIFORME, tale circuito ha un lato mobile che scorre su una guida conduttrice priva di attrito.



Se si muove la barra verso destra si applica la forza di Lorentz alle cariche libere del conduttore verso l'alto, si avrà quindi segno  $(+)$  su A, di conseguenza I in senso antiorario.

Orientiamo la barra  $\vec{d}e$  come la corrente  $(+)\rightarrow(-)$ .

Il campo elettromotore  $E_m$  subito sotto sarà:

$$\vec{E}_m = (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad |E_m| = VB \quad \left| \begin{array}{l} \text{In questo caso} \\ V \perp B \end{array} \right.$$

Tornando alla definizione di f.e.m.:

$$f.e.m. = \oint_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{e} = \oint_A^B (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{e} = -VB_0l$$

$$\boxed{f.e.m. = -VB_0l}$$

### FORZA DI LORENTZ

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

### CAMPIONE ELETTRICO

$$E = \frac{F}{q}$$

(In questo è nuovo)

$$E_m = \frac{F_e}{q} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Forza} \\ \text{di Lorentz} \end{array}$$

Poiché  $\vec{E}_m$  ( $\uparrow$ ) è opposta a  $\vec{d}e$  ( $\uparrow$ ), e' un segno meno nel prodotto scalare

### - Faraday



La bacchetta in un tempo infinitesimo spazia una superficie  $ds$  data da ( $ds = Vdt l$ ), si ricava quindi un flusso infinitesimo  $d\phi_B$ :

$$d\phi_B = B_0 ds = B_0 V dt l$$

$$f.e.m. = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{B_0 V dt l}{dt}$$

$$\boxed{f.e.m. = -VB_0l}$$

### FARADAY

$$f.e.m. = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\vec{d}\phi_B = \vec{B}_0 \cdot \vec{d}l$$

$$|ds = V dt l$$

### OSS. 1

In questo caso, quindi, all'aumentare del flusso  $\phi_B$  (dato che aumenta  $s$ ) si instaurerà una f.e.m. negativa che genera una corrente opposta che crea un campo  $B_s$  che si oppone a quello esterno  $B_0$ .

## OSS

Per muovere la bacchetta AB a velocità costante, è necessario applicare una forza che contasti quella che subisce l'asta (2° LEGGE DI LAPLACE).

Per avere quindi una potenza elettrica  $P_e$  si dovrà applicare una meccanica  $P_m$

$$\text{f.e.m. } I = (I \cdot l \cdot B) v$$

Tale uguaglianza è confermata dal risultato precedente

$$\text{f.e.m.} = V B l$$

## 2° LAPLACE

$$F = i \vec{l} \times \vec{B}_0$$

## POT ELETTRICA

$$P = V \cdot I$$

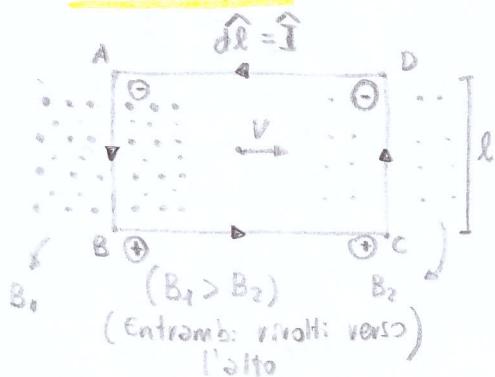
## POT MECCANICA

$$P = F \cdot \text{Velocità}$$

### CIRCUITO RIGIDO CON VELOCITÀ COSTANTE

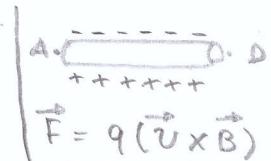
Prendiamo in considerazione un circuito rigido che si muove a velocità costante  $v$  in un campo magnetico non uniforme.

#### - Uso Lorentz



Orientando la circolazione  $d\vec{l}$  (in accordo ad  $F$ ) calcoliamo la f.e.m totale, essa sarà data dalla somma di quelle sui lati AB e DC. Nei lati AD e BC non c'è alcuna f.e.m poiché le cariche si spostano lateralmente.

$$\text{f.e.m.} = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Poiché nel tratto DC  $\vec{E}_2$  e  $d\vec{l}$  sono discordi:

$$\text{f.e.m.} = V B_1 l - V B_2 l$$

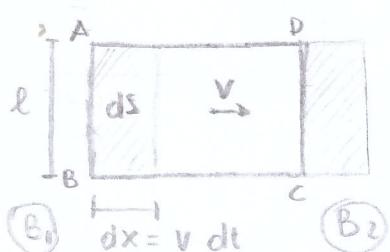
lunghezza  $\cancel{d}$   
 $AB = DC$

$$\text{f.e.m.} = V l (B_1 - B_2)$$

$$\vec{E} = (\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

#### - Uso Faraday

Come fatto precedentemente ottengo il flusso infinitesimo  $d\phi_B$  mediante la superficie spazzata nel tempo  $dt$  ( $ds$ )



$$d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B_2 - B_1) \cdot l v dt$$

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - [(B_2 - B_1) \cdot l v]$$

$$\text{f.e.m.} = V l (B_1 - B_2)$$

Il flusso  $d\phi_B$  è dato dalla somma dei flussi, in tal caso sono di segno

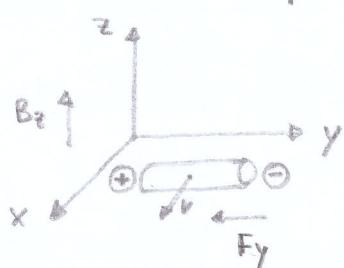
### BACCHETTA FERMA IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE

Consideriamo una bacchetta che si muove a velocità costante in un sistema di riferimento  $xyz$  fisso, in tal caso posso utilizzare la Forza di Lorentz. Come nei casi precedenti, troverò uno f.e.m. ai capi dell'asta.

Successivamente però se mi sposto in un sistema di riferimento mobile  $x'y'z'$  solidale con la bacchetta, ho comunque un f.e.m. ma non posso giustificarlo con Lorentz ( $E_R = 0$ ). Devo quindi usare la Relatività ristretta per i campi elettrici e magnetici.

#### Sistema fisso $xyz$

Considero il campo  $B_0$  come avendo sola componente lungo l'asse  $z$ .



La bacchetta trascina sull'asse  $x$  con velocità costante  $v$ . Avrò quindi una forza  $F_y$  data da:

$$|F_y| = -qU B_z \quad |E_y| = -UB_z$$

(Dritto verso le y) (Comp. decrescenti elettronatore)

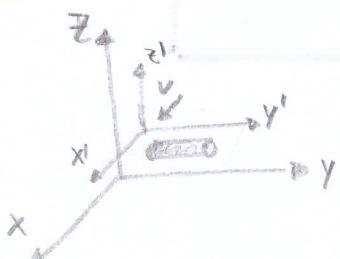
Lorentz

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$E_m = \frac{F}{q}$$

#### Sistema mobile solidale con la bacchetta

Nel sistema  $x'y'z'$  la bacchetta non si muove non posso applicare Lorentz.



Tuttavia dalla Relatività ottengo le seguenti relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - UB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + UB_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{U}{c^2} E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{U}{c^2} E_y) \end{array} \right.$$

Nel nostro caso nel sistema fisso vi è solo  $B_z$

$$(E_y = E_x = E_z = 0) \quad (B_x = B_y = 0)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

Si ha quindi:

$$B'_z = \gamma B_z$$

$$E'_y = \gamma(-UB_z) = -UB'_z$$

$$E'_y = -UB'_z$$

Velocità di trascinamento del sistema mobile

## DINAMO

Abbiamo visto che una spira percorso da corrente ed immersa in un campo magnetico è soggetto ad una coppia di forze che lo fa ruotare.

Vediamo ora il concetto allo base della dinamo, alternatore ecc..

Se facciamo ruotare una spira in un campo  $B_0$  durante il moto l'angolo tra la superficie (avente la spira come contorno) e  $B_0$  varia nel tempo, variano il flusso  $\phi_s(B_0)$ , e quindi per Faraday ci sarà una f.e.m all'interno del circuito



$$\phi_s(B_0) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = B_0 S \cos(\theta(t))$$

Poiché ruota  
l'angolo varia

## FLUSSO

$$\phi_s(B_0) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

## PRODOTTO SCALARE

$$\vec{b} \cdot \vec{B} = ab \cos\theta_B$$

## FARADAY

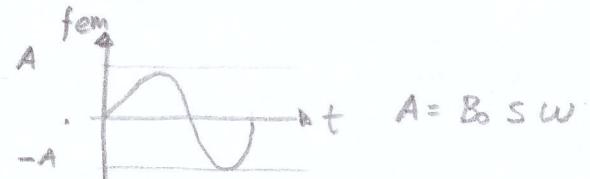
$$f.e.m. = - \frac{d\phi_s}{dt}$$

Se ruotiamo la spira a velocità costante ( $\theta(t) = \omega t$ ) si ha quindi:

$$f.e.m. = - \frac{d[B_0 S \cos(\omega t)]}{dt}$$

$$f.e.m. = B_0 S \omega \sin(\omega t)$$

Si avrà quindi una corrente sinusoidale



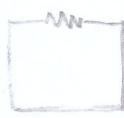
## FORZA ELETROMOTRICE INDUTTA

### MUTUA INDUZIONE

Poniamo due circuiti  $C_1$  e  $C_2$ , nel primo vi è un generatore che fa scorrere una corrente  $I_1$  che genera un campo  $B_1$ , in  $C_2$  vi sarà un flusso costante  $\phi_2$  proporzionale alla corrente  $I_1$ . Il coefficiente di proporzionalità  $H_{12}$  è detto di MUTUA INDUZIONE

e dipende dalle forme geometriche dei circuiti e la loro mutua posizione.

$B_1$



$$\phi_2 = \phi_{sc}(B_1) = H_{12} I_1$$

$$\phi_2 = H_{12} I_1$$

(C1)

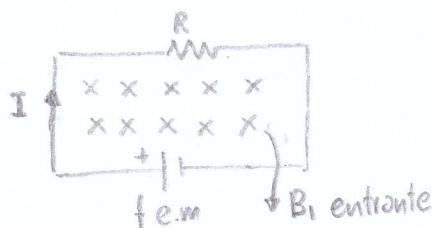
(C2)

Applicando Faraday, al variare della corrente  $I_1$  si ha su  $C_2$  una f.e.m. ( $f_2$ )

$$f_2 = - \frac{d\phi_2}{dt} = - H_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

### Autoinduzione

Il circuito  $C_1$  subisce un flusso  $\Phi_1$ , causato dal campo  $B_1$  da lui stesso generato proporzionale alla corrente  $I$



$$\Phi_1 = M_{11} I_1 = L I_1 \quad [\Phi] = [\text{Volt/sec}] = \text{Weber}$$

Il coefficiente  $L$  prende il nome di INDUTTANZA

$$[L] = \left[ \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} \right] = [H] (\text{Henry})$$

Se il flusso varia e quindi la corrente, si instaura una forza eletromotrice opposta a quella del generatore dato da: (FARADAY)

FARADAY

$$f_0 = - \frac{d(L I_1)}{dt}$$

$$f_0 = - L \frac{d I_1}{dt}$$

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d \Phi_1}{dt}$$

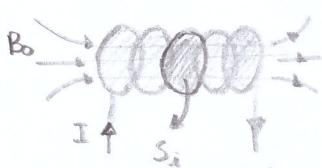
Il segno ( $-$ ) è giustificato dalla conservazione dell'energia dato che se  $f_0$  fosse a favore di f.e.m il circuito aumenterebbe la corrente all'infinito

### ESEMPI

Vediamo ora un esempio di autoinduzione e uno di mutua induzione:

#### Induttanza solenoide

Ricaviamo il coefficiente di autoinduzione  $L$  per un solenoide:



Il flusso totale attraverso il solenoide sarà dato dalla somma dei flussi delle singole  $S_i$  (superficie avente la spira  $i$ -esima come contorno)

SOLENOIDE INFINTO

$$B_0 = \mu_0 N_e I$$

$$N_e = \frac{N}{l}$$

Considerando il solenoide molto lungo in relazione al sezione possiamo usare la formula del solenoide infinito. Il flusso è quindi dato: Numero spire

$$\Phi_s = L I$$

$$\Phi_s = \sum \Phi_{S_i} = \sum (B \cdot S_i) = N \left( \mu_0 N_e I S \right) = \mu_0 \frac{N^2}{l} I S = \mu_0 N_e^2 l I S$$

Superficie  
spira

Quindi

$$L = \mu_0 N_e^2 l S = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

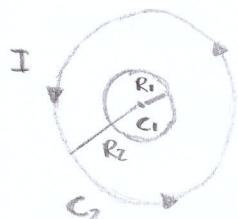
$N \rightarrow$  Numero spire

$l \rightarrow$  Lunghezza solenoide

$S \rightarrow$  Superficie spira

## Mutuo induzione tra due spire

Consideriamo due spire copiane concentriche, la spira esterna  $C_2$  e' percorsa da una corrente  $I$ , vogliano vedere il flusso di  $B_2$  nel circuito  $C_1$ , da considerarsi un punto, in modo che  $B_2$  in quello zona sia costante. ( $R_1 \ll R_2$ )



$$\Phi_1 = B_2 \cdot S_1 = \frac{\mu_0 I}{2R_2} \cdot \pi R_1^2$$

Il coefficiente di mutua induzione e'  
quindi:

$$H_{21} = H_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_1^2}{R_2}$$

### $B_0$ SPIRA

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

Nel nostro caso  $x=0$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R}$$

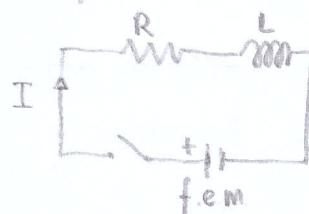
$$|\Phi = H I$$

## CIRCUITO RL

Se in un circuito e' presente una bobina (induttanza) essa si oppone alla variazione di corrente come precedentemente detto, vogliano quindi studiare il processo di "carica" e "scarica" del circuito (TRANSITORIO) dopo l'accensione di un interruttore.

### CARICA

In questo caso chiudendo l'interruttore si collega la bobina che si carica.



Usando Kirchoff:

$$\text{f.e.m} + V_L = IR$$

$$f - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$V_L = f_0 = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{f.e.m} = f$$

Per sostituzione:

$$-L \frac{dI}{dt} = IR - f \quad -\frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = x(t)$$

$$x(t) = IR - f$$

$$dx = R dI$$

$$(dI = \frac{dx}{R})$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \quad \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$IR - f = (-f)e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$x_0 = I_0 R - f$$

$$I_0 = 0$$

$$I(t)$$



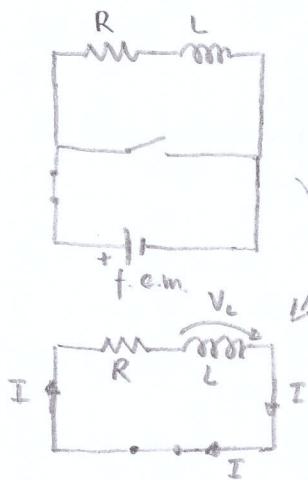
Quindi:

$$I(t) = \frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right)$$

Se imponiamo  $\frac{L}{R} = T$   
e' molto simile a quella  
della carica del  
condensatore

### • SCARICA

Consideriamo ora un circuito, in cui c'è presente una bobina, inizialmente vi è collegato un generatore, quindi mediante due interruttori si scollega il generatore e si cortocircuitta la bobina che di conseguenza si scarica, analizziamo la corrente in quest'ultima fase.



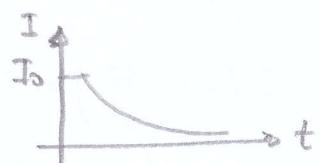
Applico Kirchoff durante la scarica

$$V_L = IR \quad -L \frac{dI}{dt} = IR$$

Quindi:

$$\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \quad \ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (I_0 = \text{f.e.m.} / R)$$



OSS

Ricaviamo un'altra analogia in meccanica

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} \quad F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{Volt} \rightarrow F \\ -L \rightarrow m \\ I \rightarrow v \end{cases}$$

### ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN'INDUTTANZA

Per ricavare l'energia che immagazzina un'induttanza in un circuito si può usare la potenza dissipata dalla resistenza durante la scarica oppure in generale applicando Kirchoff, vediamo entrambi i casi.

### • CALCOLO MEDIANTE POTENZA DISSIPATA

Durante la scarica, la resistenza dissipà energia sotto forma di calore, tale energia è data dall'induttanza essendo l'unica fonte di energia.

$$U = \int du = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty R I^2 dt = \int_0^\infty R \frac{I^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$\begin{cases} du = P dt \\ P = I^2 R \end{cases}$$

$$U = \frac{f^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{f^2}{R} \frac{\tau}{2} [e^{-\frac{2t}{\tau}}]_0^\infty$$

$$U = -\frac{f^2}{R} \frac{\tau}{R} \cdot \frac{1}{2} [0 - 1] = +\frac{f^2}{R^2} \tau \cdot \frac{1}{2}$$

SCARICA INDOUTTANZA

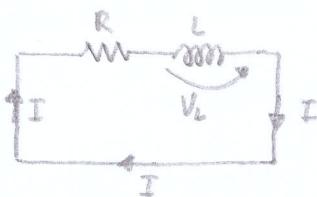
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$I_0 = \frac{f}{R} = I_{max}$$

$$U = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

## • USANDO KIRCHHOFF

Sempre considerando il circuito carico, ma usando Kirchoff ricaviamo l'energia immagazzinata dall'induttanza.



$$V_C = IR \quad -L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\left| \begin{array}{l} V_L = -L \frac{dI}{dt} \\ du = P dt \\ P = I^2 R \end{array} \right.$$

Come nel caso precedente otteniamo  $U$  dalla somma dei  $du$ , ricaviamo quindi il contributo infinitesimo:

$$du = P dt = I^2 R dt$$

Moltiplicando Kirchoff sui entrambi i membri per  $I$  ricaviamo:

$$I \left( -L \frac{dI}{dt} \right) = I^2 R = \frac{du}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad du = -L I dI$$

Quindi:

$$U = \int_{I_{\max}}^0 -L I dI = -L \left[ \frac{I^2}{2} \right]_{I_{\max}}^0 = -L \left[ -\frac{I_{\max}^2}{2} \right] = \frac{L}{2} I_{\max}^2$$

$$I_{\max} = I_0 = \frac{t}{R}$$

$$U = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

## DENSITÀ DI ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

Come fatto con il campo elettrico, ricaviamo la densità di energia del campo magnetico, come nell'altro caso ricaviamo l'energia immagazzinata in un volume conosciuto (in relazione a  $B_0$ ) e dividendo tale risultato per il volume ricaviamo la densità.

L'energia in un solenoida è:

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 N_e^2 l S I^2$$

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{B_0^2}{\mu_0 I^2} l S I^2 = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} l S$$

Da  $B_0$  nel solenoida:

$$N_e^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 I^2}$$

SOLENOIDE INFINITO'

$$L = \mu_0 N_e^2 l S$$

$$B_0 = \mu_0 I N_e$$

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\mu = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} l S \cdot \frac{1}{l S}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0}$$

## LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LE Onde Elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell descrivono le proprietà del campo elettrico e magnetico e come interagiscono fra di loro. Abbiamo già ricavato tutte e quattro le equazioni; tuttavia la 4° (legge di Ampere) è incompleta dato che si riferisce solo ai casi stazionari (corrente costante nel tempo), andiamo quindi ad analizzare i casi non stazionari.

La legge di Ampere lega la circolazione di  $\vec{B}_0$  alla corrente concatenata alla superficie avente la linea di circolazione come contorno

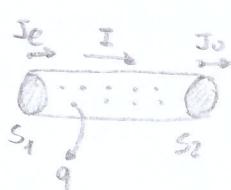
$$\oint_e \vec{B}_0 \cdot d\vec{e} = \mu_0 \Sigma (I_{\text{conc}})$$

Tale equazione non è valida se si prende in considerazione un caso di corrente non stazionaria, come ad esempio la carica di un condensatore. Il circuito è percorso da corrente e produce un campo  $\vec{B}_0$ , tuttavia all'interno del condensatore non vi è alcuna corrente concatenata (se ci fosse il condensatore si brucerebbe).

Dobbiamo quindi comprendere da dove provengono i campi  $\vec{B}_0$ , tale fenomeno è spiegato dalla legge di Ampere - Maxwell (4° eq di Maxwell)

### EQUAZIONE CONTINUITÀ DELLA CORRENTE

Consideriamo una superficie chiusa, ad esempio la superficie esterna (cilindro). In tale conduttore sono presenti delle cariche, il flusso totale sulla



superficie chiusa di  $\vec{J}$  deve necessariamente essere legato alla variazione di cariche all'interno del volume racchiuso, poiché le cariche non possono essere create né distruite. (Nelle pareti laterali non c'è flusso)

$$\Phi_{\text{tot}}(\vec{J}) = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ_{\text{int}}}{dt}$$

$Q_{\text{int}} \rightarrow$  carica interna al conduttore

Il segno (-) è dovuto al fatto che se il flusso è positivo (escono più cariche di quelle ne entrano) allora le cariche interne  $Q_{\text{int}}$  diminuiscono e  $\frac{dQ}{dt}$  è negativa, ma con il segno (-) diventa positiva in accordo al flusso.

N.B.

Il flusso totale è dato da quello uscente meno quello entrante

## • FORMA LOCALE

Ricaviamo la forma "divergente" dell'equazione di continuità applicando il Th della divergenza ed esprimendo la corrente  $Q_{int}$  mediante la densità  $p$ .

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{div} \vec{J} \, dz ; \quad \frac{dQ_{int}}{dt} = \int_C \frac{\partial p}{\partial t} \, dz$$

Quindi:

$$\int_C \operatorname{div} \vec{J} \, dz = \int_C \frac{\partial p}{\partial t} \, dz$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial p}{\partial t}}$$

## LEGGE DI AMPERE-MAXWELL (4° EQ MAXWELL)

Tale legge è la generalizzazione della legge di Ampere, questo è valido per Casi stationari e Non stationari.

Se applichiamo l'operatore divergenza ( $\vec{\nabla} \cdot$ ) ad entrambi i membri della legge di Ampere ricaviamo che il primo membro è identicamente nullo, il secondo lo è solo se  $I$  è costante (caso stationario).

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J})$$

Occorre quindi sostituire il secondo membro con una grandezza, relazionata a  $\vec{J}$  ma identicamente nulla, dall'eq di continuità ricaviamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

Applicando la 1° eq di Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) &= \mu_0 \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) &= \mu_0 \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \end{aligned}$$

Togliendo l'operatore ( $\vec{\nabla} \cdot$ ):

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

(4° EQ MAXWELL)

## • FORMA GLOBALE

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ_{int}}{dt}$$

Th Divergenza

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{div} \vec{J} \, dz$$

$$\boxed{p = \frac{Q}{V} = \frac{\text{Carica}}{\text{Volume}}}$$

LEGGE DI AMPERE

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) := 0}$$

EQ CONTINUITÀ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial p}{\partial t}$$

1° EQ MAXWELL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{p}{\epsilon_0}$$

### • FORMA GLOBALE

Per ricavare la forma globale useremo il Teorema di Stokes.

Applichiamo l'integrale di flusso ad entrambi i membri

$$\oint_{S_e} (\vec{D} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left[ \int_{S_p} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \oint_{S_e} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} \right) \right]$$

$$\oint_{S_e} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{se}(t)}{\partial t}$$

CORRENTE DI CONDUZIONE

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

TH STOKES

$$\oint_{S_e} (\vec{D} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_{S_e} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{D} \times \vec{B}_0 = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\Phi_{se}(E_0) = \oint_{S_e} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$I = \oint_{S_e} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

### • ESEMPIO APPLICAZIONE (\*)

Tornando al caso del condensatore, in cui c'è un campo magnetico ma non vi è corrente concatenata tra le armature, vediamo da cosa c'è dato  $B_0$ ; applicando la n° eq in forma globale:

$$\oint_{S_e} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}_0 \cdot S)}{\partial t}$$

Sostituiamo i valori nel caso di un condensatore piano:

$$\oint_{S_e} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\partial (\epsilon_0 S \vec{E}_0)}{\partial t} = \mu_0 \frac{dQ}{dt}$$

Troviamo quindi che la circuitoria di  $B_0$  intorno ad un condensatore è data dalla corrente di spostamento ( $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}$ )

(\*) N.B.

Il problema nel caso del condensatore è che la superficie passante tra le armature, e avente come base un "anello" sul circuito, non c'è percorso da corrente, quindi non c'è concatenato

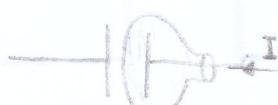
$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\vec{E}_0 \cdot S \cdot \epsilon_0 = Q$$

N.B.

In questo caso  $\sigma(t)$  varia nel tempo



## EQUAZIONI DI MAXWELL

Ora abbiamo tutte le quattro equazioni di Maxwell complete:

### • 1°eq (LEGGE DI GAUSS)

Tale legge descrive la proprietà delle linee di campo di  $E_0$ , tali linee infatti divergono da una carica elettrica

FORMA GLOBALE

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{P}{\epsilon_0}$$

### • 2°eq (INESISTENZA MONOPOLI MAGNETICI)

Tale equazione descrive la proprietà del campo  $B_0$  per cui non esistono cariche magnetiche (monopoli magnetici)

FORMA GLOBALE

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = 0$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$$

### • 3°eq (LEGGE DI FARADAY-NEUHAN-LENZ)

Questa equazione ci dice che il campo elettrico può essere generato anche dalla variazione del flusso del campo magnetico. Tuttavia il campo elettrico in questo caso NON è conservativo (circuito diverso da zero)

FORMA GLOBALE

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_{se}(B_0)}{dt}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt}$$

### • 4°eq (LEGGE DI AMPERE-MAXWELL)

Questa descrive come si può generare il campo magnetico, ovvero mediante corrente di conduzione oppure mediante corrente di spostamento

FORMA GLOBALE

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{cor}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_{se}(t_0)}{dt}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_0}{dt}$$

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

Attraverso le equazioni di Maxwell si ricava l'EQUAZIONE DELLE Onde, la sua soluzione descrive matematicamente un'onda elettromagnetica.

In generale un'onda e' una perturbazione nello spazio, che per il suo passaggio lascia invariate le proprieta' presenti, essa trasporta energia.

### • EQUAZIONE DELLE Onde

Applichiamo le eq di Maxwell in forma locale, considerando che non vi siano cariche ( $\rho = 0$ ) e neanche correnti ( $\vec{J} = 0$ )

S: ha quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 ; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt} ; \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Prendiamo la 3° equazione e applichiamo l'operatore rotore ad entrambi i membri:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0)}{dt}$$

Il primo membro e' un'identita' vettoriale:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \text{ (Scalare)}$$

Le componenti al secondo membro hanno le seguenti componenti x:

$$[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})]_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right]_x \quad [\nabla^2 \vec{E}]_x = \left[ \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) \right]_x$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0)}{dt}$$

Sostituendo:

$$-\nabla^2 \vec{E} = - \frac{d(\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt})}{dt}$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

### • Prodotto $\mu_0 \epsilon_0$

Il prodotto fra le due costanti nel woto ha un notevole significato, ricaviamo le dimensioni e di conseguenza il suo valore numerico.

Dall'equazione d'onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Il primo membro ha dimensioni  $[L^{-2}]$  dato che vi sono le derivate seconde di grandezze spaziali, moltiplicata per quella del campo elettrico. Il secondo ha le dimensioni di  $\mu_0 \epsilon_0$  moltiplicate per quelle del campo diviso il tempo al quadrato:

$$[L^{-2}] \cancel{E} = \mu_0 \epsilon_0 E \cdot [T^{-2}] \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \left( \frac{L}{T} \right)^2$$

La radice di  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$  ha le dimensioni di una velocità, sostituendo i valori si ricava che equivale a circa la velocità della luce ( $c$ )

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad \boxed{\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$$

$$\begin{cases} \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \\ \mu_0 \approx 12,6 \cdot 10^{-2} \\ c \approx 3 \cdot 10^8 \end{cases}$$

L'equazione d'onda si può quindi porre:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Tale risultato ha portato alla conclusione che la luce è un'onda elettromagnetica

OSS

Per comprendere che  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  ha dimensioni  $[L^{-2}]$  si considera l'accelerazione:

$$a = \underbrace{\frac{d^2 x}{d t^2}}_{[T^{-2}]} = [L \cdot T^{-2}]$$

## RISULTATI DELL' EQUAZIONE DELLE Onde

Dall'equazione delle onde possiamo ricavare le caratteristiche delle onde elettromagnetiche.

In generale occorre ricavare le sei equazioni che descrivono  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , ognuna delle quali dipende dagli assi spaziali e dal tempo

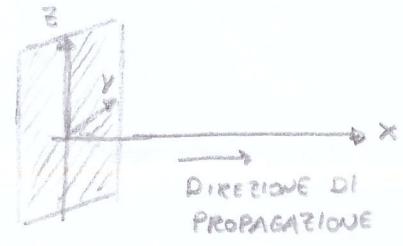
$$E_x(x, y, z, t); E_y(x, y, z, t); E_z(x, y, z, t) \mid B_x(x, y, z, t); B_y(x, y, z, t); B_z(x, y, z, t)$$

Per semplificare noi considereremo il caso di ONDE PIANE

### ONDE PIANE

La caratteristica è data dal fatto che l'onda è composta da un susseguirsi di piani infiniti, in cui i campi sono costanti.

Se ad esempio si prende l'asse  $x$  come direzione di propagazione, le componenti dei campi non variano lungo gli assi  $y$  e  $z$  sul piano considerato preso al tempo  $t$ .



Abbiamo quindi:

$$E_x(x, t); E_y(x, t); E_z(x, t) \mid B_x(x, t); B_y(x, t); B_z(x, t)$$

L'equazione dell'onda si riduce a:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

### Struttura della soluzione

Un'equazione di questo tipo ha una soluzione del genere:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad f = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

Infatti sostituendo si ottiene:  $f'' = \frac{1}{c^2} f''' c^2$

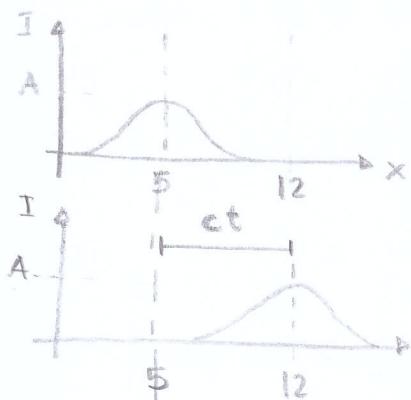
es

$$f = x^2 + ct \times$$

$$f = \ln|x+ct| \vee$$

$$f_1$$

Tale struttura e' giustificata dal tipo di onda detto ONDA PROGRESSIVA.  
 Si immagini una funzione  $f(x)$  che dato un valore  $x$  restituisca l'intensita' dell'onda.



Ad esempio:

$$f(5) = A$$

Tuttavia essendo un'onda che si propaga verso le  $x$  crescenti, dopo un tempo  $t$ , essa avra' percorso uno spazio  $ct$ , sottraendo lo spazio attuale a quello percorso ottengo il valore desiderato

$$f(12 - 7) = A \quad \begin{cases} x = 12 \\ ct = 7 \end{cases}$$

La funzione dovrà quindi essere del tipo  $f(x-ct)$

### Studio componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Applicando le eq di Maxwell nel nostro caso, ricaveremo le equazioni per le sei componenti (3 di  $\vec{E}$ ; 3 di  $\vec{B}$ )

OSS

[Le equazioni di Maxwell danno in totale 8 equazioni, due dalla 1° e 2° (scalar) e sei dalle 3° e 4° (vettori)]

EQ MAXWELL ( $\rho=0; \vec{J}=0$ )

$$1. \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$2. \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3. \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt}$$

$$4. \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_0}{dt}$$

### Componenti $E_x$ e $B_x$

Uso la 1° equazione

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0$$

Poiche' consideriamo il caso di onde plane il campo  $\vec{E}$  non varia lungo  $y$  e  $z$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Quindi la componente  $E_x$  non dipende da  $x$ .

Vediamo ora se  $E_x$  dipende dal tempo:

Uso la componente  $x$  della  $4^{\circ}$  eq ( $4x$ )

$$\left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Anche il campo  $\vec{B}$  non varia lungo  $y$  e  $z$  quindi:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

Quindi la componente  $x$  del campo  $\vec{E}$  non dipende ne' da  $x$  ne' da  $t$ , dunque  $\vec{E}$  NON ha componente  $x$  nell'onda.

Usando la  $2^{\circ}$  equazione e la componente  $x$  della  $3^{\circ}$ , si ricavano i medesimi risultati per  $\vec{B}_0$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Quindi neanche la componente  $x$  di  $\vec{B}_0$  fa parte dell'onda.

Abbiamo quindi una nuova caratteristica dell'onda elettromagnetica, ovvero NON c'e' componente del campo lungo la direzione di propagazione. Un tipo di onda del genere e' detta ONDA TRASVERSALE.

Rimangono le seguenti componenti:

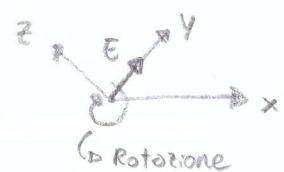
$$E_y(x,t); E_z(x,t) \quad | \quad B_y(x,t); B_z(x,t)$$

### • Componente $E_z$

Le componenti di un vettore dipendono dalla posizione (rotazione) del piano di riferimento  $yz$ . Per semplificare consideriamo il campo  $\vec{E}_0$  tutto diretto lungo l'asse  $y$  e quindi con componente  $z$  nulla ( $E_z = 0$ )

Dunque nel nostro sistema di riferimento abbiamo solo le seguenti componenti:

$$E_y(x,t) \quad | \quad B_y(x,t); B_z(x,t)$$



### • Componente $B_y$

- Uso la componente  $y$  della 3° eq. (3y)

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \begin{cases} E_x \text{ non dipende} \\ \text{da } z \text{ o } y \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad | E_z = 0 \text{ (Nel nostro} \\ \text{sistema di rif)}$$

Quindi  $B_y$  non dipende dal tempo

- Uso la componente  $z$  della 4° eq. (4z)

$$\left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \begin{cases} E_z = 0 \\ B_x \text{ costante in } y \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

Dunque neanche la componente  $y$  di  $B$  ( $B_y$ ) fa parte dell'onda.

Rimangono solo:

$$E_y(x, t) \quad | \quad B_z(x, t)$$

Poiché  $y \perp z$  deduciamo che anche nell'onda elettromagnetica il campo  $\vec{E}$  e' perpendicolare  $\vec{B}$ , entrambi diretti trasversalmente alla direzione di propagazione

Ricaviamo quindi le equazioni di queste componenti:

### • $E_y(x, t)$ e $B_z(x, t)$

- Uso la componente  $z$  della 3° eq. (3z)

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

- Uso la componente  $y$  della 4° eq. (4y)

$$\left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

### Componente $y$ (ROTORE)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{E}]_y = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]$$

3° EQ

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d \vec{B}}{dt}$$

### Componente $z$ (ROTORE)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{B}]_z = \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

### 4° EQ

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d \vec{E}}{dt}$$

Dato che la scelta degli assi  $y$  e  $z$  e' del tutto invariante, possiamo trovare dalle soluzioni i riferimenti assidi; perci' annotando che i campi sono perpendicolari fra di loro ( $\vec{B} \perp \vec{E}$ )

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

Le equazioni di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dovranno essere:

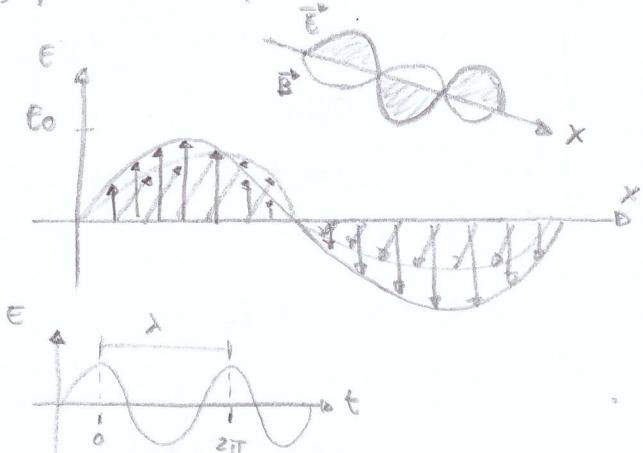
$$E = E_0(x \pm ct) \quad B = B_0(x \pm ct)$$

#### • RISULTATO EQUAZIONE DELLE Onde NEL CASO SINUSOIDALE

Tramite lo Sviluppo di Fourier si ricava che un qualsiasi segnale puo' essere scomposto in onde sinusoidale. Vediamo quindi la soluzione nel caso sinusoidale poche' qualsiasi altro tipo, puo' essere formato dalla sovrapposizione di onde sinusoidali.

Poiche'  $\sin(\cdot)$  deve avere un numero puo' come argomento si ha:

$$\begin{cases} E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{\lambda} ct\right) \\ B = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{\lambda} ct\right) \end{cases}$$



Le onde di questo tipo, avendo un'unica frequenza, sono dette MONOCROMATICHE imponendo per definizione:

$$T = \frac{\lambda}{c} \text{ (Periodo)} ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (Numero d'onda)} ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E = E_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

$$B = B_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

Il segno  $\pm$  dipende dalla direzione. Se diretto verso le  $x$  crescenti (-), altrimenti (+)

## - Energia trasportata (Densità di energia del campo elettromagnetico)

Ricaviamo la percentuale di energia che ciascun campo trasporta; calcolando la DENSITÀ DI ENERGIA DEL CAMPO ELETROMAGNETICO.

Applicando la soluzione generica a quello sinusoidale otteniamo il rapporto tra i due campi.

Consideriamo il caso di un'onda diretta verso le  $x$  crescenti:

$$E_0 \cos(kx - wt) \cdot k = -B_0 \cos(kx - wt) (-w)$$

$$E_0 k = B_0 w \quad \frac{E_0}{B_0} = \frac{w}{k} = \left( \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) = \frac{\lambda}{T} = C$$

In questo caso si ha:

$$\frac{E_0}{B_0} = C = \approx 3 \cdot 10^8$$

Tuttavia tale risultato è dovuto alle unità di misura adottate, in un altro sistema di misura  $C$  poterà essere uguale ad 1.

Tramite la densità di energia si ricava il vero rapporto.

$$M = M_E + M_B = \frac{1}{2} E_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\underline{M(E_0)}$$

$$M = \frac{1}{2} E_0 E^2$$

Esprimiamo il secondo termine del secondo membro tramite  $E$

Usando il rapporto precedentemente ricavato

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{C^2} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0 E^2}{C^2} = \frac{1}{2} E_0 E^2$$

Si ha quindi che l'energia trasportata dal campo  $\vec{B}$  è pari a quella trasportata da  $\vec{E}$ .

In un'onda elettromagnetica l'energia totale è suddivisa a metà tra  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . ( $E = 50\% M$ ;  $B = 50\% M$ )

### SOLUZIONE GENERICA

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad E \perp B$$

$$- \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### CASO SINUSOIDALE

$$E = E_0 \sin(kx \pm wt)$$

$$B = B_0 \sin(kx \pm wt)$$

### M(B<sub>0</sub>)

$$M = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$\frac{E_0}{B_0} = C$$

$$B^2 = \frac{E^2}{C^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{E_0 E^2}{C^2} = \frac{1}{2} E_0 E^2$$

## VETTORE DI POYNTING

Per indicare l'energia ad esempio di un'onda elettromagnetica si definisce il VETTORE DI POYNTING:

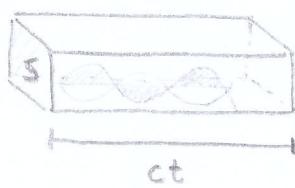
$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$[P] = [W/m^2]$

Tale grandezza indica l'energia che passa attraverso una superficie unitaria nell'unità di tempo ( $S=1$ ;  $t=1$ )

Vediamo come ricavae questo risultato nel caso di un'onda elettromagnetica

Come fatto altre volte calcoliamo il flusso attraverso una superficie considerando un volume:



L'energia interna, sarà data dal volume per la densità di energia. (Considerano il modulo dato che  $E \perp B$ )

$$P = \text{Vol} \cdot \mu = S \cdot c \cdot t \cdot \mu = c \mu$$

$$P = c \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} S=1 \\ t=1 \end{array} \right.$$

$$P = c \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E B c + \frac{1}{2 \mu_0} B \frac{E}{c} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E B c^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B E$$

DENSITÀ ENERGIA ONDA

$$\mu = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

$$P = \frac{1}{2 \mu_0} E B + \frac{1}{2 \mu_0} B E = \frac{1}{\mu_0} B E \quad P = \frac{1}{\mu_0} E B$$

$$\left| \frac{\epsilon_0}{\mu_0} = c \right.$$

$$\left| \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \right.$$

$$\left| \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \right.$$

### • INTENSITÀ ISTITANTEA ONDA SINUSOIDALE

L'intensità istantanea è definita come il valore medio del vettore di Poynting

Nel caso di un'onda sinusoidale si ha:

$$I = \frac{1}{\mu_0} E B \int_0^T \sin^2(kx - wt) dt = \frac{1}{\mu_0} E B \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} E = E_0 \sin(kx - wt) \\ B = B_0 \sin(kx - wt) \\ B_0 = E_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2 \mu_0} E B}$$



## CAMPIONE ELETTRICO E MAGNETICO NELLA MATERIA

Vediamo ora come varia il campo elettrico e magnetico nella materia in relazione a quello studiato nel vuoto.

### CAMPIONE ELETTRICO

- E' IN UN DIELETTRICO (CASO OMogeneo E ISOTROPO)

Consideriamo il caso di condensatore piano, questa volta però consideriamo che tra le armature vi sia un materiale isolante (DIELETTRICO).

Dall'esperienza si nota che vi è un aumento della capacità.

Nel caso ci sia il vuoto si ha:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

La nuova capacità sarà aumentata di un fattore  $\epsilon_r$ .

ISOTROPIA  
Le proprietà fisiche non dipende dalla direzione

$$C' = \epsilon_r C_0$$

Poiché la carica Q non varia in relazione al materiale interno (vuoto o no)

Si ha:

$$C_0 = \frac{Q}{V_0} \quad C' = \frac{Q}{V'}$$

Usando le relazioni precedenti ricaviamo che la nuova d.d.p ( $V'$ ) è inferiore a  $V_0$

$$V' = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

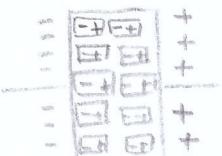
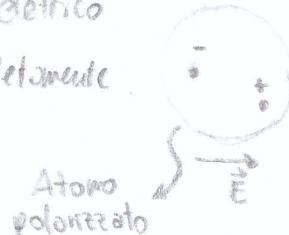
Poiché la d.d.p dipende da  $\vec{E}$  e dalla distanza, mantenendo  $C$  si deve avere una riduzione di  $\vec{E}$  all'interno del dielettrico

$$\epsilon_0 = \frac{V_0}{d} ; \quad E' = \frac{V'}{d} \quad \frac{\epsilon_0}{V_0} = \frac{E'}{V'}$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$E' = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}$$

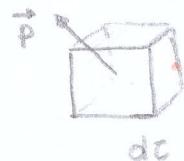
Tale riduzione è dovuta alla POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE degli atomi del materiale che cercano di annullare il campo elettrico interno, ma se sono isolanti non lo annullano completamente.



## VETTORE POLARIZZAZIONE ELETTRICA

Poiché non è possibile misurare il campo  $E^*$  punto per punto nella materia consideriamo dei cubi infinitesimi e ricaviamo il momento di dipolo medio che si forma nel volume infinitesimo (La presenza del momento di dipolo è dovuta alla deformazione degli atomi)

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta V} \vec{P}_d$$



Momento di Dipolo

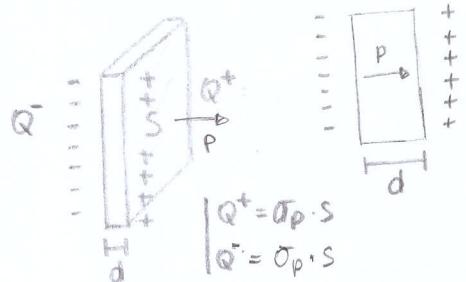
$$\vec{P}_d = (\vec{P} = q\vec{d})$$

|  $N$  = Numero particelle per volume

Il modulo di tale vettore rappresenta la DENSITÀ DI MOMENTO DI DIPOLI

## DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE SUPERFICIALE

Riprendiamo il caso del dielettrico, vediamo come la DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE SUPERFICIALE è legata al vettore di polarizzazione:



Dalla definizione di  $\vec{P}$  ho che il momento totale del dielettrico  $\vec{P}_d$  è dato:

$$P_d = P \cdot sd$$

Poi è tuttavia dato anche dalla sua stessa definizione:

$$P_d = Q \cdot d = (\sigma_p \cdot s) \cdot d = \sigma_p \cdot sd$$

Si ha quindi:  $\sigma_p = P$

In generale, poiché le superfici perpendicolari a  $\vec{P}$  sono prive di cariche:

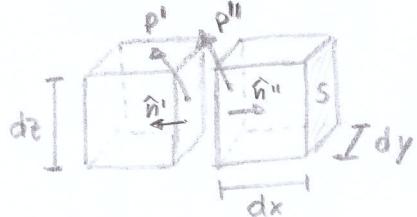
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$\hat{n} \rightarrow$  Normale alla superficie

Nel caso precedente abbiamo considerato che non vi sia DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE VOLUMETRICA, infatti  $\vec{P}$  è diretto in egual modo in tutti i cubetti infinitesimi, e quindi i volumi interni riescono a compensare le carenze.

## DENSITA' DI POLARIZZAZIONE VOLUMETRICA

Se il materiale non e' uniforme al suo interno vi e' una DENSITA' DI POLARIZZAZIONE VOLUMETRICA dovuta al fatto che due volumi infinitesi non si compensano a vicenda, e che quindi non abbiano il medesimo vettore di polarizzazione  $\vec{P}$ .



Calcoliamo le cariche dq presenti sulle due superfici che si "affacciano"

$$\begin{cases} dq^I = \sigma_p^I dy dz = \vec{P}^I \cdot \hat{n}^I dy dz \\ dq^{II} = \sigma_p^{II} dy dz = \vec{P}^{II} \cdot \hat{n}^{II} dy dz \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \\ S = dy dz \end{array} \right.$$

Dal prodotto scalare si ha:

$$dq^I = P^I dy dz \quad dq^{II} = -P^{II} dy dz$$

La somma delle cariche presenti tra le due dà la CARICA DI POLARIZZAZIONE

$$dq_p = (dq^I + dq^{II}) = (P^I - P^{II}) dy dz$$

Ricorriamo solo per la componente  $P_x$ , le altre sono simmetriche:

$$dq_{Px} = (P_x^I - P_x^{II}) dy dz \left[ P_x^I - \left( P_x^I + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx \right) \right] dy dz$$

$$\text{DIFFERENZIALE} \\ f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

$$dq_{Px} = - \frac{\partial P_x}{\partial x} dx dy dz$$

Per le altre componenti si ha il medesimo risultato, quindi:

$$dq_p = - \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dz = - \vec{\nabla} \vec{P} dz$$

Si definisce densita' di polarizzazione volumetrica  $p_p$ :

$$p_p = \frac{dq_p}{dz} = - \vec{\nabla} \vec{P}$$

OSS

Nel caso precedente si aveva  $\vec{P}$  uguale per tutti i cubetti, dato che si considerava il materiale omogeneo. ( $\vec{P}$  cost)

Quindi non si aveva densita' di polarizzazione volumetrica, ma solo superficiale

$$\sigma_p \neq 0 \quad p_p = 0$$

## VETTORE SPOSTAMENTO ELETTRICO

Abbiamo visto che all'interno di materiali se c'è presente una densità di polarizzazione volumetrica, e' come se ci fossero cariche all'interno.

Considerando tale densità volumetrica nella 1° eq di Maxwell, andiamo a definire un nuovo vettore detto SPOSTAMENTO ELETTRICO  $\vec{D}$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{P_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{P_{\text{LIB}} + P_{\text{POL}}}{\epsilon_0}$$

$P_{\text{LIB}} \rightarrow$  Cariche libere  
 $P_{\text{POL}} \rightarrow$  Cariche dovute alla polarizzazione

$$\epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = P_{\text{LIB}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}; \quad \vec{\nabla} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = P_{\text{LIB}}$$

Definendo il vettore  $\vec{D}$  come:

$$\boxed{\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

1° EQUAZIONE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\left| \begin{array}{l} P_0 = -\vec{D} \cdot \vec{P} \\ \vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_p \\ \vec{P} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{N \vec{P}_0}{\Delta z} \end{array} \right.$$

Quindi la 1° eq di Maxwell nel materiale è dato:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = P_{\text{LIB}}$$

### INVARIANZA DI $\vec{D}$ (Variazione $\vec{E}$ )

Il vettore  $\vec{D}$  non dipende dal materiale, esso è invariante, ciò che varia in relazione al materiale è il campo  $\vec{E}$ .

Ad esempio nel vuoto si ha il campo  $\vec{E}_0$  e quindi  $\vec{D}$  è dato:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + 0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad \left| \vec{P} = 0 \text{ Non c'è polarizzazione nel vuoto} \right.$$

Nel caso di un materiale si ha il campo  $\vec{E}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Il nuovo campo  $\vec{E}$  è dato imponendo l'ugualanza del vettore  $\vec{D}$ .

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}}$$

## VETTORE DI POLARIZZAZIONE (IN MATERIALI OMogenei E ISOTROPI)

Nel caso che il dielettrico sia un materiale omogeneo e isotropo si ha una relazione lineare tra  $\vec{P}$  ed il campo generico  $\vec{E}$ .

$$\boxed{\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}} \quad \chi = \text{Susceitività dielettrica}$$

(Il termine  $\epsilon_0$  e' stato introdotto solo per semplificare successivamente.)

Tornando alla relazione ricavata da  $\vec{D}$  per il campo  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\chi \epsilon_0 \vec{E}}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \chi \vec{E} \quad \vec{E}(1 + \chi) = \vec{E}_0$$

Quindi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{(1 + \chi)} \quad \left( = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \right) \quad (\text{Ricavato dal condensatore})$$

Quindi:

$$(1 + \chi) = \epsilon_r \quad \left| \begin{array}{l} \chi \geq 0 \\ \epsilon_r \geq 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Se } \chi = 0 \text{ si trova nel caso} \\ \text{del vuoto } \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1} \end{array} \right.$$

### COSTANTE DIELETTRICA

Prendiamo la 1° eq. di Maxwell ed esprimiamo il campo  $\vec{E}_0$  in relazione a quelli in un materiali isotropo omogeneo.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{P}{\epsilon_0}}$$

Ponete isotropo ed omogeneo posso portare fuori  $\epsilon_r$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

Quindi da qualsiasi relazione che si riferisce al campo elettrico nel vuoto, in un materiale il coefficiente  $\epsilon_0$  e' sostituibile dal prodotto  $\epsilon_0 \epsilon_r$

### ESEMPIO (ACQUA)

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

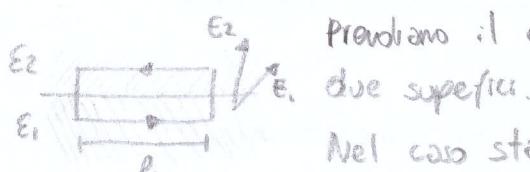
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$\epsilon_r \rightarrow$  Costante dielettrica dell'acqua  
 $\epsilon_r = 80$

## MISURAZIONE $\vec{E}$ e $\vec{D}$ NELLA MATERIA

### • MISURA DI $\vec{E}$

Se considero due dielettrici posti a contatto, si ricava, tramite la circolazione di  $\vec{E}$ , che la componente tangenziale dei due campi si egualia.



Proviamo il caso che non vi siano cariche libere tra le due superfici.

Nel caso stazionario si deve avere la circolazione di  $\vec{E}$  nulla. I lati più piccoli del rettangolo possono essere trascurati in relazione ad  $l$ .

$$\oint_{\text{c}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1t} l - E_{2t} l = 0$$

Quindi le componenti tangenziali dei due campi sono uguali

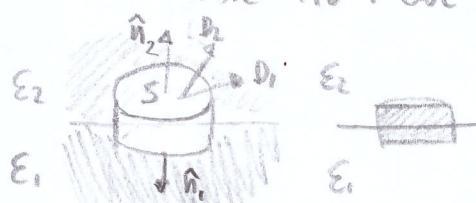
$$E_{1t} = E_{2t}$$

Tale concetto può essere usato facendo una piccola fessura in un materiale, per misurare il campo elettrico nel dielettrico

### • MISURA DI $\vec{D}$

Nel caso di  $\vec{D}$  invece si mantiene la componente normale, tale risultato si ottiene

Usando la legge di Gauss e considerando che non ci siano cariche libere tra i due dielettrici. ( $Q_{int}=0$ )



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_{n1} \cdot S - D_{n2} \cdot S = 0$$

Quindi:

$$D_{n1} = D_{n2}$$

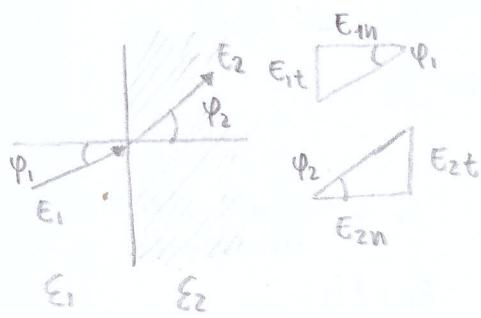
LEGGE GAUSS

$$\vec{D} \cdot \vec{D} = P_{UB}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{int}$$

### Rifrazione linee di forza

Da quest'ultima uguaglianza si ricava la relazione tra le componenti normali dei campi  $E_1^n$ ,  $E_2^n$



$$\tan \phi_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \tan \phi_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

Le componenti normali di  $\vec{E}$  saranno: ( $D_{1n} = D_{2n}$ )

$$\begin{cases} D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{1n} \\ D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_0 \epsilon_r E_{2n} \end{cases} \quad \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r}$$

Poiché le componenti tangenziali di  $\vec{E}$  sono uguali ( $E_{1t} = E_{2t}$ ) si ha:

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \cdot \frac{E_{2n}}{E_{2t}} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r} \quad \boxed{\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r}}$$

### INTENSITÀ DI POLARIZZAZIONE DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO

Come precedente detto se un dielettrico è immerso in un campo elettrico esterno esso si polarizza.

Il vettore  $\vec{P}$  è dato da:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta t} \vec{P}_d \quad \left| \begin{array}{l} \vec{P}_d \rightarrow \text{Momento di dipolo medio} \\ \Delta t \rightarrow \text{Cubo infinitesimo} \end{array} \right.$$

Consideriamo il caso di un dielettrico omogeneo e isotropo, e consideriamo che ogni blocco  $\Delta t$  e quindi ogni atomo risenta di un campo elettrico  $\vec{E}$  pari a quello esterno.

Il momento di dipolo  $\vec{P}_d$  dipende dalla somma di tre diversi meccanismi:

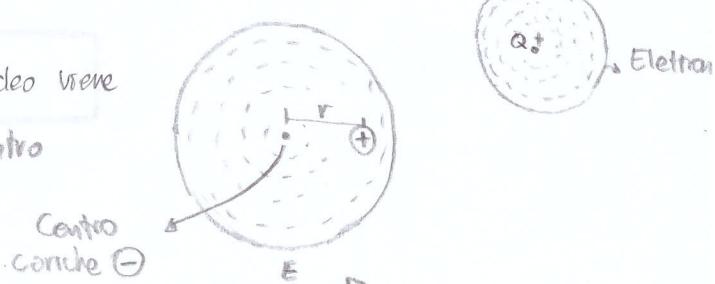
- Polarizzazione elettronica
- Polarizzazione di Orientamento
- Polarizzazione atomica o ionica.

### • POLARIZZAZIONE ELETTRONICA

Consideriamo un atomo, normalmente esso oltre ad essere neutro ha momento di dipolo nullo.

Un atomo può essere considerato come avere un nucleo al centro (+) ed una nube elettronica (elettroni) intorno. Normalmente il centro delle cariche negative coincide con quella positiva.

Se però vi è un campo  $\vec{E}$  esterno il nucleo viene spostato di un tratto  $r$  rispetto al centro creando così un momento di dipolo



Il momento di dipolo  $\vec{P}_d$  è proporzionale ad  $\vec{E}$ :

$$\vec{P}_d = \alpha_e \vec{E}$$

$\alpha_e \rightarrow$  Coefficiente di polarizzabilità elettronica

Cerchiamo di determinare tale coefficiente:

### - Coefficiente di polarizzabilità elettronica ( $\alpha_e$ )

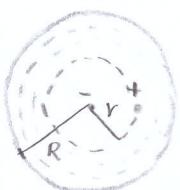
le cariche vengono spostate fino a quando la forza che li allontana non equivale quella coulombiana (poiché di segno opposto si annullano)

$$F_c = F_{ext} \quad F_{ext} = \vec{E} \cdot q$$

$F_c \rightarrow$  Forza coulombiana

$F_E \rightarrow$  Forza dovuta al campo esterno  $E$

Si ricava la forza  $F_c$  considerando la forza che subisce il nucleo (+) in relazione al campo  $\vec{E}_e$  creato dagli elettroni (-)



R → Raggio Atomo

Applico Gauss nel punto in cui si trova il nucleo. (r)

Th GAUSS

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ (SFERA)}$$

SFERA

$$E_e 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r^2 dr$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

$$E_e = \frac{q}{4\pi R^3} \frac{S \cdot r^2}{r^2 \epsilon_0 \cdot S} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} q \cdot \frac{r}{R^3}$$

$$P = \frac{Q_{TOT}}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

La forza che subisce il nucleo è data:

$$F_c = E_e q^+ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} q \cdot \frac{r}{R^3} \cdot q^+ = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} q^2 \frac{r}{R^3}$$

Poiché l'atomo è neutro  
 $q^- = q^+$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} q^2 \frac{r}{R^3} = E q \quad \frac{1}{4\pi \epsilon_0} q \frac{r}{R^3} = E \quad q r = (4\pi \epsilon_0 R^3) E$$

Poiché  $\vec{P}_d = q \cdot r$  si ha:

$$\vec{P}_d = (4\pi \epsilon_0 R^3) E$$

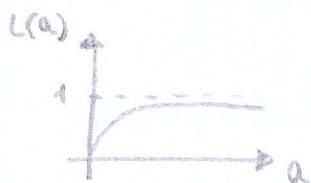
$$\alpha_e = 4\pi \epsilon_0 R^3$$

R → Raggio Atomo

### • POLARIZZAZIONE DI ORIENTAMENTO

Alcuni materiali sono composti da molecole dotate di un momento di dipolo proprio ( $\mu_p$ ) (es acqua). Normalmente le molecole si muovono in modo casuale in modo da avere momento totale nullo, tuttavia un campo esterno  $E$  tende ad orientare le molecole creando un momento totale non nullo ( $\vec{P}_d$ ), esso è inversamente proporzionale alla temperatura, con l'aumento della temperatura infatti le molecole si "agitano" di più andando ad ostacolare l'orientamento.

Il momento  $\vec{P}_d$  è proporzionale al momento proprio  $\mu_p$  tramite una funzione della **FUNZIONE DI LANGEVIN**. [ $L(a)$ ]



$$\vec{P}_d = \mu_p L(a) \quad a = \frac{\mu_p E}{kT}$$

$k \rightarrow$  Costante di Boltzmann

$T \rightarrow$  Temperatura kelvin

### - Polarizzazione a temperatura ambiente

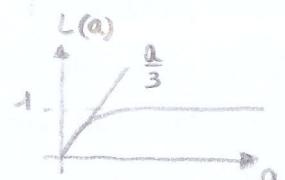
Se ci troviamo intorno ai  $25^\circ$  ( $\approx 298\text{ K}$ ) e quindi accesi, la funzione di Langevin può essere approssimata ad una retta ( $L(a) \approx a$ )

Si ha quindi:

$$\vec{P}_d = \mu_p \frac{a}{3} = \frac{\mu_p}{3} \frac{\mu_p E}{kT}$$

$$\vec{P}_d = \frac{\mu_p^2 E}{3kT}$$

$T \approx 298\text{ K}$



### • POLARIZZAZIONE ATOMICA O IONICA

Il principio è il medesimo di quella elettronica, ma invece che riferirsi agli atomi si riferisce alle molecole, il campo  $E$  va ad alterare i legami tra gli atomi.



## CAMPAGNA MAGNETICO (CASO STAZIONARIO)

Vogliamo ora vedere come varia il campo magnetico in un mezzo materiale rispetto a quello visto nel vuoto. Il campo totale sarà aumentato poiché oltre alle densità di corrente esterne  $\vec{J}$  ci sarà una densità  $\vec{J}_m$  dovuta al movimento delle cariche all'interno del materiale (ovviamente  $\vec{J}_m$  è un valore medio considerando in spazi relativamente piccoli, come fatto con il campo elettrico).

Sì: andrà quindi (caso stazionario)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \quad (4^{\text{o}} \text{ eq Maxwell})$$

stazionario

NEL VUOTO

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

Cerchiamo quindi di ricavare  $\vec{J}_m$ , attraverso lo studio di  $\vec{B}$  in un solenoida

### $\vec{B}$ IN UN SOLENOIDA INFINTO

- Vediamo come varia il campo  $\vec{B}$  in un solenoida se all'interno è vuoto o se è presente un materiale.

#### - Nel vuoto

In tal caso si ha:

$$B_0 = \mu_0 n_e I$$

$n_e \rightarrow$  Spire per unità di lunghezza

#### - Nella materia

Se il solenoida è riempito di un mezzo isotropo omogeneo si ottiene all'interno un nuovo campo, tuttavia la corrente che lo percorre è la medesima

$$B = \mu n_e I = (\mu_0 \mu_r) n_e I$$

$\mu \rightarrow$  Permeabilità assoluta  
 $\mu_r \rightarrow$  Permeabilità relativa

Sottraendo membro a membro vediamo la differenza:

$$B - B_0 = \mu_0 \mu_r n_e I - \mu_0 n_e I = \mu_0 [(\mu_r - 1) n_e I]$$

Da tale risultato si deduce che è come se il materiale presentasse un insieme di spire parcate da una nuova corrente

$$I_m \cdot n_{em} = (\mu_r - 1) n_e I$$



### CORRENTE DI MAGNETIZZAZIONE

Se si considerano le spire per unità di lunghezza presenti sul materiale ( $n_{em}$ ) uguali a quelle del solenoide ( $n_e$ ), si ottiene

$$I_m = (\mu_r - 1) I$$

$I_m \rightarrow$  Corrente di magnetizzazione  
 $I \rightarrow$  Corrente solenoide  
 $\mu_r \rightarrow$  Permeabilità magnetica relativa

### Vettore intensità di magnetizzazione

Nella trattazione di  $B_0$  abbiano considerato una spira percorso da corrente come un dipolo magnetico, avente un momento magnetico  $\vec{m}$ .  
Calcoliamo il momento magnetico per unità di lunghezza del solenoide percorso da  $I_m$ :

$$\vec{M}_e = n_e I_m \cdot \vec{s} = n_e I_m s \cdot \hat{n}$$

Introduciamo quindi il VETTORE INTENSITÀ DI MAGNETIZZAZIONE che rappresenta la densità volumetrica del momento magnetico considerando un volume ( $s \cdot t$ )

$$\vec{H} = \frac{n_e I_m \cdot s}{s \cdot t} \hat{n} = n_e I_m \hat{n}$$

MOMENTO MAGNETICO

$$\vec{m} = I \cdot \vec{s}$$

$\vec{s} \rightarrow$  Superficie spira  
 (orientata)

Quindi perché:

$$B - B_0 = \mu_0 [(\mu_r - 1) n_e I] = \mu_0 (I_m \cdot n_e) = \mu_0 |\vec{H}|$$

Si ha

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H}$$

Tale risultato, ricavato per un solenoide, ha validità generale.

## VETTORE CAMPO MAGNETICO $\vec{H}$

Ricordando che il vettore  $\vec{B}$  e' denominato impropriamente vettore di induzione magnetica, andiamo ora a definire un nuovo vettore  $\vec{H}$  chiamato VETTORE CAMPO MAGNETICO.

### ROTORG DI $\vec{H}$

Prendiamo in considerazione la legg di Maxwell per i casi stationari nei materiali:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$$

Il primo membro e' dato:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \vec{\nabla} \times \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$$

Quindi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_m$$

Poiche'

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_m}$$

Introduciamo quindi  $\vec{H}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\mu_0 \left( \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) = \vec{J}$$

Imponendo:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

es: solenoidi

$$\vec{H} = N_e I \quad [H] = [A/m]$$

La 4° eq di Maxwell stationario e' data:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \vec{J} \rightarrow \text{Densita' di corrente esterna}$$

OSS

Tale forma e' valida anche nel vuoto, in tal caso  $\vec{H} = 0$  e quindi  $\vec{H}$  e' dato:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{J} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

## CAMPIONE MAGNETICO IN MATERIALI ISOTROPI OMogenei

Nel caso di materiali isotropi e omogenei il vettore intensità di magnetizzazione  $\vec{M}$  è proporzionale ad  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m \rightarrow$  Suscettività magnetica

La definizione di  $\vec{H}$  diventa:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \quad \vec{H}(1 + \chi_m) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

$$\mu_r = (1 + \chi_m)$$

La legge di Ampere diventa in un materiale isotropo ed omogeneo:

$$\vec{V} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \right) = \vec{J}$$

$$\vec{V} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J}$$

Si deduce che in questo caso qualsiasi risultato ottenuto nel vuoto, può essere espresso in un materiale isotropo ed omogeneo sostituendo  $\mu_0$  con il prodotto  $\mu_0 \mu_r$ .

### ES (FILO INFINITO)

$$\vec{B} = \frac{(\mu_r \mu_0) I}{2\pi R} \quad R \rightarrow \text{Distanza dal filo.}$$

NEL VUOTO

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

## DEVIAZIONE LINEE DI FORZA CAMPO MAGNETICO

Come fatto per il campo elettrico, vediamo come variano le linee di forza nell'interfaccia tra due materiali con  $\mu_r$  diverse.

In analogia al campo  $\vec{E}$ , considerando che non vi siano correnti libere si hanno le seguenti relazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad | I_{LB} = 0$$

Come fatto con  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  si ricava:

$$B_{1t} = B_{2t}$$

Componenti tangenziali

$$H_{1n} = H_{2n}$$

Componenti normali

### LEGGE DI AMPERE

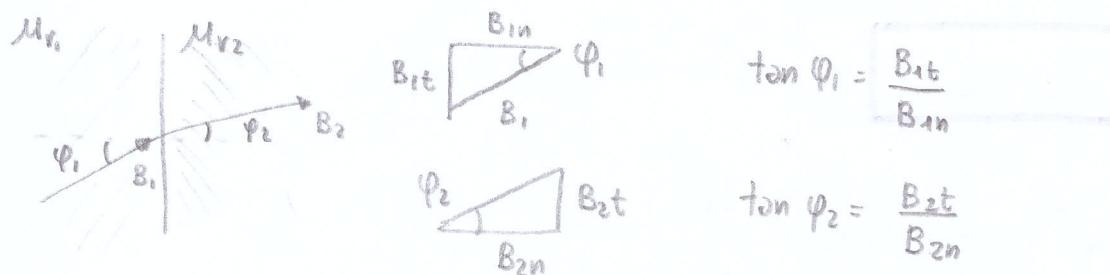
$$\vec{V} \times \vec{H} = \vec{J}_{LB}$$

Applicando Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S J_{LB} ds = I_{LB}$$

Quando la componente tangenziale di  $\vec{H}$  si conserva, e anche quella normale di  $\vec{B}$ .

Le linee di  $\vec{B}$  tra l'interfaccia formano due angoli:



Il rapporto tra le tangenti è dato:

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \cdot \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} \quad | B_{1n} = B_{2n}$$

Poiché  $\vec{B}$  è relazionato ad  $\vec{H}$

$$B_{1t} = \mu_0 \mu_1 H_{1t}, \quad ; \quad B_{2t} = \mu_0 \mu_2 H_{2t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Si ha:

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad | H_{1t} = H_{2t}$$

### VARI TIPI DI MATERIALI

A seconda del comportamento in presenza di un campo magnetico esterno, si distinguono due tipi di materiali:

- Diamagnetici: in tal caso  $\chi_m$  è negativa, ovvero gli atomi creano un momento magnetico opposto a  $\vec{B}$  esterno. Le molecole di questo materiale non presentano un momento magnetico proprio.

- Paramagnetici: In questo caso  $\chi_m$  è positivo, quindi la magnetizzazione è concorde a  $\vec{B}$ . La suscettività è inversamente proporzionale alla temperatura. Le molecole di questo materiale presentano un momento magnetico proprio.

- Ferromagnetici: Questo tipo di materiale è paramagnetico, ma se posto ad una temperatura inferiore a quella di Curie ( $T_c$ ) presenta una  $\chi_m$  molto elevata.

## EFFETTO DIAMAGNETICO

L'effetto diamagnetico, ovvero la creazione di un momento magnetico opposto a  $\vec{B}$  e' dovuto alla rotazione degli elettroni intorno al nucleo, in ogni atomo.

Tale effetto si manifesta in TUTTI i tipi di materiali, ma in quelli paramagnetici viene sovrastato dall'orientamento dei dipoli magnetici propri delle molecole.

- SITUAZIONE ATOMICA NORMALMENTE

- Momento angolare

Consideriamo il momento meccanico che ha una carica  $q$  in rotazione.



In tal caso, se  $q$  si muove in senso antiorario,  $\vec{b}$  e' rivolto verso l'alto e il modulo e' dato:

$$b = m_q r v$$

$$\vec{b} = m_q (\vec{r} \times \vec{v})$$

Considerando la velocità aerolare, che nei punti centrali si conserva, ottengo:

$$\frac{\vec{dA}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

$$b = m_q 2 \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{b}{2m_q}$$

- Momento MAGNETICO

Il momento della carica intorno al nucleo puo' essere considerato come una corrente elettrica:

$$I_e = \frac{q}{T} \quad T \rightarrow \text{Periodo di rotazione}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Tale corrente genera un momento magnetico, considerando la superficie dell'orbita

$$\vec{M} = I_e \cdot \vec{S} = q \cdot \frac{\vec{S}}{T} = q \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{\vec{S}}{T} = \text{Velocità aerolare media}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \text{Vel. aerolare istantanea}$$

Perche' la velocità aerolare e' costante la velocità media e' uguale a quella istantanea

Il momento magnetico e' quindi:

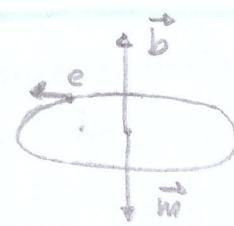
$$\vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{b}$$

$$\frac{q}{2m} \rightarrow \text{Rapporto Giromagnetico}$$

Nel caso in cui la carica in rotazione è un elettrone si ha:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m} \vec{b} \quad | q = -e$$

Quindi i due momenti sono opposti e si annullano.



### SITUAZIONE ATOMICA IN PRESENZA DI UN CAMPO $\vec{B}$

Consideriamo un campo esterno  $\vec{B}$  perpendicolare all'orbita. Tale campo porta all'accelerazione della carica  $q$ , di conseguenza ad una variazione del momento angolare  $\vec{m}$ .

Per il calcolo di tali variazioni usiamo la legge di Faraday ed il teorema dell'impulso di una forza.

La carica  $q$  sarà esposta ad un campo  $\vec{E}$  dato dalla variazione del campo  $\vec{B}$  (da 0 a  $\vec{B}$  in un tempo  $dt$  non noto).

Per Faraday la circolazione di  $\vec{E}$  è data:

$$2\pi r \vec{E} = -\pi r^2 \frac{d\vec{B}}{dt} \quad r \rightarrow \text{Raggio Orbita}$$

Da cui:

$$\vec{E} = -\frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Quindi la carica  $q$  subisce una forza data da:

$$\vec{F} = q \vec{E} = -q \left( \frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

Applichiamo il teorema dell'impulso:

$$\int \vec{F} \cdot dt = \int_0^B -q \frac{r}{2} dB = -q \frac{r}{2} B \quad | \text{Poiché } r \text{ è costante}$$

Da cui:

$$-q \frac{r}{2} B = m \Delta v = \frac{\Delta b}{r}$$

$$\boxed{\Delta b = -q \frac{r^2}{2} B}$$

Per la variazione di momento magnetico:

$$\boxed{\Delta m = -q^2 \frac{r^2}{2m} B}$$



FARADAY

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = -\frac{d\phi}{dt}$$

CIRCONFERENZA ORBITA

$$l = 2\pi r$$

AREA ORBITA

$$A = \pi r^2$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

$$\int F dt = \Delta p = m \Delta v$$

$$b = m r v$$

$$\Delta b = m r \Delta v$$

$$m \Delta v = \frac{\Delta b}{r}$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{b}}$$

N.B.

Nella variazione di momento magnetico la carica  $q$  e' elevata al quadrato, quindi il segno e' invariante, il momento magnetico e' SEMPRE opposto al campo  $\vec{B}$ .

$$\Delta m = - \frac{e^2 r^2}{4m} B$$

- Invarianza di  $r$

Abbiamo precedentemente che la carica  $q$  viene accelerata, ma il raggio di orbita  $r$  rimane costante, c'e' quindi un aumento della forza centripeta data in questo caso dalla forza di Lorentz, di seguito la dimostrazione:

La differenza di forza necessaria a mantenere la distanza e' data da

$$\Delta F = m(a_{c_2}) - m(a_{c_1}) = mr(w + \Delta w)^2 - mr(w)^2 \quad \left| a_c = \frac{v^2}{r} = w^2 r \right.$$

C'e' stato un aumento per  $\Delta w$ .

$$\Delta F = mr[w^2 + (\Delta w)^2 + 2w\Delta w - w^2] = mr[(\Delta w)^2 + 2w\Delta w]$$

Poiche'  $\Delta w$  e' una quantita' piccola,  $(\Delta w)^2$  e' trascurabile

Quindi:

$$\Delta F = wr 2m \Delta w$$

$$b = mrw = mw^2 r \quad Ab = Mr^2 \Delta w$$

$$B = \frac{\Delta b}{(-q)r^2} \cdot 2 = - \frac{2m \Delta w}{q} \quad -qB = 2m \Delta w$$

$$\left| Ab = -q \frac{v^2}{2} B \right.$$

$$\Delta F = wr(-q)B = -q VB$$

FORZA LORENZ

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

$$F = qVB$$

## PARAMAGNETISMO

Se il materiale è composto da molecole aventi un proprio momento magnetico proprio si ha che la magnetizzazione media  $\vec{H}_m$  è data:

$$\vec{H}_m = N \vec{m}_p \cdot L(a) \quad a = \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{B}}{kT}$$

$L(a)$  = Funzione Langevin  


Dall'esperienza si ricava che la suscettività magnetica  $\chi_m$  è data

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

$C$  = Costante di Curie

## FERROMAGNETISMO

Alcuni materiali paramagnetici sono dotati di una suscettività magnetica molto alta  $\chi_m$  e se esposti ad un campo magnetico esterno, e se tenuti al di sotto della Temperatura di Curie rimangono magnetizzati anche in assenza di campo esterno.

- TEORIA DI Weiss

Le proprietà sopra descritte sono spiegate dalla Teoria di Weiss composta da due ipotesi:

1. I materiali ferromagnetici sono formati da domini detti Domini di Weiss.
2. Ogni dominio è composto da dipoli atomici allineati spontaneamente a causa dell'interazione fra i diversi atomi. L'azione di allineamento che subisce il singolo atomo è proporzionale alla magnetizzazione generata dagli altri presenti nel dominio.

Dalla seconda ipotesi si ricava che un atomo risente di un campo  $\vec{B}_i$  detto locale dato da:

$$\vec{B}_i = M_0 \vec{H} + M_0 \lambda \vec{H}_m$$

$\vec{H}_m \rightarrow$  Magnetizzazione del blocco  
 $\lambda \rightarrow$  Costante del campo molecolare  
 $\vec{H} \rightarrow$  Campo magnetico esterno

Esso è quindi dovuto ad un campo esterno  $\vec{H}$  e dalla magnetizzazione causata dagli altri atomi.

## • MAGNETIZZAZIONE SPONTANEA

Consideriamo un singolo dominio. Dalle considerazioni sui paramagnetici la magnetizzazione media del blocco  $\vec{H}_m$  è data:

$$\vec{H}_m = N \vec{m}_p L(a)$$

$\vec{m}_p \rightarrow$  Magnetizzazione propria  
 $N \rightarrow$  Numero particelle

L'argomento della funzione di Langevin è:

$$a = \frac{\vec{m}_p \vec{B}_L}{kT} = \frac{\vec{m}_p (\mu_0 H + \mu_0 \lambda \vec{H}_m)}{kT}$$

$B_L \rightarrow$  Campo locale  
 $B_L = \mu_0 H + \mu_0 \lambda \vec{H}$

Poiché vogliamo considerare la magnetizzazione spontanea poniamo il campo esterno  $H=0$

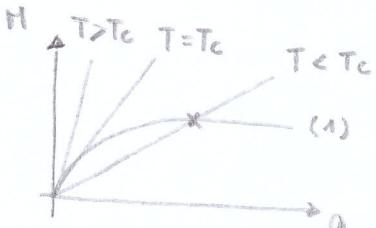
$$a = \frac{\vec{m}_p \mu_0 \lambda \vec{H}_m}{kT}$$

$$\vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a$$

Abbiamo quindi un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \vec{H}_m = N \vec{m}_p L(a) \\ \vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a \end{cases}$$

La soluzione analitica non si può ottenere, si ricavano le soluzioni mediante il metodo grafico dato dall'intersezione delle due linee/curve



$T_c \rightarrow$  Temperatura di Curie

zero per cui in assenza del campo esterno  $\vec{H}_m$  vi è una magnetizzazione stabile spontanea.

La temperatura limite per godere di tale proprietà è detta TEMPERATURA DI CURIE, al di sopra di questo l'agitazione termica sovraffà l'allineamento

La curva (1) è data da  $\vec{H}_m = N \vec{m}_p L(a)$   
 Le altre rette da  $\vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a$

Per queste ultime si nota che a seconda della temperatura  $T$  cambia l'inclinazione, e quindi la presenza o meno della soluzione diversa da zero.

## - Temperatura di Curie

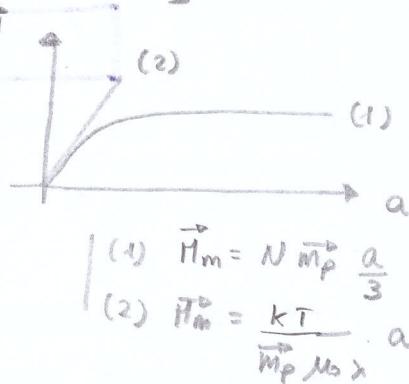
Per temperature intorno a quelle ambientali, come si è precedentemente detto la funzione di Langevin è approssimabile ad uno retto  $L(a) \approx \frac{a}{3}$ .

Con questa approssimazione ricaviamo  $T_c$ :

In tal caso poiché le due curve sono tangenti, nel caso  $T = T_c$  esse coincidono:

$$\frac{N \vec{m}_p}{3} a = \frac{k T_c}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a$$

Da cui:

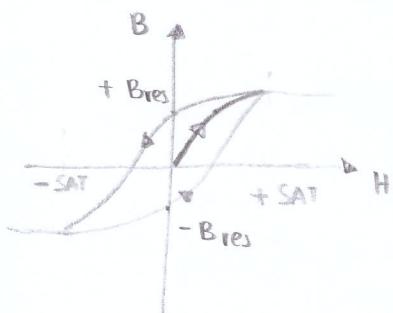


$$T_c = \frac{\lambda \mu_0 N (\vec{m}_p)^2}{3k}$$

$\lambda \rightarrow$  Costante del campo magnetico  
 $N \rightarrow$  Numero molecole  
 $\vec{m}_p \rightarrow$  Momento magnetico proprio  
 $k \rightarrow$  Costante di Boltzmann

## • CURVA DI ISTERESI

Una caratteristica dei materiali ferromagnetici è data dal CICLO DI ISTERESI, con area diversa da zero.



Si consideri un ferromagnetico smagnetizzato, ( $H=0$ ;  $B=0$ ) se esposto ad un campo esterno  $\vec{H}$  si magnetizza creando al suo interno un campo  $\vec{B}$  concorde. (Curva in rilievo). Se il campo  $\vec{H}$  è rimesso il materiale segue la curva in alto, portandosi ad un campo residuo  $+B_{res}$ .

Per togliere tale campo residuo occorre esporre il materiale ad un campo  $\vec{H}$  opposto molto forte, (oppure portarlo ad una temperatura  $T > T_c$ ).

Una volta portato alla saturazione negativa, se il campo  $\vec{H}$  si inverte, il materiale segue l'altra curva (quella in basso).

La saturazione è dovuta ad un limite del materiale, ovvero una volta che tutti i domini sono allineati il campo  $B$  interno non può più aumentare.

