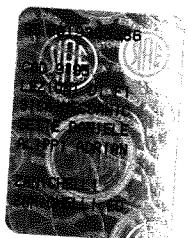


LEZIONI DI FISICA

MECCANICA TERMODINAMICA



LEZIONI DI FISICA

Daniele Sette - Adriano Alippi

MECCANICA TERMODINAMICA

ZANICHELLI

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E.

Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste per tali tipi di riproduzione vanno inoltrate a

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'Ingegno (AIDRO)
Corso di Porta Romana, n.108
20122 Milano
e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La riproduzione degli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è consentita, non essendo concorrente all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, e opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche. Maggiori informazioni sul nostro sito: www.zanichelli.it/l_info_fotocopie.html

Prima ristampa Zanichelli editore S.p.A., Bologna, Copyright © 2000

Ristampa:
8 7 6 5 4 2008 2009 2010 2011 2012

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo indicando il nome e il luogo della scuola:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax: 051293322
e-mail: linea_universitaria@bo.zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità
certificato CertiCarGraf n. 477 - IQ Net IT-16130
secondo la norma UNI EN ISO 9001:2000

Indice

PREFAZIONE	IX
Introduzione	
1. La fisica e il metodo scientifico	1
2. Grandezze fisiche, unità e sistemi di unità di misura	2
3. Lunghezza	3
4. Metodi di misura della lunghezza e delle grandezze derivate	6
5. Intervallo di tempo	8
6. Sistemi di unità	11
7. Dimensioni ed equazioni dimensionali	11
8. Misure relative e assolute	13
9. Errori, scarti e medie	13
10. Rappresentazione dei risultati sperimentali: tabelle, grafici e funzioni	18
11. Relazioni empiriche e leggi fisiche	20
 Meccanica	
1 Cinematica del punto materiale	
1.1. Introduzione	23
1.2. Sistema di riferimento	24
1.3. Equazioni del moto. Moti componenti	25
1.4. Traiettoria. Equazione oraria	25
1.5. Spostamenti	26
1.6. Gradi di libertà	27
1.7. Moto rettilineo uniforme. Velocità	27
1.8. Moto rettilineo vario. Accelerazione	29
1.9. Moto rettilineo uniformemente accelerato	31
1.10. Moto armonico	32
1.11. Moto di un punto materiale con traiettoria giacente su un piano	34
1.12. Moto circolare uniforme	37
1.13. Moto circolare uniforme e moti armonici componenti	39
1.14. Accelerazione in un moto con traiettoria giacente in un piano	42
1.15. Moto di un punto con traiettoria qualsiasi	44
1.16. Moti centrali. Velocità areolare	45
1.17. Definizione del moto dalla conoscenza dell'accelerazione o della velocità	47
1.18. Moti di uno stesso punto materiale rispetto a sistemi di riferimento diversi	49
1.19. Metodi di osservazione delle grandezze cinematiche	54
2 Dinamica del punto materiale	
2.1. Legge di inerzia. Terne di riferimento inerziali	65
2.2. Forza	68
2.3. Concetto di massa inerziale	69
2.4. Secondo principio della dinamica	72
2.5. Quantità di moto e impulso	74
2.6. Terzo principio della dinamica. Azione e reazione	75
2.7. Metodo statico di misura delle forze	75
2.8. Critica e limiti della meccanica newtoniana	76
2.9. Forze e interazioni fondamentali	78
2.10. Peso	81
2.11. Forze elastiche	82
2.12. Reazioni vincolari	83
2.13. Attrito	84
2.14. Resistenze passive	87
2.15. Forze elettriche	87
2.16. Forze magnetiche su cariche in moto	89
2.17. Applicazione dei principi della dinamica	90
2.18. Processi oscillatori	94
2.19. Pendolo semplice	100
2.20. Spazio degli stati dinamici o delle fasi	102
2.21. Momento di una forza rispetto a un punto e rispetto a un asse	103
2.22. Momento della quantità di moto	105
2.23. Teorema del momento della quantità di moto. Conservazione del momento della quantità di moto	106
2.24. Descrizione del moto in sistemi non inerziali	110
2.25. Forze apparenti: la forza centrifuga	112
2.26. Forze apparenti: la forza di Coriolis	116
2.27. Conclusioni sulla dinamica del punto	117
 3 Lavoro ed energia per il punto materiale	
3.1. Definizione di lavoro	119
3.2. Potenza	121
3.3. Energia cinetica. Teorema del lavoro e dell'energia cinetica	122
3.4. Campi di forza conservativi	124
3.5. Energia potenziale	127
3.6. Conservazione dell'energia meccanica nel caso di forze conservative	130

3.7.	Energia nell'oscillatore armonico	131	7.5.	Legge di Hooke. Legge di sovrapposizione	229
3.8.	Energia meccanica di un punto materiale in campo conservativo	134	7.6.	Compressione di volume	230
3.9.	Variazione dell'energia meccanica in pre- senza di forze non conservative.....	136	7.7.	Deformazione lungo un asse.....	231
3.10.	Conservazione dell'energia	138	7.8.	Deformazione di scorrimento.....	232
3.11.	Teoria della relatività ristretta	139	7.9.	Deformazione di torsione.....	234
3.12.	Massa ed energia nella teoria della relati- vità	144	7.10.	Origine delle proprietà elastiche nei soli- di	236
4	Meccanica dei sistemi di punti materiali		7.11.	Sollecitazioni e deformazioni nei fluidi. La viscosità dei liquidi	240
4.1.	Introduzione.....	149	7.12.	Sollecitazioni e deformazioni nei gas.....	244
4.2.	Centro di massa e moto del centro di massa	150	7.13.	Attrito di rotolamento.....	245
4.3.	Quantità di moto di un sistema e prima equazione cardinale della dinamica dei si- stemi.....	153	8	Meccanica dei fluidi	
4.4.	Principio di conservazione della quantità di moto	156	8.1.	Introduzione	249
4.5.	Teorema del momento della quantità di moto	159	8.2.	Pressione in un punto di un fluido	250
4.6.	Principio di conservazione del momento della quantità di moto	161	8.3.	Equazioni della statica dei fluidi	252
4.7.	Teorema del lavoro e dell'energia cinetica nei sistemi di punti	163	8.4.	Statica dei fluidi pesanti	254
4.8.	Energia cinetica e moto del centro di massa	164	8.5.	Princípio di Pascal	257
4.9.	Energia potenziale	165	8.6.	Misura delle pressioni	258
4.10.	Conservazione dell'energia meccanica.....	166	8.7.	Princípio di Archimede	259
4.11.	Problemi di meccanica dei sistemi.....	167	8.8.	Dinamica dei fluidi	261
4.12.	Processi d'urto	169	8.9.	Linee di flusso e di corrente	263
4.13.	Urto normale centrale	171	8.10.	Equazione di continuità	264
4.14.	Urto nello spazio	175	8.11.	Teorema del lavoro e dell'energia cinetica per fluidi ideali. Equazione di Bernoulli ..	265
4.15.	Sezione d'urto	179	8.12.	Applicazione del teorema del lavoro e del- l'energia cinetica al moto stazionario di fluidi viscosi	269
5	Meccanica dei corpi rigidi		8.13.	Moto turbolento	272
5.1.	Introduzione.....	183	8.14.	Resistenza offerta a corpi in moto	274
5.2.	Cinematica dei corpi rigidi	184	8.15.	Campi di flusso	276
5.3.	Dinamica del corpo rigido	186	9	Onde in mezzi elastici	
5.4.	Sistemi equivalenti di forze	187	9.1.	Introduzione	279
5.5.	Corpo girevole intorno a un asse fisso	191	9.2.	Vari tipi di onde elastiche	281
5.6.	Momento d'inerzia	194	9.3.	Princípio di sovrapposizione	284
5.7.	Esempi di moto di rotazione intorno a un asse fisso	196	9.4.	Teorema di Fourier sulle funzioni periodi- che	285
5.8.	Energia cinetica di un corpo rigido libero.	197	9.5.	Onde sinusoidali	288
5.9.	Giroscopio. Moto di precessione.....	199	9.6.	Onde piane longitudinali sinusoidali	288
5.10.	Statica	203	9.7.	Onde piane longitudinali	293
5.11.	Leve. Bilancia	204	9.8.	Velocità di propagazione ed equazione delle onde longitudinali	294
6	Gravitazione		9.9.	Trasporto di energia e intensità di un'on- da	298
6.1.	Introduzione	207	9.10.	Assorbimento e dispersione	300
6.2.	Legge della gravitazione universale	209	9.11.	Onde longitudinali sferiche	302
6.3.	Determinazione della costante di gravita- zione universale.....	211	9.12.	Onde trasversali	304
6.4.	Massa inerziale e massa gravitazione	213	9.13.	Onde su superfici liquide	306
6.5.	Accelerazione di gravità	215	9.14.	Sovrapposizione e interferenza di onde ..	307
6.6.	Moto dei pianeti e dei satelliti	216	9.15.	Onde complesse. Velocità di fase e velocità di gruppo	308
6.7.	Energia potenziale di gravitazione.....	217	9.16.	Interferenza tra onde sinusoidali propaga- tisi nella stessa direzione e nello stesso verso	312
7	Meccanica dei corpi deformabili. Elasticità		9.17.	Interferenza di onde sferiche	313
7.1.	Introduzione.....	223	9.18.	Onde stazionarie	317
7.2.	Deformazioni elastiche e plastiche	224	9.19.	Princípio di Huygens	319
7.3.	Deformazioni di volume e di scorrimento ..	225	9.20.	Propagazione delle onde	321
7.4.	Forze applicate e sforzi	226	9.21.	Riflessione	321
		9.22.	Trattazione analitica della riflessione	323	
		9.23.	Rifrazione	328	
		9.24.	Riflessione parziale alla separazione fra due mezzi	329	

9.25. Propagazione geometrica di onde elastiche	331	
9.26. Fenomeni di diffrazione	334	
9.27. Diffrazione da una fessura rettangolare o da un foro circolare	337	
9.28. Sorgente o ricevitore in moto. Effetto Dop- pler	339	
9.29. Pressione di radiazione.....	343	
10 Suoni e ultrasuoni		
10.1. Introduzione.....	349	
10.2. Classifica delle sorgenti	350	
10.3. Sorgenti unidimensionali.....	350	
10.4. Sorgenti bidimensionali	355	
10.5. Sorgenti tridimensionali.....	357	
10.6. Eccitazione ed emissione delle sorgenti	358	
10.7. Rivelatori e analizzatori.....	360	
10.8. Caratteri dei suoni.....	361	
10.9. La voce umana	362	
10.10. L'orecchio umano	363	
10.11. Sensibilità dell'orecchio	364	
10.12. Ultrasuoni.....	370	
10.13. Proprietà legate alle piccole lunghezze d'onda	370	
10.14. Proprietà dovute alle grandi intensità	375	
11 Dinamica non lineare e caos deterministico		
11.1. Introduzione.....	379	
11.2. Spazio delle fasi. Attrattori	382	
11.3. Sezioni di Poincaré	386	
11.4. Attrattori strani o caotici. Caos determi- nistico	388	
11.5. Coesistenza di attrattori	393	
11.6. Biforazioni	393	
11.7. Parabola logistica	395	
11.8. Universalità nel comportamento di sistemi non lineari con biforazioni a raddoppio di periodo	399	
11.9. Divergenza delle orbite. Esponenti di Ly- apunov	400	
11.10. Ricostruzione di un attrattore	401	
11.11. Il pendolo forzato	402	
11.12. Oscillatori non lineari forzati	407	
11.13. Bolla oscillante in un liquido	411	
11.14. Sistemi fluidodinamici	414	
11.15. Caos deterministico e meccanica celeste ..	420	
11.16. Geometria frattale	422	
11.17. Insiemi di Julia e di Mandelbrot	427	
Termodinamica		
12 Cenni di struttura atomica		
12.1. Introduzione	433	
12.2. Teoria di Bohr per l'atomo di idrogeno ..	434	
12.3. Probabilità e funzioni di distribuzione ..	437	
12.4. Fondamenti della meccanica quantistica ..	439	
12.5. Livelli di energia degli elettroni in un ato- mo	444	
12.6. Struttura dell'atomo. Sistema periodico degli elementi	449	
12.7. Forze fra atomi	454	
12.8. Molecole e cristalli	458	
13 Termologia		
13.1. Introduzione	461	
13.2. Temperatura. Principio zero della termo- dinamica	462	
13.3. Scale termometriche	465	
13.4. Termometri	469	
13.5. Espansione termica dei solidi	470	
13.6. Espansione termica dei fluidi	472	
13.7. Quantità di calore e calorimetria	473	
13.8. Trasmissione del calore - Convezione ..	476	
13.9. Condizione	476	
13.10. Irraggiamento	479	
14 Primo principio della termodinamica. Conservazione dell'energia		
14.1. Introduzione	483	
14.2. Sistemi termodinamici	483	
14.3. Equilibrio termodinamico	484	
14.4. Grandezze o variabili di stato. Equazioni di stato	486	
14.5. Trasformazioni	489	
14.6. Lavoro in trasformazioni reversibili	491	
14.7. Calore ed energia. Equivalente meccanico della caloria	492	
14.8. Primo principio della termodinamica. Principio di conservazione dell'energia	495	
14.9. Capacità termiche e calori specifici	497	
14.10. Quantità di calore fornite a volume o a pressione costante. Entalpia	499	
14.11. Processi isotermi	500	
14.12. Processi adiabatici	500	
15 Stati gassoso e liquido della materia		
15.1. Introduzione	503	
15.2. Equazione di stato per i gas perfetti	503	
15.3. Energia interna di gas perfetti	507	
15.4. Espressione del primo principio della ter- modinamica per i gas perfetti	508	
15.5. Trasformazioni di gas perfetti	509	
15.6. Teoria cinetica e modello dei gas perfet- ti	511	
15.7. Pressione nella teoria cinetica	512	
15.8. Interpretazione cinetica della temperatu- ra	514	
15.9. Distribuzione delle velocità molecolari in stati di equilibrio	515	
15.10. Verifica sperimentale della legge di Max- well	520	
15.11. Legge di Boltzmann di distribuzione delle energie	521	
15.12. Limiti della statistica di Maxwell-Boltz- mann	523	
15.13. Calori specifici nei gas perfetti ed equipar- tizione dell'energia	524	
15.14. Oscillatore armonico e rotatore libero nella meccanica quantistica	527	
15.15. Teoria quantistica dei calori specifici	528	
15.16. Energia di vibrazione e calore specifico di molecole biameriche	530	
15.17. Libero cammino medio	532	
15.18. Viscosità e conduzione termica nei gas	533	
15.19. Diffusione	537	

15.20. Produzione alti vuoti. Pompe a diffusione	538	17.13. Entropia e informazione	613
15.21. Gas reali e deviazioni dall'equazione di stato dei gas perfetti.....	539	17.14. Entropia ed espressioni del primo e del secondo principio della termodinamica	615
15.22. Isoterme per i gas reali nel piano pressione-volume	540	17.15. Entropia in relazione alla temperatura, al volume e alla pressione	617
15.23. Equazione di stato di Van der Waals	542	17.16. Entropia di un gas perfetto	621
15.24. Forze intermolecolari	546	17.17. Espansione di un gas	623
15.25. Stato liquido ed equazione di Van der Waals	550	17.18. Entropia nei cambiamenti di stato	627
15.26. Tensione superficiale nei liquidi	551	17.19. Entropia di mescolamento	629
15.27. Contatto di due fluidi con un terzo mezzo	554	17.20. Processi di refrigerazione per il raggiungimento di basse temperature.....	630
15.28. Capillarità.....	555		
15.29. Evaporazione-Ebolizione	557		
15.30. Sublimazione	560		
15.31. Umidità	561		
16 Stati solido e liquido della materia			
16.1. Introduzione.....	563	18.1. Introduzione.....	633
16.2. Solidi cristallini e corpi amorfi	563	18.2. Energia interna	633
16.3. Equazioni di stato	565	18.3. Entalpia	637
16.4. Calori specifici, teoria classica e teoria quantistica di Einstein	567	18.4. Funzione di Helmholtz o energia libera a temperatura costante	638
16.5. Vibrazioni indipendenti in un mezzo continuo.....	570	18.5. Funzione di Gibbs o entalpia libera	646
16.6. Numero totale di vibrazioni indipendenti in un cristallo	572	18.6. Altre funzioni caratteristiche. Riepilogo ..	648
16.7. Teoria quantistica di Debye	574	18.7. Derivate parziali e formule termodinamiche	650
16.8. Contributo degli elettroni liberi al calore specifico dei metalli.....	577		
16.9. Fusione e solidificazione	579		
16.10. Liquidi a struttura quasi cristallina	582		
16.11. Calori specifici nei liquidi	585		
17 Secondo principio della termodinamica			
17.1. Introduzione.....	587	19.1. Introduzione.....	655
17.2. Macchine termiche.....	587	19.2. Criteri di equilibrio in termini di grandezze estensive	655
17.3. Ciclo di Carnot	589	19.3. Criteri di equilibrio in termini di grandezze intensive	656
17.4. Il secondo principio della termodinamica ..	590	19.4. Equilibrio fra due fasi della medesima sostanza. Equazione di Clausius-Clapeyron	659
17.5. Teorema di Carnot	592	19.5. Equilibrio di sistemi formati da più componenti in varie fasi. Regola delle fasi	661
17.6. Temperatura termodinamica	594		
17.7. Zero assoluto e sua irraggiungibilità	596		
17.8. Entropia	597		
17.9. Disuguaglianza di Clausius	604		
17.10. Entropia nei sistemi isolati. Processi irreversibili	606		
17.11. Temperatura ed entropia come coppia di variabili di stato	607		
17.12. Entropia e disordine	608		
18 Funzioni termodinamiche caratteristiche			
18.1. Introduzione.....	633		
18.2. Energia interna	633		
18.3. Entalpia	637		
18.4. Funzione di Helmholtz o energia libera a temperatura costante	638		
18.5. Funzione di Gibbs o entalpia libera	646		
18.6. Altre funzioni caratteristiche. Riepilogo ..	648		
18.7. Derivate parziali e formule termodinamiche	650		
19 Equilibrio nei sistemi termodinamici			
19.1. Introduzione.....	655		
19.2. Criteri di equilibrio in termini di grandezze estensive	655		
19.3. Criteri di equilibrio in termini di grandezze intensive	656		
19.4. Equilibrio fra due fasi della medesima sostanza. Equazione di Clausius-Clapeyron	659		
19.5. Equilibrio di sistemi formati da più componenti in varie fasi. Regola delle fasi	661		
20 Terzo principio della termodinamica			
20.1. Il terzo principio della termodinamica	665		
20.2. Evidenza sperimentale del terzo principio	668		
21 Radiazione e materia			
21.1. Introduzione.....	673		
21.2. Emissione, assorbimento e riflessione di energia raggiante	673		
21.3. Pressione di radiazione	678		
21.4. Radiazione del corpo nero	679		
21.5. Trattazione classica e quantistica dell'emissione del corpo nero	681		

Prefazione

Questo volume Lezioni di Fisica è stato redatto per soddisfare, in particolare, i bisogni degli studenti del primo anno di Ingegneria.

Esso fa uso in larga misura dei due testi precedentemente scritti da uno degli autori sulla meccanica e termodinamica e che per molti anni sono stati adottati nei corsi di Fisica per gli studenti di Ingegneria e di Fisica.

Il testo tratta la meccanica del punto e dei sistemi, la meccanica dei fluidi, l'elasticità, le onde elastiche, il caos deterministico e la termodinamica. Gli argomenti fondamentali, presenti in genere nei testi per studenti del primo biennio, sono trattati in dettaglio con ampi riferimenti ai recenti sviluppi della Fisica in modo da fornire una visione più ampia dei vari problemi e offrire una possibilità facilitata a successivi approfondimenti.

■ Introduzione

■ 1. LA FISICA E IL METODO SCIENTIFICO

I fenomeni che avvengono nel mondo fisico hanno da sempre attratto l'attenzione dell'uomo e stimolato la sua fantasia e il suo ragionamento. Da ciò è nata e si è sviluppata la fisica che è appunto quella parte della scienza che studia i fenomeni che avvengono nel mondo esterno per giungere a un'accurata descrizione e a un'interpretazione coerente di essi e dei loro legami.

Il metodo scientifico, che il fisico adopera, si basa sulle osservazioni sperimentali le quali, associate alla intuizione, servono a riconoscere gli elementi fondamentali e caratteristici di un fenomeno e a formulare ipotesi sulla natura del processo.

L'attendibilità delle ipotesi e delle loro conseguenze logiche (teorie) dipende non solo dal successo che esse consentono di ottenere nella interpretazione del fenomeno in esame ma anche, e specialmente, dalla conferma sperimentale di altre previsioni che si possano dedurre dallo schema teorico. Si può dire che il metodo scientifico consista in un continuo alternarsi di osservazioni sperimentali e di attività speculative dello scienziato.

Fondamento della fisica sono le osservazioni sperimentali. Esse sono sempre compiute coi nostri sensi, i quali costituiscono il mezzo con cui l'uomo ha relazione con il mondo esterno. Alle volte si tratta di osservazioni nella quali i sensi rivelano *direttamente* qualche elemento che interviene nel processo (per es., l'intensità di un suono); si tratta in tal caso di valutazioni legate al singolo osservatore (*osservazioni soggettive*) e che spesso possono risentire del suo stato generale, fisico e psichico. Esse, di solito, male si prestano a descrizioni dei singoli processi valide per tutti gli osservatori. Per ovviare a tali inconvenienti e per estendere il campo di osservazione direttamente accessibile ai nostri sensi, il fisico di solito usa strumenti che sono stati sviluppati in modo da essere *sensibili* all'elemento in esame, traducendone le caratteristiche mediante una *risposta* accessibile ai nostri sensi in maniera molto semplice, per es. mediante l'osservazione della posizione di un indice su una scala graduata (*determinazioni oggettive*).

Osservazioni soggettive e oggettive

■ 2. GRANDEZZE FISICHE, UNITÀ E SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Nell'esame dei vari fenomeni il fisico incontra una gran numero di *enti* suddivisibili in classi tali che tutti gli enti di una classe posseggano alcuni specifici elementi in comune. Può per es. in esperienze di vario genere, incontrare segmenti di rette, linee spezzate formate da segmenti rettilinei, tratti di linee curve piane, che si possono porre in una stessa classe. Si dice che una di tali classi caratterizza e individua una grandezza fisica quando per tutti gli enti che la compongono:

1. sia possibile stabilire, senza possibilità di equivoci, la validità dei principi di uguaglianza e di somma (e differenza);
2. sia possibile fissare una unità di misura. Un qualsiasi elemento della classe è allora una grandezza fisica, definita in maniera operativa, mediante cioè le operazioni che conducono alla sua determinazione.

Alcune grandezze (*scalari*) sono determinate dal numero (*misura*) che fissa il loro rapporto con la corrispondente unità di misura scelta. Altre (*vettoriali*) richiedono la determinazione di una direzione e un verso oltre che di una misura scalare dell'intensità: l'unità scelta serve per la misura dell'intensità.

Per esempio: 1. la lunghezza $l = 1,5\text{m}$ di una trave è una grandezza fisica scalare e $1,5$ ne è la misura (o valore) rispetto alla lunghezza m (metro) che è l'unità di misura; 2. la velocità $\mathbf{v} = 130 \text{ km/h}$ di un'automobile è una grandezza fisica vettoriale che tiene conto della direzione e del verso del moto dell'automobile nonché dell'intensità v , che è una una grandezza scalare.

Una grandezza fisica è un'entità misurabile

Nei sistemi di unità di misura alcune grandezze sono fondamentali, tutte le altre sono derivate

Importa fare ora alcune considerazioni sulle misure delle grandezze fisiche⁽¹⁾. È possibile fissare per ciascuna di esse l'unità di misura in maniera del tutto arbitraria in accordo a quanto sopra detto, e ciò è stato a volte fatto in passato. Tuttavia, molte grandezze fisiche non sono indipendenti fra loro nel senso che la natura stessa dei processi fisici in cui intervengono fissa fra loro delle relazioni. È quindi evidente il vantaggio di sfruttare queste relazioni in maniera da ridurre il numero di unità da definire arbitrariamente mediante un campione e da semplificare certi fattori di proporzionalità che altrimenti renderebbero più complesse le formule che descrivono i processi fisici.

Il numero di relazioni indipendenti che esistono fra le grandezze fisiche che entrano in un certo settore della fisica, o di tutta la fisica, è inferiore al numero delle grandezze stesse e stabilisce, di conseguenza, rispetto al numero totale di grandezze, il numero di quelle per cui è necessario fissare l'unità in maniera arbitraria⁽²⁾. Varie scelte sono possibili e sono anche state fatte. *Le grandezze che vengono scelte come quelle per cui si fissa la unità di misura in maniera arbitraria mediante un campione vengono chiamate fondamentali e le corrispondenti unità sono dette fondamentali.*

Le altre grandezze, le cui unità sono dedotte per mezzo delle relazioni con le grandezze fondamentali, si chiamano *derivate* e lo stesso aggettivo vale per le corrispondenti unità.

⁽¹⁾ Nel caso delle grandezze vettoriali le considerazioni si riferiscono alla misura dell'intensità, o, come si vedrà, delle sue componenti rispetto a un sistema di riferimento.

⁽²⁾ Se ci si limita a considerare quella parte della meccanica che è la cinematica il numero di grandezze indipendenti è due; nella meccanica è tre; in termologia occorre considerarne un'altra; in elettromagnetismo il numero è ancora aumentato di uno.

Una scelta di grandezze fondamentali e delle corrispondenti unità fissa un sistema di unità di misura.

Diremo subito che la scelta di maggior importanza nell'ambito della meccanica è quella che fissa come fondamentali la *lunghezza*, l'*intervallo di tempo* (o meglio la durata dell'intervallo di tempo) e la *massa*. Le prime due grandezze saranno trattate in questo capitolo, il concetto di massa sarà illustrato in seguito.

3. LUNGHEZZA

Il concetto di lunghezza in fisica è il medesimo di quello che vale in geometria, cioè è la distanza fra gli estremi di un segmento rettilineo. È ben chiaro come, immaginando di disporre due segmenti contigui l'uno all'altro o in proseguimento, sia possibile definire l'uguaglianza, la somma e la differenza delle lunghezze con gli stessi criteri validi in geometria. Per definire la lunghezza come una grandezza fisica occorre scegliere un campione per l'unità.

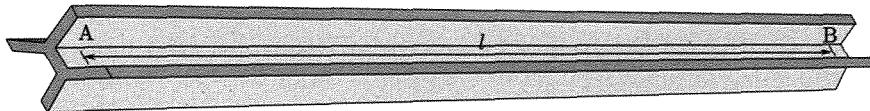


Fig. 1

Tale campione, il *metro*, fissato per convenzioni internazionali, è stato per molto tempo rappresentato dalla distanza fra due sottili tratti paralleli (*A*, *B* in fig. 1) segnati su una sbarra, depositata nel Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres dal 1889, quando questa è in equilibrio alla temperatura di 0 °C. Il materiale della sbarra (una lega di platino-iridio particolarmente stabile) e la sua sezione a X (inflessione trascurabile) furono scelti al tempo in cui il campione venne fissato, allo scopo di garantire, entro i limiti del possibile, la invariabilità del campione. Tale campione ne sostituiva un altro di pari lunghezza, realizzato peraltro con una sbarra di platino e introdotto all'epoca della rivoluzione francese: si riteneva allora che la lunghezza di un metro fosse la 40.000.000-esima parte del meridiano terrestre (secondo le più esatte determinazioni oggi disponibili la lunghezza di un meridiano terrestre sarebbe 40.007.476 m). Questo campione primario veniva usato per realizzare per confronto altri campioni (*secondari*) impiegati a loro volta per calibrare gli strumenti di misura.

La scelta del campione nella maniera descritta costituiva quanto di meglio era possibile fare nel 1889. Va peraltro osservato che nei riguardi della variabilità in lunghi intervalli di tempo alcune limitazioni sono poste dalla lente variazioni di struttura della lega che costituisce il campione.

Un notevole progresso fu compiuto nel 1960 quando la Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure definì il campione di lunghezza legando il metro a proprietà caratteristiche della struttura atomica. In particolare fu usata una lunghezza associata ad una particolare radiazione (lunghezza d'onda di luce arancione) emessa dagli atomi dell'isotopo 86 del cripto posti in un tubo a scarica elettrica: tutti gli atomi di cripto ovunque si trovino sono identici, non cambiano con il tempo e la luce arancione che possono emettere è caratterizzata da una lunghezza d'onda il cui valore è contenuto fra limiti molto ristretti (larghezza di riga), in qualsiasi laboratorio e in qualsiasi momento essa venga ottenuta. Il *metro* venne definito nel 1960 come il multiplo 1.650.763,73 della lunghezza d'onda della luce arancione emessa dal ^{86}Kr .

La ricerca per giungere a definizioni del campione affinché esso presenti migliori caratteristiche di stabilità, riproducibilità, disponibilità in qualsiasi luogo e in qualsiasi momento è proseguita. La realizzazione di sorgenti di luce (laser) di eccezionale purezza spettrale (riga molto più stretta di quelle della luce emessa da

*Le successive definizioni
del metro, unità
di misura
delle lunghezze*

atomi) e grande stabilità ha consentito di effettuare esperienze molto precise nelle quali si è potuta misurare la lunghezza d'onda λ della luce emessa con riferimento alla lunghezza d'onda del campione ^{86}Kr e la frequenza ν con riferimento al campione di intervallo di tempo (di cui si parlerà al successivo paragrafo). Quest'ultima determinazione si può oggi fare con precisioni molto elevate: 1 parte su 10^{14} . Il prodotto $\lambda\nu$ ha fornito la determinazione della velocità della luce nel vuoto più accurata oggi disponibile:

$$c = \lambda\nu = 299.792.458 \pm 1.2 \text{ m/s}$$

l'incertezza essendo essenzialmente dovuta ai limiti di precisione nella misura di λ .

Secondo le indicazioni delle esperienze e delle moderne teorie (relatività) la velocità della luce nel vuoto è *costante*, essa cioè ha lo stesso valore qualunque sia lo stato di moto dell'osservatore che la determina. Il suo valore numerico, peraltro, dipende dalla precisione delle misure e in particolare dalla precisione con cui sono definite le unità fondamentali.

In accordo con una tendenza generale, oggi esistente, tendente a trarre profitto dalla esistenza in fisica di *costanti universali* per giungere alla definizione delle unità fondamentali, si è pensato di utilizzare la costanza della velocità della luce assegnandole un valore determinato pari a quello qui sopra riportato e riconducendo successivamente la determinazione di una lunghezza l a quella della misura dell'intervallo di tempo t impiegato dalla luce a percorrerla

$$c = \frac{l}{t}.$$

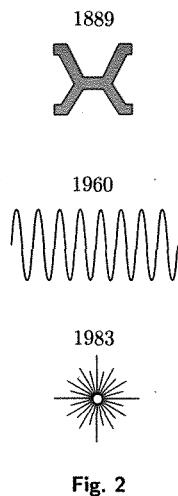


Fig. 2

La Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure nel 1983 ha definito il *metro* come *la lunghezza del percorso fatto dalla luce nel vuoto nell'intervallo di tempo di $1/299.792.458$ s*. La precisione con cui i campioni di metro possono oggi essere realizzati, riprodotti e conservati, legata all'esperienza che li definisce, è oggi di una parte su 10^{10} .

La figura 2 rappresenta sinteticamente i tre metodi successivamente usati per la realizzazione del campione *metro*: sbarra metallica, lunghezza d'onda di una luce emessa da atomi, fascio di luce nel vuoto.

Nei principali sistemi di unità di misura (par. 4) si usa come unità di lunghezza il metro; sono ancora talvolta usati sistemi che usano come unità il sottomultiplo $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$.

Spesso nella indicazione dei valori numerici della misura di una grandezza si trova pratico usare multipli o sottomultipli in modo che il valore sia espresso da un numero compreso fra 0,1 e 1000; i sottomultipli usati sono dati nella tabella 1, assieme ai simboli che vanno premessi all'unità per indicarli.

Tabella 1

Fattore di moltiplicazione	Prefisso		Fattore di moltiplicazione	Prefisso	
	Nome	Simbolo		Nome	Simbolo
10^{12}	tera	T	10^{-2}	centi	c
10^9	giga	G	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-9}	nano	n
10^2	etto	h	10^{-12}	pico	p
10^1	deca	da	10^{-15}	femto	f
10^{-1}	deci	d	10^{-18}	atto	a

Nel caso del metro molto usati sono il chilometro ($1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$), il millimetro ($1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$), il micron ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). Nel caso del metro vengono usati anche multipli diversi da quelli deducibili dalla tabella, quali per es. l'anno luce uguale allo spazio percorso dalla luce in un anno = $9,44610^{15} \text{ m}$ e l'Angstrom: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$. Quest'ultimo sottomultiplo è tenuto per ragioni storiche e è di utilità pratica in spettroscopia.

Grandezze derivate dalla lunghezza sono:

1. Area. È facile constatare che le relazioni che legano le aree ai segmenti che definiscono le forme geometriche sono sempre una somma di termini, ciascuno dei quali, a parte un eventuale coefficiente numerico, è il prodotto delle lunghezze di due segmenti. Per es. in un rettangolo di lati a e b l'area della superficie è $S = ab$; in un cerchio di raggio r , $S = \pi r^2$. In termini matematici si può dire che l'area è una *funzione omogenea di secondo grado* delle lunghezze da cui dipende. Una tale circostanza si esprime simbolicamente mediante una *equazione dimensionale*

$$(1) \quad [S] = [L^2]$$

cioè dicendo che l'area di una superficie, nel sistema che usa la lunghezza come una grandezza fondamentale, ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato o dimensione 2 rispetto alla lunghezza.

L'equazione dimensionale permette di riconoscere rapidamente l'unità di misura per le aree nel sistema nel quale la lunghezza è grandezza fondamentale. In conseguenza della natura della funzione che lega le aree alle lunghezze dei segmenti che le definiscono, l'unità, se si misurano le lunghezze in metri, sarà $m \cdot m = m^2$ (metro quadrato); si tratta cioè dell'unità per le lunghezze elevata a una potenza pari a quella che si ha per L nell'equazione dimensionale, cioè pari alla *dimensione* di S .

2. Volume. Considerazioni analoghe a quelle ora svolte portano per i volumi V all'equazione dimensionale

$$(2) \quad [V] = [L^3]$$

e all'unità di misura m^3 se il metro è scelto per le lunghezze.

3. Angolo. L'angolo α fra due semirette uscenti da un punto P e l'angolo solido Ω delimitato da una superficie conica sono, nei sistemi di misura in considerazione, grandezze derivate dalla lunghezza. Per quanto riguarda l'angolo fra due rette uscenti da un punto P (fig. 3a), si consideri una circonferenza avente un raggio R qualsiasi e centro P . L'angolo α viene definito come il rapporto fra la lunghezza dell'arco AB intersecato sulla circonferenza dalle due rette e il raggio R :

$$(3) \quad \alpha = \frac{\widehat{AB}}{R}.$$

L'angolo definito in questo modo ha quindi le dimensioni

$$\frac{[L]}{[L]} = [L^\circ]$$

è cioè una grandezza *adimensionata*⁽³⁾. L'unità di misura, che evidentemente corrisponde a un angolo al centro che sottende su una circonferenza

Grandezze derivate dalla lunghezza sono l'area, il volume, l'angolo piano e l'angolo solido

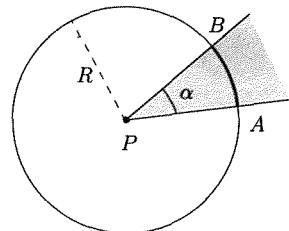


Fig. 3a

⁽³⁾ Un angolo misurato nella maniera detta ha lo stesso valore numerico comunque si scelga l'unità per le lunghezze, perciò si dice anche che è un *numero puro*.

di raggio R qualsiasi un arco di lunghezza R , si chiama *radiante*⁽⁴⁾ e si indica con rad.

Analogamente, l'angolo solido individuato da un cono con vertice in un punto P può essere definito considerando una sfera di raggio R scelto a piacere con centro in P e la superficie di area S tagliata dal cono sulla sfera (fig. 3b). L'angolo solido Ω è definito come il rapporto

$$(4) \quad \Omega = \frac{S}{R^2}.$$

Le sue dimensioni sono

$$\left[\frac{L^2}{L^2} \right] = [L^\circ].$$

Esso è una grandezza adimensionata. L'unità è lo *steradiane*, indicato con sr.

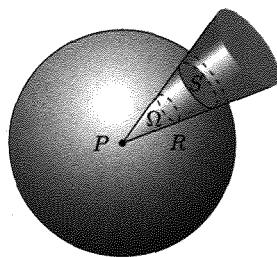


Fig. 3b

■ 4. METODI DI MISURA DELLA LUNGHEZZA E DELLE GRANDEZZE DERIVATE

Si vuole ora dare un cenno sommario ai procedimenti normalmente usati per effettuare misure di lunghezza. Innanzitutto va osservato che la lunghezza da misurare viene confrontata con segmenti che sono stati valutati in precedenza per mezzo del campione per l'unità. Tali lunghezze di riferimento sono realizzate su aste (fino a 1-2 m), nastri (fino a qualche decina di metri), su cilindri calibri (qualche millimetro) ecc. Il materiale e la cura con cui tali dispositivi sono realizzati hanno una importanza fondamentale sulla precisione delle misure: di solito si usano materiali che danno garanzia di stabilità nel tempo e di invarianza delle dimensioni con la temperatura (invar, vetro). Nonostante queste cure, alle volte è necessario tenere conto delle variazioni delle dimensioni dei dispositivi col tempo e con la temperatura nella esecuzione di misure molto precise. I metodi di misura delle lunghezze variano notevolmente secondo il valore della lunghezza stessa.

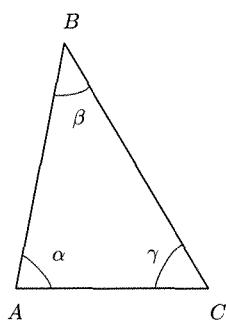


Fig. 4

Per lunghezze dell'ordine di chilometri, quali quelle fra punti di riferimento geografici e topografici, si usa il metodo delle triangolazioni (fig. 4). Per ottenere la distanza fra due punti A e B questi vengono presi come due dei tre vertici di un triangolo, il terzo punto C essendo scelto a una distanza da A (o da B) molto minore della distanza AB e facilmente determinabile mediante confronto, per es. usando un nastro. La determinazione della lunghezza della base e degli angoli (vedi in seguito) α e γ nel triangolo ABC consente il calcolo di AB . Questo principio può essere usato per sviluppare metodi nei quali più punti vengono usati per giungere a una valutazione sufficientemente precisa della lunghezza AB .

Per distanze di metri o centimetri il più diffuso è il confronto diretto con un segmento tarato. Per tali misure viene spesso usato il calibro d'ufficina. Nella figura 5 è indicato un calibro per la misura del diametro di un cilindro. La posizione di un indice (I) trasportato dalla guancia

⁽⁴⁾ Una misura spesso usata per gli angoli, che non appartiene ad alcun sistema, è quella in gradi sessagesimali; essa fa corrispondere 360° all'angolo giro. Lo stesso angolo giro vale 2π radianti. Di conseguenza 1 radiente è pari a $57^\circ 17' 45''$.

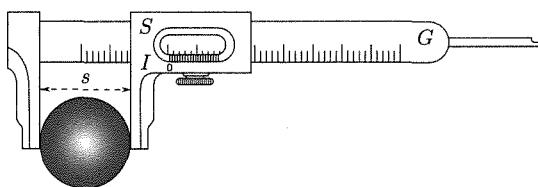


Fig. 5

mobile (*S*) determina su una scala incisa sull'asta fissa (*G*) la lunghezza di misura: un particolare dispositivo (nonio) può consentire una buona accuratezza nella misura. Il calibro può consentire alle volte misure anche di lunghezze nell'interno di corpi cavi.

Maggiore precisione si ottiene nelle misure di qualche millimetro con dispositivi a vite micrometrica. Nella figura 6 è indicato uno sferometro. In questi casi si usa una vite a passo piccolo (*V*) realizzata con molta cura in modo che a rotazioni uguali corrispondano avanzamenti uguali, misurabili su una scala graduata (*S*). Per misurare lo spessore di un piccolo oggetto si pone dapprima l'apparecchio su un piano di riferimento (*P*) e si porta la punta (*A*) della vite a toccare il piano; si pone poi l'oggetto sul piano e sotto la vite, arretrandola in modo da avere il contatto della vite con l'oggetto e dei tre punti di appoggio con il piano di riferimento; la differenza delle letture per le due posizioni della vite micrometrica consente la determinazione dello spessore. Lo sferometro si presta anche alla misura dei raggi di curvatura di superfici sferiche o cilindriche. La figura 7 indica un altro strumento di misura di spessori, di notevole precisione, usato in officina, il Palmer. Per lunghezze ancora minori (frazioni di millimetri, micron) si ricorre a metodi che impiegano microscopi, nei quali il campo di osservazione viene ingrandito. La misura viene fatta muovendo l'oggetto (o il microscopio) mediante viti micrometriche e osservando lo spostamento dell'oggetto rispetto a tragliardi nel campo visivo del microscopio oppure confrontando la lunghezza in misura con scale graduate poste nel campo del microscopio.

Strumenti di misura per le lunghezze sono il calibro, lo sferometro, il Palmer.

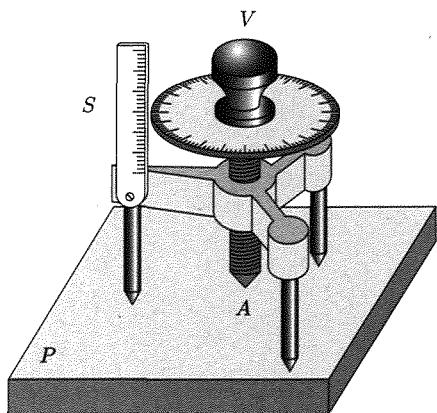


Fig. 6

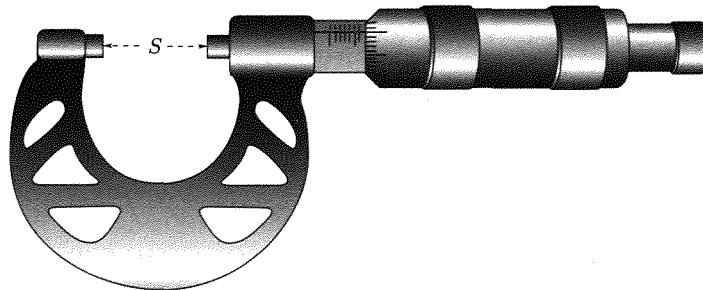
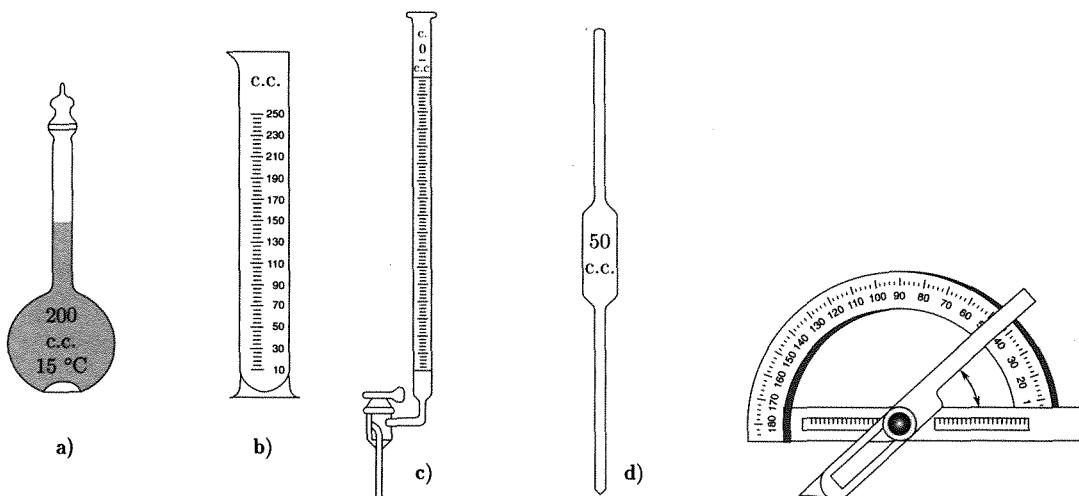


Fig. 7

Lunghezze dell'ordine di 0,4–0,7 μm intervengono a caratterizzare la luce visibile: la misura di tali lunghezze viene fatta con metodi ottici (spettroscopi).

La misura delle grandezze derivate, aree e volumi, viene di solito fatta mediante la misura della lunghezza dei segmenti che individuano la figura geometrica, quando ciò è possibile. Nei riguardi della misura del volume va peraltro detto che se si tratta del volume di liquidi si usano di solito recipienti tarati (fig. 8), e nel caso di solidi di dimensioni relativamente piccole e di forma complicata la misura si può effettuare osservando lo spostamento di un liquido (che non penetri nel solido) in un cilindro tarato.



Di notevole importanza per giungere alla definizione operativa di *intervallo di tempo* (o durata dell'intervallo di tempo) come grandezza fisica è l'osservazione dell'esistenza di moti nei quali l'oggetto in moto ritorna successivamente e ripetutamente nella medesima posizione e nelle stesse condizioni di moto (moti periodici) sicché vi è la possibilità di considerare un intervallo di tempo (*periodo*) fra due successivi ritorni in una certa posizione (per es. nel caso di un pendolo realizzato da una pallina appesa a un filo). È possibile allora vedere che tali intervalli sono caratteristici del sistema considerato; se, inoltre, si considerano più moti di questo tipo in condizioni esterne (per es. temperatura) controllate e costanti, si trova che i rapporti dei relativi periodi restano costanti. Si può allora ritenere ragionevolmente che ciascun periodo resti costante. Scegliendo allora un moto periodico di piccolo periodo, si può facilmente giungere alla definizione di uguaglianza di due intervalli di tempo e di somma, contando il numero di volte che in ciascun intervallo in questione si ripete il moto periodico preso per paragone. Per considerare l'intervallo di tempo come grandezza fisica occorre ancora fissare un campione. Per fare ciò si può ricorrere a moti periodici che avvengono in natura, che diano affidamento di stabilità e possano essere osservati con accuratezza.

Il campione di intervallo di tempo è stato a lungo riferito al movimento di rotazione della Terra: il secondo (s) solare medio era infatti definito come la 86.400-esima parte del giorno solare medio. Il giorno solare è l'intervallo fra due successivi passaggi del Sole per lo stesso meridiano: esso varia in conseguenza del moto di rivoluzione della Terra e la media va estesa a un anno. Il giorno solare medio è legato in maniera semplice al giorno siderale (intervallo fra due successivi passaggi per il meridiano di una stella fissa) che invece non cambia durante l'anno. Nella figura 10 è mostrata nella posizione 1 la Terra quando il Sole e una stella fissa passano in corrispondenza al meridiano per il punto *A*; la posizione 2 corrisponde al passaggio di un certo numero di giorni siderali; il compimento dello stesso numero di giorni solari richiede una ulteriore rotazione finché il Sole passi sul meridiano di *A*. Il giorno solare è costantemente maggiore di quello siderale: in conseguenza di ciò, in un periodo corrispondente a una rivoluzione completa della Terra (1 anno) c'è un giorno siderale in più dei giorni solari.

Nel 1955 l'Unione Astronomica Internazionale decise di riferire il campione di intervallo di tempo, il secondo, al moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole essendo questo molto più stabile del moto di rotazione della Terra su se stessa.

Al pari di quanto si è visto per il campione di lunghezza, anche per quello di tempo è oggi possibile giungere a una definizione molto soddisfacente traendo profitto dal comportamento degli atomi, opportunamente sfruttato per controllare le oscillazioni di circuiti elettrici.

Per comprendere il concetto base degli orologi atomici, descrivremo brevemente quello ad ammoniaca che sfrutta un moto di vibrazione delle molecole di NH₃. Tali molecole hanno forma di piramide con tre atomi di H su un piano e l'atomo di N al vertice. Questo atomo di N può trovarsi in due posizioni simmetriche rispetto al piano di base (fig. 11) e in realtà oscilla compiendo circa ventiquattro miliardi di oscillazioni al secondo.

La moderna tecnica elettronica è riuscita a far sì che tale moto di inversione controlli le oscillazioni di un sistema elettrico. Un orologio di questo genere presenta caratteristiche notevoli di stabilità e riproducibilità che lo rendono idoneo alla definizione di un campione.

Dei vari orologi atomici realizzati, per la definizione del secondo, si sfrutta il comportamento di atomi di cesio in un fascetto atomico nell'interno di un campo magnetico. La Conferenza Generale dei Pesi e delle

*Le successive definizioni
del secondo, unità
di misura degli intervalli
di tempo*

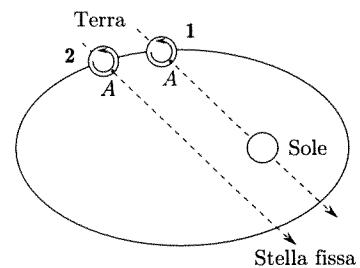


Fig. 10

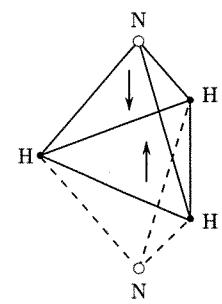


Fig. 11

Misure ha definito di recente il *secondo* facendo riferimento a una specifica transizione fra due stati degli atomi di cesio come: $1\text{ s} = 9.192.631.770,0$ periodi della radiazione associata con la transizione particolare degli atomi di ^{133}Cs .

Il *secondo* così definito è di molto poco ($30 \cdot 10^{-9}\text{ s}$) più breve del secondo nelle definizioni precedenti. La nuova definizione del secondo è stata adottata ufficialmente in tutto il mondo a partire dal 1° gennaio 1972. La precisione raggiungibile oggi nelle determinazioni di intervalli di tempo è, come si è già detto, molto elevata: 1 parte su 10^{14} .

Fra i numerosi tipi di campioni secondari che vengono spesso usati ricorderemo gli orologi a quarzo nei quali sbarrette di cristalli di quarzo vengono tenute in vibrazione e controllano le oscillazioni di circuiti elettrici. Tali orologi hanno notevoli caratteristiche di stabilità in quanto le deviazioni possono essere tenute entro circa 0,02 s in un anno.

Multipli del secondo sono il minuto primo pari a 60 minuti secondi, l'ora pari a 60 minuti primi.

Grandezza derivata da quella di intervallo di tempo è la *frequenza* di oscillazione, cioè il numero di oscillazioni compiute da un oscillatore in un secondo; essa è quindi pari a $1/T$ se T è il periodo. Dimensionalmente

$$(5) \quad [f] = [T^{-1}].$$

L'unità è chiamata hertz, e si indica con Hz⁽⁶⁾.

La misura di intervalli di tempo si effettua mediante orologi tarati per confronto con orologi atomici, con gli orologi conservati negli osservatori astronomici, oppure con le indicazioni di impianti contenenti oscillatori a quarzo. Gli orologi degli osservatori astronomici sono in genere a pendolo; gli orologi comunemente usati per le misure di intervalli di tempo usano moti periodici di tipo diverso. Alcuni orologi, chiamati cronometri o contasecondi, hanno alcuni dispositivi che consentono l'inizio e la fine della marcia mediante pulsanti in modo da potere facilmente misurare la durata del processo in esame; tale durata viene registrata sul quadrante. La determinazione degli intervalli con tali strumenti è di solito fatta con la precisione di 1/10 di secondo.

*Unità derivata del tempo
è la frequenza*

Per maggiori precisioni e per la valutazione di brevi intervalli di tempo si usano metodi differenti: la durata del processo in esame viene rappresentata dalla durata di un segnale elettrico che viene confrontato con un oscillatore elettrico di frequenza sufficientemente elevata in modo da contare numerose oscillazioni intere nell'intervallo da misurare: la conoscenza del periodo dell'oscillatore T o della sua frequenza $f = 1/T$ consente la valutazione di $t : t = nT = n/f$. Per le frequenze, nel caso di fenomeni oscillatori lenti, esse possono essere valutate determinando i periodi mediante un orologio. Se il fenomeno oscillatorio è a frequenza elevata, questa può essere valutata usando dei metodi elettrici nei quali un fenomeno a frequenza f viene legato a un altro che avviene ad una frequenza $f/2$. Il processo viene ripetuto fino a giungere a una frequenza sufficientemente bassa sì da poterne valutare il periodo con un orologio.

⁽⁶⁾ Secondo una convenzione internazionale le unità e i loro simboli vanno scritte in carattere minuscolo e non vanno declinati (per es. metro, m). Solo nel caso in cui il nome dell'unità deriva da un nome proprio, il simbolo inizia con una maiuscola: hertz, Hz.

■ 6. SISTEMI DI UNITÀ

Un *sistema di unità* si dice *coerente* quando si basa su un certo *numero di unità fondamentali* e le unità derivate vengono ottenute da queste mediante moltiplicazione o divisione utilizzando le relazioni dimensionali che legano le grandezze derivate alle fondamentali, senza introdurre fattori numerici⁽⁷⁾; in aggiunta possono esservi, come supplementari⁽⁸⁾ alcune *unità adimensionate*⁽⁹⁾ (per es. rad).

Si è detto che in meccanica la scelta oggi più valida per le grandezze fondamentali è: lunghezza, intervallo di tempo e massa. Il Sistema Internazionale fissa come unità il metro, il secondo e il kilogrammo: esso viene indicato con il simbolo SI. Quando si passa a trattare l'elettromagnetismo la quarta grandezza che viene scelta come fondamentale è l'intensità di corrente elettrica per la quale l'unità è l'ampere con simbolo A. In maniera analoga si introducono ove necessario altre grandezze fondamentali.

Il *sistema internazionale di unità (Unità SI)*, raccomandato dalle Conferenze Generali dei Pesi e Misure, si riferisce all'intero campo della scienza e della tecnica e si basa complessivamente su sette grandezze fondamentali (lunghezza, intervallo di tempo, massa, intensità di corrente elettrica, temperatura termodinamica, intensità luminosa, quantità di sostanza e due (adimensionate) supplementari (angolo piano, angolo solido). Il nome delle unità per queste grandezze, i simboli e la loro definizione sono riportati in fondo al presente volume. Una seconda scelta di unità per le stesse grandezze fondamentali è il centimetro, il secondo e il grammo. Il corrispondente sistema è il CGS; esso si trova ancora usato e a esso si farà talvolta riferimento. Nella considerazione di processi elettromagnetici diverse scelte sono state seguite (CGS elettrostatico, CGS elettromagnetico) ed esse saranno illustrate nel seguito del corso.

Infine si accenna al *sistema pratico degli ingegneri* che sceglie come grandezze fondamentali la lunghezza, la forza e l'intervallo di tempo con le corrispondenti unità del metro, del kg-forza, del secondo. A volte si fa riferimento a questo sistema e ai rapporti con il sistema MKS, sistema precedente al SI, del quale aveva le medesime unità fondamentali, differentemente definite.

Durante il corso avremo modo di parlare anche di unità che non rientrano nei sistemi su indicati (per es. caloria, grado centigrado) perché ancora estesamente usati, precisando i procedimenti di conversione nelle unità per le stesse grandezze fisiche nei sistemi comuni.

■ 7. DIMENSIONI ED EQUAZIONI DIMENSIONALI

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto il caso di grandezze derivate che sono espresse come funzioni di una sola grandezza fondamentale (ri-

⁽⁷⁾ Se, per es., si fissa il metro come unità per la grandezza fisica *lunghezza*, scelta come grandezza fondamentale, l'unità in un sistema coerente per la grandezza *area*, in accordo con la (1), è il m^2 . Altre unità (per es. ara, inch²) non sono coerenti giacché la loro definizione in funzione del metro implica la introduzione di un fattore numerico (di *conversione*).

⁽⁸⁾ Nel senso che non sono strettamente necessarie, essendo possibile dedurle dalle fondamentali (vedi par. 2).

⁽⁹⁾ Una grandezza adimensionata misurata in un qualsiasi sistema coerente ha lo stesso valore numerico: in tal senso si dice spesso che le grandezze adimensionate sono *numeri*.

spettivamente, la lunghezza e l'intervallo di tempo). Più in generale una grandezza derivata è espressa come funzione di più di una o di tutte le grandezze fondamentali necessarie in un settore della fisica e che sono state scelte a base di un sistema di unità fissandone i relativi campioni (per es. lunghezza e tempo se si resta in cinematica, lunghezza, tempo, massa in meccanica). A pari di ciò che è stato visto per i casi particolari, le funzioni che legano una qualsiasi grandezza derivata a quelle scelte come fondamentali sono *omogenee* rispetto alle grandezze fondamentali, possono cioè esprimersi come somma di termini ciascuno dei quali è il prodotto delle grandezze fondamentali elevate a opportuni esponenti. Considerando il caso in cui le grandezze fondamentali sono solo lunghezze e intervalli di tempo, una grandezza derivata Q si esprime come somma di termini del tipo $L^{n_1}T^{n_2}$. In maniera simbolica si scrive la equazione dimensionale⁽¹⁰⁾

$$(6) \quad [Q] = [L^{n_1}T^{n_2}]$$

e n_1, n_2 , che rappresentano il grado di omogeneità di Q rispetto alle lunghezze e agli intervalli di tempo, si chiamano le dimensioni di Q . Un semplice esempio è quello della grandezza cinematica velocità, V , per la quale si troverà

$$(8) \quad [V] = [LT^{-1}].$$

La determinazione dell'unità di misura per la grandezza derivata si ottiene immediatamente considerando l'equazione dimensionale; sarà il prodotto delle unità fondamentali elevate agli esponenti che compaiono nella relazione dimensionale: nel caso della velocità per es. ms^{-1} .

Si osservi che la considerazione delle dimensioni può essere fatta non solo per una grandezza derivata ma anche per un prodotto di grandezze fisiche (fondamentali o derivate) che sta a rappresentare in un processo fisico il risultato della interazione di grandezze diverse: la relazione dimensionale si ottiene dalla relazione analitica che rappresenta il prodotto, sostituendo alle grandezze le corrispondenti relazioni dimensionali⁽¹¹⁾ e applicando ai prodotti dei simboli delle grandezze fondamentali le regole normali dell'algebra; i fattori numerici naturalmente scompaiono. Per es. se il risultato di una particolare interazione in un processo fisico è rappresentato da una espressione

$$A = \pi \frac{V}{t}$$

la corrispondente relazione dimensionale si scrive

$$(10) \quad A = [LT^{-1}][T^{-1}] = [LT^{-2}].$$

Dalle considerazioni precedenti si comprende che una qualsiasi relazione analitica fisicamente valida deve essere formata da somma di termini

⁽¹⁰⁾ Nel caso che le grandezze fondamentali siano tre, con l'aggiunta della massa,
(7) $[Q] = [L^{n_1}T^{n_2}M^{n_3}]$.

⁽¹¹⁾ Nel caso che intervengano derivate o integrali, basta fare riferimento alle definizioni di queste operazioni come passaggio al limite rispettivamente di rapporto incrementale e di somme di prodotti, in quanto il passaggio al limite non altera la dipendenza funzionale:

$$(9) \quad \left[\frac{dQ}{dP} \right] = [Q][P^{-1}]; \quad \left[\int Q dP \right] = [Q][P].$$

omogenei aventi le *stesse dimensioni*. Fare l'analisi dimensionale di una relazione significa appunto calcolare le dimensioni dei vari termini e confrontarle fra loro. Un tale procedimento è di ausilio in varie circostanze, come per es. per controllare la esattezza di una relazione quando è possibile conoscere le dimensioni dei vari addendi.

■ 8. MISURE RELATIVE E ASSOLUTE

La determinazione dei valori assunti da una grandezza richiede una misurazione e questa può essere di due tipi sostanzialmente diversi. Si può confrontare direttamente la grandezza in esame con un'altra omogenea con essa, e in particolare con l'unità di misura. Per es., se si vuol determinare il volume di un recipiente si possono versare in esso volumi noti di un liquido fino a riempirlo. Si parla allora in fisica di *misure relative*.

Si può invece determinare il valore della grandezza mediante misure di grandezze non omogenee con la prima ma legate a essa da una relazione. Per es. si può determinare il volume del recipiente mediante misure di lunghezza effettuate su alcuni segmenti (per es. diametro di base e altezza di un cilindro). Si hanno allora in fisica *misure indirette o assolute*.

L'importanza delle misure assolute in fisica è dovuta al fatto che per molte grandezze (per es. la velocità) è praticamente impossibile realizzare dei campioni che si prestino a misure relative e quindi occorre effettuarne la determinazione indirettamente.

■ 9. ERRORI, SCARTI E MEDIE

La determinazione del valore di una grandezza mediante misurazioni è sempre accompagnata da errori, sicché in realtà non è possibile conoscere tale valore ma solo sapere che esso è con grande probabilità contenuto entro certi limiti che saranno tanto più vicini quanto più raffinati sono gli strumenti impiegati e accurate le misure eseguite. Naturalmente, l'errore di cui è affetta una misura non è noto, poiché altrimenti sarebbe correggibile la misura, ma se ne può stimare l'ordine di grandezza possibile.

Gli errori che accompagnano una misurazione sono di due tipi:

1. errori sistematici, dovuti a difetti del metodo o delle apparecchiature sperimentali; essi si ripetono in eguale misura ogni volta che si ripete una misurazione nelle medesime condizioni. Ridurre tali errori è possibile solamente cambiando i metodi e rendendo più accurata la realizzazione degli apparecchi.
2. errori accidentali, dovuti a svariate cause che possono influire sulla singola misura e condurre a una valutazione errata (per es. fluttuazioni nei parametri che determinano il valore della grandezza in esame).

A differenza degli errori sistematici, gli errori accidentali influenzano in maniera diversa le varie misure ed è proprio la loro distribuzione casuale che consente, ripetendo numerose volte la stessa misura, di giungere a una valutazione più precisa della grandezza in esame.

*Ogni misurazione
è affetta da errore.
L'errore non è noto,
in suo luogo si suole
considerare lo scarto,
come differenza di una
misurazione
da un valore medio*

Se indichiamo con $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ i risultati ottenuti ripetendo N volte la misurazione di una grandezza x , si chiama *valore medio* delle misure il valore

$$(11) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

e *scarto dalla media* della misura k -esima il valore

$$(12) \quad \xi_k = x_k - \bar{x}.$$

L'errore ε_k , nel senso indicato prima, sarebbe invece la differenza

$$(13) \quad \varepsilon_k = x_k - x^*$$

fra la misura k -esima e il valore vero x^* della grandezza in esame. Peraltro, x^* non è noto sicché l'errore (13) non può essere calcolato. Le considerazioni, quindi, devono essere fatte con riferimento agli scarti dalla media.

Se il numero di determinazioni è elevato, queste possono dividersi in classi ciascuna delle quali riunisce le misure il cui scarto dalla media è contenuto entro certi limiti.

In genere si considera per ogni *intervallo dello scarto* la cosiddetta *frequenza* con cui si presenta quello scarto: essa è data dal rapporto tra le determinazioni che hanno scarto nell'intervallo considerato e il numero totale di determinazioni.

Si possono allora costruire diagrammi quali quello in figura 12: l'asse delle ascisse su cui si indicano i valori della grandezza misurata è suddiviso a partire da \bar{x} in intervalli Δx , in corrispondenza a ciascuno dei quali è riportata sulle ordinate, y , la frequenza divisa per Δx . Diagrammi di questo genere, detti istogrammi, consentono di giudicare la *dispersione* delle misure rispetto alla media e sono molto utili per giudicare la precisione delle misure; esse sono tanto più precise quanto più si addensano intorno al valore medio. Se il numero di determinazioni è, o viene reso, sufficientemente alto, in modo che negli intervalli Δx continui a cadere un numero cospicuo di dati sperimentali, si può pensare di ridurre gradatamente Δx per avere una migliore indicazione della dispersione: proseguendo tale operazione la spezzata che limita l'istogramma di figura 12 si trasforma in una curva continua, detta *curva di dispersione*.

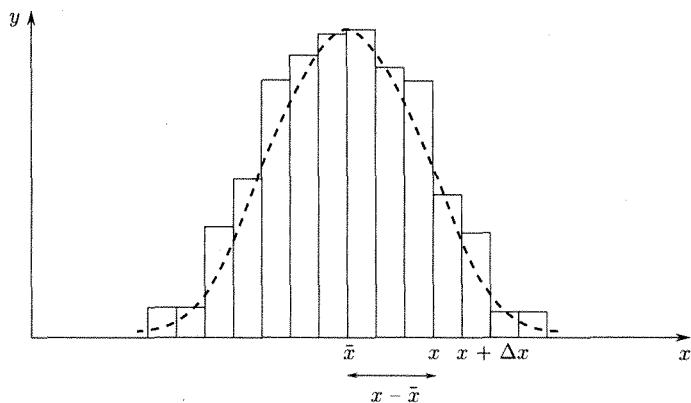


Fig. 12

Gli scarti casuali si distribuiscono attorno al valore medio secondo una particolare curva, detta gaussiana

La trattazione matematica del problema, *nell'ipotesi di determinazioni molto numerose*, mostra che l'espressione analitica della funzione y , essendo y la frequenza relativa all'intervallo fra x ed $x + dx$, divisa per dx , è

$$(14) \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-\bar{x})^2}$$

ove h è una costante il cui significato specificheremo subito.

Questa funzione (di distribuzione normalizzata⁽¹²⁾) rappresenta la *legge di distribuzione gaussiana degli errori*. Il valore di y moltiplicato per dx , cioè ydx , fornisce la probabilità⁽¹³⁾ che una misura qualsiasi, presa fra quelle fatte, abbia uno scarto fra $x - \bar{x}$ e $(x + dx) - \bar{x}$; per tale ragione viene anche chiamata funzione *densità di probabilità* della distribuzione considerata.

Nella figura 13 sono riportate le curve dell'eq. (14) normalizzate per vari valori di h : al crescere di h la curva rappresentativa della funzione diviene più stretta e ciò indica che le misure si addensano più numerose intorno al valore medio: per questa ragione h prende il nome di *grado di precisione* della misura.

Si definisce *scarto quadratico medio* per N misure la quantità

$$(15) \quad \mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}{N}}$$

e *deviazione standard*

$$(16) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}{(N-1)}}.$$

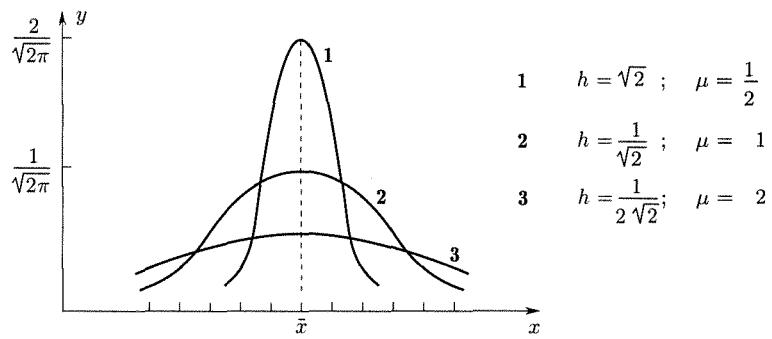


Fig. 13

Se N è grande è $\mu \approx \sigma$. È possibile inoltre mostrare che nel caso della distribuzione normale di Gauss tali parametri sono legati ad h da:

$$(17) \quad \sigma^2 = \frac{1}{2h^2}$$

e quindi possono essere presi per indicare il *grado di precisione*. In particolare è possibile vedere che prendendo a caso una misura delle N , o una nuova misura, la probabilità che essa cada fra $(\bar{x} + \sigma)$ e $(\bar{x} - \sigma)$ è 0,68, che cada tra $(\bar{x} + 2\sigma)$ e $(\bar{x} - 2\sigma)$ è 0,955 e che cada al di fuori di quest'ultimo intervallo è solo 0,045.

Nell'ipotesi che si abbia un numero molto grande di misurazioni (per es. $n = NM$, essendo N ed M entrambi numeri elevati), la teoria matematica degli errori mostra che conviene trattare i dati nella seguente maniera:

1. essi vengono suddivisi in M gruppi ciascuno di N misure;
2. si calcola per ciascun gruppo la media ottenendo quindi una serie di M valori medi \bar{x}_i ;
3. si trattano queste medie nella stessa maniera vista precedentemente per le singole misure;
4. esse si distribuiscono secondo una curva gaussiana, peraltro più acuta di quella relativa alle singole misure trattate individualmente;
5. il centro di tale curva \bar{x} coincide con la media \bar{x} di tutte le determinazioni;
6. si calcola una *deviazione standard della media* σ_m (chiamata anche *errore quadratico medio della media*).

⁽¹²⁾ L'area racchiusa fra la curva che rappresenta la (14) e l'asse delle ascisse vale 1.

⁽¹³⁾ Coincide numericamente con la frequenza cioè con la frazione di determinazioni molto numerose che cadono in dx .

Per definire la precisione di una serie di misurazioni si dà la deviazione standard della media

Si definisce, per un numero n elevato di misure, *deviazione standard della media* (chiamato anche *errore quadratico medio della media*) la quantità:

$$(18) \quad \sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{n(n-1)}}.$$

Essa si calcola direttamente dalle ξ_i , senza eseguire tutte le operazioni corrispondenti al ragionamento matematico che porta alla definizione di σ_m .

Il risultato di una misura, sempre nell'ipotesi di un gran numero di determinazioni, viene indicato con

$$\bar{x} \pm \sigma_m$$

intendendo dire che il valore più probabile è \bar{x} e che σ_m fornisce un apprezzamento dell'accuratezza della misura (caratterizzando la distribuzione delle medie). Più precisamente, non si esclude che facendo nuove misure il valore medio di esse possa cadere fuori dell'intervallo $(\bar{x} + \sigma_m)$, $(\bar{x} - \sigma_m)$ ma che la probabilità che ciò accada è 31,72% e decresce rapidamente se si considerano intervalli intorno a \bar{x} gradatamente maggiori.

Va osservato peraltro che a volte non è possibile, per varie ragioni, compiere un numero di determinazioni di una grandezza sufficientemente elevato per applicare le considerazioni statistiche accennate. In tal caso si usa come indice dell'errore probabile commesso nella determinazione lo scarto assoluto massimo dalla media riscontrato (ξ_{\max}).

Va inoltre osservato che, invece degli errori e degli scarti assoluti ε e ξ , ha maggior significato considerare errori e scarti relativi, cioè

$$\frac{\varepsilon}{\bar{x}} \quad \text{e} \quad \frac{\xi}{\bar{x}}.$$

Se per es. si misura una lunghezza e si ha uno scarto di 1 cm la situazione è diversa secondo che il valore medio \bar{x} sia 1 m oppure 0,1 m. Ciò è rappresentato bene solo se si considerano gli scarti relativi, rispettivamente 1% e 10%.

Esempio

Si voglia determinare il periodo di un pendolo e allo scopo si misuri il tempo impiegato a compiere 50 oscillazioni complete. Tale misura venga ripetuta 50 volte e i risultati siano quelli in tabella 2. Il periodo risulta

$$T = \frac{51,28}{50} = 1,0256 \text{ s.}$$

La deviazione standard della media è per 50 oscillazioni

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} \xi_i^2}{50(50-1)}} = \sqrt{\frac{5,90}{50 \times 49}} = 0,048$$

e quella per il periodo è circa 0,001.

Come risultato della misura si scrive quindi

$$T = 1,025 \pm 0,001.$$

Tabella 2

x_i	$\xi_i = (x_i - \bar{x})$	ξ_i^2	x_i	$\xi_i = (x_i - \bar{x})$	ξ_i^2
51,2	-0,08	0,064	51,5	0,22	0,048
51,3	0,02	0,004	50,8	-0,48	0,230
51,1	-0,18	0,032	51,7	0,42	0,176
50,8	-0,48	0,230	51,6	0,32	0,102
52,0	0,72	0,518	51,5	0,22	0,048
51,4	0,12	0,014	52,0	-0,28	0,078
51,3	0,02	0,004	51,8	0,52	0,270
51,6	0,32	0,102	50,7	0,58	0,336
50,9	-0,38	0,144	51,1	-0,18	0,032
51,5	0,22	0,048	51,2	-0,08	0,064
51,2	-0,08	0,064	51,1	-0,18	0,032
51,4	0,12	0,014	51,6	0,32	0,102
51,6	0,32	0,102	51,3	0,02	0,004
50,9	-0,38	0,144	51,2	-0,08	0,064
50,7	0,58	0,336	51,1	-0,18	0,032
50,8	-0,48	0,230	50,9	-0,38	0,144
50,9	-0,38	0,144	51,0	-0,28	0,078
51,0	-0,28	0,078	51,1	-0,18	0,032
51,9	0,62	0,384	51,0	-0,28	0,078
51,8	0,52	0,270	51,6	0,32	0,102
51,7	0,42	0,176	51,2	-0,08	0,064
51,6	0,32	0,102	50,8	-0,48	0,230
51,2	-0,08	0,064	50,9	-0,38	0,144
51,3	0,02	0,004	51,0	-0,28	0,078
51,4	0,12	0,014	51,5	0,22	0,048

$$\sum x_i = 2564,14$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{50} = 51,28$$

$$\sum \xi_i^2 = 5,902$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum \xi_i^2}{n(n-1)}} = 0,048.$$

Se ci si fosse voluti accontentare di una trattazione meno elaborata si sarebbe potuto indicare lo scarto massimo. Esso risulta essere

$$\frac{52 - 51,3}{50} = 0,014 \text{ s}$$

mentre lo scarto relativo percentuale è

$$\frac{0,014}{1,025} = 1,36\%.$$

L'esempio mostra come lo scarto massimo sia maggiore della deviazione standard.

Il risultato di una misura per una grandezza quindi va sempre espresso mediante il valore (medio) trovato e la indicazione della precisione della misura. Questa precisione consente di determinare il numero di cifre significative associate con la grandezza misurata. Per es. se il risultato trovato è, come nell'esempio precedente, $1,0256 \pm 0,001$ ciò significa che la precisione della misura rende non sicura la terza cifra decimale e di conseguenza il risultato va riportato semplicemente con l'indicazione $1,025 \pm 0,001$. *Le cifre significative, cioè quelle che non sono affette dalla imprecisione della misura*, sono in questo caso tre. Spesso, nel presentare il risultato di una misurazione, si indica semplicemente il numero con le cifre significative (nel caso dell'esempio 1,02), ciò vuol dire implicitamente che la precisione delle misure garantisce queste cifre e non garantisce l'esattezza della cifra successiva (14).

(14) Si vede che occorre fare attenzione al numero di cifre riportate per rappresentare un risultato: 58 m ha un significato diverso da 58,0 m; nel primo caso la misura si intende precisa fino all'ordine del metro, nel secondo fino a quello del decimetro.

A volte, come in ispecie nel dare i valori di costanti universali (per es. costante della gravitazione universale, costante dielettrica ecc.) o di grandezze di interesse generale (per es. l'intensità della accelerazione di gravità in un posto) con la massima precisione oggi ottenibile, si usa richiamare l'attenzione sulla precisione delle misure sottolineando l'ultima cifra significativa, o mettendo tra parentesi la prima incerta: per es. per la intensità g della accelerazione di gravità in certe condizioni si scrive $9,80361$ o $9,80361(3)$ ms^{-2} .

È bene infine osservare che quando occorra fare operazioni matematiche con numeri che sono risultati di misure ciascuna con il suo grado di precisione (denunciato mediante le cifre significative), la maniera più semplice di procedere è quella di effettuare le operazioni senza riguardo al problema delle cifre significative, cioè usando tutte le cifre date, e poi trattenere nel risultato finale come significativo un numero di cifre pari al numero di cifre significative del risultato di misura meno preciso che è stato usato: la incertezza risultante può infatti ritenersi pari alla incertezza della meno precisa delle misure il cui risultato è stato usato⁽¹⁵⁾.

■ 10. RAPPRESENTAZIONE DEI RISULTATI SPERIMENTALI: TABELLE, GRAFICI E FUNZIONI

Nello studio sperimentale di un fenomeno fisico le misure servono a determinare i valori assunti contemporaneamente da due o più grandezze

fisiche per giungere alla conoscenza dei legami fra esse. I risultati sono in genere raccolti in tabelle o grafici, per la cui descrizione ci si limita qui al caso, del resto molto comune, che due sole grandezze abbiano interesse nello studio del particolare processo: per es. la posizione di un treno su una rotaia e il tempo; la corrente in un conduttore e la differenza di potenziale ai suoi capi ecc.

In seguito sono riportate per es. le distanze s percorse da un locomotore, misurate lungo una rotaia a partire da un certo istante, in corrispondenza a vari intervalli

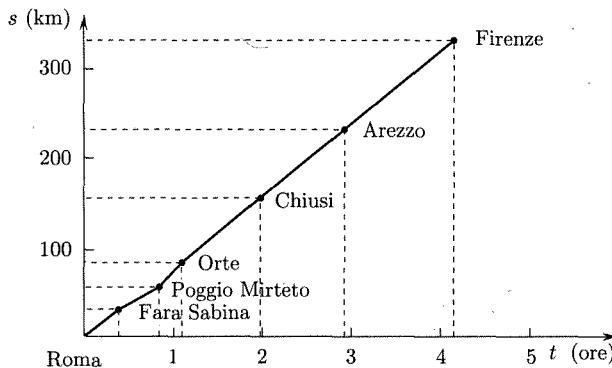


Fig. 14

di tempo trascorsi:

t (ore)	0	0,33	0,42	1,10	2,13	2,59	4,07
s (km)	0	38	49	84	165	229	316

La rappresentazione grafica di tali risultati può essere fatta (fig. 14) in un piano cartesiano, scegliendo due assi ortogonali (asse delle ascisse e asse delle ordinate) e riportando i valori di t ed s rispettivamente su tali assi dopo aver scelto su ciascun asse un segmento per rappresentare

⁽¹⁵⁾ Per questa ragione a volte nell'esame di alcuni processi non è necessario usare i valori delle costanti universali o di altre grandezze al massimo della precisione disponibile: ciò spiega l'uso nei calcoli di un numero inferiore di cifre significative, rispetto a quello in realtà disponibile. Per esempio per g a volte si può trovare il valore $9,80 \text{ ms}^{-2}$.

le unità di misura dei tempi e delle lunghezze: a ciascuna coppia di valori sperimentali (s, t) corrisponde un punto.

In realtà, nella rappresentazione grafica dei risultati di un'esperienza si usa segnare assieme al valore numerico della misura, con un trattino orizzontale e uno verticale, le incertezze delle due grandezze. Nel caso di figura 14 non è stato possibile farlo a causa delle scale usate: dai dati della tabella infatti si deduce che le precisioni nelle determinazioni dei tempi e degli spostamenti sono rispettivamente di qualche decina di secondi e di qualche centinaio di metri.

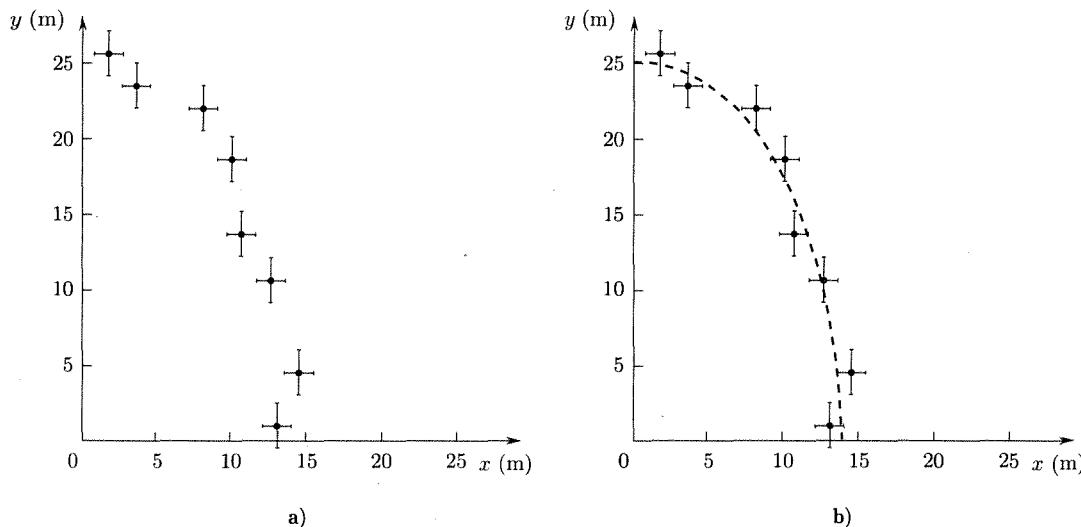


Fig. 15

La figura 15 si riferisce invece al moto di una pallina lanciata orizzontalmente nelle vicinanze della Terra: l'esperienza è stata ripetuta più volte. La figura 15a riporta i valori degli spostamenti orizzontali x e verticali y che si hanno in vari istanti durante il moto con le corrispondenti incertezze (imprecisioni, indeterminazioni) delle misure. Una rappresentazione di questo genere è di grande ausilio: si noterebbe per es. immediatamente qualche cosa di anomalo nella misura qualora una determinazione deviasse fortemente dall'andamento indicato dalle rimanenti determinazioni continue; si potrebbe trattare di errato funzionamento degli apparecchi o della esistenza di un processo fisico che per il suo esame richieda misure più ravvicinate. Un giudizio di questo genere è possibile in quanto i processi fisici hanno, se non vi è l'intervento di cause perturbatorie esterne, la caratteristica della continuità.

È proprio questa caratteristica quella che porta a ritener che il legame tra due grandezze che intervengono in un processo e i cui valori sono riportati in un grafico debba essere rappresentato, se non ci sono perturbazioni esterne, da una linea continua con derivate continue, come non sarebbe invece una spezzata: essa non deve necessariamente passare per i punti rappresentanti i valori delle misure, ma questi punti dovrebbero distare da essa per segmenti (orizzontali e verticali) inferiori alle inaccuratezze delle misure. Si è quindi portati a considerare una linea continua che intersechi i segmenti riportati intorno al valore di ogni misura, per rappresentare il processo in esame. La figura 15b presenta una tale operazione

*Rappresentazione
in grafico dei risultati
delle misurazioni
con i relativi errori
previsti*

per il caso delle misure di figura 15a. Naturalmente la individuazione di questa curva riesce tanto meglio quanto più ravvicinate e precise sono le determinazioni sperimentali.

Molto spesso è possibile ottenere, con i metodi dell'analisi, la curva del grafico, cioè il legame fra le grandezze prese in esame nel processo, sotto forma di una funzione analitica. Per es. nel caso di figura 15

$$y = -0,13x^2 + 25.$$

■ 11. RELAZIONI EMPIRICHE E LEGGI FISICHE

L'analisi dei risultati sperimentali, come si è accennato, è quella fase del metodo scientifico ove ai dati sperimentali si uniscono associazioni e intuizioni dell'osservatore che conducono alla schematizzazione del processo, alla formazione di ipotesi alla elaborazione di teorie che attendono in nuove esperienze la loro conferma.

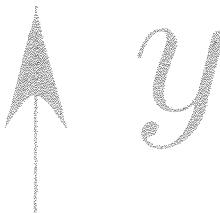
A volte quindi le relazioni fra le grandezze misurate restano legate al particolare caso esaminato (per es. $s = s(t)$ per il particolare treno che si è mosso su una data rotaia in un certo intervallo di tempo); alle volte hanno una validità più generale ma essenzialmente empirica perché solo determinata con l'esperienza relativa al processo in oggetto, come la relazione $W = kB^{1,6}$ che lega l'energia W dissipata in un materiale ferromagnetico e l'induzione magnetica B massima (essendo k una costante per il particolare materiale).

Altre volte, invece, tali relazioni possono avere una validità molto generale e rappresentare leggi che si inquadrono in una costruzione logica e che conducono a prevedere i risultati di nuove esperienze.

MECCANICA

PARTE PRIMA

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE



- ✓ **Cinematica:** studio del moto dei corpi, come variazione di posizione rispetto ad altri, tra loro fermi, assunti come riferimento.
- ✓ **Sistemi di riferimento:** definizione di coordinate spaziali $O(xyz)$ e temporali t .
- ✓ **Vettore spostamento** di un punto: $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$
Equazione del moto di un punto

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

con moti componenti: $\mathbf{i}x(t)$, $\mathbf{j}y(t)$, $\mathbf{k}z(t)$.

- Per eliminazione di t dai moti componenti si ottiene l'equazione della linea **traiettoria**, su cui si definisce un'ascissa curvilinea s . L'**equazione oraria** è $s = s(t)$.

Grandezze tipiche

spostamento, $\mathbf{r}(t)$

velocità, $\mathbf{v}(t) = d(\mathbf{r})/dt$

accelerazione, $\mathbf{a}(t) = dv/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

\mathbf{v} è sempre tangente alla traiettoria; \mathbf{a} ha componente tangenziale $a_t = \tau dv/dt$ ($\neq 0$ solo se v varia) e componente normale $\mathbf{a}_n = \mathbf{n} v^2/R$ ($\neq 0$ solo se varia la direzione di \mathbf{v}).

Tipi di moti

m. **rettilineo uniforme:** $\mathbf{v} = \text{cost}$; equazione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$

m. **uniformemente accelerato:** $\mathbf{a} = \text{cost}$; equazione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

m. **circolare uniforme:** traiettoria circolare, $v = \text{cost}$, accelerazione centripeta. Velocità angolare $\omega = v/R$

m. **centrale:** accelerazione diretta sempre verso un punto; si conserva la velocità areolare $\dot{\mathbf{S}} = d\mathbf{S}/dt = \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

- **Moti relativi.** Descrizione del moto di un punto da due sistemi di riferimento in moto reciproco, detti *assoluto* e *relativo*, equivalenti nella descrizione cinematica.

Dato il moto di un punto nel sistema relativo (r) e il moto di trascinamento (t) di questo rispetto al sistema assoluto (a), si ha

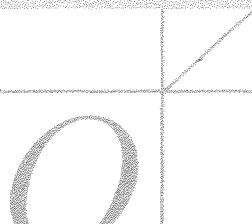
$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_t$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$$

Per le accelerazioni è, in generale, $d\mathbf{v}_r/dt \neq \mathbf{a}_r$ e $d\mathbf{v}_t/dt \neq \mathbf{a}_t$ e si ha

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

con \mathbf{a}_c (*accelerazione complementare* o di Coriolis) = $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$.



■ 1.1. INTRODUZIONE

La meccanica studia il moto dei corpi e le cause che lo determinano. Si usa comunemente suddividerla in cinematica, dinamica e statica: la *cinematica* descrive il moto e le sue caratteristiche indipendentemente dalle cause che lo determinano; tali cause invece sono l'oggetto di studio della *dinamica*; la *statica* studia il caso particolare dei corpi in quiete o in equilibrio.

Allo scopo di esaminare con gradualità i problemi della meccanica e i concetti che vengono introdotti, si considererà dapprima la meccanica del punto materiale, intendendo con tale dizione un corpo di dimensioni trascurabili rispetto alle distanze che esso percorre o che intervengono nel singolo problema. L'interesse di tale trattazione sta nel fatto che in molti casi corpi di dimensioni anche ragguardevoli (per es. la Terra nel moto intorno al Sole) possono essere considerati punti materiali e che in sistemi meccanici comunque complicati esiste sempre un punto (centro di massa) il cui moto avviene con le modalità che descriveremo nella meccanica del punto materiale.

Si considererà in seguito il caso dei sistemi di punti materiali e dei corpi rigidi. Il comportamento dei corpi deformabili e la meccanica dei fluidi saranno trattati separatamente. Alcune considerazioni sul moto dei corpi celesti e sulla gravitazione completano l'esame della meccanica cosiddetta classica.

Il punto materiale, i sistemi di punti materiali e i corpi rigidi costituiscono dei modelli, cioè delle schematizzazioni della realtà, che ne approssimano il comportamento, e che sono di agevole trattazione analitica. Di fatto, l'intera fisica è una collezione di modelli adatti alla descrizione dei fenomeni osservabili.

La trattazione, per semplicità didattica, sarà essenzialmente condotta nello schema tradizionale, mediante la presentazione di situazioni e problemi nei quali non è necessario discutere a fondo e in dettaglio la natura non lineare che hanno in realtà le equazioni differenziali che descrivono il processo. Ciò consente di stabilire in maniera relativamente semplice il metodo di indagine e di introdurre le grandezze da considerare; si ottengono per questa via, per la maggior parte delle situazioni che normalmente si incontrano, trattazioni ampiamente soddisfacenti. La discussione più approfondita delle caratteristiche che derivano dalla natura non lineare delle equazioni differenziali sarà presentata, nelle linee generali, successivamente (cap. 11). Essa è di notevole interesse sia per un sistematico esame delle

Il modello di punto materiale

indicazioni fornite dalle equazioni del moto in situazioni complesse, sia per la apertura recente di nuovi campi di indagine, resa possibile dai moderni sistemi di calcolo.

Nell'indicare i limiti di validità della meccanica classica si presenteranno i concetti fondamentali e alcuni risultati della meccanica relativistica: essa diviene importante nel caso dei corpi che si muovono a velocità prossima a quella della luce (circa 300.000 km/s). Nel seguito saranno dati alcuni cenni alla meccanica statistica e alla meccanica quantistica. La meccanica statistica descrive i sistemi formati da numerose parti, più o meno indipendenti, quando non interessi conoscere lo stato di moto delle singole particelle ma solo il loro comportamento d'insieme descritto da grandezze ottenute come medie effettuate su tutte le particelle. La meccanica quantistica diviene di determinante importanza nello studio del comportamento di particelle di dimensioni atomiche e subatomiche.

■ 1.2. SISTEMA DI RIFERIMENTO

Lo studio del moto (o dello stato di quiete) di un punto materiale richiede l'esame delle *posizioni* assunte dal punto stesso rispetto ad altri corpi in istanti successivi. È quindi fondamentale fissare nello spazio un sistema di riferimento e una origine temporale, rispetto a cui misurare gli intervalli.

È bene subito sottolineare che le *caratteristiche del moto di un punto materiale sono in maniera essenziale legate al sistema di riferimento scelto*: un oggetto in un'auto in moto può essere fermo per un osservatore nell'auto, mentre è in moto per un osservatore a terra.

Per ora supporremo che il sistema venga di caso in caso scelto nella maniera più utile per quel che interessa del moto: se, per es., si vuole studiare il moto della Terra intorno al Sole il sistema potrà essere solidale col Sole; se si vuole studiare il moto della Luna intorno alla Terra il sistema potrà essere solidale con la Terra; se si vuole studiare il moto di un punto mobile in un laboratorio il sistema sarà legato al laboratorio; se si vuole studiare il moto di una piccola parte di un motore il sistema sarà legato al telaio del motore stesso. In generale, affinché un corpo o un sistema di corpi possa essere adottato come sistema di riferimento, è necessario che le mutue distanze fra i vari punti del sistema non varino nel tempo (*sistema rigido*). In tal caso è possibile, in infinite maniere, fissare una terna cartesiana ortogonale *solidale* al sistema scegliendo come origine un punto qualsiasi del sistema e tre assi ortogonali mediante tre direzioni individuate nel sistema, per es. gli spigoli dell'ambiente che costituisce il laboratorio. La posizione di un punto sarà allora specificata dalle tre coordinate x, y, z .

Per lo studio del moto di un punto materiale, a ogni posizione assunta dal punto va associata un'*ascissa temporale* determinata fissando un istante iniziale da cui misurare, con una unità stabilita, gli intervalli di tempo e convenendo di considerare positive le ascisse corrispondenti a istanti successivi a quello iniziale, secondo la percezione⁽¹⁾ naturale dell'osservatore, e negative quelle che lo precedono.

⁽¹⁾ Questa procedura è quella valida nella meccanica classica; come si è già accennato, un più attento esame della coordinata temporale è fatta in meccanica relativistica.

1.3. EQUAZIONI DEL MOTO. MOTI COMPONENTI

Il moto di un punto materiale (fig. 1.1) rispetto a un sistema di riferimento spaziale quale quello cartesiano su specificato e un sistema di ascisse temporali, è determinato quando si conosca la *posizione* del punto a ogni istante, quando cioè si conosca la dipendenza delle sue coordinate dal tempo:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

In maniera perfettamente equivalente si può anche dire che⁽²⁾ il moto del punto P è determinato se si conosce istante per istante, cioè in funzione del tempo, il *vettore di posizione* \mathbf{OP} (fig. 1.2)⁽³⁾, dato da

$$(2) \quad \mathbf{OP}(t) = \mathbf{r}(t) = i x(t) + j y(t) + k z(t)$$

dove con i , j e k si indicano tre vettori diretti e orientati come gli assi coordinati x , y e z , rispettivamente, e di modulo unitario: essi si dicono anche i *versori coordinati*.

Si osservi che ciascuna delle (1) può interpretarsi come una funzione che definisce il moto di un punto materiale (rispettivamente P_x , P_y , P_z) su uno degli assi x , y , z , essendo P_x , P_y , P_z le proiezioni normali della posizione assunta all'istante t dal punto P . Rimangono quindi associati al moto del punto P nello spazio i moti di P_x , P_y , P_z sui tre assi: la conoscenza del moto P consente di determinare i moti di P_x , P_y , P_z e viceversa. Si esprime questo fatto dicendo che il moto di P può essere *decomposto* nei tre moti di P_x , P_y , P_z e, viceversa, che i tre moti (componenti) lungo i tre assi coordinati di riferimento possono essere *composti* a dare il moto risultante nello spazio, del punto P .

La conoscenza del moto di un punto è la conoscenza della funzione $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, vettore posizione

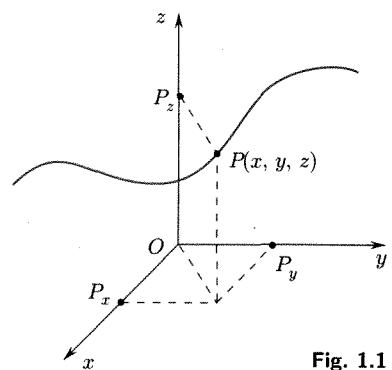


Fig. 1.1

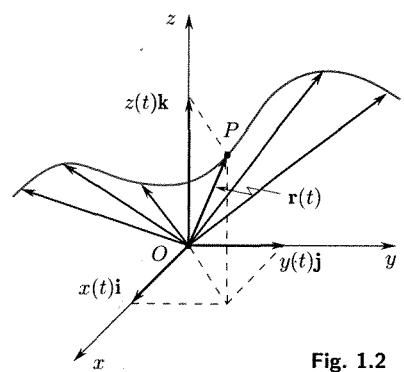


Fig. 1.2

1.4. TRAIETTORIA. EQUAZIONE ORARIA

Il punto materiale, durante il suo moto in un intervallo di tempo, descrive una linea nello spazio che prende il nome di *traiettoria*. Le (1) costituiscono le equazioni parametriche di questo luogo di punti.

Un moto si dice *rettilineo* se la traiettoria è una retta; si dice *piano* se la traiettoria giace su un piano. Una volta determinata la traiettoria si può (fig. 1.3) introdurre un particolare sistema di coordinate fissando come origine la posizione O assunta dal punto P all'istante iniziale e indicando come *ascissa curvilinea* per un'altra posizione qualsiasi la lunghezza dell'arco s lungo la curva traiettoria contata positivamente da una parte scelta ad arbitrio.

La traiettoria è il luogo dei punti dello spazio occupati dal punto materiale

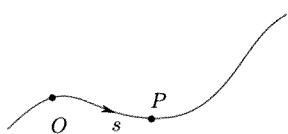


Fig. 1.3

⁽²⁾ Si noti che ora e nel seguito si indicherà con la lettera P sia il punto materiale, sia la posizione generica occupata da esso.

⁽³⁾ Si osservi che per le nostre considerazioni è interessante il vettore $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ come vettore applicato in O .

L'equazione oraria $s = s(t)$ presuppone la conoscenza della traiettoria, per una conoscenza completa del moto

È chiaro che una volta determinata la traiettoria, la conoscenza del moto del punto si rispecchia nella conoscenza della funzione

$$(3) \quad s = s(t).$$

La (3) prende il nome di *equazione oraria*. È evidente che ciascuna delle tre (1) è l'equazione oraria di uno dei tre moti componenti il moto di P , cioè di P_x, P_y, P_z , sulle corrispondenti traiettorie rettilinee (assi x, y, z).

■ 1.5. SPOSTAMENTI

Se si indicano (fig. 1.4) con P e P' le posizioni assunte dal punto materiale sulla sua traiettoria in corrispondenza agli istanti t e $(t + \Delta t)$, si chiama *spostamento nell'intervallo Δt* il vettore

$$(4) \quad \mathbf{PP}' = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta \mathbf{r} = \mathbf{i} \Delta x + \mathbf{j} \Delta y + \mathbf{k} \Delta z$$

essendo $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ il vettore che fissa la posizione di P rispetto a un polo O in funzione del tempo. Pur essendo \mathbf{PP}' un vettore libero, in generale lo si considererà applicato nella posizione P occupata dal punto materiale all'istante t . In tal caso esso si sovrappone alla corda dell'arco di traiettoria descritta fra t e $(t + \Delta t)$ ⁽⁴⁾ orientata da P a P' .

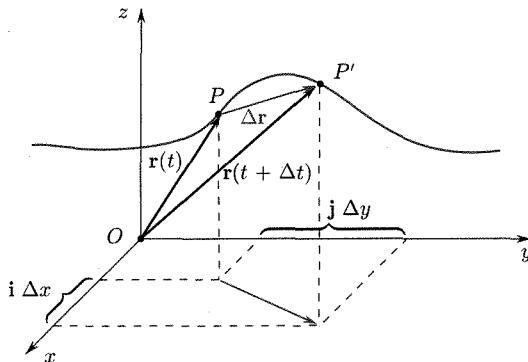


Fig. 1.4

Due spostamenti, \mathbf{PP}' e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}'_1$, sono eguali se sono rappresentati da segmenti orientati equipollenti⁽⁵⁾ indipendentemente dal punto di applicazione. Infine, se $d\mathbf{r}(t)/dt = \dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$, vi è luogo a considerare in corrispondenza a un intervallo di tempo infinitesimo, uno spostamento elementare

$$(5) \quad d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$$

essendo le componenti dx, dy, dz i differenziali delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$ nella (2).

⁽⁴⁾ Si osservi che tale corda non è univocamente legata alla traiettoria essendovi infinite curve fra i due punti (posizioni P e P').

⁽⁵⁾ Corrispondono allo stesso vettore libero.

1.6. GRADI DI LIBERTÀ

Vogliamo terminare queste considerazioni introduttive e di nomenclatura osservando che il numero di coordinate indipendenti che è necessario specificare per determinare la posizione in un istante del punto mobile nello spazio di riferimento può variare secondo le limitazioni esistenti per il moto stesso. Se il punto si muove liberamente nello spazio le coordinate sono tre (eq. 1). Se il punto si muove essendo costretto (vincolato) a rimanere sempre su un piano o, comunque, su una superficie, le coordinate sono due: si può immaginare per es. di scegliere il piano come xy e allora occorre solo determinare le coordinate x e y . Se il punto si muove su una linea fissata, la coordinata è una: è il caso di un punto che si muove su un asse rettilineo $x = x(t)$ o in genere su una linea traiettoria, prestabilita (per es. treno su rotaia). In questo ultimo caso, basta conoscere la coordinata $s = s(t)$, come già si è detto più sopra.

Il numero minimo di coordinate necessario a determinare in maniera univoca nello spazio di riferimento la configurazione spaziale di un sistema si chiama *numero dei gradi di libertà*. Si dirà quindi che un punto materiale in moto nello spazio, su una superficie fissata o lungo una linea fissata ha un numero di gradi di libertà pari rispettivamente a 3, 2, 1.

Il numero dei gradi di libertà di un punto è dato dal numero di parametri indipendenti necessari per determinarne la posizione nello spazio

1.7. MOTO RETTILINEO UNIFORME. VELOCITÀ

Per giungere con semplicità alla introduzione delle grandezze cinematiche velocità e accelerazione nei moti generali, è opportuno esaminare dapprima moti particolarmente semplici.

Si consideri il caso di un punto materiale che si muova su una traiettoria rettilinea (asse x) in maniera che gli spazi percorsi siano proporzionali agli intervalli di tempo impiegati a percorrerli (equazione oraria lineare).

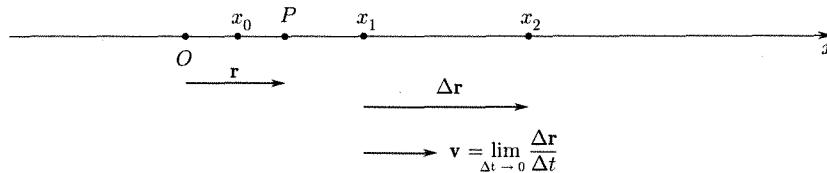


Fig. 1.5

Indichiamo con O l'origine, scelta sull'asse x (fig. 1.5), e con x_0 l'ascissa della posizione occupata dal punto all'istante in cui si iniziano a contare gli intervalli di tempo. Si può scrivere:

$$(6) \quad x = x_0 + vt$$

essendo v una costante il cui significato è facile intendere. Consideriamo due qualsiasi istanti successivi, t_1 e t_2 ; si ha

$$(7) \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Si vede quindi che v rappresenta la rapidità con cui il punto cambia posizione; essa viene indicata con il nome di *velocità scalare* (media). Essa è positiva o negativa a seconda che il moto avvenga nel verso delle x crescenti o decrescenti.

La relazione (7) in realtà prende in considerazione il moto del punto in un intervallo di tempo finito $(t_2 - t_1)$, sicché la velocità che si ottiene dal rapporto (7) sembrerebbe legata alla considerazione di un intervallo di tempo finito. Si può, peraltro, definire la *velocità scalare* istantanea relativa allo stato di moto in un istante t come il limite del rapporto della (7) per $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$. Si ha

$$(8) \quad v_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Si suole anche indicare con $\dot{x}(t)$ la derivata rispetto al *tempo* di una funzione $x(t)$, secondo una notazione risalente a Newton, e quindi scrivere: $v_s = \dot{x}(t)$.

Si noti che la velocità scalare istantanea risulta pari alla derivata rispetto al tempo della $x = x(t)$ cioè della funzione (equazione oraria) che esprime lo spazio percorso dal punto materiale come funzione del tempo.

Nel caso particolare che si sta considerando, cioè di moto uniforme, la velocità scalare media coincide con la velocità scalare istantanea.

Va osservato che la velocità scalare, ora definita, è sufficiente nel caso del moto in oggetto (rettilineo uniforme) a caratterizzare quell'aspetto dello stato di moto in un istante, rappresentato dalla rapidità con cui varia la posizione del punto materiale, solo in quanto può essere associata ad altre informazioni già note sulla natura della traiettoria, le quali precisano la direzione in cui il moto avviene. Ciò mostra che in realtà il concetto di velocità richiede la definizione di una grandezza vettoriale.

Il vettore velocità è la derivata temporale del vettore spostamento

Il vettore *velocità* \mathbf{v} può essere introdotto con il seguente semplice ragionamento. La posizione P del punto all'istante t sia individuata dal vettore posizionale, detto anche vettore spostamento, $\mathbf{OP} = \mathbf{r} = \mathbf{i} x(t)$ (fig. 1.5). Lo spostamento del punto nell'intervallo di tempo $\Delta t = (t_2 - t_1)$ è rappresentato dal vettore $\Delta \mathbf{r}$ di intensità $(x_2 - x_1)$, orientato nel verso del moto. Se esiste il limite

$$(9) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

esso viene preso come *vettore velocità del punto P all'istante t*. La (9) è generale, nel senso che vale anche senza le limitazioni del moto particolare (rettilineo, uniforme) che stiamo considerando. Si ha in questo caso, molto semplice:

$$(10) \quad \mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{i} \dot{x} = \mathbf{i} v$$

cioè in questo caso la *velocità scalare* è la componente di \mathbf{v} secondo l'asse x orientato⁽⁶⁾. Inoltre, e in generale, la *velocità vettoriale* risulta essere un vettore diretto secondo la tangente alla traiettoria nella posizione occupata dal punto materiale all'istante in considerazione, avente il verso del moto, e come intensità il valore assoluto v della velocità scalare.

Si noti che la velocità vettoriale, pur riferendosi, in genere, alla posizione del punto in un istante, è un *vettore libero* e può quindi essere rappresentata da uno qualsiasi degli infiniti segmenti orientati equipollenti a esso.

⁽⁶⁾ Nel caso generale, la *velocità scalare* è la componente di \mathbf{v} sulla direzione della tangente alla traiettoria, orientata in un verso fissato (vedi par. 1.11).

Spesso, tuttavia, ci si serve del particolare rappresentante uscente dalla posizione P occupata dal punto materiale all'istante in questione.

Nel caso particolare del moto rettilineo uniforme, essendo $v = \text{cost}$, il vettore velocità è costante nel tempo.

Le dimensioni della velocità sono:

$$(11) \quad [v] = [LT^{-1}]$$

e l'unità di misura nel SI è il ms^{-1} . Altre unità spesso usate sono cm/s , km/s , km/h ($\text{h} = \text{ora}$).

1.8. MOTO RETTILINEO VARIO. ACCELERAZIONE

Si consideri ora un punto materiale in moto su una traiettoria rettilinea, per es. l'asse x della figura 1.6, ma la cui equazione oraria non sia una equazione lineare. Anche in tal caso si può considerare in ogni istante il vettore velocità, ripetendo il ragionamento del paragrafo precedente. La direzione di un tale vettore sarà quella dell'asse x ma l'intensità e il verso potranno cambiare da istante a istante; la velocità scalare non sarà più una costante ma una funzione del tempo e il suo segno sarà positivo o negativo a seconda che il moto avvenga, nell'istante che si considera, nella direzione positiva o negativa dell'asse x . Si avrà quindi

$$(12) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = i\dot{x}(t) = i v.$$

Per la caratterizzazione dello stato di moto in un istante si deve considerare la rapidità con cui varia il vettore velocità, in maniera analoga a quanto è stato precedentemente fatto nei riguardi della rapidità con cui varia il vettore spostamento.

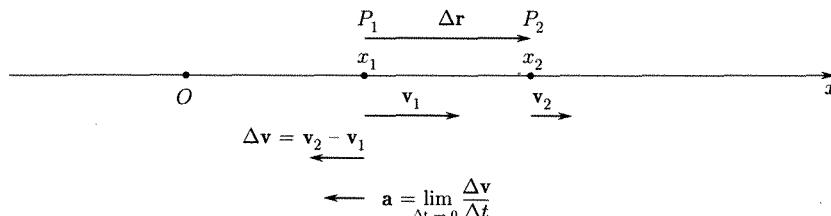


Fig. 1.6

Si considerino due istanti t_1 e t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$) e siano P_1 e P_2 , \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 le posizioni corrispondenti sull'asse x del punto materiale e le relative velocità vettoriali. Data la variazione della velocità $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ nell'intervallo Δt , si definisce accelerazione vettoriale \mathbf{a} il vettore

$$(13) \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Ricordando la (9), si ha

$$(14) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Il vettore accelerazione è la derivata prima temporale del vettore velocità o anche la derivata seconda temporale del vettore spostamento

La (14) ha valore generale: l'accelerazione è una grandezza vettoriale ed è rappresentata senza riferimento a un particolare punto di applicazione. Spesso, tuttavia, si considera l'*accelerazione applicata* nella posizione occupata dal punto (P, \mathbf{a}). Avvertiamo che nel presente testo sarà spesso omesso nella notazione il richiamo al punto di applicazione del vettore accelerazione, quando non vi sia possibilità di equivoci.

Nel caso particolare in considerazione di un moto rettilineo, $\Delta\mathbf{v}$ ha la direzione dell'asse x e quindi lo stesso vale per \mathbf{a} , cioè l'accelerazione è diretta tangenzialmente alla traiettoria:

$$(15) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i} \ddot{x}(t) = \mathbf{i} \frac{dv_s(t)}{dt} = \mathbf{i} a_t.$$

Si è qui indicato con a_t l'*accelerazione tangenziale*, cioè la componente di \mathbf{a} sulla direzione della tangente orientata \mathbf{i} alla traiettoria.

Le dimensioni della accelerazione sono

$$(16) \quad [\mathbf{a}] = [LT^{-2}]$$

e l'unità di misura nel SI è il ms^{-2} .

Esempio

Nella figura 1.7a è riportato il grafico dell'equazione oraria $x = x(t)$ di un punto che si muove su traiettoria rettilinea. Il punto materiale parte dalla quiete e ritorna in quiete nella posizione di partenza dopo 22 s : $x(t=22) = 0$. Lo spostamento massimo corrisponde al massimo della curva. In corrispondenza a varie posizioni è indicato l'angolo α (in gradi sessagesimi) che la tangente geometrica al grafico $x = x(t)$ forma con l'asse x ; la tangente trigonometrica di tale angolo è proporzionale alla velocità $v(t)$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_x \cdot \text{lunghezza segmento rappresentativo } \Delta x \text{ nel grafico}}{u_t \cdot \text{lunghezza segmento rappresentativo } \Delta t} = \\ &= \frac{u_x}{u_t} \tan \alpha \end{aligned}$$

dove con u_x e u_t si sono indicati i valori corrispondenti a un eguale intervallo preso sugli assi x e t , rispettivamente.

La curva che fornisce $v(t)$, calcolata in questa maniera, è riportata in figura 1.7b. Come si vede, la velocità inizialmente cresce da zero a un valore massimo che corrisponde alla massima inclinazione della tangente geometrica nel grafico di figura 1.7a. Essa va a zero (tangente orizzontale nella figura 1.7a) quando il punto ha raggiunto la posizione di spostamento massimo ed inverte il suo moto. Successivamente il moto è ritardato ed avviene per un tratto considerevole a velocità costante (inclinazione costante nella 1.7a).

Sul grafico della $v(t)$ sono indicate in vari punti le tangenti geometriche e i valori degli angoli da esse formati con l'asse x . La tangente trigonometrica di tali angoli è proporzionale alla a_t

$$\frac{dv(t)}{dt} = a_t(t).$$

La curva a_t è riportata in figura 1.7c. L'accelerazione è inizialmente diversa da zero e positiva. Si noti che l'accelerazione va a zero quando la velocità raggiunge il valore massimo, è costante quando la $v(t)$ ha pendenza costante, è nulla quando la velocità è costante.

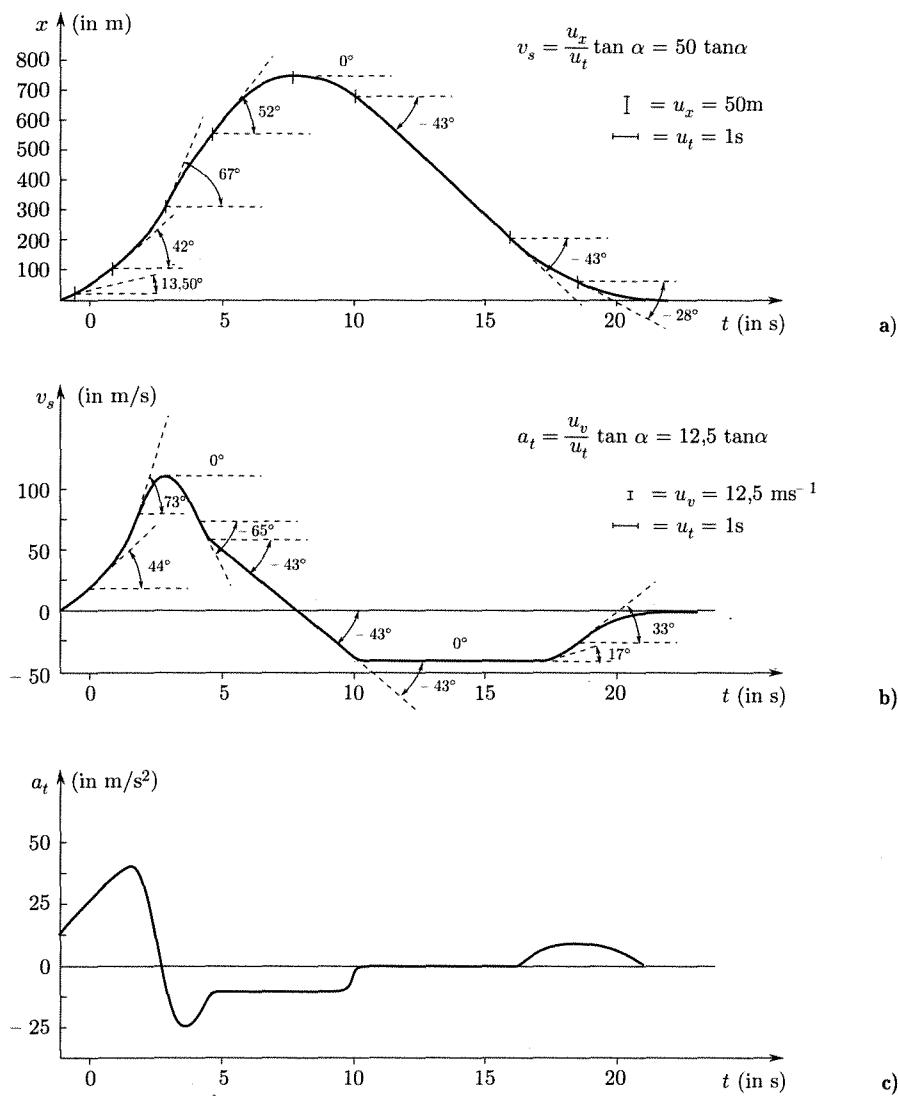


Fig. 1.7

■ 1.9. MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Un primo esempio di moto rettilineo vario è quello di un punto materiale che si muova su una traiettoria con accelerazione a costante. Un caso di questo genere, come si vedrà in seguito, si verifica con buona approssimazione in molti casi⁽⁷⁾ quando un corpo pesante cade verso terra senza spostamenti orizzontali. Si supponga che la traiettoria del moto sia un segmento di retta; indicheremo con y l'ascissa a partire da un punto scelto come origine. L'accelerazione istantanea a (di modulo a_t) è in ogni

⁽⁷⁾ Quando si possano trascurare la resistenza del mezzo e l'effetto della rotazione della Terra.

punto costante e pari alla accelerazione media in un qualunque intervallo temporale, per es. $t - t_0$. Si ha quindi

$$\frac{v - v_0}{t - t_0} = a_t$$

essendo v_0 la velocità scalare all'istante t_0 . Prendendo $t_0 = 0$, v_0 è la velocità scalare iniziale. Si deduce.

$$(17) \quad v = v_0 + a_t t.$$

Il calcolo della v dalla conoscenza di a_t è stato possibile in maniera così elementare data la semplicità del caso; il risultato ovviamente si ottiene anche seguendo il metodo valido in maniera generale, applicando cioè le regole dell'analisi per determinare la funzione v che ammetta come funzione derivata a_t e che assuma il valore v_0 all'istante $t_0 = 0$. L'equazione oraria si determina mediante una ulteriore integrazione, ricercando cioè una funzione che abbia la (17) come funzione derivata e che assuma il valore y_0 (posizione iniziale) all'istante $t = 0$. È facile riscontrare che la soluzione⁽⁸⁾ è

$$(18) \quad y = \int_0^t v dt = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2.$$

■ 1.10. MOTO ARMONICO

Nel moto armonico lo spostamento è una funzione sinusoidale del tempo

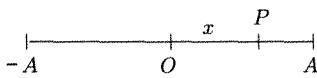


Fig. 1.8

Nello studio dei fenomeni oscillatori si incontrano importanti casi di moto vario su traiettoria rettilinea, quando un punto materiale descrive ripetutamente un segmento ritornando nella stessa posizione dopo intervalli costanti di tempo eguali al periodo T impiegato dal punto materiale a compiere una oscillazione completa. La funzione che lega l'ascissa x al tempo (equazione oraria) deve necessariamente essere una funzione periodica, anch'essa col periodo T . Un caso semplice è quello in cui questa funzione è sinusoidale. Se si prende per origine il punto centrale O della traiettoria rettilinea (fig. 1.8) e si contano i tempi a partire da un istante in cui il punto materiale passa per O nel verso delle x crescenti, si può scrivere

$$(19) \quad x = A \sin \omega t$$

con A ed ω due parametri indipendenti da t . Il moto su traiettoria rettilinea caratterizzato da tale equazione oraria si chiama armonico; ωt si

⁽⁸⁾ La soluzione in questo caso semplice può ottersi anche con considerazioni elementari. Se la velocità scalare cresce linearmente, il valore medio v_m nell'intervallo $(0 - t)$ vale

$$v_m = \frac{1}{t} \int_0^t v(t) dt = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Poiché, d'altra parte, è

$$v_m = \frac{y - y_0}{t}$$

si ha, usando la (17):

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}a_t t^2 + v_0 t.$$

chiama *angolo di fase*, o brevemente *fase*, all'istante t . La costante A è l'elongazione, distanza massima da O raggiunta dal punto, giacché la funzione $\sin \omega t$ oscilla fra i valori +1 e -1; essa prende il nome di ampiezza del moto armonico.

Siccome l'argomento della funzione trigonometrica deve essere un angolo, cioè deve essere adimensionato, le dimensioni del parametro ω sono

$$(20) \quad [\omega] = [T^{-1}].$$

Se inoltre si ricorda che la funzione è periodica con periodo T , da t a $t+T$ l'argomento della funzione trigonometrica deve variare di 2π :

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi$$

e quindi

$$(21) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

indicando con $\nu = 1/T$ una nuova grandezza, che si definisce come frequenza del moto. Il parametro ω prende il nome di *pulsazione* e si misura in rad/s.

La velocità del punto materiale sarà diretta lungo la traiettoria rettilinea nel verso del moto. La velocità scalare vale

$$(22) \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t$$

e varia periodicamente con il medesimo periodo T del moto. Anche l'accelerazione è diretta lungo la traiettoria e la componente tangenziale ha il valore

$$(23) \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

La figura 1.9 mostra le variazioni periodiche di x , v e a_t : il periodo è lo stesso ma le tre grandezze sono sfasate così che v è in anticipo di $\pi/2$ rispetto alla x e in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla a_t ; la a_t è in anticipo di π rispetto ad x e di $\pi/2$ rispetto a v .

I valori di x ed a_t sono in opposizione di fase: l'accelerazione, quindi, è diretta lungo l'asse x , la sua intensità è proporzionale a ogni istante a x ma il suo verso è sempre contrario a quello di x . Ciò vuol dire che il vettore accelerazione è sempre diretto verso O .

Nel caso che il centro di oscillazione del moto armonico non coincida con l'origine (fig. 1.10), ma si trovi nel punto di ascissa x_0 e inoltre all'istante $t = 0$ il punto materiale si trovi nella posizione x_1 differente da x_0 , l'equazione oraria del moto armonico si scrive

$$(24) \quad x - x_0 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

essendo $\varphi = (2\pi/T)t'$ la *fase iniziale* legata alla posizione del punto all'istante $t = 0$.

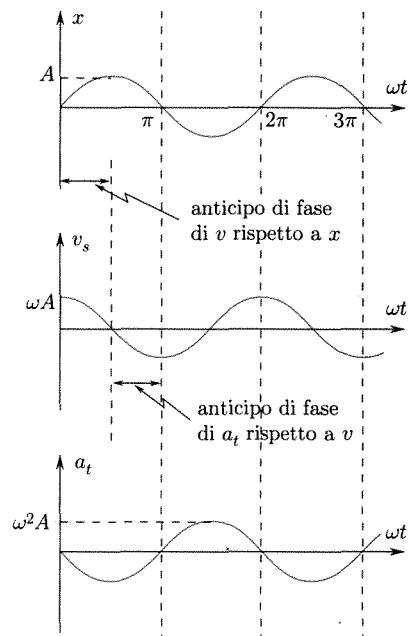


Fig. 1.9

Nel moto armonico l'accelerazione è proporzionale allo spostamento attraverso una costante negativa

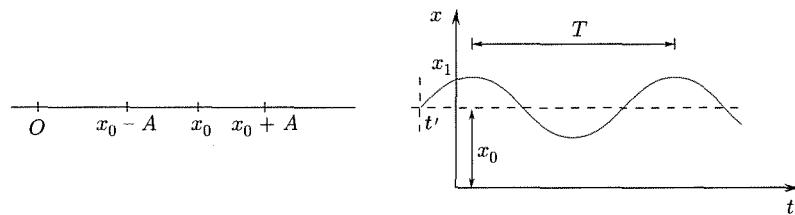


Fig. 1.10

Esempio

Un moto armonico abbia periodo $T = 2$ s e ampiezza $A = 0,1$ m. Scrivere l'equazione oraria nonché le espressioni della velocità e della accelerazione. Si scelga l'origine delle ascisse O sulla retta traiettoria, coincidente con il punto centrale della traiettoria stessa.

L'equazione oraria sarà del tipo (24) con $x_0 = 0$, cioè

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Se si sceglie l'origine dei tempi in un istante in cui il punto materiale passa per 0, sarà $\varphi = 0$. Poiché, inoltre, nel caso in esame è

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ s}^{-1}$$

si ha

$$x = 0,1 \sin \pi t \text{ m}$$

e quindi

$$v = \dot{x} = +0,1 \cdot \pi \cos \pi t \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_t = \ddot{x} = -0,1 \cdot \pi^2 \sin \pi t \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Se, invece, si fosse scelta l'origine dei tempi nell'istante di elongazione massima, $\varphi = \pi/2$, si sarebbe ottenuto:

$$x = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \omega t.$$

1.11. MOTO DI UN PUNTO MATERIALE CON TRAIETTORIA GIACENTE SU UN PIANO

Si consideri un punto materiale che si muova con modalità del tutto generali su una traiettoria giacente su un piano. Preso un sistema di assi x, y di riferimento, il moto del punto sarà determinato dalla conoscenza, istante per istante, del vettore spostamento

$$(25) \quad \mathbf{r}(t) = i x(t) + j y(t)$$

o, che è lo stesso, dalla conoscenza delle componenti di tale vettore secondo gli assi x e y

$$(26) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

L'equazione della traiettoria⁽⁹⁾ in coordinate cartesiane si ottiene eliminando il parametro t nelle (26).

Successivamente, lo studio del moto può farsi usando un sistema di ascisse curvilinee, una volta fissata una origine per esse (O' , fig. 1.11) e un verso positivo. L'equazione oraria è allora

$$(27) \quad s = s(t).$$

La definizione e il calcolo delle velocità scalare e vettoriale può farsi con i medesimi criteri già esposti nel caso particolarmente semplice dei moti su traiettorie rettilinee. Si considerino i valori di s (fig. 1.11) per le posizioni assunte sulla curva c dal punto materiale negli istanti t e $t + \Delta t$ e si consideri il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

che misura la rapidità media, nell'intervallo Δt , della variazione della ascissa curvilinea. Se esiste il limite

$$(28) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t)$$

esso definisce la *velocità scalare istantanea*: essa è positiva o negativa secondo che all'istante t il moto avvenga nel verso delle s crescenti o decrescenti.

Per definire la velocità vettoriale si considerino i vettori spostamento all'istante t , $\mathbf{r}(t)$ e all'istante $t + \Delta t$, $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Il vettore

$$(29) \quad \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

è diretto lungo la corda $\overline{PP_1}$ e rappresenta la velocità media nell'intervallo considerato.

Se esiste il limite

$$(30) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

esso viene chiamato velocità istantanea; esso è un vettore diretto come la tangente alla traiettoria nella posizione occupata dal punto materiale all'istante t e ha il verso del moto. Per quanto riguarda l'intensità, si osservi che il limite cui tende $|\Delta \mathbf{r}/\Delta t|$, essendo $|\Delta \mathbf{r}|$ la lunghezza della corda PP_1 , è lo stesso cui tende $|\Delta s/\Delta t|$, cioè l'intensità della velocità vettoriale è pari al valore assoluto della velocità scalare istantanea. Se si conviene di orientare la tangente alla traiettoria in un punto nel verso delle s crescenti (e si indica con τ il corrispondente versore) si vede che la velocità scalare non è altro che la proiezione di \mathbf{v} sulla tangente: essa risulta positiva o negativa secondo che il moto avvenga nel verso delle s crescenti o decrescenti:

$$(31) \quad \mathbf{v}(t) = \dot{s}(t)\tau = v(t)\tau.$$

Derivando il vettore $\mathbf{r}(t)$ dato dalla (25) si ha:

$$(32) \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dx(t)}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy(t)}{dt}$$

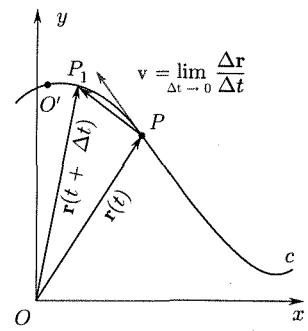


Fig. 1.11

⁽⁹⁾ A volte può essere più utile conservare la rappresentazione parametrica (26) della traiettoria. La funzione $f(x, y) = 0$ che si ottiene dalla (26) può inoltre rappresentare una curva che solo in parte è la traiettoria del punto nell'intervallo di tempo di interesse.

cioè il vettore velocità nel moto del punto materiale P nel piano è la somma delle velocità che competono ai moti lungo gli assi x e y in cui esso si può immaginare decomposto.

In maniera analoga si può procedere per definire il vettore accelerazione all'istante t . Si considerino (fig. 1.12) i vettori velocità relativi agli istanti t e $t + \Delta t$, cioè alle posizioni P e P_1 assunte dal punto materiale sulla sua traiettoria. Si consideri il vettore (accelerazione media)

$$(33) \quad \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

da cui si definisce il vettore accelerazione (vettore libero); il limite, se esiste,

$$(34) \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

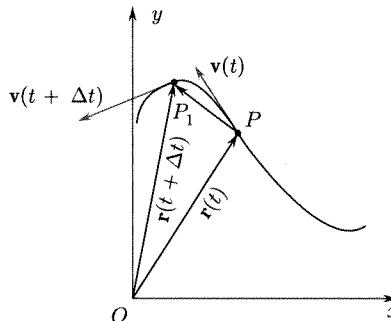
che si può anche scrivere

$$(35) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2}$$

cioè il vettore accelerazione è la somma dei vettori accelerazione che competono ai moti rettilinei componenti lungo gli assi x ed y .

Un'importante caratterizzazione del vettore accelerazione si ha usando l'espressione (31) per la velocità

$$(36) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_s(t)}{dt} \boldsymbol{\tau} + v_s(t) \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}.$$



L'accelerazione può scomporre in due vettori componenti diretti secondo la tangente alla traiettoria e la normale:
il componente tangenziale è legato alla variazione di v , mentre quello normale è legato alla variazione della direzione di \mathbf{v}

Fig. 1.12

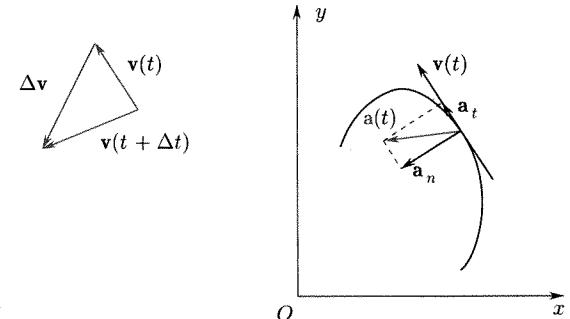


Fig. 1.13

L'accelerazione può decomporre in due vettori componenti legati alla traiettoria: il primo componente \mathbf{a}_t è diretto lungo la tangente ed è legato direttamente ed esclusivamente alla variazione di v_s (cioè a $\ddot{s}(t)$); il secondo \mathbf{a}_n invece è legato alla variazione di direzione del versore tangenziale $\boldsymbol{\tau}$, cioè alla variazione della direzione di \mathbf{v} . Si vedrà presto qual è l'intensità di questo secondo componente, mentre si può senz'altro dire che la direzione risulta normale alla tangente⁽¹⁰⁾; per tale ragione questo componente si chiama *normale* (fig. 1.13).

⁽¹⁰⁾ Per vedere che la direzione del vettore $d\boldsymbol{\tau}/dt$ è normale a $\boldsymbol{\tau}$, basta considerare il prodotto scalare

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = |\boldsymbol{\tau}|^2 = 1$$

e derivare tale espressione rispetto al tempo

$$2\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = 0.$$

L'annullarsi del prodotto scalare mostra l'ortogonalità dei due vettori $\boldsymbol{\tau}$ e $d\boldsymbol{\tau}/dt$.

Nel caso di moto vario rettilineo esiste solo la componente tangenziale della accelerazione. Studieremo ora il caso di un moto piano nel quale la accelerazione ha solo componente normale.

■ 1.12. MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Il *moto circolare* è così detto perché avviene su traiettoria circolare come quella di figura 1.14 dove sono indicati la posizione del punto P a un istante t , il vettore spostamento \mathbf{OP} e il sistema di assi cartesiani scelti. Per semplicità si suppone che gli intervalli di tempo siano contati a partire da uno dei passaggi del punto per il semiasse positivo delle x . Il piano xy venga orientato scegliendo come verso della normale (asse z , versore \mathbf{k}) quello diretto verso l'esterno del foglio: l'angolo φ orientato è quello fra le due semirette orientate x ed \mathbf{OP} e si scelga come verso positivo quello antiorario. L'angolo φ , angolo di fase all'istante t , risulta quindi positivo o negativo secondo che esso venga descritto da \mathbf{OP} nell'intervallo t in verso antiorario od orario; al crescere di t , esso assume valori superiori a 2π . In accordo con ciò, si può prendere sulla traiettoria un sistema di ascisse curvilinee $s(t) = L(t)$ (L = lunghezza dell'arco) con origine in O' , crescenti al crescere di φ (verso antiorario).

Si definisce ancora come velocità scalare

$$(37) \quad v(t) = \dot{s}(t) = \dot{L}(t).$$

La velocità vettoriale $\mathbf{v}(t)$ di intensità pari a $|\dot{s}(t)|$, diretta lungo la tangente nel verso del moto, cambia di direzione a ogni istante.

Si vogliono ora introdurre i concetti relativi alla velocità angolare, scalare e vettoriale, in maniera semplice con riferimento alle situazioni nelle quali l'asse normale al piano della traiettoria, intorno a cui avviene la rotazione, non varia nel tempo, avvertendo peraltro che l'estensione a situazioni diverse richiede cautele e precisazioni.

Data la proporzionalità fra L e φ ($L = R\varphi$, con R raggio della circonferenza) si ha anche

$$(38) \quad \dot{L}(t) = R\dot{\varphi}(t).$$

La grandezza

$$(39) \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega$$

prende il nome di velocità angolare scalare. Essa si misura in radianti al secondo. $\dot{L}(t)$ e $\dot{\varphi}(t)$ risultano positive se il punto si muove sulla traiettoria in verso antiorario, riferito all'asse orientato normale al piano. La velocità angolare vettoriale $\boldsymbol{\omega}$ è definita come un vettore⁽¹¹⁾ che ha:

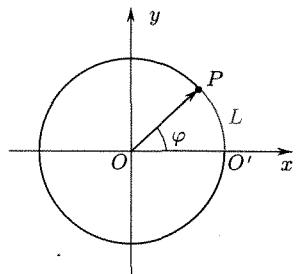


Fig. 1.14

La velocità angolare ha intensità pari alla derivata temporale dell'angolo descritto dal punto

1. direzione normale al piano della traiettoria (come l'asse z);

⁽¹¹⁾ Il vettore così definito è un vettore libero; in genere interesserà il rappresentante applicato in un punto (per es. O nel caso presente), che indicheremo con $\boldsymbol{\omega}$.

2. il verso dal quale si vede il punto muoversi sulla traiettoria in verso antiorario (fig. 1.15) (cioè il verso di \mathbf{k} o l'opposto secondo che nel piano orientato il moto avvenga in verso antiorario od orario);
 3. intensità $\omega = |\dot{\varphi}(t)|$. Evidentemente la velocità angolare scalare, $\dot{\varphi}(t)$, è la componente di ω sull'asse orientato z cioè,

$$(40) \quad \omega = \dot{\varphi} \mathbf{k}.$$

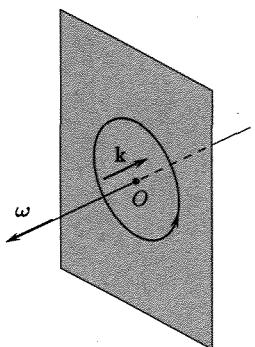
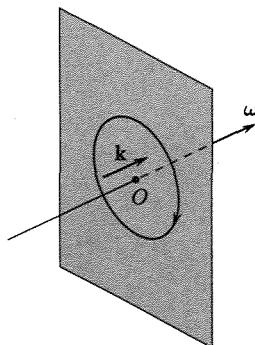


Fig. 1.15

Dopo queste premesse generali per i moti circolari, si consideri il caso del moto circolare uniforme nel quale gli archi percorsi dal punto materiale sono proporzionali ai tempi, cioè l'equazione oraria è algebrica di primo grado. Con la scelta fatta per le origini dei tempi e delle ascisse, è

$$(41) \quad \begin{aligned} L(t) &= v t \\ \varphi(t) &= \frac{v}{R} t. \end{aligned}$$

Per le intensità dei vettori velocità e velocità angolare si ha

$$v = |\mathbf{v}|$$

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

Il moto è periodico, e, se T è il periodo, si ha

$$(42) \quad \begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{v} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Per determinare l'accelerazione nel moto circolare uniforme si considerino le velocità che al punto materiale competono in due posizioni P e P_1 abbastanza vicine (fig. 1.16) e si consideri il diagramma vettoriale necessario per determinare il vettore

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t).$$

Poiché l'angolo fra i vettori $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ è pari all'angolo $\Delta\varphi$ formato dai raggi che determinano le posizioni P_1 e P , si vede che $\Delta \mathbf{v}$ è un vettore posto rispetto a $[P, \mathbf{v}(t)]$ in modo da puntare verso l'interno della circonferenza traiettoria, ed esattamente verso il centro di questa, nel caso limite in cui $\Delta t \rightarrow 0$. Pertanto, l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

è normale a $\mathbf{v}(t)$ e diretta in ogni punto come il raggio della circonferenza; essa è cioè *normale* alla traiettoria e rivolta verso il centro della traiettoria stessa.

L'intensità dell'accelerazione può essere facilmente calcolata con riferimento alla figura 1.16. Indicando con Δv l'intensità di $\Delta \mathbf{v}$, si ha

$$(43) \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

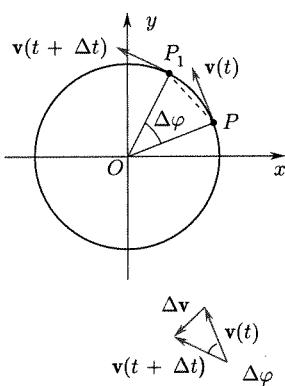


Fig. 1.16

Dalla similitudine dei due triangoli isosceli OPP_1 e quello formato dai vettori $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ (di intensità v) e $\Delta\mathbf{v}$, si può scrivere

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\text{corda } \overline{PP_1}}{R}.$$

Per piccoli valori di $\Delta\varphi$ la lunghezza della corda $\overline{PP_1}$ tende a quella dell'arco $\widehat{PP_1} = R|\Delta\varphi| = R|\dot{\varphi}|\Delta t = v\Delta t$ e si può scrivere

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

e quindi

$$(44) \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

L'accelerazione nel moto circolare uniforme è quindi solo normale, è diretta verso il centro (centripeta) e ha intensità v^2/R .

L'accelerazione nel moto circolare uniforme ha componente solo normale ed è centripeta

■ 1.13. MOTO CIRCOLARE UNIFORME E MOTI ARMONICI COMPONENTI

È interessante giungere per altra via ai medesimi risultati ora ottenuti per il moto circolare uniforme: ciò mostrerà l'interesse della scomposizione dei moti in moti componenti e del processo inverso.

È facile osservare (fig. 1.17) che mentre il punto materiale si muove di moto uniforme sulla traiettoria circolare, le sue proiezioni sugli assi x ed y si muovono di moto armonico con pulsazione ω , periodo $T = 2\pi/\omega$, centro nel punto O e sfasati di $\pi/2$ fra loro.

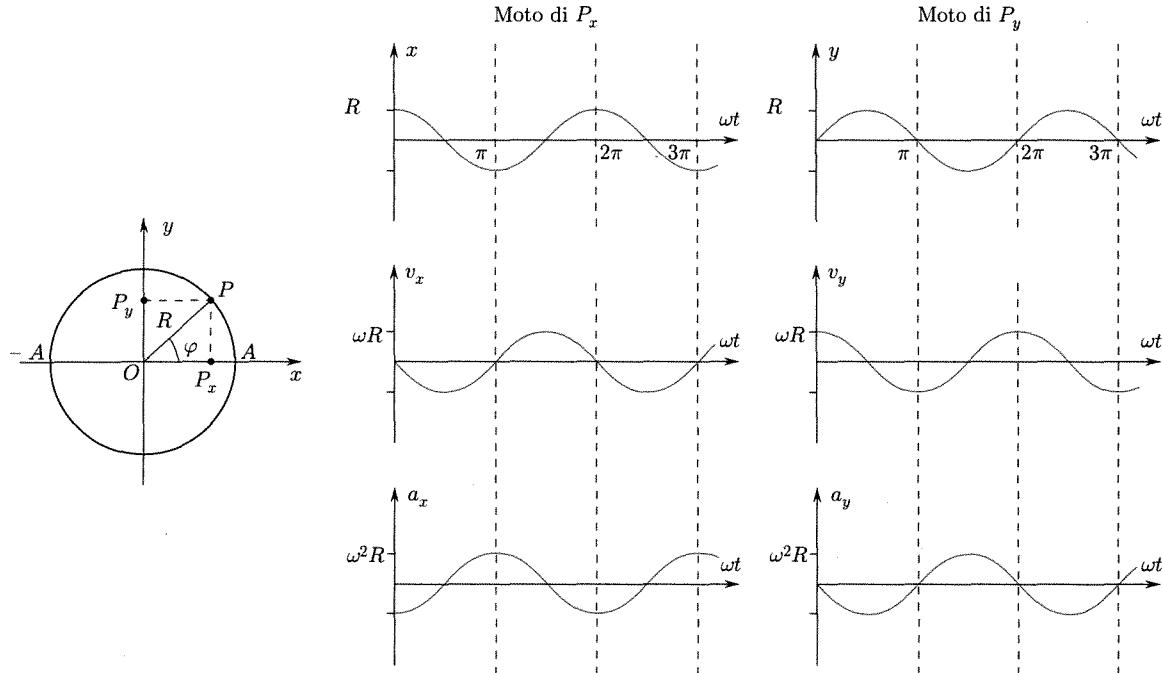


Fig. 1.17

Il moto circolare uniforme può pensarsi costituito dalla composizione di due moti armonici sulle direzioni di due diametri ortogonali fra loro o, alternativamente, un moto armonico può ottenersi per proiezione sulla direzione di un diametro (o su una qualunque retta) di un moto circolare uniforme

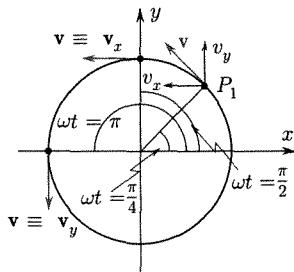


Fig. 1.18

Se si suppone per semplicità che all'istante iniziale il punto si trovi sul semiasse positivo delle x , si scrive

$$(45) \quad \varphi = \dot{\varphi}t = \pm\omega t$$

(altrimenti, $\varphi = \dot{\varphi}t + \varphi_0$) ove il segno va scelto secondo che il moto circolare avvenga in verso antiorario o orario. Si ha quindi

$$(46) \quad \begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = \pm R \sin \omega t. \end{cases}$$

Considerando il solo caso che il punto P si muova in verso antiorario (la trattazione dell'altro caso è del tutto analoga), le equazioni orarie per i moti di P_x e P_y sui rispettivi assi sono quelle di due moti armonici delle stesse ampiezze e pulsazioni, sfasati fra loro di $\pi/2$:

$$(47) \quad \begin{cases} x = R \cos \omega t = R \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ y = R \sin \omega t. \end{cases}$$

Le velocità scalari nei due moti sono

$$(48) \quad \begin{aligned} v_x &= -R\omega \sin \omega t \\ v_y &= +R\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

e la velocità del moto composto ha intensità

$$(49) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

indipendente dal tempo. Nella figura 1.18 è fatta la costruzione del vettore v per alcune posizioni del punto materiale a partire da v_x e v_y (dedotte dai grafici di figura 1.17).

Le accelerazioni dei moti componenti sono dirette rispettivamente lungo gli assi x ed y , puntano verso O e sono date da

$$(50) \quad \begin{aligned} a_x &= \omega^2 x \\ a_y &= \omega^2 y. \end{aligned}$$

L'intensità dell'accelerazione nel moto risultante è

$$(51) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

Nella figura 1.19 è fatta la costruzione del vettore a a partire da a_x e a_y per varie posizioni del punto materiale: la direzione del vettore accelerazione nel moto circolare uniforme è sempre normale alla traiettoria e diretta verso il centro di essa (centripeta).

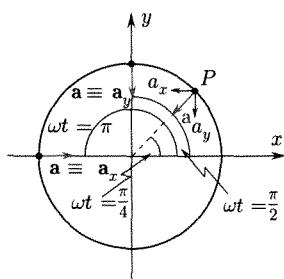


Fig. 1.19

Il moto circolare uniforme è un caso molto particolare di moto risultante di due moti armonici dello stesso periodo che avvengono su rette normali fra loro e intorno allo stesso punto. Si consideri, peraltro, il caso generale di due moti armonici componenti di eguale periodo, di differente ampiezza e sfasamento generico

$$(52) \quad \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x.$$

Si scrive:

$$(53) \quad \begin{cases} x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y). \end{cases}$$

Il periodo del moto risultante è anch'esso $T = 2\pi/\omega$.

Le (53) sono anche le equazioni parametriche della traiettoria, così che, per ottenere la funzione che rappresenta tale curva in coordinate cartesiane, occorre eliminare il parametro t . Le (53) possono anche scriversi

$$(54) \quad \begin{cases} x = A_x (\cos \varphi_x \cos \omega t - \sin \varphi_x \sin \omega t) \\ y = A_y (\cos \varphi_y \cos \omega t - \sin \varphi_y \sin \omega t) \end{cases}$$

a costituire un sistema di due equazioni algebriche in $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$, il cui determinante è dato da

$$(55) \quad \begin{aligned} \Delta &= A_x A_y [\sin \varphi_y \cos \varphi_x - \cos \varphi_y \sin \varphi_x] = \\ &= A_x A_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) = A_x A_y \sin \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Bisogna quindi considerare i due casi: 1) $\Delta = 0$; 2) $\Delta \neq 0$.

Nel primo caso, la condizione $\Delta = 0$, significa $\sin \Delta\varphi = 0$, cioè

$$(56) \quad \Delta\varphi = k\pi \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Siccome l'aumento (o la diminuzione) della differenza di fase di 2π (o multipli di 2π) riporta i moti armonici componenti nella stessa relazione di fase iniziale, la condizione (56) richiede che i due moti componenti siano in fase ($\Delta\varphi = 0$ per $k = 0$, o k pari) o in opposizione di fase ($\Delta\varphi = \pm\pi$ per k dispari). In questi casi, la seconda delle (53) può scriversi

$$(57) \quad y = \pm A_y \cos(\omega t + \varphi_x)$$

valendo il segno + per $\Delta\varphi = 0$ ed il segno - per $\Delta\varphi = \pm\pi$.

La equazione della traiettoria del moto risultante si ottiene dal sistema costituito dalla prima delle (53) e dalla (57) facendone il rapporto:

$$(58) \quad \frac{x}{y} = \pm \frac{A_x}{A_y}.$$

Sono queste equazioni di rette: il moto risultante è quindi un moto armonico di periodo $2\pi/\omega$ su una delle due rette (58): il segno più vale per $\Delta\varphi = 0$.

Nel caso invece che sia $\Delta \neq 0$, il sistema (54) può essere risolto ottenendo le soluzioni per $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$. Quadrando e sommando ($\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$) si trova

$$A_y^2 x^2 + A_x^2 y^2 - 2A_x A_y xy \cos(\varphi_y - \varphi_x) = A_x^2 A_y^2 \sin^2(\varphi_y - \varphi_x)$$

che può scriversi anche

$$(59) \quad \frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

È questa l'equazione di una conica con centro nell'origine. È facile vedere che si tratta di una ellisse, osservando che le coordinate x, y dei suoi punti non possono mai superare rispettivamente le ampiezze A_x e A_y dei moti componenti. Nella forma (59) la ellisse è riferita a due assi ortogonali per il suo centro.

Nella figura 1.20 sono riportate le traiettorie del moto risultante per vari valori di $\Delta\varphi$ compresi fra 0 e 2π . Si osservi che la curva resta sempre nel rettangolo limitato dalle rette $x = \pm A_x$; $y = \pm A_y$; il verso di percorrenza è determinato da $\Delta\varphi$. È interessante il caso in cui la differenza di fase (a meno di multipli di 2π) sia pari a $\pm\pi/2$. I moti componenti si dicono allora in quadratura e la traiettoria è una ellisse i cui assi principali sono gli assi x ed y ed i cui semiassi sono quindi A_x ed A_y ; il senso di percorrenza è orario per $\Delta\varphi = \pi/2$, antiorario nel caso contrario. Nel caso in cui i moti componenti oltre a essere in quadratura abbiano anche ampiezze eguali ($A_x = A_y$) la traiettoria diviene circolare e il moto risultante è un moto circolare uniforme.

Due moti armonici di eguale frequenza si compongono in un moto a traiettoria ellittica

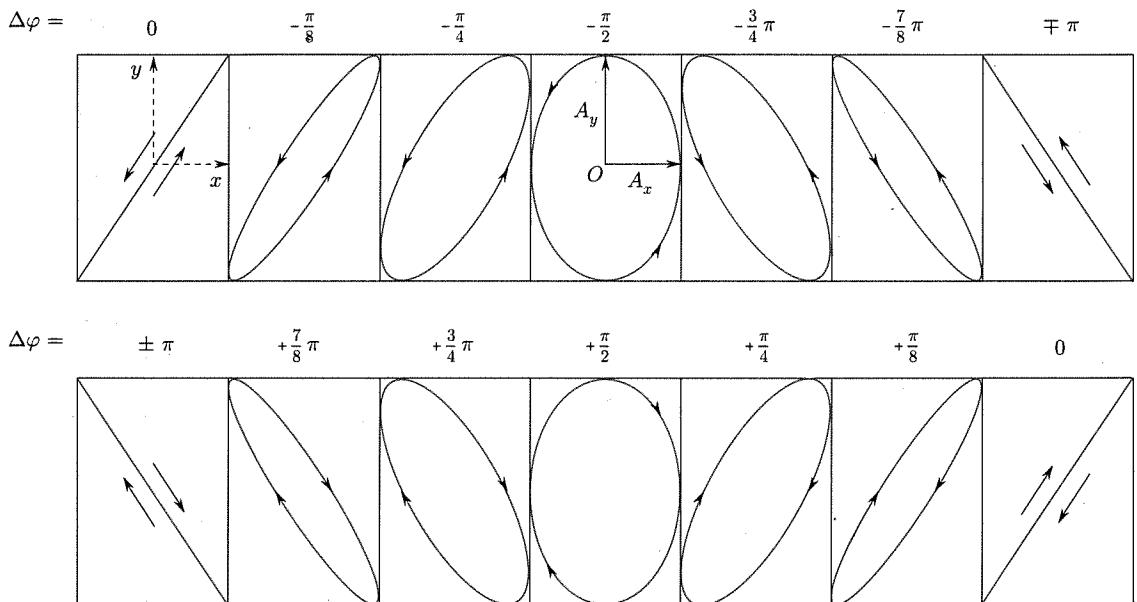


Fig. 1.20

■ 1.14. ACCELERAZIONE IN UN MOTO CON TRAIETTORIA GIACENTE IN UN PIANO

Nell'intorno di un punto
ogni curva traiettoria si
può approssimare con
una circonferenza
tangente

Si consideri ora il moto di un punto materiale su una traiettoria qualsiasi giacente su un piano e si cerchi di determinare nel caso generico la componente normale della accelerazione.

In corrispondenza di un punto P qualsiasi della traiettoria c , di ascissa curvilinea s (v. fig. 1.21) è definita la tangente t orientata in senso concorde con le s e la retta n normale alla tangente stessa. Tra le infinite circonferenze che passano per P e hanno tangente t (e centro sulla normale n), se ne consideri una che abbia in comune con la curva oltre il punto P un punto di intersezione, per es. Q . Si immagini ora di muovere Q verso P sempre lungo la curva c e si consideri come varia la corrispondente circonferenza tangente a c in P . È possibile vedere che, sotto certe restrizioni, in genere verificate per i punti delle normali traiettorie, esiste una circonferenza limite con centro su n passante per P al tendere di Q verso P : essa prende il nome di circonferenza osculatrice (e il corrispondente cerchio quello di cerchio osculatore e si approssima alla curva c nell'intorno di P meglio di tutte le altre tangenti)⁽¹²⁾.

Il raggio R della circonferenza osculatrice prende il nome di *raggio di curvatura* della curva c in P ed il suo centro C *centro di curvatura*. In un piccolo (al limite infinitesimo) intorno di P si può pensare di sostituire, con buona approssimazione, alla curva c un tratto della circonferenza osculatrice di raggio R . La normale alla traiettoria nel punto P viene orientata da P verso C .

Dopo queste premesse, si consideri il punto materiale nella posizione P sulla traiettoria, di ascissa s , all'istante t e la posizione Q assunta al-

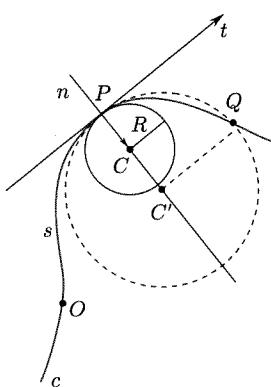


Fig. 1.21

⁽¹²⁾ Avere la stessa tangente in P significa analiticamente che la circonferenza e la c hanno già due intersezioni coincidenti con P ; nel caso del cerchio osculatore la curva e il cerchio hanno tre intersezioni coincidenti in P .

l'istante $t + \Delta t$. Per semplicità nella figura 1.22a si è riportato al posto dell'arco di traiettoria l'arco, indicato ancora con Δs , del cerchio osculatore. Siano \mathbf{v} la velocità in P e \mathbf{v}' quella in Q . Per ottenere il vettore accelerazione \mathbf{a} , si consideri la scomposizione del vettore $\Delta \mathbf{v}$ (fig. 1.22b) in due componenti di cui il primo diretto come \mathbf{v} .

$$(60) \quad \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BD + DC}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BD}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{DC}{\Delta t}.$$

Il primo addendo è l'accelerazione tangenziale, già determinata, e il secondo quella normale. Si noti infatti che questo secondo vettore è diretto secondo la normale alla tangente alla traiettoria in P e sempre *verso il centro di curvatura*. Tale componente ha il valore

$$(61) \quad \begin{aligned} a_n &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{DC}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \Delta s}{R \Delta t} = \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

ed è sempre positiva. Tale componente esiste sempre in un moto e si annulla solo per $R \rightarrow \infty$, cioè quando la traiettoria è rettilinea; in questo caso, come si è visto, la velocità mantiene inalterata la sua direzione e il punto può avere solo accelerazione tangenziale.

La stessa espressione (61) era stata trovata per a_n nel caso particolare del moto circolare uniforme, con R e v costanti: si può pensare che per quanto riguarda *l'accelerazione normale in un punto qualunque della traiettoria, essa è pari a quella che si avrebbe in un moto circolare uniforme lungo la circonferenza osculatrice alla traiettoria nel punto, che avvenisse con una velocità tangenziale scalare pari al valore istantaneo di v* .

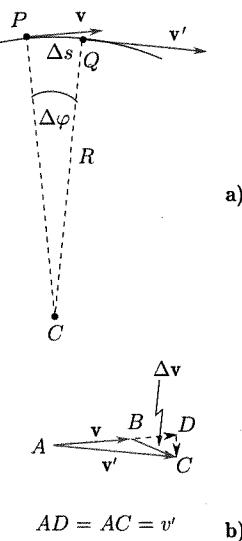


Fig. 1.22

a)

b)

Esempio

Sia dato il moto piano definito dalle equazioni

$$(62) \quad \begin{aligned} x &= bt \\ y &= ct^2 \end{aligned}$$

essendo b e c due costanti positive. Si cerchi di determinare la traiettoria, la velocità, le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione e il raggio di curvatura della traiettoria (fig. 1.23).

Eliminando il parametro t dalle (62) si ricava l'equazione della traiettoria

$$(63) \quad y = \frac{c}{b^2} x^2$$

che descrive una parabola. Le due relazioni (62) sono le equazioni orarie dei moti componenti di P_x , P_y e, come si è detto, possono essere interpretate come le componenti secondo x ed y del vettore \mathbf{r} . La velocità \mathbf{v} può essere calcolata mediante le velocità scalari di P_x e P_y

$$(64) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= b \\ \dot{y} &= 2tc \end{aligned}$$

per cui risulta

$$(65) \quad \mathbf{v} = i b + j 2tc$$

e l'intensità

$$(66) \quad v = \sqrt{b^2 + 4c^2 t^2}$$

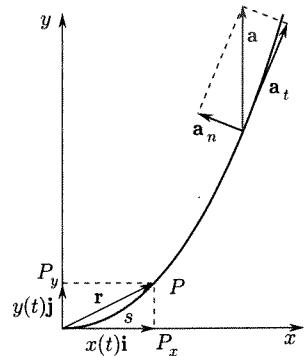


Fig. 1.23

ottenibile anche da

$$(67) \quad v_s = \frac{ds}{dt} = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}$$

essendo

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2} dt.$$

Le accelerazioni dei moti componenti sono

$$(68) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 2c. \end{aligned}$$

L'accelerazione del punto P è quindi diretta secondo y e ha intensità

$$(69) \quad a = 2c.$$

La componente tangenziale di a risulta

$$(70) \quad a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}$$

e la componente normale:

$$(71) \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{b^2 + 4c^2t^2}{R}$$

con R il raggio di curvatura, per il cui calcolo si può procedere utilizzando le (69), (70) e (71) per l'accelerazione:

$$(72) \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2.$$

Si ottiene

$$(73) \quad R = \frac{(b^2 + 4c^2t^2)^{3/2}}{2cb}$$

e quindi

$$(74) \quad a_n = \frac{2cb}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}.$$

■ 1.15. MOTO DI UN PUNTO CON TRAIETTORIA QUALSIASI

Le considerazioni svolte nel caso del moto di un punto materiale lungo una traiettoria giacente su un piano possono essere facilmente estese al caso in cui la traiettoria sia qualsiasi nello spazio.

In tal caso, si può pensare di scomporre il moto in tre moti componenti lungo tre assi mutuamente ortogonali, di equazioni orarie

$$(75) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

e di determinare la velocità e l'accelerazione come somme delle analoghe grandezze dei moti componenti. Le (75) sono anche le equazioni parametriche della curva traiettoria.

La velocità e la accelerazione possono anche essere direttamente definite partendo dai vettori che rappresentano gli spostamenti del punto in intervalli di tempi finiti secondo il metodo usato nel caso di traiettoria su un piano; in questo caso i vettori vanno considerati nello spazio a tre dimensioni.

Il vettore velocità è sempre diretto come la tangente alla traiettoria nel punto considerato e ha il verso del moto. Fissato sulla traiettoria un sistema di ascisse curvilinee si ha

$$(76) \quad v = \dot{s}(t).$$

Per una traiettoria generica in corrispondenza di un punto qualsiasi P si ha un fascio di piani tangentì che contengono la tangente. Si consideri uno qualsiasi di questi piani (fig. 1.24) che intersechi la curva in almeno un altro punto Q . In genere esiste una posizione limite del piano tangente quando Q viene fatto tendere a P lungo la curva; tale piano prende il nome di piano osculatore; fra tutti i piani per P esso si approssima più di tutti alla linea c nell'intorno di P . Con buona approssimazione, si può pensare che nell'intorno di P l'arco della traiettoria giaccia nel piano osculatore.

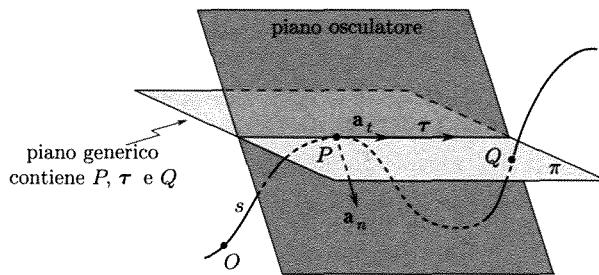


Fig. 1.24

Una traiettoria sghemba può considerarsi, al limite, come la successione di tanti archi piani di lunghezza infinitesima: naturalmente il piano osculatore varia con la posizione del punto P . Per ciascuno degli archi piani di traiettoria aventi lunghezza molto piccola (al limite infinitesima) si può considerare un cerchio osculatore, un raggio R e un centro di curvatura: la normale alla tangente in P giacente nel piano osculatore è la normale principale e viene detta verso il centro di curvatura.

Ancora una volta, l'accelerazione ha una componente tangenziale

$$(77) \quad a_t = \frac{dv_s}{dt} = \ddot{s}(t)$$

che può avere il verso della tangente orientata (concorde con le s crescenti) o quello opposto, e una componente normale diretta sempre verso il centro di curvatura

$$(78) \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_s^2}{R}.$$

In un moto generico su traiettoria qualunque l'accelerazione si può sempre scomporre in una componente tangenziale e una normale alla traiettoria

■ 1.16. MOTI CENTRALI. VELOCITÀ AREOLARE

In alcuni casi importanti i moti sono caratterizzati dal fatto che il vettore accelerazione applicato in ciascun istante nella posizione occupata dal punto materiale è sempre diretto verso un punto fisso dello spazio: tali moti prendono il nome di moti centrali; essi sono necessariamente piani (cap. 2, par. 2.23). Nella descrizione cinematica di questi moti è utile scegliere il punto fisso come origine del sistema di riferimento.

I moti centrali sono necessariamente piani

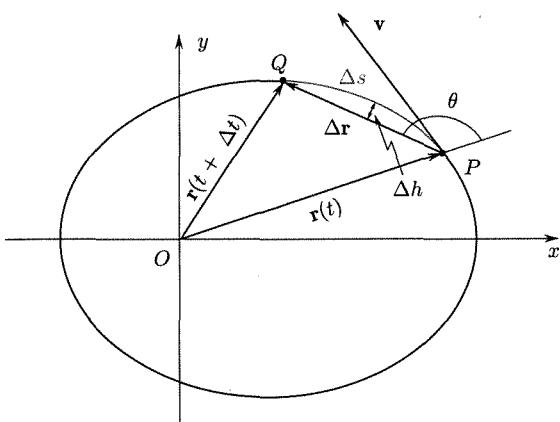


Fig. 1.25

Si consideri, con riferimento alla figura 1.25, il moto centrale del punto P . Il piano della traiettoria (x, y) sia orientato con la normale (asse z) verso l'esterno della pagina e il verso positivo per gli angoli descritti dal vettore $\mathbf{r}(t)$, che fissa la posizione del punto all'istante t , sia quello antiorario. Nell'intervallo Δt il vettore $\mathbf{r}(t)$ spazza l'area di un triangolo mistilineo che differisce da quella del triangolo a lati rettilinei e vertici O, P, Q per l'area della superficie racchiusa fra l'arco di traiettoria⁽¹³⁾ Δs e la corda PQ . L'area del triangolo a lati rettilinei è

$$(79) \quad \Delta S = \frac{1}{2}r\Delta r \sin(\pi - \theta) = \frac{1}{2}r\Delta r \sin \theta$$

essendo θ l'angolo fra i vettori \mathbf{r} e $\Delta \mathbf{r}$. Tale area risulta quindi positiva o negativa secondo il segno di $\sin \theta$, cioè secondo che il punto si muova in verso antiorario od orario. Se si riduce gradatamente Δt fino a farlo tendere a zero, tendono a zero anche Δr , ΔS , Δs e la saetta dell'arco Δh . Tende a zero anche la differenza fra ΔS e l'area del triangolo mistilineo; si osservi tuttavia che essa tende a zero più rapidamente delle altre quantità citate, giacché dipende dal prodotto delle grandezze Δr e Δh entrambe tendenti a zero. Per valori molto piccoli di Δt , cioè per intervalli infinitesimi dt , l'area del triangolo mistilineo descritto da \mathbf{r} può porsi

$$(80) \quad dS = \frac{1}{2}rds \sin \theta = \frac{1}{2}rv \sin \theta dt$$

essendo θ l'angolo fra \mathbf{r} e \mathbf{v} .

Si definisce *velocità areolare scalare* la

$$(81) \quad \dot{S} = \frac{1}{2}rv \sin \theta.$$

Essa misura la rapidità con cui il vettore \mathbf{r} descrive le aree ed è positiva nel riferimento considerato se il moto del punto (e di \mathbf{r}) avviene in senso antiorario. Si considera anche una *velocità areolare vettoriale*

$$(82) \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

che è normale al piano del moto, diretta dalla parte dalla quale si vede il punto descrivere l'orbita in senso antiorario e ha intensità $|\dot{S}|$. La velocità areolare scalare è la componente di $d\mathbf{S}/dt$ sull'asse orientato z .

Come si è detto, queste velocità possono essere considerate per qualsiasi moto piano; il loro interesse peraltro sta nel fatto che, come si vedrà in seguito (cap. 2, par. 2.23), nel caso di moti centrali riferiti al punto fisso, centro del moto, esse sono costanti.

⁽¹³⁾ Con le scelte fatte le ascisse curvilinee crescono positivamente se il punto si muove in senso antiorario sulla traiettoria.

■ 1.17. DEFINIZIONE DEL MOTO DALLA CONOSCENZA DELL’ACCELERAZIONE O DELLA VELOCITÀ

In alcuni casi l’osservazione sperimentale o le considerazioni teoriche consentono di conoscere, nel moto di un punto materiale, il vettore accelerazione o il vettore velocità (o le loro componenti) in funzione del tempo, anziché direttamente il vettore spostamento, o le sue componenti

$$(83) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

come si è implicitamente supposto nelle precedenti considerazioni.

Dato che esistono relazioni fra spostamenti, velocità ed accelerazioni, si può, dalla conoscenza di alcuni elementi che caratterizzano il moto del punto materiale, in ogni istante ottenere informazioni sulle rimanenti grandezze. Va però notato che mentre se sono noti i vettori che fissano la posizione del punto

$$(84) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} x(t) + \mathbf{j} y(t) + \mathbf{k} z(t)$$

sono univocamente definiti i vettori \mathbf{v} ed \mathbf{a} mediante operazioni di derivazione

$$(85) \quad \begin{cases} \mathbf{v}(t) = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt} \\ \mathbf{a}(t) = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

non è così per il caso inverso, quando cioè siano noti il vettore accelerazione o quello velocità e si voglia determinare il vettore spostamento, in quanto le operazioni di integrazione necessaria richiedono la conoscenza delle *condizioni iniziali*. Nel caso, per es., che si conosca il vettore accelerazione, che in genere è funzione della velocità, della posizione e del tempo, si ha a disposizione una relazione vettoriale

$$(86) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

corrispondente a un *sistema* di tre equazioni differenziali del secondo ordine.

$$(87) \quad \begin{cases} \ddot{x} = X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{y} = Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{z} = Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{cases}$$

La soluzione del problema analitico può essere più o meno complessa nei vari casi, ma in ogni caso è necessario effettuare delle operazioni di integrazione le quali introducono costanti arbitrarie, in numero totale di sei, che vanno specificate, per es., indicando la posizione (x_0, y_0, z_0) e la velocità iniziali $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ (per $t = 0$). Se per es. si considera il caso particolarmente semplice in cui \mathbf{a} non dipenda da \mathbf{r} e \mathbf{v} ma solo da t

$$(88) \quad \mathbf{a} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k}$$

si ha

$$(89) \quad \begin{cases} \mathbf{v}(t) &= \int_0^t \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{i} \int_0^t \ddot{x}(t) dt + \mathbf{j} \int_0^t \ddot{y}(t) dt + \mathbf{k} \int_0^t \ddot{z}(t) dt = \\ &= \mathbf{i}[\dot{x}(t) + \dot{x}_0] + \mathbf{j}[\dot{y}(t) + \dot{y}_0] + \mathbf{k}[\dot{z}(t) + z_0] \\ \mathbf{r}(t) &= \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{i}[x(t) + x_0] + \mathbf{j}[y(t) + y_0] + \mathbf{k}[z(t) + z_0]. \end{cases}$$

Esempio

Si consideri il moto di un grave lanciato dalla quota di 25 m con velocità iniziale $v_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$ diretta orizzontalmente, trascurando la resistenza dell'aria e gli effetti della rotazione della Terra.

Si scelga un sistema di coordinate con l'asse y verticale, passante per il punto di lancio, e l'asse x diretto come v_0 (fig. 1.26). Si ha

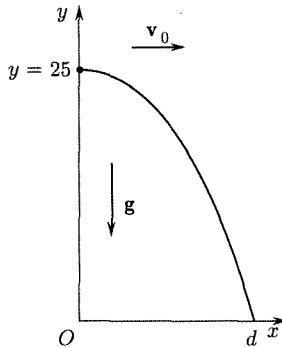


Fig. 1.26

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases}$$

dove $\mathbf{g} = -\mathbf{j}g$ è il vettore accelerazione di gravità. Integrando le due equazioni di cui sopra, si ha

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= \int_0^t -g dt + v_{0y} = -gt + v_{0y}. \end{aligned}$$

Poiché $v_{0x} = 5 \text{ ms}^{-1}$ e $v_{0y} = 0$,

$$\begin{cases} v_x = 5 \text{ ms}^{-1} \\ v_y = -9,8t \text{ ms}^{-1} \end{cases}$$

Integrando ancora una volta si ottengono le equazioni parametriche del moto

$$\begin{cases} x = \int_0^t 5 dt + x_0 = 5t + x_0 \\ y = \int_0^t -9,8t dt + y_0 = -\frac{1}{2}9,8t^2 + y_0. \end{cases}$$

Sapendo che $x_0 = 0$, $y_0 = 25$, scriveremo infine

$$\begin{cases} x = 5t \text{ m} \\ y = -4,9t^2 + 25 \text{ m}. \end{cases}$$

Se da queste equazioni si elimina il parametro t si ottiene l'equazione della traiettoria. Dalla prima si ha $t = x/5$ che, sostituita nella seconda, dà

$$y = -4,9 \left(\frac{x}{5} \right)^2 + 25$$

ossia approssimativamente

$$y \simeq -0,2x^2 + 25$$

che è l'equazione di una parabola.

Ponendo in questa equazione $y = 0$ si trova il valore della distanza orizzontale d percorsa dal grave quando giunge al suolo. Si ha

$$25 - 0,2x^2 = 0$$

da cui

$$d = \sqrt{\frac{25}{0,2}} = \sqrt{125} = 11,1 \text{ m.}$$

Sostituendo questo valore nella espressione di x si ottiene l'istante in cui il grave tocca il suolo

$$t_d = \frac{11,1}{5} = 2,2 \text{ s}$$

che, sostituito nelle espressioni di v_x e v_y , consente di calcolare la velocità con cui il grave tocca il suolo:

$$v_x = 5 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_y = -9,8 \times 2,2 = -21,56 \text{ ms}^{-1}.$$

L'intensità della velocità al momento dell'urto sarà quindi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cong \sqrt{489} \cong 22,1 \text{ ms}^{-1}.$$

■ 1.18. MOTI DI UNO STESSO PUNTO MATERIALE RISPETTO A SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI

Si è già osservato (par. 1.2) che le caratteristiche del moto di un punto materiale sono legate al sistema di riferimento scelto. Molto spesso si usa un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *solidale* con un corpo, o un insieme rigido di corpi, rispetto ai quali si intende considerare il moto del punto. Un tale sistema di riferimento fissa uno spazio caratterizzato dal fatto che in esso la distanza di due punti geometrici qualsiasi rimane inalterata nel tempo.

A volte si presenta l'opportunità di mettere in relazione le descrizioni del moto di un punto materiale osservato simultaneamente⁽¹⁴⁾ da due sistemi di riferimento diversi, ciascuno solidale con alcuni corpi rigidi, e in moto fra loro. Si vengono in tal caso a considerare due spazi geometrici e due sistemi di coordinate ciascuno avente la caratteristica su illustrata di invarianza delle distanze fra punti; essi risultano sovrapposti e in moto relativo fra loro; il moto del punto viene studiato in ciascuno di tali spazi. Si pensi per es. a un oggetto (punto P) in un treno: si potrà considerare il moto di P rispetto a una terna solidale con la Terra e a una terna solidale con un vagone. Si osservi che i moti nei due sistemi sono in genere completamente diversi, con traiettorie ed equazioni orarie diverse: per es. il punto può essere fermo nel sistema della vettura e in moto nel sistema legato alla Terra. Pur essendo diversi i due moti, i corrispondenti caratteri cinematici sono in relazione fra loro e con quelli del moto, detto di trascinamento, che i punti solidali con una delle terne di riferimento hanno rispetto all'altra terna.

Per fissare la terminologia, uno qualunque dei due sistemi di riferimento solidale a corpi esterni sarà indicato come *fisso*; il moto del punto P in esso si dirà assoluto e le grandezze cinematiche in esso determinate avranno un indice a . L'altro sistema si chiamerà *mobile*, il moto in esso si dirà relativo e le grandezze avranno un indice r . Si indicherà infine come moto di *trascinamento* quello, rigido⁽¹⁵⁾, della terna mobile (Ω, x', y', z') ,

⁽¹⁴⁾ Nelle considerazioni di meccanica classica si ammette che il tempo scorra indipendentemente dal moto dell'osservatore. Ha significato quindi il termine simultaneo e l'ascissa temporale può essere presa uguale nei due sistemi.

⁽¹⁵⁾ Il moto di trascinamento è rigido perché la terna mobile si muove nello spazio solidale con la terna fissa, mantenendo la caratteristica che la distanza fra due suoi punti qualsiasi resta immutata.

e di tutti i punti a essa solidali, rispetto alla terna fissa (O, x, y, z) . Le grandezze del moto di trascinamento saranno contraddistinte con un indice t .

Non sarà qui data la trattazione generale⁽¹⁶⁾ ma si darà la giustificazione semplice di alcune relazioni fondamentali di grande interesse. Saranno considerate successivamente situazioni particolari, che del resto si incontrano frequentemente, prima di giungere alla formulazione più generale.

1. Moto di trascinamento traslatorio

Si supponga, dapprima, per semplicità, che tutto avvenga in un piano e quindi si possano considerare due soli assi ortogonali per ciascun sistema di riferimento; inoltre, che il sistema mobile (x', y') si muova con velocità vettoriale costante di moto traslatorio uniforme, rispetto al sistema fisso (x, y) . Nella figura 1.27a e b sono indicate le posizioni dei due sistemi e di un punto materiale in corrispondenza a un istante t e a un istante $t + \Delta t$, rispettivamente; nel secondo grafico è segnata anche la posizione del sistema mobile e del punto P all'istante t e la posizione P' che il punto avrebbe se non si fosse mosso nel sistema x', y' .

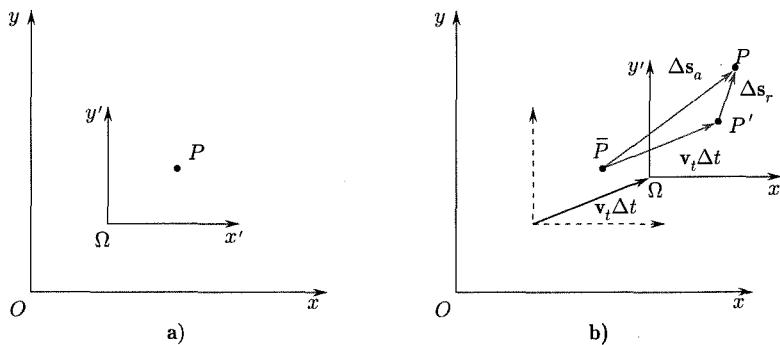


Fig. 1.27

Per gli spostamenti e le velocità valgono sempre le relazioni che i valori nella terna assoluta sono eguali a quelli nella terna relativa più quelli di trascinamento

Se il punto materiale ha subito uno spostamento Δs_r nel tempo Δt nel sistema x', y' , lo spostamento osservabile da un osservatore nel sistema xy risulta

$$\Delta s_a = \Delta s_r + v_t \Delta t$$

e per intervalli di tempo infinitamente brevi ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$(90) \quad ds_a = ds_r + v_t dt.$$

Le velocità che è possibile rilevare nei due sistemi sono quindi legate fra loro dalla

$$(91) \quad \mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_t$$

da cui segue anche

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r.$$

⁽¹⁶⁾ Sarà fatta nel corso di Meccanica razionale mediante l'operazione diretta di derivazione del vettore di posizione nella terna fissa espresso mediante i vettori che fissano la posizione della terna mobile e del punto in essa.

Queste considerazioni possono estendersi immediatamente al caso in cui i sistemi in moto traslatorio siano non piani ma tridimensionali (O, xyz) e ($\Omega x'y'z'$) e che il moto traslatorio non sia uniforme, cioè che la velocità \mathbf{v}_t di trascinamento nel moto traslatorio del sistema $x'y'z'$ rispetto al sistema xyz vari (in direzione, verso e intensità) con il tempo; gli assi $x'y'z'$ restino peraltro sempre paralleli a xyz . Anche in questo caso lo spostamento elementare $d\mathbf{s}_a$ del punto rispetto a xyz nel tempo dt è la somma vettoriale dello spostamento $d\mathbf{s}_r$, osservato nel sistema mobile e dello spostamento di trascinamento $d\mathbf{s}_t = \mathbf{v}_t dt$ che la posizione occupata da P nella terna $x'y'z'$ subisce per effetto del moto di quest'ultima rispetto al sistema xyz nello stesso intervallo elementare

$$(92) \quad d\mathbf{s}_a = d\mathbf{s}_r + \mathbf{v}_t(t) dt.$$

Da cui

$$(93) \quad \mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_t(t)$$

$$(94) \quad \mathbf{a}_a(t) = \mathbf{a}_r(t) + \mathbf{a}_t(t).$$

Nel caso, quindi, di un moto di *trascinamento puramente traslatorio* la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto al sistema fisso sono le somme rispettivamente della velocità e delle accelerazioni relative e di trascinamento. Si noti che queste ultime, cioè la velocità e l'accelerazione che competono nel moto di trascinamento alla posizione occupata dal punto materiale all'istante t sono in questo caso indipendenti dalla posizione.

2. Moto di trascinamento di semplice rotazione

Un altro tipo caratteristico di moto del sistema mobile rispetto a quello fisso è quello di semplice rotazione⁽¹⁷⁾. Per ragioni di semplicità supponiamo che lo spazio solidale con ($\Omega, x'y'z'$) ruoti intorno a z' coincidente con l'asse z del sistema fisso (O, xyz) e che i due sistemi abbiano anche la stessa origine, $0 \equiv \Omega$ (fig. 1.28). Nel moto rigido di trascinamento ciascun punto di $x'y'z'$ descrive in xyz una traiettoria circolare giacente in un piano normale a z , con centro su z e velocità angolare ω diretta come z , nel verso positivo quando la rotazione di $x'y'z'$ è antioraria.

In assenza di moto di trascinamento rotatorio, anche per le accelerazioni il valore assoluto egualia la somma dei valori di trascinamento e relativo

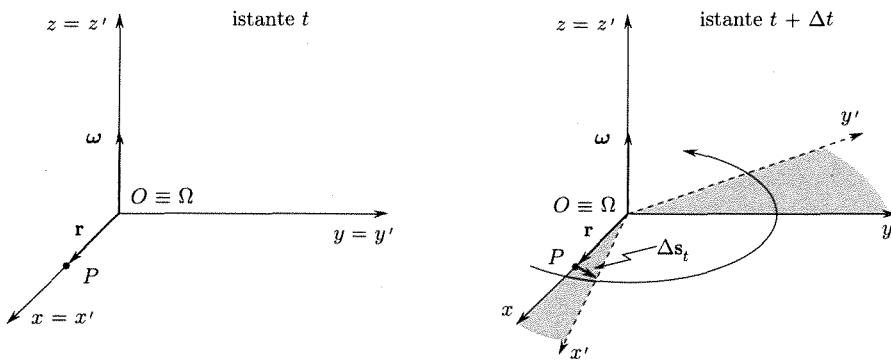


Fig. 1.28

⁽¹⁷⁾ Useremo qui il vettore velocità angolare introdotto nella maniera vista in relazione al moto circolare di un punto materiale (par. 1.12): la direzione dell'asse di rotazione è costante nel tempo.

Per determinare lo spostamento di un punto qualsiasi in questo moto di trascinamento si consideri la posizione $x'y'z'$ in un istante t in cui la terna coincide con xyz e quella nell'istante $t + \Delta t$. Il punto P individuato dal vettore \mathbf{r} si muove su una circonferenza nel piano xy di raggio r e subisce uno spostamento $\Delta\mathbf{s}_t$ di intensità $r\omega\Delta t$, diretto come in figura. Si vede che si può porre

$$\Delta\mathbf{s}_t = \omega\Delta t \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{r}\Delta t.$$

Passando al limite, per $\Delta t \rightarrow 0$ si può scrivere

$$(95) \quad d\mathbf{s}_t = d\mathbf{r} = \omega \times \mathbf{r} dt$$

da cui

$$(96) \quad \mathbf{v}_t = \omega \times \mathbf{r}.$$

Si noti che, a differenza del caso precedente di moto di trascinamento di semplice traslazione, la velocità di trascinamento, cioè *la velocità rispetto al sistema fisso (x, y, z) di un punto solidale con la terna mobile (x', y', z') all'istante t dipende dalla posizione*.

Analogamente per le accelerazioni⁽¹⁸⁾

$$(97) \quad \mathbf{a}_t = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

e poiché dalla (95) si ha

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}$$

è quindi anche

$$\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Si ottiene così

$$(98) \quad \mathbf{a}_t = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

e nel caso di un moto di trascinamento di rotazione uniforme, con $\omega = \text{cost}$, si ha

$$(99) \quad \mathbf{a}_t = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

A differenza del caso di un moto di trascinamento di traslazione, nel moto di trascinamento di rotazione l'accelerazione, come già visto per la velocità, dipende dalla posizione occupata dal punto materiale nel sistema mobile.

Dopo aver stabilito le espressioni per \mathbf{v}_t ed \mathbf{a}_t per il moto di trascinamento di semplice rotazione, si consideri ora il moto di un punto materiale nei due sistemi di riferimento, fisso e mobile, o assoluto e relativo.

Per semplicità, si supponga che i due sistemi abbiano le origini e gli assi z e z' coincidenti e che nel sistema $x'y'z'$ il punto si sposti lungo l'asse x' ; le conclusioni che si ottengono sono peraltro generali. In queste condizioni ci si può limitare a considerare una figura piana (fig. 1.29). Siano quindi le posizioni degli assi $x'y'$ agli istanti t e $t + \Delta t$ quelle segnate a

⁽¹⁸⁾ Nel caso che l'asse di rotazione vari nel tempo, l'introduzione di ω va fatta con particolari cautele che si studiano in meccanica razionale.

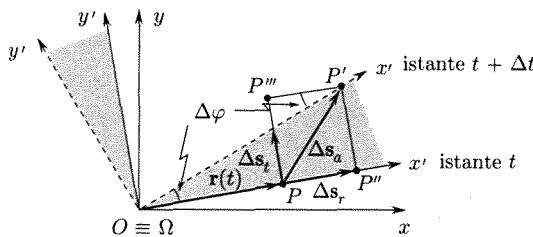


Fig. 1.29

tratto pieno e interrotto, rispettivamente, P e P' siano le corrispondenti posizioni del punto materiale. Lo spostamento Δs_a del punto materiale nell'intervallo Δt può essere decomposto in un componente $\Delta s_r = \overline{PP''}$ diretto come r all'istante t iniziale e in un componente normale di intensità pari alla lunghezza di $\overline{PP''}$. La grandezza di questo secondo componente è sempre maggiore dell'intensità del vettore Δs_t , segnato in figura, normale a r all'istante t e avente inizio e fine rispettivamente su $r(t)$ e su $r(t + \Delta t)$. Se peraltro si fa tendere $\Delta t \rightarrow 0$ anche $\Delta s_r, \Delta s_t, \Delta\varphi$ e la differenza fra l'intensità di Δs_t e la lunghezza $\overline{PP''}$ tendono tutti a zero. Quest'ultima differenza peraltro tende più rapidamente (infinitesimo di ordine superiore) essendo data dal prodotto di due grandezze (Δs_r e $\tan \Delta\varphi \simeq \Delta\varphi$) che tendono a zero. Si può quindi porre

$$(100) \quad ds_a = ds_r + ds_t = v_r dt + (\omega \times r) dt$$

e di conseguenza, per la (96):

$$(101) \quad v_a = v_r + (\omega \times r) = v_r + v_t.$$

Anche per il moto di trascinamento di semplice rotazione la velocità di un punto materiale rispetto alla terna fissa è pari alla somma della velocità v_r del moto nella terna mobile e della velocità di trascinamento v_t che compete nel moto di trascinamento *al punto materiale pensato solidale con la terna mobile all'istante considerato*.

Quando si passa alle accelerazioni, cioè a calcolare la derivata della (101), occorre tenere presente che entrambi i vettori v_r e r variano nel tempo sia per il moto del punto nel sistema mobile sia perché tale sistema rigido cambia orientazione rispetto al sistema fisso. Il problema, che sarà esaminato in dettaglio nel corso di meccanica razionale, dà come risultato del calcolo:

$$(102) \quad a_a = a_r + a_t + 2\omega \times v_r.$$

Questa formula vale anche se la direzione di ω varia nel tempo; in questi casi la definizione di ω va fatta come già altre volte osservato con particolari cautele.

Nel caso di un punto materiale che si muova in un sistema mobile in rotazione rispetto al sistema fisso, l'accelerazione assoluta è pari alla somma dell'accelerazione nel sistema mobile, dell'accelerazione che compete alla posizione occupata dal punto materiale nel moto rigido di trascinamento, e di una nuova grandezza, avente le dimensioni di un'accelerazione, di espressione $2\omega \times v_r$, chiamata accelerazione complementare o di deviazione o di Coriolis. Tale accelerazione scompare quando $v_r = 0$, cioè il punto è fermo nel sistema mobile, oppure quando ω e v_r risultino paralleli.

*Nel caso generale
l'accelerazione assoluta è
pari a quella relativa più
quella di
trascinamento più quella
complementare, detta
di Coriolis*

3. Moto di trascinamento qualsiasi

È possibile infine mostrare, in base alle caratteristiche generali dei moti rigidi, che nel *moto di trascinamento più generale* uno spostamento del sistema mobile (Ω, x', y', z') rispetto al sistema fisso può esprimersi come somma di uno spostamento traslatorio pari allo spostamento di Ω e di uno spostamento rotatorio intorno ad un asse per la posizione finale di Ω . Analogamente, la distribuzione istantanea delle velocità (*atto di moto*) del sistema mobile rispetto al sistema fisso è tale che la velocità di ogni punto P può porsi come somma di una velocità di traslazione pari alla velocità di Ω (v_Ω) e di una velocità corrispondente ad una rotazione che avviene con una velocità ω intorno a un asse per Ω

$$(103) \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \times \Omega \mathbf{P}.$$

L'espressione dell'accelerazione di trascinamento istante per istante e punto per punto si ottiene derivando la (103).

Nel caso del tutto generale di moto di trascinamento qualsiasi e di moto del punto materiale qualsiasi nel sistema mobile si ottengono, come generalizzazioni di quelle stabilite nei casi 1 e 2, le relazioni:

$$(104) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_a(t) &= \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_t(t) \\ \mathbf{a}_a(t) &= \mathbf{a}_r(t) + \mathbf{a}_t(t) + 2\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{v}_r(t). \end{aligned}$$

L'accelerazione complementare scompare quando $\boldsymbol{\omega} = 0$ (moto di trascinamento traslatorio), $\mathbf{v}_r = 0$, oppure $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{v}_r sono paralleli.

■ 1.19. METODI DI OSSERVAZIONE DELLE GRANDEZZE CINEMATICHE

Le considerazioni svolte sulla cinematica del punto materiale sono basate sulla disponibilità di osservazioni sperimentali sul moto di corpi assimilati a punti materiali.

Ora si vuole solo brevemente accennare ad alcuni metodi sperimentali che possono essere usati per la determinazione delle grandezze cinematiche. Si osserva innanzitutto che in una misurazione occorre sempre sfruttare qualche interazione del corpo in moto con oggetti ed enti esterni e quindi bisogna conoscere i dettagli di queste interazioni, per potere ricavare le informazioni volute. Appare inoltre evidente che l'effettuazione di misure comporta sempre una perturbazione dello stato del corpo oggetto di misura; i metodi di misura vanno studiati in modo che le perturbazioni siano le minori possibili. In molti casi esse possono essere trascurate, in altri peraltro non possono essere ignorate per quanto piccole siano.

Per avere informazioni sul legame fra posizione e tempo si può fare uso di particelle che si muovano con leggi note, colpiscono il corpo in oggetto disturbando il suo moto il meno possibile e ritornino verso l'osservatore: i casi più semplici sono quelli nei quali le particelle viaggiano con velocità di intensità costante molto maggiore di quella del mobile e talmente elevata che si possa praticamente trascurare il tempo impiegato dalle particelle per raggiungere l'osservatore. Questo è frequentemente il caso in cui si usino come particelle i fotoni, cioè le particelle associate alle onde luminose; essi viaggiano con la velocità della luce (~ 300.000 km/s). L'impiego dei fotoni, cioè della luce, per osservazioni cinematiche può essere fatto con vari metodi e del resto di questo tipo è l'osservazione visiva diretta giacché le varie posizioni

assunte da un mobile sono da noi viste perché i fotoni (luce) emessi o riflessi dal mobile raggiungono il nostro occhio.

Fra i metodi di osservazione e registrazione più usati sono quelli fotografici: gli spostamenti (tratti di traiettoria) di punti luminosi (per es. stelle) possono essere facilmente studiati in questo modo, purché la luce che colpisce la lastra sia solo quella (o quasi) del punto da studiare (assenza di fondo): in tal caso l'esposizione può durare abbastanza a lungo.

La figura 1.30 (D. Menzel) mostra le tracce di alcune stelle che appaiono ruotare intorno al polo terrestre per effetto della rotazione della Terra: l'arco molto luminoso più piccolo si riferisce alla stella polare. Il metodo consente di rilevare anche corpi celesti non visibili a occhio nudo.

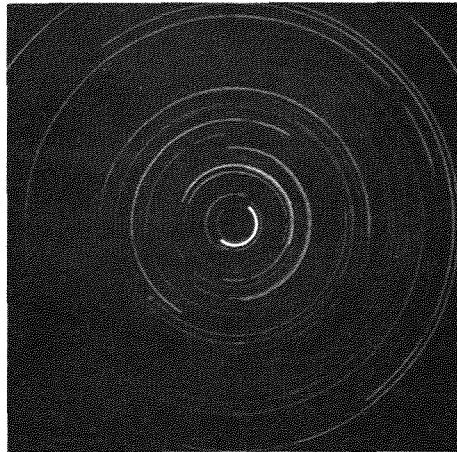


Fig. 1.30 Tracce di stelle che appaiono ruotare intorno al polo terrestre; l'arco piccolo molto luminoso si riferisce alla Stella polare (D. Menzel).

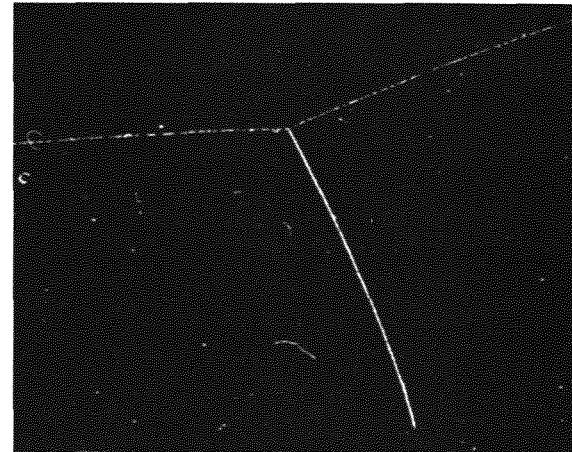


Fig. 1.31 Particelle cariche in camera a bolle a deuterio: antiproton (proveniente da sinistra) deviato da un nucleo di deuterio inizialmente fermo.

Il metodo fotografico si può usare direttamente anche nel caso in cui l'oggetto si muova con elevata velocità nel campo di interesse e quindi la macchina, opportunamente sincronizzata con il moto da osservare, venga aperta per tempi brevi. La figura 1.31 mostra il percorso di particelle elementari in una camera a bolle: in questo caso particolare le traiettorie delle particelle elementari cariche sono rilevate perché producono la formazione di una serie di bollicine lungo il loro percorso in un liquido tenuto in condizioni di falso equilibrio. Nella figura si tratta, nella stella a tre rami, di un antiproton \bar{p} (tratto più leggero) che urta un nucleo di deuterio D in una camera a bolle a deuterio: l'antiproton è deviato e il nucleo di deuterio inizialmente fermo viene lanciato lungo la traiettoria a tratto spesso.

Il metodo fotografico può essere usato anche per rilievi di posizioni successive di punti materiali e quindi per ottenere informazioni relative alla velocità. La figura 1.32 mostra tre fotografie prese nell'intervallo di 12 anni che mostrano la rotazione relativa delle componenti della stella doppia Kugel 60 (Osservatorio Yerkes). Nel caso di corpi che cambiano rapidamente la loro posizione, gli intervalli fra fotogrammi successivi devono essere ridotti opportunamente. Un primo metodo per ottenere riprese a brevi intervalli è quello della cinematografia a elevata velocità. In questo caso una macchina da ripresa cinematografica si apre⁽¹⁹⁾ ad intervalli regolari di tempo, per es. migliaia di volte al secondo, e ciascuna volta effettua una fotografia del campo nel quale il mobile si muove. La durata della singola ripresa fotografica può essere inferiore a un milionesimo di secondo; se durante questo intervallo lo spostamento del mobile è sufficientemente piccolo, ogni fotogramma può servire a individuare la posizione del mobile all'istante dell'apertura dell'obiettivo della macchina. La figura 1.33 (J. Hadland, Londra) mostra una successione di riprese di un

Il metodo fotografico

La fotografia veloce

⁽¹⁹⁾ Si può trattare di un diaframma che taglia la luce che giunge sulla superficie sensibile, di uno specchio rotante che fa cadere la luce ad intervalli regolari sulla pellicola o di sistemi complessi equivalenti.

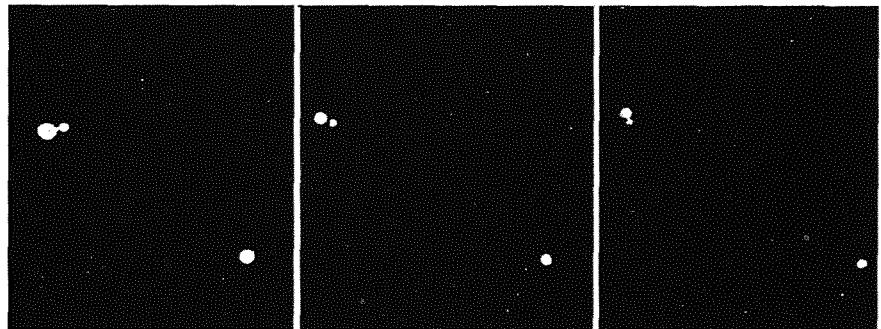


Fig. 1.32 Fotografie effettuate in un intervallo di 12 anni; esse mostrano la rotazione relativa delle componenti della stella doppia Kugel 60 (Osservatorio Yerkes, USA).

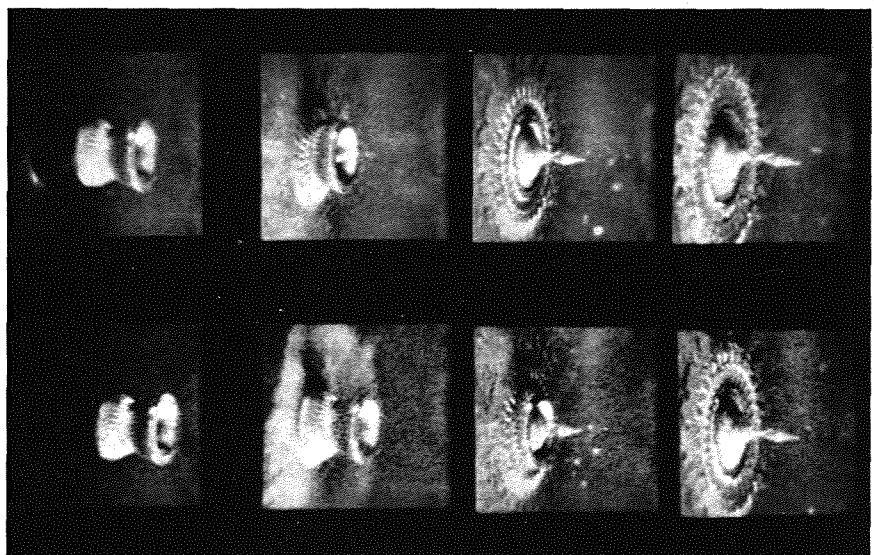


Fig. 1.33 Cinematografia ad alta velocità (J. Hadland, Photographic Instr. Londra). Urto di un proiettile di piombo su lastra di acciaio; frequenza di ripetizione 10^5 quadri al secondo. La sequenza dei quadri è alternativamente dalla riga inferiore alla superiore, da sinistra a destra.

proiettile di piombo che colpisce un bersaglio di acciaio: la ripresa è fatta con una frequenza di ripetizione di 10^5 quadri al secondo. Nella figura le riprese sono portate in successione alternativamente nella linea inferiore e in quella superiore, da sinistra a destra. Gli elementi più interessanti dell'esperienza non si riferiscono al moto di un semplice punto materiale, la figura comunque serve a mostrare le possibilità offerte dal metodo.

Il metodo stroboscopico

Un metodo equivalente consiste nell'illuminare intensamente per tempi molto brevi e a intervalli di tempo ben noti l'oggetto in moto e nel registrare su un'unica lastra fotografica le immagini del corpo (fotografia multipla stroboscopica). Un tale metodo richiede una sorgente di luce che fornisca impulsi luminosi di breve durata a intervalli che possano essere scelti, entro certi limiti, prima dell'esperienza e che vengono tenuti rigorosamente costanti durante l'esperienza. Una tale *sorgente* si dice *stroboscopica*. Un possibile schema è dato in figura 1.34. Un fascio di luce proveniente da una sorgente (laser) colpisce perpendicolarmente un disco rotante il quale ne ferma il percorso tranne che nel breve intervallo di tempo in cui una piccola finestra si trova in corrispondenza al fascio. Il disco ruota a velocità costante: da questa, dalle dimensioni e dalla posizione della finestra dipendono la durata Δt dell'impulso di luce al di là del disco e l'intervallo T fra impulsi successivi. I valori di T e Δt possono essere regolati variando la velocità di rotazione. Nei migliori

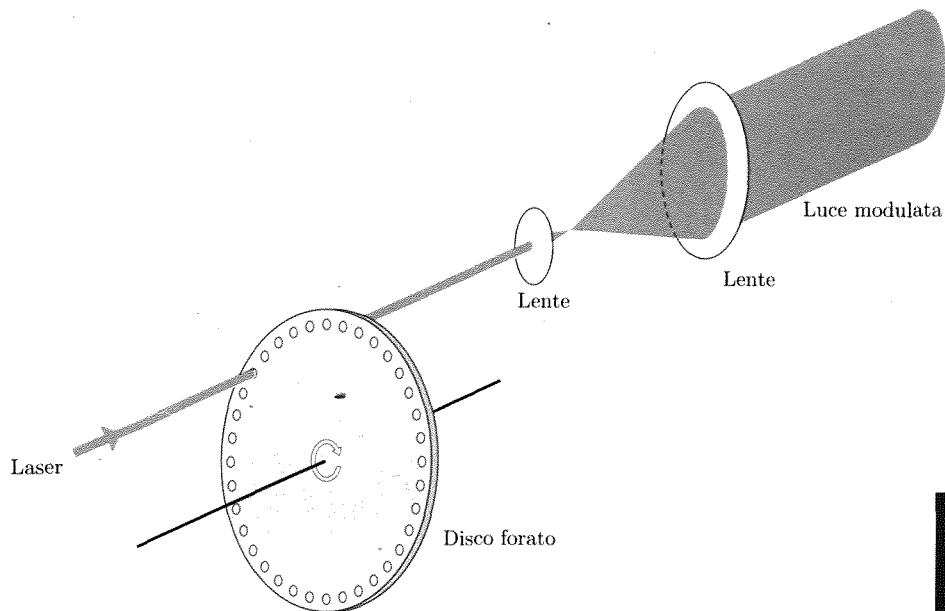


Fig. 1.34

stroboscopi Δt può essere ridotto a valori dell'ordine di $1\ \mu s$ mentre la frequenza di ripetizione $f = 1/T$ può essere variata con continuità entro vasti limiti (fino ad alcune decine di kHz).

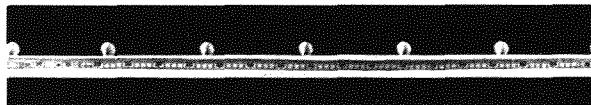


Fig. 1.35 Fotografia stroboscopica multipla di un punto materiale in moto rettilineo uniforme (Kodansha).

Vogliamo ora dare alcuni esempi di applicazione del metodo della fotografia multipla stroboscopica considerando casi di interesse didattico, e in particolare situazioni già esaminate. La figura 1.35 (Kodansha) mostra un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme (par. 1.7); spazi uguali vengono percorsi nei successivi intervalli T fra impulsi di luce (in questi casi $\Delta t \ll T$). La figura 1.36 (Kodansha) si riferisce a un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato (moto verticale di un grave) (par. 1.9): è facile controllare la validità della eq. (18). La figura 1.37 (Kodansha) mostra il moto di due punti pesanti che partono contemporaneamente dalla stessa quota: uno ha velocità iniziale nulla e si muove lungo la verticale, l'altro ha una velocità iniziale orizzontale e descrive un arco di parabola. Si può controllare che nel secondo caso gli spostamenti orizzontali nei successivi intervalli T sono sempre uguali fra loro (moto uniforme) (par. 1.7) e che i due punti hanno spostamenti verticali uguali negli stessi intervalli di tempo. La figura 1.38 mostra il moto di un punto pesante lanciato con una velocità iniziale inclinata verso l'alto rispetto all'orizzontale: la traiettoria è una parabola e si apprezzano bene le caratteristiche del moto componente orizzontale (uniforme) e verticale (ad accelerazione costante). La figura 1.39 si riferisce al moto di un punto materiale che scende lungo un piano inclinato. La figura 1.40 illustra il moto di un pendolo, mentre la figura 1.41 si riferisce al caso di un oscillatore bidimensionale; la traiettoria è chiusa (figura di Lissajous) perché i periodi dei moti armonici componenti (orizzontale e verticale) sono in un rapporto semplice (1:2). Le figure 1.42 e 1.43 (Kodansha) illustrano il moto di un punto materiale che viene lanciato (da due quote diverse) su una rotaia conformata in modo tale da avere un primo tratto rettilineo inclinato e un secondo costituito da un arco di circonferenza giacente in un piano verticale: si osservi che il moto del punto quando lascia la rotaia è quello di un grave che ha una velocità iniziale orizzontale.

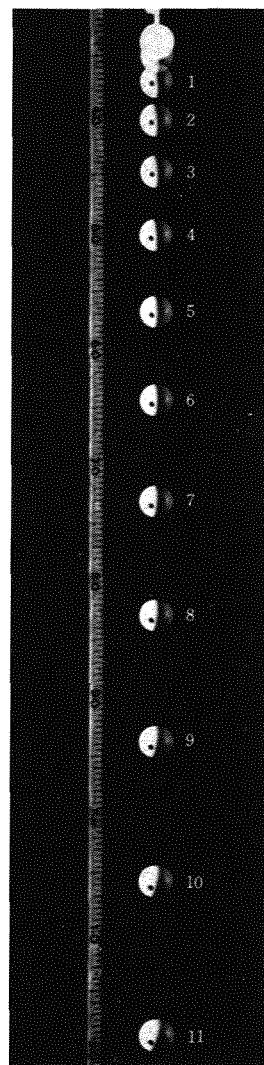


Fig. 1.36 Fotografia stroboscopica multipla di un punto in moto rettilineo uniformemente accelerato (Kodansha).

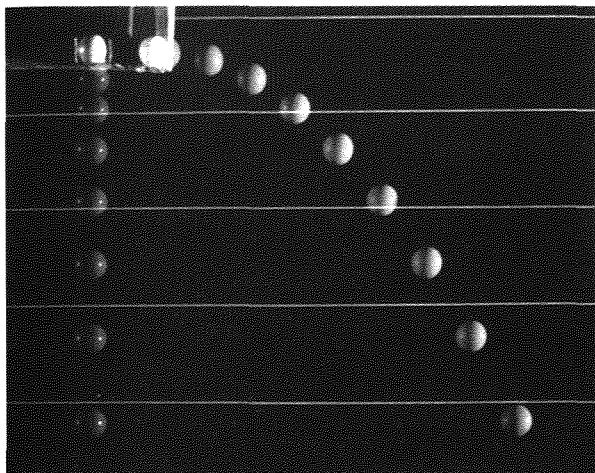


Fig. 1.37 Fotografia stroboscopica multipla di due punti materiali pesanti che partono contemporaneamente dalla stessa quota (Kodansha).

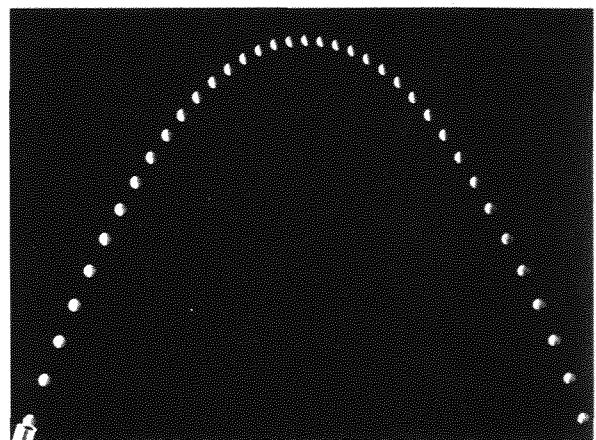


Fig. 1.38 Fotografia stroboscopica multipla di un punto materiale pesante lanciato con velocità iniziale inclinata verso l'alto, rispetto all'orizzontale (Kodansha).

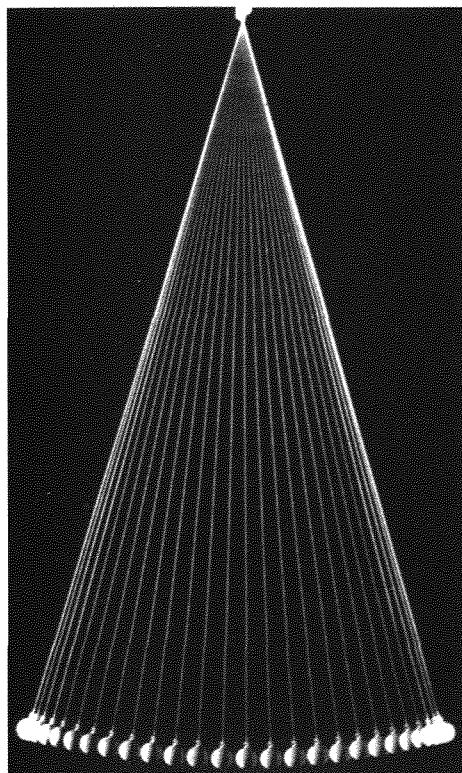


Fig. 1.40 Fotografia stroboscopica multipla di un pendolo semplice (Kodansha).

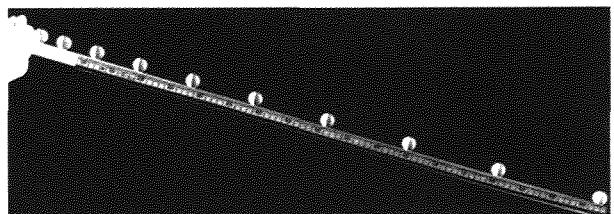


Fig. 1.39 Fotografia stroboscopica multipla di un punto materiale in moto su un piano inclinato (Kodansha).

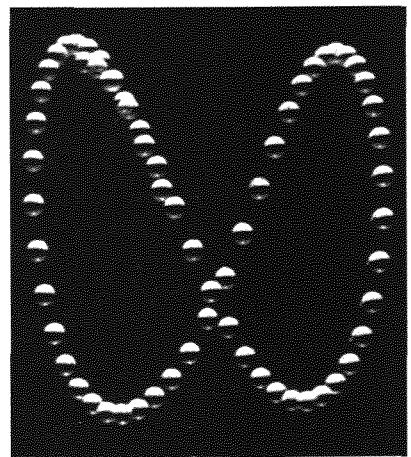


Fig. 1.41 Fotografia stroboscopica multipla di un oscillatore bidimensionale (Kodansha).

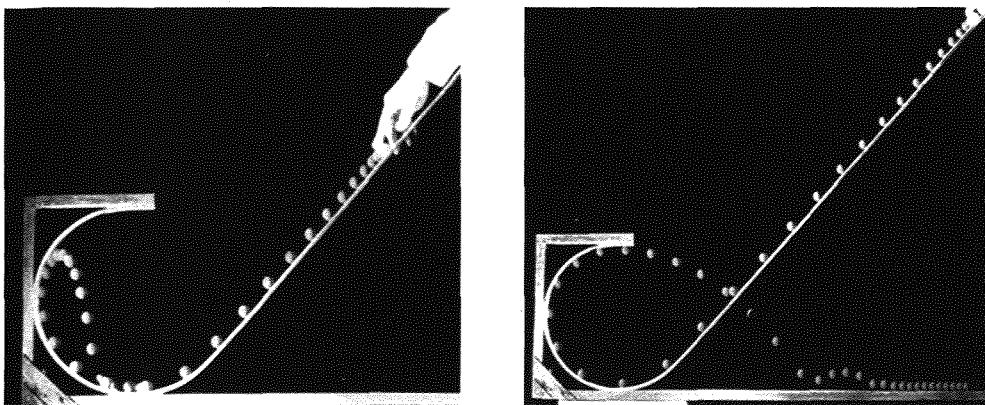


Fig. 1.42 e 1.43. Fotografie stroboscopiche multiple di un punto materiale lanciato su rotaia avente un primo tratto inclinato e un secondo formato da un arco di circonferenza in un piano verticale (Kodansha).

Un esempio di applicazione del metodo a casi meno didattici si ha nella figura 1.44 (Kodansha) che mostra il volo di un uccello.

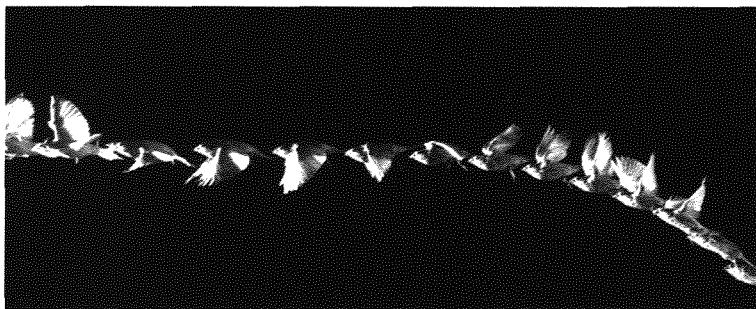


Fig. 1.44 Fotografia stroboscopica multipla del volo di un uccello (Kodansha).

Non sfuggirà allo studente il legame fra queste figure e quelle che la sensibilità e la poesia di un grande artista del movimento futurista, Giacomo Balla, ha creato per introdurre nella pittura l'elemento dinamico e trasmettere la sensazione del movimento (fig. 1.45, studio per *Volo di rondini*; fig. 1.46, *Ritmi del violinista*; fig. 1.47, *Cane al guinzaglio*).

L'uso di una sorgente stroboscopica, con regolazione della frequenza di ripetizione dell'impulso (o di modulazione per il caso più generale in cui l'intensità della luce vari con continuità fino a frequenze di decine e centinaia di MHz), è particolarmente utile per lo studio diretto da parte dell'osservatore di processi periodici. Si consideri per es. una leggera pallina trascinata da un disco che ruoti con velocità uniforme. La frequenza di moto periodico del punto sia f' . Nel caso che la frequenza di modulazione della luce f risulti uguale a f' , il punto viene colpito dalla luce quando si trova sempre nella medesima posizione: l'osservatore non è in condizione di osservare il passaggio del punto attraverso le posizioni che il corpo attraversa mentre non è illuminato e all'osservatore il punto appare fermo. Se f è prossima ad f' ma inferiore, la posizione del punto materiale vista a ogni successiva illuminazione corrisponderà a una fase avanzata del moto periodico rispetto alla precedente: si vedrà il punto descrivere il moto periodico in un tempo $T' = 1/(f' - f)$. Se f è vicino ma superiore a f' , si osserverà il moto del punto in senso inverso a quello in cui effettivamente avviene, e un ciclo viene compiuto in un tempo $T'' = 1/(f - f')$. Se si può variare con continuità la frequenza di modulazione, si può determinare la frequenza del moto periodico in osservazione e se ne possono studiare i particolari come se fosse un moto periodico molto lento.

Fig. 1.45 G. Balla, Studio per *Volo di rondini* (1913), Collezione privata, Roma.

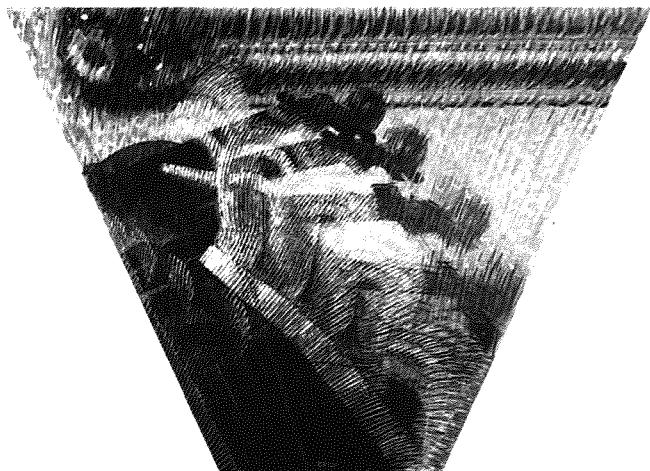
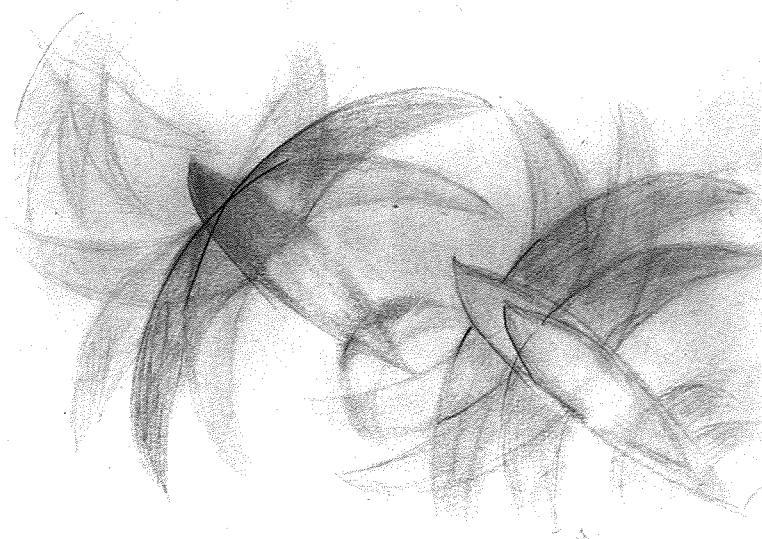


Fig. 1.46 G. Balla, *Ritmi del violinista* (1912), Tate Gallery, Londra.



Fig. 1.47 G. Balla, *Cane al guinzaglio* (1912), Albright-Knox Gallery, Buffalo.

Si vuole infine accennare a un metodo, che ha assunto notevole importanza scientifica e tecnica, per seguire la posizione e determinare le caratteristiche cinematiche di oggetti distanti (aeroplani, navi ecc.). In questo caso si usano onde dello stesso tipo di quelle luminose ma caratterizzate da una frequenza inferiore o, quel che è lo stesso, da una lunghezza d'onda superiore (λ dell'ordine di qualche centimetro, mentre per la luce visibile $\lambda = 0,4 \div 0,7 \mu\text{m}$). Le onde sono emesse a impulsi da un'antenna in un fascetto abbastanza sottile. Se incontrano un ostacolo che le riflette, tornano indietro, sono captate dalla stessa antenna e rilevate da un ricevitore. La presenza dell'ostacolo produce quindi un segnale (eco) il cui ritardo Δt rispetto all'impulso emesso misura la distanza r dell'oggetto dall'osservatore:

$$(105) \quad \Delta t = \frac{2r}{c}$$

con c velocità della luce.

Nei radar l'antenna ruota intorno a un asse verticale o a un asse orizzontale e i segnali sono riportati su tubi catodici speciali in modo che la posizione di un punto materiale viene individuata a intervalli regolari di tempo. Osservazioni di questo tipo consentono di tracciare la traiettoria seguita dal punto e individuare le caratteristiche cinematiche del suo moto. La figura 1.48 (Selenia) mostra le traiettorie di aerei che si avvicinano all'aeroporto di Fiumicino: ciascuna è ottenuta mediante una successione di rilevamenti a intervalli di tempo regolari, visti contemporaneamente su un tubo catodico a persistenza.

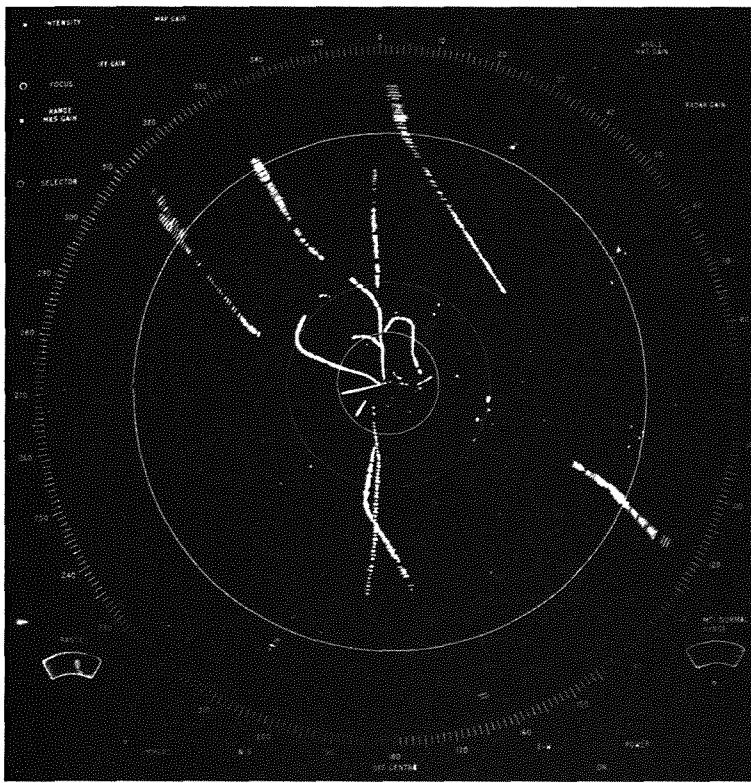


Fig. 1.48 Traiettorie di aerei che approssimano l'aeroporto di Fiumicino sullo schermo a persistenza di un apparecchio radar (Selenia).

Apparecchi analoghi facenti peraltro impiego di onde sonore di frequenza abbastanza elevata (sonar a 50-100 kHz) sono impiegati in mezzi (per es. in mare) dove l'impiego dei radar non è possibile. La figura 1.49 (G.M. Voglis, J.S. Cook) mostra, a istanti successivi dall'inizio dell'esperienza, due banchi di sardine: ciascuna macchia luminosa rappresenta un pesce o un gruppo di piccoli pesci. I numeri indicati in ciascuna foto (a parte il tempo) indicano gli estremi di profondità della regione

Radar e sonar

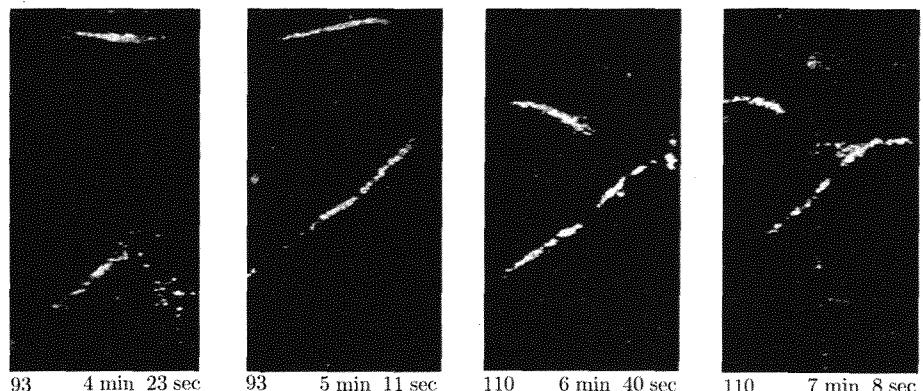


Fig. 1.49 Rivelazione con sonar di un banco di sardine (G.M. Voglis, J.S. Cook) in tempi successivi (D, E, G, H). La zona esaminata ha dimensione verticale di circa 45 m ed orizzontale di circa 35 m.

esaminata in yard (1 yard = 0,91 m); lo spazzolamento azimutale del fascio sonoro è di 30° e corrisponde a una estensione orizzontale della regione esaminata di circa 35 m. L'esame di queste riprese ha un interesse non solo di carattere cinematico, giacché fornisce informazioni sul comportamento del gruppo dei pesci.

I metodi finora visti consentono lo studio del moto di un punto individuando la posizione del punto stesso in istanti successivi: la traiettoria e l'equazione oraria possono essere dedotte in molti casi. I rilevamenti delle caratteristiche cinematiche possono tuttavia, sebbene con minore frequenza, riferirsi alle velocità o alle accelerazioni. Noi non descriveremo qui con alcuna completezza i dispositivi che consentono di misurare la velocità o l'accelerazione e che si basano sul comportamento dinamico di sistemi particolari, ma vogliamo solo dare dei cenni ad alcuni metodi.

Uno dei metodi diretti di misura della velocità di un oggetto è quello basato sull'effetto Doppler. Esamineremo l'effetto in seguito (cap. 9, par. 9.28); per ora diremo che, se una sorgente di onde (sonore, elettromagnetiche) si muove in un mezzo rispetto all'osservatore o questo rispetto a quella, la frequenza dell'onda rilevata dall'osservatore è diversa da quella emessa dalla sorgente e la differenza è direttamente legata alle velocità con cui si muovono sorgente e osservatore. L'effetto quindi consente di dedurre la velocità incognita da una misura di variazione di frequenza. Questo

è il metodo normalmente usato in astronomia per determinare la velocità delle stelle dalla variazione di frequenza della luce che giunge a noi e che è emessa da atomi noti, ed è quindi di frequenza nota, nelle stelle. La figura 1.50 (McKeller) mostra nella parte centrale lo spettro della luce ricevuta da una stella (μ Cassiopea) vista ad uno spettroscopio⁽²⁰⁾; gli altri due spettri sono prodotti in laboratorio da una sorgente ad atomi di ferro. La figura è una fotografia in negativo. Nello spettrostellare mancano alcune linee (spettro di assorbimento⁽²¹⁾) che sono quelle del ferro spostate verso le frequenze maggiori.

Velocimetria a effetto Doppler

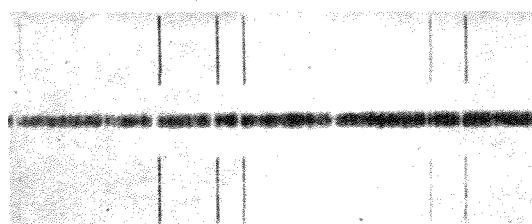


Fig. 1.50 Spostamento Doppler delle linee del ferro nello spettro (registrazione centrale) della luce proveniente dalla stella μ Cassiopea (McKeller). Dal paragone con la posizione nello spettroscopio delle linee di luce prodotta nel laboratorio si deduce una velocità di avvicinamento della stella alla Terra di 115 km/s.

⁽²⁰⁾ Lo spettroscopio, a prisma o a reticolo, è uno strumento nel quale la luce composta incidente viene decomposta nelle componenti semplici di vario colore: se queste sono in numero discreto si ha uno spettro a linee; se esse sono distribuite con continuità si ha uno spettro continuo. Gas ad alte temperature emettono luce con spettro a righe; corpi solidi ad alte temperature emettono luce a spettro continuo. Le posizioni delle varie componenti nello strumento calibrato permettono di determinarne le frequenze.

⁽²¹⁾ Gli spettri di assorbimento sono prodotti facendo passare luce bianca attraverso una sostanza gassosa i cui atomi assorbono le componenti della luce corrispondenti alle lunghezze d'onda che essi stessi sono capaci di emettere, se opportunamente eccitati. In realtà, tali atomi assorbono energia dal fascio di luce incidente e la rientrano in tutte le direzioni.

Ciò viene interpretato nel senso che la luce emessa dal nucleo della stella (luce a spettro continuo) è parzialmente assorbita nell'atmosfera gassosa che la circonda. Questa quindi conterrebbe ferro gassoso. Dallo spostamento delle linee si calcola la velocità radiale con cui la stella si avvicina a noi di 115 km/s. Il metodo è anche usato in opportuni sistemi radar (a effetto Doppler) per misure di alta precisione, per es. della velocità di missili o satelliti. I radar per il controllo delle velocità dei veicoli sulle autostrade sono di questo tipo.

È bene notare che dispositivi di questo genere possono essere configurati a fornire il risultato della misura sotto forma di segnali elettrici e, collegati a reti elettriche opportune che trattano le informazioni da essi date, permettono la determinazione di spostamenti (circuito integrante) o di accelerazioni (circuito di differenziazione).

Un esempio di un dispositivo per la misura diretta della accelerazione di un punto materiale è indicato in figura 1.51. Si tratta di un pendolo il cui supporto viene accelerato nella direzione orizzontale (con accelerazione di intensità a). Dallo studio dinamico del problema si deduce che nel sistema solidale con il supporto esiste per il pendolo una posizione di equilibrio corrispondente a quella lungo una semiretta formante un angolo θ con la verticale il cui valore (letto sulla scala) fornisce a riferita a g ; infatti risulta $a = g \tan \theta$.

Un secondo dispositivo è formato da un tubo a U disposto in un piano verticale e ripieno di un liquido (fig. 1.52). Esso viene trascinato dal punto materiale per misurarne la accelerazione nella direzione orizzontale (disposta nel piano della linea assiale del tubo); la superficie libera si inclina allora rispetto al piano orizzontale ed allo studio dinamico della situazione risulta $a = gD/b$. Si possono introdurre opportune correzioni per migliorare la precisione delle misurazioni tenendo conto degli effetti dovuti alla viscosità e alla turbolenza.

Altri dispositivi per la misura delle accelerazioni e delle velocità sono in uso, quali quelli (vibrometri, sismometri) per lo studio del moto oscillatorio di punti materiali: la spiegazione del loro funzionamento, come si è già detto in generale e come si è indicato nei due esempi precedenti, richiede un'analisi dinamica del loro comportamento.

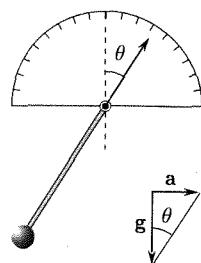


Fig. 1.51

Accelerometri

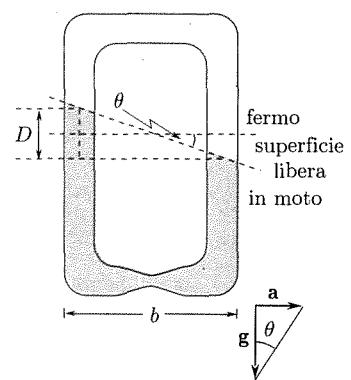


Fig. 1.52

Bibliografia

Presentiamo alla fine della cinematica del punto materiale un elenco di libri con i quali il lettore può approfondire lo studio. In tali testi si trovano in genere tutti i soggetti della meccanica e perciò la bibliografia non sarà ripetuta nei successivi capitoli.

- [1] M. ALONSO, E.J. FINN, *Fisica*, Masson, Milano, 1995.
- [2] R.A. BECKER, *Introduction to theoretical mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [3] P.G. BORDONI, *Lezioni di meccanica razionale*, Masson, Milano, 1984.
- [4] G. BRUHAT, *Cours de physique générale-mécanique*, Masson, Paris, 1961.
- [5] C. CATTANEO, *Lezioni di meccanica razionale*, Libreria Pellegrini, Pisa, 1970.
- [6] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, M. SANDS, *La fisica di Feynman*, 3 voll., Masson, Milano, 1985.
- [7] G. JOOS, *Theoretical physics*, Blackie and Son, London, 1958.
- [8] C. KITTEL, M.A. KNIGHT, W. RUDERMAN, *La fisica di Berkeley*, vol. I, *Meccanica*, Zanichelli, Milano.
- [9] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *Meccanica*, Boringhieri, Torino, 1965.
- [10] J.C. SLATER, N.H. FRANCK, *Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1947.

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

- ✓ **Dinamica:** studio del moto dei corpi, riferito alle cause che lo determinano.
- ✓ **Punto materiale:** modello di corpo, privo di dimensioni spaziali (punto), ma che mantiene la caratteristica inerziale (massa, materia).
- ✓ **Leggi di Newton** per un punto materiale (corpo):
 - I. Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, fintanto che non interviene una causa esterna (forza) a determinarne una variazione.
 - II. L'accelerazione di un corpo è pari al rapporto tra la forza complessiva agente su di esso e la sua massa.
 - III. Se su un corpo A agisce una forza \mathbf{F} da parte di un corpo B , su B agisce una forza $-\mathbf{F}$ da parte di A , eguale, contraria, sulla medesima retta di applicazione (*principio di azione e reazione*).
- La prima legge definisce implicitamente i *sistemi inerziali*, dove non ci sono *forze apparenti*. Esempi di forze apparenti: forze centrifughe ($m\omega^2 r$) in sistemi di riferimento ruotanti con ω ; forze inerziali in sistemi accelerati (auto, vagone); forze di Coriolis ($-2m\omega \times \mathbf{v}_r$) su un punto in moto in un sistema in rotazione. La seconda legge fornisce il moto, per integrazione dell'equazione differenziale

$$md^2\mathbf{r}/dt^2 = F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t \dots)$$

cui si aggiungono le *condizioni iniziali*: $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0$.

- Per integrazione, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$, con $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, *quantità di moto* (teorema dell'impulso).

Interazioni fondamentali. Tutte le forze sono riconducibili a quattro tipi, esercitantesi mutuamente tra particelle:

1. forze *gravitazionali* (tra masse);
2. forze *elettromagnetiche* (tra cariche e tra correnti elettriche);
3. forze *nucleari forti* (tra particelle elementari, adroni);
4. forze *nucleari deboli* (tra particelle elementari).

Tipi di forze, macroscopicamente distinte:

peso, mg . Forza agente su ogni corpo sulla superficie terrestre, somma della forza gravitazionale e della forza centrifuga;

forze elastiche, $-kr$. Si devono alla deformabilità dei corpi;

reazioni vincolari, \mathbf{R}_N . Normali alla superficie di contatto tra due corpi;

attrito, $A \leq \mu_s R_N$. Tangenti alla superficie di contatto. In movimento è $A = \mu_d R_N$ ($\mu_d < \mu_s$);

resistenze passive, $-bv$. Sempre dissipative.

Moti dovuti a vari tipi di forze:

Pendolo semplice (piccole oscillazioni isocrone $T = 2\pi\sqrt{l/g}$).

Oscillatore libero, $\omega = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$, in assenza di resistenza $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Oscillatore forzato, curva di risposta dell'ampiezza $x(\omega, t)$; risonanza per $\omega \simeq \omega_0$ (se $b^2 \ll 4km$).

Grandezze tipiche

Quantità di moto, \mathbf{p}

Momento polare di una forza, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}$.

Momento assiale di una forza, M_a , proiezione di \mathbf{M}_0 su a , con O qualsiasi sulla retta.

Momento polare della quantità di moto, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}$.

Momento assiale della quantità di moto, b_a , proiezione di \mathbf{b} su a , con O qualsiasi sulla retta.

Dalla $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$: $\mathbf{M}_0 = d\mathbf{b}/dt + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}$ ($= d\mathbf{b}/dt$, se: $\mathbf{v}_0 = 0$, o $\mathbf{p} = 0$, o $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{p}$)

- Per integrazione: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{b}$ (teorema dell'impulso e del momento della quantità di moto)

Dinamica del punto materiale

2.

2.1. LEGGE DI INERZIA. TERNE DI RIFERIMENTO INERZIALI

Nella ricerca scientifica in genere e in quella fisica in particolare è importante distinguere quali sono gli elementi caratteristici e determinanti del processo che si studia e quali sono invece elementi estranei e perturbatori presenti nell'esperimento. Ciò fra l'altro può essere di guida nello sviluppo di disposizioni sperimentali che rendano trascurabili gli effetti degli elementi estranei e più evidenti gli aspetti essenziali del fenomeno stesso. Naturalmente questa opera di selezione spesso non è facile e richiede alle volte geniale intuizione.

Un esempio di queste difficoltà è rappresentato dalle ricerche sulle cause che determinano il moto dei corpi. La presenza sistematica di effetti perturbatori nei moti che più comunemente cadono sotto la nostra attenzione aveva stabilito il convincimento che per tenere un corpo (*punto materiale*) in moto con velocità costante rispetto a un sistema di riferimento (cioè, in *moto rettilineo uniforme*) occorresse un'azione esterna. È, infatti, comune osservazione che un corpo in moto abbandonato a sé stesso (senza apparenti azioni esterne) tende più o meno rapidamente a fermarsi. È merito di Galileo Galilei avere mostrato l'erroneità di una tale conclusione.

Se si dispone di un piano orizzontale e di un corpo (assimilabile a un punto materiale) che poggi su di esso con una faccia piana, è possibile osservare che se si esercita su di esso per un breve intervallo di tempo un'azione esterna, per esempio si fornisce una spinta con la mano, il corpo si mette in moto rettilineo rispetto a un sistema di riferimento fissato sul sostegno piano; se si determinano le posizioni in funzione del tempo dopo che l'azione esterna è cessata si trova che il moto è ritardato e il corpo ritorna allo stato di quiete dopo un certo tempo. Se però si ha cura di levigare le superfici piane a contatto e di interporre dei lubrificanti, si può osservare che, ripetendo la precedente esperienza, il moto ritardato avviene con accelerazioni decrescenti man mano che si aumenta la levigatezza e si migliora la lubrificazione; in conseguenza crescono i tempi necessari perché, partendo con la stessa velocità, il corpo si fermi. Levigare le superfici a contatto e interporre dei fluidi lubrificanti serve a ridurre l'importanza di cause perturbatorie del moto in osservazione. Oggi è possibile realizzare delle disposizioni sperimentali in cui tali perturbazioni sono ridotte a valori molto esigui. La figura 2.1 mostra una disposizione di tale genere. Su un piano orizzontale levigato (cristallo) è disposto un corpo formato

da un disco metallico e da un serbatoio superiore in cui viene disposta anidride carbonica solida (ghiaccio secco). Un sottile canale mette in comunicazione il serbatoio con la faccia inferiore del disco. Nelle condizioni di temperatura dell'ambiente l'anidride carbonica solida sublima, passa

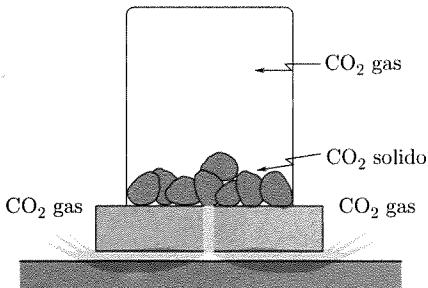


Fig. 2.1

Osservazioni sperimentali per estrapolare il principio di inerzia

cioè direttamente allo stato di gas e questo per sfuggire nell'atmosfera deve sollevare il corpo dal piano. In tale maniera si realizza una condizione in cui il corpo è separato dal piano da un sottile strato gassoso, che funge da cuscinetto d'aria. Siccome le cause perturbatorie nel moto che abbiamo preso in considerazione sono in massima parte dovute al contatto fra corpo e piano, la disposizione sperimentale di figura 2.1 ci fornisce il modo di eliminarle quasi completamente. Come vedremo meglio in seguito, altre azioni si esercitano sul corpo (punto materiale) in oggetto ma la loro somma è nulla e tutto va come se sul corpo fossero presenti solo le azioni dovute al contatto fra corpo e piano prima considerate.

Il risultato delle esperienze è che man mano che si riducono le cause perturbatorie, le accelerazioni (negative) che si riscontrano nel moto di un punto materiale lasciato a se stesso sul piano orizzontale vanno gradatamente riducendosi fino quasi ad annullarsi. Appare quindi logico ammettere che la presenza di piccole accelerazioni residue sia dovuta all'impossibilità di eliminare nella esperienza tutte le perturbazioni.

Sono esperienze di questo genere od osservazioni sul moto di corpi (punti materiali) molto lontani da tutti gli altri corpi (in astronomia) quelle che hanno condotto alla formulazione del I principio della dinamica. È bene subito sottolineare che, giacché in tale principio si parla di velocità e di accelerazioni, occorrerebbe specificare prima il sistema di riferimento. Come si vedrà meglio fra poco, il criterio di scelta del sistema di riferimento in cui viene stabilito il principio è intimamente legato alla formulazione del principio stesso, in maniera che, in effetti, entrambi (il principio e il sistema) vanno stabiliti come contemporanee estrapolazioni di situazioni reali che vengono successivamente considerate con progressivi raffinamenti sperimentali e speculativi. In un certo senso è proprio il superamento delle difficoltà insite in questa interdipendenza che dà particolare valore all'intuizione di Galilei e giustifica il nome di *principio* dato da Newton alle conclusioni raggiunte.

In questo contesto, riprendendo l'analisi di esperienze del tipo di quella descritta precedentemente, nelle quali l'azione totale esterna sul punto materiale viene gradatamente ridotta o di altre in cui il punto materiale si trovi a distanze molto grandi da qualsiasi altro corpo perché le azioni esterne su di esso siano particolarmente esigue⁽¹⁾, si può giungere a considerare, sia pure come limite delle situazioni reali, *un punto materiale libero*, sul quale cioè non si eserciti una azione esterna e per il quale valgano le estrapolazioni che si traggono dai risultati delle esperienze. Si giunge così alla formulazione della legge di inerzia stabilita da Galilei e presa da Newton come il **primo dei principi fondamentali della dinamica**: *ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne (punto materiale libero) persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*. In

Il primo principio della dinamica

⁽¹⁾ Si osservi che azioni esistono sempre, come deriva dal fatto che l'osservazione stessa è una interazione fra corpo e osservatore e che, come tale, perturba il sistema in studio.

altri termini un punto materiale non sottoposto ad azioni esterne si muove con *velocità vettoriale costante*.

Occorre evidentemente specificare il sistema (terna) di riferimento in cui si misurano le velocità. Noi assumeremo che l'osservatore sia egli stesso un corpo (punto materiale) libero non soggetto ad azioni esterne e che solidale con esso sia il sistema (terna) di riferimento in cui vengono fatte le determinazioni delle grandezze cinematiche relative al punto materiale in oggetto. Un tale osservatore si dirà *inerziale* e il sistema (terna) di riferimento a esso solidale si dirà *sistema inerziale* (²). È chiaro che si possono considerare molti sistemi inerziali: dovendo uno stesso punto materiale libero muoversi di moto rettilineo uniforme in ciascuno di essi, questi ultimi non possono che essere fra loro *in moto relativo con velocità vettoriale costante, o di traslazione uniforme*.

La Terra ruota su se stessa ed è sottoposta ad azioni da parte del Sole e dei pianeti, cosicché essa, o una terna solidale con essa non sono sistemi inerziali. In molti casi tuttavia gli effetti della rotazione della Terra e delle interazioni con il Sole e i pianeti sono trascurabili nei processi che si desidera studiare, e pertanto una terna solidale con la Terra, cioè legata al nostro laboratorio, può, senza grave errore, essere considerata inerziale. La velocità di rotazione della Terra su se stessa è infatti $\omega = 2\pi/\text{giorno} = 2\pi/86.400 \text{ s}^{-1}$ e l'accelerazione centripeta massima di un punto all'equatore è $\omega^2 R \simeq 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$, essendo $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ (³). Anche il Sole ruota su se stesso e percorre un'orbita curva rispetto al centro della Galassia in conseguenza di interazioni con altri corpi della Galassia e quindi neanche una terna legata al Sole è inerziale; il moto del Sole è tuttavia molto più vicino a quello di un punto materiale libero che non quello della Terra (l'orbita solare è percorsa in $2 \cdot 10^8$ anni e ha approssimativamente un raggio di $3 \cdot 10^{20} \text{ m}$, mentre per la Terra le quantità analoghe sono 1 anno e $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$). Una terna con origine nel Sole e assi orientati in maniera invariabile rispetto alle stelle può quindi essere considerata inerziale.

Un tempo era invalsa la dizione di *stelle fisse*, per fare riferimento a un sistema inerziale, pensando di fatto a una terna con gli assi orientati solidalmente con le stelle, appunto, e col centro fermo rispetto a un sistema terrestre. Ciò derivava di fatto dall'erronea convinzione che le stelle avessero posizioni invarianti le une rispetto alle altre. La moderna astronomia, invero, ha posto in evidenza l'esistenza di moti relativi tra di esse, così da non potersi più ritenere giustificata la dizione già in uso, se non come un'approssimazione, peraltro assai buona nei casi di più comune interesse.

Come si è detto, *ogni terna in moto di traslazione uniforme rispetto a una terna inerziale è anch'essa inerziale*. Le coordinate $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$, $\mathbf{r}' \equiv (x', y', z')$ di uno stesso punto materiale in due sistemi di riferimento in moto relativo di traslazione uniforme sono legati dalla cosiddetta

Riferimenti, o terne, inerziali

(²) Estrapolando i risultati sperimentali sul moto di corpi in astronomia (punti materiali) lontani da altri corpi in diverse terne di riferimento (per es. legata alla Terra, con origine nel Sole o in altre stelle e assi orientati in maniera invariabile rispetto a stelle lontane) si possono in modo equivalente definire come inerziali quei sistemi ideali di riferimento nei quali un punto materiale isolato (cioè libero) si muova con accelerazione nulla. (Vedi P.G. Bordoni, *Lezioni di meccanica razionale*, Masson, Milano).

(³) Le osservazioni sperimentali di Galilei, come quelle da noi usate (fig. 2.1) che sono servite di base per le estrapolazioni, erano fatte in sistemi di riferimento legati alla Terra: ciò è appunto possibile perché le osservazioni si riferiscono a tempi brevi e spazi limitati tali che l'effetto della rotazione della Terra non è rilevabile.

trasformazione galileiana:

(1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' + \mathbf{u} \cdot t$$

essendo $\mathbf{u} = \text{cost}$ la velocità con cui il sistema (x', y', z') si muove rispetto al sistema (x, y, z) , e \mathbf{r}_0 la posizione dell'origine Ω del sistema (x', y', z') nel sistema (x, y, z) all'istante $t = 0$.

Ritornando all'espressione del primo principio della dinamica, appare chiaro che, a differenza di quanto veniva accettato prima di Galilei, l'intervento di azioni esterne è richiesto non per mantenere costante la velocità di un punto materiale in un sistema inerziale, ma per produrne la variazione. Appare quindi che una proprietà fondamentale dei corpi materiali è quella di mantenere inalterate la velocità vettoriale in assenza di azioni esterne. Tale proprietà è detta *inerzia* e il primo principio della dinamica spesso viene detto principio di inerzia.

2.2. FORZA

La forza, grandezza vettoriale, come causa di accelerazione

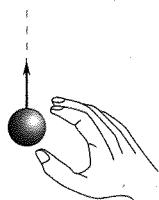


Fig. 2.2

Le cause che possono alterare la velocità di un punto materiale in un sistema di riferimento inerziale fissato, cioè produrre una accelerazione nel suo moto riferito a un tale sistema, si chiamano forze. Perché queste possano essere considerate delle grandezze fisiche occorre stabilire in maniera operativa il criterio di uguaglianza, definire l'operazione di somma e fissare l'unità di misura. A tale scopo occorre ricorrere all'esperienza ed esaminare ulteriormente il comportamento dei corpi sottoposti ad azioni esterne.

Si prenda in considerazione, come nel caso esaminato in precedenza, un punto materiale su un piano orizzontale praticamente privo di cause che possano perturbarne il moto (privo di attrito). Si possono fare delle esperienze orientative esercitando sul punto inizialmente a riposo delle brevi spinte (fig. 2.2), per esempio con la mano: si può allora vedere che il punto materiale prende a muoversi nella direzione della spinta. Da ciò si deduce innanzitutto che *la grandezza forza ha carattere vettoriale*.

Si può prendere in considerazione l'accelerazione del corpo conseguente alla applicazione della forza per stabilire il criterio di uguaglianza: due forze (vettori) si diranno uguali se applicate successivamente allo stesso corpo in quiete nell'esperienza descritta producono la medesima accelerazione (vettori); si dirà inoltre che due forze hanno la stessa intensità (e direzioni e verso diversi) se producono accelerazioni aventi la medesima intensità nelle rispettive direzioni e versi.

Stabilito il criterio di uguaglianza, si possono preparare per successive esperienze alcuni dispositivi che consentano di realizzare forze di uguale intensità. Così, per esempio, si può vedere che se si prende una molla a spirale e la si allunga (o comprime) a partire dalla posizione di riposo, a ciascuno degli estremi si esercita una forza che è sempre la stessa a parità di allungamento (fig. 2.3).

Esperienze con dispositivi che realizzano forze in tal modo possono essere fatte secondo lo schema di figura 2.3: al dispositivo che costituisce il punto materiale viene applicato un estremo della molla mentre l'altro viene tirato (a mano o con altri dispositivi) e si fa in modo che (per es. dopo che il punto materiale viene lasciato libero di muo-

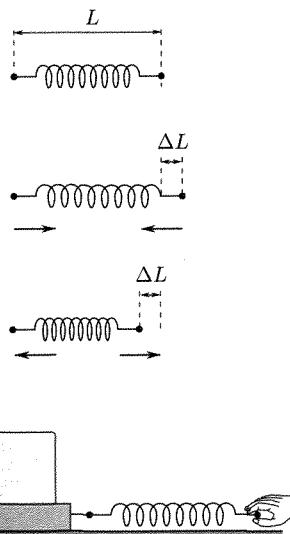


Fig. 2.3

versi) l'allungamento della molla resti costante per un certo intervallo di tempo.

Studiando il moto in tale intervallo, si può vedere che due forze uguali in intensità e agenti contemporaneamente nella medesima direzione e nel medesimo verso producono una accelerazione nella stessa direzione avente intensità doppia della accelerazione prodotta sul medesimo corpo da ciascuna forza.

Se le due forze (fig. 2.4) agiscono contemporaneamente secondo direzioni diverse (1 e 2) si determina un moto con accelerazione (\mathbf{a}) che si può ottenere come somma dei vettori accelerazione che le singole forze producono quando agiscono separatamente sul medesimo corpo. Rimane quindi confermata la natura vettoriale delle forze e stabilità per la loro somma la regola della somma di vettori.

Per definire in modo operativo la grandezza forza occorre quindi solamente fissare una unità di misura. Ciò può essere fatto scegliendo un campione di forza e prendendo tale grandezza come fondamentale. Nei sistemi più comunemente usati peraltro si preferisce fissare un'altra grandezza come fondamentale: la forza è allora una grandezza derivata e la sua unità è definita mediante le unità delle grandezze fondamentali. Rinviamo pertanto la discussione sull'unità di forza.

2.3. CONCETTO DI MASSA INERZIALE

L'introduzione del concetto di forza è stato fatto basandosi su esperienze eseguite su un unico punto materiale. Peraltro, poiché quanto detto si può ripetere per un qualsivoglia punto materiale, le considerazioni precedenti portano ad affermare la esistenza, per ogni corpo che realizzi il punto materiale, di una proporzionalità fra i vettori forza applicata e accelerazione conseguita:

$$(2) \quad \mathbf{F} = \text{cost} \cdot \mathbf{a}.$$

Una tale relazione può essere scritta anche senza avere fissato in maniera definitiva la unità di forza: basta prendere provvisoriamente una forza, realizzata per esempio come prima visto per mezzo di molle deformate, alla quale si assegna intensità unitaria. Il cambiare in seguito l'unità di forza produrrà una variazione del valore numerico della costante ma non altererà affatto la natura del legame fra forza e accelerazione.

Se si fanno ora esperienze intese a vedere gli effetti della stessa forza su corpi diversi (tutti assimilabili a punti materiali) si vede subito che la costante nella (2), oltre che a dipendere dal sistema di unità di misura, dipende da proprietà intrinseche del corpo: la stessa forza applicata a una palla di gomma, a una palla da biliardo delle stesse dimensioni o a una palla di piombo produce accelerazioni nettamente diverse e decrescenti nell'ordine. Nel fattore costante si manifesta in maniera quantitativa quella proprietà caratteristica e fondamentale della materia, che si è già incontrata nel primo principio della dinamica e che abbiamo indicato come *inerzia del punto materiale*, in quanto da essa dipende la accelerazione che un particolare corpo (punto materiale) acquista sotto l'azione di una determinata forza, o viceversa l'intensità della forza richiesta per una determinata accelerazione del corpo.

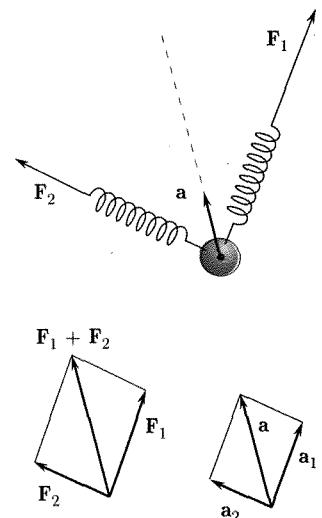


Fig. 2.4

L'esperienza mostra che le costanti nella (2) determinate per un certo numero di punti materiali mediante le applicazioni di una forza qualsiasi:

$$\mathbf{F} = (\text{cost})_1 \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{F} = (\text{cost})_2 \mathbf{a}_2$$

.....

$$\mathbf{F} = (\text{cost})_n \mathbf{a}_n$$

servono a determinare perfettamente i rapporti delle accelerazioni che i punti materiali subiscono sotto l'azione di un'altra generica forza \mathbf{F}' , qualunque sia lo stato di moto di ciascuno di essi precedente alla applicazione della forza

Proporzionalità tra forza e accelerazione per un dato corpo

$$\frac{a'_1}{a'_2} = \frac{(\text{cost})_2}{(\text{cost})_1} \quad \frac{a'_1}{a'_n} = \frac{(\text{cost})_n}{(\text{cost})_1}.$$

Si può quindi affermare che il fattore costante della (2) contiene un elemento che rappresenta una proprietà del corpo indipendente dalla sua posizione, velocità e accelerazione, che ne caratterizza il comportamento nei riguardi delle azioni che perturbano il suo stato naturale di quiete o di moto rettilineo uniforme. Tale elemento è la *massa inerziale* e questa proprietà è l'*inerzia*.

Se si indica con m la massa inerziale, il fattore costante della (2) può essere posto pari a km , essendo k una costante che dipende esclusivamente dal sistema di unità usato, e la (2) si scrive:

$$(3) \quad \mathbf{F} = k m \mathbf{a}.$$

È abbastanza facile vedere che la massa inerziale è una grandezza fisica scalare. Se si prendono due corpi (punti materiali) identici per dimensione e costituzione, si riscontra che essi conseguono uguali accelerazioni da forze uguali: a essi compete la stessa massa. Più in generale si può dire che due punti materiali hanno la stessa massa se, sottoposti all'azione di forze uguali, assumono accelerazioni uguali.

Si abbiano ora due corpi (punti materiali) di ugual massa. Per ciascuno di essi si può scrivere la (3) quando si applichi la forza \mathbf{F} . Si può vedere che se i due corpi vengono uniti a costituire un unico punto materiale al quale venga applicata la forza \mathbf{F} l'accelerazione conseguente ha intensità a' pari alla metà della accelerazione che ciascuno dei corpi separatamente ha se sottoposto all'azione di \mathbf{F}

$$a' = \frac{1}{2} a.$$

Questo fatto è coerente con l'affermazione che il punto materiale formato dalla unione dei due corpi ha massa doppia di quella di ciascuno dei componenti e che per esso valga la

$$\mathbf{F} = k(2m) \mathbf{a}'.$$

Potremo quindi dire che la massa di un punto materiale (m') è doppia di quella di un altro punto (m) se le accelerazioni dei due punti sotto l'azione della medesima forza sono nel rapporto $a'/a = \frac{1}{2}$.

In maniera analoga si dirà che un punto materiale ha massa m pari alla somma delle masse di due altri punti materiali ($m = m_1 + m_2$) quando,

sottponendo ciascuno di essi successivamente all'azione della stessa forza, si abbia per le accelerazioni, nella direzione della forza:

$$(4) \quad a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

coerente con le relazioni

$$\begin{cases} F = km_1 a_1 \\ F = km_2 a_2 \\ F = k(m_1 + m_2)a \end{cases}$$

Per definire operativamente la grandezza massa occorre stabilire una unità di misura.

La (3) costituisce la espressione del II principio della dinamica. Prima peraltro di discuterla vogliamo definire le questioni in sospeso circa le unità di misura delle grandezze forza e massa che entrano nella (3) assieme alla accelerazione. Quest'ultima grandezza è già stata derivata da quelle fondamentali di lunghezza e tempo, nello studio della cinematica.

Si potrebbe ovviamente scegliere arbitrariamente le unità di misura delle due grandezze (forza e massa) e dedurre di conseguenza un valore per k . In accordo con le nostre considerazioni sulle grandezze fondamentali e derivate, è evidente che la esistenza della (3) rende possibile scegliere una sola delle due grandezze come fondamentale e fissarne l'unità di misura con un campione; l'altra risulterebbe una grandezza derivata dopo avere assegnato a k un valore e un'unità a piacere. È questo quanto viene fatto: per k si prende il valore uguale a uno, privo di dimensioni.

La scelta della grandezza fondamentale fra forza e massa va fatta tenendo presenti le maggiori o minori difficoltà incontrate nel realizzare campioni che abbiano soddisfacenti caratteristiche di invarianza e di riproducibilità. Per tali ragioni, sebbene siano ancora in uso sistemi che scelgono la forza come grandezza fondamentale (e di essi si darà un cenno in seguito) i sistemi di unità di misura più comunemente usati (SI, CGS) scelgono come grandezza fondamentale la massa accanto a quelle di lunghezza e tempo (con $k = 1$).

Nel sistema internazionale (SI) l'unità di massa è il kilogrammo, definito come la massa di un certo cilindro di platino e iridio depositato al Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres, in Francia.

Nel sistema CGS (centimetro, grammo, secondo) l'unità di massa è il grammo pari alla millesima parte del kilogrammo.

In questi due sistemi essendo le grandezze fondamentali la lunghezza (L), la massa (M) ed il tempo (T), le dimensioni della forza (F) sono

$$[F] = [LMT^{-2}] .$$

L'unità di forza nel SI è il newton (N), ed è quella forza che applicata a un punto materiale avente la massa di un kg imprime l'accelerazione di 1 m/s^2 (nella direzione e nel verso della forza).

Indicando le unità di misura per la massa e per le intensità delle grandezze vettoriali, la (3) si scrive:

$$\mathbf{F}(N) = m(\text{kg}) \times \mathbf{a} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) .$$

L'unità di forza nel sistema CGS è la dine, pari alla forza che, applicata a un punto materiale avente la massa di 1 g, imprime la accelerazione

di 1 cm/s^2 (nella direzione e nel verso della forza). Nel sistema CGS si ha:

$$\mathbf{F}(\text{dine}) = m(g) \times \mathbf{a} \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right).$$

Poiché $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ e $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$, la medesima forza è espressa in dine da un numero 10^5 maggiore di quello che la esprime in newton: cioè $1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dine}$.

Qualora si scelga come grandezza fondamentale la forza (F) accanto a quelle di lunghezza (L) e tempo (T), come è fatto nel sistema pratico degli ingegneri al quale si accennerà fra breve (par. 2.10), le dimensioni della massa sono

$$[M] = [L^{-1}FT^2]$$

e la massa unitaria è quella che sotto l'azione della forza unitaria prende la accelerazione di 1 m/s^2 (nella direzione e nel verso della forza).

2.4. SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

La relazione vettoriale stabilita

Il secondo principio della dinamica

$$(5) \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

costituisce una delle più importanti relazioni della fisica e va sotto il nome di **II principio della dinamica** (Newton): *in un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un corpo puntiforme (punto materiale) prodotta da forze applicate è direttamente proporzionale alla somma delle forze stesse ed è inversamente proporzionale alla massa del corpo.*

La relazione (5) è naturalmente in accordo con il primo principio della dinamica giacché nel caso in cui la forza applicata è nulla, la accelerazione è anche essa nulla e la velocità vettoriale è costante: il punto si muove nel sistema inerziale di riferimento di moto rettilineo uniforme o è in quiete.

Il sistema di riferimento in cui la (5) è valida è quello inerziale. Le forze vanno naturalmente definite in una tale terna e ad esse si usa spesso dare la specificazione di forze reali (o effettive): *esse sono dovute ad azioni di altri corpi*, come sarà meglio specificato nel par. 2.24.

Ricordando le osservazioni già svolte sulle terne di riferimento, spesso, in particolari problemi peraltro di grande interesse specie nella tecnica, anche una terna legata al laboratorio (alla Terra) può con buona approssimazione ritenersi inerziale e quindi la (5) può con la stessa approssimazione applicarsi in essa. A volte tuttavia la terna di riferimento che occorre o è utile usare è non inerziale: basti pensare a una terna in moto rotatorio rispetto a un proprio asse. In questi casi la (5) non è direttamente applicabile: vedremo (par. 2.25 e 2.26) che la situazione può essere analizzata ancora usando la (5) ma facendo intervenire accanto alle *forze reali* (effettive) alcune forze apparenti (o fittizie) che servono proprio per portare in conto il fatto che il riferimento non è inerziale; *esse non sono da porsi in relazione alla azione di altri corpi*.

Riservandoci di aggiungere qualcos'altro per precisare la validità dei primi due principi della dinamica e anche per giustificare la presenza del primo non come mero caso particolare del secondo (se $\mathbf{F} = 0$ è troppo ovvio che $\mathbf{a} = 0$) (par. 2.8), possiamo dire che il II principio della dinamica, legando le cause del moto di un punto materiale alle caratteristiche del

moto stesso, serve a impostare e risolvere in genere i problemi del moto di un punto materiale. Questi di solito si presentano nella seguente maniera: date le azioni che si esercitano sul punto materiale, determinare il moto del punto, cioè la accelerazione, la velocità e la posizione del punto stesso in funzione del tempo.

L'equazione vettoriale (5), proiettata sulle direzioni dei tre assi, dà luogo a un sistema di tre equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

essendo F_x, F_y, F_z le componenti della somma delle forze che agiscono sul punto di massa m , e a_x, a_y, a_z le accelerazioni dei moti componenti. Le forze, e quindi le componenti F_x, F_y, F_z , sono in genere funzioni della posizione (x, y, z) , della velocità del punto e del tempo. La risoluzione analitica effettiva del sistema ⁽⁴⁾ (6) può incontrare nei casi concreti difficoltà matematiche notevoli. Vedremo fra breve (parr. 2.17-2.19) vari esempi di applicazione del secondo principio allo studio di problemi dinamici concreti.

Sottolineiamo infine che, in accordo con quanto già visto nelle esperienze di cui al par. 2.2, l'accelerazione che un punto materiale subisce quando su di esso agisca un sistema di forze $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)$ risulta pari alla somma delle accelerazioni che ciascuna delle forze del sistema produrrebbe agendo separatamente sul corpo (*principio di indipendenza delle azioni simultanee*). Cioè

$$(7) \quad \mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i = m \sum_1^n \mathbf{a}_i = m\mathbf{a}.$$

Si osservi che se un punto materiale si trova in quiete (caso statico) in una certa posizione, dovendo essere $\mathbf{a} = 0$, la somma delle forze a esso applicabile deve essere nulla $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0$. Il verificarsi di quest'ultima circostanza non è peraltro per se stessa sufficiente ad assicurare che il punto sia in quiete, giacché $\mathbf{a} = 0$ potrebbe corrispondere anche a un moto rettilineo uniforme del punto materiale.

Si usa spesso dire che un punto materiale è in *equilibrio* o che *le forze che lo sollecitano si fanno equilibrio* quando $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0$ quando cioè l'azione complessiva delle forze applicate non produce alcuna variazione di velocità. Un punto materiale in equilibrio si trova in quiete (caso statico) o in moto rettilineo uniforme.

Va infine osservato che, con ovvio interesse per lo studio di problemi di statica, si considerano spesso le cosiddette *posizioni di equilibrio* come quelle posizioni nelle quali accade che per il valore nullo della velocità ($\mathbf{v} = 0$) si annulli la forza totale agente sul punto: si può dire che qualora il punto occupi una di tali posizioni con velocità nulla, le forze applicate sono tali nel loro insieme da mantenerlo in quiete:

⁽⁴⁾ Il problema non differisce da quello generale visto in cinematica (cap. 1, par. 1.17) per lo studio del moto di un punto essendo note le accelerazioni.

condizione necessaria e sufficiente perché il punto materiale sia in quiete è allora che esso occupi una posizione di equilibrio con velocità iniziale nulla.

■ 2.5. QUANTITÀ DI MOTO E IMPULSO

Il II principio della dinamica può essere espresso in un'altra maniera, che è quella che corrisponde alla formulazione iniziale di Newton, se si introduce una nuova grandezza, la quantità di moto, definita come

$$(8) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} .$$

Essa è un vettore avente la direzione e il verso di \mathbf{v} e intensità mv . Le sue dimensioni nel SI e nel CGS sono

$$[p] = [LMT^{-1}]$$

e le unità di misura ne conseguono.

La formulazione originaria del secondo principio, fatta da Newton, è la seguente: *in un sistema di riferimento inerziale la forza totale applicata a un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del vettore quantità di moto.*

Cioè

$$(9) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

la formulazione (9) del II principio comprende quella della espressione (5) perché include il caso che la massa del punto vari. È evidente che, nel caso in cui m sia costante la (9) è equivalente alla (5). Un caso di particolare importanza in cui si deve considerare la massa variabile nel tempo è quello di particelle con velocità prossime a quella della luce, quando, come mostra la teoria della relatività, la massa varia con la velocità. In tal caso la formulazione (9) può essere usata (introducendo per \mathbf{p} ed \mathbf{F} espressioni opportune), mentre la (5) non è più valida (cap. 3, par. 3.12).

Nel caso particolare in cui la forza totale applicata al punto materiale sia nulla la (9) si esprime nella forma: *la quantità di moto di un punto materiale sottoposto a forze la cui somma è nulla ($\mathbf{F} = 0$) resta costante in un sistema di riferimento inerziale (teorema di conservazione della quantità di moto);* si può cioè esprimere il I principio della dinamica nella forma: *in un sistema inerziale, un punto materiale non sottoposto ad azioni mantiene inalterata la sua quantità di moto ($\mathbf{p} = \text{cost.}$)*.

Dalla (9) si ha

$$(10) \quad \mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

$\mathbf{F} dt$ è chiamato impulso elementare della forza nell'intervallo fra t e $(t+dt)$. La variazione della quantità di moto del punto fra due istanti t_1 e t_2 è espressa da

$$(11) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 .$$

L'integrale a primo membro prende il nome di *impulso della forza durante l'intervallo di tempo considerato*.

2.6. TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA. AZIONE E REAZIONE

Nelle considerazioni svolte per illustrare i primi due principi della dinamica abbiamo a più riprese implicitamente fatto uso della nozione che l'azione esercitata su un punto materiale, cioè una forza reale (effettiva) in un sistema inerziale, ha l'origine in uno o più altri corpi. È questa una conclusione generale. È possibile, con un processo simile a quello usato per giungere dalle esperienze effettive al primo principio della dinamica, pensare di idealizzare le esperienze di base fino a giungere a considerare due punti materiali isolati dal resto del mondo: vi è allora solo da considerare l'azione che ciascuno dei due punti esercita sull'altro. Si trova sempre che si tratta di una *mutua interazione* nel senso che alla forza che il primo punto esercita sul secondo corrisponde una forza che il secondo esercita sul primo, e *le due forze sono dirette lungo la congiungente i due punti, hanno la stessa intensità e versi opposti*.

In questa asserzione consiste il III principio della dinamica (Newton). Nei casi concreti in cui un punto materiale risenta dell'azione contemporanea da parte di numerosi altri corpi (puntiformi), l'azione totale su di esso è rappresentata da una forza somma delle forze di mutua interazione con ciascuno degli altri corpi.

Spesso al III principio si dà la espressione seguente: *a ogni azione* (esercitata da un corpo puntiforme A su un corpo puntiforme B) *corrisponde una reazione uguale e contraria diretta lungo la congiungente i due punti materiali*. Va sottolineato che azione e reazione sono due forze che rappresentano la mutua interazione e non è qui coinvolto alcun principio di causalità. È invece opportuno considerare il processo con il quale la interazione si stabilisce: nella formulazione del III principio nella meccanica classica si fa l'ipotesi che l'interazione fra due corpi puntiformi sia istantanea, si propaghi cioè con velocità infinita⁽⁵⁾.

Il terzo principio della dinamica: azione e reazione tra due corpi in mutua interazione

2.7. METODO STATICO DI MISURA DELLE FORZE

Vogliamo ora accennare al metodo statico di misura delle forze. Per comprendere con semplicità in che cosa esso consista riferiamoci a uno strumento, il *dinamometro*, che è stato sviluppato secondo tale metodo.

Esso è essenzialmente costituito da una molla a spirale (fig. 2.5): un estremo è fissato a un telaio in maniera peraltro tale da consentire all'asse della spirale di disporsi in una qualsiasi direzione; l'altro estremo porta il punto materiale P. La lunghezza della molla, cioè la posizione di P rispetto all'estremo fisso è rivelata da un indice che scorre davanti a una scala. Lo strumento viene disposto con l'asse nella direzione della forza da misurare e questa viene applicata a P nel verso tale da produrre un allungamento della molla. Come si è già visto, l'allungamento della molla dà origine a una forza nella direzione dell'allungamento, di intensità proporzionale all'allungamento stesso, applicata a ciascun estremo della molla. Ne consegue che il

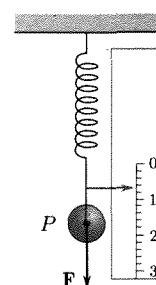


Fig. 2.5

⁽⁵⁾ Questa ipotesi è accettabile nella grande maggioranza dei casi pratici, finché cioè i corpi in questione interagiscono molto debolmente o si muovono, l'uno rispetto all'altro, con velocità molto più piccole della velocità della luce (300.000 km/s). Va peraltro osservato che l'esame approfondito delle modalità con cui si stabilisce e si esercita l'interazione fra corpi elementari (particelle, par. 2.9) è un argomento fondamentale e molto studiato nella fisica contemporanea.

punto P si trova sotto l'azione di due forze aventi la stessa direzione, verso opposto e intensità rispettivamente uguali a F (da determinare) e F^* (proporzionale all'allungamento della molla). Finché $F > F^*$ il punto P si muove con accelerazione nel verso di F ; quando $F < F^*$ nel verso opposto. Esso prenderebbe a oscillare intorno alla posizione per cui $F = F^*$, quella per cui cioè la forza totale sul punto è nulla: in realtà l'intervento di altre forze durante il movimento fa smorzare rapidamente o evita addirittura le oscillazioni e ben presto si osserva il punto in quiete sotto l'azione delle forze di intensità F e F^* , che si equilibrano. Dalla lettura della posizione di P si ha il modo di valutare in condizioni statiche F^* e quindi F .

Il metodo statico di misura di una forza quindi consiste nell'applicare la forza a un punto materiale realizzando le condizioni di quiete del punto stesso mediante l'applicazione contemporanea di altre forze che si sanno valutare. L'applicazione del primo principio della dinamica (forza totale nulla) consente di valutare la forza incognita.

Il metodo statico, illustrato descrivendo un dinamometro, ma che viene applicato in strumenti di vario tipo e di grande sensibilità e precisione (per esempio bilance di vario genere), è molto utile per la misura delle forze in casi in cui il metodo dinamico non si presta affatto: si pensi per es. allo studio delle forze nei problemi statici. Vi sono, peraltro, dei casi in cui esso non può essere affatto applicato: ciò accade quando la forza per sua stessa natura è legata al movimento (per es. forza su una carica in moto in un campo magnetico).

Si osservi che il metodo statico di misura delle forze si basa sul primo principio e sul terzo principio. Occorre infatti usare la condizione di equilibrio (I principio) del punto P e bisogna inoltre assumere (III principio) che la forza esercitata dalla molla su P ha la stessa intensità della forza che P esercita sulla molla.

■ 2.8. CRITICA E LIMITI DELLA MECCANICA NEWTONIANA

Allo studente non saranno sfuggite alcune difficoltà che si incontrano nel cercare di introdurre elementarmente i principi della meccanica newtoniana in maniera logicamente rigorosa e completamente soddisfacente. Le difficoltà che per esempio si hanno nel precisare il sistema di riferimento in cui i principi (I e II) sono stabiliti sono di questo genere: la definizione cioè dei sistemi inerziali con un ragionamento di successive approssimazioni ed estrapolazioni e la conseguente difficoltà di determinare sperimentalmente tali sistemi sono già state viste. Un'altra difficoltà si incontra nell'introdurre in maniera completamente soddisfacente e generale il concetto di forza: se la forza viene definita utilizzando le accelerazioni già introdotte in cinematica, come abbiamo qui fatto, tale definizione non è direttamente applicabile ai casi (statici) di forze che agiscono su punti in quiete; se la forza viene definita facendo riferimento a qualche particolare legge (gravitazione, elettromagnetismo ecc.) si ha l'inconveniente che la definizione di forza vada rivista quando nuovi tipi di forza debbano essere considerati (per es. forze nucleari) o quando le teorie vengano modificate; se si introduce il concetto di forza intuitivamente e si definisce la forza con misure statiche si ha una definizione che non è immediatamente applicabile a forze strettamente dinamiche.

In conseguenza di questa ultima difficoltà varia il significato logico che va dato alla (5). Se infatti la forza è introdotta mediante la massa e la accelerazione, la (5) è praticamente la definizione di forza, sicché i primi due principi non sarebbero leggi e il merito di Newton sarebbe quello di avere trovato che introducendo il concetto di forza in questa maniera le leggi fisiche (gravitazione, elettromagnetismo ecc.) si esprimono in maniera semplice. Se invece la forza viene introdotta mediante qualche particolare legge (elettromagnetismo, gravitazione ecc.) oppure mediante

*Problema dei concetti
primitivi: forza o massa*

un concetto intuitivo e la definizione operativa statica, i primi due principi sono effettivamente leggi che legano grandezze precedentemente definite.

Newton era cosciente della esistenza di parecchie difficoltà del tipo accennato ma, peraltro, non riuscì a superarle. È suo merito il non essere stato fermato da esse e avere con grande intuizione stabilito i tre principi che si sono dimostrati applicabili in una grande varietà di problemi sì da essere alla base di gran parte del progresso raggiunto nella fisica e nell'ingegneria. Ciò vuol dire che, nonostante le evidenti difficoltà logiche, la formulazione newtoniana contiene gli elementi necessari per l'analisi del moto nei casi che più comunemente si incontrano.

Abbiamo voluto qui dare un cenno a queste difficoltà per richiamare su di esse l'attenzione dello studente. Un approfondimento del loro esame e delle maniere più idonee per una sistemazione il più soddisfacente possibile dei concetti esula dai limiti del presente testo e va ricercata in trattazioni più avanzate e specifiche⁽⁶⁾.

Vogliamo ora sottolineare una limitazione esistente nella trattazione tradizionale della meccanica newtoniana, legata alle difficoltà matematiche incontrate spesso nella soluzione delle equazioni differenziali che descrivono i vari processi.

Nella trattazione analitica dei problemi di meccanica classica, come del resto di altri settori della fisica e di altre scienze, ci si imbatte spesso in equazioni differenziali non lineari per la cui soluzione si sono incontrate notevoli difficoltà, a volte insormontabili. Nello studio di questi problemi ci si è a lungo (300 anni) e in gran parte limitati a considerare soluzioni approssimate valide entro ristretti limiti delle variabili e dei parametri in gioco. Una caratteristica generale di queste approssimazioni è quella che piccole variazioni nello stato iniziale del sistema e nei parametri caratteristici si riflettono in piccole variazioni nelle soluzioni ottenute in funzione del tempo.

Solo di recente (ultimi 30 anni) con lo sviluppo del calcolo numerico iterativo, reso possibile dai veloci calcolatori elettronici, e il contemporaneo sviluppo di nuovi campi nella matematica e nella geometria (frattali) si è iniziata la rimozione di queste limitazioni e ci si è aperti a nuovi campi di indagine e nuove prospettive scientifiche.

In particolare, è stato possibile estendere lo studio dei sistemi di equazioni differenziali a tutto il campo di variabilità per le possibili condizioni iniziali delle variabili di stato e a tutti i valori dei parametri caratteristici: è stato così possibile rilevare come per molti sistemi di grande interesse, anche molto semplici, vi possono essere condizioni per cui la dinamica diventa molto complessa e si riscontra una estrema dipendenza delle soluzioni dalle condizioni iniziali: in questi casi, giacché le condizioni iniziali non possono essere specificate se non entro certi limiti dovuti alla precisione finita delle misure, già molto prima che si raggiungano i limiti imposti dalla meccanica quantistica, non è possibile prevedere il comportamento a lungo termine del sistema (nonostante che la sua evoluzione segua ben precise re-

⁽⁶⁾ E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Ed. Boringhieri, Torino, 1968; R.B. Lindsay, H. Morgenau, *Foundations of physics*, Wiley, New York, 1936; N. Feather, *The physics of mass, length and time*, Edinburgh Univ. Press, 1959; N. Feather, *The physical basis of Newtonian mechanics in Sources of physics teaching*, part. 2, Taylor and Francis LTD, London, 1969; M. Jammer, *Concepts of mass in classical and modern physics*, Harper and Row, New York, 1961.

lazioni deterministiche): in ciò consiste il concetto del *caos deterministico*.

La importanza di queste conclusioni va particolarmente sottolineata per le prospettive che si aprono nello studio di un gran numero di fenomeni complessi in fisica, in altre scienze, in economia, nelle scienze sociali. Questi argomenti saranno presentati con maggiore approfondimento nel capitolo 11 dopo aver acquisito una sufficiente conoscenza dei metodi della trattazione tradizionale della meccanica classica e dei fondamentali risultati che essa consente di stabilire.

Limiti di validità della meccanica classica: alte velocità e dimensioni microscopiche

Vogliamo infine precisare qualcosa che chiarisca i limiti della meccanica newtoniana. Nella meccanica classica si fanno implicitamente due ipotesi: la prima è che il comportamento degli strumenti di misura non sia influenzato dallo stato di moto, finché essi non siano sottoposti a elevate accelerazioni; la seconda è che, almeno in linea di principio, sia possibile sviluppare strumenti e metodi per effettuare misure di una qualsiasi grandezza con un errore piccolo quanto si voglia. In realtà entrambe le ipotesi non sono vere e la loro erroneità si manifesta in maniera evidente in alcuni casi (particelle con velocità prossima alla velocità della luce, sistemi di dimensioni molto piccole, dell'ordine delle dimensioni atomiche o più piccole). L'esame critico di queste ipotesi ha portato allo sviluppo rispettivamente della teoria della relatività e della meccanica quantistica.

In un vastissimo campo di applicazioni, cioè finché le velocità in gioco siano notevolmente inferiori a quelle della luce (300.000 km/s) e si considerino sistemi di punti materiali di dimensioni grandi rispetto a quelle atomiche ($\sim 1 \text{ \AA}$), la meccanica classica è un'ottima approssimazione delle nuove teorie e le correzioni che andrebbero apportate sono del tutto trascurabili.

■ 2.9. FORZE E INTERAZIONI FONDAMENTALI

A parte le difficoltà accennate nel precedente paragrafo relativamente alla introduzione in maniera elementare del concetto di forza in meccanica newtoniana, va sottolineato che, in accordo con il terzo principio della dinamica, una forza è sempre la espressione di una interazione e sta a rappresentarla.

Si avrà occasione di considerare in meccanica e in altri settori della fisica forze che studiate in maniera empirica hanno ricevuto, almeno in una fase iniziale, molteplici nomi e presentano alla osservazione caratteristiche differenti, legate a particolari processi (forze di gravità, di attrito, elastiche, elettriche, magnetiche ecc.). Specifiche trattazioni teoriche sono state sviluppate nei riguardi di ciascuna di esse.

In accordo con la normale procedura della ricerca scientifica, di passare da considerazioni particolari a vedute più ampie, cioè da teorie specifiche a teorie basate su principi di validità più generale e che comprendano le prime come casi particolari, vi è stato uno sforzo continuo a fare confluire forze, dapprima considerate distinte, entro schemi teorici ampi e unificanti.

Un esempio tipico e notevole è stato quello dell'unificazione delle interazioni elettriche e di quelle magnetiche nella teoria dell'elettromagnetismo (J.C. Maxwell, 1864).

Lo sviluppo della fisica moderna attraverso la teoria quantistica e la relatività ha condotto a impostazioni nelle quali l'essenza del mondo fisico viene ricondotta all'esistenza di un numero limitato di particelle elemen-

L'unificazione delle tipologie delle forze

tari e a un numero ancora più limitato di possibili interazioni, in cui si realizzerebbero le forze. Allo stato delle conoscenze attuali, le interazioni fondamentali sono quattro: a esse vanno ricondotte tutte le forze che si presentano in natura. Ciò significa che tutte le forze, da quelle subnucleari, nucleari, atomiche, molecolari, a quelle che si manifestano nel mondo macroscopico che ci circonda: le forze muscolari, quelle che agiscono in una macchina, che sostengono un aereo e così via, a quelle che reggono il moto degli astri e delle galassie, derivano da una o più delle quattro interazioni fondamentali. Queste sono:

1. interazione gravitazionale;
2. interazione elettromagnetica;
3. interazione nucleare forte;
4. interazione nucleare debole.

Le interazioni fondamentali

Esse, fra l'altro, differiscono notevolmente, nelle normali loro manifestazioni, per il raggio d'azione o meglio per la dipendenza al variare della distanza tra gli elementi interagenti e per la costante di accoppiamento o, più semplicemente, per l'intensità.

L'interazione gravitazionale sarà considerata con qualche dettaglio in seguito (cap. 6): ogni porzione di materia nell'Universo risente attrazione da parte di tutta la rimanente materia. Le forze gravitazionali sono le più deboli rispetto a ciascuna delle altre forze fondamentali, quando agiscono contemporaneamente.

I corpi materiali, microscopici o macroscopici, possono avere una proprietà fisica rappresentata dalla carica elettrica: questa può essere positiva o negativa. Le interazioni fra questi corpi in quiete o in moto sono rappresentate dalla forza elettromagnetica. Queste interazioni sono quelle che conducono alla formazione di atomi, molecole e loro aggregati; esse sono alla base, assieme alle interazioni gravitazionali, di tutte le forze che vediamo agire su corpi macroscopici.

L'interazione nucleare forte si presenta all'interno dei nuclei atomici, i quali sono formati da particelle elettricamente cariche (protoni) e da particelle neutre (neutroni): tale interazione conferisce stabilità ai nuclei e si esercita sia fra particelle cariche (protone-protone) vincendo le forze elettriche repulsive, sia fra particelle neutre (neutrone-neutrone), sia anche tra protone e neutrone. L'azione attrattiva di queste forze è praticamente limitata a distanze dell'ordine di 10^{-15} m.

L'interazione nucleare debole si presenta in alcune trasformazioni di particelle. Per es., un neutrone libero può trasformarsi in un protone, emettendo un elettrone (particella avente carica opposta a quella del protone) e una particella leggera priva di carica (neutrino). Un'altra trasformazione in cui si rende evidente l'interazione debole è quella in cui un nucleo pesante si trasforma in un nucleo più leggero con emissione di una particolare radiazione (decadimento β). Le forze responsabili di questi processi di decadimento (disgregazione) di strutture nucleari sono diverse dalle forze nucleari che invece danno stabilità alle strutture stesse (interazione forte).

È di grande interesse oggi nella fisica ricercare se le teorie corrispondenti a queste quattro interazioni possano confluire in un'unica teoria basata su elementi semplici e di grande generalità, la quale sia capace di render conto di processi e comportamenti riscontrabili non solo nel mondo circostante attuale, ma anche relativi

a situazioni di grande concentrazione di energia⁽⁷⁾ quali si sono presumibilmente presentate in fasi evolutive precedenti dell'Universo.

Per tre forze, elettromagnetica, nucleare debole e nucleare forte, sono state sviluppate descrizioni (teorie) basate su un metodo matematico che va sotto il nome di *teorie di gauge*: l'elemento centrale è una nozione di simmetria (globale o locale) opportunamente definita rispetto a qualche proprietà del sistema. Ciascuna forza fondamentale deriverebbe dal rispetto dell'invarianza di una legge di natura (per es. conservazione della carica o dell'energia) rispetto a operazioni di simmetria quando venga alterato qualche parametro.

La teoria di questo genere sviluppata per l'elettrodinamica quantistica (da R.P. Feynman) è stata verificata con successo in un intervallo di distanze esteso da 10^{-18} m a 10^8 m. Una teoria dello stesso genere è stata sviluppata per le interazioni deboli. Nonostante che la forza debole agisca a distanze inferiori a 10^{-18} m e che altre manifestazioni la differenzino dalla forza elettromagnetica normalmente osservata, molte connessioni sono apparse evidenti fra le due forze sì da far pensare a una loro convergenza per distanze molto piccole. Lo sviluppo di queste idee e l'evoluzione di una teoria di gauge unificante ha richiesto cinquanta anni di ricerche teoriche e sperimentali. La forma finale della teoria (S.L. Glashow, S. Weinberg, A. Salam, premi Nobel nel 1979) indica come le interazioni elettromagnetica e nucleare debole manifestino la loro correlazione mediante una simmetria che si rende evidente solo a energie molto alte mentre non appare a energie inferiori. Alcune precise previsioni della teoria unificata sono state brillantemente verificate sperimentalmente (C. Rubbia) in violente collisioni protone-antiproton.

Anche l'interazione nucleare forte può essere descritta mediante una teoria matematica di gauge e appare probabile che le intensità delle tre forze (elettromagnetica, nucleare debole e forte) convergano a distanze molto piccole (10^{-31} m) quali sarebbero in gioco in processi a energie estremamente elevate (10^{24} eV).

Tutto ciò rende plausibile l'idea che si possa giungere a una unificazione delle tre forze, nel senso che ciascuna di esse rappresenterebbe un diverso aspetto di una sola forza fondamentale: le differenze mostrate dalle tre forze nelle comuni esperienze non sarebbero fondamentali e apparirebbero sensibili essenzialmente perché l'Universo nello stato attuale è molto freddo e le particelle si trovano in genere a energie basse. La situazione apparirebbe differente se si potessero fare esperienze a energie sufficientemente elevate: queste energie, come si è detto, sono ben superiori a quelle che si può pensare di ottenere anche coi più potenti acceleratori. Esse sono peraltro state presenti in fasi evolutive precedenti dell'Universo e quindi le teorie che vengono sviluppate possono trovare sostegno sperimentale nel controllo di conseguenze da esse previste che permangono, a energie largamente inferiori, accessibili all'esperienza. Queste teorie consentono, per es., di spiegare aspetti ben noti nel mondo fisico, come la quantizzazione della carica elettrica, il fatto cioè che le cariche elettriche osservate siano sempre multiple di una carica elementare; esse consentono anche di stabilire con sufficiente precisione i rapporti fra le tre forze nelle condizioni esistenti in laboratorio. Esse infine indicano l'esistenza di processi non previsti dalle teorie precedenti e non ancora osservati, come il decadimento del protone. Un notevole sforzo è attualmente dedicato al controllo sperimentale di questa previsione; le enormi difficoltà per questa impresa si comprendono osservando che la vita media prevista per questa particella (10^{31} anni) è assai più lunga dell'età dell'Universo dopo il *big bang*, valutata in circa $1,5 \cdot 10^{10}$ anni! L'eventuale osservazione di questo decadimento sarebbe un fattore di notevole peso a favore dell'unificazione delle tre forze. Molto stretti appaiono i legami, secondo queste teorie, fra fisica e cosmologia.

Nelle teorie di gauge le particelle elementari (descritte mediante opportuni campi quantistici relativistici) sono rappresentate da alcuni operatori matematici caratterizzati da parametri (di solito indicati con il nome generico di *cariche*, quali la massa gravitazionale, il momento della quantità di moto, la carica elettrica e vari

*L'unificazione
delle interazioni
elementari*

⁽⁷⁾ Il concetto di energia verrà precisato nel prossimo capitolo. Nel sistema SI l'energia ha le dimensioni [$L^2 MT^{-2}$] e si misura in joule (J). Una unità spesso usata in vari contesti e che non appartiene al SI è l'elettronvolt (eV) pari all'energia acquistata da un elettrone quando viene accelerato dalla differenza di potenziale di un volt:

$$1 \text{ eV} = 1,6021 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

altri parametri subnucleari); le forze fondamentali si eserciterebbero fra queste *cariche*. La ricerca di unificazione consiste essenzialmente nella ricerca di un singolo ente che possieda le varie cariche come componenti consentendo la trasformazione di una carica in un'altra. La unificazione delle forze ne conseguirebbe.

Allo stato attuale della ricerca fisica, mentre appare plausibile la confluenza delle tre forze elettromagnetica, debole e forte, non vi sono aperture promettenti per la loro unificazione con la forza gravitazionale in un'unica superforza.

2.10. PESO

In un successivo capitolo sulla gravitazione si vedrà che, come del resto è stato già accennato, una forza di attrazione reciproca si esercita fra due qualsiasi masse nell'Universo: questa forza è proporzionale alle masse di ciascuno dei due corpi e decresce rapidamente con la loro distanza. La forza di attrazione gravitazionale è molto piccola per oggetti aventi entrambi piccola massa, ma può divenire considerevole se almeno uno dei due ha massa elevata. Questo è il caso in cui uno dei corpi è la Terra nel suo complesso.

Su un punto materiale di massa m nelle vicinanze della Terra si esercita quindi una forza che, come verrà mostrato, è diretta dal punto verso un punto da pensarsi come il centro della Terra stessa. Di solito si considera il punto materiale e la azione di questa forza in un sistema di riferimento legato alla Terra, il quale, per la rotazione della Terra su se stessa, non è inerziale. Come si è già avvertito e come meglio vedremo in seguito, quest'ultimo fatto porta di conseguenza la necessità di considerare nel sistema non inerziale una particolare forza apparente, la forza centrifuga. Nel caso che il punto materiale sia in moto nel sistema non inerziale si presenta una seconda forza apparente, di Coriolis, molto più piccola e in molti casi trascurabile. Tutto ciò sarà meglio precisato in seguito (par. 2.25 e 26), per ora diremo che su un punto materiale di massa m (fermo sulla superficie terrestre) in un sistema di riferimento solidale con la Terra agisce una forza di attrazione della Terra e una forza apparente (centrifuga) dovuta alla rotazione della Terra⁽⁸⁾. La somma delle due forze viene chiamata forza peso generalmente indicata con \mathbf{P} . Essa è diretta secondo una direzione che si scosta poco dalla congiungente la posizione occupata dal punto materiale e il centro della Terra e che viene assunta come direzione verticale nella posizione considerata. La forza è orientata verso la Terra.

Per mantenere il punto in quiete sulla superficie terrestre, occorre, quindi, esercitare su di esso un “vincolo”, per es. da parte di un appoggio, che bilanci la forza peso con un'altra a essa uguale e contraria.

Se il corpo viene lasciato libero sotto l'azione della forza peso si muove lungo la verticale⁽⁹⁾ con una accelerazione \mathbf{g}

(12)

$$\mathbf{P} = mg$$

chiamata accelerazione di gravità.

Il vettore \mathbf{g} , e quindi la forza peso che agisce su un punto materiale, dipende dalla posizione occupata dal punto materiale rispetto alla Terra:

Il peso di un corpo è la forza che esercita la Terra su di esso, quando sia fermo sulla superficie terrestre

⁽⁸⁾ Questa forza apparente è diretta normalmente all'asse di rotazione della Terra, varia con la latitudine e raggiunge un valore massimo di circa 0,3% della forza di attrazione fra punto materiale e Terra.

⁽⁹⁾ Trascurando l'effetto della forza dovuta al moto, cui si è accennato poco sopra.

*L'accelerazione
di gravità è uguale per
tutti i corpi in un
medesimo punto della
superficie terrestre*

nel cap. 6, par. 6.4 vedremo meglio la dipendenza di g dalla latitudine, dall'altitudine e dalle particolarità della crosta terrestre nelle vicinanze della posizione.

Le variazioni di g sono tuttavia relativamente piccole sicché di solito, se non occorre considerare regioni molto estese o se non si tratta di problemi particolari, si può considerare g costante. Alle nostre latitudini ($\sim 45^\circ$) e al livello del mare è

$$g = 9,80665 \text{ ms}^{-2} .$$

Di conseguenza la forza peso che si esercita sulla massa di 1 kg, alle nostre latitudini e al livello del mare, risulta nel sistema SI pari a

$$1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ ms}^{-2} = 9,80665 \text{ N} .$$

In molte applicazioni tecniche è sufficiente porre tale forza pari a 9,81 N o addirittura 9,8 N.

Un giudizio sulle variazioni di g e P con l'altitudine si ha dicendo che se si passa per esempio da Roma (S. Pietro in Vincoli) alla stazione della funivia del Gran Sasso (1105 m s.l.m. e praticamente alla latitudine di Roma, $42^\circ 51'$) g varia da 9,80361 a 9,80124 ms^{-2} e quindi il peso di un corpo di massa 1 kg varia da 9,80361 a 9,80124 N.

La massa del corpo, a differenza del peso, resta invariata. Questa è la ragione per cui, come si è già osservato, si preferisce scegliere la massa come grandezza fondamentale.

Nel sistema pratico degli ingegneri, tuttavia, viene scelta come grandezza fondamentale la forza e l'unità scelta è il peso del medesimo campione depositato a Sèvres che viene usato per definire l'unità di massa, quando si trova al livello del mare e a 45° di latitudine. Tale unità si chiama kilogrammo-peso o kilogrammo-forza. Fra le unità di forza nel sistema pratico degli ingegneri e l'SI vale la relazione

$$1 \text{ kg-peso} = 9,80665 \text{ N} .$$

Dalla (12) si ricava che, essendo g costante in un dato luogo, l'intensità di \mathbf{P} è proporzionale a m : ciò rende possibile determinare le masse con procedimenti statici che effettuano in realtà misure di forze. Il più importante di questi metodi è quello della bilancia e sarà esaminato in seguito.

2.11. FORZE ELASTICHE

Queste forze hanno origine dalla deformazione dei corpi finché tali deformazioni sono piccole. Avremo modo in seguito (cap. 7) di esaminare il comportamento elastico dei corpi. Per ora possiamo asserire che i corpi sottoposti ad azioni che tendono a variare il loro assetto di riposo si deformano e tali deformazioni originano delle forze dirette come le azioni esterne e in verso opposto; entro certi limiti (elastici) le intensità di queste forze (elastiche) sono proporzionali alle deformazioni. Si consideri per es. (fig. 2.6) un punto materiale P all'estremità di una molla a spirale: questa è un corpo che nell'assetto di riposo ha una certa lunghezza l . La molla venga deformata assialmente e si indichi con x l'allungamento (positivo se la deformazione è un'estensione, negativo se è un accorciamento). La forza che la molla esercita su P è diretta lungo x nel verso tale da riportarlo

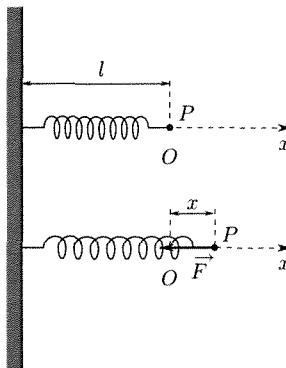


Fig. 2.6

nella posizione O di riposo e, se x è sufficientemente piccolo, ha intensità proporzionale a x . La forza elastica in questo caso ha la espressione

$$(13) \quad \mathbf{F} = -kxi$$

con $k > 0$, costante elastica.

Nel caso più generale, detta O la posizione di riposo del punto P , indicato con \mathbf{r} il vettore con origine in O che fissa lo spostamento di P , la forza elastica ha la espressione

$$(14) \quad \mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

con $k > 0$.

Le forze elastiche sono proporzionali al vettore spostamento da una posizione di equilibrio

2.12. REAZIONI VINCOLARI

Nella relazione che esprime il secondo principio \mathbf{F} rappresenta la risultante di tutte le forze reali applicate al punto materiale. Le *forze reali applicate* vengono alle volte distinte in due categorie: *forze esterne* (o attive) e reazioni vincolari. Le prime sono quelle che vengono applicate autonomamente al punto materiale dall'esterno per determinare il desiderato stato di moto o di quiete. Le seconde sono quelle che si originano in relazione alle limitazioni (vincoli) imposte al movimento del punto materiale dai corpi circostanti: per es., se il punto è vincolato a rimanere su una linea, come per un treno su una rotaia o una perlina forata lungo un filo, le forze vincolari si originano tutte le volte che altre azioni tendano ad allontanare il corpo dalla linea; nessuna azione invece impedisce il moto lungo la linea stessa. Se un corpo è vincolato a non attraversare un piano, reazioni vincolari si originano per resistere ad azioni tendenti a spingere il corpo oltre il piano, mentre nessuna forza si destà se il moto avviene nel semispazio consentito. Le forze (reazioni) vincolari sono quindi delle forze che vengono applicate al punto materiale dai corpi circostanti che realizzano il vincolo e rappresentano l'azione del vincolo su un punto materiale altrimenti libero.

Di particolare interesse sono i vincoli che obbligano un punto materiale a restare in contatto con una superficie o una linea.

Un caso di questo tipo è quello che abbiamo considerato nel discutere il primo e il secondo principio della dinamica. In tal caso (fig. 2.7) il punto poteva muoversi su un piano orizzontale in seguito alla applicazione della forza \mathbf{F} . In realtà questa non è la sola forza applicata al punto: v'è infatti la forza peso \mathbf{P} e la reazione vincolare \mathbf{R} . In questo caso peraltro risulta che con grande approssimazione si può porre $\mathbf{R} = -\mathbf{P}$ sicché la risultante delle forze applicate è \mathbf{F} : ciò ha consentito di ignorare la presenza di \mathbf{P} e di \mathbf{R} nelle considerazioni che sono state fatte.

Più genericamente, un vincolo si esprime analiticamente imponendo alle coordinate x, y, z del punto materiale di soddisfare una o più equazioni, o disequazioni. L'imposizione, per es., di non attraversare una superficie dello spazio sarà data dalla disequazione

$$f_1(x, y, z) > 0 \quad \text{ovvero} \quad f_1(x, y, z) < 0$$

a seconda che il punto dovrà tenersi dall'una o dall'altra parte della superficie descritta da $f_1 = 0$. Il vincolo per il punto di mantenersi su una

Le reazioni vincolari sono grandi quanto si vuole, in direzione normale al vincolo

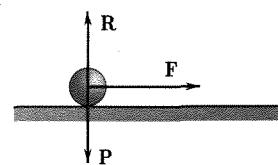


Fig. 2.7

linea sarà espresso dal sistema

*Equazioni esprimenti
vincoli al moto*

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= 0 \\f_2(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

essendo $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ le equazioni di due superfici nello spazio, la cui intersezione è data dalla linea del vincolo.

2.13. ATTRITO

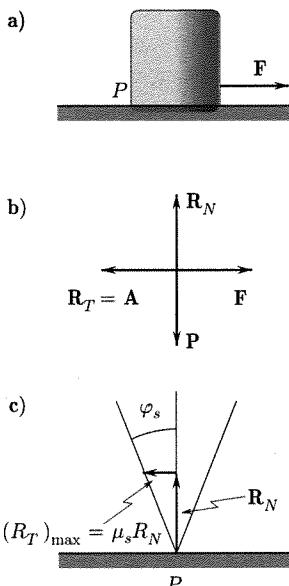


Fig. 2.8

La forza d'attrito è tangenziale alla superficie di contatto e ha un limite superiore proporzionale alla componente normale

In occasione della discussione fatta per introdurre il primo principio della dinamica si è avuto occasione di osservare che, se in realizzazioni meno raffinate di quella di figura 2.7, si considera un corpo in moto su un piano orizzontale sotto l'azione di una forza \mathbf{F} , e questa venga rimossa, il punto materiale continua a muoversi di moto rettilineo uniformemente ritardato: ciò equivale a dire che è presente una forza (tangenziale) diretta in verso contrario al moto. Siccome il punto è soggetto alla forza peso e alla reazione del vincolo, evidentemente la reazione vincolare in realizzazioni di questo genere possiede oltre alla componente normale al piano (pari a $-\mathbf{P}$) una componente tangenziale diretta in senso contrario al moto: tale componente prende il nome di forza di attrito.

Data la notevole frequenza con cui nella pratica si incontrano situazioni in cui corpi assimilabili a punti materiali si trovano a scorrere su superfici che realizzano un vincolo e dato l'interesse di comprendere bene gli effetti dovuti alla presenza delle forze di attrito nella maggior parte delle applicazioni tecniche, svolgeremo alcune ulteriori considerazioni su tali forze.

Si immagini di avere un punto materiale P , costituito da un blocco in quiete su una superficie piana orizzontale (fig. 2.8). In tali condizioni la reazione del vincolo, pari a $-\mathbf{P}$ (peso del corpo), è normale al vincolo \mathbf{R}_N . Se si applica una forza tangenzialmente alla superficie di appoggio, \mathbf{F} , è possibile vedere che il corpo permane in quiete fino a che

$$F \leq \mu_s R_N$$

cioè finché l'intensità della forza non superi un valore proporzionale all'intensità della reazione normale: questo fatto vuol dire che il vincolo è capace di fornire una reazione che ha, oltre alla componente normale, una componente tangenziale ($\mathbf{R}_T = \mathbf{A}$), costituente la *forza d'attrito*, di intensità

$$(15) \quad R_T = A \leq \mu_s R_N .$$

Tale forza d'attrito cresce con la \mathbf{F} e la equilibra finché F non supera il valore $\mu_s R_N$, nel qual caso essa ha il valore massimo $A_{\max} = \mu_s R_N$. μ_s è una grandezza adimensionata e prende il nome di *coefficiente di attrito statico o di primo distacco*. Poiché, quindi, una superficie può esercitare su un punto a contatto con essa una forza la cui componente normale è grande quanto si vuole e quella tangenziale può giungere fino a un valore massimo proporzionale a quella normale, si può dire (fig. 2.8c) che la reazione è sempre contenuta all'interno di un semicono che ha vertice nel punto di contatto della superficie con il corpo (punto materiale) e asse normale alla

superficie stessa; esso, inoltre, si trova nella regione consentita dal vincolo e ha un angolo di semiapertura φ_s dato da

$$(16) \quad \tan \varphi_s = \frac{\mu_s R_N}{R_N} = \mu_s .$$

Le condizioni di moto incipiente corrispondono al caso di una reazione che agisce sulla falda del cono. Una volta che il blocco si è messo in moto ($F > \mu_s R_N$), si può riscontrare che per mantenerlo in moto rettilineo uniforme occorre una forza avente la direzione di \mathbf{F} e una intensità più piccola di $\mu_s R_N$. Scriveremo allora:

$$(17) \quad F = \mu_d R_N$$

con $\mu_d < \mu_s$. Ciò significa che la reazione di attrito durante il moto è inferiore al valore massimo che essa può avere nel caso statico: μ_d prende il nome di coefficiente di attrito dinamico o di attrito radente.

Le leggi (15) e (17) sono empiriche: esse hanno il pregio di essere semplici pur stando a rappresentare processi che su scala microscopica sono molto complicati. Non c'è quindi da meravigliarsi se la loro applicazione in alcuni casi debba essere fatta con particolare cautela.

Nella maggior parte dei casi i due coefficienti di attrito sono indipendenti dalle aree delle superfici a contatto, mentre dipendono fortemente dalla natura e dallo stato delle superfici: essi decrescono rapidamente al diminuire della rugosità (al crescere della levigatezza) delle superfici a contatto, dipendono fortemente dai materiali con cui sono fatte le superfici, dalla temperatura, dalla presenza di materiali estranei e in particolare dalla presenza di pellicole liquide. La tabella 2.1 dà alcuni valori numerici dei coefficienti a temperatura ambiente.

Il coefficiente d'attrito dinamico è sempre minore di quello statico

Tabella 2.1

Materiali a contatto	Stato della superficie	μ_s	μ_d
Legno su legno	secco	0,52	0,50-0,25
	saponato	0,30	0,20
Acciaio su legno	secco	0,62	0,60-0,50
	bagnato		0,25
	saponato		0,20
Acciaio su metallo	secco	0,30	0,20-0,15
	con superfici levigate e continuamente lubrificate		0,03
Acciaio su ghiaccio		0,10	0,03
Acciaio su teflon	secco	0,04	
Vetro su vetro	secco	0,94	
Nichel su nichel	secco	1,10	
Ghisa su ghisa	secco	1,10	

L'attrito è essenzialmente dovuto alle forze di coesione che si esercitano tra le molecole che appartengono ai due corpi. Tali forze, nelle condizioni in cui si presentano, possono assumere valori tanto elevati da far sì che frammenti di uno dei due corpi siano strappati da esso e trasferiti all'altro; alle volte si possono determinare, in corrispondenza ad aree di contatto molto piccole, saldature vere e proprie (microsaldature) che devono essere rotte per avere lo scorrimento. Il presentarsi di questi effetti può essere mostrato con l'impiego di traccianti radioattivi, cioè di atomi radioattivi che posti inizialmente a costituire (in piccole parti) solamente uno dei due corpi, si trovano trasferiti nel secondo dopo che è stata eseguita una prolungata esperienza di attrito.

Quando i due corpi sono a contatto, l'area di contatto effettiva è inferiore a quella apparente (S), giacché, a causa della presenza di rugosità, il contatto avviene in corrispondenza alle asperità. Tale area di contatto cresce aumentando la pressione di un corpo sull'altro (cioè al crescere di R_N) in seguito alla deformazione dei corpi. Questa circostanza fa comprendere come nei casi normali (quando cioè le pressioni R_N/S che spingono i due corpi l'un contro l'altro in corrispondenza all'area apparente S non sono notevolmente elevate) le forze di attrito, che è logico assumere proporzionali all'area effettiva di contatto, non dipendano dall'area apparente di contatto e crescano proporzionalmente a R_N .

Il valore del coefficiente dinamico può essere assunto indipendente dalla velocità, in accordo con le esperienze iniziali di Charles de Coulomb, solo se la velocità relativa di scorrimento non vari molto.

Come si è accennato, l'uso delle relazioni empiriche (15) e (17) rispecchia abbastanza bene l'andamento delle cose in quasi tutti i casi normali. In alcuni casi, peraltro, come quando la pressione fra i corpi viene fatta variare entro vasti limiti, o quando la velocità relativa di scorrimento dei corpi vari notevolmente, le semplici relazioni non si prestano bene alla rappresentazione dei fatti. Si possono peraltro mantenere per le forze di attrito le espressioni (15) e (17), ritenendo i coefficienti di attrito μ_s e μ_d funzioni della pressione R_N/S , e μ_d funzione anche della velocità relativa di scorrimento. Per dare un'idea delle variazioni nei coefficienti che si osservano, diremo che nel caso di ceppi di ghisa su cerchioni di acciaio secchi (ruote di carri ferroviari) μ_d scende (Metakow) da 0,48 in corrispondenza a una pressione di 10 N/cm^2 e a una velocità di 10 km/h , a 0,13 per 120 N/cm^2 e 150 km/h .

In alcuni casi l'esistenza dell'attrito viene utilizzata nella tecnica: freni, attacchi e frizione, ecc. Si cerca allora di avere elevati coefficienti μ_s e di porsi in condizioni prossime a quelle di moto incipiente (forze di attrito statico massime).

In altri casi, quando i corpi debbono muoversi l'uno rispetto all'altro, la presenza delle forze di attrito è di ostacolo a ciò che si desidera. Si cerca allora di ridurre le forze d'attrito il più possibile, per es. mediante l'uso di lubrificanti.

È anche vantaggioso sostituire, ove possibile, a corpi che strisciano uno sull'altro corpi che rotolano. In caso di semplice rotolamento (quando le deformazioni dei corpi che rotolano, e che sono la causa delle forze che si instaurano, per es. ruote su un piano, sono piccole) le forze di attrito di rotolamento che si destano a causa delle deformazioni dei corpi sono molto minori di quelle d'attrito di scorrimento (cap. 7, par. 7.13).

Vogliamo concludere dicendo che spesso si considerano vincoli realizzati in modo da ridurre le forze d'attrito a valori estremamente piccoli, tanto da poter essere considerati approssimativamente *privi di attrito*: in questi casi la reazione vincolare ha solo la componente normale alla superficie del vincolo.

■ 2.14. RESISTENZE PASSIVE

Si indicano con il nome di resistenze passive forze che si presentano durante il moto ($v \neq 0$) e sono sempre dirette in verso contrario a quello del moto: la loro direzione e il loro verso sono quelle di $-v$.

La resistenza di attrito dinamico è una resistenza passiva. Altri tipi di resistenze passive si hanno nel moto di un punto materiale in un mezzo fluido: per avanzare in un tale mezzo il corpo deve allontanare le particelle che costituiscono il fluido e la resistenza passiva è una forza che rappresenta la reazione del mezzo a questa azione del corpo. Vedremo in seguito (cap. 8, par. 8.14) meglio le caratteristiche di queste forze. Si può peraltro già dire che queste resistenze passive dipendono dalle velocità.

Per basse velocità (regime viscoso) la resistenza del fluido (gas, liquido) si manifesta con una forza \mathbf{F} che è proporzionale alla prima potenza delle velocità

$$(18) \quad \mathbf{F} = -b\mathbf{v}.$$

Il coefficiente b dipende dalla natura del mezzo e dalle dimensioni e dalla forma del corpo. Per forme semplici esso viene calcolato nella teoria dei fluidi; per un corpo di forma sferica di raggio r si può scrivere (legge di Stokes):

$$(19) \quad b = 6\pi r\eta$$

dove η è il *coefficiente di viscosità* (cap. 7, par. 7.11; cap. 8, par. 8.14) che caratterizza il fluido; esso ha le dimensioni

$$[\eta] = [L^{-1}MT^{-1}]$$

e si misura nel SI in $\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ e nel sistema CGS in poise = $\text{g}/\text{cm} \cdot \text{s} = \text{dine}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$; si vede che 1 poise = 10^{-1} unità SI.

La (19) vale con precisione fino a valori di $R = \rho vr/\eta$ (numero di Reynolds) minori di 0,5, essendo ρ la densità volumica del fluido. Per velocità non tanto basse l'intensità della resistenza passiva opposta dal fluido cresce più rapidamente con la velocità, dapprima proporzionalmente a v^2 e poi come funzione più complessa di v (cap. 8, par. 8.14).

Le forze di resistenza passiva sono opposte alla velocità del corpo che si muove in un fluido

■ 2.15. FORZE ELETTRICHE

Vogliamo ora accennare ad alcuni tipi di forze di grande importanza e che formeranno oggetto di studio dettagliato nel corso del secondo anno. Noi qui ci limiteremo a dare delle nozioni utili per lo svolgimento del presente corso.

Tutti i corpi possono essere portati in uno stato particolare, detto di elettrizzazione, possono cioè essere sede di *cariche elettriche* che sono *positive* o *negative*. In

realità gli atomi dei vari elementi che costituiscono le varie sostanze sono formati da parti cariche positivamente (nuclei) e parti cariche negativamente (elettroni): nello stato normale neutro le cariche di segno contrario si equilibrano perfettamente. Elettrizzare un corpo positivamente o negativamente significa rompere questo equilibrio asportando o conferendo a esso un certo numero di particelle aventi cariche di un solo segno.

Fra i corpi dotati di carica elettrica si esercitano delle *forze elettriche* ed è questa la maniera in cui si estrinseca lo stato di elettrizzazione. Lo studio delle azioni fra corpi carichi in quiete è oggetto della elettrostatica e, come già detto, sarà compiuto nel seguito.

Nel sistema di unità di misure oggi più comunemente usato, l'SI, come quarta grandezza fondamentale, necessaria per trattare l'elettromagnetismo, viene scelta la intensità di corrente; l'unità corrispondente è l'ampere (A). In tale sistema l'unità per la carica elettrica (quantità di elettricità) è il coulomb (C).

Le forze fra due corpi elettrizzati sono attrattive se i corpi (1 e 2) hanno cariche (q_1 e q_2) di segno contrario; sono repulsive nell'altro caso.

L'espressione dell'intensità della forza mutua è data dalla legge di Coulomb nel caso in cui i due corpi abbiano dimensioni piccole rispetto alla mutua distanza r sì da poter essere ritenuti puntiformi. In tal caso, se le cariche sono nel vuoto (o praticamente nell'aria), è

La forza tra cariche elettriche

$$(20) \quad |\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Il fattore $1/4\pi\epsilon_0$ è costante ed è stato posto in questa forma per ottenere formule semplici in problemi di notevole interesse pratico. Esso caratterizza il mezzo. La costante ϵ_0 prende il nome di *costante dielettrica del vuoto* e ha come valore nel SI e nelle unità corrispondenti

$$\epsilon_0 = 8,85415 \cdot 10^{-12}.$$

Se si indica con \mathbf{r} il vettore che ha origine nella posizione P_1 occupata dal primo corpo e termine nella posizione P_2 occupata dal secondo corpo (fig. 2.9) sicché \mathbf{r}/r è il corrispondente versore, la forza che la prima carica esercita sulla seconda è data vettorialmente da

$$(21) \quad \mathbf{F} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right) q_2 \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Si osservi che se le cariche sono dello stesso segno, la forza è diretta da P_1 a P_2 , cioè è repulsiva. La forza che la seconda carica esercita sulla prima è uguale e opposta, come vuole il terzo principio della dinamica. Nel caso di più cariche puntiformi presenti contemporaneamente, la forza totale che si esercita su una qualsiasi di esse, si ottiene sovrapponendo le azioni esercitate da ciascuna delle altre e date dalla (21). Alle volte si considerano azioni fra corpi carichi in mezzi diversi dal vuoto, ma che hanno in comune con il vuoto la caratteristica che le cariche poste in un punto di essi vi restano localizzate (mezzi dielettrici o isolanti). In tal caso per la forza fra due cariche puntiformi (legge di Coulomb) si scrive

$$(22) \quad |\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

essendo ϵ la costante dielettrica del mezzo, che caratterizza il suo comportamento e riassume l'effetto della sua presenza.

Le azioni elettriche fra cariche, rappresentate da forze come la (21) possono essere analizzate pensando che una carica elettrica (q_1) posta in un punto (P_1) crei nello spazio circostante uno stato particolare, che si manifesta in una forza su un'altra carica (q_2) qualora questa venga posta in un punto (P_2) di tale spazio. Si dice che la prima carica crea un campo di forze elettriche (*campo elettrico*) e si definisce come *campo elettrico* in un punto il vettore \mathbf{E} dato dal rapporto tra la forza che si esercita in quel punto su una carica, molto piccola posta, in quel punto e la carica stessa:

$$(23) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

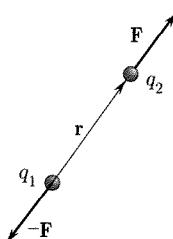


Fig. 2.9

Il vettore campo elettrico

Nel caso del campo creato dalla carica puntiforme q_1 nel vuoto:

$$(24) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \mathbf{r}.$$

Molto spesso è particolarmente utile disporre di una regione dello spazio sede di un campo elettrico uniforme, nella quale cioè il vettore \mathbf{E} sia costante. Sperimentalmente ciò può ottersi facilmente (fig. 2.10) disponendo due piastre metalliche di superficie estesa S a una distanza d relativamente piccola (rispetto alle dimensioni lineari delle piastre stesse) e ponendo sulle due piastre due cariche Q uguali e contrarie. È possibile vedere che, a esclusione delle regioni nei pressi dei bordi delle piastre, il campo elettrico ha ovunque la direzione perpendicolare alle piastre, il verso dalla piastra positiva alla negativa e intensità

$$(25) \quad |\mathbf{E}_0| = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{S}.$$

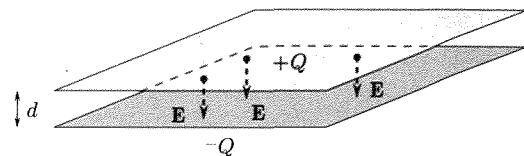


Fig. 2.10

■ 2.16. FORZE MAGNETICHE SU CARICHE IN MOTO

Cariche elettriche, o meglio corpi dotati di una carica elettrica, che si trovino in moto possono essere soggetti a un altro tipo di forze nel caso che interagiscano con altre cariche in movimento: queste azioni si dicono *magnetiche*. Anche in questo caso l'interazione può essere analizzata supponendo che una carica in moto crei nello spazio uno stato particolare, rappresentato da un campo vettoriale, il quale esplica una forza su un'altra carica in moto. Ci limiteremo per ora a considerare il caso in cui le cariche che risentono l'azione si muovano nel vuoto (o ciò che è praticamente lo stesso, nell'aria).

In tal caso il campo vettoriale che conviene considerare per descrivere lo stato delle cose è quello del vettore *induzione magnetica* \mathbf{B}_0 e nel corso sull'elettromagnetismo si vedrà come esso possa essere calcolato o misurato per molti casi di interesse pratico. Le dimensioni di \mathbf{B}_0 nel SI sono

$$[B_0] = [MT^{-2} A^{-1}]$$

ed esso si misura in una unità chiamata weber/m² o tesla (T).

La forza che si esercita su una carica q che si muova con velocità \mathbf{v} in un punto in cui esiste il campo di induzione \mathbf{B}_0 è data da (fig. 2.11):

$$(26) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0.$$

Tale forza è chiamata *forza di Lorentz*. Come si vede, essa è normale al piano formato dai vettori \mathbf{v} e \mathbf{B}_0 e diretta nel verso dal quale si vede \mathbf{v} ruotare in senso antiorario verso \mathbf{B}_0 nel descrivere l'angolo minore di π compreso fra essi.

Avvertiamo che a volte si usa per descrivere lo stato delle cose, invece del vettore \mathbf{B}_0 , un altro vettore \mathbf{H}_0 chiamato *intensità del campo magnetico*. Finché si è nel vuoto l'uso dell'uno o dell'altro dei due vettori è del tutto equivalente giacché essi sono proporzionali (¹⁰):

$$(27) \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$$

il fattore costante μ_0 è chiamato *permeabilità magnetica* del vuoto. Nel SI l'intensità del campo magnetico ha dimensioni

$$[H_0] = [L^{-1} A].$$

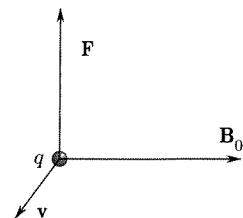


Fig. 2.11

Il vettore campo magnetico

(¹⁰) Nel caso che si voglia descrivere lo stato delle cose in mezzi materiali vale una relazione analoga alla (27) ma la permeabilità μ del mezzo ha valori diversi nei vari materiali e può dipendere da H , sicché entrambi i vettori \mathbf{B} e \mathbf{H} sono necessari.

Le dimensioni di μ_0 risultano essere

$$[\mu_0] = [LMT^{-2}A^{-2}]$$

e nelle corrispondenti unità esso vale

$$\mu_0 = 12,56 \cdot 10^{-7}.$$

Molto spesso riesce utile disporre di una regione dello spazio nella quale si abbia un campo \mathbf{B}_0 uniforme. Ciò può ottersi con la disposizione di figura 2.12. Un filo di materiale conduttore⁽¹¹⁾ venga avvolto lungo un'elica (n spire per unità di lunghezza) e cariche elettriche vengano fatte passare in esso con continuità. Se si considera una sezione del filo, la quantità di elettricità che passa nell'unità di tempo costituisce l'intensità di corrente i .

È possibile vedere che, purché i rimanga costante, il campo \mathbf{B}_0 e il campo \mathbf{H}_0 nell'interno dell'elica cilindrica (solenoide) sono uniformi, diretti secondo l'asse dell'elica e valgono

$$(28) \quad \begin{aligned} |\mathbf{B}_0| &= \mu_0 in \\ |\mathbf{H}_0| &= in. \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione mostra che sul valore di H_0 ha influenza tanto i quanto n . Per tali ragioni, pur non avendo il numero di spire dimensioni fisiche, si usa esprimere spesso la misura di H_0 in ampere · spire/m.

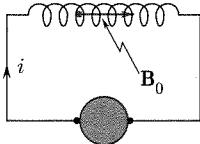


Fig. 2.12

2.17. APPLICAZIONE DEI PRINCIPI DELLA DINAMICA

Esempio 1

Su un piano privo di attrito due blocchi di massa $m_1 = 10 \text{ kg}$ e $m_2 = 20 \text{ kg}$, collegati da una fune di massa $m_3 = 0,5 \text{ kg}$, sono trascinati con accelerazione di $0,2 \text{ m/s}^2$ per mezzo di una fune di massa $m_4 = 0,2 \text{ kg}$ al cui estremo libero è applicata una forza \mathbf{F}_4 costante. Considerando le quattro masse come punti materiali, desideriamo determinare le forze applicate a ciascun corpo.

Poiché il moto avviene (fig. 2.13) nella direzione x che giace nel piano di appoggio, ciascuno dei punti materiali sarà soggetto a una forza risultante in questa direzione: ciò vuol dire che le forze verticali agenti su ciascun punto (peso e reazione vincolare) si equilibrano. Possiamo quindi limitarci a determinare le forze orizzontali applicate a ciascun punto. Applichiamo a ciascuna massa il II principio della dinamica: alla massa m_1 è applicata da parte della fune di massa m_3 una forza \mathbf{F}_1 tale che

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a} = 10 \text{ kg } 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \text{ N}.$$

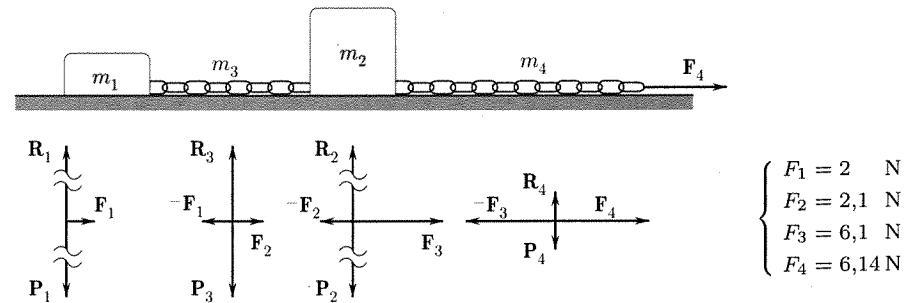


Fig. 2.13

⁽¹¹⁾ I materiali conduttori (rame, ferro ecc.) hanno la caratteristica che cariche elettriche (negative) possono liberamente muoversi in essi. Il loro comportamento si differenzia quindi da quello dei corpi isolanti per i quali cariche eventualmente poste in un punto restano localizzate.

Nella figura le forze P_1 e R_1 (così come le \mathbf{P}_2 e \mathbf{R}_2) sono indicate da un'interruzione che le pone fuori scala, perché sarebbero rappresentate da segmenti molto grandi nella scala scelta per le forze ($P_1 = R_1 = 98 \text{ N}$).

Passando a considerare la fune di massa m_3 , per quel che riguarda le forze orizzontali, essa è soggetta da parte del blocco m_1 alla reazione $-\mathbf{F}_1$ e alla forza \mathbf{F}_2 esercitata dal blocco m_2 ; complessivamente, quindi a

$$\mathbf{F}_2 + (-\mathbf{F}_1) = m_3 \mathbf{a}$$

$$F_2 = 2 + 0,5 \cdot 0,2 = 2,1 \text{ N}.$$

Analogamente, la massa m_2 è soggetta alle forze orizzontali $-\mathbf{F}_2$ e \mathbf{F}_3

$$\mathbf{F}_3 + (-\mathbf{F}_2) = m_2 \mathbf{a}$$

$$F_3 = 2,1 + 20 \cdot 0,2 = 6,1 \text{ N}.$$

Infine, per la massa m_4 :

$$\mathbf{F}_4 + (-\mathbf{F}_3) = m_4 \mathbf{a}$$

$$F_4 = 6,1 + 0,2 \cdot 0,2 = 6,14 \text{ N}.$$

Esempio 2

a. Su un piano inclinato liscio avente angolo di inclinazione $\alpha = \pi/4$ rispetto all'orizzontale un corpo di massa 50 kg è trattenuto mediante una fune. Determiniamo qual è la forza esercitata dalla fune sul corpo.

La reazione del vincolo \mathbf{R}_N è normale al piano e assieme alla forza esercitata dalla fune (parallelamente ad AB , figura 2.14) equilibra la forza peso di intensità $p = 50 \cdot 9,8 = 490 \text{ N}$.

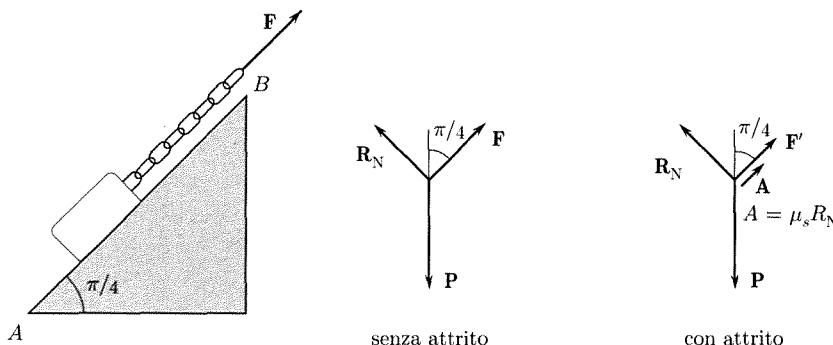


Fig. 2.14

Dal diagramma delle forze si ricava

$$F = P \sin \frac{\pi}{4} = \frac{490}{\sqrt{2}} = 347 \text{ N}.$$

La reazione (normale) del piano è

$$R_n = P \cos \frac{\pi}{4} = 347 \text{ N}.$$

b. Qualora nella situazione dell'esercizio precedente non si potesse trascurare l'attrito e fosse $\mu_s = 0,4$, determiniamo la minima forza che la fune deve esercitare sul punto materiale perché questo resti in quiete.

In questo caso la reazione del vincolo, oltre alla componente normale R_N , possiede una componente nella direzione AB che al massimo può valere

$$\mu_s R_N = 347 \cdot 0,4 = 138,8 \text{ N}.$$

Per tenere il corpo in condizioni di moto incipiente, quindi occorre una forza

$$F' = F - \mu_s R_N = 208,2 \text{ N}.$$

In tal caso la reazione vincolare giacerebbe sulla falda del cono di attrito.

c. Supponiamo che nella situazione dell'esercizio b si possa variare la inclinazione del piano α e si voglia determinare quale valore bisogna dare ad α perché il corpo resti in equilibrio senza alcuna forza esterna aggiunta \mathbf{F} .

In tal caso occorre che la componente del peso nella direzione AB sia uguale o inferiore alla forza d'attrito massima che il vincolo può fornire:

$$P \sin \alpha \leq \mu_s R_N = \mu_s P \cos \alpha .$$

Si ha

$$\tan \alpha \leq \mu_s = \tan \varphi_s, \rightarrow \alpha \leq \mu .$$

Esempio 3

a. Si consideri una goccia d'acqua sferica, di raggio r , che cade lungo la verticale (pioggia); si vuole determinare la velocità di regime della caduta.

Le forze che agiscono sulla goccia sono il peso e la resistenza dell'aria (si trascura la spinta di Archimede). La resistenza dell'aria si può ritenere proporzionale alla velocità. Se ci si riferisce a un asse verticale orientato verso il basso (x), il secondo principio della dinamica si scrive, essendo tutti i vettori (\mathbf{a} , \mathbf{P} , \mathbf{v}) diretti come \mathbf{i} (versore dell'asse x):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - b \frac{dx}{dt} .$$

L'accelerazione è positiva e quindi il moto, verso il basso, è accelerato finché $mg > b\dot{x}$. Quando peraltro è soddisfatta la condizione

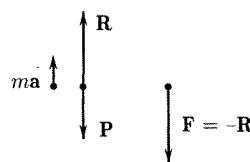
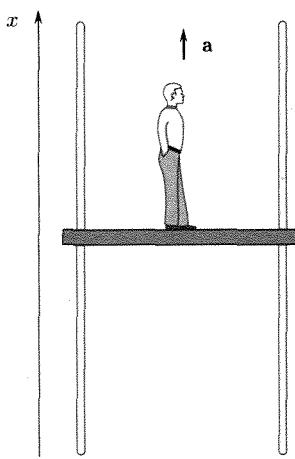
$$mg = b\dot{x}$$

l'accelerazione si annulla e il moto diviene rettilineo uniforme. Nel caso delle gocce d'acqua, ammettendo in prima approssimazione di poter usare la (19) ($\rho vr/\eta$ risulta circa 1) la velocità limite vale $v_{\text{lim}} = mg/6\pi\eta r = \frac{2}{9} gp/\eta r^2$. Per i valori seguenti dei parametri: $r = 0,005$ m; $\eta_{\text{aria}} = 0,00018$ poise; $\rho_{\text{aria}} = 1,293 \cdot 10^{-3}$ g/cm³; $\rho_{\text{acqua}} = 1$ g/cm³, si ha

$$v_{\text{lim}} = 30 \text{ m/s} .$$

Analoghe considerazioni valgono per qualsiasi oggetto che incontri la resistenza dell'aria e giustificano l'uso del paracadute, che incrementa notevolmente il coefficiente b di resistenza del mezzo.

Esempio 4



Una persona (massa 80 kg) si trova nella cabina din un ascensore che si muova con accelerazione di $0,5 \text{ m/s}^2$ diretta verso l'alto (ascensore che si muove verso l'alto accelerando o che si muove verso il basso rallentando). Cerchiamo di determinare l'azione esercitata dalla persona sul pavimento della cabina.

Questa azione è uguale e opposta alla reazione esercitata dal pavimento sulla persona. La persona è sottoposta alla forza peso (\mathbf{P}) e alla reazione (\mathbf{R}) del pavimento. Siccome le due forze sono dirette lungo la verticale e così pure l'accelerazione, conviene riferirsi a un asse x verticale orientato verso l'alto (fig. 2.15). Il secondo principio della dinamica si scrive

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

e proiettando sull'asse x

$$-P + R = ma$$

$$R = m(a + g) .$$

Fig. 2.15

La forza con cui il passeggero preme sul pavimento della cabina ($\mathbf{F} = -\mathbf{R}$) è maggiore del peso della persona. Sarebbe minore se l'accelerazione della cabina fosse diretta verso il basso.

Esempio 5. Moto di una carica elettrica in un campo elettrico uniforme

Un corpuscolo (puntiforme) avente una carica elettrica q ⁽¹²⁾ entri in un campo elettrico uniforme come per es. fra i piatti di un condensatore piano carico. Ricordando che il vettore campo elettrico \mathbf{E} fornisce la forza sull'unità positiva di carica, la forza che agisce sulla q è

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

La disposizione geometrica sia come in figura 2.16 ove sono segnati i piatti del condensatore carico che crea il campo \mathbf{E} ; la carica entri nel punto O all'istante $t = 0$ con una velocità diretta lungo l'asse y , $\mathbf{v}_0 \equiv (0, v_{0y}, 0)$.

Il moto del punto materiale è il risultante del moto rettilineo uniforme preesistente nella direzione y e di un moto uniformemente accelerato nella direzione z . Si ha per il primo

$$(29) \quad \begin{aligned} v_y &= v_{0y} \\ y &= v_{0y} t \end{aligned}$$

e per il secondo

$$(30) \quad F_z = qE = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad v_z = \frac{qE}{m} t \quad z = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2.$$

La traiettoria è una parabola la cui equazione si ottiene eliminando il parametro t dalle espressioni per y e z . Quando la carica esce dal campo elettrico, essa prende a muoversi di moto rettilineo uniforme con la velocità (vettoriale) raggiunta. Se le armature del condensatore sono lunghe L , la carica uscirà dal campo elettrico al tempo $t^* = L/v_{0y}$ con velocità $\mathbf{v}^* \equiv (0, v_{0y}, qEL/(mv_{0y}))$. Il moto della carica elettrica nel campo elettrico uniforme, nel caso considerato è analogo al moto di un grave lanciato con velocità iniziale orizzontale.

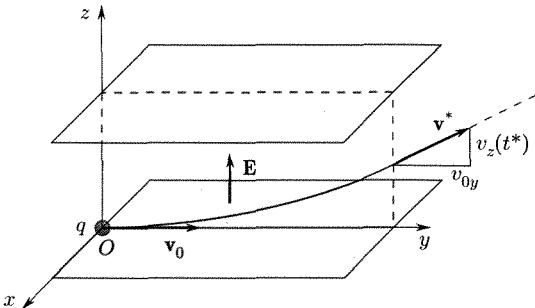


Fig. 2.16

Esempio 6. Moto di una carica elettrica in un campo magnetico uniforme

Si consideri ora un corpuscolo carico elettricamente che penetri in una regione dello spazio ove sia presente un campo magnetico uniforme, descritto dal vettore \mathbf{B}_0 induzione magnetica, per es. nell'interno di un solenoide. Sulla carica in moto (con velocità \mathbf{v}) si esercita la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

che è normale tanto a \mathbf{v} quanto a \mathbf{B}_0 .

Il secondo principio della dinamica si scrive

$$(31) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 = m\mathbf{a}.$$

L'accelerazione quindi è normale a \mathbf{v} , cioè è tutta accelerazione normale. Il moto è caratterizzato da accelerazione solo normale e costante. Se supponiamo per semplicità, come in fig. 2.17, che la velocità con cui la carica entra nel campo sia normale a \mathbf{B}_0 , il moto è circolare uniforme⁽¹³⁾. Il raggio della traiettoria si ottiene ricordando la espressione della intensità della accelerazione normale (cap. 1, par. 1.12)

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

(12) Per es. un elettrone con carica $q = -1,60 \cdot 10^{-19}$ coulomb e massa $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Si osservi però che la fig. 2.16 è fatta per q positiva.

(13) Altrimenti, se cioè la velocità \mathbf{v} avesse una componente parallela a \mathbf{B}_0 , la traiettoria sarebbe un'elica cilindrica che viene descritta uniformemente (moto elicoidale uniforme).

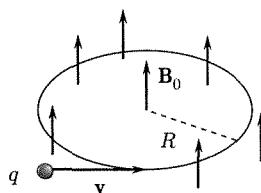


Fig. 2.17

Nel caso di figura 2.17, nel quale \mathbf{v} è normale a \mathbf{B}_0 l'intensità di F è

$$F = qvB_0$$

e quindi

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{qvB_0}{m}$$

da cui

$$(32) \quad R = \frac{mv}{qB_0}.$$

L'intensità della velocità angolare risulta

$$(33) \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB_0}{m}$$

e il periodo del moto circolare uniforme

$$(34) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB_0}.$$

Come si vede, sia ω , sia T non dipendono dai valori della velocità e del raggio della traiettoria.

Esperienze di questo tipo, effettuate cioè inviando particelle cariche in un campo magnetico, servono per vari scopi. In una camera di Wilson⁽¹⁴⁾ si può rivelare la traiettoria di una particella carica nota e dalla misura di R risalire alla sua quantità di moto; negli spettrometri di raggi beta (elettroni veloci) la curvatura dei raggi in un campo magnetico determina la loro quantità di moto; negli spettrometri di massa la particella carica è accelerata fino ad avere una velocità nota (v) prima di entrare nel campo magnetico: la misura di R serve a determinare m se q è noto.

Il mantenimento di particelle cariche (elettroni, protoni) in orbite circolari per mezzo di campi magnetici è, inoltre, estesamente usato nelle macchine acceleratrici in fisica nucleare.

2.18. PROCESSI OSCILLATORI

Vogliamo ora applicare il secondo principio della dinamica all'esame di alcuni processi, genericamente detti oscillatori, che si presentano in numerosi e importanti fenomeni fisici. Considereremo il comportamento di alcuni sistemi meccanici nei quali l'intervento di forze elastiche provoca il moto oscillatorio, ma le stesse considerazioni e conclusioni valgono in sistemi oscillatori di diverso tipo (per es. in circuiti elettrici oscillanti). Vogliamo considerare vari casi, corrispondenti a diverse condizioni nelle quali il sistema può trovarsi.

a. Oscillazioni libere (oscillatore armonico unidimensionale)

Si consideri un semplice sistema, come quello di figura 2.18a, costituito da un punto materiale P di massa m che può muoversi su un piano orizzontale privo di attrito e che può essere sollecitato da una forza, anche essa orizzontale, che una molla può esercitare su di esso. Un estremo della

⁽¹⁴⁾ La camera di Wilson è uno strumento usato per lo studio di particelle nucleari cariche: essa contiene aria sovrassatura di vapore d'acqua. Il passaggio delle particelle cariche veloci in tale mezzo produce la elettrizzazione di alcune molecole del mezzo (formazione di ioni) che successivamente funzionano da nuclei di condensazione del vapore sovrassaturo. La traiettoria delle particelle si rende quindi visibile come una successione di goccioline d'acqua.

molla è collegato a P , l'altro è fissato ad una parete verticale. Indichiamo con x la direzione dell'asse della molla, e con O la posizione di quiete del punto P su di esso. Se la molla viene allungata nella direzione di tale asse di un tratto x (positivo per allungamenti) al punto P è applicata una forza elastica di richiamo (18):

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

uguale e contraria a quella (\mathbf{F}^*) applicata dall'esterno per deformare la molla. Il punto resti in quiete nella nuova posizione 1 (fig. 2.18b, c). Si supponga ora di rimuovere la forza esterna \mathbf{F}^* . Il punto materiale prenderà a muoversi sotto l'azione della sola forza elastica di richiamo. Il secondo principio della dinamica si scrive (essendovi solo le componenti secondo x dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{F}):

$$(35) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx .$$

Il moto del punto P risulta essere rettilineo e caratterizzato da un'accelerazione sempre diretta verso la posizione di riposo O e proporzionale allo spostamento da essa x . Ne segue (cap. 1, par. 1.10) che il punto si muove di moto armonico intorno a O (oscillazioni libere). La equazione (oraria) che dà gli spostamenti, se si contano i tempi a partire dall'istante di rimozione della forza \mathbf{F}^* , è

$$(36) \quad x = A \cos \omega_0 t .$$

L'ampiezza A delle oscillazioni è pari allo spostamento iniziale del punto dalla posizione di riposo. La pulsazione delle oscillazioni libere risulta

$$(37) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

determinata dalla costante elastica k e dalla massa m del corpo.

b. Oscillazioni smorzate

Nel moto di un punto sollecitato da una forza elastica si presentano spesso resistenze passive (resistenze del mezzo in cui il punto si muove, attriti interni nel materiale elastico che realizza la forza di richiamo). Si supponga che una resistenza passiva proporzionale alla velocità sia presente nello schema dell'oscillatore precedentemente visto. In tal caso il II principio della dinamica si scrive:

$$(38) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

cioè l'*equazione differenziale* per il moto è

$$(39) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 .$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine; la soluzione è una funzione $x(t)$ che, inserita assieme alle sue derivate prima e seconda nel primo membro della (39), rende quest'ultimo pari al secondo membro. Nel caso di piccoli *coefficienti di smorzamento* b essa può

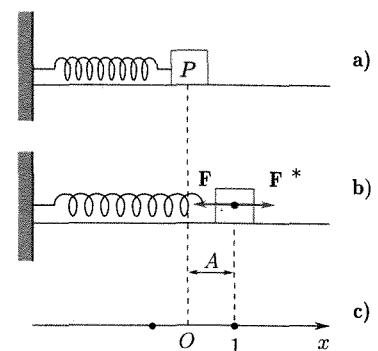


Fig. 2.18

*Pulsazione propria
di un oscillatore libero*

convenientemente porsi nella forma

$$(40) \quad x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega't + \varphi)$$

con

*Pulsazione
di un oscillatore libero
smorzato*

$$(41) \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

L'elongazione iniziale A e l'angolo di fase iniziale φ vanno stabiliti in base alle condizioni iniziali. La (40) si riduce alla (36) se $b = 0$.

Questa soluzione si presta per lo studio del moto finché $b^2 < 4mk$; ω' è allora reale e il punto oscilla intorno alla posizione di riposo, ma le deviazioni massime di ciascuna oscillazione si vanno attenuando con legge esponenziale. Nella figura 2.19 la curva 1 corrisponde a una tale situazione: le curve tratteggiate che passano per i punti di massima deviazione in una direzione o nell'altra sono le curve $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ e $-Ae^{-\frac{b}{2m}t}$: esse si attenuano tanto più rapidamente quanto maggiore è b . Il logaritmo del rapporto di due deviazioni massime successive nello stesso senso ($x_{\max,n}$, $x_{\max,n+1}$), prende il nome di decremento logaritmico ed è

$$(42) \quad \ln \frac{x_{\max,n}}{x_{\max,n+1}} = \frac{b}{2m}T$$

essendo T l'intervallo di tempo fra i passaggi del punto materiale per le posizioni dei due massimi successivi.

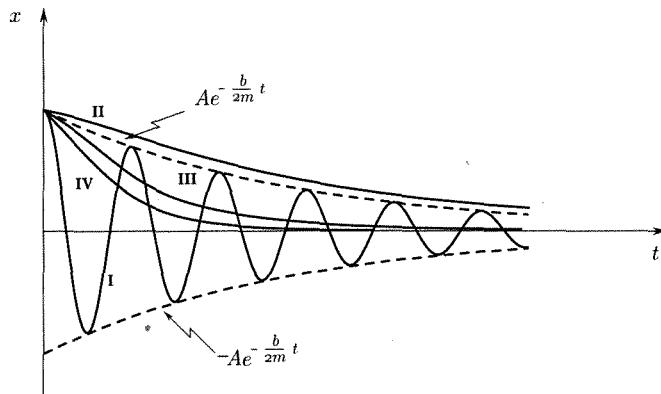


Fig. 2.19

Si osservi che il moto non è periodico e solo approssimativamente può considerarsi tale. Si noti, inoltre, che ω' è sempre minore della pulsazione delle oscillazioni libere $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ che il sistema seguirebbe in assenza di resistenza passiva.

Per valori di b molto grandi ($b^2 > 4mk$, cioè ω' complesso) la soluzione dell'equazione differenziale si può porre nella forma

$$(43) \quad x = e^{-\frac{b}{2m}t}(A_1 e^{\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t})$$

essendo

$$(44) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Le costanti A_1 , A_2 vanno determinate mediante le condizioni iniziali.

L'andamento della x è rappresentato dalle curve II, III in figura 2.19 che si riferiscono rispettivamente a due valori $b_{II} < b_{III}$: moti di questo genere si possono avere per es. quando il punto materiale si trova in un mezzo denso e viscoso come un olio.

Nel caso limite $b = 4mk$, la soluzione dell'equazione differenziale si può porre nella forma

$$(45) \quad x = e^{-\frac{b}{2m}t}(A_1 + A_2 t)$$

e corrisponde a un moto aperiodico in cui il punto tende a tornare nella posizione di equilibrio con moto unidirezionale il più rapidamente possibile (curva IV in figura). Questa condizione viene detta di smorzamento critico e si cerca di realizzarla in diversi casi di importanza pratica. Un esempio è quello dell'equipaggio mobile di strumenti di misura⁽¹⁵⁾. In questo caso si desidera che esso raggiunga la posizione di equilibrio rapidamente e senza oscillazioni: si regolano allora le resistenze passive che ostacolano il moto in modo da mettersi nelle condizioni di smorzamento critico.

c. Oscillazioni forzate. Risonanza

Un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi su un piano orizzontale, sia soggetto oltre che a una forza elastica di richiamo e a resistenze passive, come nei casi precedenti, anche a una forza nella direzione x , che vari sinusoidalmente nel tempo. La pulsazione ω della forza applicata sarà in genere diversa da quella $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ delle oscillazioni libere del punto sotto l'azione della forza elastica di richiamo e in assenza di resistenze passive.

Il secondo principio della dinamica si scrive in questo caso

$$(46) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \cos \omega t .$$

La soluzione generale di questa equazione risulta data dalla somma di due termini. Il primo è lo stesso termine della soluzione vista al punto b per un oscillatore smorzato; esso fornisce pertanto un addendo che si attenua (oscillando o no secondo il valore della costante b) e che diviene trascurabile dopo un certo intervallo di tempo dalla applicazione della forza al punto materiale, e costituisce quello che si dice il *transitorio*. Il secondo termine rappresenta invece lo stato di moto di regime del punto ed è quello che da noi qui viene esaminato. Esso ha la forma

$$(47) \quad x = BF \cos(\omega t - \varphi)$$

essendo

$$(48) \quad B = \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} .$$

Il fatto che la (47) sia una soluzione della (46) può controllarsi mediante sostituzione della (47) e delle sue derivate nella (46).

Il moto è periodico con la frequenza della sollecitazione impressa dall'esterno, che giustifica la dizione di *oscillazioni forzate* che viene dato

⁽¹⁵⁾ Per es. galvanometro: in tal caso l'equipaggio può oscillare ruotando intorno a un asse ma le considerazioni ora svolte valgono con le opportune variazioni delle grandezze che servono a descrivere il moto.

Nelle oscillazioni forzate l'ampiezza e la fase dipendono fortemente dal rapporto tra la frequenza di eccitazione e quella propria

a questo caso. L'ampiezza delle oscillazioni, cioè BF , dipende dal coefficiente di smorzamento b e dal rapporto $\omega/\omega_0 = \nu/\nu_0$ fra la frequenza delle oscillazioni impresse e quella delle oscillazioni libere del sistema ($\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{k/m}$). Nella figura 2.20 sono graficate le funzioni B e φ in funzione di ν/ν_0 per diversi valori di b . Per $\nu = 0$, qualunque sia b , è $B = 1/k$; ne segue $x = F/k$, cioè il punto materiale si sposta di quanto è richiesto perché la forza elastica ($-kxi$) equilibri la forza costante applicata.

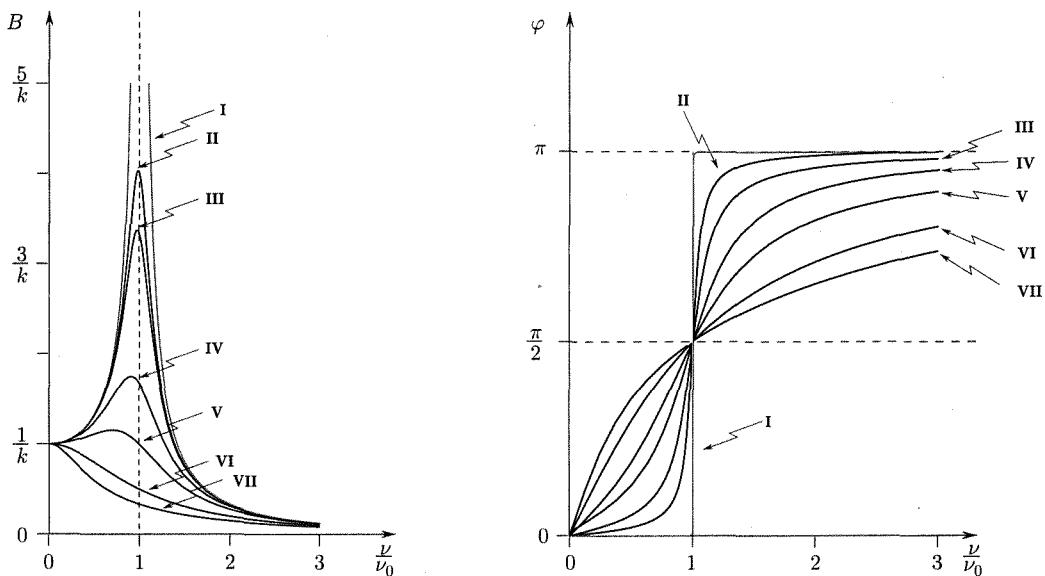


Fig. 2.20 Curve I: $b = 0$. Curve II-VII: b crescenti.

Al crescere di ν/ν_0 , se b è molto elevato ($b > \sqrt{2m\omega_0}$), B decresce con continuità. Per valori più piccoli di b , B può prendere valori maggiori di $1/k$ e la curva raggiunge un massimo per ν/ν_0 non molto più piccolo di 1. Il massimo è tanto più elevato quanto minore è b ; per b che tende a zero il massimo tende a infinito e ciò si verifica per $\nu/\nu_0 = 1$. La figura mostra anche come varia l'angolo di fase φ . Il presentarsi di un massimo nell'ampiezza delle oscillazioni che, secondo i valori di b , può essere varie volte più grande di F/k costituisce il fenomeno della risonanza meccanica, di grande importanza non solo nel caso ora trattato delle oscillazioni di un punto materiale, ma anche, e in particolare, nel caso più generale, a esso direttamente collegato, delle vibrazioni forzate di sistemi meccanici. Il fenomeno della risonanza meccanica si riscontra in molti importanti casi che interessano la meccanica e l'acustica; analoghi processi di risonanza si hanno in altri sistemi capaci di oscillare, quali circuiti elettrici, sistemi atomici ecc.

Il ponte sospeso sul fiume Takoma (USA), posto in vibrazione alla risonanza dalle folate di vento, raggiunse un'ampiezza di vibrazione che aumentò fino alla rottura del ponte.

d. Oscillatore armonico in due o tre dimensioni

Si consideri un punto materiale sospeso mediante tre coppie di molle come nella figura 2.21. Se il punto viene spostato dalla sua posizione di equilibrio O in un punto x_0, y_0, z_0 e lasciato a se stesso (con velocità $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$,

\dot{z}_0), esso si muove di un moto che può considerarsi risultante di tre moti componenti retti dalle relazioni

$$(49) \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_x x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -k_y y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = -k_z z \end{cases}$$

essendo k_x, k_y, k_z le costanti delle forze elastiche esercitate dalle molle disposte nelle direzioni degli assi x, y, z .

La soluzione delle (49) dà in generale

$$(50) \quad \begin{cases} x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \\ y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \\ z = A_z \cos(\omega_z t + \varphi_z). \end{cases}$$

Le sei costanti di integrazione ($A_x, A_y, A_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$) vanno determinate mediante le condizioni iniziali ($x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$).

Si hanno quindi tre moti armonici indipendenti con pulsazioni $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$, $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$, $\omega_z = \sqrt{k_z/m}$. Il moto avviene all'interno di un parallelepipedo con centro in O e spigoli $2A_x, 2A_y, 2A_z$. La traiettoria seguita dal punto materiale è in genere aperta e il moto non è periodico; perché sia tale è necessario che esista un comune multiplo di T_x, T_y, T_z , cioè che esistano tre numeri interi n_x, n_y, n_z tali che:

$$(51) \quad T_x n_x = T_y n_y = T_z n_z = T.$$

In tal caso il moto risultante è periodico con periodo T . Entro tale periodo il punto compie n_x oscillazioni complete nella direzione x , n_y nella direzione y , n_z nella direzione z . La relazione (51) può anche scriversi

$$(52) \quad \frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}.$$

Il caso di un oscillatore in due dimensioni è molto frequente e la figura della traiettoria è, per varie combinazioni di ω_x e ω_y , artistica. Queste figure prendono il nome di *figure di Lissajous*; possono ottenersi collegando al punto materiale uno stilo che scorra su una carta; meglio ancora possono essere ottenute sullo schermo di un tubo oscilloscopico. In questo caso il pennello elettronico viene fatto oscillare nelle direzioni x e y e la posizione è rivelata dalla intercettazione del pennello da parte dello schermo fluorescente del tubo. La figura 2.22 riporta alcune figure di Lissajous per rapporti ω_y/ω_x tra le frequenze 1, 1/2, 1/3, 2/3, per diversi angoli di sfasamento compresi fra 0 e π (la componente secondo l'asse x è in anticipo). Le dimensioni della figura nelle direzioni x ed y sono pari al doppio delle ampiezze di oscillazione. Simili figure si otterrebbero per sfasamenti maggiori. Nel caso che le due pulsazioni siano uguali, $\omega_x = \omega_y$, si ottengono le figure già illustrate al par. 1.13 del cap. 1.

Quando $\omega_x = \omega_y (= \omega_z)$ significa che $k_x = k_y (= k_z)$ e l'oscillatore si dice *isotropico*.

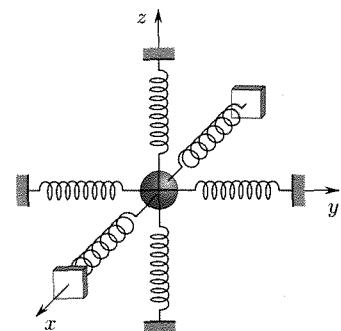


Fig. 2.21

Oscillatore
bidimensionale e figure di
Lissajous
della traiettoria

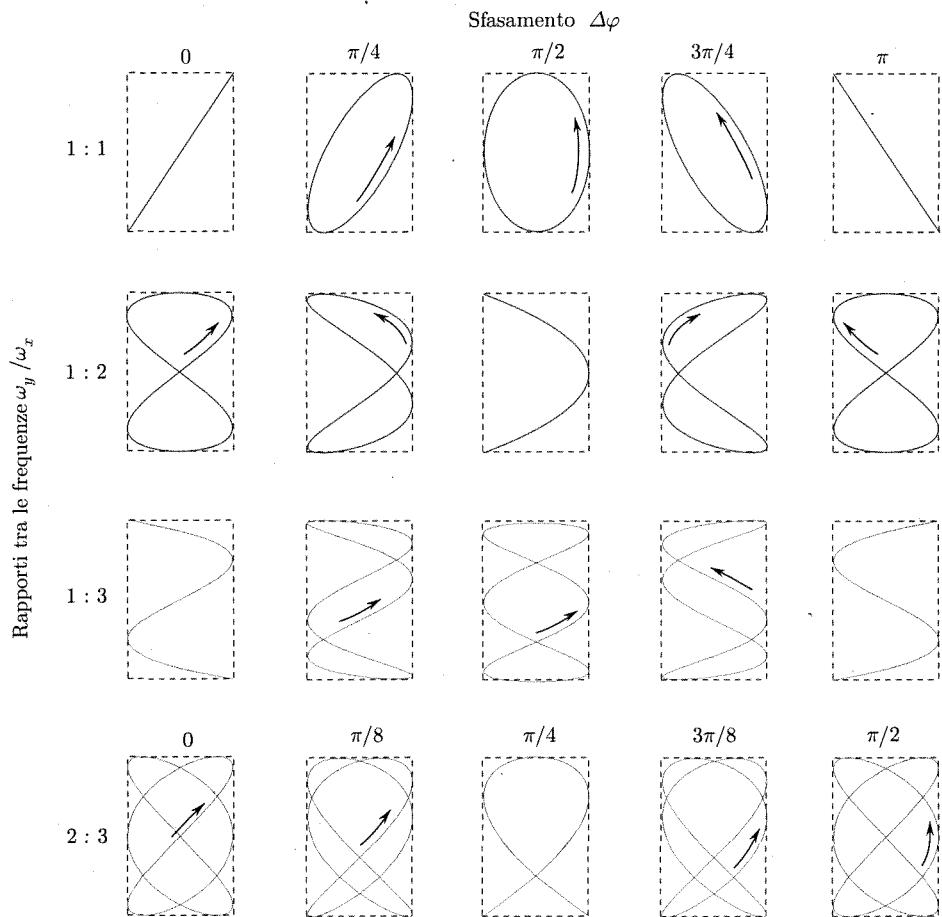


Fig. 2.22

2.19. PENDOLO SEMPLICE

Il pendolo semplice è un punto materiale pesante vincolato senza attrito su una traiettoria circolare disposta in un piano verticale. La maniera più semplice di realizzarlo è quella di sospendere una massa m a un punto fisso mediante un filo inestensibile e di massa trascurabile (fig. 2.23). Il punto materiale può trovarsi in quiete nella posizione O , soggetto alla

forza di gravità e alla reazione del vincolo (normale alla circonferenza che costituisce la traiettoria consentita nel caso di moto).

In un'altra posizione individuata dall'angolo θ , la reazione vincolare \mathbf{R}' , non equilibrata il peso, sicché al punto materiale è applicata una forza risultante, che tende a riportare il punto in O .

L'equazione fondamentale della dinamica si scrive

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{R}' = m\mathbf{a}. \quad (53)$$

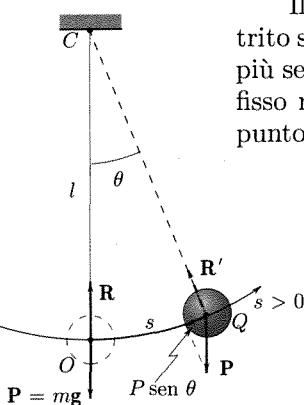


Fig. 2.23

Trattandosi di un moto su traiettoria prestabilita siamo solo interessati a ricavare l'equazione oraria. Perciò supponiamo di misurare le ascisse curvilinee a partire da O , che considereremo positive a destra. All'ascissa curvilinea è associato l'angolo θ di cui devia OQ rispetto a OO (positivo

per deviazioni a destra); sarà

$$s = l\theta$$

l essendo il raggio dell'orbita circolare o la lunghezza del filo.

La relazione che a noi interessa si ottiene proiettando la (53) sulla tangente orientata (nel verso delle s crescenti). Si osservi che, essendo R' normale alla traiettoria, la componente tangenziale della forza applicata si riduce alla componente della forza peso: quest'ultima inoltre ha sempre segno opposto a s e θ . Si ottiene quindi

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

(54) oppure

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale non lineare (per la presenza della funzione seno) non è facile da ottenersi e su di essa torneremo nel cap. 11, par. 11.2. Se peraltro si considerano piccoli spostamenti dalla posizione O , tali che $\sin \theta \cong \theta = s/l$, l'equazione si semplifica in

$$(55) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s$$

che è l'equazione di un moto armonico di periodo

$$(56) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

L'unica differenza tra questo moto e i moti armonici precedentemente considerati sta nel fatto che la traiettoria non è rettilinea. Ciò non ha influenza sulle caratteristiche del moto del punto sulla traiettoria, tranne per il fatto che esso, oltre all'accelerazione tangenziale, ha anche un'accelerazione normale. Se si proietta la (53) sulla normale alla traiettoria (orientata da Q verso C) si ha

$$(57) \quad R' - P \cos \theta = ma_n = m \frac{v^2}{l}.$$

Questa relazione mostra che la reazione del vincolo, oltre ad equilibrare la componente normale del peso, fornisce la forza (centripeta) che obbliga il punto a muoversi sulla traiettoria circolare.

La (56) mostra che il periodo del pendolo, purché le oscillazioni siano di piccola ampiezza, è indipendente dall'ampiezza stessa (*isocronismo delle piccole oscillazioni*).

Nel caso di oscillazioni non piccole del pendolo la soluzione della (54) fornisce per il periodo una espressione approssimata che dipende dal valore di θ_{\max}

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} + \frac{1}{64} \sin^4 \frac{\theta_{\max}}{2} + \dots \right).$$

Per un angolo $\theta_{\max} = \pi/12 = 15^\circ$ il periodo esatto differisce da quello dato dal primo termine della serie per meno dello 0,5 per cento.

Il pendolo semplice viene usato per scandire uguali intervalli di tempo in molti orologi e per effettuare la misura della accelerazione di gravità.

*Per piccole oscillazioni
il periodo di un pendolo
semplice è indipendente
dall'ampiezza
dell'oscillazione*

■ 2.20. SPAZIO DEGLI STATI DINAMICI O DELLE FASI

La trattazione di alcuni aspetti del moto di un sistema può essere a volte resa più semplice in uno spazio matematico, detto *degli stati dinamici o delle fasi*, formato da coordinate ortogonali in numero pari a quello delle grandezze necessarie a specificare lo stato dinamico istantaneo del sistema stesso.

La scelta di tali variabili spesso non è univoca e va fatta di volta in volta nella maniera più opportuna per la trattazione del singolo problema.

Se si considera un punto isolato che si muove in una dimensione, queste variabili sono due (posizione e velocità, oppure posizione e quantità di moto); se si considera un punto isolato che si muove in uno spazio xyz , le variabili di stato sono sei (posizione e velocità), e lo spazio delle fasi è a sei dimensioni. Nel caso che vi sia una interazione con l'esterno funzione del tempo, una nuova dimensione si aggiunge nello spazio delle fasi; se, invece, nel problema vi sono limitazioni alle posizioni che il sistema può prendere nello spazio delle fasi (per es., energia costante) è sufficiente considerare un sottospazio, con una dimensione di meno, dello spazio delle fasi.

Per introdurre con semplicità alcuni concetti, riferiamoci al caso delle piccole oscillazioni del pendolo semplice. L'equazione (55), facendo uno dell'angolo θ , diviene

$$(58) \quad l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta.$$

Per semplicità di notazione in questa trattazione che vuole studiare il comportamento delle soluzioni delle equazioni in esame, si può pensare di scegliere unità di misura e parametri in modo che grandezze come massa, lunghezza, accelerazione di gravità prendano valori unitari. La (58) diviene allora

$$(59) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta.$$

Le due variabili che specificano lo stato dinamico sono θ e la velocità angolare $\omega = \dot{\theta}$ (da non confondersi con la pulsazione fin qui usata), e queste sono le coordinate dello spazio delle fasi. La (59) può essere espressa come un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine, una per ciascuna delle variabili dello spazio delle fasi

$$(60) \quad \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned}$$

La soluzione generale di questo sistema si può porre nella forma generale

$$(61) \quad \begin{aligned} \theta &= A \cos \Omega t \\ \omega &= A \sin \Omega t \end{aligned}$$

ove l'ampiezza A dipende dalle condizioni iniziali. Si tratta di equazioni parametriche, che forniscono nel piano θ, ω la equazione di una circonferenza di raggio A (fig. 2.24a): è questa circonferenza il diagramma che rappresenta il moto nello spazio delle fasi o, come comunemente si indica, la *traiettoria* del moto nello spazio delle fasi. Si noti che nel presente caso, svolgendosi il moto con ampiezza costante (energia costante, sistema conservativo, vedi capitolo seguente) i punti dello spazio delle fasi accessibili al sistema costituiscono un insieme (la circonferenza) avente dimensioni inferiori di una unità rispetto al numero di dimensioni dello spazio delle fasi (una dimensione in luogo di due).

Un'importante caratteristica delle traiettorie nello spazio delle fasi per un sistema deterministico è la seguente: se si considerano due traiettorie, anche molto prossime fra loro a un certo istante, esse non si intersecano mai: ciò discende immediatamente dal fatto che lo stato del sistema a un istante definisce completamente gli stati precedenti e futuri, mentre un incrocio delle traiettorie corrisponderebbe alla presenza di una indeterminazione.

Descrizione del moto in uno spazio degli stati dinamici o delle fasi

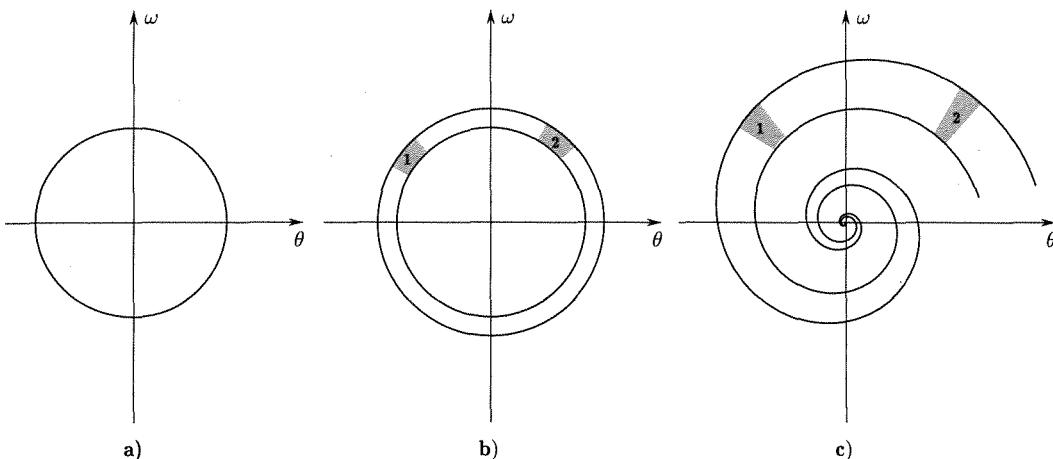


Fig. 2.24

Nei casi, come quello delle piccole oscillazioni del pendolo, di sistemi conservativi, lo spazio delle fasi gode di una particolarità legata alla conservazione dell'energia. Si considerino le traiettorie di vari punti vicini (corrispondenti ad ampiezze ed energie poco differenti); le posizioni occupate a un certo istante costituiscono un insieme che definisce un'area (1, in fig. 2.24b): al variare del tempo le traiettorie evolvono ma l'area occupata dalle corrispondenti posizioni viene conservata nel tempo (2, in fig. 2.24b) (teorema di Liouville).

Se invece si considera un pendolo smorzato che compia piccole oscillazioni le cui ampiezze decrescono con il tempo, le traiettorie nello spazio delle fasi sono spirali che gradatamente si avvicinano all'origine (stato di equilibrio, di quiete, fig. 2.24c). Si tratta di un sistema dissipativo e in questo caso non vale la proprietà, valida per i sistemi conservativi, di conservazione dell'area occupata dai punti rappresentativi di traiettorie vicine (1, 2 fig. 2.24c).

Quando le traiettorie nello spazio delle fasi al crescere del tempo convergono verso un ben determinato luogo di punti, questo luogo prende il nome di *attrattore*. Nel caso considerato del pendolo smorzato questo luogo si riduce a un punto ($\theta = 0$, $\omega = 0$) e l'attrattore corrisponde alla posizione di quiete.

Vedremo in seguito (cap. 11) esempi importanti di casi in cui è utile l'uso dello spazio delle fasi.

2.21. MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO A UN PUNTO E RISPETTO A UN ASSE

Per la trattazione di alcuni problemi del moto di punti materiali nei quali la traiettoria è curvilinea riesce a volte utile applicare il II principio della dinamica in una formulazione un po' diversa da quella finora usata o da quella (9) nella quale interviene la quantità di moto. Questa formulazione sarà inoltre molto utile nello studio del moto di sistemi di punti materiali.

Per giungere a questa nuova formulazione occorre introdurre due vettori: il momento di una forza rispetto a un punto e il momento della quantità di moto rispetto a un punto. Tale punto viene indicato spesso come polo. Data una forza \mathbf{F} applicata in P ⁽¹⁶⁾ e un punto qualsiasi O

⁽¹⁶⁾ Si considerano qui vettori applicati; a rigore essi andrebbero indicati specificando il punto di applicazione (P, \mathbf{F}) , (O, \mathbf{r}) . Qui, in genere, ometteremo la indicazione del punto di applicazione nella notazione, risultando essa chiara dal testo.

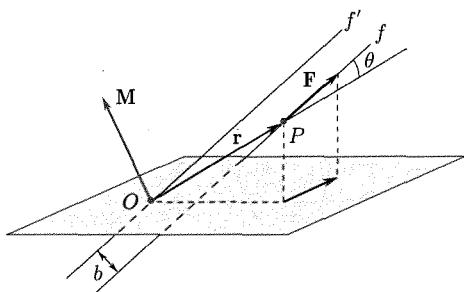


Fig. 2.25

Momento di una forza rispetto a un polo

(fig. 2.25), si definisce momento della forza \mathbf{F} rispetto a O il vettore

$$(62) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

essendo $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$.

L'intensità di tale vettore è

$$M = rF \sin \theta = Fb$$

essendo il *braccio* b la distanza di O dalla linea di azione di \mathbf{F} .

Il vettore momento è diretto normalmente al piano formato da \mathbf{F} ed O . Secondo la definizione, il vettore \mathbf{M} non cambia se il punto P di applicazione della forza viene fatto scorrere lungo la retta di applicazione f oppure se il punto O viene spostato sulla retta f' passante per O e parallela ad f . Inoltre se \mathbf{F} non è nullo, \mathbf{M} è nullo solo se il punto O è sulla linea di azione di \mathbf{F} ($b = 0$).

Se si considera una terna di assi con origine in O ed x, y, z sono le coordinate di P , le componenti di \mathbf{M} sono

$$(63) \quad M_x = yF_z - zF_y \quad M_y = zF_x - xF_z \quad M_z = xF_y - yF_x.$$

Se n forze sono applicate in P , cioè se $\mathbf{F} = \sum_1^n i\mathbf{F}_i$, il momento di \mathbf{F} è la somma dei momenti delle singole forze rispetto a O

$$(64) \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \sum_1^n i\mathbf{F}_i = \sum_1^n i\mathbf{M}_i.$$

Le dimensioni del momento di una forza nel SI o nel sistema CGS sono

$$[M] = [L^2 MT^{-2}]$$

e le relative unità sono N · m e dine · cm.

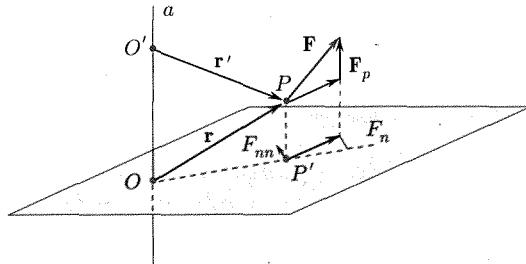


Fig. 2.26 Il momento assiale di \mathbf{F} rispetto alla retta a è indipendente dalla scelta del polo O e dipende solo dai componenti di \mathbf{r} normale ad a e di \mathbf{F} normale ad a e a \mathbf{r} : $M_a = OP' \cdot F_{nn}$.

Supponiamo ora di avere una forza \mathbf{F} applicata in un punto P ed una retta orientata (asse) a (fig. 2.26). È possibile vedere che comunque si scelga un punto su a , e comunque si sposti il punto di applicazione della \mathbf{F} lungo la sua linea di azione, la proiezione ortogonale su a del momento di \mathbf{F} rispetto al punto scelto di a (componente ortogonale di tale momento secondo a) è sempre la stessa. Questa proiezione (componente ortogonale), M_a , è quindi legata esclusivamente a \mathbf{F} e alla posizione della retta orientata

rispetto alla linea di azione di \mathbf{F} ; essa prende il nome di *momento della forza \mathbf{F} rispetto alla retta orientata a* , o momento assiale di \mathbf{F} rispetto ad a .

Per vedere quanto detto, si consideri un punto di a diverso da O , come O' . Il momento di \mathbf{F} rispetto ad O' sarà

$$(65) \quad \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{O}'\mathbf{O} + \mathbf{r}) \times \mathbf{F} = \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

La proiezione di tale vettore lungo la a è ancora la proiezione M_a del vettore

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

giacché il vettore $\mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F}$ è diretto normalmente a $\mathbf{O}'\mathbf{O}$, cioè ad a , e ha quindi componente nulla su a .

Inoltre, si decomponga ora \mathbf{F} nei due vettori parallelo \mathbf{F}_p e normale \mathbf{F}_n ad a . Il momento di \mathbf{F} rispetto a un punto O di a è pari alla somma dei momenti di \mathbf{F}_p ed \mathbf{F}_n . Il primo momento normale a \mathbf{F}_p , e quindi ad a , non contribuisce alla proiezione ortogonale del momento di \mathbf{F} secondo la a , cioè M_a . Si può quindi dire che la proiezione lungo la retta orientata a del momento di \mathbf{F} rispetto a O (e a qualsiasi punto O' appartenente alla retta a), cioè M_a , è pari alla proiezione del momento rispetto a O del componente \mathbf{F}_n della \mathbf{F} normale ad a .

Momento di una forza rispetto a un asse

2.22. MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

In maniera analoga al caso di una forza si definiscono il momento del vettore quantità di moto rispetto a un punto e il momento della quantità di moto rispetto a una retta orientata (asse).

La quantità di moto di un punto materiale P all'istante t sia rappresentato dal vettore $\mathbf{p} = mv$ applicato nella posizione assunta dal punto materiale. Preso un punto (polo) O , il momento della quantità di moto rispetto a O è il vettore

$$(66) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Se il vettore \mathbf{p} si immagina decomposto nei vettori mv_r nella direzione di \mathbf{r} e mv_n nella direzione normale a \mathbf{r} (fig. 2.27)

$$(67) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r} \times mv_r + \mathbf{r} \times mv_n = \mathbf{r} \times mv_n$$

giacché \mathbf{r} e \mathbf{v}_r sono paralleli.

L'intensità di \mathbf{b} è

$$(68) \quad b = mr v_n.$$

Momento della quantità di moto rispetto a un punto

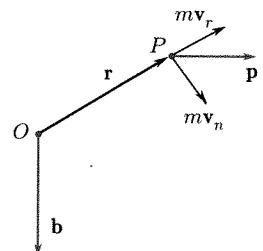


Fig. 2.27

Se si considera il caso particolare in cui $v_r = 0$, il moto del punto all'istante considerato è di semplice rotazione intorno a O . La velocità angolare istantanea⁽¹⁷⁾ indicata con $\omega(t)$ è un vettore normale al piano determinato da O e \mathbf{v} , orientato nel verso dal quale si vede \mathbf{v} ruotare in verso antiorario e ha intensità $\omega = v/r$. Come si

⁽¹⁷⁾ Nel caso in cui la direzione di ω cambi con il tempo, la definizione del vettore richiede una trattazione più approfondita di quella da noi usata al cap. 1, par. 1.12 (P.G. Bordoni, *Lezioni di meccanica razionale*, cit.).

vede ω e \mathbf{b} sono paralleli e orientati nello stesso verso. Si ha per le intensità e per i vettori

$$(69) \quad \mathbf{b} = mr^2\omega.$$

Questa espressione mostra come nei problemi in cui si ha la rotazione del punto materiale intorno a un punto geometrico O il vettore momento della quantità di moto assuma una forma particolarmente significativa. Esso ha una forma analoga a quella della quantità di moto per un punto materiale in moto traslatorio: al posto della velocità \mathbf{v} interviene la velocità angolare ω e a rappresentare l'inerzia al posto di m v'è il prodotto mr^2 che prende il nome di *momento d'inerzia* del punto materiale rispetto a O .

Le componenti di \mathbf{b} rispetto a un sistema di assi cartesiani con origine in O , essendo x, y, z le coordinate della posizione del punto materiale e le componenti di \mathbf{r} , sono

$$(70) \quad b_x = m(yv_z - zv_y) \quad b_y = m(zv_x - xv_z) \quad b_z = m(xv_y - yv_x).$$

Le dimensioni di b in SI e nel sistema CGS sono

$$[b] = [L^2 MT^{-2}]$$

da cui conseguono le relative unità.

*Momento della quantità
di moto rispetto
a un asse*

Il concetto di momento assiale della quantità di moto rispetto a una retta orientata a , si ottiene estendendo al vettore quantità di moto quanto si è detto per il caso del momento di una forza rispetto a un asse.

■ 2.23. TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO. CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per un punto materiale soggetto alla forza \mathbf{F} si è stabilita (in un sistema di riferimento inerziale) la relazione

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Se si prende in considerazione un punto O (polo) fisso nel sistema di riferimento adottato e si indica con \mathbf{r} ⁽¹⁸⁾ il vettore (applicato) \mathbf{OP} , la relazione precedente si può modificare moltiplicando i due membri vettorialmente a sinistra per \mathbf{r}

$$(71) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

D'altra parte se si differenzia la (66)

$$(72) \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

osservando che in tale relazione il primo termine del secondo membro è nullo perché i due vettori $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ sono paralleli, si trova

(¹⁸) Andrebbe scritto a rigore (O, \mathbf{r}) .

dalle (71) e (72) che, in un sistema di riferimento inerziale, è

$$(73) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

In un sistema inerziale la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un punto materiale rispetto a un punto fisso è pari al momento della forza totale agente su di esso calcolato rispetto al medesimo punto.

La (71) può essere generalizzata considerando il caso in cui il punto O , rispetto al quale si calcolano i momenti, non sia fisso, ma sia invece dotato di una velocità \mathbf{v}_0 nel sistema di riferimento inerziale adottato. In tal caso, nella (72) il termine $d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{p}$ non si annulla identicamente in quanto la derivata $d\mathbf{r}/dt$ è pari a $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ e sarà quindi

$$[72'] \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = -\mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Si trova allora:

$$(74) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}.$$

Se la (73) viene proiettata su una retta orientata fissa a per il punto fisso O si ha

$$(75) \quad M_a = \frac{db_a}{dt}$$

cioè: *in un sistema inerziale, la derivata rispetto al tempo del momento assiale della quantità di moto di un punto materiale rispetto a una retta orientata fissa è a ogni istante pari al momento, rispetto alla medesima retta, della forza totale agente su di esso.*

Prende il nome di impulso elementare angolare il prodotto

$$\mathbf{M} dt$$

e per la (73) esso vale

$$(76) \quad \mathbf{M} dt = db$$

se i momenti sono calcolati rispetto a un *punto fisso*. L'impulso angolare in un intervallo di tempo finito è pari alla variazione del momento della quantità di moto:

$$(77) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \Delta \mathbf{b}.$$

Nel caso particolare che sia nullo il momento della somma delle forze applicate al punto materiale rispetto a un punto fisso O , la (73) fornisce

$$(78) \quad \mathbf{b} = \text{cost}$$

cioè il momento della quantità di moto del punto materiale calcolato rispetto a O resta costante (*teorema di conservazione del momento della quantità di moto*).

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del teorema del momento della quantità di moto.

Rispetto a un polo fisso il momento delle forze è pari alla derivata temporale del momento della quantità di moto

Rispetto a un polo mobile il bilancio tra momento delle forze e della quantità di moto tiene conto della velocità del polo

Se è nullo l'impulso angolare, si mantiene costante il momento della quantità di moto

Il momento delle forze si annulla nel caso di forze centrali: si conserva la velocità areolare

Moto di un punto soggetto a forza centrale

Un problema dinamico di grande interesse che può essere utilmente trattato con il precedente teorema è quello del moto di un punto soggetto a una forza diretta sempre verso un punto fisso (*forza centrale*). Questo punto fisso O può essere scelto come punto rispetto al quale calcolare i momenti. Poiché, in tal caso, il momento della forza \mathbf{F} che agisce sul punto materiale è zero, si ha

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = 0 \implies \mathbf{b} = \text{cost.}$$

Durante il moto, quindi, il momento della quantità di moto calcolato rispetto a O si mantiene costante. Questo porta di conseguenza innanzitutto che il moto deve essere piano giacché se

$$\mathbf{b} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

deve restare inalterato, \mathbf{r} e \mathbf{v} devono rimanere nello stesso piano. Se inoltre si considera un intervallo di tempo dt (fig. 2.28)

$$\mathbf{b} dt = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} dt = mr \times d\mathbf{S} = 2m d\mathbf{S}$$

e

$$(79) \quad \mathbf{b} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \text{cost}$$

essendo $d\mathbf{S}/dt$ la velocità areolare (cap. 1, par. 1.16). Si ritrova quindi che la *velocità areolare nei moti centrali è costante*.

Queste deduzioni si sono fatte senza specificare nulla di \mathbf{F} tranne che sia diretta verso un punto fisso.

Esempio 1

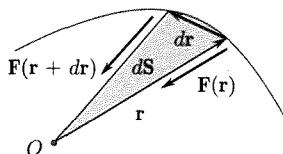


Fig. 2.28

Problemi di moto di punti soggetti a forze centrali si incontrano spesso in fisica: moto dei pianeti sotto la forza gravitazionale esercitata dal Sole, azione elettrica esercitata da un nucleo di un atomo su un elettrone, moto di un protone soggetto alla forza repulsiva esercitata da un altro nucleo.

Si può assicurare che sono appunto l'importanza di problemi di punti soggetti a forze centrali e la frequenza con cui essi ricorrono nella fisica, le ragioni che rendono particolarmente utile il concetto di momento della quantità di moto di un punto materiale.

Consideriamo un punto materiale m che si muova di moto circolare uniforme con velocità v_1 su una traiettoria di raggio r_1 : esso sia legato a un filo che, passando per un foro O praticato su un piano orizzontale privo di attrito (fig. 2.29), venga

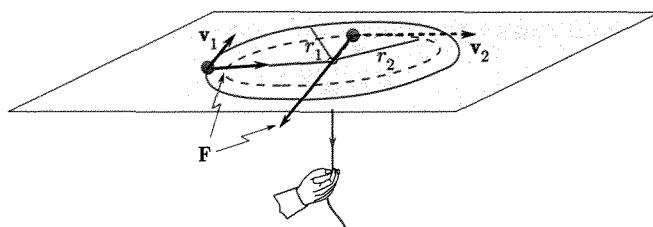


Fig. 2.29

tenuto dalla mano di una persona; la tensione del filo fornisce l'accelerazione centripeta. Il filo venga tirato in modo che il raggio della traiettoria si riduca al valore r_2 . Si vuole determinare la velocità con cui il punto si muoverà sulla nuova orbita.

Se si considerano i momenti rispetto a O , si ha $M = 0$ e quindi $\mathbf{b} = \text{cost}$. Si ottiene quindi per le intensità

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

quindi per le velocità

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Esempio 2. Raggi delle orbite elettroniche nell'atomo di Bohr

La ricerca di una spiegazione nella composizione (spettri) della luce emessa da sistemi atomici a temperature sufficientemente alte è stata per vario tempo un problema di capitale importanza per la fisica: la fisica classica, cioè la meccanica classica e l'elettromagnetismo classico quali erano stati sviluppati fino all'inizio di questo secolo non erano sufficienti a dare una spiegazione. Lo studio di alcuni fenomeni, quali l'emissione di radiazione (luce) da corpo nero (Planck, 1900), l'effetto fotoelettrico (Einstein, 1905), avevano mostrato l'utilità di ammettere che l'energia della radiazione è creata o assorbita in quantità multiple di quantità elementari (quanti di luce).

Collegandosi a queste ricerche e ad altre (Rutherford, 1911) che avevano mostrato che gli atomi hanno quasi tutta la massa carica positivamente e concentrata in una piccola regione nel loro interno, nel 1913 Niels Bohr propose uno schema per l'atomo di idrogeno e un meccanismo di emissione della radiazione che sembravano adatti a spiegare i risultati sperimentali. Tale proposta di Bohr è stata di grande importanza per lo sviluppo successivo della fisica atomica.

Nello schema proposto da Bohr l'atomo di idrogeno (il più leggero ed il più semplice degli elementi) sarebbe costituito da un nucleo positivo in cui è concentrata quasi tutta la massa dell'atomo e da un solo elettrone che vi ruota intorno su un'orbita circolare⁽¹⁹⁾ (fig. 2.30). Egli ammise⁽²⁰⁾ inoltre che non tutte le possibili orbite circolari siano consentite all'elettrone, ma solamente quelle per le quali il momento della quantità di moto, calcolato rispetto al centro dell'orbita, risulti multiplo intero di $h/2\pi$ essendo h una costante già usata da Planck⁽²¹⁾ ($h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Js).

È interessante calcolare i raggi delle orbite consentite. L'elettrone, quando si muove su un'orbita di raggio r , si muove di moto circolare uniforme, sotto l'azione della forza attrattiva che scambia con il nucleo, la quale determina l'accelerazione normale. La forza attrattiva, secondo la (20), ha l'intensità

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

Per il secondo principio, tenendo conto del fatto che l'accelerazione è tutta normale:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e a = m_e \frac{v^2}{r}.$$

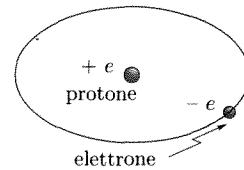


Fig. 2.30

⁽¹⁹⁾ Per la neutralità della materia, e quindi dell'atomo, il valore della carica positiva del nucleo dell'atomo di idrogeno deve essere uguale a quello della carica negativa dell'elettrone: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ coulomb. I successivi studi hanno mostrato che il nucleo dell'idrogeno è costituito da una sola particella elementare, il protone; nuclei di altri elementi sono formati da più protoni e da altre particelle neutre (neutroni). La massa del protone è $m_H = 1,6725 \cdot 10^{-27}$ kg pari a 1836,1 volte quella dell'elettrone $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg.

⁽²⁰⁾ Questa fortunata ipotesi, posta con grande intuito da Bohr, è stata in seguito giustificata dalla meccanica quantistica, che da questi studi prese le mosse.

⁽²¹⁾ Il meccanismo dell'emissione e dell'assorbimento di energia raggianti sarebbe, secondo le ipotesi di Bohr, legato al passaggio dell'elettrone da un'orbita consentita a un'altra.

Si ha quindi, essendo $b = mvr$

$$\frac{b^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$r = \frac{b^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2}.$$

Ponendo

$$(80) \quad b_n = n \frac{h}{2\pi}$$

con $n (= 1, 2, 3, \dots)$ un numero intero, si ha

$$(81) \quad r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2 \pi} n^2.$$

Sostituendo i valori numerici per i parametri ϵ_0 (vedi par. 2.15), h , e , m_e si trova per il raggio dell'orbita più piccola ($n = 1$) il valore

$$r_1 = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

cioè 0,528 Å. Il diametro dell'atomo di idrogeno è di circa 1 Å: è questo l'ordine di grandezza delle dimensioni atomiche.

2.24. DESCRIZIONE DEL MOTO IN SISTEMI NON INERZIALI

Nell'introdurre il I principio della dinamica (par. 2.1) si è detto che la sua validità è limitata al caso di sistemi (osservatori) inerziali, sistemi cioè che siano essi stessi, come il punto materiale in considerazione, liberi, non soggetti a forze esterne. In realtà, non è facile né sempre possibile verificare se un sistema abbia, oppure no, interazioni con l'esterno, l'unica ipotesi presumibile a tal fine essendo quella che il sistema si trovi a distanze grandissime, tendenti all'infinito, da qualunque altro oggetto materiale. La stessa dizione di sistema "solidale con le stelle fisse" in se stessa priva di senso per l'inesistenza di stelle ferme le une rispetto alle altre, sottintende la condizione sopra accennata di lontananza del sistema da oggetti materiali. In realtà, la migliore definizione di sistema inerziale è quella stessa implicita nell'enunciato del I principio; è *inerziale ogni sistema di riferimento nel quale un punto materiale non soggetto a forze perseveri nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme con velocità costante*.

È in questa stessa logica di enunciato definitorio di sistema inerziale che il I principio acquista autonomia dal II principio, non riducendosi a un caso particolare di quest'ultimo, per cui è nulla l'accelerazione di un punto ($\mathbf{v} = \text{costante}$), quando è nulla la forza agente su di esso. A questo punto, tuttavia, il problema si sposta dalla definizione di sistema inerziale a quello di punto non soggetto a forze esterne. Resta cioè il problema di come accertarsi che un punto materiale non sia sottoposto a forze esterne o, alternativamente, di come ci si possa accettare che il moto accelerato di un punto sia dovuto alla presenza di reali forze agenti su di esso o alla scelta di un sistema non inerziale per la descrizione del moto.

Se un punto materiale, in quiete in un veicolo che si muove di moto rettilineo uniforme (sistema inerziale) rispetto a terra, viene a un certo punto accelerato, per la frenata o per l'inizio di una curva del veicolo (sistema non inerziale), come si può stabilire che l'accelerazione sia dovuta alla scelta di un sistema non inerziale o alla reale presenza di forze esterne agenti sul punto? Non si può, infatti, a priori, preferire il sistema solidale

I raggi possibili delle orbite elettroniche dell'atomo di idrogeno

Legame
e concatenazione
tra i tre principi
della dinamica

col terreno piuttosto che quello solidale col veicolo per la individuazione di un sistema inerziale.

A questo punto è il terzo principio che soccorre alla definizione di sistema inerziale dedotta dal primo, in quanto esso certifica se il moto accelerato di un punto è dovuto a reali forze o è dovuto alla scelta di un sistema di riferimento non inerziale. E, infatti, se sono forze reali a determinare l'accelerazione del punto nel sistema prescelto, a esse debbono corrispondere reazioni applicate su punti diversi da quello materiale in questione, uguali e contrarie al prodotto *ma* della massa per l'accelerazione del punto, sulla stessa retta di applicazione di *ma*. Nel caso dell'accelerazione sperimentata dal punto all'interno del veicolo quando questo inizia la fase di frenata o di curva, un osservatore non sarà comunque in grado di trovare le reazioni a *ma* e dovrà concludere che le forze cui il punto sembra essere sottoposto non sono dovute ad altri mezzi materiali, ma che in tanto compaiono in quanto la descrizione del moto è effettuata da un sistema *non inerziale*. A tali forze si dà il nome di forze apparenti o fittizie: esse *non* soddisfano il terzo principio della dinamica, che resta peraltro assolutamente valido per le forze che compaiono nei sistemi inerziali, cui per contrapposizione si dà il nome di forze reali.

Il legame fra le due descrizioni (nei sistemi inerziale e non) appare chiaro ponendo mente alla relazione [cap. 1, eq. (102)] che lega le accelerazioni assolute e relative per un punto materiale in due sistemi di riferimento in moto relativo.

Detta \mathbf{a}_a l'accelerazione misurata dall'osservatore nella terna inerziale ed \mathbf{a}_r quella nella terna non inerziale, l'eq. (102) del cap. 1 si scrive:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

da cui

$$m\mathbf{a}_a = m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_c.$$

Per l'osservatore nella terna inerziale la accelerazione osservata è dovuta alla azione di forze reali (\mathbf{F})

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_a.$$

Per l'osservatore nella terna non inerziale che misura l'accelerazione \mathbf{a}_r del punto e che voglia ancora spiegare le sue osservazioni mediante il II principio, può essere necessario considerare come causa del moto la somma dei termini

$$(82) \quad \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_t) + (-m\mathbf{a}_c) = m\mathbf{a}_r$$

e cioè oltre alla forza reale, una forza apparente $-m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c$.

Naturalmente le due descrizioni del processo nei due sistemi (inerziale e non inerziale) sono equivalenti. In molti casi tuttavia è più opportuno considerare il sistema di riferimento non inerziale.

Tornando al caso precedentemente già ipotizzato, si consideri un veicolo che proceda in frenata su traiettoria rettilinea: un viaggiatore (punto materiale) sperimenta un'azione che si oppone alla variazione del moto e che manifesta l'inerzia del punto materiale: una forza uguale e contraria deve essere applicata per mantenere il viaggiatore fermo nel sistema in moto accelerato. La forza apparente è $-m\mathbf{a}_t$ essendo \mathbf{a}_t l'accelerazione di trascinamento del sistema in moto rispetto a un sistema inerziale.

Le forze apparenti non hanno reazione: esse compaiono nei sistemi non inerziali

2.25. FORZE APPARENTI: LA FORZA CENTRIFUGA

Si consideri ora un punto materiale di massa m che in un sistema inerziale (O, x, y, z) (fig. 2.31) si muova di moto circolare uniforme con centro in Ω su un piano orizzontale. La velocità con la quale il punto si muove ha intensità v costante ma cambia continuamente di direzione. Abbiamo già visto che a ciò corrisponde una accelerazione centripeta (diretta verso Ω) di valore

$$(83) \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

essendo ω l'intensità della velocità angolare.

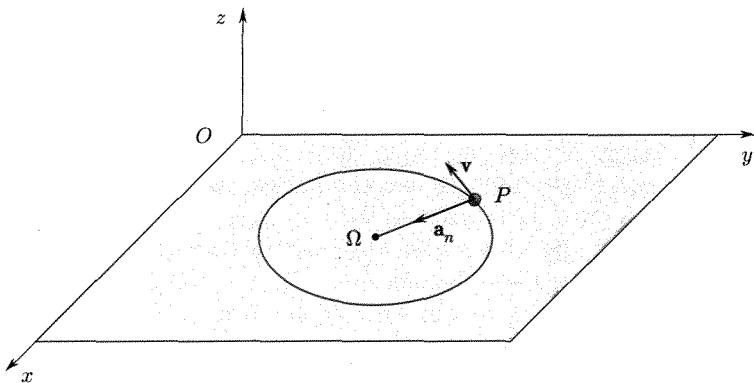


Fig. 2.31

Secondo quanto si è detto a proposito del II principio della dinamica, a questa accelerazione corrisponde una forza centripeta, ma_n , fornita da un opportuno vincolo, agente sul punto materiale e che costringe il punto stesso a restare sulla traiettoria circolare: se in un certo istante essa venisse eliminata, si osserverebbe il punto materiale continuare il moto con velocità vettoriale costante (moto rettilineo uniforme).

Vediamo ora come appare lo stesso moto a un osservatore che si muova assieme al punto materiale. Si consideri (fig. 2.32) una terna con origine in Ω , assi ξ, η, ζ , nel piano xy , asse ζ parallelo a z , la quale ruoti intorno all'asse ζ con velocità angolare ω .

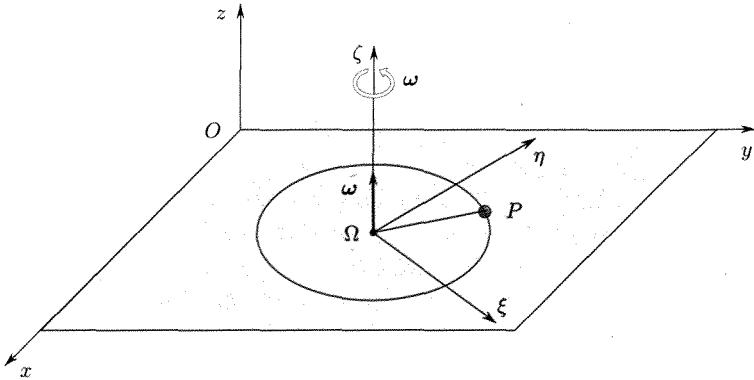


Fig. 2.32

Una tale terna di riferimento non è inerziale, giacché non si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al sistema inerziale (x, y, z),

z), quindi si potrà ancora usare la (5) purché accanto alle forze *reali*, presenti nella descrizione nel sistema inerziale, si considerino quelle *apparenti* o *fittizie* che praticamente tengono conto della natura del sistema di riferimento. Un osservatore infatti che si trovasse nel sistema $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ e che fosse fermo in esso, vedrebbe il punto materiale P sempre nella stessa posizione nel piano $\xi\eta$. Se egli quindi volesse applicare i principi della dinamica dovrebbe assicurare che la forza totale agente sul punto è nulla.

Se ora egli sopprimesse la forza centripeta (eliminando il vincolo che la realizza), vedrebbe il punto muoversi e dedurrebbe che esso è soggetto a una forza: questa forza che *appare* agire sul punto materiale quando si elimina l'azione della forza centripeta, è diretta lungo la ΩP nel verso contrario a quella della forza centripeta e ha intensità $m\omega^2 r$. Essa si chiama forza centrifuga: nel sistema non inerziale dell'osservatore la forza centrifuga è una forza, *apparente*, che deve essere introdotta per applicare in esso i principi della dinamica. La sua introduzione equivale nei riguardi degli effetti dinamici a tener conto del moto di rotazione del sistema che l'osservatore posto nel sistema $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ non potrebbe rilevare. La forza centrifuga, considerata nel sistema non inerziale, è *applicata al punto materiale*. Se si osserva che $\mathbf{a}_t = -\omega^2 \mathbf{r}$ è l'accelerazione di trascinamento relativa al punto P nel moto di rotazione del sistema $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ (cap. 1, par. 1.18) rispetto al sistema inerziale, la forza centrifuga risulta essere pari a $-m\mathbf{a}_t$.

Lo spazio nel sistema rotante $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ è, per ciò che si è detto, tale che una massa m posta in un punto qualsiasi è sottoposta a una forza centrifuga $m\omega^2 r$: esso è cioè sede di un campo di forze (centrifughe).

Una interessante applicazione di queste considerazioni si ha nelle centrifughe per la separazione di particelle di massa diversa sospese in un liquido.

In un liquido in rotazione le particelle in movimento sperimentano sostanzialmente due tipi di forze: quelle centrifughe, apparenti, dirette radialmente verso l'esterno, e quelle vischiose, di verso opposto alla velocità. Particelle di massa diversa vengono così ad acquisire accelerazioni, e poi velocità di regime, diverse, disponendosi in zone diverse.

Tale separazione potrebbe essere fatta anche nel campo della gravità; nel caso peraltro che le particelle abbiano piccole masse, il processo di sedimentazione sarebbe molto lento. Se la sospensione viene posta in un cilindro in rotazione intorno al proprio asse (centrifuga), sono già sufficienti velocità angolari relativamente basse per produrre forze centrifughe molto superiori alle forze di gravità (accelerazioni centrifughe molto maggiori di g) sicché la separazione delle particelle avviene rapidamente.

Se per es. la centrifuga compie 7.200 giri al minuto (120 giri al secondo) l'accelerazione centrifuga ha intensità:

$$\omega^2 r = (2\pi \cdot 120)^2 \cdot r = 5,6 \cdot 10^5 r.$$

Se $r = 0,2 \text{ m}$

$$\omega^2 r = 1,12 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$$

cioè circa 10.000 volte l'accelerazione g .

Oggi si costruiscono centrifughe ad alta velocità (ultracentrifughe) che compiono circa 100.000 giri/minuto; in alcune piccole centrifughe sono stati raggiunti 1.300.000 giri/minuto. Si ottengono così accelerazioni centrifughe milioni di volte maggiori di g .

Un'altra applicazione delle forze centrifughe si ha nei misuratori e regolatori di velocità (velocimetro di Watt, fig. 2.33). Un albero in rotazione trascina due masse uguali P, P' fissate all'estremità di due aste incernierate in A . Altre due aste sono incernierate alle estremità rispettivamente B e D mentre l'altro estremo è legato a un collare C che può scorrere sull'asse ruotante.

La forza centrifuga è la forza apparente che un osservatore in un sistema non inerziale in rotazione vede applicata su ogni punto solidale in quiete nel sistema

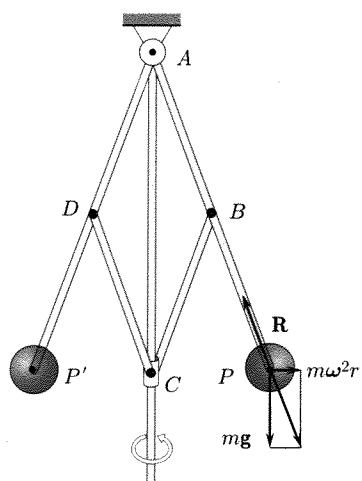


Fig. 2.33

Nel sistema in rotazione, non inerziale, ciascuna massa è soggetta a tre forze: peso, forza centrifuga e reazione R diretta lungo il vincolo: esse devono avere risultante nulla quando la velocità di rotazione è costante perché le masse siano in quiete.

Al variare della velocità di rotazione varia la forza centrifuga e deve variare la reazione vincolare per ristabilire l'equilibrio delle forze; questo implica che le inclinazioni delle aste AB e AD varino. Di conseguenza il collare C deve alzarsi o abbassarsi sull'albero secondo che la velocità aumenti o diminuisca: la sua posizione può essere presa come misura della velocità di rotazione (tachimetro) o anche può comandare il sistema di regolazione della velocità dell'albero. Si osservi che per un osservatore al di fuori del sistema in rotazione il moto delle masse, quando la velocità di rotazione è costante, è un moto circolare uniforme e la risultante del peso e della reazione fornisce la forza centripeta ($-mv^2/r$) che determina il moto.

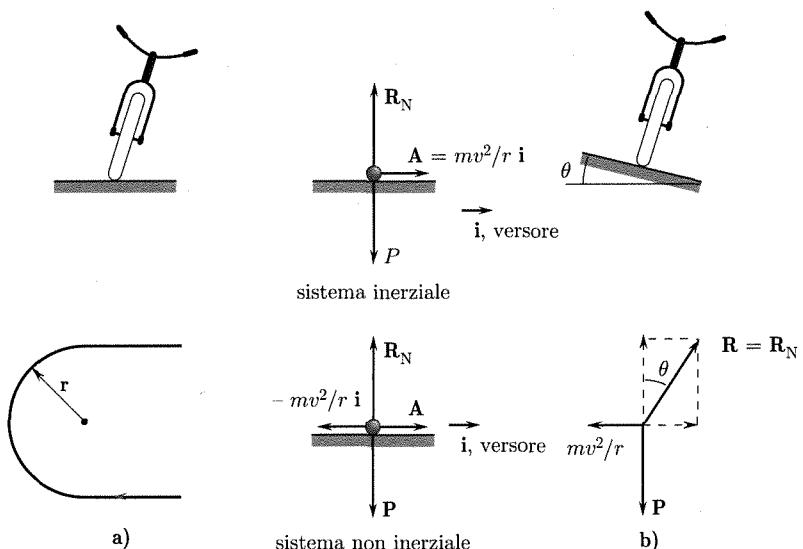


Fig. 2.34 Sistema inerziale: la risultante delle forze coincidente con A , produce l'accelerazione v^2/r . Sistema non inerziale: la forza centrifuga $-mv^2/r$ equilibra la risultante A delle forze reali. La forza complessiva è nulla e il punto ha accelerazione nulla.

Le forze centrifughe intervengono quando un veicolo aborda una curva e tendono a spingerlo all'esterno della curva. Per tenere il veicolo in curva è necessario che una forza centripeta sia applicata al veicolo stesso. Tale forza è data dalla reazione della strada; questa reazione quindi oltre a fornire la componente verticale che equilibra il peso del veicolo, deve avere una componente orizzontale, centripeta. Se la strada è orizzontale la reazione deve quindi essere inclinata rispetto alla normale (verticale) e la componente tangenziale (orizzontale) è possibile per l'esistenza dell'attrito fra veicolo e strada (fig. 2.34a): se la velocità in curva supera il valore in corrispondenza del quale la forza centripeta non può essere bilanciata dalla forza d'attrito, il veicolo sbanda. Per questa ragione le strade in curva vengono rialzate verso l'esterno della curva: così si fa in modo che in corrispondenza alla velocità più frequentemente usata la reazione del veicolo risulti normale alla strada.

Si ha (fig. 2.34b)

$$\tan \theta = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg}.$$

Le forze centrifughe hanno molto interesse in tutti i problemi in cui le masse sono tenute in rotazione (motori elettrici ecc.).

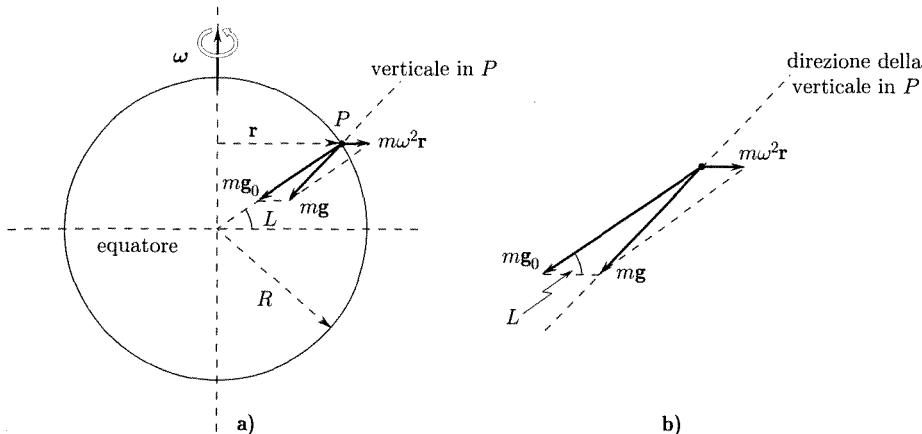


Fig. 2.35

Vogliamo infine esaminare il contributo alla forza peso della forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra. Come si è già osservato (cap. 2, par. 2.10), la forza peso per un punto materiale di massa m in una posizione nelle vicinanze della Terra è dovuta ad una forza attrattiva che in ogni punto è diretta, con buona approssimazione, verso il centro della Terra e che indicheremo con mg_0 e a una forza centrifuga per la rotazione della Terra. Con riferimento alla figura 2.35, ove è schematicamente rappresentata la situazione per il punto materiale P sulla superficie della Terra alla latitudine L , la somma mg della forza di attrazione mg_0 e della forza centrifuga di intensità $m\omega^2 r$ (riportata non in scala per maggiore evidenza del disegno) determina la direzione della verticale nel posto. Vogliamo qui determinare il contributo della forza centrifuga alla intensità della forza totale che agisce su P , cioè $(mg - mg_0)$ o ciò che è equivalente e più generale non riferendosi a un particolare punto materiale di massa m , $(g - g_0)$. Dal triangolo formato dai vettori rappresentanti le tre forze si ottiene:

$$(84) \quad g^2 = g_0^2 + r^2\omega^4 - 2g_0r\omega^2 \cos L.$$

Il valore della accelerazione centrifuga è ovunque molto più piccolo di g_0 . Il valore massimo si ha all'equatore ($L = 0$) e vale all'incirca $3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ (cap. 2, par. 2.1); è cioè circa lo 0,3% di g_0 ($g_0 \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$). Questa circostanza mostra che, con buona approssimazione, si può trascurare nella (84) il secondo termine, nel secondo membro, rispetto agli altri. Si ha allora, indicando con R il raggio della Terra,

$$g \simeq g_0 \left(1 - 2 \frac{R}{g_0} \omega^2 \cos^2 L \right)^{1/2}.$$

Siccome inoltre il secondo termine del radicando è molto piccolo rispetto al primo, si può scrivere ⁽²²⁾

$$g \simeq g_0 \left(1 - \frac{R}{g_0} \omega^2 \cos^2 L \right) = g_0 - R\omega^2 \cos^2 L.$$

Alla forza peso danno contributo sia la forza di gravitazione, sia la forza centrifuga

⁽²²⁾ Per $x \ll 1$ si ha $\sqrt{1-x} \simeq 1 - x/2$ come può vedersi sviluppando in serie di Taylor e fermandosi al secondo termine.

Con i valori numerici

$$(85) \quad g \simeq g_0 - 3,5 \cdot 10^{-2} \cos^2 L.$$

La differenza fra g e g_0 si annulla ai poli ed è massima all'equatore, dove vale circa $0,035 \text{ m/s}^2$; le accelerazioni di gravità misurate al livello del mare al polo nord e all'equatore sono rispettivamente $9,831$ e $9,781 \text{ m/s}^2$. Si vede quindi che la forza centrifuga spiega gran parte della differenza. L'effetto della forza centrifuga può peraltro in molti casi essere trascurato.

■ 2.26. FORZE APPARENTI: LA FORZA DI CORIOLIS

Come già detto, le forze apparenti vanno introdotte nei sistemi non inerziali accanto a quelle reali che sono sufficienti per la descrizione dei processi meccanici in sistemi inerziali mediante le leggi della dinamica di Newton.

Nei casi finora esaminati il punto materiale era in quiete nel sistema di riferimento non inerziale. Nel caso più generale in cui il punto materiale si muova in tale sistema e che il moto di trascinamento implichia una rotazione, si presenta una nuova forza inerziale apparente, detta forza di Coriolis. Se si indica con \mathbf{v}_r la velocità che il punto ha nel sistema di riferimento non inerziale e con $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare⁽²³⁾ del moto di trascinamento del sistema di riferimento non inerziale, la *forza di Coriolis* è data da

$$(86) \quad \mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

La forza di Coriolis è una forza apparente dovuta al moto relativo di un punto in un sistema non inerziale in rotazione

La comparsa di questa forza va ancora spiegata facendo riferimento alla eq. (102) del cap. 1 che pone in relazione le accelerazioni misurate in due sistemi di riferimento in moto relativo: questa volta l'equazione va usata nella sua interezza

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Da essa:

$$m\mathbf{a}_a = m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_t + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Mentre per l'osservatore nella terna inerziale l'accelerazione osservata (\mathbf{a}_a) va posta in relazione a forze reali

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_a,$$

per l'osservatore nella terna non inerziale l'osservazione fatta (\mathbf{a}_r), se vuole essere interpretata tramite il II principio della dinamica, richiede l'impiego accanto alla forza reale \mathbf{F} di due forze apparenti

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = m\mathbf{a}_r,$$

la seconda delle quali è la forza di Coriolis.

⁽²³⁾ Nel caso più generale il vettore $\boldsymbol{\omega}$ può variare di direzione nel tempo. La sua definizione in tal caso va fatta con considerazioni più generali di quelle da noi usate al cap. 1, par. 1.12.

2.27. CONCLUSIONI SULLA DINAMICA DEL PUNTO

Al termine della trattazione della dinamica del punto materiale vogliamo sintetizzare i punti essenziali che siamo venuti illustrando.

I tre principi della dinamica si esprimono in un sistema di riferimento inerziale:

I ogni corpo assimilabile a un punto materiale non sottoposto ad azioni esterne permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme;

II l'accelerazione di un punto materiale prodotta da forze a esso applicate è proporzionale alla somma delle forze stesse ed è inversamente proporzionale alla massa del corpo;

III le mutue azioni che due corpi puntiformi scambiano sono rappresentate da due forze dirette lungo la congiungente le posizioni occupate, aventi intensità uguali e versi opposti.

Il sistema di riferimento inerziale viene introdotto, in relazione con il primo principio, come un sistema legato a un *corpo* (punto materiale) *libero*, non sottoposto cioè ad alcuna azione, o come un sistema in moto di traslazione uniforme (con velocità di traslazione v_t costante) rispetto a esso. Con precisione sufficiente per la trattazione della maggior parte dei problemi concreti in meccanica newtoniana, si può considerare inerziale una terna solidale con il Sole o in moto di traslazione rettilinea uniforme rispetto a essa. Una terna legata alla Terra non è inerziale a causa dei moti di rotazione di cui questa è dotata: stante peraltro la esigua intensità della velocità di rotazione coinvolta, una terna legata alla Terra viene, con un'approssimazione sufficiente in molti casi, a volte assunta come inerziale. La meccanica newtoniana, corrispondente alla applicazione dei tre principi, va sviluppata in tali sistemi. Alle forze presenti in tali sistemi viene assegnato un significato *reale*.

Se il moto è descritto da un sistema non inerziale, si può far uso dei principi suddetti introducendo, accanto alle forze *reali*, alcune forze *apparenti* che servono a tenere conto della natura del moto di trascinamento del sistema rispetto a un sistema inerziale (forze centrifughe, forze di Coriolis ecc.).

L'introduzione dei vettori quantità di moto (**p**) e momento della quantità di moto (**b**) rispetto a un punto (polo) fisso *O* nel sistema di riferimento consente di esprimere il II principio della dinamica in maniera differente, secondo, rispettivamente, la (9) e la (73):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}$$

essendo **M** il momento risultante delle forze applicate al punto materiale rispetto a *O*. L'uso delle (9) e (73) è particolarmente utile quando $\mathbf{F} = 0$ o quando $\mathbf{M} = 0$. Si osservi che le (9) e (73) stabilite inizialmente in un sistema inerziale valgono anche in un sistema non inerziale purché si tenga conto delle forze apparenti.

Le equazioni del moto in un qualunque sistema di riferimento

LAVORO ED ENERGIA PER IL PUNTO MATERIALE

4

- ✓ **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica** (forze vive): per integrazione nello spazio di $\mathbf{F} = m\mathbf{v}/dt$:

$$L = \Delta T$$

- ✓ **Campi di forze:** $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Alcune forze, non dipendenti da t , dipendono da \mathbf{r} in modo tale che $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$ per qualunque percorso d'integrazione entro una certa regione spaziale. Esse si dicono **conservative**. È anche $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ indipendente dal percorso da \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 .

Per le forze conservative si introduce un **potenziale**, funzione $U(\mathbf{r})$, la cui variazione è definita da

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Condizione perché \mathbf{F} sia conservativa:

$$\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$$

e le altre equazioni, ottenute per rotazione degli indici.

Campi di forze conservative

forze gravitazionali: $U = -GMm/r$ $(U(\infty) = 0)$

forza peso: $U = mgz$ $(U(0) = 0)$

forze elastiche: $U = \frac{1}{2}kx^2$ $(U(0) = 0)$

Forze non conservative: attrito, resistenze passive.

- Nei campi conservativi:

$$L = -\Delta U = \Delta T \implies \Delta(U + T) = 0$$

(conservazione dell'energia meccanica).

Nei campi non conservativi:

$$L = L_{\text{cons}} + L_{\text{n.c.}} = -\Delta U + L_{\text{n.c.}} = \Delta t \implies L_{\text{n.c.}} = \Delta(U + T).$$

Grandezze tipiche

lavoro, di una forza che sposta il punto di applicazione lungo una linea

$$L = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

potenza, $W = dL/dt$

energia cinetica, $T = \frac{1}{2}mv^2$.

- **Limiti della meccanica newtoniana:** le trasformazioni galileiane, da un sistema di riferimento a un altro, sono approssimate e valide solo per $v \ll c$.

- **Postulato della relatività ristretta:** c è uguale in tutti i sistemi di riferimento (inerziali). Seguono le trasformazioni relativistiche:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - x/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

3.

Lavoro ed energia per il punto materiale

3.1. DEFINIZIONE DI LAVORO

Nel capitolo precedente si è visto come per cambiare lo stato di moto di un corpo sia necessario applicare una forza. Ciò che finora abbiamo detto non esaurisce l'esame di tutti gli aspetti delle relazioni fra forza applicata a un punto materiale e posizione del punto stesso. È evidente infatti che, nei riguardi dell'ente che dà origine alla singola forza che agisce sul punto materiale, la situazione è diversa nei casi in cui il punto non si muova (risultante di tutte le forze applicate nulla e corpo in quiete), o si muova. Se una persona dovesse impedire a un grave di scendere lungo una china applicandovi una forza si troverebbe in condizioni molto più favorevoli che se dovesse spingerlo per una lunga salita. Una forza quindi che agisce su un punto materiale compie una funzione molto diversa secondo gli spostamenti del corpo.

La necessità di considerare questo aspetto delle relazioni fra forze applicate e spostamenti del punto materiale porta alla introduzione di una nuova grandezza fisica: il lavoro.

Per la sua introduzione si esamini dapprima una situazione particolare; la definizione generale segue subito dopo. Sia \mathbf{F} una forza *costante applicata* a un punto materiale e si consideri uno *spostamento* $\Delta\mathbf{s}$ del punto materiale che si muova secondo una traiettoria rettilinea (fig. 3.1); il lavoro L compiuto dalla forza viene definito come

$$(1) \quad L = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s} = F\Delta s \cos \theta = F_x \Delta s_x + F_y \Delta s_y + F_z \Delta s_z$$

essendo θ l'angolo determinato dai vettori \mathbf{F} e $\Delta\mathbf{s}$ (aventi componenti $F_x, F_y, F_z; \Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z$).

Il *lavoro* quindi è *una grandezza scalare*. Nel caso che lo spostamento avvenga nella direzione e nel verso della forza sarà $L = F\Delta s$, se avviene in senso contrario $L = -F\Delta s$; se lo spostamento avviene in direzione normale alla direzione della forza ($\theta = \pi/2$) il lavoro compiuto dalla forza è nullo.

In genere la forza che agisce su un punto materiale non è costante e inoltre la traiettoria del punto è una linea curva come quella indicata in figura 3.2 fra le posizioni 1 e 2 occupate dal punto materiale. Si può allora immaginare di decomporre il percorso in spostamenti infinitesimi che possono considerarsi rettilinei, ds (di componenti dx, dy, dz), e ammettere che la forza applicata al punto materiale resti costante mentre il punto subisce lo spostamento ds . Quest'ultima ipotesi è giustificata dalla

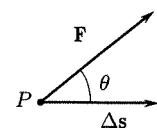


Fig. 3.1

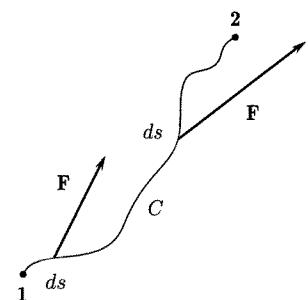


Fig. 3.2

continuità dei fenomeni fisici per cui si può ritenere che il modulo e la direzione della forza \mathbf{F} varino con continuità nello spazio e nel tempo.

Si può allora definire come *lavoro elementare in corrispondenza a uno spostamento $d\mathbf{s}$ del punto* il prodotto

$$(2) \quad dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Tale lavoro elementare varia col variare di $d\mathbf{s}$.

Il lavoro compiuto dalla forza quando il punto si sposta dalla posizione 1 alla 2 lungo la curva C si ottiene sommando i lavori elementari (2) relativi agli infiniti spostamenti $d\mathbf{s}$ in cui è stato diviso il percorso 1-2. Si dice che il lavoro è l'*integrale di linea di \mathbf{F}* lungo la C tra i punti 1 e 2

$$(3) \quad L = \int_{1C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{1C}^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) .$$

Il lavoro può anche essere espresso in funzione del tempo impiegato dal punto materiale a compiere il tratto 1-2 della traiettoria. Poiché

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$$

il lavoro compiuto nell'intervallo di tempo $t_0 - t$ corrispondente al tratto di traiettoria considerato è

$$(4) \quad L = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt .$$

Nel caso particolare di un moto di rotazione non uniforme intorno a un punto fisso O , detta r la distanza del punto da O , F_s la componente di \mathbf{F} nella direzione di $d\mathbf{s}$ e \mathbf{M} il momento di \mathbf{F} rispetto a O , si ha

$$\begin{aligned} dL &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_s ds = (F_s r) \frac{ds}{r} = M d\theta = M \omega(t) dt \\ \text{e} \quad L &= \int_{t_0}^t M \omega(t) dt \end{aligned}$$

essendo $d\theta$ l'angolo descritto dal vettore di posizione \mathbf{r} in corrispondenza allo spostamento ds e $\omega(t)$ la intensità della corrispondente velocità angolare.

Le dimensioni del lavoro nel SI e nel sistema CGS sono:

$$[L^2 MT^{-2}] .$$

L'unità di misura nel SI prende il nome di joule, di simbolo J: esso è il lavoro fatto dalla forza di 1 newton per uno spostamento di 1 m del suo punto di applicazione nella direzione della forza.

L'unità di misura del sistema CGS è chiamata erg: esso è il lavoro compiuto dalla forza di una dine per uno spostamento di 1 cm nella direzione della forza.

Dato che $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dine}$, e $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$ risulta

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} .$$

Nel sistema pratico degli ingegneri, nel quale le grandezze fondamentali sono la lunghezza, la forza e il tempo, per le quali si adottano come unità rispettivamente il metro (m), il kilogrammo-peso (kg-peso) e il secondo (s), il lavoro si misura in kilogrammetri: il lavoro fatto dalla forza

di un kg-peso per lo spostamento di 1 m del suo punto di applicazione nella direzione della forza. Dato che 1 kg-peso = 9,8 N

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m} = 9,8 \text{ J} = 9,8 \cdot 10^7 \text{ erg}.$$

Esempio

Si consideri un pendolo semplice costituito da una massa m sospesa a un punto fisso A mediante un filo di lunghezza l (fig. 3.3). La massa si trovi nella posizione di riposo O . Si sposti la massa nel punto B applicando una forza orizzontale \mathbf{F} tale che manterebbe il corpo in equilibrio in ogni posizione. L'intensità di tale forza varia mentre il punto si sposta lungo la traiettoria ed è uguale in ogni punto all'intensità della forza (orizzontale) somma del peso e della reazione vincolare:

$$F = mg \tan \theta.$$

Il lavoro compiuto da tale forza sarà quindi l'integrale di linea lungo l'arco di circonferenza OB

$$L_1 = \int_{OB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{OB} F_x dx = mg \int_{OB} \tan \theta dx = mg \int_{OB} dy = mg h.$$

Analogamente si può fare il calcolo del lavoro L_2 eseguito dalla forza peso per il medesimo spostamento del punto materiale

$$L_2 = -mg h.$$

Il lavoro, invece, della reazione del vincolo (privo di attrito) è nullo giacché gli spostamenti sono normali alla reazione stessa.

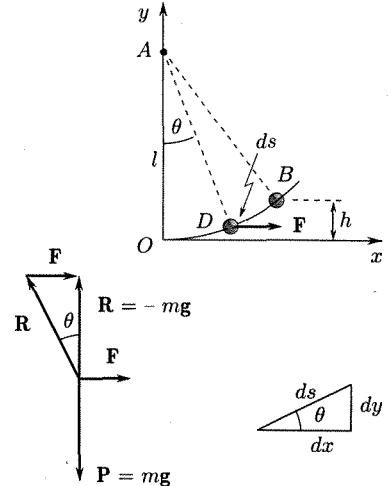


Fig. 3.3

3.2. POTENZA

Nelle questioni in cui occorra considerare il lavoro eseguito da una forza, è di interesse conoscere la rapidità con cui tale lavoro è effettuato.

Se L è il lavoro compiuto da una forza in un certo intervallo di tempo ($t_2 - t_1$), si definisce *potenza media* dell'ente che fornisce la forza nel detto intervallo

$$(5) \quad \overline{W} = \frac{L}{t_2 - t_1}.$$

Riducendo l'intervallo che si considera, si ha al limite la potenza istantanea fornita all'istante t dall'ente che realizza la forza

$$(6) \quad W = \frac{dL}{dt}$$

e, ricordando la (3)

$$(7) \quad W = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

essendo \mathbf{F} e \mathbf{v} i valori istantanei della forza e della velocità.

Le dimensioni della potenza nel SI e nel sistema CGS sono

$$[W] = [L^2 MT^{-3}].$$

Nel SI l'unità è il watt (W), pari alla potenza di una macchina che fornisce il lavoro di 1 joule al secondo. Un suo multiplo molto usato è il kilowatt: $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$.

La potenza è il rapporto differenziale tra il lavoro compiuto e il tempo corrispondentemente impiegato

Nel sistema CGS l'unità di misura è l'erg/s. Si ha

$$1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s.}$$

Nel sistema pratico degli ingegneri l'unità di potenza è il kg · m/s pari a 9,8 W. Una unità alle volte ancora usata è il cavallo-vapore (*horse power*) il cui simbolo è CV o HP; esso vale

$$1 \text{ HP} = 75 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 736 \text{ W}$$

circa 3/4 di kW.

Le unità di potenza possono essere usate assieme a quelle di tempo per definire nuove unità di lavoro. Ne ricordiamo una che è frequentemente usata nella tecnica: il kilowattora (kWh), pari al lavoro compiuto in un'ora da una macchina che sviluppa una potenza di 1 kW. Si ha quindi

$$1 \text{ kWh} = 3.600 \text{ kW} \cdot \text{s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

Esempio

Una locomotiva trascina su un percorso rettilineo un treno alla velocità costante di 60 km/h fornendo una potenza di 3000 CV. Si voglia calcolare la forza di trazione esercitata dalla macchina.

La potenza in watt è $W = 3000 \cdot 736 = 2,208 \cdot 10^6 \text{ W}$. La velocità è $v = 60 \cdot 10^3 / 3.600 = 16,6 \text{ m/s}$. Si ha quindi

$$F = \frac{W}{v} = \frac{2,208}{16,6} \cdot 10^6 = 1,33 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

3.3. ENERGIA CINETICA. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

Durante il moto di un punto materiale varie forze possono contemporaneamente agire e per ciascuna di esse separatamente potrà considerarsi la espressione (2) che dà il lavoro elementare compiuto dalla singola forza: questo lavoro è positivo se l'angolo formato fra i vettori forza e spostamento è acuto e corrisponde a un effettivo lavoro compiuto dall'ente che fornisce la forza; il lavoro è nullo se l'angolo è $\pi/2$ ed è negativo se l'angolo è ottuso. In quest'ultimo caso il lavoro è negativo nel senso che l'ente che genera la forza subisce il lavoro e invece è la reazione offerta dal punto materiale che in realtà esegue un lavoro.

La somma (algebrica) dei lavori eseguiti da tutte le forze che agiscono contemporaneamente su un punto materiale quando questo subisce uno spostamento è pari al lavoro compiuto per lo stesso spostamento dalla somma delle forze applicate, che è quella che determina il moto del punto.

Con riferimento a questa forza totale \mathbf{F} risultante delle forze applicate al punto, si può scrivere per il lavoro elementare, utilizzando il secondo principio della dinamica

$$(8) \quad dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Si osservi che

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

e quindi la (8) diviene

$$(9) \quad dL = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT$$

avendo posto

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Il lavoro compiuto dalla forza totale applicata al punto materiale \mathbf{F} nel passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2

$$(10) \quad L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \Delta T_{12}$$

dipende esclusivamente dai valori che la grandezza T assume nelle posizioni iniziale e finale.

Questa grandezza si chiama energia cinetica e ha le dimensioni stesse del lavoro, ovviamente essa si misura in joule ed erg, rispettivamente, nel SI e nel CGS. Per comprendere facilmente il suo significato si consideri il caso in cui la posizione finale 2 corrisponda alla quiete ($v_2 = 0$); la forza applicata al punto materiale a partire dalla posizione 1 ne ha contrastato il moto facendo diminuire la velocità fino al valore zero; il lavoro complessivo compiuto dalla forza applicata è stato

$$L_{12} = -T_1 = -\frac{1}{2}mv_1^2.$$

In questo caso

$$T_1 = -L_{12}$$

rappresenta il lavoro fatto contro la forza applicata. Ciò significa, in termini generali, che un punto materiale per il fatto di essere in moto (velocità v) e di essere dotato di inerzia (massa m) ha una capacità a compiere lavoro (contro una forza che contrasti il moto) espressa da

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

esso, cioè, possiede una energia T , il cui nome *cinetica* giustifica la sua origine, dal moto del punto.

La (10) esprime un teorema generale, il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, detto anche delle forze vive⁽¹⁾, molto importante nella fisica, valido qualunque siano i tipi di forze che agiscono sul punto materiale: la variazione di energia cinetica di un punto materiale è sempre pari al lavoro compiuto su di esso dalla somma delle forze applicate. Naturalmente al posto del lavoro della somma delle forze si può considerare la somma algebrica dei lavori compiuti sul punto materiale da tutte le forze che agiscono contemporaneamente su di esso.

Il lavoro compiuto da una forza su un punto materiale ne fa variare corrispondentemente l'energia cinetica

⁽¹⁾ L'energia cinetica veniva impropriamente chiamata forza viva del corpo.

Si noti che perché vi sia variazione di energia cinetica in corrispondenza a uno spostamento del punto materiale occorre che vari l'intensità della velocità cioè che la forza totale abbia in un tratto di percorso almeno una componente nella direzione del moto: altrimenti il lavoro fatto dalla forza totale è nullo e l'energia cinetica resta inalterata. Quest'ultima circostanza si verifica nel caso dei moti uniformi: nel moto rettilineo uniforme è $\mathbf{F} = 0$, se il moto è circolare uniforme la forza totale (centripeta) è normale alla traiettoria.

Nel caso che il moto del punto sia di rotazione intorno a un punto O , con velocità angolare di intensità ω , l'energia cinetica si scrive

$$(11) \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

essendo r la distanza del punto da O e mr^2 il momento d'inerzia del punto rispetto a O .

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica è stato dedotto dal secondo principio della dinamica. In molti problemi pratici esso riesce di grande aiuto qualora si abbiano le informazioni richieste nella sua formulazione: la soluzione del problema della determinazione della posizione del punto materiale è allora semplificata dal momento che nella espressione del teorema sono implicate le velocità e non le accelerazioni (che invece intervengono nell'espressione del secondo principio della dinamica).

3.4. CAMPI DI FORZA CONSERVATIVI

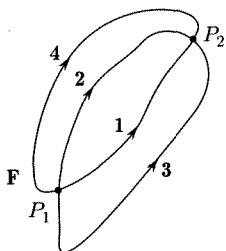


Fig. 3.4

Di particolare interesse sono alcuni campi di forza chiamati campi conservativi; *essi godono della proprietà che il lavoro compiuto dalla forza per spostare un punto materiale da una posizione P_1 qualsiasi del campo a un'altra P_2 non dipende dal percorso seguito* (fig. 3.4, percorsi 1, 2, 3, 4) *ma esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale*.

Diamo subito alcuni esempi di campi conservativi.

a. Campo di forze uniformi

Si consideri una regione dello spazio in ciascun punto della quale sia definita una forza costante \mathbf{F} (in direzione, verso e intensità) che possa agire su un punto materiale (corpo) di massa m qualora esso venga a trovarsi nella posizione considerata del campo. Un campo di forza di questo genere è quello della forza di gravità (peso): in regioni abbastanza estese infatti \mathbf{g} può ritenersi costante e lo stesso quindi è per $\mathbf{P} = mg$.

ds

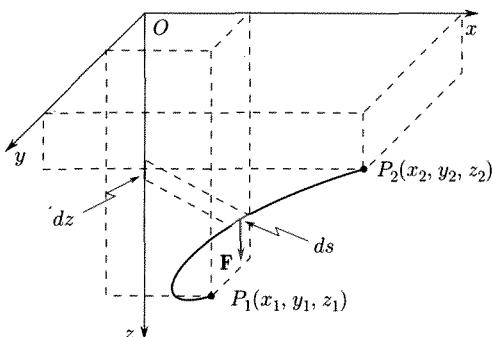
dz

$$dL = \mathbf{F} \cdot ds = F dz.$$

Segue che il lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto da P_1 a P_2 lungo la curva C è dato dall'integrale lungo la C da P_1 a P_2

$$(12) \quad L = \int_{C(P_1, P_2)} F dz = F \int_{z_1}^{z_2} dz = F(z_2 - z_1).$$

Fig. 3.5



La espressione ottenuta non conserva nulla che si riferisca alla particolare curva C seguita nel passare da P_1 a P_2 , e dipende solamente da elementi che caratterizzano le posizioni iniziale e finale.

Se in particolare il campo di forza costante è quello della gravità, e si indichi con h il dislivello fra posizione finale e posizione iniziale, cioè si ponga $h = z_2 - z_1$, si ha

$$(13) \quad L = mgh.$$

b. Campo di forze centrali

Si consideri un campo di forze nel quale la forza sia in ogni punto diretta verso un punto fisso O (o in verso contrario a questo) e la cui intensità dipenda esclusivamente dalla distanza r da O . Campi di forza di questo genere si incontrano spesso, per es. nella gravitazione (e, quindi, hanno importanza nel moto dei pianeti), nella elettrostatica (campo di forze creato da una carica), nella elasticità (campo di una forza elastica lungo un asse x), nello studio delle forze centrifughe. Si vede quindi la grande generalità di questo caso.

Sia O il punto verso il quale è sempre diretta la forza e \mathbf{r} il vettore OP . La forza si può scrivere

$$(14) \quad \mathbf{F}(r) = \pm F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

essendo $F(r)$ l'intensità, \mathbf{r}/r il versore di \mathbf{r} e valendo il segno + o - secondo che la forza sia repulsiva o attrattiva. Si consideri (fig. 3.6) un percorso C qualsiasi che porti il punto materiale dalla posizione P_1 a P_2 . In corrispondenza a uno spostamento elementare ds lungo tale percorso, a partire dalla posizione P , il lavoro è

$$dL = \mathbf{F} \cdot ds = \pm F(r) dr$$

essendo dr (vedi ingrandimento in figura) la proiezione di ds su OP (il segno + o - dipende dalla natura repulsiva o attrattiva della forza). Questo lavoro elementare è quindi uguale a quello che le forze del campo avrebbero compiuto se il punto materiale fosse passato da P' a $(P' + dr)$ lungo il raggio OP_1 .

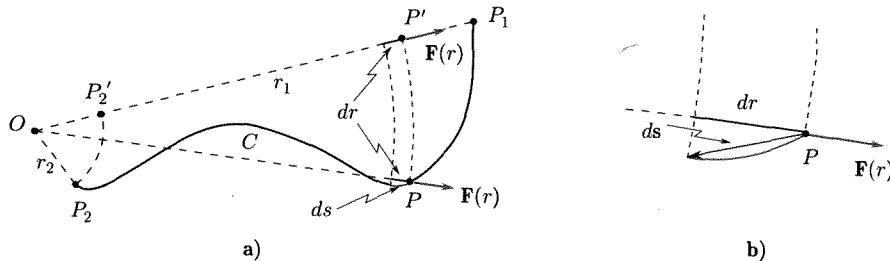


Fig. 3.6

Il lavoro totale, cioè l'integrale lungo la curva C seguita dal punto materiale nel passare da P_1 a P_2

$$L = \pm \int_{C(P_1, P_2)} F(r) dr$$

In un campo di forze conservative il lavoro compiuto è solo funzione degli estremi del percorso

risulta quindi pari all'integrale calcolato lungo il raggio OP_1 fra le posizioni P_1 ($r = r_1$) e P'_2 ($r = r_2$)

$$(15) \quad L = \pm \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr.$$

Questo integrale dipende esclusivamente dalle posizioni iniziali r_1 e finali r_2 e non dal percorso seguito (curva C).

Il lavoro compiuto da forze conservative lungo un percorso chiuso è identicamente nullo

Nel caso del campo di forze gravitazionali (come si vedrà) e nel caso delle forze elettrostatiche fra cariche puntiformi (cap. 2, par. 2.15)

$$\mathbf{F}(r) = \pm \frac{k}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

con k costante positiva: il segno + vale per forze fra cariche dello stesso segno; il segno - vale per le forze gravitazionali e per forze fra cariche di segno opposto. Si ha allora

$$(16) \quad L = \pm k \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \pm k \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \pm k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Nel caso del campo di forze centrifughe (che vanno considerate nel sistema rotante)

$$\mathbf{F}(r) = m\omega^2 \mathbf{r}$$

ed

$$(17) \quad L = m\omega^2 \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{1}{2} m\omega^2 (r_2^2 - r_1^2).$$

Nel caso di forze elastiche create per es. da una molla lungo una retta x si ha

$$\mathbf{F}(x) = -kx \mathbf{i}$$

ed

$$(18) \quad L = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2).$$

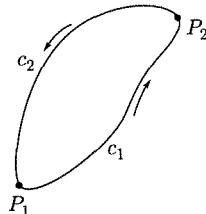


Fig. 3.7

La proprietà caratteristica dei campi conservativi, cioè il fatto che il lavoro che le forze del campo compiono quando il punto materiale passa da una posizione P_1 ad un'altra posizione P_2 non dipenda dal percorso seguito, porta di conseguenza che in tali campi il lavoro compiuto lungo un percorso chiuso qualsiasi è nullo. Si consideri, infatti, una linea chiusa che costituisca il percorso del punto materiale nel campo ed essa venga descritta nel senso indicato in figura 3.7.

Si scelgano su di essa due posizioni qualsiasi P_1 e P_2 . Il lavoro compiuto dalle forze del campo lungo il percorso chiuso è:

$$(19) \quad L = \int_{P_1 c_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{P_2 c_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{cioè} \quad \int_{P_1 c_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_1 c_2}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

giacché il valore dell'integrale

$$\int_{P_1 c}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

è indipendente dal particolare percorso C seguito.

Viceversa se il lavoro compiuto dalle forze di un campo lungo *qualsiasi* percorso chiuso è nullo, il campo di forze è conservativo: è sufficiente però che il lavoro non sia nullo per un solo percorso chiuso perché il campo di forze *non* sia conservativo.

3.5. ENERGIA POTENZIALE

La caratteristica fondamentale di un campo conservativo è quindi espressa dal fatto che per una qualsiasi coppia di punti P_1, P_2 nella regione dove è definita la forza il lavoro $L_{1,2}$ compiuto dalla forza per spostare il punto materiale da P_1 a P_2 dipende solo dalle posizioni P_1 e P_2 e non da altre grandezze, quali il particolare percorso seguito, il tempo impiegato, la velocità, la accelerazione.

Questa fondamentale proprietà può essere rappresentata introducendo una funzione che con la differenza dei valori assunti in P_1 e P_2 dia proprio $L_{1,2}$. Ciò può farsi nella seguente maniera. Scelto ad arbitrio un punto di riferimento nel campo (O , di coordinate x_0, y_0, z_0) si consideri per qualsiasi altra posizione, ad es. P_1 , il lavoro che le forze del campo compirebbero qualora il punto materiale passasse da O a P_1 e si ponga tale lavoro pari alla differenza della funzione cercata in O e P_1 :

$$(20) \quad U(x_0, y_0, z_0) - U(x_1, y_1, z_1) = L_{0,1} = \int_{0^c}^{P_1} dL.$$

Evidentemente la funzione $U(x, y, z)$ si ottiene dalla (20), scrivendo tale relazione per il passaggio da O alla posizione generica P

$$(21) \quad U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - \int_{0^c}^P dL = \text{cost} - \int_{0^c}^P dL.$$

Per il passaggio del punto materiale da P_1 a P_2 si ha, considerando un percorso per O :

$$(22) \quad \begin{aligned} L_{12} &= \int_{P_1^{c_1}}^{P_2} dL = \int_{P_1^{c_1}}^0 dL + \int_0^{P_2} dL \\ &= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) = U_1 - U_2 = -\Delta U_{12} \end{aligned}$$

dove con ΔU_{12} si intende la differenza $U_2 - U_1$.

Si osservi che la funzione $U(x, y, z)$ essendo definita (eq. (21)) per mezzo delle sue variazioni quando si passa dal punto di riferimento O al punto generico P , è determinata a meno di una costante, pari al valore arbitrariamente assegnato alla funzione nel punto di riferimento $U(x_0, y_0, z_0)$.

La funzione $U(x, y, z)$ così definita descrive la *capacità* delle forze del campo di *compiere lavoro* (positivo se $U_0 > U$) qualora il punto materiale venga a spostarsi dalla posizione di riferimento a una posizione generica nel campo, e consente di calcolare questa capacità a compiere lavoro quando il punto materiale si sposti da P_1 a P_2 (lavoro positivo se $U_1 > U_2$). La *capacità di compiere lavoro* prende il nome di *energia* e la funzione $U(x, y, z)$, rappresentando una capacità di compiere lavoro legata alla *posizione* del punto materiale nel campo, prende il nome di *energia potenziale*.

Nei campi di forze conservativi esaminati nel paragrafo precedente la funzione energia potenziale assume le forme seguenti.

Nei campi di forze conservativi si definisce l'energia potenziale attraverso la sua differenza tra due punti, pari al lavoro, cambiato di segno, che compiono le forze del campo per portare un punto dalla posizione iniziale a quella finale

L'energia potenziale è definita in un campo di forze conservative a meno di una costante additiva

a. Campo delle forze di gravità

Con le notazioni di figura 3.5, $\mathbf{F} = mg\mathbf{i}$ e quindi

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U(y) = - \int_{y_0}^y mg dy + U(y_0) \\ &= -mgy + mgy_0 + U(y_0) = \\ &= -mgy + \text{cost .} \end{aligned}$$

Se, come usualmente si fa, si sceglie la costante a disposizione ponendo $U = 0$, per $y = 0$ cioè $U(y_0) = -mgy_0$, si ottiene per l'energia potenziale l'espressione

*Energia potenziale
della forza peso*

$$(23) \quad U(y) = -mgy .$$

b. Campo di forze centrali

Nel caso di forze gravitazionali ed elettrostatiche è $\mathbf{F}(r) = \pm k/r^2 \mathbf{r}/r$ e quindi

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \left(\pm \frac{k}{r^2} dr \right) + \text{cost} = \pm k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + U(r_0) = \pm \frac{k}{r} + \text{cost} .$$

Il segno + vale per forze repulsive. Se si sceglie di porre $U(r) = 0$ per $r = \infty$, l'ultima costante risulta nulla e

*Energia potenziale
delle forze gravitazionale
ed elettrica*

$$(24) \quad U(r) = \pm \frac{k}{r} .$$

c. Campo di forze elastiche

In tal caso è $\mathbf{F}(x) = -kxi$ e quindi

*Energia potenziale
della forza elastica*

$$(25) \quad U(x) = - \int_{x_0}^x (-kx) dx + U(x_0) = \frac{1}{2} kx^2 + \text{cost} .$$

La costante diviene nulla se si sceglie di porre $U(x) = 0$ per $x = 0$.

Esempio

Un locomotore dotato della massa $M = 100$ tonnellate entra in stazione e per errata manovra giunge contro i respingenti posti al termine del binario con una velocità di $0,504$ km/h. Sapendo che la costante elastica delle molle di cui sono dotati i due respingenti è $k = 1,1 \cdot 10^4$ N/m, si vuole calcolare di quanto rientrano i respingenti sotto l'urto del locomotore (trascurando gli attriti).

Al momento del massimo rientro delle molle, tutta l'energia cinetica T del locomotore si sarà convertita in energia potenziale U delle molle stesse. Se con x si indica di quanto sono rientrate le molle, l'energia potenziale immagazzinata da ciascuna sarà

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

e dovrà quindi avversi

$$2 \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = \frac{1}{2} Mv^2 .$$

Risolvendo rispetto a x si ha

$$x = v \sqrt{\frac{1}{2} \frac{M}{k}}$$

e poiché

$$M = 10^5 \text{ kg}$$

$$v = 0,14 \text{ m/s}$$

$$k = 1,1 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

si ottiene

$$x = 0,14 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{10^5}{1,1 \cdot 10^4}} \cong 0,3 \text{ m}$$

Si osservi che l'energia potenziale, definita dalla (21), punto per punto in un campo di forze conservative è una grandezza scalare, le cui dimensioni sono le stesse di quelle del lavoro

$$[U] = [L^2 M T^{-2}] .$$

Essa si misura nelle stesse unità del lavoro.

È importante peraltro notare che l'energia (potenziale) rappresenta una capacità a compiere lavoro e non va confusa con la grandezza fisica lavoro: il lavoro è compiuto da una forza solo quando il punto materiale, su cui la forza agisce, venga spostato da una posizione a un'altra del campo, ed è pari alla variazione di energia potenziale.

Se tra i due punti, pur distinti, nel campo non vi è differenza di energia potenziale, il lavoro compiuto dalle forze del campo nello spostare comunque un punto materiale dall'una all'altra posizione è nullo.

È interessante, a tal fine, studiare la struttura dell'energia potenziale, come funzione delle coordinate spaziali $U(x, y, z)$; in particolare, è utile considerare i domini dove è $U(x, y, z) = \text{cost}$: tali sono le così dette superfici equipotenziali, luoghi geometrici dove l'energia potenziale assume medesimi valori.

Se si considera, per es., il campo della forza peso, in tutti i punti sullo stesso piano orizzontale ($y = \text{cost}$) l'energia potenziale ha lo stesso valore. Qualora un punto materiale si sposti da una posizione P_1 di un tale piano a un'altra P_2 dello stesso piano, il lavoro compiuto dalle forze del campo risulta nullo ($U = \text{cost}$, $\Delta U = 0$). La ragione fisica di ciò risulta evidente se si sceglie come percorso del punto materiale fra P_1 e P_2 una curva C che giaccia sul piano orizzontale: in tal caso tutti gli spostamenti elementari sono normali alla forza, e i lavori elementari corrispondenti nulli. Nel campo di forza della gravità i piani orizzontali sono *superfici equipotenziali*. La direzione della forza in ciascun punto di un piano equipotenziale è normale ad esso.

Analogamente stanno le cose nel caso degli altri campi conservativi.

La figura 3.8 mostra il caso del campo di una forza centrale (repulsiva), nel quale le superfici equipotenziali sono superfici sferiche centrate nel punto verso cui è diretta la forza.

Accanto alle superfici equipotenziali, è utile considerare le linee di forza che hanno la proprietà di avere in ogni punto come direzione della tangente la direzione della forza. Per ogni punto passano una sola superfi-

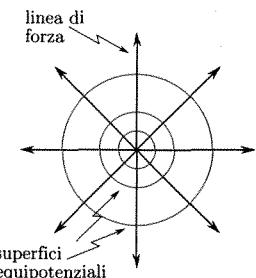


Fig. 3.8

cioè equipotenziale e una sola linea di forza⁽²⁾ e la linea di forza è normale alla superficie equipotenziale.

La conoscenza punto per punto dell'energia potenziale cioè della $U(x, y, z)$ descrive completamente il campo di forze conservativo. Si è infatti ora visto che tramite le superfici equipotenziali si può determinare la direzione della forza in un qualsiasi punto (normale alla superficie equipotenziale). È facile vedere che possono essere dedotti anche il verso e l'intensità. Per far ciò si orienti la normale \mathbf{n} in P alla superficie $U = \text{cost}$ in un verso scelto a piacere (fig. 3.9) e cerchiamo di calcolare la componente di \mathbf{F} secondo \mathbf{n} . Si consideri perciò uno spostamento $ds = d\mathbf{n}$ in direzione e verso di \mathbf{n} e la nuova superficie equipotenziale ($U + dU$).

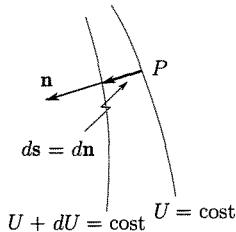


Fig. 3.9

Si ha per definizione:

$$(26) \quad -dU = dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} = F_n d\mathbf{n}$$

da cui

$$(27) \quad F_n = -\frac{dU}{d\mathbf{n}}.$$

La (27) fornisce l'intensità della forza $F = |F_n|$ e il verso: esso risulta concorde o discorde con il verso di \mathbf{n} secondo che F_n sia positiva o negativa.

La (26) si può scrivere, essendo dx, dy, dz le componenti del $d\mathbf{n}$

$$(28) \quad -\left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right] = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Da cui segue che le componenti del vettore \mathbf{F} sono

$$(29) \quad \begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Cioè

$$(30) \quad \mathbf{F} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\mathbf{grad} U.$$

Nel calcolo vettoriale si definisce infatti gradiente di una funzione scalare U un vettore che ha come componenti nelle direzioni x, y, z , rispettivamente $\partial U / \partial x, \partial U / \partial y, \partial U / \partial z$.

3.6. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA NEL CASO DI FORZE CONSERVATIVE

Tornando al teorema delle forze vive, è interessante notare che la (10) assume una forma particolarmente semplice e interessante nel caso in cui

⁽²⁾ Vi possono essere tuttavia nella regione del campo punti particolari da cui hanno origine più linee di forza (sorgenti) o in cui vengono a finire più linee di forza. Noi consideriamo qui punti per cui passano le linee di forza.

la somma delle forze applicate (e quindi tutte le forze applicate) sia conservativa. Infatti ricordando la (22) si può scrivere

$$L_{12} = U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

cioè

$$(31) \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{cost} = E.$$

Nel caso cioè di un punto materiale soggetto a forze conservative, la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, chiamata energia meccanica totale (E), resta invariata durante il moto: è questa la *legge di conservazione dell'energia meccanica* valida solo nel caso di forze conservative.

Nei campi di forze conservativi si conserva l'energia meccanica

Si osservi che l'energia potenziale è definita a meno di una costante che può essere scelta a piacere; qualcosa di analogo vale per l'energia cinetica giacché i valori della velocità dipendono dal particolare sistema di riferimento scelto. L'energia meccanica totale quindi è anche essa definita a meno di una costante. L'interesse della (31) non si riferisce al valore di E ma al fatto che esso resta invariato durante il moto.

La (31) è anch'essa una conseguenza del secondo principio della dinamica che implica solo le funzioni incognite (x, y, z) e le loro derivate prime rispetto al tempo, essendo stato ottenuto da un'integrazione della $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (*integrale primo*). Essa è valida nel caso di forze conservative e riesce spesso di grande utilità nella soluzione dei problemi di moto.

Se per es. si considera il caso di un grave lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 , si riferisce il moto a un sistema xy con l'asse y positivo lungo la verticale verso il basso e si pone pari a zero l'energia potenziale nel punto di partenza ($x = y = 0$) si può scrivere

$$(32) \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy.$$

I problemi già visti in cinematica possono essere trattati partendo da questa equazione. Per es., la posizione d'arresto ($v = 0$) si ha quando tutta l'energia cinetica è trasformata in potenziale:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Il caso più generale in cui su un punto materiale agiscono sia forze conservative sia non conservative sarà trattato in dettaglio al par. 3.9; basti ora dire che in tal caso l'energia meccanica totale non si conserva.

■ 3.7. ENERGIA NELL'OSCILLATORE ARMONICO

Si riprenda in considerazione il sistema già esaminato nel capitolo precedente di un punto materiale mobile su un piano orizzontale privo di attrito, legato a una molla (fig. 3.10). Sia $x = 0$ la posizione di riposo. La forza applicata è conservativa e diretta in ogni punto x verso 0

$$(33) \quad \mathbf{F} = -kxi;$$

a essa corrisponde una energia potenziale

$$(34) \quad U = \frac{1}{2}kx^2,$$

(avendo posto $U = 0$ per $x = 0$). Si è già visto che, se si sposta il punto dalla posizione $x = 0$ a quella $x = A$ e si lascia il punto sotto l'azione della forza elastica, si origina un moto armonico di equazione oraria

$$(35) \quad x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

e velocità scalare

$$(36) \quad v_s = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

di pulsazione e periodo, rispettivamente

$$(37) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

L'energia cinetica è pari a

$$(38) \quad T = \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

e l'energia potenziale

$$(39) \quad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Nell'oscillatore armonico l'energia passa continuamente dalla forma cinetica alla potenziale, e viceversa: l'energia totale si mantiene costante

Si vede quindi che tanto l'energia cinetica quanto quella potenziale variano fra 0 e un massimo pari a $\frac{1}{2}kA^2$. La loro somma a ogni istante

$$(40) \quad E = T + U = \frac{1}{2}kA^2$$

è costante. Nella figura 3.10 è illustrato l'andamento di T , U ed E in funzione del tempo e dello spostamento dalla posizione di riposo, nell'ipotesi non restrittiva che sia $\varphi = 0$.

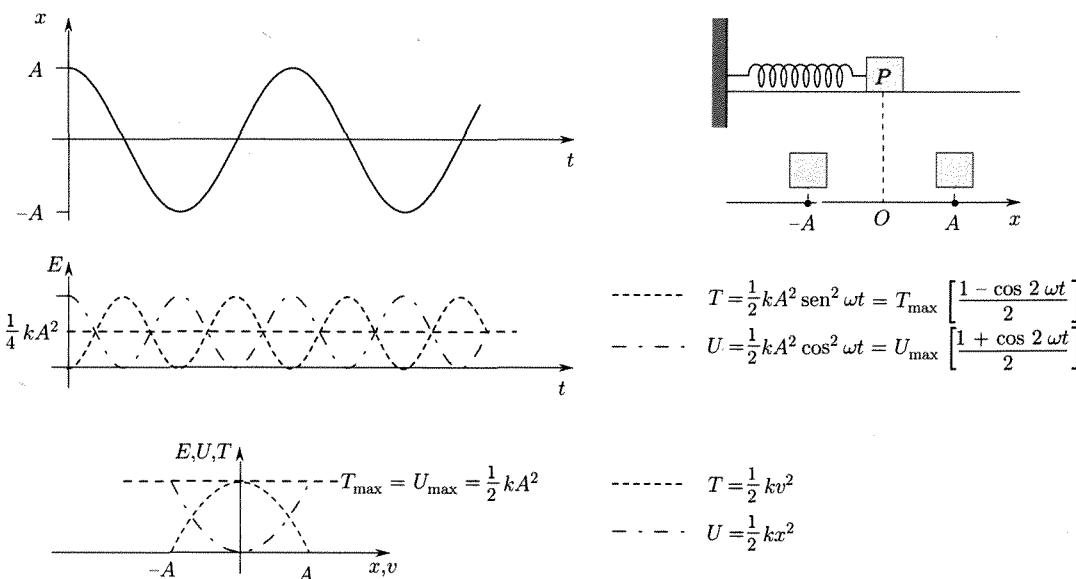


Fig. 3.10

La relazione (40) si sarebbe potuta scrivere direttamente facendo uso del teorema di conservazione dell'energia meccanica: nella posizione iniziale, quando il punto viene lasciato all'azione della sola forza elastica, nella posizione $x = A$, l'energia meccanica del punto è esclusivamente potenziale ($U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$); in ogni altra posizione la somma dell'energia potenziale U e di quella cinetica T deve essere pari a $\frac{1}{2}kA^2$.

Supponendo ancora di porre $\varphi = 0$, l'energia potenziale, a partire dalla posizione originaria di deformazione massima della molla, si trasforma gradualmente in energia cinetica: quando il punto giunge nella posizione $x = 0$ l'energia potenziale è ridotta a zero e quella cinetica è massima e pari a $\frac{1}{2}kA^2$. Possedendo il punto una velocità esso oltrepassa la posizione O e continua di moto ritardato; l'energia cinetica decresce mentre la molla si deforma ed energia potenziale viene immagazzinata. La trasformazione di energia cinetica in potenziale è completa nella posizione $x = -A$. In seguito il moto si inverte e le considerazioni ora svolte si ripetono. L'energia cinetica e quella potenziale quindi variano periodicamente fra 0 e $\frac{1}{2}kA^2$ con frequenza doppia di quella del moto, ciascuna di esse, infatti, può essere posta pari a un valore medio ($\frac{1}{4}kA^2$) al quale si sovrappone una oscillazione di periodo pari alla metà del periodo del moto oscillatorio del punto materiale e di ampiezza $\frac{1}{4}kA^2$.

Il teorema della conservazione dell'energia meccanica può essere usato per determinare le caratteristiche del moto oscillatorio. Infatti, per il punto materiale in oggetto, può scriversi

$$(41) \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

da cui

$$(42) \quad v_s = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

avendo posto $\omega = \sqrt{k/m}$.

Dalla (42) separando le variabili ⁽³⁾

$$(43) \quad \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt.$$

Ricordando che

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{A}$$

si ha integrando la (43)

$$\arcsen \frac{x}{A} = (\omega t + \varphi)$$

e quindi

$$(44) \quad x = A \sen(\omega t + \varphi)$$

che è l'equazione oraria del moto.

⁽³⁾ Sceglimo il segno positivo nelle (42); un risultato equivalente si ottiene nell'altro caso.

3.8. ENERGIA MECCANICA DI UN PUNTO MATERIALE IN CAMPO CONSERVATIVO

Vogliamo ora applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica per svolgere alcune considerazioni di carattere generale sul moto di un punto che si trovi in un campo conservativo, le quali torneranno utili per l'esame di situazioni che incontreremo in seguito.

Si tratterà il caso unidimensionale per semplicità, ma nessuna difficoltà sostanziale si incontra nell'estendere la trattazione al caso generale tridimensionale.

Si supponga a tal fine che il punto materiale si trovi in un campo conservativo e che l'energia potenziale vari nella direzione x secondo il diagramma in figura 3.11. Poiché l'energia potenziale del campo di gravità varia con la quota del punto, si potrebbe immaginare un punto materiale pesante che possa muoversi lungo un profilo come quello in figura disposto in un piano verticale e privo di attrito (per es. uno slittino su montagna con superficie ghiacciata).

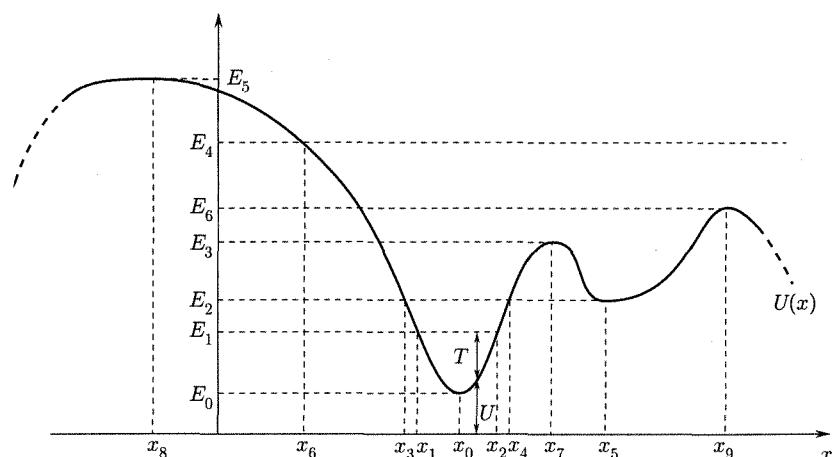


Fig. 3.11

L'energia totale del punto materiale non può essere inferiore a $E_0 = U_{\min}$. Nel caso che il punto possedeva tale energia esso non avrebbe energia cinetica e quindi si troverebbe in quiete in corrispondenza al fondo della valle dell'energia potenziale ($x = x_0$).

Invece, il punto potrà accedere a tutte le posizioni x per le quali l'energia totale sia maggiore di E_0 , sia cioè

$$E = \frac{1}{2}mv^2(x) + U(x) > E_0.$$

Nelle posizioni in cui è $U(x) = E$, come in x_1 e x_2 per $E = E_1$, il punto potrà possedere esclusivamente energia potenziale ($E_{1,2} = U$): queste peraltro non sono posizioni di equilibrio giacché la forza conservativa ($-dU/dx$) tenderà a far muovere il punto materiale verso la posizione di ascissa x_0 . Il punto materiale può però trovarsi in una qualsiasi posizione intermedia fra x_1 ed x_2 possedendo un'energia potenziale $U(x)$ e una energia cinetica $T = E - U(x)$. Si conclude quindi che il punto materiale si muoverà oscillando fra le posizioni x_1 ed x_2 , ove la velocità si annulla e la

direzione del moto si inverte. La velocità massima si raggiunge per $x = x_0$. In genere la curva dell'energia potenziale nell'intorno di $x = x_0$ può essere approssimata con una parabola ad asse verticale, cioè può porsi

$$(45) \quad U(x) = k(x - x_0)^2 + U_0.$$

Entro i limiti in cui questa approssimazione vale, il moto che il punto può assumere è armonico.

L'intensità della velocità in ogni posizione è sempre data da

$$(46) \quad v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}.$$

Se l'energia totale è E_2 , il punto materiale può trovarsi a oscillare fra x_3 ed x_4 o in quiete in x_5 . Per una energia E_4 esiste un solo punto (x_6) di inversione del moto: se quindi il punto materiale si muove verso le x decrescenti esso raggiungerà la posizione x_6 ove il suo moto si inverte (riflessione); se invece esso si muove inizialmente nel verso delle x crescenti continuerà indefinitamente il moto in tale verso: la intensità della velocità in ogni posizione è determinata dalla (46).

Per energie totali superiori a E_5 il moto ininterrottamente prosegue nel senso originario senza inversioni.

Le posizioni x_0 ed x_5 come si è detto sono di equilibrio (forza conservativa $-\partial U/\partial x = 0$). Si può osservare che se si sposta di poco il punto materiale, supposto in quiete in una di queste posizioni, la forza conservativa $(-\partial U/\partial x)$ ha direzione tale da riportare il punto materiale rispettivamente in x_0 ed x_5 : questo equilibrio si dice stabile (minimo dell'energia potenziale). *L'equilibrio stabile in un campo di forze conservative si ha nelle posizioni di minimo dell'energia potenziale*, dove è quindi $\partial^2 U/\partial x^2 > 0$.

Se il punto materiale avesse energia E_3 e si trovasse nella posizione x_7 sarebbe ancora soggetto a forza nulla (tangente alla $U(x)$ orizzontale) e quindi potrebbe mantenersi in quiete; se peraltro venisse allontanato di poco da tale posizione, la forza conservativa lo allontanerebbe da x_7 : l'equilibrio in questa posizione (massimo dell'energia potenziale) si dice *instabile* e ivi è $\partial^2 U/\partial x^2 < 0$.

Qualora la curva di potenziale abbia un tratto orizzontale come nell'intorno di x_8 il punto può trovarsi in *equilibrio (E = E₅) indifferente* giacché piccoli spostamenti lascerebbero il corpo in equilibrio nella nuova posizione $(-\partial U/\partial x = 0)$ senza che alcuna forza si desti.

Curve di energia potenziale del tipo della figura 3.11 si ritrovano nella descrizione di interazioni fra particelle costituenti la materia. Così per es. nel caso delle interazioni fra molecole, l'energia di una molecola in funzione della distanza da un'altra è, spesso, espressa soddisfacientemente dalla formula (Lennard-Jones)

$$(47) \quad U(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right]$$

essendo ϵ ed a due costanti (per una coppia di molecole) che hanno i significati rispettivamente di un'energia e di una distanza (quella per cui $U(x) = 0$) come indicato in figura 3.12 ove è riportata la $U(x)$.

La forza fra le due particelle è in questo caso

$$(48) \quad F_x(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b_1}{x^{13}} - \frac{b^2}{x^7}$$

In un campo di forze conservative si ha equilibrio nei punti dove è nullo il gradiente (la derivata) della funzione energia potenziale; il segno della derivata seconda discrimina le posizioni di equilibrio stabile (> 0) da quelle di equilibrio instabile (< 0)

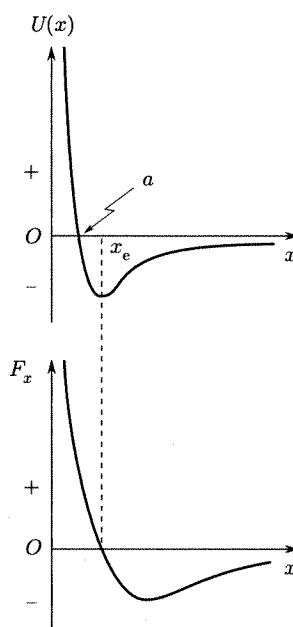


Fig. 3.12

■ 3.9. VARIAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA IN PRESENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE

La legge della conservazione dell'energia meccanica è stata stabilita come un caso particolare del teorema del lavoro e dell'energia cinetica e vale solo quando la somma delle forze applicate al punto materiale sia conservativa.

Quando sono presenti e non possono essere trascurate forze non conservative, occorre far uso direttamente del teorema del lavoro e dell'energia. Esso può scriversi

$$(49) \quad \sum L = T_2 - T_1$$

mettendo nel primo membro la somma algebrica dei lavori compiuti da tutte le forze applicate al punto materiale durante il suo passaggio dalla posizione 1 alla posizione 2.

Esempi di forze non conservative sono le forze d'attrito, le resistenze passive (per es. dell'aria): queste forze sono sempre dirette in senso contrario al moto sicché per ogni spostamento elementare ds , il lavoro dL è negativo: è chiaro quindi che per un percorso chiuso il lavoro totale sarà finito e negativo e non può essere nullo come accade per forze conservative.

Nel caso generale saranno applicate al punto materiale alcune forze conservative ed altre non conservative. È possibile allora dividere la sommatoria a primo membro della (49) in due parti che si riferiscono rispettivamente ai lavori delle forze conservative e non conservative:

$$(50) \quad \sum L_{nc} + \sum L_c = T_2 - T_1 .$$

Il lavoro delle forze conservative può esprimersi mediante le variazioni di energia potenziale ($U_2 - U_1$) e tale termine può trasportarsi nel secondo

essendo b_1 e b_2 le due costanti

$$b_1 = 48\epsilon a^{12}$$

$$b_2 = 24\epsilon a^6 .$$

Dalla (48) si vede che $F_x(x)$ è somma di due termini: il primo positivo tende ad allontanare le due molecole (aumentare la x) e rappresenta quindi una forza repulsiva, proporzionale a $1/x^{13}$. Il secondo termine tende ad avvicinare le due molecole e rappresenta una forza attrattiva: essa è proporzionale a $1/x^7$ e quindi decresce con la distanza fra le molecole molto meno rapidamente della forza repulsiva. Le due forze si bilanciano ($F_x = 0$) per una distanza, x_e , corrispondente alla posizione di equilibrio, cioè al minimo della curva dell'energia potenziale (fig. 3.12). Se la distanza fra le due molecole supera x_e la forza attrattiva è maggiore di quella repulsiva; il contrario avviene per distanze più piccole di x_e : in realtà si hanno oscillazioni nelle quali la distanza fra le due molecole varia intorno al valore x_e . Se una molecola si trova in equilibrio rispetto a un'altra, a distanza x_e , perché essa possa essere portata a distanza molto grande dalla stessa molecola, fino a non avere più alcuna interazione, è necessario fornire dall'esterno una energia pari ad ϵ .

Analoga curva per l'energia potenziale è quella che descrive l'interazione tra due atomi in una molecola biamonica. La distanza di equilibrio x_e è quella alla quale essi si troverebbero con velocità relative nulle: per quanto si è detto, in realtà gli atomi oscillano e la loro distanza varia intorno al valore x_e . L'energia ϵ è l'energia (di dissociazione) che bisogna conferire perché un atomo abbandoni l'altro e la molecola si decomponga.

membro della (50), cioè in quello ove sono riunite le energie

$$(51) \quad \sum L_{nc} = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = E_2 - E_1.$$

La variazione della energia meccanica posseduta dal punto materiale in due posizioni è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative.

La variazione dell'energia meccanica di un punto materiale tra due posizioni è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative

Esempio

Un punto materiale di massa $m = 2 \text{ kg}$ scenda lungo un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzonte (fig. 3.13). Il coefficiente di attrito dinamico fra piano e corpo sia $\mu_d = 0,3$. Si vuole calcolare il lavoro compiuto dalle forze di attrito quando il punto materiale, partendo dalla quiete, ha subito una variazione di quota $h = 1,2 \text{ m}$.

La forza di attrito A è data da

$$A = \mu_d R_N = \mu_d mg \cos \alpha$$

e il lavoro resistente compiuto da tali forze è espresso da

$$L = -\mu_d mg \cos \alpha l.$$

Poiché è $l = h / \sin \alpha$, si ha

$$L = -\mu_d mgh \cotan \alpha.$$

Sostituendo i valori si trova

$$L = -0,3 \times 2 \times 9,8 \times 1,2 \times 1,73 \cong -12,2 \text{ J}.$$

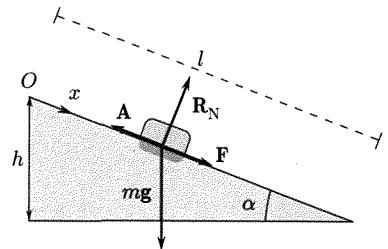


Fig. 3.13

Tale lavoro può calcolarsi anche mediante la (51). La variazione di energia potenziale è

$$\Delta U = -mgh$$

e la variazione di energia cinetica è

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_f^2$$

ove v_f è l'intensità della velocità posseduta dal corpo quando la sua quota è variata di h .

La forza motrice cui è soggetto il corpo è

$$F = mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha = mg(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

diretta secondo x , verso il basso.

L'accelerazione risulta

$$a = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha),$$

la velocità scalare in funzione del tempo (essendo $v_{x0} = 0$)

$$v_x = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)t$$

e la distanza x percorsa, essendo $x = 0$ per $t = 0$,

$$x = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)t^2.$$

Ponendo $x = l = h / \sin \alpha$ si ricava

$$t^2 = \frac{2h}{g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) \sin \alpha}$$

e

$$v_f^2 = \frac{g^2(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)^2 2h}{g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) \sin \alpha} = 2gh(1 - \mu_d \cotan \alpha).$$

Pertanto

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh(1 - \mu_d \cotan \alpha)$$

e quindi

$$L = \Delta E = \Delta U + \Delta T = -mgh + mgh(1 - \mu_d \cotan \alpha) = -\mu_d mgh \cotan \alpha$$

come già si era ottenuto.

■ 3.10. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

È possibile osservare sperimentalmente che tutte le volte che forze non conservative compiono un lavoro spostando un punto materiale, si presenta qualche altro processo concomitante nel sistema fisico di cui il punto materiale fa parte, come per es. produzione di calore, di onde sonore, separazione di cariche elettriche ecc.: in tali processi si possono riconoscere altre energie (termica, elastica, elettrica, chimica ecc.) la cui variazione fra le posizioni iniziale e finale del corpo sembra corrispondere perfettamente al lavoro compiuto dalle forze non conservative. Su tali questioni si avrà modo di tornare in seguito in varie parti della fisica.

Appare comunque chiaro che, se si introducono questi altri tipi di energia, il primo membro della (51) può ancora esprimersi mediante variazioni di energia che⁽⁴⁾ accompagnano il passaggio del punto fra la posizione iniziale 1 e quella finale 2. È logico allora portare questi termini nel secondo membro, quello dell'energia, e scrivere

$$(52) \quad 0 = E_2 - E_1 + \text{variazioni di altri tipi di energia}$$

cioè

$$E_T = \text{cost}$$

*Nei processi
di interazione tra corpi
l'energia totale
si conserva*

indicando con E_T la somma di tutte le energie possedute dal punto materiale, o che si trovano nell'ambiente per effetto dell'interazione del corpo, e che chiamiamo energia totale in corrispondenza a uno stato del punto materiale.

La (52) esprime una delle leggi fondamentali della fisica classica, quella della conservazione dell'energia: in un qualsiasi processo durante il quale azioni di vario genere si esercitano su un punto materiale (o, come vedremo, su un sistema di punti materiali), l'energia può trasformarsi da una forma in un'altra ma non può crearsi né distruggersi: *l'energia totale resta costante*.

Varie volte, quando si sono studiati nuovi tipi di esperienze è sembrato che tale legge venisse meno, ma un esame accurato ha sempre mostrato il presentarsi contemporaneo di processi in cui energia, cioè capacità di compiere lavoro, era presente sotto una nuova forma. La considerazione di questa forma nuova di energia ha sempre ristabilito la validità della (52), sicché questa è considerata oggi una delle leggi di validità meglio provate della fisica classica. La legge di conservazione dell'energia per questa sua validità generale costituisce uno dei più importanti mezzi di unione delle

⁽⁴⁾ Si noti che tali energie (termica, sonora) sono spesso nell'ambiente (cioè in altri punti materiali con cui si è svolta una interazione) e non nel punto materiale in questione.

varie parti della fisica classica. Vedremo nel seguito varie trasformazioni di un tipo di energia (meccanica, elettrica, termica ecc.) in altra: esse saranno sempre rette dalla (52).

■ 3.11. TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Al termine della trattazione della meccanica newtoniana per il punto materiale vogliamo riprendere alcune considerazioni sulle sue limitazioni quando siano in gioco velocità molto elevate e nello stesso tempo accennare brevemente⁽⁵⁾ alle basi di una teoria, quella della relatività che, sviluppatisi agli inizi di questo secolo, ha introdotto nuovi concetti fondamentali e prodotto cambiamenti sostanziali in punti di vista, ben radicati in precedenza, per l'interpretazione dei fenomeni fisici.

Nella meccanica classica newtoniana, basata sui tre principi della dinamica, si dà un valore assoluto allo spazio e al tempo⁽⁶⁾: si assume cioè che più osservatori misurando le dimensioni del medesimo oggetto o il medesimo intervallo di tempo fra due eventi, debbano trovare gli stessi risultati qualunque sia il loro moto relativo.

Si è già osservato come nella meccanica newtoniana esista una netta distinzione fra sistemi di riferimento inerziali e non inerziali. Solamente alle forze (causa di accelerazioni misurate nei sistemi inerziali) viene assegnato un carattere *reale*; nei sistemi non inerziali intervengono anche forze *apparenti*. I sistemi inerziali si muovono uno rispetto a ogni altro di moto di traslazione rettilineo uniforme (con $v_t = \text{cost}$). Ciò significa che le accelerazioni misurabili per uno stesso punto materiale nei vari sistemi inerziali sono le stesse e, in conseguenza, *le leggi della dinamica restano invariate cambiando il sistema di riferimento inerziale (principio di relatività galileiano)*. Non è quindi possibile distinguere fra loro sistemi inerziali mediante esperienze di dinamica.

Le trasformazioni di coordinate per passare da un sistema inerziale a un altro sono quelle galileiane del cap. 2, eq. (1):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' + \mathbf{v}_t t$$

cui si aggiunge quella dell'eguaglianza dei tempi: $t = t'$. Esse lasciano immutate le accelerazioni, oltre che il tempo ($t = t'$).

Per le velocità (\mathbf{v}_a , \mathbf{v}_r) nei due sistemi vale la legge di composizione [cap. 1, eq. (91)]

$$[I, 91] \quad \mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{v}_t$$

essendo \mathbf{v}_t la velocità di trascinamento, pari alla velocità costante di traslazione del secondo sistema rispetto al primo.

Al principio del secolo ventesimo si presentò peraltro una grave difficoltà: in altri campi della fisica erano state stabilite leggi, quelle che regolano i fenomeni elettromagnetici, che non mantengono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali. Applicando cioè a esse (per es. alle equazioni di Maxwell, che queste leggi sintetizzano) le trasformazioni galileiane, la loro forma matematica viene alterata: sarebbe

⁽⁵⁾ Trattazioni più ampie si trovano in numerosi libri. Fra essi indichiamo i seguenti: E. Persico, *Introduzione alla fisica matematica*, Zanichelli; L. Landau, E. Lifshitz, *Fisica teorica*, Vol. III, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford; A.O. French, *Special relativity*, MIT Series, Butler-Tanner, London, 1968; R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, Vol. I, Masson, Milano, 1985; L. Mistura, *La relatività in meccanica*, Ed. Kappa, Roma, 1983.

⁽⁶⁾ Newton nei suoi *Philosophiae naturalis principia mathematica* afferma: "Il tempo assoluto, reale e matematico, scorre ovunque uniformemente in maniera intrinseca indipendentemente da tutte le cose", e ancora: "lo spazio assoluto, per sua natura, senza riferimento ad alcunché di esterno, rimane sempre lo stesso e immobile".

possibile distinguere di conseguenza le terne inerziali fra loro con esperienze elettromagnetiche⁽⁷⁾ in contrasto a ciò che, come s'è detto, accade con esperienze di dinamica.

L'esame della validità o meno delle trasformazioni galileiane nel campo dell'elettromagnetismo è stato oggetto di celebri esperienze verso la fine del secolo precedente.

La luce è formata da onde elettromagnetiche (campo elettrico e campo magnetico alternati che si propagano) e l'esperienza di Michelson e Morley nel 1887 (la più celebre delle esperienze sviluppate allo scopo avanti detto) intendeva controllare sperimentalmente se per la velocità di propagazione della luce emessa da una sorgente in moto rispetto a un sistema spaziale di riferimento in cui si trovi fermo l'osservatore, o ricevuta da un osservatore in moto rispetto a un sistema di riferimento in cui si trovi ferma la sorgente, è valida la regola di composizione (I, 91), se cioè anche per quanto riguarda la luce siano applicabili le trasformazioni galileiane per passare da un sistema inerziale a un altro. Lo schema dell'esperienza è illustrato in figura 3.15. Una sorgente di luce monocromatica S invia un fascetto che, incidento su uno specchio semitrasparente St a 45° rispetto alla direzione del fascetto stesso, viene diviso in due fascetti ortogonali che viaggiano verso due specchi (S_1, S_2) e vengono da questi riflessi sullo stesso percorso precedente. Un successivo attraversamento, e rispettivamente riflessione, su St porta i due fascetti in O dove si esaminano gli effetti della sovrapposizione (interferenza). L'interferenza produce figure che dipendono in maniera molto sensibile da piccoli sfasamenti fra le onde elettromagnetiche che costituiscono ciascuno dei fascetti, cioè da piccole differenze nel tempo impiegato a compiere i due diversi percorsi (geometricamente uguali).

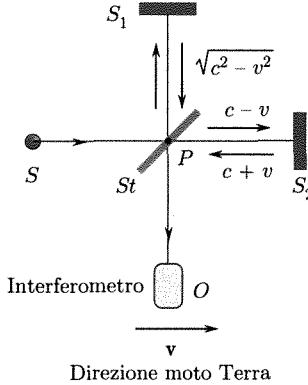


Fig. 3.15

Si supponga ora che l'apparecchio si sposti nella direzione che va da P verso S_2 con una velocità v rispetto a un sistema inerziale fisso nello spazio in cui la luce si propaga con velocità c . Se si applica la regola di composizione galileiana delle velocità si hanno i risultati indicati in figura e si trova una differenza $\Delta t = lv^2/c^3$ (l è la lunghezza $PS_1 = PS_2$) tra i tempi richiesti dalla luce a compiere il tragitto PS_2P e quello PS_1P . Ciò conduce a uno sfasamento nell'interferometro che cambierebbe se l'apparecchio venisse ruotato intorno a un asse per P ortogonale al disegno. Nell'esperienza v era la velocità orbitale della Terra (30 km/s) e $l = 11$ m; la sensibilità del dispositivo sperimentale era tale da poter mettere in evidenza un effetto cento volte più piccolo di quello atteso sulla base dei calcoli precedenti. Il risultato di esperienze ripetute (ruotando anche lo strumento intorno a un asse per P) in vari giorni dell'anno (diverse direzioni di v) è sempre stato negativo nel senso che non è stato posto in evidenza alcuno sfasamento.

Tutte queste esperienze hanno mostrato che, contrariamente a quanto potrebbe attendersi dalla applicazione delle trasformazioni galileiane, *la velocità della luce non dipende dal moto dell'osservatore o della sorgente nello spazio ed è la stessa qualunque sia il sistema inerziale in cui viene misurata*.

⁽⁷⁾ L'elettromagnetismo sarà oggetto di studio successivo. Per potere tuttavia apprezzare la situazione ci riferiremo qui a un esempio molto semplice per la cui comprensione bastano le poche nozioni di elettromagnetismo note da corsi scolastici. Si consideri (fig. 3.14a) un filo conduttore lungo e rettilineo sul quale sia stata uniformemente distribuita una carica positiva: inoltre una carica puntiforme positiva si trovi in P . Un osservatore O fermo rispetto al filo e alla carica puntiforme potrà misurare una forza repulsiva F_1 (di Coulomb) (cap. 2, par. 2.15). Un secondo osservatore O' anche esso inerziale, in moto di traslazione uniforme rispetto al filo (velocità v), vedrebbe la situazione come in figura 3.14b. Il filo è carico ed esercita sulla carica la forza F_1 ; inoltre egli vedrebbe le cariche sul filo e la carica in P muoversi con velocità $-v$. Cariche in moto costituiscono una corrente elettrica e creano un campo di induzione magnetica B che agisce sulla carica in moto (in P) (cap. 2, par. 2.16). È possibile mostrare che la forza F_2 è diretta come in figura. Se ne deduce che secondo lo schema classico la forza sulla carica (e quindi l'accelerazione conseguente) misurata nei due sistemi inerziali sarebbe diversa.

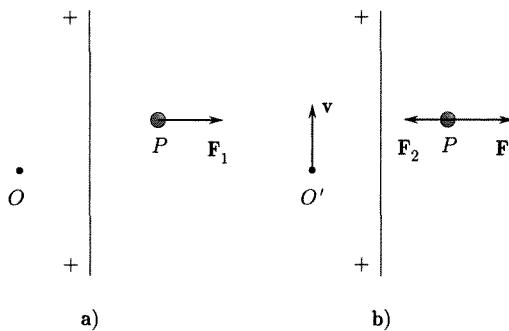


Fig. 3.14

Einstein, per chiarire il problema, sottopose ad acuta critica concetti posti o implicitamente ammessi nella meccanica classica e fu condotto a rigettare i concetti di spazio e tempo assoluti, indipendenti cioè dallo stato di moto dell'osservatore. Non è possibile ammettere un tempo che, con un'idea metafisica, scorra uniformemente e in maniera inalterabile in modo aprioristico. È necessario considerare il tempo, per quel che riguarda la fisica, come una qualsiasi grandezza fisica, fissando esattamente le operazioni necessarie per la sua misura. Analogamente, non si può affermare che intervalli di tempo misurati in diversi sistemi siano i medesimi se non si specifica prima la maniera da seguire per il confronto.

Appare molto più soddisfacente ammettere come concetto base l'equivalenza dei sistemi inerziali per tutta la fisica, cioè che le leggi fondamentali debbano in ogni parte della fisica presentarsi nella stessa maniera a *osservatori inerziali diversi*.

Einstein (1905) mostrò che la soluzione delle difficoltà incontrate può essere ottenuta (teoria della relatività ristretta)⁽⁸⁾ partendo da due postulati⁽⁹⁾:

1. tutte le leggi della fisica devono essere le stesse (cioè rimanere invariate) per tutti gli osservatori in sistemi di riferimento inerziali (*principio della relatività ristretta*);
2. la velocità della luce è la stessa per osservatori inerziali, indipendentemente dal fatto che la sorgente sia ferma o in moto nel corrispondente sistema di riferimento.

La velocità di propagazione della radiazione elettromagnetica è indipendente dal sistema di riferimento

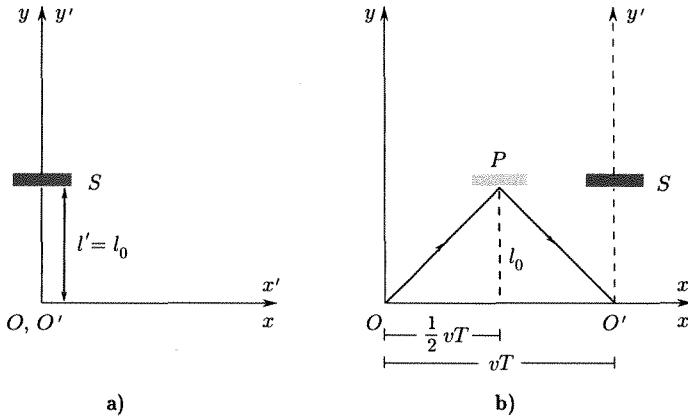


Fig. 3.16

È facile vedere che il secondo postulato porta immediatamente di conseguenza una variazione nei criteri di paragone di lunghezze e intervalli di tempo usati prima, cioè nella meccanica classica. Si considerino due sistemi inerziali (osservatori O , O') e l'osservatore O' (fig. 3.16a) si sposti nella direzione $x' = x$ con velocità v rispetto ad O . Nel suo sistema si trovi uno specchio S , disposto normale sull'asse y' alla distanza $l' = l_0$ (l_0 la distanza di riposo, cioè misurata in situazione statica). All'istante in cui i due sistemi xy e $x'y'$ sono esattamente sovrapposti una sorgente di luce dall'origine degli assi comune emetta un impulso di luce, che successivamente colpisca S e ritorni all'osservatore O' nell'origine degli assi (x', y') . L'osservatore O' determina l'intervallo T' fra i due eventi (emissione della luce e ricezione nell'origine)

⁽⁸⁾ Il nome *ristretta*, o alle volte *speciale*, dato a questa teoria e al principio su cui essa si basa deriva dal fatto che essa si limita a considerare sistemi di riferimento (inerziali) in moto di traslazione rettilinea uniforme uno rispetto all'altro. Einstein ha successivamente considerato il caso del moto di un punto materiale riferito a due terne di cui una in moto accelerato rispetto all'altra. Di tale caso si occupa la *teoria generale della relatività*. Essa si basa su un *principio* (di *relatività generale*) il quale richiede che tutte le leggi della fisica debbano essere scritte in una forma indipendente dello stato di moto del sistema di riferimento. Tale teoria ha importanti riflessi nel campo della gravitazione.

⁽⁹⁾ In realtà il II postulato, qui esplicitato, è contenuto nel primo perché è richiesto per la validità di quest'ultimo nell'elettromagnetismo.

misurando $l' = l_0$ e la velocità della luce: $T' = 2l_0/c$. Per l'osservatore O , il percorso della luce non avviene lungo l'asse y , parallelo a y' , ma secondo il percorso indicato in figura 3.16b (la riflessione avviene nella posizione occupata dal sistema mobile all'istante $T/2$): la sua lunghezza è $2\sqrt{l_0^2 + (\frac{1}{2}vT)^2}$. Siccome anche egli *misura la stessa velocità della luce*, ottiene

$$(53) \quad T = \frac{2}{c} \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{1}{2}vT\right)^2} \quad T = \frac{2l_0}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{vT}{l_0}\right)^2}$$

da cui

$$(54) \quad T = \frac{2l_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si osservi che $T > T'$ (essendo sempre $v < c$, vedi seguito).

La relazione può essere ritrovata se si scambiano gli osservatori O e O' (e i corrispondenti sistemi) nella funzione di osservatore fisso e mobile. Si può dire che *la durata di un intervallo di tempo tra due eventi nel sistema mobile, misurata dall'osservatore nel sistema fisso, è maggiore di quella misurata dall'osservatore nel sistema mobile* (dilatazione degli intervalli di tempo): cioè un orologio che si muove con velocità v rispetto a un osservatore sembra rallentare per il fattore $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ se viene paragonato con un orologio fermo rispetto all'osservatore O , quello che è lo stesso, i processi che si svolgono in funzione del tempo in un sistema in moto sembrano avvenire più lentamente a un osservatore fermo. Questa *dilatazione dei tempi* si rende evidente solo nei casi in cui v è paragonabile (dello stesso ordine) con c . Se per es. è $v = 300 \text{ km/s}$, una velocità già notevolmente alta per oggetti che si incontrano nei problemi comuni della meccanica, $v/c = 3 \cdot 10^5 / 3 \cdot 10^8 = 10^{-3}$. Risulta quindi $v^2/c^2 = 10^{-6}$, del tutto trascurabile rispetto all'unità e di conseguenza $T \approx T'$.

Considerazioni dello stesso tipo fanno vedere che, ancora come conseguenza della costanza della velocità della luce, se si considerano i due sistemi (O, x, y) (fisso) e (O', x', y') (mobile) con la velocità v nella direzione x , x' (come in fig. 3.16) e si considera la distanza fra due punti $(x'_2 - x'_1)$ nel sistema mobile, essa è valutata dall'osservatore nel sistema fisso in valore diverso

$$(55) \quad x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Ciò significa che la lunghezza di un oggetto nella direzione x del moto relativo dei due sistemi, che si trova nel sistema mobile, viene *valutata* dall'osservatore fermo ($l = x_2 - x_1$) più piccola della valutazione ($l' = x'_2 - x'_1 = l_0$) fatta dall'osservatore nel sistema mobile. Si può dire che nella direzione del moto relativo, la lunghezza dell'oggetto in moto appare ridotta all'osservatore fermo. In ciò consiste la contrazione relativistica delle lunghezze (o contrazione Lorentz-Fitzgerald). Anche in questo caso gli effetti si notano solo per velocità vicine a c .

I valori delle lunghezze nelle direzioni y e z (normali a quella del moto relativo fra le due terne) sono gli stessi per i due osservatori.

Le considerazioni ora svolte rivelano come i due effetti consistenti nelle diverse *valutazioni* di una lunghezza nella direzione del moto relativo e di un intervallo di tempo, effettuate da due osservatori in moto relativo, sono una conseguenza della natura del moto e delle limitazioni poste alle determinazioni che gli osservatori possono fare: il fisico non può che prenderne atto e costruire degli edifici logici atti a interpretare e inquadrare i risultati delle esperienze fatte o possibili.

I due postulati conducono a relazioni di trasformazione, per passare da un sistema inerziale a un altro, diverse da quelle galileiane: esse prendono il nome di trasformazioni di Lorentz giacché erano già state stabilite da Lorentz nello studio del problema del campo elettromagnetico creato da una carica in moto. Se per semplicità si suppone che il primo sistema (che chiameremo fisso) (O, x, y, z) e il secondo (O', x', y', z') coincidano all'istante $t = t' = 0$ e che il secondo si muova con velocità costante v diretta come $x \equiv x'$ nel verso positivo di questi assi, le

Le lunghezze e gli intervalli di tempo, di medesimi oggetti e tra medesimi eventi, sono misurati in modo diverso da osservatori in moto relativo

Spazi e tempi si trasformano, se misurati in sistemi diversi, secondo le trasformazioni di Lorentz

trasformazioni di Lorentz si scrivono

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Le relazioni possono essere stabilite con il seguente ragionamento. Si considerino i due sistemi su definiti e si supponga che all'istante $t = t' = 0$ in cui i due sistemi di assi sono sovrapposti, parta da $O \equiv O'$ un impulso di luce. Si consideri la situazione successiva in cui la perturbazione (impulso di luce) abbia raggiunto il punto A definito da \mathbf{r} ed \mathbf{r}' rispettivamente nei due sistemi (fig. 3.17). Nel sistema fisso si ha

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Nel sistema mobile analogamente

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c t'^2$$

dato che i due osservatori misurano la stessa c .

È possibile vedere che l'unico sistema di relazioni (di trasformazione) che possono legare (x, y, z) a (x', y', z') è quello (56).

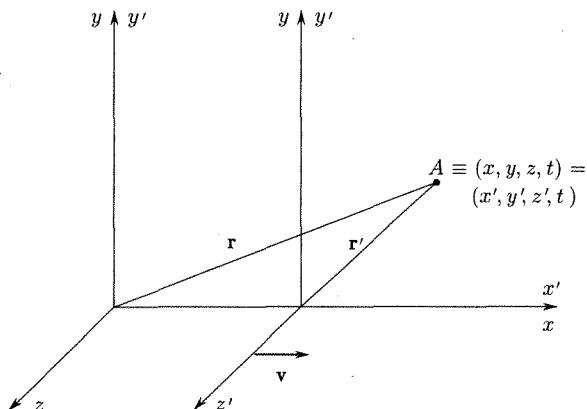


Fig. 3.17

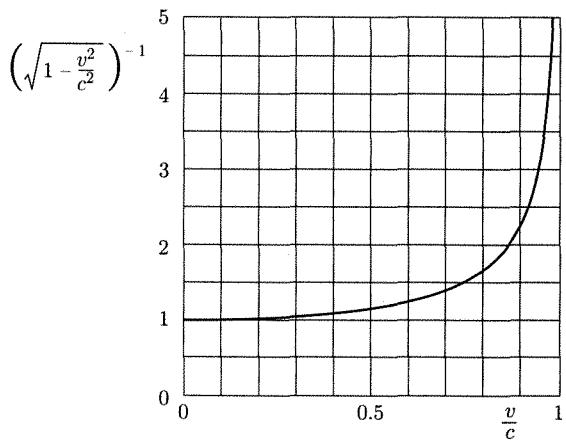


Fig. 3.18

Si osservi che le prime tre relazioni della trasformazione di Lorentz si riducono a quelle di Galilei e la quarta a $t = t'$ tutte le volte che la velocità dei corpi in moto (rispetto a un riferimento inerziale in cui si eseguono le misure) sia notevolmente più piccola della velocità della luce: $v \ll c$. La figura 3.18 mostra il valore del rapporto $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ al variare di v/c : esso si scosta sensibilmente da 1 solo quando v diviene dell'ordine di grandezza di c (per es. $v = 0,1 c$) e tende a infinito per $v \rightarrow c$. Si è già visto che per $v = 300 \text{ km/s}$, è $v^2/c^2 = 10^{-6}$ e il rapporto $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ è praticamente pari all'unità.

Tutto ciò mostra che *la meccanica relativistica si riduce alla meccanica classica per corpi che hanno, rispetto all'osservatore, velocità notevolmente minori della velocità della luce*; questo d'altra parte, dato l'elevato valore di c , è il caso che si incontra più comunemente, dal moto dei pianeti a quello di sistemi delle dimensioni degli atomi, e spiega il successo della meccanica newtoniana.

Soltanto quando si tratti di particelle che possano essere portate a velocità prossime a c , oppure quando si considerino problemi di elettromagnetismo o alcuni problemi di astrofisica, l'approssimazione costituita dalla meccanica classica è inadeguata e bisogna applicare la teoria della relatività ristretta.

La fiducia nella esattezza di tale teoria viene oltre che dalla ragionevolezza dei postulati alla sua base, dalle numerose conferme sperimentali delle previsioni, veramente rivoluzionarie rispetto alle idee precedenti, da essa formulate.

Sebbene quindi la necessità pratica di trattare i problemi con la meccanica relativistica sia limitata a pochi casi, la teoria della relatività, come si è già detto, è di grandissima importanza e ha prodotto cambiamenti sostanziali nelle vedute della fisica moderna.

■ 3.12. MASSA ED ENERGIA NELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

In meccanica classica una forza costante applicata a un punto materiale produce un'accelerazione costante

[II, 5]

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

e quindi, se applicata per un tempo sufficientemente grande, dovrebbe portare il punto a velocità V (indicata ora con la maiuscola per distinguerla dalla velocità del sistema), superiori a c . Il fatto che V non possa mai superare c mostra che in relatività si deve abbandonare la formulazione [II, 5] del II principio della dinamica e si deve ammettere che l'effetto della forza \mathbf{F} debba diminuire al crescere di V . Un primo passo in questo senso viene dal ricordare che una formulazione più generale del II principio (e questa è la formulazione originaria di Newton) è data da

$$(57) \quad \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{V})}{dt}$$

e dall'esame di come si debba comportare la quantità di moto (o la massa) di un punto materiale alle elevate velocità.

In particolare, si può asserire che, in accordo ai postulati della relatività, la legge che esprime la conservazione della quantità di moto (cioè quando $\mathbf{F} = 0$) deve restare inalterata in due sistemi inerziali, legati dalla trasformazione di Lorentz. È possibile allora vedere come questa condizione imponga che in un sistema inerziale *la massa del punto materiale dipenda dalla velocità secondo la*

$$(58) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

cioè un punto materiale che si muova con velocità V rispetto a un osservatore appare a quell'osservatore dotato di una massa (inerzia) maggiore di quella (m_0 , di riposo) che avrebbe se fosse in quiete rispetto all'osservatore stesso. Anche in questo caso si vede che l'effetto è molto piccolo tranne che per valori di v prossimi a c . Nei casi più comuni la massa da considerare è quella di riposo ed essa non varia praticamente per le velocità che si incontrano comunemente (caso classico): si osservi che per $v = 300 \text{ km/s}$ risulta $m_0/m = \sqrt{1 - 10^{-6}} \sim 1$. Se peraltro si considerano particelle subatomiche (o nucleari), come per es. elettroni, portati nelle macchine acceleratrici a velocità di qualche decimo di c , o emessi da nuclei radioattivi (i raggi beta sono elettroni la cui velocità può a volte essere anche pari a $0,9995 c$) le correzioni relativistiche sono importanti. Determinazioni accurate della dipendenza della massa di queste particelle dalla loro velocità possono essere fatte sottoponendole all'azione di campi magnetici (cap. 2, par. 2.16): la traiettoria viene curvata e la misura del raggio di curvatura consente di valutare m . Così per es. nel caso di raggi beta m_0 è la massa di elettroni a bassa velocità e si ottengono per m valori in accordo con la (58): $m/m_0 = 1,15$ per $V = 0,5 c$ e $m/m_0 = 7,1$ per $V = 0,995 c$.

Molti altri esperimenti sono stati eseguiti per controllare la (58) e le conclusioni trovate sono in accordo con la relazione.

Una volta definita la massa secondo la (58), la (57), che può prendersi come definizione della forza, può essere mantenuta anche in meccanica relativistica.

La massa di un corpo varia in dipendenza del sistema di riferimento dal quale si misura

In accordo al principio di relatività, per un punto materiale devono essere contemporaneamente valide le

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{V})}{dt}$$

$$\mathbf{F}' = \frac{d(m'\mathbf{V}')}{dt}$$

che descrivono il suo moto nei due sistemi. Da queste relazioni è possibile dedurre le relazioni di trasformazione delle forze. Si trova, nel caso che il sistema (x', y', z') si sposti con velocità \mathbf{v} nella direzione $x \equiv x'$ rispetto al sistema (x, y, z) .

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F'_x + \frac{V'_y v}{c^2 + V'_x v} F'_y + \frac{V'_z v}{c^2 + V'_x v} F'_z \\ F_y = \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 + V'_x v)} F'_y \\ F_z = \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 + V'_x v)} F'_z. \end{array} \right.$$

Nel caso particolarmente semplice in cui $\mathbf{V}' = 0$, esse divengono

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F'_x \\ F_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F'_y \\ F_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F'_z. \end{array} \right.$$

Si consideri ora un punto materiale su cui agisca la forza totale \mathbf{F} e per semplicità si supponga che la forza agisca sempre nella direzione nel moto e che il punto parta dalla quiete. Il lavoro compiuto si ritrova come energia cinetica, che qui scriviamo E_c

$$E_c = \int_0^s \mathbf{F} ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) \mathbf{V} dt = \int_0^v \mathbf{V} d(m\mathbf{V}) = mv^2 - \int_0^v m\mathbf{V} d\mathbf{V}.$$

Utilizzando l'espressione (58) per m

$$E_c = \frac{m_0 V^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} dv.$$

Eseguendo l'integrazione si trova

$$(61) \quad \begin{aligned} E_c &= \frac{m_0 V^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - m_0 c^2 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2. \end{aligned}$$

Tale importante relazione⁽¹⁰⁾ suggerisce che l'aumento di energia cinetica può essere considerato come aumento della massa, in conseguenza della dipendenza di m da v .

⁽¹⁰⁾ La (61) si riduce alla forma familiare quando $v \ll c$. La funzione $1/\sqrt{1-x}$ per bassi valori di x può essere bene approssimata dai primi due termini dello sviluppo in serie

$$(62) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

Un tale risultato può essere esteso alle variazioni di energia di qualsiasi natura del punto materiale

$$(64) \quad \Delta E = (m - m_0)c^2 = \Delta mc^2.$$

Tutte le volte che l'energia di un punto materiale viene aumentata, la sua massa aumenta. Si vede quindi che energia e massa sono in relazione diretta tramite il fattore c^2 . Al termine m_0c^2 , che può essere interpretato come l'energia del punto materiale che corrisponde alla massa di riposo, si dà il nome di *energia di riposo*.

L'equivalenza fra massa ed energia è uno dei risultati più importanti della teoria della relatività e consente di fondere la due leggi di conservazione classiche, dell'energia e della massa. Se si considera un punto materiale in un campo conservativo si può considerare l'energia che compete alla massa m_0 (cioè m_0c^2) o la massa corrispondente all'energia meccanica E_m (potenziale e cinetica) (cioè E_m/c^2) ed esprimere l'unica legge di conservazione indifferentemente come conservazione della energia del punto materiale ($E_m + m_0c^2$) o della massa ($m_0 + E_m/c^2$).

In casi più generali in cui intervengono altre forme di energia che pur non essendo localizzate nel punto materiale sono legate alle sue interazioni con l'ambiente (cioè con altri punti materiali), includendo questo nell'espressione della legge di conservazione, si giunge a dire: in un *sistema isolato* l'energia totale e la massa materiale non si conservano separatamente costanti, come ammesso in fisica classica; ciò che *si conserva costante è la combinazione*

$$m_0 + \frac{E^2}{c^2}$$

e si può avere trasformazione di massa in energia.

Dato l'elevato valore di c queste trasformazioni non possono essere messe in evidenza in fenomeni della meccanica comune o in processi quali, per es., le reazioni chimiche; questa è la causa del fatto che per così lungo tempo si è mantenuta la convinzione classica della separazione netta delle due grandezze fisiche energia e massa. Se per es. si considera la combustione di carbone, che libera un'energia di circa $3 \cdot 10^7$ J per kg si ha che a tale energia corrisponde una massa di circa $3 \cdot 10^7/c^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$ kg e questa è la differenza fra la massa delle sostanze che entrano nella reazione e quella dei prodotti della combustione: è chiaro che tale differenza non può essere messa in evidenza perché richiederebbe una precisione nelle misure di massa dell'ordine di una parte su 10 miliardi, che non si può ottenere.

È invece possibile ritrovare tali effetti quando sono in gioco particelle di piccola massa di riposo e alte energie. Ciò accade nei processi nucleari: uno di questi è la produzione di coppie formate da un elettrone positivo e^+ e da un elettrone negativo e^- , causata dall'assorbimento di radiazione elettromagnetica di frequenza elevata ν (raggi γ). La reazione si scrive

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-.$$

In essa γ rappresenta la particella (fotone) associata alla radiazione e avente energia proporzionale a ν . La reazione inversa anche accade.

La massa di riposo delle due particelle è $m_0 = 9,1091 \cdot 10^{-31}$ kg. L'energia di riposo corrispondente a ciascuna di esse è

$$\begin{aligned} E &= 9,1091 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J} \\ &\cong 0,51 \cdot 10^6 \text{ eV} \end{aligned}$$

eV sta per elettrone volt ed è una unità di energia usata in fisica atomica e nucleare (vedi nota 7, cap. 2, par. 2.9). Si trova in accordo con le previsioni teoriche che, perché il processo avvenga, l'energia del fotone γ deve essere almeno pari a quanto richiesto per creare le masse di riposo delle due particelle cioè:

$$E_\gamma \cong 2 \times 0,51 \cdot 10^6 = 1,02 \cdot 10^6 \text{ eV}.$$

e quindi

$$(63) \quad E_c \cong m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Se l'energia del fotone è superiore, l'eccesso viene portato via come energia cinetica dalle due particelle create.

La quantità di energia che le reazioni nucleari pongono a disposizione è legata dalla (64) a una variazione di massa delle particelle che intervengono nelle reazioni stesse. Analogamente, è possibile provare che le masse dei nuclei atomici sono inferiori alla somma delle masse di riposo delle particelle che li costituiscono: il difetto di massa corrisponde all'energia che sotto forma di radiazione γ è stata liberata all'atto della formazione del nucleo rendendo stabile il nucleo stesso. Perché le particelle costituenti possano separarsi occorre infatti conferire a un nucleo un'energia pari a quella di legame, che corrisponde al difetto di massa. Così per es. il nucleo dell'elio è formato da quattro particelle (nucleoni), due protoni e due neutroni.

Per le masse atomiche si usa una unità di massa che è circa $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. In tale scala le masse di riposo per i protoni (nuclei di idrogeno) ed i neutroni sono rispettivamente $m_{0H} = 1,00757$ e $m_{0n} = 1,00893$. La massa dell'elio (4,0040) è inferiore a $2m_{0H} + 2m_{0n}$: la differenza (difetto di massa) è di 0,0284 unità atomiche di massa. L'energia corrispondente (di legame) di $4,61 \cdot 10^{-12}$ J è liberata in forma di energia elettromagnetica all'atto della formazione dell'atomo.

MECCANICA DEI SISTEMI

DI PUNTI MATERIALI

Istante

dell'urto

- Limiti dell'approssimazione del punto materiale: casi di corpi estesi, rotazioni, corpi elastici, fluidi ecc.
- **Approccio ai sistemi:** suddivisione del sistema in N parti (particelle), approssimabili a punti materiali, e applicazione a ognuna dell'equazione del moto: N equazioni vettoriali accoppiate. Si sommano membro a membro:

$$\sum_j^N \mathbf{F}_j = \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(\text{est})} + \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(\text{int})} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum_j^N m_j \mathbf{v}_j = \frac{d}{dt} m \mathbf{v}_c$$

con $m = \sum_j^N m_j$, $\mathbf{F} = \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(\text{est})}$, poiché $\sum_j^N \mathbf{F}_j^{(\text{int})} = 0$ per la terza legge di Newton.

✓ **Centro di massa:** posizione: $\mathbf{r}_c = \frac{\sum_j^N m_j \mathbf{r}_j}{m}$

✓ **Equazione moto traslatorio per sistemi di punti:**

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt , \quad \text{con } \mathbf{p} = m\mathbf{v}_c = \sum_j^N m_j \mathbf{v}_j$$

► **conservazione quantità di moto:** $\mathbf{p} = \text{cost}$ se $\mathbf{F} = 0$.

► Per il momento delle forze: sommando membro a membro l'equazione dei momenti si ha:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{se } \mathbf{v}_0 = 0, \text{ o } \mathbf{p} = 0, \text{ o } \mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{p})$$

In particolare, se $O \equiv C$: $\mathbf{M} = d\mathbf{b}/dt$ con $\mathbf{M} = \sum_j^N \mathbf{M}_j^{(\text{est})}$, per la terza legge di Newton.

Componenti su un asse a : $\mathbf{M}_a = db_a/dt = d(I_a \omega)/dt$ con $I_a = \sum_j m_j r_j^2$ ($= \int_m dm r^2$) momento d'inerzia assiale.

► **conservazione momento della quantità di moto:** $\mathbf{b} = \text{cost}$ se $\mathbf{M} = 0$ (per es. forze centrali con polo nel centro delle forze).

► **Processi di urto tra due corpi:** interazione breve con forze molto intense.

Urto centrale: velocità e forze d'interazione coassiali.

Urto elastico: conservazione energia meccanica (oltre a quantità di moto, conservata in ogni tipo di urto, insieme al momento della quantità di moto). Due equazioni: una vettoriale (per \mathbf{p} , scalare per urto centrale), e una scalare, con soluzione (nel sistema del bersaglio):

$$v_1 = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} , \quad v_2 = \frac{2}{1 + \gamma} .$$

$x_2(t)$

■ Meccanica dei sistemi di punti materiali

■ 4.1. INTRODUZIONE

Il punto materiale è il modello più semplice di sistema meccanico e lo studio della meccanica del punto materiale ci ha consentito di introdurre gran parte dei concetti fondamentali fin qui svolti.

Abbiamo già osservato come in numerosi casi corpi materiali estesi possano essere considerati, ai fini dei problemi che interessano, come punti materiali nel senso che, da una parte, le loro dimensioni sono relativamente piccole rispetto agli spostamenti da essi effettuati, dall'altra, tutte le caratteristiche del loro moto sono descritte facendo astrazione dalle loro dimensioni e immaginando tutta la massa concentrata in un punto.

Vi sono tuttavia casi in cui una tale schematizzazione non è sufficiente ed è necessario considerare i corpi e i sistemi dotati di dimensioni proprie. Si pensi, per es., ad una sfera di massa m in rotazione intorno a un suo asse: qualora la si volesse descrivere assimilandola a un punto materiale, tutti gli elementi caratteristici del moto scomparirebbero e si dovrebbe asserire che essa si trova in quiete. Analogamente, la descrizione di vibrazioni nell'interno di un corpo è impossibile se questo viene considerato come un unico punto materiale. Un terzo esempio di problemi che non possono essere trattati considerando il sistema come un punto materiale è dato dalla esplosione di un proiettile, nella quale un corpo si suddivide in parti.

Si è così condotti a studiare sistemi più complicati del punto materiale. Questi sistemi possono, tuttavia, essere sempre pensati come costituiti da parti, ciascuna delle quali assimilabile a un punto materiale, cosicché i concetti elaborati nella meccanica del punto materiale possono essere opportunamente usati nella meccanica dei sistemi di punti.

Nel caso che il sistema sia costituito da n parti ciascuna assimilabile a un punto materiale indipendente dagli altri, il numero minimo di coordinate necessarie per determinare la configurazione del sistema, cioè il numero di gradi di libertà, è $3n$.

Se la costituzione del sistema è tale che esistono legami fra i punti materiali, il numero dei gradi di libertà si riduce.

Qualora si voglia determinare in dettaglio il moto delle singole parti del sistema, è necessario conoscere perfettamente oltre alle azioni che dall'esterno vengono esercitate sul sistema (forze esterne) anche quelle che le parti scambiano fra loro (forze interne); in tal caso il problema è condotto allo studio dei moti contemporanei e interdipendenti di tanti punti materiali, da condursi coi criteri visti per il singolo punto. Tuttavia, un

complesso studio di questo genere è spesso superfluo e risulta sufficiente disporre di un certo numero di informazioni sul moto del sistema, che è possibile ricavare senza la necessità di specificare le forze interne.

Nel presente capitolo si stabiliranno alcune relazioni di validità generale per il moto dei sistemi di punti materiali, che possono essere ottenute senza nulla specificare nei riguardi delle forze interne, a parte il fatto che esse devono soddisfare il principio di azione e reazione. Nei capitoli successivi si considererà la loro applicazione a sistemi particolari, nei quali cioè le forze interne hanno particolari caratteristiche dovute alla natura del sistema stesso. Lo studio viene fatto usando per ciascun punto materiale le conclusioni già raggiunte nei precedenti capitoli.

Per quanto riguarda il sistema di riferimento, occorre notare che esso potrà secondo i casi essere inerziale o non inerziale; in quest'ultimo caso le forze esterne da considerare comprendono le forze apparenti.

■ 4.2. CENTRO DI MASSA E MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Secondo quanto detto più sopra, lo studio del moto di un qualunque sistema materiale può ridursi allo studio del moto di un numero sufficientemente elevato di punti materiali, a ognuno dei quali si pensa di poter ridurre ciascuna delle parti componenti in cui si suddivide il sistema complessivo. Per ciascuno di questi n punti si può scrivere la relativa equazione del moto, così da ottenere un sistema di n equazioni differenziali accoppiate, negli n vettori spostamento \mathbf{r}_j ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$(1) \quad \mathbf{F}_j = m_j d^2 \mathbf{r}_j / dt^2.$$

Tale sistema di equazioni non ha, in generale, una soluzione analitica ed è anche difficile da risolversi numericamente, date le opportune condizioni iniziali, non appena il numero n di punti sia solo di qualche unità o decina. Tuttavia, alcune informazioni globali sul moto del sistema sono di facile deduzione e, assai spesso, anche di maggior interesse: non sarà, infatti, sempre necessario né anche utile conoscere il moto di ogni singolo elemento del sistema (si pensi al caso di un gas con gli innumerevoli singoli elementi costituiti dalle singole molecole o di un mezzo di trasporto con tutti i passeggeri e gli oggetti interni costituenti i singoli elementi), quanto sarà piuttosto importante conoscere come si muova il sistema nel suo insieme o, come risulterà più facile comprendere nel seguito, come esso trasli o ruoti.

A tal fine, per ogni forza \mathbf{F}_j agente su ogni singolo punto j del sistema, si individui il contributo $\mathbf{F}_j^{(int)}$ a essa dato dalle forze agenti sul punto da parte di tutti e soli gli altri punti appartenenti al sistema ($\mathbf{F}_j^{(int)} = \sum_{k=j} \mathbf{F}_{jk}^{(int)}$, con $\mathbf{F}_{jk}^{(int)}$ la forza agente sul punto j da parte di un altro punto k) e quello $\mathbf{F}_j^{(est)}$ dato da eventuali punti esterni, cioè non facenti parte del sistema:

$$(2) \quad \mathbf{F}_j^{(est)} + \mathbf{F}_j^{(int)} = m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2}.$$

Se si sommano membro a membro le n equazioni sopra scritte, si otterrà a primo membro la sola forza totale agente su tutti i punti del sistema da parte dei soli punti esterni, in quanto nel sommare i contributi delle forze interne si troverà che a ogni termine $\mathbf{F}_{jk}^{(int)}$ corrisponderà, e sarà presente

nella somma, il termine $\mathbf{F}_{kj}^{(int)}$ che, come forza di reazione alla $\mathbf{F}_{jk}^{(int)}$, sarà a quello eguale e contrario, sommandosi così identicamente a zero.

Si otterrà, quindi:

$$(3) \quad \mathbf{F}_j^{(est)} = \mathbf{F} = \sum_j m_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} \quad (j = 1, 2, \dots n)$$

avendo indicato semplicemente con \mathbf{F} la risultante di tutte e sole le forze esterne.

Se ora si pone

$$m = \sum_i^n m_i$$

e si individua un punto C dello spazio di vettore \mathbf{r}_c dato da

$$(4) \quad \mathbf{r}_c = \frac{\sum m_j \mathbf{r}_j}{m}$$

di componenti:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \sum_1^n m_j x_j \\ y_c &= \frac{1}{m} \sum_1^n m_j y_j && \text{Posizione del centro} \\ z_c &= \frac{1}{m} \sum_1^n m_j z_j && \text{di massa} \end{aligned}$$

la (3) si scrive semplicemente

$$(5) \quad \mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2} .$$

Al punto C di coordinata \mathbf{r}_c si dà il nome di centro di massa del sistema. Esso non è un punto appartenente al sistema, ma è un punto dello spazio definibile in base alla distribuzione nello spazio dei punti materiali componenti il sistema.

Se il sistema è formato da una distribuzione continua di massa, esso può immaginarsi diviso in infiniti elementi (punti materiali) di massa $dm = \rho dV$ la cui posizione è determinata dal vettore $\mathbf{r} = ix + jy + kz$; ρ è la densità dell'elemento di volume dV (cap. 5, par. 5.1). Il centro di massa è allora definito nel sistema di coordinate adottato da relazioni analoghe alle (4) ove le sommatorie sono sostituite da integrali (estesi al volume V del sistema)

$$(6) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{m} \int \rho \mathbf{r} dV .$$

*Moto del centro
di massa*

In un qualsiasi sistema di punti materiali, quindi, si può considerare un punto legato al sistema e detto *centro di massa*, il cui moto avviene come se esso fosse un punto materiale isolato, avente la massa totale del sistema e sottoposto all'azione della somma delle sole forze esterne (reali ed apparenti) applicate al sistema.

Il moto del centro di massa va considerato come una caratteristica del sistema, indipendente dalla sua costituzione, dalla natura delle forze interne e dal moto relativo delle varie parti che costituiscono il sistema stesso.

La determinazione del centro di massa può essere facilitata dalla presenza di piani, assi o di un centro di simmetria del sistema: è facile infatti vedere per mezzo delle (4) e (6) che il centro di massa in questi casi deve appartenere all'elemento di simmetria.

Dalle definizioni date sopra del centro di massa, sia per il caso di un sistema di punti [eq. (4)], sia per il caso di un sistema continuo [eq. (6)], si deduce la proprietà additiva del centro di massa, che è spesso utile per il calcolo della posizione di questo nel caso di distribuzioni particolari di masse nello spazio. Tale proprietà specifica che, nel caso in cui un sistema si pensi decomposto in due o più sottosistemi, il centro di massa dell'intero sistema può ottersi pensando di ridurre i sottosistemi a singoli punti, di massa pari a quella di ciascun sottosistema, posti nei centri di massa relativi di ciascun sottosistema.

Riferendosi, infatti, al caso continuo dell'eq. (6), si ha:

Additività del centro di massa

$$(7) \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \int_V \rho \mathbf{r} dV = \frac{\int_{V_1} \rho \mathbf{r} dV + \int_{V_2} \rho \mathbf{r} dV}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{r}_{c1} + m_2 \mathbf{r}_{c2}}{m_1 + m_2}$$

dove si sono considerati due soli sottosistemi di massa m_1 e m_2 , rispettivamente, tali che $m_1 + m_2 = m$ e centri di massa $\mathbf{r}_{c1} = 1/m_1 \int_{V_1} \rho \mathbf{r} dV$ e $\mathbf{r}_{c2} = 1/m_2 \int_{V_2} \rho \mathbf{r} dV$.

La proprietà additiva può usarsi per il computo del centro di massa di un insieme di punti, considerando via via il centro di massa di due soli punti, quindi quello tra questi primi due punti e un terzo, quindi un quarto ecc. fino ad avere considerato tutti i punti.

Esempi

1. Nel caso in cui il sistema sia formato da due masse di cui una molto maggiore dell'altra ($m_1 \gg m_2$) è facile vedere che il centro di massa praticamente coincide con il primo punto materiale. Un caso di questo genere è quello del sistema Sole-Terra considerati come due punti materiali data la grande distanza fra di essi ($1,5 \cdot 10^{11}$ m) rispetto ai diametri dei corpi $d_\odot \sim 1,4 \cdot 10^9$ m e $d_T \simeq 1,2 \cdot 10^7$ m. Le due masse sono $m_1 \sim 2 \cdot 10^{30}$ kg (Sole) e $m_2 \sim 6 \cdot 10^{24}$ kg (Terra).

Prendendo un sistema di riferimento con origine nel Sole e asse x diretto verso la Terra

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = 0 \\ x_2 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ y_2 = z_2 = 0. \end{cases}$$

Si ha

$$x_c = \frac{1,5 \cdot 10^{11} \times 6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30} + 6 \cdot 10^{24}} \simeq \frac{9 \cdot 10^{35}}{2 \cdot 10^{30}} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ m}.$$

La distanza del centro di massa dal centro del Sole (450 km) è molto piccola rispetto alla distanza Sole-Terra ($1,5 \cdot 10^8$ km). Più in generale, se il rapporto della massa è $m_1/m_2 = \alpha$, si ha $x_c = d \cdot 1/\alpha + 1$, dove d è la distanza tra le due masse.

2. Consideriamo (fig. 4.1) un disco di materiale omogeneo e di spessore uniforme, piccolo rispetto al diametro: si può allora considerare il corpo come dotato di due dimensioni. La costituzione del corpo sia tale che si possa parlare di una massa per unità di superficie (densità areica $\sigma = m/S$, essendo m la massa ed S l'area del disco). Scegliamo un sistema di riferimento come in figura e suddividiamo mediante circonferenze concentriche e raggi la superficie S in tanti elementi, ciascuno dei quali possa essere assimilato ad un punto materiale.

È evidente che le coordinate del centro di massa sono nulle; per ogni elemento $\rho \Delta S$, infatti, di coordinate (x, y) esiste nella sommatoria di eq. (4) un elemento di uguale massa $\rho \Delta S$ avente coordinate $-x, -y$.

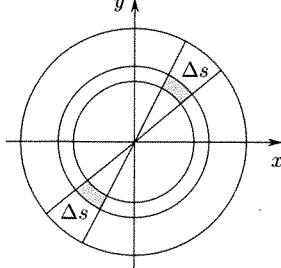


Fig. 4.1

3. Si consideri una sbarra cilindrica di lunghezza $l = y_2 - y_1$ (fig. 4.2a) avente una struttura omogenea sicché si possa parlare di una massa per unità di lunghezza (densità lineare $\lambda = m/l$ essendo m la massa totale).

Se consideriamo una fetta di lunghezza dy e massa λdy , essa può considerarsi come un punto materiale sull'asse y . Si ha allora per il centro di massa:

$$x_c = z_c = 0$$

$$y_c = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \lambda y dy}{m} = \frac{\lambda \int_{y_1}^{y_2} y dy}{m} = \frac{\lambda (y_2^2 - y_1^2)}{2m} = \frac{\lambda (y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{2m} = \frac{1}{2}(y_2 + y_1).$$

Il centro di massa si trova al centro della sbarra: questo risultato poteva ottenersi pensando che il piano parallelo a xz e passante per $y = y_1 + l/2$ è un piano di simmetria.

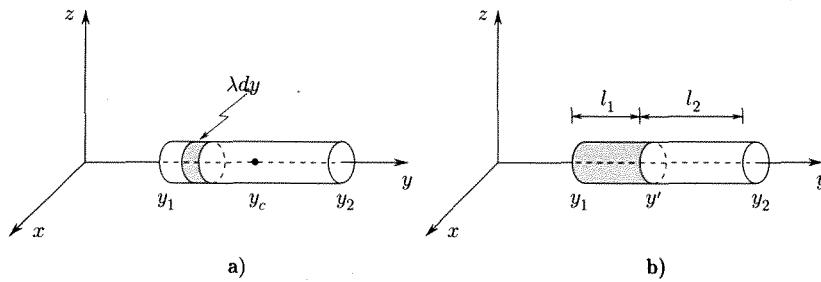


Fig. 4.2

Qualora la sbarra fosse realizzata con due diversi materiali (fig. 4.2b) nei tratti fra y_1 e y' e tra y' e y_2 , ponendo $l_1 = y' - y_1$, $l_2 = y_2 - y'$, m_1 e m_2 le masse dei due tratti e $\lambda_1 = m_1/l_1$, $\lambda_2 = m_2/l_2$, si avrebbe

$$x_c = z_c = 0$$

$$y_c = \frac{\lambda_1 \int_{y_1}^{y'} y dy + \lambda_2 \int_{y'}^{y_2} y dy}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{1}{2}\lambda_1(y'^2 - y_1^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(y_2^2 - y'^2)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 \left(\frac{y_1 + y'}{2} \right) + m_2 \left(\frac{y' + y_2}{2} \right)}{m_1 + m_2}.$$

Si sarebbe potuta calcolare la posizione del centro di massa del sistema determinando i centri di massa dei due tratti omogenei e prendendo in considerazione il sistema formato da questi due punti trattati come punti materiali in cui si immaginano concentrate le masse m_1 ed m_2 .

4.3. QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA E PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

La quantità di moto di un sistema di n punti materiali è la somma delle quantità di moto dei singoli punti:

$$(8) \quad \mathbf{p} = \sum_1^n {}_i \mathbf{p}_i = \sum_1^n {}_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_1^n {}_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

essendo \mathbf{r}_i i vettori che partono dall'origine del sistema di riferimento ed individuano la posizione assunta da ciascun punto P_i all'istante t .

Ma, per la definizione di centro di massa (4), risulta

$$\sum_1^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = m\mathbf{v}_c$$

e quindi

La quantità di moto di un sistema di punti è pari al prodotto della massa totale del sistema per la velocità del centro di massa

I equazione cardinale della dinamica dei sistemi

(9)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$$

cioè la quantità di moto di un sistema di punti è pari alla quantità di moto che spetterebbe a un punto materiale che avesse la massa del sistema e si muovesse come il suo centro di massa. Essa non dipende in alcun modo dell'azione delle forze interne né dai moti interni al sistema delle sue varie parti.

Se ora si torna a considerare la (5), si nota che il secondo termine può scriversi come la derivata della quantità di moto del sistema, così da potersi porre globalmente:

(10)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Si estende quindi al caso dei sistemi la validità dell'espressione già stabilita per un unico punto materiale. Essa costituisce una delle equazioni fondamentali, cardinali, del moto dei sistemi (teorema della quantità di moto): *la derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema di punti materiali è pari alla risultante delle sole forze esterne (reali ed apparenti) applicate al sistema*.

Questo teorema, che contiene in sé il II ed il III principio della dinamica applicati a sistemi di punti, riesce molto utile nello studio del moto dei sistemi: esso ovviamente non consente da solo di avere tutte le informazioni sul moto, ma ha il grande vantaggio di non richiedere per la sua applicazione alcuna conoscenza delle forze interne.

Altre considerazioni saranno necessarie per conoscere le posizioni relative dei vari punti materiali che costituiscono il sistema.

Applicazioni

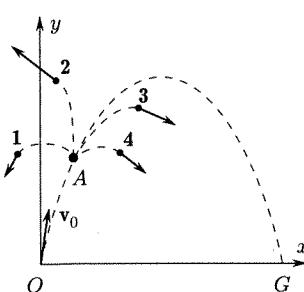


Fig. 4.3

1. Si è già visto (cap. 1, par. 1.9 e 1.17) qual è il moto di un proiettile lanciato nel campo gravitazionale con una certa velocità iniziale \mathbf{v}_0 : trascurando la resistenza dell'aria esso è sottoposto solamente alla forza di gravità e la sua traiettoria è una parabola. Se \mathbf{v}_0 è diretta come in figura 4.3 si ha la parabola disegnata e il segmento OG rappresenta la gittata.

Un tale problema è stato trattato considerando il proiettile come un punto materiale. Esso può essere altresì trattato come un sistema di punti materiali e allora il moto può essere rappresentato mediante il moto del centro di massa: questo, sotto l'azione della forza esterna di gravità nelle condizioni dell'esperienza, descrive una parabola. Si supponga che il proiettile giunto in A con velocità \mathbf{v}_{cA} esploda dividendosi in un certo numero di parti di masse m_i le quali si allontanino con le velocità \mathbf{v}_i . L'esplosione è dovuta a forze interne che agiscono fra le varie parti del sistema e quindi, pur variando le quantità di moto delle varie parti del sistema, la

quantità di moto totale del sistema non varia. Si avrà in A al tempo t_A

$$\mathbf{p}(t_A) = m\mathbf{v}_c(t_A) = \sum m_i \mathbf{v}_i(t_A).$$

L'unica forza esterna capace di alterare la quantità di moto del sistema è ancora la forza di gravità come nel caso in cui il proiettile non fosse esploso. Pur viaggiando i frammenti in varie direzioni con diverse velocità, il centro di massa del sistema prosegue il suo moto come se non fosse avvenuta l'esplosione, descrivendo cioè la parabola OG .

2. Si consideri ora il funzionamento dei motori a reazione. Diversamente dagli altri tipi di motori per veicoli, in cui la locomozione si basa su una azione esercitata sul mezzo esterno (rotaie per un locomotore ferroviario, acqua nel caso di navi, aria nel caso di normali aerei), nei motori a reazione la spinta deriva dalla espulsione di massa. La presenza di un mezzo materiale nello spazio in cui il veicolo si muove non è in questo caso affatto necessaria ed è anzi dannosa a causa della resistenza che il mezzo oppone al moto del veicolo stesso. Da ciò si deduce la grande importanza di questi motori che possono spingere un veicolo anche fuori dell'atmosfera. Motori di questo genere si usano ormai correntemente negli aerei (jet), nei razzi (missili) e nei veicoli spaziali. Lo schema di un missile è nelle linee generali quello di figura 4.4. La combustione dell'alcool nella apposita camera produce grandi quantità di gas che vengono espulse violentemente attraverso l'ugello posteriore disposto lungo l'asse del veicolo. All'azione, consistente nella forza con la quale il missile espelle i gas, corrisponde per il III principio della dinamica una forza uguale ed opposta (reazione) che i gas combusi esercitano sul veicolo e che spinge il veicolo stesso. Nel caso dei motori a reazione per velivoli la combustione avviene tra vapori di benzina e l'aria presa dall'esterno, quindi compressa e portata ad alta temperatura.

Per studiare il moto di un missile occorre fare uso della (10). Sia \mathbf{v} la velocità del missile all'istante t rispetto a un sistema di riferimento, che in molti casi può essere, con buona approssimazione, un sistema solidale con la Terra, e \mathbf{v}' la velocità, rispetto allo stesso sistema di riferimento, dei gas che lasciano il missile all'istante t . La velocità dei gas espulsi rispetto al missile (\mathbf{v}_u) risulta

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{v}' - \mathbf{v};$$

essa è diretta in verso opposto a \mathbf{v} e può assumersi costante.

Indichiamo con Δm la variazione di massa del missile nel tempo Δt : essa è negativa, mentre la massa dei gas espulsi ($-\Delta m$) nello stesso intervallo di tempo è positiva. La variazione di quantità di moto del sistema (missile e gas espulsi) nell'intervallo Δt , essendo $\Delta \mathbf{v}$ la contemporanea variazione della velocità del missile, risulta:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p} &= (\text{q.m. finale del missile}) + (\text{q.m. finale gas espulsi}) - (\text{q.m. iniziale del sistema}) \\ &= (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta m)\mathbf{v}' - m\mathbf{v} = m\Delta \mathbf{v} + \Delta m\Delta \mathbf{v} - \Delta m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Se si considerano intervalli di tempo molto piccoli, il termine $\Delta m\Delta \mathbf{v}$ può essere trascurato rispetto agli altri (infinitesimo del secondo ordine). Si ha allora, facendo anche uso della (10):

$$(11) \quad \mathbf{F}_e = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_u \frac{dm}{dt}$$

dove \mathbf{F}_e è la forza esterna che agisce sull'intero sistema e comprende la forza di gravità, la resistenza dell'aria ecc.

Se si scrive

$$(12) \quad \mathbf{F}_e + \mathbf{v}_u \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

il termine $\mathbf{v}_u(dm/dt)$, omogeneo con una forza, viene detto spinta e si nota che, nel caso che sia nulla la forza esterna \mathbf{F}_e (spazio vuoto fuori del campo gravitazionale), esso costituisce l'unico termine agente sulla massa del missile e responsabile della sua accelerazione.

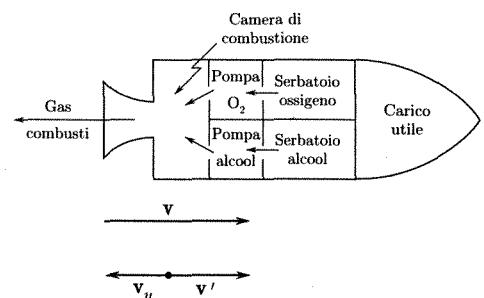


Fig. 4.4

Nel caso $\mathbf{F}_e = 0$, dalla (12) si ricava:

$$\mathbf{v}_u dm = m d\mathbf{v}.$$

Se si suppone $\mathbf{v}_u = \text{cost}$ si può calcolare la variazione di velocità del veicolo

$$(13) \quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_u \log \frac{m}{m_0}$$

essendo \mathbf{v}_0 ed m_0 la velocità iniziale (in genere zero) e la massa iniziale rispettivamente. Da tale relazione si vede che la velocità raggiunta ad un certo istante dal missile dipende dalla \mathbf{v}_u e dalla riduzione di massa conseguita, quindi la velocità massima raggiungibile dipende dalla massa di combustibile che può essere espulsa dal missile.

Dati caratteristici per un missile sono i seguenti: massa iniziale 15.000 kg; massa finale 5.000 kg; velocità di uscita dei gas combusti 2.000 m/s. La velocità finale, qualora non vi fosse la resistenza dell'aria e la gravità sarebbe

$$v_f = 2.000 \log 3 = 2.200 \text{ m/s} = 7.900 \text{ km/h}.$$

La presenza della gravità e della resistenza dell'aria rende la velocità finale più piccola del valore riportato.

■ 4.4. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Se in un sistema di punti materiali è nulla in ogni istante la somma delle forze esterne (reali ed apparenti) agenti su di esso, la (10) diviene:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

Forza esterna risultante nulla: conservazione della quantità di moto

ovvero si mantiene costante la quantità di moto

$$(14) \quad \mathbf{p} = \text{cost}.$$

Naturalmente ciò non impedisce che le singole \mathbf{p}_i possano variare, purché $\sum \mathbf{p}_i = \text{costante}$. La (14) assume un particolare interesse nel caso di sistemi isolati, per i quali si può enunciare il teorema di conservazione della quantità di moto: *la quantità di moto di un sistema isolato di punti materiali resta costante*. Questa legge, dedotta nell'ambito della meccanica newtoniana, ha validità in trattazioni più ampie e può essere assunta come un postulato di validità generale in fisica⁽¹⁾ (principio di conservazione della quantità di moto).

Esempi

1. Si prenda in considerazione un cannone libero di muoversi e un proiettile al suo interno. Il sistema può pensarsi formato da due punti materiali in quiete: la quantità di moto del sistema è nulla. Dopo l'esplosione il proiettile di massa m_1 esce dalla

⁽¹⁾ Per es., si vedrà in seguito che alla radiazione elettromagnetica (come la luce) vanno associate alcune particelle (fotoni) le quali posseggono una quantità di moto: il principio di conservazione della quantità di moto vale anche per i processi in cui intervengono i fotoni.

bocca con velocità \mathbf{v}_1 ; contemporaneamente il cannone di massa m_2 si muoverà con velocità \mathbf{v}_2 determinata dalla

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0.$$

Infatti le forze presenti, poste in gioco dall'esplosione, sono forze interne. La velocità \mathbf{v}_2 è quindi diretta in senso opposto a quello della \mathbf{v}_1 e si nota che il cannone rincula. Le intensità delle velocità sono nel rapporto inverso delle masse

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

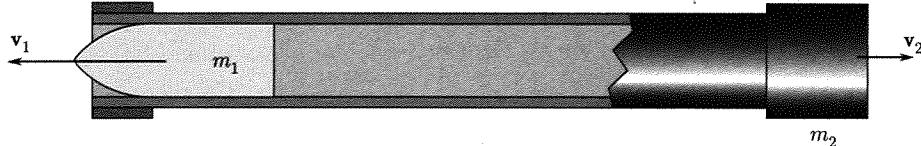


Fig. 4.5

L'energia meccanica del sistema è in questo caso la somma delle energie cinetiche e potenziali dei due punti materiali. Se, per semplificare l'esempio, si suppone che l'esplosione del proiettile avvenga in direzione orizzontale (fig. 4.5) l'energia potenziale meccanica dei due punti non varia in conseguenza dell'esplosione. L'energia cinetica iniziale è zero e quella dopo l'esplosione varrà

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Durante il processo quindi l'energia meccanica non è conservata: v'è un aumento di energia meccanica a spese di altre forme di energia (potenziale chimica dell'esplosivo).

2. Per effetto della radioattività i nuclei di alcuni elementi si trasformano in nuclei di elementi diversi emettendo particelle α o β e radiazione elettromagnetica (raggi γ). Le particelle α sono nuclei di elio, quelle β elettroni veloci. Se si considera per es. il caso del polonio (massa atomica 210 rispetto a quella dell'atomo di carbonio posta a 12), esso può emettere dai suoi nuclei una particella α (massa atomica 4) trasformandosi in piombo (massa atomica 206): $^{210}\text{Po} \rightarrow ^{206}\text{Pb} + \alpha$. Un atomo di polonio che subisce questa reazione nucleare può essere considerato inizialmente in quiete; la velocità con cui esce la particella α è determinata sperimentalmente e risulta pari a $v_\alpha = 1,6 \cdot 10^7$ m/s. La velocità di rinculo del nucleo di piombo si ricava dalla relazione

$$m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_{\text{Pb}} \mathbf{v}_{\text{Pb}} = 0$$

e risulta di intensità

$$v_{\text{Pb}} = v_\alpha \frac{4}{206} = 3,1 \cdot 10^5 \text{ m/s.}$$

Anche in questo caso l'energia meccanica non è conservata. L'energia cinetica dei frammenti dopo la disintegrazione viene fornita dall'energia liberata durante la reazione nucleare per trasformazione in energia di parte della massa. La massa del nucleo di polonio è infatti 210,0485 unità di massa atomica e quella dei prodotti della reazione ($\alpha + \text{Pb}$) è di 210,0428 u.m.a. La differenza di massa è 0,0057 u.m.a.

3. Un uomo ($m_1 = 80$ kg) si trovi su una zattera ($m_2 = 70$ kg) in galleggiamento su una superficie di acqua calma e si possano trascurare gli attriti fra zattera e acqua. La posizione iniziale della zattera e dell'uomo siano allineate con quella di una boa, come in figura 4.6. Indichiamo con x le distanze dalla boa. L'uomo si sposta all'altro estremo della zattera e si voglia determinare la posizione finale della zattera.

La quantità di moto del sistema è inizialmente nulla e, siccome la somma delle forze esterne è nulla, tale deve restare: durante lo spostamento dell'uomo intervengono infatti solo forze interne al sistema. La quantità di moto del sistema può scriversi

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_c = 0.$$

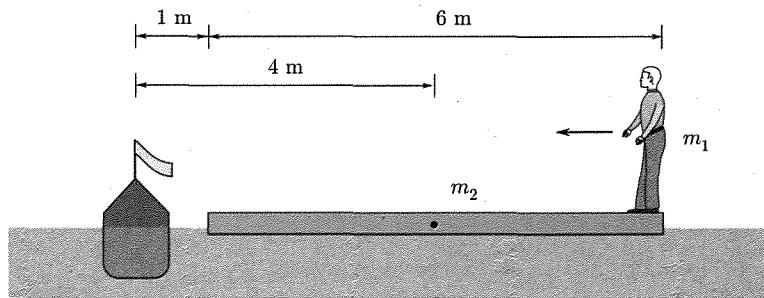


Fig. 4.6

La velocità del centro di massa resta zero durante il moto dell'uomo, cioè il centro di massa resta fermo. La posizione x_c (rispetto alla boa) calcolata dalla posizione iniziale e per i valori x_1 e x_2 iniziali dati in figura è:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{80 \cdot 7 + 70 \cdot 4}{150} = 5,6 \text{ m.}$$

Nella posizione finale, indicando con x la posizione del bordo della zattera più vicino alla boa, dovrà ancora essere

$$x_c = \frac{80x + 70(x+3)}{150} = 5,6$$

da cui si ricava

$$x = 4,2 \text{ m}$$

e lo spostamento della zattera

$$x - 1 = 3,2 \text{ m.}$$

4. Si consideri un sistema isolato costituito da due masse m_1 ed m_2 , a distanza l , inizialmente in quiete, che si scambiano una mutua azione che varia nel tempo. La realizzazione di un tale sistema può essere costituita da due masse su un piano privo di attrito collegate tramite una molla di massa trascurabile, tenuta compressa mediante un filo (f) (fig. 4.7): il peso e la reazione del piano di appoggio per ciascun punto materiale hanno somma nulla (si equilibrano) e quindi tutto va come se nessuna forza esterna fosse applicata al sistema. In tali condizioni il sistema è in quiete e il centro di massa ha come coordinata contata dal punto O

$$x_c = \frac{m_1 l/2 - m_2 l/2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} l/2.$$

Fig. 4.7

Si spezzi il filo l , per esempio bruciandolo; le masse si mettono in moto, ma il centro di massa rimane fermo. La quantità di moto del sistema non varia; quindi

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Le velocità v_1 e v_2 sono in direzione opposta e legate dalla relazione

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1.$$

Si vede che se è $m_2 \gg m_1$ è $v_1 \gg v_2$, cioè è praticamente la sola massa m_1 quella che si muove.

Dal punto di vista energetico il moto è dovuto al fatto che la molla ha immagazzinato una energia potenziale che, se non vi sono dissipazioni presenti, si trasforma in energia cinetica delle due masse. La ripartizione dell'energia fra i due punti materiali avviene in ragione inversa delle masse:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Quando la molla raggiunge la lunghezza di riposo l'energia potenziale è nulla, ma il moto continua perché le masse sono dotate di energia cinetica: la molla si allunga ed energia cinetica viene trasformata in energia potenziale. Si raggiunge una posizione nella quale la variazione di lunghezza della molla rispetto a quella di riposo è pari e di segno contrario a quella di partenza: il moto allora si inverte. Si vede che le masse si muovono di moto oscillatorio, smorzato, nel caso che vi siano delle cause di dissipazione dell'energia.

Un sistema praticamente analogo a quello esaminato è quello costituito da un uomo, solidale e considerato un tutto uno con la Terra (massa m_1), e una palla ($m_2 \ll m_1$) lanciata verso l'alto: la forza interna è in questo caso l'attrazione di gravità fra i due corpi.

4.5. TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Si vuole ora estendere in questo paragrafo al caso di un sistema di punti materiali il risultato del teorema del momento della quantità di moto, ritrovato al cap. 2, par. 2.23 per il caso di un punto. A tal proposito, definiamo preliminarmente il momento risultante di un sistema di forze e il momento della quantità di moto di un sistema di punti rispetto a un polo O .

In un sistema formato da n punti materiali ($P_1 \dots P_n$), scelto un punto (polo) O nel sistema di riferimento adottato, si definisce momento totale (o risultante) delle forze applicate ai singoli punti materiali ($\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_n$) rispetto ad O , il vettore

$$(15) \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \sum_1^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j$$

essendo $\mathbf{M}_1 \dots \mathbf{M}_n$ i momenti delle forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$ rispetto al medesimo punto O . Analogamente si definisce momento della quantità di moto del sistema rispetto a O la somma dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti (cap. 2, par. 2.22)

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n = \sum_1^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j .$$

Per quanto riguarda il moto di ciascun punto materiale, considerando i momenti rispetto a un punto (polo) fisso O nel sistema di riferimento adottato vale la relazione [cap. 2, eq. (73)]

$$(16) \quad \mathbf{M}_j^{(\text{est})} + \mathbf{M}_j^{(\text{int})} = \frac{d\mathbf{b}_j}{dt}$$

ove abbiamo distinto le forze applicate al punto j in forze esterne, reali ed apparenti, di momento $\mathbf{M}_j^{(\text{est})}$, e forze interne, di momento $\mathbf{M}_j^{(\text{int})}$. Nel caso che il punto di riferimento O si muova con velocità \mathbf{v}_0 , vale invece la

$$(17) \quad \mathbf{M}_j^{(\text{est})} + \mathbf{M}_j^{(\text{int})} = \frac{d\mathbf{b}_j}{dt} + \mathbf{v}_0 \times m_j \mathbf{v}_j .$$

Sommendo le relazioni (16) per tutti i punti del sistema e ricordando che per il principio di azione e reazione le forze scambiate fra due punti sono uguali e opposte e dirette lungo la congiungente i due punti, e hanno

quindi momenti rispetto a O uguali e opposti, si trova

Il momento risultante delle forze interne è identicamente nullo

$$(18) \quad \sum_1^n j \mathbf{M}_j^{(int)} = 0.$$

Pertanto ponendo $\mathbf{M} = \sum_1^n j \mathbf{M}_j = \sum_1^n j \mathbf{M}_j^{(est)}$, si ha

$$(19) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Nel caso che il punto O si muova, si trova

La II equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$(20) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}.$$

Come si vede, la (20) si riduce alla (19) non solamente quando è $\mathbf{v}_0 = 0$, ma anche se è nulla la quantità di moto \mathbf{p} del sistema, ovvero anche quando il polo O coincide col centro di massa. In tale caso, infatti, i due vettori $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_c$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$ sono paralleli e vale l'espressione (19) nonostante il punto non sia fisso.

Si può quindi esprimere il teorema del momento della quantità di moto nella forma: *la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto calcolato rispetto a un punto fisso nella terna di riferimento adottata o al centro di massa del sistema è uguale al momento, rispetto al medesimo punto, delle forze esterne (reali e apparenti) applicate al sistema.*

Ricordando (cap. 2, par. 2.21) la definizione di momento di un vettore (forza, quantità di moto) rispetto a una retta orientata (asse), si può giungere a un'altra espressione importante. Scegliendo una retta orientata fissa a passante per un punto fisso o per il centro di massa e indicando con $b_a = \sum_j b_{aj}$ e con $M_a = \sum_j M_{aj}$ il momento delle quantità di moto del sistema e il momento totale delle forze esterne rispetto ad a , si ha dalla (19)

$$(21) \quad \frac{db_a}{dt} = M_a.$$

Il momento assiale delle forze esterne è pari alla derivata temporale del momento assiale della quantità di moto

Quindi, considerato, nel sistema di riferimento adottato, un asse fisso passante per un punto fisso o per il centro di massa *la derivata rispetto al tempo del momento delle quantità di moto rispetto a tale asse è uguale al momento totale rispetto al medesimo asse delle forze esterne agenti sul sistema.*

L'uso del teorema del momento della quantità di moto in questa forma è particolarmente utile quando tutti i punti del sistema ruotino intorno al medesimo asse. In tal caso (cap. 2, par. 2.22) il contributo a b_a del punto materiale m_j che ha una velocità ω_j diretta come a è:

$$(22) \quad b_{aj} = m_j r_j^2 \omega_{ja} = m_j r_j^2 \dot{\phi}_j$$

essendo ω_{ja} la proiezione di ω_j su a ; essa è $\pm\omega_j$ secondo che ω_j abbia il verso di a (segno +) o l'opposto (segno -); essa è pari alla velocità angolare scalare introdotta al cap. 1, par. 1.12.

Nel caso importante che tutti i punti abbiano la stessa velocità ω (e quindi la stessa $\dot{\varphi}$)

$$(23) \quad b_a = \left(\sum_1^n m_j r_j^2 \right) \omega_a = I_a \omega_a = I_a \dot{\varphi}$$

essendo $\omega_a = \pm\omega$ secondo che ω abbia il verso di a (segno +) o quello opposto (segno -), avendo posto

$$(24) \quad I_a = \sum_1^n m_j r_j^2 .$$

Momento d'inerzia assiale

I_a prende il nome di momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse a . In tal caso la (21) si scrive

$$(25) \quad M_a = \frac{d}{dt} (I_a \dot{\varphi}) .$$

4.6. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Il teorema del momento della quantità di moto nel caso in cui sia a ogni istante $\mathbf{M} = 0$ porta immediatamente al risultato

$$(26) \quad \mathbf{b} = \text{cost}$$

nel quale consiste il *teorema della conservazione del momento della quantità di moto*.

Di particolare interesse è il caso di un sistema isolato: *in un sistema isolato di punti materiali il momento della quantità di moto, calcolato rispetto a un punto fisso o al centro di massa, resta costante*. Questa legge vale nell'ambito della meccanica newtoniana, ma può essere giustificata in campi più ampi della fisica, come la fisica atomica e nucleare, sì da essere assunta come uno dei postulati fondamentali della fisica (principio di conservazione del momento della quantità di moto).

Va osservato che nella applicazione del principio a sistemi formati da parti, alcune delle quali di moto di rotazione su se stesse, vanno portati in conto anche i momenti delle quantità di moto che esse hanno in questi moti, accanto al momento della quantità di moto che queste parti possono avere nel moto di insieme del sistema.

Un esempio è quello del sistema formato dal Sole e dai pianeti: tutti questi corpi sono dotati di un moto di rotazione su se stessi e il momento totale della quantità di moto del sistema comprende quello di questi moti oltre a quello dei moti orbitali. In molti problemi si può trascurare il moto di rotazione di ciascun pianeta su se stesso e si può asserire che il momento della quantità di moto nei moti orbitali resta costante. Vi sono però casi in cui ciò non è possibile, come per es. nello studio delle azioni delle maree, nel quale caso v'è una conversione di una parte del momento della quantità di moto di un pianeta attorno a se stesso in momento orbitale (vedi esempio Luna-Terra in seguito).

In fisica atomica e nucleare le particelle (elettroni, protoni ecc.) hanno un moto di rotazione su se stesse cui è associato un momento della quantità di moto (spin).

Momento risultante delle forze esterne nulle:
conservazione
del momento
della quantità di moto

In sistemi isolati si conserva il momento della quantità di moto

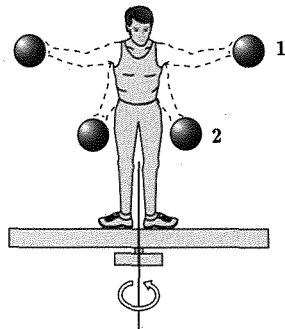
Esempi

Fig. 4.8

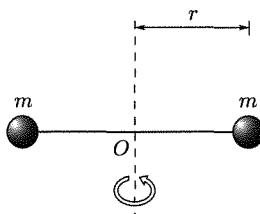


Fig. 4.9

1. Una semplice esperienza può essere fatta per dimostrare il principio di conservazione del momento della quantità di moto. Si abbia a disposizione una piattaforma orizzontale, montata su cuscinetti a sfera, che può ruotare intorno a un asse fisso verticale senza apprezzabili attriti. Su tale piattaforma si disponga una persona che porti una massa (per es. 5 kg) in ciascuna mano e tenga le braccia distese (fig. 4.8, posizione 1). Un'altra persona ponga in rotazione la piattaforma e sia ω_1 l'intensità della velocità angolare raggiunta. Se la persona sulla piattaforma avvicina le braccia (posizione 2) la velocità di rotazione aumenta a un valore ω_2 come è richiesto dal principio di conservazione del momento della quantità di moto. Calcolando i momenti rispetto all'asse verticale fisso di rotazione, si ha dalle (26) e (23):

$$\left(\sum m_j r_j^2 \right) \cdot \omega_1 = \left(\sum m_j r_j'^2 \right) \cdot \omega_2.$$

La sommatoria al secondo membro è minore di quella al primo membro perché gli addendi relativi alle masse tenute nelle mani sono minori giacché sono inferiori i corrispondenti valori di r .

Per vedere quanto queste variazioni possano essere notevoli, consideriamo la disposizione in figura 4.9, in cui due masse uguali (m) vincolate a un'asta rigida di massa trascurabile sono in rotazione (ω_1) intorno a un asse passante per il punto centrale dell'asta e perpendicolare alla congiungente le due masse. Il corrispondente momento della quantità di moto rispetto a O (che è anche centro di massa) è

$$b_1 = 2mr^2\omega_1.$$

Accada ora, per effetto di forze interne, che la distanza fra le due masse si riduca alla metà. Il nuovo momento della quantità di moto è

$$b_2 = 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\omega_2.$$

Dovendo essere $b_1 = b_2$ risulta $\omega_2 = 4\omega_1$, cioè la velocità angolare cresce di un fattore 4.

2. Questa possibilità di ottenere notevoli variazioni della velocità di rotazione di un corpo mediante un'alterazione del suo momento d'inerzia prodotta da forze interne, è molto sfruttata da atleti e artisti. Si consideri per es. un tuffatore

(fig. 4.10) il quale lasci la pedana di lancio con il corpo disteso avendo ricevuto da questa oltre che un impulso lineare che lo porta in alto, anche un impulso angolare che fa ruotare il suo corpo intorno a un asse orizzontale per il centro di massa (c_M). Supponendo che, durante il tuffo, egli sia sottoposto alla sola forza peso, che non ha momento rispetto al centro di massa, si deduce che durante il tuffo si conserva il momento b della quantità di moto. Se si suppone che la velocità angolare sia tale da far ruotare il corpo, purché rimanga nella stessa posizione distesa, di circa 180° prima che il tuffatore raggiunga l'acqua, egli allora entrerà nell'acqua di testa. Se, peraltro, durante il tragitto nell'aria, l'atleta piega il corpo in modo da ridurre il momento d'inerzia complessivo rispetto all'asse orizzontale per il centro di massa, la velocità angolare intorno a tale asse cresce ed egli ruota, per es. di $(180 + 360^\circ)$, prima di entrare nell'acqua. Nella figura sono mostrate mediante frecce le posizioni che il corpo del tuffatore può assumere durante il volo. Si noti la traiettoria invariata del centro di massa.

Simili situazioni si verificano in certi tipi di salto, nei quali l'aumento della velocità di rotazione del corpo dell'atleta intorno a un asse orizzontale causato da forze interne consente di superare ostacoli che sono appena al di sotto del vertice della parabola descritta dal centro di massa (fig. 4.11). Analoga situazione ha per un ballerino su ghiaccio il quale ruota intorno a un asse verticale: la sua velocità di rotazione può avere variazioni notevoli se, muovendo gli arti, egli riesce a variare il proprio momento d'inerzia. Questa circostanza può essere provata da chiunque si metta a ruotare su se stesso, intorno a un asse verticale, su un pavimento molto liscio o su un seggiolino ruotante tenendo le braccia distese orizzontalmente: se in seguito porta le braccia lungo i fianchi, egli osserva che la sua velocità di rotazione

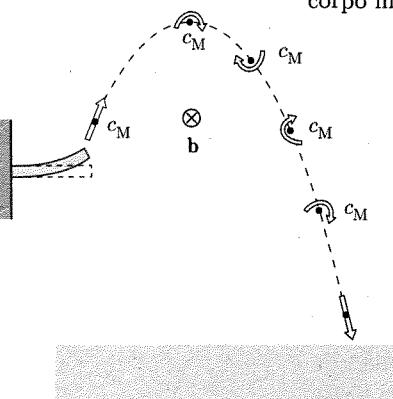


Fig. 4.10



Fig. 4.11 Foto ripresa da: W.D. McArdle *et al.*, *Fisiologia applicata allo sport*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano (1998).

cresce notevolmente. In questa esperienza è anche facile notare che per spostare le braccia nel senso indicato è richiesto un apprezzabile sforzo: in tutti questi casi, infatti, la variazione di energia cinetica deve essere prodotta da lavoro delle forze interne.

3. Consideriamo brevemente gli effetti delle maree oceaniche che sono, come è noto, dovute alla attrazione lunare e consistono in periodici movimenti delle masse liquide dei mari. A causa dell'attrito fra queste masse e la parte solida della Terra, un primo effetto è quello di rallentare il moto di rotazione della Terra su se stessa, cioè di ridurre il corrispondente momento della quantità di moto. Se si considera il sistema Terra-Luna come un sistema isolato, il cui momento totale della quantità di moto deve restare costante, alla diminuzione del momento della quantità di moto della Terra nel suo moto di rotazione deve corrispondere un aumento del momento della quantità di moto della Luna nel suo moto (orbitale) intorno alla Terra e questo ha come effetto un aumento del raggio dell'orbita della Luna intorno alla Terra. Infatti il momento della quantità di moto orbitale della Luna (massa m), cioè del momento rispetto al centro dell'orbita ove è la Terra, ha come intensità

$$b = mr^2\omega$$

essendo ω la velocità di rotazione ed r il raggio dell'orbita. La velocità di rotazione si può ottenere considerando la Luna come un punto materiale in moto circolare uniforme sotto l'azione della forza attrattiva esercitata dalla Terra; questa forza può porsi nella forma $G(Mm/r^2)$ con G costante e M massa della Terra. Il II principio della dinamica fornisce (essendo la accelerazione solo normale, v^2/r)

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r .$$

Ricavando ω e sostituendo nella espressione di b si ha

$$b = (GMm^2r)^{1/2} .$$

Poiché G , M e m sono costanti, al crescere di b deve crescere r . Questo aumento di r è dell'ordine di 15 mm all'anno.

■ 4.7. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA NEI SISTEMI DI PUNTI

Consideriamo il passaggio di un sistema di n punti materiali da una configurazione 1 ($x'_1, y'_1, z'_1, \dots, x'_n, y'_n, z'_n$) nel sistema di riferimento adottato a una configurazione 2 ($x''_1, y''_1, z''_1, \dots, x''_n, y''_n, z''_n$). Per ciascun

punto materiale j si può porre

$$(27) \quad L_j = \int_1^2 (\mathbf{F}_j + \mathbf{f}_j) \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{1}{2}m(v''_j)^2 - \frac{1}{2}m(v'_j)^2$$

essendo \mathbf{F}_j e \mathbf{f}_j le somme delle forze esterne (reali ed apparenti) e interne applicate al punto di massa m_j : la variazione dell'energia cinetica del singolo punto materiale in un intervallo di tempo è pari al lavoro fatto sul punto dalle forze *interne ed esterne* ad esso applicate.

Sommmando le n relazioni (27) per i vari punti materiali del sistema, si ha

$$(28) \quad L = \sum_1^n L_j = T_2 - T_1$$

ove L è il lavoro eseguito da tutte le forze agenti sul sistema (interne ed esterne) e T è l'energia cinetica del sistema

$$(29) \quad T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_j v_j^2 .$$

La variazione dell'energia cinetica di un sistema durante un intervallo di tempo qualsiasi è pari al lavoro contemporaneamente compiuto da tutte le forze agenti sul sistema (esterne ed interne). È questo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica per i sistemi di punti.

■ 4.8. ENERGIA CINETICA E MOTO DEL CENTRO DI MASSA

È interessante notare che l'energia cinetica di un sistema può espimersi in maniera particolare utilizzando la nozione, già introdotta, del moto del centro di massa del sistema.

Si consideri infatti accanto alla terna già adottata (inerziale o non) un'altra terna che ha origine nel centro di massa del sistema e che si sposti con esso di moto traslatorio. La velocità di un qualsiasi punto P_j del sistema di punti materiali nel primo sistema di riferimento (\mathbf{v}_j) e la velocità nel riferimento solidale col centro di massa (\mathbf{v}_{cj}) sono legate da:

$$(30) \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{cj} + \mathbf{v}_c$$

essendo \mathbf{v}_c la velocità del centro di massa nel primo sistema di riferimento.

Risulta allora

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_1^n m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum_1^n m_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j = \\ (31) \quad &= \frac{1}{2} \sum_1^n m_j (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{cj}) \cdot (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{cj}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^n m_j v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n m_j v_{cj}^2 + \sum_1^n m_j \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_{cj} . \end{aligned}$$

Si può vedere che l'ultimo termine del secondo membro è zero; infatti si può scrivere

$$(32) \quad \sum_1^n m_j \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_{cj} = \mathbf{v}_c \cdot \sum_1^n m_j \mathbf{v}_{cj} .$$

Ricordando che la quantità di moto di un sistema può esprimersi come prodotto della massa per la velocità del centro di massa, si può scrivere

$$\sum_1^n m_j \mathbf{v}_{cj} = \mathbf{v}_{cc} m$$

dove \mathbf{v}_{cc} è la velocità del centro di massa nel sistema solidale con il centro di massa stesso: essa è nulla. Ne segue che l'espressione (32) è anche essa nulla e la (31) si scrive

$$(33) \quad T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n m_j v_{cj}^2 .$$

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali in un dato sistema di riferimento è pari alla somma della energia cinetica che spetterebbe al centro di massa nel suo moto, qualora in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema materiale e dell'energia cinetica che ai punti materiali spetta nel loro moto rispetto alla terna di riferimento solidale con il centro di massa (Teorema di König).

Il primo termine della (33) corrisponde all'energia cinetica del sistema in un moto traslatorio con velocità \mathbf{v}_c . Il secondo termine, cioè l'energia cinetica nel sistema solidale con il centro di massa, è quella che rileverebbe un osservatore che si muovesse con il centro di massa. In alcuni casi importanti (corpi rigidi) è possibile, come si vedrà, trovare una espressione semplice e utile per questa ultima energia cinetica.

*Teorema di König:
l'energia cinetica
di un sistema di punti
è pari all'energia cinetica
propria nel sistema
del centro di massa
più l'energia
di traslazione
del centro di massa*

■ 4.9. ENERGIA POTENZIALE

Il lavoro che occorre considerare nel teorema del lavoro e della energia cinetica è quello compiuto da tutte le forze interne ed esterne applicate ai punti del sistema, mentre esso passa dalla configurazione 1 a quella 2:

$$(34) \quad L = \sum_1^n \int_1^2 (\mathbf{F}_j + \mathbf{f}_j) \cdot d\mathbf{s}_j .$$

Nei riguardi del contributo al lavoro totale del lavoro delle forze interne, si osservi che esso è in genere non nullo. Il III principio della dinamica infatti asserisce che le forze scambiate fra due punti (P_i e P_j) sono dirette lungo $P_i P_j$, uguali ed opposte ($\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$) e quindi, se la distanza fra i due punti aumenta o diminuisce durante il moto, entrambe le forze interne fanno contemporaneamente lavoro dello stesso segno (positivo o negativo). Estendendo queste considerazioni a tutti i punti del sistema si vede che le forze interne possono dare un contributo al lavoro totale (34).

Può darsi il caso che qualcuna delle forze, interne od esterne, sia conservativa. In questo caso il contributo del lavoro di queste forze alla (34) può essere espresso mediante le differenze che le funzioni energia potenziale assumono in corrispondenza alle posizioni iniziali e finali dei rispettivi punti sui quali dette forze agiscono.

Accade spesso che le forze interne scambiate fra due punti materiali siano azioni di tipo centrale e possano farsi derivare da funzioni energie potenziali espresse mediante la distanza fra i due punti materiali

$$\mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -dU_{ij}$$

Il concetto di energia potenziale si estende automaticamente dal caso di un punto materiale a quello di un sistema di punti

essendo $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ il vettore che individua la posizione relativa dei due punti la cui posizione rispetto al sistema di riferimento con origine in O è data da \mathbf{r}_i ed \mathbf{r}_j .

Nel caso che tutte le forze, esterne ed interne ($\mathbf{F}_j, \mathbf{f}_j$) applicate ai punti del sistema siano conservative, è possibile considerare una funzione energia potenziale del sistema:

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

che dipende esclusivamente dalle coordinate dei punti che costituiscono il sistema e tale che la differenza dei valori che essa assume in corrispondenza a due configurazioni 1 ($x'_1, y'_1, z'_1 \dots x'_n, y'_n, z'_n$) e 2 ($x''_1, y''_1, z''_1 \dots x''_n, y''_n, z''_n$) è pari al lavoro compiuto da tutte le forze (esterne ed interne) agenti sul sistema quando esso passa dalla prima alla seconda configurazione:

$$(35) \quad U(1) - U(2) = L_{12}$$

indipendentemente dalle configurazioni intermedie assunte dal sistema. L'energia potenziale è definita a meno di una costante; il suo valore cioè può scegliersi arbitrariamente in corrispondenza a una configurazione qualsiasi (che chiamiamo 1). L'energia potenziale in corrispondenza a un'altra configurazione qualsiasi, C ($x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n$), è allora

$$(36) \quad U(x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n) = -L_{1C} + U(1).$$

In questi casi, quando cioè tutte le forze (interne ed esterne) sono conservative, il lavoro elementare è un differenziale totale. Se si indica con $\mathbf{R}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{f}_j$ la somma delle forze applicate a P_j si può scrivere

$$(37) \quad dL = \sum_1^n (R_{jx} dx_j + R_{jy} dy_j + R_{jz} dz_j) = -dU.$$

Si trova allora, analogamente a quanto visto per il punto materiale

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{jx} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} \\ R_{jy} = -\frac{\partial U}{\partial y_j} \\ R_{jz} = -\frac{\partial U}{\partial z_j} \end{array} \right.$$

Si osservi infatti che nella sommatoria (37) gli unici termini che contengono x_j, y_j, z_j , sono rispettivamente $R_{jx} dx_j, R_{jy} dy_j, R_{jz} dz_j$.

4.10. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Nel caso in cui tutte le forze (esterne e interne) agenti sui punti del sistema siano conservative e che quindi si possa definire una energia potenziale del sistema, il teorema del lavoro e dell'energia cinetica (28) si esprime

$$(39) \quad T + U = E = \text{cost}$$

*Forze conservative:
conservazione
dell'energia meccanica*

cioè, l'energia meccanica del sistema, somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, resta inalterata durante il moto pur potendosi avere una trasformazione di energia cinetica in potenziale o viceversa.

Al caso dei sistemi di punti possono estendersi le considerazioni svolte a questo proposito nel caso di un unico punto materiale. Nel caso che alcune delle forze (interne o esterne) agenti sul sistema non siano conservative (per es. forze d'attrito), l'energia meccanica non si conserva e va diminuendo durante il moto: in ogni caso è possibile riscontrare che durante il processo compaiono altre forme di energia nel sistema o nell'ambiente con cui il sistema interagisce sicché è possibile enunciare un principio generale di conservazione della energia: *durante il moto di un sistema, purché accanto alla energia cinetica e potenziale (energia meccanica) si considerino altre forme di energia (termica, elettromagnetica ecc.) che possano manifestarsi, l'energia totale (nel sistema e nell'ambiente) resta inalterata pur potendosi avere variazioni nelle singole forme di energia istante per istante.*

Ai sistemi di punti materiali si estendono le conclusioni della meccanica relativistica (cap. 3, par. 3.12) per cui *in un sistema isolato* la massa e l'energia totale non si conservano come in meccanica classica, ma *si conserva la loro combinazione ($m_0 + E_T/c^2$)* e si possono avere trasformazioni di massa in energia e viceversa.

Il principio di conservazione dell'energia con le precisazioni viste, assieme a quelli di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto sono i pilastri sui quali è costruita la meccanica dei sistemi non solo nella meccanica classica di Newton ma in tutta la fisica moderna giacché, come si è detto, la loro validità si estende anche alla fisica atomica e nucleare⁽²⁾.

■ 4.11. PROBLEMI DI MECCANICA DEI SISTEMI

Lo studio completo del moto dei sistemi di punti materiali si può compiere solo nel caso che si abbiano sufficienti informazioni sulle forze interne ed esterne applicate ai singoli punti del sistema sicché si possa studiare il moto di ciascun punto materiale. Va avvertito tuttavia che, anche se si hanno tutte le informazioni necessarie, la soluzione pratica dei problemi può divenire di enorme complessità. È quindi di grande interesse ottenere alcune informazioni sul moto del sistema applicando quelle considerazioni che abbiamo svolte sul moto del centro di massa, sui teoremi della quantità di moto, del momento della quantità di moto, sul teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

Il moto di un sistema in un riferimento (inerziale o non) si può sempre immaginare costituito dal moto del centro di massa in quel riferimento e di quello del sistema stesso in un riferimento in moto traslatorio e solidale con il centro di massa.

Il moto del centro di massa nel sistema di riferimento adottato è di studio relativamente semplice perché è il moto di un punto materiale in cui si immagini concentrata tutta la massa del sistema e che si muova sotto l'azione della somma delle forze esterne, reali e apparenti; nessuna

⁽²⁾ Vogliamo richiamare l'attenzione sul fatto che nella applicazione dei principi di conservazione fuori della meccanica newtoniana, nel caso che i corpi si muovano a velocità non molto diversa da quella della luce, occorre introdurre nelle relazioni trovate le espressioni relativistiche per m e per l'energia cinetica [vedi cap. 3, eq. (58) e (61)].

informazione è richiesta sulla natura delle forze interne

$$(40) \quad \mathbf{F}_e = \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_c)}{dt}.$$

Lo studio del moto dei punti del sistema nella terna di riferimento solidale con il centro di massa richiede in genere la conoscenza delle forze interne.

Il teorema del momento della quantità di moto rispetto al centro di massa

$$(41) \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

costituisce un'equazione vettoriale che può essere scritta senza conoscere nulla nei riguardi delle forze interne e consente di ottenere utili informazioni nei casi pratici. Talvolta, in casi molto particolari (come per es. nel caso dei corpi rigidi), la natura delle forze interne è tale che la (41) definisce completamente il moto nel sistema rispetto al centro di massa.

Le equazioni (40) e (41) prendono il nome di equazioni cardinali del moto dei sistemi. Si osservi che nel caso in cui il sistema sia isolato esse si riducono a

$$(42) \quad \mathbf{p} = \text{cost} \quad \mathbf{b} = \text{cost}$$

che esprimono i principi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

In accordo con quanto posto per il singolo punto materiale (cap. 2, par. 2.4) diremo che un sistema di punti si trova *in equilibrio* sotto l'azione di un certo insieme di forze quando accade che ogni suo punto sia in quiete o si muova dello stesso moto rettilineo uniforme; in particolare ciò si verifica quando, qualora il sistema in un istante si trovi in quiete, le forze applicate non determinano un suo moto successivo. Le equazioni cardinali (40), (41) e la (20) conducono ad affermare che *condizione necessaria*⁽³⁾ per l'*equilibrio* di un qualsiasi sistema è che, per una qualsiasi scelta del polo fisso O rispetto a cui si calcolano i momenti⁽⁴⁾, si abbia

*Condizione necessaria per l'equilibrio
di un sistema di punti*

$$(43) \quad \mathbf{F} = O \quad \mathbf{M} = O$$

essendo, lo ricordiamo, \mathbf{F} e \mathbf{M} i risultanti delle forze esterne e dei momenti delle sole forze esterne.

Le (43) prendono il nome di *equazioni cardinali dell'equilibrio*. Per alcuni tipi di sistemi (rigidi) come vedremo (cap. 5, par. 5.10) le (43) sono anche condizioni sufficienti per l'equilibrio.

⁽³⁾ Per constatare che le (43) non costituiscono condizione sufficiente si consideri il caso di un sistema di due soli punti soggetti rispettivamente alle forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ dirette lungo la congiungente delle posizioni occupate; le (43) sono verificate ma i punti non sono in equilibrio perché sottoposti ciascuno ad una forza totale non nulla.

⁽⁴⁾ Se la condizione è verificata per un generico punto O , vale per qualsiasi altro punto O' .

■ 4.12. PROCESSI D’URTO

Processi d’urto si incontrano spesso in fisica. Si tratta di tipici problemi dinamici di sistemi di punti e per quanto si è detto c’è da attendersi che un loro studio completo richieda la conoscenza delle forze interne che intervengono. È possibile, tuttavia, ricavare un certo numero di informazioni spesso sufficienti a determinare gli effetti dei processi stessi, applicando i principi di conservazione (quantità di moto, momento della quantità di moto, energia) stabiliti per i sistemi di punti. Ricordiamo che la validità di questi principi supera il campo della meccanica classica sicché essi possono essere impiegati nello studio dell’urto tanto di corpi macroscopici quanto di particelle atomiche o subatomiche.

Una importante caratteristica dei processi d’urto è quella che le forze interne in gioco durante l’urto hanno valori molto grandi per intervalli di tempo molto brevi: ne segue che l’impulso ad esse relativo supera largamente l’impulso che nello stesso intervallo di tempo può derivare ai punti materiali da forze che agiscono su di essi indipendentemente dall’urto. In figura 4.12 è qualitativamente indicato quale può essere l’andamento in funzione del tempo dell’intensità della forza interna f che agisce durante l’urto su un punto materiale rispetto a quella esterna F , per es. una sferetta d’acciaio (naturalmente la forza sul secondo corpo che partecipa all’urto ha le stesse intensità e direzione di f e verso opposto).

L’intervallo di tempo in cui le forze interne sono diverse da zero in un processo d’urto è molto piccolo; per es., nell’urto tra due sfere d’acciaio del diametro di 2 cm, che si incontrino con velocità relativa dell’ordine di 10 m/s, questo intervallo di tempo è di circa 70 microsecondi⁽⁵⁾. Nella figura, l’area racchiusa fra la curva che rappresenta i valori della forza e l’asse dei tempi dà l’impulso della forza interna durante l’interazione. Sulla stessa figura è orientativamente anche indicata l’intensità F della risultante delle forze esterne (gravità, attrito ecc.) quali normalmente si presentano: è evidente che l’impulso di tali forze, che agiscono indipendentemente dall’urto, nell’intervallo di tempo Δt in cui ha luogo l’urto, può essere trascurato rispetto a quello dovuto alle forze interne.

Ciò equivale a dire che nello studio dei processi d’urto si possono trascurare le forze che agiscono sui punti e siano indipendenti dall’urto: i punti materiali che partecipano all’urto possono quindi essere considerati non soggetti a forze esterne. Questa circostanza mostra innanzi tutto che ai punti del sistema coinvolti nei processi d’urto si possono applicare i principi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

Ciò significa che il centro di massa del sistema formato dai corpi che collidono non è disturbato nel suo moto per effetto dell’urto, dato che le forze che determinano il processo sono forze interne; se in particolare, come in genere è il caso, si può ammettere che non vi siano forze esterne, il moto del centro di massa è rettilineo uniforme. Riesce utile alle volte descrivere un processo d’urto e le sue conseguenze in un sistema legato al centro di

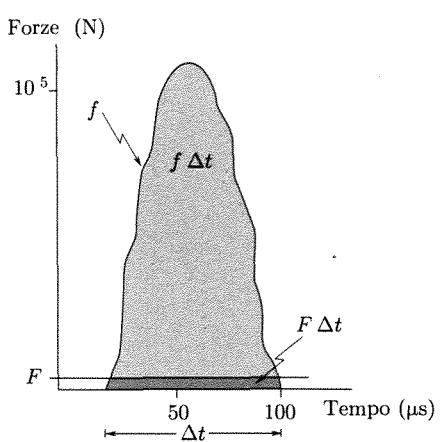


Fig. 4.12

Nei processi d’urto si può trascurare l’effetto delle forze esterne al sistema dei corpi che si urtano

⁽⁵⁾ Il valore massimo delle forze interne che si destano è di $10^5 \div 10^6$ N.

massa; in tale descrizione il centro di massa è in quiete. Naturalmente qualora si desideri avere il moto delle varie parti del sistema prima e dopo l'urto riferito a un sistema inerziale (come ad es. un sistema legato al laboratorio) non v'è che da tener conto del moto del centro di massa in tale sistema e applicare le regole per la composizione del moto relativo e di quello di trascinamento.

L'origine delle forze interne nel caso particolare dell'urto di due corpi macroscopici, come per es. due bilie, può avere una prima spiegazione grossolana osservando che, quando un corpo cerca di occupare la posizione tenuta da un altro, deve evidentemente rimuoverlo esercitando un'azione: siccome i corpi non sono rigidi la forza applicata al secondo corpo produce in esso una deformazione la quale desta delle reazioni che, tendono a eliminare le deformazioni stesse e ad allontanare il corpo urtante. Naturalmente deformazioni avvengono anche nel primo corpo e la situazione è più complessa. Un'analisi più dettagliata mostra con precisione che le forze interne in gioco nell'urto di corpi macroscopici del tipo ora considerato sono sempre da ricondursi ad azioni fra atomi che, come si è già avuto modo di vedere (cap. 2, par. 2.9), divengono fortemente repulsive quando le mutue distanze scendono al di sotto di certi valori.

Diremo che due punti materiali subiscono un urto quando giungono a una distanza sufficientemente piccola perché l'interazione mutua disturbi drasticamente e in breve tempo il loro moto. Così, ad es., in astronomia si parla di urto tra corpi celesti quando le forze gravitazionali tra di essi scambiate determinano variazioni rapide e rilevanti nel moto: ciò può avvenire anche a distanza di migliaia di chilometri e oltre. Analogamente, siccome atomi e particelle subatomiche possono interagire mediante forze elettriche, magnetiche e nucleari, si parla di urto quando le interazioni fra due particelle atomiche e subatomiche divengono tali da disturbare il moto preesistente, il che avviene a distanza di $10^{-10} \div 10^{-14}$ m.

*In un urto elastico
l'energia cinetica totale
dei corpi interagenti
è uguale prima e dopo
l'urto*

Gli urti si chiamano elastici quando l'energia meccanica posseduta dal sistema dei corpi che partecipano all'urto non varia in conseguenza dell'urto. Questa circostanza si esprime di solito dicendo che l'energia cinetica totale prima dell'urto è uguale a quella dopo l'urto, giacché l'energia potenziale dovuta a campi di forze conservative eventualmente presenti è la stessa prima e dopo l'urto per i corpi del sistema, dal momento che i corpi praticamente non cambiano la loro posizione durante l'urto.

L'urto si dice non elastico, o anelastico, se parte dell'energia cinetica totale posseduta dal sistema varia in conseguenza della conversione in o da altre forme di energia. L'urto si dice perfettamente anelastico quando i corpi dopo l'urto procedono come un tutt'uno: ciò non vuol dire che tutta l'energia cinetica iniziale si sia trasformata in altre forme di energia (termica, acustica, potenziale legata a deformazioni permanenti ecc.), ma che ciò è avvenuto per quanto consentito dalla conservazione della quantità di moto.

In realtà, tranne alcuni casi di urti fra atomi e particelle subatomiche, gli urti non sono mai completamente elastici e v'è sempre una trasformazione di energia cinetica in altre forme di energia; alle volte tale conversione è così piccola da poter essere trascurata e l'urto può essere considerato elastico (per es. tra sfere di acciaio, avorio, vetro ecc.).

Noi considereremo alcuni processi d'urto abbastanza semplici fra corpi che non siano in rotazione su se stessi; sarà allora solo da considerare la conservazione della quantità di moto (e non del momento della quantità di moto): i corpi che partecipano all'urto si muovono, subito prima e subito dopo l'urto, di moto rettilineo uniforme.

4.13. URTO NORMALE CENTRALE

Il caso più semplice di urto è quello tra due sfere lisce e non ruotanti su se stesse, che si avvicinano coi loro centri moventisi lungo la congiungente (urto normale centrale). Le deformazioni prodotte sono simmetriche attorno alla congiungente i due centri e le forze interne durante l'urto sono dirette lungo tale retta. Ne segue che anche dopo l'urto il moto avviene sulla medesima direzione. Il problema si riduce quindi a un problema unidimensionale. Sia x l'asse orientato per es. dal primo al secondo punto materiale.

Se (fig. 4.13) si indicano con $m_{1,2}$ le masse delle sfere e con $\mathbf{v}_{1,2}$ e $\mathbf{V}_{1,2}$ le componenti delle velocità prima e dopo l'urto secondo l'asse orientato, il principio di conservazione della quantità di moto si scrive

$$(44) \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2$$

Negli urti si conserva sempre la quantità di moto

cioè, per i moduli:

$$(45) \quad m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2).$$

Consideriamo ora separatamente i casi dell'urto centrale elastico e di quello anelastico.

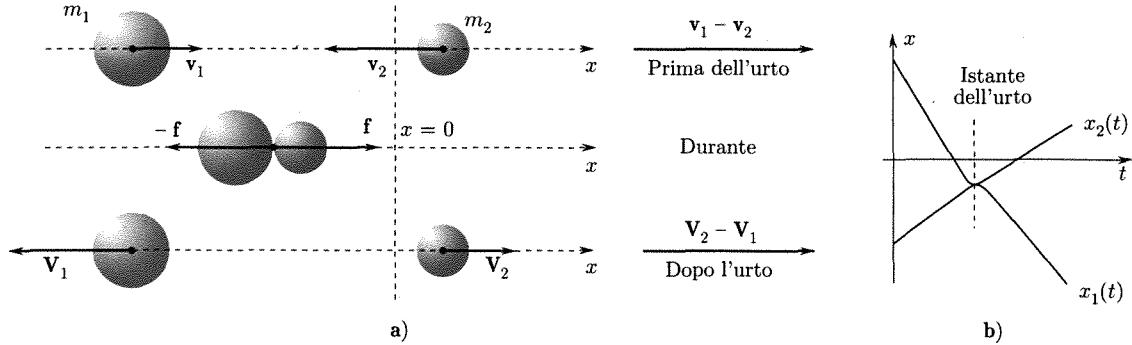


Fig. 4.13

1. Urto perfettamente elastico

In tal caso anche le energie cinetiche del sistema prima e dopo l'urto sono le stesse; quindi

$$(46) \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2,$$

L'energia cinetica si conserva solo negli urti elastici

ovvero:

$$(47) \quad m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2).$$

Dividendo membro a membro la (47) e la (46) si ottiene:

$$(48) \quad v_1 + V_1 = v_2 + V_2$$

oppure (fig. 4.13a)

$$(49) \quad v_1 - v_2 = V_2 - V_1.$$

La (49) esprime il fatto che il valore della velocità relativa prima dell'urto quando i corpi si avvicinano, è uguale a quello della velocità

relativa dopo l'urto; è solo invertito il segno. Le velocità delle due sfere dopo l'urto possono essere calcolate dalle (45) e (48):

$$(50) \quad \begin{cases} V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 \\ V_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2. \end{cases}$$

Le equazioni (50) forniscono le velocità di *uscita* delle due sfere in funzione di tutti i parametri fisici coinvolti nel processo, le masse m_1 e m_2 e le velocità di *entrata* v_1 e v_2 e sembrano pertanto prestarsi solo a una lettura specifica, variando da caso a caso. Tuttavia, se ne può generalizzare l'espressione, introducendo il rapporto tra le due masse $\gamma = m_1/m_2$ e supponendo che la seconda sfera, quella così detta bersaglio, sia ferma inizialmente, con velocità $v_2 = 0$. Questa ipotesi non è restrittiva, cioè non riduce il numero dei casi reali considerabili, poiché ci si potrà comunque sempre porre in un opportuno sistema relativo dove sia soddisfatta tale ipotesi, in un sistema cioè nel quale la seconda sfera prima dell'urto sia ferma.

Così facendo, le equazioni (50) si possono porre nella forma semplificata:

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{V_1}{v_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ \frac{V_2}{v_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \end{cases}$$

che fornisce il rapporto tra le velocità di uscita delle due sfere in funzione del solo rapporto γ tra le masse.

I rapporti in questione sono rappresentati in figura 4.14 in funzione del parametro γ e si nota che le due curve sono ottenibili per traslazione lungo la ordinata l'una dall'altra.

È assai utile ricordare che curve del tutto analoghe si ritrovano in molti processi della fisica, ogni qualvolta dell'energia, sotto forma di onde e siano esse elastiche (suoni, ultrasuoni ecc.) o elettromagnetiche (luce, microonde, onde radio ecc.), passi da un mezzo omogeneo di propagazione a un altro di caratteristiche diverse. Le curve, in questi casi, rappresentano i coefficienti di riflessione e di trasmissione dell'onda, mentre il rapporto tra le impedenze dei due medesimi materiali sostituirà il rapporto tra le masse.

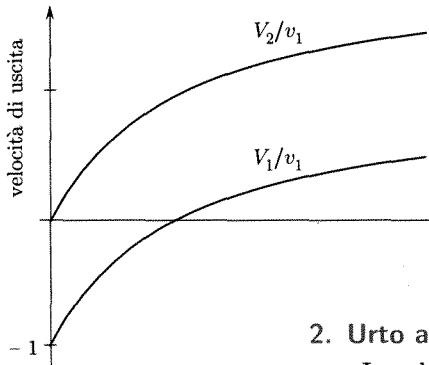


Fig. 4.14

2. Urto anelastico

In tal caso nessun'altra equazione può essere aggiunta a quella (46) che esprime il principio di conservazione della quantità di moto, poiché parte dell'energia meccanica non si conserva, trasformandosi in altre forme di energia (termica, acustica ecc.). Può accadere, peraltro, in alcuni casi di urti parzialmente anelastici, che l'energia cinetica finale sia maggiore di quella iniziale e ciò in quanto le particelle (corpi) che collidono, siano esse macroscopiche o siano molecole, atomi, nuclei, hanno nel loro interno energie cinetiche e potenziali associate con lo stato dei loro costituenti che possono entrare in gioco durante le collisioni.

Si è detto che nel caso di un urto perfettamente anelastico i due corpi dopo l'urto procedono con la medesima velocità; allora l'equazione

$$(52) \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{V}$$

sostituirà l'equazione (44) di prima.

Per potere risolvere il problema del moto, occorre necessariamente avere qualche ulteriore informazione sulla tipologia dell'urto, così da poter scrivere una seconda equazione nelle due incognite V_1 e V_2 . Solitamente,

si può dare l'indicazione di quale frazione α dell'energia cinetica totale a disposizione viene dissipata, cioè si trasforma, in altre forme di energia. Si potrà, per es., scrivere:

$$(53) \quad (1 - \alpha) \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2.$$

A questo punto, il problema sarà determinato e la sua soluzione si riduce a un solo problema algebrico.

Interessante è il caso in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra; sia, per es.,

$$m_2 \gg m_1 \text{ e } v_2 = 0,$$

in tal caso risulta $V \approx 0$, cioè il corpo urtante di massa m_1 si schiaccia contro un corpo fisso di massa $m_2 \gg m_1$ e viene praticamente arrestato.

Negli urti anelastici si dissipà una frazione dell'energia cinetica disponibile prima dell'urto

Esempio

Un esempio di urto perfettamente anelastico si ha nel pendolo balistico usato per misurare la velocità dei proiettili (fig. 4.15). Si consideri un corpo massivo di massa m_2 facilmente deformabile (per es. un sacco di sabbia) sospeso mediante una lunga corda (lunghezza l) ad un punto fisso: esso realizza un pendolo. Contro esso arriva il proiettile ($m_1 \ll m_2$) con velocità v_1 . Il proiettile entra nel sacco e vi rimane, fermato dalla sabbia. Se il periodo del pendolo è molto grande rispetto alla durata dell'urto, si può ritenere che l'urto avvenga mentre il pendolo è ancora in quiete. La velocità finale del sistema

$$(54) \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

può essere facilmente misurata dalla deviazione massima α del pendolo. Infatti quando il pendolo si arresta per la prima volta dopo l'urto, la sua energia cinetica è tutta trasformata in energia potenziale:

$$(55) \quad \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = (m_1 + m_2) g h$$

essendo $h = l(1 - \cos \alpha)$ l'innalzamento del centro di massa del pendolo.

La misura di α consente di determinare V e v_1 mediante la (55). Se per es. il proiettile ha massa $m_1 = 5$ g, il pendolo $m_2 = 10$ kg e sono $l = 1$ m e $\alpha = 30^\circ$ ($\cos \alpha = 0,87$), si ha

$$h = 1(1 - 0,87) = 0,13 \text{ m}$$

$$V = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 \approx 3,2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nei riguardi dell'energia cinetica si ha che prima dell'urto essa era

$$\frac{1}{2} m v_1^2 \approx 25,6 \cdot 10^3 \text{ J}$$

dopo l'urto è

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \approx 12,75 \text{ J}.$$

La differenza (circa il 99,995% di quella iniziale) è trasformata in energia termica.

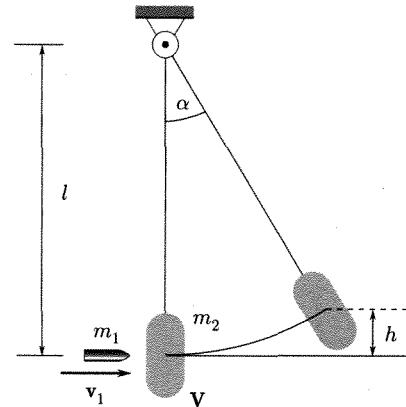


Fig. 4.15

3. Descrizione nel sistema del centro di massa

Allo scopo di illustrare l'utilità che a volte può avere il considerare l'urto di due corpi in un sistema che si muove con il centro di massa, prendiamo in considerazione l'urto di un corpo di massa m_1 che si muove con velocità v_1 rispetto al sistema del laboratorio fino a incontrare un secondo corpo di massa $m_2 = 2m_1$ inizialmente fermo e vediamo come appaia il processo nel sistema inerziale legato al laboratorio e nel sistema legato al centro di massa. L'urto sia centrale e supponiamo avvenga nella direzione orizzontale che orientiamo positivamente dal corpo 1 al corpo 2.

Consideriamo dapprima il caso di urto elastico. Nella figura 4.16a è indicata la posizione dei due corpi 1 e 2 e la loro velocità a istanti regolarmente crescenti man mano che si procede dall'alto verso il basso.

È anche indicata la posizione del centro di massa e la sua velocità v_c (per rendere il disegno più semplice i vettori \mathbf{v} per alcune posizioni non sono segnati).

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_c$$

$$v_c = \frac{1}{3} v_1 .$$

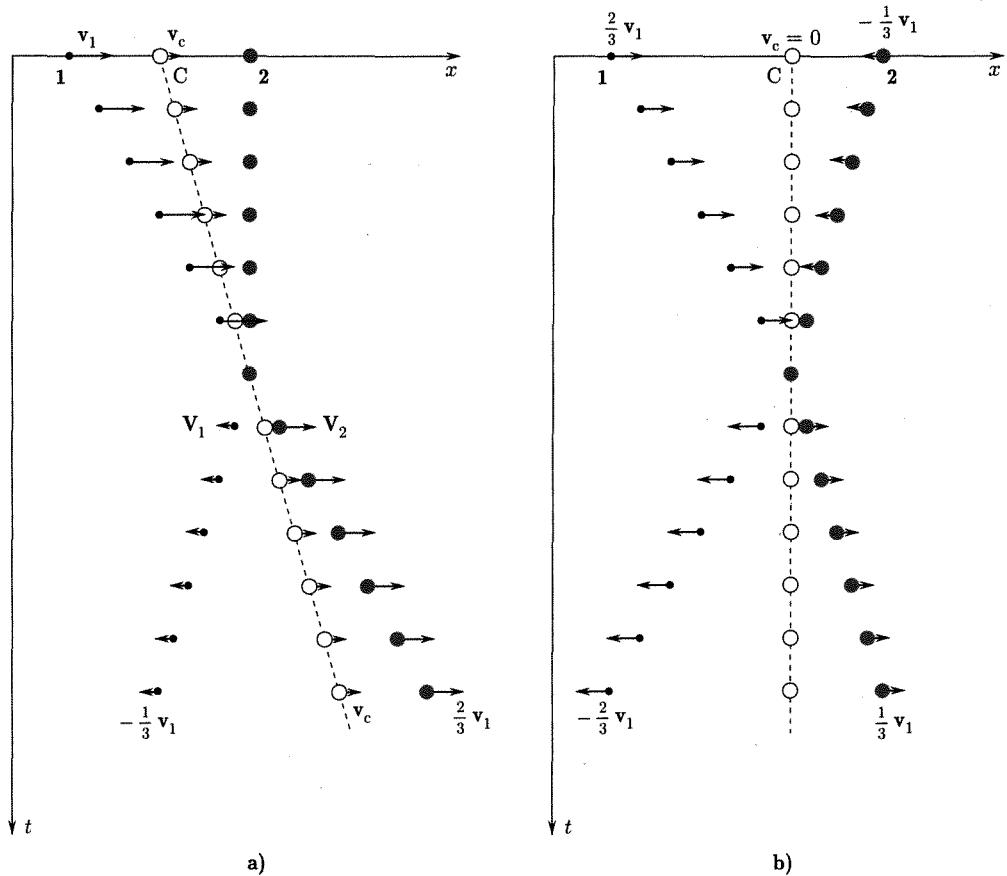


Fig. 4.16

Dopo l'urto il corpo 1 ritorna indietro con la velocità $V_1 = -\frac{1}{3} v_1$ [formula (51)] ed il corpo 2 si muove con la velocità $V_2 = \frac{2}{3} v_1$. Il centro di massa dopo l'urto procede indisturbato di moto rettilineo uniforme.

Nella figura 4.16b l'urto è considerato nel sistema del centro di massa, nel quale il centro di massa resta fermo.

Prima dell'urto le velocità dei punti 1 e 2 sono rispettivamente: $\frac{2}{3}v_1$ e $-\frac{1}{3}v_1$; dopo l'urto $-\frac{2}{3}v_1$ e $\frac{1}{3}v_1$.

Per determinare le posizioni e le velocità dei corpi nel sistema del laboratorio basta sovrapporre al loro moto nel sistema del centro di massa, il moto di trascinamento di tale sistema rispetto al sistema del laboratorio; tale moto è traslatorio uniforme con velocità v_c .

Le figure 4.17a e b rappresentano il caso in cui l'urto è perfettamente anelastico, rispettivamente nel sistema del laboratorio e nel sistema del centro di massa. Dopo l'urto i due corpi si muovono come un tutt'uno.

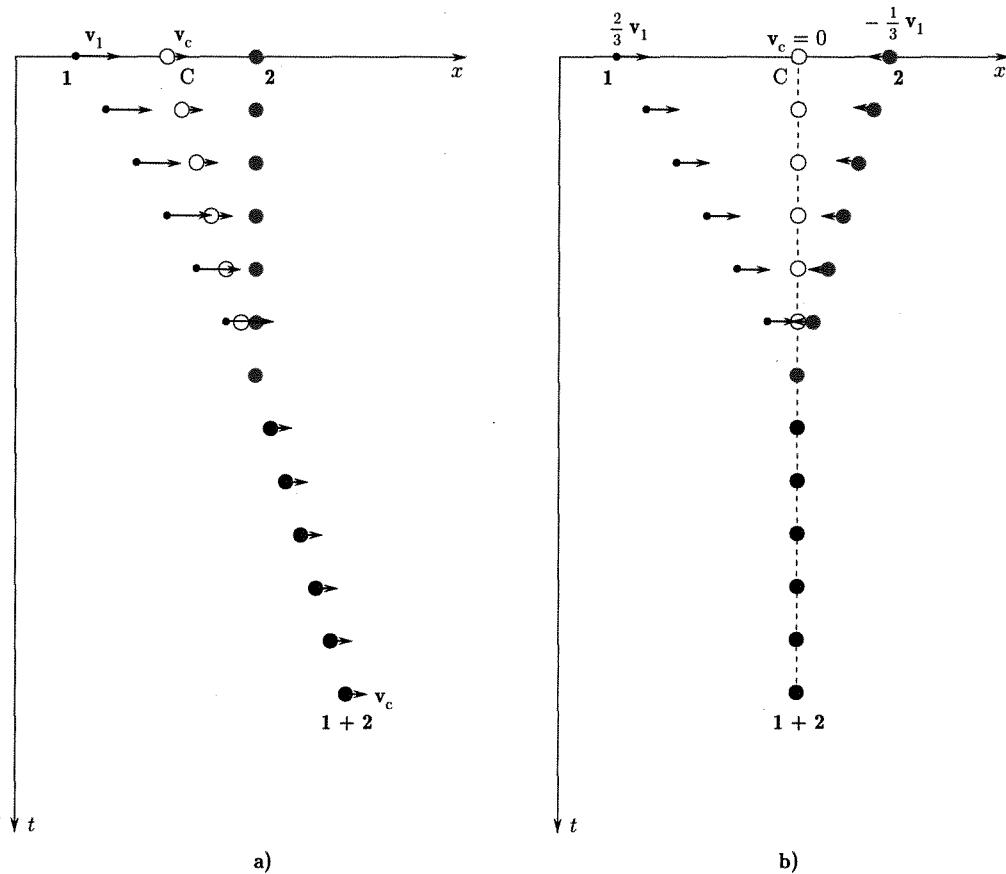


Fig. 4.17

4.14. URTO NELLO SPAZIO

Nel caso dell'urto centrale i punti materiali si trovano sempre su una stessa retta. A eccezione di questo caso, gli urti tra punti materiali sono processi che avvengono, e vanno studiati, in un piano o nello spazio. È possibile allora vedere facilmente che, tranne i casi in cui l'urto sia perfettamente anelastico, gli effetti non possono essere determinati dalla conoscenza delle condizioni iniziali e dal solo uso dei principi di conservazione.

Limitandosi ancora a trattare problemi nei quali non occorra considerare i momenti di rotazione e supponendo (sebbene non sia necessario) che i punti materiali

conservino la loro identità nell'urto, il principio di conservazione della quantità di moto si scrive

$$(56) \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2.$$

Tale equazione vettoriale equivale a tre relazioni scalari fra 13 grandezze: le componenti di quattro velocità ed il rapporto delle masse.

Nel caso in cui l'urto sia perfettamente anelastico si ha $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$. Le tre componenti di questo vettore possono essere determinate mediante la (56) supponendo noti i parametri del sistema prima dell'urto (\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e m_1/m_2).

Nel caso generale, tuttavia, la (56) non consente di determinare gli effetti dell'urto sulla base della conoscenza dei 7 parametri che individuano le condizioni iniziali del sistema. Queste condizioni iniziali consentirebbero di giungere allo studio completo del moto, e quindi degli effetti dell'urto, qualora potessero scriversi e risolversi le equazioni del moto. Per far ciò occorrerebbe peraltro conoscere le forze interne che entrano in gioco durante l'urto.

Nel caso di urto elastico un'altra relazione scalare, per la conservazione dell'energia meccanica, può scriversi accanto alla (56)

$$(57) \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2.$$

In tal caso, pertanto, note le 7 grandezze che caratterizzano il sistema prima dell'urto, occorre avere informazioni indipendenti su altre $13 - 7 - 4 = 2$ grandezze. Queste informazioni vanno ottenute dall'esperienza. Si può per es. determinare sperimentalmente la direzione di \mathbf{V}_1 : i principi di conservazione consentono allora di determinare gli altri parametri relativi agli effetti dell'urto (\mathbf{V}_2 e intensità di \mathbf{V}_1).

In vari campi della fisica (astronomia, fisica atomica, nucleare) i processi d'urto avvengono di solito in condizioni che realizzano lo schema che abbiamo dato: un corpo si avvicina ad un altro (*bersaglio*), in genere non lungo la congiungente tra i due corpi, fino a interagire fortemente con esso; i corpi (particelle) che escono dalla interazione si allontanano quindi nello spazio.

Generalmente l'urto avviene nello spazio, mantenendosi le traiettorie su un piano

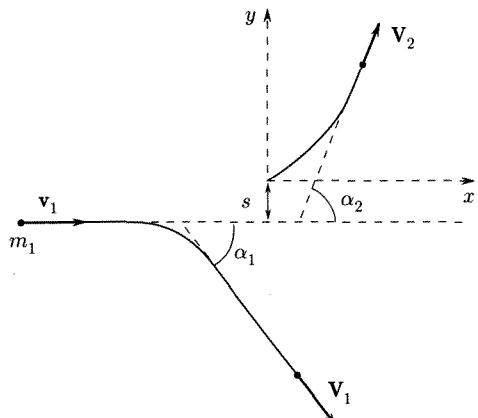


Fig. 4.18

Per analizzare l'andamento del processo possiamo immaginare il bersaglio inizialmente fermo; qualora non lo fosse, basta porsi in un sistema di riferimento che si muova rispetto al sistema del laboratorio con la velocità del bersaglio prima dell'urto. L'urto fra i due corpi in genere non è centrale e la situazione è quella indicata in figura 4.18. La retta della traiettoria seguita dalla particella m_1 , prima che inizi la interazione con la seconda particella m_2 , passa a una distanza s da questa che si chiama parametro d'urto. Le traiettorie di m_1 e m_2 dopo l'interazione sono rettilinee e formano gli angoli α_1 e α_2 con la direzione di v . Le tre traiettorie rettilinee si trovano su un piano, perché non ci sono componenti della quantità di moto prima e dopo l'urto fuori del piano in cui si trovano le due traiettorie rettilinee di m_1 .

Si vede quindi che il problema è in effetti un problema piano e, invece delle equazioni generali (56) per il principio di conservazione della quantità di moto, si possono scrivere per le componenti della velocità:

$$(58) \quad \begin{cases} m_1 v_1 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ 0 = m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y}. \end{cases}$$

Nel caso che l'urto sia elastico si ha anche:

$$(59) \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2.$$

Nel caso che siano note le grandezze del sistema prima dell'urto (m_1 , m_2 , v_1) le tre relazioni (58), (59) per un urto elastico non sono sufficienti per determinare le altre quattro grandezze (V_{1x} , V_{1y} , V_{2x} , V_{2y}). In questo caso occorre un'altra informazione dall'esperienza: per es., il valore di uno degli angoli α_1 , α_2 .

Nello studio dei processi nucleari si fa un uso frequente di quanto ora abbiamo visto giacché la ricerca viene fatta studiando la interazione di particelle di vario genere durante processi d'urto. I metodi sperimentali cercano appunto di determinare alcune grandezze in modo da giungere alla valutazione di altre mediante le equazioni scritte precedentemente. Nel caso per es. dello studio con camera di Wilson⁽⁶⁾ abbiamo già detto che le particelle producono la formazione di goccioline d'acqua del vapore contenuto in condizioni instabili nella camera, sicché riesce spesso possibile individuare le traiettorie delle particelle stesse. Prendendo fotografie della camera si possono osservare processi come quello schematizzato in figura 4.19 nel quale una particella α (nucleo di elio) inviata nella camera ha urtato un nucleo di idrogeno (protone).

*Negli urti nello spazio
l'esperimento deve
fornire ulteriori dati
rispetto all'urto centrale
per la definizione
del fenomeno*

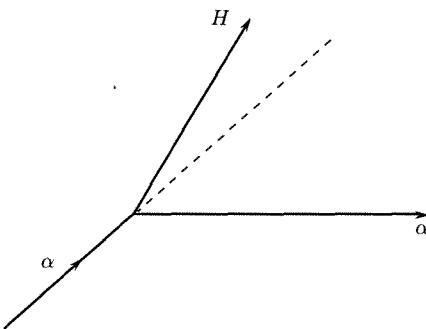


Fig. 4.19

Vedremo tra breve alcuni casi di studi di questo tipo che hanno avuto una notevole importanza.

Vogliamo ora aggiungere qualcosa a quanto già detto per il caso di urti anelastici. In questo caso non si può scrivere la relazione (57) che esprime la conservazione dell'energia cinetica.

Durante l'urto vale tuttavia il principio di conservazione dell'energia e la differenza fra le energie cinetiche dei corpi prima e dopo l'urto rappresenta un'energia (Q) di altro genere che interviene nel bilancio. Atomi, molecole, nuclei possiedono infatti energie potenziali e cinetiche legate ai loro costituenti e queste energie possono durante l'urto essere convertite in energie cinetiche delle particelle considerate come unità o viceversa. Quando si comprime un gas, per es., dell'energia viene data al gas sotto forma di energia cinetica (di traslazione) delle molecole ed è appunto attraverso gli urti fra le molecole che tale energia fluisce verso i gradi di libertà interni (di vibrazione, di rotazione) delle molecole in modo da ottenere, all'equilibrio, la equipartizione dell'energia fra i vari gradi di libertà; un processo analogo accade in corrispondenza di una decompressione.

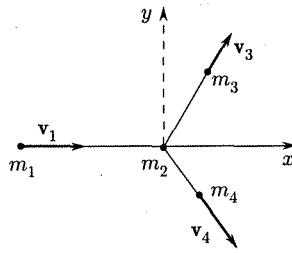
L'energia Q può essere sottratta all'energia cinetica delle particelle urtanti (urti anelastici endoenergetici) o messa in libertà nel processo sicché l'energia cinetica cresce (urti anelastici esoenergetici).

In fisica nucleare inoltre, in seguito all'urto di due particelle (masse m_1 , m_2) possono risultare particelle diverse. Si conoscono molti processi di questo genere: un protone urtando con un nucleo può essere assorbito

⁽⁶⁾ Per es. camera di Wilson o camera a ionizzazione. In questo ultimo apparecchio l'arrivo di particelle cariche produce in un gas una scarica che a sua volta origina un segnale elettrico; le cose possono essere disposte in modo da determinare l'energia della particella che entra dalla misura dell'ampiezza del segnale prodotto.

mentre un neutrone viene emesso; due particelle possono urtare e formare due o più particelle diverse che si allontanano dopo l'urto. In tutti i casi valgono il *principio di conservazione della quantità di moto e quello di conservazione dell'energia*, purché si tenga conto delle energie interne delle particelle (atomi, molecole, nuclei).

Se per es. (fig. 4.20) due particelle (m_1, m_2) collidono e danno origine a due diverse particelle (m_3, m_4), si può scrivere:



(60)

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_3 v_{3x} + m_4 v_{4x} \\ 0 = m_3 v_{3y} + m_4 v_{4y} \\ T_1 = T_3 + T_4 + Q. \end{cases}$$

Fig. 4.20

Queste relazioni possono essere usate assieme a informazioni sperimentali su alcuni effetti dell'urto per determinare le grandezze rimanenti.

Vogliamo ora descrivere un caso di urto fra particelle elementari dalle quali, usando l'analisi precedentemente discussa, è stato possibile ricavare informazioni fondamentali per lo sviluppo della fisica atomica.

Effetto Compton

Un problema che per lungo tempo ha interessato le frontiere della fisica è stato quello della natura della luce. Vi sono esperienze (di diffrazione e interferenza) che sembrano indicare una natura ondulatoria, e altre (emissione, effetto fotoelettrico) che sembrano indicare una natura corpuscolare. Nel primo caso la radiazione elettromagnetica consisterebbe in una perturbazione (elettromagnetica) periodica del mezzo che si propagherebbe con una velocità molto grande, ma finita: essa sarebbe caratterizzata oltre che dalla velocità di propagazione c , dal periodo del fenomeno T (o quello che è lo stesso dalla frequenza $\nu = 1/T$) e dalla lunghezza d'onda, cioè dallo spazio di cui si è propagata la perturbazione in un periodo T . Fra le grandezze vale la relazione

$$(61) \quad c = \lambda v,$$

con λ lunghezza d'onda.

Vi sono tuttavia esperienze in cui, come si è detto, la radiazione sembra avere una natura corpuscolare, come se cioè essa fosse costituita da particelle materiali che si muovono con velocità molto grande e che sarebbero dotate di massa e di quantità di moto.

La fisica moderna ha risolto questo problema, dimostrando che la radiazione elettromagnetica ha una natura duale sicché in certe esperienze si manifesta con il suo aspetto ondulatorio, altre volte si manifesta con il suo aspetto corpuscolare, cioè come se essa fosse costituita da particelle. In quest'ultimo caso, la particella associata alle onde elettromagnetiche è chiamata *fotone* e ha una energia legata alla frequenza dell'onda (ν) da

$$(62) \quad E = h\nu,$$

essendo h la costante di Planck ($6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), e una quantità di moto di modulo

$$(63) \quad p = \frac{h\nu}{c},$$

diretta nella direzione e nel verso di propagazione della radiazione.

La natura corpuscolare della luce bene si rivela nel processo d'urto, rilevato da Compton tra la radiazione e gli elettroni contenuti negli atomi di una sostanza: in questi casi, la radiazione cambia in parte direzione e la lunghezza d'onda della radiazione deviata (α angolo fra direzione originaria e direzione finale) risulta maggiore di quella della radiazione incidente. I risultati sperimentali sono rappresentati dalla formula

$$(64) \quad \Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 e c} \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$$

essendo $m_0 e$ la massa di riposo dell'elettrone. Da tale relazione si può dedurre che il valore massimo di $\Delta\lambda$ si ha per $\alpha = \pi$ e vale $\Delta\lambda = 0,048 \text{ \AA}$.

Questo risultato può ottersi teoricamente considerando l’urto fotone-elettrone (tenendo conto che occorre apportare le correzioni relativistiche) come quello tra due particelle.

L’effetto Compton e la sua interpretazione hanno una grande importanza perché costituiscono una conferma della meccanica relativistica e delle moderne concezioni di fisica atomica.

4.15. SEZIONE D’URTO

È stato già osservato che, qualora l’urto non sia centrale, non è possibile dare una descrizione degli effetti mediante l’uso dei teoremi di conservazione e la conoscenza delle condizioni iniziali. In questo caso occorrerebbe conoscere esattamente le forze interne poste in gioco nell’urto e usare i principi della dinamica.

Alcune volte, come per es. nell’urto dei corpi celesti e in particolare nei processi atomici, è possibile specificare la natura di queste forze (gravitazionali, elettriche ecc.) e il problema può risolversi. In genere però ciò non è possibile e anzi proprio dallo studio dei fenomeni d’urto si possono avere indicazioni sulle caratteristiche delle forze che vengono scambiate fra i corpi durante l’urto.

Nello studio di queste situazioni ha una notevole importanza la determinazione del valore massimo che il parametro di urto può assumere, la determinazione cioè della massima distanza dal bersaglio alla quale la retta contenente la velocità del corpo urtante deve passare perché esso risenta di una interazione sufficientemente forte e di breve durata perché possa ancora essere considerata un urto.

Va osservato inoltre che nello studio dei processi atomici e nucleari non è possibile considerare un singolo urto per volta, giacché è impossibile specificare le caratteristiche dinamiche delle singole particelle partecipanti (per es. un neutrone e un nucleo) e si procede normalmente considerando gli effetti di un numero grande di eventi in modo da potere applicare dei criteri statistici: ciò viene sperimentalmente fatto inviando su una sottile lastra di materiale che contiene le particelle bersaglio un fascetto collimato di particelle urtanti con velocità parallele e osservando gli effetti; dall’analisi di questi, si può pensare che gli urti, purché siano stati molto numerosi, siano avvenuti in tutte le maniere possibili, cioè con tutti i parametri d’urto fra zero (urto centrale) e il massimo parametro d’urto per cui si ha ancora urto.

In queste considerazioni riesce molto utile introdurre un nuovo parametro: la sezione d’urto, σ , definito come l’area di un cerchio con centro nella posizione della particella urtata, disposto normalmente alla direzione di moto della particella urtante e tale che l’urto fra le due particelle avviene solo se la direzione di moto della particella incidente passa per esso. Evidentemente il raggio del cerchio non è altro che il valore massimo del parametro d’urto. La sezione d’urto è in genere funzione della velocità (energia cinetica) della particella incidente poiché da questa velocità dipende il tempo di interazione fra le particelle.

Quando in fisica atomica e nucleare si studiano i processi d’urto inviando un fascetto di particelle contro numerosi bersagli (per es. contenuti in una lastra), la sezione d’urto può ottersi con il seguente ragionamento. Sia A la sezione del fascetto di particelle incidenti e Δs lo spessore di materiale attraversato; se n è la densità dei bersagli nel materiale, il numero totale di bersagli nel volume attraversato

*La sezione d’urto
è legata alla
probabilità d’interazione
tra le particelle urtanti*

dalle particelle incidenti è $nA\Delta s$. Se ciascun bersaglio ha una sezione d'urto σ , l'area totale disponibile perché ci sia un urto risulta essere $(nA\Delta s\sigma)$. La probabilità allora che una particella singola del fascio nell'attraversare il materiale colpisca un bersaglio risulta pari al rapporto fra l'area disponibile per l'urto e la sezione A del materiale che è stato esposto al fascio; tale probabilità è quindi $n\Delta s\sigma$. Questa probabilità è d'altra parte anche data dal rapporto fra il numero di particelle (N_0) che hanno subito l'urto in un certo intervallo di tempo e il numero totale di particelle incidenti (N) sul materiale nello stesso intervallo. N ed N_0 vanno determinati sperimentalmente esaminando i processi per un tempo sufficientemente lungo in modo che accada un numero abbastanza elevato di eventi e che le considerazioni statistiche abbiano valore. Si ha allora

$$\frac{N_0}{N} = n\Delta s\sigma$$

e quindi

$$(65) \quad \sigma = \frac{N_0}{N} \frac{1}{n\Delta s}.$$

Spesso quando si manda un fascio di particelle contro un materiale, urti di diverso genere possono accadere: se per es. si ha un fascio di neutroni che colpisce nuclei di certi atomi, si possono avere urti che producono cattura del neutrone incidente, altri che producono deviazione ecc. Se si considerano tutti gli urti assieme si giunge a definire una sezione d'urto totale; si possono peraltro considerare i vari tipi di urto separatamente e si hanno le sezioni d'urto parziali (per cattura, per diffusione ecc.). La sezione d'urto totale è pari alla somma delle sezioni d'urto parziali.

La sezione d'urto nel SI e nel sistema CGS andrebbe misurata semplicemente in m^2 o cm^2 . Si desidera spesso, tuttavia, fare riferimento esplicito alla particolare situazione descritta, sicché essa viene espressa in $\text{m}^2/\text{bersaglio}$ o $\text{cm}^2/\text{bersaglio}$, esplicitando cioè il fatto che n nella (65) è il numero di bersagli per unità di volume dell'ostacolo.

In fisica nucleare ove queste considerazioni sono molto usate, le sezioni d'urto sono comprese fra $10^{-22} \text{ cm}^2/\text{nucleo}$ e $10^{-26} \text{ cm}^2/\text{nucleo}$. Si è trovato perciò utile usare un sottomultiplo del metro o del centimetro, il *barn* pari a $10^{-28} \text{ m}^2/\text{nucleo} = 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{nucleo}$.

L'atomo di Rutherford e le dimensioni dei nuclei

Nel 1910 lo schema di costituzione dell'atomo che si aveva era quello di Thompson, secondo cui l'atomo sarebbe stato formato da cariche positive e negative distribuite uniformemente entro una sfera.

Nel 1910 Geiger e Marsden, seguendo un'indicazione di Lord Rutherford, eseguirono una esperienza secondo lo schema di figura 4.21. Particelle α provenienti da una sostanza radioattiva (polonio) venivano lanciate contro una sottile lamina d'oro (spessore $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$) e veniva studiata sperimentalmente la distribuzione delle particelle α deviate in seguito all'urto in funzione dell'angolo di deviazione δ . Si trovò che, pur essendo la maggior parte delle particelle α deviate di angoli $\delta < \pi/2$, una porzione apprezzabile (1 su $6,15 \cdot 10^6$) viene deviata di $\delta > \pi/2$ (back scattering o retrodiffusione).

Lord Rutherford mostrò che i risultati di questa esperienza non erano compatibili con lo schema atomico di Thompson, giacché la forte deviazione ($\delta > \frac{\pi}{2}$) di alcune particelle α richiedeva che durante l'urto fossero poste in gioco forze interne molto intense quali una distribuzione uniforme di cariche positive e negative non poteva dare. In conseguenza, egli propose uno schema in cui quasi tutta la massa dell'atomo è concentrata in un nucleo positivo molto piccolo al centro dell'atomo stesso, e la carica negativa, costituita dagli elettroni, circonda il nucleo: sia il nucleo che gli elettroni avrebbero dimensioni molto piccole rispetto a quelle dell'atomo nel suo insieme sicché le forze che agiscono fra le cariche sono quelle elettriche di Coulomb. Con questo schema, campi elettrici molto intensi sarebbero presenti nelle vicinanze del nucleo, tali da respingere violentemente particelle caricate positivamente che giungessero molto vicine al nucleo. Nell'urto allora delle particelle α contro gli atomi di oro, esse subirebbero deviazioni notevoli solo quando riuscissero a giungere molto vicine al nucleo dell'atomo urtato; in tal caso la presenza degli elettroni può essere trascurata dato che essi hanno massa molto piccola. Siccome

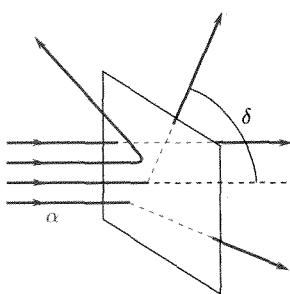


Fig. 4.21

inoltre la massa del nucleo urtato (oro) è molto più grande di quella della particella α urtante, esso rimarrebbe praticamente fermo.

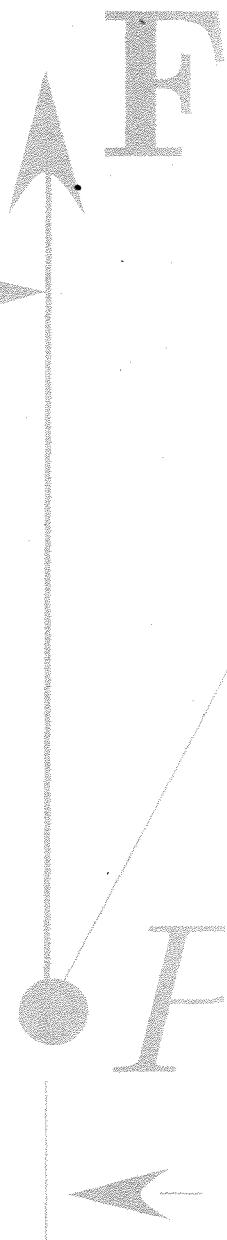
Con queste ipotesi, Lord Rutherford mostrò che le forze interne dovute al campo elettrico nelle vicinanze del nucleo e messe in gioco durante l’urto sono tali da poter spiegare i risultati dell’esperienza. La teoria, inoltre, consente di ricavare dai dati sperimentali la carica del nucleo urtato.

Gli elementi nuovi portati dall’esperienza di Geiger e Marsden e dalla teoria di Lord Rutherford sono stati fondamentali nella evoluzione dei moderni concetti sulla struttura atomica.

MECCANICA DEI CORPI RIGIDI

P₁

- ✓ **Corpo rigido:** modello di corpo reale scarsamente deformabile: è invariante la distanza tra due punti qualunque. La posizione di un corpo rigido è definita da 6 parametri; 6 equazioni definiscono il moto di un corpo rigido.
- **Cinematica del corpo rigido:** una posizione di un corpo rigido si riporta a sovrapporre su un'altra operando: 1. una traslazione, che porti a coincidere la posizione di un punto, 2. una rotazione per il punto, che porti a sovrapporre l'intero corpo. Lo spostamento della traslazione e l'asse della rotazione (angolo invariante) possono essere scelti paralleli.
Nell'intorno di un punto, l'atto di moto è *rototraslatorio*.
- **Dinamica del corpo rigido:** descrizione completa (6 equazioni in 6 parametri), suddivisa per la
traslazione: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
con \mathbf{F} risultante forza esterna, \mathbf{p} quantità di moto del corpo, e per la
rotazione: $\mathbf{M} = d\mathbf{b}/dt$
con \mathbf{M} risultante momenti delle forze esterne, \mathbf{b} momento della quantità di moto.
- ✓ **Sistemi di forze equivalenti:** risultante eguale e momento risultante rispetto a qualunque polo eguale.
Sistemi di forze equivalenti applicati al medesimo corpo rigido producono il medesimo moto.
- Operazioni elementari per mutare un sistema di forze in uno equivalente: 1. sostituzione di due o più forze applicate in un punto con il risultante della poligonale; 2. aggiunta o soppressione di una coppia di forze a braccio nullo.
- ✓ **Coppia di forze:** due forze eguali applicate su rette parallele in verso opposto; una coppia ha **momento intrinseco**, indipendente dal polo.
- **Riduzione sistema di forze:** ogni sistema è riducibile a una forza e una coppia: forza e coppia determinano il moto traslatorio e rotatorio del sistema di punti, completamente il moto di un corpo rigido.
- ✓ **Corpo con asse fisso:** Moto descritto da una sola equazione scalare: $M_a = db_a/dt$, con $b_a = I_a \omega$ e $I_a = \int_V \rho r^2 dV$, momento d'inerzia assiale.
- ✓ **Energia cinetica di rotazione:** $T = \frac{1}{2} I_a \omega^2$.
- **Moto di precessione:** prodotto su corpo in rapida rotazione (**b** grande) da una coppia (momento τ): variazione $\Delta \mathbf{b}$ (non **b**) proporzionale a (e nella direzione di) τ (*giroscopio*, trottola, precessione asse della Terra ecc.).



■ Meccanica dei corpi rigidi

5.

■ 5.1. INTRODUZIONE

I sistemi di punti materiali dei quali ci siamo precedentemente occupati possono essere formati da un numero limitato di punti materiali o anche da un numero molto grande, praticamente infinito. Un corpo materiale esteso rientra fra i sistemi di punti giacché può immaginarsi suddiviso in un gran numero di punti materiali.

I corpi rigidi sono particolari sistemi di punti materiali caratterizzati dal fatto che le mutue distanze fra due qualsiasi di essi non variano nel tempo qualunque siano le condizioni in cui il corpo venga a trovarsi. In particolare, quindi, qualunque sia la sollecitazione alla quale vengono assoggettati essi non subiscono alcuna deformazione. Si può dire che la natura delle forze interne che si esercitano fra i vari punti è tale che qualunque sia la sollecitazione esterna, *la distanza fra due punti qualsiasi nel corpo non varia*. Ciò porta di conseguenza, fra l'altro, che non siano possibili vibrazioni nell'interno dei corpi rigidi.

In natura non esistono corpi di questo genere e *il corpo rigido è solo un'astrazione*, o meglio *un modello*. Vi sono peraltro molti casi concreti di notevole importanza pratica nei quali corpi solidi reali subiscono deformazioni sufficientemente piccole da poter essere trascurate e il loro comportamento può essere soddisfacentemente descritto supponendo che essi siano corpi rigidi. Come vedremo presto, l'ipotesi di rigidità rende la trattazione della meccanica dei sistemi particolarmente semplice.

Un corpo rigido è un sistema a sei gradi di libertà, cioè, la sua configurazione nello spazio è definita dalla posizione di tre punti (9 coordinate) le cui mutue distanze sono note (tre relazioni fra le coordinate), così che i parametri indipendenti si riducono a sei.

Nel caso di sistemi materiali estesi, e quindi anche di corpi solidi, formati da un gran numero di atomi e molecole è spesso importante considerare una grandezza che si riferisce alla loro struttura e che dà indicazioni sulla distribuzione delle masse nello spazio. Per un corpo di massa M e volume V si definisce densità volumica *media* il rapporto

$$(1) \quad \rho_m = \frac{M}{V} . \qquad \text{Densità media}$$

Essa ha le dimensioni $[\rho] = [L^{-3} M]$ e si misura in kg/m^3 nel SI (g/cm^3 nel sistema CGS).

In un corpo vi possono essere distribuzioni non uniformi di massa ρ_0 sicché la (1) dà solo una indicazione media. Se si considerano nell'intorno di un punto del corpo elementi di volume gradatamente decrescenti si può giungere a definire una densità locale come limite

Densità di un corpo

$$(2) \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

ove dM è la massa contenuta nel volume elementare dV .

La massa del corpo è allora data da

$$(3) \quad M = \int_V \rho dV$$

essendo V il volume.

5.2. CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

La invarianza della distanza fra punti di un corpo rigido rende relativamente semplici i movimenti. Si è già accennato a tali movimenti quando si è parlato del moto dei punti dello spazio solidale con una terna mobile rispetto a una terna di riferimento fissa (moto di trascinamento). Conviene, tuttavia, riprendere brevemente quelle considerazioni.

Un primo moto semplice, detto di *traslazione*, è quello nel quale a ogni istante tutti i punti del corpo hanno nel sistema di riferimento la stessa velocità vettoriale $\mathbf{v}(t)$; in questo caso basta conoscere in funzione del tempo la velocità di un solo punto (per es. del centro di massa) per conoscere la posizione nello spazio del corpo, nota la posizione iniziale.

Un secondo moto semplice è quello di *rotazione* intorno a un asse fisso.

In questo caso tutti i punti dell'asse sono fermi e gli altri si muovono in piani normali all'asse su traiettorie circolari con centro sull'asse.

La definizione di velocità angolare data al cap. 1, par. 1.12, si mantiene valida in questo caso, essendo fissa la direzione dell'asse di rotazione.

L'asse venga orientato e sia \mathbf{k} il corrispondente versore (fig. 5.1). La traiettoria del generico punto P giace nel piano orientato γ . Indichiamo con φ l'angolo orientato fra il vettore OP_0 che fissa P all'istante $t = 0$ e $OP = \mathbf{r}(t)$ e sia scelto come antiorario il verso positivo per φ . L'angolo φ è anche l'angolo fra il piano α legato al corpo rigido per l'asse e la posizione di P all'istante t e la posizione del piano stesso (α_0) all'istante $t = 0$.

La velocità angolare scalare per il moto rigido di rotazione del corpo (e per tutti i moti circolari dei punti P) è

$$(4) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$

e l'accelerazione angolare scalare è

$$(5) \quad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}(t).$$

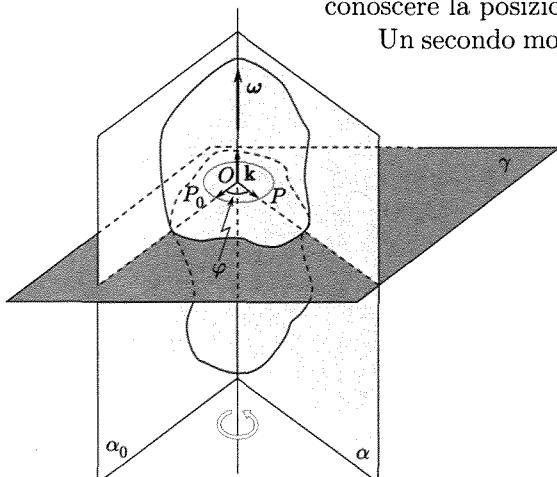


Fig. 5.1

La velocità angolare vettoriale per il moto rigido di rotazione (e per i moti circolari dei punti P) è un vettore ω diretto come l'asse, nel verso in cui si vede crescere φ con t in verso antiorario e avente intensità $|\dot{\varphi}(t)|$, cioè

$$(6) \quad \omega = \dot{\varphi} \mathbf{k}.$$

La velocità vettoriale del punto P , determinato dal vettore \mathbf{r} nel piano γ , è

$$(7) \quad \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}.$$

Il vettore ω consente quindi di conoscere a ogni istante la distribuzione delle velocità nel corpo rigido o, come si dice, l'*atto di moto*.

Il moto traslatorio e quello rotatorio possono trovarsi combinati in un unico moto rototraslatorio.

Un particolare moto rototraslatorio è il moto *elicoidale uniforme* nel quale una rotazione uniforme intorno a un asse è associata a una traslazione uniforme lungo il medesimo asse: è questo il moto di una vite che ruota e avanza uniformemente in una madrevite.

È possibile mostrare che un moto rototraslatorio uniforme generico, formato cioè da una rotazione intorno a un asse qualsiasi (direzione aa) con velocità ω costante e una traslazione con velocità \mathbf{v} costante (in genere non parallela ad aa) è equivalente a un moto elicoidale che avviene con velocità di rotazione ω intorno a un asse parallelo ad aa (e opportunamente spostato), con una velocità di traslazione costante diretta lungo l'asse di rotazione pari alla componente di \mathbf{v} in tale direzione.

*Nell'intorno di un punto
il moto di un corpo
rigido è
rototraslatorio*

Per vedere ciò in un caso semplice si consideri una ruota ad asse orizzontale che rotoli su di un piano anche esso orizzontale. Il moto dovuto alla combinazione di un moto di rotazione attorno a un asse per il centro, normale al piano della ruota, e di un moto di traslazione lungo il piano può essere considerato come un moto di rotazione semplice intorno a un asse parallelo all'asse della ruota e che coincide a ogni istante con la linea di contatto con il piano (asse istantaneo di rotazione). La figura 5.2a mostra le velocità dei vari punti: esse sono per ciascun punto normali alla congiungente il punto con la traccia dell'asse di rotazione e hanno intensità pari a $\omega \cdot (OP)$. La stessa distribuzione istantanea delle velocità (atto di moto) si può ottenere sovrapponendo una distribuzione uniforme in cui tutti i punti si muovono con la velocità v_c che spetta all'asse della ruota (fig. 5.2b) e una rotazione intorno all'asse della ruota con velocità ω (fig. 5.2c).

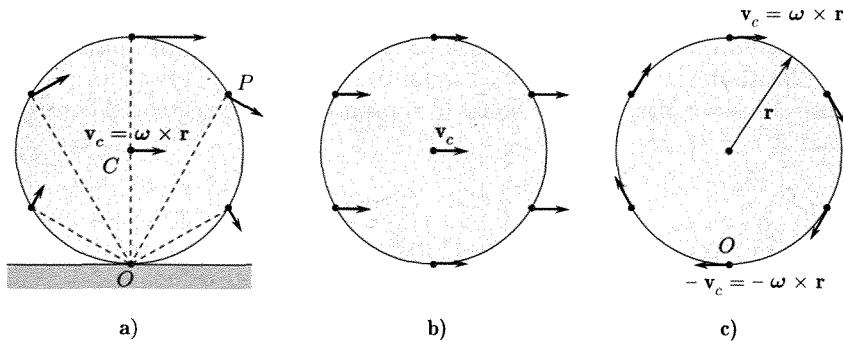


Fig. 5.2

Il moto rototraslatorio formato dal moto rotatorio (ω) intorno all'asse della ruota (fig. 5.2c) e dal moto traslatorio con velocità (v_c) normale all'asse di rotazione (fig. 5.2b) equivale quindi a un semplice moto rotatorio uniforme, con la stessa

velocità angolare ω intorno a un asse (istantaneo di rotazione) parallelo a quello della ruota passante per il punto O (nella sezione considerata) al quale compete nel moto rotatorio componente (fig. 5.2c) la velocità $\omega \times \mathbf{r} = -\mathbf{v}_c$.

Nel caso che il moto traslatorio uniforme componente avesse anche una componente della velocità nella direzione dell'asse di rotazione, il moto risultante sarebbe un moto elicoidale uniforme, formato da un moto di rotazione intorno all'asse istantaneo del moto e da un moto di traslazione uniforme lungo esso.

La trattazione della cinematica del corpo rigido nel caso generale è notevolmente più complessa e viene data nel corso di Meccanica razionale; la definizione della velocità di rotazione (ω) richiede particolare attenzione. Si giunge comunque all'importante risultato (nel quale rientrano i casi semplici esaminati) che la distribuzione istantanea delle velocità può essere sempre ottenuta nella seguente maniera. Fissata l'attenzione su un punto qualsiasi (Ω) e detta \mathbf{v}_Ω la sua velocità, la velocità di ogni altro punto, P , ha la forma

$$(8) \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Omega + \omega \times \mathbf{r}$$

essendo ω la velocità di rotazione istantanea e \mathbf{r} il vettore ΩP . La distribuzione istantanea delle velocità è quella di un moto di traslazione con la velocità del punto scelto Ω , e di una rotazione intorno a un asse per Ω (con direzione dipendente dal tempo). Si osservi che cambiando Ω cambiano i due vettori che con la loro somma danno lo stesso \mathbf{v}_P ma ω (vettore libero) resta lo stesso ed è una caratteristica del moto all'istante considerato.

La distribuzione delle velocità all'istante t è quindi la stessa di quella che si avrebbe nel caso di un moto rototraslatorio uniforme (e quindi conducibile a un moto elicoidale uniforme). Gli spostamenti elementari dei punti del sistema in un tempuscolo dt coincidono quindi con quelli del moto rototraslatorio uniforme dato dalla (8) con \mathbf{v}_Ω ed ω costanti. Naturalmente al variare di t variano le caratteristiche del moto rototraslatorio uniforme che ha lo stesso atto di moto del moto reale.

Queste conclusioni cinematiche sono di grande importanza nello studio della dinamica dei corpi rigidi perché ci suggeriscono di considerare il moto come formato dalla sovrapposizione di un moto di traslazione con la velocità di un punto del sistema scelto a piacere e di una rotazione intorno a un asse per tale punto: naturalmente \mathbf{v}_Ω ed il vettore ω in genere saranno funzioni di t . La scelta di Ω andrà fatta con riferimento alle particolarità del problema: se v'è un punto fisso conviene prendere Ω coincidente con esso; altrimenti di solito lo si prende coincidente con il centro di massa.

5.3. DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

Alla luce di quanto detto più sopra, il problema del moto del corpo rigido libero è il seguente. Data una certa sollecitazione del corpo, cioè certe forze esterne (reali ed apparenti) $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ applicate nei punti P_1, P_2, \dots, P_n del corpo, determinare il moto del centro di massa (tre coordinate) e la rotazione del corpo intorno a un asse per il centro di massa (altri tre parametri: due per la direzione dell'asse e uno per il modulo della velocità angolare).

Per questo sistema, come per tutti i sistemi, valgono le due equazioni cardinali (cap. 4, par. 4.12)

$$(9) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_e$$

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}_e$$

Le equazioni cardinali sono sufficienti per determinare completamente il moto di un corpo rigido

che equivalgono a sei equazioni scalari quando vengano proiettate sugli assi di un sistema di riferimento. Tali equazioni sono quindi in numero sufficiente per la determinazione dei parametri che definiscono il moto. La trattazione dei sistemi rigidi diviene relativamente semplice e importante appunto per questa circostanza.

Ricorderemo che nella (9) la quantità di moto del sistema è

$$(11) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$$

e pertanto questa equazione serve per lo studio del moto del centro di massa.

Nella (10) il momento della quantità di moto \mathbf{b} è calcolato rispetto al centro di massa.

Nel caso che il corpo abbia delle limitazioni al suo moto (abbia, per es., un punto o un asse fisso), conviene scegliere come punto di riferimento un punto fisso del corpo, che in genere differisce dal centro di massa. In questo caso \mathbf{b} va calcolato rispetto a tale punto, la (10) è ancora valida e il moto si riduce a una rotazione intorno a un asse per il punto fisso.

Nei vari casi particolari, un vantaggio nella trattazione del problema può trarsi dall'impiego del teorema del lavoro e dell'energia cinetica o dal principio di conservazione dell'energia meccanica.

Il caso generale del moto dei sistemi rigidi è trattato in Meccanica razionale. Noi ci limiteremo a considerare alcuni casi particolari. Prima di far ciò vogliamo osservare che dalle (9) e (10) si riconosce che ciò che ha interesse nei riguardi della sollecitazione sono \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e e non i valori delle singole forze e i loro particolari punti di applicazione: lo stesso moto di un corpo rigido può essere determinato da uno qualsiasi di infiniti sistemi di forze applicate in punti del corpo che abbiano, però, i medesimi valori della somma \mathbf{F}_e e del momento \mathbf{M}_e calcolato rispetto a un qualunque punto dello spazio. Tali sistemi di forze si dicono equivalenti.

■ 5.4. SISTEMI EQUIVALENTI DI FORZE

Vogliamo ora svolgere brevi considerazioni su alcune operazioni che consentono di passare da un sistema di forze applicate a un corpo rigido a un altro sistema equivalente al fine di ridurre una sollecitazione comunque complicata a un'altra equivalente, la più semplice possibile. Le considerazioni qui fatte per *forze applicate* sono generali e valgono per un qualsiasi sistema di *vettori applicati*.

a. Operazioni elementari

Anzitutto, più forze applicate allo stesso punto possono essere ovviamente sostituite dalla loro somma senza che vari il contributo totale a \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e .

Inoltre, a un sistema di forze si possono aggiungere o sottrarre due forze uguali e opposte applicate lungo la medesima retta senza alterare \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e .

Da quanto sopra, come si vede dalla figura 5.3, si ricava anche che si può spostare il punto di applicazione P_i di una forza \mathbf{F}_i in un altro punto P'_i della sua linea di azione: ciò infatti non altera \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e .

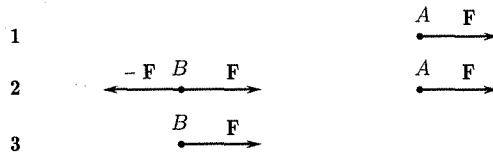


Fig. 5.3

b. Forze parallele nello stesso verso

Un sistema di due forze parallele dirette nello stesso verso è sempre equivalente a un'unica forza. Per vedere ciò si considerino (fig. 5.4a) le due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 applicate in P_1 e P_2 . Per quanto detto precedentemente si possono aggiungere due forze uguali e contrarie aventi linea di azione P_1P_2 e applicate rispettivamente in P_1 (\mathbf{f}) e P_2 ($-\mathbf{f}$). Le forze somma in P_1 e P_2 , cioè \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 possono essere trasportate in O e ivi composte nella risultante $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + (\mathbf{f} - \mathbf{f})$, che ha la direzione di \mathbf{F}_1 (e \mathbf{F}_2) e intensità ($F_1 + F_2$). Essa può essere applicata in un qualsiasi punto della sua linea di azione, in particolare nel punto C che giace sulla P_1P_2 . Scegliendo questo come punto di applicazione si può facilmente verificare che se le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 vengono ruotate entrambe dello stesso angolo α , la risultante ha ancora l'intensità di \mathbf{R} e la sua linea d'azione è una retta che passa per C anch'essa ruotata di α rispetto alla direzione precedente (v. fig. 5.4b). Per tale proprietà C prende il nome di *centro* delle due forze parallele.

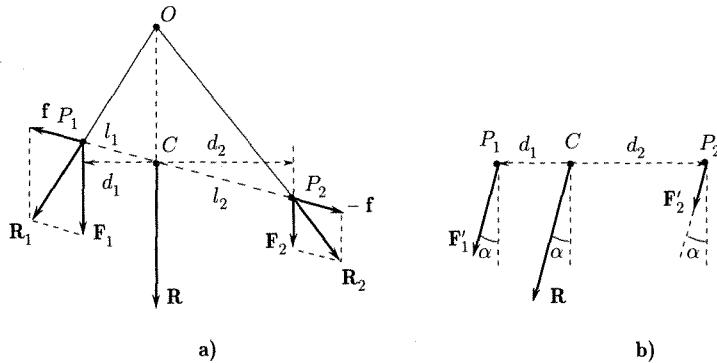


Fig. 5.4

La posizione della linea di azione di \mathbf{R} e quindi la posizione di C si possono trovare considerando il momento somma rispetto a C di \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 e quello di \mathbf{R} : essi devono essere uguali. Ne segue

$$F_1 d_1 - F_2 d_2 = 0$$

cioè

$$(12) \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Si conclude quindi che la risultante di due forze parallele aventi lo stesso verso è una forza a esse parallela, avente lo stesso verso, che ha come intensità la somma delle intensità e che si può pensare applicata al centro delle due forze, situato sulla congiungente i punti di applicazione delle due forze in posizione tale da dividere il segmento congiungente in parti inversamente proporzionali alle rispettive intensità.

Queste considerazioni si possono ripetere per un sistema di più forze parallele: è infatti possibile comporre le forze a due a due successivamente. Si ottiene quindi una forza parallela alle forze di partenza, avente lo stesso verso e intensità pari alla somma delle intensità. Essa si può pensare applicata al *centro delle forze parallele*, il quale gode della proprietà su menzionata.

c. Baricentro

Un caso importante di forze siffatte è il caso delle forze di gravità⁽¹⁾; il centro delle forze si chiama allora baricentro.

Si supponga per esempio (fig. 5.5) che le forze di gravità di un sistema siano rappresentate dalle forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ applicate in P_1, P_2, P_3, P_4 le cui ascisse su un asse x orizzontale di origine in O siano x_1, x_2, x_3, x_4 . La posizione della linea di azione di

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \sum_1^4 \mathbf{F}_i$$

è determinata dalla condizione che il suo momento rispetto a un punto qualsiasi, per es. a O , e la somma dei momenti delle quattro forze abbiano lo stesso valore M . Ne segue

$$Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + F_4x_4$$

e quindi

$$(13) \quad x_c = \frac{\sum_1^4 F_i x_i}{\sum_1^4 F_i}.$$

La coordinata y_c del baricentro sul piano del disegno o quella z_c nello spazio si possono trovare ruotando tutte le forze di 90° , portandole così parallele a y e z , rispettivamente.

Queste considerazioni mostrano con evidenza la differenza già menzionata fra centro di massa e baricentro. Le coordinate del baricentro hanno una forma analoga a quella del centro di massa (cap. 4, par. 4.2); nella definizione del centro di massa, peraltro, si considerano solo le masse dei punti materiali del sistema; nella definizione del baricentro si considerano le forze peso. I due punti coincidono quando nella regione occupata dal

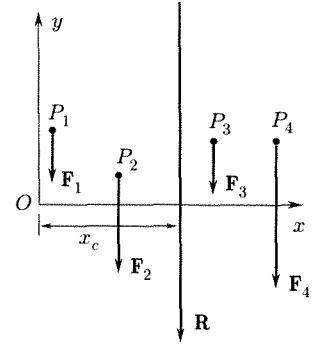


Fig. 5.5

⁽¹⁾ Purché il corpo non sia eccessivamente esteso.

sistema l'accelerazione di gravità è costante: infatti allora v'è proporzionalità fra masse e pesi. Va da sé che, in assoluto, ciò non potrà mai accadere e che quindi la stessa definizione di baricentro è limitata dalla medesima ipotesi approssimativa.

d. Forze parallele in verso opposto

Si consideri (fig. 5.6) il caso di due forze parallele \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 applicate nei punti P_1 e P_2 , dirette in verso opposto e aventi intensità diverse ($F_1 \neq F_2$). Considerazioni analoghe a quelle svolte precedentemente mostrano che in questo caso la risultante è parallela a \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , ha intensità pari alla differenza delle intensità delle due forze e il verso della maggiore delle due; il punto C si trova esternamente al segmento P_1P_2 in una posizione determinata dalla relazione (momenti rispetto a C)

$$-F_1d_1 + F_2d_2 = 0$$

cioè

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

La riduzione delle due forze parallele discordi a una sola forza cade quando le intensità delle due forze siano uguali: in tal caso, infatti, il punto C deve trovarsi sulla congiungente i punti di applicazione esternamente al segmento che li unisce e a distanza eguale dall'uno e dall'altro. Ciò può solo avversi considerando il punto C a distanza infinita dai punti di applicazione di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 .

e. Coppia

Nel caso di due forze parallele dirette in verso opposto e di uguale intensità l'effetto delle forze è completamente diverso da quello di una sola forza. Ciò si vede considerando che il momento rispetto a un qualsiasi punto è sempre lo stesso. Infatti, rispetto a un generico punto P dello spazio (v. fig. 5.7), si ha $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{OP}_1 - \mathbf{OP}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \times \mathbf{F}_1$, indipendente dalla scelta di O . Si può dire che il momento di una coppia di forze eguali e opposte, o, semplicemente, di una *coppia* è normale al piano delle due forze, diretto nel verso dal quale si vede il complesso delle due forze ruotare in senso antiorario, e ha intensità

$$(14) \quad M = F_1d_1 - F_2d_2 = F(d_1 - d_2) = Fb.$$

Tale espressione dipende solo dalla intensità delle due forze e dalla distanza b (braccio) tra le due linee di azione. È evidente quindi che una coppia non può essere ridotta a un'unica forza in quanto questa avrebbe momento nullo per i punti della sua retta di azione. La coppia è quindi un sistema di forze irriducibile: essa è completamente individuata dal suo momento.

È evidente che lo stesso vettore momento può rappresentare infinite coppie equivalenti, che differiscono per i valori di F e b . Viceversa un vettore momento di forze qualsiasi può essere rappresentato per mezzo di una qualsiasi coppia che ha quel momento.

Se si hanno più coppie esse possono essere composte: a tal fine, basta comporre i rispettivi vettori momento e considerare una qualsiasi coppia che abbia momento pari al momento somma.

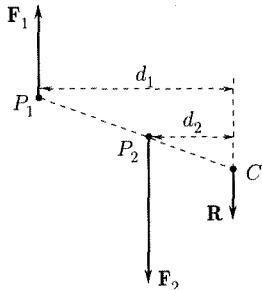


Fig. 5.6

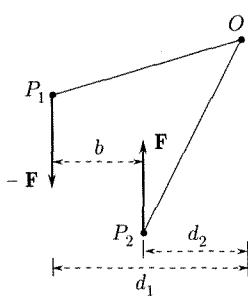


Fig. 5.7

Momento intrinseco
di una coppia

f. Sollecitazione di un corpo rigido

È facile vedere che una forza \mathbf{F}_i applicata in un punto P_i di un corpo rigido può essere spostata applicandola in un altro punto qualsiasi P'_i purché si aggiunga una conveniente coppia. Si è già detto che è possibile applicare in P'_i due forze uguali e contrarie aventi la stessa direzione e lo stesso modulo di \mathbf{F}_i (fig. 5.8). Il sistema delle tre forze equivale alla forza \mathbf{F}_i applicata in P'_i e a una coppia.

Ciò porta di conseguenza che qualunque sollecitazione applicata a un corpo rigido si può sempre ridurre a una forza applicata in un punto del corpo, scelto a piacere, e a una coppia. Si può ripetere infatti l'operazione precedentemente descritta per ogni forza applicata in un punto del corpo diverso da quello scelto. Si finirà con il ridurre la sollecitazione a tante forze applicate nello stesso punto (e che quindi danno una forza somma applicata al punto) e tante coppie che possono essere composte e dare un'unica coppia.

Se si dovesse spostare il punto scelto per l'applicazione della forza somma, la sollecitazione equivrebbe a una forza somma che ha direzione, verso e intensità uguali a quelli della somma precedente e a una coppia che invece è diversa da quella calcolata per il centro di riduzione precedente.

Se il sistema ha somma nulla esso può equivalere a una coppia. Se invece ha momento nullo rispetto a un punto esso equivale a una forza applicata in quel punto.

È chiaro tuttavia che non esiste sempre un punto rispetto al quale il momento si annulli; cioè non sempre il sistema di forze può ridursi a un'unica forza. Si pensi per es. al caso di un sistema formato da una coppia e da una forza perpendicolare al piano della coppia. Se si sposta il punto di applicazione della forza occorre aggiungere una nuova coppia il cui momento è perpendicolare alla forza e quindi al momento della prima coppia; non è possibile scegliere alcun punto di applicazione della forza rispetto al quale il momento totale della sollecitazione del corpo sia nullo.

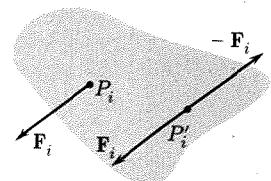


Fig. 5.8

5.5. CORPO GIREVOLE INTORNO A UN ASSE FISSO

Per un corpo rigido che può solamente girare intorno a un asse fisso il numero dei gradi di libertà si riduce da sei a uno; per fissare la sua posizione occorre conoscere infatti un solo parametro: orientato l'asse e scelto come positivo per gli angoli su un piano normale all'asse (piano che risulta anche esso orientato) il verso antiorario, basta conoscere l'angolo che fissa a ogni istante la posizione⁽²⁾ di un punto qualsiasi P_i del corpo, cioè del vettore $\mathbf{r}_i = \mathbf{OP}_i$, e quindi la posizione di tutti i punti del corpo (fig. 5.9). L'angolo φ è misurato a partire dalla posizione \mathbf{OP}_{i0} assunta da \mathbf{r}_i all'istante $t = 0$.

L'asse a sia orientato, per es., come in figura (verso l'alto). Per determinare $\varphi(t)$ si impieghi la seconda equazione cardinale⁽³⁾. Conviene per

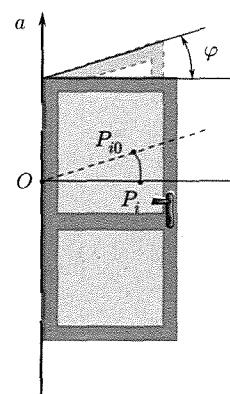


Fig. 5.9

⁽²⁾ È anche l'angolo tra il piano α per l'asse e P_i e la posizione del piano stesso a $t = 0$.

⁽³⁾ La prima equazione cardinale (9) può servire a determinare la risultante delle forze vincolari (\mathbf{F}_{vin}). Distinguendo infatti in \mathbf{F}_e le risultanti delle forze attive (\mathbf{F}_{at}) e di quelle vincolari:

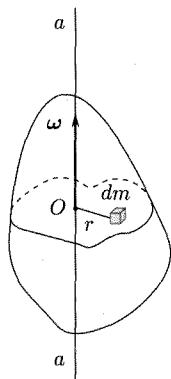


Fig. 5.10

Momento d'inerzia assiale

Moto di un corpo rigido vincolato a un asse

Energia cinetica di rotazione

il calcolo dei momenti scegliere un punto qualsiasi dell'asse fisso e proiettare i due membri della (10) sull'asse stesso; ciò equivale a considerare direttamente i momenti rispetto alla retta a . Si ha [cap. 4, eq. (21)]

$$(17) \quad M_a = \frac{db_a}{dt}.$$

Si osservi che a determinare M_a concorrono solo le forze attive: le reazioni sono infatti applicate in punti di a .

Nel caso presente il momento della quantità di moto rispetto all'asse a assume una forma particolarmente semplice. In accordo alla (24) del cap. 4 immaginando il corpo (fig. 5.10) formato da punti materiali elementari di massa $dm = \rho dV$ (a distanza r dall'asse) che ruotino intorno all'asse a con la stessa velocità angolare ω si ha:

$$(18) \quad b_a = \omega \int_V \rho r^2 dV.$$

La espressione

$$(19) \quad I_a = \int_V \rho r^2 dV$$

prende il nome di momento d'inerzia assiale del sistema rispetto ad a . Nel caso di corpo omogeneo di densità ρ esso diviene $I_a = \rho \int_V r^2 dV$.

Avendo introdotto il momento d'inerzia, la (17) diviene

$$(20) \quad M_a = I_a \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

o anche

$$(21) \quad M_a = \pm I_a \frac{d\omega}{dt}.$$

La (20) consente di risolvere il problema di determinare $\varphi(t)$, quindi il moto complessivo del corpo rigido; essa ha una forma analoga alla equazione che esprime il secondo principio della dinamica per il moto rettilineo di un punto materiale: l'angolo (φ) prende qui il posto dello spostamento lineare x , il momento della forza applicata sostituisce la forza stessa e il momento d'inerzia la massa.

Anche l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione può essere facilmente espressa usando il momento d'inerzia. Si ha infatti

$$(22) \quad T = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho r^2 dV = \frac{1}{2} I_a \omega^2 = \frac{1}{2} I_a \dot{\varphi}^2$$

analoga alla espressione dell'energia cinetica di un punto materiale in moto rettilineo: il momento d'inerzia e la velocità angolare prendono il posto rispettivamente della massa e della velocità lineare.

Per quanto riguarda il lavoro delle forze interne ed esterne si osservi, in maniera del tutto generale, che *le forze interne in un sistema rigido compiono un lavoro complessivo nullo*; prendendo in considerazione infatti due

la (9) si scrive

$$(16) \quad \mathbf{F}_{\text{at}} + \mathbf{F}_{\text{vin}} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt}.$$

punti qualsiasi del sistema, le forze interne scambiate sono uguali e opposte e dirette lungo la congiungente mentre, per un qualsiasi spostamento del sistema, le proiezioni degli spostamenti dei due punti sulla congiungente sono uguali (per lasciare inalterate le distanze tra i punti stessi).

Passando ora a considerare il lavoro delle forze esterne, nel caso del corpo girevole intorno a un asse fisso, giacché i punti del corpo possono eseguire unicamente spostamenti su circonferenze normali all'asse, al lavoro delle forze esterne daranno contributo soltanto le componenti delle forze applicate giacenti su piani ortogonali all'asse, nelle direzioni tangenti a dette circonferenze. In particolare, quindi, eventuali forze esterne parallele all'asse di rotazione non compiono lavoro.

Per una forza \mathbf{F}_i (fig. 5.11) applicata in P_i il lavoro elementare è

$$(23) \quad dL_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = (F_i \cos \beta)r_i d\varphi = (F_i r_i \sin \gamma)\omega dt.$$

Poiché $F_i r_i \sin \gamma$ è l'intensità del momento di \mathbf{F}_i rispetto ad O (e del momento rispetto all'asse di rotazione orientato a) e $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a tale vettore, si può scrivere:

$$(24) \quad dL_i = \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega} dt.$$

Scrivendo una simile relazione per ciascuna forza esterna e sommando, si ottiene per uno spostamento elementare di angolo $d\varphi$:

$$dL = \sum_1^n \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_a \omega_a dt = M_a \dot{\varphi} dt = M_a d\varphi$$

essendo M_a il momento rispetto all'asse orientato a di tutte le forze esterne. Il lavoro elementare compiuto dalle forze esterne applicate a un corpo rigido girevole intorno a un asse fisso è dato dal prodotto del loro momento rispetto all'asse per l'angolo (orientato) infinitesimo di cui il corpo ruota. Per uno spostamento finito, si ha

$$(25) \quad L_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_a(\varphi) d\varphi$$

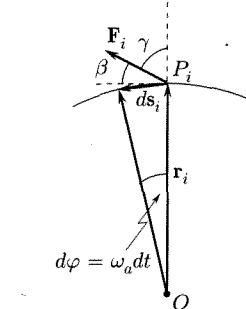


Fig. 5.11

Lavoro del momento esterno

analoga alla corrispondente espressione per il lavoro per un punto materiale soggetto a una forza \mathbf{F} .

Le relazioni stabilite per l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione intorno a un asse fisso e per il lavoro compiuto dalle forze esterne consentono di calcolare per un tale corpo i termini che intervengono nel teorema del lavoro e dell'energia cinetica, il cui uso può risultare utile in molti casi. In termini differenziali l'espressione di tale teorema è:

$$(26) \quad d \left(\frac{1}{2} I_a \dot{\varphi}^2 \right) = M_a d\varphi.$$

Problemi particolari in cui intervengono due o più corpi rigidi tra loro interagenti che ruotano intorno ad assi fissi possono essere risolti facendo uso del teorema di conservazione del momento della quantità di moto.

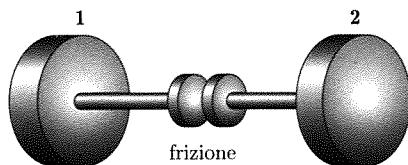
Esempio

Fig. 5.12

Si consideri per es. un sistema come quello di figura 5.12 costituito da due rotori che abbiano lo stesso asse di rotazione e che mediante un innesto a frizione possano essere resi solidali. I momenti di inerzia rispetto all'asse comune di rotazione siano rispettivamente I_1 e I_2 . Inizialmente il primo ruoti con velocità ω_2 e il secondo sia fermo. A un certo istante per l'inserimento dell'innesto a frizione, i due alberi vengano collegati e i rotori finiscano con il ruotare come un tutt'uno con la velocità ω . Il calcolo di ω può farsi semplicemente perché il sistema dei due rotori può essere considerato come un sistema isolato cioè non sollecitato dall'esterno. Il teorema di conservazione del momento della quantità di moto si scrive, infatti

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega$$

da cui si ottiene ω .

5.6. MOMENTO D'INERZIA

Come abbiamo mostrato, il momento d'inerzia di un corpo rispetto a un asse rappresenta l'inerzia del corpo che ruota intorno a quell'asse. Esso si misura in kg m^2 nel SI.

Il calcolo del momento di inerzia intorno a un asse può essere a volte semplificato dall'uso del teorema di Huygens, il quale stabilisce che: *il momento d'inerzia di un corpo rispetto a un qualsiasi asse (I_a) è pari al momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo a quello dato passante per il centro di massa ($I_{a,c}$), aumentato del momento di inerzia che rispetto all'asse dato avrebbe tutta la massa se fosse concentrata nel centro di massa.* Si ha, cioè, indicando con d la distanza del centro di massa dall'asse dato e con m la massa del corpo,

Teorema di Huygens

$$(27) \quad I_a = I_{a,c} + md^2.$$

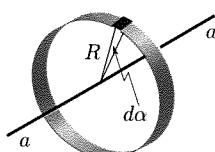


Fig. 5.13

Il calcolo di un momento di inerzia va fatto di volta in volta risolvendo l'integrale di definizione. Tale integrale si semplifica se il corpo è omogeneo. La scelta del sistema di coordinate da usare nel riferire la posizione dei vari punti del corpo va fatta in maniera da semplificare il calcolo dell'integrale.

Se, per es., si deve calcolare il momento d'inerzia di un sottile anello di raggio R intorno a un asse perpendicolare al piano dell'anello passante per il suo centro, conviene riferire il cerchio a coordinate polari (a e r) nel piano dell'anello. Se l'anello è omogeneo (fig. 5.13) di densità lineica $\lambda = dm/dl = m/2\pi R$, si ha:

$$(28) \quad I_a = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\alpha = (\lambda \cdot 2\pi R) \cdot R^2 = mR^2.$$

Se inoltre il corpo è omogeneo e può essere decomposto in parti per le quali si conosce il momento di inerzia il calcolo può essere semplificato. Così, per es., se si deve calcolare il momento d'inerzia di un disco piano rispetto all'asse perpendicolare per il suo centro, il disco può immaginarsi formato da anelli (fig. 5.14) concentrici di raggio crescente da 0 a R :

$$(29) \quad I_a = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \sigma}{2} = \frac{1}{2} mR^2$$

ove $\sigma = dm/dA = m/\pi R^2$ è la densità areica.

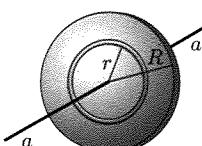


Fig. 5.14

Analogamente il momento d'inerzia di una sfera rispetto a un asse per il suo centro si può ottenere considerando la sfera formata da tanti dischi (fig. 5.15) e usando la formula ora stabilita

$$(30) \quad I = \int_{\pi}^0 \frac{R^2 \sin^2 \theta}{2} \cdot (\rho \pi R^2 \sin^2 \theta) d(R \cos \theta) = \\ = \rho \frac{\pi R^5}{2} \int_{\pi}^0 \sin^4 \theta d(\cos \theta)$$

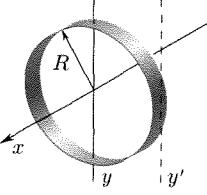
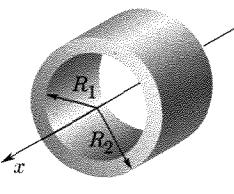
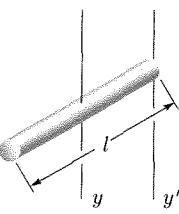
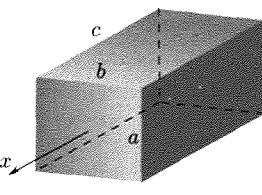
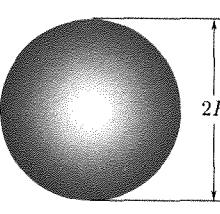
con $\rho = dm/dV = 3m/4\pi R^3$ la densità volumica.

L'integrale può essere facilmente calcolato ponendo $\cos \theta = x$. Si ottiene

$$(31) \quad I = \frac{8\pi\rho R^5}{15} = \frac{2}{5}mR^2.$$

Nella tabella 5.1 sono riportati alcuni momenti d'inerzia calcolati con procedimenti analoghi.

Tabella 5.1

 a)	Anello	Momento d'inerzia rispetto all'asse dell'anello Momento d'inerzia rispetto a un diametro Momento d'inerzia rispetto a un asse tangente all'anello	$I_x = mR^2$ $I_y = \frac{mR^2}{2}$ $I_{y'} = \frac{3mR^2}{2}$
 b)	Tubo cilindrico	Momento d'inerzia rispetto al suo asse	$I_x = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
 c)	Sbarra cilindrica sottile	Momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare per il punto centrale Momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare per un estremo	$I_y = \frac{ml^2}{12}$ $I_{y'} = \frac{ml^2}{3}$
 d)	Parallelepipedo	Momento d'inerzia rispetto a un asse per il centro (di massa) e parallelo a uno degli spigoli (c)	$I_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$
 e)	Sfera piena Sfera cava a parete sottile	Momento d'inerzia rispetto a un diametro Momento d'inerzia rispetto a un diametro	$I = \frac{2mR^2}{5}$ $I = \frac{2mR^2}{3}$

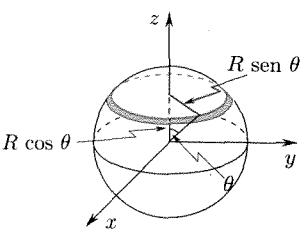


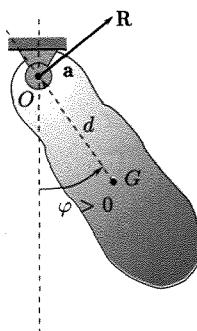
Fig. 5.15

5.7. ESEMPI DI MOTO DI ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE FISSO

Innumerevoli sono gli esempi che si possono dare di corpi vincolati a ruotare attorno a un asse fisso; qui se ne descrive il moto per due casi: quello di un corpo pesante sospeso a un asse orizzontale e quello di una puleggia con asse orizzontale mossa da un cavo passante per la gola. Si ricorda, tuttavia, che, anche nel moto generico di un corpo rigido, si può sempre identificare un asse, variabile da istante a istante, che è di rototraslazione per il corpo.



a)



b)

Fig. 5.16

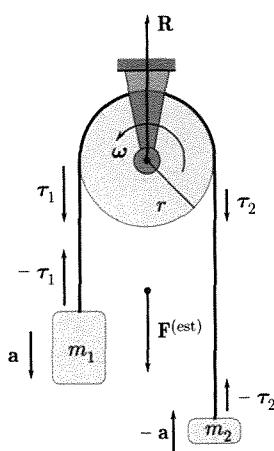


Fig. 5.17

Pendolo composto

1. Si chiama pendolo composto un corpo rigido soggetto alla forza di gravità vincolato a oscillare attorno a un asse fisso orizzontale. Sia G il baricentro nel quale si può supporre applicata la forza peso mg del corpo. In condizioni di equilibrio stabile la verticale per G incontra l'asse fisso e G è al disotto di O , traccia dell'asse sul piano della figura. Si supponga di spostare il corpo in modo che la congiungente G con il punto O ruoti di un piccolo angolo φ e che il sistema venga lasciato a sé (fig. 5.16b). Si scelga di contare positivamente le φ in verso antiorario sulla faccia positiva del piano della figura: l'asse di rotazione a è orientato in modo da vedere le φ crescenti in verso antiorario. L'equazione del moto è la (20)

$$M_a = I_a \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

essendo M_a il momento risultante delle forze applicate rispetto all'asse a di rotazione e I_a il momento d'inerzia del corpo rispetto allo stesso asse. Osservando che il momento della reazione R è nullo e che quello della forza peso rispetto all'asse orientato M_a è di segno opposto a quello dell'angolo φ e di $\sin \varphi$,

$$(32) \quad M_a = -mg d \sin \varphi,$$

l'equazione diviene:

$$(33) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\left(\frac{I_a}{md}\right)} \sin \varphi$$

ed è la stessa valida per un pendolo semplice di lunghezza $l = I_a/md$. Il pendolo composto si comporta, quindi, come un pendolo semplice della lunghezza specificata. In particolare, il periodo, nel caso di piccole oscillazioni è dato da

$$(34) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{mgd}}.$$

Si osservi che nell'espressione (34), al variare della distanza d , varia anche il momento d'inerzia I_a , secondo l'espressione di Huygens (27).

2. Consideriamo un disco (puleggia) omogeneo di raggio r e massa m che possa ruotare (fig. 5.17) intorno al suo asse disposto orizzontalmente, senza attrito. Su di esso sia disposto un filo flessibile e inestensibile che alle estremità porti due masse ($m_1 > m_2$). Il filo si muove trascinando la puleggia e senza scivolarvi sopra.

Lasciando il disco libero di ruotare, la massa m_1 si muove verso il basso con un'accelerazione (verticale) a , mentre la massa m_2 si muove verso l'alto con accelerazione $-a$. Per determinare a , si osservi innanzitutto che l'intensità dell'accelerazione angolare del disco $d\omega/dt$ e quella dell'accelerazione lineare a (che è pari all'accelerazione tangenziale dei punti sull'orlo del disco) sono legati dalla relazione

$$a = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Se si indicano con τ_1 e τ_2 le forze verticali (tensioni) che sono esercitate sul disco dai tratti di filo che sospendono m_1 e m_2 , poiché la reazione del vincolo cui è appesa la puleggia passa per l'asse di rotazione, si può porre per la (21) (ω e l'asse x hanno lo stesso verso):

$$M_x = (\tau_1 - \tau_2)r = I_x \frac{d\omega}{dt}$$

e, ricordando che $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ si ha

$$(35) \quad \tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{2}ma.$$

Se d'altra parte si applica il secondo principio della dinamica al moto della massa m_1 (verso il basso) e della massa m_2 (verso l'alto) si può scrivere, proiettando su un asse verticale orientato verso il basso:

$$\begin{cases} m_1a = m_1g - \tau_1 \\ -m_2a = m_2g - \tau_2 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$(36) \quad a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - (\tau_1 - \tau_2).$$

Eliminando $(\tau_1 - \tau_2)$ fra (35) e (36) si ottiene il risultato

$$(37) \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$$

che, nel caso che la massa m della puleggia possa trascurarsi rispetto a quella delle due masse m_1 e m_2 , diviene

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Quest'ultima può interpretarsi nel senso che le due masse, d'inerzia complessiva $m_1 + m_2$, si muovono sottoposte a una forza attiva data dalla differenza dei loro pesi $(m_1 - m_2)\mathbf{g}$.

5.8. ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO LIBERO

Si è già visto come il moto generale di un corpo rigido libero possa essere decomposto nel moto di traslazione del centro di massa e nel moto di rotazione intorno a un asse per il centro di massa. L'energia cinetica del corpo sarà quindi la somma di quella che competerebbe al centro di massa qualora in esso fosse concentrata la massa m del corpo e di quella nel moto di rotazione [v. eq. (22)]:

$$(38) \quad T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

*Energia cinetica
di un corpo rigido*

essendo I_c il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione per il centro di massa⁽⁴⁾.

Per il sistema vale il teorema del lavoro e dell'energia cinetica: la variazione dell'energia cinetica fra due istanti è pari al lavoro fatto dalle forze esterne, cioè dalla risultante applicata al centro di massa e dalla coppia risultante. Se tutte le forze applicate sono conservative, si può considerare una funzione energia potenziale, $U(x, y, z)$, e scrivere il teorema della conservazione dell'energia meccanica:

$$(39) \quad T + U = E = \text{cost.}$$

Tale teorema, come in genere l'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica, può semplificare la soluzione dei problemi quando si dispone delle informazioni richieste.

⁽⁴⁾ Si osservi che le rotazioni intorno all'asse di rotazione per il centro di massa danno un contributo notevole all'energia cinetica, mentre il loro contributo alla quantità di moto del sistema è nullo: tale quantità di moto è $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c$.

Cilindro che rotola su un piano inclinato

Consideriamo un cilindro, o un disco, che rotoli giù lungo un piano inclinato scabro (fig. 5.18). Come si è detto (par. 5.2) il moto si può considerare come una rotazione intorno a un asse orizzontale per P (asse istantaneo di rotazione), oppure composto di una traslazione del centro di massa nella direzione s di massima inclinazione del piano e di una rotazione intorno a un asse orizzontale per C . Le forze che sollecitano il corpo sono la sua forza peso \mathbf{P} e la reazione vincolare \mathbf{R} . La sollecitazione equivale a una forza, pari alla somma delle due forze applicata al centro di massa e a una coppia. Siccome le componenti della forza peso e della reazione vincolare normali al piano sono uguali e opposte, la risultante \mathbf{F}_e delle forze è diretta nella direzione s e ha l'intensità

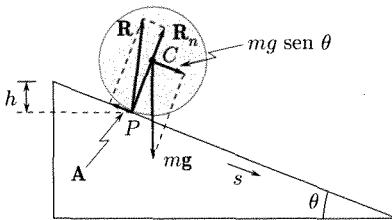


Fig. 5.18

(40)

$$F_e = mg \sin \theta - A$$

essendo A la componente orizzontale della reazione del vincolo, cioè la forza d'attrito. L'attrito che qui interessa in realtà è quello di rotolamento: come si vedrà in seguito (cap. 8) tale attrito si origina per effetto della deformazione dei corpi a contatto. In questa sede, tuttavia, si può, senza grande errore, condurre il calcolo come se la forza di attrito fosse la comune forza di attrito radente statica, giacché è applicata in punti del corpo in quiete sull'asse istantaneo di rotazione.

Il momento risultante delle forze applicate rispetto a C è diretto come e nel verso dell'asse di rotazione e ha intensità:

(41)

$$M = Ar$$

essendo r il raggio del cilindro.

Le equazioni cardinali (9) e (10) si scrivono in questo caso, giacché \mathbf{F}_e è diretta come \mathbf{v}_c (e \mathbf{p}) e \mathbf{M} come ω (e \mathbf{b}):

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} = mg \sin \theta - A \\ Ar = \frac{db}{dt} = I_0 \frac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

Se si ricorda che, per un cilindro, è $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ e che inoltre $v_c = \omega r$, dalla seconda delle (42) si ha

$$(43) \quad A = \frac{1}{2}m \frac{dv_c}{dt}$$

e dalla prima

$$(44) \quad a = \frac{dv_c}{dt} = \frac{2}{3}g \sin \theta.$$

Si vede che l'intensità dell'accelerazione nel moto traslatorio è $\frac{2}{3}$ di quella che avrebbe un corpo che scendesse lungo un piano inclinato della stessa pendenza, privo di attrito.

Dalla (44) si ha, supponendo che per $t = 0$ sia $s(0) = 0$ e $v_c(0) = 0$:

$$(45) \quad \begin{cases} v_c = \left(\frac{2}{3}g \sin \theta \right) t \\ s = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}g \sin \theta \right) t^2 \end{cases}$$

e quindi

$$(46) \quad v_c = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

essendo h la variazione di quota fra la posizione iniziale e quella che si considera. Ricordiamo che la corrispondente formula nel caso di un corpo, cilindrico o no, che scivoli su un piano inclinato privo di attrito è

$$v = \sqrt{2gh}.$$

La componente orizzontale della risultante delle forze esterne, dovuta all'attrito e richiesta per il rotolamento, si ottiene dalle (43) e (44)

$$(47) \quad A = \frac{1}{3}mg \sin \theta.$$

Essa deve necessariamente non essere maggiore di $\mu R = \mu mg \cos \theta$. Ciò significa che, affinché si abbia il rotolamento, deve essere

$$\frac{1}{3}mg \sin \theta \leq \mu mg \cos \theta$$

ovvero

$$(48) \quad \mu \geq \frac{1}{3} \tan \theta.$$

Se questa ineguaglianza non è verificata il cilindro non rotola ma slitta.

Molte delle informazioni ottenute dalla precedente trattazione si possono avere applicando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

Il lavoro delle forze applicate si riduce in questo caso a quello solo della forza peso, applicata al centro di massa, giacché la reazione del vincolo, applicata a un punto P dell'asse istantaneo di rotazione che è fermo, non compie lavoro. Per una variazione di quota h , tale lavoro è $L = mgh$. La variazione corrispondente di energia cinetica è, se il sistema parte dalla quiete

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v_c^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv_c^2.$$

Si ha quindi

$$(49) \quad mgh = \Delta T = \frac{3}{4}mv_c^2$$

cioè si ritrova la (46)

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Si osservi che la (49) corrisponde alla formulazione del teorema di conservazione dell'energia meccanica: nel presente caso infatti, pur essendo in gioco le forze di attrito non conservative, queste non compiono lavoro.

La prima trattazione, a differenza della seconda, consente tuttavia di avere informazioni sulle forze di attrito richieste per il rotolamento.

5.9. GIROSCOPIO. MOTO DI PRECESSIONE

Consideriamo un solido di rotazione (ottenuto per rotazione di una figura piana, avente un asse di simmetria, intorno a detto asse) che si trovi in rapido moto di rotazione intorno al suo asse e supponiamo che, per il montaggio speciale del dispositivo, tale asse possa assumere una qualsiasi orientazione. Ciò si ottiene per esempio (fig. 5.19a) per mezzo di una sospensione realizzata con due cerchi, uno interno all'altro, fissati mediante punte che premono contro supporti opportuni; il corpo di rotazione è fissato al cerchio interno. Il diametro fisso del primo cerchio, quello fisso del secondo cerchio e l'asse di rotazione del corpo sono mutuamente perpendicolari e si incontrano nel centro di massa di ciascuna delle parti mobili. L'asse del corpo di rotazione può essere disposto secondo una qualsiasi direzione passante per il centro di massa (che risulta fisso), prima di porre il corpo in rapida rotazione (con velocità ω); questa ultima operazione può farsi, per esempio, tirando violentemente una cordicella precedentemente avvolta sull'asse. Un tale dispositivo costituisce un *giroscopio*. Se esso è ben realizzato l'attrito nei supporti è trascurabile e il dispositivo realizza un *corpo rigido con centro di massa fisso, in rotazione e privo di sollecitazione esterna*. Di conseguenza il vettore momento della quantità

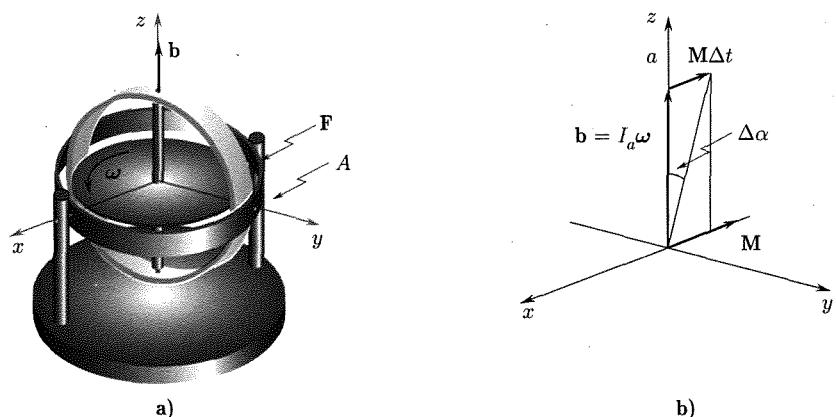


Fig. 5.19

di moto (**b**), diretto nella direzione e nel verso di ω , cioè nella direzione dell'asse di rotazione, deve rimanere invariato nel tempo nel sistema di riferimento inerziale adottato.

Questa circostanza fu sfruttata da Foucault per dimostrare la rotazione della Terra: se, infatti, prima di porre il corpo di rotazione, si dirige l'asse verso una stella fissa (per es. stella polare) l'asse del corpo resta costantemente puntato verso quella stella mentre a un osservatore solidale con la Terra esso sembra muoversi descrivendo un cono che ha una direttrice diretta verso la stella. La proprietà di orientamento del giroscopio è sfruttata in navigazione perché fornisce una direzione nota e prescelta, indipendentemente dai movimenti del veicolo (nave, aereo); al variare della posizione del veicolo muta la posizione del solido in rotazione rispetto al sostegno ma la direzione dell'asse di rotazione resta invariata in ogni sistema inerziale di riferimento.

Di particolare interesse è il comportamento del sistema quando vengano esercitate azioni esterne tendenti a far cambiare la direzione dell'asse di rotazione.

Con riferimento alla figura 5.19a, la posizione del vettore ω e quindi dell'asse a di rotazione del corpo coincide con l'asse z . Si immagini di applicare in A , per un breve intervallo di tempo Δt , una forza di piccola intensità parallela a z , il cui momento M rispetto al centro di massa è quindi diretto come x (fig. 5.19b). Se il corpo non fosse inizialmente in rotazione rapida, l'effetto della forza sarebbe quello di produrre un momento della quantità di moto $\Delta b = M\Delta t$ e il corpo prenderebbe a girare lentamente intorno a x con accelerazione angolare $(\Delta b/\Delta t)/I_a$. Ma se il corpo è in rapida rotazione, esso possiede già un momento della quantità di moto diretto come ω , di intensità $I_a\omega$ molto maggiore di $M\Delta t$. Al termine dell'intervallo di tempo Δt , il momento della quantità di moto sarà cambiato di $\Delta b = M\Delta t$ e quindi eguale a $I_a\omega + M\Delta t$. Eso giace nel piano xz e, dato che l'intensità del secondo vettore componente è molto piccola rispetto a quella del primo, l'intensità del vettore risultante è praticamente pari all'intensità originaria di b . In altri termini gli effetti dell'applicazione della forza F durante l'intervallo Δt è con buona approssimazione semplicemente quella di far deviare la direzione del vettore b , momento della quantità di moto, senza alterarne l'intensità. Di conseguenza la direzione

di ω e dell'asse di rotazione devia del medesimo angolo

$$(50) \quad \Delta\alpha = \frac{M\Delta t}{I_a\omega}.$$

Ciò significa che il corpo ha subito una piccola rotazione intorno all'asse y : si ricordi che in assenza del preesistente moto di rapida rotazione, la forza F avrebbe causato un moto di rotazione del corpo intorno a x .

Se la forza \mathbf{F} , e quindi \mathbf{M} , fossero applicati con continuità al punto A dell'asse y , la direzione di ω e dell'asse di rapida rotazione del giroscopio, si muoverebbe con continuità nel piano xz , intorno a y , con una velocità angolare, detta di *precessione*, d'intensità

$$(51) \quad \omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{I_a\omega}.$$

Precessione di un giroscopio

Questo *moto* si chiama di *precessione*; se un giroscopio ruota rapidamente intorno a un suo asse ed è sottoposto a una coppia di momento perpendicolare a tale asse, esso esegue un moto di precessione, cioè il suo asse di rotazione ruota intorno a un asse normale al piano formato dall'asse di rotazione e dalla direzione del momento applicato. Circa il verso di rotazione vale la regola mnemonica che l'asse di rapida rotazione inseguie il vettore momento della coppia.

In Meccanica razionale si studia con completezza il comportamento di sistemi del genere. Si osservi qui che ciò che si è descritto vale purché il corpo sia in rapida rotazione, cioè purché ω sia grande rispetto alla rapidità con cui varia nel tempo la direzione dell'asse di rotazione, cioè rispetto alla ω_p

$$\omega \gg \omega_p$$

e quindi

$$(52) \quad M \ll I_a\omega^2.$$

Esempi

Trottola. Come ulteriore esempio (fig. 5.20), si può considerare una comune trottola che ruoti rapidamente intorno al suo asse a , il quale risulti inclinato rispetto alla verticale: il punto fisso in questo caso è quello di appoggio sul piano orizzontale, e la coppia applicata è quella dovuta alla forza peso e alla reazione vincolare. Il momento di tale coppia è normale all'asse di rotazione. Nel tempo Δt il vettore \mathbf{b} subisce la variazione $\mathbf{M}\Delta t$, cioè mentre l'origine del vettore \mathbf{b} resta ferma l'altra estremità si sposta lungo una circonferenza orizzontale con centro sulla verticale per O ; il vettore \mathbf{b} cambia di

$$(53) \quad \Delta\mathbf{b} = \mathbf{M}\Delta t.$$

Si comprende come l'asse di rotazione che ha la direzione di \mathbf{b} prenda a muoversi e descriva nel moto di precessione un cono ad asse verticale con apertura θ ; anche in questo caso in assenza della rotazione il peso avrebbe causato la rotazione non intorno a un asse verticale ma intorno a un asse orizzontale (la direzione di \mathbf{M}).

Per il calcolo della velocità angolare di precessione si osservi che l'intensità del momento della coppia, se m è la massa del corpo e ℓ è la distanza del baricentro dal punto fisso lungo l'asse del corpo stesso, vale

$$(54) \quad |\mathbf{M}| = mg\ell \operatorname{sen} \theta.$$

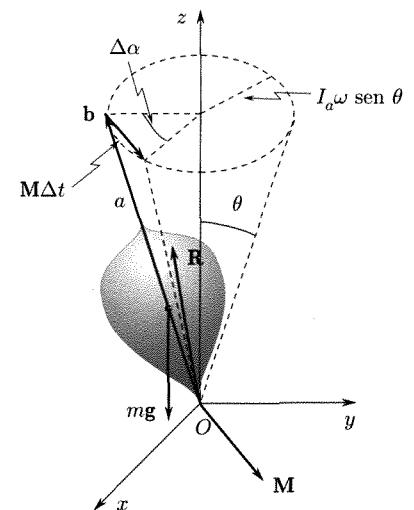


Fig. 5.20

Inoltre il raggio del cerchio descritto dall'estremo libero del vettore \mathbf{b} è $I_a \omega \sin \theta$. Quindi si ha per l'intensità

$$(55) \quad \omega_p = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{Mdt}{I_a \omega \sin \theta dt} = \frac{mg\ell}{I_a \omega}.$$

Si osservi che ω_p non dipende da θ ; essa è inoltre inversamente proporzionale a ω e direttamente proporzionale alla distanza ℓ del baricentro dal punto di sospensione lungo l'asse di rotazione. Se il baricentro è al di sopra del punto di sospensione la precessione avviene nello stesso verso della rotazione; se il baricentro è al di sotto del punto di sospensione, la precessione avviene in senso contrario. Se il baricentro coincide con O , ℓ è zero, la gravità non produce alcun effetto e si ritorna al caso già visto in cui resta fissa la direzione dell'asse di rotazione.

Terra. Nella figura 5.21 è rappresentato il sistema formato dal Sole e dalla Terra, che ruota attorno al suo asse. Se la Terra fosse sferica l'azione attrattiva del Sole sarebbe riconducibile a una forza \mathbf{F}_0 applicata al centro. Lo schiacciamento della Terra ai poli, cioè la sua forma ellissoidica, fa invece sì che l'azione sulla metà della Terra più vicina al Sole sia una forza \mathbf{F}_1 maggiore di quella \mathbf{F}_2 sulla metà più lontana. Il sistema delle due forze è equivalente a una forza $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ applicata al centro della Terra (che determina il moto orbitale) più una coppia di momento perpendicolare all'asse di rotazione della Terra. Questo momento determina un moto di precessione nel quale l'asse di rotazione della Terra descrive intorno alla normale all'orbita un cono di semiapertura $23,5^\circ$ pari all'inclinazione dell'equatore terrestre rispetto al piano dell'eclittica; il tempo richiesto per un ciclo completo è di 26.000 anni.

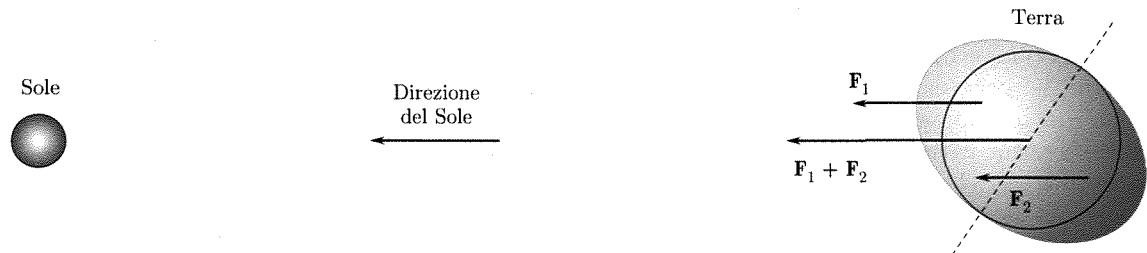


Fig. 5.21

Bicicletta. L'effetto giroscopico spiega la grande stabilità che ha una bicicletta in corsa. Se si considera una ruota in moto, essa è un corpo in rapida rotazione attorno al proprio asse e questo ultimo tende a mantenere inalterata la sua direzione: solo azioni molto intense possono farlo deviare.

Ciò si rispecchia nel fatto che l'azione che si deve esercitare sul manubrio di una motocicletta per fare deviare la ruota cresce con la velocità di rotazione della stessa. Sempre nel caso di un veicolo a due ruote, bicicletta o motocicletta, è esperienza comune l'effetto deviante del momento, già illustrato precedentemente. Se si vuole far curvare a destra il veicolo, infatti, è noto che occorre inclinarlo verso destra e, analogamente, verso sinistra. Ciò significa che al vettore \mathbf{b} del momento della quantità di moto diretto orizzontalmente a sinistra secondo l'asse di rotazione della ruota si aggiunge un $\Delta\mathbf{b} = M\Delta t$ diretto in avanti (curva a destra) o indietro (curva a sinistra) che porta la ruota a curvare verso destra o sinistra. Se, invece, si forzasse il manubrio solamente con un movimento di rotazione ad asse verticale (fig. 5.22), si aggiungerebbe un $\Delta\mathbf{b}$ ad asse verticale, diretto verso il basso (per curva a destra), o verso l'alto (per curva a sinistra). In entrambi i casi il \mathbf{b} risultante, legato alla direzione dell'asse, o del mozzo, della ruota acquisterebbe una direzione contraria a quella necessaria per mantenere il veicolo in equilibrio. Nel primo caso, infatti, il piano di giacitura della ruota si inclinerebbe verso sinistra, nel secondo caso verso destra, assecondando l'effetto delle forze centrifughe, con conseguente caduta del veicolo.

Gli effetti giroscopici hanno grande importanza nella scienza e nella tecnica. La precessione di sistemi in rapida rotazione soggetti ad altre azioni si incontra in numerosi casi di fisica classica e atomica. Nella costruzione delle armi (le canne vengono rigate per imprimere un moto di rotazione che dà stabilità al proiettile lungo

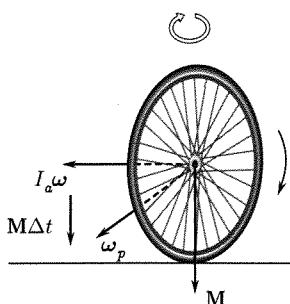


Fig. 5.22

la sua traiettoria), dei veicoli in cui corpi in rapida rotazione (albero del motore) sono presenti, nel governo degli aerei, nella stabilizzazione delle navi, e in numerosi altri esempi della tecnica si presentano gli effetti giroscopici.

5.10. STATICA

Condizioni necessarie per l'equilibrio di un qualsiasi sistema [cap. 4, eq. (43)] sono le *equazioni cardinali dell'equilibrio*

$$(56) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_e = 0 \\ \mathbf{M}_e = 0 \end{cases}$$

*Condizioni per la statica
di un corpo rigido*

essendo \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e rispettivamente la somma delle forze esterne (reali ed apparenti) e il risultante dei loro momenti rispetto al centro di massa o a qualsiasi punto fisso.

È possibile mostrare che nel caso dei sistemi rigidi le (56) sono anche *condizioni sufficienti* per l'equilibrio. Di conseguenza le (56) sono le equazioni della statica dei corpi rigidi ove si aggiunga l'informazione che il corpo in oggetto è in quiete a un certo istante.

Da ciò che si è detto in precedenza si deduce che perché un corpo ad asse fisso resti in quiete è necessario e sufficiente che si annulli il momento M_a della forza esterna rispetto all'asse.

Nel caso di un corpo ad asse fisso orizzontale, soggetto alla sola forza di gravità, ciò equivale a dire che la verticale per il centro di massa deve incontrare l'asse. La figura 5.23 illustra i tre casi di equilibrio possibili secondo che il baricentro (G) sia più basso, più alto o giaccia sull'asse

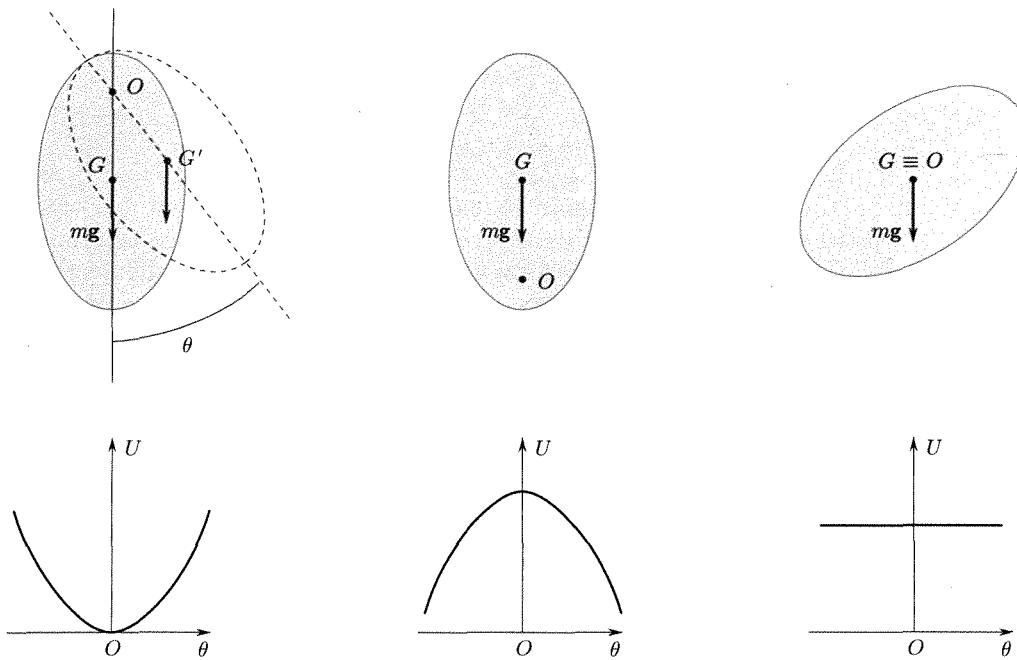


Fig. 5.23

di rotazione. È facile vedere come il primo caso corrisponda a un equilibrio stabile giacché se il corpo viene spostato leggermente dalla posizione di equilibrio si genera una coppia (forza di gravità-reazione) che tende a riportarlo nella posizione di equilibrio. Nella figura è anche indicata l'energia potenziale del corpo in funzione dell'angolo θ : la posizione di equilibrio è una posizione di minimo dell'energia potenziale, in maniera analoga a quanto stabilito (cap. 3, par. 3.8) per un punto materiale sollecitato da una forza conservativa⁽⁵⁾. Il secondo caso corrisponde a un equilibrio instabile (massimo dell'energia potenziale). La terza posizione è di equilibrio indifferente giacché il corpo rimane in equilibrio qualunque sia l'angolo θ .

Come ulteriore esempio considereremo il caso di un grave appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito: le reazioni possono essere solamente verticali dirette verso l'alto, pur non essendovi limiti alla intensità di dette reazioni. È facile allora vedere che la condizione di equilibrio stabile si può esprimere dicendo che la verticale per il baricentro deve incontrare il piano di appoggio in un punto interno al poligono di area minima che comprenda tutti i punti di appoggio (poligono d'appoggio). Qualora ciò non fosse, le reazioni (verticali verso l'alto) e la forza di gravità determinerebbero una coppia che causerebbe il rovesciamento del corpo (v. fig. 5.24).

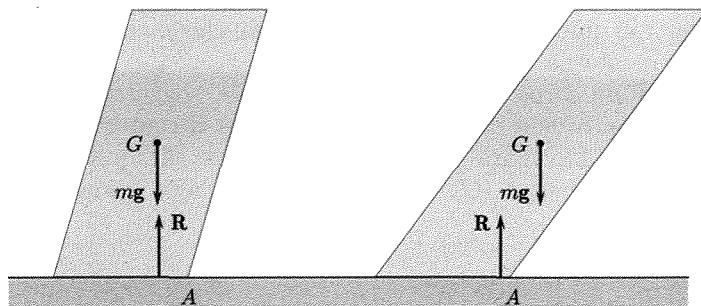


Fig. 5.24

5.11. LEVE. BILANCIA

Un caso particolarmente importante di corpo rigido ad asse fisso è costituito dalla categoria delle leve: in questo caso le forze esterne che sollecitano il corpo sono due forze complanari che producono momenti (M_1 e M_2) rispetto all'asse di segno opposto. La reazione vincolare, applicata all'asse, è tale da rendere soddisfatta la prima delle (56). La condizione di equilibrio è quindi data dalla seconda che, per assi privi di attrito, si riduce a

$$(57) \quad M_1 - M_2 = 0.$$

Con riferimento alla figura 5.25 si può anche scrivere

$$(58) \quad Rd_1 = Pd_2.$$

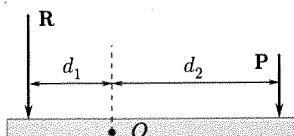


Fig. 5.25

Condizioni per una leva

⁽⁵⁾ La sollecitazione esterna, in questo caso, comprende, oltre alla forza di gravità che è conservativa, anche la reazione vincolare; quest'ultima peraltro, essendo applicata in un punto dell'asse, non compie lavoro.

La leva consente di *equilibrare* una forza **R**, detta resistenza, con una forza **P**, detta potenza, che può avere intensità molto minore

$$(59) \quad P = R \frac{d_1}{d_2}.$$

Secondo la posizione relativa dei punti di applicazione della potenza, della resistenza e della traccia dell'asse di rotazione (fulcro) le leve si distinguono in tre tipi: *primo*, fulcro interno fra i punti di applicazione delle forze; *secondo*, punto di applicazione della resistenza interna; *terzo*, punto di applicazione della potenza interna. Esempi di leva si hanno in molte articolazioni di arti del corpo umano e in molti strumenti della tecnica.

La bilancia è una leva di primo genere (fig. 5.26). Nella versione così detta di precisione è costituita da un giogo che può ruotare intorno a un asse orizzontale. L'asse è lo spigolo del diedro di un prisma di acciaio duro, appoggiato su un piano di agata. Il giogo porta due piattelli su cui vengono disposti dei pesi costituenti la potenza e la resistenza, e un lungo indice che si muove davanti a una graduazione e indica la posizione di equilibrio del sistema: per avere l'equilibrio stabile è necessario che il baricentro del sistema oscillante sia al di sotto del fulcro. Sebbene la bilancia possa essere usata con altri tipi di forze, essa è in genere impiegata per il confronto di forze peso; siccome i pesi sono proporzionali alle masse, la bilancia costituisce lo strumento più comune per la misura delle masse dei corpi.

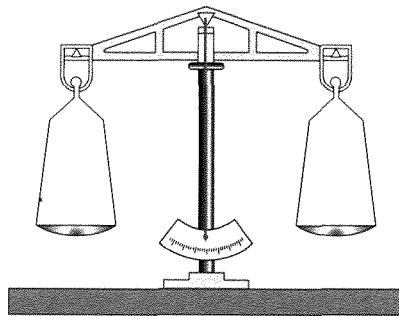


Fig. 5.26

Caratteristiche fondamentali di una sono: 1) la sensibilità, cioè il numero di divisioni di cui devia l'indice quando a un piattello della bilancia precedentemente equilibrata viene aggiunta una massa fissata (in genere 1 mg); 2) la prontezza, caratterizzata dal tempo richiesto perché il giogo e l'indice si fermino dopo l'aggiunta di una massa. Vari provvedimenti possono essere presi per migliorare lo schema (per es. smorzatori). Le bilance di precisione moderne hanno bracci corti, il baricentro molto prossimo (ma al disotto) al fulcro e oscillazioni fortemente smorzate mediante l'uso di smorzatori. Le bilance analitiche normali sono tenute in una custodia di vetro per proteggerle da movimenti d'aria durante le misure.

GRAVITAZIONE

✓ Legge di forza tra due masse:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{gravitazione universale, Newton})$$

- **Esperienza di Cavendish per la determinazione di G .** Massa gravitazionale e massa inerziale sono proporzionali; eguali per opportuna scelta della costante di proporzionalità. Peso e massa di uno stesso corpo sono proporzionali, attraverso la *costante g di gravità*, leggermente variabile da punto a punto.

► **Moto dei pianeti attorno al Sole**

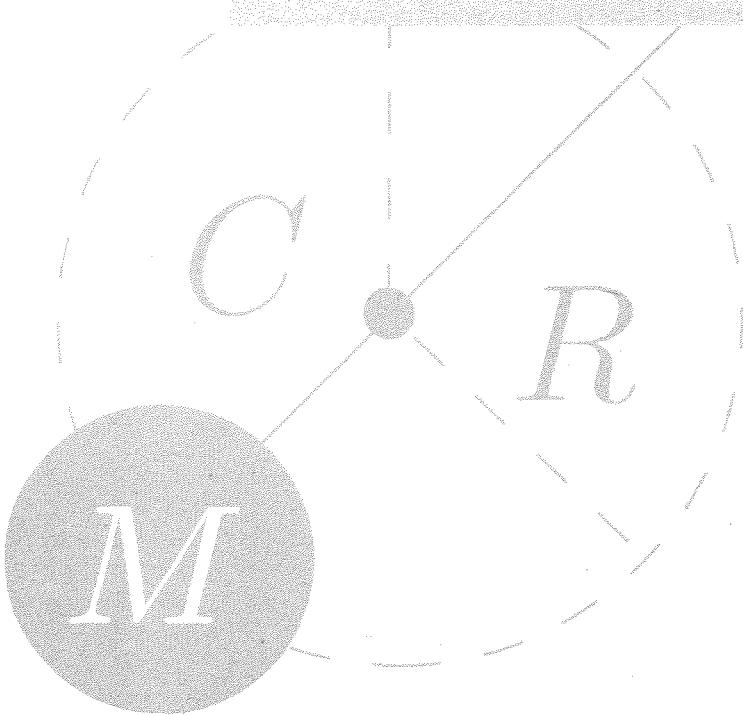
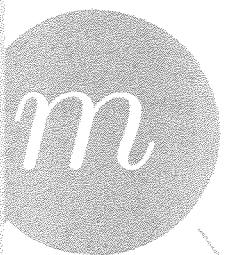
✓ **Leggi di Keplero:**

- I. L'orbita di un pianeta è ellittica, con il Sole che occupa uno dei fuochi.
- II. L'orbita è percorsa con velocità areolare costante (*moto centrale*: $\mathbf{b} = \text{cost}$, quindi anche $\dot{\mathbf{S}} = m\mathbf{b}/2$).
- III. Costanza del rapporto R^3/T^2 , con R semiasse dell'orbita, T periodo di rivoluzione (per orbite circolari: $mv^2/R = GMm/R^2$).

- **Energia potenziale in un campo gravitazionale:** funzione $U(r) = -GM/r$ con $U(\infty) = 0$; energia potenziale di una massa m : $mU(r)$.

- ✓ **Velocità di fuga:** velocità necessaria per sfuggire dalla superficie di un corpo gravitazionale di massa M e raggio R :

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



■ 6.1. INTRODUZIONE

Fino al diciassettesimo secolo il peso dei corpi, che si manifesta con la loro tendenza a cadere verso terra, era considerato come una proprietà caratteristica di tutti i corpi, che quindi non richiedeva spiegazione. Furono Newton e alcuni suoi contemporanei (Hooke) i primi che cominciarono a sospettare che il peso di un corpo fosse essenzialmente una forza scambiata fra il corpo stesso e la Terra e rappresentasse un caso particolare di un'attrazione generale fra corpi di qualsiasi genere ovunque posti. Newton cercò di avere informazioni maggiori su queste forze, ma non era semplice fare esperienze sia perché negli spostamenti ai quali si potevano assoggettare i corpi rispetto alla Terra le variazioni di distanza risultavano esigue rispetto alle dimensioni della Terra, sia perché le forze che due corpi qualsiasi sulla Terra dovrebbero scambiarsi sembravano non sufficientemente intense per essere rivelate, almeno allo stato di allora delle scienze sperimentali. Ciò lo indusse piuttosto a considerare il moto dei corpi celesti.

La situazione nello studio del moto del Sole e dei pianeti era allora la seguente. Il pensiero aristotelico era stato assommato nel sistema tolemaico (II secolo) secondo il quale (fig. 6.1a) la Terra sarebbe ferma al centro dell'universo mentre il Sole, la Luna e gli altri pianeti si muovebbero su orbite in genere costituite da circonferenze (epicicli) i cui centri

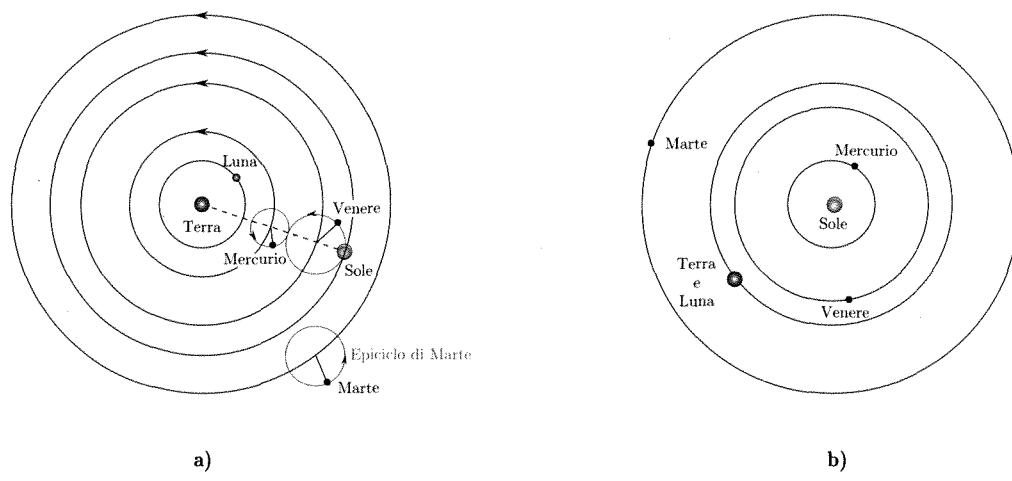


Fig. 6.1

contemporaneamente si sposterebbero su circonferenze con centro nel centro della Terra. Solamente il Sole e la Luna si muoverebbero su semplici orbite circolari con centro nel centro della Terra. Nel secolo XVI Copernico osservò che una descrizione cinematica molto più semplice si ottiene se si prende il Sole come centro del sistema (fig. 6.1b).

Sono note le difficoltà di ordine filosofico che una tale teoria presentava e le discussioni che seguirono la sua presentazione. Allo scopo di avere dati che potessero consentire di esaminare il problema, molti astronomi, fra cui in primo piano per l'esattezza delle sue osservazioni ottenute senza telescopio Tycho Brahe (1546-1601), cominciarono a effettuare determinazioni sperimentali sul moto dei pianeti.

Nel cercare di spiegare le osservazioni di Tycho Brahe, il suo assistente Giovanni Keplero (1571-1630) giunse a formulare le tre famose leggi sul moto dei pianeti, che oggi vanno sotto il nome appunto di Leggi di Keplero:

Le leggi di Keplero per il moto ellittico dei pianeti attorno al Sole

1. *Ogni pianeta descrive un'orbita ellittica avente uno dei fuochi occupato dal Sole;*
2. *la velocità areolare di ciascun pianeta è costante, cioè le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole al pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle;*
3. *i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti, cioè dei tempi impiegati da ciascun pianeta a descrivere la propria orbita, sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite stesse.*

Queste leggi empiriche pur dando con la loro semplicità un notevole credito al sistema copernicano non avevano nessuna giustificazione teorica.

Newton, considerando il moto dei pianeti, riuscì a mostrare che era possibile stabilire le leggi di Keplero sulla base delle ipotesi che:

1. al moto dei corpi celesti si possano applicare i principi della meccanica stabiliti esaminando le azioni fra corpi sulla Terra;
2. si ammetta che ciascun pianeta si muova sotto l'azione di una forza attrattiva verso il Sole proporzionale alla massa del pianeta e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Questa scoperta è di enorme importanza sia perché viene a fondere la meccanica celeste con quella valida per i corpi sulla Terra, sia perché ha in sé la base di una legge universale. A questo punto, tuttavia, non era ancora stabilito che la natura della forza che tiene i pianeti su orbite intorno al Sole fosse la stessa della forza che attrae un corpo verso la Terra; nel primo caso le distanze sono molto grandi rispetto alle dimensioni dei corpi, nel secondo le distanze di un corpo dalla superficie della Terra sono molto piccole.

Newton riuscì a collegare la forza che agisce fra corpi celesti e il peso di un corpo sulla Terra considerando il moto della Luna intorno alla Terra, che avviene su un'orbita approssimativamente circolare (periodo leggermente variabile intorno a 27,3 giorni): egli pensò che la stessa attrazione che fa cadere un corpo sulla Terra dovesse essere quella che fornisce l'accelerazione centripeta alla Luna; egli cioè pensò che la Luna si debba considerare come un corpo che *tenda a cadere* sulla Terra. L'accelerazione centripeta della Luna verso la Terra v^2/r si calcola facilmente dal periodo del moto e dal raggio dell'orbita ($r = 3,8 \cdot 10^8$ m) e si trova il

valore $2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$, cioè un valore che è circa 3600 volte più piccolo dell'accelerazione di gravità g misurata sulla Terra⁽¹⁾.

Newton intuì che questa differenza si sarebbe potuta spiegare assumendo, in armonia con la legge valida per le forze fra corpi celesti, che le accelerazioni dei corpi che cadono decrescano con il quadrato della distanza. In aggiunta, nel 1666 egli calcolò che, facendo la drastica ipotesi che tutta la massa della Terra potesse immaginarsi concentrata nel suo centro, la distanza fra un oggetto che cade in prossimità della Terra ed il centro della Terra (R_T) e la distanza Terra-Luna (circa 60 volte il raggio terrestre R_T) sono tali che il rapporto dei loro quadrati

$$\left(\frac{R_T}{60 R_T} \right)^2 = \frac{1}{3600}$$

risulta proprio pari al rapporto $(v^2/r)/g$.

Egli non comunicò questi risultati per venti anni, a causa della difficoltà che incontrava nel giustificare l'ultima ipotesi. Sembrava infatti plausibile ammettere che un corpo che cada sulla Terra debba essere soggetto a una forza che è la risultante delle attrazioni esercitate in varie direzioni da tutte le particelle in cui si può immaginare scomposta la Terra, ma non era facile vedere il risultato di una tale operazione. Durante questi venti anni Newton sviluppò il calcolo differenziale e integrale e riuscì a dimostrare un importante teorema. Si consideri un involucro *sferico* di spessore e densità uniforme, formato da piccole parti ciascuna delle quali eserciti su una particella P situata fuori dell'involucro una forza proporzionale alla massa della parte, inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra la parte e la particella P e diretta lungo la loro congiungente. La somma delle azioni esercitate da tutte le parti di cui è costituito l'involucro è proporzionale alla massa totale dell'involucro e inversamente proporzionale al quadrato della distanza di P dal centro dell'involucro sferico⁽²⁾.

Questo teorema porta di conseguenza che una sfera solida, uniforme o formata di involucri concentrici di densità uniforme, esercita su un corpo esterno una forza pari a quella che si eserciterebbe sul corpo qualora tutta la massa fosse concentrata nel centro della sfera.

Questo teorema giustifica quindi l'intuizione e il calcolo fatto in precedenza da Newton e mostra che la natura dell'azione attrattiva che determina il moto dei corpi celesti è la medesima di quella che causa la caduta dei gravi sulla Terra.

Distribuzioni di massa aventi simmetria sferica esercitano forze gravitazionali su corpi esterni come se la massa totale fosse concentrata nel centro di simmetria

6.2. LEGGE DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Una generalizzazione del concetto ora stabilito conduce alla legge della gravitazione universale di Newton: *due corpi di massa m_1 e m_2 (da considerare puntiformi, cioè di dimensioni trascurabili rispetto alla loro di-*

⁽¹⁾ In queste considerazioni si può prescindere dal piccolo contributo a g dovuto alla forza centrifuga (cap. 2, par. 2.25).

⁽²⁾ Newton dimostrò contemporaneamente che se la particella P è all'interno dell'involucro sferico la forza risultante è zero. Questa parte del teorema ha notevole interesse in elettromagnetismo. Una sua conseguenza nel caso della gravitazione è che l'azione attrattiva della Terra decrescerebbe andando giù nell'interno della Terra, qualora si ammettesse che la Terra fosse uniforme, cioè avesse densità costante.

La forza gravitazionale tra masse puntiformi è proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

Non vi sono corpi che schermino le forze gravitazionali

stanza) si attirano reciprocamente con una forza diretta secondo la loro congiungente, direttamente proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (r).

L'azione esercitata dal primo punto materiale P_1 sul secondo nella posizione determinata dal vettore \mathbf{r} con origine in P_1 è

$$(1) \quad \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

La costante G è una costante universale, che ha cioè lo stesso valore per qualsiasi coppia di corpi.

Secondo tale legge l'interazione gravitazionale è una proprietà generale dei corpi.

La legge è stabilita per le azioni fra particelle (punti) materiali; nel caso che si tratti di corpi estesi occorre ricorrere ai metodi del calcolo per determinare l'azione risultante. Si badi che in genere non è lecito, nel caso di un corpo esteso di forma qualsiasi, sostituire al corpo reale una eguale massa concentrata nel suo centro di massa. Il teorema stabilito da Newton (paragrafo precedente) vale infatti solo per involucri sferici uniformi.

Dalla formulazione della legge si deduce che l'attrazione fra due corpi è indipendente da ciò che può esserci nello spazio compreso: una dimostrazione di ciò si ha considerando l'effetto che le varie parti della Terra hanno su un corpo (sul suo peso). Sono infatti ugualmente importanti nel determinare la forza risultante le parti vicine e quelle lontane della Terra, altrimenti il teorema di Newton verrebbe a cadere. Un'ulteriore dimostrazione si ha osservando l'orbita terrestre in corrispondenza alle eclissi solari: il passaggio della Luna fra Sole e Terra non produce alcuna variazione sull'orbita e quindi non altera la forza fra Sole e Terra. In altre parole *non esistono schermi per la gravità*.

Come si è accennato (cap. 2, par. 2.9), le forze gravitazionali rappresentano una delle quattro interazioni fondamentali: esse sono le meno intense. Questa interazione è oggetto di continui e approfonditi studi teorici e sperimentali, fatti nella speranza di giungere a interpretazioni unificatrici con le altre interazioni fondamentali e al riconoscimento di una unica superforza. Come si è detto, gli sforzi finora compiuti non mostrano elementi di convergenza fra la forza gravitazionale e le altre.

Un notevole contributo allo sviluppo e al controllo delle teorie viene dato da osservazioni di alta precisione in esperimenti resisi possibili di recente, quali quelli relativi allo studio di quasar, pulsar, stelle di neutroni, fondo di radiazione cosmica, radiazione gravitazionale⁽³⁾.

La prima teoria e ancor oggi una delle più attendibili è quella dovuta a Einstein detta della relatività generale: in tale teoria il postulato di indipendenza della forma delle leggi fisiche dal sistema di riferimento (che nella teoria ristretta è limitato ai sistemi inerziali) è ritenuto valido per qualsiasi sistema di riferimento, inerziale e non inerziale (*principio di relatività generale*).

⁽³⁾ Masse accelerate dovrebbero emettere radiazione gravitazionale come cariche elettriche accelerate emettono radiazione elettromagnetica. L'entità della radiazione nel caso gravitazionale e la limitata sensibilità delle disposizioni sperimentali realizzabili rendono l'osservazione difficile anche nel caso di grandi masse e grandi accelerazioni (collassi stellari).

In questa teoria il concetto di spazio-tempo (cronotopo, uno spazio a quattro dimensioni, non euclideo, riemanniano) assume un rilievo dominante: a differenza dello spazio e del tempo assoluti, esso è influenzato dalla presenza e dalla distribuzione di materia, in quanto queste alterano le caratteristiche geometriche, topologiche. Allo stesso tempo il moto di una massa nello spazio-tempo dipende dalle caratteristiche geometriche locali (curvatura), giacché nel passare da un punto a un altro dello spazio-tempo la massa segue il percorso più breve consentito dalla geometria (riemanniana).

La gravitazione viene condotta a espressione delle caratteristiche geometriche dello spazio-tempo e della loro dipendenza dalla presenza di materia. L'ulteriore illustrazione della teoria esula dalla presente trattazione e richiede nozioni di geometria riemanniana.

La presenza di masse altera le caratteristiche e la curvatura locale dello spazio-tempo

6.3. DETERMINAZIONE DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Descriviamo ora una esperienza, eseguita per la prima volta da Cavendish nel 1798, che consente la determinazione accurata di G (fig. 6.2).

Un sottile e lungo filo, sospeso verticalmente, con una estremità fissata a un supporto, porta all'altra estremità un equipaggio formato da un'asta rigida orizzontale e da due masse uguali (m) di forma sferica. Il sistema costituisce una bilancia di torsione: applicando una coppia all'equipaggio si osserva una rotazione (θ) dell'asta intorno all'asse verticale. La nuova posizione di equilibrio si raggiunge quando la coppia di rotazione elastica, dovuta alla torsione del filo e proporzionale a θ , eguaglia la coppia applicata. La conoscenza delle caratteristiche elastiche del filo e la misurazione di θ consentono di valutare il momento della coppia applicata. La determinazione di θ può farsi fissando all'asta uno specchio S che viene illuminato da un fascio parallelo di luce proveniente da una sorgente L . Il fascio riflesso è raccolto su una scala graduata.

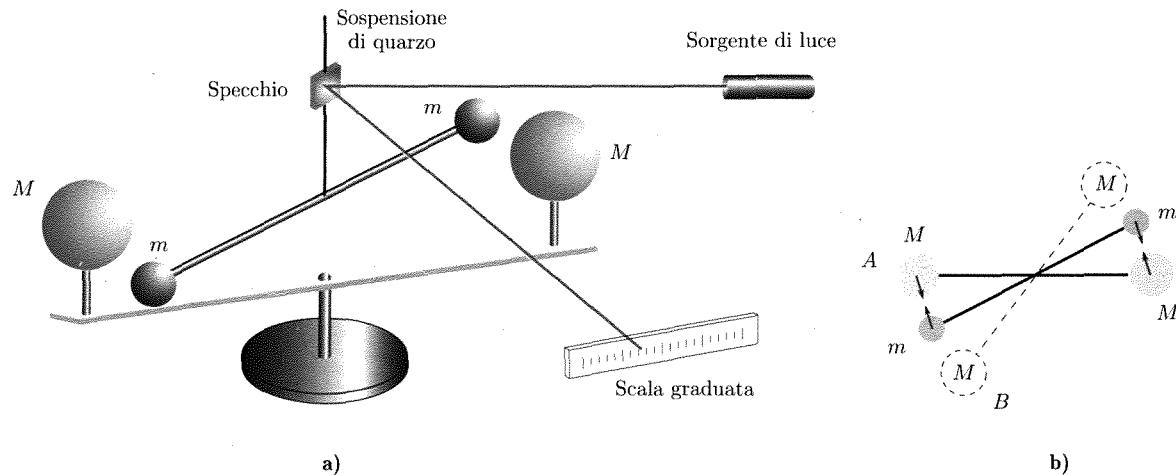


Fig. 6.2

L'esperienza consiste nel porre due altre masse sferiche M , ciascuna a uguale distanza da una delle masse m , e nel misurare la coppia applicata

*Esperimento
di Cavendish per la
determinazione di G*

all'equipaggio, dovuta alle forze attrattive fra le due coppie di masse m ed M . Per far ciò si possono montare le due sfere M su una sbarra rigida che può ruotare intorno ad un asse verticale che coincide con la direzione del filo della bilancia di torsione. Si possono allora fare due misure con le masse M nelle posizioni A e B (fig. 6.2b).

L'esperienza è delicata perché le forze di attrazione in gioco sono piccole. Per due masse sferiche (m e M) di 100 kg ciascuna, a un metro di distanza l'azione attrattiva risulta di $6,670 \cdot 10^{-7}$ N.

Essendo le forze così piccole, precauzioni devono essere prese per evitare azioni disturbatorie. I risultati delle esperienze introdotti nella (1) consentono la determinazione di G . Per tale costante si è trovato il valore nel SI

$$G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2.$$

Si noti che le dimensioni della costante sono

$$[G] = [L^3 M^{-1} T^{-2}].$$

La determinazione di G consente il calcolo della massa della Terra (si dice alle volte che Cavendish determinando G ha *pesato* la Terra). Il peso⁽⁴⁾ di un corpo di massa m rappresenta, infatti, la forza di attrazione fra il corpo e la Terra di massa M_T :

$$mg = G \frac{m M_T}{R_T^2}$$

essendo R_T la distanza fra la massa m e il centro della Terra considerata sferica e formata da involucri sferici uniformi, pari al raggio della Terra $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m e $g = 9,8$ m/s² l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra. Risulta

$$M_T = R_T^2 \frac{g}{G} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Massa della Terra

La densità media della Terra, ottenuta dividendo tale valore per il volume della Terra, è pari a 5.500 kg/m³, cioè circa 5,5 volte quella dell'acqua. Siccome la densità media della crosta terrestre, formata essenzialmente da rocce, è notevolmente più bassa (2.000-3.000 kg/m³), si deve concludere che la densità media nell'interno della Terra al disotto della crosta è notevolmente superiore a 5.500 kg/m³.

La legge di gravitazione consente di calcolare anche la massa del Sole. Se si considera il moto della Terra intorno al Sole e per un calcolo grossolano si assume circolare la traiettoria con un raggio $R' = 1,5 \cdot 10^{11}$ m (determinato con osservazioni astronomiche), si può porre la forza di attrazione pari alla massa della Terra per l'accelerazione centripeta:

$$G \frac{M_T M_S}{R'^2} = M_T \frac{v^2}{R'}$$

con $v = 2\pi R'/T$ velocità con cui la Terra percorre la sua orbita, essendo T un anno solare:

$$v = \frac{6,28 \times 1,5 \cdot 10^{11}}{3,156 \cdot 10^7} = 2,99 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Risulta

Massa del Sole

$$M_S = \frac{v^2 R'}{G} = \frac{(2,99 \cdot 10^4)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{6,670 \cdot 10^{-11}} = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

cioè circa 300.000 volte la massa della Terra.

⁽⁴⁾ Vedi nota (1).

6.4. MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

Vogliamo sottolineare che nelle considerazioni finora svolte nel presente corso il termine *massa* è stato introdotto e usato in due situazioni nettamente distinte.

Per un verso, si è visto che ogni corpo materiale (punto materiale) possiede una proprietà, l'inerzia, per cui si richiede una azione esterna per alterare il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Si è visto che vale la relazione $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$. In esperienze di questo tipo la gravitazione in genere non ha nulla a che fare; se per es. si considera un corpo (punto materiale) su un piano orizzontale privo di attrito la forza \mathbf{F} necessaria a dare una certa accelerazione orizzontale sarebbe la stessa nel caso reale e in quello in cui la gravitazione non fosse presente. La massa così introdotta è la *massa inerziale*, indicata con m_i .

Per un altro verso, si è visto che i corpi si attraggono reciprocamente con una forza, data dalla legge di Newton, nella quale intervengono le masse come parametri che caratterizzano l'intensità della interazione. Per l'intensità vale

$$(2) \quad F = G \frac{m_{g_1} m_{g_2}}{r^2} .$$

In tal caso l'inerzia sembra non entrare. Si può applicare una forza uguale e contraria e tenere il corpo in quiete sotto l'azione della forza così applicata e della gravitazione, oppure lo si può lasciare cadere verso la Terra con moto accelerato. Le masse che intervengono a descrivere il comportamento dei corpi nei riguardi della gravitazione vengono chiamate *masse gravitazionali*, che indichiamo con m_g .

Nello scrivere in precedenza la legge della gravitazione noi abbiamo usato il simbolo generico di massa (m) come se le masse inerziali e gravitazionali dei corpi coincidessero. Si pone ora la domanda se questo sia vero.

Consideriamo due corpi A e B portati a interagire con un terzo corpo C alla stessa distanza r da entrambi. Le forze di gravitazione hanno le intensità:

$$(3) \quad F_{AC} = G \frac{m_{g_A} m_{g_C}}{r^2}$$

$$(4) \quad F_{BC} = G \frac{m_{g_B} m_{g_C}}{r^2}$$

e il loro rapporto

$$(5) \quad \frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m_{g_A}}{m_{g_B}} .$$

Se il terzo corpo è la Terra, le forze sono i pesi ⁽⁵⁾

$$(6) \quad \frac{P_A}{P_B} = \frac{m_{g_A}}{m_{g_B}}$$

cioè la legge di gravitazione universale contiene implicitamente l'asserzione che i pesi dei vari corpi, collocati in uno stesso posto, sono proporzionali alle loro masse gravitazionali.

⁽⁵⁾ Anche qui si trascura il piccolo contributo dovuto alla forza centrifuga.

D'altra parte per gli stessi corpi A e B è possibile determinare le masse inerziali con esperienze nelle quali non interviene affatto la gravitazione. Avendo fatto ciò, si può pensare di lasciare cadere i corpi sotto l'azione della gravità: tutte le esperienze di questo genere hanno mostrato che l'accelerazione di gravità nel vuoto è in un certo punto sempre la stessa qualunque sia la massa inerziale dei corpi. Il moto è causato in questi casi dalle forze di gravitazione (peso) e si può scrivere per il II principio

*Proporzionalità tra pesi e masse inerziali,
tra masse gravitazionali
e masse inerziali*

$$(7) \quad \begin{cases} P_A = m_{iA}g \\ P_B = m_{iB}g \end{cases}$$

da cui

$$(8) \quad \frac{P_A}{P_B} = \frac{m_{iA}}{m_{iB}}.$$

In altre parole, i pesi dei corpi in un punto della Terra stanno esattamente nei rapporti delle loro masse inerziali. Il confronto fra (6) e (8) mostra che le masse inerziali dei corpi risulterebbero proporzionali alle masse gravitazionali almeno nei limiti di validità delle approssimazioni fatte.

Per giudicare meglio questa relazione Newton ricorse a un esperimento. Se si riprende l'equazione del pendolo semplice distinguendo (nello scrivere il II principio) fra masse inerziali e masse gravitazionali (peso $= m_g g$) si ha [al posto della (54), cap. 2]

$$(9) \quad m_i \ddot{s} = -m_g g \sin \frac{s}{l}.$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è allora

$$(10) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}$$

e si riduce a quello scritto in precedenza solo se $m_g = m_i$.

Newton costruì un pendolo formato da un involucro nel quale poteva porre diverse sostanze. Egli sperimentò ponendo nell'involucro successivamente corpi diversi che avevano lo stesso peso (determinato con una bilancia) e quindi la stessa m_g . Tutto il resto (anche la resistenza dell'aria, l'ampiezza di oscillazione) era nelle successive esperienze mantenuto costante. Una qualsiasi differenza dell'accelerazione, e quindi del periodo del pendolo, si sarebbe dovuta imputare alla diversità delle masse inerziali dei vari corpi. Newton peraltro non riuscì a mettere in evidenza alcuna variazione di periodo e concluse che si può porre $m_g = m_i$. Il metodo usato da Newton non consente una precisione molto spinta.

Nel 1909 Eötvos realizzò un dispositivo sperimentale in grado di rilevare differenze nelle forze di gravitazione di una parte su 100 milioni. Il metodo usato si basa sul fatto che il peso di un corpo che si trovi fermo in un punto solidale con la Terra è in realtà, come si è già visto (cap. 2, par. 2.25), la somma della forza di gravitazione e della forza centrifuga

$$(11) \quad \mathbf{P} = m_g \mathbf{g} + m_i r \omega^2 \boldsymbol{\tau}$$

essendo $\boldsymbol{\tau}$ un vettore unitario normale all'asse di rotazione della Terra nel punto considerato.

La prima componente è diretta verso il centro della Terra, la seconda è perpendicolare all'asse di rotazione: le due forze componenti hanno quindi direzioni diverse eccetto che all'equatore. Un filo con all'estremità un punto materiale pesante (filo a piombo) si disporrà lungo una retta (verticale) avente direzione diversa secondo i materiali usati nel realizzare il corpo, tranne che si verifichi la circostanza che per tutti i corpi le masse inerziali e gravitazionali stiano in rapporto costante.

Disponendo due di tali fili di ugual peso alle estremità di una sbarra orizzontale sospesa al centro, una mancanza di parallelismo fra i fili originerebbe una coppia e una rotazione della sbarra intorno a un asse verticale. Egli non osservò tale coppia e quindi la proporzionalità delle masse inerziali e gravitazionali restò confermata.

In un secondo esperimento ugualmente preciso, Eötvos confrontò l'attrazione da parte del Sole su corpi di sostanze diverse: uguali masse inerziali sono attratte con forze uguali. Queste conclusioni sono state confermate successivamente da esperimenti effettuati con precisione ancora maggiore, fino ad alcune parti su 10^{12} (1962, R.H. Dicke; 1971, V. Braginsky).

La proporzionalità fra m_g e m_i per tutti i corpi, controllata con grande precisione, consente di porre pari a 1 il loro rapporto e di ritenere equivalenti le masse inerziali e gravitazionali. Ciò, fra l'altro, rende possibile misurare le masse (inerziali) mediante pesate nelle quali si paragonano le forze peso che sollecitano corpi diversi nello stesso posto.

La coincidenza delle masse inerziali e gravitazionali è in meccanica classica ritenuta una fortunata coincidenza, mentre trova una sua logica spiegazione nella teoria generale della relatività: non si tratta di due diverse proprietà della materia, ma di due differenti descrizioni del suo comportamento. Questa identità viene presa come un postulato fondamentale nella teoria (principio di equivalenza debole).

6.5. ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

Le differenze osservate tra i valori di g in punti diversi della superficie terrestre dipendono da più fattori tra cui si ricordano i seguenti:

1. la componente centrifuga dell'accelerazione, dovuta alla rotazione della Terra;
2. la non esatta sfericità della forma della Terra;
3. le diversità di quota rispetto a una superficie di riferimento (livello del mare);
4. la distribuzione non omogenea di massa all'interno della Terra.

La tabella 6.1 dà l'accelerazione media al livello del mare osservata sulla Terra per varie latitudini dall'equatore ai poli.

Una parte notevole della variazione di g è dovuta alla esistenza della accelerazione centrifuga. Abbiamo già visto (cap. 2, par. 2.25) che questa causa produce una differenza fra i poli e l'equatore di $3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$, che è più della metà del valore osservato $5,18 \cdot 10^{-2}$. L'ulteriore causa di variazione consiste nel fatto che la Terra non è sferica ma è approssimativamente un ellissoide schiacciato ai poli: la distanza pertanto dal centro della Terra è minore ai poli che all'equatore.

La variazione di g con l'altitudine si può spiegare in base alla legge di gravitazione: elevandosi dalla superficie del mare la forza di attrazione decresce. Per la variazione della forza con la quota r , occorrerà derivare la (1) rispetto a r ⁽⁶⁾ per un corpo di massa m , essendo M la massa della Terra, e \mathbf{r} il vettore con origine nel centro:

$$(12) \quad \frac{d\mathbf{F}}{dr} = 2G \frac{mM}{r^3} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

Tabella 6.1

Latitudine	$g (\text{m/s}^2)$
0°	9,7804
10°	9,7819
20°	9,7864
30°	9,7933
40°	9,8017
50°	9,8107
70°	9,8261
80°	9,8306
90°	9,8322

(6) Il versore \mathbf{r}/r è un vettore costante nell'operazione di derivazione. Lo stesso è g/g nella (14).

Tabella 6.2

Altitudine (m)	g (m/s ²)
0	9,806
1.000	9,803
4.000	9,794
8.000	9,782
16.000	9,757
32.000	9,708
100.000	9,598

da cui si ricava

$$(13) \quad \frac{d\mathbf{F}}{\mathbf{F}} = -2 \frac{dr}{r}$$

dove il segno meno indica che F decresce all'aumentare di r . D'altra parte, essendo

$$(14) \quad \mathbf{F} = mg \left(\frac{\mathbf{g}}{g} \right)$$

e

$$d\mathbf{F} = mdg \left(\frac{\mathbf{g}}{g} \right)$$

risulta

$$(15) \quad \frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}.$$

La variazione di g con l'altitudine è piccola se le variazioni di altitudine non sono molto grandi. La tabella 6.2 dà i dati per una latitudine fissa di 45°.**Tabella 6.3**

Profondità (km)	g (m/s ²)
0	9,82
33	9,85
100	9,89
200	9,92
300	9,95
600	10,01
800	9,99
1.000	9,95
1.200	9,91
1.400	9,88
1.600	9,86
1.800	9,85
2.000	9,86
2.200	9,90
2.400	9,98
2.600	10,09
2.800	10,26
2.900	10,37
4.000	8,00

Si è già osservato che se la densità della Terra fosse costante g decrescerebbe scendendo nell'interno della Terra giacché diminuisce la porzione della Terra che ha effetto nell'attrazione (involti sferici non esercitano alcuna azione su masse al loro interno); l'accelerazione di gravità è allora massima sulla superficie della Terra al livello del mare. In realtà la densità della Terra non è uniforme e la tabella 6.3 dà alcune indicazioni di come varia g fino a profondità di 4.000 km.I valori di g riportati nelle tabelle per varie latitudini e altitudini sono valori medi. Deviazioni da posto a posto si osservano in relazione alla composizione geologica della crosta terrestre nelle vicinanze del singolo punto. Sono appunto queste variazioni locali che sono utilizzate nella ispezione geologica per avere indicazioni sulla natura e struttura della crosta e sull'eventuale presenza di particolari giacimenti (per es. petroliferi).

6.6. MOTO DEI PIANETI E DEI SATELLITI

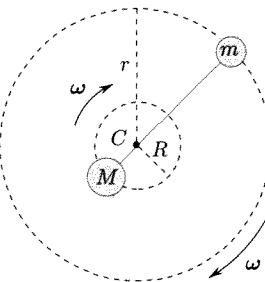
Le leggi di Keplero sono naturalmente derivabili dalla legge del moto di Newton, considerando come forza agente quella di gravitazione universale. Se per la prima è necessario un breve ricorso a formule di geometria delle coniche, la seconda è immediata conseguenza della conservazione del momento della quantità di moto nel caso di corpi soggetti a forze centrali. Per la terza, si dà nel seguito la derivazione, verificandone la deducibilità nei termini sopra indicati.

È interessante riprendere in considerazione il moto di un pianeta intorno al Sole per chiarire il significato delle leggi di Keplero. Considereremo il caso generale di due masse sferiche (M e m) che si muovono sotto l'azione reciproca della gravitazione e ammetteremo in prima approssimazione che esse non risentano di azioni da parte di altri corpi (problema dei due corpi) (fig. 6.3). Come ulteriore semplificazione nella trattazione si fa l'ipotesi che ciascun corpo si muova su orbita circolare, anziché ellittica.

Il centro di massa C del sistema giace sulla congiungente i due corpi in posizione tale che, dette r e R le distanze di C da m e M , sia $mr = MR$. Avendo supposto che non vi siano forze esterne applicate al sistema, il centro di massa resta fermo: i due corpi descriveranno quindi orbite circolari con centro in C e raggi r e R , con la stessa velocità angolare ω . Perché ciò accada è necessario che la forza di attrazione che ciascun corpo esercita sull'altro produca la richiesta accelerazione centripeta ($mr\omega^2 = MR\omega^2$); ciò significa che deve essere soddisfatta la relazione

$$(16) \quad G \frac{Mm}{(R+r)^2} = mr\omega^2$$

che lega le dimensioni delle orbite alla velocità angolare.

**Fig. 6.3**

Nel caso che uno dei corpi abbia massa molto superiore all'altro ($M \gg m$), come accade fra il Sole e un suo qualsiasi pianeta, R può essere trascurato rispetto a r (il centro di massa coincide con il primo corpo) e si può scrivere

$$(17) \quad GM = \omega^2 r^3.$$

Essendo il periodo $T = 2\pi/\omega$ si ha anche:

$$(18) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3.$$

Si osservi che in questa espressione non interviene m , e quindi il rapporto T^2/r^3 è lo stesso per tutti i pianeti. Tale relazione corrisponde alla formulazione (approssimata) della terza legge di Keplero. Essa può essere usata per determinare M , la massa del Sole, dopo aver determinato sperimentalmente gli altri parametri per il caso del moto della Terra. Si trova, come si è visto, che la massa del Sole è circa 300.000 volte quella della Terra. Si può allora valutare

$$(19) \quad R = \frac{m}{M} r \simeq \frac{1,5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^5} m = 500 \text{ km}.$$

Si vede pertanto che effettivamente R si può con buona approssimazione trascurare rispetto a r .

La relazione (18) può essere applicata anche a satelliti artificiali della Terra: in tal caso M è la massa della Terra, r il raggio dell'orbita del satellite e T il periodo della rivoluzione.

Il significato della seconda legge di Keplero è chiarito da quanto è stato in precedenza detto circa il moto di un punto materiale sottoposto a una forza centrale: in questo caso il momento della quantità di moto rispetto al centro del moto e la velocità areolare sono costanti. La seconda legge di Keplero equivale quindi ad affermare che il moto dei vari satelliti rispetto al Sole avviene sotto l'azione di una forza centrale, ma non ci dice nulla circa la dipendenza di questa dalla distanza.

È la prima legge di Keplero, che afferma la ellitticità delle orbite dei pianeti intorno al Sole, con il Sole in uno dei fuochi, quella che richiede che la forza di attrazione sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza: è questa infatti la sola legge di dipendenza della forza dalla distanza che può spiegare il tipo di orbita osservato.

Queste considerazioni sono svolte considerando il moto di un pianeta intorno al Sole con un problema in cui due soli corpi siano coinvolti. Una trattazione che consideri anche le interazioni fra i pianeti, pur essendo molto complicata, può essere fatta e riesce a spiegare ottimamente quasi tutti i dettagli delle osservazioni astronomiche. La legge di gravitazione di Newton e l'applicazione delle leggi della meccanica terrestre al caso del moto dei corpi celesti sono quindi stabilite con la massima certezza. Un'unica eccezione alle previsioni ottenibili per questa via è rappresentata dal fatto che l'asse maggiore dell'orbita ellittica di Mercurio ruota lentamente nello spazio (circa 40 secondi per secolo). Questa rotazione è superiore a quella che si può prevedere con la meccanica newtoniana quando si considerino le azioni degli altri pianeti: essa è stata spiegata dalla teoria della relatività generale.

La terza legge di Keplero discende dall'eguagliare la forza gravitazionale all'accelerazione centripeta per la massa del pianeta

La seconda legge di Keplero deriva dalla conservazione del momento della quantità di moto per le forze centrali

La prima legge di Keplero è legata alla specifica legge di forza dell'attrazione gravitazionale

■ 6.7. ENERGIA POTENZIALE DI GRAVITAZIONE

Il campo di forze gravitazionali creato da una massa puntiforme (o da potersi considerare tale, come è, spesso, il caso della Terra con buona approssimazione) agente su una seconda massa m , anche essa puntiforme, nella posizione definita da \mathbf{r} (vettore con origine nella posizione di M) è un campo di forza centrale e conservativo (cap. 3, par. 3.4).

Prima di trattare il caso generale per l'espressione della funzione energia potenziale, consideriamo quello particolare relativo a una regione molto limitata dello spazio nella quale si possa con buona approssimazione ritenerne \mathbf{r} costante. È questo il caso della forza di gravità, cioè con buona approssimazione (trascurando il contributo della forza centrifuga) della forza peso, in una regione limitata dello spazio intorno a un punto nelle

vicinanze della Terra. Trattando proprio questo caso e indicando con y un asse diretto lungo la verticale verso il basso (direzione e verso di $-\frac{\mathbf{r}}{r}$), la forza di gravitazione esercitata dalla Terra (massa M_T , raggio R) su un punto materiale di massa m è costante e pari a

$$(20) \quad \mathbf{F} = -\left(\frac{GM_T}{R^2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} = m\mathbf{j} = mg.$$

La funzione energia potenziale, se si pone $U = 0$ per $y = 0$, risulta [cap. 3, eq. (23)]:

*Energia potenziale
di un grave nell'ipotesi
di forza costante*

$$(21) \quad U(y) = -mgy.$$

Nel caso generale della forza gravitazionale

$$(22) \quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

essa corrisponde a [cap. 3, eq. (24)]

*Energia potenziale
di una massa nel campo
di gravitazione
di un'altra*

$$(23) \quad U(r) = -\frac{GM}{r}m + \text{cost.}$$

La costante va determinata fissando arbitrariamente il valore di $U(r_0)$ in un punto r_0 scelto a piacere. Si trova utile in questi casi porre uguale a zero l'energia potenziale nel posto ove la forza è nulla, cioè a distanza infinita ($r_0 = \infty$). Allora

$$(24) \quad U(r) = -\frac{GM}{r}m.$$

Con tali scelte l'energia potenziale è sempre negativa, per qualsiasi distanza dal centro di attrazione: ciò corrisponde al fatto che la forza è attrattiva e quindi essa compie un lavoro negativo quando la distanza tra i corpi aumenta. L'energia potenziale pertanto decresce da zero man mano che un corpo si avvicina al centro di attrazione partendo da distanza infinita, mentre cresce pur rimanendo sempre negativa quando se ne allontana.

Nel caso che il centro di attrazione sia costituito dalla Terra la (24) si scrive

$$(25) \quad U(r) = -\frac{GM_T}{r}m.$$

*Energia potenziale
di una massa nel campo
di gravitazione terrestre*

Si vede che per portare un corpo m dalla superficie della Terra ($r = R_T$) all'infinito è richiesto un lavoro:

$$(26) \quad L = \frac{GM_T}{R_T}m = 6 \cdot 10^7 m \text{ J.}$$

Se quindi si potesse trascurare la resistenza dell'aria, un proiettile lanciato dalla Terra verso l'alto con una energia cinetica

$$(27) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T}{R_T}m$$

cioè con una velocità

$$(28) \quad v = \sqrt{2 \frac{GM_T}{R_T}} = \left(\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6} \right)^{1/2} = \\ = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

*Velocità di fuga
dalla Terra*

riuscirebbe a sfuggire alla attrazione della Terra. Per velocità inferiori il proiettile si allontanerebbe fino a quando tutta l'energia cinetica risultasse convertita in energia potenziale e in seguito ricadrebbe verso la Terra⁽⁷⁾. In quest'ultimo caso, qualora le condizioni di moto fossero opportune, il corpo si muoverebbe su un'orbita come satellite artificiale, altrimenti ritornerebbe sulla Terra. La velocità (28) prende il nome di velocità di fuga. Si osservi che essa non dipende dalla massa m del corpo lanciato.

Le molecole dei gas più leggeri dell'atmosfera possono avere velocità di quest'ordine di grandezza in seguito alla agitazione termica e possono sfuggire dalla zona più alta dell'atmosfera stessa. Questo fatto spiega l'attuale assenza di idrogeno nell'atmosfera terrestre che pure doveva esservi in tempi remoti.

Qualcosa di analogo accade per l'elio, leggermente più pesante dell'idrogeno: esso viene in continuazione perduto dall'atmosfera e viene sostituito da altro elio prodotto nei processi di decadimento radioattivo nella crosta terrestre. Le molecole di ossigeno e azoto invece, più pesanti di quelle dell'elio e dell'idrogeno, non riescono a raggiungere, nel moto di agitazione termica, velocità dell'ordine della velocità di fuga.

Nel caso del Sole le forze attrattive sono superiori a quelle della Terra, la velocità di fuga è maggiore e neanche l'idrogeno riesce a sfuggire. L'opposto avviene nel caso della Luna: la velocità di fuga è molto più bassa di quella terrestre e ciò spiega l'assenza di una atmosfera intorno alla Luna.

Come si è già visto in precedenza, il concetto di energia potenziale è particolarmente utile quando il corpo si trovi soggetto all'azione di varie forze tutte conservative. In questo caso conviene trattare i problemi mediante la funzione scalare energia potenziale (somma delle energie potenziali dei singoli campi di forze conservative) anziché con la somma vettoriale delle forze.

Questo fatto è utilmente usato per studiare i problemi di più corpi che si attraggono reciprocamente. Una situazione di questo tipo si presenta quando si voglia esaminare in maggiore dettaglio il moto dei pianeti e dei satelliti.

La figura 6.4 mostra l'andamento dell'energia potenziale per una massa $m = 1$ nel sistema solare in corrispondenza alla regione dei pianeti più interni. La curva principale è dovuta al Sole, a essa si sovrappongono dei piccoli picchi dovuti all'attrazione dei singoli pianeti. Nel grafico l'altezza relativa dei picchi è indicata correttamente in scala; la loro larghezza è fortemente esagerata per renderli più facilmente visibili.

*La presenza
di un'atmosfera gassosa
attorno a un pianeta
dipende dal rapporto
tra le velocità termiche
e quella di fuga*

(7) La presenza della resistenza dell'aria altera completamente il risultato di una esperienza come quella descritta: un corpo lanciato con la velocità di fuga dalla superficie della Terra dissiperebbe quasi completamente la sua energia in calore per attrito con l'atmosfera e si volatilizzerebbe.

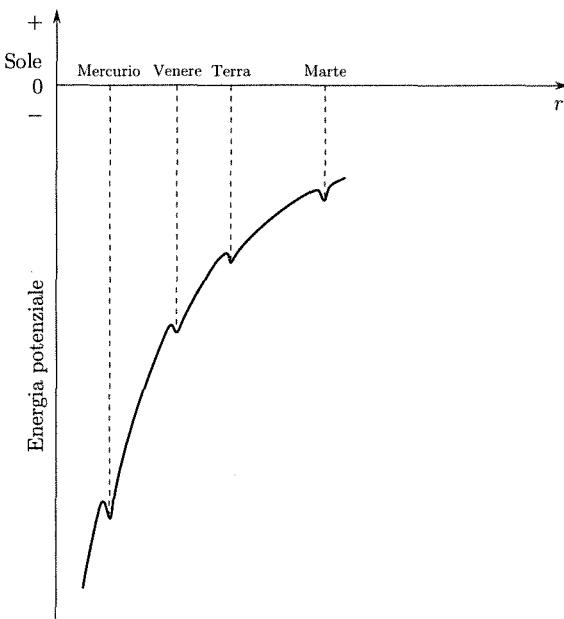


Fig. 6.4

La figura 6.5 rappresenta invece l'energia potenziale di una massa generica m nello spazio Terra-Luna. Essendo la distanza fra questi due corpi relativamente piccola, si è trascurata la variazione dell'energia potenziale dovuta al Sole.

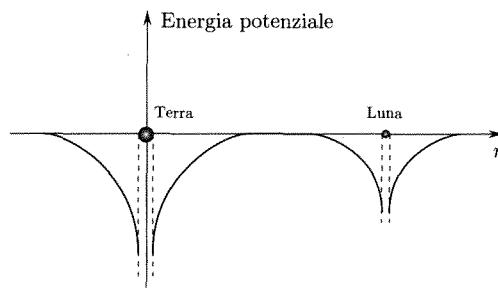


Fig. 6.5

Vogliamo infine osservare che l'equazione (24) è simmetrica in M e m : l'energia potenziale è una caratteristica del sistema e non di una sola delle due parti. Essa corrisponde al lavoro che si deve fare per portare i due corpi a una certa distanza, partendo da separazione infinita. Questa caratteristica va sempre tenuta presente, anche quando si usano locuzioni come energia potenziale di un pianeta nelle vicinanze del Sole o di un corpo nelle vicinanze della Terra. L'origine di queste dizioni approssimate è dovuta al fatto che nella maggioranza dei problemi concreti non v'è luogo a considerare le variazioni di stato del Sole o, rispettivamente, della Terra; così, per es., nei processi nei quali energia potenziale si muta in energia cinetica dei componenti il sistema, il pianeta o il corpo praticamente prendono tutta la variazione di energia cinetica mentre il Sole o la Terra restano approssimativamente non influenzati dal processo.

Consideriamo il moto di un pianeta (massa m) intorno al Sole (M_{\odot}) e supponiamo che l'orbita sia circolare. L'energia potenziale, se r è il raggio dell'orbita, è

$$(29) \quad U(r) = -\frac{GM_{\odot}m}{r}$$

e l'energia cinetica risulta

$$(30) \quad T = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_{\odot}}{r}m$$

avendo fatto uso della (17).

Di conseguenza l'energia meccanica

$$(31) \quad E = T + U = \frac{1}{2}\frac{GM_{\odot}}{r}m - \frac{GM_{\odot}}{r}m = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\odot}}{r}m$$

risulta negativa. Questa conclusione rimane valida anche se si considera il fatto che l'orbita in realtà è ellittica e non circolare. Il fatto che l'energia meccanica di un pianeta che si muova intorno al Sole è costante e negativa è conseguenza del fatto che il Sole e il corpo (pianeta) sono legati fra loro, sicché quest'ultimo non può sfuggire.

Un'applicazione di queste conclusioni si fa quando si vuole giudicare se una cometa che appare nel cielo appartenga o no al sistema solare. Si determina allora la velocità della cometa in un punto (dove è nota l'energia potenziale): se l'energia meccanica totale è negativa, la cometa appartiene al sistema solare, si muove su un'orbita ellittica e ritornerà a farsi vedere nel futuro; se l'energia meccanica è positiva la cometa non appartiene al sistema solare e il suo passaggio in questo sistema è occasionale.

MECCANICA DEI CORPI DEFORMABILI ELASTICITÀ

- I corpi reali sottoposti a sistemi di forze (con risultante e momento risultante nulli) si deformano: internamente si stabilisce un campo di sforzi e di deformazioni.

Grandezze tipiche
sforzo, F_x/S_y (componente xy , così per le altre);
deformazione, $\Delta l_x/l_y$ (componente xy , così per le altre).

- Curva tipica di deformazione in un materiale omogeneo, sottoposto a sforzi: zona *elastica* (con recupero della forma originaria, al venir meno dello sforzo, con regime iniziale *lineare* [legge di Hooke], poi *non lineare*), zona *plastica* (con deformazione permanente, *snervamento*) e *rottura*.

Sollecitazioni tipiche e costanti di elasticità

Compressione di volume: $\delta V/V = p/K$;

Trazione: $\Delta l/l = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$ (**F** normale)

Scorrimento: $\Delta h/l \simeq \Delta\theta = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$ (**F** tangenziale)

Modulo di Poisson: $\Delta b/b = -\frac{\mu}{E} \frac{F}{S}$ (**F** normale)

- Nei solidi all'equilibrio gli atomi occupano posizioni reticolari fisse (i solidi possiedono volume e forma propri), nella buca di potenziale determinata dagli atomi circostanti: le forze di richiamo dovute a piccole deformazioni sono elastiche (linearità nei solidi reali).
- Nei liquidi gli atomi (o molecole) si muovono gli uni rispetto agli altri: sorgono forze intense (come per i solidi) se si avvicinano oltre il raggio di equilibrio (i liquidi possiedono volume proprio, ma non forma propria). Si creano vacanze reticolari con possibilità di scorrimento: tempi propri di rilassamento (*liquidi reali*).
- Nei gas le particelle sono libere di muoversi le une rispetto alle altre (i gas perfetti assumono volume e forma del recipiente che li contiene; nei gas reali si instaurano deboli forze di interazione e le particelle posseggono un volume proprio).
- **Viscosità**:

$$\eta = \frac{F}{A} / \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

■ Meccanica dei corpi deformabili. Elasticità

7.

■ 7.1. INTRODUZIONE

Abbiamo in precedenza considerato il comportamento dei corpi rigidi e abbiamo già osservato che in natura non esistono corpi di tale genere, ma che quella trattazione può essere valida in molti casi e dare utili informazioni sul moto di corpi reali, giacché spesso le deviazioni del comportamento di corpi reali da quello di corpi rigidi sono piccole e non hanno influenza sostanziale sulle caratteristiche generali del moto dei corpi che si stanno esaminando.

Vi sono tuttavia casi in cui la considerazione del fatto che nei corpi reali soggetti a forze le distanze fra i punti del corpo possano variare, cioè che vi possano essere deformazioni, è essenziale per descrivere il comportamento del corpo. Si pensi per es. ai problemi legati alla resistenza delle strutture di cui si occupa in dettaglio la Scienza delle costruzioni. La meccanica dei corpi deformabili esamina quegli aspetti del comportamento dei sistemi meccanici soggetti a forze nei quali è necessario tenere conto delle deformazioni causate dalle forze stesse.

Nel caso che le deformazioni scompaiano con la rimozione delle forze, le *deformazioni* si dicono *elastiche*. La parte della meccanica dei corpi deformabili che tratta il caso di deformazioni elastiche è la teoria della elasticità e noi essenzialmente ci limiteremo ad alcuni cenni su di essa.

Nella teoria della elasticità i corpi vengono caratterizzati per mezzo di grandezze macroscopiche, che descrivono il comportamento globale del corpo, senza cioè indagare le ragioni microscopiche di tale comportamento. Quest'ultima analisi può essere fatta sulla base delle conoscenze relative alla costituzione della materia e noi daremo alcuni cenni di queste descrizioni, essendo esse di grande importanza per comprendere appieno le proprietà dei vari corpi.

Per svolgere alcune considerazioni di teoria della elasticità, nelle quali quindi il corpo viene considerato macroscopicamente nel suo insieme, conviene distinguere i corpi in solidi, liquidi e gas. Senza entrare per ora in discussioni sulle definizioni, chiameremo solido, per gli scopi che qui interessano, un corpo dotato di volume e forma propri; un liquido è invece caratterizzato dall'avere volume proprio e dal prendere la forma del recipiente che lo contiene; un gas assume, infine, volume e forma del recipiente.

Le considerazioni della teoria della elasticità si svolgono completamente e più facilmente considerando i solidi, ma, almeno in parte, si esten-

dono anche al caso dei liquidi e dei gas. Considereremo perciò dapprima il caso dei solidi, in seguito quello dei liquidi e dei gas. Supporremo inoltre che i corpi siano omogenei e isotropi, che abbiano cioè proprietà che non varino da punto a punto o che dipendano dalla direzione delle sollecitazioni.

7.2. DEFORMAZIONI ELASTICHE E PLASTICHE

Allo scopo di facilitare l'introduzione e la comprensione del significato di alcuni parametri, consideriamo un'esperienza del tipo di quelle che si effettuano comunemente per studiare le proprietà dei materiali. Una sbarra cilindrica, per es. di acciaio, avente sezione normale S (fig. 7.1a), venga sollecitata alle estremità da due forze uguali e contrarie che tendano ad allungarla e si misuri l'allungamento Δl al crescere dell'intensità di F . Il diagramma che rappresenta i risultati della prova è del tipo indicato in figura 7.1b: la figura 7.1c evidenzia in dettaglio la parte iniziale. Finché F è piccola, gli allungamenti sono proporzionali alla forza (zona lineare), quindi se ne discostano secondo una legge di tipo quadratico (non linearità), ma sempre scompaiono quando la forza viene rimossa: in questa regione la deformazione (allungamento) si dice elastica. Il punto A costituisce il punto limite di elasticità. Sollecitazioni superiori producono deformazioni che non scompaiono interamente con la rimozione della forza. La deformazione è allora somma di una deformazione elastica e di una plastica; dopo aver raggiunto uno stato che corrisponde al punto B , qualora la forza applicata venga gradatamente ridotta, l'allungamento segue la linea tratteggiata BB' e OB' rappresenta la deformazione residua permanente (*plastica*).

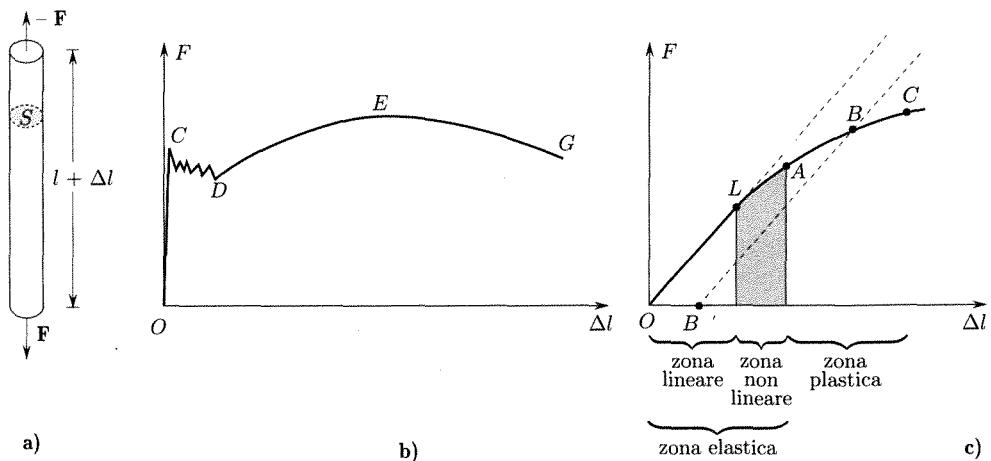


Fig. 7.1

*Comportamento elastico:
deformazione reversibile.*
*Comportamento plastico:
deformazione permanente*

L'andamento della curva fra C e D corrisponde allo snervamento del materiale in corrispondenza al quale si hanno allungamenti nonostante che la forza venga ridotta: l'andamento della curva è irregolare. Si hanno in seguito notevoli deformazioni plastiche fino alla rottura della sbarra (punto G). Va osservato che durante tutta la prova all'allungamento della sbarra si associa una riduzione delle sezioni trasversali: tale riduzione è la stessa per ogni sezione finché si resta nel campo elastico.

Nelle nostre considerazioni ci limiteremo a considerare solo deformazioni elastiche lineari, del tipo di quelle che corrispondono al tratto *OL*.

Vogliamo osservare che l'area racchiusa fra l'asse delle ascisse, la curva e due rette parallele all'asse delle ordinate rappresenta il lavoro fatto dalle forze esterne \mathbf{F} per deformare la sbarra fra i due allungamenti corrispondenti ai valori delle ascisse: il lavoro è infatti $F(\Delta l_2 - \Delta l_1)$, ed è rappresentato dall'area tratteggiata. Il lavoro richiesto per la deformazione, se questa è elastica, produce un aumento dell'energia potenziale elastica, che viene immagazzinata nel solido e viene restituita quando la deformazione scompare, quale non è invece il caso in cui si sia determinata una deformazione permanente.

Un grafico quale quello ora esaminato descrive il comportamento della particolare sbarra in oggetto nella esperienza considerata; esso naturalmente dipende dalla natura del materiale e dalle dimensioni geometriche della sbarra. Per eliminare gli elementi geometrici legati al campione e porre in evidenza le caratteristiche del materiale si osservi che:

1. quello che interessa non è l'allungamento assoluto della sbarra, ma quello relativo; per tale ragione conviene prendere come deformazione il rapporto $\Delta l/l$ (espresso talvolta in percento $\Delta l\% = (\Delta l/l)100$);
2. siccome si può di solito ritenere che l'azione della forza \mathbf{F} si ripartisca uniformemente sulla sezione⁽¹⁾ S della sbarra, conviene prendere come sollecitazione il rapporto F/S . L'esperienza descritta può quindi essere rappresentata da un grafico avente sulle ordinate F/S e sulle ascisse $\Delta l/l$; tale grafico, almeno nella parte iniziale, è simile a quello di figura 7.1, ma è esclusivamente legato al comportamento del materiale in sollecitazione del tipo qui considerato ed è indipendente dalla particolare forma e dalle dimensioni del campione.

La deformazione è una grandezza adimensionata

Le considerazioni generali relative alla deformazione e alla sollecitazione ora fatte con riferimento a una sbarra sottoposta a trazione si estendono al caso di altri tipi di sollecitazione.

■ 7.3. DEFORMAZIONI DI VOLUME E DI SCORRIMENTO

È bene notare che il concetto di deformazione è puramente geometrico. Chiamiamo infatti *deformazione* di un corpo una qualsiasi sua *variazione di volume* o *di forma* o di entrambi. Un corpo può presentare una deformazione omogenea quando la deformazione (relativa) di ogni sua parte è la stessa (per es. per piccole deformazioni nel caso descritto precedentemente), o una deformazione disomogenea (per es. flessione, torsione). Naturalmente conviene prima esaminare casi di deformazione omogenea e trattare i corpi con deformazioni disomogenee come costituiti da parti ciascuna sufficientemente piccola da poter considerare omogenea la deformazione in essa. È possibile mostrare che *una piccola deformazione omogenea può essere considerata somma di due tipi di deformazioni: di volume e di scorrimento*.

⁽¹⁾ La diminuzione della sezione sulla quale si ripartisce la forza \mathbf{F} in una prova di trazione, man mano che la deformazione procede, ha una notevole influenza sulla forma della curva di figura 7.1b; il tratto *EG* è decrescente appunto per il fatto che in corrispondenza alla regione ove in seguito si determina la rottura la sezione *S* si riduce notevolmente sicché in realtà in tale regione il valore F/S cresce in continuazione fino alla rottura.

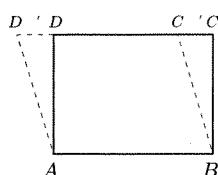


Fig. 7.2

Le forze applicate a un corpo possono essere di volume o di superficie

La deformazione di volume è quella nella quale si ha una variazione del volume del corpo mentre la forma non varia: essa viene rappresentata dalla variazione relativa di volume $\Delta V/V$.

La deformazione di scorrimento lascia inalterato il volume del corpo ma ne altera la forma. Un esempio è illustrato nella figura 7.2. Un corpo (o una parte di un corpo) avente sezione rettangolare $ABCD$ viene deformato in modo che la sezione divenga $ABC'D'$; la terza dimensione resta invariata. Come misura della deformazione si può prendere il rapporto $\overline{DD'}/\overline{AD}$.

7.4. FORZE APPLICATE E SFORZI

Cerchiamo ora di precisare quali sono i tipi di forze che intervengono nell'equilibrio di un corpo elastico deformato.

Vi sono innanzitutto da considerare le *forze applicate dall'esterno*. Esse possono essere di due tipi: forze di massa (o di volume) e forze superficiali. Le prime agiscono su ogni elemento di massa del corpo: esempi di tali forze sono quelle di gravità, quelle magnetiche, quelle d'inerzia (centrifughe) ecc. Il contributo di queste forze alla deformazione è in genere piccolo e nelle nostre considerazioni elementari, per semplicità, non considereremo la presenza di queste forze.

Il secondo tipo di forze corrisponde ad azioni esercitate dall'esterno in corrispondenza a regioni più o meno estese della superficie del corpo: tali sono le forze di pressione esercitate per es. da un fluido, le forze esercitate da altri corpi a contatto ecc. Per descrivere la sollecitazione dovuta a forze di questo tipo, che è del tipo di quella che in seguito considereremo, conviene esprimere la forza $d\mathbf{F}$ esercitata in corrispondenza all'elemento di superficie esterna dS nella forma

$$(1) \quad d\mathbf{F} = \psi dS$$

essendo ψ un vettore che rappresenta la forza per unità di superficie. Conviene decomporre la forza $d\mathbf{F}$ in una componente dF_n diretta lungo la normale a dS e in una componente tangenziale dF_t che giace sul piano di dS . In corrispondenza, anche il vettore ψ che rappresenta la sollecitazione in corrispondenza alla superficie, si decomponga in due parti ψ_n e ψ_t .

Vi sono poi da considerare le *forze interne* che si destano fra punti contigui nell'interno di un corpo elastico sottoposto a una sollecitazione esterna, in seguito alla sua deformazione. La descrizione di queste forze e della loro distribuzione può essere fatta introducendo il concetto di sforzo.

Per fare ciò in maniera semplice, consideriamo ancora (fig. 7.3) una sbarra in equilibrio sollecitata a trazione da due forze uguali e contrarie distribuite su due facce opposte. Immaginiamo di dividere il corpo in due con un piano α . Perché ciascuna parte resti in equilibrio come nella sbarra integra occorre aggiungere alla sollecitazione preesistente in ciascun troncone una nuova sollecitazione esterna in corrispondenza al taglio, la quale evidentemente rappresenta l'effetto delle azioni interne che nella sbarra integra ciascuna delle due parti esercita sull'altra. Nel caso particolare di figura 7.3 occorre aggiungere una forza avente direzione e intensità di \mathbf{F} ; il verso è naturalmente diverso per i due tronconi.

Nel caso generale di un corpo elastico sollecitato in maniera qualsiasi (fig. 7.4), si può considerare una superficie qualunque S che lo tagli; se

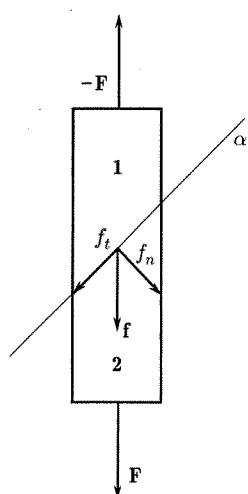


Fig. 7.3

allora in corrispondenza a un elemento dS nell'intorno di un punto P si sceglie una orientazione positiva della normale, si può esprimere la risultante delle forze interne df che le particelle del corpo che si trovano dalla parte della faccia negativa di dS esercitano sulle particelle che si trovano dalla parte positiva, nella forma

$$(2) \quad df = \phi dS$$

essendo ϕ un vettore finito che prende il nome di *sforzo* (alle volte chiamato *specifico* perché evidentemente rappresenta una forza su unità di area). Naturalmente la risultante delle forze interne esercitate attraverso dS dalla parte del corpo che si trova dalla parte positiva della normale sull'altra è uguale e opposta a quella data dalla (2), per il principio di azione e reazione.

Il risultante dF delle forze interne può decomporsi in un componente diretto secondo la normale a dS (df_n) e in un componente tangenziale (df_t). In corrispondenza lo sforzo ϕ può decomporsi in uno sforzo normale

$$(3) \quad \sigma = \frac{df_n}{dS}$$

e in uno sforzo tangenziale o di taglio

$$(4) \quad \tau = \frac{df_t}{dS}$$

definiti ovviamente punto per punto all'interno del corpo.

Nel caso di figura 7.3, i valori di σ e τ sono costanti in tutta la intersezione del piano α con il corpo; quando ciò accada si dice che la sollecitazione del corpo è omogenea.

Vogliamo osservare che se nell'interno di un corpo elastico sollecitato e in equilibrio si considera una superficie chiusa (S' in figura 7.4) la parte (1) interna alla superficie si può immaginare isolata e in equilibrio sotto una sollecitazione esterna equivalente all'insieme delle forze interne che la parte 2 del corpo intero esercita sulla 1 e rappresentata dalla distribuzione degli sforzi lungo la superficie S' .

Si osservi infine che se si fa tendere la superficie generica S (fig. 7.4) con cui si taglia il corpo verso una superficie limite del corpo stesso, il principio di azione e reazione si esprime in corrispondenza a un elemento dS di superficie libera dicendo che le azioni che le particelle del corpo esercitano verso l'esterno attraverso dS devono essere uguali e contrarie a quelle che la forza esterna esercita sul corpo attraverso dS . Pertanto secondo (1) e (2)

$$(5) \quad \phi dS = -\psi dS$$

cioè

$$\sigma = -\psi_n$$

$$(6) \quad \tau = -\psi_t.$$

Da quello che si è detto risulta evidente come la descrizione delle forze interne presenti in un solido elastico deformato, cioè di quello che si chiama lo stato di tensione interno di un corpo elastico sollecitato, possa essere

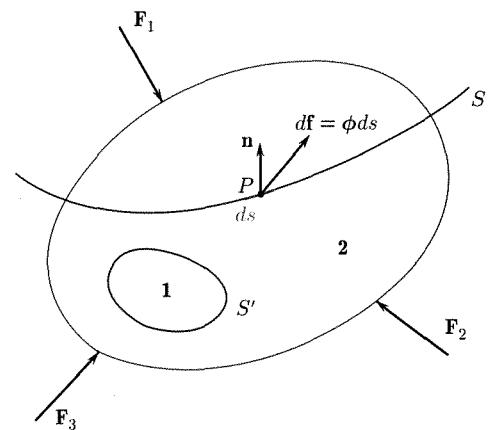


Fig. 7.4

*Componenti normale
e tangenziale
dello sforzo*

fatta mediante la distribuzione degli sforzi in corrispondenza a superfici interne al corpo.

Vediamo ora quali sollecitazioni sulla superficie di un corpo omogeneo sono necessarie per ottenere delle deformazioni semplici, di volume e di scorrimento, e quali distribuzioni di sforzi si hanno nell'interno di tali corpi.

Per ottenere una deformazione che sia semplicemente di volume occorre che il corpo venga assoggettato su ogni areola di superficie esterna a una forza normale diretta ovunque verso l'interno (compressione) o verso l'esterno (trazione) e tale che ψ_n sia ovunque lo stesso. Se per es. il corpo è di materiale isotropo e di forma cubica come in figura 7.5a, ciò richiede per simmetria l'applicazione di sei forze di eguale intensità distribuite sulle sei facce: su ciascuna di queste $\psi_n = F/S$.

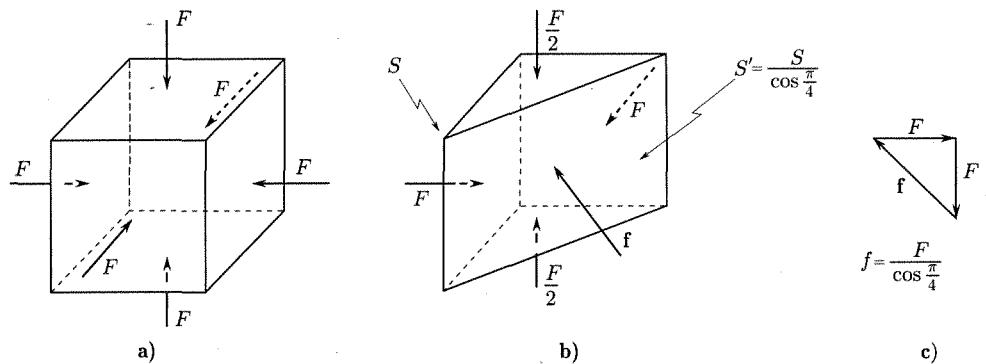


Fig. 7.5

È importante osservare che se si considera un qualsiasi piano per un punto del cubo che divida questo in due (fig. 7.5b e c) lo sforzo in ogni punto della sezione è solamente normale e pari a $\sigma = f/S' = F/S = \psi_n$. Questa è una caratteristica che vale sempre per una sollecitazione che produce una semplice deformazione di volume: lo sforzo corrispondente in ogni punto all'interno del corpo e in relazione a un qualsiasi elemento di superficie per esso è lo stesso e vale $\sigma = \psi_n$. Questa sollecitazione si chiama di pressione uniforme o di pressione idrostatica perché, come vedremo, la proprietà ora vista è caratteristica della pressione in un liquido in quiete.

Consideriamo ora il caso di deformazione di semplice scorrimento. Per semplicità supponiamo che il corpo abbia forma parallelepipedo (a sezione quadrata) (fig. 7.6): la sollecitazione esterna che produce questa deformazione è indicata in figura: essa ha risultante e momento risultante eguali a zero; il volume considerato non trasla né ruota, ma è solo deformato.

Solo quattro facce sono sollecitate, le altre due non sono soggette a forze. Come si vede, la sollecitazione, sulle quattro facce, è solo tangenziale (o di taglio)

$$(7) \quad \psi_t = \frac{F}{S}.$$

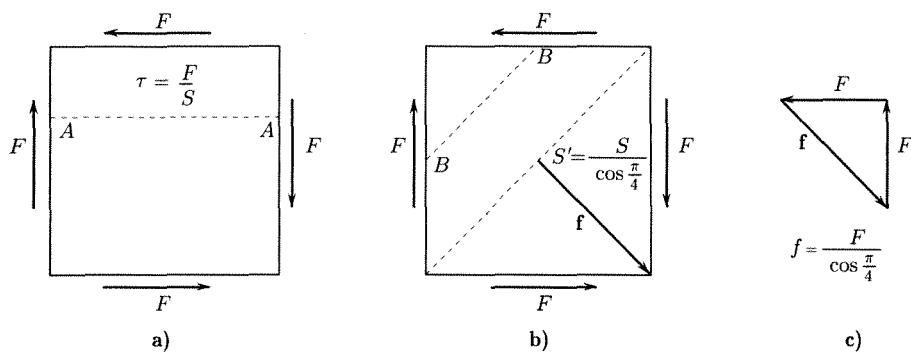


Fig. 7.6

Lo sforzo su ciascuna delle quattro facce e su qualsiasi piano a ognuna di esse parallelo è di solo taglio

$$(8) \quad \tau = \frac{F}{S}.$$

Si osservi peraltro (fig. 7.6b) che, se si immagina di sezionare il corpo con piani aventi una giacitura diversa, lo sforzo è in parte normale ed in parte tangenziale, in particolare (fig. 7.6c) su piani a 45° rispetto alle facce esterne sollecitate, lo sforzo è solamente normale

$$(9) \quad \sigma = \frac{f}{S'} = \frac{F}{S}$$

e pari quantitativamente allo sforzo di taglio sulle superfici parallele alle facce esterne.

7.5. LEGGE DI HOOKE. LEGGE DI SOVRAPPOSIZIONE

In accordo con le considerazioni ora svolte, si può dire che un corpo assoggettato a forze esterne, a risultante e momento risultante nulli, si deforma in una maniera che dipende dalla sollecitazione e diviene sede di forze interne. Lo stato di tensione interna, cioè la distribuzione delle forze interne, può essere descritto dagli sforzi. La determinazione degli sforzi nell'interno dei corpi elasticci sollecitati è semplice in alcuni casi come quelli elementari da noi visti, ma può diventare complicata. Appare chiaro, tuttavia, che, dato un corpo e un tipo di sollecitazione, tutti gli sforzi debbano risultare proporzionali alle forze esterne, purché la forma e le dimensioni del corpo non varino in maniera notevole, finché, cioè, la deformazione è molto piccola.

Si trova che entro certi limiti, detti di linearità elastica, *le deformazioni risultano proporzionali alle intensità delle forze applicate*, cioè *alla sollecitazione esterna*. Questo fatto fu riscontrato sperimentalmente da R. Hooke per vari tipi di deformazione e si può esprimere in una forma applicabile non solo al corpo nel suo insieme ma anche alle parti che lo costituiscono dicendo che *entro certi limiti di sollecitazione le deformazioni sono proporzionali agli sforzi* (legge della linearità di Hooke). Un esempio si ha nella trazione della sbarra cui si riferisce la figura 7.1.

*Legge di Hooke:
le deformazioni
sono proporzionali
agli sforzi*

In realtà la legge di Hooke sancisce il principio di sovrapposizione delle piccole deformazioni e degli sforzi: *se due o più cause determinano, ciascuna per proprio*

conto, piccole deformazioni di un corpo, la deformazione in corrispondenza a un punto prodotta dal loro contemporaneo agire è la somma delle singole deformazioni, mentre gli sforzi normali e tangenziali su un elemento di superficie per il punto sono dati dalla somma dei corrispondenti sforzi parziali.

Si consideri per es. un corpo soggetto a trazione in una direzione: la deformazione in corrispondenza a un punto P sia rappresentata dal vettore spostamento $(\Delta\mathbf{P})_1$ e la distribuzione degli sforzi sia tale che per un elemento piano passante per P si abbiano gli sforzi normali e tangenziali σ_1 e τ_1 . Analogamente, se è assoggettato a un'altra sollecitazione (per es. flessione, torsione ecc.) si abbia in P una deformazione rappresentata dallo spostamento $(\Delta\mathbf{P})_2$ e gli sforzi sull'elemento di superficie siano σ_2 e τ_2 . La legge di sovrapposizione dice che se le due sollecitazioni agiscono contemporaneamente lo spostamento e gli sforzi sono

$$(10) \quad \Delta\mathbf{P} = (\Delta\mathbf{P})_1 + (\Delta\mathbf{P})_2; \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2; \quad \tau = \tau_1 + \tau_2.$$

La legge di Hooke è il caso particolare in cui le successive deformazioni siano dello stesso tipo, cioè si consideri una sollecitazione gradualmente crescente.

7.6. COMPRESSIONE DI VOLUME

Vogliamo ora prendere in considerazione alcuni casi importanti di sollecitazione elastica e specificare i parametri che servono a rappresentare le caratteristiche dei materiali. Cominceremo perciò a considerare alcuni casi di sollecitazione e deformazione omogenea e accenneremo in seguito ad alcuni altri casi di sollecitazione non omogenea.

Consideriamo di nuovo perciò un corpo omogeneo, per es. di forma cubica, soggetto su tutta la superficie a uno sforzo normale di valore costante (pressione positiva o negativa uniforme). In conseguenza della sollecitazione si ha una semplice deformazione di volume e tutte le dimensioni lineari variano proporzionalmente. Riferendoci a una dimensione lineare qualsiasi (per es. alla lunghezza l_d della diagonale del cubo), essa subirà una variazione Δl_d nei limiti di elasticità. Secondo la legge di Hooke, la deformazione $\varepsilon_c = \Delta l_d / l_d$ è proporzionale alla sollecitazione $F/S = -p$

$$(11) \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta l_d}{l_d} = -\frac{1}{3K}p$$

il segno meno corrispondendo al fatto che la pressione viene presa positiva quando la forza è diretta verso l'interno del corpo, nel qual caso Δl_d è negativo ⁽²⁾.

La costante di proporzionalità è stata posta $1/3K$ per la seguente considerazione. Se si considera la variazione di volume del cubo di lato l si ha

$$(12) \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(l^3)}{l^3} = \frac{3\Delta l}{l} = 3\varepsilon_c$$

avendo considerato Δl alla stregua di un differenziale.

La deformazione di volume si lega alla pressione p attraverso una costante K che ha le dimensioni di uno sforzo e prende il nome di modulo

⁽²⁾ Si osservi che se si immagina una superficie chiusa nell'interno del corpo, essa si può considerare isolata e sollecitata da sforzi normali σ . Tali sforzi si considerano positivi se sono diretti verso l'esterno della superficie: si ha quindi $\sigma = F/S = -p$.

di compressione di volume:

$$(13) \quad \Lambda_c = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}.$$

*Compressibilità
di un mezzo materiale*

L'ordine di grandezza di K per molte sostanze è di 10^{10} N/m² e quindi, a pressioni di circa 1000 atm = 10^8 N/m², le variazioni di volume sono di circa l'uno per cento.

L'inverso del modulo, $\beta = 1/K$, prende il nome di coefficiente di compressibilità.

La maniera più semplice per ottenere la sollecitazione di compressione di volume è quella di porre il corpo in un liquido (per es. olio) contenuto in un recipiente e di esercitare una pressione sul liquido: se il corpo non è molto esteso la pressione che si esercita sui vari punti della superficie esterna del corpo si può ritenere di valore costante.

■ 7.7. DEFORMAZIONE LUNGO UN ASSE

Il caso tipico è quello della sbarra sottoposta a trazione o a compressione, di cui si è già parlato all'inizio del capitolo.

Si consideri una sbarra, o trave, di lunghezza l e sezione trasversale $S = a \times b$ sollecitata a trazione. Le forze \mathbf{F} applicate alle facce esterne sono positive se dirette nel verso della normale esterna; allora anche $\sigma = F/S$ è positiva. Ne segue un allungamento ε_l positivo e per la legge di Hooke si ha

$$(14) \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \sigma.$$

Nel caso di forze \mathbf{F} di compressione dirette verso l'interno della sbarra, σ è negativo e lo stesso vale per ε_l (accorciamento).

Il fattore di proporzionalità è stato posto nella forma $1/E$ ed E , che ha le dimensioni di uno sforzo, prende il nome di modulo di elasticità, o modulo di Young.

Si è già fatto notare che, contemporaneamente all'allungamento assiale, si osserva una riduzione delle dimensioni lineari (b) nella sezione trasversale. Anche per tale deformazione vale la legge di Hooke

$$(15) \quad \delta = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{\mu}{E} \sigma = -\mu \varepsilon_l.$$

*Il modulo di Young
per l'elasticità
di trazione
(o compressione)
di una sbarra*

*Il modulo di Poisson
per la contrazione
laterale
di una sbarra*

Il fattore di proporzionalità è stato posto nella forma μ/E e μ , che è un numero puro, prende il nome di coefficiente di contrazione laterale o coefficiente di Poisson. I suoi valori, determinati sperimentalmente, sono in genere compresi fra 0,2 e 0,4; la gomma presenta un valore di circa 0,5.

È importante stabilire una relazione fra i tre parametri elastici finora introdotti K , E , μ .

A tal fine, prendiamo in considerazione un cubo sottoposto contemporaneamente a tre compressioni assiali lungo direzioni mutuamente perpendicolari (fig. 7.5a): una tale sollecitazione corrisponde alla compressione di volume già esaminata. Finché le deformazioni sono piccole le tre variazioni di volume dovute alle singole compressioni assiali possono essere

sommate per avere la variazione totale di volume, e inoltre possono trascinarsi termini contenenti potenze di ε_l superiori alla prima. La variazione di volume relativa Λ_c è allora tre volte quella che compete alla variazione assiale relativa Λ_l , cioè

$$(16) \quad \Lambda_c = 3\Lambda_l.$$

Il calcolo di Λ_l è semplice: ciascun lato l , infatti, si riduce al valore $l(1+\varepsilon_l)$ ($\varepsilon_l < 0$) per la compressione che subisce dalla forza agente nella sua stessa direzione e si allunga al valore $l(1+\varepsilon_l)(1-\mu\varepsilon_l)^2$ in virtù dell'effetto dovuto alle forze nelle altre due direzioni. In conclusione, sarà

$$(17) \quad \Lambda_l = (1+\varepsilon_l)(1-\mu\varepsilon_l)^2 - 1 \simeq \varepsilon_l(1-2\mu).$$

Si ricava quindi

$$(18) \quad \Lambda_c = 3\varepsilon_l(1-2\mu).$$

Ma, essendo anche per la (13)

$$\Lambda_c = -\frac{p}{K}$$

usando la (14) si ha

$$(19) \quad -\frac{p}{K} = 3\varepsilon_l(1-2\mu) = -3\frac{p}{E}(1-2\mu)$$

e la cercata relazione

$$(20) \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Legami tra coefficienti elasticici

La (18) ci consente di ricavare il valore massimo che può assumere μ . È infatti evidente che una compressione di volume non può avere come conseguenza un aumento di volume, cioè Λ_c non può essere positivo, e quindi deve rimanere positivo il termine fra parentesi $(1-2\mu) > 0$, cioè $\mu < 1/2$. Dall'altra parte quando si assoggetta a trazione un solido non può accadere che la dimensione trasversale aumenti; dalla (15) si vede che ciò significa $\delta < 0$ e $\mu > 0$. I limiti perciò di variabilità di μ sono $0 < \mu < 1/2$, in accordo con quanto si trova sperimentalmente. Ordinariamente $0,2 < \mu < 0,4$.

Dalla (20) si deduce, infine, che K ed E sono dello stesso ordine di grandezza.

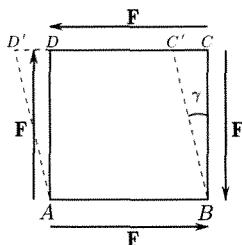


Fig. 7.7

7.8. DEFORMAZIONE DI SCORRIMENTO

Prendiamo in considerazione un prisma parallelepipedo sollecitato in modo da produrre la deformazione di semplice scorrimento, come abbiamo già visto (fig. 7.7). Anche in questo caso la legge di Hooke consente di scrivere una relazione lineare fra la deformazione $DD'/AD = \tan \gamma \sim \gamma$ e la sollecitazione esterna o lo sforzo tangenziale $\psi_t = F/S = \tau$:

$$(21) \quad \gamma = \frac{1}{G}\tau.$$

Il fattore di proporzionalità è stato posto $1/G$ e G , che ha le dimensioni di uno sforzo, viene chiamato modulo di scorrimento. Esso è legato agli altri parametri già introdotti da una relazione

$$(22) \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} .$$

Legame tra i coefficienti elastici di Young e di scorrimento

Per ricavare questa relazione si consideri il caso già esaminato della trave sollecitata a trazione e si immagini (fig. 7.8a) di isolare un prisma retto, di sezione quadrata $ABCD$, orientata come in figura, prima che la trave venga sollecitata: le facce laterali del prisma siano a 45° rispetto a una coppia di facce della trave.

In seguito alla sollecitazione il prisma subisce una dilatazione uniforme e una deformazione di scorrimento. Cerchiamo di valutare γ e τ per la (21). Si osservi che per ragioni di simmetria le due diagonali della sezione normale (quadrato che si deforma in rombo) restano perpendicolari fra loro, mentre le loro lunghezze variano in maniera diversa; esse passano dall'iniziale valore l rispettivamente a $l(1 + \varepsilon_l)$ per la diagonale nella direzione di F ed a $l(1 - \mu\varepsilon_l)$ per l'altra (fig. 7.8b). Ne consegue che il semiangolo nel vertice della sezione che diviene acuto, passa, in seguito alla deformazione, da $\pi/4$ a un valore α tale che⁽³⁾

$$(23) \quad \tan \alpha = \frac{\frac{l}{2}(1 - \mu\varepsilon_l)}{\frac{l}{2}(1 + \varepsilon_l)} \simeq (1 - \mu\varepsilon_l)(1 - \varepsilon_l) \simeq 1 - (1 + \mu)\varepsilon_l$$

avendo trascurato il termine in ε_l^2 , rispetto agli altri, essendo $\varepsilon_l \ll 1$.

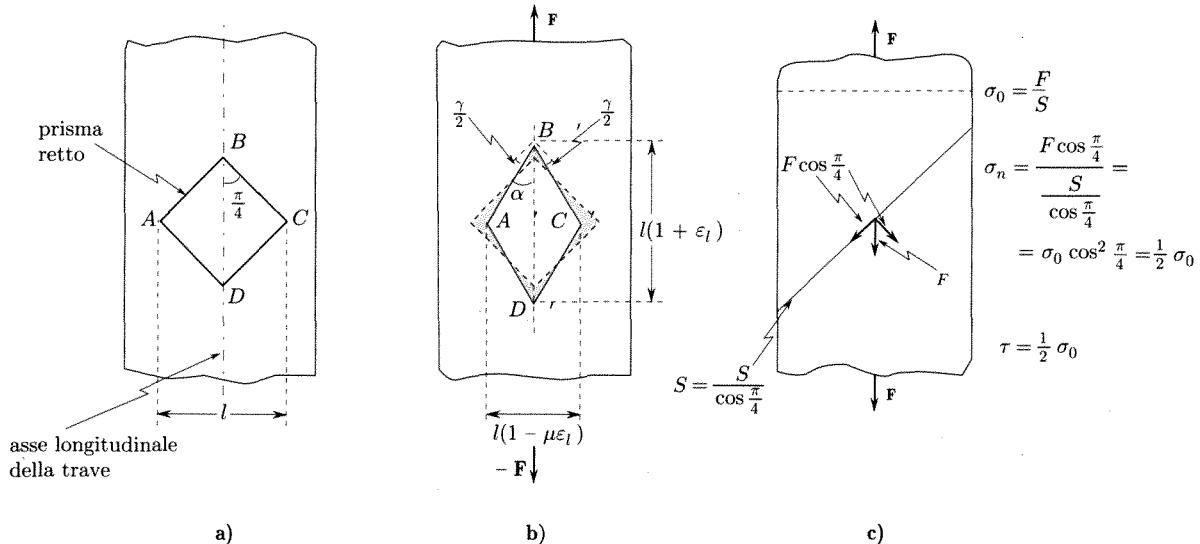


Fig. 7.8

Si ottiene allora per la deformazione di scorrimento γ (essendo γ molto piccolo):

$$\frac{\gamma}{2} = \tan \frac{\gamma}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{(1 + \mu)\varepsilon_l}{2 - (1 + \mu)\varepsilon_l} .$$

⁽³⁾ Essendo ε_l piccolo ($\varepsilon_l \ll 1$) si può usare per $1/(1 + \varepsilon_l)$ lo sviluppo in serie di Taylor fermandosi al secondo termine:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_l} = 1 - \frac{\varepsilon_l}{(1 + \varepsilon_l)^2} + \dots \simeq 1 - \varepsilon_l .$$

Trascurando nel denominatore il termine contenente ε_l rispetto all'altro si giunge a

$$(24) \quad \gamma \sim (1 + \mu)\varepsilon_l.$$

Passiamo ora a determinare τ . Si osservi che la sollecitazione su ciascuna delle facce del prisma corrisponde a uno sforzo normale σ_n e a uno sforzo tangenziale τ (fig. 7.8c). I valori di tali sforzi sono tutti pari a $\sigma_0/2 = \frac{1}{2}F/S$ essendo F la forza che sollecita la trave a trazione, S la sezione trasversale della trave e σ_0 lo sforzo, solo normale, in tale sezione. Si osservi del pari che le tensioni normali sulle quattro facce del prisma sono tutte dirette verso l'esterno, corrispondono cioè a una dilatazione uniforme; gli sforzi tangenziali sono invece quelli che originano la deformazione di scorrimento che si sta ora considerando. Si può quindi scrivere ricordando la (14)

$$(25) \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{G} = \frac{1}{2} \frac{E\varepsilon_l}{G}.$$

Dalle (24) e (25) si ha

$$(26) \quad (1 + \mu)\varepsilon_l = \frac{1}{2} \frac{E}{G} \varepsilon_l$$

e la (22), già scritta.

I quattro parametri elastici K , E , G , μ sono quindi legati dalle due relazioni (20) e (22): solamente due costanti elastiche sono quindi sufficienti a descrivere il comportamento di materiali omogenei e isotropi. Le costanti elastiche di più facile determinazione sono E e G : per far ciò di solito si ricorre a prove di trazione e di torsione di una sbarra. La tabella 7.1 riporta i valori di K , E , G per alcuni materiali.

Tabella 7.1. Moduli di elasticità (*) (N/m²).

	K	E	G
Alluminio	$7 \cdot 10^{10}$	$6,8 \cdot 10^{10}$	$2,5 \cdot 10^{10}$
Rame	$12 \cdot 10^{10}$	$10,5 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{10}$
Bronzo	$6,1 \cdot 10^{10}$	$9,2 \cdot 10^{10}$	$3,7 \cdot 10^{10}$
Ferro (fusione)	$9,4 \cdot 10^{10}$	$11,9 \cdot 10^{10}$	$4,9 \cdot 10^{10}$
Acciaio	$16,0 \cdot 10^{10}$	$21,0 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{10}$
Piombo	$0,8 \cdot 10^{10}$	$1,7 \cdot 10^{10}$	$0,7 \cdot 10^{10}$
Vetro	$4,0 \cdot 10^{10}$	$5,0 \cdot 10^{10}$	$2,0 \cdot 10^{10}$

(*) Spesso i moduli si trovano espressi nel sistema pratico degli ingegneri in kg/mm². Si ha $1 \text{ kg/mm}^2 = 9,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \simeq 10^7 \text{ N/m}^2$. Per ottenere quindi i valori dei moduli in kg/mm² basta dividere i dati della tabella per 10^7 .

7.9. DEFORMAZIONE DI TORSIONE

Un primo esempio di deformazione non omogenea è quello della torsione di una sbarra cilindrica a sezione circolare; è facile vedere tuttavia che si tratta di una deformazione di semplice scorrimento. In figura 7.9a è rappresentato un cilindro circolare omogeneo al quale sono applicate nelle sezioni estreme due coppie antagoniste. Il cilindro è sollecitato a torsione; le singole sezioni normali all'asse restano piane (non sarebbe così se la sezione non fosse circolare) e una qualsiasi generatrice si trasforma in un'elica. Per rappresentare questa torsione si prende normalmente in considerazione l'angolo θ di cui ruotano, una rispetto all'altra, le sezioni terminali della sbarra (fig. 7.9b).

Se si immagina di dividere il solido mediante piani normali all'asse, piani contenenti l'asse e cilindri coassiali, si ottengono tanti elementi di volume che, se la

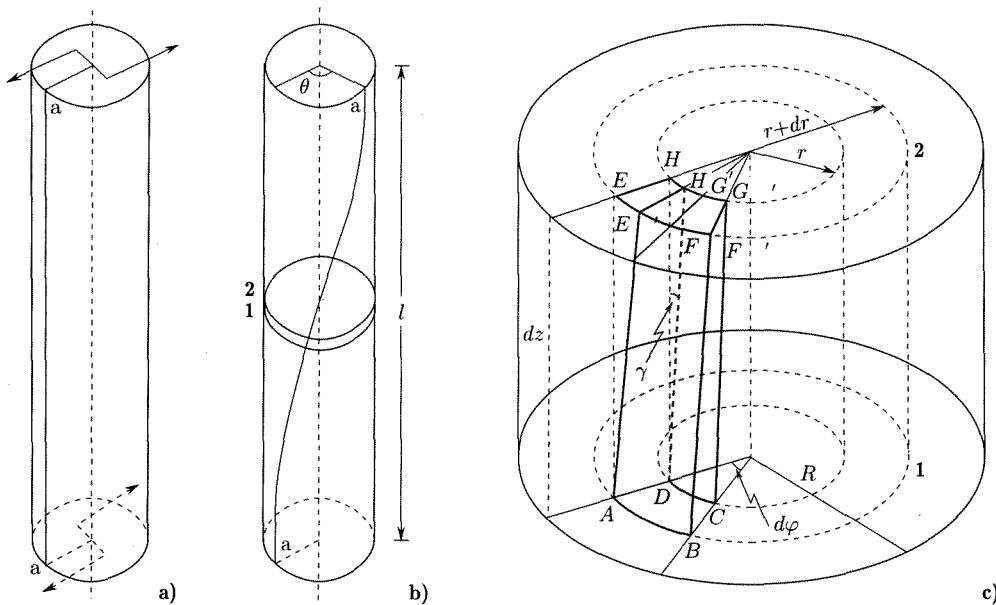


Fig. 7.9

suddivisione è sufficientemente spinta, possono essere considerati parallelepipedi (fig. 7.9c). Ciascuno di essi subisce nella torsione della sbarra una deformazione che è di semplice scorrimento: così per es. l'elemento $ABCDEFGH$ si deforma in $ABCD E'F'G'H'$ per scorrimento di una faccia ($EFGH$, che resta piana) rispetto all'altra ($ABCD$). Si osservi che le deformazioni di questi prismi (approssimativamente parallelepipedi) crescono con la loro distanza dall'asse del cilindro.

Per la descrizione del processo si considerino le due sezioni di figura 7.9c a distanza infinitesima dz . Se $\alpha = \theta/l$ è l'angolo di cui ruotano due sezioni a distanza unitaria, l'angolo di cui ruota la sezione 2 rispetto alla 1 è αdz .

Se r è la distanza di H dall'asse, $\overline{HH'} = r\alpha dz$ e quindi per la deformazione dell'elemento $ABCD EFGH$ si ha

$$(27) \quad \tan \gamma \simeq \gamma = \frac{\overline{HH'}}{dz} = r\alpha$$

e

$$(28) \quad \tau = \gamma G = r\alpha G.$$

La forza di taglio sulla faccetta $EFGH$ (e $ABCD$) di area $(rd\varphi dr)$ ha l'intensità

$$(29) \quad dF = \tau r d\varphi dr = r^2 \alpha G d\varphi dr.$$

Il suo momento rispetto all'asse ha intensità

$$(30) \quad dM = rdF = \alpha Gr^3 d\varphi dr.$$

Il momento di tutte le forze di taglio sulla sezione 2 ha allora l'intensità

$$(31) \quad M = \int dM = \alpha G \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr = \frac{\pi \alpha G}{2} R^4.$$

Dalla (31) si ottiene la relazione

$$\theta = \frac{2l}{\pi R^4} \frac{M}{G}$$

che lega l'angolo di torsione alle dimensioni del cilindro, alla sollecitazione e al modulo G .

È evidente quindi come prove di torsione di sbarre a sezione circolare possano servire per la determinazione del modulo di scorrimento.

7.10. ORIGINE DELLE PROPRIETÀ ELASTICHE NEI SOLIDI

A completamento delle precedenti considerazioni sulla elasticità dei solidi, vogliamo accennare alle ragioni del comportamento osservato, sulla base della loro struttura corpuscolare.

Inizieremo con il considerare il caso dei corpi cristallini. Questi sono solidi che a un primo esame mostrano d'essere limitati da superfici piane formanti fra loro angoli diedri ben definiti. Questa loro proprietà fu ben presto considerata come indice di una struttura interna regolare che, a rigore, è l'elemento caratteristico dello stato solido considerato come stato di aggregazione nettamente distinto da altri (gassoso e liquido). Ciò porterebbe di conseguenza che, solo quando la materia si presenta sotto forma di cristalli o aggregati di cristalli, andrebbe considerata allo stato solido: abbiamo, tuttavia, già osservato che ai fini della teoria della elasticità una definizione di solido meno restrittiva è sufficiente richiedendo semplicemente che il corpo abbia volume e forma propria perché possa essere considerato solido.

In un solido cristallino gli atomi sono disposti secondo un reticolo spaziale regolare

Indicazioni di vario genere, fra cui in primo luogo quelle ottenute mediante i raggi X, hanno provato che i cristalli hanno una struttura nella quale gli atomi costituenti appaiono disposti in maniera regolare realizzando con le loro posizioni reticolari spaziali formati da celle elementari uguali che si susseguono nello spazio; va aggiunto che gli atomi in realtà si trovano nelle condizioni normali a oscillare intorno alle loro posizioni reticolari (d'equilibrio). Le dimensioni, la forma delle celle e le simmetrie nella distribuzione degli atomi in esse dipendono dalle proprietà degli atomi costituenti e dei legami che essi possono scambiare. Un'analisi delle celle possibili, sulla base delle caratteristiche degli atomi e dei legami fra loro conduce a individuare le varie classi cristallografiche che si riscontrano in natura.

Un cristallo quindi è formato da atomi disposti secondo un reticolo spaziale regolare. In realtà i cristalli che si trovano in natura o che si possono produrre hanno sempre alcune imperfezioni nel senso che il reticolo reale si scosta in qualche parte da quello ideale ottenuto riportando successivamente nello spazio la cella elementare.

Le imperfezioni possono essere di vario genere e la loro presenza è fondamentale per spiegare particolari processi meccanici, termici, elettrici nei cristalli: le proprietà di elasticità possono tuttavia essere spiegate trascurando le imperfezioni, cioè sulla base delle proprietà del reticolo perfetto.

Nella figura 7.10 è rappresentato il caso semplice di un solido a reticolo cubico, nel quale gli atomi sono ai vertici di celle a forma di cubo. La distanza reticolare a fra atomi contigui dipende dalle interazioni (attrattive e repulsive) fra i vari atomi.

La condizione di equilibrio del sistema è quella per la quale è minima l'energia potenziale (più precisamente l'energia libera, di cui si parlerà in termodinamica) del sistema: a essa corrisponde nel cristallo non sollecitato dall'esterno una distanza reticolare a_0 .

Tale distanza è minore di quella (d_0) che si avrebbe fra due soli atomi sulla base delle forze attrattive e repulsive che essi possono scambiare e che corrisponde al minimo della curva dell'energia potenziale (fig. 7.11a) stabilita per due tali atomi come in una molecola biatomica (cap. 3, par. 3.8). Ciò è dovuto al fatto che su un atomo in un cristallo agiscono non solo gli atomi immediatamente contigui ma anche

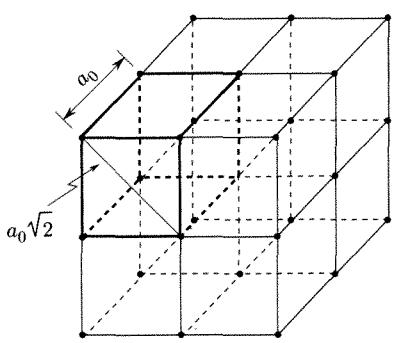


Fig. 7.10

quelli più lontani e le forze esercitate da questi ultimi sono essenzialmente attrattive, dato che le forze repulsive fra due atomi si riducono con le distanze molto più rapidamente di quelle attrattive. Ciò equivale a dire che la posizione di equilibrio di un atomo rispetto ai vicini è dovuta a forze repulsive scambiate con gli atomi più vicini e ad azioni attrattive cui partecipano anche gli atomi più lontani. Se si considera l'energia potenziale di un atomo in un reticolo cubico al variare della distanza reticolare, si trova (figura 7.11b; la scala delle ordinate è diversa da quella di figura 7.11a) che tale energia è minima per una costante reticolare $a_0 < d_0$. Richiamiamo l'attenzione sul fatto che la curva di figura 7.11b è dovuta alla somma degli effetti di azioni repulsive dovute agli atomi contigui e di azioni attrattive dovute anche ad atomi più lontani: gli addendi dovuti a tali ultime azioni decrescono con la distanza degli atomi.

Se il cristallo è sottoposto a una compressione (o estensione) uniforme gli atomi sono spinti (o allontanati) gli uni verso gli altri senza che la cella elementare venga distorta. Nelle figure 7.12a e b è indicato, in maniera esagerata come si altera una faccia della cella cubica: la deformazione consiste nella variazione di a . Per piccole variazioni intorno ad a_0 la curva dell'energia potenziale è parabolica sicché si origina una forza ($-dU/dx$) che tende a ristabilire l'equilibrio e la cui intensità è funzione lineare di $(a - a_0)$, cioè della deformazione. Si comprende quindi come in questo caso la sollecitazione necessaria per deformare il cristallo debba essere funzione lineare della deformazione (legge di Hooke) purché questa rimanga sufficientemente piccola (entro i limiti di elasticità).

Per deformazioni diverse da quella di compressione non si può ragionare direttamente sulla curva di figura 7.11 giacché le distanze fra i vari atomi non variano nella stessa maniera. Occorrerebbe prendere in considerazione solo i contributi all'energia potenziale per gli atomi che variano la loro distanza nella particolare deformazione. Si può tuttavia dire che l'origine della reazione elastica è sempre riconducibile alle forze che si destrano quando gli atomi sono allontanati gli uni dagli altri con riferimento alle distanze di equilibrio, e che tendono a riportare il sistema nuovamente in equilibrio. Tali reazioni, finché le deformazioni sono piccole, sono proporzionali a queste ultime: ciò giustifica la validità generale della legge di Hooke.

Lo schema visto può anche spiegare perché per una sostanza (cristallina) E e K risultino maggiori di G . Si osservi infatti che per una compressione di volume (fig. 7.12b) e per una deformazione assiale (fig. 7.12c) vengono a variare le distanze fra atomi contigui (primi vicini) mentre nel caso delle deformazioni di scorrimento (fig. 7.12d) le distanze fra primi vicini restano (almeno in prima approssimazione) invariate mentre variano

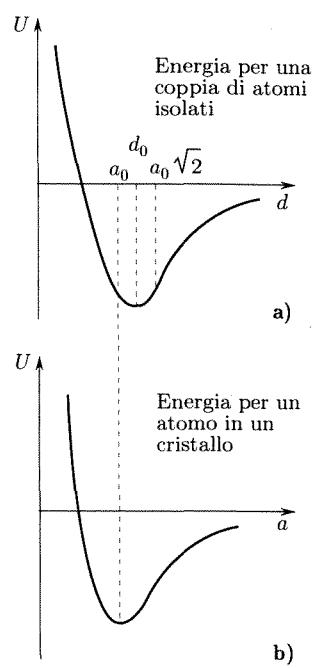


Fig. 7.11

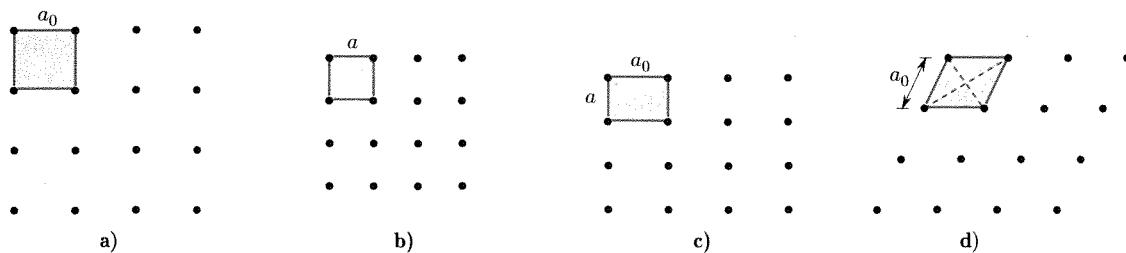


Fig. 7.12

Le forze di richiamo tra atomi sono minori quando il cristallo sia sottoposto a scorrimento piuttosto che a dilatazione

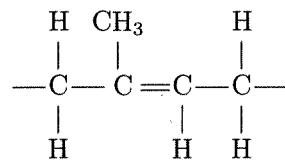
le distanze di atomi lungo le diagonali delle facce quadrate (secondi vicini, distanza $a_0\sqrt{2}$). Sono quindi chiamate in gioco nel secondo caso forze di interazione più piccole di quelle da considerare nel primo caso; ciò significa che forze della stessa intensità applicate dall'esterno al cristallo producono deformazioni più grandi nel secondo caso e ciò si rispecchia in valori numerici di G inferiori a quelli di E e K (vedi tabella 7.1).

Le considerazioni precedenti svolte, per semplicità, per cristalli cubici si estendono agli altri tipi di cristalli.

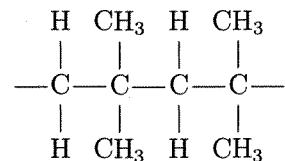
L'elasticità presentata da materiali come le gomme vulcanizzate ha una origine microscopica molto diversa da quella dei cristalli.

Diremo innanzitutto che nel caso delle gomme il comportamento sotto sollecitazione è molto più complicato che nel caso dei cristalli: in genere la risposta del materiale dipende dalla rapidità con la quale la sollecitazione viene applicata. Noi non considereremo questi importanti aspetti del comportamento, né descriveremo i processi (transienti) con cui un sistema di questo tipo raggiunge, una volta sollecitato, la deformazione di equilibrio; ci limiteremo a svolgere alcune considerazioni sul comportamento elastico di equilibrio, cioè sulle relazioni fra sollecitazione e deformazione elastica di equilibrio.

Sia la gomma naturale che quelle artificiali sono costituite da molecole filiformi molto lunghe (alti polimeri) formate dall'unione di molte unità (monomeri) uguali. L'unione è realizzata da legami fra atomi di carbonio di una catena centrale. La gomma naturale (poliisoprene) ha la formula



Una gomma artificiale ha la formula del poliisobutilene



I legami fra atomi di carbonio e le azioni fra i vari gruppi laterali fanno sì che gli angoli fra atomi di carbonio contigui della catena centrale possono prendere solo certi valori: pur con questa limitazione le lunghe molecole possono assumere svariatissime configurazioni distese o racchiuse in vario grado. La figura 7.13 illustra per una molecola di poliisobutilene presa a sé (per es. disciolta in opportuno solvente) una configurazione di tale tipo: la molecola nel suo complesso e alcune sue parti sono indicate in figura.

Tutte queste configurazioni posseggono la stessa energia potenziale e in condizioni di equilibrio una molecola cambia continuamente di forma passando da una configurazione a un'altra a causa dell'agitazione termica. I mutamenti della configurazione di una molecola possono implicare il moto di tutti gli atomi che la costituiscono o semplicemente di quelli di una sua porzione intermedia, compresa fra certi due atomi della catena di carbonio.

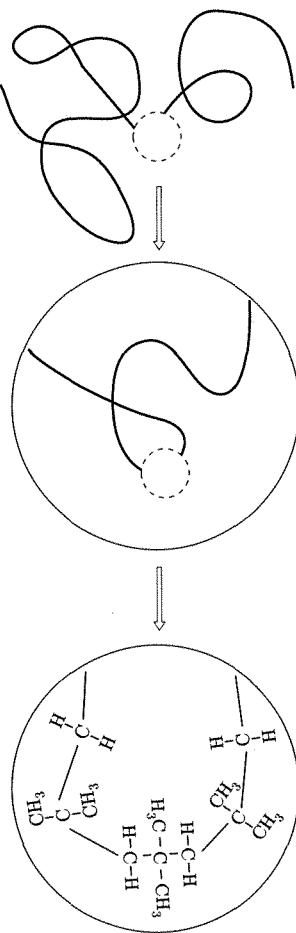


Fig. 7.13

Si consideri ora un recipiente (per es. cubico) che sia ripieno di molecole di questo tipo, tenuto ad alta temperatura e senza sollecitazione (gomma vergine, o non vulcanizzata). Le varie catene si trovano mescolate, intrecciate e variamente disposte; esse cambiano di configurazione continuamente pur mantenendosi invariata l'energia potenziale di ciascuna e di tutte nel loro complesso. La situazione può essere raffigurata pensando a un recipiente pieno di anguille che si intreccino fra loro e siano in un continuo rimescolamento.

La meccanica statistica tratta il problema di trovare la distribuzione delle molecole fra le numerose configurazioni possibili: evidentemente saranno più favorite e quindi più probabili configurazioni intermedie fra quella in cui la molecola è distesa al massimo, e quella in cui essa è avvolta come in un gomitolo compatto.

Si può giungere a prevedere quella distribuzione delle molecole fra le possibili configurazioni, che si verifica in condizioni di equilibrio.

Si immagini ora di indurre nel recipiente una reazione di vulcanizzazione il cui effetto è quello di legare in alcuni punti, a caso, catene di molecole diverse per mezzo di legami (covalenti). La immobilizzazione di questi punti crea nel cubo un reticolo tridimensionale che dà consistenza al materiale, sicché esso può conservare la forma del recipiente anche se questo viene rimosso.

Il fatto che il materiale abbia ora una forma propria lo può fare considerare dal punto di vista che a noi interessa un solido. I tratti di molecola fra punti fissati sul reticolo dalla vulcanizzazione sono formati da un numero ancora assai grande di monomeri e per essi si può ripetere quanto precedentemente detto per l'intera molecola nei riguardi delle configurazioni possibili, del passaggio da una configurazione a un'altra e della distribuzione di equilibrio. Se al cubo posto fuori del recipiente viene applicata una sollecitazione, esso si deforma raggiungendo un nuovo equilibrio; se si toglie la sollecitazione il corpo ritorna (non istantaneamente) alla forma primitiva di equilibrio.

Se, per specificare meglio, supponiamo per es. che il cubo venga assoggettato a trazione in una direzione, esso si allunga in questa direzione (e si contrae nelle direzioni perpendicolari) allontanando i punti contigui del reticolo nella stessa direzione. I tratti di molecola fra questi nodi sono abbastanza flessibili e disposti lungo spezzate piuttosto lunghe per passare a nuove configurazioni senza variare la loro energia potenziale; peraltro il numero di configurazioni disponibili in corrispondenza alla nuova forma macroscopica è molto minore di quanto non fosse prima. Se la sollecitazione viene tolta, i singoli tratti fra nodi ritornano pian piano alle precedenti distribuzioni e il corpo riprende la forma originaria.

La trattazione del comportamento di questi materiali richiede lo studio delle funzioni di distribuzione negli stati di assenza e di presenza di sollecitazione. Ritroneremo in termodinamica su questo problema (cap. 18, par. 18.4). La conclusione tuttavia è che la tendenza delle catene a disporsi nelle condizioni che corrispondono alla distribuzione più probabile (assenza di sollecitazione) si rispecchia in una forza nella direzione della sollecitazione nel cubo, in verso opposto e di intensità proporzionale alla deformazione stessa. Si può pertanto parlare di validità della legge di Hooke con una costante di proporzionalità che a sua volta risulta proporzionale alla temperatura assoluta.

7.11. SOLLECITAZIONI E DEFORMAZIONI NEI FLUIDI. LA VISCOSITÀ DEI LIQUIDI

Anche nel caso dei fluidi esistono legami fra sollecitazioni e deformazioni e, come faremo vedere, nel caso di piccole deformazioni tali legami sono quelli di semplice proporzionalità come nei solidi elasticci. Varie limitazioni e precisazioni devono tuttavia essere fatte. Considereremo separatamente il caso dei liquidi e quello dei gas.

La differenza macroscopicamente più evidente fra i due tipi di fluidi è quella che, pur non avendo entrambi una forma propria e prendendo quella del recipiente che li contiene, nel caso dei liquidi le variazioni di volume sono molto piccole (dello stesso ordine di quelle dei solidi) sotto sollecitazione di compressioni anche notevoli, mentre nel caso dei gas grandi variazioni di volume possono essere facilmente ottenute.

Da un punto di vista microscopico possono esserci grandi differenze. Nei gas le molecole hanno un moto individuale disordinato; esse inoltre sono in media a distanze tali che le mutue interazioni sono trascurabili, tranne che durante le collisioni con altre molecole del gas o con le pareti del recipiente. Vedremo in seguito che la pressione esercitata dal gas sulle pareti del recipiente è dovuta alle variazioni della quantità di moto delle particelle negli urti con le pareti stesse.

La struttura dei liquidi può essere varia, e questa è l'origine del fatto che lo studio dello stato liquido è notevolmente complesso. In alcune condizioni (per es. temperature molto elevate), alcuni liquidi possono essere considerati come gas molto densi; le molecole si muovono disordinatamente ma le distanze fra di essi sono molto inferiori a quelle che si hanno nei gas, sicché esistono interazioni notevoli (forze di coesione) che riescono a tenere il sistema assieme. Molto più comunemente invece è necessario considerare i liquidi come dotati di una struttura quasi cristallina: nelle vicinanze di una singola particella si ha un ordine grossolanamente simile a quello che esiste nei solidi cristallini (ordine a corto raggio); tale ordine tuttavia non si estende a grandi distanze (*mancanza di* ordine a lungo raggio). Questa struttura può essere grossolanamente immaginata come ottenuta da quella del solido cristallino per rimozione di un considerevole numero di particelle in punti reticolari scelti a caso. La introduzione di questi difetti, o buchi, nella struttura avverrebbe al passaggio dallo stato cristallino a quello liquido (fusione); la posizione dei buchi peraltro non va considerata fissa ma mutevole in continuazione giacché le molecole saltano nelle posizioni vuote eliminando alcuni buchi e creandone altri. Molto importante in questa descrizione è la considerazione di un tempo medio (τ) di permanenza di ciascuna molecola in una posizione, prima cioè di spostarsi a occupare una posizione reticolare temporaneamente vuota situata a distanza (δ) dell'ordine di grandezza della distanza media delle particelle contigue.

La figura 7.14 mostra la curva dell'energia potenziale per una molecola in funzione della posizione occupata lungo una linea (x) che passi per varie posizioni reticolari di un sistema siffatto; l'energia è dovuta alle interazioni con le altre particelle del liquido. Una posizione di equilibrio della molecola corrisponde a un minimo dell'energia potenziale (per es. la posizione O); in realtà la particella, come nel caso dei cristalli, oscilla intorno alla posizione di equilibrio. Il passaggio di una molecola da una posizione come O a un'altra posizione di equilibrio contigua (come A , B) qualora questa sia

Nei liquidi c'è coordinamento tra molecole vicine e manca tra molecole lontane

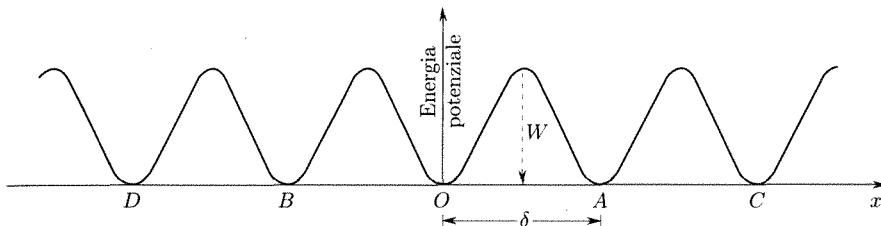


Fig. 7.14

vuota, è possibile solo quando la molecola nel suo moto di oscillazione abbia accumulato abbastanza energia per superare la barriera W : questa energia è prelevata dall'energia di agitazione termica di altre particelle ed è restituita nella stessa forma quando la molecola raggiunge la nuova posizione. Il processo di accumulo di energia richiede in media un tempo τ di rilassamento, il quale quindi è anche il tempo medio di permanenza di una molecola in una posizione reticolare:

$$(32) \quad \tau = \tau_0 e^{W/kT}$$

essendo τ_0 un tempo caratteristico del particolare liquido e k una costante (di Boltzmann) che interviene nella trattazione statistica di processi termici.

Per un liquido in condizioni normali il potenziale di barriera (W) che ostacola lo spostamento di una particella ha lo stesso valore nelle varie direzioni e nei versi opposti, sicché, avvenendo i salti a caso, non si osserva alcun effetto risultante di flusso.

Vediamo come si comporta un tale sistema sotto l'azione di una sollecitazione normale o tangenziale. In entrambi i casi c'è da attendere un comportamento diverso secondo che la sollecitazione agisca in intervalli di tempo brevi rispetto a τ (per es. in processi d'urto o quando siano coinvolte onde sonore di frequenza elevata) oppure in intervalli di tempo lunghi rispetto a τ (per es. sollecitazioni statiche).

Quando la sollecitazione avviene in intervalli di tempo brevi rispetto a τ , quando cioè durante la sollecitazione l'assetto delle molecole nella struttura pseudocristallina del liquido non può variare, il sistema si comporta come un solido e avrà un modulo di compressione di volume K_∞ (valido per sollecitazioni di durata molto breve o di frequenza molto grande) e un modulo di rigidità G_∞ che non sono molto più piccoli di quelli dei solidi. La tabella 7.2 riporta alcuni dati a 25 °C per solidi e liquidi nel caso che i processi avvengano senza scambi di calore con l'esterno (processi adiabatici).

I liquidi quindi sono capaci di resistere a sollecitazioni di taglio purché la durata della sollecitazione sia breve.

Se invece il liquido è assoggettato a compressione per un intervallo di tempo lungo rispetto a τ , la deformazione è formata dalla somma di quella che si aveva nel caso precedente (che si sarebbe avuta anche in un solido cristallino) e di quella dovuta al fatto che quando esiste una sollecitazione i salti delle molecole avvengono di preferenza nella direzione e nel verso della sollecitazione: nel caso di compressione la massa liquida passa a una struttura più compatta, cioè con densità minore di buchi e volume minore. È facile infatti vedere che l'applicazione di una sollecitazione al sistema rende asimmetrica la curva dell'energia potenziale sicché divengono più

Il comportamento di un liquido sotto l'effetto di sollecitazioni esterne dipende dai tempi di variazione delle sollecitazioni

Tabella 7.2

	K_∞ (N/m ²)	G_∞ (N/m ²)
Solidi		
Cloruro di sodio	$48,5 \cdot 10^9$	$12,6 \cdot 10^9$
Nichel	$371 \cdot 10^9$	$73,5 \cdot 10^9$
Quarzo fuso	$37,3 \cdot 10^9$	$31,2 \cdot 10^9$
Liquidi		
Glicerina	$7,4 \cdot 10^9$	$2,3 \cdot 10^9$
Esanotriolo 1,2,6	$5,7 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$
Butanediolo	$3,3 \cdot 10^9$	$0,74 \cdot 10^9$
Poliisobutilene	$2,7 \cdot 10^9$	$0,58 \cdot 10^9$

probabili i salti nella direzione e nel verso della sollecitazione: la nuova curva dell'energia potenziale è la somma di quella dovuta alle interazioni con le altre particelle (fig. 7.14) e della retta $-Fx$ dovuta a una forza esterna costante (diretta come x). Tale curva risultante (fig. 7.15) ha carattere ondoso ma cala gradatamente da sinistra verso destra (verso di \mathbf{F}). Per una molecola in una posizione di minimo della energia potenziale, la barriera (W_1) da superare per spostarsi nel verso di \mathbf{F} (x positivo) è minore di quella (W_2) da superare per spostarsi in verso opposto. Per una sollecitazione di compressione si verifica, in conseguenza della applicazione della sollecitazione stessa, un flusso di particelle nella direzione degli sforzi che si arresta quando un certo numero di buchi è stato eliminato.

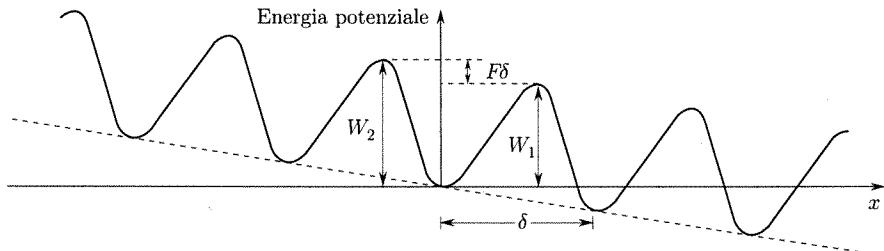


Fig. 7.15

La variazione di volume ΔV per lo stesso sforzo di compressione è in questo caso maggiore di quella che si ha nel caso di sollecitazioni brevi. Ne segue che il modulo K_0 (per sollecitazioni lente) è minore di K_∞ ; entrambi questi moduli tuttavia non sono molto più piccoli dei valori del modulo di compressione nei solidi. La tabella 7.3 riporta i valori di K_0 per alcuni liquidi a temperatura ambiente. Essi vanno confrontati con i valori di K dati nella tabella 7.1 per i solidi.

Qualora invece la sollecitazione sia di taglio ed essa duri un tempo lungo rispetto a τ (oppure vari con periodo lungo rispetto a τ) il liquido non si comporta come un sistema elastico giacché il fatto che i salti delle molecole avvengono di preferenza nella direzione della sollecitazione fa sì che il liquido prenda a scorrere: la (21), valida per il caso dei solidi, non si può più applicare al caso dei liquidi e non v'è un modulo $G = \tau/\gamma$. In tal caso il comportamento del liquido è caratterizzato da una relazione che lega lo sforzo di taglio e la derivata rispetto al tempo della *deformazione*

Tabella 7.3

Liquido	K_0 (N/m ²)
Alcool	$1,2 \cdot 10^9$
Etere	$0,9 \cdot 10^9$
Acqua	$2,1 \cdot 10^9$
Mercurio	$27 \cdot 10^9$

di scorrimento. In molti casi importanti (ma non sempre) questa relazione è di semplice linearità e la costante di proporzionalità prende il nome di *coefficiente di viscosità*

$$(33) \quad \eta = \frac{\tau}{\left(\frac{dy}{dt} \right)} .$$

La viscosità nei liquidi si manifesta quando c'è moto relativo tra le parti

Si prenda per es. in considerazione la semplice disposizione sperimentale illustrata in figura 7.16 nella quale uno strato di liquido di spessore b si trovi fra una parete piana inferiore ferma e una piastra parallela alla parete inferiore, avente una superficie (S) abbastanza estesa (dimensioni lineari grandi rispetto a b) la quale sia in moto per l'azione della forza esterna \mathbf{F} . Si può mostrare che, in condizioni di regime, gli strati di fluido paralleli alla parete inferiore e alla piastra scorrono gli uni sugli altri muovendosi ciascuno di moto uniforme con velocità le cui intensità variano linearmente con la profondità x dal valore massimo u a contatto della piastra, a zero a contatto della parete inferiore.

In questo caso lo sforzo tangenziale è $\tau = F/S$. Calcoliamo, per applicare la (33), la derivata rispetto al tempo della deformazione di scorrimento. Per far ciò si consideri innanzitutto un sottile strato a facce parallele del fluido, compreso fra x e $x + \delta$; le velocità di scorrimento in corrispondenza alle due facce (fig. 7.16) sono $u(x)$ e $u(x) + (du/dx)\delta$.

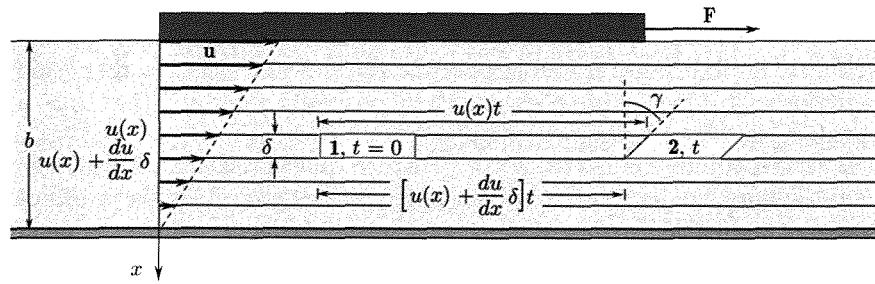


Fig. 7.16

Poniamo l'attenzione, nell'interno dello strato, a un elemento di volume che all'istante $t = 0$ abbia la forma di un parallelepipedo (posizione 1 in figura 7.16). Tale elemento all'istante successivo t si trova in una nuova posizione (2 in figura 7.16) e si è deformato come indicato in figura per il diverso scorrimento degli strati: la deformazione è di puro scorrimento. Per determinare la deformazione γ , determiniamo prima lo scorrimento relativo ξ subito dalle facce dell'elemento:

$$\xi = u(x)t - \left[u(x) + \frac{du}{dx}\delta \right] t = -\frac{du}{dx}\delta t .$$

Si noti che $\frac{du}{dx}$ è negativa. Si ha per γ piccolo

$$\gamma \sim \tan \gamma = \frac{\xi}{\delta} = \left| \frac{du}{dx} \right| t$$

e quindi

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left| \frac{du}{dx} \right|.$$

La derivata rispetto al tempo della deformazione di scorrimento è pari al gradiente della velocità degli strati. Nel caso presente tale gradiente è costante e pari a u/b .

Si ha quindi

$$(34) \quad \eta = \frac{\tau}{\left| \frac{du}{dx} \right|} = \frac{F b}{S u}.$$

Le dimensioni del coefficiente di viscosità sono $[\eta] = [L^{-1} MT^{-1}]$. Esso si misura nel SI in kg/ms. Molto usata è l'unità del sistema CGS, il *poise*, 1 poise = 1 dine s/cm² = 1 g/cms.

La sollecitazione di taglio, quindi, applicata a un liquido per tempi lunghi rispetto al tempo τ [eq. (32)] conduce al flusso del liquido. Del moto dei liquidi ci occuperemo nel capitolo successivo.

Vogliamo ora osservare che la viscosità rappresenta, dal punto di vista che qui abbiamo illustrato, nei liquidi a struttura quasi cristallina, una resistenza alla sollecitazione di taglio; essa è una conseguenza del fatto che le molecole per effetto della sollecitazione possono muoversi con maggiore facilità nella direzione di quest'ultima. Osservando la figura 7.15 si noti che a ogni salto corrisponde una diminuzione di quella parte dell'energia potenziale della molecola che è dovuta alla forza esterna: ciò significa che il campo di tale forza compie lavoro; l'energia corrispondente viene distribuita, dopo il salto, fra molecole contigue cioè si trasforma in energia di agitazione termica. La presenza della viscosità conduce pertanto a produzione di calore e dissipazione d'energia meccanica.

È chiaro quindi che nei liquidi a struttura quasi cristallina il processo primario è quello della fluidità: tale aspetto può essere rappresentato dall'inverso del coefficiente di viscosità e può essere calcolato per mezzo della mobilità delle particelle, cioè della velocità media che le particelle assumono rispetto alle particelle vicine nel muoversi, con il processo illustrato, sotto l'azione di una forza esterna unitaria.

Va infine osservato che spesso si incontrano liquidi in condizioni diverse da quelle qui schematizzate. Il caso di liquidi aventi struttura intermedia fra quella dei gas e quella quasi cristallina o il caso di liquidi a struttura pseudo-cristallina sollecitati per tempi dello stesso ordine di grandezza di τ (visco-elasticità) richiedono trattazioni più complesse.

7.12. SOLLECITAZIONI E DEFORMAZIONI NEI GAS

Nel caso di masse gassose la legge che lega le variazioni di volume alle variazioni di pressione cui esse vengono assoggettate è lineare solo qualora le variazioni di volume siano piccole: anche in questo caso si può dunque parlare qui di modulo di compressione di volume

$$(35) \quad K = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}.$$

Nel caso di grandi variazioni di volume, che si possono facilmente produrre nei gas, la legge non è così semplice.

Il calcolo di K può essere fatto facilmente nel caso in cui la massa gassosa sia tenuta a temperatura costante, quando cioè vale con buona approssimazione la legge di Boyle e Mariotte: *a temperatura costante, il prodotto della pressione e del volume occupato da una massa gassosa resta costante.*

Si può scrivere

$$(36) \quad (p + \Delta p)(V + \Delta V) = pV.$$

Trascurando il prodotto $\Delta p \Delta V$ rispetto agli altri termini si ha

$$p\Delta V + V\Delta p = 0$$

e quindi

$$(37) \quad K_T = p.$$

La compressibilità di un gas è eguale alla sua pressione

A temperatura costante il modulo di compressione di volume di un gas è pari alla pressione p alla quale esso si trova.

Nel caso in cui il gas venga tenuto in modo che tutti gli scambi di calore con l'ambiente esterno siano impediti (condizioni adiabatiche) si trova:

$$(38) \quad K_a = \gamma p$$

essendo γ il rapporto dei calori specifici del gas a pressione costante e a volume costante (cap. 15, par. 15.13).

I gas non sono capaci di resistere a sforzi di taglio e una sollecitazione di tale tipo produce un flusso. Si introduce anche per i gas il coefficiente di viscosità come nel caso dei liquidi. L'origine della viscosità in questo caso è di natura nettamente diversa da quella dei liquidi, ed è legata al trasporto di quantità di moto da uno strato a strati contigui in seguito al moto di agitazione termica delle molecole.

Su questo punto si tornerà in seguito (cap. 15, par. 15.13).

7.13. ATTRITO DI ROTOLAMENTO

Al termine di queste considerazioni sull'elasticità dei corpi vogliamo accennare brevemente a un processo di importanza pratica nel quale intervengono deformazioni elastiche e permanenti.

In corrispondenza al rotolamento di un corpo solido reale su un altro si presentano delle resistenze passive che sono in genere contraddistinte con il nome di attrito di rotolamento.

Va subito osservato che l'origine e la natura di questa resistenza passiva è diversa da quella delle forze di attrito di scorrimento precedentemente studiate. Se i corpi fossero perfettamente rigidi la resistenza al rotolamento sarebbe nulla. Una ruota su di un piano avrebbe come contatto solo una linea che coinciderebbe con l'asse istantaneo di rotazione sicché tutti i suoi punti sarebbero fermi e inoltre sui punti di tale linea non vi sarebbero azioni tangenziali del tipo di quelle viste nel caso dell'attrito di scorrimento, legate a superfici a contatto sollecitate a scorrere le une sulle altre.

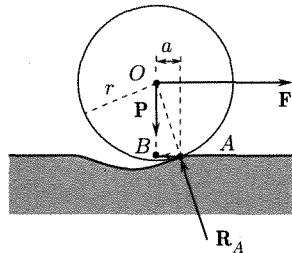


Fig. 7.17

La resistenza deriva dal fatto che entrambi i corpi a contatto non sono rigidi e al contatto si producono deformazioni elastiche o permanenti. Non è qui possibile fare una trattazione completa dei complicati processi che sono coinvolti e ci limiteremo a considerazioni generali valide purché le deformazioni non siano molto grandi. Per riferirci a un caso semplice, nella figura 7.17 è indicato quello di una ruota di materiale molto più resistente di quello del piano (orizzontale). Si produce una deformazione come quella in figura.

Sia \mathbf{P} il peso della ruota (più l'eventuale carico su di essa) e r il suo raggio. Perché la ruota possa rotolare, la forza orizzontale \mathbf{F} deve farla superare il punto A della depressione. Calcolando i momenti delle forze applicate rispetto ad A si vede che per ottenere il rotolamento il momento della forza \mathbf{F} deve essere almeno uguale (in realtà un po' superiore) a quello della forza peso, cioè

$$(39) \quad \sum M_A = Pa - F(\overline{OB}) = 0.$$

Siccome la depressione è di solito piccola si può sostituire OB con r . Si ha allora

$$Fr = Pa.$$

*La resistenza
al rotolamento deriva
dalla deformazione
prodotta sui corpi
a contatto dalle forze
normali*

La componente orizzontale della reazione R_A è uguale e opposta al valore limite di \mathbf{F} e rappresenta la resistenza o attrito di rotolamento

$$(40) \quad R_{\text{rot}} = a \frac{P}{r}.$$

Il parametro a è indicato con il nome di coefficiente di attrito di rotolamento: si noti che esso ha le dimensioni di una lunghezza e nel SI va misurato in metri.

La resistenza, o attrito di rotolamento nel caso importante di una ruota su un piano, come si vede dalla (40), decresce al crescere del raggio della ruota stessa.

Naturalmente considerazioni del tutto analoghe si svolgono nel caso che il materiale della ruota sia più deformabile di quello del piano (ruota di gomma) o nel caso che entrambi i corpi siano deformabili.

Si trovano nei manuali tabelle di coefficienti di attrito di rotolamento ma in realtà i risultati delle varie esperienze non sono molto in accordo fra loro poiché essi sono fortemente influenzati dalle particolarità delle singole situazioni nei riguardi delle deformazioni dei due corpi a contatto.

Esempi

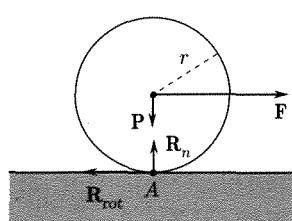


Fig. 7.18

La presenza dell'attrito di rotolamento, come si è visto per l'attrito statico e dinamico, è utile in molti casi. Consideriamo per es. una ruota che poggi su un piano orizzontale (fig. 7.18) e si applichi una forza \mathbf{F} al punto centrale dell'asse, parallela al piano; qualora venisse impedito il rotolamento della ruota (per es. bloccandola), il corpo potrebbe muoversi strisciando purché la forza applicata riuscisse a vincere l'attrito di scorrimento (statico o dinamico) e un notevole lavoro sarebbe perciò necessario. Se la ruota è libera essa rotola per la presenza della resistenza (attrito di rotolamento) che fornisce in A una forza parallela (e di verso contrario) alla \mathbf{F} . Le forze esterne che sollecitano il corpo sono: il peso, la reazione normale del piano (uguale e opposta al peso), la forza \mathbf{F} e la resistenza di rotolamento; questa sollecitazione si riduce a una coppia il cui momento ha intensità rR_{rot} e provoca

la rotazione della ruota, e a una forza $\mathbf{F} + \mathbf{R}_{\text{rot}}$ che provoca la traslazione (nella direzione e nel verso di \mathbf{F} , cioè in verso opposto a \mathbf{R}_{rot}). Il lavoro necessario per vincere l'attrito di rotolamento è molto inferiore a quello che sarebbe speso nel caso che la ruota strisciasse per vincere l'attrito di scorrimento.

Consideriamo ora il caso in cui una ruota si trovi su un piano e a essa venga applicata una coppia che tenda a farla ruotare intorno al suo asse; ciò può per es. ottenersi mediante una cinghia in moto disposta intorno all'albero assiale. In assenza di attrito, la ruota pur girando su se stessa non avanzerebbe rispetto al piano. È appunto l'attrito di rotolamento (fig. 7.19) che ostacolando il moto di rotazione introduce una forza parallela al piano: se la reazione di attrito è sufficiente il moto diviene un moto di rotazione intorno a un asse parallelo a quello della ruota passante per A , cioè giacente sul piano orizzontale di sostegno della ruota; la ruota allora rotola sul piano. La sollecitazione formata dalla coppia applicata M , il peso P , la reazione normale R_N e la resistenza di attrito di rotolamento, equivale a una forza \mathbf{R}_{rot} applicata al centro di massa che produce la traslazione (si badi nella direzione di \mathbf{R}_{rot}) e a una coppia. Quest'ultima è la risultante di quella applicata (momento M) e di quella (F) introdotta per spostare il punto di applicazione di \mathbf{R}_{rot} (momento $r \times \mathbf{R}_{\text{rot}}$ essendo $r = AO$).

Le equazioni cardinali del moto della ruota si scrivono (se x è la direzione di \mathbf{R}_{rot})

$$(41) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_c = R_{\text{rot}} \\ I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - rR_{\text{rot}} \end{cases}$$

essendo x_c l'ascissa del centro di massa, I il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse per il centro di massa e φ l'angolo di rotazione misurato da una posizione iniziale della ruota.

La prima equazione descrive il moto del centro di massa e la traslazione della ruota: il moto è accelerato nella direzione di \mathbf{R}_{rot} . La seconda equazione descrive il moto di rotazione della ruota attorno all'asse per il centro di massa. In queste equazioni sono state trascurate altre forze che possano essere eventualmente presenti, come la resistenza dell'aria.

Per valutare bene l'interesse pratico a sostituire al moto di scorrimento quello di rotolamento di un corpo su un altro, consideriamo un esempio numerico.

Una ruota d'acciaio, il cui peso (compreso il carico che porta) sia di 10.000 N e il cui diametro sia di 0,8 m, rotoli su una rotaia di acciaio disposta orizzontalmente. Essendo il coefficiente di attrito di rotolamento pari a $3 \cdot 10^{-4}$ m, si può calcolare facilmente la forza orizzontale F che è necessario applicare all'asse in direzione del moto per mantenere il rotolamento. Con riferimento alla figura 7.17

$$F = \frac{Pa}{r} = \frac{10.000 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{0,4} = 7,5 \text{ N.}$$

Se la ruota venisse bloccata, per farla spostare strisciando occorrerebbe applicare una forza orizzontale F'

$$F' = \mu P = 0,15 \cdot 10.000 = 1.500 \text{ N}$$

avendo posto $\mu = 0,15$ il coefficiente di attrito statico.

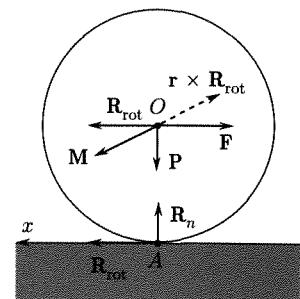


Fig. 7.19

MECCANICA DEI FLUIDI

- ✓ **Fluidi:** permettono lo scorrimento continuo e reciproco tra parti: liquidi e gas.

Liquidi perfetti: viscosità nulla e incompressibili.

Gas perfetti: seguono l'equazione di stato $pV = nRT$.

Nei fluidi perfetti non ci possono essere sforzi di taglio, ma solamente forze di compressione (in quiete, questa condizione è soddisfatta).

La pressione $p = dF/dS$ in un punto di un fluido non dipende dalla giacitura della superficie considerata.

Tipi di forze

Forze di volume: in ogni punto, proporzionali al volumetto (masserella) su cui agiscono (gravitazionali, peso, inerziali ecc.);

Forze di superficie: in ogni punto, proporzionali all'area su cui agiscono ($dF = pdS$).

► Condizioni di equilibrio

a. In assenza di forze di volume: p è la stessa, ovunque nel fluido.

b. In presenza di forze di volume, con densità dF/dV :

$$\text{grad } p = dF/dV \quad (\text{equazione della statica dei fluidi}).$$

- ✓ **Teorema di Pascal:** una variazione Δp prodotta in un punto si risente inalterata in ogni altro punto di un fluido in quiete.

- ✓ **Pressione idrostatica:** per forze di volume dovute alla gravità, è $dF/dV = \rho g$ e si ha

$$p = p_0 + \rho gz \quad (\text{legge di Stevino}).$$

Le superfici equipotenziali sono anche isobariche.

- ✓ **Pressione atmosferica,** dovuta alla forza peso dell'atmosfera sulla superficie terrestre, è pari alla pressione idrostatica di 76 mm di Hg (esperienza e barometro di Torricelli).

- ✓ **Teorema di Archimede:** la risultante delle forze di pressione sulla superficie di un corpo immerso in un fluido pesante è verticale, diretta verso l'alto e pari al peso del fluido spostato.

Dinamica dei fluidi

Linea di flusso: linea avente tangenti in ogni punto le velocità delle particelle.

Linea di corrente: traiettoria di una particella.

Fluido stazionario: campo delle velocità costante nel tempo (le linee di flusso coincidono con le linee di corrente).

Tubo di flusso: l'insieme delle linee di flusso passanti per una linea chiusa.

- ✓ **Teorema di Bernoulli** (per fluidi incompressibili, non vischiosi): nel moto stazionario, su ogni sezione di un tubo di flusso è:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost}$$

(la somma delle altezze di *arresto*, *piezometrica* e *geometrica* è costante).

Applicazioni: tubo di Venturi, Tubo di Pitot, ala ecc.

Tipi di moto: laminare e turbolento.

■ 8.1. INTRODUZIONE

Nel capitolo sulla meccanica dei corpi deformabili abbiamo accennato alla notevole varietà di caratteristiche che possono presentare quei sistemi che vanno sotto il nome di fluidi e come per la descrizione di molti aspetti del loro comportamento sia necessario tenere conto delle particolarità strutturali di ciascuno di essi. Vi sono, peraltro, numerose considerazioni, di validità generale, che si possono svolgere senza dover tenere conto delle accennate particolarità. Si tratteranno ora appunto questi aspetti del comportamento dei fluidi e si considereranno alcune proprietà che sono essenzialmente legate alla capacità di scorrimento che questi sistemi posseggono.

In questo studio le grandezze di maggiore interesse che descrivono le proprietà del fluido sono: la densità ρ e il coefficiente di viscosità η . Si è già visto come il coefficiente di viscosità venga introdotto per caratterizzare il comportamento dei fluidi sottoposti a sollecitazioni di scorrimento: la presenza della viscosità in un fluido introduce forze tangenziali fra strati in moto relativo e produce dissipazioni di energia. Essa è quindi analoga, sotto alcuni aspetti, all'attrito fra solidi a contatto in moto relativo. In alcuni casi dinamici la presenza della viscosità è determinante per l'andamento dei processi e non si può non tenerne conto; in altri non può essere trascurata. Nei casi statici, poi, essa non gioca alcun ruolo.

Per quanto riguarda la densità si ricorda che i liquidi sono molto poco compressibili, sicché di solito non si commette un grave errore nel ritenerli incompressibili, cioè a densità costante, indipendente dalla sollecitazione. Nel caso dei gas invece la compressibilità è elevata e, di solito, a variazioni di pressione non solo corrispondono notevoli variazioni del volume di una massa gassosa (grandi variazioni della densità) ma sono anche associati considerevoli effetti termici. In tal caso i problemi vengono trattati con considerazioni di tipo diverso da quelle che qui si intendono fare e che invece saranno svolte in termodinamica. Vi sono tuttavia circostanze nelle quali anche le masse gassose non subiscono sensibili variazioni di densità: nel caso, per es., del volo in aria di un velivolo a velocità inferiore a quella del suono, il moto dell'aria rispetto alle ali del velivolo avviene in condizioni che sono bene approssimate dall'ipotesi di densità costante, cioè di incompressibilità del fluido. Questi casi possono essere inclusi nella trattazione che sarà qui svolta.

I fluidi comprendono sia i liquidi sia i gas

In alcune considerazioni è quindi utile trattare il problema ammettendo che il fluido sia caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. incompressibilità;
2. assenza di viscosità. Di conseguenza i cambiamenti di forma avvengono senza spese di lavoro.

I fluidi che hanno queste proprietà si chiamano ideali. Da quanto si è detto si deduce che sono frequenti i problemi in cui il fluido possa essere considerato ideale nel caso che esso sia un liquido e che invece sono piuttosto pochi quelli in cui un gas possa essere trattato come un fluido ideale. In realtà, le due proprietà su indicate sogliono classificare piuttosto i liquidi ideali che non i gas ideali, per i quali saranno date le corrette caratterizzazioni in termodinamica.

■ 8.2. PRESSIONE IN UN PUNTO DI UN FLUIDO

Quando un fluido è contenuto in un recipiente esso esercita una forza sulle pareti e, per il principio di azione e reazione, il recipiente esercita una forza sul fluido. Queste azioni non sono applicate a un punto ma sono distribuite sulla superficie limite. In maniera analoga, se si considera nell'interno del fluido una qualsiasi superficie S che divida il fluido stesso in due parti, ciascuna parte esercita sull'altra una azione che è ripartita lungo la S .

Per l'esame di queste situazioni conviene introdurre il concetto di pressione. A tale scopo si consideri lungo la superficie S (non importa se questa è la superficie limite del fluido o una superficie nel suo interno) un elemento ΔS nell'intorno di un punto P e indichiamo con \mathbf{n} (fig. 8.1) la normale a ΔS orientata dalla parte 1 del fluido verso quella (fluido o recipiente) 2. L'azione che il fluido 1 esercita su ciò che v'è dalla parte 2 è rappresentata da una forza $\Delta \mathbf{F}$ che nel caso più generale può formare un angolo con \mathbf{n} diverso da zero. Il vettore $\Delta \mathbf{F}$ può allora decomporsi in una componente tangenziale ($\Delta F_s = \Delta F \sin \alpha$) e in una componente normale ($\Delta F_n = \Delta F \cos \alpha = \Delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$). La prima corrisponde a uno sforzo di taglio ed è nulla nell'interno di fluidi ideali o comunque per fluidi in condizioni di equilibrio (altrimenti si avrebbe scorrimento del fluido). La componente normale di $\Delta \mathbf{F}$ corrisponde a uno sforzo normale. Si definisce come pressione media per l'elemento ΔS lo scalare

$$p_m = \frac{\Delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{\Delta S}$$

e come pressione in un punto P di un fluido relativamente alla direzione \mathbf{n} , il limite del rapporto

$$(1) \quad p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{\Delta S}.$$

La pressione quindi dà l'intensità della forza normale per unità di superficie che il fluido della parte 1 dell'elemento di superficie dS esercita su ciò che si trova dalla parte 2 (fluido o parete) e, per il principio di azione e reazione, anche l'intensità della forza normale per unità di superficie che fluido o parete dalla parte 2 esercita sul fluido dalla parte 1 di dS .

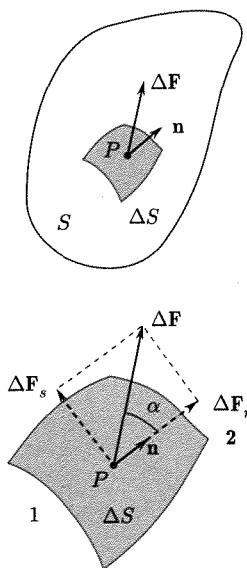


Fig. 8.1

In un fluido in quiete non ci sono sforzi di taglio: non si dà luogo a effetti di viscosità

Si osservi che nel caso di fluidi ideali, o nel caso di fluidi in equilibrio ($\Delta\mathbf{F}$ diretto come \mathbf{n}), è

$$(2) \quad p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{F}|}{\Delta S}.$$

Definizione di pressione

La pressione è una grandezza scalare: essa si misura nel SI in $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (*pascal*) e nel sistema CGS in $\text{dine/cm}^2 = \text{baria}$. È spesso usato un multiplo della baria: 1 bar = 10^6 barie = 10^5 Pa . Altre unità frequentemente usate per la misura delle pressioni sono l'atmosfera o il mm di mercurio esse saranno esaminate in seguito.

È importante vedere come in un fluido, in condizioni di equilibrio, il valore della pressione p in un punto P sia lo stesso qualunque sia l'elemento di superficie dS che si considera per P , cioè qualunque sia l'orientazione del vettore \mathbf{n} , normale a dS . Si consideri a tale scopo un elemento di volume ΔV nell'interno del fluido, limitato, come è indicato in figura 8.2, da un tubo cilindrico e da due superfici piane ΔS e $\Delta S'$. L'elemento di volume si trova in equilibrio sotto l'azione complessiva delle forze. Queste possono essere di due tipi: il primo tipo (*forze di superficie*) è costituito dalle azioni che il fluido fuori del volume ΔV scambia con il fluido all'interno di ΔV . Tali azioni vengono rappresentate per mezzo delle pressioni e sono in ogni punto dirette secondo la normale alla superficie verso l'interno di ΔV . Se indichiamo con p la pressione su ΔS , l'intensità della forza $\Delta\mathbf{F}_1$ che agisce su ΔS è $\Delta F_1 = p\Delta S$; analogamente l'intensità della forza su $\Delta S'$ è $\Delta F_2 = p'\Delta S'$, e quelle su elementi dS'' , dS''' ecc. del tubo hanno moduli $dF_3 = p''dS''$, $dF_4 = p'''dS'''$ ecc.

Le forze del secondo tipo (esterne o *di volume*) sono quelle che si esercitano dall'esterno sul fluido contenuto entro ΔV : un esempio tipico è la forza di gravità. Esse sono in genere proporzionali alla massa Δm dell'elemento di volume. Per tale ragione porremo in generale

$$(3) \quad \Delta\mathbf{F}_v = \mathbf{g}\Delta m,$$

ove \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità nel caso che le forze di volume si riducano alla sola gravità, altrimenti è un vettore definito dalla stessa (3). Tale relazione si può anche scrivere, se ρ è la densità

$$(4) \quad \Delta\mathbf{F}_v = \mathbf{g}\rho\Delta V.$$

Le forze che sollecitano l'elemento ΔV sono indicate in figura. Siccome l'elemento è in equilibrio il risultante di tutte le forze (di superficie e di volume) agenti sul fluido contenuto in ΔV sarà nullo. In particolare, sarà nulla la sua componente sulla direzione l dell'asse del cilindro:

$$(5) \quad p\Delta S \cos \alpha - p'\Delta S' + g_l \rho \Delta S' \Delta l = 0$$

essendo g_l la proiezione di \mathbf{g} su l . Le forze di pressione sulla superficie laterale del tubo, essendo normali a l , non danno componenti sull'asse.

Se ora si immagina di ridurre la lunghezza e la sezione del cilindro, facendo tendere a zero Δl e ΔS , il terzo termine diviene infinitesimo d'ordine superiore rispetto ai primi due e può essere trascurato: le due superfici

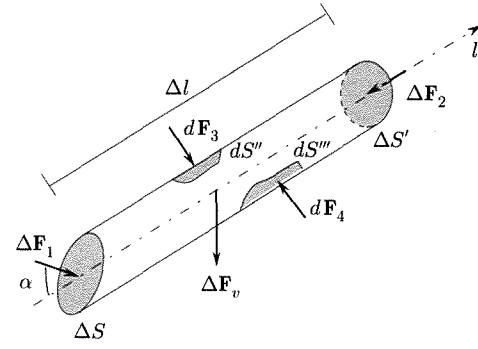


Fig. 8.2

dS e dS' finiscono per passare per lo stesso punto P , e i due termini pdS e $p'dS'$ rappresentano i moduli delle due forze normali a dS e dS' che si esercitano su tali aree per P . Si ha allora

$$pdS \cos \alpha - p'dS' = 0$$

e poiché

$$dS \cos \alpha = dS'$$

(6)

$$p = p'$$

In un fluido non viscoso la pressione in un punto non dipende dall'orientazione della superficie su cui la si considera agente

cioè la pressione su un elemento di *superficie passante per P è indipendente dall'orientazione della superficie stessa: si può quindi parlare di pressione in un punto di un fluido in equilibrio*. La forza che agisce su un elemento di superficie dS passante per P è normale a dS e ha modulo pdS qualunque sia dS .

Si osservi che il ragionamento svolto vale anche se il fluido è in moto, purché ciò non faccia comparire forze di viscosità. In caso di moto, infatti, la (5) si trasforma per la presenza nel secondo membro di un termine (proiezione di $\Delta m\mathbf{a}$) proporzionale alla massa e quindi a ΔV . Tale termine cioè diviene ancora, nel passaggio al limite, infinitesimo d'ordine superiore rispetto a dS e può esser trascurato. La considerazione della viscosità fa invece comparire termini infinitesimi come dS . Si può quindi concludere che *per un fluido ideale*, anche in moto, *la pressione in un punto è indipendente dall'orientazione della superficie su cui viene ad esercitarsi*.

■ 8.3. EQUAZIONI DELLA STATICÀ DEI FLUIDI

Per stabilire le equazioni della statica dei fluidi si consideri un elemento di volume dV del fluido in equilibrio, a forma di cilindro ad asse parallelo all'asse x e basi normali all'asse (fig. 8.3); si indichino con X , Y , Z le componenti secondo gli assi di riferimento di \mathbf{g} , cioè della risultante delle forze di volume per unità di massa

$$(7) \quad \mathbf{g} = \frac{d\mathbf{F}_v}{dm}.$$

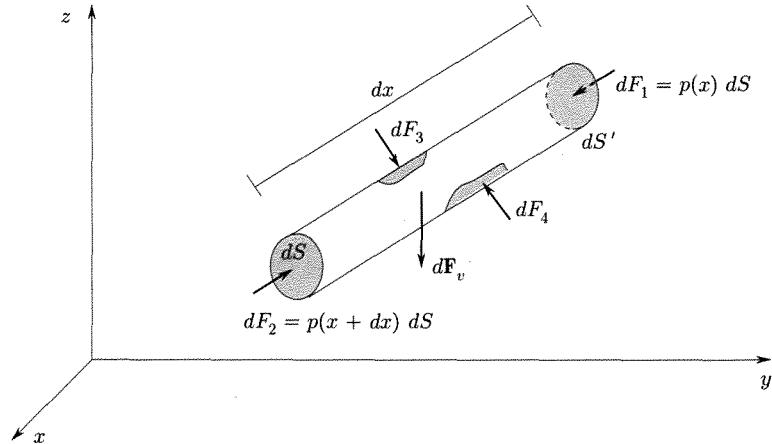


Fig. 8.3

Esse saranno misurate in N/kg. In condizioni di equilibrio, per il componente secondo x del risultante delle forze (di volume e di superficie) che sollecitano l'elemento di volume vale la relazione:

$$(8) \quad p(x)dS - p(x+dx)dS + X\rho dV = 0.$$

Essendo inoltre $dV = dS dx$ e

$$p(x+dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

si ha:

$$(9) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X.$$

In maniera analoga si possono dedurre altre due relazioni che legano le variazioni di pressione nella direzione y e z alle componenti Y e Z della forza di volume per unità di massa.

Si ottengono così le equazioni della statica dei fluidi:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \end{array} \right.$$

Il gradiente della pressione in un fluido in quiete eguaglia la densità di forza di volume

riducibili all'unica equazione vettoriale

$$\text{grad } p = \rho \mathbf{g}.$$

Di particolare interesse è il caso in cui le forze di volume siano conservative. È questo per es. il caso molto comune in cui esse si riducono alla sola forza di gravità. Se infatti si indica con U la funzione energia potenziale⁽¹⁾ le (10) divengono

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \text{grad } p = -\rho \text{ grad } U.$$

Ne seguono tra i differenziali totali le relazioni

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \text{grad } p \cdot d\mathbf{r} = -\rho \text{ grad } U \cdot d\mathbf{r}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \text{grad } U \cdot d\mathbf{r}$$

⁽¹⁾ Si noti che $U(x, y, z)$, dalla quale si possono ricavare X , Y , Z , è qui la *energia potenziale relativa all'unità di massa* (J/kg).

e la

$$(12) \quad dp = -\rho dU.$$

Se il fluido è omogeneo, cioè $\rho = \text{cost}$

$$(13) \quad p = -\rho U + \text{cost}.$$

In un fluido omogeneo soggetto a forze di volume conservative e in equilibrio, pertanto, le superfici isobare ($p = \text{cost}$) sono le superfici equipotenziali ($U = \text{cost}$).

■ 8.4. STATICA DEI FLUIDI PESANTI

Particolarmente importante è il caso in cui le forze di volume si riducono alla sola forza di gravità. In tal caso, se l'asse z è verticale e diretto verso l'alto, la forza per unità di massa ha la sola componente lungo z pari a $-g$.

La corrispondente energia potenziale per unità di massa è

$$(14) \quad U = gz + \text{cost}.$$

La (12) si scrive

$$dp = -\rho g dz$$

cioè

$$(15) \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

In molti casi pratici la densità del fluido e l'accelerazione \mathbf{g} possono essere considerate costanti: nei liquidi omogenei infatti ρ può considerarsi costante dato che essi sono molto poco compressibili e le differenze di livello sono in genere tali che la g non varia: nel caso di masse gassose in equilibrio che occupano uno spazio limitato ρ può considerarsi costante (e avente un valore molto piccolo) e lo stesso vale per g .

Si può quindi concludere che nei *fluidi omogenei*, quando le forze di volume si riducono alla sola gravità,

$$(16) \quad p = -\rho g z + \text{cost}$$

cioè *le superfici isobariche sono piani orizzontali*.

Ciò significa anche che la superficie libera di un liquido pesante in equilibrio è orizzontale. Se, infatti, la superficie fosse inclinata rispetto all'orizzontale, come in figura 8.4, considerando un elemento parallelepipedo con sezione rettangolare $ABCD$, come indicato, al di sotto della superficie limite, esso subirebbe una forza netta parallelamente ai lati BC , AD , poiché diversa sarebbe, per la (16), la pressione, quindi la forza, esercitata sulle aree a sezione AB e CD . Il volumetto non potrebbe, quindi, restare in equilibrio.

La (15) mostra che in generale in un fluido pesante la pressione decresce con la quota. Se il fluido è omogeneo, dalla (16) si ricava che la differenza di pressione calcolata rispetto a un piano orizzontale di riferimento ($z = z_0$, $p = p_0$) è per un punto qualsiasi del fluido

$$(17) \quad p - p_0 = \rho g(z_0 - z).$$

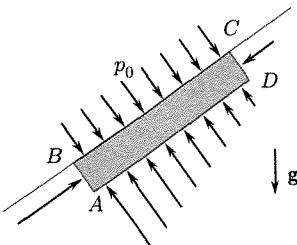


Fig. 8.4

Nel caso che il fluido sia un liquido con una superficie libera orizzontale è logico prendere questa come piano di riferimento orizzontale. La pressione in un punto P qualsiasi è (fig. 8.5)

$$(18) \quad p = p_0 + \rho gh$$

avendo posto $h = z_0 - z$. In un fluido pesante in equilibrio la differenza di pressione fra due punti separati da una distanza verticale h è pari al peso di una colonna di fluido di sezione unitaria e altezza pari a h (legge di Stevino). Questa legge è valida per fluidi omogenei: essa è usata comunemente per i liquidi. È valida anche per le masse gassose quando ρ possa essere considerata costante: siccome peraltro ρ è di norma sufficientemente piccola per i gas, da rendere $\rho g \Delta z$ all'interno del gas molto piccolo rispetto alla pressione p_0 cui è sottoposto il gas da parte delle pareti del contenitore, quando si considera una massa gassosa limitata, la pressione può essere considerata costante in tutta la massa ($p = p_0$).

La (18) consente di vedere come la forza esercitata da un liquido sul fondo del recipiente che lo contiene può essere notevolmente diversa dal peso del liquido contenuto nel recipiente stesso (paradosso idrostatico). Si considerino infatti tre recipienti della forma di figura 8.6 aventi la parete di fondo della stessa area S . In tutti i casi la forza esercitata sul fondo ha sempre intensità

$$F = Sh \rho g = \rho g V$$

pari al peso di un cilindro di liquido di volume $V = Sh$, quale quello del primo caso rappresentato, mentre il peso del liquido effettivamente contenuto nel recipiente può essere notevolmente diverso. La ragione di ciò si comprende se si considera la porzione del liquido compresa in ciascun caso fra due piani orizzontali e si ricorda che la pressione in corrispondenza alle pareti è sempre, in condizioni di equilibrio, normale alla parete stessa. Le forze che ne derivano sulle areole in cui la zona di parete fra i due piani può considerarsi decomposta, hanno componenti orizzontali che si equilibrano mentre le componenti verticali danno una somma che può aumentare o diminuire la forza che agisce sul fondo.

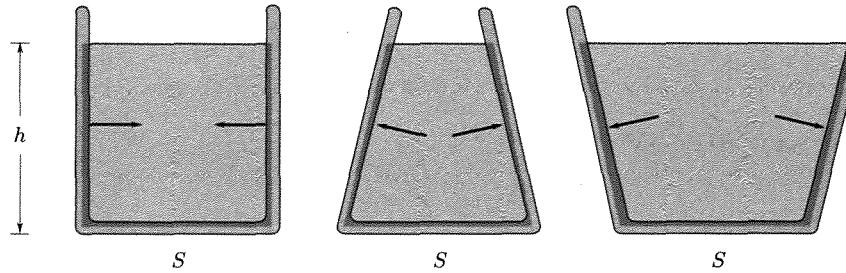


Fig. 8.6

Per quanto si è detto, se si ha un liquido omogeneo in equilibrio in un recipiente, la pressione è la stessa in punti di piani orizzontali, comunque complicata sia la forma del recipiente stesso. Così per es. le pressioni nei punti A e B nel caso in figura 8.7 sono uguali.

Si consideri ora il caso dell'equilibrio di due liquidi non miscibili (acqua, olio) aventi diverse densità e soggetti alla gravità come sola forza di volume. Eseguendo considerazioni analoghe a quelle sviluppate per dimostrare che all'equilibrio la superficie libera di un liquido omogeneo è orizzontale, è possibile vedere che la superficie di separazione deve essere anch'essa una superficie orizzontale.

*Pressione idrostatica:
legge di Stevino*

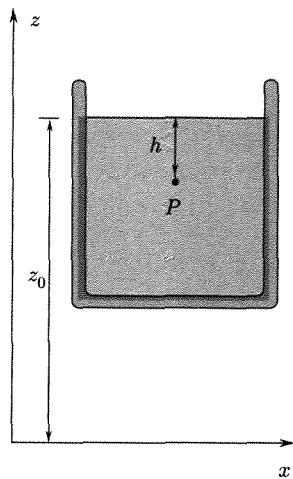


Fig. 8.5

*Paradosso
dell'idrostatica*

Vasi comunicanti

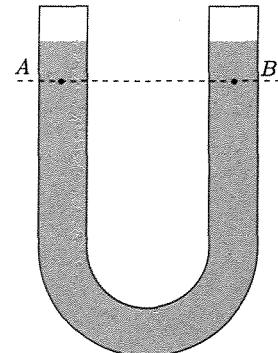


Fig. 8.7

Le conclusioni ora dedotte sono valide finché non agiscano sul liquido altre forze esterne: esse quindi non sono valide nelle vicinanze delle pareti del recipiente ove forze attrattive sulle particelle del liquido sono esercitate dalle pareti stesse. Vedremo in un altro capitolo (cap. 15, par. 15.28) lo stato delle cose in tali casi.

Se si considera una disposizione quale quella in figura 8.8 nella quale due liquidi non miscibili di diversa densità sono posti in un tubo a U, le pressioni in punti come A e B sullo stesso piano orizzontale nei due liquidi non sono le stesse. La differenza di pressione può facilmente calcolarsi osservando che le pressioni in C e C' sono le stesse.

Quindi

$$(19) \quad \begin{aligned} p_A &= p_C - \rho_1 gh \\ p_B &= p_C - \rho_2 gh \\ p_B - p_A &= (\rho_1 - \rho_2)gh. \end{aligned}$$

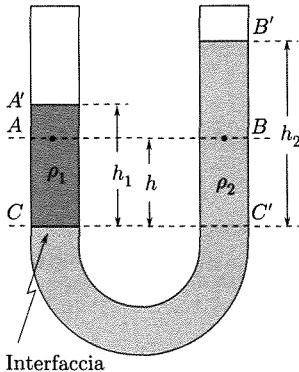


Fig. 8.8

Portando i punti A e B a coincidere rispettivamente con A' e B' sulle superfici libere, si ha che $p_{A'} = p_C - \rho_1 gh_1$, $p'_{B'} = p_C - \rho_2 gh_2$ e se la pressione del gas sovrastante le due superfici libere è la stessa ($p'_A = p'_B$), le due colonne di liquidi al di sopra della superficie di separazione avranno altezze h_1 e h_2 nel rapporto $h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1$.

Come ulteriore esempio di applicazione delle precedenti considerazioni determiniamo la dipendenza della pressione atmosferica dall'altitudine assumendo che la densità dell'aria sia proporzionale alla pressione. Ciò corrisponde ad ammettere la validità in questo caso della legge di Boyle che lega la pressione p e il volume V di una massa gassosa a temperatura costante

$$(20) \quad pV = p_0 V_0 = \text{cost.}$$

Se si immagina infatti la (20) scritta per una massa unitaria, V sono i volumi specifici e si ha $V = 1/\rho$. Si ricava allora:

$$(21) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

essendo ρ_0 e p_0 la densità e la pressione a un livello di riferimento, per es. al livello del mare.

L'equazione (15) diviene:

$$\frac{dp}{dz} = -g \frac{\rho_0}{p_0} p \quad \frac{dp}{p} = -g \frac{\rho_0}{p_0} dz$$

che, risolta, dà

$$\log \frac{p}{p_0} = -g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0)$$

cioè

$$(22) \quad p = p_0 e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0)} = p_0 e^{-a(z - z_0)}.$$

Poiché

$$(22) \quad g = 9,80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \rho = 1,20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (\text{a } 20^\circ\text{C}) \quad p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

si ha

$$a = \frac{g \rho_0}{p_0} = 0,116 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

8.5. PRINCIPIO DI PASCAL

La relazione (12) fa vedere che in *condizioni di equilibrio* la differenza di pressione fra due punti di un fluido soggetto a forze di volume conservative dipende esclusivamente dalla densità e dalla differenza di energia potenziale. In particolare, se le forze di volume si riducono alla sola gravità, la differenza di pressione dipende esclusivamente dalla densità e dalla differenza di quota.

Se pertanto si produce dall'esterno un aumento del valore della pressione in uno dei due punti e ciò non produce una variazione apprezzabile della densità, lo stesso aumento di pressione si ha nel secondo punto dovendo la differenza rimanere costante. È questo il principio di Pascal. Il principio di Pascal è valido, come si è detto, per fluidi incompressibili e in tal caso la variazione di pressione in un punto si trasmette istantaneamente a tutto il fluido. I liquidi sono molto poco compressibili, sicché il principio vale per essi abbastanza bene: in questo caso la variazione di pressione in un punto si propaga con una certa velocità (del suono) nel fluido e solo dopo che la perturbazione è scomparsa e l'equilibrio è ristabilito le conclusioni che si traggono dal principio di Pascal sono valide.

Nel caso dei gas, la compressibilità è elevata e variazioni di pressione sono spesso accompagnate da rilevanti variazioni di temperatura. Se si considera peraltro una massa gassosa in un volume non eccessivamente esteso si è già osservato che, a causa del basso valore della densità, la pressione in condizioni di equilibrio si può ritenere ovunque la stessa sicché il principio di Pascal si può ritenere ancora valido.

Un'interessante applicazione del principio di Pascal si ha nella pressa idraulica. In tal caso è possibile avere a disposizione forze molto intense utilizzando forze più piccole o, come si dice correntemente, è possibile amplificare le forze, come nell'effetto della leva meccanica. Lo schema della disposizione sperimentale è dato in figura 8.9. Un liquido è posto in un recipiente che ha due pistoni, l'area delle cui sezioni sono rispettivamente S_1 e S_2 . Se una forza F_1 viene applicata al primo pistone essa produce un aumento di pressione nel liquido $\Delta p = F_1/S_1$ e quindi una forza che agisce sul secondo pistone d'intensità pari a

$$F_2 = \Delta p S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

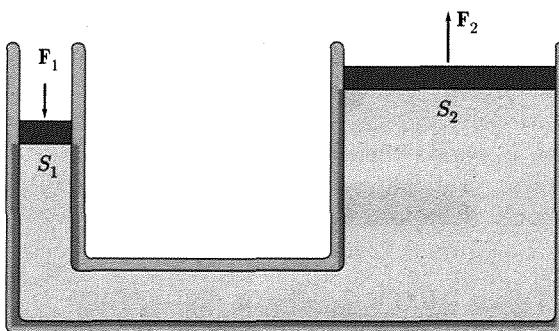


Fig. 8.9

Se per es. $S_2/S_1 = 100$ risulta $F_2 = 100 F_1$. Naturalmente, se il dispositivo viene usato in modo che i pistoni si muovano, il lavoro compiuto dalle due forze è lo stesso (tralasciando gli effetti dissipativi); gli spostamenti infatti sono inversamente proporzionali alle aree delle sezioni dei pistoni giacché il volume di fluido spostato dal primo è pari al volume liberato dal secondo.

In un fluido in quiete non soggetto a forze esterne di volume la pressione è eguale ovunque

■ 8.6. MISURA DELLE PRESSIONI

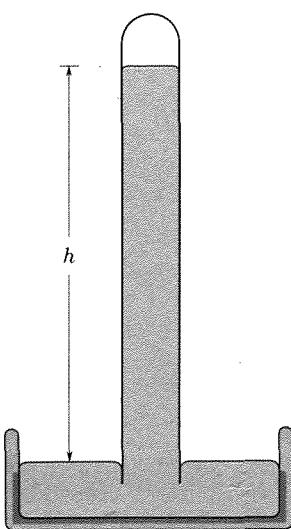


Fig. 8.10

Barometro del Torricelli

Valore della pressione atmosferica

Il primo dispositivo per la misura delle pressioni fu realizzato da Evangelista Torricelli per la misura della pressione atmosferica. Esso consiste in una canna di vetro sufficientemente lunga (circa 80 cm) chiusa a una estremità, la quale viene riempita di mercurio e rivoltata in modo che l'estremità aperta venga a trovarsi in una vaschetta di mercurio (fig. 8.10). Quest'ultima operazione va fatta con cura, in modo da impedire l'ingresso di aria nella canna. La colonna di mercurio nella canna scende; nella parte superiore al di sopra della superficie libera del mercurio sono presenti solo vapori di mercurio la cui pressione può, a temperature normali, essere trascurata: si può cioè ammettere che tale spazio sia vuoto. Se si considera la superficie orizzontale corrispondente alla superficie libera del mercurio nella vaschetta (superficie isobarica) si ha che la pressione atmosferica p_0 è

$$(23) \quad p_0 = \rho_{Hg}gh$$

essendo ρ_{Hg} e h rispettivamente la densità e l'altezza della colonna di mercurio. Il valore di h varia con l'altitudine del posto e con le condizioni atmosferiche. Al livello del mare h è circa 76 cm. Per tale ragione si è introdotta una unità di misura delle pressioni chiamata atmosfera definita come la pressione esercitata da una colonna di mercurio di 76,0 cm a 0 °C sottoposta a una accelerazione di gravità $g = 980,6 \text{ cm/s}^2$ (livello del mare).

Si ha quindi, poiché $\rho_{Hg} = 13,595 \text{ kg/m}^3$ a 0 °C

$$(24) \quad \begin{aligned} 1 \text{ atm} &= \left(13,595 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (0,76 \text{ m}) = \\ &= 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar}. \end{aligned}$$

Molto spesso le pressioni vengono espresse in atmosfere⁽²⁾. A volte, specie per pressioni basse, si usa misurare una pressione mediante l'altezza di una colonna di mercurio che a 0° e nelle condizioni specificate di gravità esercita la stessa pressione; si parla allora di cm o mm di mercurio.

Per la misura della pressione atmosferica molto usati sono i barometri aneroidi formati da una scatola metallica in cui è stato fatto il vuoto e che ha una parete sottile e flessibile (fig. 8.11). Variazioni nella pressione atmosferica producono cambiamenti nella configurazione della parete. Gli spostamenti della parete, amplificati con sistemi di leve, determinano la variazione di posizione di un indice su una scala calibrata. Tali barometri sono utili, ma richiedono frequenti controlli della loro taratura.

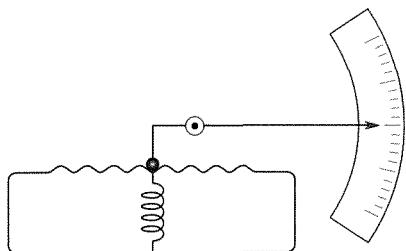


Fig. 8.11

La figura 8.12 mostra due tipi di manometri per la misura della pressione di un fluido contenuto in un recipiente.

Nel primo caso (a tubo aperto) un liquido non miscibile con il fluido contenuto nel recipiente è posto in un tubo a U i cui due rami sono in comunicazione rispettivamente con il recipiente contenente il fluido in misura e con l'atmosfera. Se ρ è la densità del liquido nel tubo a U e $\pm h$ il

⁽²⁾ Si noti che la pressione di un'atmosfera in condizioni standard è molto prossima a 1 bar.

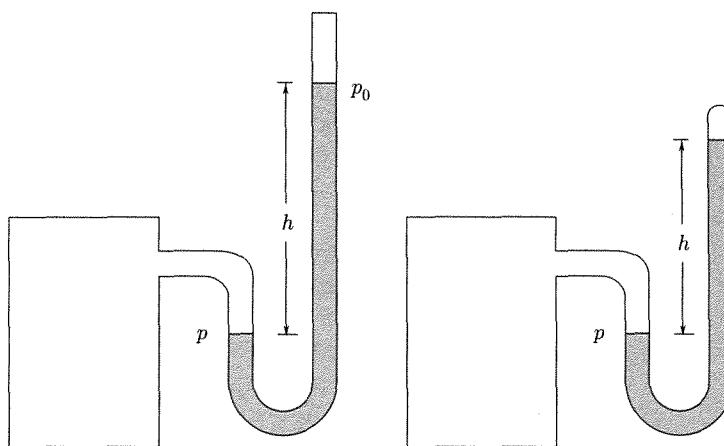


Fig. 8.12

dislivello del liquido nei due rami, la pressione nel recipiente è

$$(25) \quad p = p_0 + \rho g h.$$

Nel secondo caso (manometro a tubo chiuso), se la tensione di vapore del liquido nel tubo a U può essere trascurata, è

$$(26) \quad p = \rho g h.$$

Per le misure di alte pressioni si usano manometri metallici, tipo Bourdon. Tali manometri sono costituiti da un tubo metallico a sezione non circolare, per es. ellittica, curvato a formare un arco di circa 180° ; una estremità del tubo è chiusa e l'altra è collegata al recipiente contenente il fluido in misura. Il fluido in pressione tende ad aumentare l'area della sezione del tubo: questo si deforma e la sezione, al crescere della pressione, si avvicina gradualmente alla sezione circolare: questo fatto ha come conseguenza che la curvatura del profilo del tubo varia e ciò è rilevato da un indice legato alla estremità chiusa.

■ 8.7. PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

La presenza della pressione idrostatica all'interno di un fluido pesante fa sì che sulla superficie libera di un corpo immerso in un tale fluido si esercitino forze, la cui risultante è diretta in verso opposto alla forza di volume (peso): il calcolo di tale forza risultante, che rappresenta l'azione del fluido sul solido, è facile nel caso che il corpo abbia forme geometriche semplici usando la (17). Tale forza tuttavia può in ogni caso essere determinata con un ragionamento generale. Si immagini di sostituire idealmente il corpo con una massa dello stesso fluido che costituisce l'ambiente e si ponga mente alla massa fluida che occupa la regione precedentemente occupata dal solido: essa si troverà necessariamente in condizioni di equilibrio nello stesso mezzo circostante e sarà sollecitata dalle forze di superficie che il fluido circostante esercita e dalla forza di gravità applicata al baricentro della massa fluida. Siccome le forze si equilibrano, si conclude che la risultante delle forze di superficie è una forza verticale diretta verso l'alto applicata al centro di gravità della massa fluida e avente intensità pari a quella del peso della stessa massa. Poiché le forze di superficie esercitate dal fluido circostante lungo la superficie che delimita la massa considerata

Il teorema (principio) di Archimede

non sono influenzate dalla natura del materiale entro la superficie, esse sono le stesse che si esercitano quando, anziché la massa fluida, è il corpo solido a essere immerso nel fluido. Si può quindi concludere (principio di Archimede): *un corpo immerso in un fluido pesante in equilibrio, è soggetto a una forza diretta verticalmente verso l'alto (spinta) di intensità pari al peso della massa fluida spostata e applicata al baricentro di questa* (centro di spinta).

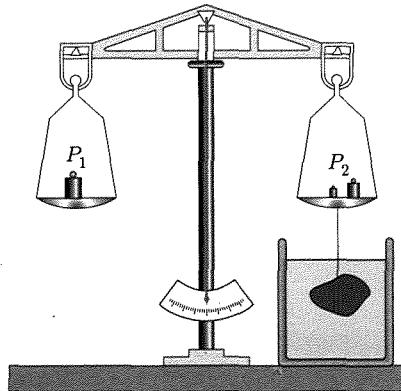


Fig. 8.13

Misure di densità relative sfruttano il principio di Archimede

Il principio di Archimede è utilizzato per la misura della densità di corpi solidi di forma non semplice. Si usa a tale scopo la bilancia idrostatica (fig. 8.13). Ponendo il corpo sul piattello della bilancia si determina la sua massa m_1 e il suo peso P_1 . Successivamente il corpo viene sospeso al di sotto del piattello e immerso in un liquido di densità nota ρ_{liq} (per es. acqua). Il sistema viene equilibrato con un peso P_2 sul medesimo piattello; P_2 misura la spinta ed è pari al peso di una quantità di liquido di densità ρ_{liq} avente lo stesso volume del solido.

Si ha, detto V il volume del solido e trascurando le spinte di Archimede sui corpi nell'aria

$$P_1 = \rho_{\text{sol}} V g \quad P_2 = \rho_{\text{liq}} V g.$$

Il rapporto delle densità (e dei pesi specifici) del solido e del liquido è:

$$(27) \quad \frac{\rho_{\text{sol}}}{\rho_{\text{liq}}} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Il principio di Archimede ha notevole importanza nelle considerazioni relative al galleggiamento e alla stabilità dei natanti. Un natante parzialmente immerso e in quiete in un liquido si trova in equilibrio sotto l'azione del suo peso, applicato al suo centro di gravità (G), e della spinta del liquido applicata nel centro di spinta (S), cioè nel baricentro della massa fluida spostata. Questi due punti si devono quindi trovare sulla stessa verticale come nella figura 8.14a.

Se ora il natante ruota un poco come nella figura 8.14b la forma della regione immersa in genere varia e così il centro di spinta: la forza peso e la spinta determinano quindi una coppia.

Di particolare interesse è il caso in cui il corpo parzialmente immerso è di forma approssimativamente simmetrica rispetto al piano per GS normale all'asse di rotazione e tale che per piccole rotazioni S' stia ancora in detto piano. La verticale per S' incontra la GS in un punto M detto *metacentro*. Per piccole rotazioni di solito la posizione di M è indipendente dall'ampiezza della rotazione. Il natante è soggetto a una coppia e si muove come se fosse sostenuto da un asse orizzontale per M . Se M è al di sopra di G la coppia tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio (stabile): la stabilità cresce all'aumentare della distanza GM . Se M è al di sotto di G , la coppia tende a far rivoltare il natante. Nei grandi piroscavi M è naturalmente al di sopra di G , ma la distanza GM è di solo circa 0,5 m: ciò porta di conseguenza oscillazioni di rollio molto lunghe che non danno eccessivo fastidio. Nelle piccole imbarcazioni che devono affrontare acque agitate, occorre aumentare la stabilità facendo GM notevolmente maggiore: ne segue un moto di rollio meno regolare e con periodi più brevi sicché il viaggio può essere meno confortevole. Analogamente si

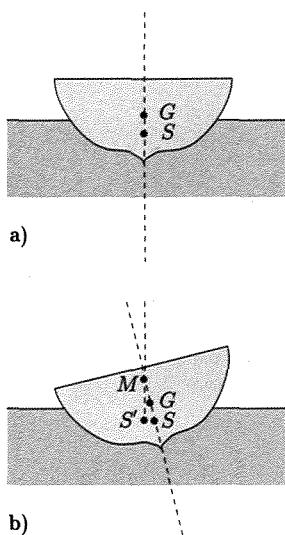


Fig. 8.14

comprende come la stabilità di una barca decresca se le persone in essa stanno contemporaneamente in piedi nell'imbarcazione.

8.8. DINAMICA DEI FLUIDI

Lo studio del moto dei fluidi si conduce facendo uso dei principi della dinamica applicati alle particelle che costituiscono il fluido. Si possono peraltro seguire due diversi procedimenti. Il primo descrive il moto dei fluidi seguendo il moto delle singole particelle che lo costituiscono in funzione del tempo: le coordinate x, y, z di ogni particella sono funzioni del tempo

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t); \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t); \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

oltre che delle coordinate x_0, y_0, z_0 della particella all'istante $t = t_0$. Questa maniera di trattare il problema non è altro che l'applicazione dei criteri della meccanica dei sistemi di punti materiali. Tale procedimento, proposto da Eulero, conduce alle equazioni di Lagrange e si dice che si segue un punto di vista lagrangiano.

Il secondo procedimento, anch'esso dovuto a Eulero, invece di porre l'attenzione sulle singole particelle seguendole nel loro cammino, cerca di stabilire in funzione del tempo i valori della densità e della velocità del fluido nei vari punti dello spazio occupato dal fluido stesso. Le equazioni che si ottengono si chiamano euleriane così come il punto di vista che si adotta. Si tratta di descrivere cosa accade in ogni punto nel quale esiste il fluido in moto in funzione del tempo mediante funzioni che danno la densità $\rho(x, y, z, t)$ e la velocità delle particelle $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ che passano a ogni istante per quelle posizioni. Analogamente, una qualsiasi grandezza, per es. la pressione, sarà espressa mediante una funzione $p = p(x, y, z, t)$ che ne dà il valore in ogni punto a ogni istante prescindendo dalla identità della particella che occupa quella posizione a un dato istante. Pur ponendo l'attenzione sui punti della regione occupata dal fluido piuttosto che sulle particelle, anche le equazioni euleriane sono stabilite applicando le equazioni della dinamica alle particelle fluide che passano per tali punti, seguendone il moto per un tempo infinitesimo dt .

Il punto di vista euleriano è quello più comunemente seguito nello studio di problemi concreti. Va tuttavia osservato che la trattazione analitica dei vari problemi, se il moto non è dei più semplici, diviene in ogni caso molto difficoltosa. Le ragioni di fondo di questa difficoltà sono quelle che nello studio del moto di un fluido le caratteristiche del moto in tutti i punti del fluido devono essere determinate contemporaneamente e che le forze, a eccezione del peso, dipendono dal moto, sicché sono incognite a priori.

Nello studio di problemi concreti si introducono pertanto approssimazioni sulla natura del fluido e sul moto che rendono le equazioni facilmente risolubili in casi semplici; i risultati ottenuti in tali condizioni vengono presi come orientamento per la trattazione di casi più complessi assieme a regole e formule ottenute mediante l'esperienza diretta.

Parlando dei fluidi in generale abbiamo accennato ad alcune approssimazioni che vengono a volte introdotte per quanto riguarda le loro proprietà. I fluidi reali sono compressibili e viscosi. Abbiamo tuttavia già detto che nella trattazione di vari problemi, quando queste proprietà non influenzino in maniera determinante l'andamento dei processi, si suppone

*Moti stazionari e non
stazionari di fluidi*

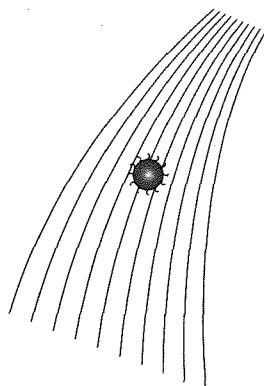
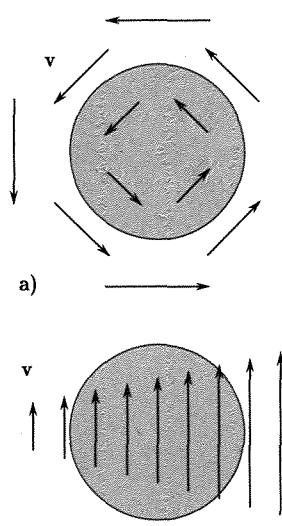


Fig. 8.15



b)

Fig. 8.16

a volte che i fluidi siano incompressibili, a volte che siano non viscosi oppure che abbiano entrambe queste qualità (fluidi e/o liquidi ideali).

Vogliamo accennare a una terminologia che viene usata per specificare le caratteristiche del moto e le limitazioni che si pongono nella trattazione.

Innanzitutto il moto di un fluido si dice stazionario quando la velocità \mathbf{v} in ogni punto dello spazio non cambia con il tempo; essa naturalmente può cambiare da punto a punto. In un moto stazionario quindi la velocità di una particella può variare con il tempo soltanto perché varia la sua posizione; le diverse particelle che si succedono in un punto hanno invece tutte la stessa velocità quando, in istanti successivi, si trovano a passare per quello stesso punto.

Se la velocità in un punto cambia con il tempo, il moto si dice non stazionario. Un primo caso si ha nei transienti quando cioè variano le condizioni del moto, come quando si regola una valvola in una tubazione. Un secondo caso molto interessante è quello del moto turbolento caratterizzato da variazioni rapide e casuali della velocità da punto a punto e da istante a istante. Moto turbolento si può avere anche se le condizioni che determinano il moto restano costanti. Un esempio è dato dal flusso di un fluido in un tubo quando le velocità sono elevate; al moto d'insieme nella direzione del condotto che avviene con una certa velocità media si aggiungono per le singole particelle componenti della velocità che variano a caso in grandezza e direzione: ne segue che la traiettoria di una particella è molto irregolare e difficilmente predicibile.

Nel moto dei fluidi una importante distinzione viene fatta fra moti irrotazionali e rotazionali. In un sistema continuo, quale un fluido, comunque deformabile, si consideri un elemento infinitesimo nell'intorno di un punto generico O . Si può allora mostrare che gli spostamenti elementari $d\mathbf{P}$ dei punti nell'intorno di O si possono far discendere da tre componenti: $d\mathbf{P}_1$ che rappresenta una traslazione, $d\mathbf{P}_2$ che rappresenta una rotazione intorno a O e $d\mathbf{P}_3$ legato alla deformazione dell'elemento. I moti irrotazionali sono quelli per i quali le rotazioni elementari delle particelle sono identicamente nulle. In tal caso se si immagina di sostituire (fig. 8.15) una particella con una piccola ruota a palette tale ruota trasportata dalla corrente fluida non verrebbe posta in rotazione. Nei moti irrotazionali le particelle non hanno momento della quantità di moto, le espressioni per la velocità sono relativamente semplici e la trattazione matematica dei problemi è più facile.

Se invece esistono nel fluido punti per i quali gli elementi fluidi nel loro intorno hanno una velocità angolare risultante intorno a quei punti, il moto si dice rotazionale o vorticoso; se si sostituisse uno di tali elementi con una ruota a palette, questa prenderebbe a ruotare mentre è trasportata dalla corrente. Situazioni di questo genere si hanno quando sono presenti vortici oppure quando l'intensità del vettore velocità varia nella direzione a essa trasversale. Le due situazioni sono illustrate in figura 8.16 ove è indicato l'andamento del vettore velocità in corrispondenza a un vortice (a) e al caso di gradiente trasversale della velocità (b).

Nella descrizione dei moti rotazionali è molto utile introdurre un vettore, rotore della velocità ($\text{rot } \mathbf{v}$), definito da

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) =$$

(28)

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Altre notazioni del vettore sono

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Se il vettore $\text{rot } \mathbf{v}$ è zero dappertutto il moto è irrotazionale. Quando il rotore è zero intorno a un punto, l'elemento di fluido nell'intorno del punto non ha una velocità angolare risultante, sebbene la sua forma e le sue dimensioni possano variare: il moto è irrotazionale nell'intorno considerato. Il significato fisico di rotore è ulteriormente illustrato dal fatto che se il rotore in un punto è diverso da zero e si introduce un sistema di coordinate in moto rotatorio con velocità $\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$, in tale sistema il moto nell'intorno di P è irrotazionale: si può quindi interpretare $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ in un punto come la velocità angolare del fluido intorno a quel punto.

È possibile inoltre dimostrare che, se il campo del vettore \mathbf{v} è irrotazionale, vale per l'integrale di linea lungo una qualsiasi linea chiusa la relazione:

$$(29) \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint v_s d\mathbf{s} = 0$$

essendo $d\mathbf{s}$ l'elemento della curva. Questa circostanza è identica a quella valida per le forze conservative

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

che permette di introdurre la funzione energia potenziale. In maniera analoga, nel caso di campo irrotazionale delle velocità, si può introdurre una funzione ψ , potenziale della velocità, tale che

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \end{array} \right.$$

Se la proprietà (29) non è rispettata anche per una sola linea nel campo, questo non è irrotazionale e le considerazioni ora svolte non possono applicarsi in maniera generale. Esistono a volte regioni del campo nel cui interno la proprietà (29) è valida; è possibile allora introdurre la funzione ψ fissando chiaramente i limiti della sua definizione.

Per un campo vettoriale irrotazionale è identicamente nullo l'integrale su una linea chiusa del vettore di campo

■ 8.9. LINEE DI FLUSSO E DI CORRENTE

Poiché nello studio del moto di un fluido i vettori velocità delle particelle nei vari punti dipendono dallo stato di moto dell'osservatore, occorre specificare tale moto. Per le considerazioni che svolgiamo qui supporremo di usare il sistema di riferimento in cui l'osservatore risulta in quiete. La conoscenza dello stato di moto del fluido implica la conoscenza a ogni istante dei valori dei vettori velocità in ogni punto, cioè di quello che si chiama campo vettoriale delle velocità. Tale campo nel caso generale può cambiare da istante a istante.

Nella descrizione di questi campi delle velocità molto utili sono le linee di flusso a un certo istante: esse si definiscono come quelle linee che hanno come tangenti in ogni loro punto i vettori velocità in quel punto. Esse possono essere costruite nella seguente maniera: si parta (fig. 8.17) da un punto A , e si consideri il vettore \mathbf{v}_A applicato in A all'istante in questione; ci si sposti di un piccolo tratto nella direzione di \mathbf{v}_A fino a giungere in B ove la velocità è \mathbf{v}_B ; ci si sposti ora di un piccolo tratto lungo \mathbf{v}_B da B fino a C . Ripetendo l'operazione successivamente si costruisce una spezzata $ABC\dots$; riducendo gradatamente la grandezza degli spostamenti, la spezzata si trasforma in una linea di flusso. Per ogni punto (che non sia una sorgente o un pozzo) passa una sola linea di flusso. Una linea di flusso non va confusa con la traiettoria di una particella, che viene di solito

Le linee di flusso hanno in ogni punto le velocità come direzione delle tangenti

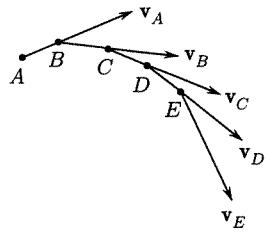


Fig. 8.17

indicata con il nome di linea di corrente. La linea di flusso si riferisce a un istante e può cambiare da istante a istante. Essa quindi fornisce le direzioni dei vettori velocità per particelle che si trovano nei vari punti *allo stesso istante*. Solo nel caso di moto stazionario le linee di flusso non cambiano con il tempo ed esse coincidono con le traiettorie delle particelle fluide (linee di corrente).

In un moto stazionario le linee di corrente coincidono con le linee di flusso

Un insieme di linee di flusso mostra interessanti proprietà del moto nei vari casi. Nel caso di moto non stazionario turbolento, per es., si osserva:

1. ogni linea di flusso ha una forma irregolare senza una apparente relazione con le linee di flusso vicine;
2. le linee di flusso a un istante sono completamente diverse da quelle degli instanti precedenti e seguenti.

Nel caso di moto stazionario invece:

1. le linee di flusso hanno forma regolare e assieme alle vicine formano figure di chiaro significato;
2. esse non mutano con il tempo.

L'impiego delle linee di flusso nell'esame dei problemi di moto è quindi particolarmente utile nel caso di moto stazionario: si ricordi che in tal caso esse coincidono con le linee di corrente.

L'insieme delle linee di flusso passanti per tutti i punti di una linea chiusa l (fig. 8.18) determinano un tubo di flusso. In un moto stazionario ogni tubo di flusso è fermo. Se si considera il fluido che fluisce all'interno del tubo esso non può attraversare la parete del tubo, giacché le velocità delle particelle sulla superficie del tubo sono tangenti al tubo stesso. Tutto va come se il tubo di flusso fosse materializzato da una superficie solida (tubo). Il fluido pertanto può solo fluire nel tubo.

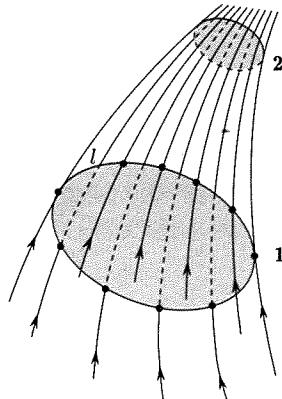


Fig. 8.18

Nel moto stazionario di un fluido non compressibile la portata è costante lungo un tubo di flusso

8.10. EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

In condizioni di moto stazionario, la quantità di fluido contenuta entro una regione qualsiasi non varia. Se prendiamo una porzione di tubo di flusso, contenuta per es. fra le sezioni 1 e 2 (fig. 8.18), e supponiamo che le sezioni trasversali del tubo (S) siano sufficientemente piccole sì da potere ritenere costanti su ciascuna di esse ρ e v , la massa di fluido che entra nel volume in un secondo è $\rho_1 v_1 S_1$ eguale a quella che lascia il volume nello stesso tempo $\rho_2 v_2 S_2$:

$$(31) \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 .$$

È questa la equazione di continuità per un tratto di tubo di flusso in condizioni stazionarie ed esprime il fatto che la massa del fluido deve essere conservata, non è cioè creata o distrutta.

Nel caso più generale in cui siano presenti sorgenti o pozzi (in cui il fluido viene sottratto dalla corrente che si studia) oppure in cui la densità vari con il tempo e la posizione, l'espressione matematica del principio di conservazione della massa, cioè l'equazione di continuità, è meno semplice.

Si consideri, a tal fine (fig. 8.19), un volume V limitato dalla superficie S , in ogni punto della quale la normale \mathbf{n} venga orientata verso l'esterno. Allora se si considera un elemento dS , la massa che esce nel tempuscolo dt attraverso esso è

$\rho v \cdot \mathbf{n} dS = \rho v_n dS dt$. Per tutta la superficie, la massa uscente nello stesso tempo è

$$dt \int_S (\rho v_n) dS.$$

Se inoltre il fluido è compressibile la variazione della massa in V che si ha nel tempo dt è

$$dt \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Inoltre se vi sono sorgenti o pozzi in V e ciascuno di questi è caratterizzato dal parametro D che fornisce la massa per unità di volume che entra (D positivo, sorgente) o che esce (D negativo, pozzo) nell'unità di tempo, la massa totale (positiva o negativa) che nel tempo dt si aggiunge a quella presente in V è $V \sum D dt$. L'equazione di continuità, cioè della conservazione della massa, si esprime dicendo che la massa che in dt esce da V e quella che si accumula in V per variazione della densità deve essere pari a quella fornita dalle sorgenti, cioè

$$(32) \quad \int_S (\rho v_n) dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = V \sum D.$$

La (32), con opportune trasformazioni, si può scrivere in una forma valida punto per punto:

$$(33) \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum D.$$

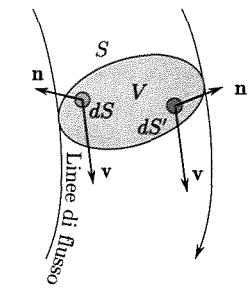


Fig. 8.19

Equazione di continuità

La divergenza di un vettore \mathbf{A} , infine, è definita nella seguente maniera:

$$(34) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Se il fluido è incompressibile, come si può ammettere siano i liquidi, $\rho_1 = \rho_2$ e quindi la (31) diviene:

$$(35) \quad S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Il prodotto Sv dà il volume di fluido che passa per una sezione del tubo di flusso in un secondo: esso prende il nome di *portata* (m^3/s). La (35) esprime che *nel moto stazionario di un fluido la portata in un tubo di flusso è costante*. Da essa si deduce inoltre che le velocità nelle varie sezioni di un tubo di flusso sono inversamente proporzionali alle sezioni. Nella raffigurazione quindi del moto stazionario di un fluido incompressibile mediante le linee di flusso (o di corrente), là dove le linee si infittiscono le velocità aumentano, mentre dove sono più rade le velocità sono minori.

8.11. TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA PER FLUIDI IDEALI. EQUAZIONE DI BERNOULLI

L'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica al caso del moto stazionario di un fluido ideale (incompressibile e privo di viscosità) in un tubo di flusso o in un condotto, fornisce una equazione, detta di Bernoulli, che ha un notevole interesse nella dinamica dei fluidi e dei liquidi in specie.

Si consideri il fluido che a un certo istante t si trova a occupare lo spazio fra la sezione 1 (area S_1) e la sezione 2 (area S_2) di un condotto o di un tubo di flusso (fig. 8.20). Supponiamo che le sezioni siano sufficientemente piccole in modo che si possa ammettere che in tutti i punti di una sezione la velocità v , la pressione p e la quota z rispetto a un piano di riferimento abbiano gli stessi valori.

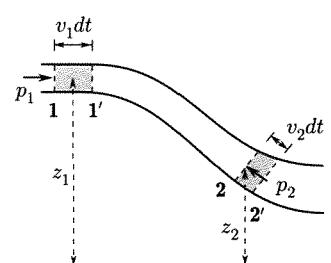


Fig. 8.20

Useremo gli indici 1 e 2 per le grandezze nelle due sezioni. In un intervallo di tempo dt il fluido contenuto inizialmente fra le sezioni 1 e 2 si è spostato e all'istante $(t + dt)$ esso si trova fra le sezioni 1' e 2' che distano dalle originarie rispettivamente di $ds_1 = v_1 dt$ e $ds_2 = v_2 dt$.

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, il lavoro fatto nel tempo dt dalle forze esterne che sollecitano la massa fluida deve essere uguale alla variazione di energia cinetica del sistema. Le forze che sollecitano il sistema sono la forza di gravità e le forze di superficie. Il lavoro dL_g compiuto dalle forze di gravità, poiché la massa fra le sezioni 1' e 2 resta invariata, è pari a quello che si ha nel passaggio della massa

$$dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$$

dalla quota z_1 alla z_2 . Esso è dato da:

$$dL_g = (z_1 - z_2)g dm.$$

Il lavoro delle forze di superficie sarà unicamente quello corrispondente alle sezioni terminali che, essendo le forze di pressione dirette verso l'interno del fluido, nelle due sezioni è di segno contrario. Si ha quindi

$$\begin{aligned} dL_p &= S_1 p_1 v_1 dt - S_2 p_2 v_2 dt \\ &= \frac{dm}{\rho} (p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Analogamente, la variazione di energia cinetica è quella che compete al passaggio di una massa dm dalla regione compresa fra le sezioni 1 e 1' alla regione compresa fra le sezioni 2 e 2', essendo quella relativa alla massa tra le sezioni 1' e 2 rimasta invariata:

$$dT = \frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2).$$

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica si scrive:

$$\begin{aligned} dL_g + dL_p &= dT \\ g(z_1 - z_2)dm + \frac{dm}{\rho}(p_1 - p_2) &= \frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$(36) \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Il teorema di Bernoulli è un'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica

In un tubo di flusso è costante la somma delle tre altezze: geometrica, piezometrica e di arresto

L'equazione di Bernoulli esprime il fatto che per ogni sezione del condotto è

$$(37) \quad z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost.}$$

Si osservi che i tre termini hanno le dimensioni di una lunghezza. Il primo di essi dà la quota del centro di massa della sezione rispetto a un piano di riferimento e prende il nome di altezza geometrica. Il secondo dà l'altezza di una colonna di liquido di densità ρ che determina una pressione pari alla pressione nella sezione, è cioè il dislivello che si determinerebbe per es. in un manometro ad aria libera formato da un semplice tubo a U, collegato alla sezione in esame: esso prende il nome di altezza piezometrica. Il terzo termine ha l'espressione della altezza alla quale giunge un grave lanciato verso l'alto con la velocità iniziale v , pari alla velocità delle particelle fluide nella sezione: esso è chiamato altezza di arresto. Il teorema di Bernoulli si può esprimere dicendo che *nel moto stazionario di un fluido ideale in un condotto, o lungo una qualsivoglia linea di corrente, si mantiene costante la somma delle altezze geometrica, piezometrica e d'arresto*.

Applicazioni

1. Si consideri un grande serbatoio di liquido e un piccolo orifizio sul fondo (fig. 8.21). Le linee di flusso o di corrente del liquido che fluisce si originano nel serbatoio presso la superficie libera: in altri termini si può considerare un tubo di flusso che ha come sezione 1 la superficie libera e come sezione 2 una sezione nel liquido che ha superato l'orifizio. Si può inoltre osservare che le linee di flusso escono dall'orifizio convergendo verso l'asse di questo: ciò ha come conseguenza che la sezione della vena liquida raggiunge dopo l'orifizio una sezione (contratta) più piccola della sezione dell'orifizio stesso. Il rapporto fra l'area della sezione contratta e quella dell'orifizio dipende dalla forma dell'orifizio (si ottengono facilmente valori dell'ordine di 0,6) e può essere cambiato mediante l'aggiunta di tubi o flange.

Essendo inoltre l'orifizio molto piccolo, l'abbassamento del livello dell'acqua nel serbatoio è molto lento e quindi in un intervallo di tempo non eccessivamente lungo il moto può ritenersi stazionario. Applichiamo allora il teorema di Bernoulli

1. alla sezione che coincide con la superficie libera nel serbatoio e
2. alla sezione del tubo di flusso uscente dal serbatoio.

Dato che la prima sezione è molto maggiore della seconda, la velocità v_1 è tanto piccola da potere essere trascurata. La pressione inoltre nelle due sezioni è uguale alla pressione atmosferica p_0 . Si ha allora

$$z_1 + \frac{p_0}{\rho g} = z_2 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

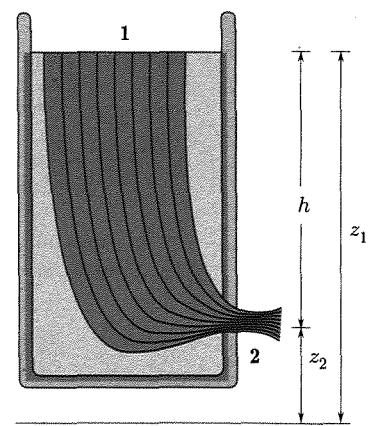
cioè per la velocità di efflusso, ponendo $h = z_1 - z_2$

$$(38) \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Tale risultato, noto come teorema di Torricelli, stabilisce che la velocità di efflusso è la stessa di quella che avrebbe il liquido se cadesse liberamente dalla sezione 1 a quella 2, dalla quota z_1 alla quota z_2 .

2. L'impiego dell'equazione di Bernoulli consente di ridurre misure di velocità di un fluido a misure di pressione. Un primo apparecchio è costituito dal misuratore di Venturi per la misura di velocità o portata di liquidi in condotte. Esso è costituito da un tubo orizzontale (fig. 8.22) la cui sezione viene gradualmente ridotta da un valore iniziale S_1 a un valore S_2 per essere riportata a S_1 . Un manometro differenziale costituito da un semplice tubo a U parzialmente occupato da mercurio è collegato alla sezione iniziale di area S_1 e alla sezione contratta di area S_2 . La differenza h tra i livelli del mercurio nei due rami fornisce la differenza di pressione nelle sezioni

Fig. 8.21



Tubo di Venturi

Manometro differenziale

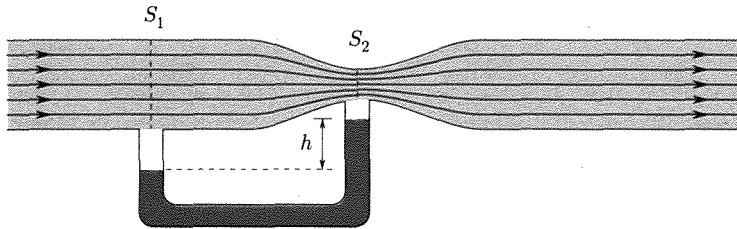


Fig. 8.22

Se si applica l'equazione di Bernoulli alle due sezioni e si tiene conto che $v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q$

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} &= \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2(S_1/S_2)^2}{2g} \\ v_1 &= S_2 \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho)gh}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \end{aligned}$$

L'apparecchio fornisce facilmente la portata

$$Q = v_1 S_1.$$

Pompa idraulica

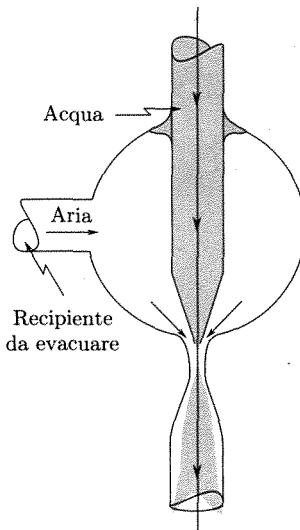


Fig. 8.23

Tubo di Pitot

3. Sullo stesso principio del tubo di Venturi si basano le normali pompe ad acqua ottenute attaccando a un rubinetto un tubo con una costrizione, circondato da un manicotto collegato al recipiente da evacuare (fig. 8.23). L'acqua che fluisce attraverso la costrizione aumenta la sua velocità nella sezione terminale del tubo: di conseguenza la pressione diminuisce causando un'aspirazione dell'aria dal manicotto: quest'ultima è quindi trasportata via dall'acqua. Allo stesso modo funziona l'aspirazione di liquido da un serbatoio nel caso delle bombole spray; dove si invertono le funzioni del gas e del liquido e dove quest'ultimo subisce la successiva nebulizzazione in uscita. Le condizioni di flusso sono lunghi dall'essere quelle poste a base dell'equazione di Bernoulli ma questa dà ancora indicazioni qualitative esatte.

4. Un dispositivo molto usato per la misura della velocità relativa di un gas rispetto a un corpo (per es. aria rispetto a un aereo) è il tubo di Pitot. Esso (fig. 8.24a) è costituito da un corpo cavo a forma di tubo con fronte arrotondato e fondo piano, rispetto al quale si muove l'aria. Una apertura sul fronte del corpo e delle aperture sui fianchi sono collegate a un manometro differenziale. Le linee di flusso in prossimità del corpo (fig. 8.24b) si dividono per abbracciarlo. In corrispondenza alla divisione v'è un punto *A*, detto di *ristagno*, ove il fluido è praticamente in quiete rispetto al corpo. Uno dei rami del manometro differenziale è collegato in modo da essere soggetto alla pressione in *A*. Le aperture laterali nel corpo sono parallele alla direzione del flusso e poste abbastanza indietro rispetto ad *A* in modo da poter ritenere che la velocità e la pressione della corrente fluida in corrispondenza alle aperture abbiano i valori del flusso non perturbato: la pressione è quindi quella di equilibrio (p_B) nella corrente fluida. Se si applica l'equazione di Bernoulli alle due sezioni in corrispondenza ad *A* e *B* si ha

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}.$$

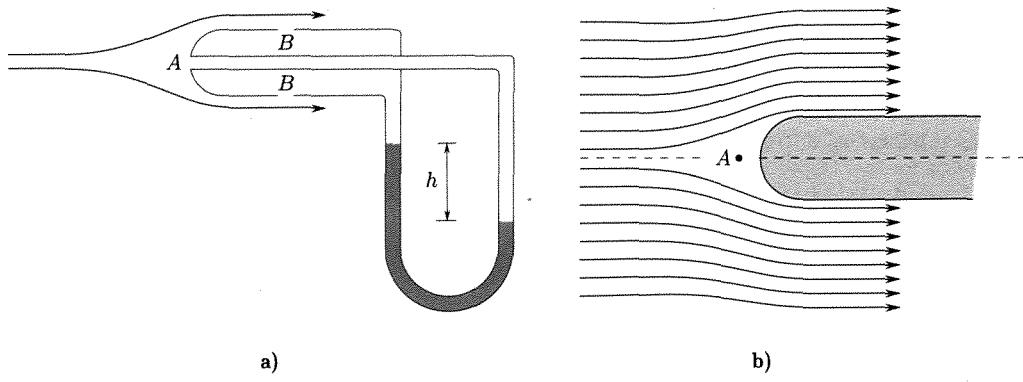


Fig. 8.24

Se h è la differenza di livello nei rami del manometro differenziale in cui v'è un liquido di densità $\rho' \gg \rho$

$$p_A - p_B = \rho' g h.$$

Ne segue per la velocità relativa del fluido rispetto allo strumento:

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}.$$

5. La figura 8.25a mostra l'andamento delle linee di flusso nelle vicinanze di un'ala di aeroplano, o meglio di un suo modello, quale si può ricavare da un'esperienza in un tunnel aerodinamico. Poiché la forma dell'ala ha la superficie superiore con una curvatura maggiore di quella inferiore e un orlo posteriore acuto (fig. 8.25a), la velocità dell'aria che lambisce la superficie superiore, rispetto all'ala, è, per una notevole estensione dell'ala stessa, maggiore di quella dell'aria che passa al di sotto

*La differenza
di pressione tra la
superficie inferiore
e quella superiore
di un'ala ne determina
la portanza*

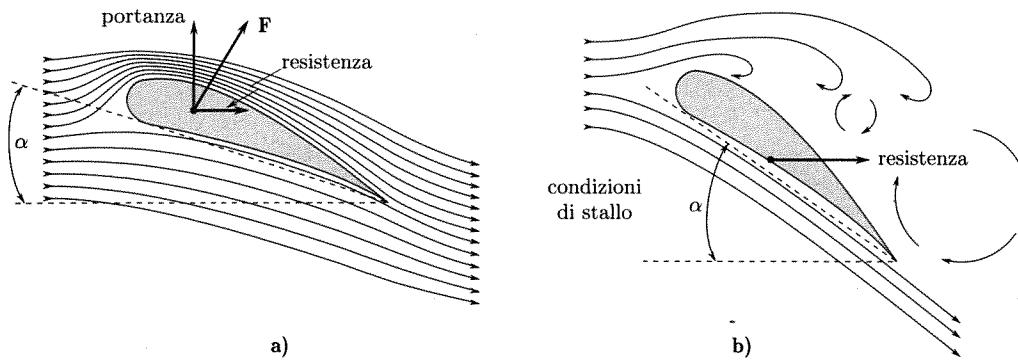


Fig. 8.25

dell'ala stessa, per cui la pressione al di sotto è maggiore e al di sopra minore di quella che si avrebbe nel fluido in assenza dell'ostacolo. La differenza fra queste due pressioni genera una forza verticale, detta portanza, che costituisce il sostegno alare.

L'addensamento delle linee di flusso al di sopra dell'ala e la loro rarefazione al di sotto può essere aumentato inclinando la parte posteriore dell'ala, variando cioè l'angolo (di attacco) α fra la direzione del moto e quella di una retta scelta sul profilo alare. Se tuttavia l'angolo di attacco diviene troppo grande, i filetti fluidi al di sopra dell'ala si rompono e si formano dei vortici. Il moto non è allora più stazionario e il teorema di Bernoulli non può più essere applicato neanche per indicazioni qualitative. Quando si verificano queste condizioni la portanza diminuisce mentre aumenta la resistenza al moto: si dice che l'aereo entra in condizioni di stallo (fig. 8.25b).

8.12. APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA AL MOTO STAZIONARIO DI FLUIDI VISCOSI

La presenza della viscosità in un fluido reale altera in parte i risultati del teorema di Bernoulli, poiché nel bilancio energetico considerato parte dell'energia si dissipa ed esce dal computo delle energie meccaniche.

Si consideri, a tal fine, dapprima il moto di un fluido ideale in un condotto cilindrico, a sezione circolare, disposto orizzontalmente e si supponga che le velocità siano sufficientemente basse perché il moto sia stazionario. In tali condizioni la velocità delle particelle e la pressione sono ovunque le stesse. Se si compie tuttavia l'esperienza come indicato con un fluido reale, dotato di viscosità, si trova che le pressioni nelle varie sezioni sono diverse (v. fig. 8.26).

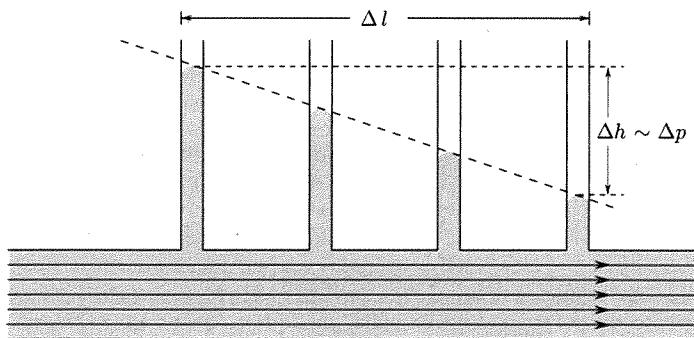


Fig. 8.26

In un fluido viscoso c'è perdita di carico lungo un tubo di flusso

Il rapporto

$$\frac{\Delta p}{\Delta l}$$

prende il nome di perdita di carico e determina la differenza di pressione che occorre sostenere per unità di lunghezza del tubo affinché il moto stazionario venga mantenuto.

La causa di questo fatto va ricercata nell'esistenza della viscosità. Si è già detto che la viscosità ha origini diverse nei liquidi e nei gas: la sua esistenza produce tuttavia una resistenza di attrito che ostacola lo scorrimento di uno strato fluido su un altro e conduce a dissipazione di energia meccanica che si trasforma in calore.

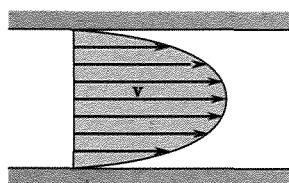


Fig. 8.27

Per meglio comprendere il fenomeno, conviene porre attenzione alla distribuzione della velocità in una sezione trasversale del tubo di figura 8.26 ove ha luogo il moto stazionario. Se il fluido fosse ideale, la velocità sarebbe uguale in tutti i punti della sezione; il fluido si muoverebbe tutto assieme come un corpo rigido e scorrerebbe sulle pareti del tubo. In realtà (fig. 8.27), finché il tubo non ha dimensioni trasversali molto grandi, si trova una distribuzione delle velocità lungo un diametro qualsiasi, simmetrica rispetto all'asse e rappresentata da una parabola. Questi risultati possono ottenersi sperimentalmente introducendo alcune particelle colorate nella corrente fluida, aventi la stessa densità del fluido, e misurandone la velocità.

Una tale distribuzione mostra che il fluido può essere convenientemente immaginato diviso in tanti tubi coassiali, il primo dei quali aderisce alla parete ed è fermo (velocità nulla) mentre gli altri hanno velocità gradualmente crescenti man mano che il loro raggio decresce⁽³⁾.

Il fatto che lo strato di fluido a contatto con la parete resti fermo genera una sollecitazione di scorrimento nel fluido. Questo andamento del fenomeno mostra che le forze d'attrito che intervengono nel moto di strati fluidi che scorrono uno sull'altro sono quelle di attrito interno, cioè dovute alla viscosità.

L'equazione di Bernoulli va modificata in quanto, nell'applicare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, occorre tenere conto del lavoro delle forze di attrito.

Si consideri il caso di un liquido viscoso in moto stazionario in un tubo sottile che avvenga con le modalità accennate. Si vuole calcolare la distribuzione delle velocità e la perdita di carico.

Si prenda in considerazione un tratto del tubo di raggio R in cui avviene il moto del fluido viscoso, di lunghezza l compreso fra le sezioni S_1 e S_2 e poniamo attenzione sulla porzione di fluido contenuto in un tubo coassiale di raggio r (minore di R) (fig. 8.28).

Il fluido nel tubo di raggio R resta così diviso in due parti col cilindro interno che scorre entro l'involucro costituito dal fluido esterno. Siccome il moto è stazionario e quindi non vi sono accelerazioni, le forze che sollecitano il fluido del tubo interno si devono fare equilibrio. Esse sono: le forze dovute alle pressioni p_1 e p_2 sulle facce piane estreme e la forza di attrito F_A dovuta alla viscosità, sul mantello esterno del cilindro. Tutte e tre sono dirette come l'asse del cilindro; la prima nel verso del moto, la somma delle altre due in verso opposto. Tale somma, sull'asse del cilindro orientato nel verso del moto, è $(p_1 - p_2)\pi r^2$. Per il calcolo della proiezione di F_A occorre fare qualche considerazione.

Si ricordi innanzitutto che, secondo quanto visto nel cap. 7, par. 7.11, nel moto laminare di un fluido viscoso il coefficiente di viscosità è espresso mediante la sollecitazione di taglio fra due strati che scorrono uno sull'altro ($\tau = dF_A/d\sigma$ essendo $d\sigma$ un elemento di superficie fra gli strati e dF_A l'intensità della forza tangenziale che si esercita fra gli strati in corrispondenza a $d\sigma$) e la dv/dn , cioè la derivata della velocità dello strato che si considera (in un sistema di riferimento fisso) rispetto alla

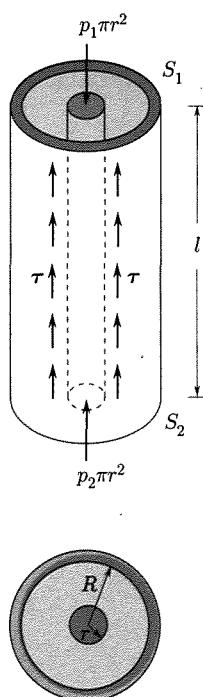


Fig. 8.28

⁽³⁾ Nel caso che il tubo abbia sezione non piccola la distribuzione delle velocità è tale che lo strato aderente alla parete ha velocità nulla, gli strati successivi hanno velocità crescenti con legge parabolica fino a un certo valore: per gli strati coassiali più interni la velocità resta costante.

coordinata spaziale normale agli strati. Si ha

$$\eta = \frac{dF_A}{d\sigma} \frac{1}{\left| \frac{dv}{dn} \right|}.$$

Nel caso in questione la situazione è del tutto simile: gli strati che scorrono, tuttavia, non sono piani ma cilindrici e la \mathbf{n} (diretta da strati più veloci a strati meno veloci) va sostituita con r . Si ha quindi per l'intensità della forza tangenziale, cioè per la forza di attrito sull'elemento $d\sigma$ di un cilindro coassiale con il tubo

$$(40) \quad dF_A = \eta d\sigma \left| \frac{dv}{dr} \right|.$$

La proiezione della \mathbf{F}_A , forza di attrito che si esercita sul mantello di area $2\pi r \cdot l$ sull'asse orientato nella direzione del moto vale

$$F_A = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}.$$

Essa è diretta in verso opposto al moto essendo dv/dr negativa. Si può quindi scrivere:

$$(41) \quad (p_1 - p_2) \pi r^2 + 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$(42) \quad dv = \frac{p_2 - p_1}{2\eta l} r dr.$$

Integrando

$$(43) \quad v = \frac{(p_2 - p_1)}{4\eta l} r^2 + C.$$

La costante di integrazione va determinata ponendo la condizione che la velocità sia zero per $r = R$, poiché lo strato aderente alla parete resta fermo. Se ne deduce conseguentemente l'espressione

$$(44) \quad v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

per la distribuzione delle velocità, che, come si attendeva, è parabolica col massimo sull'asse del tubo e valore zero alla parete.

Se si vuole calcolare la portata nel caso in oggetto, bisogna innanzi tutto calcolare la quantità di fluido che passa attraverso una corona circolare della sezione trasversale compresa fra le circonferenze di raggio r e $r + dr$

$$(45) \quad dQ = v dA = 2\pi r dr \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Integrando, si ha la legge di Poiseuille per la portata

$$(46) \quad Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2) R^4}{8\eta l}.$$

*Moto laminare
di Poiseuille in un
condotto cilindrico*

Questa formula mostra come la portata di un fluido attraverso un capillare possa essere usata per misurare il coefficiente di viscosità, se si determina contemporaneamente la differenza di pressione che viene mantenuta agli estremi del tubo per avere il moto stazionario. Tale possibilità è sfruttata in alcuni viscosimetri.

La perdita di carico nel tubo risulta essere dalla (46)

$$(47) \quad \frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}.$$

8.13. MOTO TURBOLENTO

Nel moto laminare dei fluidi viscosi il mezzo si può considerare formato da strati che scorrono gli uni sugli altri: tale moto si verifica solo per basse velocità. Come si è visto descrivendo il caso del moto nei tubi capillari, il moto è allora stazionario ed è regolato dall'equilibrio fra le forze di pressione e le forze di attrito dovute all'esistenza della viscosità: nessuna azione particolare è qui dovuta all'inerzia delle masse in moto e la descrizione dei processi osservati può essere fatta trascurando i termini non lineari, che pure sono presenti nelle equazioni differenziali del moto.

Se la velocità del fluido aumenta, si osserva che il moto laminare cessa e si presenta il moto turbolento, un moto complesso legato alla non linearità delle equazioni differenziali valide nel caso in oggetto. Solo di recente, anche in seguito allo sviluppo delle moderne tecniche di calcolo numerico che fanno uso dei potenti calcolatori elettronici, lo studio dei sistemi di equazioni differenziali non lineari sta consentendo di trattare con successo i problemi relativi allo stabilirsi del moto turbolento in fluidi viscosi (cap. 11, par. 11.14).

Qui saranno presentati alcuni elementi descrittivi del moto turbolento in situazioni relativamente semplici, essenzialmente derivate da osservazioni sperimentali, mentre alcune indicazioni sui procedimenti teorici che si vanno sviluppando nell'ambito della trattazione dei fenomeni complessi e del caos deterministico per studiare lo stabilirsi della turbolenza nei fluidi viscosi saranno presentati nel cap. 11.

Nel moto di un fluido viscoso alle alte velocità, gli effetti inerziali posti in gioco da qualche piccola disuniformità locale sono così grandi rispetto alle forze di viscosità che, invece di venire smorzati da queste, come richiesto perché il moto stazionario resti stabile, inducono una crescita delle disuniformità finché tutte le particelle del fluido si trovano ad avere sovrapposto al moto di insieme moti a caso in tutte le direzioni: il moto è allora turbolento e vengono prodotti vortici nei quali i filetti fluidi si chiudono ad anello. In queste condizioni il moto del fluido avviene con modalità nettamente diverse⁽⁴⁾ da quelle del moto laminare: l'inerzia delle masse

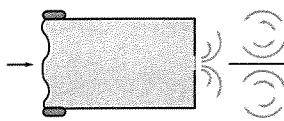


Fig. 8.29

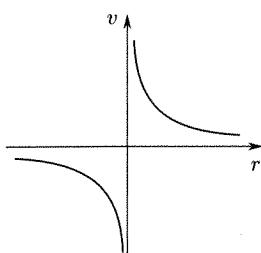


Fig. 8.30

⁽⁴⁾ Lo studio della formazione e del comportamento dei vortici è piuttosto complicato. Essi si possono generare solo quando il fluido è dotato di viscosità giacché solo in tal caso intervengono nel moto sollecitazioni tangenziali e quindi coppie necessarie per cambiare il momento della quantità di moto delle particelle. I vortici posseggono un asse di rotazione, che non può avere origine o terminare nell'interno del fluido, secondo quanto mostrato da Helmholtz; esso quindi deve avere i terminali sulle superfici limite del fluido in moto turbolento o deve formare una linea chiusa: un esempio di quest'ultimo caso sono i vortici ad anello che i fumatori possono produrre con una espulsione rapida di fumo dalla bocca o che si possono generare con il dispositivo di figura 8.29. Un cilindro è chiuso da una membrana e da una piastra forata. Se viene riempito di fumo e si provoca l'espulsione di parte di esso colpendo la membrana, si generano vortici ad anello che si allontanano nell'aria mantenendo per lungo tempo la loro identità. La rotazione che determina i vortici è dovuta sia alle forze viscose fra le particelle che aumentano vicino agli orli dell'apertura, sia ad azioni fra la corrente di aria che esce dall'orifizio e l'aria ferma che si trova dietro il bordo dell'apertura.

La distribuzione delle velocità in un piano normale all'asse del vortice nel caso più semplice è del tipo

$$(48) \quad v = \frac{\text{cost}}{r}$$

ed è rappresentata in figura 8.30.

Helmholtz ha mostrato che la costante nella (48) è la stessa per tutte le sezioni normali all'asse di un vortice. La costante naturalmente decresce con il tempo man mano che l'energia meccanica nel vortice viene trasformata in calore.

I vortici mantengono la loro identità per lungo tempo, fino a che non scompaiono per esaurimento della loro energia: le particelle che costituiscono il nucleo di un vortice sono sempre le stesse.

in gioco e la non linearità delle equazioni differenziali divengono determinanti. Una gran parte dell'energia cinetica del fluido si trova nel moto rotatorio delle particelle che entrano a costituire i vortici e viene gradatamente dissipata in calore per effetto delle forze di attrito interno.

Sperimentalmente è stato possibile determinare un criterio per stabilire quando il moto laminare è stabile. A tale scopo si introduce un parametro, privo di dimensioni, che viene chiamato numero di Reynolds (Re)

$$(49) \quad \text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}$$

ove v è una velocità tipica nel problema (come la velocità media del fluido) ed l una lunghezza tipica che interviene nel singolo problema. Se per es. si tratta del moto in tubi cilindrici l va sostituita con il diametro D . Se si considera, in un fluido viscoso in moto stazionario, un elemento cilindrico infinitesimo del fluido stesso, nella direzione del moto, il numero di Reynolds esprime il rapporto tra la forza inerziale sull'elemento e la forza viscosa presente alle pareti del cilindro. Il numero di Reynolds può anche servire per esprimere il peso relativo dei termini non lineari nelle equazioni differenziali del moto, rispetto a quello dei termini lineari: tale peso cresce con Re.

Si osservi che lo stesso valore del parametro può essere realizzato con diverse combinazioni dei valori delle grandezze che vi compaiono.

L'andamento dei processi in mezzi fluidi viscosi dipende essenzialmente dal valore del numero di Reynolds⁽⁵⁾. Il moto laminare in sistemi geometricamente semplici (per es. in tubi cilindrici) è stabile se il numero di Reynolds non supera un valore critico. I valori critici dei numeri di Reynolds dipendono dalla forma geometrica dei sistemi, ma esiste una regola approssimata: il moto turbolento si osserva raramente quando $\text{Re} < 1.000$ mentre moto laminare non si osserva mai per $\text{Re} > 10.000$. Moto laminare si può osservare per Re vicini a 10.000 solo se sono prese le massime cure per evitare anche le più piccole perturbazioni del moto stesso.

Per maggiore precisione, si consideri una serie di tubi di diametro diverso e si pensi di fare esperienze variando il salto di pressione Δp agli estremi. Il grafico che si ottiene è del tipo indicato in figura 8.31. Esso mostra la relazione fra Δp e la velocità media in una sezione (proporzionale alla portata). In una prima regione (OA) la relazione è lineare come è richiesto dalla legge di Poiseuille e il moto è laminare. Se la velocità aumenta e Re supera il limite critico, si ha una regione di transizione (AB) nella quale il moto laminare non è più stabile ma la crescita di disomogeneità nel campo e lo stabilirsi del moto turbolento richiedono un tempo piuttosto grande, a volte superiore a quello richiesto perché il fluido attraversi il sistema. La velocità media e la portata sono minori di quelle che si avrebbero per lo stesso Δp se il regime fosse laminare. V'è poi una terza regione, oltre il punto B , nella quale lo stabilirsi del moto turbolento richiede un tempo molto breve, sicché il regime turbolento è sempre presente. In quest'ultima regione la relazione fra Δp e la velocità media v_2 diviene abbastanza semplice: Δp è approssimativamente proporzionale a v^2 . L'esperienza ha infatti mostrato che in tale regione vale abbastanza bene per la perdita di carico la formula di Blasius

$$(50) \quad \frac{\Delta p}{l} = 0,133 \rho \bar{v}^2 \frac{\text{Re}^{-1/4}}{D}.$$

La figura 8.32 illustra l'andamento dei filetti fluidi nelle tre regioni quali si possono osservare se per es. si immettono in qualche zona di un tubo dei filetti

Il numero di Reynolds discrimina condizioni di moto laminare o turbolento

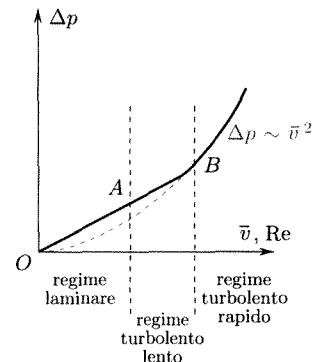


Fig. 8.31

⁽⁵⁾ Questa circostanza è di grande interesse per lo studio sperimentale di casi concreti mediante modelli. È possibile vedere che quando la viscosità è importante, le caratteristiche del moto di un oggetto in un fluido possono essere ottenute da quelle rilevate su un modello purché nelle due situazioni (oggetto reale nel fluido e modello) siano gli stessi i numeri di Reynolds e di Mach. Quest'ultimo è il rapporto v/c fra una velocità caratteristica del problema (velocità dell'oggetto rispetto al mezzo) e la velocità c di propagazione del suono nel mezzo; tale rapporto viene nella pratica usato per giudicare la possibilità o meno, nel problema concreto, di trascurare gli effetti della compressibilità del fluido: gli effetti possono essere in genere trascurati se il numero di Mach è molto inferiore all'unità, non possono esserlo se approssima o supera l'unità.

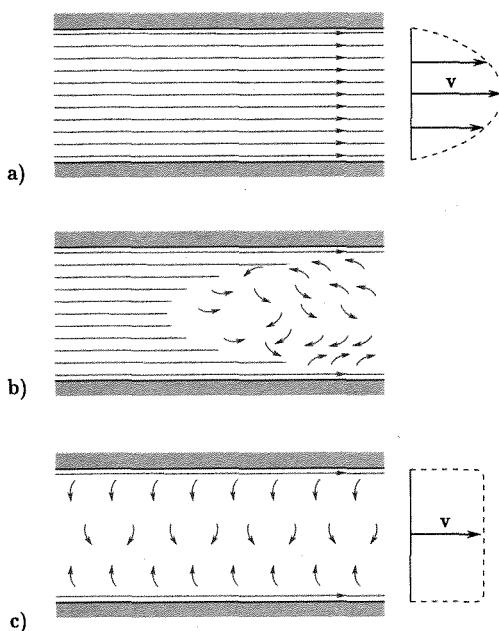


Fig. 8.32

colorati. Quando il moto è laminare la distribuzione delle velocità lungo un diametro del tubo è parabolica e i tubi coassiali scorrono gli uni su gli altri (fig. 8.32a). Nella regione di transizione (fig. 8.32b), quando Re supera di poco il valore critico, l'elemento che caratterizza il moto è il tempo richiesto per il passaggio dal moto laminare a quello turbolento per il crescere di disuniformità: non è possibile dare un grafico della distribuzione delle velocità valido per tutto il tubo. Nella terza regione (fig. 8.32c) il moto è turbolento, e la maggior parte del liquido si trova implicato in vortici, che variano di intensità e si spostano. In tale regione la trattazione va fatta con criteri statistici e in un punto ha significato solamente la velocità media. Come mostra il diagramma di figura 8.32c tale velocità media resta praticamente costante in gran parte della sezione e va rapidamente a zero vicino alle pareti. In realtà il moto nello strato vicino alle pareti anche nel regime turbolento resta laminare e i vortici si originano al limite fra questo strato e il resto del liquido. Lo spessore di tale strato può essere molto piccolo: per es. per $Re = 10^5$ esso è circa un micron. La sua presenza assume tuttavia notevole importanza in alcuni casi come per es. nella trasmissione del calore fra parete e fluido: mentre, infatti, nella regione in moto turbolento il fluido si rimescola rapidamente sicché le differenze di temperatura sono rapidamente annullate e il calore è trasmesso per convezione, il passaggio del calore attraverso lo strato in moto laminare deve avvenire per conduzione e richiede lo stabilirsi di differenze di temperature che, per es. nel caso dei liquidi, possono essere notevoli.

Nel caso di regime turbolento la portata è notevolmente inferiore a quella che per lo stesso Δp si avrebbe se il moto potesse essere laminare. In regime turbolento una porzione notevole del lavoro fatto sul liquido non si trasforma in energia cinetica ordinata del fluido nel suo moto nella direzione del condotto, ma va in energia cinetica dei vortici e gradualmente viene dissipata in calore.

8.14. RESISTENZA OFFERTA A CORPI IN MOTO

Un corpo in moto in un fluido incontra una resistenza che dipende:
 1. dalla forma e dalle dimensioni del corpo; 2. dalla densità e dal coefficiente di viscosità del fluido; 3. dalla velocità relativa del corpo rispetto al fluido.

L'intensità di tale resistenza si può porre sotto la forma empirica generale

$$(51) \quad F = \rho v^2 l^2 \phi(Re)$$

essendo ancora l una dimensione lineare tipica del caso specifico. La funzione $\phi(Re)$ dipende dalla forma del corpo e dalla sua orientazione rispetto a v . Per una data forma, l rappresenta la dimensione efficace del corpo. La struttura della relazione (51) mostra come lo studio della resistenza offerta al moto di corpi nei fluidi possa essere fatta mediante modelli. Ciò è molto utile nel progetto di corpi che devono muoversi a velocità rilevanti (navi, aerei, auto).

Finché le velocità sono molto basse e quindi il moto del fluido intorno al corpo è sicuramente del tipo laminare, si trova che la resistenza al moto non dipende dalla densità, ma esclusivamente dalla viscosità del mezzo; la resistenza è inoltre proporzionale alla prima potenza di v . Ciò vuol dire che per Re sufficientemente piccoli la funzione $\phi(Re)$ nella (51) può porsi nella forma $cost/Re$, così da dare

$F \propto \eta v l$. Il fattore di proporzionalità dipende dalla forma del corpo e dal suo orientamento rispetto alla direzione del moto. Nel caso di corpi sferici, per es., per i quali la lunghezza tipica è il raggio r , vale la formula:

$$(52) \quad F = 6\pi\eta rv$$

che costituisce la cosiddetta legge di Stokes.

Tale legge vale accuratamente solo per valori $Re \leq 0,5$, sicché può essere usata per raggi del corpo piccoli e velocità piccole. Per velocità più elevate e dimensioni maggiori, cioè per $Re > 0,5$, la $\phi(Re)$ nella (51) ha una forma diversa.

Newton ricavò per velocità non bassissime e non molto elevate una formula

$$(53) \quad F = cSpv^2$$

con S l'area apparente del corpo, cioè l'area della sua proiezione su un piano normale alla direzione del moto, che si può ottenere dalla (51) ammettendo $\phi(Re) = \text{cost}$ nel campo che qui interessa. La formula di Newton si è mostrata molto utile in pratica. In numerose esperienze si è infatti trovato che ϕ nella (51) varia al massimo per un fattore 10 in un campo di velocità per cui F varia di molti milioni di volte.

La resistenza offerta da un fluido al moto di un corpo appare dovuta essenzialmente a tre cause. La prima è l'attrito fra i filetti fluidi e lo strato di liquido che aderisce al corpo; la seconda sta nella deviazione dei filetti in corrispondenza alla parte frontale del corpo: il contributo di questa causa alla resistenza può essere ridotto dando una forma opportuna al fronte del corpo. La terza causa è lo stato di moto che si stabilisce in corrispondenza alla parte posteriore del corpo: secondo il tipo di moto (laminare, vorticoso), infatti, la pressione che il fluido esercita sul corpo nella regione posteriore, sempre inferiore a quella sul fronte, può variare notevolmente. Questo è l'elemento che principalmente determina l'intensità della forza che si esercita sul corpo (in direzione contraria alla velocità di questo) per effetto delle pressioni distribuite sulla superficie del corpo stesso. Il contributo di questa terza causa alla resistenza totale è sempre ragguardevole: nel caso per es. di validità della legge di Stokes, un terzo della resistenza offerta è dovuta all'attrito interno (causa 1) e due terzi alla terza causa ora discussa. In molti casi la forza dovuta alla terza causa può costituire il contributo di gran lunga più importante alla resistenza che il corpo incontra. Essa può essere ridotta se la forma del corpo nella parte posteriore è ben studiata.

Nella figura 8.33 è considerato il caso di due corpi che hanno entrambi la parte frontale studiata per ridurre il fattore di forma al minimo e che si muovono a velocità moderate: in essa è indicato l'andamento delle linee di corrente attorno ai corpi. Se il profilo della regione posteriore è stato opportunamente progettato, le linee seguono il profilo del corpo, sono continue, e sono separate dal corpo da un sottile strato che vi aderisce. In questo caso la pressione sulla parte posteriore del corpo è all'incirca la stessa di quella sul fronte: la resistenza è allora piccola e quasi interamente dovuta all'attrito fra lo strato sottile che aderisce al fluido e il resto del fluido.

Quando invece il profilo del corpo non è ben studiato nella parte posteriore le linee di corrente si spezzano e si genera una scia di vortici dietro il corpo. In tal caso la pressione nella parte posteriore può essere notevolmente più bassa, e la resistenza al moto incontrata dal corpo aumenta considerevolmente. L'energia cinetica dei moti vorticosi che avvengono nella scia è naturalmente sottratta al corpo in moto.

La legge di Stokes per un corpo sferico

La presenza di una scia vorticosa dietro al corpo riduce la pressione posteriore aumentando la resistenza complessiva

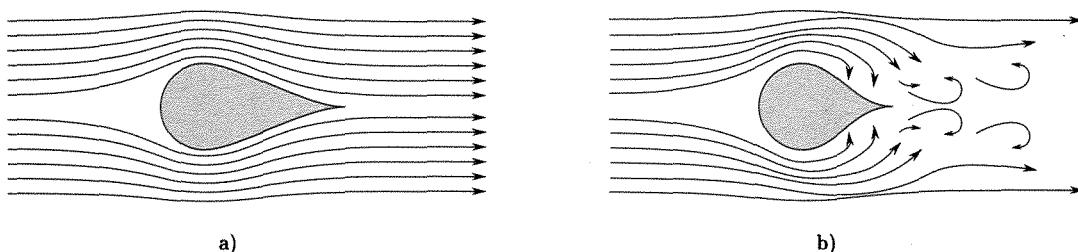


Fig. 8.33

8.15. CAMPI DI FLUSSO

Lo stato di moto di un fluido in ogni istante è rappresentato dal campo del vettore velocità in quell'istante. È utile svolgere alcune considerazioni su questi campi che sono di interesse anche per campi vettoriali che si incontrano nella fisica (per es. campo elettrostatico).

La direzione della velocità nei vari punti della regione occupata da un fluido può essere rappresentata a un certo istante, come si è visto, dalle linee di flusso. Questa rappresentazione può essere migliorata in modo da contenere informazioni sull'intensità del vettore velocità. Si può infatti considerare nell'intorno di un punto una superficie piana di area unitaria, normale al vettore velocità, e convenire di fare passare per essa, nella rappresentazione per linee di flusso, un numero di linee proporzionale all'intensità della velocità nel punto. In una rappresentazione siffatta, si può allora ricavare dalla densità delle linee il valore dell'intensità della velocità: le linee si addensano dove la velocità è maggiore.

Esempi

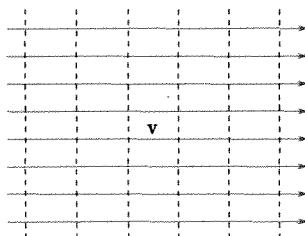


Fig. 8.34

Per ragioni di semplicità di disegno, considereremo solo le distribuzioni della velocità su un piano: si può trattare di flussi bidimensionali che si estendono immediatamente al caso tridimensionale in cui il moto sia lo stesso su piani normali a un asse; si può invece trattare di ciò che accade in un piano particolare di un flusso tridimensionale. L'estensione di queste considerazioni all'analisi di un campo tridimensionale generico è semplice.

- La figura 8.34 mostra le linee di flusso in un campo uniforme: esse sono parallele ed equidistanti giacché il vettore v è costante. Il moto è irrotazionale sicché si può introdurre una funzione potenziale della velocità ψ , dalla quale si può calcolare la velocità. Le linee equipotenziali (tracce delle superfici nel caso tridimensionale) sono normali alle linee di flusso: linee equipotenziali a incrementi costanti del potenziale sono equidistanti (linee tratteggiate).
- La figura 8.35 illustra il campo su un piano diametrale di un tubo nel quale il moto è in regime viscoso (Poiseuille) laminare. Le linee di flusso si addensano verso la zona centrale, dove è maggiore la velocità. Il moto è rotazionale in tutti i punti tranne per i punti sull'asse. Si ricordi che il rot v è diverso da zero quando vi è un gradiente trasversale della velocità.
- La figura 8.36 mostra il campo nel caso di rotazione uniforme intorno a un asse normale al piano della figura. Il campo è lo stesso in ogni piano parallelo a quello considerato. In tale moto il fluido si muove come un corpo rigido con velocità

$$v = \omega r.$$

Moti rotazionali

Tale moto si realizza quando un fluido viscoso si trova in un cilindro posto in rotazione. Si osservi che le linee di flusso si addensano al crescere di r . Il campo è ovunque rotazionale e quindi non esiste un potenziale delle velocità.

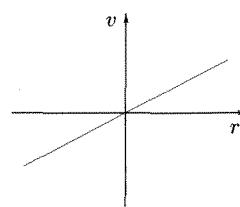
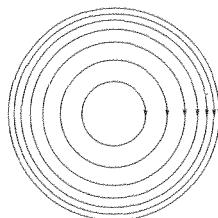


Fig. 8.36



Fig. 8.37

- d. La figura 8.37 illustra le linee di flusso per il caso più semplice di un vortice ($v = K/r$ con K costante). Anch'esse sono circolari come nel caso precedente ma si rarefanno al crescere di r . L'asse del vortice è normale al piano della figura e il campo ha la stessa forma su piani normali all'asse. Il campo in questo caso è tale che

$$\oint v_s ds$$

è nullo lungo una qualsiasi linea chiusa che non abbracci (non si concatene) l'asse; esso è invece pari a $2\pi K$ se la linea si concatena una volta sola con l'asse e più in generale è pari a $n(2\pi K)$ se si concatena n volte. In questo caso non si può introdurre a rigore una funzione potenziale: si può peraltro estendere con opportune cautele il concetto di funzione potenziale.

- e. La figura 8.38 illustra il campo di flusso uscente da una sorgente. Tutte le linee di flusso s'originano da un punto O . Il moto è irrotazionale e quindi ammette un potenziale, le cui linee equipotenziali sono tratteggiate. La velocità decresce quando ci si allontana dalla sorgente perché la sezione di ciascun tubo di flusso va aumentando con tale distanza. Il campo è lo stesso su piani paralleli se si ha una sorgente lineare lungo un asse normale al piano della figura per O .

Il campo di flusso è lo stesso, tranne per l'inversione del vettore velocità nel caso di un pozzo dove il fluido scompare.

Se si hanno a una certa distanza una sorgente e un pozzo lineari e la stessa quantità di fluido che in un secondo esce dalla sorgente scompare nel pozzo, si ha il cosiddetto campo di dipolo lineare.

Le linee di flusso nei campi di flusso possono essere rese evidenti in suggestive esperienze nelle quali piccoli cristalli di permanganato di potassio vengono posti sul fondo di recipienti in cui viene fatta scorrere acqua in maniera da realizzare il moto in considerazione: i cristalli si dissolvono lentamente producendo filetti di colore rosso.

È importante osservare che campi vettoriali del tutto identici a quelli di flusso si ottengono per altri vettori, come per es. per il campo elettrostatico, il campo magnetico, il campo del vettore densità di corrente elettrica.

In elettrostatica, ai casi *a* ed *e* corrispondono rispettivamente il campo elettrico tra le armature di un condensatore piano e quello generato da una distribuzione lineare di cariche.

Il caso di un dipolo lineare corrisponde al campo elettrico fra due fili paralleli con cariche opposte. In tutti questi casi il campo è irrotazionale ed esiste un potenziale elettrostatico.

Campi analoghi a quelli del caso *a* e del caso *d* si presentano per il campo magnetico rispettivamente nell'interno di un solenoide e nell'intorno di un conduttore rettilineo percorso da corrente.

I vari campi di flusso esaminati possono essere identici ai campi del vettore densità di corrente elettrica in un elettrolita se gli elettrodi vengono opportunamente configurati.

Queste analogie fra i vari campi vettoriali vengono a volte sfruttate (specie quella tra il campo di flusso di un fluido e quello del vettore densità di corrente elettrica in un elettrolita) per determinare sperimentalmente con metodi elettrici il campo di flusso di un fluido in configurazioni per le quali la trattazione analitica non è facile o possibile.

Moti irrotazionali

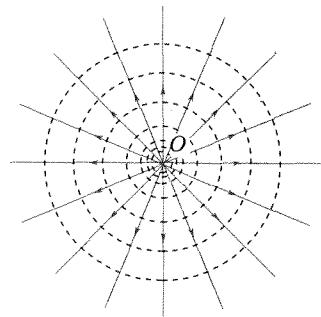


Fig. 8.38

ONDE IN MEZZI ELASTICI

- La propagazione del moto oscillatorio della materia è dovuta al legame (interazione) tra le particelle costituenti. Le onde si propagano con velocità finita.

Tipi di onde:

per polarizzazione *longitudinali*, con $\mathbf{A} \parallel \mathbf{k}$; *trasversali*, con $\mathbf{A} \perp \mathbf{k}$ (due diverse polarizzazioni)

per geometria del fronte d'onda: *piane*, *sferiche*, *cilindriche* ecc.

per composizione spettrale: *monocromatiche* (sinusoidali), *complesse* (con spettro continuo).

- ✓ Equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

con $c = \sqrt{\text{cost elastica/densità}}$, velocità di propagazione, dall'equazione del moto per una masserella ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), più l'equazione costitutiva del mezzo (eq. di stato, elasticità ecc.). Soluzione generale:

$$\xi(x, t) = f(x \pm ct),$$

con f generica.

Grandezze tipiche della propagazione

spostamento, $\xi(x, t)$;

ampiezza, A (valore massimo di ξ);

lunghezza d'onda, λ (periodicità spaziale);

periodo, T (periodicità temporale);

numero d'onde, $k = 2\pi/\lambda$;

pulsazione, $\omega = 2\pi/T$;

frequenza, $\nu = \omega/2\pi$;

intensità, $J = \frac{1}{2}\rho c(\omega A)^2$ (flusso di energia per unità di tempo e per unità di area);

velocità di fase, $c = \omega/k$;

velocità di gruppo, $v = d\omega/dk$.

- ✓ Si dice: **fronte d'onda**, ogni superficie luogo di punti equifase; **raggio**, una linea che sia ortogonale in ogni punto a fronti d'onda.

- ✓ **Principio di Huygens-Fresnel:** un fronte d'onda si costituisce per inviluppo di fronti d'onda elementari emessi da tutti i punti di un fronte d'onda precedente, con dipendenza angolare dell'ampiezza, e raggi pari al tempo di ritardo per la velocità locale di fase.

■ 9.1. INTRODUZIONE

Nel presente capitolo vogliamo esaminare le modalità con le quali una perturbazione dallo stato di equilibrio stabile di un punto che fa parte di un mezzo esteso venga trasmessa ad altri punti dell'insieme. Sebbene ci si interessi in particolare al caso di mezzi materiali elastici e le perturbazioni siano di natura meccanica, le considerazioni che si svolgono valgono per un'analisi qualitativa anche per i casi di altri mezzi e perturbazioni, come per es. lo spazio vuoto ed il campo elettromagnetico.

Il caso di più semplice e comune osservazione di questo tipo di processi si ha quando si lascia cadere un sassolino sulla superficie di un liquido in quiete. La figura 9.1 rappresenta una situazione analoga in cui uno zampillo di acqua ricade sulla superficie libera dell'acqua in una vasca. Per una maggiore definizione del problema si immagini che una punta metallica scenda rapidamente a toccare la superficie e si ritragga. Una particella



Fig. 9.1

è spostata (verso il basso) e riceve energia dalla punta: siccome essa non è libera ma è legata ad altre particelle del mezzo con cui scambia interazioni che si riducono a una forza elastica di richiamo, essa torna indietro e supera la posizione originaria di equilibrio poiché vi giunge con una certa velocità (energia cinetica). La particella quindi comincia a oscillare intorno alla posizione di equilibrio. L'esistenza delle interazioni con le particelle contigue fa sì che forze variabili con modalità dipendenti dal moto della prima particella siano applicate alle particelle contigue, le quali quindi cominciano a muoversi con un moto che avviene con le stesse modalità generali del moto della prima particella: tale moto è però sfasato in ritardo rispetto a quello e ha ampiezza di oscillazione minore. Questo processo di trasmissione si ripete e ben presto la perturbazione si è estesa a una notevole regione della superficie. L'aspetto della superficie mostra la presenza di onde che si muovono e questa maniera di *propagazione della perturbazione si chiama per onde*.

Tale propagazione ha le seguenti caratteristiche fondamentali:

1. *le singole particelle* interessate alla perturbazione *eseguono moti su traiettorie chiuse* e limitate rispetto alla estensione delle onde; la propagazione della perturbazione è dovuta ai legami esistenti fra i vari punti materiali sicché la perturbazione dello stato di equilibrio di un punto è trasmessa a quello contiguo. Una ulteriore conferma di ciò si può avere se sulla superficie liquida interessata dalla perturbazione si pongono dei leggeri pezzi di sughero: si osserva che essi, quando sono raggiunti dalla perturbazione, si muovono al passaggio delle onde oscillando intorno alla loro posizione di riposo senza essere trascinati dalle onde.
2. *I moti di due punti vicini* investiti successivamente dalla perturbazione sono oscillatori e simili fra loro, diversificandosi in genere solamente per la ampiezza e per uno sfasamento che dipende dal tempo impiegato dalla perturbazione a passare dal primo al secondo.

Ciò significa che la propagazione è accompagnata da trasmissione di energia sotto forma ordinata⁽¹⁾: quella necessaria per produrre il moto degli elementi raggiunti dalla perturbazione.

Questa trasmissione d'energia dal punto ove ha origine la perturbazione provoca ovviamente uno smorzamento del moto di questo punto, a meno che altra energia non venga ad esso conferita in continuazione dall'esterno.

La *propagazione per onde di una perturbazione*, che abbiamo qualitativamente descritto nel caso di una superficie liquida meccanicamente disturbata in un punto, si ritrova in tutti i campi della fisica: nella meccanica, nell'elettromagnetismo, ove le emissioni radio, la luce, i raggi X, i raggi γ , sono perturbazioni del campo elettromagnetico nello spazio, fino a finire alla moderna descrizione della materia ove alle particelle vengono associate particolari onde.

Come si è detto si considererà ora solo il caso di onde in mezzi elastici, però tutto ciò che diremo sulle caratteristiche della propagazione delle onde in essi è valido anche per gli altri tipi di onde: nella corrispondente

⁽¹⁾ Si osservi che la trasmissione di energia *sotto forma ordinata* da un punto all'altro è una caratteristica fondamentale e peculiare della trasmissione per onde. Si vedrà in seguito che nella trasmissione del calore per conduzione si ha ancora trasmissione di energia da un punto ad un altro di un mezzo continuo, ma questa energia non è ordinata.

trattazione si tratta semplicemente di sostituire alle grandezze meccaniche (spostamenti, pressioni ecc.) nei mezzi elastici, quelle caratteristiche degli altri tipi di perturbazione e ai parametri che descrivono la natura elastica del mezzo quelli che portano in conto il comportamento del mezzo nelle nuove situazioni. Si comprende quindi l'interesse della trattazione qui fatta delle onde in mezzi elastici.

■ 9.2. VARI TIPI DI ONDE ELASTICHE

Le onde possono essere classificate in diversa maniera secondo la caratteristica che si considera.

Si osservi che ponendo attenzione su un qualsiasi punto investito dalle onde, vanno considerate una direzione di propagazione, che è la direzione secondo la quale la perturbazione procede attraverso il punto, e la direzione in quel punto della traiettoria della particella. Una prima classifica delle onde prende appunto come elemento di distinzione le caratteristiche della traiettoria della particella (più precisamente la direzione del vettore spostamento) rispetto alla direzione di propagazione. Quando *lo spostamento avviene nella stessa direzione di quella di propagazione dell'onda* si parla di onde longitudinali. Casi di questo genere si hanno quando per es. la perturbazione è creata in un fluido dal movimento di un pistone; se un pistone, come in figura 9.2a, viene fatto muovere di moto armonico (periodo $T = 2\pi/\omega$) fra le posizioni A e $-A$ in accordo al grafico di figura 9.2b, la particella P oscilla fra le posizioni P' e P'' . Gli spostamenti dalla posizione di riposo (P), che si badi bene sono nella direzione x di propagazione delle onde, possono essere rappresentati in funzione del tempo in un grafico come quello di figura 9.2c ove sulle ascisse è riportato il tempo e sulle ordinate lo spostamento ξ (nella direzione x). Nel caso considerato il grafico è quello di un moto armonico con lo stesso periodo del moto del pistone, ma con uno sfasamento corrispondente al tempo impiegato dalla perturbazione a raggiungere il punto P dalla posizione del pistone.

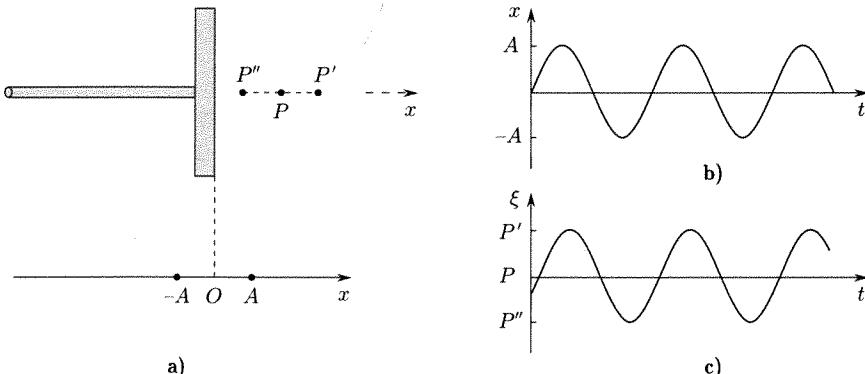


Fig. 9.2 Rappresentazione del moto delle particelle in un fluido in cui un pistone a) sia posto in oscillazione armonica attorno a una posizione: moto del pistone b) e moto di una particella c) generica.

Quando invece il vettore *spostamento*, che rappresenta la perturbazione, è *normale alla direzione di propagazione*, le onde si dicono trasver-

*Onde longitudinali
e trasversali*

*Nelle onde
longitudinali
lo spostamento
ha direzione eguale
a quella
della propagazione,
nelle trasversali esso
è ortogonale*

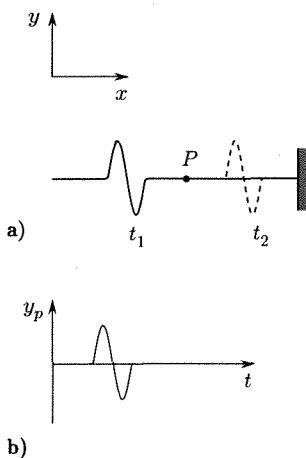


Fig. 9.3

Polarizzazione
di un'onda elastica

sali⁽²⁾. Onde di questo genere si producono per es. in una corda tesa che venga pizzicata o sollecitata trasversalmente; onde dello stesso tipo si hanno in mezzi (solidi, liquidi) che ammettano l'esistenza di sollecitazioni a taglio. La figura 9.3a rappresenta un tratto di una lunga corda tesa fra un estremo fisso e un altro mosso trasversalmente in direzione y da un breve impulso: tale perturbazione viaggia lungo la corda e la figura mostra la configurazione della corda in due istanti t_1 (tratto pieno) e $t_2 > t_1$ (tratteggiato). In tal caso il moto di un punto (per es. P) in funzione del tempo può essere rappresentato come in figura 9.3b ove sulle ordinate è riportato lo spostamento del punto nella direzione y (normale alla direzione di propagazione x).

Si osservi che nel caso delle onde trasversali, a differenza del caso di quelle longitudinali, l'onda non è interamente specificata dalla direzione di propagazione x e dall'intensità del vettore spostamento in funzione di x e t giacché quest'ultimo vettore può assumere una qualsiasi delle infinite orientazioni normali alla direzione di propagazione. Si consideri (fig. 9.4) un'onda trasversale semplice, per es. sinusoidale: il piano che contiene la direzione di propagazione e la direzione dei vettori spostamento prende il nome di piano di vibrazione; il piano che contiene la direzione di propagazione ed è normale al piano di vibrazione si chiama piano di polarizzazione⁽³⁾.

Per specificare completamente un'onda trasversale occorre indicare, accanto alla direzione di propagazione e all'intensità del vettore spostamento che si propaga, anche la polarizzazione, cioè la giacitura del piano di polarizzazione (o di vibrazione). Si osservi inoltre che un'onda trasversale che si propaga nella direzione x con giacitura qualsiasi del piano di vibrazione rispetto ai piani coordinati del sistema di riferimento adottato (xyz) può sempre considerarsi somma di due onde con i piani di vibrazione coincidenti coi piani xy ed xz , giacché il vettore spostamento di un punto può decomporsi in due componenti dirette come y e z .

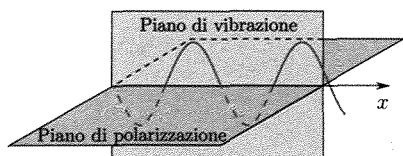


Fig. 9.4

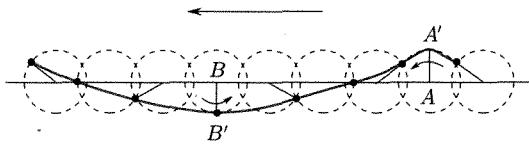


Fig. 9.5

Un terzo caso importante è quello nel quale la traiettoria è una ellisse con uno degli assi principali nella direzione di propagazione. Onde di questo tipo si producono sulla superficie di un liquido o di un solido. Nella figura 9.5 è rilevata la posizione a un certo istante di punti originariamente sulla superficie dell'acqua al passaggio di un'onda: la configurazione assunta è rappresentata dalla linea in colore; sono inoltre rappresentate con linee tratteggiate le traiettorie (approssimativamente circolari) di alcuni punti di tale linea: la posizione di equilibrio di ciascun punto è il centro

⁽²⁾ Sono onde trasversali anche le onde elettromagnetiche. In questo caso la perturbazione è rappresentata dal vettore campo elettrico o dal vettore campo magnetico al posto del vettore spostamento nelle onde elastiche.

⁽³⁾ Questa convenzione non è usata con generalità. Alcuni autori per specificare la polarizzazione delle onde trasversali considerano solo quello che qui è stato indicato come piano di vibrazione.

della circonferenza e lo spostamento all'istante considerato è il raggio segnato. Come si vede, ciascun punto si muove su e giù, avanti e indietro. Ciò è ben noto ai nuotatori i quali sanno che l'acqua sulla cresta dell'onda si muove nel verso di avanzamento dell'onda mentre, in corrispondenza all'avvallamento fra due creste, si muove in verso contrario.

Una seconda classificazione delle onde può essere fatta secondo la estensione del mezzo interessato dal processo. Sono unidimensionali quelle onde che interessano i punti di una linea, come per es. è il caso delle onde su una corda; bidimensionali quelle che si propagano su una superficie, come quelle sulla superficie dell'acqua; tridimensionali quelle che interessano una regione dello spazio di dimensioni comparabili in ciascuna direzione.

Si osservi inoltre che la perturbazione può consistere in un processo del tutto accidentale e isolato nel tempo come quello nella figura 9.3: si parla allora di un impulso e di un'onda impulsiva. Si possono avere, invece, perturbazioni che durano un certo tempo, come per es., sempre nella disposizione di figura 9.3, la perturbazione che si ottiene se si scuote su e giù per qualche tempo un estremo della corda (fig. 9.6). Si parla allora di treno d'onda. Si può infine avere una perturbazione periodica di vario genere, nel qual caso, a ogni istante, lungo una direzione di propagazione (x) si trova che la perturbazione (ξ) è rappresentata da una curva periodica (fig. 9.7).

Una rappresentazione della estensione della regione raggiunta dalle onde e dello stato contemporaneo di vibrazione dei punti può essere fatta considerando i luoghi dei punti che a un certo istante sono raggiunti dalla perturbazione (o dal massimo della perturbazione) nel caso dei singoli impulsi, o dei punti che, nel caso di onde periodiche, si trovino nella stessa fase (per es. nello stato di elongazione massima A, A', A'' in figura 9.7): tali luoghi sono in genere superfici e prendono il nome di fronti d'onda (*per perturbazione impulsiva*) e di superfici d'onda (*per onde periodiche*). Una ulteriore classificazione delle onde può farsi secondo la forma di queste superfici. Il caso più comune di perturbazione nello spazio è quella di onde sferiche: esse sono prodotte quando la perturbazione abbia origine in un punto di un mezzo tridimensionale e si propaghi con le stesse modalità in tutte le direzioni. La figura 9.8 rappresenta, nel caso di onde periodiche, le linee di intersezione delle superfici d'onda in un istante con il piano del disegno: naturalmente in istanti successivi la posizione varia ma si osservi che dopo un intervallo di tempo pari a un periodo la posizione delle superfici d'onda di figura 9.8 si ripete di nuovo: ogni superficie ha preso la posizione della successiva nella direzione e nel verso di propagazione



Fig. 9.6

Fronti d'onda come superfici equifasiche

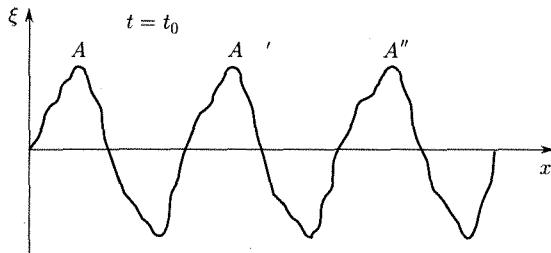


Fig. 9.7

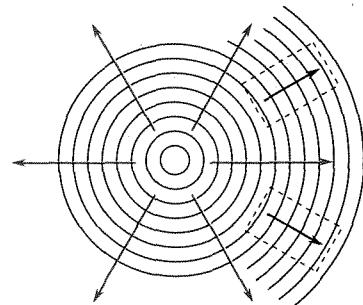


Fig. 9.8

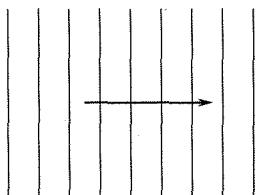


Fig. 9.9

Raggi come linee
normali
ai fronti d'onda

e una nuova onda emessa all'origine ha preso la posizione della prima. Si osservi che in ogni punto la direzione di propagazione è normale alla superficie d'onda. Seguendo localmente la direzione normale alla superficie d'onda si ottiene una linea, cui si dà il nome di raggio di propagazione. Superficie d'onda e raggi costituiscono due famiglie, di superfici e di curve, mutuamente ortogonali.

Una figura del tutto analoga alla 9.8 vale per la rappresentazione delle onde circolari generate da una perturbazione periodica in un punto di una superficie libera liquida.

Altri tipi di onde (cilindriche, piane ecc.) possono avversi nello spazio secondo la forma delle superficie d'onda. Di particolare interesse sono le onde piane. In tal caso le superficie d'onda sono piani paralleli (fig. 9.9). È evidente che l'andamento dei processi è identico per tutti i punti investiti dall'onda che giacciono su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione sicché nello studio della propagazione di queste onde potremo limitarci a considerare ciò che accade per i punti che si trovano su un asse qualsiasi (x) nella direzione di propagazione: ciò costituisce una notevole semplificazione nello studio dei problemi concreti perché riduce lo studio di un processo tridimensionale a quello di un processo undimensionale.

Si osservi inoltre che nel caso di onde sferiche, a distanza notevole dalla origine della perturbazione, le superficie d'onda finiscono con l'avere una curvatura molto piccola: questo fa sì che per molti problemi nei quali sia sufficiente considerare le superficie d'onda in una regione limitata (quelle tratteggiate in figura 9.8) si possa immaginare che le onde siano piane; la direzione di propagazione è naturalmente diversa nelle varie zone delle onde sferiche ed è diretta secondo l'asse dell'angolo solido individuato dalle zone delle superficie d'onda sferiche approssimate con piani. Di conseguenza, a notevole distanza dalla sorgente, un sistema di onde sferiche può essere assimilato all'insieme di tanti sistemi di onde piane che si propaghino secondo direzioni divergenti.

■ 9.3. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Finché ci si limita, come sarà sempre fatto nel seguito, a considerare perturbazioni che causino piccoli spostamenti delle particelle dalle posizioni di equilibrio, il principio di sovrapposizione già visto in elasticità (cap. 7, par. 7.5) vale anche per le deformazioni prodotte dalle onde elastiche e si esprime dicendo⁽⁴⁾ che *due o più onde possono attraversare contemporaneamente lo stesso spazio senza influenzarsi reciprocamente*. Ciò può facilmente riconoscersi se, anticipando la nozione, del resto nota, che il suono è costituito da onde elastiche, si osservi che voci di persone diverse che parlano contemporaneamente nello stesso luogo continuano ad essere distinte, come se ciascuna di esse fosse presente da sola.

Il principio di sovrapposizione deriva dalla ipotesi di linearità del mezzo elastico, per la quale gli effetti di deformazione prodotti da uno sforzo (sollecitazione) esterno sono proporzionali a questo. Il principio

⁽⁴⁾ Una analoga relazione lineare valevole in elettromagnetismo fra grandezze corrispondenti alla sollecitazione ed alla deformazione rende valido il principio di sovrapposizione per le onde elettromagnetiche: noi vediamo chiaramente un oggetto anche se la luce da esso proveniente deve attraversare regioni interessate da altri fasci di luce.

vale esclusivamente finché le perturbazioni siano piccole: se le onde sono di grande ampiezza esso non è più rispettato e si presentano interessanti processi di interazione, il cui esame esula dalla presente trattazione. Casi di questo genere si presentano nelle onde impulsive molto intense (onde di shock), quali quelle prodotte da esplosioni, oppure sulla superficie dell'acqua quando le onde superano una certa ampiezza.

■ 9.4. TEOREMA DI FOURIER SULLE FUNZIONI PERIODICHE

Per il seguito delle considerazioni è importante il teorema seguente di analisi dovuto a Fourier. Sia data una funzione a un solo valore $x = x(t)$ periodica di periodo T e frequenza $\nu = 1/T$. Essa, sotto condizioni molto generali⁽⁵⁾, può essere sempre espressa mediante una somma di infiniti termini (serie) armonici di frequenza multiple della frequenza della funzione data.

Si può cioè scrivere per una $x(t) = x(t + n\pi)$, con n intero:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_r \cos r\omega t + \dots \\ & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_r \sin r\omega t. \end{aligned}$$

I valori di a_0 e dei coefficienti costanti a_r e b_r si calcolano facilmente con le seguenti osservazioni. Integrando ambo i membri della (1) fra 0 e T , tutti gli integrali delle funzioni seno e coseno sono nulli, così che si ha

$$\int_0^T x(t) dt = a_0 T$$

che dà il valore

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

a_0 è pari al valore medio della funzione nel periodo T .

Se si moltiplicano entrambi i membri della (1) per $\cos r\omega t$ e si integra fra 0 e T , tutti gli integrali a destra sono nulli tranne $\int_0^T a_r \cos^2 r\omega t dt$. Si ha quindi

$$\int_0^T x(t) \cos r\omega t dt = a_r \int_0^T \frac{1 + \cos 2r\omega t}{2} dt = a_r \frac{T}{2}$$

da cui

$$(3) \quad a_r = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos r\omega t dt.$$

Analogamente, moltiplicando i due membri della (1) per $\sin r\omega t$ e integrando fra 0 e T si ottiene

$$(4) \quad b_r = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin r\omega t dt.$$

*Sviluppo
di una funzione
in serie di Fourier*

⁽⁵⁾ Sempre verificate nei casi di interesse fisico. Vedi A. Ghizzetti, F. Rosati, *Analisi matematica*, vol. II, 2^a ed., Masson 1996. Le condizioni possono ridursi a richiedere che il periodo T sia suddivisibile in intervalli in cui la $x(t)$ sia continua e monotona (condizioni di Dirichlet).

Si osservi che la (1) può anche scriversi

$$(5) \quad x(t) = a_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ + c_r \sin(r\omega t + \varphi_r) + \dots$$

Il primo termine, di frequenza uguale a quella di $x(t)$, si chiama fondamentale, gli altri: seconda armonica, terza armonica etc.

Se si ricorda che

$$\sin(r\omega t + \varphi_r) = \sin r\omega t \cos \varphi_r + \cos r\omega t \sin \varphi_r$$

si deduce dal confronto della (1) e della (5) che

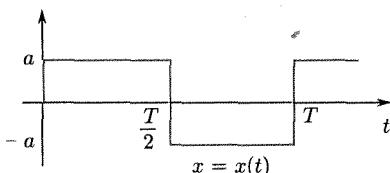
$$\begin{cases} c_r \cos \varphi_r = b_r \\ c_r \sin \varphi_r = a_r \end{cases}$$

da cui

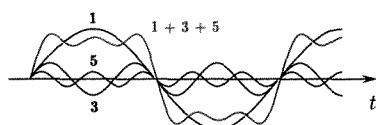
$$(6) \quad \begin{cases} c_r^2 = a_r^2 + b_r^2 \\ \tan \varphi_r = \frac{a_r}{b_r}. \end{cases}$$

Coefficienti dello sviluppo di Fourier

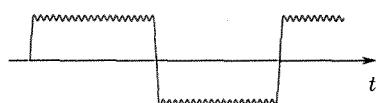
Esempi



a) Funzione periodica quadra



b) Fondamentale, terza, quinta armonica e loro somma



c) Somma dei primi 15 termini della serie

Fig. 9.10

Onda quadra

Si consideri una funzione periodica rappresentata dal grafico di figura 9.10a, cioè

$$x(t) = \begin{cases} +a & \text{per } 0 < t < T/2 \\ -a & \text{per } T/2 < t < T \\ 0 & \text{per } t = 0 \text{ e } t = T/2. \end{cases}$$

Il valore medio a_0 è zero, infatti

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T a dt = \frac{a}{T} \frac{T}{2} - \frac{a}{T} \frac{T}{2} = 0.$$

Per a_r si ha

$$a_r = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a \cos r\omega t dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T a \cos r\omega t dt.$$

Con la sostituzione $r\omega t = z$ e integrando

$$a_r = \frac{a}{\pi r} (2 \sin \pi r - \sin 2\pi r).$$

Tale valore è zero per qualsiasi intero r .

Per b_r si ha

$$b_r = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a \sin r\omega t dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T a \sin r\omega t dt.$$

Con la stessa sostituzione si calcola

$$b_r = \frac{a}{\pi r} (1 + \cos 2\pi r - 2 \cos \pi r).$$

Per r intero pari risulta

$$b_r = 0$$

e per r intero dispari:

$$b_r = \frac{4a}{\pi r}.$$

Si ottiene in definitiva per $x(t)$ la somma di infiniti termini (serie):

$$x(t) = \frac{4a}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

Nella figura 9.10a sono riportati in tratteggio il termine fondamentale, la terza armonica e la quinta armonica e a tratto pieno la loro somma. Nella figura 9.10c è indicata invece la somma dei primi 15 termini nella somma di Fourier. Si vede che al crescere del numero dei termini presi in considerazione la somma si avvicina sempre più all'andamento della funzione periodica $x(t)$; come si è detto, col tendere all'infinito del numero di termini la somma (serie) di Fourier tende alla funzione $x(t)$.

Come ulteriore esempio, nella figura 9.11 è rappresentata un'altra funzione periodica a semionda triangolare; nei successivi diagrammi è indicata la $x(t)$ (linea continua) e la somma dei primi termini dello sviluppo di Fourier fino al decimo (linea tratteggiata).

Dente di sega

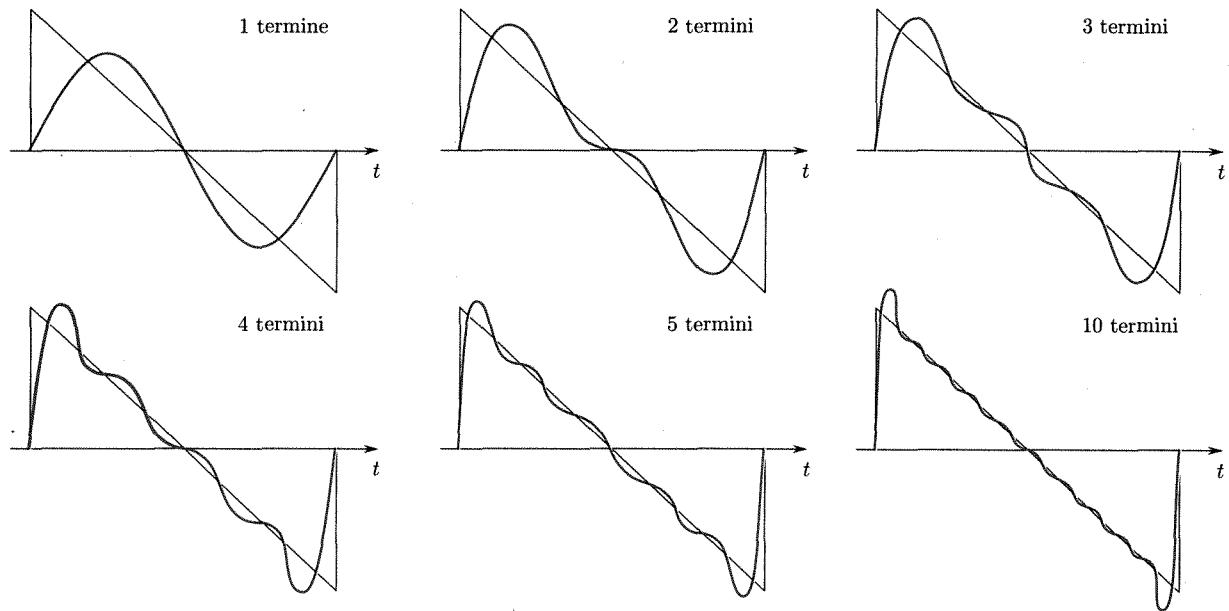


Fig. 9.11

Si vuole infine osservare che anche le funzioni non periodiche quali quelle che rappresentano fenomeni impulsivi (e comunque tutte le funzioni fisiche, reali) possono essere approssimate da una somma di infiniti termini armonici. Si osservi a tale riguardo che se si ha un processo non periodico che si esaurisce in un intervallo di tempo Δt (comunque, non ha interesse considerare intervalli di tempo al di là di un certo valore T dopo l'inizio del processo stesso) si può immaginare di sostituire alla funzione $x(t)$ una nuova funzione ottenuta ripetendo la $x(t)$ dopo intervalli pari a T (fig. 9.12). Si ottiene così una funzione periodica che può essere risolta in una somma di infiniti termini armonici, la quale rappresenta bene l'andamento della funzione reale nell'intervallo di interesse di durata T dopo l'inizio del processo. Si osservi che, al crescere dell'intervallo T nel quale si desidera che la somma di Fourier rappresenti l'andamento reale della $x(t)$, cresce il periodo della fondamentale e quindi decresce la frequenza fondamentale $1/T$ e con essa la differenza in frequenza fra armoniche successive della

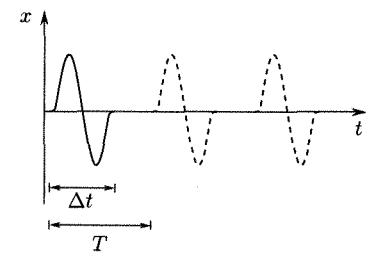


Fig. 9.12

somma. Al limite, facendo tendere T a infinito, la rappresentazione di una funzione impulsiva può essere fatta con esattezza mediante la somma di infiniti termini armonici (che prendono il nome di integrale di Fourier); la differenza in frequenza di termini successivi è infinitesima, sicché l'insieme delle frequenze dei termini componenti forma una distribuzione, o spettro, continua.

9.5. ONDE SINUSOIDALI

In virtù del teorema di Fourier una qualsiasi perturbazione periodica può considerarsi somma di perturbazioni sinusoidali e anzi si è visto che una simile conclusione può praticamente estendersi anche al caso di perturbazioni non periodiche. Il principio di sovrapposizione inoltre assicura, finché le perturbazioni sono piccole, che l'effetto della presenza contemporanea di più perturbazioni in un mezzo è pari alla somma degli effetti dovuti a ciascuna perturbazione.

Si può quindi concludere che gli effetti di una perturbazione qualsiasi in un mezzo possono essere espressi mediante la somma degli effetti delle perturbazioni sinusoidali in cui la perturbazione data può essere risolta con la analisi di Fourier.

È evidente pertanto la importanza di studiare le caratteristiche della propagazione di perturbazioni sinusoidali: nel seguito si considererà in genere questo caso, limitandosi a riprendere in considerazione le perturbazioni complesse quando necessario.

9.6. ONDE PIANE LONGITUDINALI SINUSOIDALI

Periodo e frequenza

Si consideri inizialmente il caso di onde sinusoidali longitudinali, quali sono quelle generate in un mezzo elastico (solido, fluido) da un pistone rigido di superficie notevolmente estesa che si muova di moto armonico (periodo T , frequenza $\nu = 1/T$, pulsazione o frequenza angolare $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$) secondo lo schema di figura 9.13a. Come è già stato osservato, le onde che si generano sono piane: tutti i punti di piani normali all'asse di propagazione si muovono in fase e ogni punto si muove nella direzione di propagazione dell'onda. La descrizione, in tal caso, può essere fatta considerando esclusivamente i punti materiali che si trovano su una retta parallela alla direzione di propagazione, retta che scegiamo come asse x . Si può allora considerare uno schema unidimensionale (fig. 9.13) nel quale:

1. il mezzo è ridotto a una successione di punti materiali (di propria massa) disposti lungo l'asse x e collegati fra loro da molle le quali, se deformate, esercitano forze elastiche fra punti materiali contigui (fig. 9.13b); sono così rappresentate le azioni mutue fra punti materiali le quali tendono a riportare ciascun punto nella sua posizione di riposo, se allontanato da essa;
2. il primo punto della successione venga dall'esterno mosso di moto armonico dal pistone a esso contiguo.

La perturbazione si propaga per effetto dei legami fra le particelle, rappresentate nello schema come si è detto dalle molle. In condizioni di regime tutti i punti materiali si muovono di moto armonico dello stesso

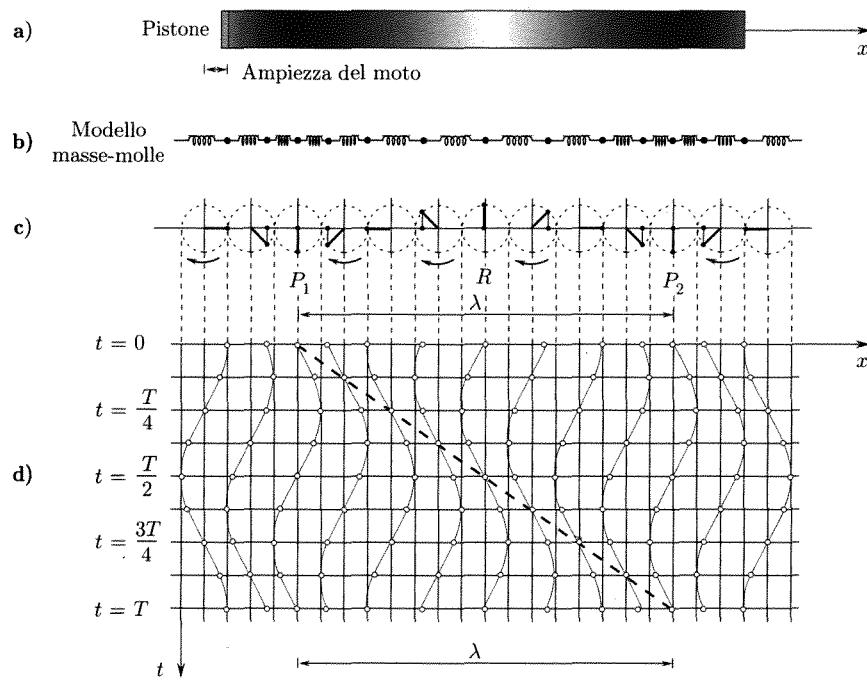


Fig. 9.13

periodo, della stessa ampiezza (in assenza di fenomeni dissipativi) e con fasi che dipendono dalla posizione del singolo punto. Per esaminare più da vicino la situazione nelle figure 9.13c e d vengono considerati contemporaneamente i moti armonici dei punti materiali della figura 9.13a. Lo spostamento di ciascun punto è (intorno alla posizione di riposo) lungo l'asse x ; lo spostamento massimo è lo stesso per tutti i punti. Per rappresentare in maniera semplice la fase del moto di ciascun punto possiamo ricordare che al moto armonico di un punto può essere associato il moto circolare uniforme di un altro punto che avvenga con il medesimo periodo e con fase opportuna su una traiettoria che ha come diametro la traiettoria del moto armonico. Possiamo quindi associare al moto armonico di ciascun punto quello di un punto che si muova di moto circolare uniforme; le posizioni dei punti in moto circolare sono individuate dal raggio delle orbite e dagli argomenti: le differenze degli argomenti allo stesso istante per i vari punti in moto circolare corrispondono alle differenze di fase nei moti armonici dei punti materiali di figura 9.13a.

Nella figura 9.13c è rappresentata la posizione dei punti in moto armonico e di quelli associati in moto circolare uniforme a un certo istante che indichiamo come $t = 0$; la situazione a istanti successivi può essere ottenuta immaginando che i raggi che individuano le posizioni dei moti circolari ruotino contemporaneamente con velocità angolare di intensità costante $\omega = 2\pi/T$. Si ottengono allora per i moti armonici dei vari punti grafici di spostamento in funzione del tempo rappresentati in figura 9.13d. Si osservi che lo sfasamento dei moti di due punti successivi è legato alla inerzia di ciascun punto e alla grandezza della forza elastica di richiamo.

Si consideri un punto qualsiasi (per es. P_1) e quello che per primo nella successione dei punti si muove di moto armonico in fase con esso (P_2): la distanza fra due punti siffatti è quella che si è indicata con λ .

Si osservi nella figura 9.13d, nella quale è riportato lo stato della perturbazione a diversi istanti nell'intervallo di un periodo dei moti armonici, che λ è anche lo spazio che è percorso dalla perturbazione nell'intervallo di tempo di un periodo, cioè mentre ciascuna particella compie una oscillazione completa intorno alla sua posizione di riposo: si ponga attenzione per es. alla fase della perturbazione corrispondente al passaggio del punto attraverso la posizione di riposo come in P_1 all'istante $t = 0$ e la si segua per i vari istanti successivi (linea tratteggiata); all'istante $t = T$ la perturbazione è giunta in P_2 , cioè ha percorso lo spazio λ . Si dirà quindi che la velocità con cui progredisce la perturbazione è

$$(7) \quad c = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu.$$

Nelle figure 9.14a e b sono riportati gli spostamenti dei punti all'istante $t = 0$ e un grafico ottenuto ponendo in ordinate tali spostamenti $\xi(x)$; tale grafico è quello di una funzione sinusoidale, di periodo spaziale λ . In un istante successivo la perturbazione è rappresentata da un grafico del tipo di quello della figura 9.14b spostato nella direzione di propagazione di un tratto ct rispetto a quello relativo a $t = 0$.

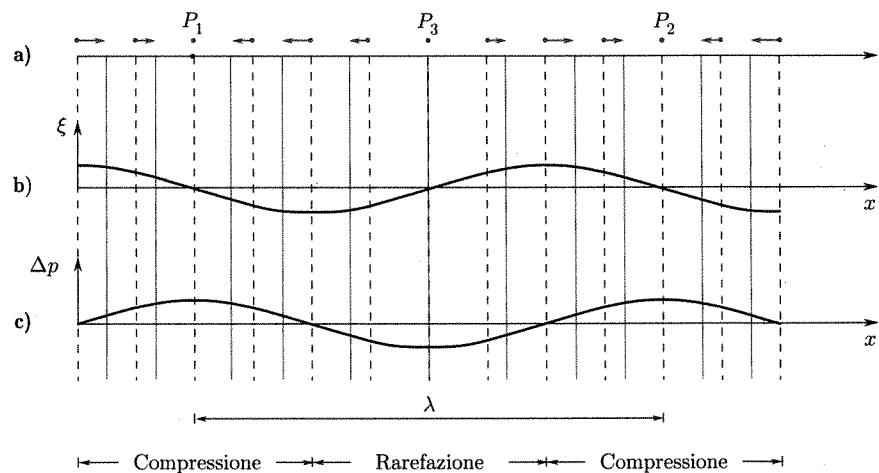


Fig. 9.14

In conclusione la perturbazione ξ è per ogni punto funzione periodica del tempo con periodo $T = 2\pi/\omega$ e a ogni istante è funzione periodica nella coordinata spaziale x con periodo $\lambda = cT$.

Desideriamo ora stabilire la relazione analitica che rappresenti la perturbazione ξ in funzione di t ed x . Osserviamo perciò che la configurazione spaziale della perturbazione è a un certo istante del tipo di quella di figura 9.14b e si muove al passare del tempo nella direzione di propagazione con velocità c : ciò significa che essa apparirà ferma a un osservatore che si muova nella direzione di propagazione con velocità c .

Consideriamo perciò il sistema di riferimento fisso x, y, z , nel quale vogliamo trovare l'espressione analitica dell'onda che progredisce nella direzione positiva x e un sistema x', y', z' che ha assi paralleli ad xyz e si muova di traslazione uniforme nella direzione x con velocità costante di intensità c : supponiamo inoltre che per $t = 0$ i due sistemi coincidano.

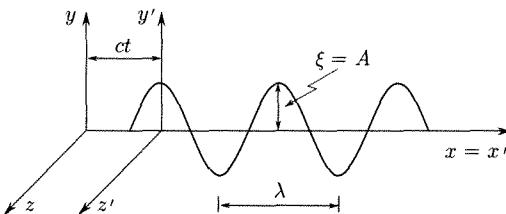


Fig. 9.15

Nella figura 9.15 si è rappresentata la perturbazione riportando ξ nella direzione $y = y'$, come se ci si riferisse a un'onda trasversale.

Nel sistema di riferimento mobile (x', y', z') il profilo della perturbazione è fermo e ha l'espressione

$$(8) \quad \xi = A \cos 2\pi \frac{x'}{\lambda}$$

essendo A la ampiezza dell'onda e delle oscillazioni di ciascun punto. (Nel caso che per $x' = 0$ la perturbazione ξ non avesse il massimo valore si dovrebbe considerare un angolo di fase iniziale).

Poiché le ascisse nel sistema fisso e in quello in moto relativo sono legate dalla relazione

$$(9) \quad x = x' + ct$$

si ha per la perturbazione nel sistema fisso

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi &= A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \\ &= A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = A \cos \omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \\ &= A \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Lunghezza d'onda
e numero d'onde

essendo $k = 2\pi/\lambda$ il cosiddetto numero d'onde. La (10), nelle sue varie forme, viene comunemente detta equazione del raggio.

Equazione del raggio

Ciascuna delle espressioni sopra riportate rappresenta una perturbazione sinusoidale di frequenza ν e ampiezza A che progredisce nella direzione positiva: ciascuna di esse sta anche a rappresentare, per quanto si è detto, un sistema di onde piane progressive che si propaga nella direzione x e nel verso positivo. Nel caso più generale nell'argomento della funzione trigonometrica può comparire un angolo di fase (iniziale) che fissa il valore della perturbazione per $t = 0$ e $x = 0$.

Nel caso che le onde progrediscano nel verso contrario, cioè quello negativo delle x , si può ripetere il ragionamento già fatto: in tal caso il sistema $x'y'z'$ si muove, rispetto al sistema xyz , con velocità d'intensità c nella direzione negativa delle x . Ne segue

$$(11) \quad x = x' - ct$$

e quindi

$$(12) \quad \xi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct) = A \cos(kx + \omega t).$$

Si vuole ancora osservare che mentre nel mezzo indisturbato le particelle sono a distanza mutua eguale (densità uniforme) ciò non è più vero

quando si propaghi un'onda longitudinale. Se si considera lo stato delle cose per es. all'istante che abbiamo chiamato $t = 0$, cioè si pone attenzione alla figura 9.14a, si vede che i punti materiali si addensano intorno a punti come P_1, P_2 e si rarefanno intorno a punti come P_3 . Ciò porta di conseguenza che la densità non resta uniforme e lo stesso accade per la pressione: la pressione è massima nei punti P_1, P_2 e minima nel punto P_3 . Naturalmente, a istanti successivi, assieme alla distribuzione degli spostamenti dei punti, si sposta la distribuzione delle densità e delle pressioni. In altri termini accanto alla perturbazione della posizione delle particelle investite da onde longitudinali, va considerata una perturbazione della pressione: anche questa si propaga per onde come lo spostamento ξ . Si osservi però che la pressione è massima e minima là dove gli spostamenti sono contemporaneamente nulli: v'è cioè fra le due onde dello spostamento longitudinale e della pressione uno sfasamento spaziale di $\lambda/4$. Confrontando le figure 9.14b e c si vede che l'onda di pressione è in anticipo di $\lambda/4$ rispetto a quella dello spostamento. Per l'onda piana di pressione si può quindi scrivere

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= \Delta p_{\max} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{\lambda}{4} - ct \right) = \\
 (13) \quad &= \Delta p_{\max} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) - \frac{\pi}{2} \right] = \\
 &= \Delta p_{\max} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = \\
 &= \boxed{\Delta p_{\max} \sin(kx - \omega t)} .
 \end{aligned}$$

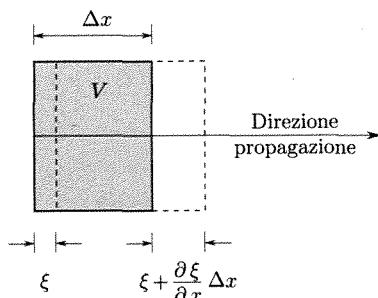


Fig. 9.16

È abbastanza facile dedurre Δp dalla variazione di ξ con x . Si consideri (fig. 9.16) un volume V cilindrico di fluido di sezione unitaria e asse nella direzione di propagazione delle onde piane. Sia la distanza fra le due facce piane in assenza di perturbazione Δx ($\ll \lambda$). Gli spostamenti dei piani estremi del cilindro a un certo istante per effetto della perturbazione siano rispettivamente ξ e $[\xi + (\partial\xi/\partial x)\Delta x]$. La variazione relativa del volume del cilindro è

$$(14) \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} .$$

Tale quantità è legata alla variazione di pressione Δp che l'ha determinata tramite il modulo di elasticità di compressione K (cap. 7, par. 7.6 e 7.12)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{K} ;$$

si ha quindi

$$(15) \quad \Delta p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} .$$

Se la ξ è data dalla (10)

$$\xi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

risulta

$$(16) \quad \Delta p = \frac{2\pi K A}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = k K A \sin(kx - \omega t)$$

in accordo con la (13).

Molto spesso si considera una grandezza, la condensazione s , che misura in un punto la variazione di densità dovuta al passaggio dell'onda. Essa è definita attraverso la densità ρ da

$$(17) \quad \rho = \rho_0 (1 + s)$$

essendo ρ_0 la densità del mezzo in assenza di perturbazione. Si osservi ora che la massa nel volume del cilindro di figura 9.16 non può variare per effetto della perturbazione, sicché

$$(18) \quad \rho_0 \Delta x = \rho(\Delta x + \Delta \xi).$$

Dalle (18) e (17) si ha, al limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$(1+s) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 1$$

e se s è piccolo, caso di piccole condensazioni, cioè di onde di piccola ampiezza

$$(19) \quad s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

La (15) può quindi anche scriversi

$$(20) \quad \Delta p = K s.$$

Si noti infine che la velocità con cui le particelle si muovono (da non confondersi con la velocità di propagazione c) è

$$(21) \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{\xi} = \frac{2\pi A c}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) = \omega A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

La pressione in un punto risulta quindi, per le (16) e (21), nelle onde piane proporzionale alla velocità di vibrazione nel punto stesso

$$(22) \quad \Delta p = \frac{K}{c} u = \frac{K}{c} \dot{\xi}.$$

Analogamente nelle onde piane progressive la velocità del moto delle particelle vale:

$$(23) \quad u = cs.$$

■ 9.7. ONDE PIANE LONGITUDINALI

Se ora vogliamo passare dal caso particolare di onde piane longitudinali sinusoidali a quello di onde longitudinali piane qualsiasi è facile trovare la espressione per lo spostamento dei punti in funzione del tempo e dello spazio. Si immagini infatti di considerare i due sistemi di riferimento della figura 9.15; in un istante qualsiasi la configurazione della perturbazione sia rappresentata nel sistema $x'y'z'$ da una funzione del tutto generale

$$(24) \quad \xi = f(x').$$

Se tale istante è scelto coincidente con l'istante in cui i due sistemi xyz e $x'y'z'$ coincidono e viene posto come origine dei tempi ($t = 0$) si può scrivere

$$(25) \quad \xi_{t=0} = [f(x')]_{t=0} = [f(x)]_{t=0}.$$

Per una perturbazione che si propaghi nella direzione positiva x , a un istante t generico si avrà

$$(26) \quad \xi = f(x - ct)$$

che è la equazione con cui si propaga lo spostamento (onda progressiva). Un'onda (che si propaghi) nella direzione negativa dell'asse x (onda regressiva) ha l'espressione

$$(27) \quad \xi = f(x + ct).$$

Si osservi che caratteristica fondamentale delle funzioni che rappresentano le onde è quella che la grandezza che rappresenta la perturbazione,

pur essendo dipendente dalle due variabili indipendenti spazio e tempo, vi dipende *esclusivamente* tramite la loro combinazione lineare

$$(28) \quad x \pm ct.$$

Ciò corrisponde al fatto che la perturbazione che si ha in un certo istante (t_1), in un dato punto (x_1) si ritrova in un altro punto (x_2) in un istante (t_2) diverso, essendo le distanze ($x_2 - x_1$) e gli intervalli di tempo ($t_2 - t_1$) legati alla velocità di propagazione da

$$(29) \quad \begin{aligned} x_1 \pm ct_1 &= x_2 \pm ct_2 \\ (x_2 - x_1) &= \pm c(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

In queste relazioni i segni + e - valgono rispettivamente per onde che si propagano nella direzione negativa o positiva dell'asse x .

■ 9.8. VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE ED EQUAZIONE DELLE ONDE LONGITUDINALI

Si vuole ora determinare l'effetto del mezzo di propagazione sulla velocità c dell'onda.

Prendiamo in considerazione un sistema di onde piane longitudinali aventi lunghezza d'onda λ , che si propaghi in una direzione x in un mezzo elastico (per es. solido). In accordo a quanto è stato detto, la presenza in vari punti (x diversi) allo stesso istante di spostamenti differenti, produce sforzi elasticci, diversi nelle varie sezioni x (anche la distribuzione di tali sforzi lungo la x è sinusoidale con lunghezza d'onda λ). Per concretare le idee, si consideri un piccolo volume cilindrico di sezione A e lunghezza Δx nella direzione di propagazione (fig. 9.17); nel seguito si supporrà $\Delta x \ll \lambda$ e molto piccolo per applicare il calcolo differenziale.

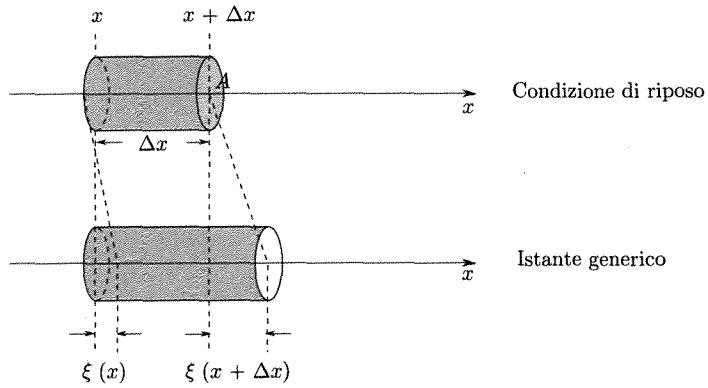


Fig. 9.17

Se indichiamo lo spostamento con ξ , la deformazione in ogni punto è rappresentata da

$$\varepsilon_l = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Essa perciò può essere posta pari a $\partial \xi / \partial x$ in corrispondenza alla prima

base del cilindro, mentre in corrispondenza alla seconda essa vale

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Delta x.$$

I corrispondenti sforzi elastici si ottengono, ammettendo la validità della legge di Hooke, dalla

$$(30) \quad \sigma = E \varepsilon_l$$

e quindi valgono sulle due basi

$$(31) \quad \begin{aligned} \sigma(x) &= E \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \sigma(x + \Delta x) &= E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x \right). \end{aligned}$$

La somma delle forze agenti sulle due facce piane del volume (a sezione unitaria) è diretta nel verso positivo delle x e vale

$$(32) \quad F_x = [\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)] \cdot A = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x A.$$

È questa la forza che produce l'accelerazione della massa $\rho \Delta x$ contenuta nel volume considerato. Per il II principio della dinamica

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x A = \rho \Delta x A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

da cui

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

L'analisi dimensionale, sia partendo dalla (33) sia partendo dalle dimensioni del modulo di Young e della densità, mostra che le dimensioni di E/ρ sono quelle del quadrato di una velocità. Cioè si può porre

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

con

$$(35) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

*Equazione delle onde
e velocità
di propagazione*

L'equazione (34) è risolta da una qualsivoglia funzione (fisica) delle variabili x e t , purché siano legate dalle relazioni (26) o (27). Infatti, per le derivate spaziali e temporali si ha, rispettivamente e in successione, per il caso $f(x - ct)$:

$$(36) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c f'(x - ct)$$

$$(37) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct)$$

essendo f' ed f'' le derivate rispetto alla variabile $(x - ct)$. Parimenti, si

ha:

$$(38) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(x - ct)$$

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(x - ct).$$

Facendo uso delle (37) e (39) si verifica che la generica funzione $f(x - ct)$ soddisfa l'equazione del moto (34) purché la velocità c sia scelta in modo da rispettare la (35).

La situazione descritta è verificata con buona approssimazione nel caso di onde longitudinali che si propagano lungo l'asse di una lunga e sottile sbarra cilindrica (diametro $d < \lambda$), avendo fatto uso per lo sforzo dell'equazione di Hooke (30), valida nel caso di una sbarra libera sulla superficie laterale. Nel caso di onde longitudinali in un mezzo solido di dimensioni indefinite si dovrà tenere conto dei vincoli laterali imposti dalla continuità del mezzo e la velocità in un mezzo omogeneo indefinito risulta allora

Velocità delle onde longitudinali

$$(40) \quad c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1-\mu-2\mu^2)}} > \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Tabella 9.1

	μ	c_1 (m/s) ($d < \lambda$)	c_2 (m/s) ($d \gg \lambda$)
Argento	0,38	2640	3600
Ferro	0,27	5170	5850
Nichel	0,30	4970	5630
Oro	0,42	2030	3240
Rame	0,35	3580	4606

Velocità delle onde nei gas

Velocità delle onde nei liquidi

essendo μ il coefficiente di Poisson (cap. 7, par. 7.7). La tabella 9.1 riporta per alcuni metalli il coefficiente di Poisson e le velocità in sbarre sottili (c_1) e nel mezzo indefinito (c_2) o che si possa ritenere approssimativamente tale (nel caso di sbarre longitudinali in metalli, velocità di propagazione di onde in sbarre (c_1) e con diametro $d \ll \lambda$).

Nel caso di propagazione in un fluido nessuna deformazione trasversale si associa alla deformazione nella direzione di propagazione delle onde longitudinali. In un gas il modulo di compressione di volume adiabatico⁽⁶⁾, γp , (cap. 7, par. 7.12) prende il posto del modulo di Young nella (35), fornendo la espressione di Laplace per la velocità delle onde longitudinali

$$(41) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

in accordo con l'esperienza, in un campo di frequenze molto ampio.

Nei liquidi, in maniera analoga, la (40) può porsi

$$(42) \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho \beta_{ad}}}$$

essendo β_{ad} il coefficiente di compressibilità adiabatica.

Nelle tabelle 9.2 e 9.3 sono riportate le velocità di propagazione di onde longitudinali in aria a diverse temperature e in alcuni altri gas, li-

⁽⁶⁾ Il lavoro eseguito su un elemento di volume dagli elementi contigui durante una compressione produce calore che non può essere portato via rapidamente, cioè prima che la compressione sia terminata e questo causa una variazione di temperatura dell'elemento stesso; entro un vasto campo di frequenze dell'onda si può ammettere che un elemento di volume durante le compressioni e le espansioni non scambi quantità di calore con l'esterno (ipotesi di adiabaticità).

quidi e solidi; nel caso dei solidi si tratta della propagazione in mezzi praticamente illimitati.

Va richiamata l'importanza della equazione (34) qui trovata per la propagazione di onde piane longitudinali in un mezzo elastico; per quanto detto nel precedente paragrafo, questa equazione è soddisfatta dalla somma di due funzioni ché rappresentano rispettivamente un'onda progressiva e un'onda regressiva che si propagano nella direzione x con la velocità c propria del mezzo. In altri termini *la più generale soluzione della equazione differenziale* (34) valida per la propagazione di onde piane longitudinali ha la forma

$$(43) \quad \xi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

essendo f_1 e f_2 funzioni arbitrarie derivabili due volte, determinabili nei singoli casi sulla base di altre informazioni particolari.

Il caso di onde sinusoidali progressive corrisponde a $f_2 = 0$ ed f_1 funzione di tipo sinusoidale.

Nella (34) entrano gli spostamenti dalla posizione di riposo; relazioni analoghe possono essere scritte per altri parametri che caratterizzano l'onda. In genere è

$$(44) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x^2}$$

con θ lo spostamento (ξ), la velocità delle particelle (u), la pressione (Δp), la densità (ρ), la condensazione (s).

Vediamo come possa ottersi la equazione (44) per le velocità delle particelle ($u = \dot{\xi}$) in maniera diretta. Si consideri ancora il cilindro di figura 9.17 e scriviamo per esso la equazione di continuità e il II principio della dinamica.

1. Equazione di continuità

La massa che nel tempo dt entra attraverso la prima base, in corrispondenza alla quale la densità è ρ e la velocità u , è

$$\rho u A dt.$$

La massa che esce dall'altra estremità, ove il prodotto ρu ha un valore diverso da quello sulla prima base, è

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x \right] A dt.$$

Ne risulta un aumento della massa nel cilindro, pari a

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x A dt.$$

La condizione di continuità (cap. 8, par. 8.10) richiede che tale aumento corrisponda a un accumulo di massa nell'elemento nel tempo dt :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A \Delta x dt = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) A \Delta x dt$$

cioè

$$(45) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0.$$

Introducendo la condensazione s secondo la equazione continuità della massa

$$\rho = \rho_0(1 + s)$$

e trascurando il prodotto su rispetto ad u , la (45) si scrive

$$(46) \quad \frac{\partial}{\partial t} [\rho_0(1 + s)] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 u) = 0$$

Tabella 9.2 Velocità di propagazione di onde longitudinali in aria (1 atm)

t (°C)	c (m/s)
-140	227
-80	278
-40	306,5
-10	325,6
0	331,8
10	337,8
20	343,8
30	349,6
40	355,3
60	366,5
80	377,5
100	387,2
140	408
200	407
400	521
600	593
800	658
1000	717

Tabella 9.3 Velocità di propagazione di onde longitudinali

Sostanza	Temperatura (°C)	Velocità (m/s)
<i>Gas e vapori</i>		
Ossigeno	0	316
Idrogeno	0	1284
Azoto	0	334
Argon	0	319
Elio	0	965
Anidride carbonica	0	259
Benzolo	97	202
Tetracloruro di carbonio	97	145
<i>Liquidi</i>		
Acqua	25	1497
Acetone	20	1190
Alcool etilico	20	1168
Benzolo	20	1326
Glicerina	20	1923
Mercurio	20	1451
Ossigeno	-182,9	912
Toluolo	25	1308
<i>Solidi</i>		
Alluminio	20	6260
Platino	20	3960
Ghiaccio	-4	3232
Vetro flint	20	4800
Quarzo fuso	20	5570

o anche

$$(47) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Derivando rispetto a x si ottiene

$$(48) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

2. Equazione del moto

La forza che agisce sull'elemento cilindrico è diretta secondo x ed è pari a

$$(49) \quad F_x = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \right] A = -\frac{\partial p}{\partial x} A \Delta x.$$

Per ottenere la derivata totale della quantità di moto (che qui indichiamo $\bar{p} = \rho A \Delta x u$ per non generare confusioni con la pressione) occorre considerare che la velocità della particella u varia con t sia perché u è direttamente funzione del tempo sia perché varia la posizione dell'elemento; in altri termini u è funzione di t sia direttamente sia tramite x . Si ha quindi

$$(50) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La derivata della quantità di moto è

$$(51) \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \rho \Delta x A \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Nel caso di onde di piccola ampiezza, quando u è molto piccola [$u \ll c$ (velocità di propagazione)] si può trascurare il secondo termine fra parentesi e scrivere

$$(52) \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}.$$

L'equazione del moto risulta perciò

$$(53) \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Se al posto di p si pone Ks , secondo la (20) (scrivendo p per Δp) e si deriva rispetto al tempo si ha

$$(54) \quad K \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Facendo sistema della (48) e della (54) e ricordando che $K/\rho = c^2$

$$(55) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

che è l'equazione cercata.

■ 9.9. TRASPORTO DI ENERGIA E INTENSITÀ DI UN'ONDA

Una caratteristica delle onde, come si è detto, è quella di trasferire energia ordinata dalla sorgente che le genera a punti del mezzo lontani da essa: il moto di questi infatti richiede energia che deve essere fornita dall'onda.

Per un'onda che si propaga in un mezzo si considera innanzitutto la densità volumica di energia ε nell'intorno di un punto. Nel caso in cui le caratteristiche dell'onda (ampiezza) non varino rapidamente nello spazio si può definire la densità di energia nell'intorno di un punto P come l'energia delle particelle contenute nell'unità di volume intorno a P , posseduta per effetto delle oscillazioni causate dall'onda. Nel caso generale, per definire la densità di energia nell'intorno di un punto P , si può considerare un volume ΔV intorno a P e il rapporto tra l'energia di oscillazione delle

particelle in esso e ΔV ; la densità di energia è il limite di tale rapporto per $\Delta V \rightarrow 0$. La densità di energia si misura nel SI in J/m^3 .

Analogamente si introduce la intensità dell'onda (J) in un punto, come la energia, trasportata dall'onda, che passa in un secondo attraverso una superficie di area unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione dell'onda nel punto considerato. Nel caso generale si può considerare una superficie ΔS intorno al punto disposta normalmente alla direzione di propagazione in esso e il rapporto fra l'energia trasportata in un secondo dall'onda attraverso ΔS e ΔS stesso. L'intensità dell'onda nel punto è il limite di tale rapporto per $\Delta S \rightarrow 0$. L'intensità dell'onda si misura nel SI in W/m^2 .

Per illustrare ulteriormente questi concetti e la relazione fra loro, nella figura 9.18 viene considerato il caso delle onde piane: in un piano normale alla direzione di propagazione sono segnate due finestre di area unitaria intorno a due punti (P_1 , P_2 , peraltro equivalenti). La densità ϵ in P_1 è l'energia contenuta in un cubo di lato unitario. L'intensità in P_2 è l'energia che passa attraverso la finestra in un secondo e quindi quella contenuta in un parallelepipedo a sezione unitaria e lunghezza pari a c . Nel caso di onde piane quindi:

$$(56) \quad J = c\epsilon.$$

Si vuole calcolare per le onde piane il valore di ϵ in un mezzo. Assumiamo, per ora, che non vi siano dissipazioni di energia e che quindi tutte le particelle si muovano di moto armonico con la stessa ampiezza A e la medesima pulsazione ω .

Densità e intensità dell'energia

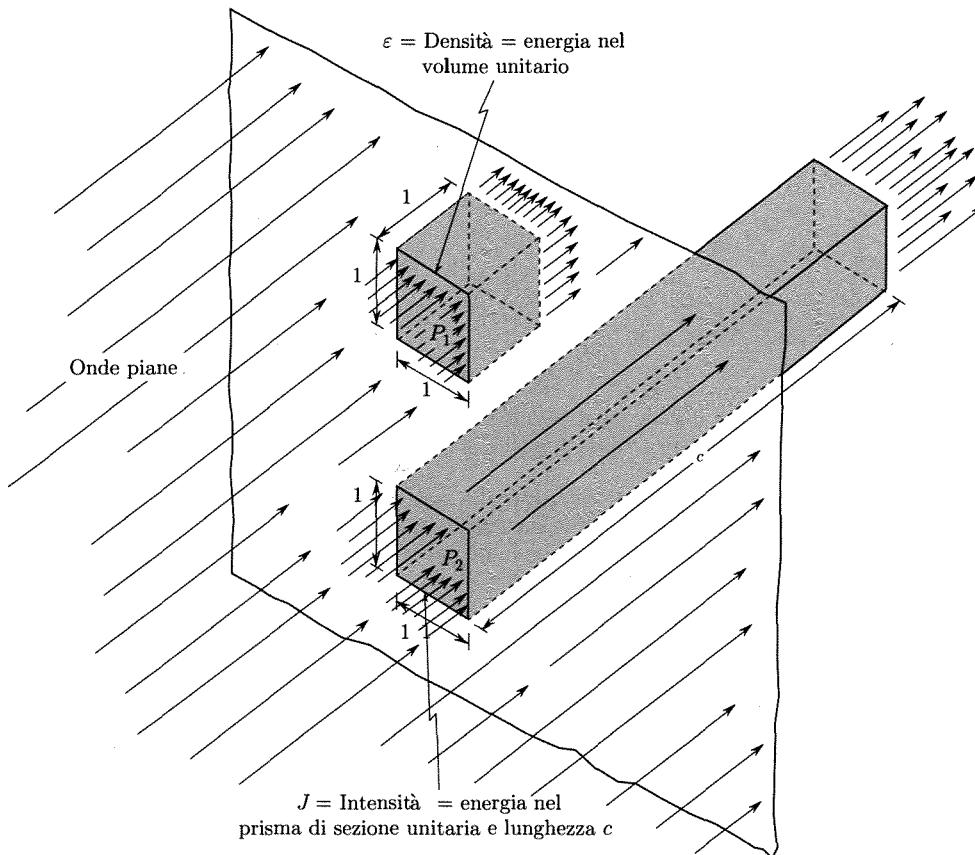


Fig. 9.18

Ricordiamo (cap. 3, par. 3.7) che un oscillatore armonico possiede energia cinetica ed energia potenziale che variano sinusoidalmente durante un ciclo (con frequenza doppia di quella dell'oscillatore) ma la loro somma, cioè l'energia meccanica totale, è costante, e pari al valore massimo dell'energia cinetica (o di quella potenziale). Nel caso presente per la massa dell'oscillatore si dovrà considerare la massa $\rho\Delta x$ contenuta in un volumetto prismatico di base unitaria e altezza Δx nella direzione dell'onda, con ρ densità di massa; la velocità della particella, dalla (10), risulta

$$(57) \quad u = \dot{\xi} = A\omega \sin \omega \left(\frac{x}{c} - t \right)$$

e ha il valore massimo

$$u_{\max} = A\omega.$$

L'energia meccanica contenuta nel volumetto considerato è allora:

$$(58) \quad \frac{1}{2}\rho\Delta x u_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta x\omega^2 A^2$$

e quella nell'unità di volume

$$(59) \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

è la densità di energia. La intensità dell'onda J è per la (56):

$$(60) \quad J = \frac{1}{2}\rho c\omega^2 A^2.$$

Si osservi che J è proporzionale:

1. al prodotto ρc , che rappresenta le caratteristiche del mezzo ed è chiamato impedenza caratteristica del mezzo;
2. ai quadrati di ω ed A .

Nel caso di onde di forma diversa la densità di energia e la intensità hanno in genere espressioni più complicate delle (59) e (60) in funzione delle altre grandezze caratteristiche dell'onda.

Nel caso per es. di onde sferiche si trova (essendo $k = 2\pi/\lambda$)

$$(61) \quad \varepsilon = \frac{\rho A^2 k^2}{32\pi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2k^2 r^2} \right)$$

$$(62) \quad J = \frac{\rho A^2 r^2}{32\pi^2 r^2} c$$

e quindi

$$(63) \quad \varepsilon = \frac{J}{c} \left(1 + \frac{1}{2k^2 r^2} \right).$$

Solo a grandi distanze dalla sorgente il secondo termine in parentesi nelle (61) e (63) è trascurabile rispetto a 1 e la relazione fra ε e J è ancora quella valida per onde piane.

Si ottiene comunque il risultato che ε e J sono proporzionali a ω^2 e A^2 . Si osservi inoltre che, se ci si limita a considerare regioni sufficientemente piccole e lontane dalla sorgente cosicché le onde possano essere ritenute approssimativamente piane, si possono ancora usare le (59) e (60): naturalmente A è funzione del punto che si considera.

9.10. ASSORBIMENTO E DISPERSIONE

Nei precedenti paragrafi si è ammesso che l'ampiezza delle oscillazioni armoniche nei vari punti investiti da un'onda *piana* sinusoidale fosse ovunque la stessa. In realtà sono sempre presenti fenomeni dissipativi che convertono parte dell'energia meccanica in energia termica; di conseguenza, l'ampiezza dell'onda si attenua con la distanza della sorgente.

Se si considerano onde piane e si suppone che abbiano ampiezza A in un certo punto a distanza x dall'origine, tale ampiezza si riduce di dA dopo un percorso dx nel mezzo. Tale dA può porsi proporzionale a dx e in genere anche ad A , cioè

$$(64) \quad dA = -\alpha A dx$$

essendo α un coefficiente che ha le dimensioni nell'inverso di una lunghezza ed è chiamato coefficiente di assorbimento. Il segno meno denota che A decresce per dx positivo.

L'ampiezza, quindi (fig. 9.19), varia dal valore A_0 che ha alla sorgente secondo la relazione

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = - \int_0^x \alpha dx$$

cioè

$$(65) \quad \ln \frac{A}{A_0} = -\alpha x \\ A = A_0 e^{-\alpha x}.$$

Per l'intensità (proporzionale a A^2) vale la

$$(66) \quad J = J_0 e^{-2\alpha x}.$$

Gli effetti dissipativi possono avere diverse origini e in genere variano con la frequenza. Si vogliono qui riportare i più importanti di essi. Il moto delle particelle investite dall'onda è ostacolato dalla viscosità nei fluidi: si ha per il coefficiente di assorbimento (Stokes)

$$(67) \quad \alpha_\eta = \frac{8}{3} \frac{\pi^2 \nu^2}{c^2} \eta.$$

Durante la propagazione delle onde longitudinali i vari strati sono alternativamente sottoposti a compressioni e decompressioni, durante le quali si ha rispettivamente riscaldamento e raffreddamento del mezzo: l'assenza di dissipazioni richiederebbe che l'energia meccanica trasformata in energia termica durante la compressione venisse integralmente restituita durante la decompressione. Ciò in realtà non si verifica sia a causa della conducibilità termica del mezzo, sia per l'irraggiamento per cui energia termica fluisce dalle zone calde a quelle fredde: tale energia viene sottratta all'onda. Il coefficiente di assorbimento α_c dovuto alla conducibilità termica, come α_η , dipende dal quadrato della frequenza. Esso è dato (Kirchhoff) da

$$(68) \quad \alpha_c = \frac{2\pi^2 \nu^2}{c^3} \frac{\gamma - 1}{c_p} K$$

essendo K il coefficiente di conducibilità termica (cap. 13, par. 13.9), c_p il calore molare a pressione costante e $c_p/c_v = \gamma$ il rapporto tra i calori molari a pressione e a volume costante (cap. 14, par. 14.9).

Il coefficiente α_c nei fluidi è in genere minore di α_η e spesso può essere trascurato.

Vi sono poi numerosi altri processi di interazione fra la sollecitazione meccanica prodotta dalle onde e le particelle che costituiscono il mezzo; tali processi conducono in genere a dissipazioni se le onde hanno frequenza compresa in determinati campi.

Nel seguito si descrive uno di questi fenomeni. Onde piane vengono generate mediante un pistone che si muova di moto armonico in CO₂ gassoso mantenuto a una certa pressione media. Le molecole di CO₂ urtate dal pistone acquistano da questo energia e sovrappongono al loro moto disordinato preesistente quello prodotto dal pistone. Esse non sono sfere rigide, ma sono formate da tre atomi tenuti in una struttura che può essa stessa oscillare (modi di vibrazione interna). L'energia cinetica presa dalle molecole urtate dal pistone, in seguito a urti fra le molecole, va

*L'assorbimento
di un'onda in funzione
della distanza percorsa
decresce
esponenzialmente*

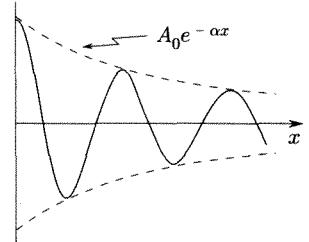


Fig. 9.19

*Assorbimento dovuto alla
viscosità del fluido*

*Assorbimento dovuto alla
conducibilità
termica*

*Assorbimento dovuto
a ridistribuzione
di energia tra i gradi
di libertà interni*

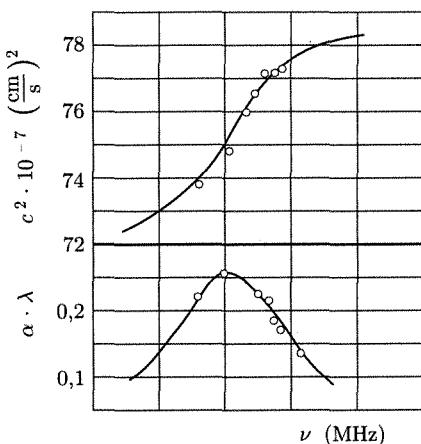


Fig. 9.20

nei gradi di libertà interni e da questi viene restituita durante la fase di decompressione. Il processo di distribuzione dell'energia fra gradi di libertà di traslazione e di vibrazione richiede un certo tempo, τ , caratteristico per la molecola⁽⁷⁾. Se il periodo dell'onda è grande rispetto a τ gli scambi avvengono senza difficoltà; quando, invece, il periodo dell'onda è dello stesso ordine di τ il flusso d'energia verso, o da, i gradi di libertà di vibrazione segue con ritardo le condizioni esterne (pressione) in cui si trovano le molecole del gas. Ciò conduce a dissipazioni di energia in un certo campo di frequenza; in altri termini α è funzione di ν e può assumere valori elevati in alcuni intervalli di frequenza. La figura 9.20 riporta il quadrato della velocità (c^2) e l'assorbimento per un intervallo di una lunghezza d'onda ($\alpha\lambda$) nel caso di CO_2 (Leonard) a 25 °C e alla pressione di 1 atm:

Altre cause di assorbimento si presentano se il mezzo non è omogeneo come quando si ha una sospensione; in tal caso si ha una riduzione dell'energia nel fascio anche perché parte di essa viene diffusa fuori di esso (scattering).

La presenza di fenomeni di assorbimento nel mezzo di propagazione ha effetti sulla velocità di propagazione. Le considerazioni precedentemente svolte sulla velocità di propagazione sono state fatte prescindendo dalla presenza dell'assorbimento; in realtà anche cause molto comuni di assorbimento, quali la viscosità e la conducibilità termica, producono effetti sulla velocità di propagazione che diviene funzione della frequenza. Questa dipendenza di c da ν è particolarmente evidente quando si verificano fenomeni di rilassamento del tipo descritto.

Il fatto che la velocità dipenda dalla frequenza è normalmente indicato con il nome di dispersione della velocità di propagazione.

■ 9.11. ONDE LONGITUDINALI SFERICHE

Consideriamo il caso di onde longitudinali sferiche che si originino in un punto e si propaghino con velocità c in tutte le direzioni di un mezzo omogeneo che si suppone privo di assorbimento. Se la perturbazione è generata da una sorgente che vibra armonicamente, la vibrazione lungo ogni raggio che parta dalla sorgente ha l'espressione

$$(69) \quad \xi = A(r) \cos 2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = A(r) \cos \omega \left(\frac{r}{c} - t \right).$$

L'ampiezza delle oscillazioni si riduce al crescere di r , giacché l'energia emessa dalla sorgente e trasportata dall'onda sferica si va ripartendo su superfici di area gradatamente crescente: aumenta infatti al crescere di r la superficie (sferica) investita dall'onda; di conseguenza, la densità di energia deve decrescere con il quadrato di r . Siccome la densità di energia è (par. 9) proporzionale al quadrato dell'ampiezza di vibrazione, si deduce che quest'ultima grandezza deve decrescere linearmente con r .

(7) È bene notare che la presenza di questi fenomeni (rilassamento) nella distribuzione dell'energia fra i gradi di libertà delle particelle costitutive del sistema si rispecchia in un calore specifico (cap. 14, par. 14.9) funzione della frequenza. Si esaminerà in seguito (cap. 15 e 16) l'importante questione dei calori specifici: qui si vuole osservare che lo studio della propagazione di onde elastiche nei mezzi naturali costituisce il metodo sperimentale per esaminare la dipendenza dei calori specifici e dei coefficienti di compressibilità dalla frequenza.

Se A_0 è l'ampiezza dell'onda alla sorgente, si ha quindi

$$(70) \quad \xi = \frac{1}{r} A_0 \cos \omega \left(\frac{r}{c} - t \right). \quad \text{Onde sferiche}$$

La trattazione fisico-matematica del problema della propagazione di onde elastiche (per es. longitudinali) nello spazio a tre dimensioni è notevolmente più complicata del caso delle onde piane, anche se si considera la propagazione di semplici onde sferiche. In questa trattazione conviene osservare inizialmente che il moto delle particelle investite da onde longitudinali è *irrotazionale* (cap. 8, par. 8.8) e pertanto si può introdurre una funzione delle coordinate del posto (x, y, z) , detta potenziale della velocità $\psi(x, y, z)$ (cap. 8, par. 8.8), tale che le componenti della velocità (u_x, u_y, u_z) in un punto (spostamento ξ, η, ζ) siano

$$(71) \quad u_x = \dot{\xi} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad u_y = \dot{\eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_z = \dot{\zeta} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \psi.$$

Si trova allora per la propagazione di onde longitudinali con velocità c in uno spazio a tre dimensioni l'equazione generale, detta di D'Alembert:

$$(72) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi$$

essendo

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

A giustificazione della (72), si vuole fare vedere come si giunga, nel caso di onde piane, alla equazione

$$(73) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

alla quale la (72) si riduce. Si consideri la maniera in cui l'equazione (55) è stata ottenuta per un elemento di volume $dx dy dz$ dall'equazione (53) del moto prodotto dalla perturbazione che si propaga nella direzione x e dall'equazione di continuità (47)

$$(74) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$(75) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La (74) può scriversi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

e scambiando d'ordine la derivazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

da cui, ricordando la (20):

$$(76) \quad p = Ks = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Si ottiene quindi, ponendo $K/\rho = c^2$

$$(77) \quad s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Se si sostituisce ora nell'equazione di continuità (75) la (77) e la espressione di definizione di ψ ,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

si ottiene la (73).

Nel caso di onde sferiche, nelle quali il moto di un punto avviene lungo il raggio, la equazione delle onde diviene

$$(78) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = c^2 \frac{\partial}{\partial r^2}(r\psi)$$

essendo r la distanza del punto che si considera dal centro delle onde. Si osservi per le operazioni di derivazione nella (78) che r non dipende dal tempo.

Si può mostrare che la soluzione generale della equazione (78) può essere scritta nella forma ⁽⁸⁾

$$(79) \quad \psi = \frac{1}{r}[f_1(ct+r) + f_2(ct-r)]$$

essendo f_1 e f_2 due funzioni arbitrarie che dipendono esclusivamente da $ct+r$ e $ct-r$, rispettivamente, e che quindi rappresentano due onde sferiche che si propagano con la velocità c in senso inverso: la prima convergente verso il centro, l'altra divergente. Si osservi la presenza del fattore $1/r$, il quale mostra che l'ampiezza della perturbazione decresce con la distanza dalla sorgente, come si era già stabilito considerando gli spostamenti (69). Le funzioni f_1 e f_2 vanno stabilite nei vari casi in base ad altre informazioni a essi relative. Nel caso di una semplice onda divergente sinusoidale si ha

$$(80) \quad \psi = \frac{1}{r}f_2(ct-r) = \frac{A_0}{r} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r-ct) = \frac{A_0}{r} \cos k(r-ct).$$

La pressione e la condensazione sono legate a ψ da relazioni uguali a quelle stabilite per onde piane, (76) e (77), sicché:

$$(81) \quad p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{A_0}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \rho c \sin \frac{2\pi}{\lambda}(r-ct) = \frac{A_0 k \rho c}{r} \sin k(r-ct)$$

$$(82) \quad s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{A_0 k}{rc} \sin k(r-ct).$$

Sia la pressione che la condensazione variano lungo un qualsiasi raggio nella stessa maniera (a parte la fase) dello spostamento. Per la velocità delle particelle invece si ha

$$(83) \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{A_0 k}{r} \sin k(r-ct) + \frac{A_0}{r^2} \cos k(r-ct).$$

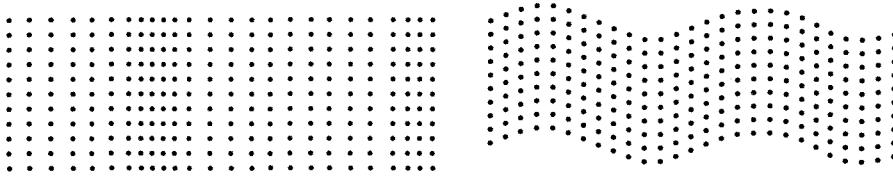
Solo a grandi distanze, quando il secondo termine è divenuto piccolo rispetto al primo, la velocità delle particelle oscilla con un'ampiezza che decresce come $1/r$.

9.12. ONDE TRASVERSALI

Tutto ciò che si è dedotto per le onde longitudinali è nella sostanza valido per tutte le onde e quindi in particolare per le onde elastiche trasversali, per le quali si vuole ora ricavare l'espressione della velocità di propagazione in funzione dei parametri caratteristici del mezzo.

La figura 9.21 mostra il confronto fra gli spostamenti delle particelle in un'onda longitudinale (*a*) e in un'onda trasversale (o di taglio, *b*) in un mezzo elastico che può mantenere sforzi di taglio (solido, o liquido a frequenza sufficientemente elevata. Si noti che in questo ultimo caso, a differenza di quello delle onde longitudinali, non si ha alcuna variazione di densità). Calcoli analoghi a quelli visti per onde longitudinali danno per

⁽⁸⁾ L'espressione (79) è stata ottenuta assumendo una sorgente puntiforme. Mentre questa ipotesi non crea difficoltà per l'onda divergente, essa rende non utilizzabile l'espressione trovata per l'onda convergente se si vuole considerare l'onda fino a $r = 0$ (a causa del fattore $1/r$): in tal caso occorre portare in conto le dimensioni finite della sorgente.



a)

b)

Fig. 9.21

la velocità di propagazione

$$(84) \quad c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Velocità delle onde trasversali in un mezzo

essendo G il modulo di elasticità di scorrimento.

La tabella 9.4 riporta valori di c_t in alcuni solidi.

Tabella 9.4 Velocità di propagazione di onde trasversali

Sostanza	Temperatura (°C)	Velocità (m/s)
Alluminio	20	3080
Argento	20	1590
Ferro	20	3230
Oro	20	1200
Nichel	20	2960
Platino	20	1670
Ghiaccio	-4	1990
Vetro flint	20	2950
Quarzo fuso	20	3515

Un altro caso di onde trasversali è quello delle onde che si possono produrre su una corda tesa (fig. 9.22). In tal caso la velocità risulta

$$(85) \quad c_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Velocità delle onde trasversali in una corda tesa

essendo T la forza di tensione cui è sottoposta la corda e μ la densità lineica della corda.

La (85) può ottersi come segue. Sia (fig. 9.22a, dove gli spostamenti sono aumentati in scala per chiarezza) un tratto abc di una corda tesa spostata leggermente dalla sua posizione lungo l'asse x in una vibrazione puramente trasversale. La figura 9.22b ingrandisce una porzione Δx di interesse della corda. Essendo piccoli gli spostamenti secondo y , si può assumere che la forza di tensione T abbia intensità costante lungo la corda. La componente secondo y della tensione in x è:

$$(86) \quad T_y(x) = -T \sin \theta.$$

Poiché θ è piccolo, è $\sin \theta \simeq \tan \theta = dy/dx$ e quindi

$$(87) \quad T_y(x) = -T \frac{dy}{dx}.$$

Analogamente in c

$$(88) \quad T_y(x + \Delta x) = T \sin(\theta + \Delta\theta) \simeq T \left(\sin \theta + \frac{\partial}{\partial x} (\sin \theta) \Delta x \right)$$

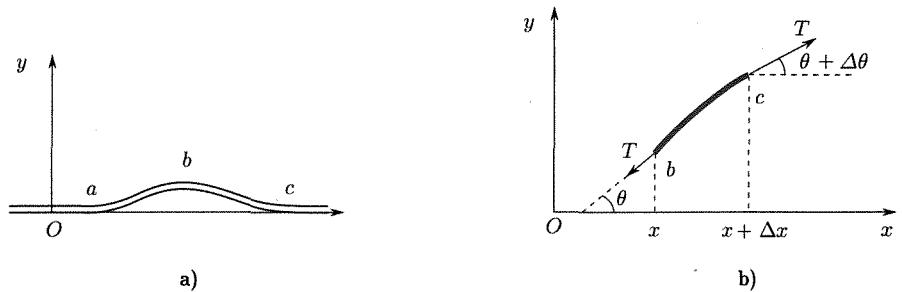


Fig. 9.22

e, successivamente:

$$(89) \quad T_y(x + \Delta x) = T \left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta x \right]$$

$$(90) \quad T_y(x + \Delta x) = T \frac{\partial y}{\partial x} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x.$$

La componente della forza totale agente sull'elemento Δx nella direzione y è

$$(91) \quad T_y(x) + T_y(x + \Delta x) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta y.$$

Per il II principio della dinamica, essendo μ la densità per unità di lunghezza, si ha

$$(92) \quad T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ovvero

$$(93) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

che è [vedi (33) e (35)] l'equazione delle perturbazioni elastiche che si propagano con la velocità (85).

■ 9.13. ONDE SU SUPERFICI LIQUIDE

Anche nel caso di una perturbazione prodotta sulla superficie di un liquido in quiete nel campo gravitazionale terrestre, si giunge per l'ampiezza di oscillazione a un'equazione delle onde, analoga a quella generale (72), o a quella ora dedotta (93). A parte la particolare geometria di propagazione, dovuta al fatto che la perturbazione si propaga su una superficie anziché in uno spazio tridimensionale, l'equazione si differenzierà per il valore diverso della costante corrispondente al quadrato della velocità di propagazione. È esperienza comune, di fatto, che la velocità di propagazione delle onde sulla superficie dei liquidi è di gran lunga inferiore a quella delle onde di volume.

Per le onde di superficie la traiettoria delle singole particelle è (fig. 9.5) ellittica. Quando una parte del fluido è spinta fuori (sopra o sotto) della superficie per l'urto di qualche oggetto o per l'azione di qualche forza come quella del vento, si destano forze di richiamo dovute alla gravità e alla tensione superficiale, σ (cap. 15, par. 15.26).

Nello studio del processo si trova per la velocità delle onde che si determinano sulla superficie la espressione⁽⁹⁾

$$(94) \quad c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

essendo g l'accelerazione di gravità, σ la tensione superficiale, ρ la densità del liquido, h la profondità della massa liquida e λ la lunghezza d'onda.

Nel caso di *acque profonde*, quando è $h \gg \lambda/2$, la tangente iperbolica è all'incirca pari a 1 e si ha

$$(95) \quad c \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}.$$

Se λ è grande (nel caso dell'acqua $\lambda > 10$ cm) il secondo termine sotto il radicando può essere trascurato: la forza di richiamo è essenzialmente data dalla forza di gravità e le onde si chiamano di onde di gravità. Quando invece λ è piccolo (in acqua $\lambda < 3$ mm) il primo termine può essere trascurato rispetto al secondo: in questo caso la forza di richiamo è data dalla tensione superficiale e le onde si chiamano onde capillari. Nel campo di λ intermedio fra i valori indicati entrambi i termini nel radicando hanno importanza. La forma del radicando è tale che in questa regione di λ , c ha un minimo (fig. 9.23) che vale

$$(96) \quad c_{\min} = \sqrt[4]{\frac{4\sigma g}{\rho}}$$

e si ha per

$$(97) \quad \lambda_{\min} = \sqrt{\frac{4\pi^2\sigma}{\rho g}}.$$

Per l'acqua si ha $c_{\min} = 23,2$ cm/s e $\lambda_{\min} = 1,73$ cm.

Nel caso di *acque profonde*, cioè per h/λ sufficientemente piccolo ($< 0,01$) in modo che la tangente iperbolica possa essere sostituita dall'argomento, la (94) fornisce

$$(98) \quad c = \sqrt{\left(g + \frac{4\pi^2\sigma}{\rho\lambda^2}\right) h}.$$

Se in particolare λ è maggiore di qualche centimetro, il secondo termine del radicando può essere trascurato e

$$(99) \quad c = \sqrt{gh}.$$

Si vede quindi che nel caso di acque poco profonde (fig. 9.24) la velocità di propagazione al crescere di λ finisce per divenire indipendente da λ ; essa allora dipende solamente dalla radice quadrata dello spessore del liquido. Sono di questo ultimo tipo le onde che, generate in mare aperto, si avvicinano a riva: la riduzione della velocità del fronte d'onda più vicino alla costa giustifica il fatto che tutte le onde giungono a riva normalmente alla linea di costa.

Si osservi che nelle formule (94), (95) e (99) la velocità delle onde di superficie è funzione della lunghezza d'onda, quindi della frequenza, dell'onda (dispersione).

La velocità delle onde di superficie ha un termine di gravità e uno di capillarità

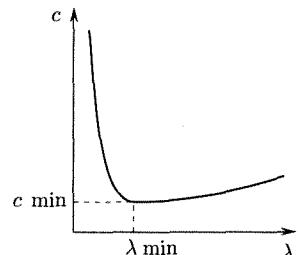


Fig. 9.23

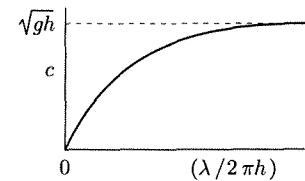


Fig. 9.24

■ 9.14. SOVRAPPOSIZIONE E INTERFERENZA DI ONDE

Si consideri una regione dello spazio nella quale si propaghino contemporaneamente due o più onde (di piccola ampiezza). In accordo con il principio di sovrapposizione, ciascuna di esse si propaga come se le altre non fossero presenti; nella zona di sovrapposizione tuttavia il moto delle singole particelle è il risultante dei moti dovuti alle singole onde. La

⁽⁹⁾ Si ricordi che $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

composizione degli spostamenti è una composizione di vettori che si riduce a una somma algebrica solo se gli spostamenti dovuti alle varie onde avvengono nella stessa direzione.

Con il nome di interferenza si indica l'effetto dell'azione contemporanea di due o più onde in una certa regione dello spazio; come si vede il termine *interferenza* sarebbe sinonimo di sovrapposizione. A volte si limita il significato di interferenza alla considerazione solamente di quei casi, che poi sono quelli che interessano, nei quali gli effetti combinati delle varie onde producono una distribuzione nello spazio di energia (oltre che di ampiezza e di altre grandezze) notevolmente diversa da quella dovuta alle singole onde. Casi evidenti di questo genere si hanno per es. quando punti della regione investita dalle onde restano in quiete nonostante che ciascuna onda per proprio conto ne causerebbe uno spostamento.

Vari casi molto interessanti e importanti per lo studio della propagazione di onde possono verificarsi in seguito alla interferenza di due o più onde sinusoidali. Nei paragrafi 9.15, 9.16 e 9.18 considereremo casi di onde sinusoidali che si propagano nella stessa direzione, mentre nel par. 9.17 considereremo il caso di onde sferiche emesse da sorgenti diverse.

■ 9.15. ONDE COMPLESSE. VELOCITÀ DI FASE E VELOCITÀ DI GRUPPO

Si consideri prima di tutto il caso della propagazione in un mezzo di un'onda complessa, emessa da un'unica sorgente: la perturbazione è in ogni punto la somma algebrica delle perturbazioni causate dalle singole componenti armoniche, dato che in ogni punto queste si propagano nella stessa direzione. Se il mezzo non è dispersivo le singole componenti si propagano tutte con la stessa velocità di propagazione c , qual è stata considerata finora e che caratterizza la rapidità con la quale una certa fase dello stato di moto sinusoidale delle particelle si propaga nel mezzo: tale velocità è anche detta velocità di fase. Di conseguenza la forma della perturbazione rimane inalterata (supponendo di poter trascurare l'assorbimento).

Quando invece il mezzo è dispersivo la propagazione di una perturbazione complessa è meno semplice: in particolare, l'onda cambia continuamente la propria forma poiché *le onde componenti si propagano con velocità diversa e quindi varia da punto a punto la fase con cui ciascuna di esse entra nella composizione*.

Un tipo molto importante di onda composta è quello chiamato gruppo di onde nel quale la perturbazione ha una forma approssimativamente sinusoidale, con una lunghezza d'onda λ abbastanza ben definita, ma ha una estensione limitata nella direzione di propagazione (fig. 9.25). È possibile vedere, mediante l'analisi di Fourier, che questa perturbazione è prodotta dalla sovrapposizione di onde sinusoidali di lunghezze d'onda poco diverse distribuite in un intervallo $\Delta\lambda$ intorno a λ , che interferiscono costruttivamente nella regione del gruppo e che si annullano nel resto dello spazio.

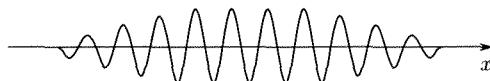


Fig. 9.25

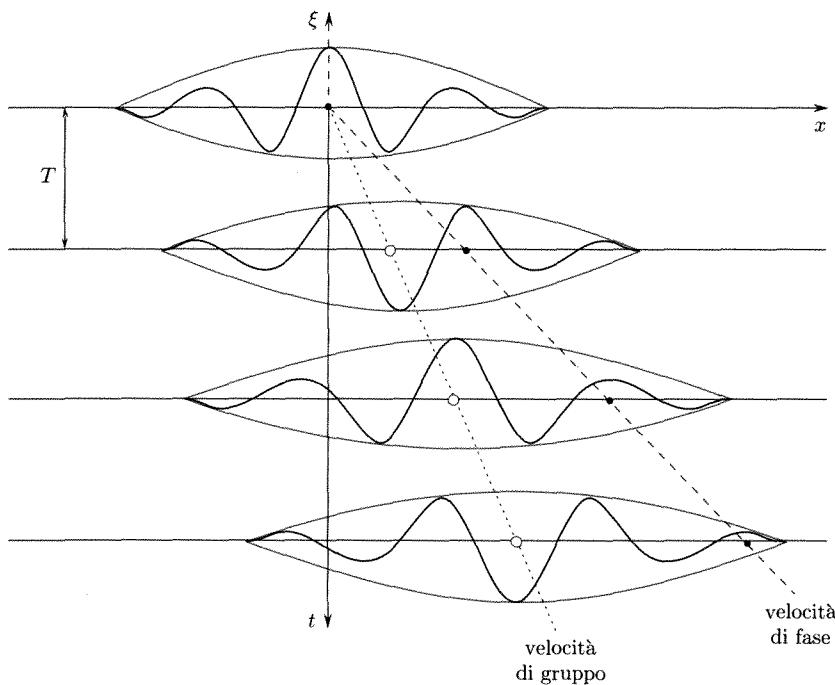


Fig. 9.26

La figura 9.26 fornisce un esempio di come può cambiare il profilo di un'onda complessa se il mezzo è dispersivo e quindi le varie componenti viaggiano a velocità diverse, anche se poco diverse. Il primo grafico rappresenta la forma del gruppo a un certo istante, gli altri si riferiscono a istanti differenti da quello iniziale di T , $2T$, $3T$ essendo T il periodo della armonica più intensa. Se si pone attenzione a una cresta all'istante iniziale, siccome essa coincide con il massimo di un'onda componente al quale danno contributo positivo altre componenti in fasi opportune, essa si muove nello spazio con la velocità della prima onda, cioè con la *velocità di fase* (non molto diversa per le varie onde componenti): il valore della cresta varia nel tempo (aumentando o diminuendo). La linea a tratteggio unisce la posizione della cresta e la sua pendenza rispetto all'asse delle t corrisponde alla *velocità di propagazione (di fase)*.

Si osservi che in questo caso si può considerare anche il procedere nello spazio del gruppo come unità propria, considerando per es. la posizione ove a ogni istante è massima la perturbazione risultante dalla sovrapposizione delle varie onde componenti. Si è così condotti a considerare un'altra velocità, detta di gruppo. Nella figura 9.26 sono riunite le *posizioni ove agli istanti considerati è massima la perturbazione (linea punteggiata)*: la sua inclinazione determina la *velocità di gruppo*.

La considerazione della velocità di gruppo è essenziale in molti problemi, specie quando si ha a che fare con treni di onde di non grande durata. È importante infatti notare che, nella propagazione di un gruppo d'onde, quello che ha interesse nei riguardi della energia non è il moto delle singole onde componenti, ma il movimento della perturbazione risultante dalla composizione delle varie onde in quanto questa rappresenta il moto effettivo delle particelle nel quale è contenuta la energia: l'energia quindi

Un pacchetto d'onda, dove si localizza l'energia, si propaga con la velocità di gruppo

è legata al gruppo e si muove con esso, cioè *l'energia di un gruppo d'onde si muove con la velocità di gruppo*.

Si osservi, dalla figura 9.26, che la forma della perturbazione anche se simmetrica all'origine, va perdendo questa caratteristica con il progredire della propagazione; il gruppo inoltre si va allargando nello spazio.

Esempi

Un esempio che si può considerare per rendere più evidente quanto già detto è quello di un osservatore fermo in mare mosso, abbastanza vicino a riva. Egli osservi nel mare aperto fra le varie onde una perturbazione particolarmente intensa (cavallone) a una certa distanza da lui e nel prepararsi a incontrarla fissi il suo occhio sulla cresta dell'onda preminente; egli la vede avvicinarsi, ma nota che essa man mano che si approssima va diminuendo di ampiezza fino a ridursi a una ampiezza molto piccola quando lo raggiunge. Alzando lo sguardo egli vede che il cavallone è rimasto indietro e può ripetere in genere la medesima osservazione varie volte prima che egli venga investito dalla perturbazione nella quale è concentrata la massima parte dell'energia. L'andamento delle cose è chiaro: la particolare onda sulla cui cresta l'osservatore fissa la sua attenzione procede con la velocità di fase, mentre la perturbazione massima procede con la velocità di gruppo; per le onde che si hanno sulla superficie del mare quest'ultima è notevolmente minore (circa la metà) di quella di fase⁽¹⁰⁾.

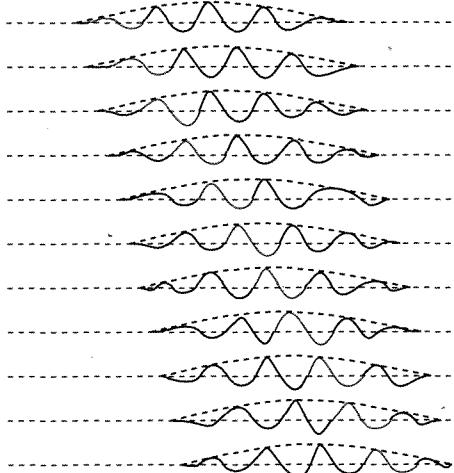


Fig. 9.27

Un altro esempio si ha quando si getta un sasso in uno specchio tranquillo di acqua di profondità superiore ad alcuni decimetri (per es. 0,5 m): in tal caso ancora la velocità di gruppo è minore di quella di fase. Si può facilmente osservare che una perturbazione si propaga allargandosi sulla superficie sotto forma di un gruppo d'onde: in questo caso è possibile porre l'attenzione su un'onda individuale nel gruppo e la si vede viaggiare più veloce nel gruppo fino a scomparire sul fronte del gruppo stesso, mentre un'altra si rende evidente nella parte posteriore del gruppo steso. La figura 9.27 mostra una tale situazione riportando, a intervalli di tempo regolari, la configurazione della perturbazione lungo la direzione di propagazione; si è marcata in colore una cresta particolare per mettere meglio in evidenza come essa proceda spostandosi dalla parte posteriore a quella anteriore del gruppo; si è segnato anche a tratteggio l'inviluppo delle creste del gruppo il cui massimo si sposta con la velocità di gruppo.

Il legame fra la velocità di fase c e la velocità di gruppo v è dato dalla relazione

Legame tra velocità di fase e velocità di gruppo

(100)

$$v = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

È evidente che se c non varia con λ e cioè con ν , le due velocità coincidono.

La (100) si può ottenere con il seguente ragionamento. Supponiamo che si abbiano due sole onde sinusoidali componenti di frequenze ν_1 e ν_2 (lunghezze d'onda λ_1 e λ_2) molto prossime, le quali procedano nella stessa direzione x con velocità c_1

⁽¹⁰⁾ Per la (95) si può prendere $c = \sqrt{g\lambda/2\pi}$.

e c_2 anche esse poco differenti. Per semplicità assumiamo che abbiano la stessa ampiezza. La perturbazione risultante è data dalla somma delle due onde

$$(101) \quad \xi = A \sin 2\pi\nu_1 \left(\frac{x}{c_1} - t \right) + A \sin 2\pi\nu_2 \left(\frac{x}{c_2} - t \right)$$

o, usando le formule trigonometriche di prostaferesi:

$$(102) \quad \xi = 2A \cos \frac{2\pi}{2} \left[\left(\frac{\nu_1}{c_1} - \frac{\nu_2}{c_2} \right) x - (\nu_1 - \nu_2)t \right] \sin \frac{2\pi}{2} \left[\left(\frac{\nu_1}{c_1} + \frac{\nu_2}{c_2} \right) x - (\nu_1 + \nu_2)t \right].$$

Si osservi che essendo le due frequenze molto prossime si può porre: $(\nu_1 + \nu_2)/2 = \nu_2$ e $(\nu_1 - \nu_2) = d\nu$. Siccome inoltre anche la differenza di velocità è molto piccola, si può porre $c_1 - c_2 = dc$ e $\frac{1}{2}(\nu_1/c_1 + \nu_2/c_2) = \nu_2/c_2$. Si ottiene così:

$$(103) \quad \begin{aligned} \xi &= 2A \cos \frac{2\pi}{2} \left[\frac{(\nu_2 + d\nu)c_2 - (c_2 + dc)\nu_2}{c_2^2} x - (\nu_1 - \nu_2)t \right] \sin 2\pi\nu_2 \left(\frac{x}{c_2} - t \right) = \\ &= 2A \cos 2\pi \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \right) \left[\frac{-\nu_2 \frac{dc}{d\nu} + c_2}{c_2^2} x - t \right] \sin 2\pi\nu_2 \left(\frac{x}{c_2} - t \right). \end{aligned}$$

La perturbazione risultante può considerarsi come un'onda sinusoidale (rappresentata dal termine seno) di frequenza ν approssimativamente uguale alla frequenza delle due onde ($\nu_1 \simeq \nu_2 = \nu$), che si propaga con la velocità (di fase) $c = c_2 \simeq c_1$ e la cui ampiezza varia nel tempo e nello spazio in accordo alla espressione:

$$(104) \quad 2A \cos 2\pi \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \right) \left[\frac{c_2 - \nu_2 \frac{dc}{d\nu}}{c_2^2} x - t \right].$$

L'ampiezza quindi varia anch'essa secondo un'onda di frequenza $(\nu_1 - \nu_2)/2$ che si propaga con la velocità

$$(105) \quad v = \frac{c^2}{c - \nu \frac{dc}{d\nu}}.$$

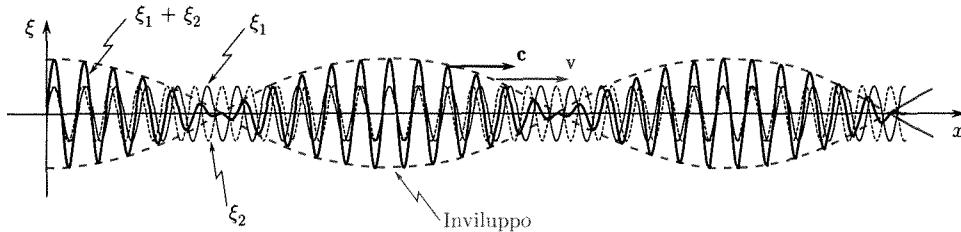


Fig. 9.28

Nella figura 9.28 sono rappresentate le due onde componenti (che si muovono con velocità $c_1 \simeq c_2 = c$) e la perturbazione risultante. Quest'ultima ha un andamento ondoso nel quale l'ampiezza delle onde varia secondo la curva inviluppo: questa è anche essa un'onda che si muove con la velocità di gruppo v . Nel caso che abbiamo considerato di due sole componenti la perturbazione è costituita da gruppi di onde che si susseguono regolarmente: perturbazioni del tipo di quelle delle figure 9.25 e 9.26 richiedono per la rappresentazione più onde sinusoidali componenti. La (105) è comunque la espressione della velocità di gruppo. Essa può essere trasformata tenendo conto che $c = \nu\lambda$ e quindi

$$(106) \quad \frac{dc}{d\nu} = \lambda + \nu \frac{d\lambda}{d\nu}$$

$$(107) \quad v = \frac{c}{1 - \frac{1}{\lambda} \left(\lambda + \nu \frac{d\lambda}{d\nu} \right)} = -\frac{c\lambda}{\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = -\lambda^2 \frac{d\nu}{d\lambda}.$$

L'inviluppo dell'onda si propaga con la velocità di gruppo

Siccome inoltre, sempre dalla $c = \nu\lambda$, è

$$(108) \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{dc}{d\lambda} - \frac{c}{\lambda^2}$$

si ha la (100)

$$v = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

9.16. INTERFERENZA TRA ONDE SINUSOIDALI PROPAGANTISI NELLA STESSA DIREZIONE E NELLO STESSO VERSO

In questo paragrafo si considera la interferenza tra due onde sinusoidali che si propagano nella stessa direzione e nello stesso verso e in un primo tempo anche con la stessa frequenza (ν) e la stessa ampiezza.

Le equazioni del raggio per le due onde sono

$$(109) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= A \sin(kx - \omega t) \\ \xi_2 &= A \sin(kx - \omega t - \varphi) \end{aligned}$$

essendo φ la differenza di fase fra le due onde. Ciò significa che:

1. le oscillazioni prodotte in un punto ($x = \text{cost}$) dalle due onde sono due oscillazioni armoniche identiche, differenti nel tempo di φ/ω ; infatti ξ_2 può scriversi

$$\xi_2 = A \sin \left[kx - \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega} \right) \right]$$

2. lo stato di perturbazione creato dalle due onde nello spazio a un certo istante ($t = \text{cost}$) è costituito da due onde identiche traslate di una distanza φ/k ; infatti la ξ_2 può scriversi

$$\xi_2 = A \sin \left[k \left(x - \frac{\varphi}{k} \right) - \omega t \right].$$

La perturbazione risultante ⁽¹¹⁾ è pari a

$$(110) \quad \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right)$$

rappresentante un'onda sinusoidale la cui ampiezza $2A \cos \varphi/2$ dipende da φ . Se in particolare $\varphi = 0$, le due onde sono in fase, interferiscono costruttivamente e l'oscillazione risultante ha ampiezza massima $2A$. Nel caso che $\varphi = \pi$, cosicché $\cos \varphi/2 = 0$, le onde sono in opposizione di fase, esse interferiscono distruttivamente e l'ampiezza della oscillazione è sempre e ovunque zero; il mezzo resta in quiete. Nella figura 9.29 sono rappresentati i casi di due onde che hanno φ prossimo a zero (interferenza costruttiva; oscillazione risultante maggiore di ciascuna delle componenti) oppure prossimo a π .

L'interferenza è costruttiva o distruttiva a seconda della fase relativa tra le due onde che si sommano

Le conclusioni raggiunte si estendono facilmente al caso in cui le due onde abbiano ampiezza diversa: così per es. si ha come risultante un'onda sinusoidale la cui ampiezza è pari alla somma delle ampiezze delle onde componenti se $\varphi = 0$ oppure è pari alla differenza se $\varphi = \pi$.

⁽¹¹⁾ Si ricordi che: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.

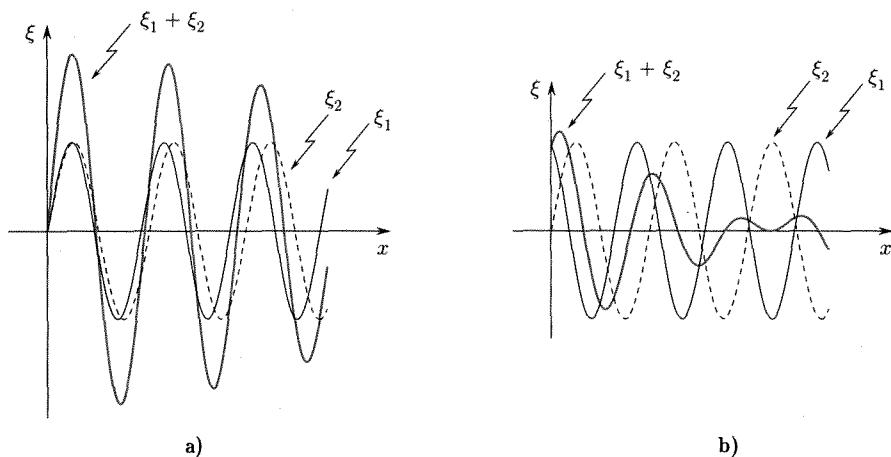


Fig. 9.29

Nel caso che le due onde abbiano diversa frequenza esse si compongono per dare onde complesse, di cui abbiamo varie volte parlato.

Vogliamo aggiungere alcune considerazioni per il caso di due onde sinusoidali le cui frequenze differiscano di poco e che si propaghino in un mezzo non dispersivo⁽¹²⁾. Se l'ampiezza delle due onde è la stessa e sia, per semplicità, $\varphi = 0$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A \operatorname{sen} 2\pi\nu_1 \left(\frac{x}{c} - t \right) \\ \xi_2 &= A \operatorname{sen} 2\pi\nu_2 \left(\frac{x}{c} - t \right)\end{aligned}$$

si ottiene:

$$(111) \quad \xi = 2A \cos \left[2\pi \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \right) \left(\frac{x}{c} - t \right) \right] \sin 2\pi \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \left(\frac{x}{c} - t \right).$$

Si ha in questo caso una perturbazione che può, essendo $\nu_1 \approx \nu_2$, considerarsi sinusoidale con frequenza pari alla media aritmetica tra quelle delle due onde componenti e la cui ampiezza varia anch'essa come quella di un'onda che si propaghi con la stessa velocità e con frequenza pari alla semidifferenza delle frequenze delle onde componenti. Si osservi che l'ampiezza di oscillazione in un punto diviene massima quando la funzione coseno è pari a ± 1 e ciò avviene $\nu_1 - \nu_2$ volte al secondo. Questo fenomeno, nel caso in cui le onde abbiano frequenze udibili e non differiscano per più di 6-7 Hz, viene avvertito dal nostro orecchio come un periodico rinforzarsi e affievolirsi del suono in un punto e va sotto il nome di battimento.

*Il battimento
tra frequenze sonore
vicine è avvertito
dal nostro orecchio come
un periodico rinforzarsi e
affievolirsi del suono*

■ 9.17 INTERFERENZA DI Onde SeRiche

Un caso più generale di interferenza è dato dalla sovrapposizione nello spazio di onde sferiche emesse da due distinte sorgenti puntiformi, S_1 e S_2 (fig. 9.30).

⁽¹²⁾ La composizione dà il risultato già visto nel par. 9.14. Si ottiene una formula analoga alla (102) con la sola differenza che le due velocità di fase e di gruppo in questo caso coincidono.

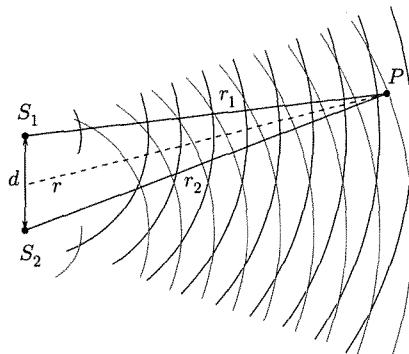


Fig. 9.30

Si supponga che le frequenze ν delle due onde siano le stesse e che la differenza di fase con la quale le due onde sono emesse dalle sorgenti resti costante nel tempo (sorgenti coerenti).

Per semplicità si supporrà anche che le onde abbiano la stessa ampiezza alla sorgente anche se il non verificarsi di questa circostanza non altera la validità di quanto sarà esposto⁽¹³⁾.

Se si considera un punto P dello spazio investito dalle onde a distanza r_1 e r_2 dalle sorgenti⁽¹⁴⁾, si ha

$$(112) \quad \xi = \frac{A}{r_1} \sin[kr_1 - \omega t + \varphi_1] + \frac{A}{r_2} \sin[kr_2 - \omega t + \varphi_2].$$

Se si considerano punti a distanze dalle sorgenti grandi rispetto alla distanza d che separa le sorgenti stesse, si può porre $A/r_1 \simeq A/r_2 = A/r$ e quindi

$$(113) \quad \xi = \frac{2A}{r} \cos \left[k \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \right) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] \sin \left[k \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right].$$

In base alla ipotesi posta, si può sostituire r a $(r_1 + r_2)/2$ e si vede che la perturbazione può essere considerata approssimativamente un'onda sinusoidale sferica (data dal secondo fattore), la cui ampiezza dipende solamente dalla posizione che si considera: si osservi infatti che nel primo fattore non c'è il tempo t . L'espressione dell'ampiezza in funzione delle coordinate spaziali r_1, r_2 è

$$(114) \quad A_{r_1, r_2} = \frac{2A}{r} \cos \left[\frac{k}{2}(r_1 - r_2) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right].$$

La perturbazione sarà costantemente nulla nei punti ove A_{r_1, r_2} si annulla, ove cioè l'argomento della funzione trigonometrica è pari a un multiplo dispari di $\pi/2$, cioè per

$$\frac{\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

con n intero.

I luoghi dei punti ove la perturbazione è zero sono quindi rappresentati dalle equazioni (una per ogni valore di n)

$$(115) \quad r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} \left[(2n + 1) + \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi} \right].$$

Il secondo membro, per un dato n , è costante e quindi i luoghi dei punti cercati, caratterizzati dal fatto che la differenza delle distanze da

⁽¹³⁾ Nel caso che le ampiezze delle due onde alle sorgenti siano diverse (per es. $A_1 > A_2$), la prima onda può pensarsi somma di due onde una con ampiezza A_2 e l'altra con ampiezza $A_1 - A_2$. Le considerazioni di interferenza che qui si fanno valgono per le onde di uguale ampiezza (A_2) provenienti dalle due sorgenti.

⁽¹⁴⁾ Si osservi che nel caso di onde longitudinali la perturbazione nel punto P è rappresentata da vettori spostamento in direzioni diverse (direzioni di r_1 e r_2); limitandosi a considerare punti per i quali r_1 e r_2 sono grandi rispetto a d si può tuttavia senza grave errore fare la somma algebrica degli spostamenti. Nel caso di onde trasversali questa difficoltà può non presentarsi perché gli spostamenti prodotti dalle due onde in un punto (normali alle direzioni di propagazione) possono essere nella stessa direzione.

due punti fissi S_1, S_2 è costante, sono degli iperbolidi di rotazione con fuochi nei punti S_1 e S_2 (sorgenti).

Nella figura 9.31 è rappresentata una sezione con il piano della figura delle superfici d'onda sferiche, mediante linee tratteggiate le intersezioni con lo stesso piano degli iperbolidi di zero (115) e a colore quelli di valore massimo (iperboli). La stessa figura vale anche per la interferenza di onde circolari quali quelle che si possono avere su una superficie d'acqua. Le iperboli sono state tracciate anche nella regione vicina alle sorgenti ove non valgono più le ipotesi $r_1 \approx r_2$ e r_1, r_2 entrambi grandi rispetto a d ; in questo caso i punti degli iperbolidi (e delle iperboli) sono punti di massimo affievolimento giacché le due onde non hanno la stessa ampiezza e quindi gli spostamenti da esse prodotti non possono reciprocamente compensarsi. Fra ciascuna coppia degli iperbolidi di minimo ora visti ve ne esiste un altro, come si è accennato (a colore in figura), luogo dei punti ove la ampiezza è massima. Tali luoghi sono determinati dalla condizione che il coseno nella (114) abbia il valore ± 1 cioè l'argomento valga $n\pi$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Si ottiene

$$(116) \quad r_1 - r_2 = \left(n + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \right) \lambda.$$

La figura 9.32 (R.W. Pohl) mostra l'interferenza di onde circolari prodotte sulla superficie di un sottile strato di acqua contenuto in una vasca mediante il periodico moto di due stili che disturbano la superficie stessa (sorgenti puntiformi). Sono evidenti le iperboli luogo di punti di assenza della perturbazione: le iperboli luogo dei punti di massima perturbazione si trovano in posizione intermedia e tagliano i bordi della figura in corrispondenza ai punti segnati con 0, 1, 2, 3, 4.

Interferenza di onde sferiche da sorgenti puntiformi

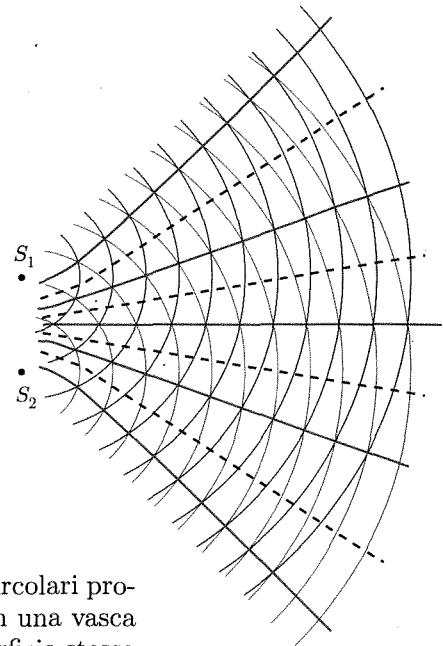


Fig. 9.31

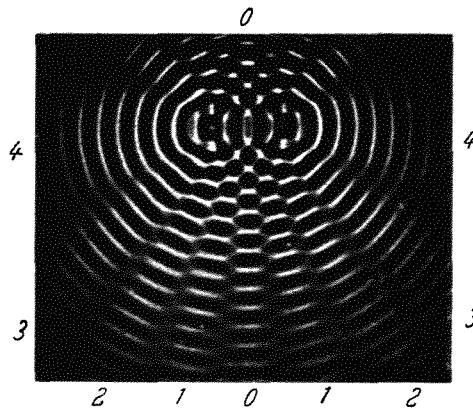


Fig. 9.32 Interferenza di onde circolari (R.W. Pohl).

Nei processi di interferenza spesso (specie nel caso di onde luminose) si osserva la distribuzione della perturbazione su piani particolari. È evidente che nel caso di interferenza di onde sferiche tale distribuzione si ottiene facendo la sezione con il piano in questione degli iperbolidi (115) e (116). Se per es. tale piano è normale all'asse comune degli iperbolidi

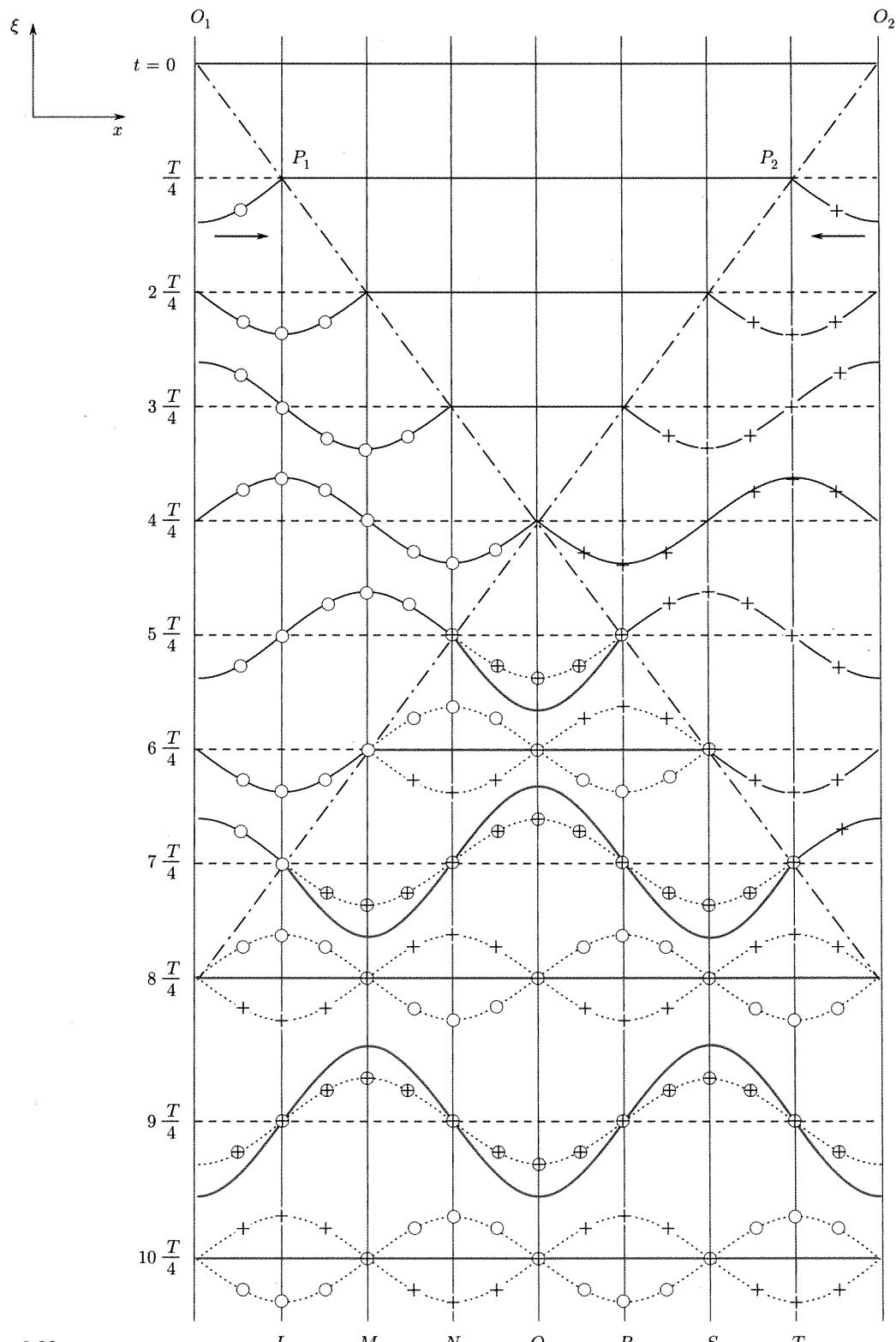


Fig. 9.33

(congiungente S_1, S_2) le linee di massima e minima perturbazione sono in genere circonference concentriche.

■ 9.18. ONDE STAZIONARIE

Un caso particolare e molto importante di interferenza si verifica in regioni di un mezzo elastico in cui si propaghino onde dello stesso tipo, della stessa frequenza, nella stessa direzione ma in verso opposto. Per semplicità si consideri il caso di onde piane longitudinali della stessa ampiezza:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_1) + A \sin(kx + \omega t + \varphi_2) = \\ (117) \quad &= 2A \sin\left(kx + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).\end{aligned}$$

Per opportuna scelta dell'origine dei tempi t e per particolari posizioni delle sorgenti può accadere che $(\varphi_2 + \varphi_1)$ e $(\varphi_2 - \varphi_1)$ siano entrambi zero. Allora

$$(118) \quad \xi = 2A \sin kx \cos \omega t.$$

Si osservi il carattere particolare di questa funzione: essa è il prodotto di due funzioni trigonometriche, una dipendente esclusivamente da t e l'altra da x . Se si considera un punto qualsiasi di coordinata x , si vede che esso compie oscillazioni con la frequenza delle onde componenti e ampiezza dipendente dalla posizione; è facile intuire che vi debbano essere punti in cui l'ampiezza di oscillazione è massima e punti ove essa è zero, ove cioè la perturbazione non esiste. In particolare, per

$$(119) \quad kx + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

con $n = 0, 1, 2$, l'ampiezza di oscillazione è massima: questi punti si chiamano ventri di vibrazione. Nei punti ove

$$(120) \quad kx + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = n\pi$$

l'ampiezza è zero e si hanno i nodi di vibrazione. *Un ventre di vibrazione e il successivo nodo di vibrazione sono separati da un incremento di x dato da*

$$k\Delta x = \frac{\pi}{2}$$

Nelle onde stazionarie si distinguono nodi e ventri di vibrazione

cioè da una distanza

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4}.$$

Due nodi successivi di vibrazione, o due ventri successivi, sono separati da una distanza pari a $\lambda/2$.

Per chiarire meglio le caratteristiche dello stato di moto dei vari punti nella regione di onde stazionarie, si osservino i diagrammi nella figura 9.33 nella quale si è considerato lo stabilirsi di onde stazionarie fra due sorgenti che oscillano con la stessa frequenza, in fase e a distanza di 2λ ; due onde sinusoidali sono generate dalle sorgenti a partire da un istante $t = 0$ e si è determinata la distribuzione risultante della perturbazione a vari istanti successivi. Gli spostamenti prodotti dall'onda che procede verso destra sono indicati con cerchietti, quelli causati dall'altra onda con

crocette; la perturbazione risultante è indicata in colore. I diagrammi si riferiscono a istanti successivi ritardati di $\frac{1}{4}$ di periodo l'uno dall'altro: in essi sulle ordinate sono riportati gli spostamenti ξ dalla posizione di riposo. Le linee a tratto e punto indicano a ogni istante considerato le posizioni P_1, P_2 ove sono giunte le onde emesse dalle due sorgenti, O_1 e O_2 .

Le onde si incontrano ovviamente sul piano centrale della regione fra le sorgenti O_1 e O_2 e qui ha inizio la interferenza: ciò avviene all'istante $t = T$. Se si segue lo stato della perturbazione risultante ai vari istanti si vede che ci sono istanti ($t = \frac{6}{4}T, \frac{8}{4}T, \frac{10}{4}T$) in corrispondenza ai quali tutti i punti materiali investiti dalle due onde si trovano contemporaneamente nelle posizioni di equilibrio, altri invece in cui ciò non è vero per tutti. I punti su certi piani, quali quelli segnati dalle linee M, Q, S , hanno la proprietà di avere a ogni istante lo spostamento dalla posizione di equilibrio (quando non è zero) maggiore di quella dei punti contigui: questi punti corrispondono ai *ventri di vibrazione*. Vi sono poi punti, come L, N, R, T (*nodi*), ove la perturbazione è sempre nulla.

Nella figura 9.34a è considerato lo stato della perturbazione nella regione ove vi sono onde stazionarie per un tratto di lunghezza $x = \lambda$; sono segnati con segni diversi gli spostamenti contemporanei delle particelle sull'asse x (si ricordi che se le onde sono longitudinali sulle ordinate sono riportati gli spostamenti che in realtà avvengono nella direzione x). Se si immagina di partire da un istante $t = 0$ in cui gli spostamenti hanno ovunque i valori massimi, gli spostamenti in un periodo sono rappresentati dalle curve, numerate in sequenza da 1 a 8 per istanti successivi di $1/8$ di periodo. Nella b sono indicati i corrispondenti valori di Δp .

Si vede che tutti i punti nella prima mezza lunghezza d'onda oscillano in fase fra loro e in opposizione ai punti della seconda mezza lunghezza d'onda.

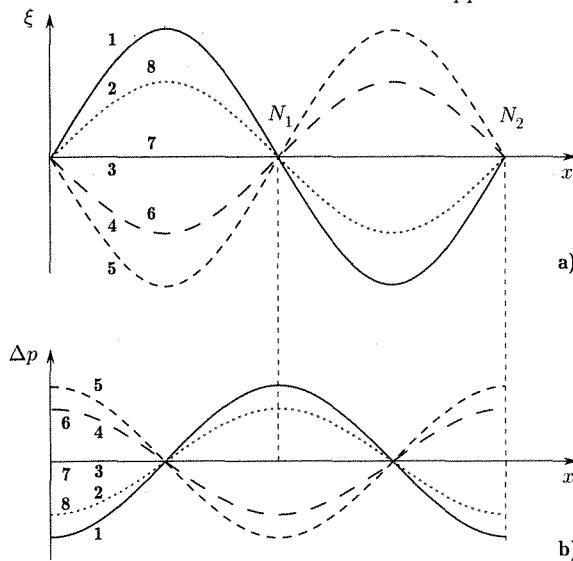


Fig. 9.34

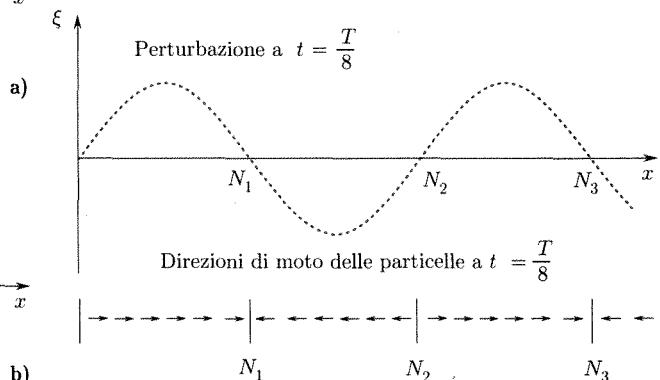


Fig. 9.35

Le posizioni dei nodi e dei ventri di spostamento corrispondono rispettivamente a posizioni di ventri e nodi di pressione

Nella figura 9.35 è considerata in particolare la situazione a un istante (come quello $t = T/8$) quando gli spostamenti (nella direzione dell'onda) nella prima onda dopo aver raggiunto il massimo decrescono. Nella parte inferiore è indicata per mezzo di frecce la direzione di moto delle particelle. Si vede che le particelle si allontanano da tutte e due le parti da N_2 mentre si avvicinano da tutte e due le parti a N_1 e N_3 . Ciò significa che la densità e la pressione in N_1 vanno decrescendo, mentre esse crescono in N_2 ; quando gli spostamenti si annullano la densità e la pressione hanno raggiunto ovunque il valore di equilibrio; nel successivo quarto di periodo la densità e la pressione in N_1 decrescono ancora raggiungendo il valore minimo mentre in N_2 esse giungono al valore massimo. Quando gli spostamenti avvengono nella direzione opposta, cioè nel successivo mezzo periodo, le particelle si allontanano da N_1 e si avvicinano a N_2 e quindi densità e pressione decrescono in N_1 e crescono in N_2 . Le variazioni di pressione in corrispondenza ai ventri di vibrazione

sono nulle poiché in questa regione gli spostamenti delle particelle contigue sono praticamente gli stessi (massimo di una sinusoide) e in fase, sicché non varia la densità delle particelle.

In sintesi, se in una regione di onde stazionarie *longitudinali* accanto agli spostamenti delle particelle si considerano le pressioni si trova che anche esse variano con le stesse modalità degli spostamenti: solo, i ventri di pressione si verificano in corrispondenza ai nodi di spostamento e viceversa: ciò è indicato nella figura 9.34b.

È molto importante notare che nelle onde stazionarie *non si ha trasferimento di energia da un punto all'altro*. Ciò appare evidente se si pone mente al fatto che vi sono punti sempre fermi attraverso i quali quindi l'energia non può fluire. L'energia nelle onde stazionarie (cinetica e potenziale) è dovuta ai moti dei singoli punti. Il fatto che essa non fluisca dà ragione del nome di onde *stazionarie*. In realtà il fenomeno, per il fatto stesso di non propagarsi, non dovrebbe essere caratterizzato con il nome di *onde*: la ragione deriva dal fatto che esso può essere considerato prodotto dall'interferenza di due onde progressive.

Il caso di onde piane longitudinali qui considerato può essere applicato a onde longitudinali di altre forme e (tranne le considerazioni sulle pressioni) a onde trasversali di vario tipo.

Va infine osservato che la maniera più semplice per ottenere onde di ugual frequenza che si propaghino in un mezzo in direzione opposta è quella di sfruttare le riflessioni di un'onda che si verificano in corrispondenza a discontinuità nel mezzo di propagazione. In seguito (cap. 10, parr. 10.3-10.5) saranno esaminati in dettaglio casi importanti di questo genere.

Nella figura 9.36 v'è una immagine di onde stazionarie longitudinali piane di alta frequenza (ultrasonore a 4 MHz) ottenuta illuminando stroboscopicamente il campo stazionario in un liquido (acqua). Le linee chiare sono i luoghi dei punti ove le variazioni di pressione e dell'indice di rifrazione del mezzo sono massime: esse rappresentano quindi i ventri di pressione.

Nelle onde stazionarie l'energia non si propaga

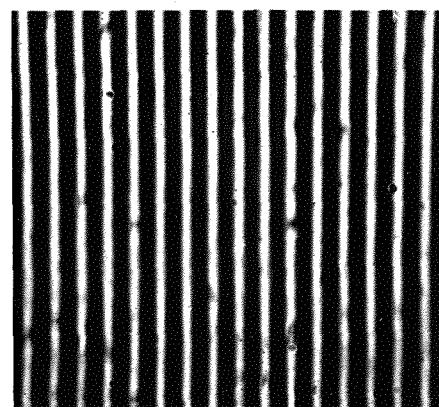


Fig. 9.36 Immagine stroboscopica di onde piane stazionarie in acqua (4 MHz).

■ 9.19. PRINCIPIO DI HUYGENS

Legato al fenomeno dell'interferenza è il principio di Huygens che questi formulò per la propagazione della luce e che vale per qualsiasi tipo di onda; esso fornisce un metodo approssimato per trattare utilmente molti problemi di propagazione di onde.

Il principio cerca di esprimere il fatto fondamentale nella propagazione per onde che la perturbazione dalle condizioni di equilibrio si propaga con continuità e che pertanto la perturbazione in un punto a un certo istante debba essere determinata dalla situazione nei punti adiacenti precedentemente investiti dalla perturbazione.

Il principio si esprime dicendo che: *in un mezzo attraversato da onde, ogni punto che si trova su un fronte d'onda (o una superficie d'onda) a un certo istante può essere considerato come una nuova sorgente di onde sferiche elementari che si propagano con la velocità di fase relativa al punto; la posizione successiva del fronte d'onda si ottiene dall'inviluppo delle onde secondarie emesse da tutte le sorgenti puntiformi distribuite sulla posizione precedente del fronte stesso.*

Il principio di Huygens per la costruzione dei fronti d'onda successivi a partire da un fronte d'onda precedente

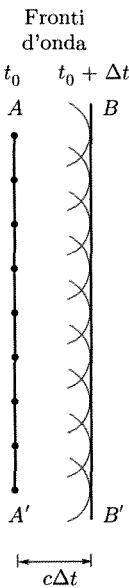


Fig. 9.37

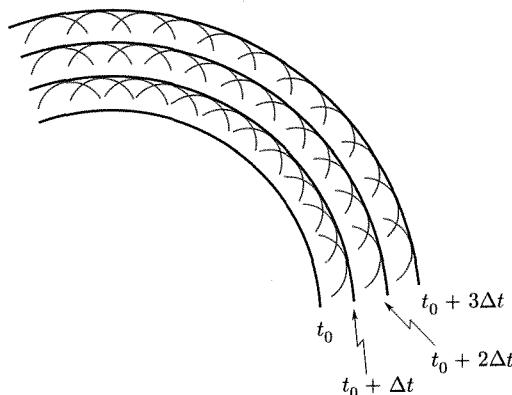


Fig. 9.38

Nella figura 9.37 è considerato il caso semplice di un'onda piana. Sia dato un fronte d'onda AA' all'istante t_0 ; per trovare la posizione all'istante $t_0 + \Delta t$ si segni con centro in ogni punto della superficie d'onda originaria una sfera di raggio $c\Delta t$, essendo c la velocità di fase (che in questo esempio è uniforme e isotropa). L'inviluppo di queste sfere è un piano BB' parallelo al primo, a una distanza $c\Delta t$.

Nella figura 9.38 è riportato il caso di onde sferiche. Va osservato che la formulazione data dal principio va corredata da un'importante limitazione, e cioè che non vi sia propagazione all'indietro, altrimenti vi sarebbe un altro fronte d'onda dietro quello originario che si muoverebbe in verso opposto a quello dell'effettiva propagazione delle onde.

È possibile vedere che la descrizione ottenibile dal principio di Huygens può essere migliorata se si suppone (Fresnel) che per onde sinusoidali:

1. ciascuna *onda secondaria* è emessa con un anticipo di fase di $\pi/2$ rispetto al fronte d'onda incidente;
2. l'ampiezza delle onde secondarie non solo è proporzionale all'inverso della distanza percorsa (onde sferiche), ma varia con la direzione proporzionalmente a $(1 + \cos \theta)$ essendo θ l'angolo fra la normale al fronte d'onda iniziale diretta nella direzione e verso di propagazione e la direzione considerata. È evidente che in tal maniera la ampiezza nel verso di propagazione è pari a due volte il valore medio, mentre è zero in verso opposto.

Con queste aggiunte il principio di Huygens consente di calcolare dallo stato della perturbazione all'istante t_0 quello a un istante $t_0 + \Delta t$ mediante interferenza di onde elementari da eseguirsi con i criteri generali dell'interferenza: si ottiene così una soluzione dei problemi che in molti casi è un'approssimazione ottima della soluzione esatta che si può calcolare risolvendo l'equazione delle onde.

Va però osservato che la semplice applicazione del principio di Huygens nella formulazione originaria anche con la limitazione precedentemente riportata riesce già di per sé stessa utile in molti casi e sufficiente per un'esauriente trattazione.

■ 9.20. PROPAGAZIONE DELLE ONDE

La distribuzione della perturbazione in una regione dello spazio a un dato istante e la sua evoluzione nel tempo dipendono dalle caratteristiche delle sorgenti primarie delle onde, da quelle dei mezzi di propagazione e dalla natura e posizione degli oggetti con cui le onde interagiscono. Come si è già accennato nel paragrafo precedente, l'esame delle varie situazioni può, in maniera più o meno complessa, essere condotto mediante lo studio analitico della propagazione delle onde create dalle sorgenti con le condizioni imposte dalla presenza dei vari mezzi di propagazione e dalla posizione delle loro superfici di separazione. I risultati di tale trattazione sono di solito ottenibili con la applicazione del principio di Huygens-Fresnel, spesso anche nella forma originaria di Huygens.

Una tale trattazione è necessaria qualora occorra conoscere la distribuzione della perturbazione con ogni dettaglio; vi sono peraltro situazioni importanti, e molto comuni, in cui una risposta adeguata ai problemi in considerazione può essere ottenuta con una trattazione approssimata, più semplice.

Una tale approssimazione è quella che *sostituisce alla* effettiva *propagazione per onde quella per raggi rettilinei* (par. 9.2), i quali subiscono deviazioni sulle superfici di separazione dei mezzi di propagazione secondo le semplici leggi geometriche della riflessione e della rifrazione. Questa trattazione, come l'analoga dell'ottica geometrica, coincide con la trattazione esatta nel limite $\lambda \rightarrow 0$; essa può essere utilmente usata nei casi in cui si debba considerare l'interazione delle onde con ostacoli di dimensioni molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda delle onde elastiche e non abbiano interesse i particolari della distribuzione della perturbazione ai limiti della regione investita dalle onde.

Nei successivi paragrafi si considereranno i fenomeni della riflessione e della rifrazione, prima di esaminare importanti esempi di propagazione geometrica (par. 9.25). Si prenderanno infine in esame i casi in cui occorra considerare in dettaglio le particolarità caratteristiche della propagazione per onde per descrivere l'andamento dei processi (di diffrazione): par. 9.26 e 9.27.

*Propagazione per onde
e propagazione per raggi*

■ 9.21. RIFLESSIONE

Ogni qualvolta un'onda incontra nella propagazione una superficie di discontinuità, una parte dell'energia viene riflessa nello stesso mezzo da cui proviene e una parte prosegue nel secondo mezzo, mutando di direzione.

Al primo caso si dà il nome di riflessione e al secondo quello di rifrazione; entrambi i fenomeni saranno qui studiati con l'ausilio del principio di Huygens.

Si consideri un sistema di onde piane progressive (per es. longitudinali) le quali incontrino nel mezzo in cui si propagano una parete costituente una discontinuità, di dimensioni notevoli rispetto alla lunghezza d'onda λ . Una tale situazione è illustrata in figura 9.39 per il caso di onde elastiche longitudinali di frequenza $8 \cdot 10^8$ Hz emesse da una sottile piastra di quarzo Q avente la superficie delle facce ($2 \times 1 \text{ cm}^2$) metallizzate; essa viene fatta vibrare approssimativamente come un pistone nel mezzo mediante la ap-

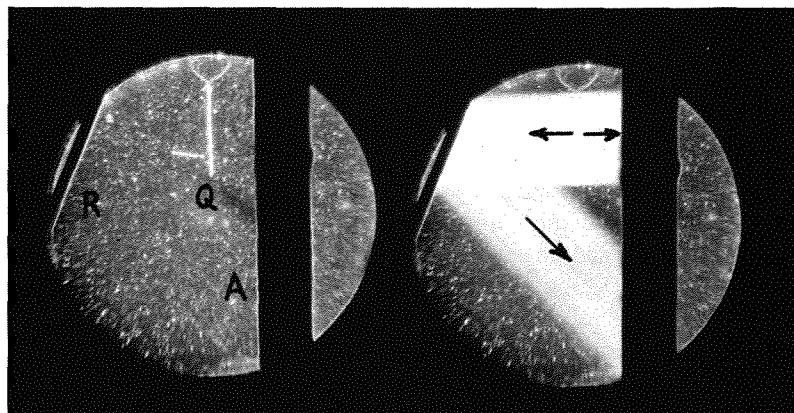


Fig. 9.39 Riflessione di onde ultrasonore (8 MHz) in acqua: *Q* sorgente, *R* riflettore, *A* assorbitore.

plicazione fra le sue facce di un campo elettrico oscillante con frequenza opportuna, sfruttando un effetto (piezoelettrico) che lamine opportunamente tagliate da cristalli di quarzo presentano in maniera ragguardevole. *R* è una lastra di ottone dello spessore di circa 2 mm e *A* è un efficiente assorbitore. Il mezzo è petrolio ($c = 1200$ m/s a 25°C , $\lambda = 0,15$ mm a 8 MHz). La fotografia a sinistra mostra la situazione sperimentale in assenza di ultrasuoni, quella a destra quando la sorgente emette ultrasuoni da entrambe le facce. Una particolare disposizione sperimentale (vedi cap. 10, par. 10.12) consente di avere su uno schermo l'immagine ottica della perturbazione elastica in un piano del mezzo parallelo alla direzione di propagazione, purché quest'ultimo sia trasparente alla luce; in tale immagine appaiono luminosi i punti investiti dalla perturbazione elastica e, entro certi limiti, ciascun punto appare tanto più luminoso quanto maggiore è la intensità della perturbazione in esso. Il fatto che i fasci emessi dalla sorgente (a destra e a sinistra) risultino sensibilmente paralleli è una indicazione del fatto che le onde emesse possono essere ritenute piane. Il fascio emesso verso sinistra incontra la lastra *R* e viene riflesso in corrispondenza alla interfaccia liquido-metallo. Entrambi i fasci sono eliminati dall'assorbitore.

Se si indicano (fig. 9.40) con *i* e *r* gli angoli che i raggi (normali alle superfici d'onda) incidente e riflesso formano con la normale alla superficie di riflessione nel punto di incidenza, i risultati sperimentali si esprimono mediante le due leggi (Snellius), valide anche per superfici non piane:

1. il raggio incidente, quello riflesso e la normale alla superficie riflettente nel punto di incidenza sono complanari;
2. l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.

Nella riflessione
gli angoli di incidenza e
di riflessione sono uguali
e complanari

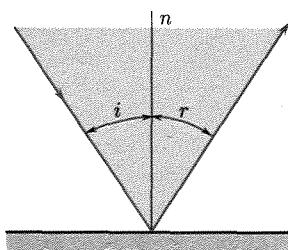


Fig. 9.40

Queste leggi possono essere stabilite anche facendo uso del principio di Huygens. Si consideri la figura 9.41 ove è rappresentato un fascio di onde piane che incide su una superficie riflettente. Sia *AB* un fronte d'onda che incontra la superficie, prima in corrispondenza ad *A* e poi in corrispondenza ad altri punti del fronte. Quando ad es. il punto *B* giunge in *C* l'onda secondaria che è stata emessa in *A* all'inizio del contatto fronte d'onda-parete avrà percorso una distanza *AD* pari a *BC*; le onde secondarie emesse in corrispondenza al contatto con la parete di punti intermedi fra *A* e *B* avranno percorso distanze gradatamente minori. Il

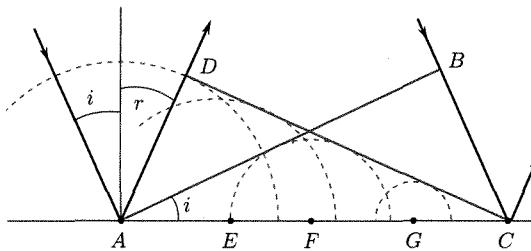


Fig. 9.41

nuovo fronte d'onda all'istante del contatto di B con la parete in C è l'involuppo di semisfere quali quelle tracciate in figura, cioè il piano di traccia CD . Se si pone attenzione alle normali ai fronti d'onda (raggi), semplici considerazioni geometriche (ricordando che $BC = AD$) mostrano la validità delle due leggi della riflessione.

Se l'onda incidente AB è sferica, la determinazione dell'onda riflessa si può fare nella seguente maniera (fig. 9.42). Al fronte d'onda sferico corrisponde un fascio di raggi uscenti dal centro dell'onda sferica, ciascuno dei quali (come OE) viene riflesso (in EF) con le leggi prima viste. La posizione del nuovo fronte d'onda riflesso quando l'onda sferica ha incontrato il piano riflettente in corrispondenza della zona CD può essere ottenuto ripetendo la costruzione di Huygens vista nel caso precedente. Più semplicemente si può tracciare la posizione ($ACHDB$) che il fronte d'onda avrebbe raggiunto in assenza della superficie riflettente ed osservare che il tratto (EF) percorso dal raggio riflesso in E nell'intervallo di tempo compreso fra l'inizio della riflessione (in L) e l'istante in cui tutta la zona CD è stata interessata, è di lunghezza pari al percorso EG che sarebbe stato fatto in assenza di riflessione. Se si ripete questa costruzione si trova che la posizione del fronte d'onda è una porzione di superficie sferica simmetrica di quella CHD rispetto al piano riflettente, con centro nel punto I simmetrico di O e punto di incontro delle direzioni di tutti i raggi riflessi. Il punto I si chiama immagine di O , perché le onde riflesse e i raggi riflessi appaiono provenire da esso.

La figura 9.43 mostra la fotografia (Foley-Sander) di un'onda sonora in condizioni analoghe a quelle descritte⁽¹⁵⁾. Considerazioni analoghe valgono per riflessioni su superfici non piane (specchi sferici, specchi parabolici ecc.) e per tipi di onde elastiche di genere diverso da quelle longitudinali considerate negli esempi.

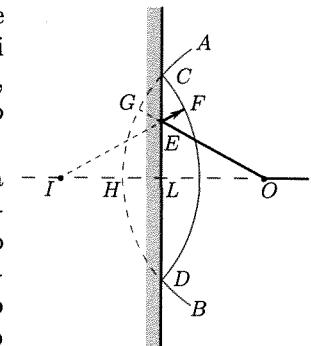


Fig. 9.42

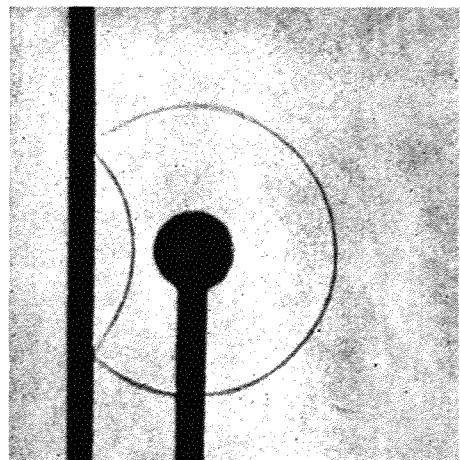


Fig. 9.43 Riflessione di un'onda circolare impulsiva (Foley-Sander).

■ 9.22. TRATTAZIONE ANALITICA DELLA RIFLESSIONE

Le leggi geometriche ora stabilite consentono di trattare molti problemi di riflessione. Talvolta però occorrono maggiori informazioni che

⁽¹⁵⁾ La fotografia delle variazioni di densità e di indice di rifrazione prodotte in aria da un'onda impulsiva è fatta illuminando il mezzo per un tempo molto breve.

solo la soluzione della equazione delle onde applicata al caso concreto può dare: esempio importante è quello in cui occorra determinare, oltre all'intensità e alla forma dell'onda riflessa, anche la relazione di fase fra l'onda incidente e l'onda riflessa.

Consideriamo separatamente due diverse condizioni, che possono verificarsi per la riflessione completa (vedi cap. 10, parr. 10.3-10.5) limitando la trattazione al caso di onde piane che incidano normalmente sulla superficie riflettente. In tali condizioni i problemi sono unidimensionali: il raggio riflesso ha la stessa direzione di quello incidente.

1. Superficie riflettente rigida

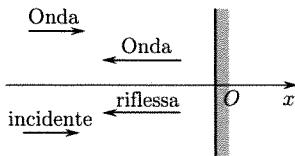


Fig. 9.44

Si abbia un'onda longitudinale che si propaghi nella direzione x (fig. 9.44). La superficie riflettente sia nella posizione $x = 0$. L'onda incidente sinusoidale è data da

$$(121) \quad \xi_i = A \sin[(\omega t - kx) + \varphi_i]$$

e quella riflessa da

$$(122) \quad \xi_r = A \sin[(\omega t + kx) + \varphi_r].$$

La rigidità della parete impone la condizione che lo spostamento totale debba essere sempre nullo per $x = 0$

$$(123) \quad (\xi_i)_{x=0} + (\xi_r)_{x=0} = A[\sin(\omega t + \varphi_i) + \sin(\omega t + \varphi_r)] = 0.$$

Ciò è possibile solo se

$$(124) \quad \varphi_i - \varphi_r = \pi.$$

In altri termini l'onda riflessa è in opposizione di fase con quella incidente. Ciò vale anche per onde complesse e di genere diverso da quello qui considerato.

Nel caso ancora delle onde longitudinali si osservi che

$$(125) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dx} &= -Ak \cos[(\omega t - kx) + \varphi_i] \\ \frac{d\xi_r}{dx} &= Ak \cos[(\omega t + kx) + \varphi_i + \pi] = -Ak \cos[(\omega t + kx) + \varphi_i]. \end{aligned}$$

Se si pone $x = 0$ si vede che le due derivate in corrispondenza alla parete rigida sono sempre uguali. Ricordando che la condensazione e la variazione di pressione sono proporzionali a tali derivate [formule (19) e (20)] si conclude che in corrispondenza a una parete rigida le variazioni di pressione dell'onda incidente e di quella riflessa sono sempre uguali fra loro.

Nella figura 9.45 sono riportati i grafici, a istanti successivi, degli spostamenti ξ delle particelle di aria prodotti da un'onda impulsiva piana incidente normalmente su una parete rigida (linea continua 1), dall'onda riflessa (linea continua 2) e risultanti dalla loro sovrapposizione (linea in colore): è anche segnata a tratteggio la posizione che l'impulso avrebbe raggiunto nel mezzo in assenza della parete: come si vede, lo spostamento risultante sulla parete è sempre nullo.

La figura 9.46 si riferisce al caso di un'onda piana sinusoidale che si propaga in un fluido contenuto in un tubo a pareti rigide, di sezione $S \ll \lambda^2$, e terminato da una parete anche essa rigida. Sono riportati a un dato istante le distribuzioni degli spostamenti e delle pressioni. Si osservi che a ogni istante, in corrispondenza alla sezione terminale lo spostamento è nullo e la variazione di pressione ha il valore massimo possibile per quell'istante: ciò porta di conseguenza che onde stazionarie possono essere stabilite in un tubo di lunghezza finita per interruzione dell'onda incidente e di quella riflessa dalla parete rigida e in corrispondenza a tale estremità si ha un nodo di vibrazione e un ventre della variazione di pressione.

Un altro caso dello stesso tipo si verifica nella propagazione di un'onda lungo una corda avente un estremo fissato a una parete rigida (fig. 9.47). In tal caso gli spostamenti sono trasversali: se prima della riflessione gli spostamenti sono a sinistra, dopo la riflessione sono a destra.

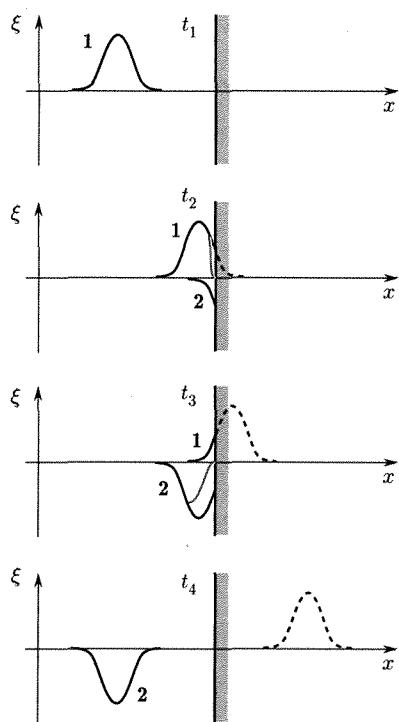


Fig. 9.45

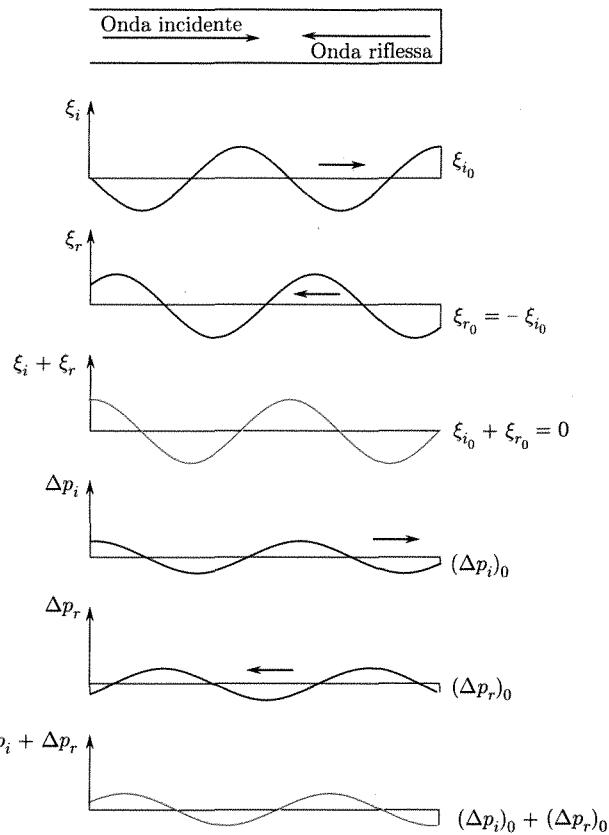


Fig. 9.46

Nella figura 9.47c sono indicati con linea continua 1 e 2 gli spostamenti relativi all'impulso incidente e a quello riflesso che danno come risultante la configurazione a colore della 9.47d; è indicato con un tratteggio la continuazione dell'impulso incidente al di là del punto di riflessione.

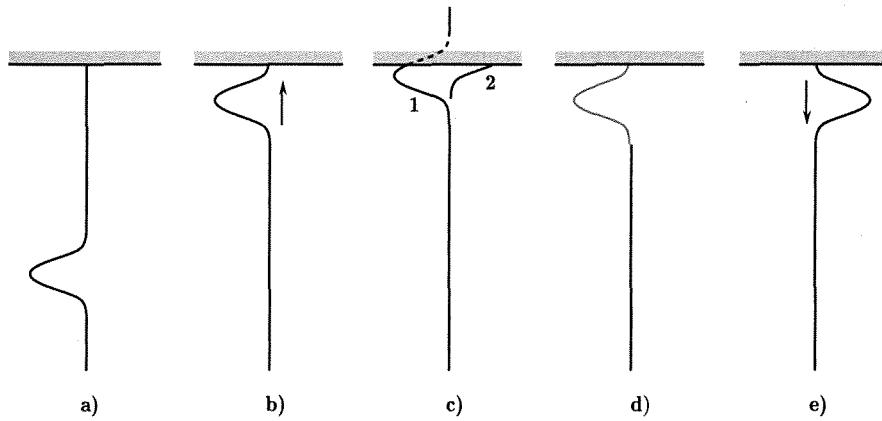


Fig. 9.47

2. Superficie riflettente cedevole

In questo caso le particelle della superficie riflettente non presentano praticamente inerzia, nessuna opposizione è offerta agli spostamenti e nessuna condensazione o variazione di pressione è ora possibile in corrispondenza a tale superficie.

La condizione analitica da imporre è quindi [formule (19) e (20)] che la somma delle $\partial\xi/\partial x$ per le due onde, incidente e riflessa, in corrispondenza alla superficie deve essere nulla.

Se le due onde sono descritte da

$$(126) \quad \begin{aligned} \xi_i &= A \sin[(\omega t - kx) + \varphi_i] \\ \xi_r &= A \sin[(\omega t + kx) + \varphi_r] \end{aligned}$$

si ha

$$(127) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -Ak \cos[(\omega t - kx) + \varphi_i] + Ak \cos[(\omega t + kx) + \varphi_r].$$

Per $x = 0$

$$(128) \quad \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right)_{x=0} + \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

e quindi

$$\cos(\omega t + \varphi_i) = \cos(\omega t + \varphi_r)$$

cioè

$$(129) \quad \varphi_i = \varphi_r.$$

Relazioni di fase tra onda incidente e onda riflessa da una parete cedevole

Si conclude quindi che è $\xi_{i0} = \xi_{r0}$, cioè che gli spostamenti dovuti alle due onde in corrispondenza alla superficie riflettente sono uguali, mentre la somma delle variazioni di pressione è sempre nulla, cioè le variazioni di pressione dovute all'onda incidente e all'onda riflessa sulla superficie riflettente sono a ogni istante uguali e di segno contrario.

Un caso molto interessante di questo genere si ha nella riflessione di onde piane longitudinali alla estremità aperta di un tubo. Prima di esaminarlo conviene considerare un altro caso analogo, quello della riflessione di un'onda all'estremo libero di una corda che illustreremo supponendo che le onde siano trasversali. Le condizioni al contorno in questo caso impongono che all'estremo libero sia nulla la tensione T_0 della corda, risultante dalle tensioni relative all'onda incidente e a quella riflessa; si ottiene di conseguenza ancora $\xi_{i0} = \xi_{r0}$.

Nella figura 9.48 è rappresentato il processo nel caso di un impulso che, generato per es. scuotendo l'estremo libero, viaggi inizialmente lungo la corda verso l'estremo fisso (a); si rifletta a tale estremo con le modalità viste e torni indietro (b); quando l'onda impulsiva raggiunge l'estremo libero si riflette nuovamente (d, e). Si noti che in corrispondenza a quest'ultimo estremo gli spostamenti sono la somma degli spostamenti nella stessa direzione dovuti a ciascuna delle due onde: nella figura 9.48c sono indicati, con le stesse modalità della figura precedente, gli spostamenti dovuti all'impulso incidente, a quello riflesso e alla loro somma, nonché le configurazione che avrebbe quell'incidente se si prolungasse la corda.

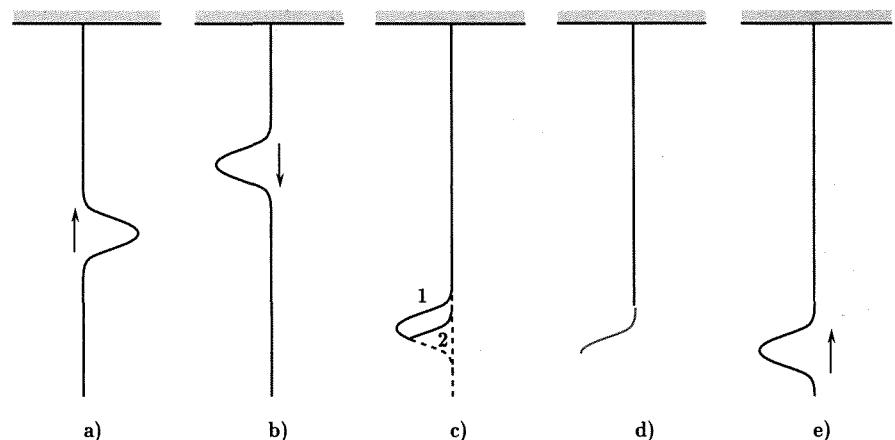


Fig. 9.48

Si osservi che queste caratteristiche di riflessione all'estremo libero della corda possono condurre allo stabilirsi sulla corda stessa di onde stazionarie sinusoidali se la lunghezza della corda è in relazione opportuna con la lunghezza d'onda (cap. 10, par. 10.3); in tal caso in corrispondenza all'estremo libero si ha un ventre di oscillazione.

Consideriamo ora il caso della riflessione di onde longitudinali piane all'estremità aperta di un tubo di sezione $S \ll \lambda^2$. Si supponga che il mezzo al di fuori del tubo non ostacoli affatto il moto delle particelle che si trovano sulla superficie di discontinuità: in realtà questo non è vero e ciò porta di conseguenza il fatto che la riflessione non è completa sulla superficie limite e quello, molto importante per le applicazioni, che dell'energia passa nel mezzo al di fuori del tubo (cap. 10, par. 10.3).

La figura 9.49 mostra per una tale situazione a un certo istante gli spostamenti e le variazioni di pressione dovuti a un'onda sinusoidale incidente ($\xi_i, \Delta p_i$) e a quella riflessa ($\xi_r, \Delta p_r$). Sono anche indicate le distribuzioni risultanti dagli spostamenti e dalle pressioni: si noti che in corrispondenza alla superficie riflettente l'ampiezza di vibrazione ha il valore massimo e la variazione di pressione è nulla. Ciò significa che *in un tubo di lunghezza finita potranno stabilirsi onde stazionarie le quali presentino all'estremità aperta un ventre di oscillazione e un nodo di pressione*.

In realtà un tubo a estremità aperta è immerso esso stesso nello stesso fluido (per es. aria) che è nel tubo (la densità media e la pressione sono le stesse dentro e fuori). Ciò porta di conseguenza che il moto delle particelle sulla superficie limite, investite dall'onda, è ostacolato dalla presenza delle particelle esterne che vengono anche esse trascinate e messe in moto. Ciò comporta che parte dell'energia dell'onda eccitata nel tubo fluisce attraverso la superficie limite ed è irradiata all'esterno sotto forma di onde sferiche, dato che nessuna costrizione è più imposta alla propagazione. La riflessione sulla superficie di discontinuità non è più completa ma solo parziale. Di conseguenza, in corrispondenza all'estremità aperta del tubo l'ampiezza di vibrazione non ha il massimo valore e la variazione di pressione non è nulla.

Sintetizzando quanto è stato illustrato in questo paragrafo a proposito della riflessione completa di un'onda che incide normalmente su una parete rigida o su una parete cedevole, per lo spostamento e la variazione di pressione (nel caso di onde longitudinali) dell'onda riflessa sulla superficie di discontinuità, in relazione alle stesse grandezze dell'onda incidente, si può dire quanto segue:

superficie riflettente rigida	spostamento: invertito variazione di pressione: inalterata	<i>Condizioni imposte sullo spostamento e sulla pressione da una parete riflettente</i>
superficie riflettente cedevole	spostamento: inalterato variazione di pressione: invertita	

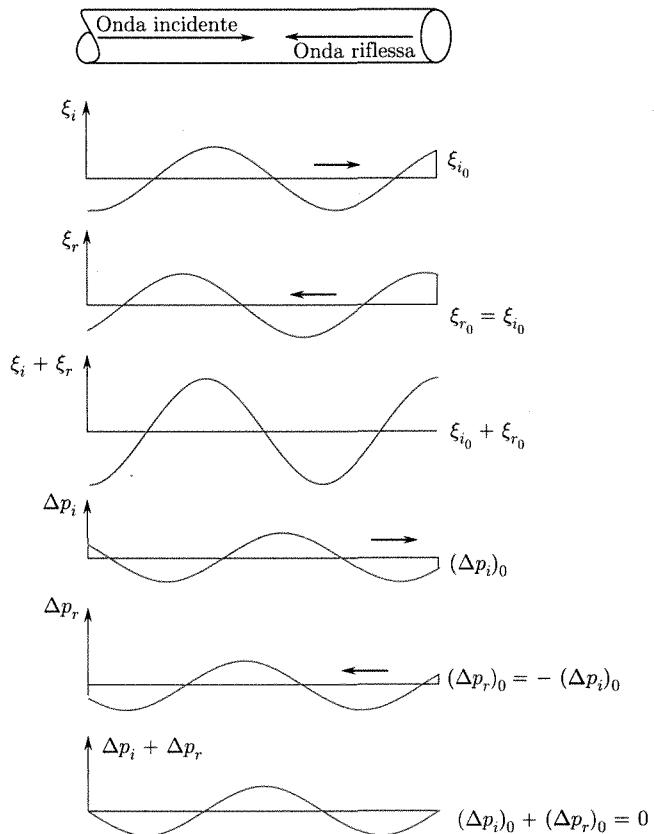


Fig. 9.49

9.23. RIFRAZIONE

Si consideri ora un treno di onde elastiche incidenti sulla superficie di separazione tra due mezzi elastici aventi caratteristiche elastiche diverse, e non molto discoste. La figura 9.50 (A. Giacomini) rappresenta un caso di questo genere: onde ultrasonore di 4 MHz piane (visualizzate nella stessa maniera precedentemente accennata) incidono sulla superficie di separazione fra etere di petrolio e acqua. Come si vede, oltre a un fascio riflesso ve ne è un altro (rifratto) nel secondo mezzo: tanto il fascio riflesso quanto quello rifratto non sono perfettamente paralleli perché la superficie di separazione (fra i liquidi) sotto l'azione del fascio incidente non resta piana.

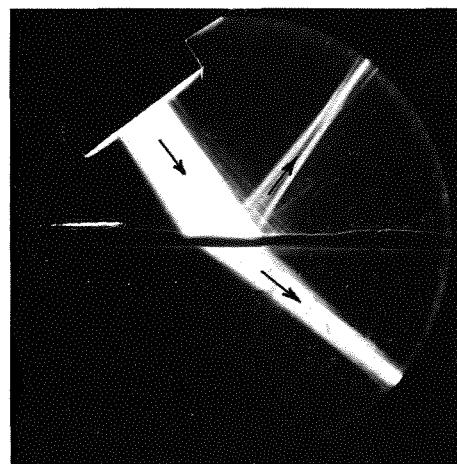


Fig. 9.50 Riflessione e rifrazione di un fascio di onde ultrasonore (4 MHz) incidenti sulla superficie di separazione fra etere di petrolio e acqua (A. Giacomini).

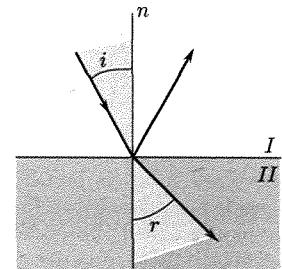


Fig. 9.51

Nella rifrazione gli angoli di incidenza e di rifrazione sono complanari ed è costante il rapporto dei loro seni

Il fenomeno descritto, in base al quale una perturbazione si origina nel secondo mezzo, si chiama rifrazione. La figura 9.50 e lo schema della figura 9.51 illustrano le leggi della rifrazione:

- il raggio incidente (mezzo I), la normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza e il raggio rifratto (mezzo II) giacciono nello stesso piano;
- per gli angoli di incidenza i e di rifrazione r vale la legge:

$$(130) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n_{12} = \text{cost.}$$

n_{12} prende il nome di indice di rifrazione del secondo mezzo rispetto al primo (l'ordine degli indici in n_{12} rappresenta l'ordine con cui i mezzi sono incontrati dall'onda).

La giustificazione di queste leggi e la determinazione di n possono essere ottenute applicando il principio di Huygens. Nella figura 9.52 si considera un fronte d'onda piano che si avvicina a una superficie piana di separazione dei mezzi I e II caratterizzati da velocità di propagazione c_1 e c_2 . La costruzione dell'onda riflessa è identica a quella vista in figura 9.41 ed è quindi omessa. La costruzione del fronte d'onda nel mezzo II si fa osser-

vando che la perturbazione costituita dal fronte d'onda incidente AB raggiunge C un tempo $\Delta t = BC/c_1$ dopo che ha raggiunto A . Ne segue che nel secondo mezzo, all'istante in cui B raggiunge C , la perturbazione prodotta in A è rappresentata da un'onda sferica di raggio $AH = c_2\Delta t = c_2(BC/c_1)$. Se si considerano allo stesso istante le perturbazioni originate nel secondo mezzo da punti del fronte d'onda incidente fra A e B , si hanno tante semisfere il cui inviluppo è un piano di traccia HC . Dalla figura si vede che

$$\sin i = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin r = \frac{AH}{AC}$$

e quindi

$$(131) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BC}{AH} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}.$$

L'indice di rifrazione è pari al rapporto tra le velocità di propagazione nei due mezzi I e II.

Si osservi che se la velocità nel secondo mezzo è maggiore di quella nel primo risulta $r > i$: il raggio nel passare nel secondo mezzo si allontana dalla normale. V'è quindi un angolo limite di incidenza in corrispondenza al quale $r = \pi/2$. Per angoli di incidenza superiori nessuna perturbazione può avversi nel secondo mezzo e quindi *tutta l'energia dell'onda incidente si trova nell'onda riflessa* e si ha il caso detto fenomeno della riflessione totale.

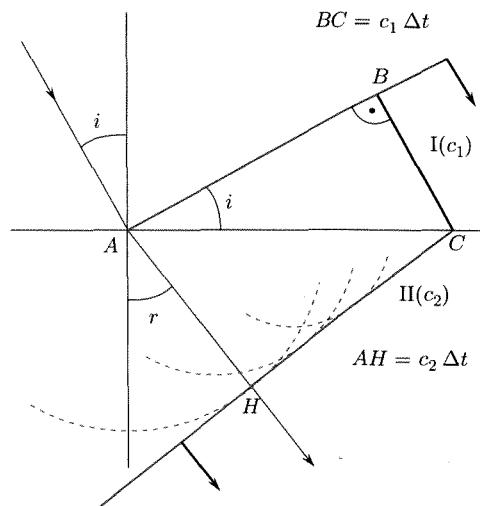


Fig. 9.52

*Angolo limite
e riflessione totale*

9.24. RIFLESSIONE PARZIALE ALLA SEPARAZIONE FRA DUE MEZZI

Come si è visto nel precedente paragrafo, quando onde elastiche raggiungono una superficie di separazione tra due mezzi diversi esse sono in parte riferate e in parte riflesse. È interessante vedere come l'energia si ripartisca fra le due onde emergenti.

Ciò può essere fatto scrivendo le equazioni del raggio per le tre onde e imponendo le condizioni che devono essere rispettate in corrispondenza alla superficie di separazione⁽¹⁶⁾. Esse sono essenzialmente le due seguenti:

1. *Continuità dello spostamento*, in accordo con l'ipotesi che la superficie di separazione resti indisturbata durante il passaggio delle onde, che cioè non vi sia moto relativo dei mezzi normalmente alla superficie di separazione o slittamento tangenzialmente a essa; tale condizione si esprime scrivendo che gli spostamenti dovuti alle tre onde sulla superficie di separazione hanno risultante nulla;
2. *Conservazione dell'energia*: essa si esprime dicendo che l'energia trasportata al secondo dall'onda incidente deve essere uguale a quella portata via nello stesso tempo dalle onde emergenti (se non vi sono effetti dissipativi).

⁽¹⁶⁾ In questa trattazione non viene considerato il fatto che, se uno dei mezzi è un solido, accanto alle onde qui considerate, se ne possono generare altre di tipo diverso (trasversali, superficiali ecc.).

All'interfaccia tra due mezzi con caratteristiche elastiche diverse l'energia si ripartisce tra l'onda riflessa e quella rifratta secondo leggi che coinvolgono il prodotto ρc , detto impedenza acustica

Esplicitando tali condizioni si ottiene nel caso di onde sinusoidali per il rapporto fra le ampiezze di vibrazione di un'onda riflessa longitudinale (A_r) e di quella incidente (A_i)

$$(132) \quad f = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\cotan r}{\cotan i}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\cotan r}{\cotan i}}$$

essendo ρ_1 e ρ_2 le densità del I e del II mezzo (incontrati nell'ordine dall'onda incidente); i e r gli angoli di incidenza e rifrazione. Per il caso di incidenza normale di onde longitudinali ($i = r = 0$), si immagini di far tendere gradualmente i (e r) a zero. Si ha:

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\cotan r}{\cotan i} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}$$

che, sostituita nella (132), dà per il rapporto fra le ampiezze dell'onda riflessa e di quella incidente

$$(133) \quad f = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{c_1}{c_2}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{c_1}{c_2}} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}.$$

Come si vede, se il mezzo I e il mezzo II sono uguali, si ha la completa trasmissione dell'energia dal primo al secondo mezzo, cioè $f = 0$, essendo:

$$(134) \quad \rho_1 c_1 = \rho_2 c_2.$$

Il prodotto della densità del mezzo per la velocità di propagazione delle onde longitudinali in esso (già incontrato al par. 9.9) prende il nome di impedenza acustica caratteristica (dimensioni $L^{-2} MT^{-1}$, unità usate $N s/m^3$ e $dine s/cm^3$). La condizione di massimo trasferimento di energia della perturbazione longitudinale è quella di uguaglianza (adattamento) delle impedenze caratteristiche dei due mezzi.

Come si è detto, la trattazione analitica qui presentata è limitata al caso di incidenza normale; anche per incidenze diverse dalla normale il trasferimento di energia è massimo in condizioni d'adattamento di impedenze. La figura 9.53 (A. Giacominii) mostra un fascio di ultrasuoni di 4 MHz che passa dall'acqua ($\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$, $c = 1.497 \text{ m/s}$, $\rho c = 149,7 \cdot 10^4 \text{ N s/m}^3$) a tetracloruro di carbonio ($\rho c = 145 \cdot 10^4 \text{ N s/m}^3$); essa è simile alla figura 9.50, ma in questo caso manca praticamente il fascio riflesso appunto perché le impedenze sono adattate.

Riesce utile introdurre un coefficiente di riflessione (β), come rapporto fra l'energia trasportata dall'onda riflessa in un secondo e l'analoga quantità per l'onda incidente. Ovviamente (essendo la energia proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda):

$$(135) \quad \beta = f^2 = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2$$

se con R si indicano le impedenze caratteristiche.

Il coefficiente di trasmissione (γ) è invece definito come il rapporto fra l'energia che passa al secondo nel secondo mezzo (rifratta) e quella incidente. Esso risulta

$$(136) \quad \gamma = 1 - \beta = \frac{4R_2 R_1}{(R_2 + R_1)^2}.$$

La forma di questi coefficienti di riflessione e trasmissione mostra che essi non dipendono dalla frequenza dell'onda incidente e quindi un'onda complessa viene riflessa e rifratta conservando la sua forma.

Si noti che l'espressione dei coefficienti β e γ dati dalle (135) e (136) sono equivalenti, come già riportato, a quelle dei rapporti tra la velocità di una massa urtata dopo l'urto con una seconda massa e la velocità di questa.

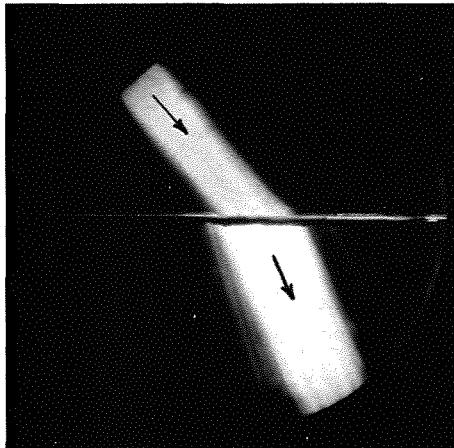


Fig. 9.53 Rifrazione di un fascio di onde ultronore (4 MHz) incidenti sulla superficie di separazione tra due liquidi (acqua e tetracloruro di carbonio) aventi la stessa impedenza acustica caratteristica (A. Giacominii).

Osserviamo inoltre che nel caso che il secondo mezzo sia rigido, la velocità di propagazione c_2 , e quindi R_2 , tende a infinito⁽¹⁷⁾. Si ha dalle (133) e (135) che $f = \beta = 1$ e l'onda è completamente riflessa in accordo a quanto visto nel punto 1. del par. 9.22.

Se invece il secondo mezzo ha inerzia trascurabile ($\rho = 0$) risulta c_2 (inversamente proporzionale a $\sqrt{\rho}$) infinita e così pure R_2 . Anche in questo caso risulta $f = \beta = 1$. Questo caso corrisponde alla riflessione su parete cedevole.

Questi due casi sono naturalmente teorici ed è interessante vedere la facilità maggiore o minore con la quale energia di onde elastiche longitudinali può passare da un mezzo a un altro nei casi concreti. Se R_1 è piccolo rispetto a R_2

$$(137) \quad \gamma = \frac{4R_1}{R_2}$$

$$(138) \quad \beta = 1 - \gamma = 1 - \frac{4R_1}{R_2}.$$

La energia che entra nel secondo mezzo è una piccola frazione di quella incidente e quasi tutta l'energia incidente è riflessa. Se per es. il primo mezzo è aria a una atmosfera a 25 °C e il secondo è acqua:

$$\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad c_1 = 343 \text{ m/s} \quad R_1 = 412 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad c_2 = 1497 \text{ m/s} \quad R_2 = 1497 \cdot 10^3 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma = \frac{4R_1}{R_2} = 0,11 \cdot 10^{-2}.$$

Cioè l'energia che dall'aria entra nell'acqua è solo lo 0,11%.

Se il secondo mezzo è un metallo, per es. ferro,

$$\rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad c_2 = 5850 \text{ m/s} \quad R_2 = 45,6 \cdot 10^8 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \quad \gamma = 0,36 \cdot 10^{-4}.$$

Come si vede, una piccola frazione dell'energia delle onde elastiche longitudinali che si propagano in un gas entrano in un secondo mezzo costituito da un liquido o da un solido. Si osservi che essendo le espressioni di β e γ simmetriche in R_1 e R_2 gli stessi coefficienti valgono se si scambiano fra loro il mezzo I e il mezzo II: *il passaggio di energia da un solido o da un liquido a un gas (o viceversa) è sempre molto limitato.*

Nel caso del passaggio tra un liquido e un solido la situazione è migliore. Se per es. il liquido è acqua e il solido ferro, si ha

$$\beta = \left(\frac{456 - 15}{456 + 15} \right)^2 = 0,86.$$

Di conseguenza il 14% dell'energia incidente passa nel secondo mezzo. Se il secondo mezzo è alluminio

$$\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3 \quad c_2 = 6260 \text{ m/s} \quad R_2 = 169 \cdot 10^5 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \quad \beta = \left(\frac{169 - 15}{169 + 15} \right)^2 = 0,69$$

e quindi il 31% dell'energia incidente va nel secondo mezzo.

*Coefficienti
di riflessione
e di rifrazione:
confronto
con i processi
di urto elastico*

■ 9.25. PROPAGAZIONE GEOMETRICA DI ONDE ELASTICHE

Nei paragrafi precedenti si è osservato che quando le dimensioni degli ostacoli posti nello spazio investito da onde elastiche sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda di queste e le particolarità della perturbazione ai limiti della regione investita dalle onde non abbiano interesse, lo studio

⁽¹⁷⁾ Come si è già visto, in corrispondenza a una parete rigida non si può avere alcuno spostamento. Ne segue che nessuna perturbazione passa e si propaga nel secondo mezzo.

della propagazione può essere fatto considerando i raggi (normali in ciascun punto alle superfici d'onda) assieme alle leggi della riflessione e della rifrazione, nel senso che le soluzioni dei problemi che si ottengono applicando le semplici regole di propagazione della perturbazione per raggi rettilinei praticamente coincidono con quelle ottenibili con soluzioni più accurate delle equazioni delle onde. Si parla allora, come già detto, di propagazione geometrica.

È chiaro che in questa trattazione la perturbazione esiste solo in una regione dello spazio (zona irradiata, a volte anche detta *zona illuminata*, per analogia con il caso ottico) e il passaggio alla regione esclusa (zona d'ombra) avviene nettamente in corrispondenza a superfici definite dalla geometria delle sorgenti e dai bordi degli ostacoli.

Numerosi e importanti sono i problemi che possono essere trattati in questa maniera.

Per sottolineare le caratteristiche di tale propagazione geometrica si esaminino ancora alcune immagini della perturbazione prodotta da onde elastiche longitudinali in un liquido. La figura 9.54 mostra un sistema di onde piane di 8 MHz in acqua con λ circa 0,2 mm e fascio parallelo di ultrasuoni deviato da un prisma. Il prisma è di plexiglas e l'acqua è stata tenuta a 15 °C ($c = 1472$ m/s). Le onde entrano nel prisma senza essere deviate (incidenza normale). La deviazione avviene sulla superficie di uscita dal prisma; l'angolo di incidenza è 45°; quella di rifrazione 23°36'. Dalla legge della rifrazione si ricava la velocità di propagazione delle onde longitudinali nel plexiglas: $c = 2820$ m/s (superiore a quella dell'acqua). La figura 9.55 mostra come, configurando opportunamente il secondo mezzo immerso nel primo, si può avere una concentrazione di energia su una linea o in un punto (onde piane trasformate in onde cilindriche o sferiche): nel caso della figura la *lente piano-concava* è di plexiglas in acqua: essa è convergente perché la velocità di propagazione nel plexiglas è maggiore di quella nell'acqua⁽¹⁸⁾.

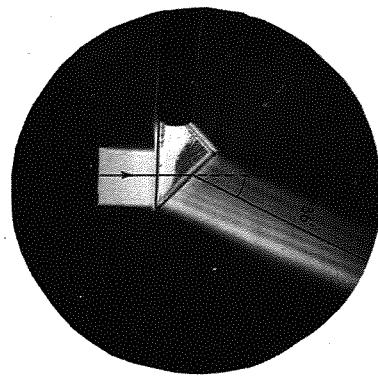


Fig. 9.54 Deviazione di un fascio ultrasonoro (8 MHz) in acqua da parte di un prisma di plexiglas.

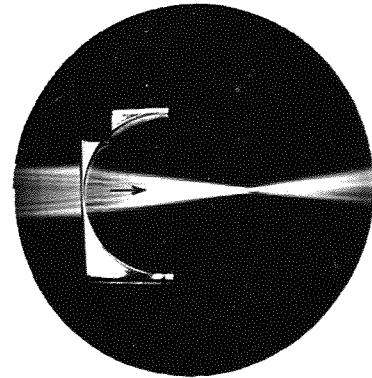


Fig. 9.55 Concentrazione di un fascio ultrasonoro (8 MHz) in acqua prodotta da una lente di plexiglas piano-concava ($r = 20$ mm).

Concentrazioni di energia possono essere anche ottenute con specchi sferici o parabolici.

Le figure 9.56 e 9.57 (A. Giacomini) rappresentano il caso di un fascio di onde elastiche di 4 Hz che si propaga in mezzo (acqua) e incontra uno strato sottile (lamina) di un mezzo diverso (alluminio); l'energia che passa attraverso lo strato può variare drasticamente con lo spessore dello strato stesso. Tale comportamento

⁽¹⁸⁾ Una lente piano concava in aria per la luce è divergente perché la velocità della luce nel mezzo che costituisce la lente (vetro) è inferiore a quella nell'aria.

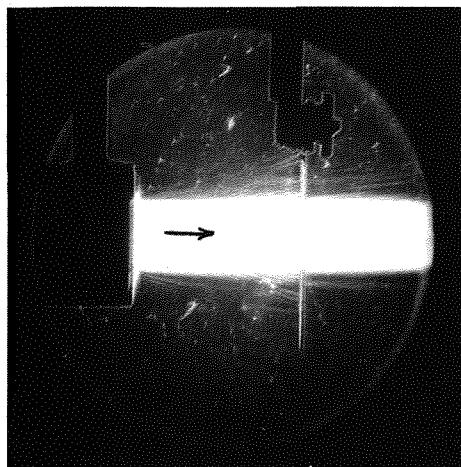


Fig. 9.56 Passaggio di onde ultrasonore piane (4 MHz) attraverso una lamina di alluminio dello spessore di 0,75 mm $\approx \lambda/2$ (A. Giacomini).

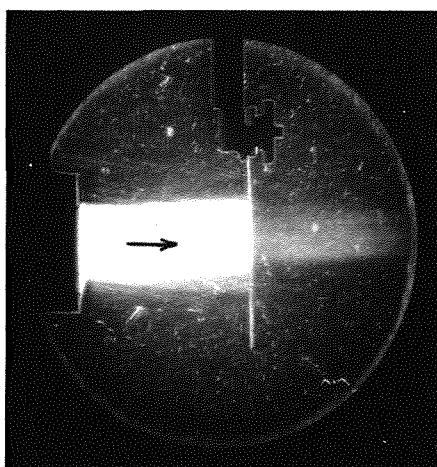


Fig. 9.57 Passaggio di onde ultrasonore piane (4 MHz) attraverso una lamina di alluminio dello spessore di 0,38 mm $\approx \lambda/4$ (A. Giacomini).

è dovuto al fatto che in questi casi (lamine a facce parallele di spessore limitato) occorre considerare le riflessioni successive su tutte e due le facce solide incontrate dalla radiazione e gli effetti sono diversi secondo i valori delle fasi con cui interferiscono le onde che hanno subito riflessioni multiple. Nel caso di incidenza normale di un sistema di onde elastiche sinusoidali che si propagano in un mezzo I su uno strato di un mezzo II di spessore s , si trova per il rapporto fra l'intensità delle onde trasmesse attraverso lo strato nel mezzo I, J_t , e la intensità J_i delle onde incidenti l'espressione che caratterizza la trasparenza

$$(139) \quad \frac{J_t}{J_i} = 1 - \frac{\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)^2}{4 \cotan^2 ks + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right)^2}$$

in cui R_1 e R_2 sono le impedenze caratteristiche dei due mezzi e $k = 2\pi/\lambda$.

Si vede che la lamina è sempre trasparente nel caso in cui ci sia adattamento di impedenza: $R_1 = R_2$. A parte questo caso, la (139) mostra che l'energia trasmessa passa alternativamente per massimi e minimi al variare dello spessore della lamina s . Infatti $\cotan ks = 0$ tutte le volte che

$$ks = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

con n intero, cioè per

$$(140) \quad s = (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$$

La frazione nel secondo membro della (139) è allora massima e J_t minimo. Quando invece è

$$ks = n\pi$$

cioè per

$$(141) \quad s = n\frac{\lambda}{2}$$

$\cotan ks = \pm\infty$ e la trasparenza è massima.

La figura 9.58 riporta in grafico la equazione (139) calcolata per il caso di una lamina di alluminio in acqua ($R_1/R_2 = 0,094$). Gli spessori delle lamine usate nelle esperienze delle figure 9.56 e 9.57 sono molto prossimi a $\lambda/4$ (trasparenza praticamente nulla) e $\lambda/2$ (trasparenza completa).

La trasparenza di una lamina è funzione del rapporto tra lo spessore e la lunghezza d'onda

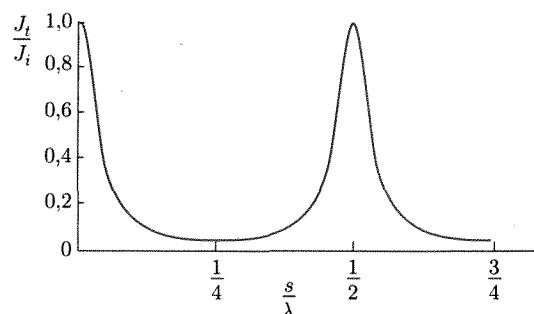


Fig. 9.58

Gli effetti sopra descritti per il caso di ultrasuoni si verificano anche con onde di frequenza molto minore, come per es., onde longitudinali sonore (20-20.000 Hz): si ricordi infatti che quello che interessa perché la propagazione presenti le caratteristiche esaminate, è che il rapporto fra le dimensioni lineari dell'ostacolo e la lunghezza d'onda sia grande. Per es. si considerano suoni di frequenze 100, 500, 1.000, 5.000 Hz in aria ($c = 331 \text{ m/s}$), le λ risultano eguali a 3,3, 0,66, 0,33, 0,06 m: è evidente che tali onde possono talvolta incontrare ostacoli molto maggiori della loro lunghezza d'onda.

Considerazioni di propagazione geometrica si applicano anche in acustica ambientale, ove le ripetute riflessioni delle onde sulle pareti di un ambiente hanno effetti fondamentali sulla distribuzione dell'energia sonora negli ambienti stessi e sul suo decremento (tempo di riverberazione) quando la emissione delle onde venga a cessare.

Considerazioni analoghe sono quelle che guidano la costruzione di specchi da usare per concentrare la energia proveniente da sorgenti distanti (per es. aerei in volo). Sulle stesse linee va cercata la spiegazione di particolari effetti acustici che si riscontrano in certe costruzioni o grotte naturali: sussurrando in corrispondenza a un certo punto la parola può essere distintamente udita ponendo l'orecchio in un ben determinato punto lontano. Si tratta di solito in questi casi di presenza di superfici concave (archi) o cupole che fanno convergere in un punto le onde emesse in un altro.

Altri esempi di propagazione geometrica saranno visti nel prossimo capitolo.

9.26. FENOMENI DI DIFFRAZIONE

La diffrazione al di là di un ostacolo apre il fronte d'onda su angoli tanto più grandi quanto maggiore è il rapporto fra le dimensioni dell'ostacolo e la lunghezza d'onda

Si passi ora a considerare i casi in cui nella propagazione delle onde elastiche vengano incontrati ostacoli di dimensioni comparabili (o più piccole) della lunghezza d'onda, o in cui si sia interessati allo stato della perturbazione ai limiti fra zona irradiata e zona d'ombra, secondo l'approssimazione della propagazione geometrica.

Questi casi non possono essere trattati con l'approssimazione ora citata e occorre usare per la loro spiegazione la descrizione ondulatoria: essi si indicano con il nome generale di fenomeni di diffrazione.

Un esempio di fenomeni di diffrazione si ha nel caso in cui delle onde (elastiche) incidano su una parete munita di un foro: finché le dimensioni del foro sono grandi rispetto a λ (fig. 9.59a) la perturbazione al di là della parete investe una regione limitata come se (a parte esigui effetti di diffrazione agli orli) la propagazione avvenisse per raggi che si propaghino rettilineamente (fig. 9.59b): al di fuori di questa regione irraggiata la perturbazione è pressoché ovunque nulla (ombra). È possibile vedere con la teoria ondulatoria che la interferenza delle onde secondarie emesse dai punti della superficie d'onda *AB* conduce praticamente allo stesso risultato⁽¹⁹⁾.

Se le dimensioni dell'apertura vengono gradatamente ridotte fino a

⁽¹⁹⁾ L'intensità della perturbazione, tuttavia, presenta un andamento particolare in corrispondenza al passaggio dalla zona *illuminata* a quella d'ombra senza il passaggio brusco da una intensità costante a zero come sarebbe indicato dalla approssimazione geometrica.

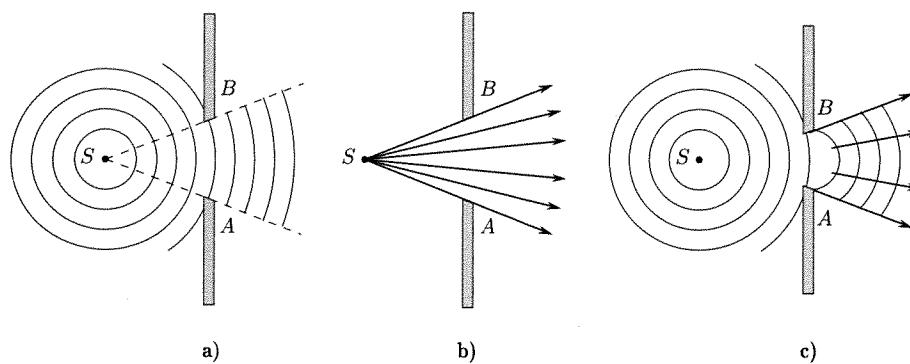


Fig. 9.59

divenire dell'ordine di λ , si trova che la perturbazione non resta limitata al cono corrispondente ad ASB , ma finisce per invadere, con diversa intensità, tutto lo spazio al di là della parete (fig. 9.59c).

La figura 9.60 (F.R. Watson) mostra la fotografia di onde superficiali, prodotte in acqua, che incidono su una parete cilindrica munita sulla sinistra e sulla destra di due aperture rispettivamente di dimensioni notevoli rispetto a λ e di dimensioni dello stesso ordine di grandezza di λ . La spiegazione del fatto che nel secondo caso la perturbazione invade tutto lo spazio al di là del foro può essere fatta abbastanza semplicemente con il principio di Huygens. La figura 9.61 (R.W. Pohl) mostra il caso di onde superficiali aventi fronti d'onda rettilinei che incidono su un ostacolo con foro più piccolo della lunghezza d'onda.

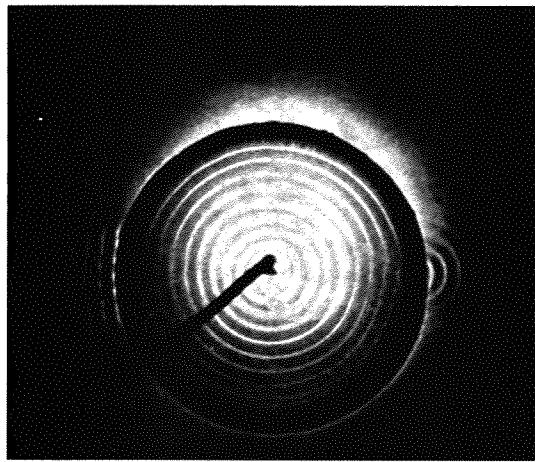


Fig. 9.60 Onde superficiali in acqua incidenti su un ostacolo munito di un'apertura piuttosto grande rispetto a λ (a sinistra) e di un'apertura piccola rispetto a λ (a destra) (F.R. Watson).

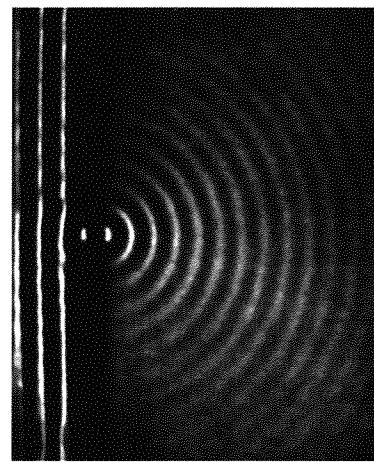


Fig. 9.61 Onde superficiali piane in acqua incidenti su un ostacolo munito di apertura di dimensioni piccole rispetto a λ (R.W. Pohl).

Un analogo fenomeno di diffrazione si può osservare anche quando un fascio di onde piane investe una parete che termina con un orlo rettilineo molto lungo (praticamente infinito); nell'approssimazione geometrica della propagazione la radiazione non dovrebbe interessare la regione in ombra dietro l'ostacolo: in realtà la radiazione invade parte di questo spazio e l'angolo interessato non dipende dalla lunghezza d'onda (fig. 9.62a, b).

La figura 9.63 riporta una fotografia di onde superficiali in acqua diffratte dal bordo di un ostacolo (R.W. Pohl).

La diffrazione al di là di un semipiano apre il fronte d'onda di un angolo indipendente dalla lunghezza d'onda

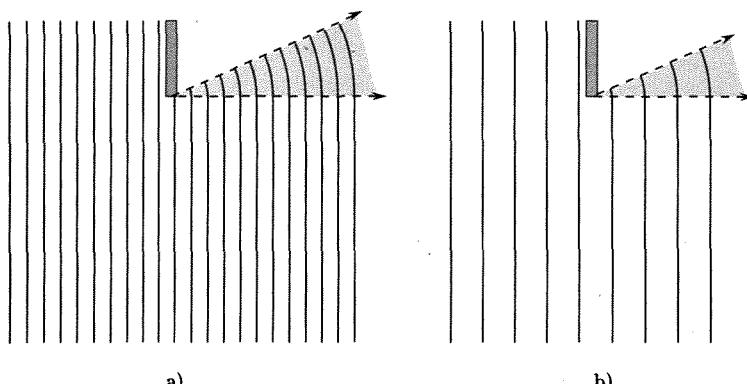


Fig. 9.62

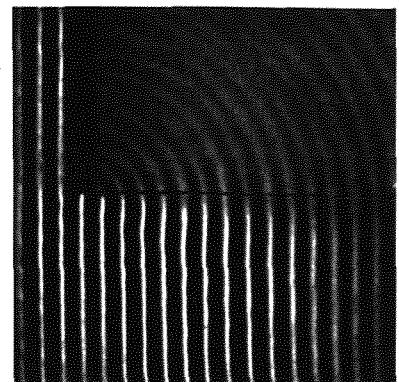


Fig. 9.63 Onde superficiali lineari in acqua diffratte all'orlo di un ostacolo (R.W. Pohl).

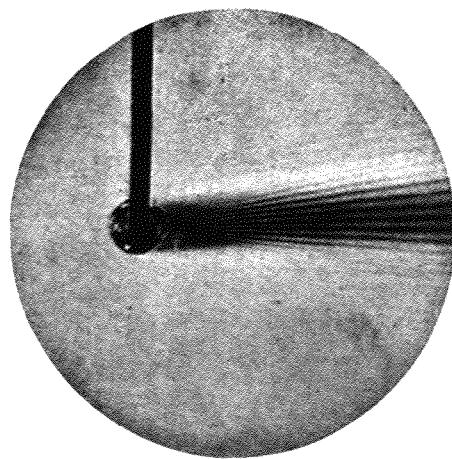


Fig. 9.64 Onde piane ultrasonore (6,5 MHz) in xylofo, diffratte da un cilindro di rame del diametro di 5 mm (R. Bär).

I fenomeni di diffrazione sono molto comuni in acustica dove le lunghezze d'onda sono comparabili con le dimensioni degli oggetti della vita quotidiana

I fenomeni di diffrazione prodotti da ostacoli di altro tipo, posti nel campo di propagazione delle onde, sono anche essi analoghi e divengono particolarmente evidenti quando almeno una delle dimensioni dell'oggetto diviene comparabile con λ . La figura 9.64 (R. Bär) mostra la diffrazione prodotta da un cilindro di rame del diametro di 5 mm su cui incidono onde elastiche longitudinali piane e progressive di 6,5 MHz in xylofo. La figura è stata ottenuta con la tecnica altre volte vista: v'è perturbazione elastica in corrispondenza alle regioni che appaiono luminose. Come si vede, la perturbazione invade la zona dietro l'ostacolo: si noti la presenza di frange, e quindi le grandi variazioni di intensità nella zona d'ombra.

Da quanto finora detto appare evidente che i processi di diffrazione sono caratteristici della propagazione per onde come quelli di interferenza e pertanto si presentano alla nostra osservazione molto spesso. In un certo senso non dovrebbe sorprendere il loro verificarsi bensì il fatto che talvolta la propagazione per onde possa essere abbastanza bene approssimata da una propagazione geometrica per raggi. Come si è detto, la possibilità di quest'ultima schematizzazione è possibile solo quando le dimensioni degli ostacoli sono grandi rispetto a λ .

Il fatto che le lunghezze d'onda delle onde elastiche nel campo di frequenze udibili vadano da circa alcune decine di metri (33 m a 100 Hz) a pochi centimetri (2 cm a 15.000 Hz), fa intuire come i fenomeni di diffrazione debbano essere facilmente osservabili e siano alla base di effetti molto comuni nel campo sonoro, ove sono di solito presenti oggetti delle dimensioni λ . Il fatto, per es., che una persona che parla in campo aperto possa udire la propria voce (perturbazione che dal cavo orale raggiunge le orecchie nella zona d'ombra), oppure che un ascoltatore possa udire una persona che parla con le spalle rivolte verso di lui, sono esempi semplici di casi nei quali la perturbazione si propaga al di là dell'ostacolo per diffrazione.

■ 9.27. DIFFRAZIONE DA UNA FENDITURA RETTANGOLARE O DA UN FORO CIRCOLARE

Come esempio della maniera nella quale i fenomeni di diffrazione possono essere trattati consideriamo il caso in cui (fig. 9.65a) onde piane (rappresentate per mezzo di fronti d'onda e di raggi paralleli) incontrino una parete in cui v'è una fenditura di lunghezza molto grande (perpendicolarmente al piano del disegno) e altezza AB dell'ordine di λ e cerchiamo di determinare la distribuzione della perturbazione in un piano (schermo) parallelo alla parete della fenditura e a grande distanza da essa (figura di diffrazione di Fraunhofer): in tali condizioni le onde sferiche secondarie emesse dai vari punti della fenditura investiti da un fronte di onda possono essere sostituite da raggi e quelli che giungono in un punto P dello schermo dai vari punti della fenditura possono essere considerati paralleli fra loro.

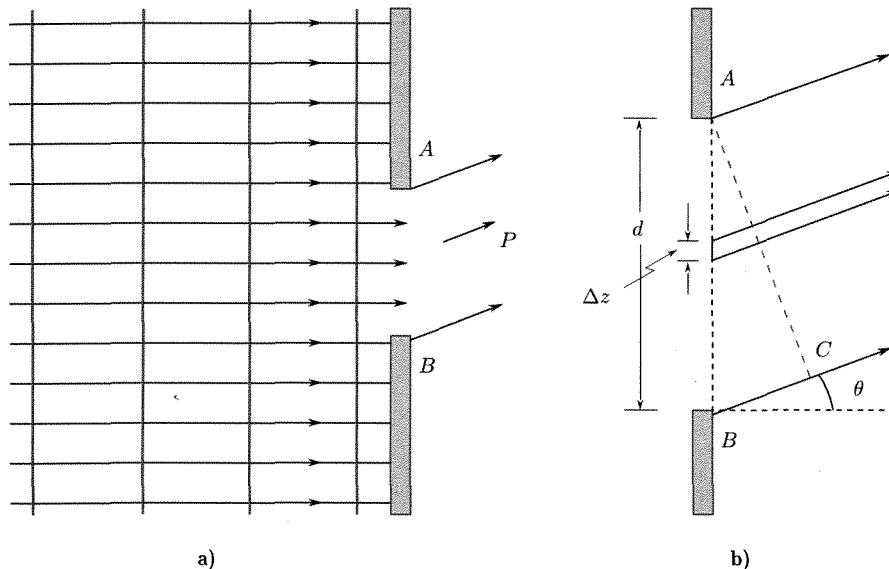


Fig. 9.65

Supponiamo di dividere il fronte d'onda AB in una serie di n strisce aventi la lunghezza della fenditura e altezza Δz (fig. 9.65b). Si può ritenere che ciascuna di queste strisce contribuisca alla perturbazione ξ in P con un termine di ampiezza a la cui fase varia secondo la distanza da P della singola striscia. Chiamiamo $\Delta\varphi$ la differenza di fase con cui arriva in ritardo la perturbazione di una striscia, rispetto a quella della striscia contigua e più vicina all'orlo A . Scegliendo in maniera opportuna la fase di ξ_1 , le perturbazioni dovute alle singole strisce possono porsi nella forma

$$(142) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = a \sin(\omega t + \Delta\varphi) \\ \xi_2 = a \sin(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \dots \\ \xi_n = a \sin(\omega t + n\Delta\varphi) \end{array} \right.$$

da cui sommando e svolgendo

$$(143) \quad \xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = a \sin \omega t [\cos \Delta\varphi + \cos 2\Delta\varphi + \dots + \cos n\Delta\varphi] + \\ + a \cos \omega t [\sin \Delta\varphi + \sin 2\Delta\varphi + \dots + \sin n\Delta\varphi].$$

Se si pone

$$(144) \quad \begin{cases} A \cos \varphi = a[\cos \Delta\varphi + \cos 2\Delta\varphi + \cdots + \cos n\Delta\varphi] \\ A \sin \varphi = a[\sin \Delta\varphi + \sin 2\Delta\varphi + \cdots + \sin n\Delta\varphi] \end{cases}$$

si ha per ξ

$$(145) \quad \xi = A[\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi] = A \sin(\omega t + \varphi)$$

cioè la perturbazione risultante in P è sinusoidale con ampiezza e fase che si possono ricavare dalle (144) quadrando e sommando (A^2) e facendone il rapporto ($\tan \varphi$).

Le (144) possono porsi nella forma

Per diffrazione da una fenditura si hanno nello spazio lontano da questa direzioni di perturbazione nulla alternate a direzioni di perturbazione massima

$$(146) \quad \begin{cases} A \cos \varphi = a \frac{\sin \frac{n\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \cos \left[\frac{n+1}{2} \Delta\varphi \right] \\ A \sin \varphi = a \frac{\sin \frac{n\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \sin \left[\frac{n+1}{2} \Delta\varphi \right] \end{cases}$$

da cui quadrando, sommando ed estraendo la radice quadrata:

$$(147) \quad A = a \frac{\sin \frac{n\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}.$$

È questa la relazione che dà l'ampiezza della oscillazione risultante in P . Se ora si indica la differenza di fase fra gli arrivi delle perturbazioni dovute ai punti estremi di AB come

$$2\alpha = n\Delta\varphi$$

e si suppone n molto grande in modo che α/n sia piccolo, si ha

$$(148) \quad A = \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{n}} = \frac{na \sin \alpha}{\alpha}.$$

Si osservi (fig. 9.65) che il ritardo di fase con cui la perturbazione generata in B arriva rispetto a quella generata in A , corrisponde al maggior percorso BC ; quindi

$$(149) \quad \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{BC}{\lambda}$$

avendo supposto $BC < \lambda$.

D'altra parte se si indica con θ l'angolo fra la direzione di P e la normale alla fenditura e con d l'altezza della fenditura

$$(150) \quad 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Le (148) e (150) consentono di determinare come vari A sullo schermo al variare del punto P la cui posizione è determinata da θ .

In direzione normale alla fenditura si ha $\theta = 0$, $\alpha = 0$ e $\sin \alpha/\alpha = 1$. Di conseguenza la perturbazione ha il valore

$$(151) \quad A = A_0 = na$$

che è il valore massimo possibile in quanto prodotto dall'arrivo in fase di tutte le onde componenti.

Si ha inoltre $A = 0$ per $\alpha = l\pi$ (l numero intero), cioè per

$$(152) \quad \sin \theta = \frac{l\lambda}{d}.$$

Nella figura 9.66 è mostrato l'andamento di $(A/A_0)^2$ in funzione di α (non di θ). Fra i due valori contigui di α per cui A è nullo vi è una posizione di massimo. Tali posizioni si determinano ponendo la condizione $dA/d\alpha = 0$; si trova che esse si

hanno in corrispondenza a valori di α per cui $\alpha = \tan \alpha$. Tali valori sono approssimativamente pari a $3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2 \dots$, oltre ad $\alpha = 0$. Il valore del secondo massimo nell'ampiezza della perturbazione (dopo A_0) è:

$$(153) \quad A_2 = A_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} = A_0 \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2A_0}{3\pi}.$$

Il rapporto delle intensità fra il primo e il secondo massimo è

$$(154) \quad \frac{A_0^2}{A_2^2} = \frac{9\pi^2}{4} \simeq 22.$$

Si può quindi concludere che quasi tutta la energia è concentrata nella regione individuata da $\alpha < \pi$, per la quale cioè

$$(155) \quad \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} < \pi$$

o, più semplicemente

$$(156) \quad \sin \theta < \frac{\lambda}{d};$$

$\lambda/d = \sin \theta$ è una misura della divergenza delle onde dalla fenditura; si vede che man mano che la larghezza della fenditura d decresce la divergenza aumenta. Se $d = \lambda$, $\theta = \pi/2$ cioè la perturbazione invade tutto il semispazio al di là della fenditura.

Se invece di considerare una fenditura rettangolare si considera un foro circolare, si possono fare considerazioni nella sostanza identiche a quelle ora viste e si deduce che, se il diametro del foro diviene dell'ordine di grandezza di λ , la perturbazione su un piano parallelo alla parete e molto distante da essa ha un massimo sull'asse del foro e massimi secondari su circonferenze concentriche.

Se si indica con 2α la differenza di fase massima per le onde che da punti del foro raggiungono il punto P , si ha in questo caso

$$(157) \quad 2\alpha = \frac{2\pi D \sin \theta}{\lambda}$$

essendo D il diametro del foro.

La figura 9.67 dà $(A/A_0)^2$ in funzione di α . In questo caso l'energia è essenzialmente concentrata in direzioni per cui $\sin \theta < 0,61 \lambda/r$, essendo $r = D/2$.

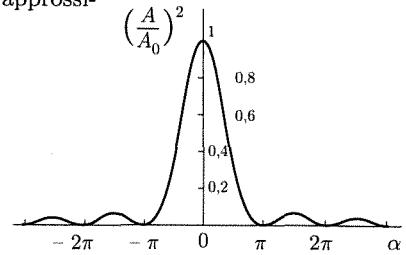


Fig. 9.66

Il rapporto tra la lunghezza d'onda e la dimensione del foro dà un'indicazione dell'angolo entro cui è distribuita l'energia dell'onda diffratta

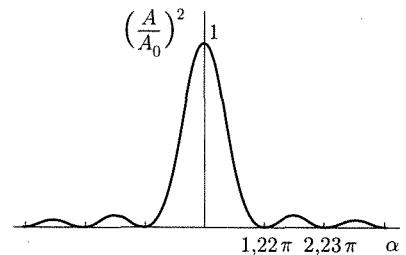


Fig. 9.67

■ 9.28. SORGENTE O RICEVITORE IN MOTO. EFFETTO DOPPLER

Nelle considerazioni finora svolte si è sempre considerato il caso in cui tanto la sorgente quanto il ricevitore della perturbazione *occupino posizioni fisse nel mezzo di propagazione*. Nel caso contrario, cioè se l'osservatore, la sorgente o entrambi si muovono rispetto al mezzo di propagazione, le frequenze delle componenti armoniche della perturbazione rivelata dal ricevitore differiscono dalle frequenze della perturbazione emessa dalla sorgente.

In ciò consiste l'effetto Doppler: questo avviene quando, per es.⁽²⁰⁾, una persona ferma al suolo riceva la perturbazione costituita dal fischio

⁽²⁰⁾ Altri esempi importanti si hanno in varie parti della fisica per onde di altro tipo. Nel caso di onde elettromagnetiche l'effetto Doppler è stato usato per determinare la velocità rispetto alla Terra di alcune stelle (cap. 1, par. 1.19), per spiegare alcune caratteristiche (larghezza di linea) della luce emessa da atomi di gas ad alta temperatura, per misurare la velocità di corpi (per es. missili) muniti di sorgenti o di superfici che riflettano verso Terra onde incidenti.

di un treno in corsa (sorgente in moto rispetto al mezzo e all'osservatore) e ne sente cambiare la frequenza quando il treno dopo essersi avvicinato si allontana, oppure quando un osservatore (in moto rispetto al mezzo e alla sorgente) su un treno ascolti un campanello suonare quando passa attraverso una stazione rilevandone una variazione di frequenza.

Si considerino separatamente i casi in cui la sorgente oppure il ricevitore siano in *moto rispetto al mezzo di propagazione* supponendo di avere perturbazioni sinusoidali.

a. Sorgenti in moto

*L'effetto Doppler
consiste nel cambio della
frequenza udita rispetto
a quella emessa dalla
sorgente
ogni qualvolta la
sorgente o il ricevitore si
muovano rispetto
al mezzo
di propagazione*

Si abbia una sorgente, per es. di onde sferiche. Se la sorgente è ferma (fig. 9.8), i fronti d'onda sono costituiti da sfere concentriche ed equidistanti e su qualsiasi raggio si trovi l'osservatore *la frequenza delle oscillazioni* (numero di oscillazioni rilevate al secondo o numero di superfici d'onda che passano attraverso la posizione dell'osservatore al secondo) è la stessa e *pari alla frequenza della perturbazione emessa dalla sorgente*.

Se si suppone invece che la sorgente si muova lungo la direzione della congiungente sorgente-osservatore con velocità v (minore della velocità di propagazione della perturbazione nel mezzo), i fronti d'onda saranno sfere non più concentriche, ma con centro nella posizione occupata dalla sorgente all'istante della emissione: lo schema di figura 9.68, in cui S_1, S_2, \dots sono le posizioni assunte dalla sorgente dopo intervalli di tempo pari a un periodo nel suo moto verso l'osservatore, e la fotografia di figura 9.69 (R.W. Pohl) mostrano questo stato di cose. È evidente che un osservatore in P_1 riceve ogni secondo un numero maggiore di fronti d'onda ritardati di 2π l'uno dall'altro di quello emesso dalla sorgente, mentre un osservatore in P_2 ne riceve un numero minore.

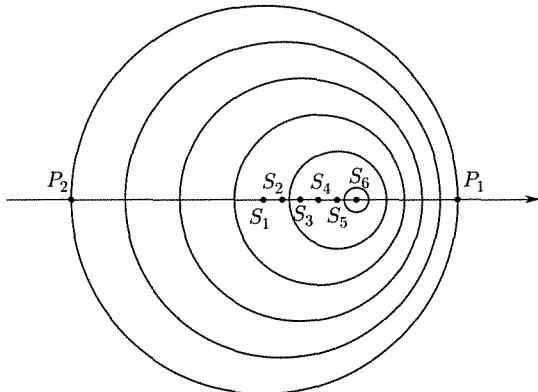


Fig. 9.68

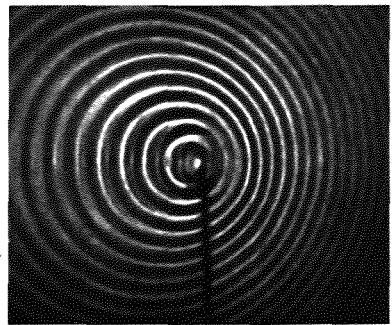


Fig. 9.69 Onde superficiali in un liquido generate da una sorgente in moto (R.W. Pohl).

Per una valutazione quantitativa dell'effetto si osservi la figura 9.70. La sorgente emetta una perturbazione di frequenza ν ; qualora essa fosse in quiete le ν onde emesse in un secondo occuperebbero, nella direzione sorgente-osservatore, un tratto di lunghezza pari a c . Se invece nello stesso tempo la sorgente si è mossa con velocità scalare v_s rispetto al mezzo di propagazione (positiva nel verso sorgente-osservatore) le ν onde saranno, per così dire, compresse (o dilatate nel caso di velocità opposta) nello spazio $c - v_s$. Esse perciò saranno rivelate dall'osservatore come caratterizzate

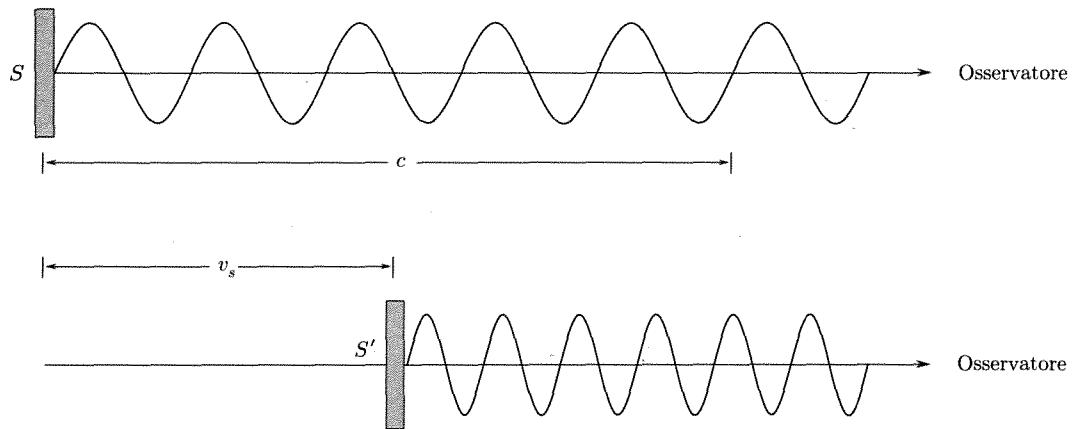


Fig. 9.70

da una lunghezza d'onda

$$(158) \quad \lambda' = \frac{c - v_s}{\nu}$$

cioè da una frequenza

$$(159) \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - v_s} \nu.$$

*Effetto Doppler
per sorgente in moto
rispetto al mezzo*

Si osservi che la variazione della frequenza dell'onda ricevuta rispetto a quella emessa è di segno contrario dalle due parti della sorgente (osservatori in P_1 e P_2).

b. Ricevitore in moto

Sia ora la sorgente ferma rispetto al mezzo di propagazione ed emetta una perturbazione di frequenza ν . Se il ricevitore si muove nel mezzo verso la sorgente con velocità v_0 scalare (positiva nel verso ricevitore-sorgente) il numero totale di fronti d'onda ritardati di 2π l'uno dall'altro incontrati dal ricevitore in un secondo (fig. 9.71) sarà pari alla somma di quello dei fronti che avrebbe incontrato se fosse stato fermo e del numero di quelli contenuti

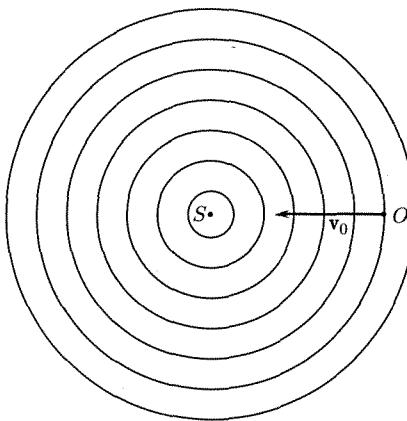


Fig. 9.71

nello spazio v_0 di cui si è mosso. Questo ultimo è pari a $v_0/\lambda = v_0/c\nu$. La frequenza della perturbazione udita è quindi:

*Effetto Doppler
per ricevitore in moto
rispetto al mezzo*

$$(160) \quad \nu' = \nu + \frac{v_0}{c} \nu = \nu \left(1 + \frac{v_0}{c} \right).$$

Ovviamente se si decide di scegliere come positivo sulla direzione SO il verso dalla sorgente all'osservatore, nella formula (160) v_0 va sostituito con $-v_0$.

Nel caso più generale in cui tanto S quanto O siano in moto nel mezzo di propagazione lungo la congiungente orientata da S ad O con velocità v_S e v_0 , si dovrà fare uso di entrambe le formule già trovate (159) e (160). Infatti, il moto della sorgente causerebbe per suo conto una variazione della frequenza osservata

$$\nu' = \frac{c}{c - v_S} \nu,$$

mentre il moto dell'osservatore produrrebbe

$$(161) \quad \nu'' = \nu' \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) = \frac{c - v_0}{c - v_S} \nu.$$

Essa contiene le (159) e (160) come casi particolari.

Si osservi che, sulla base delle formule stabilite, è diverso l'effetto di una sorgente che si avvicina con una certa velocità a un osservatore fermo nel mezzo da quello di un osservatore che si avvicini con la stessa velocità alla sorgente ferma: si potrebbe pensare a prima vista che dovesse essere rilevante solo la velocità relativa⁽²¹⁾. Ciò non è giacché le onde sono affidate al moto di particelle del mezzo materiale e, una volta create, esse hanno una loro identità in tale mezzo e, come si è visto, i processi fisici legati al moto della sorgente mobile rispetto al mezzo in cui si propagano le onde o dell'osservatore mobile sono differenti⁽²²⁾.

⁽²¹⁾ Una tale circostanza si verifica approssimativamente nel caso che v_0 e v_S siano entrambe molto piccole rispetto a c . Usando infatti lo sviluppo del binomio fermato al termine di primo grado e di conseguenza scrivendo

$$\left(1 - \frac{v_S}{c} \right)^{-1} \approx \left(1 + \frac{v_S}{c} \right)$$

si ha dalla (161)

$$\nu'' \cong \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) \left(1 + \frac{v_S}{c} \right) \nu = \left(1 - \frac{v_0 - v_S}{c} - \frac{v_0 v_S}{c^2} \right) \nu \simeq \left(1 - \frac{v_0 - v_S}{c} \right) \nu$$

e la frequenza osservata dipende dalla velocità dell'osservatore rispetto alla sorgente.

⁽²²⁾ La situazione è diversa nel caso delle onde elettromagnetiche, in relazione al fatto che esse non consistono nel moto di particelle materiali e non esiste un mezzo di trasmissione rispetto al quale riferire il moto della sorgente e dell'osservatore (inoltre la velocità c di propagazione delle onde è la stessa per tutti gli osservatori qualunque sia il loro moto relativo): in tal caso la sorgente che si allontana dall'osservatore (fermo) corrisponde alla stessa situazione fisica dell'osservatore che si allontana dalla sorgente (fissa). Il problema va trattato con la relatività esprimendo l'invarianza degli argomenti $(kx - \omega t)$ e $(k'x' - \omega't')$ che caratterizzano un'onda sinusoidale in due terne inerziali, essendo x, t legati a x', t' dalle trasformazioni di Lorentz (cap. 3, par. 3.11). Si trova (poiché $\omega = 2\pi\nu$)

$$\nu' = \frac{\frac{v}{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \nu$$

essendo v la velocità relativa tra osservatore e sorgente.

Le formule (159), (160), (161) sono valide finché v_S e v_0 sono inferiori a c . Una situazione particolare si verifica quando $v_S > c$, quando cioè la sorgente delle onde (per es. un proiettile, un aereo) procede a velocità supersonica. In tal caso la perturbazione prende la forma di un'onda impulsiva.

Si considerino infatti (fig. 9.72) le onde emesse da una sorgente puntiforme. Esse sono costituite da fronti d'onda sferici che si ingrandiscono con una velocità c inferiore a quella con cui si muove la sorgente. L'involucro di tutti questi fronti d'onda fornisce il fronte d'onda della perturbazione che, come si vede, è un cono la cui semiapertura θ è data da

$$(162) \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{c}{v_S}.$$

Nel caso in cui la sorgente si muova nel mezzo con velocità maggiore di quella del suono, si forma un'onda di shock

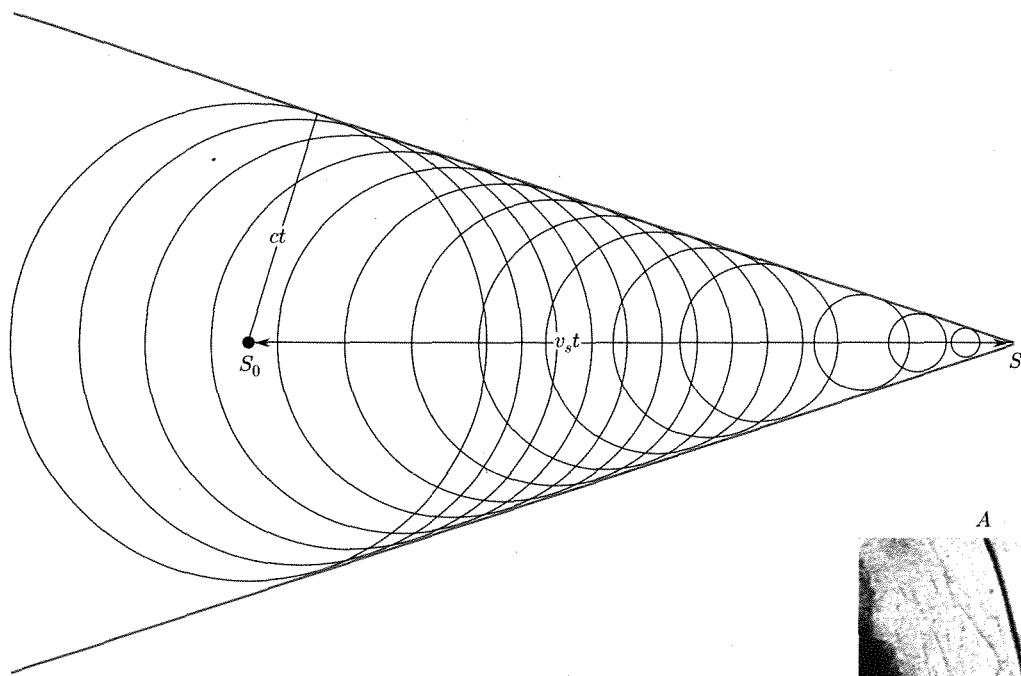


Fig. 9.72

Il rapporto v_S/c è il numero di Mach (cap. 8, par. 8.13), un parametro che caratterizza il comportamento del mezzo nei riguardi della compressibilità nella situazione in esame. Perciò θ è chiamato angolo di Mach: una sua misura consente di determinare v_S .

La figura 9.73 (R.W. Pohl) mostra un proiettile sparato da un fucile. La AA è la superficie d'onda della perturbazione dovuta alla esplosione: siccome il proiettile si muove con velocità superiore a quella del suono, esso ha superato la AA ed è evidente la emissione delle onde impulsive o onde d'urto o di shock.

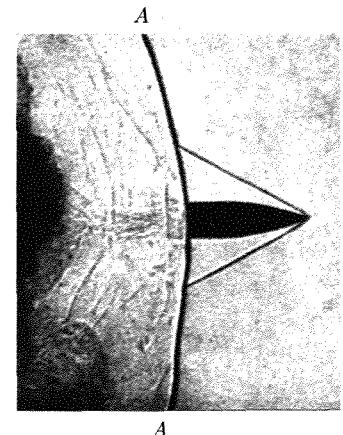


Fig. 9.73 Onda d'urto generata da un proiettile che viaggia a velocità superiore a quella del suono. AA è la superficie d'onda della perturbazione impulsiva dovuta all'esplosione e viaggia con la velocità del suono (R.W. Pohl).

9.29. PRESSIONE DI RADIAZIONE

Consideriamo ancora una perturbazione elastica che incida su un ostacolo. È possibile mettere in evidenza che, anche qualora le onde siano di ampiezza sufficientemente piccola in modo che non appaiano fenomeni non lineari, si esercita una pressione continua sull'ostacolo tendente a spingerlo nella direzione di propagazione delle onde: questa pressione non va confusa con la pressione che nel caso di onde longitudinali è dovuta alla variazione della densità del mezzo (pressione acustica) e che in un punto varia nel tempo, sinusoidalmente, per es. per onde sinusoidali.

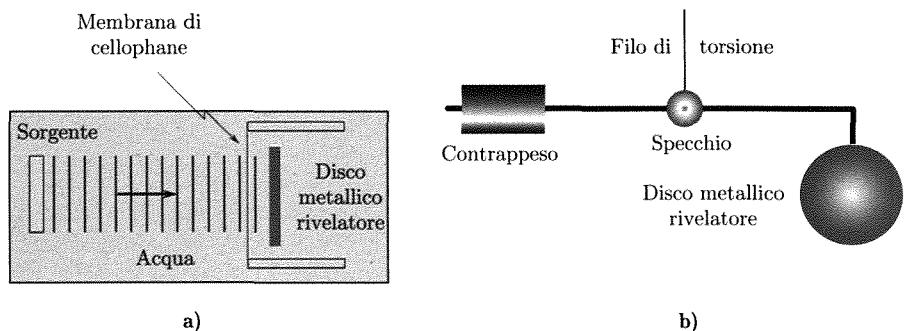


Fig. 9.74

In figura 9.74 una sorgente di onde sinusoidali longitudinali piane di alta frequenza è disposta in un fluido (per es. acqua) e le onde colpiscono un rivelatore posto dietro un sottile foglio di cellophane. Tale foglio non ha praticamente effetto sulle onde, ma ferma eventuali moti convettivi del fluido e protegge l'elemento sensibile del rivelatore, costituito da un disco esposto alla radiazione; esso assieme a un'asta e a un contrappeso costituisce un giogo che viene sostenuto da un sottile filo di quarzo. Si ottiene così una bilancia di torsione capace di misurare piccole forze applicate al disco (cap. 6, par. 6.3). Detta d la distanza del punto di applicazione della forza \mathbf{F} dal filo di sospensione, θ l'angolo di torsione di cui devia l'equipaggio sotto l'azione di \mathbf{F} e k la costante che lega θ al momento di reazione elastica, si può scrivere per la nuova posizione di equilibrio

$$Fd = k\theta.$$

Dalla misura di θ si può quindi determinare F . Con una tale bilancia si può riscontrare che effettivamente esiste la pressione di radiazione e la si può anche valutare in funzione degli altri parametri che caratterizzano le onde.

I risultati sperimentali mostrano che nel caso di onde longitudinali in un gas la pressione di radiazione Π può essere espressa nella forma:

$$(163) \quad \Pi = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\varepsilon.$$

essendo $\gamma = c_p/c_v$ il rapporto dei calori specifici rispettivamente a pressione costante e a volume costante ed ε la densità di energia totale sul

fronte dell'ostacolo. La densità ε , nel caso di superficie perfettamente riflettente, è

$$(164) \quad \varepsilon = \frac{2J}{c}$$

essendo J l'intensità dell'onda incidente e di quella riflessa. Nel caso di superficie perfettamente assorbente è

$$(165) \quad \varepsilon = \frac{J}{c}.$$

L'esistenza della pressione di radiazione esercitantesi su un ostacolo posto nello spazio investito dalla perturbazione è una proprietà caratteristica delle onde.

Per spiegare teoricamente (secondo Larmor) l'origine della pressione di radiazione, si immagini di far muovere l'ostacolo verso la sorgente. Per quanto è stato detto nel paragrafo precedente sull'effetto Doppler, le onde riflesse hanno una frequenza maggiore e una λ minore di quelle incidenti e pertanto posseggono una maggiore energia: la variazione di energia che si produce per effetto della riflessione deve corrispondere al lavoro compiuto dall'ostacolo per muoversi contro le onde e ciò è possibile solo se esiste una pressione continua di radiazione esercitata dalle onde sull'ostacolo.

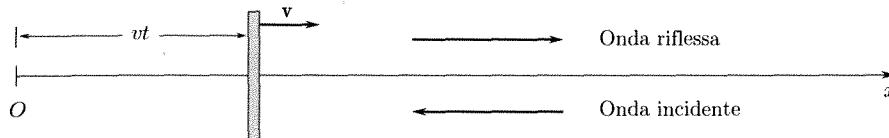


Fig. 9.75

Con queste considerazioni si può determinare anche il valore della pressione di radiazione. Si supponga a tal fine (fig. 9.75) che il riflettore, rigido, completamente riflettente, si muova dalla posizione $x = 0$ con velocità v positiva. L'onda incidente, propagantesi nella direzione negativa di x , di frequenza ν e lunghezza d'onda λ , sia

$$(166) \quad \xi_i = a_i \sin(kx + \omega t) = a_i \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + ct)$$

e quella riflessa (di lunghezza d'onda λ_r e frequenza $\nu_r = c/\lambda_r$)

$$(167) \quad \xi_r = a_r \sin \frac{2\pi}{\lambda_r}(x - ct).$$

In corrispondenza alla superficie completamente riflettente lo spostamento risultante deve essere zero a ogni istante, cioè si deve avere a ogni istante nel punto $x = vt$ (posizione del riflettore) $\xi = \xi_i + \xi_r = 0$. Si ha quindi

$$(168) \quad a_i \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} t(v + c) \right] + a_r \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda_r} t(v - c) \right] = 0.$$

Questa relazione richiede

$$(169) \quad a_i = a_r$$

$$(170) \quad \frac{2\pi}{\lambda} t(c + v) = \frac{2\pi}{\lambda_r} t(c - v)$$

cioè

$$(171) \quad \frac{c - v}{c + v} = \frac{\lambda_r}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu_r}.$$

*Alla radiazione acustica
in un mezzo
si accompagna una
pressione di radiazione*

Se si ricorda [formula (59)] che la densità di energia per onde di ampiezza costante è proporzionale a ν^2 , si può scrivere per la densità delle onde incidenti ε_i e per quella delle onde riflesse ε_r

$$(172) \quad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r} = \left(\frac{\nu}{\nu_r} \right)^2 = \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^2$$

da cui

$$(173) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_i \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^2$$

ed

$$(174) \quad \varepsilon_i + \varepsilon_r = 2\varepsilon_i \frac{(c^2 + v^2)}{(c-v)^2}.$$

L'energia che incide sull'unità di area dell'ostacolo (che si muove con velocità v) nell'unità di tempo è per l'onda incidente quella che riempie un cilindro di sezione unitaria ed altezza $c+v$ cioè

$$(175) \quad e_i = \varepsilon_i(c+v).$$

Analogamente l'energia riflessa dall'unità di area nell'unità di tempo è

$$(176) \quad e_r = \varepsilon_r(c-v).$$

La variazione di energia ($e_r - e_i$) deve corrispondere al lavoro fatto in un secondo dalla forza dovuta alla pressione di radiazione che si esercita sull'area unitaria:

$$(177) \quad \Pi v = e_r - e_i = e_i \left(\frac{e_r}{e_i} - 1 \right).$$

Dalle (172), (175) e (176)

$$(178) \quad \frac{e_r}{e_i} = \frac{c+v}{c-v}$$

e quindi

$$(179) \quad \Pi v = e_i \frac{2v}{c-v}$$

e

$$(180) \quad \Pi = \frac{2e_i}{c-v} = 2\varepsilon_i \frac{c+v}{c-v}.$$

Ricordando la (174)

$$(181) \quad \Pi = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} (\varepsilon_i + \varepsilon_r).$$

Come si vede la pressione di radiazione è proporzionale alla densità totale di energia di fronte all'ostacolo.

Nel caso che l'ostacolo sia fermo ($v = 0$)

$$(182) \quad \Pi = (\varepsilon_i + \varepsilon_r) = 2 \frac{J}{c}.$$

Le considerazioni precedenti sono state ottenute nella ipotesi di superficie perfettamente riflettente. Se ciò non fosse, l'onda riflessa avrebbe ampiezza minore di quella incidente e la densità totale di energia in corrispondenza all'ostacolo, da inserire nella (181), diminuirebbe. Al limite, per superficie d'ostacolo perfettamente assorbente, si troverebbe

$$(183) \quad \Pi = \varepsilon_i = \frac{J}{c}.$$

Le formule generali ora ottenute con riferimento a onde elastiche longitudinali vanno bene nel caso in cui si possa ritenere $\gamma = 1$ (liquidi). Nel caso dei gas esse valgono in condizioni di propagazione isoterma (validità della legge di Boyle); se la propagazione è adiabatica, il calcolo conduce alla (163).

Bibliografia

- [1] E. PERSICO, *Introduzione alla fisica matematica*, Zanichelli, Bologna.
- [2] R.B. LINDSAY, *Mechanical radiation*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [3] F.S. CRAWFORD, *La fisica di Berkeley - Onde ed oscillazioni*, vol. III, Zanichelli, Bologna, 1972.
- [4] R.W.B. STEPHENS, A.E. BATE, *Acoustics and vibrational physics*, Arnold Pu. Ltd, London, 1966.
- [5] J.W. RAYLEIGH LORD, *The theory of sound*, Dover, New York.

SUONI E ULTRASUONI

Suddivisione perturbazioni elastiche per frequenza:

infrasuoni,	$\nu < 16 \text{ Hz}$
suoni,	$16 \text{ Hz} \leq \nu \leq 20.000 \text{ Hz}$
ultrasuoni,	$\nu > 20.000 \text{ Hz}$

Suddivisione sorgenti sonore per geometria:

monodimensionali (corde, tubi, sbarre), **bidimensionali** (piastre, membrane), **tridimensionali** (cavità, corpi estesi).

- In una sorgente si stabiliscono *modi propri* di vibrazione, dipendenti dalle condizioni al contorno (*nodi* o superfici nodali, di spostamento o di pressione). In sorgenti monodimensionali la dimensione della sorgente si commisura con λ o con multipli (dispari, pari) di sottomultipli ($\lambda/2, \lambda/4$; frequenze *armoniche* in rapporto semplice con la fondamentale); in sorgenti bi- o tri-dimensionali non ci sono generalmente armoeniche con frequenze in rapporti semplici.
- **Orecchio**
Audiogramma normale: limiti di frequenza (16 Hz, 20 kHz), limite inferiore di sensibilità (*soglia* J_0 a 1.000 Hz: 10^{-12} W/m^2), limite superiore di sensibilità (*dolore*, $\sim 1 \text{ W/m}^2$); *curve isofoniche*, di eguale sensazione a frequenze diverse.
- **Misura del livello di sensazione per suoni puri:** $N = \log_{10} J/J_0$.
- ✓ **Ultrasuoni**
Frequenza $\nu > 20 \text{ kHz}$, lunghezze d'onda piccole con direttività maggiore dei suoni.
- **Effetti d'interazione con la materia:** misure di *assorbimento*, effetto *acustooottico*, ecolocalizzazione di ostacoli, *ecografia*, rilevazione di difetti nei materiali ecc.

■ 10.1. INTRODUZIONE

Il nome di suono è in senso stretto limitato alle oscillazioni *periodiche* di un mezzo elastico che possano stimolare l'orecchio umano. Tali oscillazioni hanno quindi una frequenza della componente fondamentale compresa fra i limiti di sensibilità di questo organo: 20 Hz, 15 ÷ 20 kHz; di solito, inoltre, le perturbazioni elastiche che colpiscono l'orecchio si sono propagate attraverso l'aria e sono quindi costituite da onde elastiche longitudinali.

Accanto ai suoni si considerano perturbazioni elastiche non periodiche che pure possono stimolare l'orecchio e a esse si assegna il nome di rumori. Lo studio dei suoni e dei rumori, della loro generazione, della propagazione nell'aria fino alla eccitazione dell'organo uditivo e delle caratteristiche della sensazione prodotta, è compito dell'acustica.

I significati dei termini *suono* e *acustica* sono stati tuttavia estesi a comprendere e a studiare tutti i fenomeni vibratori di frequenza compresa fra 20 Hz e 15 ÷ 20 kHz e la loro propagazione qualunque sia il fine per cui essi sono prodotti e qualunque sia il mezzo di propagazione. Le vibrazioni e le onde di frequenza al di fuori di questo intervallo non entrerebbero nel campo dell'acustica per ragioni esclusivamente legate alle caratteristiche dell'orecchio umano, ma dal punto di vista fisico esse vanno trattate con i medesimi criteri validi per le onde acustiche. Per questa ragione il significato del termine *acustica* viene a volte ulteriormente esteso a comprendere tutte le oscillazioni e le onde elastiche in qualsiasi mezzo e a qualsiasi frequenza esse siano prodotte. Più spesso tuttavia si mantengono ancora per l'acustica i limiti di frequenza della sensibilità dell'orecchio e si parla di infrasuoni per frequenze più basse di 20 Hz e di ultrasuoni per frequenze superiori ai 20 kHz.

Il tipo di vibrazioni e di onde è comunque essenzialmente lo stesso e anche i fenomeni che si presentano nella propagazione possono avere aspetti simili: si è infatti visto che la possibilità di approssimare la propagazione delle onde mediante la propagazione rettilinea di raggi, o la necessità di considerare la propagazione ondulatoria (diffrazione) quando le onde interagiscono con ostacoli, dipende esclusivamente dal rapporto fra la dimensione dell'ostacolo e la lunghezza d'onda e non dal valore assoluto di λ . Naturalmente, se si considera la propagazione in certi mezzi e in presenza di certi ostacoli (cioè restando fissate la velocità di propagazione e le dimensioni degli ostacoli), è evidente che a basse frequenze gli effetti

di diffrazione saranno predominanti, mentre a frequenze abbastanza elevate l'importanza degli effetti di diffrazione diminuisce e diviene valida l'approssimazione di propagazione rettilinea dei raggi.

Nel precedente capitolo si è trattato, facendo riferimento al caso di onde elastiche, un certo numero di aspetti e di problemi che valgono nella loro sostanza per qualsiasi tipo di onde: elastiche, elettromagnetiche ecc. Nel presente capitolo si aggiungerà qualcosa di interesse specifico per i suoni e gli ultrasuoni.

Naturalmente la trattazione sarà limitata ad alcune questioni fondamentali e non saranno considerati problemi importanti quali *l'acustica musicale, l'acustica ambientale, l'acustica fisiologica*: alcuni di questi problemi saranno considerati nel corso di Fisica Tecnica.

Dopo avere discusso alcune questioni relative alle sorgenti di suoni e di ultrasuoni e ai rivelatori, con particolare riferimento all'orecchio umano, si esamineranno i caratteri dei suoni e si presenteranno brevi cenni sugli ultrasuoni.

10.2. CLASSIFICA DELLE SORGENTI

*Una sorgente di onde
è essa stessa sede
di propagazione di onde
in una struttura finita*

La generazione di onde elastiche, sonore e ultrasonore, in un mezzo esteso si attua con sorgenti le quali sono esse stesse dei sistemi materiali capaci di vibrare e nei quali si propagano le onde. In tali sorgenti avviene la trasformazione in energia meccanica oscillatoria associata alle onde, di energia di altro tipo (meccanica, come nelle percussioni, elettrica ecc.).

Le sorgenti sonore possono essere classificate in varia maniera: le sorgenti musicali per es. si dicono:

1. *a percussione* (sbarra, campana, triangolo, tamburo ecc.);
2. *ad aria soffiata* (organo, tromba, clarino ecc.);
3. *a corde* (arpa, violino, piano ecc.).

Volendo rendere più evidenti le caratteristiche fisiche che fissano la frequenza dei suoni emessi, si preferisce qui seguire una classifica diversa e dividere le sorgenti in uni-, bi-, tridimensionali secondo la estensione del mezzo materiale che costituisce la sorgente. È bene avvertire che le sorgenti unidimensionali comprendono non solo quelle (come le corde) che hanno due dimensioni trascurabili rispetto alla terza, ma anche le sorgenti caratterizzate dallo stabilirsi nel loro interno di onde piane (tubi) e che quindi possono essere descritte considerando le variazioni delle grandezze caratteristiche della vibrazione secondo una sola dimensione.

10.3. SORGENTI UNIDIMENSIONALI

a. Corde

Si consideri una corda di lunghezza l tesa con una forza di tensione T , fissata agli estremi e disturbata in un punto, per es. con un archetto⁽¹⁾: la perturbazione trasversale suscitata in un punto viaggia verso gli estremi

⁽¹⁾ L'effetto di un archetto che viene fatto scorrere sulla corda è quello di aderire e scorrere alternativamente sulla corda, consentendo un trasferimento continuo di energia dall'archetto stesso alla corda.

fissi e ne è riflessa con inversione di fase (cap. 9, par. 9.22) e praticamente senza attenuazione. In base a quanto è stato visto (cap. 9, par. 9.4), la perturbazione prodotta (periodica o meno) può considerarsi somma di perturbazioni sinusoidali. Considerando ciascuna di queste individualmente, si vede che la interferenza dell'onda diretta e di quelle riflesse, della stessa frequenza, tende a produrre onde stazionarie. Il fatto che queste si stabiliscano in realtà dipende dal verificarsi della condizione che le onde riflesse successivamente agli estremi (2, 3, 4... volte) si compongano per dare una perturbazione equivalente a quella di due onde di uguale ampiezza propagantesi in versi opposti (cap. 9, par. 9.18): poiché si devono avere due nodi di vibrazione in corrispondenza agli estremi, la lunghezza della corda l deve essere pari a un numero intero di $\lambda/2$

$$(1) \quad l = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Se questa condizione non è verificata l'interferenza delle varie onde riflesse è distruttiva e la vibrazione si smorza rapidamente nel tempo.

Tutto ciò mostra che una corda tesa è un sistema che può essere posto in vibrazione (e generare onde nello spazio circostante) su un numero discreto di frequenze: a seconda dell'eccitazione, essa può vibrare su una qualsiasi di queste frequenze o su più di una di esse con intensità diversa, contemporaneamente.

Ricordando che è $c = \sqrt{T/\mu}$ e μ è la densità lineica della corda, le frequenze sono date da

$$(2) \quad \nu = \frac{n}{2l} \sqrt{T/\mu} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esse si chiamano frequenze proprie, o di risonanza, della corda o dei suoi modi di vibrazione.

Nella figura 10.1 sono indicate le modalità di vibrazione della corda: gli spostamenti dei punti dalla posizione d'equilibrio a vari istanti durante un periodo sono mostrati dalle varie curve. Nella vibrazione fondamentale tutti i punti della corda si muovono in fase: l'andamento descritto si può anche esprimere dicendo che la corda costituisce un sistema meccanico capace di oscillare liberamente sulla frequenza propria $\nu_0 = 1/2l\sqrt{T/\mu}$; se esso è sottoposto a una forza periodica di frequenza diversa, abbastanza lontana da ν_0 , esso oscilla con ampiezza trascurabile; se la frequenza coincide con ν_0 si ha la risonanza.

Nelle vibrazioni su armoniche superiori la corda è divisa da punti stazionari (nodi) in tratti di lunghezza pari a una mezza lunghezza d'onda e, mentre tutti i punti di un tratto vibrano in fase, quelli di due tratti contigui vibrano in opposizione di fase. Il sistema meccanico (continuo) è capace di

*Condizioni di risonanza
di una corda fissata
agli estremi*

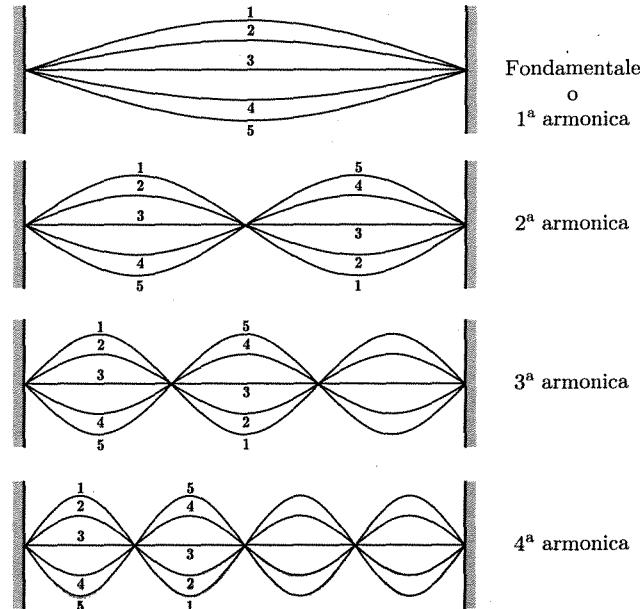


Fig. 10.1

risuonare oltre che sulla frequenza fondamentale anche sulla frequenza di un'armonica superiore qualora venga opportunamente sollecitato.

Si osservi che una corda tesa nello spazio come quella descritta, che sia in vibrazione, trasmette la vibrazione al mezzo circostante. Ma, in tal caso, essa genera suoni di ampiezza molto piccola e non costituisce una sorgente efficiente. Negli strumenti musicali le corde sono tese vicino a cavità che, come vedremo in seguito, risuonando possono rinforzare le vibrazioni prodotte nell'aria direttamente dalle corde. Va infine osservato che per qualsiasi sistema vibrante l'irraggiamento nel mezzo circostante costituisce la causa più importante di perdita di energia e quindi di smorzamento del sistema stesso: il sistema deve essere continuamente rifornito di una quantità di energia pari a quella irraggiata se si vuole che la sua oscillazione si mantenga costante.

b. Sbarre

Le sbarre possono essere fatte vibrare trasversalmente o longitudinalmente a seconda di come vengano eccitate, per es. percuotendole trasversalmente o longitudinalmente. Per esse possono ripetersi le considerazioni svolte nel caso precedente: esse possono vibrare, e quindi generare suoni nell'ambiente circostante, su quelle frequenze per le quali nel loro interno si stabiliscono onde stazionarie. Le frequenze di queste onde dipendono, oltre che dalla velocità di propagazione dei particolari tipi di vibrazione nel materiale di cui le sbarre sono fatte, dalla maniera in cui esse sono sostenute, in quanto ciò fissa le condizioni ai limiti che le onde stazionarie devono soddisfare. L'analisi è molto semplice nel caso di oscillazioni longitudinali (estensionali). Se per es. (fig. 10.2a) la sbarra è incastrata ad un estremo e libera all'altro, le onde stazionarie devono avere un nodo di vibrazione all'estremo fisso e un ventre di vibrazione all'estremo libero: la oscillazione fondamentale si ottiene quindi per una frequenza per cui è $l = \lambda/4$. I modi superiori si hanno per $l = \frac{3}{4}\lambda$, $l = \frac{5}{4}\lambda \dots$ Le lunghezze d'onda per le vibrazioni longitudinali consentite si ricavano dalla condizione

$$(3) \quad (2n+1)\frac{\lambda}{4} = l \quad \text{con } n \text{ intero.}$$

Le frequenze corrispondenti sono, per le vibrazioni longitudinali:

$$(4) \quad \nu_l = \frac{c_l^*}{4l} (2n+1).$$

La velocità c_l^* di propagazione delle onde estensionali nelle sbarre è diversa (e di poco inferiore) da quella delle onde longitudinali (c_l) in mezzi illimitati a causa della dilatazione laterale che accompagna la compressione. La differenza $c_l - c_l^*$ è proporzionale a ω^2 e quindi può essere in genere trascurata per modi di bassa frequenza. Entro tali limiti i modi superiori possono essere considerati modi armonici (armoniche *dispari*).

Se invece la sbarra è bloccata al centro (fig. 10.2b) questo punto deve essere un nodo di vibrazione e gli estremi devono essere due ventri: la oscillazione fondamentale si ha per $\lambda/2 = l$, la seconda per $\lambda = l$ e così via.

Nella figura 10.2c è indicata un'altra maniera di sostenere la sbarra, nella quale sono bloccati i punti distanti $l/4$ dagli estremi liberi; i punti fissi devono al solito essere nodi di vibrazione e gli estremi liberi ventri. La oscillazione fondamentale ha in tal caso la lunghezza d'onda $\lambda = l$.

*Condizioni di risonanza
di una sbarra
con un estremo fisso
e uno libero*

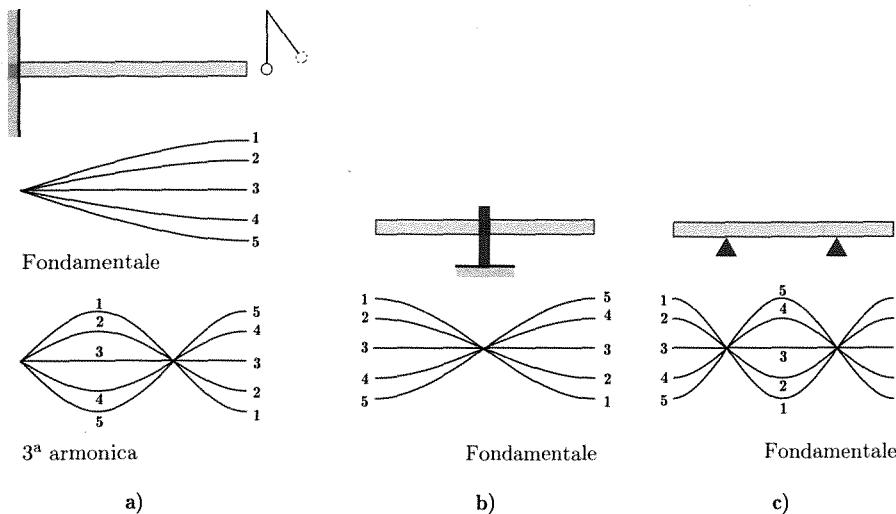


Fig. 10.2

Come si è detto, possono essere generate anche oscillazioni trasversali: in questo caso le frequenze dei modi di oscillazione non sono fra loro in rapporti semplici (rappresentati cioè da numeri interi) neanche approssimativamente.

Un caso interessante di sbarre in vibrazione trasversale è il diapason, costituito come in figura 10.3a; il diapason viene molto usato perché fornisce un'oscillazione periodica molto pura la cui frequenza varia poco con la temperatura e la ampiezza di vibrazione. Esso può essere considerato sia come formato da due sbarre incastrate a un estremo e accoppiate fra loro attraverso l'aria, sia come una modifica di una sbarra libera oscillante sulla seconda armonica. Se infatti una tale sbarra viene gradatamente piegata, i punti nodali (fig. 10.3b) si avvicinano al centro della sbarra, fino a raggiungere una posizione molto prossima fra loro nella struttura del diapason: lo strumento può allora essere sostenuto in corrispondenza alla zona dei nodi senza che una quantità rilevante di energia venga sottratta dal sostegno durante le oscillazioni. Di conseguenza le oscillazioni una volta iniziate si smorzano molto lentamente. La frequenza dell'oscillazione fondamentale di un diapason di acciaio è data dalla relazione approssimata

$$(5) \quad \nu = \frac{84.590 t}{l^2}$$

avendo l e t i significati indicati in figura.

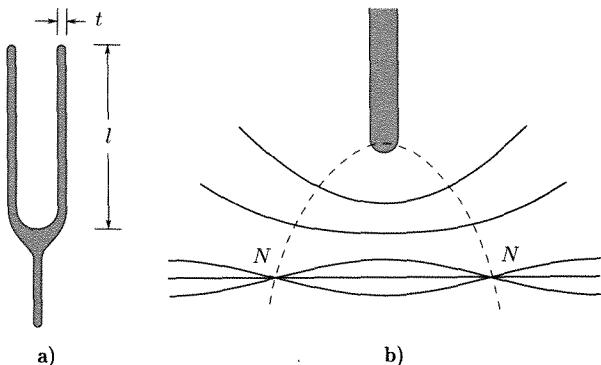


Fig. 10.3

*Modi propri
di un diapason*

c. Colonne d'aria

L'esempio tipico di sorgenti di questo tipo è rappresentato dalle canne d'organo: si tratta di tubi cilindrici a pareti metalliche, rigide, in aria. Esse possono essere chiuse o aperte a una estremità mentre all'altra sono sempre aperte. Per la eccitazione della colonna d'aria viene inviato un getto di aria contro l'orlo del tubo alla estremità aperta (*ancia*): si generano dei vortici che immettono impulsi di pressione nel tubo ad intervalli regolari

*Condizioni di risonanza
di una canna,
aperta o chiusa*

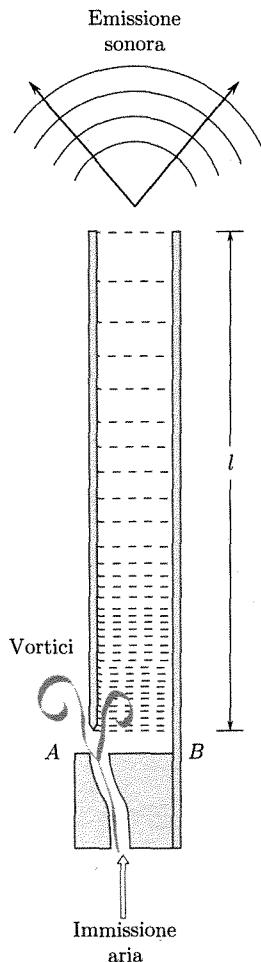


Fig. 10.4

(fig. 10.4). Le oscillazioni che si stabiliscono producono il suono irradiato dall'estremità aperta nel tubo a fondo aperto e in corrispondenza alla sezione AB nel tubo a fondo chiuso.

Se il tubo ha, oltre all'estremità aperta ove l'aria è introdotta, l'altra chiusa, le onde stazionarie devono avere un ventre e un nodo di vibrazione alle due estremità. La fondamentale e le prime armoniche sono allora determinate dalle condizioni (fig. 10.5)

$$l = \frac{2n+1}{4}\lambda, \quad \text{con } n \text{ intero}$$

e le frequenze sono quindi [come per la (4)]

$$(6) \quad \nu = \frac{c}{4l}(2n+1)$$

essendo c la velocità delle onde longitudinali nell'aria. In questo caso sono generate solo le armoniche dispari.

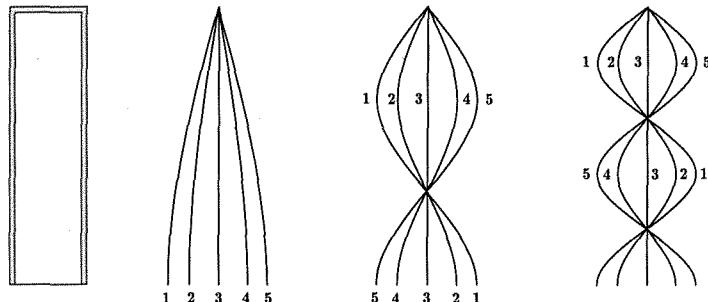


Fig. 10.5

In un tubo con entrambe le estremità aperte le onde stazionarie hanno ventri di vibrazione in corrispondenza ad esse (fig. 10.6). Segue

$$(7) \quad \nu = n \frac{c}{2l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

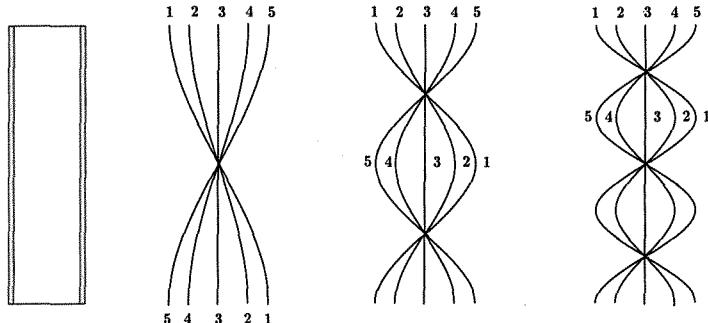


Fig. 10.6

In questo caso si possono generare tutte le armoniche della frequenza fondamentale $\nu_0 = c/2l$.

Nelle considerazioni precedenti si è fatta l'ipotesi che in corrispondenza a un estremo libero del tubo la riflessione avvenga con un ventre di vibrazione proprio sulla sezione terminale del tubo: in realtà ciò non è esatto perché il ventre si produce a una piccola distanza al di là della sezione terminale. Le formule (6), (7) vanno modificate introducendo termini correttivi. Per le frequenze fondamentali, se R è il raggio del tubo si trova per canne chiuse a una estremità

$$(8) \quad \nu_0 \simeq \frac{c}{4(l + 2,7R)}$$

e per canne aperte a entrambe le estremità

$$(9) \quad \nu_0 \simeq \frac{c}{2(l + 3,3R)}.$$

I tubi si comportano, nei riguardi della condizione che deve essere soddisfatta perché si abbiano onde stazionarie, come se fossero più lunghi del vero: l'allungamento apparente prende il nome di *correzione di bocca*.

■ 10.4. SORGENTI BIDIMENSIONALI

Sono sorgenti bidimensionali le piastre e le membrane di forme diverse e variamente vincolate. Se per es. si considera una sottile piastra metallica circolare fermata sul bordo o la membrana circolare di un tamburo e la si sollecita con un colpo, si genera, in maniera analoga al caso unidimensionale, un insieme di onde sinusoidali bidimensionali trasversali che si riflettono sul bordo varie volte: anche in questo caso si stabiliscono onde stazionarie in corrispondenza a un numero discreto di frequenze (modi propri) e sono solamente queste vibrazioni quelle che hanno un'ampiezza di un qualche rilievo e che producono i suoni nel mezzo fluido in cui la piastra o la membrana vibrano.

In maniera analoga al caso unidimensionale, nelle onde stazionarie vi sono linee nodali di punti sempre fermi le quali *separano zone che vibrano con la stessa fase da zone contigue con fase opposta*.

Nella figura 10.7 sono indicati i primi nove modi di vibrazione di una membrana bloccata sul bordo: sono segnati con + e - le regioni che a un dato istante si trovano spostate al di sopra e, rispettivamente, al di sotto del piano della membrana a riposo. Le linee di separazione di queste regioni (linee nodali) sono rette e circonferenze: il bordo bloccato è una di esse. Naturalmente le linee nodali variano se viene cambiata la maniera di vincolo della piastra o della membrana e si pos-

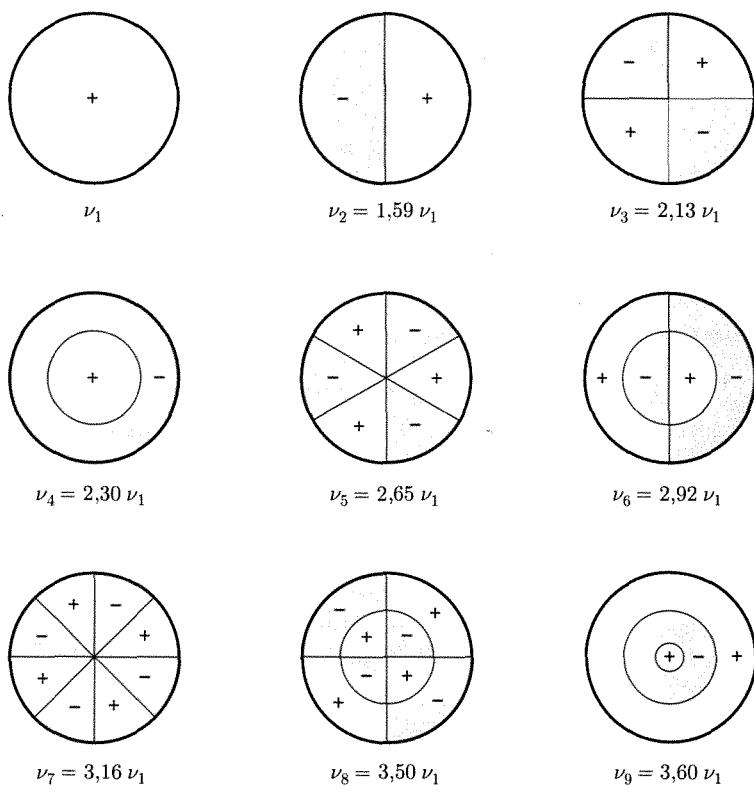


Fig. 10.7

sono mettere in evidenza cospargendo con della sabbia sottile la lamina, in orizzontale, posta in vibrazione: la sabbia si addensa sulle linee formando le così dette figure di Chladni. Nella figura sono indicate le frequenze dei vari modi superiori in funzione di quella del modo di frequenza più bassa ν_1 (fondamentale). Come si vede i rapporti non sono numeri interi, cioè *le frequenze dei modi di vibrazione non costituiscono una serie armonica* e questa è la ragione per cui piastre e membrane hanno un impiego piuttosto limitato come strumenti musicali.

La determinazione delle frequenze dei modi propri si fa con ragionamenti analoghi a quelli visti nel caso unidimensionale, studiando la propagazione delle onde. In quel caso (cap. 9, par. 9.18) si è visto che le onde stazionarie sono rappresentate da espressioni del tipo

$$(10) \quad \xi = 2A \sin kx \cos \omega t.$$

La (10) vale anche per una perturbazione sinusoidale che si stabilisca lungo una sorgente unidimensionale, nel rispetto delle condizioni imposte dai vincoli: per una corda tesa, per es., $\xi = 0$ per $x = 0$ e $x = l$. La distribuzione delle ampiezze di vibrazione si ricava facilmente dalla (10). Per una corda tesa

$$(11) \quad \xi_n = B \sin k_n x = B \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} = B \sin \frac{n\pi x}{l}$$

essendo $l = n\lambda_n/2$ e n il numero intero che specifica il modo di vibrazione.

La (11) (o funzioni simili per altri casi) fissa anche la posizione dei nodi nei punti in cui si annulla; essa prende il nome di *funzione caratteristica* (o funzione degli autovalori, Eigenfunktion).

In maniera analoga, nel caso bidimensionale le onde stazionarie sono descritte dal prodotto di una funzione sinusoidale nel tempo [come nella (10)] per una *funzione caratteristica* che questa volta in genere non è sinusoidale come la (11) ma più complicata e che con il suo annullarsi determina le linee nodali.

Un caso interessante è quello di una membrana (o piastra) rettangolare di lati a e b . Supponendo di riferire i punti della membrana a due assi x, y paralleli ai lati, è possibile vedere che la funzione caratteristica è il prodotto di due funzioni sinusoidali rispettivamente in x ed y

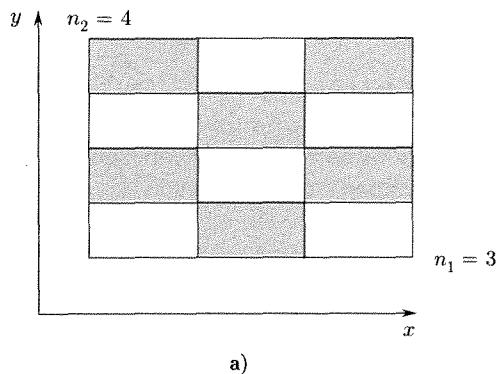
$$(12) \quad \xi_m = A \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{b}$$

essendo n_1 e n_2 due numeri interi.

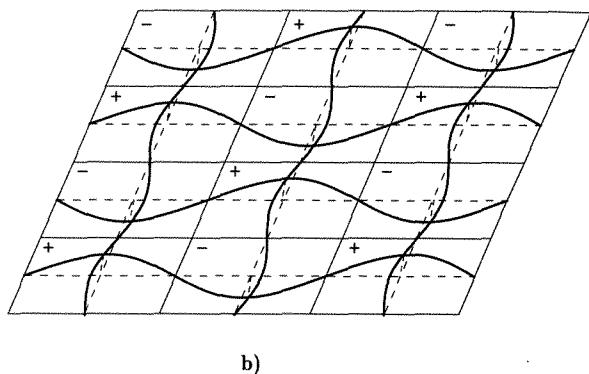
Nel modo che corrisponde a una certa scelta di valori n_1 e n_2 si ritrova che la piastra è divisa da linee nodali parallele a y in n_1 parti uguali ($n_1 + 1$ linee nodali, compresi i bordi) e da linee nodali parallele a y in n_2 parti uguali. La figura 10.8 mostra come a un istante è distribuita la perturbazione nel caso $n_1 = 3$, $n_2 = 4$; le zone bianche oscillano in opposizione di fase rispetto a quelle colorate e quindi a un certo istante sono spostate da parti opposte del piano di riposo della membrana. Come si vede tutte le linee nodali sono rette parallele a uno dei bordi⁽²⁾ e a/n_1

Nelle sorgenti bidimensionali e tridimensionali le frequenze armoniche non sono generalmente multiple della fondamentale

⁽²⁾ Nel caso particolare di membrana quadrata ($a = b$) si hanno coppie di modi con la stessa frequenza (degenerazione) e le linee nodali, nella oscillazione che deriva dalla loro sovrapposizione, possono deviare dalla forma rettilinea secondo il peso relativo dei due modi che si compongono.



a)



b)

Fig. 10.8

e b/n_2 sono le distanze fra le linee nodali nelle direzioni dei lati della membrana. La rassomiglianza di questa distribuzione bidimensionale della perturbazione, con quella unidimensionale lungo corde di lunghezze a e b appare chiara dalla (12) e dalla figura.

Il problema può vedersi anche nella seguente maniera. Data la membrana (fig. 10.9) si consideri un'onda che viaggi in una direzione che formi gli angoli α_1 e α_2 con gli assi x e y . La condizione perché per effetto delle riflessioni si possano avere onde stazionarie nella direzione considerata è che i lati a e b contengano un numero intero (rispettivamente n_1 e n_2) di proiezioni di $\lambda/2$ su x e y . Si ha quindi:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{a}{\lambda/(2 \cos \alpha_1)} &= n_1 \\ \frac{b}{\lambda/(2 \cos \alpha_2)} &= n_2. \end{aligned}$$

Si può anche scrivere (essendo $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$) la condizione nella forma

$$(14) \quad \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}} = \frac{2}{\lambda}.$$

In questo caso il modo di vibrazione della membrana è contraddistinto dagli indici n_1, n_2 .

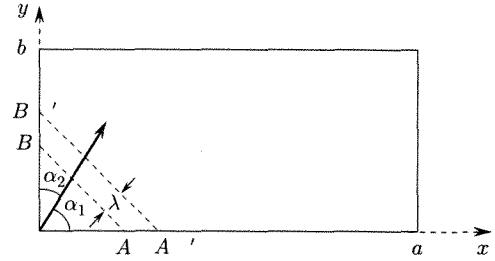


Fig. 10.9

10.5. SORGENTI TRIDIMENSIONALI

Un corpo solido omogeneo nello spazio oppure cavità ripiene di un fluido e in contatto con l'esterno mediante aperture (la cui presenza supporremo abbia effetti trascurabili su ciò che vogliamo considerare) di opportune dimensioni costituiscono sorgenti tridimensionali.

Anche in questo caso, se si produce una eccitazione meccanica, per es. con una percussione nel caso di corpi solidi o con un impulso di pressione in una cavità, il sistema meccanico entra in oscillazione solo su quelle frequenze che coincidano con i modi propri, per i quali si possono stabilire onde stazionarie. In questo caso le onde stazionarie hanno superfici nodali, che vanno determinate stabilendo per il singolo problema la funzione caratteristica (o degli autovalori) e determinando i luoghi dei punti ove essa si annulla.

Di solito anche per forme semplici (per es. sfere) i rapporti fra le frequenze dei modi superiori e la frequenza del modo fondamentale non sono numeri interi.

Un caso particolare è quello di un solido o una cavità parallelepipedo a pareti rigide di lati a (direzione x), b (direzione y) e c (direzione z). In analogia al caso bidimensionale, le condizioni perché si abbiano onde stazionarie di lunghezza d'onda λ , in una direzione che formi angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con gli assi x, y, z sono:

$$(15) \quad \frac{a}{\lambda/(2 \cos \alpha_1)} = n_1; \quad \frac{b}{\lambda/(2 \cos \alpha_2)} = n_2; \quad \frac{c}{\lambda/(2 \cos \alpha_3)} = n_3$$

essendo n_1, n_2, n_3 numeri interi.

Ricordando che $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, si ha

$$(16) \quad \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}} = \frac{2}{\lambda}$$

e

$$(17) \quad \nu = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}.$$

La (17) vale tanto per onde longitudinali (in tal caso $c = c_l$), quanto per onde trasversali (c_t). Per onde trasversali occorre precisare la polarizzazione o, quel che è lo stesso, considerarne due, per ogni scelta di n_1, n_2, n_3 , polarizzate secondo due piani ortogonali assegnati (cap. 9, par. 9.2)

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo accennare all'uso che spesso si fa di cavità per rinforzare il suono prodotto da altre sorgenti (diapason, corde come in molti strumenti musicali ecc.). In questo caso si tratta di eccitare qualche modo proprio della cavità: si ha una vera e propria risonanza e il suono ne esce fortemente amplificato. Per ottenere ciò, la cavità è munita di aperture opportunamente disposte e sagomate; è noto come le caratteristiche di uno strumento musicale dipendano fortemente dalla particolarità delle casse armoniche. La trattazione del problema è spesso molto complicata.

Vogliamo solo aggiungere che, se si vuole usare una cavità come un risuonatore sulla sua frequenza fondamentale, si trova che a essa possono essere date, senza differenze sostanziali, forme diverse come in figura 10.10. L'esperienza mostra che la frequenza fondamentale di queste cavità:

1. cresce con l'area dell'apertura;
2. decresce con il volume;
3. non dipende praticamente dalla forma.

Quest'ultima circostanza è dovuta al fatto che la λ relativa alla risonanza fondamentale è sempre molto grande rispetto alle dimensioni lineari della cavità.

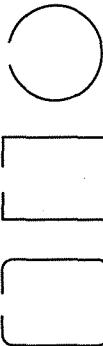


Fig. 10.10

■ 10.6. ECCITAZIONE ED EMISSIONE DELLE SORGENTI

Per quanto si è detto, le sorgenti sonore (o ultrasonore) sono sistemi meccanici che possono essere posti in vibrazione generando onde nel mezzo in cui sono immerse. Come si è visto, questi sistemi meccanici posseggono numerosi modi propri. La maniera in cui le sorgenti vibrano dipende dalla maniera in cui sono eccitate: se esse sono sollecitate in maniera impulsiva (per es. con colpi) emettono onde sonore delle frequenze proprie, le cui

ampiezze stanno fra loro in rapporti caratteristici. Le onde emesse sono in genere composte ed è facile vedere che sorgenti diverse, anche se disposte (*accordate*) in maniera da emettere la stessa frequenza fondamentale, si possono distinguere fortemente per il numero e la importanza relativa delle armoniche superiori contemporaneamente eccitate (timbro).

Una sorgente può anche essere eccitata da una forza periodica (o da una somma di forze sinusoidali). Esempi importanti di questo genere sono:

1. una membrana (conica) di un altoparlante, mossa da una forza applicata al suo vertice: alla membrana è applicato un avvolgimento (bobina) elettrico immerso in un campo magnetico e attraversato da una corrente variabile (secondo la legge con cui varia il segnale acustico che si vuole ottenere). La forza ha origine nella interazione tra la corrente elettrica e il campo magnetico;
2. una sbarra di materiale magnetico sottoposta a un campo magnetico variabile che ne altera la lunghezza (effetto magnetostrettivo);
3. una piastra di quarzo sottoposta a un campo elettrico variabile che ne altera lo spessore (effetto piezoelettrico).

*La curva di risposta
in frequenza
è caratteristica
di ogni sorgente*

Quando una sorgente è sollecitata da una forza sinusoidale, essa si comporta come un sistema meccanico in vibrazione forzata e l'ampiezza di vibrazione è in genere piccola tranne per frequenze vicine a una frequenza propria: si ha allora la risonanza. *La larghezza della risonanza*, cioè la estensione della banda di frequenze attorno alla frequenza di risonanza nella quale la ampiezza dell'oscillazione forzata (risposta) è apprezzabile, è una caratteristica costruttiva molto importante. In molti casi (per es., membrane di altoparlanti) si desidera avere una risposta all'incirca indipendente dalla frequenza di eccitazione: ciò si può ottenere studiando il sistema meccanico in modo che le frequenze di risonanza e le corrispondenti larghezze di risonanza siano tali da dare il risultato voluto. Altre volte si desidera attuare sorgenti che possono emettere, con elevata efficienza, solo onde di una determinata frequenza: diapason, sorgenti di suoni o di ultrasuoni di una ben determinata frequenza. Queste caratteristiche si possono ottenere facendo sì che il sistema meccanico abbia modi propri ben separati con larghezze di risonanze strette.

Nei riguardi del tipo di campo sonoro generato, esso dipende in maniera essenziale dalle dimensioni della sorgente rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione che viene generata e che si propaga nel mezzo (direttività della sorgente). Senza addentrarci ulteriormente nell'esame di queste questioni, ci limitiamo a presentare nelle figure 10.11 e 10.12 la forma della radiazione emessa da due sorgenti di diverse dimensioni: nella figura 10.11 si tratta di una piastrina di quarzo $16 \times 16 \text{ mm}^2$ che vibra in acqua alla frequenza di 8 MHz: la lunghezza d'onda nel liquido è circa 0,2 mm e quindi molto più piccola delle dimensioni della sorgente. Le onde ($\nu = 5,32 \text{ MHz}$) della figura 10.12 (Hiedemann-Osterhammel) sono ancora emesse in un liquido ma la altezza della piastrina di quarzo è solo 4λ . Mentre nel primo caso le onde emesse possono essere ritenute approssimativamente piane⁽³⁾, ciò non è nel secondo caso: si hanno campi di emissione simili a quelli che si otterrebbero al di là di una fenditura delle dimensioni della sorgente investita da onde piane (cap. 9, par. 9.27). La figura 10.13 (Y. Torikai-K. Negishi) riporta la figura di diffrazione ottenuta con una

*La direttività di una
sorgente aumenta
col rapporto tra la sua
dimensione lineare
e la lunghezza d'onda
nel mezzo irradiato*

⁽³⁾ In realtà accade che sorgenti estese quali le piastrine di quarzo non vibrano rigorosamente come un pistone rigido oscillante, sicché punti della stessa faccia possono non oscillare in fase: questo fatto rende più complicata la forma del campo emesso risultante. In molti casi questa circostanza ha scarsa importanza.

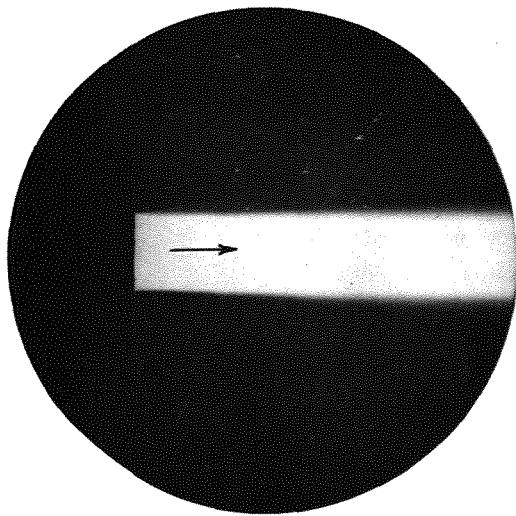


Fig. 10.11 Fascio di onde ultrasonore (8 MHz) generate in acqua da una piastrina di quarzo ($16 \times 16 \text{ mm}^2$).

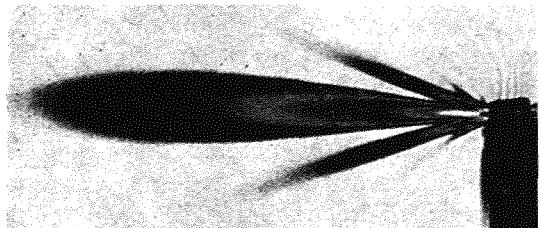


Fig. 10.12 Campo ultrasonoro (5,3 MHz) generato da una piastrina alta 4λ . (Hiedemann-Osterhammel).

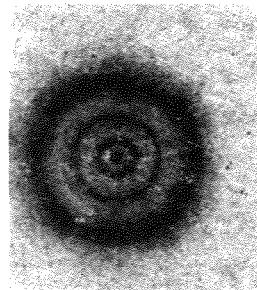


Fig. 10.13 Figura di diffrazione prodotta da una sorgente ultrasonora (quarzo) circolare (diametro 33 mm) su uno schermo parallelo a 15 cm di distanza. Le regioni irraggiate sono quelle scure (Y. Torikai-K. Neighishi).

tecnica particolare⁽⁴⁾ su uno schermo disposto parallelamente (a 15 cm di distanza) a una piastrina circolare di quarzo del diametro di 33 mm che costituisce la sorgente di ultrasuoni della frequenza di circa 7 MHz in una soluzione acquosa particolare: gli ultrasuoni sono più intensi nelle zone scure. È evidente la somiglianza di questa figura di diffrazione con quella ottenibile mediante un foro circolare investito da un fascio di onde piane, su uno schermo a distanza notevole dal foro (cap. 9, par. 9.27).

■ 10.7. RIVELATORI E ANALIZZATORI

La rivelazione di onde sonore e ultrasonore viene in genere fatta mediante sistemi meccanici analoghi alle sorgenti che li generano⁽⁵⁾. Un ricevitore può essere considerato l'orecchio, in cui l'elemento esposto alle onde incidenti è una membrana (timpano) che le onde pongono in vibrazione. Analogamente, nei microfoni di vario tipo l'onda sonora pone in vibrazione un sistema meccanico le cui oscillazioni vengono rivelate in diversa maniera.

Nei microfoni a carbone, per es., una membrana chiude una scatola ripiena di granuli di carbone; la vibrazione della membrana comprime più o meno i granuli fra loro alterando la estensione della superficie di contatto; ciò influenza la resistenza elettrica che l'insieme dei granuli nella scatola oppone al passaggio di una corrente.

⁽⁴⁾ Gli ultrasuoni vengono prodotti in una soluzione diluita di sviluppo per lastre fotografiche e una lastra inesposta viene situata parallelamente alla piastra di quarzo: gli ultrasuoni producono un annerimento della lastra nelle regioni che investono. Tale effetto è dipendente, entro certi limiti, dall'intensità delle onde.

⁽⁵⁾ La rivelazione di ultrasuoni può essere fatta anche mediante l'esame di particolari effetti che essi producono.

In questa maniera le variazioni della pressione acustica sulla membrana producono analoghe variazioni nella corrente elettrica del dispositivo e i segnali elettrici microfonici possono poi essere amplificati e studiati con tecniche elettroniche.

Talvolta, il sistema meccanico è posto in vibrazione su una frequenza lontana da quella di un suo modo proprio di vibrazione: in tal caso i segnali ottenibili sono molto piccoli e debbono essere fortemente amplificati. Talvolta, quando i rivelatori devono essere usati per onde di ben determinata frequenza, riesce utile l'impiego di sistemi meccanici accordati che risuonino sulla frequenza dell'onda incidente. Una situazione di questo genere si incontra in ultracustica ove si usano spesso come rivelatori piastre piezoelettriche risuonanti.

L'analisi diretta della composizione spettrale (armonica) dei suoni composti si soleva fare esponendo all'onda sonora incidente sistemi risuonanti accordati su diverse frequenze e determinando quali di essi risuonassero e con quale intensità. Per la analisi di suoni di frequenza non molto elevata si usavano come risuonatori accordati cavità del tipo di quelle di figura 10.10. Cavità risuonanti approssimativamente sferiche, con un piccolo condotto la cui apertura va posta nelle vicinanze dell'orecchio, sono state usate in passato e prendono il nome di risuonatori di Helmholtz (fig. 10.14).

Molto più comunemente l'analisi spettrale di un suono viene oggi fatta indirettamente studiando con metodi elettronici la composizione dei segnali elettrici ottenibili con trasduttori elettroacustici lineari, i quali cioè trasferiscono fedelmente la legge di variazione della pressione dell'onda nella variazione di un segnale elettrico.

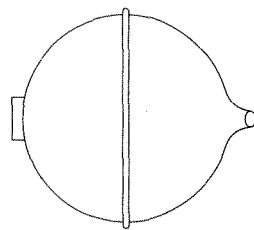


Fig. 10.14

Lo studio dello spettro di un suono può essere fatto con una serie di risuonatori di diversa frequenza

■ 10.8. CARATTERI DEI SUONI

Nel presente paragrafo e nei tre successivi ci si riferirà ai suoni veri e propri, cioè alle onde longitudinali in aria che l'orecchio umano è capace di rivelare. È innanzitutto fondamentale distinguere fra: a) una descrizione fisica delle onde fatta nella maniera finora vista, usando *grandezze fisiche* misurate in maniera *oggettiva* con l'impiego di opportuni strumenti; b) una valutazione della *sensazione*, che non solo non può essere fatta in altra maniera che attraverso il meccanismo fisiologico che produce la sensazione stessa, ma che è comunque una determinazione soggettiva. A quest'ultima limitazione si cerca parzialmente di ovviare esaminando il comportamento in una data situazione di molti soggetti così da potere usare valutazioni statistiche. I *parametri* che vengono usati per valutare la sensazione non sono *grandezze fisiche* (par. 10.11).

Nella descrizione della sensazione prodotta dai suoni si è trovato utile introdurre tre *parametri* che, si badi bene, sono legati alle proprietà fisiologiche dell'uditò, e vanno sotto il nome di *caratteri del suono*: essi sono l'altezza, il timbro e la intensità.

L'*altezza* è quel carattere *soggettivo* che fissa la posizione di un suono in una scala (musicale) di suoni. Essa è legata alla *frequenza del suono* sinusoidale che è giudicato dall'*orecchio medio normale*⁽⁶⁾ nella stessa posizione del suono in oggetto in una scala musicale. La corrispondenza non è esatta giacché l'altezza anche di un suono puro (sinusoidale) può essere modificata variando la sua intensità, e l'altezza di un suono complesso può dipendere dal numero e dalla importanza relativa delle armoniche.

I caratteri che differenziano i suoni per la sensazione fisiologica che producono sono l'altezza, l'intensità e il timbro

⁽⁶⁾ Questa dizione sta a rappresentare sinteticamente i risultati di indagini statistiche condotte mediante i giudizi espressi in una valutazione soggettiva da un numero grande di osservatori i quali hanno un udito che non v'è ragione per non ritenere *normale*.

La sensibilità dell'orecchio umano a suoni di diversa frequenza va da un limite inferiore di circa 20 Hz a circa 15 ÷ 20 kHz; il limite superiore decresce al crescere dell'età dell'individuo.

Il *timbro* o *qualità* di un suono è quell'elemento che consente di distinguere suoni della stessa altezza prodotti da sorgenti diverse: *essa è dovuta al diverso contenuto di armoniche* che accompagna la fondamentale. Nella figura 10.15 sono riportati i risultati dell'analisi armonica (spettrale) dei suoni della stessa altezza emessi da un clarinetto e da un oboe (nei grafici la lunghezza delle linee è proporzionale all'intensità delle armoniche); mentre la fondamentale è in entrambi i casi la stessa, il numero delle armoniche e l'importanza relativa della fondamentale e delle armoniche sono notevolmente diversi; l'orecchio giudica i due suoni come caratterizzati da un diverso timbro.

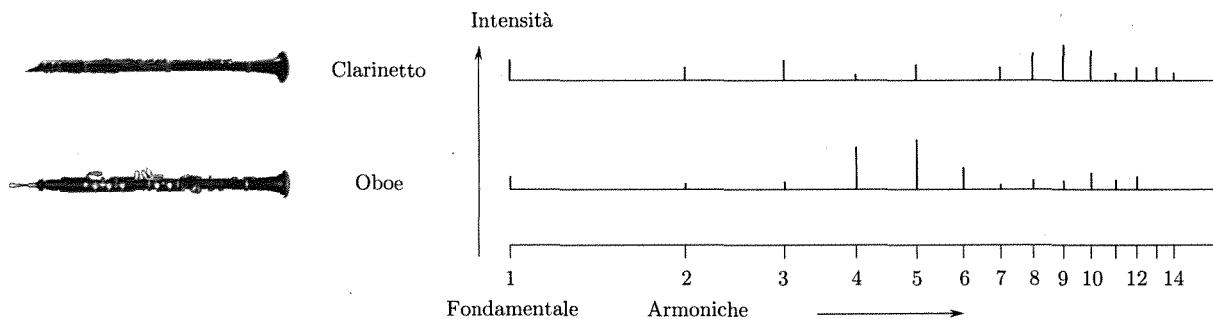


Fig. 10.15

La *intensità della sensazione sonora* prodotta da un suono dipende, a parità di composizione spettrale, dall'energia trasportata dalle onde che raggiungono l'orecchio, cioè dall'*intensità fisica*. Si osservi bene la differenza fra queste due intensità: la prima descrive la sensazione fisiologica e in seguito vedremo come possa essere valutata; la seconda è una grandezza fisica relativa alle onde incidenti.

Sull'intensità sonora ritorneremo dopo aver descritto le caratteristiche fondamentali dell'orecchio.

10.9. LA VOCE UMANA

Sotto il nome di voce sonora comprendiamo i suoni che possono essere emessi dall'uomo attraverso il cavo orale e che servono per produrre la parola e comunicare.

Come è noto, i suoni di questo tipo possono essere distinti in vocali e consonanti: le prime sono vibrazioni periodiche che possono essere mantenute per tempi lunghi; le altre (con eccezione della consonante non articolata *s*) sono suoni impulsivi che vengono di solito emessi assieme a una vocale. Il meccanismo più importante per la produzione delle vocali è costituito dalle vibrazioni di una coppia di muscoli che si trovano nella laringe e che costituiscono le corde vocali, vibrazioni prodotte dalla colonna d'aria proveniente dai polmoni che passa attraverso queste. Questi suoni vengono amplificati e modificati nel loro timbro prima di uscire dalla bocca per la presenza di cavità risonanti nella testa (bocca e naso): le caratteristiche di questa cavità variano con la posizione assunta dalle labbra, dalla lingua e dai denti e a seconda dell'individuo.

Senza entrare in dettagli su queste importanti questioni, occorre dire che la bocca, considerata come sorgente di onde sonore, ha dimensioni piccole rispetto alle lunghezze d'onda di quasi tutti i suoni emessi e quindi gli effetti di diffrazione sono considerevoli per cui il suono emesso dalla bocca circonda la testa ed è udibile dall'orecchio della persona che parla.

La energia della parola è molto piccola: in una conversazione a intensità media si può stimare che la potenza emessa sia di circa 100 erg/s, cioè circa 10^{-5} watt. Se una persona urla il più possibile, la potenza emessa è 10^{-3} watt.

10.10. L'ORECCHIO UMANO

L'orecchio è l'organo dell'udito. Esso viene comunemente diviso in tre parti, come è schematizzato in figura 10.16.

L'orecchio esterno è formato dal padiglione, dal condotto (meato) e dalla membrana del timpano. Il padiglione ha nell'uomo perso quasi completamente la sua funzione: in alcuni animali è mobile e serve a ricevere il suono e a localizzare la sorgente. Nell'uomo la localizzazione viene fatta quasi esclusivamente girando la testa. Il padiglione tuttavia effettua ancora nell'uomo una leggera discriminazione fra suoni provenienti dal davanti e da dietro la testa; esso inoltre diffondono le onde che lo investono assicura una loro penetrazione nel condotto. Tramite il condotto il suono giunge alla sottile membrana del timpano. Questa è leggermente conica e ha un muscolo per tenderla. La contrazione di questo muscolo è in genere involontaria e ha lo scopo di sopprimere i suoni di bassa frequenza. Entrambe le facce del timpano si trovano in aria alla pressione atmosferica: ciò è ottenuto mediante la comunicazione (tromba di Eustachio) dell'orecchio medio con la parte posteriore della cavità orale. Nell'orecchio medio v'è una catena di tre ossicini (martello, incudine, staffa) la cui funzione è quella di trasmettere le vibrazioni del timpano (al quale appoggia il martello) al liquido nell'orecchio interno (attraverso la finestra ovale contro la cui membrana preme la staffa) senza perdita di energia. Nel fare ciò la catena degli ossicini agisce come una leva con il fulcro più vicino alla finestra ovale (figura 10.17). Il rapporto fra le intensità delle forze esercitate sulla leva dal timpano (F_1) e dalla leva sulla finestra ovale (F_2) è circa $F_1/F_2 = 1/3$. L'area del timpano A_1 è inoltre notevolmente maggiore di quella A_2 della finestra ovale; ciò porta di conseguenza che la pressione p_2 esercitata sul liquido dell'orecchio interno è molto maggiore di quella p_1 esercitata dalle onde sonore sul timpano

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{F_2}{A_2} \cdot \frac{A_1}{F_1} = 50 \div 60.$$

Il sistema dell'orecchio medio⁽⁷⁾ è un efficiente sistema per trasmettere la vibrazione dall'aria al liquido nell'orecchio interno (adattamento di impedenza) nel quale la pressione è aumentata e l'ampiezza di vibrazione ridotta (trasformatore acustico) mentre, ovviamente, l'energia resta inalterata (trascorrendo gli effetti dissipativi).

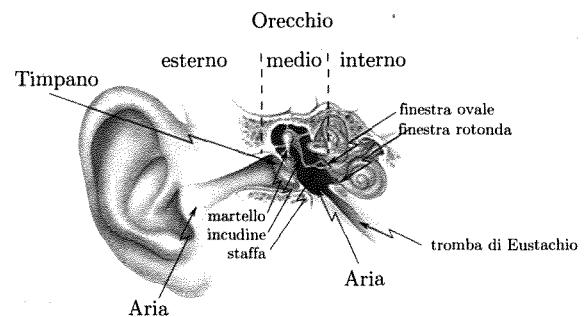


Fig. 10.16

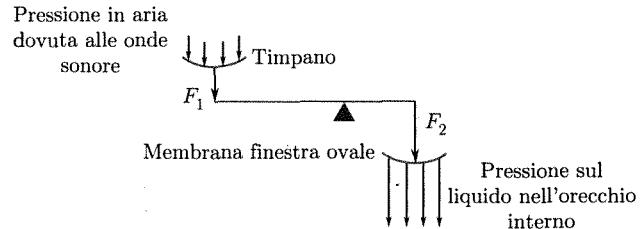


Fig. 10.17

Il passaggio dell'energia delle oscillazioni dall'aria al corpo è mediato da un sistema meccanico di ossicini che funge da adattatore di impedenza

(7) L'orecchio medio non ha caratteristiche di trasmissione lineari, di conseguenza esso altera la composizione dei suoni trasmessi ed è in parte responsabile delle difficoltà che si incontrano nel cercare di ottenere una valutazione della sensazione sonora facendo uso delle grandezze fisiche che caratterizzano il suono incidente sull'orecchio.

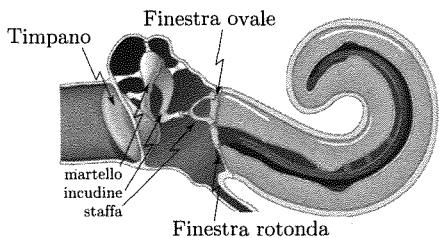


Fig. 10.18

L'orecchio interno ha una struttura complessa per assolvere varie funzioni (per es., senso di equilibrio) ma la parte che interessa l'uditio è una cavità, coclea (fig. 10.18), avvolta a spirale (2,45 giri) per una lunghezza assiale di circa 35 mm. Lungo la mezzeria della cavità v'è una membrana (basilare) che la divide in due canali e che va dalla finestra ovale fin quasi al termine della spirale lasciando a questo estremo un passaggio (elicotrema) per il liquido dalla metà superiore alla metà inferiore della cavità. Grazie a questa struttura una vibrazione comunicata attraverso la finestra ovale si trasmette al liquido che si trova da una parte della membrana basilare e, in seguito, a quello che si trova dall'altra; al termine di questo percorso si trova la finestra rotonda che consente il movimento oscillatorio del liquido (incompressibile) nella coclea. La membrana basilare ha una larghezza che varia da circa 0,2 mm vicino alla finestra a circa 5 mm nelle vicinanze dell'elicotrema: essa è inoltre coperta da un gran numero (circa 23.500) di fibre a forma di cilindri (organo del Corti) in cui sono contenuti i terminali nervosi sotto forma di sottili peli. Queste fibre sono tenute in tensione e la loro lunghezza corrisponde alla larghezza della membrana in quel punto. Il sistema può richiamare alla mente un'arpa con molte corde tese di diversa lunghezza. Le diverse regioni della membrana basilare rispondono alle diverse oscillazioni sinusoidali⁽⁸⁾ e la sensazione di un suono complesso è determinato dalla eccitazione contemporanea delle regioni che corrispondono alle varie componenti del suono: in altri termini nell'orecchio si effettua l'analisi armonica del suono. La sensazione di intensità del suono pare dipenda dal numero di fibre che vengono contemporaneamente eccitate.

■ 10.11. SENSIBILITÀ DELL'ORECCHIO

Se si espone l'orecchio a un suono puro sinusoidale di intensità fisica molto bassa, non si avverte nessuna sensazione; aumentando gradatamente l'intensità (e la pressione acustica), a un certo punto, raggiunta la soglia di udibilità per suoni sinusoidali di quella frequenza, inizia la sensazione. La intensità fisica delle onde sonore per cui si ha la soglia varia con la frequenza.

La figura 10.19 riporta una curva di udibilità (A) ottenuta (Fletcher-Munson) come media di determinazioni soggettive fatte su un certo numero di persone che sembravano possedere udito normale: v'è un sufficiente accordo fra le singole indicazioni e ciò giustifica la esecuzione della media e il successivo uso di essa nei vari problemi. Nel grafico sono riportate sulle ascisse le frequenze in scala logaritmica, e sulle ordinate le pressioni acustiche in $\text{dine}/\text{cm}^2 = \text{microbar}$ (circa un milionesimo di atmosfera) anch'esse in scala logaritmica. A una pressione acustica di $2 \cdot 10^{-4} \text{ dine}/\text{cm}^2$ corrisponde in aria un'intensità di $10^{-16} \text{ W}/\text{cm}^2$. Come si vede il limite di udibilità più basso (fra 3-4 kHz) è di questo ordine di grandezza. La sensibilità dell'orecchio è molto elevata⁽⁹⁾: Rayleigh ha calcolato che l'intensità minima

⁽⁸⁾ Le regioni della membrana basilare sensibili alle più alte frequenze sono quelle in prossimità della finestra ovale, mentre quelle sensibili alle più basse frequenze sono le più lontane.

⁽⁹⁾ La sensibilità dell'orecchio non potrebbe essere di molto maggiore di quella che è in quanto altrimenti esso sarebbe in condizioni tali da *sentire* il rumore dovuto alle fluttuazioni della pressione atmosferica causate dal disordine nel moto delle molecole dell'aria (agitazione termica). Ciò può mostrarsi chiudendo il padiglione auricolare con un involucro rigido (semisfera, conchiglia ecc.) in modo da determinare una cavità che non abbia eccessive dissipazioni (nelle riflessioni sulle pareti); si *sente* allora un suono abbastanza puro che è prodotto dalla amplificazione nella cavità risonante di quella componente delle fluttuazioni della pressione atmosferica che ha la frequenza del modo fondamentale della cavità. Basta quindi l'amplificazione prodotta dalla cavità risonante (fattore 10) per rendere udibili le componenti a diversa frequenza presenti nelle fluttuazioni della pressione atmosferica.

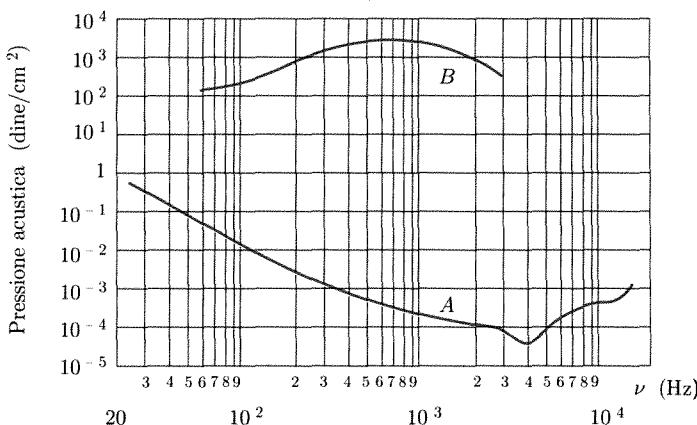


Fig. 10.19

che l'orecchio è capace di rivelare è leggermente inferiore al valore minimo dell'intensità luminosa che l'occhio è capace di rivelare nella regione (verde) di maggiore sensibilità.

Continuando ad aumentare l'intensità del suono, si giunge a un livello in corrispondenza al quale l'osservatore sente fastidio e dolore: si parla allora di soglia del dolore. Nella figura 10.19 è anche riportata la curva (B) del dolore (Wegel).

I risultati di misure di questo genere sono riassunte nella figura 10.20 che differisce dalla precedente essenzialmente per la scala delle ascisse. Come si vede, l'intero campo di frequenza è suddiviso in intervalli, ciascuno dei quali è limitato da due frequenze, l'una doppia dell'altra: è questo un sistema di suddivisione molto usato in acustica musicale ove si intende per ottava proprio un intervallo di frequenza nel quale la frequenza si raddoppia (da ν a 2ν). Le curve di soglia (della sensazione e del dolore) sono analoghe (anche se un po' diverse) a quelle di figura 10.19, e sono state estrapolate (tratteggio) al di là del campo di frequenza misurato. Esse individuano la regione della sensazione sonora. Sono indicate anche approssimativamente le zone in cui di solito sono contenuti i punti rappresentativi della voce umana (uomo e donna) e alcuni intervalli di frequenza caratteristici.

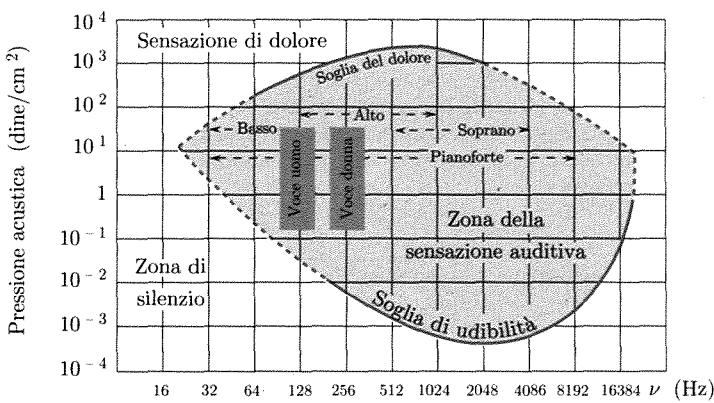


Fig. 10.20

Nelle considerazioni precedenti abbiamo semplicemente indicato i limiti dei valori delle grandezze fisiche, frequenza e intensità, caratteristici delle onde capaci di produrre la sensazione sonora.

Prima di descrivere i criteri per una *valutazione* della sensazione stessa e di quella che in maniera generale si indica spesso come *intensità della sensazione sonora*, vanno ulteriormente chiariti alcuni aspetti fondamentali delle valutazioni o

delle sensazioni fisiologiche in genere. Occorre innanzitutto sottolineare che queste sensazioni e le loro valutazioni non vanno considerate alla stregua rispettivamente di grandezze fisiche e delle loro misure: si è infatti visto (Introduzione, par. 3) che, perché una classe di enti individui una grandezza fisica, definita operativamente, occorre stabilire in maniera inequivocabile i concetti di uguaglianza, di somma e fissare una unità di misura. Nel caso delle sensazioni (uditive, visive ecc.) si può con una certa precisione, anche se solamente con determinazioni soggettive, definire la egualianza nel confronto di due sensazioni dello stesso tipo o il segno della loro disegualianza: non si riesce affatto a fissare il criterio di somma. Nello studio delle *sensazioni fisiologiche* va quindi tenuto presente che queste *non sono grandezze fisiche e non si può parlare di misura delle sensazioni*; allo scopo di avere degli elementi di giudizio utili nelle applicazioni in cui si considerano le sensazioni, si può solo in maniera arbitraria introdurre certi *criteri di valutazione*, in genere opinabili e non completamente soddisfacenti.

Secondo una legge fisiologica, di Weber e Fechner, le sensazioni sono proporzionali al logaritmo delle intensità fisiche

Per giungere a queste valutazioni nei riguardi dell'intensità della sensazione sonora si parte di solito dalla osservazione fatta da Weber che in una sensazione qualsiasi (non solo uditiva) gli organi fisiologici sembrano avere una struttura tale da riuscire a rivelare una variazione dello stimolo solo quando questa variazione raggiunga un valore minimo ben preciso. Occupandoci in particolare dell'udito⁽¹⁰⁾, supponiamo che l'orecchio venga alternativamente colpito da due onde sonore dello stesso tipo (per es. sinusoidali della stessa frequenza) ma di intensità diversa J e J' : si riscontra che esso riesce a giudicare la circostanza che è $J' \neq J$ solo qualora ΔJ raggiunga un certo valore finito⁽¹¹⁾ che sembra essere *proporzionale alla intensità preesistente*⁽¹²⁾

$$(18) \quad \Delta J = aJ.$$

Ammettendo che le caratteristiche dell'organo fisiologico, per quel che qui interessa, siano rappresentate dalla (18), appare utile esprimere la variazione minima dello stimolo apprezzabile nella forma

$$(19) \quad \Delta s = a' \frac{\Delta J}{J}.$$

In tal modo si introduce per lo stimolo, accanto alla misura tradizionale in termini di intensità (W/cm^2) o di pressioni acustiche, una misura particolare (s); si noti che Δs è dimensionalmente un numero puro che viene determinato al pari di J per mezzo di *misure oggettive*.

Fechner, partendo da questa relazione, fece l'ipotesi che Δs e ΔJ possano essere trattati come differenziali e che la (19) possa essere integrata.

Si ottiene

$$(20) \quad s - s_1 = K \ln \frac{J}{J_1}.$$

Si osservi che, così facendo, si ha semplicemente una nuova scala per la misura oggettiva dello stimolo s , la quale ha la caratteristica di essere in qualche modo, non chiaramente definito, legata alle caratteristiche intrinseche dell'organo fisiologico, essendo stata ottenuta con considerazioni sui valori minimi di ΔJ perché la sensazione prodotta dal suono vari.

⁽¹⁰⁾ Circostanze analoghe sembrano valere per le altre sensazioni.

⁽¹¹⁾ Si osservi che in un confronto di questo genere fra due suoni l'organo fisiologico (orecchio) viene usato come uno strumento di zero che consente di vedere quando due grandezze che si equilibrano sono uguali; la precisione di un tale strumento, cioè la più piccola variazione della grandezza che riesce a rompere l'equilibrio, sarebbe l'equivalente del più piccolo incremento di stimolo ΔJ che l'organo può porre in evidenza nel confronto tra due stimoli.

⁽¹²⁾ Non possiamo qui entrare in dettagli sui risultati sperimentali relativi ai valori minimi ΔJ per le varie intensità J e per le varie frequenze; diremo solo che $\Delta J/J$ è all'incirca 0,1, ma che vi sono apprezzabili aumenti di questo rapporto alle basse intensità specie alle frequenze molto basse e molto alte. In prima approssimazione si può quindi ritenere nella (18) a costante per suoni di una data frequenza. In accordo con la (18), ΔJ è in valore assoluto molto minore, per piccoli valori di J , di quanto esso valga per valori elevati di J : l'orecchio è cioè capace di rilevare piccole variazioni dello stimolo se i suoni sono poco intensi.

Se si vuole fare una *valutazione della intensità della sensazione* che possa risultare utile nelle ricerche di acustica fisiologica, si può, in maniera arbitraria, convenire di prendere come indice della variazione di sensazione ($S - S_1$) prodotta dalla variazione della intensità del suono di un certo tipo da J_1 a J , il valore della variazione dello stimolo ($s - s_1$) espressa nella scala (20) e porre

$$(21) \quad S - S_1 = K \ln \frac{J}{J_1}.$$

Per definire quindi una scala per la valutazione delle sensazioni prodotte da suoni di un certo tipo occorre fissare nella (21) il valore di K e precisare la scelta di J_1 . Si definisce in genere *per un suono sinusoidale di una certa frequenza e intensità J* :

$$(22) \quad \text{livello della sensazione} = \log_{10} \frac{J}{J_1}$$

essendo J_1 la intensità di soglia per suoni di quella frequenza.

Si osservi che il numero

$$(23) \quad N = \log_{10} \frac{J_1}{J_2}$$

è una misura del rapporto delle due intensità (J_1, J_2), espresso in una unità particolare che prende il nome di *bel*. Tale unità si ritrova in vari campi tecnici quando, potendo variare le potenze (o le energie) entro campi che si estendono per molti ordini di grandezza, si trova opportuno usare una scala logaritmica. Il livello della sensazione prodotta da un suono sinusoidale (22) verrebbe espresso in *bel*.

In realtà questa unità è molto grande e di solito si preferisce usare una unità più piccola, il decibel (db) ponendo per il rapporto delle intensità in db⁽¹³⁾

$$(24) \quad N = 10 \log_{10} \frac{J_1}{J_2}.$$

In conclusione, usando i decibel il *livello della sensazione prodotto da un suono sinusoidale* risulta

$$(25) \quad \text{livello della sensazione} = 10 \log_{10} \frac{J}{J_1} (\text{db}).$$

Nella tabella 10.1 sono indicati i valori del livello di sensazione per suoni la cui intensità fisica è nel rapporto indicato rispetto alla intensità di soglia J_1 ; è indicato il rapporto $\Delta p/\Delta p_1$ delle pressioni acustiche corrispondenti.

Tabella 10.1

Pressione relativa $\Delta p/\Delta p_1$	Intensità relativa J/J_1	Livello della sensazione (db)
1	1	$10 \log_{10} 1 = 0 \text{ db}$
10	10^2	$10 \log_{10} 10^2 = 20 \text{ db}$
10^2	10^4	$10 \log_{10} 10^4 = 40 \text{ db}$
10^3	10^6	$10 \log_{10} 10^6 = 60 \text{ db}$
10^4	10^8	$10 \log_{10} 10^8 = 80 \text{ db}$
10^5	10^{10}	$10 \log_{10} 10^{10} = 100 \text{ db}$
10^6	10^{12}	$10 \log_{10} 10^{12} = 120 \text{ db}$
10^7	10^{14}	$10 \log_{10} 10^{14} = 140 \text{ db}$

⁽¹³⁾ Questa unità è particolarmente utile perché il valore del rapporto delle intensità di due suoni della stessa frequenza appena distinguibili è dell'ordine di grandezza di 1 db. Sia, infatti, J l'intensità di un suono sinusoidale e $J + \Delta J$ quella del suono più intenso appena distinguibile. Ricordato che $\Delta J/J = 0,1$, si ha

$$N = 10 \log_{10} \frac{1,1J}{J} = 10 \log_{10} 1,1 = 0,4 \text{ db.}$$

Per quanto si è detto, una *valutazione* della sensazione prodotta da suoni di una certa frequenza può essere fatta mediante quell'indice che abbiamo chiamato *livello di sensazione*, nel quale la intensità fisica di un suono sinusoidale va riferita alla *intensità di soglia per quella frequenza*.

Va subito rilevato che la scala ora introdotta ha una utilità piuttosto limitata giacché essa vale per il confronto di suoni sinusoidali della stessa frequenza; se d'altra parte suoni di diversa frequenza il cui livello è espresso dallo stesso numero di db vengono portati all'esame di un ascoltatore, questo in genere li giudica di diversa intensità: le cose divengono ancor più complicate per il confronto tra suoni composti.

Per superare questa difficoltà e avere almeno come indice delle sensazioni prodotte nell'orecchio da due suoni di frequenza diversa numeri che divengano uguali quando la sensazione appare ugualmente intensa, si è introdotta una nuova scala, definendo livello equivalente della sensazione per un qualsiasi suono (puro o composto) il *livello* dato dalla (25) (in db) del suono puro a 1000 Hz giudicato, in una misura soggettiva, ugualmente intenso rispetto al suono dato. Il livello equivalente della sensazione viene misurato in una scala chiamata dei phon, che quindi coincide con la scala dei db per i suoni di 1.000 Hz. La intensità di riferimento J_0 della soglia per suoni di 1000 Hz è stata per convenzione fissata al valore di 10^{-16} W/cm^2 cui corrisponde una pressione acustica di $0,0002 \text{ dine/cm}^2$). Si ha quindi

$$(26) \quad \left. \begin{array}{l} \text{livello equivalente} \\ \text{sensazione} \\ \text{prodotta da un} \\ \text{suono qualsiasi} \end{array} \right\} = 10 \log_{10} \frac{J \text{ suono } 1.000 \text{ Hz giudicato ugualmente intenso}}{J_0}$$

La figura 10.21 (Fletcher-Munson) riporta per i suoni puri le curve di uguale livello equivalente della sensazione (isofoniche): sulle ordinate sono riportate le intensità in W/cm^2 e W/m^2 e le pressioni acustiche in dine/cm^2 e N/m^2 .

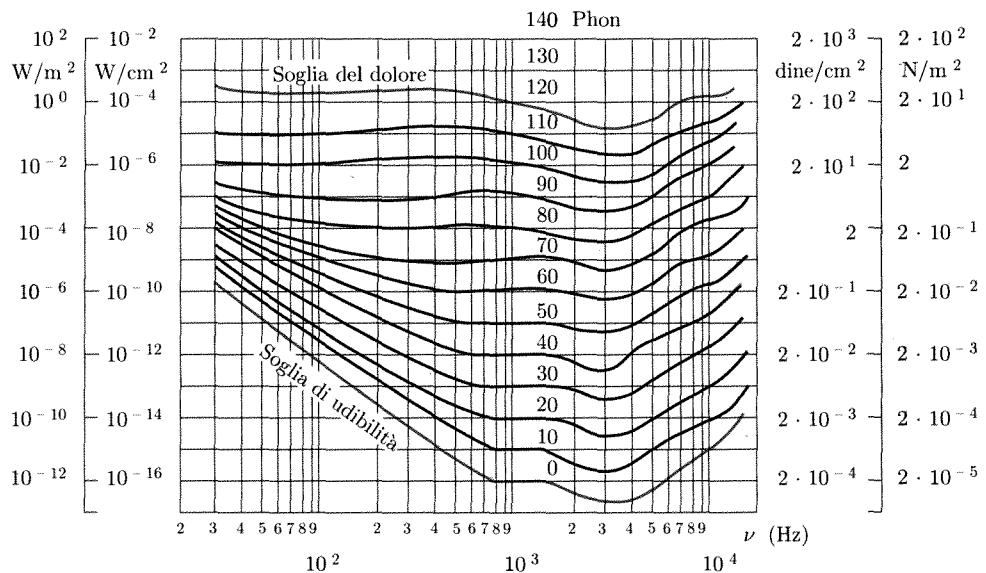


Fig. 10.21

Le curve isofoniche sono curve di suoni che producono la medesima sensazione

Nell'intervallo di frequenza di maggior interesse in acustica (500-10.000) il livello apparente di sensazione non differisce molto dal livello di sensazione (25). Per frequenze più basse e più alte le differenze divengono piuttosto importanti.

Anche senza addentrarci a descrivere più accuratamente il comportamento dell'orecchio, va però sottolineato il fatto che le considerazioni precedenti sono state

fatte nell'ipotesi che i vari suoni puri colpiscono l'orecchio separatamente, e senza la presenza di rumori di fondo. In realtà suoni e rumori sono di solito contemporaneamente presenti; il comportamento dell'orecchio è notevolmente più complicato e si presentano particolari effetti (mascheramento). Una prova di ciò si ha nella differenza di sensazione che uno strumento musicale produce se suonato da solo o insieme all'intera orchestra. La figura 10.22 mostra come si può alterare la curva di soglia nel caso che sia presente un suono puro abbastanza intenso (punto A): l'area colorata corrisponde a suoni puri che sono temporaneamente (finché dura il suono puro A) non udibili (mascherati).

Allo scopo di dare un'idea della corrispondenza fra livelli equivalenti di sensazione espressi in phon e sensazioni con le quali si è familiari, nella figura 10.23 sono riportati i dati per alcuni rumori che si incontrano di frequente.

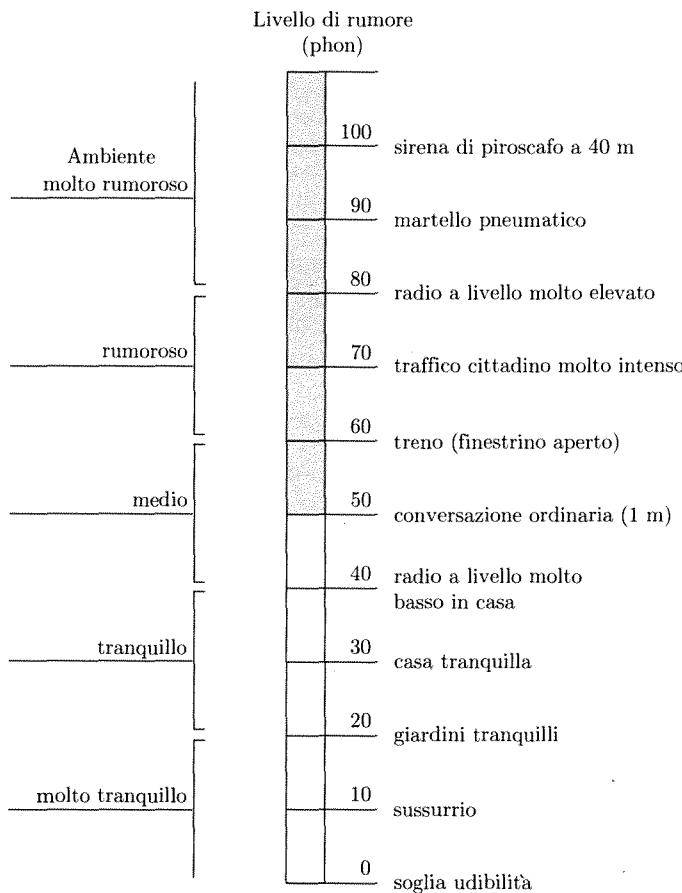


Fig. 10.23

Nei riguardi della percezione della frequenza del suono, va detto che le caratteristiche dell'orecchio sono tali che per potere rilevare una variazione di frequenza di un suono è necessario che questa raggiunga un valore minimo $\Delta\nu$, che dipende da ν .

Nell'intervallo fra 500 e 4.000 Hz il rapporto $\Delta\nu/\nu$ è approssimativamente costante e pari a circa 0,2%, e quindi notevolmente inferiore alla variazione minima di intensità percettibile (10%).

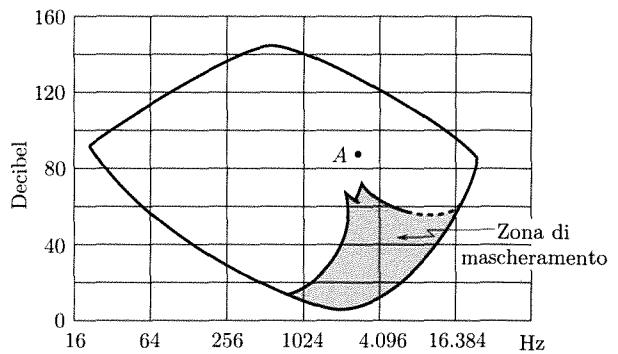


Fig. 10.22

In presenza di un suono viene alterata la sensibilità dell'orecchio per altri suoni

■ 10.12. ULTRASUONI

Gli ultrasuoni, come si è già detto, sono vibrazioni elastiche di frequenza superiore a quella (15-20 kHz) massima delle vibrazioni udibili dall'orecchio umano. Va subito precisato che, con una immediata estensione del significato di suoni, essi comprendono oscillazioni non solo longitudinali, ma anche trasversali o di altro tipo e non solo nell'aria, ma in qualsiasi mezzo di propagazione.

Inoltre va notato che l'avere scelto come limite fra i campi dei suoni e degli ultrasuoni quello di udibilità dell'orecchio, se può essere utile in alcuni casi, quando cioè si studiano le onde longitudinali in aria, è del tutto arbitrario per i rimanenti casi. È comunque chiaro che le leggi della propagazione sono le stesse sia per i suoni che per gli ultrasuoni.

Molti animali hanno la capacità di emettere e udire oscillazioni elastiche di frequenza superiore ai 15-20 kHz: cani e topi percepiscono suoni fino a 100 kHz; nella giungla e nel mare molti animali usano ultrasuoni nella loro vita di relazione. Il pipistrello poi, per il suo volo cieco, impiega ultrasuoni di frequenza compresa fra 30 e 120 kHz, emettendoli a impulsi. Esso segue un sistema che richama in linea generale quello dei sonar e dei radar per la localizzazione di ostacoli: gli impulsi ultrasonori, riflessi da ostacoli, ritornano al pipistrello come echi e l'animale valuta la posizione dell'ostacolo dalla direzione dell'eco e dal ritardo rispetto all'impulso emesso. Il ritmo di emissione degli impulsi è piccolo quando il pipistrello è fermo, a riposo, e aumenta in volo. Sistemi analoghi sono usati dalle balene e dalle tartarughe marine.

Volendo dare alcuni rapidi cenni sui più interessanti effetti e sulle applicazioni degli ultrasuoni, sarà bene notare subito che essi dipendono da alcune caratteristiche delle onde e della loro propagazione, che diventano preminentemente particolarmente importanti al crescere della frequenza. Esse sono:

1. piccola lunghezza d'onda;
2. grande intensità, a parità di ampiezza di oscillazione.



Fig. 10.24

Misure di velocità

■ 10.13. PROPRIETÀ LEGATE ALLE PICCOLE LUNGHEZZE D'ONDA

Le velocità di propagazione delle varie onde (longitudinali, trasversali) dipendono dalle caratteristiche elastiche del mezzo e l'assorbimento dipende da vari effetti dissipativi legati alla natura del mezzo; lo studio di queste grandezze consente quindi di indagare sulle proprietà della materia. Le determinazioni della velocità e dell'assorbimento al variare della frequenza costituiscono il principale metodo a disposizione per lo studio dei fenomeni di rilassamento elastico (cap. 9, par. 9.10). Così per es., nel caso dei fluidi, ove la velocità dipende dai calori specifici, è possibile studiare la dipendenza di questi parametri dalla frequenza, ottenendo così informazioni per la conoscenza fisica dei sistemi molecolari (cap. 15, parr. 15, 13-16).

La misura della velocità può essere fatta con vari metodi. Nella figura 10.24 è indicato un interferometro per gas e liquidi. In un recipiente chiuso v'è una sorgente (quarzo) di onde piane e un riflettore, a essa parallelo e mobile. Il quarzo stesso può essere opportunamente usato per rivelare le onde che, muovendo il riflettore, stabiliscono condizioni di stazionarietà. Si ottengono curve della corrente elettrica *i* nel

circuito del quarzo come in figura 10.25: a ogni massimo corrisponde una condizione di onde stazionarie. Evidentemente ciò si verifica per una distanza sorgente-riflettore pari a un multiplo intero di $\lambda/2$: misurando lo spostamento del riflettore fra due (o più) massimi successivi si può determinare λ e la velocità

$$c = \lambda\nu$$

essendo ν la frequenza delle onde emesse dal quarzo.

Sono stati sviluppati numerosi altri metodi di misura di velocità nei vari mezzi.

La misura della intensità di onde piane in funzione della distanza x dalla sorgente consente la determinazione del coefficiente di assorbimento α che entra nell'espressione di $J(x)$

$$(27) \quad J = J_0 e^{-2\alpha x}.$$

Un metodo in linea di principio semplice, nel caso di mezzi fluidi, è quello della misura della pressione di radiazione (effettuata mediante la bilancia di torsione, cap. 9, par. 9.29), che si esercita su un ostacolo posto a diverse distanze dalla sorgente

$$(28) \quad P = P_0 e^{-2\alpha x}.$$

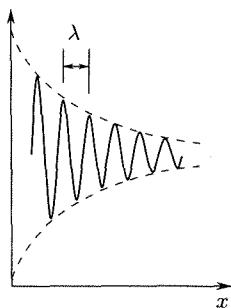


Fig. 10.25

Misura del coefficiente di assorbimento

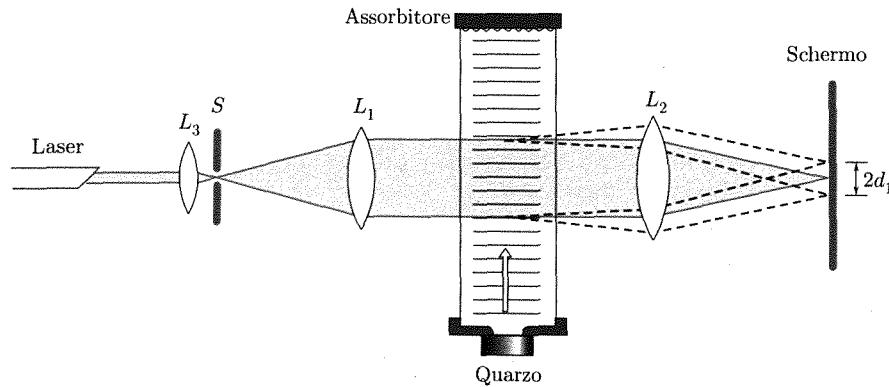


Fig. 10.26

La piccola lunghezza d'onda può produrre inoltre un effetto di diffrazione quando un pennello di luce attraversa una regione nella quale si propagano onde ultrasonore piane. Si consideri la disposizione sperimentale in figura 10.26. Una sorgente di luce laser di lunghezza d'onda Λ emette un fascio che, allargato da un sistema di lenti L_3 e L_1 a telescopio, incide su un fascio di ultrasuoni di frequenza ν propagantisi sotto forma di onde piane in direzione perpendicolare a quella della luce; il fascio di ultrasuoni è assorbito quindi con opportuni dispositivi. In assenza di ultrasuoni sullo schermo in O si vede un punto luminoso corrispondente al fascio laser non perturbato. Se si eccita la sorgente ultrasonora, la luce deve attraversare una regione di strati più o meno densi equivalenti a un reticolo, cioè a un insieme di fenditure di larghezza comparabile con la lunghezza d'onda delle onde elettromagnetiche che costituiscono la luce. Si presenta quindi, in maniera analoga alla diffrazione delle onde elastiche in presenza di ostacoli di dimensione paragonabile alla loro lunghezza d'onda, una diffrazione della luce e sullo schermo in O compaiono altri ordini di diffrazione. In ciò consiste l'effetto di *diffrazione della luce* prodotta dagli ultrasuoni. Nella figura 10.27 sono indicate figure di diffrazione di questo genere ottenute con ultrasuoni di intensità crescente (nelle fotografie procedendo dall'alto verso il basso) in acqua (8 MHz).

Nella figura 10.28 è indicata una analoga figura di diffrazione ottenuta con sorgente secondaria lineare. Nella disposizione descritta (fig. 10.26) è possibile vedere che la distanza dell'immagine di ordine n dalla immagine centrale si può porre nella forma

$$(29) \quad d_n = nA \frac{\Lambda}{\lambda}$$

essendo A una costante che dipende dalla disposizione sperimentale. Una disposizione di questo genere può servire a determinare la lunghezza d'onda λ e la velocità

L'acustoottica sfrutta l'effetto di diffrazione della luce da parte di un reticolo ultrasonoro per misure del campo acustico o per applicazioni in tecniche del segnale

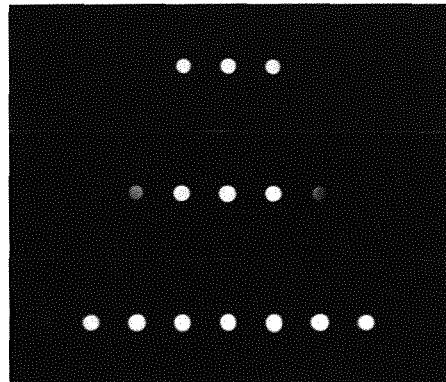


Fig. 10.27 Diffrazione della luce gialla del mercurio prodotta da onde ultrasonore piane della frequenza di 8 MHz in acqua. Le varie figure sono ottenute a intensità sonore crescenti dall'alto verso il basso.

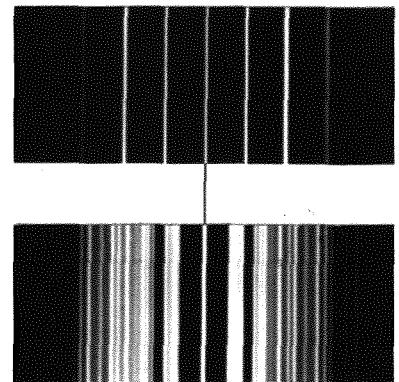


Fig. 10.28 Diffrazione della luce proveniente da una fenditura e diffratta da onde ultrasonore piane della frequenza di 4 MHz in xilolo: luce monocromatica gialla di una sorgente a vapori di mercurio (sopra) e luce non filtrata della stessa sorgente (sotto).

di propagazione degli ultrasuoni e nel mezzo se è nota la lunghezza d'onda della luce Λ .

Il fenomeno di diffrazione della luce da parte degli ultrasuoni è molto interessante ed è usato in diverse circostanze.

L'effetto di diffrazione descritto si verifica anche in solidi trasparenti. In questo caso tuttavia in genere la forma del campo sonoro ha aspetti particolari. Si può infatti mostrare che quando un sistema di onde piane (longitudinali o trasversali) incide sulla superficie limite di un solido con incidenza diversa da quella normale si generano due fasci di onde riflesse; il primo dello stesso tipo di quelle incidenti (longitudinali o trasversali) e il secondo dell'altro tipo (trasversali o longitudinali); inoltre i coefficienti di assorbimento sono piccoli sicché un sistema di onde generate in un solido subisce numerose riflessioni prima di essere assorbito. Di conseguenza, anche se si genera in un cristallo di forma semplice un fascio d'onde approssimativamente piane e la prima riflessione avviene su una parete normale alla direzione di propagazione del fascio, sono sufficienti le piccole deviazioni del campo reale da quello di onde piane per condurre nelle riflessioni successive alla produzione di onde longitudinali e trasversali propagantisi in numerose direzioni. È possibile inoltre mostrare che, come nel caso delle onde longitudinali, anche nel caso di onde trasversali piane lo stato di deformazione prodotto dall'onda nel mezzo conduce alla diffrazione di un fascio di luce che si propaga in direzione normale a quella delle onde ultrasonore. Se quindi un fascio di luce attraversa un solido trasparente nel quale sono presenti onde piane longitudinali (o trasversali), l'effetto di diffrazione della luce sarà prodotto da numerosi sistemi d'onde approssimativamente piane (longitudinali o trasversali) propagantisi in diverse direzioni, tutte perpendicolari alla direzione di propagazione della luce: si avranno così figure di diffrazione che sono la sovrapposizione di quelle prodotte da ciascuno di questi sistemi di onde. Se il materiale è isotropo, cioè le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali non dipendono dalla direzione di propagazione, le distanze dei vari ordini da quello centrale sono le stesse per le diffrazioni prodotte dalle onde nelle diverse direzioni.

La figura 10.29 mostra i risultati di una esperienza di questo genere compiuta usando un cubo di vetro d'ottica (materiale isotropo) nel quale sono inviati ultrasuoni (Schaefer-Bergmann). La figura mostra le immagini di diffrazione del primo ordine per onde longitudinali (circonferenza di raggio minore) e per onde trasversali. Dalla misura dei raggi delle circonferenze è possibile risalire alla velocità di propagazione del suono (conoscendo la frequenza degli ultrasuoni) mediante una relazione simile alla (26). La figura 10.30 (Schaefer-Bergmann) dà la figura di diffrazione della luce prodotta da ultrasuoni che si propagano in cristalli elasticamente anisotropi nei quali cioè la velocità di propagazione delle onde elastiche longitudinali e trasversali varia con la direzione (sempre normale alla direzione di propagazione della luce): la figura di diffrazione più interna è dovuta alle onde longitudinali.

Dagli spettri
di diffrazione della luce
in acustooptica
si ricavano informazioni
sulle caratteristiche
elastiche del mezzo di
propagazione

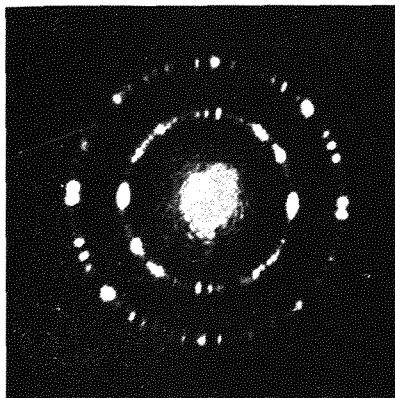


Fig. 10.29 Figura di diffrazione di luce monocromatica prodotta da onde ultrasonore (longitudinali e trasversali) in un cubo di vetro (Schaefer-Bergmann).

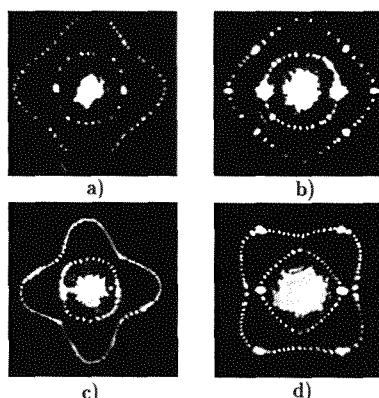


Fig. 10.30 Figura di diffrazione di luce monocromatica prodotta da onde ultrasonore (longitudinali e trasversali) in cristalli di: a) fluoruro di calcio; b) sapphire; c) sillimanite; d) fluoruro di litio (Schaefer-Bergmann).

Una proprietà che gli ultrasuoni presentano in grado crescente man mano che la loro frequenza aumenta è quella della propagazione approssimativamente rettilinea. È facile generare fasci abbastanza sottili di ultrasuoni, dirigerli e concentrare la loro energia in regioni piuttosto limitate. Questa loro proprietà è alla base di varie applicazioni tecniche.

Una di esse è quella delle comunicazioni con e fra sottomarini in immersione; le informazioni sono affidate a treni di onde ultrasonore (30-50 kHz). Un'altra applicazione ugualmente interessante è quella per la misura della profondità del mare: lo schema della disposizione sperimentale è dato in figura 10.31. Un generatore manda verso il basso treni di onde ultrasonore che riflesse dal fondo ritornano verso il battello e sono rivelate da un ricevitore: il ritardo Δt dell'eco rispetto alla partenza dell'impulso consente il calcolo della profondità del mare h

$$(30) \quad 2h = c\Delta t$$

essendo c la velocità di propagazione del suono. La radiazione ultrasonora a volte, secondo la struttura del fondo marino, penetra negli strati sottostanti sicché è possibile tramite gli echi prodotti dalle superfici di discontinuità eventualmente presenti avere informazioni sugli strati stessi. Apparecchi di questo genere sono di grande utilità in oceanografia e forniscono attualmente preziose informazioni sia sull'origine, sullo sviluppo, sulle variazioni di posizione dei continenti e della crosta terrestre, sia sulla composizione degli strati superficiali del fondo marino.

Lo stesso principio del metodo ora accennato è usato in apparecchi (sonar) per rivelare ostacoli nel mare. In tal caso la sorgente degli impulsi sonori e il rivelatore sono mobili (ruotano intorno a un asse fisso col natante) e ispezionano periodicamente le varie zone d'acqua che interessano; la presenza di ostacoli produce onde riflesse; dalla direzione e dal ritardo di ciascuna eco è possibile individuare la presenza e le caratteristiche degli ostacoli. I sonar sono molto utili nella navigazione, specie subacquea (si pensi alla navigazione di sottomarini sotto la calotta polare di ghiaccio) e nella pesca ove riescono a individuare la posizione di grossi pesci o di banchi di pesci piccoli.

*Ecolocalizzazione
mediante ultrasuoni
per misure di distanze*

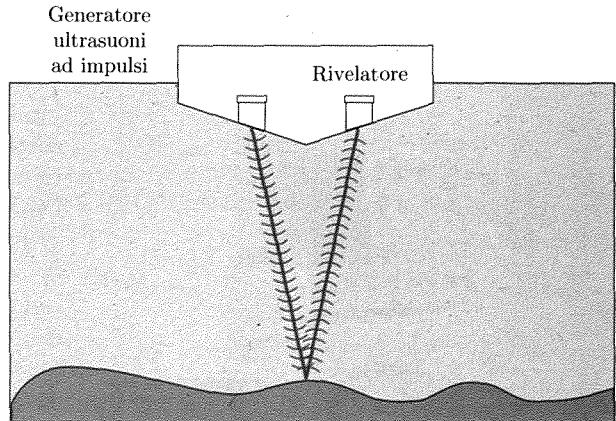


Fig. 10.31

*Prove non distruttive
mediante ultrasuoni*

Gli stessi criteri si impiegano per l'esame non distruttivo mediante ultrasuoni di materiali grezzi e di prodotti finiti. La figura 10.32a mostra il caso dell'esame di un albero di trasmissione di un locomotore. Il generatore invia nel pezzo impulsi di ultrasuoni che vengono riflessi da ogni inomogeneità presente: gli echi sono captati dal rivelatore. Le figure 10.32b e c mostrano ciò che si può vedere sullo schermo di un tubo oscillografico ove i segnali ricevuti dal rivelatore sono resi visibili come impulsi che seguono con ritardo l'impulso inviato dal generatore. Si osservi che le cose sono disposte in modo che le ascisse dei vari impulsi siano proporzionali ai ritardi degli echi; l'istante di partenza dell'impulso dal generatore è rappresentato dal piccolo impulso *A*.

Nel caso (fig. 10.32b) che non ci siano fallo nel pezzo si notano echi dovuti alle riflessioni sulla disuniformità della sezione *C* e sulla superficie limite *D*. La presenza di una falla come in *x* produce (figura 10.32c) un'ulteriore eco la cui posizione sullo schermo serve a localizzare la falla stessa.

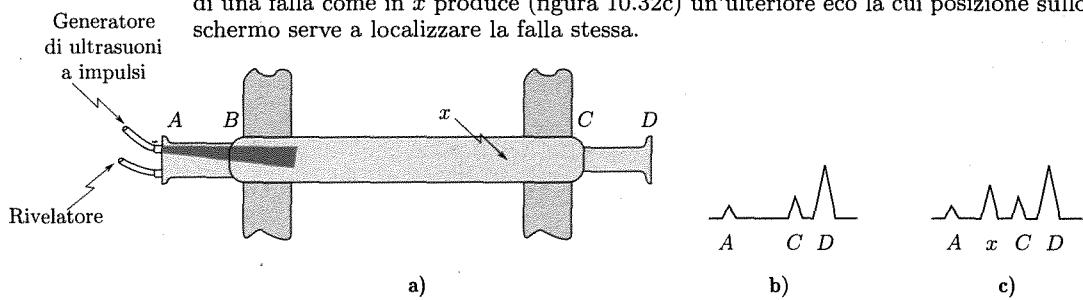


Fig. 10.32

*Emissione acustica
per il monitoraggio
di strutture*

Di recente si sono sviluppati metodi (emissione acustica in cui le sorgenti dei suoni sono nell'interno della struttura elastica stessa che si studia; esse consistono nel movimento di disomogeneità nella struttura (per es. microfratture, imperfezioni reticolari quali dislocazioni ecc.) sotto sollecitazione meccanica. È possibile vedere che tali movimenti avvengono con un rilascio di energia elastica sotto forma di onde: esse possono essere rivelate da ricevitori posti sulla superficie esterna della struttura. I metodi dell'emissione acustica si sono rapidamente sviluppati per il controllo di strutture (ponti, serbatoi di reattori nucleari, strutture missilistiche ecc.) fortemente sollecitate, essendosi mostrato che i processi che finiscono per produrre la frattura macroscopica possono essere rivelati e localizzati molto prima, mediante la copiosa emissione acustica che li accompagna.

Diremo infine che i metodi di localizzazione di disomogeneità di una struttura mediante la registrazione degli echi che seguono impulsi ultrasonori inviati nella struttura stessa trovano utili impieghi nella diagnostica medica. Questi metodi consentono di avere informazioni su organi interni al corpo umano a volte più facilmente e meglio di quanto sia possibile con i raggi X. Tessuti diversi hanno infatti impedanze acustiche (ρc) abbastanza differenti, così da produrre riflessioni sulle superfici di separazione, mentre presentano all'incirca le stesse caratteristiche di propagazione per i raggi X e quindi questi ultimi non riescono spesso a distinguerli. La figura 10.33 (Kretz) mostra

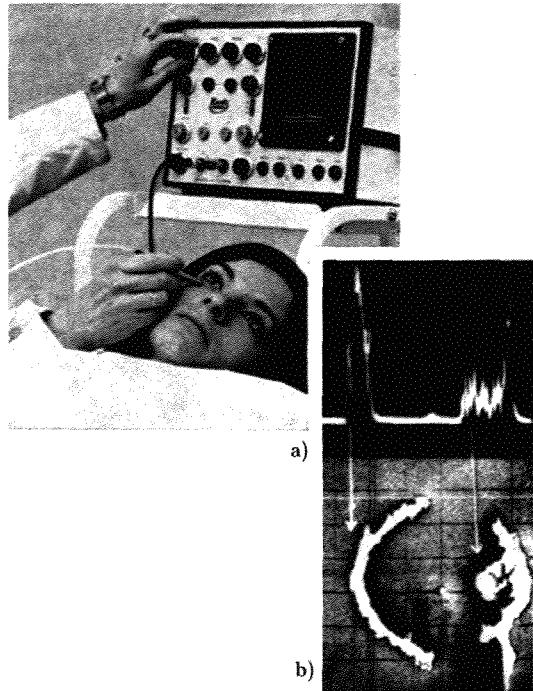


Fig. 10.33

il rilievo di un tumore in un occhio rivelato all'oscillografo mediante gli echi prodotti dalle discontinuità fra i tessuti quando si invia un pennello sottile o quando si usa il metodo dell'esame (scansione) con il pennello dell'intero campo spaziale di interesse e registrazione su uno schermo panoramico della posizione degli echi.

■ 10.14. PROPRIETÀ DOVUTE ALLE GRANDI INTENSITÀ

Gli ultrasuoni consentono di ottenere facilmente onde di grande intensità. Per onde piane di frequenza ν (pulsazione ω) l'intensità, ad ampiezza A costante, cresce con il quadrato della frequenza

$$(31) \quad J = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2$$

(ρ e c essendo la densità del mezzo e la velocità di propagazione delle onde in esso).

Nella tabella 10.2 sono indicate per varie ampiezze di vibrazione le intensità che si possono avere a temperatura ambiente ($20\text{-}25^\circ\text{C}$) in un gas (aria a 1 atm), in un liquido (acqua) e in un solido (ferro). Le intensità sono indicate in W/cm^2 .

Tabella 10.2 Intensità di onde piane progressive (W/cm^2)

Ampiezza di vibrazione (μm)	Frequenza		
	20 kHz	200 kHz	2 MHz
Aria ($\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$; $c = 343 \text{ m/s}$)			
0,1	$3,25 \cdot 10^{-6}$	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$3,25 \cdot 10^{-2}$
1	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$3,25 \cdot 10^{-2}$	3,25
10	$3,25 \cdot 10^{-2}$	3,25	$3,25 \cdot 10^2$
20	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10$	$1,3 \cdot 10^3$
50	0,81	$8,1 \cdot 10$	$8,1 \cdot 10^3$
Acqua ($\rho = 997 \text{ kg/m}^3$; $c = 1497 \text{ m/s}$)			
0,001	$1,18 \cdot 10^{-6}$	$1,18 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$
0,01	$1,18 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	1,18
0,1	$1,18 \cdot 10^{-2}$	1,18	$1,18 \cdot 10^2$
1	1,18	$1,18 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10^4$
Ferro ($\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$; $c = 5859 \text{ m/s}$)			
0,0001	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$
0,001	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$
0,01	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	3,6 · 10
0,1	$3,6 \cdot 10^{-1}$	3,6 · 10	$3,6 \cdot 10^3$

Con l'uso di opportuni concentratori è oggi possibile avere intensità di molte migliaia di W/cm^2 , da confrontarsi con le intensità di onde emesse da altoparlanti in una stanza, dell'ordine di $10^{-9} \text{ W}/\text{cm}^2$, o con le intensità dell'onda impulsiva che accompagna lo sparo di un cannone di circa $10^{-3} \text{ W}/\text{cm}^2$.

Va subito precisato che lo studio della propagazione di onde di grande intensità e dei processi che si presentano nella loro interazione con la materia va condotto con criteri e metodi diversi da quelli usati nel caso di onde di piccola intensità, in quanto le caratteristiche non lineari delle equazioni differenziali che descrivono i processi divengono di solito preminenti e determinanti. La trattazione dell'acustica non lineare esula dalla presente trattazione (un caso è trattato al cap. 11, par. 11.12). Vogliamo solo citare alcuni processi e alcune applicazioni di ultrasuoni di grande intensità.

Limitandoci essenzialmente a considerare casi in cui la intensità delle onde raggiunge valori dell'ordine dei W/cm^2 si possono presentare i seguenti fenomeni:

1. un fascio ultrasonoro diretto sulla superficie liquido-gas produce con la sua pressione di radiazione la rottura della superficie e la produzione di una nebbia finissima (aerosol);
2. un fascio ultrasonoro inviato sulla superficie di separazione tra due mezzi liquidi non miscibili può causare la formazione di un'emulsione;
3. un fascio di ultrasuoni in un liquido contenente bolle gassose spinge queste fuori dal liquido (degassaggio);
4. un fascio inviato in un gas che contiene particelle solide e liquide sospese (fumi) può farle aggregare e precipitare (precipitazione).

In questi effetti meccanici che si verificano in corrispondenza alle superfici limite di mezzi diversi hanno anche interesse le forze che si determinano in seguito alle diverse accelerazioni che le particelle dei due mezzi investiti dalle onde hanno a causa della diversa ampiezza delle onde (riflessione). Si badi che le accelerazioni nel moto oscillatorio delle particelle dipendono anche esse, come le intensità, dal quadrato della frequenza ($a = \omega^2 x$) e divengono ben presto molto superiori alle accelerazioni di gravità ($9,8 \text{ m/s}^2$). La tabella 10.3 dà alcune indicazioni per le accelerazioni massime ($\omega^2 A$).

Tabella 10.3 Accelerazione massima (m/s^2)

Ampiezza di vibrazione (μm)	Frequenza		
	20 kHz	200 kHz	2 MHz
0,00001	1,58	$1,58 \cdot 10^2$	$1,58 \cdot 10^4$
0,001	$1,58 \cdot 10$	$1,58 \cdot 10^3$	$1,58 \cdot 10^5$
0,01	$1,58 \cdot 10^2$	$1,58 \cdot 10^4$	$1,58 \cdot 10^6$
0,1	$1,58 \cdot 10^3$	$1,58 \cdot 10^5$	$1,58 \cdot 10^7$
1	$1,58 \cdot 10^4$	$1,58 \cdot 10^6$	$1,58 \cdot 10^8$
10	$1,58 \cdot 10^5$	$1,58 \cdot 10^7$	$1,58 \cdot 10^9$
20	$3,15 \cdot 10^5$	$3,15 \cdot 10^7$	$3,15 \cdot 10^9$
50	$7,9 \cdot 10^5$	$7,9 \cdot 10^7$	$7,9 \cdot 10^9$

Effetti diversi dovuti alla non linearità del mezzo

Altri effetti sono legati ad un fenomeno (cavitazione) che si presenta in liquidi che contengano piccole bolle, o nuclei gassosi.

Per valori dell'ampiezza della pressione acustica dell'ordine di una atmosfera, i nuclei prendono a crescere per diffusione dei gas disciolti nel liquido e per evaporazione del liquido in essi e i raggi passano dal valore di frazioni o di pochi micron a valori dell'ordine di frazioni di millimetro; le bolle divengono visibili. Per il verificarsi di condizioni di instabilità il processo di crescita e di oscillazione nel campo

sonoro è seguito da un rapidissimo collasso in seguito al quale il raggio della bolla praticamente si annulla in un tempo molto breve ($\sim 0,1 \mu\text{s}$): ciò produce un riscaldamento molto forte dei gas nella bolla (vengono raggiunte temperature di decine di migliaia di gradi) e la generazione di un'onda elastica impulsiva molto intensa nel liquido (le corrispondenti pressioni sono dell'ordine di migliaia di atmosfere). Il fenomeno della cavitazione è accompagnato da effetti di vario genere quali: luminescenza, spezzamento delle molecole di composti chimici, corrosione di superfici metalliche presenti nel liquido, dovuti appunto all'innalzamento di temperatura dei gas della bolla e alle onde impulsive prodotte nel liquido.

Effetti particolarmente vistosi possono ottersi con ultrasuoni di intensità notevolmente superiori a quelle ora considerate (W/cm^2), quali quelle che si possono ottenere con concentratori di vario tipo: si può giungere alla completa distruzione del mezzo materiale di propagazione in quanto questo, per la presenza di effetti dissipativi, si riscalda rapidamente fino a evaporare.

DINAMICA NON LINEARE E CAOS DETERMINISTICO

- ▶ Non linearità di equazioni algebriche e differenziali: generazione di frequenze *armoniche* e *subarmoniche*.
- ▶ Rappresentazione della dinamica dei sistemi nello spazio delle fasi: sistemi non dissipativi, curva chiusa; sistemi dissipativi, punto limite (*oscillatore libero*) o curva limite (*oscillatore forzato*), come stato di equilibrio (*attrattore*).
- ▶ Bacino di attrazione, dominio dello spazio delle fasi, corrispondente a condizioni iniziali con medesimo attrattore.
- ▶ Studio degli attrattori mediante la *sezione di Poincaré*: intersezione della curva dinamica con una superficie. Geometria *frattale* (comportamento caotico), corrispondente a indeterminazione del ciclo limite della dinamica (*biforcazione* degli stati sulla sezione di Poincaré, in dipendenza di un *parametro di controllo*). Interpretazione con *parabola logistica* e comportamento universale di sistemi non lineari, con generazione di subarmoniche.

Esempi classici di comportamenti caotici: fluido turbolento, bolla di cavitazione oscillante, circuiti elettronici (oscillatore di Toda) ecc.

Dinamica non lineare e caos deterministico

11.

11.1. INTRODUZIONE

Nella trattazione normalmente fornita in corsi universitari di primo livello per la meccanica classica l'attenzione è posta in particolare su sistemi il cui comportamento è descritto da equazioni differenziali lineari. In tal caso le equazioni possono essere risolte con esattezza fornendo per ciascun problema dinamico funzioni che legano le variabili in gioco e che consentono di determinare (determinismo) perfettamente gli stati del sistema nel passato, al presente e nel futuro; vale, inoltre, il principio di sovrapposizione, per il quale la somma di due soluzioni particolari è ancora una soluzione del problema.

Le equazioni differenziali che descrivono il comportamento di un *sistema fisico* (nel caso che qui si considera *sistema meccanico*) sono in realtà quasi sempre non lineari. La non linearità arricchisce enormemente la varietà dei comportamenti di un sistema⁽¹⁾, ma in genere rende la trattazione molto più complessa.

Le difficoltà che si incontrano nella soluzione delle equazioni differenziali non lineari vengono superate, entro ristretti limiti di variabilità delle variabili indipendenti, *linearizzando* le equazioni stesse, approssimandole cioè con equazioni nelle quali la non linearità viene rimossa trascurando i termini che la causano o assegnando a essi valori opportuni (lineari): si possono ottenere così soluzioni che in un gran numero di casi risultano in

⁽¹⁾ Il presentarsi nei processi di nuovi aspetti legati alla non linearità è già rilevabile nel caso di equazioni del moto molto semplici. Se, per es., una sollecitazione periodica (x) di frequenza angolare ω viene applicata a un sistema il cui comportamento (risposta, y) non è lineare, la perturbazione prodotta presenta componenti a frequenze multiple (armoniche) della frequenza della sollecitazione applicata. Se per es. è

$$y = ax^2 = a \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\omega t),$$

compare la seconda armonica.

Se, invece, la risposta è esponenziale

$$y \sim e^{x/x_0}$$

per

$$x = a \operatorname{sen} \omega t$$

si ha, con opportuna scelta dell'origine dei tempi e dei parametri

$$y \cong e^{\operatorname{sen} \omega t} \cong 1 + \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2\omega t) + \frac{1}{24}(-\operatorname{sen} 3\omega t + 3 \operatorname{sen} \omega t) + \dots$$

Accanto alla componente alla frequenza angolare ω compaiono armoniche superiori.

accordo con le aspettative e che descrivono abbastanza bene il comportamento del sistema. Tutto ciò, peraltro, è in genere limitato a casi nei quali i termini non lineari hanno un peso relativamente piccolo rispetto a quello degli altri termini, nel campo di variabilità delle variabili e dei parametri che intervengono nel particolare problema, specie quando si è interessati a regioni ristrette di questi campi di variabilità e a intervalli di tempo piuttosto limitati. Vi sono peraltro problemi in cui la linearizzazione delle equazioni differenziali non può essere usata con profitto perché, specie per alcuni valori dei parametri caratteristici o per la necessità di considerare intervalli di tempo molto estesi, gli effetti dei termini non lineari divengono preminenti nel determinare l'andamento del processo, il quale quindi può assumere caratteristiche particolari, altrimenti non prevedibili. Si comprende quindi l'interesse per lo studio di questi casi.

Il superamento delle difficoltà derivanti dalla non disponibilità di soluzioni matematiche semplici in problemi non lineari in molti casi è possibile mediante l'uso del calcolo numerico eseguito coi moderni calcolatori elettronici.

Se un sistema dinamico è descritto mediante un modello continuo da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine⁽²⁾ nelle variabili $x, y, z \dots$

$$(1) \quad \dot{x} = f_\mu[x(t), y(t), z(t) \dots],$$

una trattazione approssimata del problema può farsi considerando per ciascuna delle equazioni differenziali una iterazione

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n + f_\mu(x_n, y_n, z_n, \dots) \Delta t$$

ottenendo al posto della soluzione continua $x(t)$ una spezzata a partire dalla posizione iniziale x_0, y_0, z_0 di approssimazione tanto migliore quanto più è piccolo Δt . Risulta particolarmente importante usare valori piccoli di Δt nei tratti della traiettoria in cui le derivate delle funzioni variano rapidamente: particolari metodi di calcolo possono essere usati allo scopo. Spesso esiste nel problema stesso un intervallo di tempo caratteristico che può esser scelto come Δt .

A volte può essere utile passare a una descrizione del sistema dinamico nel particolare problema mediante un modello discontinuo descritto, per ogni variabile, da relazioni del tipo

$$(3) \quad x_{n+1} = g_\mu(x_n, y_n, z_n \dots)$$

mediante le quali ogni punto che si considera viene generato dal precedente senza la considerazione esplicita dell'intervallo di tempo che il sistema richiede per passare da una posizione alla successiva: la traiettoria continua viene sostituita da una spezzata (mappa). Naturalmente le funzioni $f(x, y, z, \dots)$ e $g(x, y, z, \dots)$ sono direttamente legate fra loro.

L'indice μ nelle (1) e (3) sta a indicare il fatto che la dinamica del sistema in genere dipende da uno o più parametri μ che possono assumere più valori; si tratta di parametri controllati dall'esterno tramite opportune interazioni (sistemi aperti).

È stato così possibile esaminare il comportamento di un sistema non lineare per diversi valori delle condizioni iniziali e dei parametri coinvolti, per lunghi intervalli di tempo, e mettere in evidenza la ricchezza dei comportamenti complessi che la non linearità può originare. Lo studio dei sistemi non lineari con i nuovi metodi è in continuo sviluppo: alcune conclusioni raggiunte sono di grande importanza in quanto forniscono una visione molto più ampia e illuminante, rispetto alle trattazioni precedenti,

⁽²⁾ Equazioni differenziali di ordine superiore possono in genere essere trasformate in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Vedremo in seguito alcuni esempi.

del comportamento che questi sistemi fisici possono avere. Tali conclusioni hanno validità anche per sistemi dinamici in altri campi delle scienze: dell'economia, del comportamento sociale, ove i relativi processi sono descritti da equazioni differenziali non lineari simili a quelle valide per i processi fisici. La potenzialità di unificazione culturale fra campi notevolmente distanti costituisce una ulteriore attrattiva per la trattazione dei processi non lineari.

Una conclusione di particolare importanza cui si arriva è che, anche per sistemi non lineari relativamente semplici, possono esistere valori delle condizioni iniziali e dei parametri che caratterizzano il moto, per i quali si verifica una estrema dipendenza del comportamento a lungo termine del sistema dalle condizioni iniziali; *piccole differenze tra due stati inizialmente vicini vengono amplificate* fino a divenire dello stesso ordine di grandezza dei valori assunti dalle variabili del sistema e, quindi, a interferire con il comportamento macroscopico di esso. In tali casi *non è possibile prevedere il comportamento a lungo termine*: si parla di caos deterministico, legato cioè a equazioni ben definite e non all'intervento di eventi casuali. In realtà nel caos deterministico c'è ancora ordine: pur non essendo più possibile prevedere il comportamento a lungo termine del sistema questo comportamento è sempre determinato dalle equazioni del sistema e mantiene la sua individualità. L'estrema dipendenza del comportamento dalle condizioni iniziali introduce enormi possibilità di variazioni nel comportamento stesso, nell'ambito delle leggi deterministiche. Ciò ha grande rilevanza per l'apporto di novità sia nell'ambito dei sistemi fisici, sia in sistemi di altra natura (*evoluzione*).

Non è scopo della presente trattazione esaminare con completezza lo stato delle ricerche, ma ci si limiterà a fornire elementi atti ad apprezzare queste nuove e promettenti vedute sul comportamento a lungo termine di sistemi non lineari, anche abbastanza semplici, sui rapporti fra stabilità (ordine) e imprevedibilità di comportamento, sulla ricchezza delle soluzioni, finora impreviste, che si possono avere. Le considerazioni saranno svolte essenzialmente con riferimento a sistemi non conservativi e a una particolare, anche se abbastanza frequente, via al caos.

La presentazione, in particolare quella dei riscontri sperimentali, potrebbe essere fatta più facilmente dopo avere allargato la trattazione classica ad altri settori della fisica. È preferibile introdurla al termine dello studio della meccanica, allo scopo di fornire sin da subito il contributo concettuale formativo delle nuove vedute. Nella presentazione, tuttavia, si farà riferimento anche a processi appartenenti ad altri settori della fisica, dando le necessarie informazioni per la loro immediata comprensione.

Alcune nozioni sui metodi che sono stati sviluppati e impiegati per trattare i processi in esame sono presentate nei paragrafi 11.2-11.6 e 11.9-11.10, assieme ad alcuni risultati che chiariscono il comportamento complesso e il caos deterministico, con riferimento essenzialmente a sistemi non conservativi. Nel paragrafo 11.7 viene discussa la parabola logistica, una semplice forma matematica non lineare unidimensionale il cui sviluppo, ottenuto per iterazione, può mostrare le caratteristiche del comportamento complesso e peculiari proprietà di una particolare via al caos deterministico, quella per raddoppio del periodo, alla quale essenzialmente si limita la trattazione. Nel paragrafo 11.8 viene poi presentata la universalità (Feigenbaum) di questi risultati stabiliti per la parabola logistica, cioè la loro validità per sistemi anche multidimensionali dissipativi

Le soluzioni di equazioni differenziali non lineari possono differire moltissimo allontanandosi da situazioni iniziali molto vicine tra loro, conducendo all'impredicibilità dei comportamenti dei sistemi descritti

che seguono questa via al caos. Esempi di sistemi di questo tipo sono presentati nei paragrafi 11.11-11.15 nella trattazione numerica e nella verifica sperimentale. Alcune nozioni sulla geometria delle forme frattali chiudono il capitolo.

■ 11.2. SPAZIO DELLE FASI. ATTRATTORI

Lo spazio delle fasi (o degli stati), come si è già visto (cap. 2, par. 2.20), è uno spazio di coordinate ortogonali in numero pari al numero delle variabili necessarie per definire lo stato dinamico di un sistema.

Il sistema più semplice è quello del punto materiale isolato che si muove in una dimensione: in questo caso le variabili di stato sono due, posizione e velocità, e lo spazio delle fasi è a due dimensioni; per un punto, sempre isolato, che si muova nello spazio configurazionale a n dimensioni, lo spazio delle fasi è a $2n$ dimensioni. Nel caso di sistemi dinamici non isolati, con una forza esterna la cui ampiezza è funzione del tempo, una nuova dimensione si presenta nello spazio delle fasi, il quale quindi può avere un numero dispari (superiore a due) di dimensioni.

Si può essere condotti a considerare uno spazio delle fasi con un numero dispari di dimensioni anche nel caso di sistemi isolati se nel particolare problema dinamico ci siano condizioni particolari (quali quella di energia costante, o momento della quantità di moto costante) che limitano a un sottoinsieme, di dimensione $2n - 1$, dello spazio a $2n$ dimensioni la regione di quest'ultimo che può essere occupata da punti rappresentativi dello stato.

Ricordiamo due importanti proprietà dello spazio delle fasi. Una traiettoria nello spazio delle fasi che descrive l'evolversi di un sistema, non può interessare se stessa o alcun'altra traiettoria possibile per il sistema (come quella derivante da condizioni iniziali poco diverse) giacché nel punto intersezione sarebbero possibili due prosecuzioni, in contrasto con la proprietà fondamentale per un sistema deterministico, il cui futuro è legato in maniera univoca alla condizione iniziale. La seconda proprietà si riferisce alle traiettorie per un sistema conservativo: se si considera un insieme di punti, come posizioni iniziali per le traiettorie, fra loro vicini e che determinano un volume nello spazio delle fasi, le posizioni raggiunte dalle traiettorie a un certo istante della loro evoluzione costituiscono un insieme che può avere una configurazione diversa ma deve avere lo stesso volume dell'insieme iniziale (teorema di Liouville).

Di conseguenza si ha che per sistemi conservativi con spazio delle fasi bidimensionali le traiettorie devono avere forme semplici, quali curve chiuse o terminanti su un punto di equilibrio; non sono cioè possibili, per le caratteristiche topologiche di uno spazio a due dimensioni, sviluppi complessi con avvolgimenti inestricabili delle traiettorie su se stesse e formazione di nodi e allacciamenti. Ciò è invece possibile nel caso di uno spazio delle fasi con almeno tre dimensioni e può corrispondere a comportamenti a lungo termine complessi e irregolari, pur mantenendosi abbastanza regolari le parti di traiettoria relative a brevi intervalli di tempo.

A traiettorie nello spazio delle fasi di quest'ultimo tipo corrisponde il comportamento caotico. Tali comportamenti possono facilmente riscontrarsi mediante il calcolo numerico sia in sistemi conservativi sia in sistemi dissipativi, i quali ultimi, corrispondenti a sistemi reali, saranno trattati nel seguito.

Un volumetto di punti rappresentativi di un sistema nello spazio delle fasi evolve mantenendosi di egual valore

In sistemi complessi, il cui spazio delle fasi possiede spesso un numero elevato di dimensioni, sorge il problema di trovare metodi opportuni per avere informazioni sulle caratteristiche di interesse, allo scopo di seguire l'evoluzione del sistema per lunghi intervalli di tempo (vedi par. 11.8).

Si è già vista la rappresentazione nello spazio delle fasi (cap. 2, par. 2.20) delle piccole oscillazioni del pendolo semplice: il moto è descritto da un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine, una per ciascuna variabile dello stato di moto; scegliendo le unità di misura per la massa, la lunghezza e l'accelerazione di gravità in modo che abbiano nell'equazione valore unitario, le equazioni si possono scrivere nella forma

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

In corrispondenza a un dato valore dell'energia posseduta dal pendolo, il moto avviene con un'ampiezza A e la traiettoria nello spazio delle fasi (dimensioni $n = 2$) è una circonferenza di raggio A con centro nell'origine (dimensioni $n - 1$).

Il moto del pendolo in realtà è descritto dall'equazione differenziale

$$(5) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sin \theta$$

o dal sistema

$$(6) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

che è un sistema di equazioni non lineari.

In figura 11.1a sono riportate alcune traiettorie corrispondenti a vari valori dell'energia posseduta dal pendolo. Al crescere dell'energia la forma della traiettoria si allontana gradualmente da quella circolare valida

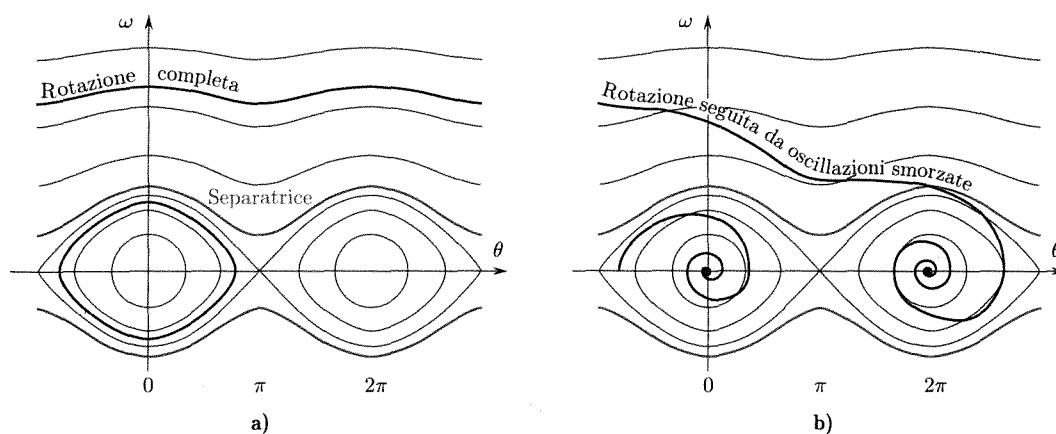


Fig. 11.1

per le piccole oscillazioni, fino a prendere una forma aperta che corrisponde a una rotazione con sovrapposta oscillazione: naturalmente il periodo dell'oscillazione non è più indipendente dall'ampiezza, come è per le piccole oscillazioni, e si presentano contemporaneamente componenti a frequenze multiple della oscillazione fondamentale (*armoniche*). La curva che separa la regione di semplice oscillazione da quella ove è presente una rotazione prende il nome di separatrice: a essa corrisponde un valore dell'energia per cui il pendolo raggiunge con velocità nulla la posizione di equilibrio instabile ($\theta = \pi$, punto iperbolico, o punto sella): il tempo che sarebbe richiesto per passare da un punto sella al successivo è infinito.

Nel caso di smorzamento dovuto all'esistenza di attriti (dissipazione di energia) le equazioni per il moto del pendolo divengono

*Il pendolo semplice
non lineare nello spazio
delle fasi*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = 0$$

oppure

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\omega - \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned}$$

Abbiamo già fatto notare come la corrispondente traiettoria nello spazio delle fasi finisca per convergere verso la posizione di equilibrio stabile ($\theta = 0, \omega = 0$, fig. 11.1b) che costituisce un primo esempio di attrattore, cioè di luogo geometrico verso cui convergono al passare del tempo le traiettorie che partono da stati iniziali diversi. Si ricordi che gli *attrattori esistono solo in sistemi dissipativi*, nei quali cioè l'energia, nel nostro caso meccanica, non viene conservata.

Attrattore è un punto di convergenza delle soluzioni nello spazio delle fasi di un sistema dissipativo

È bene fare qualche ulteriore precisazione. Nel caso esaminato la definizione di attrattore quale luogo dei punti ove la velocità è zero, porta a considerare i punti $\theta = \pm n\pi$.

Un esame della stabilità di questi punti, del fatto cioè che per una piccola perturbazione dello stato vi sia tendenza a ritornare nello stato di equilibrio (stabile) o ad allontanarsi da esso (instabile), porta a vedere che le posizioni corrispondenti a un n zero o pari sono stabili mentre quelle per n dispari sono instabili. L'andamento delle traiettorie negli intorni dei due tipi di punti sono indicate nella figura 11.2; per n dispari le traiettorie nelle vicinanze del punto, iperboli, si allontanano dal punto stesso (punto *sella*), che quindi corrisponde a condizioni di instabilità.

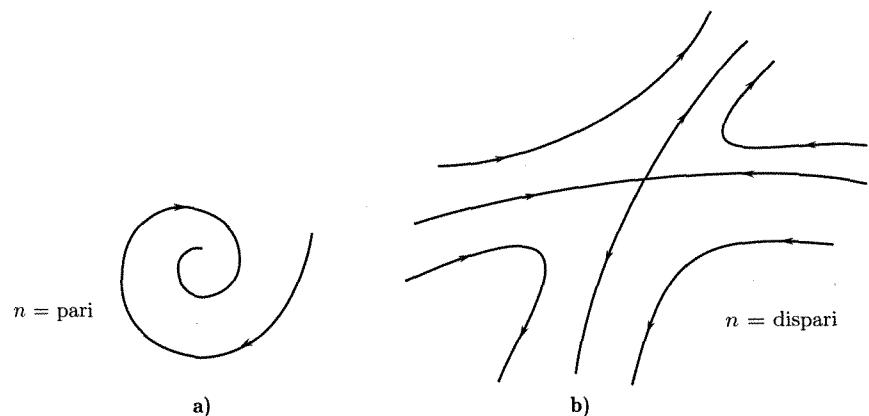


Fig. 11.2

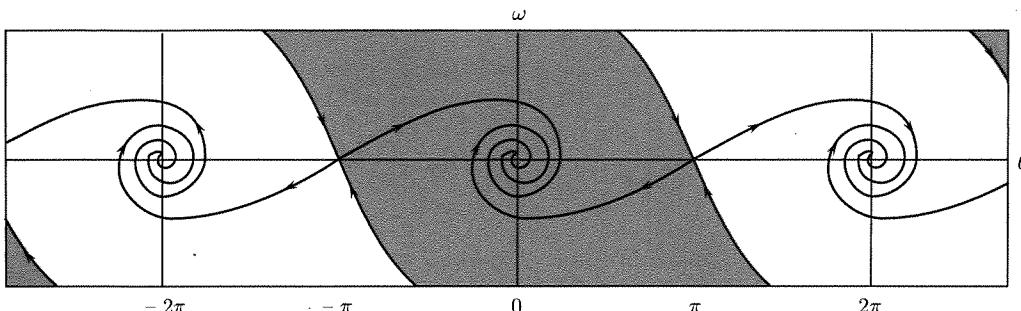


Fig. 11.3

Nel caso del pendolo smorzato sono attrattori i punti $\omega = 0, \theta = \pm n$ con n zero o pari.

La figura 11.3⁽³⁾ mostra alternativamente, in colore e non, le zone dello spazio delle fasi per i punti di ciascuna delle quali, considerati come origini delle traiettorie del pendolo smorzato, queste convergono su un differente attrattore. Le regioni di questo tipo prendono il nome di bacini di attrazione, ciascuno per un singolo attrattore; le curve che separano un bacino da un altro prendono ancora il nome di separatrici.

La forma geometrica dell'attrattore è di notevole interesse per le considerazioni che vogliamo svolgere. La forma più semplice, dopo quella del punto di equilibrio stabile, nello spazio delle fasi a due dimensioni è quella di una linea chiusa (fig. 11.14) che prende il nome di cerchio limite, e che è essa stessa una soluzione del sistema di equazioni. Una tale situazione si verifica per es. nel caso di un oscillatore dissipativo forzato quando l'energia dissipata per ciclo e quella fornita dall'esterno finiscono per compensarsi esattamente.

La forma geometrica di attrattore immediatamente più complessa si presenta in uno spazio delle fasi avente almeno tre dimensioni. Essa si ha, per es., nel caso di un oscillatore caratterizzato da due frequenze di oscillazione fra loro incommensurabili; la traiettoria che descrive le oscillazioni quasi periodiche è una curva che si svolge a elica su un cilindro in uno spazio di coordinate ortogonali x, y, z (fig. 11.5a); se, peraltro, si considera la periodicità lungo l'asse z per cui l'intervallo $2\pi-4\pi$ ripete esattamente l'intervallo $0-2\pi$ per quanto si riferisce alla variabile z , si può curvare l'asse del cilindro a costituire un toro (fig. 11.5b): le due frequenze dell'oscillatore caratterizzano i periodi di avvolgimento sul toro delle traiettorie nel verso trasversale e in quello assiale.

Attrattori di tipo toroidale possono presentarsi anche per sistemi a dimensioni superiori.

I tre tipi di attrattori finora visti (punto fisso, cerchio limite e toro) sono stati studiati a lungo: l'impiego recente di metodi di calcolo numerico, consentendo di risolvere facilmente e rapidamente le equazioni non lineari per lunghi intervalli di tempo, ha facilitato lo studio di sistemi quali quelli su accennati, che si è potuto confrontare con l'esperienza. La caratteristica dei moti cui si riferiscono gli attrattori visti è quella della loro completa prevedibilità; anche nel caso di moti che non si ripetono (come per i moti

Lo spazio delle fasi si divide in regioni, dette bacini di attrazione, entro le quali vi sono le condizioni iniziali che conducono a un medesimo attrattore

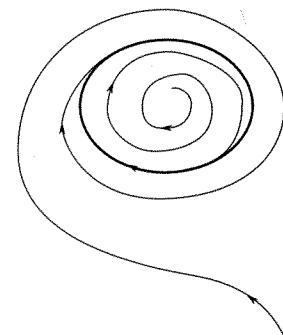


Fig. 11.4

Attrattori possono essere curve chiuse nello spazio delle fasi

⁽³⁾ G.L. Baker, J.P. Gollub, *Chaotic dynamics*, Cambridge University Press, 1990.

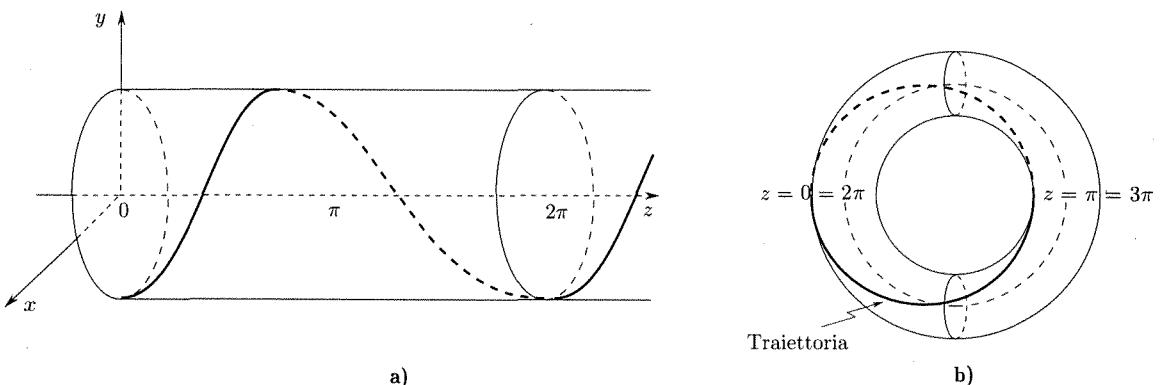


Fig. 11.5

quasi periodici) la prevedibilità a lungo termine è verificata e traiettorie inizialmente vicine fra loro si mantengono tali.

Abbastanza recentemente è stata messa in evidenza nel caso di sistemi non lineari dissipativi, che per la loro descrizione richiedano uno spazio delle fasi avente almeno tre dimensioni, la necessità di considerare un altro tipo di attrattore: l'*attrattore strano o caotico* (par. 11.4).

■ 11.3. SEZIONI DI POINCARÉ

Si vuole ora introdurre una rappresentazione spesso utile nello studio del comportamento di sistemi complessi, quando risulta difficile seguire in dettaglio l'evoluzione delle traiettorie, specie in uno spazio delle fasi a tre o più dimensioni. Tale rappresentazione fu introdotta nel 1914 da H. Poincaré nello studio del problema della stabilità del sistema solare: studiando il problema dei tre corpi egli si accorse che le traiettorie, pur presentandosi abbastanza regolari per intervalli di tempo corrispondenti a una singola rivoluzione, si ripiegano e si avvolgono in strutture complicate se si considerano tempi lunghi. Per distinguere e seguire questo tipo di comportamento Poincaré sviluppò un metodo grafico; esso consiste nel considerare al posto delle traiettorie che fluiscono nello spazio delle fasi a n dimensioni le loro intersezioni con una sezione trasversale alle traiettorie stesse (una superficie a $n-1$ dimensioni) scelta in modo opportuno. Nel caso di sistemi con uno spazio delle fasi bidimensionale la sezione è unidimensionale (segmento di linea); nel caso più importante di spazio delle fasi tridimensionale la sezione di Poincaré può essere un piano (o una superficie bidimensionale opportuna) che viene intersecato dalle traiettorie. La disposizione (struttura) dei punti di successive intersezioni nel caso di traiettorie che attraversano più volte la sezione può, già essa, fornire utili informazioni, pur essendo una rappresentazione discontinua in uno spazio avente un numero di dimensioni inferiore di un'unità rispetto a quello delle fasi.

La sezione di Poincaré, avente una dimensione inferiore a quella dello spazio delle fasi del sistema, interseca la traiettoria secondo un insieme di punti costituente la mappa di Poincaré

Un tale procedimento si mostra particolarmente utile per lo studio di sistemi con spazio delle fasi tridimensionale. In tal caso, se per es. si considera un moto periodico con spazio delle fasi x , y , z , la traiettoria ciclica (fig. 11.6, linea 1) interseca la sezione S sempre nello stesso punto a ogni ciclo. Se invece si considera un'orbita vicina non periodica (linea 2) le intersezioni sono costituite da una successione di punti. Se il sistema

è dissipativo i punti della sezione di Poincaré convergono verso il corrispondente attrattore.

La dinamica di un sistema continuo può essere studiata direttamente nel piano della sezione S . Se infatti si prende un punto Q_0 appartenente al piano della sezione, si può determinare tramite la dinamica del sistema il punto Q_1 ancora di S corrispondente alla successiva intersezione della traiettoria partente da Q_0 :

$$Q_1 = P(Q_0) = P(x_0, y_0, z_0).$$

Con successive iterazioni si genera una mappa che prende il nome di mappa di Poincaré.

Come ulteriore illustrazione della sezione (e della mappa) di Poincaré nella figura 11.7⁽⁴⁾ si considera un pendolo che riceve a intervalli regolari energiche spinte dall'esterno e ruota: la figura mostra i risultati per un'orbita calcolata nello spazio delle fasi per intervalli di tempo multipli del periodo (da 1 a 1.000) e la sezione di Poincaré.

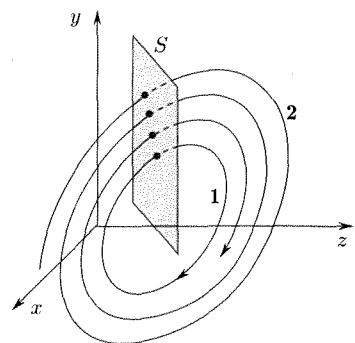


Fig. 11.6

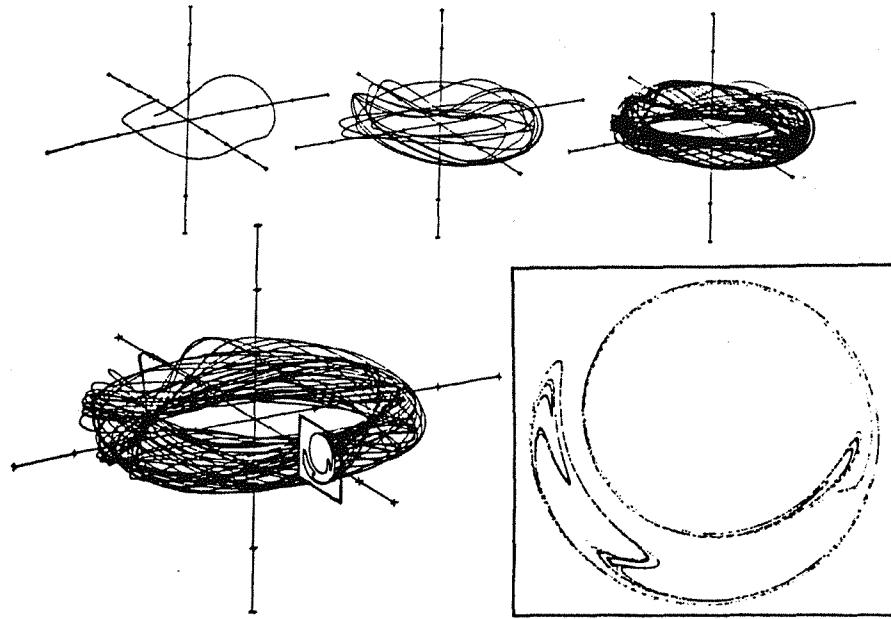


Fig. 11.7

La costruzione della mappa di Poincaré conduce a sostituire la descrizione del sistema continuo ottenuta per mezzo delle equazioni differenziali di tipo (1) con quella discontinua ottenuta con iterazioni del tipo (3).

Questa sostituzione rende spesso più semplice lo studio, specie numerico, del sistema, pur consentendo di raccogliere sufficienti informazioni per giudicare il comportamento del sistema stesso, e in particolare di individuare rapidamente le regioni dello spazio delle fasi formate da punti che considerati come posizioni iniziali conducono a moto regolare o a moto caotico secondo che (nel caso di spazio delle fasi tridimensionale) i punti

⁽⁴⁾ J. Gleick, *Chaos*, Viking Penguin Inc., New York, 1988.

delle successive intersezioni si dispongano regolarmente su linee unidimensionali o si disperdano a coprire aree bidimensionali aperte.

11.4. ATTRATTORI STRANI O CAOTICI. CAOS DETERMINISTICO

Nel 1963 Edward N. Lorentz, cercando di comprendere la causa delle difficoltà che si incontrano nel prevedere l'evolversi delle condizioni meteorologiche, studiò le equazioni del moto di un fluido semplificandole in modo da considerare un sistema di tre equazioni differenziali non lineari del primo ordine (spazio delle fasi tridimensionale, par 11.14). Egli osservò che il comportamento di un tale sistema mostrava una chiara aleatorietà che non poteva essere legata a nessuno degli attrattori noti, ma a un attrattore di nuovo tipo che venne indicato come attrattore di Lorentz, primo di quella categoria di attrattori complessi che porta ora il nome (D. Ruelle) di attrattori strani o caotici.

La figura 11.8⁽⁵⁾ riporta gli attrattori tridimensionali di E.N. Lorentz (fig. 11.8a), O.E. Rossler (b) e di R.S. Shaw (c), assieme ad alcune traiettorie che, partendo da posizioni iniziali diverse nello spazio delle fasi, si distendono su di essi.

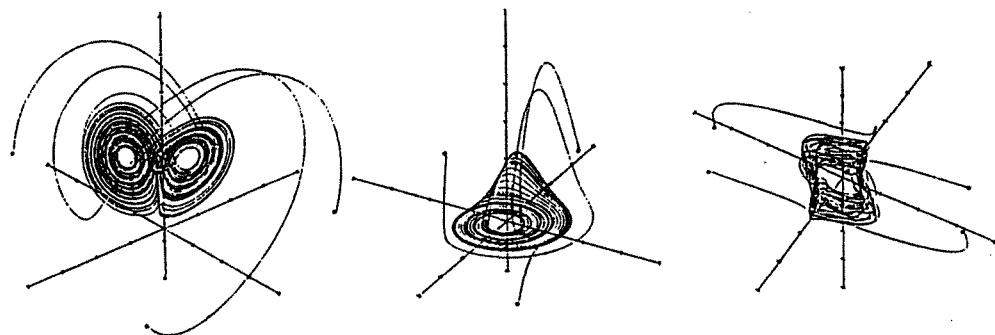


Fig. 11.8

La caratteristica fondamentale del comportamento dei sistemi per cui valgono questi attrattori è quella che le traiettorie che partono da posizioni iniziali molto prossime divergono localmente in maniera molto rapida, esponenziale: ciò produce un allontanamento dei punti rappresentativi degli stati al trascorrere del tempo, pur rimanendo questi punti sull'attrattore (stiramento). Poiché l'attrattore deve restare in una regione finita dello spazio delle fasi nella quale è definito il processo seguito dal sistema, è necessario che la superficie su cui è disposto l'attrattore si ripieghi su se stessa innumerevoli volte: ciò porta di conseguenza che due traiettorie, pur divergendo continuamente e aumentando la loro distanza se questa viene misurata sull'attrattore che si ripiega molteplici volte, possono ritornare vicine nello spazio delle fasi e che il comportamento a lungo termine del sistema non può essere previsto.

⁽⁵⁾ J. Crutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packard, R.S. Shaw, *Le scienze* 38, pag. 10, 1987.

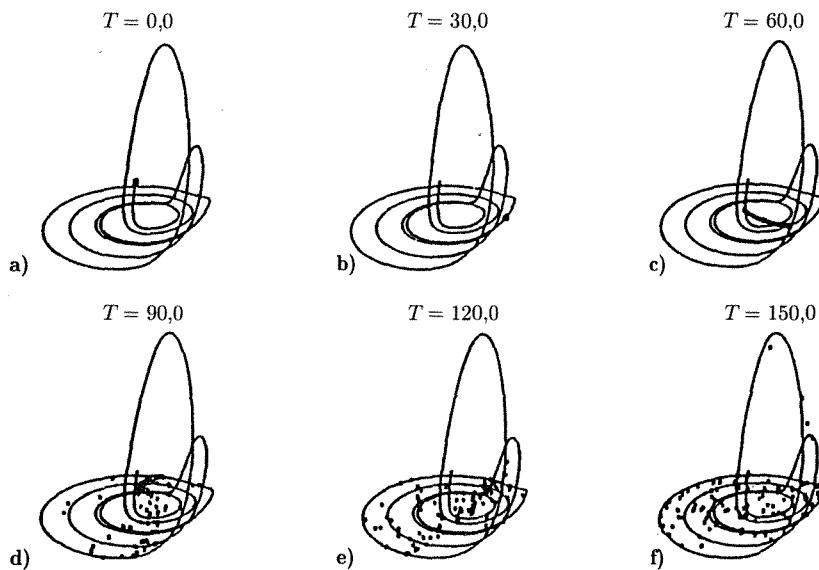


Fig. 11.9

Nella figura 11.9 si prende in considerazione⁽⁶⁾ il caso di un attrattore di Rossler per un sistema retto dalle equazioni

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz . \end{aligned}$$

con le costanti: $a = 0,380$, $b = 0,300$, $c = 4,500$. Si considerino 100 posizioni iniziali del sistema molto prossime fra loro, con distanze reciproche che possono corrispondere ai limiti della precisione di una disposizione sperimentale (0,02 circa). Nella figura 11.9a esse sono contenute in una piccolissima sfera intorno a un punto scelto sull'attrattore nello spazio delle fasi; questo attrattore è rappresentato schematicamente nella figura 11.9a e nelle successive. Calcolando numericamente le traiettorie, nelle figure 11.9b-11.9f vengono indicate le posizioni raggiunte dal sistema lungo ciascuna di esse dopo un numero finito di uguali intervalli temporali ($T = 0, 30, 60, \dots$). Dopo $30T$ le posizioni per le 100 traiettorie sono ancora contenute in una piccola sfera; dopo 60 la sfera si è deformata in una struttura simile a un bastoncino; dopo 90 comincia a manifestarsi una notevole perdita di coerenza per circa la metà delle traiettorie; dopo 150 unità temporali gli stati raggiunti appaiono distribuiti su tutto l'attrattore, mettendo in evidenza la imprevedibilità del comportamento a lungo termine (caos deterministico).

La spiegazione geometrica del caos deterministico sta nelle due operazioni di *stiramento* e *piegatura* nello spazio delle fasi: la prima legata alla divergenza delle traiettorie sull'attrattore e la seconda necessaria a mantenere compatto l'attrattore.

Un paragone abbastanza chiarificatore di quanto accade per le traiettorie è fornito da J. Crutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packard e R.S. Shaw.

*Un attrattore strano
è una traiettoria
che ritorna vicina
a se stessa infinite volte,
senza risovrapporsi*

⁽⁶⁾ G. Nicolis, P. Gaspard, in Atti Simposio IUPAP "Teaching non linear phenomena", Lake Balaton, 1987, a cura di G. Marx, Nat. Center Educ. Tech., Veszprém (Ungheria).

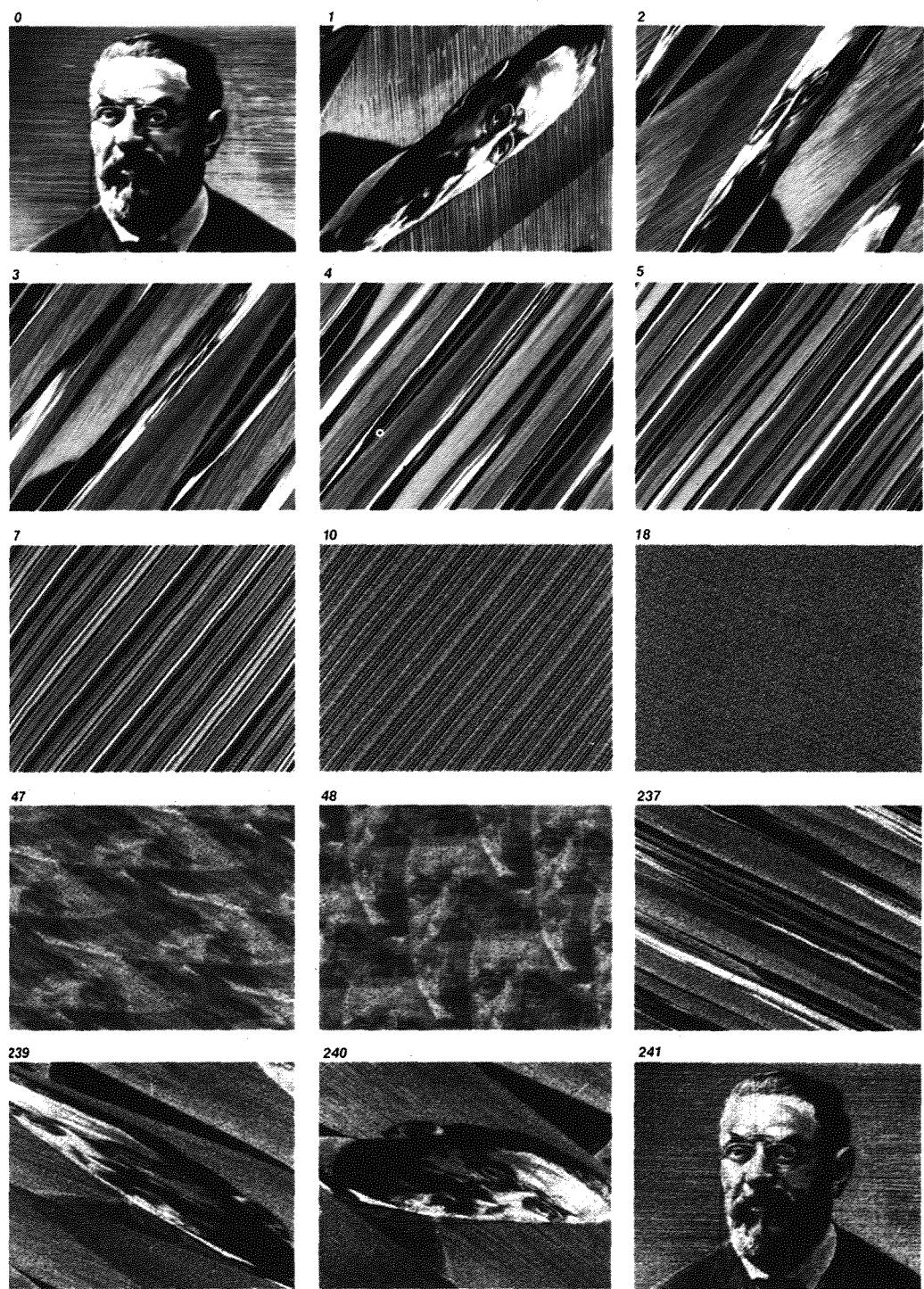


Fig. 11.10 Esperienza didattica presentata da J. Crutchfield.

L'evolversi di traiettorie inizialmente vicine nello spazio delle fasi in corrispondenza a un attrattore caotico è paragonato a quello che accade a particelle inizialmente vicine su un pezzo di pasta che viene manipolato dal fornaio ripetendo numerose volte le due operazioni di stiramento in una direzione fino a raggiungere una certa lunghezza dell'impasto e successivo ripiegamento dell'impasto su se stesso. I risultati si possono rendere sperimentalmente evidenti facendo cadere sull'impasto, all'inizio delle operazioni, una goccia di un colorante, per es. rosso. Dopo il primo stiramento la zona marcata si trova allungata; già dopo qualche decina di operazioni di stiramento e ripiegatura la lunghezza iniziale della zona marcata, nella direzione dello stiramento, può risultare aumentata oltre un milione di volte, il suo spessore è ridotto a dimensioni molecolari e il colore appare diffuso in tutto l'impasto. Le operazioni di stiramento e ripiegatura nello spazio delle fasi possono quindi spiegare la struttura risultante dell'attrattore caotico: lo stiramento ha come conseguenza l'amplificazione delle piccole differenze fra le condizioni iniziali di traiettorie inizialmente vicine, mentre il ripiegamento avvicina fra di loro traiettorie molto lontane conducendo alla imprevedibilità del comportamento a lungo termine, all'annullamento cioè, dei legami fra passato e futuro nella visione classica tradizionale.

Per rendere in certa misura evidenti le conseguenze delle operazioni geometriche di stiramento in una direzione e di ripiegamento di una superficie su se stessa, riportiamo in figura 11.10 un'esperienza didattica presentata da J. Crutchfield e gli altri autori su indicati. Una immagine del matematico Poincaré è stata suddivisa (discretizzata) in un numero limitato di parti (quadro 0), in modo da rendere il sistema trattabile al calcolatore e poterne consentire con una operazione matematica lo stiramento in direzione diagonale e il reinserimento dell'immagine che esce dal riquadro nel lato opposto (1). Il numero su ciascun quadro della figura 11.10 indica il numero di operazioni ripetute: si passa attraverso distribuzioni completamente caotiche e altre ove le traiettorie corrispondenti a punti inizialmente vicini si ritrovano abbastanza prossime (47, 48, 239, 240, 241).

Le operazioni ora illustrate di stiramento e ripiegatura sono ben note in geometria e ripetute molte (infinite) volte conducono alla generazione di forme geometriche a dimensioni non intere: *frattali*.

Gli attrattori caotici sono frattali per i quali vale la caratteristica di autosimiglianza: ciò significa che se si ingrandisce, come con una lente, un attrattore caotico si ritrovano strutture geometriche rassomiglianti su scala sempre più piccola.

La figura 11.11 di M. Hénon⁽⁷⁾ si riferisce a una sezione di Poincaré dell'attrattore caotico di Hénon: la figura riporta le successive iterazioni (fino a 10^5) e mostra negli ingrandimenti successivi delle parti segnate l'apparire di maggiori dettagli in strutture simili.

L'attrattore di Hénon è legato al sistema di relazioni:

$$(9) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= y_n - ax_n^2 + 1 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned}$$

con a e b costanti. Per il calcolo del grafico sono stati posti i valori $a = \frac{7}{5}$ e $b = \frac{3}{10}$. Come punto iniziale è stato preso $x_0 = 0,63135448$ e $y_0 = 0,1894063$.

⁽⁷⁾ M. Hénon, "Comm. Math.", *Physics* 50, pag. 69, 1976.

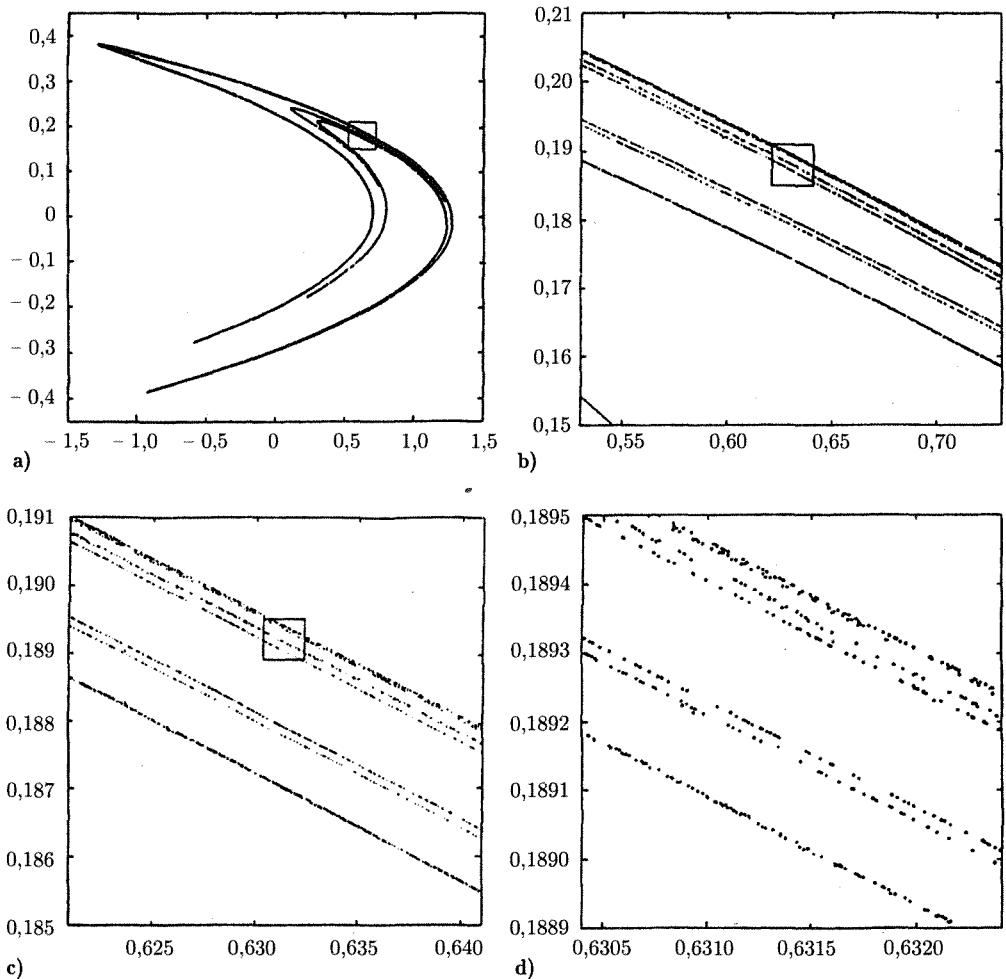


Fig. 11.11

Ritorneremo in seguito a considerare qualche caratteristica di alcune forme frattali (par. 11.16-11.18), per sottolineare come esse si riflettano in proprietà dei sistemi caotici.

Per i sistemi per i quali esiste un attrattore caotico si verifica, come si è detto, una fortissima dipendenza del comportamento a lungo termine dalle condizioni iniziali. Siccome queste ultime nei sistemi reali non possono essere specificate che entro limiti di precisione finiti, cioè lo stato iniziale di una traiettoria nello spazio delle fasi può essere solo indicato come disposto all'interno di un piccolo volume, ne consegue l'impossibilità di prevedere il comportamento a lungo termine del sistema.

La situazione non può essere cambiata da miglioramenti che si può pensare di apportare nello specificare lo stato iniziale. Si noti che tutto ciò viene a verificarsi per imprecisioni sperimentali molto maggiori delle indeterminazioni poste dalle limitazioni di natura quantistica.

Sottolineiamo ancora che *il caos deterministico non è prodotto dall'intervento*, durante il moto, *di forze esterne casuali* (caos stocastico); esso è legato direttamente *alla non linearità* delle equazioni *del moto* e fa parte della dinamica del sistema.

■ 11.5. COESISTENZA DI ATTRATTORI

Un sistema dinamico dissipativo può possedere più attrattori che possono essere raggiunti partendo da diverse regioni dello spazio delle fasi. Essi possono essere dello stesso tipo o di tipi diversi. Come si è già detto, la regione dello spazio delle fasi formata da punti che, considerati ciascuno come stato iniziale del moto del sistema, conducono a traiettorie che tendono verso uno stesso attrattore, costituisce il *bacino di attrazione* di quell'attrattore.

La presenza contemporanea di vari bacini di attrazione conduce naturalmente alla considerazione delle separazioni fra di essi. In genere tali separazioni non hanno una forma geometrica semplice; di solito sono interconnesse e presentano caratteristiche frattali (par. 11.16). Ciò può condurre, nel caso di coinvolgimento contemporaneo di attrattori caotici e non caotici a una distribuzione piuttosto complessa, nella spazio delle fasi, delle regioni che portano a comportamento a lungo termine prevedibile o a comportamento caotico (par. 11.18).

*Le superfici
di separazione
tra bacini di attrazione
possono avere
geometrie complesse,
per es. frattali*

Un particolare processo legato alla presenza di due o più attrattori (per es. cerchi limite) è quello della *isteresi*, dovuto al fatto che il passaggio del sistema da un attrattore all'altro, al variare del parametro di controllo, può non avvenire per lo stesso valore nei due versi (crescendo o diminuendo): se quindi il parametro viene fatto variare ciclicamente si origina il cosiddetto *ciclo di isteresi*, una linea chiusa che racchiude i punti rappresentativi di stati che non possono essere raggiunti dal sistema nella variazione periodica considerata.

■ 11.6. BIFORCAZIONI

Nelle equazioni differenziali che rappresentano la dinamica di un sistema in genere entrano, oltre alle variabili che definiscono lo stato, uno o più parametri (per es.: intensità e frequenza della forza applicata in un oscillatore forzato; valore dell'attrito in un oscillatore smorzato; pressione, numero di Prandtl, numero di Reynolds in problemi di fluidi; e ancora temperatura, differenza di potenziale, intensità delle corrente ecc.). Le considerazioni precedentemente svolte erano riferite a sistemi definiti da valori precisi dei parametri presenti nelle equazioni, parametri di controllo chiamati anche costanti strutturali. Se si varia il valore di un parametro di controllo si passa dalla considerazione di un sistema a quella di un altro il quale può avere caratteristiche diverse, per quanto, per es., riguarda gli attrattori. Diviene allora importante esaminare come gli attrattori cambino nella famiglia di sistemi ottenuta variando il valore di uno o più parametri di controllo. Si noti che questo studio è di grande importanza per il confronto con i risultati sperimentali relativi a un processo, giacché questi vengono in genere ottenuti esaminando il comportamento del sistema al variare di un parametro di controllo.

*La variazione
di un parametro
di controllo del sistema
può mutare l'attrattore,
dando luogo
a biforcazioni
nel comportamento*

Siccome in genere i sistemi corrispondenti a diversi valori di un parametro di controllo possono avere attrattori diversi, in tali casi, variando il parametro, vi deve essere un valore per cui un attrattore appare, scompare o si trasforma in un altro: questo processo di *cambiamento, al variare del parametro di controllo, ha ricevuto il nome di biforcazione e l'insieme dei punti di biforcazione* per una famiglia di sistemi corrispondenti a diversi valori dei parametri, è *chiamato* insieme delle biforcazioni (tale insieme nel

caso di presenza di più parametri appartiene a uno spazio dei parametri a più dimensioni).

Tre sono i tipi di biforcazione osservati: la biforcazione di Hopf, quella al punto sella, e quella con raddoppio del periodo.

La figura 11.12 illustra i tre casi in una proiezione bidimensionale dello spazio degli stati. Nella biforcazione di Hopf si può passare da un attrattore punto fisso a una circonferenza limite (fig. 11.12a), oppure da una circonferenza limite a un toro. Nel secondo tipo di biforcazione (fig. 11.12b) si può passare da una circonferenza limite di certe dimensioni a un'altra cui corrisponde una diversa frequenza oppure direttamente a un attrattore caotico.

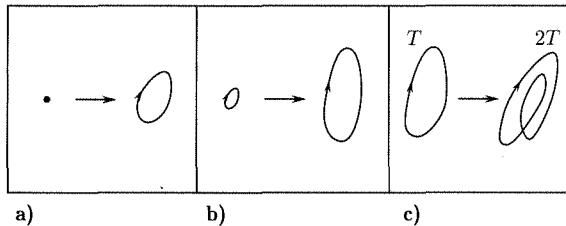


Fig. 11.12

Nel terzo tipo di biforcazione si passa da una circonferenza limite di periodo T a una di periodo $2T$ (fig. 11.12c). Una caratteristica particolare dei sistemi che presentano quest'ultimo tipo di biforcazione è quella di presentare, al variare del parametro di controllo, una cascata di analoghe biforcazioni.

È interessante esaminare il comportamento del sistema al variare del parametro di controllo e in particolare a come si succedano le biforcazioni e si stabilisca il caos deterministico. Si è trovato che ciascun tipo di biforcazioni può fornire da solo una *via al caos deterministico*; peraltro, a volte, si riscontra una presenza contemporanea di più tipi nell'evoluzione verso il caos. Se si considerano vie al caos tramite un solo tipo di biforcazioni, si trova che nel caso di biforcazioni di Hopf al variare del parametro di ordine (μ) si passa (fig. 11.13) dall'attrattore punto fisso al cerchio limite ($\mu = \mu_1$), ai tori a più dimensioni (μ_2, μ_3) e, infine, (μ_c) all'attrattore caotico.

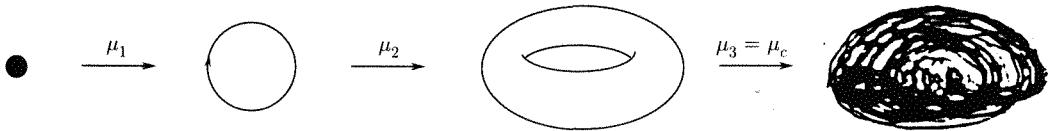


Fig. 11.13

Nel caso di biforcazioni al punto sella si ha una via, detta a intermittenza, in cui per un valore μ_c si passa direttamente dalla circonferenza limite all'attrattore caotico (fig. 11.14). Nel caso delle biforcazioni del terzo tipo (fig. 11.15) si passa attraverso una cascata di raddoppi di periodo all'attrattore caotico. In questa trattazione limitata del caos deterministico, si considereranno essenzialmente sistemi caratterizzati da biforcazioni del terzo tipo e dalla corrispondente via al caos.

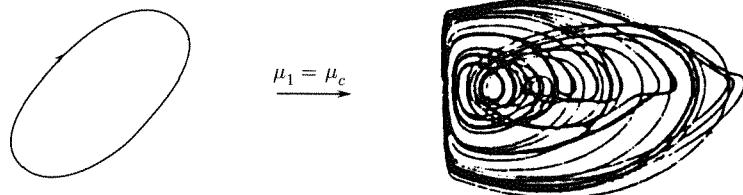


Fig. 11.14

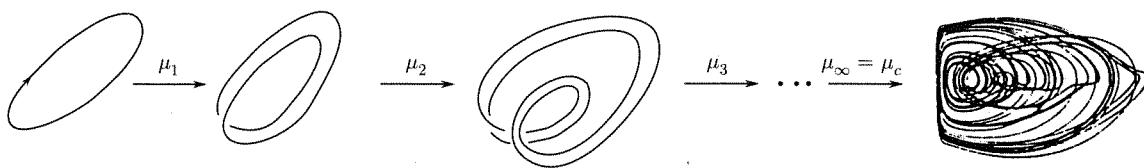


Fig. 11.15

Lo studio della via al caos per un sistema viene effettuato esaminando, con il calcolo o con l'esperimento, il comportamento a lungo termine del sistema (partendo da diverse situazioni iniziali) in funzione dei parametri di controllo; si è così condotti a considerare i cosiddetti diagrammi di biforcazione, nei quali gli attrattori di un sistema sono riportati in funzione dei parametri di controllo. In genere i parametri di controllo sono più di uno, come pure le variabili di stato. Lo studio di questi diagrammi non è semplice e di solito si considerano diagrammi in cui una sola variabile di stato, opportunamente scelta, viene riportata in funzione di un solo parametro di controllo.

Questo diagramma si costruisce allora riportando, in funzione del parametro di controllo, i valori assunti dalla variabile di stato dopo lunghi intervalli di tempo (dopo un numero molto grande di iterazioni) partendo da posizioni iniziali diverse: si rendono così evidenti gli intervalli del parametro di controllo per i quali esistono attrattori, il presentarsi delle biforcazioni e del comportamento caotico (figg. 11.22, 11.31 e 11.43).

Vari diagrammi di biforcazione sono possibili per un sistema con più parametri di controllo ed essi vanno considerati per un completo studio del sistema. Tutto ciò può risultare molto complesso e in genere ci si limita a considerare esclusivamente pochi diagrammi o addirittura uno solo di essi efficacemente individuato in relazione agli aspetti di interesse nel comportamento del sistema. Si vedrà in seguito (par. 11.8) una giustificazione per questa procedura.

■ 11.7. PARABOLA LOGISTICA

Dalle considerazioni svolte in precedenza emerge l'interesse, nello studio di sistemi descritti da equazioni differenziali non lineari di difficile o impossibile soluzione analitica in termini di funzioni semplici, di considerare modelli discontinui retti da relazioni derivate dalle equazioni differenziali suddette, che possano essere trattate con il calcolo numerico per mezzo di iterazioni [par. 11.1, eq. (3)].

Nello spazio delle fasi, al posto di una *traiettoria* continua che rappresenta l'evoluzione del sistema a partire da determinate condizioni iniziali, si considera una successione discreta di posizioni: il calcolo numerico può consentire, di solito senza eccessive difficoltà, di esaminare il comportamento del sistema per lunghi intervalli di tempo.

Dello stesso tipo di queste relazioni per un modello discontinuo sono quelle già viste che rappresentano in una *sezione di Poincaré* il succedersi delle intersezioni di una traiettoria con la sezione stessa (*mappe di Poincaré*).

Una tipica relazione differenza nel caso unidimensionale può porsi nella forma

$$(10) \quad x_{n+1} = f_\mu(x_n)$$

ove l'indice μ sta a indicare un parametro di controllo, x_n è l' n -esimo valore assunto da x in un intervallo reale che può ricondursi all'intervallo 0-1. L'interazione può

essere legata a un intervallo caratteristico nel processo in esame. La funzione $f_\mu(x)$, nei casi che qui interessano, è una funzione non lineare e la successione dei valori che si ottiene è chiamata mappa dell'intervallo 0-1 su se stesso, giacché genera x_{n+1} da x_n sempre in 0-1. La (10) può anche essere usata per rappresentare la proiezione unidimensionale di una traiettoria multidimensionale nello spazio delle fasi o di una sezione di Poincaré.

Si vogliono ora considerare alcune mappe unidimensionali non lineari relativamente semplici dal punto di vista matematico; in particolare, esse consentono di stabilire con relativa facilità le principali caratteristiche del passaggio al caos deterministico per via di biforcazioni con raddoppio di periodo. Tali mappe inoltre, come meglio vedremo in seguito, possono essere usate per modelli evolutivi di sistemi fisici a due o più dimensioni configurazionali, ove può presentarsi il caos deterministico.

La più semplice mappa unidimensionale non lineare è descritta dalla equazione

$$(11) \quad x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$$

definita nel campo delle x tra 0 e 1. μ è il parametro di controllo che può assumere valori tra 0 e 1, così che tutti i valori che possono essere generati per iterazione restano nel campo 0-1. Questa mappa è chiamata parabola logistica, a causa della funzione quadratica

$$(12) \quad y = f(x) = 4\mu x(1 - x)$$

che caratterizza la (11), come l'equazione differenziale da cui deriva

$$\frac{dx}{dt} = 4\mu x(1 - x).$$

Questa mappa fu considerata nel 1845 da P.F. Verhulst nel modello sviluppato per la crescita di una popolazione in un ambiente limitato. Essa è stata considerata in dettaglio da M.J. Feigenbaum (8), il quale ne ha studiato, mediante l'uso del calcolatore, il comportamento su lunghi intervalli di tempo per vari μ , riuscendo a raggiungere conclusioni di importanza fondamentale per gli argomenti che sono qui di interesse.

Nella figura 11.16 è riportato il grafico della parabola (12) al variare di x nell'intervallo 0-1. Il massimo, pari al valore del parametro μ , è raggiunto per $x = \frac{1}{2}$. Il valore cui tende dopo numerose iterazioni la mappa (11), a partire da varie posizioni iniziali, può essere determinato facilmente con un calcolatore; in questo caso peraltro i risultati possono facilmente ottenersi con semplici costruzioni geometriche.

Innanzitutto va notato come vi siano due posizioni iniziali per le quali il processo di iterazione rigenera continuamente gli stessi punti (*punti fissi*, x_1^* , x_2^*). Tali posizioni soddisfano la condizione

$$(13) \quad x^* = 4\mu x^*(1 - x^*)$$

e quindi sono

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{4\mu}.$$

Consideriamo dapprima il caso in cui il parametro di controllo abbia il valore $\mu = \frac{1}{2}$ (fig. 11.17). I due punti fissi sono $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \frac{1}{2}$. Per determinare il risultato della iterazione partendo da un diverso valore iniziale della variabile, x_0 , si tracci a partire dall'origine la retta a 45° , per ogni punto della quale il valore dell'ordinata è pari a quello dell'ascissa. Il risultato della prima iterazione

$$x_1 = 4\mu x_0(1 - x_0)$$

si ottiene innalzando dal punto $(x_0, 0)$ la verticale fino a incontrare la parabola; per ottenere il secondo valore dell'iterazione (x_2) bisogna usare x_1 come ascissa. Il risultato si può ottenere con la costruzione geometrica consistente nel tracciare dal punto (x_0, x_1) l'orizzontale fino a incontrare la retta a 45° e di qui la verticale fino alla parabola.

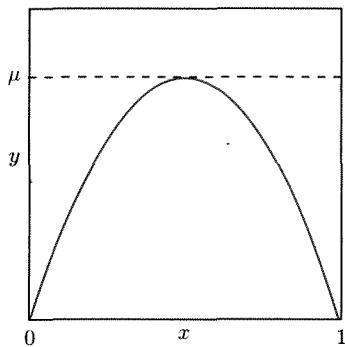


Fig. 11.16

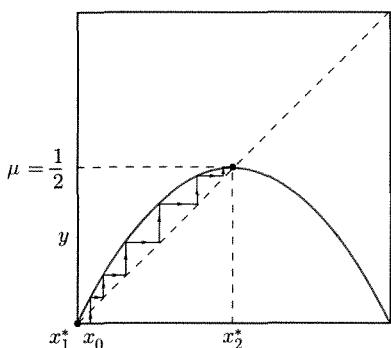


Fig. 11.17

(8) M.J. Feigenbaum, *Journal of Stat. Physics* 19, pag. 25, 1978, e 21, pag. 669, 1979, *Los Alamos Science*, summer, 1980.

I risultati delle successive iterazioni sono ottenibili facilmente ripetendo lo stesso procedimento geometrico e mostrano che la mappa converge verso il punto $x_2^* = \frac{1}{2}$. Lo stesso risultato si ottiene per qualsiasi x_0 : il punto fisso $x_2^* = \frac{1}{2}$ è quindi un attrattore (di periodo 1).

Si noti che tale punto fisso è *stabile* nel senso che una piccola perturbazione dello stato ($x = \frac{1}{2}$) riporta la soluzione finale per il sistema, applicando l'iterazione, verso $x_2^* = \frac{1}{2}$. È possibile con la stessa procedura riscontrare che l'altro punto fisso ($x_1^* = 0$) è *instabile*: una piccola perturbazione dello stesso ($x = 0$) allontana l'iterazione dal punto $x = 0$ e porta la soluzione finale della mappa verso $x_2^* = \frac{1}{2}$. La ragione della instabilità nel punto fisso $x_1^* = 0$ è geometricamente rappresentata dal fatto che la pendenza della tangente alla parabola per $x = 0$ è maggiore di quella (pari a 1) della retta a 45° e ciò si rispecchia, nella costruzione delle iterazioni, nel fatto che una piccola deviazione da $x = 0$ allontana sempre più l'iterazione da questo punto fisso.

La figura 11.18 si riferisce al caso $\mu = 0,7$. L'intersezione della retta a 45° con la parabola si ha per $x_2^* = 0,643$ (in tale punto la inclinazione della tangente alla parabola è circa 41° , cioè inferiore a 45°). A tale punto (*fisso, stabile*) tendono le serie di iterazioni da qualunque posizione iniziale si parta; il punto è ancora un attrattore (di periodo 1) con il bacino di attrazione 0-1.

Di notevole interesse è il caso in cui $\mu = \frac{3}{4} = M_1$ o leggermente superiore a tale valore, quando cioè entrambi i punti fissi x_1^* e x_2^* sono divenuti instabili: si ottiene il risultato inatteso del *raddoppio del periodo*. La figura 11.19 ($\mu = 0,785$) mostra come, partendo da un generico x_0 , i risultati delle iterazioni dopo essersi avvicinati al punto instabile x_2^* se ne allontanano e finiscono per oscillare fra i due valori x_3^* e x_4^* : si realizza con questi due punti un attrattore di periodo due, cioè un ciclo stabile di ordine 2 verso il quale convergono le mappe che partono da un generico x_0 nel campo 0-1.

Per comprendere questo risultato e individuare facilmente i valori di x_3^* e x_4^* si osservi che, poiché è

$$f(x_3^*) = x_4^* \quad \text{e} \quad f(x_4^*) = x_3^*,$$

se si considerano le seconde iterazioni

$$g(x) = f[f(x)]$$

si ha

$$g(x_3^*) = x_3^* \quad \text{e} \quad g(x_4^*) = x_4^*$$

cioè x_3^* e x_4^* sono punti fissi della seconda iterazione, $g(x)$. Questa funzione è riportata nella parte inferiore della figura 11.19 assieme alla retta a 45° per l'origine. I punti fissi anche in questo caso sono determinati dai punti intersezione della retta con la $g(x)$: essi sono quattro. Due di essi, x_1^* e x_2^* , corrispondono ai punti fissi della $f(x)$ e restano tali dopo un qualsiasi numero di iterazioni: essi peraltro sono instabili poiché l'inclinazione della tangente alla $g(x)$ è superiore a 45° . Gli altri due punti fissi corrispondono a x_3^* e x_4^* : essi sono stabili, perché l'inclinazione della tangente è inferiore a 45° : si può dimostrare che il valore dell'inclinazione è lo stesso per entrambi i punti.

Per $\mu = \frac{3}{4}$ si assiste quindi al passaggio da un attrattore di periodo 1 a un attrattore di periodo 2 e al posto del valore unico x_2^* per l'attrattore, si ha una continua oscillazione fra x_3^* e x_4^* . Con l'aumentare del parametro di controllo, i valori di x^* per i due punti fissi stabili si allontanano fra loro e contemporaneamente aumenta la pendenza della tangente alla $g(x)$ in loro corrispondenza, pur mantenendo lo stesso valore per entrambi i punti. Al momento in cui questa pendenza comune raggiunge i 45° si presenta una nuova discontinuità: x_3^* e x_4^* divengono instabili e ciascuno di essi produce un ciclo 2 nei riguardi di $g(x)$, cioè un nuovo raddoppio di periodo: ciò corrisponde a un attrattore di periodo 4 rispetto a $f(x)$. Il valore di μ corrispondente è $M_2 = 0,86237$.

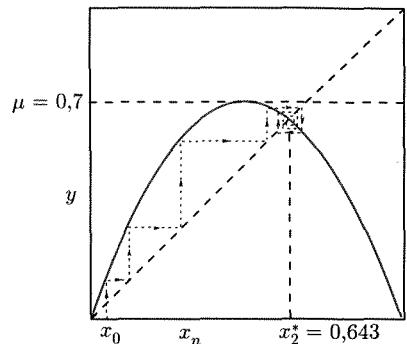


Fig. 11.18

Gli attrattori si duplicano al crescere di un parametro di controllo sopra determinati valori: in corrispondenza il sistema presenta una periodicità dimezzata a ogni duplicazione

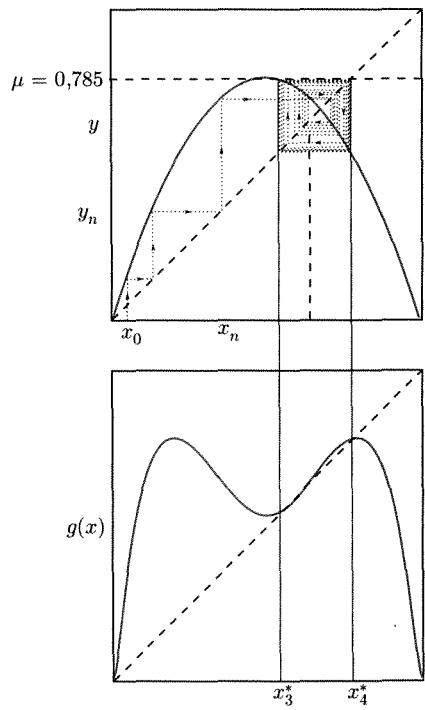


Fig. 11.19

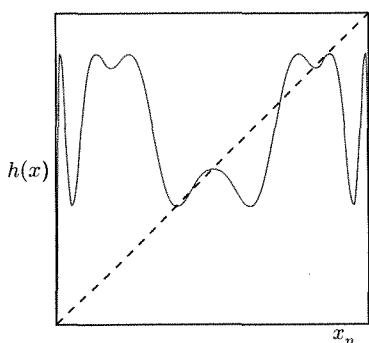


Fig. 11.20

La distribuzione degli attrattori si replica su scale diverse dando luogo a figure autosimili

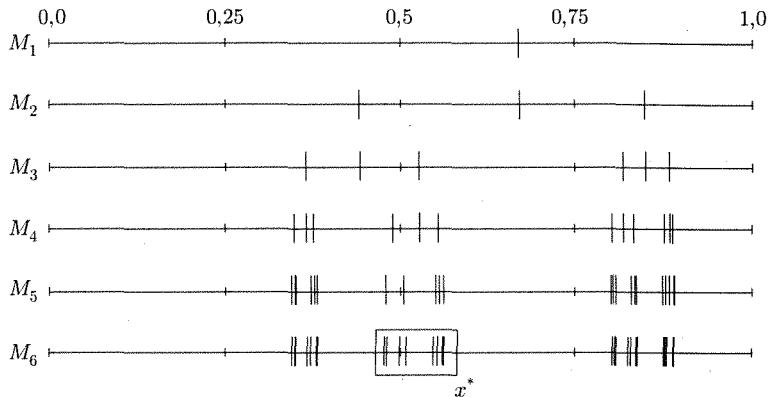


Fig. 11.21

La figura 11.20 riporta, per $\mu = 0,87$, la funzione

$$h(x) = g[g(x)] = f\{f(f[f(x)])\}$$

ottenuta per iterazione di $g(x)$, e la retta a 45° per l'origine: sono evidenti le otto intersezioni corrispondenti a quattro punti fissi [anche per $g(x)$], divenuti tutti instabili, e quattro stabili.

Aumentando ancora μ , il processo si ripete dando luogo a una cascata di biforcazioni per raddoppio di periodo.

La figura 11.21⁽⁹⁾ fornisce per i primi sei valori di μ (M_1, \dots, M_6) per cui si verifica il raddoppio i valori x^* caratteristici nelle discontinuità: nella scala della figura alcuni di questi punti non appaiono distinti. È evidente tuttavia una regolarità nel processo di generazione dei nuovi attrattori rivelato da una riproducibilità geometrica delle distribuzioni dei punti con riduzione di scala passando di generazione: si osservi per es. la distribuzione dei punti racchiusa in un rettangolo per M_6 e come essa riproduca in scala ridotta l'intera distribuzione dei punti per M_4 .

La figura 11.22 riporta il diagramma di biforcazione relativo alla $f(x)$: è evidente come l'attrattore, per piccoli valori del parametro di controllo, è un punto

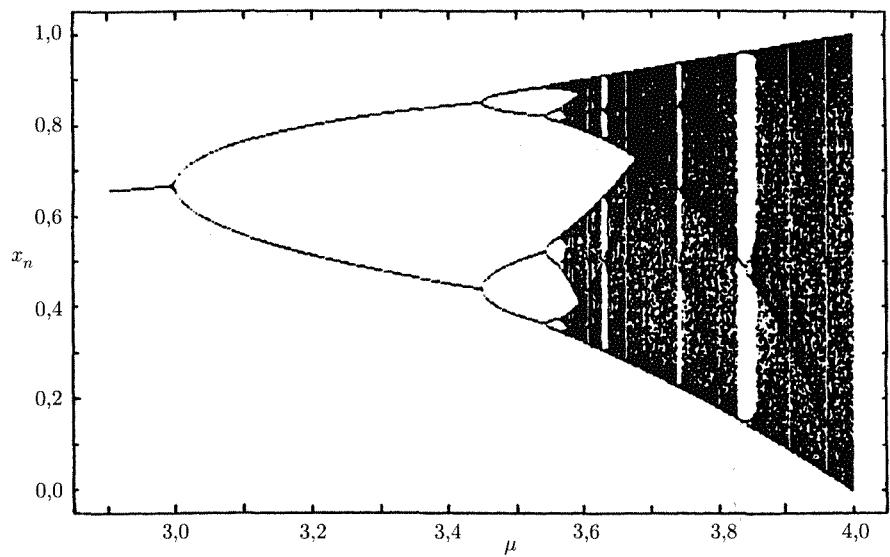


Fig. 11.22

⁽⁹⁾ D.R. Hofstadter, *Le Scienze* 28, pag. 96, 1982.

fisso (periodo 1) e poi, al crescere di μ , si trasformi per successive biforazioni in attrattori di periodo 2, 4, 8 ... fino a raggiungere per M_c un periodo di 2^∞ : ha inizio la regione caotica: per alcuni valori delle condizioni iniziali le mappe possono non convergere su alcun attrattore finito, sono cioè aperiodiche, oppure rimanere periodiche ma con un periodo molto lungo di difficile identificazione pur rimanendo nell'intervallo 0-1.

Inoltre mappe che si originano da stati iniziali vicini possono allontanarsi rapidamente: ciò conduce alla imprevedibilità del loro comportamento a lungo termine. È questo insieme di comportamenti complessi che viene indicato, come già detto, con il termine di caos deterministico. Questa regione nel diagramma di biforazioni è caratterizzata da un gran numero di punti che rappresentano iterazioni elevate della $f(x)$ a partire da posizioni iniziali diverse.

■ 11.8. UNIVERSALITÀ NEL COMPORTAMENTO DI SISTEMI NON LINEARI CON BIFORCAZIONI A RADDOPPIO DI PERIODO

Lo studio della mappa della parabola logistica fatta da M.J. Feigenbaum (1978) con l'impiego di calcolatori abbastanza semplici ha condotto alla individuazione di alcune regolarità nella via al caos attraverso il raddoppio del periodo che hanno carattere di universalità, di validità cioè anche per mappe derivate da varie altre equazioni differenziali non lineari.

La prima regolarità riscontrata si riferisce ai valori del parametro di controllo μ per i quali nella mappa della parabola logistica si verificano le biforazioni (M_n per il passaggio dal periodo 2^n al periodo 2^{n+1}). Se si considera il rapporto

$$(14) \quad \delta_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{M_{n+1} - M_n}$$

il valore di δ_n al crescere di n si avvicina sempre più al valore (numero di Feigenbaum)

$$\delta = 4,6692016\dots$$

Il comportamento dei valori del parametro di controllo ha caratteristiche generali per un numero esteso di equazioni non lineari

Ciò equivale a dire che i valori di M costituiscono una serie che converge rapidamente (geometricamente per grandi valori di n) verso un valore critico M_∞ e si ha

$$(15) \quad M_\infty - M_n \sim \delta^{-n}.$$

Tale valore critico, in corrispondenza al quale il comportamento del sistema diviene aperiodico, risulta

$$M_\infty = 0,892486418\dots$$

La seconda regolarità scoperta da Feigenbaum si riferisce al legame di simiglianza, già illustrato dalla figura 11.21, fra le disposizioni dei punti x^ di biforcazione per i successivi M . Se si considerano l'insieme dei valori x^* per il generico M_n e quello per M_{n+1} , si vede che ogni x^* per M_n genera due valori (gemelli) per M_{n+1} : si trova che la distanza fra questi due gemelli è α volte più piccola della distanza che separa in M_n il genitore x^* dall'altro punto (a esso gemello) prodotto nella generazione precedente (che origina M_n). Il valore di α al crescere di n si avvicina al valore calcolato*

$$\alpha = 2,502907875\dots$$

Esso fissa la relazione di scala per x^* nel passaggio da M_n a M_{n+1} .

È importante notare che il processo di raddoppiamento del periodo non si verifica solo per la mappa unidimensionale parabolica. Esso è stato riscontrato anche per funzioni generatrici non lineari di tipo trascendente come

$$(16) \quad x_{n+1} = \mu \operatorname{sen} \pi x_n$$

e Feigenbaum è riuscito, ancora con l'aiuto del calcolatore, a mostrare come anche in questo caso si verifichi una cascata di raddoppi del periodo e si ritrovi lo stesso valore per δ (numero di Feigenbaum).

Più in generale Feigenbaum ha stabilito che per il comportamento a lungo termine del sistema nella descrizione mediante una relazione a differenza non lineare (mappa), quello che realmente importa è la natura del picco di $f(x)$ al centro del campo di definizione delle x e l'andamento di $f(x)$ nelle immediate vicinanze. Per molte funzioni $f(x)$ tale picco si può approssimare con una parabola (massimo quadratico): ciò vale chiaramente per una funzione sinusoidale, per una circonferenza, per una ellisse. Più in generale, qualsiasi funzione non lineare nell'intorno di un punto che corrisponda a condizioni sperimentali può essere sviluppata in serie di potenze, e ci si può fermare, in prima approssimazione, al termine quadratico. Perciò un modello quadratico può essere usato (localmente) quasi sempre.

Di conseguenza il processo del raddoppio del periodo si presenta per numerosi sistemi il cui comportamento può essere descritto da mappe unidimensionali non lineari di vario tipo e in tutti questi casi sono valide le regolarità riscontrate per la mappa quadratica.

A questo punto va rilevata l'importanza di una ricerca condotta da W. Francheschini (1979) nello studio di fluidi idrodinamici e del passaggio alla turbolenza, mediante un sistema di cinque equazioni differenziali accoppiate del primo ordine con le quali veniva sostituita l'equazione fondamentale di Navier-Stokes. Studiando con il calcolatore il comportamento di tale sistema di equazioni e le mappe di Poincaré egli notò che nel raddoppio del periodo si presentavano gli stessi valori per δ e α trovati da Feigenbaum per la mappa parabolica.

J.P. Eckman, P. Collet e H. Kock hanno in seguito dimostrato come nel comportamento a lungo termine di sistemi dissipativi multidimensionali forzati, dove le iterazioni da considerare sono multidimensionali, tutte le dimensioni tranne una tendono a scomparire. Di conseguenza, il comportamento su tempi sufficientemente lunghi finisce per mostrare le caratteristiche del caso unidimensionale. Questo risultato si può spiegare pensando che nei sistemi non lineari dissipativi a n dimensioni, ove si consideri nello spazio delle fasi un piccolo volume a n dimensioni e lo si segua nell'evoluzione temporale, la contrazione (sistema dissipativo) avviene in maniera diversa per le varie dimensioni: vi è sempre una direzione di contrazione più lenta sicché dopo un certo numero di iterazioni il processo in esame diviene praticamente unidimensionale. Questo risultato si può anche esprimere dicendo che la mappa di Poincaré (in generale a $n - 1$ dimensioni) finisce per condurre a strutture che assomigliano sempre più a tratti di linee rette.

Queste considerazioni spiegano come nei sistemi dissipativi che presentano il raddoppio del periodo, la dimensionalità divenga irrilevante e risulti confermata la universalità dei risultati di Feigenbaum.

In questi sistemi dissipativi multidimensionali la descrizione del comportamento a lungo termine può farsi quindi in una dimensione, che può essere quella della linea cui tende la mappa di Poincaré e che, in maniera equivalente, può essere considerata come la proiezione della sezione di Poincaré (a $n - 1$ dimensioni) in una opportuna direzione. Si osservi ancora che, come già rilevato, la raccolta dei dati sperimentali è in genere condotta mediante l'osservazione di un numero molto limitato di grandezze di stato (spesso solo una) al variare di un solo parametro di controllo; il successo della sperimentazione è legato alle scelte fatte circa variabili e parametri osservati, per cogliere le caratteristiche essenziali del comportamento a lungo termine del sistema.

■ 11.9. DIVERGENZA DELLE ORBITE. ESPOVENTI DI LYAPUNOV

La considerazione di una mappa unidimensionale, $x_{n+1} = f(x_n)$, consente di introdurre facilmente un parametro che viene usato per esprimere la dipendenza delle orbite dalle condizioni iniziali, nella regione caotica.

Se si considerano due condizioni iniziali del sistema unidimensionale corrispondenti a valori della variabile di stato che differiscono per una quantità piccola ε , la divergenza delle orbite (separazione fra gli stati raggiunti nelle mappe) dopo n iterazioni $\varepsilon(n)$ può porsi approssimativamente

$$(17) \quad \varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n}.$$

L'esponente λ prende il nome di esponente di Lyapunov; esso viene preso a caratterizzare mediamente l'allontanamento delle orbite. Se λ è negativo, traiettorie inizialmente poco separate convergono e il moto non è caotico; se λ è positivo, le orbite divergono e il moto diviene caotico. L'esponente consente quindi di giudicare rapidamente il tipo di evoluzione a lungo termine delle orbite.

Nel caso della mappa unidimensionale, la differenza fra le iterazioni di ordine n , (f^n) , per i due stati iniziali separati di ε , si pone nella forma

$$f^n(x + \varepsilon) - f^n(x) \approx \varepsilon e^{n\lambda}$$

e quindi

$$\ln \left[\frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right] = n\lambda.$$

Essendo ε molto piccolo, si ha

$$(18) \quad \lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx} \right|.$$

La derivata della iterazione n -esima può calcolarsi con la formula

$$(f^n(x_0))' = f'(x_0)f'(x_1) \dots f'(x_{n-1}).$$

Si ottiene quindi

$$(19) \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Tale relazione mostra che l'*esponente di Lyapunov fornisce il valore medio lungo tutta l'orbita dello stiramento per iterazione*.

Nel caso di mappe a più dimensioni vi sono esponenti di Lyapunov per ogni dimensione.

L'esponente di Lyapunov definisce il comportamento a lungo termine dell'evoluzione del sistema non lineare

■ 11.10. RICOSTRUZIONE DI UN ATTRATTORE

Prima di considerare alcuni casi di caos deterministico in sistemi meccanici non conservativi e, in particolare, il loro studio sperimentale, si accennerà alle procedure che possono essere usate per giungere a informazioni, sia pure approssimative, sulle caratteristiche dell'attrattore strano del sistema.

Anche per un sistema con uno spazio delle fasi a più dimensioni, le informazioni sperimentali sul comportamento, come già si è detto, derivano dai dati sulle variazioni nel tempo di una sola variabile corrispondenti a valori fissati per i parametri di controllo: ciò corrisponde alla proiezione unidimensionale della traiettoria nello spazio delle fasi. Abbiamo già visto come ciò possa essere utile per avere informazioni sul comportamento a lungo termine, ma non è sufficiente per una conoscenza, sia pure approssimata, dell'attrattore.

È stato sviluppato, peraltro, un metodo per la ricostruzione approssimata dell'attrattore che si basa sull'osservazione che in un sistema a più dimensioni una variabile di stato interagisce con le altre variabili e quindi le sue variazioni risentono in qualche modo del comportamento delle altre variabili e pertanto la determinazione delle sue variazioni per un intervallo di tempo sufficientemente lungo contiene informazioni sul comportamento di tutte le variabili di stato. Un esempio semplice di quanto ora detto si ricava considerando un sistema unidimensionale ove le due grandezze di stato sono la posizione (x) e la velocità (\dot{x}); la conoscenza di $x(t)$ rende possibile la determinazione di $\dot{x}(t)$ mediante l'operazione di derivazione e viceversa la conoscenza di $\dot{x}(t)$ dà precise informazioni su $x(t)$ mediante l'operazione di integrazione.

*Metodi rappresentativi
per lo studio
degli attrattori*

Il metodo, usato empiricamente per la prima volta da N.H. Packard e altri (1980) e poi formulato in termini matematici da F. Takens (1981), consiste, partendo dalla conoscenza dei valori assunti da una variabile, $x(t)$, a intervalli t_s , nel costruire uno spazio a un numero di dimensioni n pari alla dimensionalità del sistema (nello spazio delle fasi), riportando su ciascun asse i valori rispettivamente assunti da

$$(20) \quad x(kt_s), \quad x(kt_s + T), \quad x(kt_s + 2T), \dots \quad x(kt_s + (n-1)T)$$

con $k = 1, 2, 3 \dots$ e T , in genere, un multiplo di t_s .

È possibile mostrare che tale spazio delle fasi soddisfa la teoria dei sistemi dinamici, purché le diverse funzioni (20) siano scelte in modo che risultino linearmente indipendenti fra loro. Ciò porta di conseguenza che t_s e T debbano essere scelti in modo opportuno.

Una tale procedura consente di avere grafici che rappresentano in qualche modo curve simili alle traiettorie del sistema nello spazio delle fasi: è possibile verificare una tale asserzione per valori dei parametri di controllo che conducono a traiettorie nel regime caotico chiuse (cerchi limite). Quando si ottiene l'analogo delle traiettorie, questi grafici forniscono precise indicazioni sull'attrattore caotico e possono essere presi per rappresentarlo.

Vedremo in seguito alcune applicazioni di questo metodo.

In figura 11.23 (J. Holzfuss) è riportata la ricostruzione dell'attrattore per il caso di una bolla gassosa in oscillazione forzata (par. 11.13). Il grafico è ottenuto calcolando il raggio della bolla mediante l'equazione che regge il sistema, in uno spazio tridimensionale

$$R(kt_s), \quad R(kt_s + T), \quad R(kt_s + 2T).$$

In realtà, per una migliore visualizzazione dei risultati nel grafico sono state usate al posto dei raggi R le coordinate $R^* = \exp(2R/R_n)$ essendo R_n il raggio della bolla a riposo. Sono stati usati quattro valori diversi per T : a) $T_0/44$; b) $T_0/4$; c) $T_0/2$; d) T_0 , essendo T_0 il periodo del campo sonoro applicato. Il raggio della bolla a riposo è di $100 \mu\text{m}$; l'ampiezza e la frequenza del campo applicato sono 310 kPa e $22,9 \text{ kHz}$. La figura mostra come la scelta di T influenzi la forma della ricostruzione. La scelta più adatta è $T = T_0/4$.

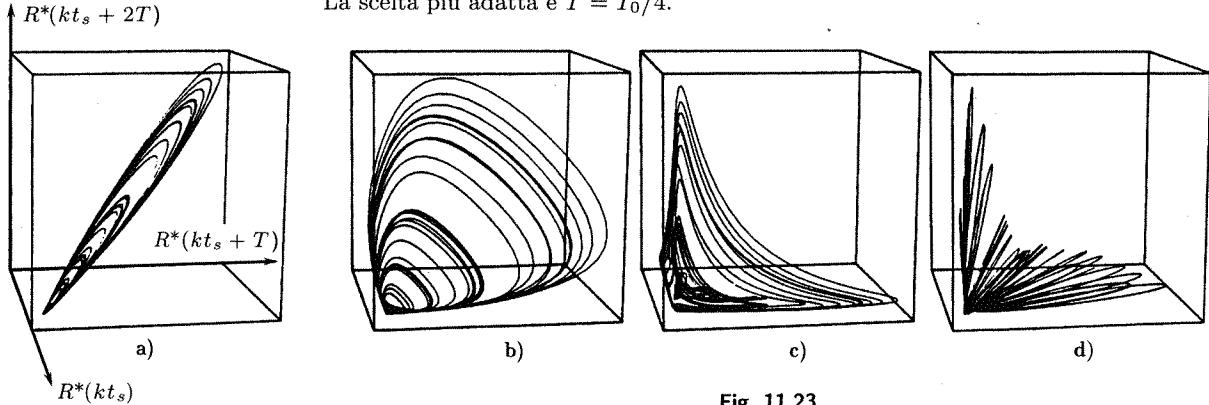


Fig. 11.23

■ 11.11. IL PENDOLO FORZATO

Si presentano ora alcuni esempi, trattati con il calcolo numerico e a volte con il confronto sperimentale, che dimostrano come sia frequente, anche per sistemi dinamici semplici, riscontrare il comportamento caotico per valori possibili dei parametri di controllo.

Un primo esempio è il pendolo forzato: esso è stato studiato da vari autori e noi faremo uso dei risultati ottenuti con programmi di calcolo da G.L. Baker e J.P. Gollup (10).

Abbiamo già esaminato nel par. 11.2 il comportamento nello spazio delle fasi del pendolo semplice smorzato e la posizione dell'attrattore, di coordinate $(0, 0)$. Nel caso che al pendolo sia anche applicata dall'esterno una sollecitazione armonica (frequenza angolare ω_d) l'equazione differenziale del secondo ordine può porsi nella forma

$$(21) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = a \cos(\omega_d t)$$

essendo b il parametro che caratterizza lo smorzamento, a quello che caratterizza l'intensità della forza applicata.

Il sistema di equazioni differenziali del primo ordine, corrispondente alla (21), diviene

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -b\omega - \sin \theta + a \cos \phi \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega_d. \end{aligned}$$

Lo spazio delle fasi è tridimensionale. Siccome la variabile ϕ per qualsiasi traiettoria nello spazio delle fasi varia con periodicità 2π , molto spesso si considera al posto della traiettoria tridimensionale la sua proiezione nel piano θ, ω .

La figura 11.24 riporta una curva di tale tipo, calcolata nel caso $a = 0,5$ e $b = 0,5$. La sezione di Poincaré è costituita da un punto, dato che la traiettoria nello spazio delle fasi tridimensionale passa per posizioni equivalenti per variazioni di ϕ pari a multipli di 2π e si può scegliere la sezione di Poincaré normale all'asse delle ϕ : naturalmente la posizione del punto intersezione dipende dalla scelta del piano $\phi = \text{cost.}$

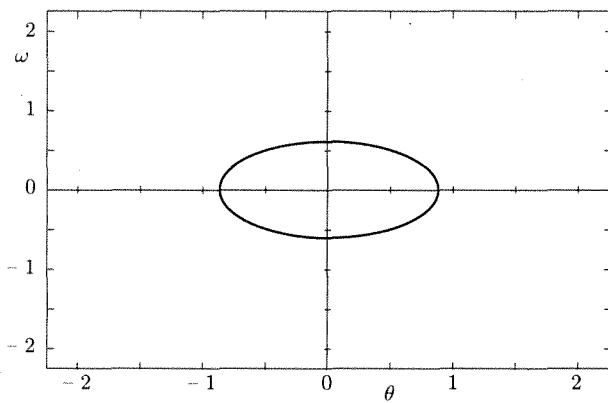


Fig. 11.24

(10) G.L. Baker, J.P. Gollup, *Chaotic dynamics*, Cambridge University Press, 1990.

Le traiettorie per il pendolo forzato si trovano in uno spazio delle fasi tridimensionale e questa è la condizione minima perché il sistema possa presentare per alcuni valori dei parametri di controllo, comportamento caotico. I parametri di controllo sono tre: a , b , ω_d ; lo spazio dei parametri è tridimensionale. Naturalmente è difficile studiare il sistema nell'intero spazio dei parametri e ci si limiterà a considerare casi in cui si fissano due parametri e si varia il terzo; in particolare è stato mostrato (Gwinne Westervelt, 1985) che una buona esemplificazione del comportamento complesso si può avere fissando i valori $b = \frac{1}{2}$, $\omega_d = \frac{2}{3}$ (essendo la frequenza angolare delle piccole oscillazioni del pendolo non smorzato nella nostra rappresentazione $\omega_0 = 1$) e facendo variare l'intensità della forza applicata a fra i valori 0,5 e 1,5.

Qui riportiamo i risultati dello studio condotto da Baker e Gollub con opportuni programmi al calcolatore, considerando l'andamento delle traiettorie a lungo termine, dopo cioè che eventuali transienti abbiano cessato di avere influenza.

La figura 11.25 si riferisce al caso $b = 0,5$, $a = 0,9$ e riporta la traiettoria periodica nello spazio delle fasi tridimensionale (a), la sua proiezione (b) nel piano ω , θ , e una sezione di Poincaré (c, il punto è ingrandito per una più semplice visione).

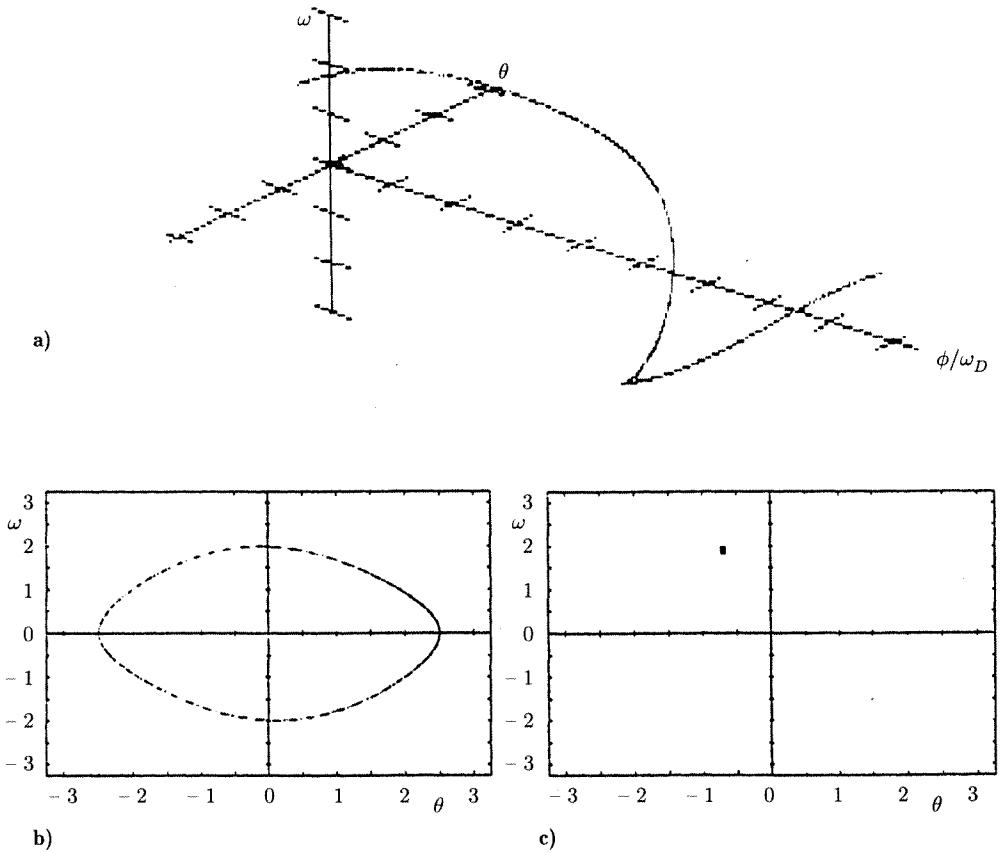


Fig. 11.25

La figura 11.26 riporta risultati analoghi per $b = 0,5$, $a = 1,07$: è evidente il verificarsi del raddoppio del periodo.

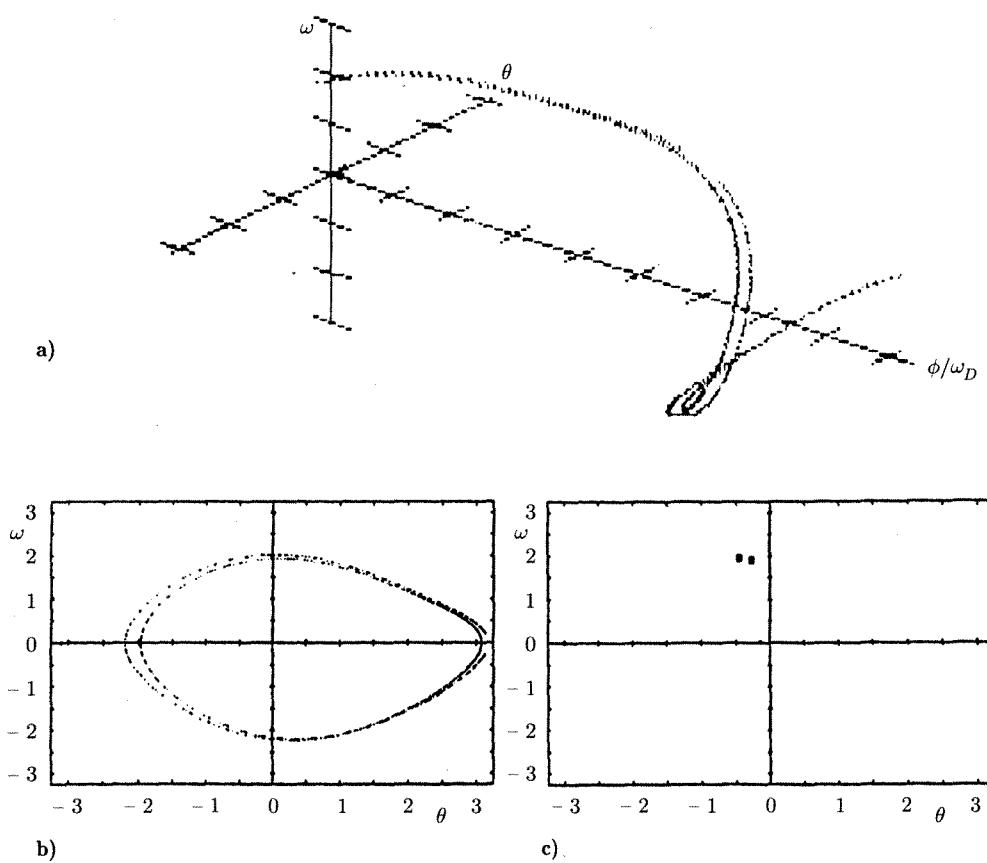


Fig. 11.26

Il raddoppio del periodo si nota in figura 11.26, relativa al caso $b = 0,5$, $a = 1,07$. La figura 11.27 riporta la proiezione della traiettoria e la sezione di Poincaré per il caso $b = 0,5$, $a = 1,15$: il sistema è caotico.

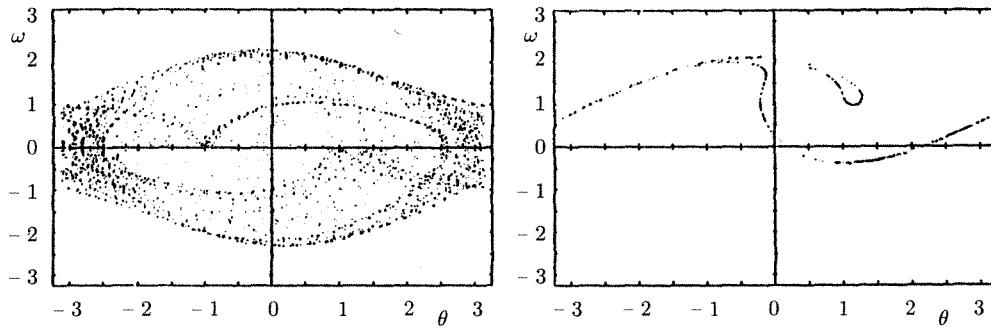


Fig. 11.27

La figura 11.28 si riferisce a $b = 0,5$ e $a = 1,35$ quando le traiettorie sono di nuovo periodiche; la figura 11.29 ottenuta per $b = 0,5$ e $a = 1,45$ mostra un nuovo raddoppio di periodo, mentre la figura 11.30, ($b = 0,5$, $a = 1,50$) mostra un nuovo comportamento caotico.

I risultati sono riuniti nel diagramma di biforcazione della figura 11.31, dove in (b) è dato un ingrandimento di una parte della (a).

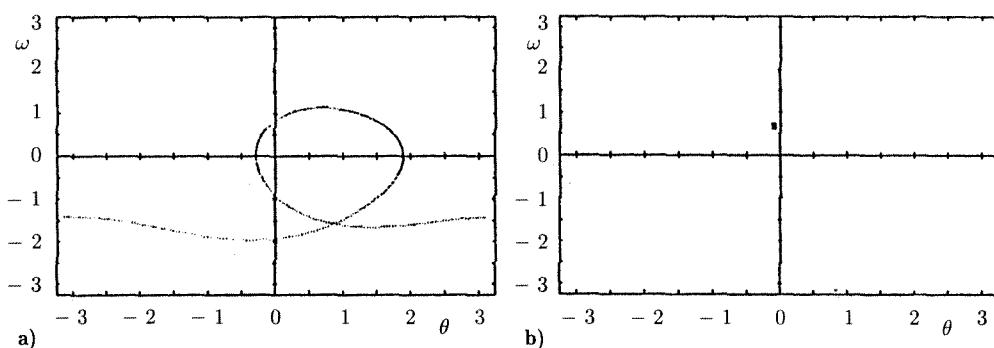


Fig. 11.28

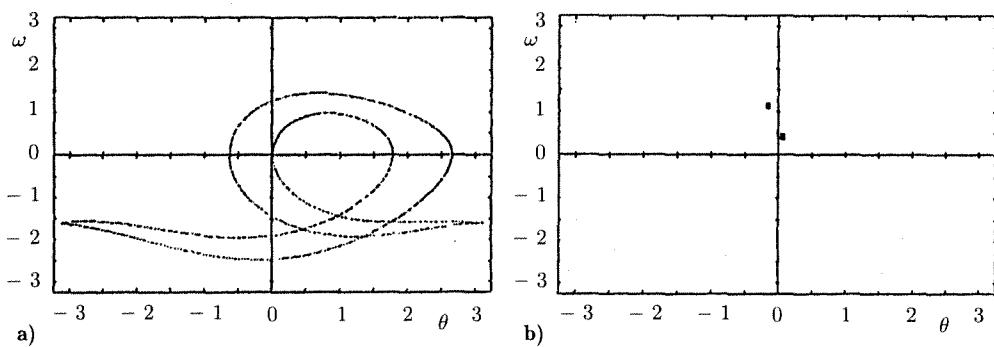


Fig. 11.29

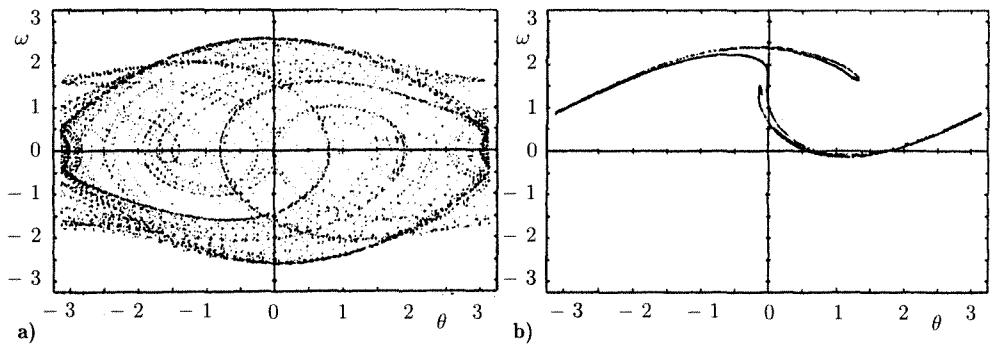


Fig. 11.30

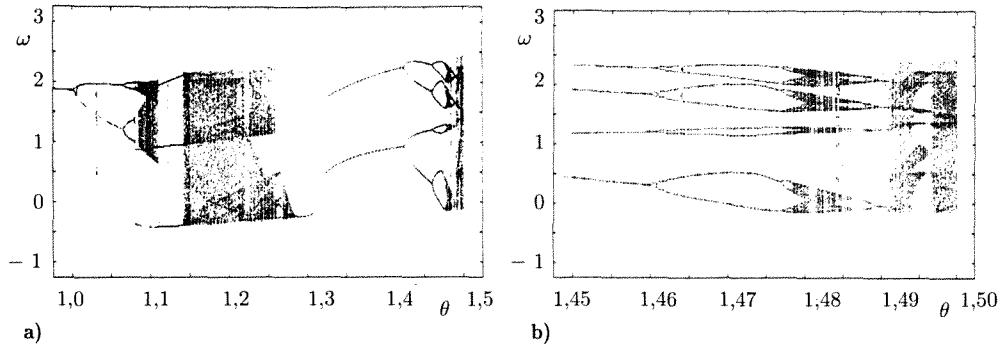


Fig. 11.31

■ 11.12. OSCILLATORI NON LINEARI FORZATI

Dopo il caso del pendolo semplice forzato si vuole ora considerare il caso di altri oscillatori forzati.

L'equazione di un oscillatore *lineare* forzato può porsi nella forma generale

$$(23) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + dx = a \cos(\omega_d t)$$

ove b caratterizza lo smorzamento delle oscillazioni, mentre $d = \omega_0^2 > 0$, essendo ω_0 la frequenza angolare delle oscillazioni libere non smorzate, caratterizza la forza elastica di richiamo; a e ω_d l'ampiezza e la frequenza angolare della forza esterna. La figura 11.32 riporta l'energia potenziale U ; essa è una parabola data da

$$(24) \quad U(x) = \frac{d}{2}x^2$$

corrispondente a una forza (elastica) di richiamo

$$(25) \quad k(x) = -\frac{dU}{dx} = -dx.$$

In realtà, come varie volte è stato detto, di solito la forza di richiamo, $k(x)$, è una funzione non lineare, anche se per piccole oscillazioni possa ritenersi approssimativamente tale. Si è così portati a studiare il comportamento di oscillatori forzati non lineari.

Si hanno vari tipi di oscillatori non lineari secondo l'espressione della forza $k(x)$ o, quello che è lo stesso, la forma della curva dell'energia potenziale in funzione di x .

Un oscillatore molto studiato corrisponde al modello di Duffing, retto dall'equazione differenziale

$$(26) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + dx + cx^3 = a \cos \omega_d t$$

essendo la forza di richiamo

$$(27) \quad k(x) = -dx - cx^3$$

e

$$(28) \quad U(x) = \frac{d}{2}x^2 + \frac{c}{4}x^4.$$

Le forme delle funzioni $U(x)$ e $k(x)$ dipendono dalle costanti d e c . Nella figura 11.32b è indicato il caso in cui entrambe le costanti siano positive: la $U(x)$ è una funzione simmetrica rispetto a x .

Un caso di energia potenziale asimmetrica, corrispondente a una forza che mostra caratteristiche diverse secondo il segno della x (per es. contrazione o dilatazione del sistema) è quello che corrisponde all'energia potenziale di Toda (fig. 11.32c):

$$(29) \quad U(x) = \exp(x) - x - 1$$

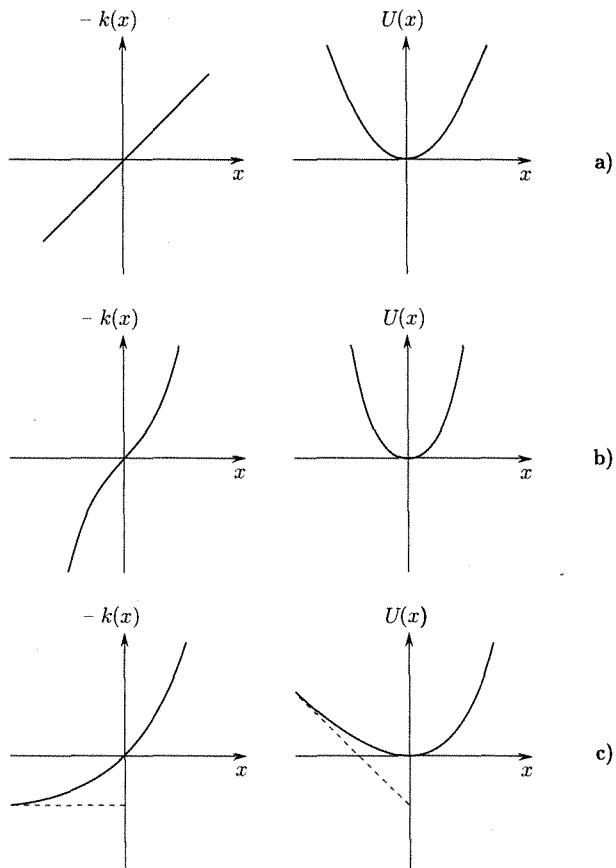


Fig. 11.32

Oscillatore
di Duffing
con potenziale
simmetrico

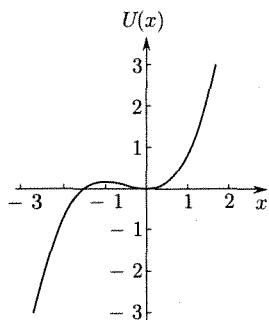


Fig. 11.33

cioè

$$(30) \quad k(x) = -[\exp(x) - 1].$$

In tal caso l'equazione dell'oscillatore forzato diviene

$$(31) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + [\exp(x) - 1] = a \cos \omega_d t.$$

Un altro oscillatore forzato molto studiato è quello di Helmholtz cui corrisponde ancora una energia potenziale asimmetrica

$$(32) \quad U(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

La curva della U , al crescere delle ascisse negative, va verso $-\infty$ dopo aver presentato un massimo per $x = -1$ (fig. 11.33). La corrispondente equazione differenziale è

$$(33) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + x + x^2 = a \cos \omega_d t.$$

L'equazione differenziale del secondo ordine per ciascuno di questi oscillatori può porsi sotto forma di un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine

$$(34) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) + a \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \omega_d. \end{aligned}$$

Oscillatore forzato di Helmholtz con potenziale asimmetrico

Lo spazio delle fasi è a 3 dimensioni e, per quanto si è detto, è possibile che il sistema mostri un comportamento caotico per opportuni valori dei parametri di controllo.

Si può studiare con metodi di calcolo numerico ciascuno di questi sistemi dinamici nel comportamento a lungo termine. A volte è possibile uno studio sperimentale: un metodo usato, in qualche caso, è quello di realizzare circuiti elettrici il cui comportamento è retto dalle stesse equazioni

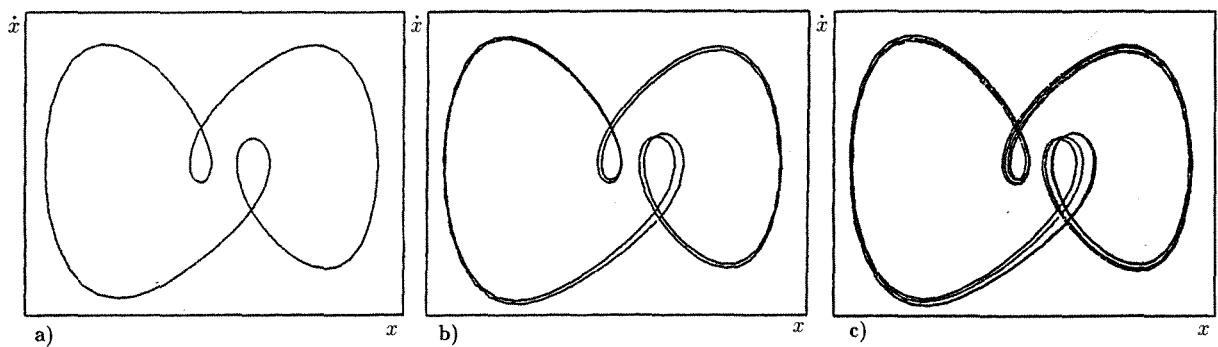


Fig. 11.34

differenziali stabiliti per gli oscillatori meccanici; i circuiti elettrici si prestano a una più facile e precisa osservazione in laboratorio, al variare dei parametri di controllo, di quanto non si prestino i sistemi meccanici.

L'oscillatore forzato di Duffing mostra il processo di raddoppiamento del periodo nella via al caos deterministico. La figura 11.34 riporta, ad es., nella proiezione nel piano \dot{x} - x le orbite stabili corrispondenti ai cicli di periodo 1 (fig. 11.34a), 2 (b), 4 (c) calcolate al variare del parametro b che rappresenta lo smorzamento, avendo fissato costanti gli altri parametri nella (26). La figura 11.35 riporta la sezione di Poincaré dell'attrattore caotico.

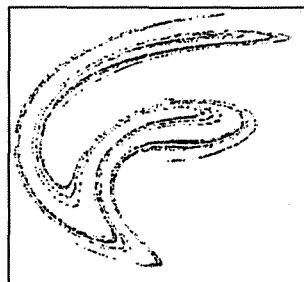


Fig. 11.35

Una delle prime conferme sperimentali della validità dei calcoli di Feigenbaum (par. 11.7 e 11.8) è venuta dallo studio (P.S. Lindsay, 1981)⁽¹¹⁾ di un circuito elettrico molto semplice che è l'analogo dell'oscillatore forzato di Toda. Il circuito (fig. 11.36) è formato da tre elementi in serie: una induttanza L , una resistenza R e un condensatore C ed è alimentato da un generatore di forza elettromotrice sinusoidale. L'elemento non lineare è costituito dalla capacità C del condensatore, la quale dipende dalla differenza di potenziale U ai suoi capi: è stato usato un diodo *varactor* per il quale

$$C(U) = \frac{C_0}{\left(1 + \frac{U}{\varphi}\right)^\gamma}.$$

Nell'esperienza i valori usati erano: $C_0 = 81,8 \text{ pF}$, $\varphi = 0,6 \text{ V}$, $\gamma = 0,44$.

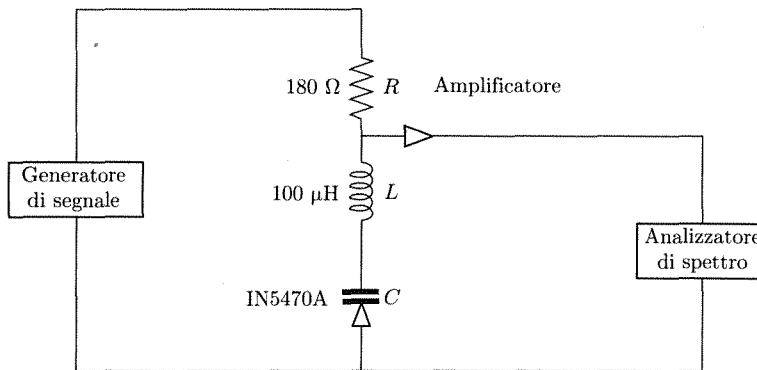


Fig. 11.36

L'equazione differenziale per questo circuito è analoga a quella (31) per l'oscillatore di Toda: l'energia localizzata nell'induttanza corrisponde all'energia cinetica legata alla massa in moto nel sistema meccanico, l'energia nel condensatore è l'analogo dell'energia potenziale nell'oscillatore; la resistenza è responsabile della dissipazione di energia e dello smorzamento delle oscillazioni.

L'osservazione sperimentale nella disposizione usata da Lindsay è fatta con un dispositivo che consente di analizzare la corrente nel circuito al variare del valore della differenza di potenziale (parametro di controllo) applicata al circuito, mentre la sua frequenza è tenuta costante (1,78 MHz). Il dispositivo sperimentale (analizzatore di spettro) consente di esaminare le frequenze presenti nella corrente che passa nel circuito e di determinare l'ampiezza di ciascuna componente.

Per valori molto bassi della differenza di potenziale applicata al circuito si riscontra esclusivamente la presenza della frequenza del generatore come avviene in un circuito lineare; al suo crescere, invece, si presentano dapprima le ben note manifestazioni della non linearità; appaiono, cioè, nella risposta, accanto alla frequenza fondamentale ν_1 , componenti a frequenza multipla (armoniche, $2\nu_1$, $3\nu_1$...). Successivamente, a partire da un certo valore del potenziale applicato (nel caso dell'esperienza, 1,9 V) appare la prima subarmonica ($\nu_1/2$), cioè avviene il primo raddoppio da cui segue la cascata verso il caos. La figura 11.37 (Lindsay) mostra gli spettri ottenuti nei primi tre raddoppi quando appaiono le frequenze $\nu_1/2$ (fig. 11.37a), $\nu_1/4$ e $\nu_1/8$.

La figura 11.38 mostra la distribuzione di ampiezza nello spettro in corrispondenza al caos: essa è ben diversa da quella piatta del cosiddetto rumore bianco (stocastico).

Oscillatore elettrico
di Toda

⁽¹¹⁾ P.S. Lindsay, *Phys. Rev. Letters* 47, pag. 1349, 1981.

I valori per δ_n calcolati dai dati sperimentali per il parametro di controllo in corrispondenza ai raddoppi sono risultati al crescere di n , pari a $4,4 \pm 0,1$; $4,5 \pm 0,6$, in buon accordo con il valore universale della costante di Feigenbaum, 4,67.

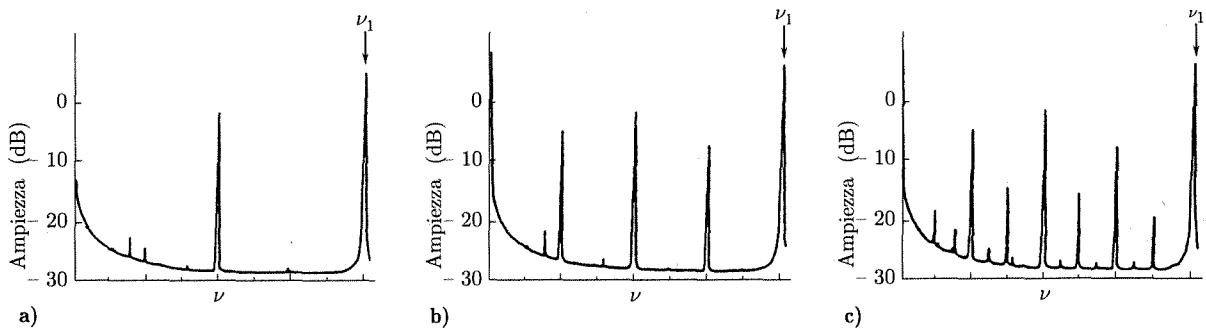


Fig. 11.37

Continuando ad aumentare il valore della differenza di potenziale oltre quello per cui si instaura il caos, riappare la periodicità delle traiettorie e la figura 11.39 mostra uno spettro contenente la frequenza $\nu_1/5$; si osserva in seguito un secondo intervallo di caos (fig. 11.40), cui succede un intervallo periodico nel quale si rivela la frequenza $\nu_1/3$ (fig. 11.41).

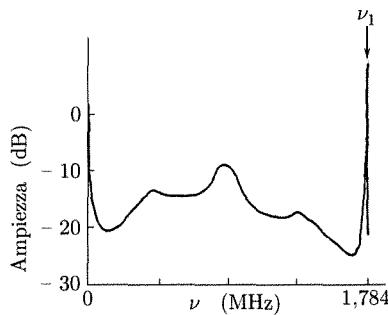


Fig. 11.38

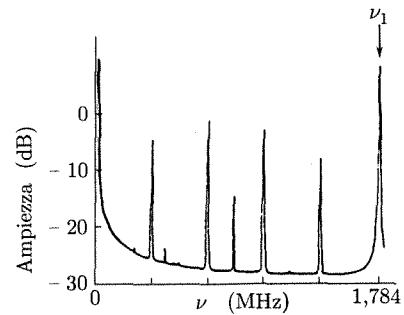


Fig. 11.39

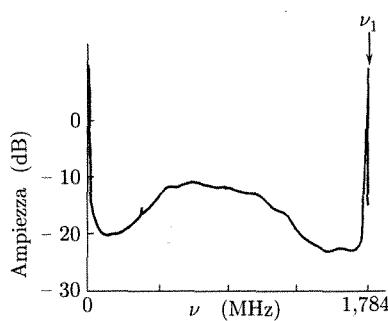


Fig. 11.40

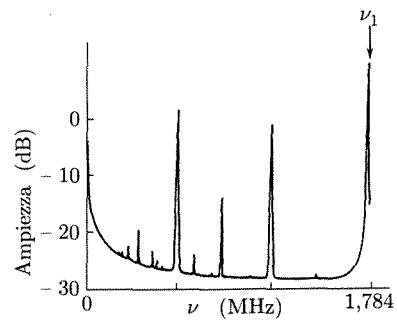


Fig. 11.41

■ 11.13. BOLLA OSCILLANTE IN UN LIQUIDO

In questo paragrafo è descritta una ricerca sperimentale condotta da W. Lauterborn e U. Parlitz (1988)⁽¹²⁾ su un sistema costituito da una bolla gassosa di forma sferica, di raggio R , in un liquido, sottoposta a una sollecitazione meccanica sinusoidale prodotta da un'onda sonora. Il problema ha interesse nello studio della propagazione di onde sonore in un liquido contenente inclusioni gassose.

L'equazione differenziale che descrive il sistema è del secondo ordine, non lineare

$$(35) \quad \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \dot{R}^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}}{2c}\right) = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{\rho c} \frac{d}{dt}(RP)$$

essendo

$$P(R, \dot{R}, t) = P_i(R) - 2 \frac{\sigma}{R} + 4\eta \left(\frac{\dot{R}}{R}\right) - P_{\text{stat}} + P_0 - P_s \sin(2\pi\nu t)$$

e

$$P_i(R) = \left(P_{\text{stat}} - P_v + \frac{2\sigma}{R_n}\right) \left(\frac{R_n}{R}\right)^{3k}.$$

Inoltre $R(t)$ è il raggio della bolla al tempo t , R_n il suo valore prima dell'eccitazione, ν è la frequenza, P_s l'ampiezza del campo sonoro applicato, $P_{\text{stat}} = 100$ kPa è la pressione statica, pari a quella atmosferica, $P_v = 2,33$ kPa è la tensione di vapore, $\sigma = 0,0725$ N/m è la tensione superficiale, $\rho = 998$ kg/m³ è la densità del liquido, $\eta = 0,001$ Ns/m³ il coefficiente di viscosità, $c = 1.500$ m/s la velocità del suono, $k = \frac{4}{3}$ è l'esponente politropico per il gas nella bolla.

I parametri di controllo sono l'ampiezza del campo sonoro di eccitazione e la sua frequenza. Un esempio della via al caos per raddoppio del periodo è mostrato nelle colonne della figura 11.42 che si riferiscono a una bolla con un diametro iniziale $R_n = 10$ μm. L'ampiezza del campo sonoro è pari a 90 kPa (0,9 bar). L'altro parametro di controllo, la frequenza, è stata ridotta per cinque passi successivi da 207 kHz a 197, 193, 192,5, 190 kHz procedendo nelle colonne dall'alto verso il basso. Le colonne riportano rispettivamente (da sinistra a destra) la variazione temporale del raggio della bolla R/R_n , la proiezione sul piano raggio-velocità (R, U) delle traiettorie nello spazio delle fasi, la sezione di Poincaré e lo spettro di potenza. Nei diagrammi delle prime due colonne sono stati marcati gli istanti corrispondenti a una certa fase del campo sonoro di eccitazione.

In corrispondenza alla prima linea ($\nu = 207$ kHz) il processo è periodico con il periodo dell'eccitazione; i punti marcati nel diagramma temporale si presentano allo stesso valore per R/R_n a ogni periodo; l'oscillazione ha, accanto alla frequenza fondamentale, armoniche generate dalla non linearità; la proiezione della traiettoria nello spazio delle fasi è chiusa; nella sezione di Poincaré si ha un solo punto; nello spettro si ritrova la presenza della frequenza fondamentale e, nel campo di frequenze esaminato, la prima armonica.

Nella seconda linea ($\nu = 197$ kHz) è avvenuta la prima biforcazione con raddoppio di periodo. Nel diagramma temporale i punti di riferimento si alternano fra due valori di R/R_n , cioè la periodicità è ora caratterizzata da un periodo doppio del periodo di eccitazione; ciò si rispecchia anche nella proiezione della traiettoria nello spazio delle fasi che questa volta è costituito da una curva chiusa con due posizioni diverse dei punti di riferimento; la sezione di Poincaré ha due punti; lo

*La bolla di cavitazione
come oscillatore
non lineare*

⁽¹²⁾ W. Lauterborn, U. Parlitz, *Journal Acoust. Soc. Am.* 84, pag. 1975, 1988.

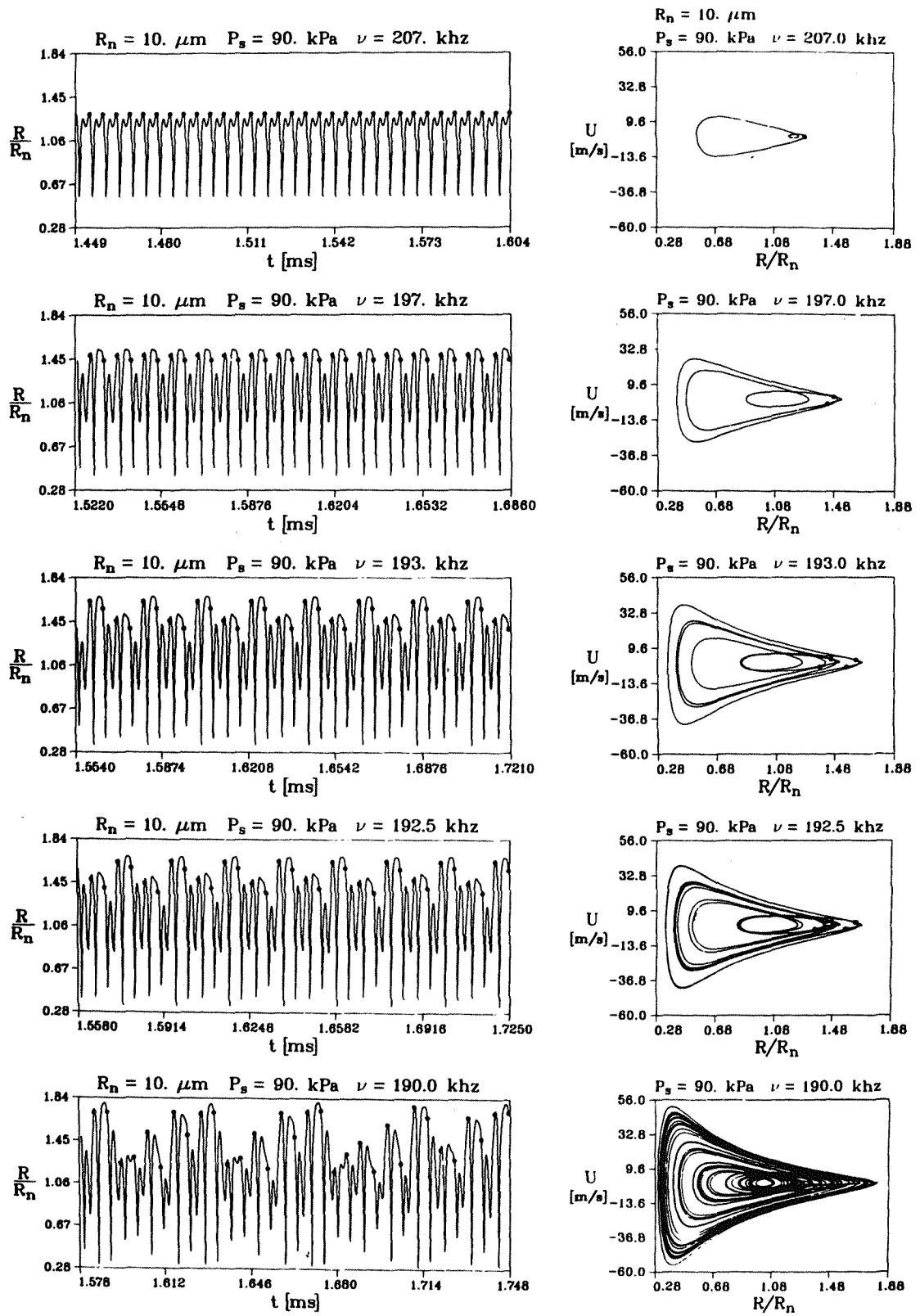


Fig. 11.42

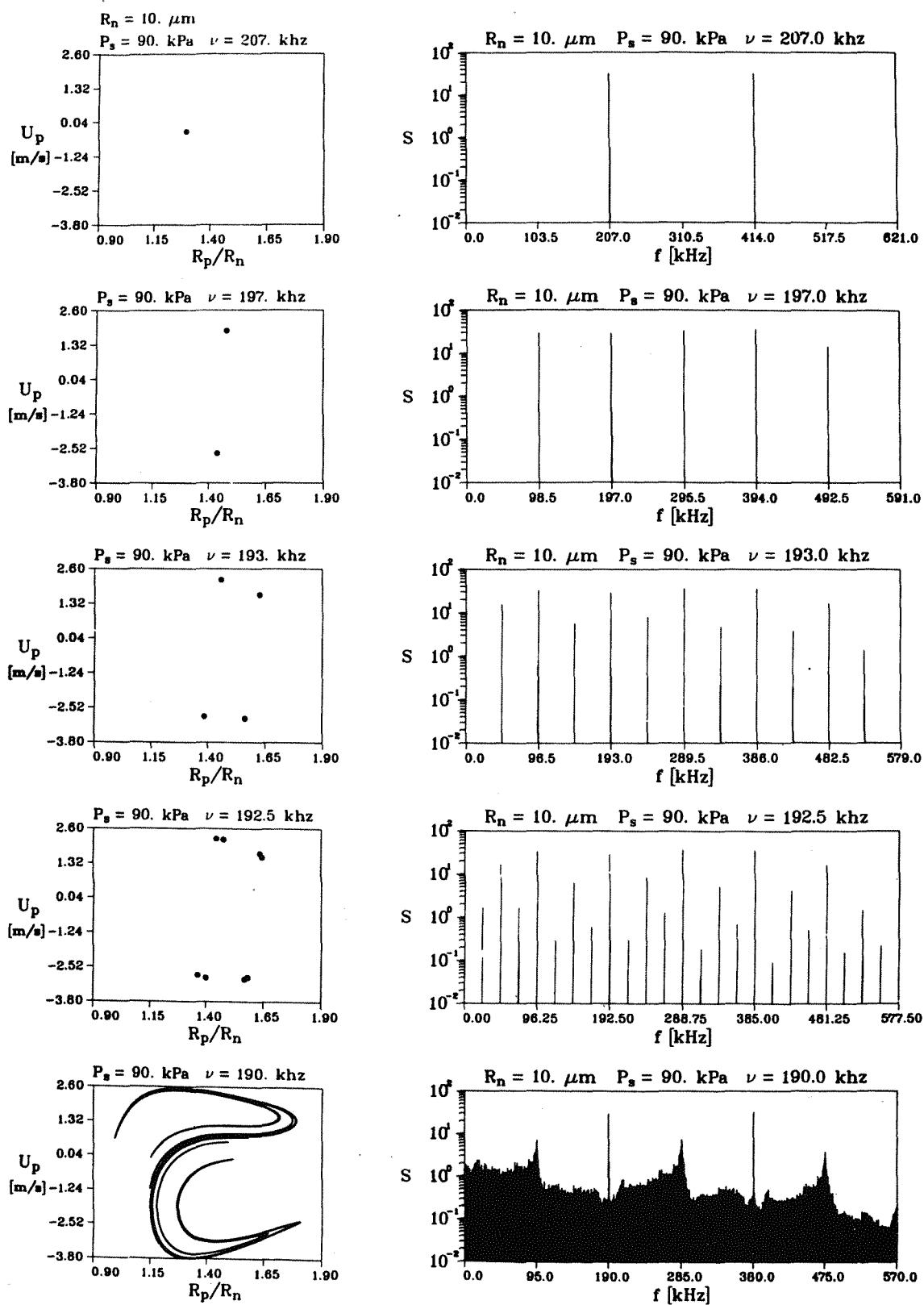


Fig. 11.42 (segue)

spettro mostra accanto alla frequenza fondamentale, la frequenza $\nu/2$ e le sue armoniche. Il processo di raddoppio si riscontra ancora nelle altre due linee (frequenze di eccitazione 193 e 192,5 kHz) ove compaiono le frequenze $\nu/4$ e $\nu/8$. L'ultima linea corrisponde all'osservazione del comportamento caotico.

La figura 11.23, già riportata, considera la ricostruzione dell'attrattore caotico per un sistema di questo tipo. La figura 11.43 riporta invece un diagramma di biforcazione per una bolla avente $R_n = 10 \mu\text{m}$ esposta a un campo sonoro la cui ampiezza è di 275 Pa: esso mostra, al variare della frequenza, la via verso il caos deterministico tramite raddoppi di periodo e l'uscita dalla regione di caos.

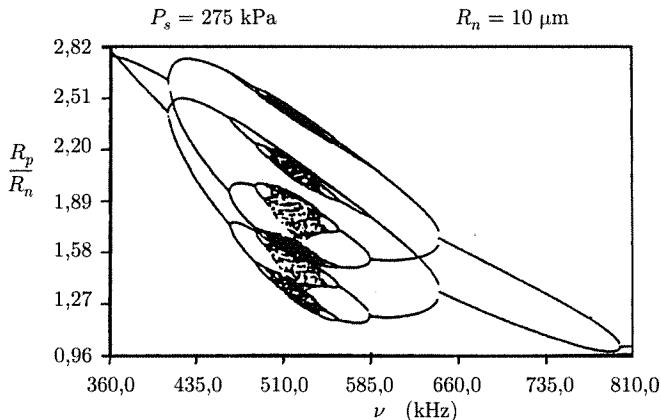


Fig. 11.43

11.14. SISTEMI FLUIDODINAMICI

Molto spesso i sistemi dinamici fluidi hanno caratteristiche non lineari. Il loro studio effettuato con l'impiego dei moderni mezzi di calcolo e con specifiche indagini sperimentali, pur essendo finora in genere limitato a problemi in cui interviene un numero ristretto di gradi di libertà, sta aprendo nuove vie per la comprensione del comportamento di sistemi con elevato numero di gradi di libertà che sono sempre stati all'attenzione dei ricercatori, ma la cui complessità ha reso difficile una trattazione soddisfacente ed esauriente: si pensi all'instaurarsi del moto turbolento e alle sue caratteristiche o ai campi della climatologia e alle possibilità di formulare previsioni meteorologiche.

L'equazione fondamentale della fluidodinamica classica per un fluido viscoso è l'equazione di Navier-Stokes che esprime la conservazione della massa e i trasferimenti della quantità di moto e dell'energia nel fluido continuo viscoso in moto. In termini vettoriali essa si scrive

$$(36) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\xi + \frac{1}{3} \eta \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

dove $d\mathbf{v}$ è la variazione di velocità di una particella del fluido, dovuta sia alla variazione nel tempo dt della distribuzione delle velocità nello spazio occupato dal fluido in corrispondenza alla posizione della particella; sia allo spostamento nel tempo dt della particella; η e ξ sono i due coefficienti di viscosità (di taglio e di volume). La (36) è stata scritta nell'ipotesi che questi due coefficienti possano ritenersi approssimativamente costanti; nel caso che occorra tenere conto della loro dipendenza dalla pressione e dalla temperatura, l'equazione si scrive in maniera leggermente diversa. In ogni caso essa è non lineare.

Sarà bene ricordare come lo sviluppo delle nuove metodologie per lo studio dei sistemi complessi ha avuto inizio dal modello usato da E.N. Lorenz (1963) proprio per spiegare il comportamento dell'atmosfera terrestre.

Una trattazione esauriente dei problemi, in genere molto complessi, della fluidodinamica esula dagli scopi di questa presentazione che intende solo indicare la vastità e l'importanza dei campi nei quali i nuovi concetti di ordine e disordine hanno validità e consentano una nuova impostazione per lo studio di importanti problemi da sempre all'attenzione dei ricercatori. Ci limiteremo a presentare i risultati di pochi studi fra i primi effettuati.

Un sistema dinamico molto semplice a studiarsi sperimentalmente è costituito da un rubinetto che viene gradatamente aperto in modo che il flusso aumenti gradualmente rimanendo sempre sotto forma di gocce; si può facilmente osservare il passaggio da un regime nel quale le gocce cadono con un ritmo regolare a uno nel quale le gocce si susseguono con sequenze non periodiche (caos) (13). La figura 11.44 riporta lo schema usato da R.S. Shaw, P.T. Scott, S.C. Pope e P.J. Martein per l'osservazione sperimentale: le gocce cadono su un microfono e consentono di determinare gli intervalli di tempo (t_n) tra gli arrivi sul microfono di gocce successive. Per l'esame del comportamento del sistema gli autori hanno usato un metodo empirico che ha dato origine al metodo di ricostruzione dell'attrattore caotico presentato al par. 11.10. Essi hanno riportato in uno spazio tridimensionale le coordinate t_n , t_{n+1} , t_{n+2} (fig. 11.45a, b) usando

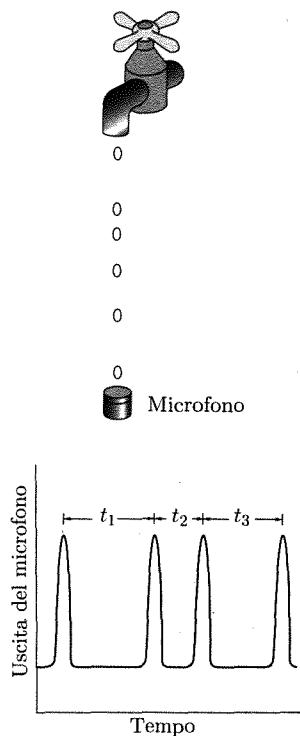


Fig. 11.44

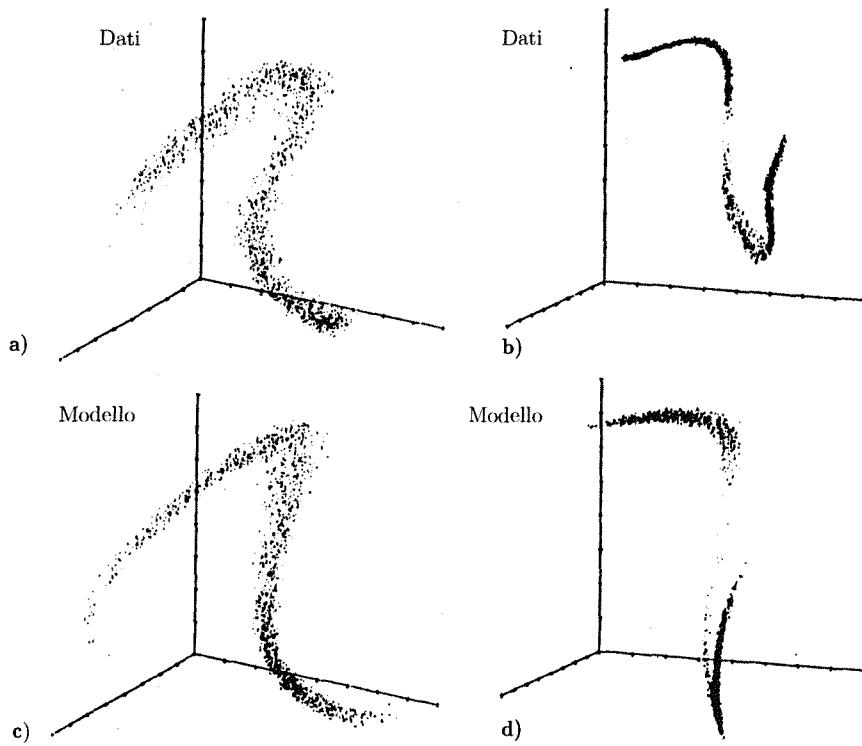


Fig. 11.45

(13) Vedi J. Crutchfield *et al.*, cit.

i dati ottenuti per 4.094 osservazioni: la forma di un attrattore caotico sembra evidente. Le figure 11.45c, d presentano, per paragone, parte di attrattori caotici calcolati con un modello (correlazioni di Hénon).

Una fra le prime ricerche sperimentali che hanno mostrato il raddoppio del periodo nella via al caos (M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini, 1981) (¹⁴) si riferisce alla cosiddetta instabilità di Rayleigh-Bernard.

Si consideri un fluido viscoso in una cella parallelepipedica di dimensioni piuttosto piccole (per es. larghezza 25 mm, profondità 15 mm, altezza 8 mm) ove si mantiene una differenza di temperatura costante fra la base e la superficie superiore: la base si trova a temperatura più alta, così che si ha trasmissione di calore dal basso verso l'alto. Il parametro di controllo in questo caso è il numero di Rayleigh R legato alla differenza di temperatura ΔT :

$$(37) \quad R = \frac{g\alpha a^3 \Delta T}{\chi\eta}$$

essendo g l'accelerazione di gravità, α il coefficiente di espansione termica, a lo spessore dello strato fluido, χ il coefficiente di diffusione termica (¹⁵), η il coefficiente di viscosità. Alcuni di questi parametri non sono stati introdotti; essi sono legati alla descrizione del comportamento termico della materia: peraltro assumono valori costanti nell'esperienza che vogliamo descrivere. Diremo anche che nell'esperimento in questione sono coinvolti due diversi processi di trasmissione del calore: nel primo (conduzione) intervengono le interazioni fra particelle vicine aventi energie proprie diverse e non è coinvolto alcuno spostamento di materia; nel secondo (convezione), invece, la trasmissione del calore è legata allo spostamento delle particelle dovuto alla diversa densità delle parti del fluido a temperature diverse; in quest'ultimo caso peraltro le forze di gravità sono contrastate da quelle create dagli effetti di viscosità.

Finché la differenza di temperatura (e il numero R) ha valori molto bassi, il fluido resta in quiete e il trasferimento di calore dal basso verso l'alto avviene esclusivamente per conduzione. Al di là di un valore critico di R (circa 1.700) si stabiliscono moti convettivi sotto forma di rulli (fig. 11.46) con asse orizzontale parallelo al lato corto della cella; il verso di rotazione in tali rulli si alterna regolarmente. In questa maniera le particelle di fluido più calde e meno dense si spostano verso l'alto trasportando calore e quelle meno calde e più dense fluiscono verso il basso. Si stabilisce in tali condizioni un moto perfettamente regolare e la velocità, $v(t)$, in un dato punto mantiene un valore costante nel tempo (convezione di Rayleigh-Bernard).

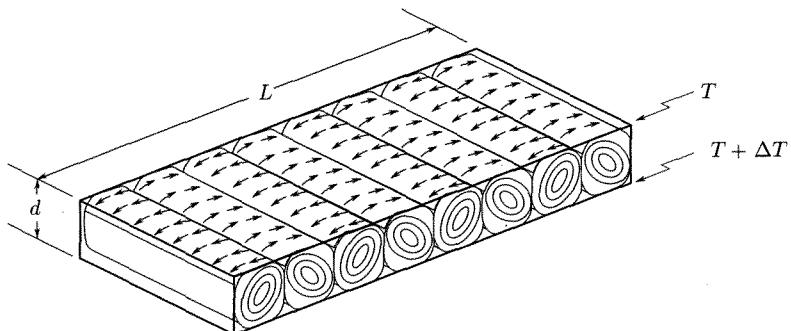


Fig. 11.46

Se si continua ad aumentare il gradiente di temperatura, questo regime stabile si altera, i rulli si deformano in maniera periodica: più precisamente i rulli nella cella non restano più cilindrici giacché si manifesta una deformazione di contrazione

(¹⁴) M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini, *Phys. Rev. Lett.* 47, pag. 243, 1981.

(¹⁵) $\chi = K/\rho C_p$, essendo C_p il calore specifico a pressione costante e K il coefficiente di conducibilità termica.

e dilatazione della sezione che si propaga su e giù lungo l'asse dei rulli stessi: al moto circolare dei rulli si sovrappone un moto ondoso lungo l'asse.

In conseguenza la velocità in un punto sulla superficie di un rullo, $\mathbf{v}(t)$, non resta più costante ma assume un carattere periodico. Contemporaneamente divengono dipendenti dal tempo anche altri parametri come la temperatura in un punto o il gradiente della temperatura in esso. Il processo descritto costituisce la instabilità di Rayleigh-Bernard.

Lo studio sperimentale (M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini) ha considerato questa instabilità al crescere del gradiente di temperatura, cioè di R , osservando, con una opportuna tecnica ottica⁽¹⁶⁾, il gradiente di temperatura in un punto in funzione del tempo tramite le sue componenti verticale e orizzontale. La figura 11.47 mostra le orbite ottenute riportando il gradiente verticale X in funzione del gradiente orizzontale Y .

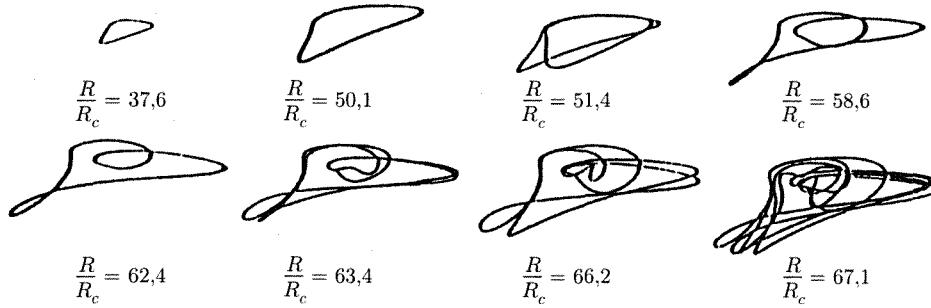


Fig. 11.47

L'evolversi del sistema è considerato in funzione del parametro di controllo R , o, quel che è lo stesso, in funzione di R/R_c essendo R_c il valore di R per cui si stabilisce il processo di convezione Rayleigh-Bernard.

Al crescere di R/R_c si assiste a una serie di raddoppi dell'orbita chiusa. La figura 11.48 mostra gli spettri del gradiente di temperatura orizzontale per valori crescenti di R/R_c : è evidente la comparsa delle subarmoniche $\nu_1/2$ (per $R/R_c = 50,5$), $\nu_1/4$ (per $R/R_c = 62,6$), $\nu_1/8$ (per $R/R_c = 67,3$). Anche la subarmonica

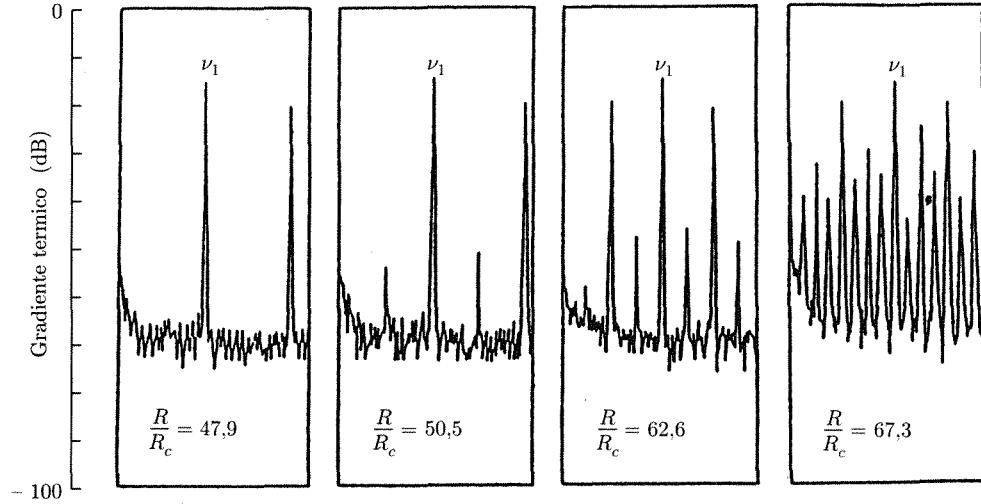


Fig. 11.48

*Il moto convettivo
di un fluido riscaldato
dal basso dà luogo
a instabilità, dette
di Rayleigh-Bernard*

(16) Deviazione di un fascetto laser prodotta dal gradiente di temperatura.

$\nu_1/16$ è stata osservata nella via al caos. I risultati sperimentali confermano il valore calcolato per il numero (δ) di Feigenbaum. Una ricostruzione dell'attrattore caotico è stata effettuata a partire dai dati sperimentali per una variabile di stato, $x(t)$, riportando su tre assi ortogonali: $x(t)$, $x(t + \tau)$, $x(t + 2\tau)$. La figura 11.49a dà la proiezione sul piano $x(t)$, $x(t + \tau)$ dell'attrattore e la figura 11.49b fornisce la corrispondente sezione di Poincaré.

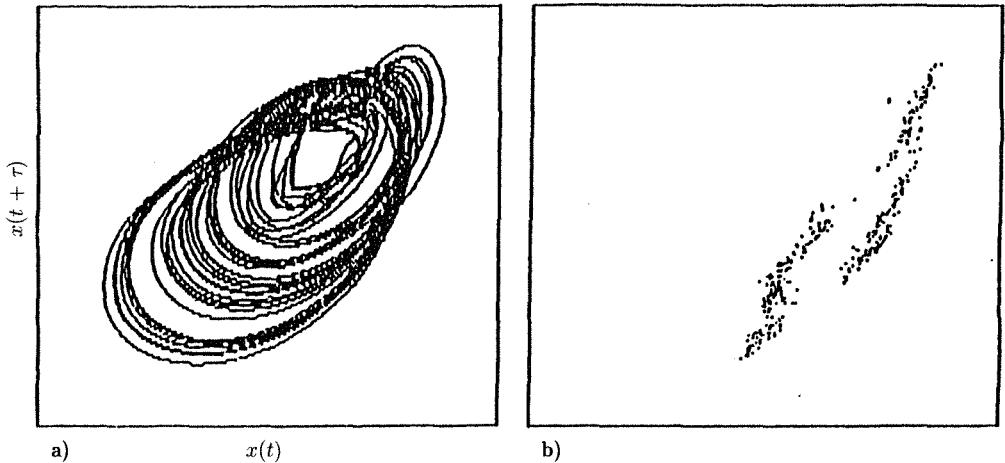


Fig. 11.49

Il modello di Lorentz per spiegare il comportamento dell'atmosfera fa riferimento in un certo senso allo schema della convezione Rayleigh-Bernard, come se l'atmosfera fosse uno strato d'aria sottoposto a un gradiente di temperatura. Attraverso successive semplificazioni Lorentz fu condotto a considerare un sistema di tre equazioni differenziali molto semplici

Instabilità meteorologiche

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \text{Re } x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy. \end{aligned}$$

Le equazioni sono non lineari per la presenza dei termini xz e xy . In tali equazioni $x(t)$ rappresenta l'ampiezza del moto di convezione, $y(t)$ la differenza di temperatura orizzontale tra corrente ascendente e discendente, $z(t)$ è lo scarto verticale di temperatura rispetto al profilo lineare. Il parametro b rappresenta la dimensione della regione il cui comportamento è approssimativamente descritto dal sistema di equazioni; $\sigma = \eta C_p/K$ è il numero di Prandtl (K coefficiente di conducibilità termica) mentre $\text{Re} = \rho v \ell / \eta$ è il numero di Reynolds (cap. 8, par. 8.13).

Lo studio del sistema di equazioni (38) fu condotto per mezzo del calcolo numerico, assegnando valori fissi ai due parametri di controllo σ e b e variando il terzo parametro Re (cioè la velocità del fluido).

Nonostante le drastiche semplificazioni introdotte nel modello, rispetto al sistema reale, il calcolo ha mostrato che esso preserva alcune importanti caratteristiche le quali indicano la possibilità di transizioni a regimi turbolenti (*caos deterministico*).

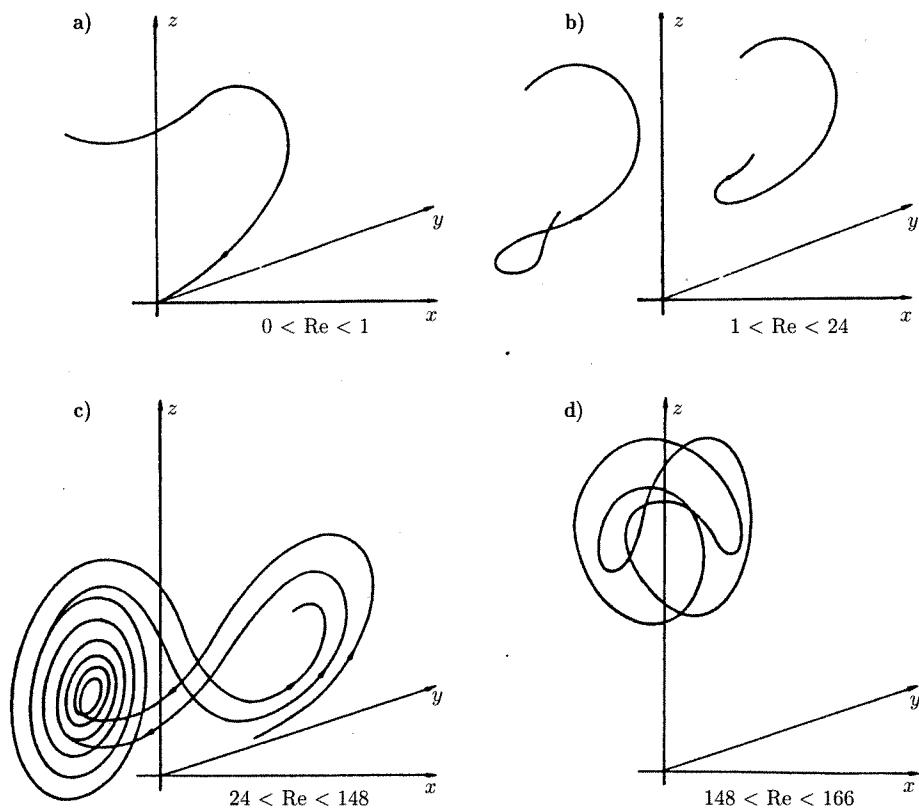


Fig. 11.50

I risultati ottenuti da Lorentz, usando la terminologia degli attrattori allora non completamente sviluppata, si possono sintetizzare come nel seguente (fig. 11.50)⁽¹⁷⁾. Per $\text{Re} < 1$ si ha come attrattore nello spazio delle fasi (x , y , z) un punto fisso localizzato nell'origine: da qualsiasi stato iniziale la traiettoria descritta dal sistema termina nello stato di quiete. Per Re compreso tra 1 e 24 si hanno nello spazio delle fasi due attrattori fissi: il regime che si stabilisce è quello dei rulli di convezione (alla Rayleigh-Bernard) e i due punti corrispondono ai due versi di rotazione possibili. Per Re compreso tra 24 e 148 le orbite non vanno più verso punti fissi, pur restando confinate in una regione limitata dello spazio delle fasi: si ha una forte dipendenza delle orbite dalle condizioni iniziali; si è in presenza di un attrattore strano e si verifica il caos deterministico. La figura 11.51 (R.S. Shaw) mostra lo spettro per

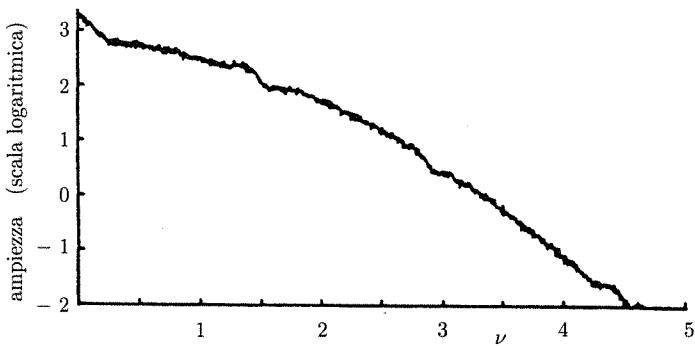


Fig. 11.51

⁽¹⁷⁾ C. Vidal, J.C. Roux, *Il caos*, a cura di G. Casati, Le Scienze, 1991, p. 141.

$Re = 28$: esso è continuo senza picchi e riflette il comportamento caotico. Per Re fra 148 e 166 si ha di nuovo moto periodico caratterizzato da un ciclo limite nello spazio delle fasi.

Si ha una seconda regione caotica per Re compreso tra 166 e 233 cui segue ancora una regione con un ciclo limite.

L'estrema dipendenza delle traiettorie dalle condizioni iniziali nelle regioni caotiche, conduce alla imprevedibilità delle condizioni atmosferiche; questa circostanza è stata spesso indicata come *effetto farfalla* nel senso che, per i sistemi nella regione caotica, variazioni delle condizioni iniziali, quali quelle prodotte dal moto non controllato delle ali di una farfalla, possono condurre a variazioni sostanziali nel comportamento a lungo termine (impossibilità di previsioni meteorologiche).

■ 11.15. CAOS DETERMINISTICO E MECCANICA CELESTE

Lo studio del moto dei satelliti nel sistema solare e la sua regolarità nella grande maggioranza delle osservazioni fatte dalla Terra è stato alla base dello sviluppo della meccanica newtoniana. Va osservato che la massa del Sole è molto maggiore (almeno di qualche centinaio di volte) della massa di ciascun pianeta e questa è la ragione di fondo per cui una spiegazione basata sulla semplice interazione fra il Sole e ciascun pianeta (trascurando la presenza degli altri; problema dei due corpi) ha avuto successo per spiegare la stabilità, in genere, del moto di ciascun pianeta. In realtà già Newton aveva notato la presenza di instabilità nelle traiettorie di Giove e di Saturno, pianeti che mostrano di allontanarsi attraverso i secoli l'uno dall'altro.

Il tentativo di uno studio più accurato in meccanica classica, considerando semplicemente il problema di tre corpi in mutua attrazione gravitazionale, porta immediatamente a difficoltà analitiche insormontabili per il carattere non lineare del sistema di equazioni.

Si comprende quindi il grande interesse che riveste l'applicazione alla meccanica celeste (non solo al sistema solare) delle nuove metodologie rese possibili dai calcolatori elettronici per seguire le traiettorie di un sistema su intervalli di tempo lunghi a piacere. È particolarmente interessante ed entusiasmante vedere come oggi sia possibile spiegare le osservazioni riconoscendo il verificarsi del caos deterministico anche in meccanica celeste.

Qui si accennerà solamente a ricerche recenti che hanno consentito di interpretare osservazioni fatte coi satelliti artificiali. Se si considera la Luna nel suo moto intorno alla Terra, si osserva che essa nel suo ciclo mantiene invariato il suo aspetto (mostra sempre la stessa faccia) nonostante che essa sia dotata di un moto di rivoluzione su se stessa: ciò dipende dalle caratteristiche del moto di rivoluzione di avere un periodo uguale al periodo di rotazione intorno alla Terra e di avere l'asse di rivoluzione normale al piano del moto di rotazione. Vi sono ragioni per ritenere che il pianeta abbia raggiunto questa situazione nel processo evolutivo (in tempi dell'ordine dell'età del sistema solare) dopo una fase di rallentamento durante la quale sia la velocità di rotazione su se stessa, sia la posizione dell'asse erano differenti: considerazioni sull'azione delle forze dovute alle maree su un corpo deformabile (che divengono trascurabili nel caso di sincronismo dei due moti) e considerazioni di carattere energetico nel moto di rotazione portano a queste conclusioni. Vi possono peraltro essere situazioni diverse, qualora, per es., il satellite abbia una struttura fortemente asimmetrica e si muova su un'orbita ellittica a grande eccentricità.

Un caso di questo genere è quello del satellite Iperione che si muove intorno a Saturno: esso è costituito da masse molto asimmetriche e si muove intorno a Saturno su una ellisse fortemente eccentrica. I satelliti artificiali Voyager 1 e 2 sono riusciti a fotografare le posizioni di Iperione nel loro passaggio vicino a Saturno rispettivamente nel novembre 1980 e nell'agosto 1981. Queste osservazioni mostrano che il satellite si muove caoticamente con variazioni della velocità angolare e della posizione dell'asse di rotazione che avvengono repentinamente ed erraticamente in pochi periodi del moto di rivoluzione.

Non si vuole presentare qui la teoria che è stata sviluppata su un modello del sistema e che, pur con notevoli semplificazioni, conduce a un sistema di equazioni differenziali non lineari. Uno studio numerico di esso mostra, tuttavia, che vi sono soluzioni di carattere caotico (Wisdom, 1987). La figura 11.52 mostra questi risultati: in essa sono considerate le posizioni successive in cui il satellite si avvicina di più a Saturno: θ è l'angolo che definisce la posizione istantanea di un asse del satellite rispetto all'asse principale dell'orbita ellittica intorno a Saturno, ed è $\omega_0 = 2\pi/T$, essendo T il periodo orbitale.

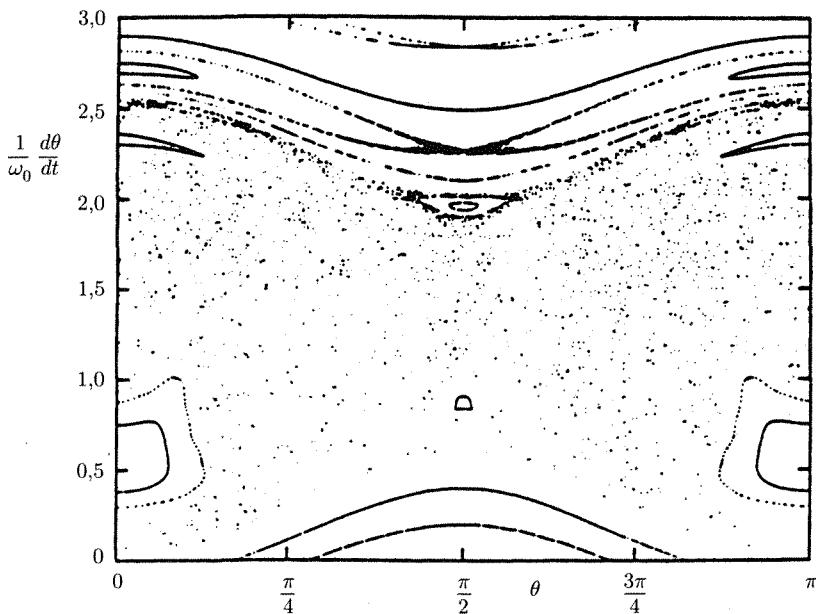


Fig. 11.52

Il grafico mostra la variazione relativa di orientamento del satellite, $1/\omega_0 d\theta/dt$, in funzione di θ nei successivi passaggi per la posizione di massimo avvicinamento a Saturno, per orbite calcolate partendo da diversi stati iniziali. Come si vede, esistono regioni quasi periodiche (linee) e regioni caotiche caratterizzate da punti dispersi: la piccola isola intorno al punto $(0, 0.5)$ corrisponde al moto nel quale Iperione mostrerebbe mediamente la stessa faccia verso Saturno (moto sincrono). Uno studio più approfondito ha inoltre mostrato che sia nel moto sincrono ora citato, sia nelle soluzioni caotiche, la posizione particolare dell'asse di rivoluzione quando si trova normale al piano dell'ellisse orbitale è instabile. In ogni caso, quindi, piccole deviazioni dell'asse di rivoluzione dalla posizione normale all'orbita, portano ad allontanamenti esponenziali e a moto impre-

vedibile. Ciò è in accordo con le osservazioni effettuate nelle due missioni Voyager.

Recenti studi stanno applicando i nuovi metodi di indagine al moto degli asteroidi, mettendo in evidenza come il moto caotico che può stabilirsi per forti eccentricità della loro orbita intorno a un pianeta, può spiegare alcune osservazioni sperimentali e fornire un meccanismo per il loro arrivo erratico su un pianeta (per es. la Terra).

Tra i problemi di meccanica celeste che si stanno riesaminando con il concetto del caos deterministico, vogliamo infine citare quello della distribuzione nello spazio dei corpi celesti (e delle galassie), diversa da quella finora ritenuta valida di distribuzione uniforme. Si tratta di un problema di rilevante interesse per lo studio dell'evoluzione dell'universo.

■ 11.16. GEOMETRIA FRATTALE

Come è stato già indicato, gli attrattori strani hanno dimensioni geometriche non intere (frattali) e ciò rappresenta una espressione geometrica delle loro caratteristiche. Si è anche detto che nel caso di esistenza di più bacini di attrazione, i confini tra di essi hanno di solito proprietà frattali. Vogliamo ora presentare qualche indicazione su alcune fra le principali proprietà delle forme frattali in modo da mettere ancor più in evidenza le peculiarità del comportamento dei sistemi complessi.

Il recente sviluppo nello studio di queste forme geometriche ha messo in evidenza la capacità che esse possono avere di descrivere la caratteristica dell'autosimiglianza che molti sistemi complessi presentano, dell'invarianza, cioè, della loro struttura rispetto al cambiamento di scala. Sistemi di questo genere si trovano molto diffusi in natura e ne sono esempi il profilo delle montagne, le linee limite per coste e fiumi, le ramificazioni delle piante, gli aggregati di cellule, le formazioni cristalline ecc., sicché le forme frattali appaiono sempre più adatte a rappresentare le forme riscontrate in natura, a differenza delle ben note figure della geometria euclidea (rette, cerchi, triangoli, piani, cubi, sfere ...) caratterizzate da una dimensione intera (1, 2, 3 ...).

La dimensione frattale è legata al modo in cui cresce la struttura al crescere dell'unità con cui la si confronta, o si misura

Nel presentare pochi elementi di descrizione delle forme geometriche frattali (geometria frattale), cominceremo cercando di precisare il concetto di frattale con alcuni semplici esempi.

Molte definizioni sono state introdotte per la dimensione frattale e ciascuna di esse si presta a esaminare aspetti particolari dei sistemi; questi ultimi possono, a volte, essere così complessi da richiedere una formulazione più generalizzata del concetto (multifrattale).

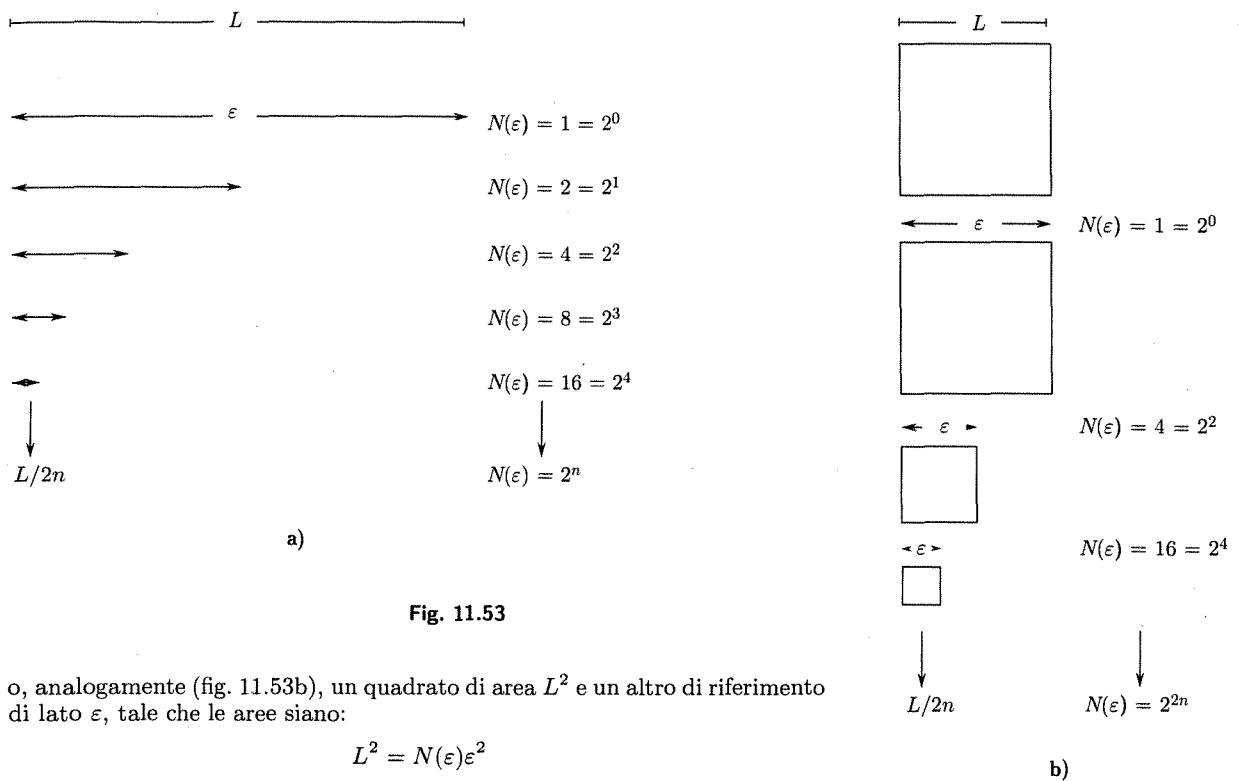
Noi introduceremo esclusivamente la cosiddetta *dimensione di capacità* (o di similarità) pur essendo altre definizioni più adatte a una determinazione della dimensione di un insieme partendo da risultati di calcoli o sperimentali. Naturalmente tutte le definizioni di dimensione, qualora applicate ai semplici enti geometrici euclidei, devono dare i risultati 0, 1, 2, 3 ... n (intero) rispettivamente per un punto, una linea, una superficie, un volume continuo ...

Per giungere in maniera semplice alla definizione della dimensione di capacità consideriamo un segmento di lunghezza L e un segmento uguale o più piccolo ε , tale che si abbia (fig. 11.53a)

$$L = N(\varepsilon)\varepsilon$$

cioè

$$N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon} = \left[\frac{L}{\varepsilon} \right]^1$$



o, analogamente (fig. 11.53b), un quadrato di area L^2 e un altro di riferimento di lato ε , tale che le aree siano:

$$L^2 = N(\varepsilon)\varepsilon^2$$

cioè

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{L}{\varepsilon} \right]^2$$

e, analogamente, per un cubo

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{L}{\varepsilon} \right]^3.$$

Queste relazioni possono essere riunite nella

$$N(\varepsilon) = L^d \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d$$

e risulta che la dimensione d è data da

$$d = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln L + \ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Nel limite di piccoli ε , dimensione lineare dell'elemento di riferimento usato, il termine $\ln L$ può essere trascurato e si ottiene

$$(39) \quad d = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Più in generale, si abbia un insieme di punti che nella figura 11.54 per semplicità supponiamo disposti in un piano. Sia L la dimensione lineare che caratterizza l'insieme e si consideri la griglia di elementi (celle) di riferimento di dimensione lineare ε , che copre un'area L^2 . Si indichi con N il numero di celle che ricoprono i punti dell'insieme: esso dipende naturalmente da ε e aumenta al decrescere del valore di ε . In generale

$$N(\varepsilon) \sim \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d.$$

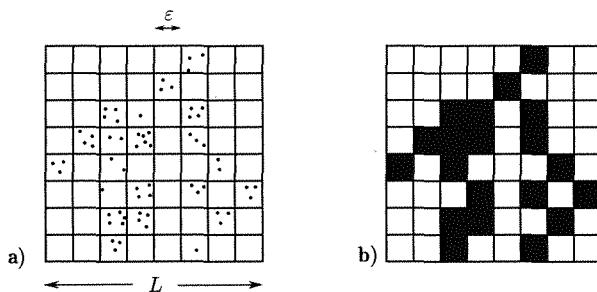


Fig. 11.54

Si definisce come dimensione di capacità

$$(40) \quad d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

Tale definizione conduce ai valori 0, 1, 2, 3 ... per gli enti euclidei punto, linea, superficie, volume ... Essa può peraltro condurre a valori non interi: i corrispondenti enti geometrici prendono il nome di frattali, secondo una terminologia introdotta da B.B. Mandelbrot (1980).

Esempi

Saranno qui considerate alcune strutture frattali di semplice costruzione.

L'insieme di Cantor si ottiene (fig. 11.55) con una operazione molto semplice. Si parta da un segmento rettilineo di lunghezza l , lo si divida in tre parti uguali e si rimuova la parte centrale (senza i punti terminali); l'operazione si ripeta successivamente senza limiti su ciascuno dei segmenti rimasti nell'operazione precedente. In figura sono indicati per i primi passi i valori di N e di ε . Al crescere delle iterazioni il numero degli elementi separati cresce all'infinito mentre l'insieme di Cantor è formato dai punti che non sono stati eliminati. Si ottiene

$$(41) \quad d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \frac{1}{3^n}} = \ln \frac{2}{3} = 0,6309.$$

Si noti la proprietà di autosimiglianza fra gli elementi corrispondenti a diverse iterazioni: la loro struttura è praticamente la stessa a parte la scala.

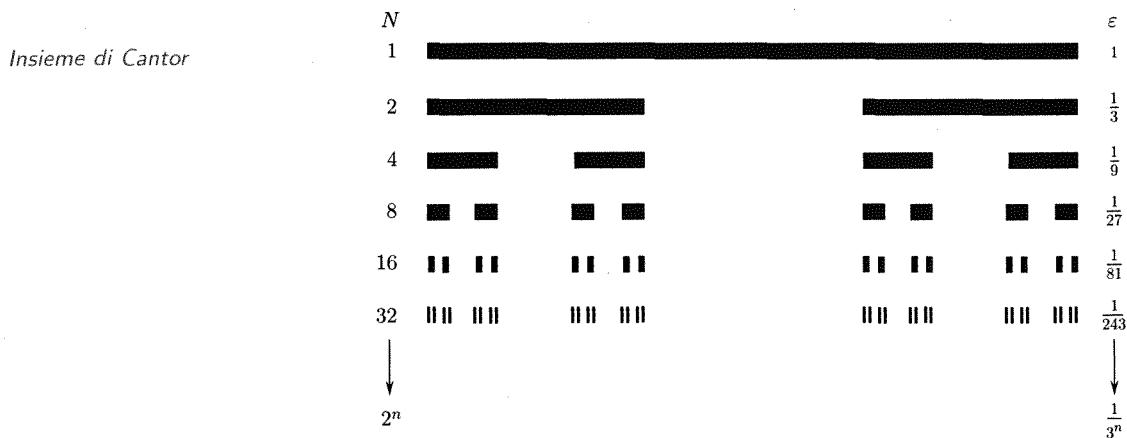


Fig. 11.55

Come secondo esempio consideriamo la curva di Kock (fig. 11.56).

Si parta da un segmento rettilineo di lunghezza l e lo si divida in tre parti uguali: la parte centrale venga sostituita da due segmenti di lunghezza $l/3$ disposti a formare con la traccia del segmento rimosso un triangolo equilatero giacente nella parte del piano al di sopra del segmento 0-1 originario. Si ripeta l'operazione indicata su tutti i segmenti della linea spezzata ottenuta e così via per successive iterazioni. La linea originata ha la proprietà di non intersecarsi mai mentre la sua lunghezza cresce all'infinito per successive iterazioni, secondo i valori

$$1; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}; \dots$$

La dimensione frattale risulta

$$(42) \quad d_c = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2619,$$

superiore a 1 ma inferiore a 2 giacché essa occupa uno spazio superiore a quello di una linea semplice ($d_c = 1$) ma nettamente inferiore a quello di una superficie euclidea ($d_c = 2$) nel cui interno essa risiede.

La curva di Kock

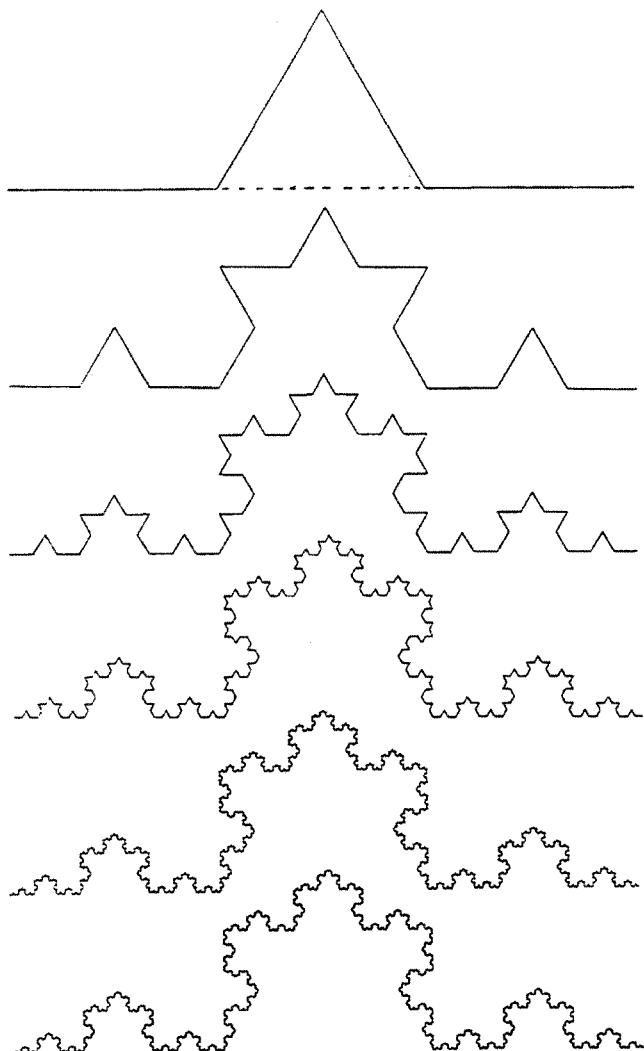


Fig. 11.56

Si osservi che una curva di Koch, pur avendo una dimensione frattale maggiore di uno, ha una *dimensione topologica pari a uno*: la rimozione di un punto la taglia in due parti.

Si noti una caratteristica delle forme frattali: a differenza degli elementi semplici della geometria euclidea (retta, circonferenza, sfera) per i quali si può stabilire una formula matematica che li specifichi (per es. $x^2 + y^2 = r^2$ per la circonferenza), le forme frattali non sono rappresentabili con una formula, ma sono determinate da un algoritmo che fissa la procedura di costruzione. Ciò spiega la caratteristica di autosomiglianza posseduta dalle forme frattali semplici: *la medesima struttura si ripete su scale diverse*.

Si consideri ora come forma geometrica di partenza un triangolo equilatero di lato unitario e si ripeta la costruzione della linea di Koch contemporaneamente sui tre lati (fig. 11.57) si ha di nuovo una linea la cui lunghezza cresce all'infinito pur racchiudendo un'area finita: essa resta sempre all'interno della circonferenza circoscritta al triangolo di partenza.

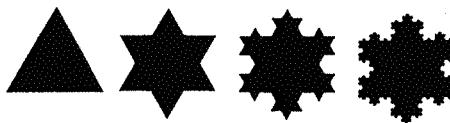


Fig. 11.57

Un'altra forma frattale semplice è quella introdotta da W. Sierpinski (1916) a partire da un triangolo equilatero di lato unitario; come primo passo viene rimosso dalla superficie interna un triangolo equilatero di lato $\frac{1}{2}$ avente i vertici nei punti centrali dei lati del triangolo di partenza; si originano così tre nuovi triangoli equilateri di lato $\frac{1}{2}$. L'operazione ora descritta viene ripetuta sui tre triangoli come secondo passo e si procede in maniera analoga per successive iterazioni sui triangoli equilateri così generati. La figura 11.58 rappresenta l'ottava iterazione.

Il triangolo di Sierpinski

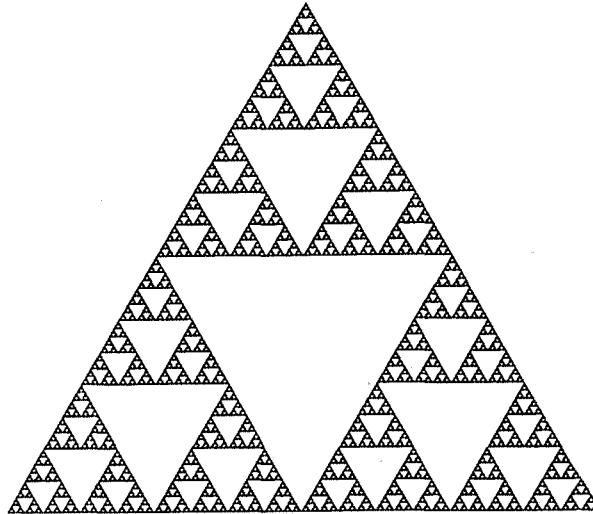


Fig. 11.58

Gli esempi su riportati appartengono alla classe più semplice di forme frattali, quelle che godono della proprietà di autosimiglianza.

■ 11.17. INSIEMI DI JULIA E DI MANDELBROT

Gli insiemi di Julia (G. Julia, 1918) e di Mandelbrot (B.B. Mandelbrot, 1980) hanno assunto una grande importanza nella geometria frattale per la loro capacità di rappresentare geometricamente aspetti di grande interesse nel comportamento di sistemi complessi, come i rapporti fra ordine e caos al variare dei parametri di controllo.

Per introdurre questi insiemi si parte dalla funzione

$$(43) \quad f(z) = z^2 + c$$

definita nel piano complesso, con z e c numeri complessi, e si consideri la iterazione

$$(44) \quad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Questa relazione può dare origine a un numero enorme di strutture frattali secondo le scelte fatte per i numeri complessi c e z .

Si osservi innanzitutto che la iterazione (44) può condurre a orbite che restano confinate in una regione finita del piano complesso oppure a orbite che vanno all'infinito; spesso risulta interessante considerare questo elemento distintivo delle varie orbite.

Nel caso degli insiemi di Julia si fissa un valore per la costante c e si esamina, nel piano complesso delle z , per i vari valori della posizione iniziale z_0 , se l'orbita resta confinata o diverge all'infinito. In una rappresentazione grafica, si possono marcare in nero i punti del piano delle z aventi la proprietà che, se considerati quali posizioni iniziali, le corrispondenti orbite restino confinate; vengono invece lasciati senza alcun marchio (o marcati in bianco) i punti origine di orbite che divergono verso l'infinito. *L'insieme di Julia è rappresentato dai confini fra le due regioni.* Evidentemente si ha un insieme di Julia per ogni scelta di c e tali insiemi possono risultare notevolmente diversi fra loro (fig. 11.59).

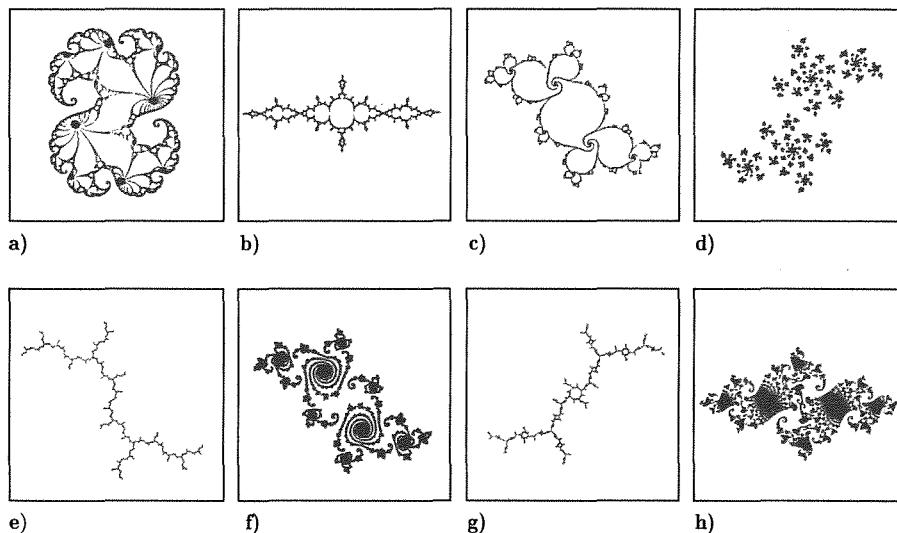


Fig. 11.59

Nello studio della (44) si può, peraltro, fissare il punto iniziale z_0 , per es. l'origine ($z_0 = 0 + i0$), e variare nel piano complesso delle c il valore dato a questa costante. Di nuovo si possono marcare in nero i valori delle c che conducono a orbite confinate e lasciare in bianco i valori che conducono a orbite divergenti all'infinito. Il *confine fra le due regioni* costituisce l'*insieme di Mandelbrot* (fig. 11.60): esso è qui rappresentato per z_0 nell'origine. Naturalmente si può variare z_0 e si ottiene una versione un po' deformata della figura 11.60.

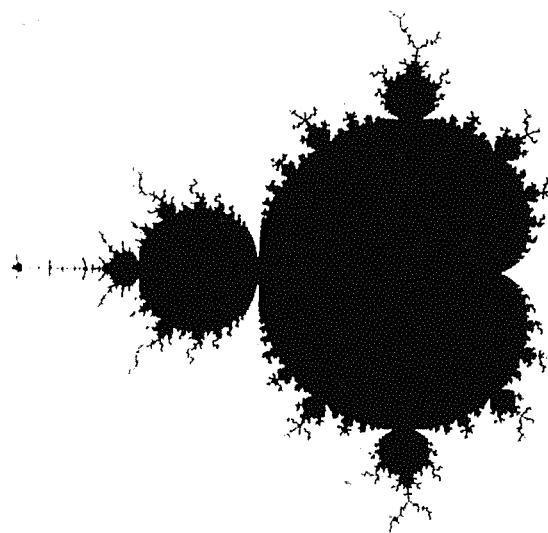


Fig. 11.60

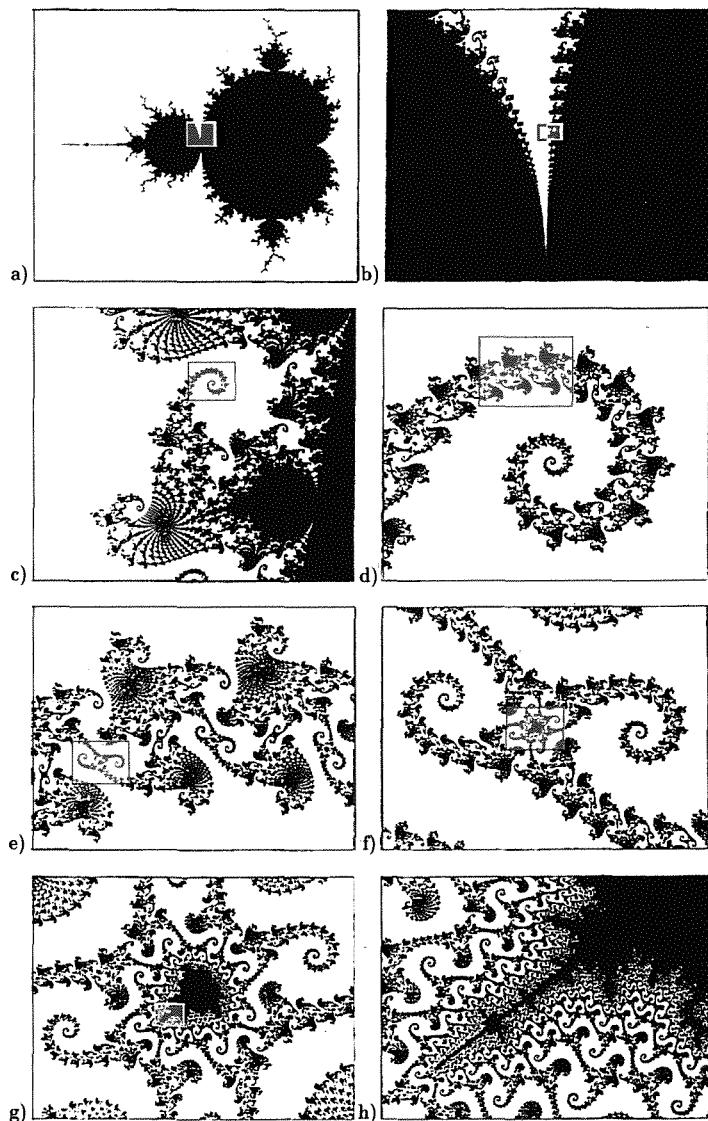


Fig. 11.61

Stretti legami esistono fra un insieme di Mandelbrot e i numerosi insiemi di Julia: per ciascun punto del piano delle c (interno o esterno all'insieme di Mandelbrot) si può considerare un insieme di Julia: se il valore di c è scelto all'interno dell'insieme di Mandelbrot l'insieme di Julia è connesso (fig. 11.59a, b, c, e, g); se è esterno esso non è connesso (fig. 11.59d, f, h).

Questi insiemi sono frattali. Vogliamo evidenziare come essi godano di una proprietà di simiglianza per cui ingrandimenti successivi di loro parti mostrano dettagli sempre più fini, i quali mantengono peraltro una struttura simile. La figura 11.61 mostra una serie di ingrandimenti successivi di questo tipo per l'insieme di Mandelbrot.

La natura stessa di questi insiemi come confine di separazione fra regioni (bacin) per le quali l'iterazione (44) conduce a orbite che restano in uno spazio confinato o si estendono all'infinito fa intuire l'esistenza di uno stretto rapporto con le proprietà (ordine e caos) nel comportamento a lungo termine dei sistemi dinamici.

Nel caso dell'insieme di Mandelbrot, per es., è possibile vedere che se si sceglie c verso il centro del *corpo nero* principale, le iterazioni della (44) conducono a un attrattore (cerchio limite) di periodo 1; se si pone c al centro dei corpi neri più piccoli che si succedono a sinistra (c con parte reale negativa) si hanno cerchi limite di periodo 2, 4 e così via; se si pone c al centro del corpo nero superiore o inferiore, si ha un cerchio limite di periodo 3. Se c è posto fuori dell'insieme di Mandelbrot non si ha alcun cerchio limite.

Una semplice relazione fra quanto ora accennato per l'insieme di Mandelbrot e quanto già visto per la via al caos deterministico per la mappa quadratica e in genere mediante raddoppi del periodo, si può ottenere facendo variare c nel grafico di Mandelbrot da 0 lungo l'asse reale per valori negativi (verso sinistra): si osserva una cascata di raddoppi di periodo, cui succede una regione nella quale le orbite non sono più limitate e corrispondono al comportamento caotico; tali regioni sono seguite da altre caratterizzate da orbite periodiche e così via. Si possono ottenere in funzione di c diagrammi perfettamente analoghi a quelli, già visti, di biforcazione in funzione del parametro di controllo (fig. 11.22).

TERMODINAMICA

PARTE SECONDA

CENNI DI STRUTTURA ATOMICA

Componenti della materia

Atomo: unità elementare costituente la materia, diversa per elementi diversi.

Molecole: insieme di più atomi, di elementi anche diversi, costituente l'unità elementare di una sostanza.

Cristallo: struttura omogenea di una sostanza, costituita da un insieme di atomi o molecole, ordinati spazialmente secondo reticolli (cristallografici).

✓ Atomo: modello di Bohr-Sommerfeld

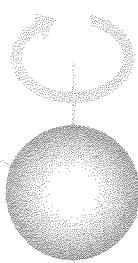
Sistema planetario, con nucleo positivo al centro e elettroni orbitanti intorno, non irradianti, su livelli energetici definiti. Discretizzazione delle orbite elettroniche, in base a *numeri quantici* interi, definienti il momento della quantità di moto (l , numero quantico *azimutale*), l'energia (n , numero quantico *totale*), la componente z del momento della quantità di moto (m), lo *spin* (s).

► Ordinamento degli atomi

degli elementi per successivo riempimento delle orbite elettroniche permesse; **tavola degli elementi** (Mendeleev), con periodicità nelle caratteristiche chimiche di elementi simili nella costituzione dell'orbita esterna.

Legami tra atomi

Dipendenti dagli elettroni periferici: **ionico** (tra atomi con affinità elettroniche diverse), **covalente** (di scambio od omopolare, con localizzazione di elettroni di atomi diversi), **metallico** (messa in comune di elettroni di atomi diversi).



12.1. INTRODUZIONE

Prima di iniziare l'esame della termologia e della termodinamica si ritiene utile premettere alcune nozioni di carattere generale sulla struttura atomica.

Sebbene, infatti, tanto la termologia quanto la termodinamica siano del tutto indipendenti dalla conoscenza della struttura intima delle particelle che costituiscono i sistemi e quindi potrebbero essere presentate senza alcun riferimento a quella, molto spesso, tuttavia, utili interpretazioni di situazioni che si incontrano in termologia e termodinamica possono venire dalla teoria atomica, cosicché è utile far uso di terminologia e concetti che sono propri di questa.

L'idea originaria cui l'atomo (dal greco, *non divisibile*) deve il suo nome (Anassagora 500-428 a.C., Democrito 470-361 a.C.) non è esatta in quanto questa particella è anch'essa divisibile in parti più piccole. Il significato che va dato al termine atomo è stato precisato dallo studio della chimica: l'atomo è la più piccola particella di un elemento, cioè di una specie chimica semplice, che può intervenire nelle combinazioni chimiche. Vi sono in natura solamente 92 specie di atomi diversi che formano le specie chimiche semplici e che entrano a formare tutti i composti chimici esistenti. In realtà oggi si aggiungono ai 92 alcuni altri elementi prodotti artificialmente con reazioni nucleari.

Le molecole invece sono le particelle stabili più piccole di una sostanza chimica che mantengono le proprietà caratteristiche di quella sostanza: possono essere formate da un solo atomo (monoatomiche) o da più atomi (poliatomiche). In quest'ultimo caso gli atomi costituenti possono essere dello stesso elemento (molecole di sostanze semplici) o di elementi diversi (molecole di composti).

L'atomo è costituito da un nucleo elettricamente positivo di dimensioni dell'ordine di 10^{-14} m (vedi cap. 4, par. 4.15) in cui è concentrata quasi tutta la massa e da elettroni (carichi negativamente) che si muovono intorno al nucleo. Le dimensioni degli atomi sono dell'ordine di 10^{-10} m (1 Å). La massa degli atomi più leggeri è dell'ordine di qualche unità per 10^{-27} kg. Per individuare la massa di un atomo si dà spesso un numero puro che viene impropriamente chiamato *peso atomico*: esso è il rapporto fra la massa dell'atomo in questione e quella dell'atomo dell'isotopo 12 del carbonio posto convenzionalmente pari a 12: il *peso atomico* è cioè una

massa relativa: per passare dai pesi atomici alle masse effettive degli atomi di un elemento occorre moltiplicare il peso atomico per $1,6605 \cdot 10^{-27}$ kg. È quindi come se il *peso atomico esprimesse la massa atomica in un'unità, chiamata* unità di massa atomica (*u, o, amu*) *pari a* $1,6605 \cdot 10^{-27}$ kg.

La massa dell'elettrone è $m = 9,1091 \cdot 10^{-31}$ kg; la sua carica in valore assoluto è $e = 1,60210 \cdot 10^{-19}$ coulomb; le dimensioni dell'elettrone non sono determinate finora da alcun esperimento; alcune considerazioni teoriche danno il cosiddetto raggio classico di 2,82 fermi ($2,82 \cdot 10^{-15}$ m).

Ogni atomo è neutro, sicché la carica positiva di ciascun nucleo deve essere un multiplo intero, Z , della carica elettronica. Tutti gli atomi dello stesso elemento sono caratterizzati dallo stesso Z , chiamato numero atomico.

Le proprietà chimiche di un elemento sono determinate dal numero e dalla distribuzione degli elettroni intorno al nucleo e quindi da Z . Va osservato che è possibile avere nuclei (e quindi atomi) che, pur avendo la stessa carica positiva Z , hanno una massa diversa: ciò è dovuto al fatto che, essendo i nuclei formati da particelle positive (protoni) e neutre (neutroni, che hanno all'incirca la stessa massa dei protoni), è possibile avere nuclei che hanno lo stesso numero di protoni e un numero diverso di neutroni. Gli atomi corrispondenti hanno le stesse proprietà chimiche giacché hanno la stessa configurazione elettronica e differiscono solo per la massa: essi si chiamano isotopi dello stesso elemento.

Come si è detto gli atomi sono elettricamente neutri; essi tuttavia possono a volte perdere o acquistare uno o più elettroni trasformandosi in ioni rispettivamente positivi o negativi.

■ 12.2. TEORIA DI BOHR PER L'ATOMO DI IDROGENO

Prima di dare alcune informazioni più precise sulle moderne vedute relative alla costituzione degli atomi, è bene accennare alla teoria che Bohr presentò nel 1913 per l'atomo di idrogeno, data la grande importanza che essa ha avuto per gli sviluppi della nuova teoria atomica e della meccanica quantistica. A quell'epoca i lavori di Rutherford (cap. 4, par. 4.15) avevano suggerito per la struttura degli atomi uno schema secondo il quale essi sarebbero formati da un nucleo centrale carico positivamente, in cui è concentrata praticamente tutta la massa dell'atomo, e da un certo numero di elettroni aventi una carica negativa complessivamente pari (a parte il segno) a quella del nucleo, disposti intorno al nucleo. L'atomo di idrogeno, l'atomo più semplice, è formato da un nucleo (protone) e da un elettrone: la massa del nucleo è 1838 volte quella dell'elettrone e le dimensioni del nucleo sono molto minori di quelle dell'atomo. Sebbene non fossero né siano note le dimensioni dell'elettrone, sembrò plausibile ammettere che nucleo ed elettrone possano essere considerati come cariche puntiformi di valore $\pm e$ ($1,60 \cdot 10^{-19}$ coulomb) scambiantisi una forza di attrazione data dalla legge di Coulomb (cap. 2, par. 2.15)

$$(1) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+e)(-e)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

cioè inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Si tratta di

una forza centrale come quella gravitazionale⁽¹⁾, sicché il sistema nucleo-elettrone, in una descrizione classica, si presenta molto simile a quello Sole-pianeta, pur essendo le distanze fra i corpi nel caso atomico circa 10^{21} volte più piccole del raggio dell'orbita terrestre.

Le leggi della meccanica classica conducono a prevedere che l'elettrone si possa muovere su un'orbita stabile (ellittica) che in prima approssimazione può essere ritenuta circolare: durante il moto alla forza d'attrazione corrisponderebbe la accelerazione centripeta

$$(2) \quad -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = -mr\omega^2$$

essendo r il raggio dell'orbita, ω la velocità angolare di rivoluzione ed m la massa dell'elettrone.

L'energia dell'elettrone è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale. Se si pone uguale a zero il valore dell'energia potenziale a distanza infinita tra le cariche, si ha (cap. 3, par. 3.5; cap. 6, par. 6.7)

$$(3) \quad U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

dove il segno meno è dovuto alla natura attrattiva della forza. D'altra parte l'energia cinetica, usando la (2), diviene

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

e l'energia totale

$$(4) \quad E = T + U = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

La teoria classica nello schema dell'atomo finora descritto incontra una grave difficoltà: è possibile infatti stabilire nell'elettromagnetismo classico il fatto che una carica elettrica in moto accelerato irradia energia. Ciò porterebbe di conseguenza che l'elettrone in moto accelerato intorno al nucleo dovrebbe continuamente ridurre la sua energia meccanica E : esso si dovrebbe quindi muovere non su una circonferenza ma su una spirale fino a cadere sul nucleo.

Per superare queste difficoltà Bohr fece l'ipotesi che l'elettrone non irradi secondo le leggi dell'elettromagnetismo classico e che non tutte le orbite circolari siano possibili per l'elettrone intorno al nucleo. La condizione alla quale devono soddisfare le orbite consentite è stata espressa da Sommerfeld nella forma: il *momento della quantità di moto dell'elettrone* (rispetto al centro dell'orbita) *deve essere un multiplo di $h/2\pi$* , essendo h una costante (costante di Planck) che già Planck aveva introdotto nello studio della radiazione del corpo nero. La circostanza che il momento della quantità di moto dell'elettrone possa assumere solo alcuni valori si esprime dicendo che esso è quantizzato. La costante h ha le dimensioni di un momento della quantità di moto [L^2MT^{-1}] e vale $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. La

⁽¹⁾ È presente anche una forza gravitazionale ma essa è completamente trascurabile rispetto alla forza coulombiana.

condizione di Sommerfeld può scriversi (per orbite circolari)

$$(5) \quad mr^2\omega = n \frac{h}{2\pi}$$

*La teoria atomica
di Bohr prevede
la quantizzazione del
momento della quantità
di moto degli elettroni.
Le orbite sono discrete
e numerabili*

con n intero ($1, 2, 3, \dots$). La (5) assieme alla (2) consente di determinare r ed ω (oppure $v = r\omega$)

$$(6) \quad r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}.$$

L'orbita più piccola consentita si ha per $n=1$ e vale $r_0 = 0,528 \cdot 10^{-10}$ m; il diametro quindi di un atomo di idrogeno nello stato fondamentale ($n=1$) sarebbe approssimativamente pari ad 1 Å.

Al crescere di n il raggio dell'orbita cresce proporzionalmente a n^2 . La velocità dell'elettrone è

$$(7) \quad v = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}$$

e per $n=1$ risulta pari a $2,19 \cdot 10^6$ m/s.

L'energia del sistema per un certo valore di n è

$$(8) \quad E_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\varepsilon_0^2} \frac{me^4}{n^2 h^2}.$$

Ciascuna delle orbite dell'atomo di Bohr è caratterizzata da una ben determinata energia e corrisponde a uno stato possibile del sistema. Lo stato con $n=1$, stato fondamentale, è quello di energia minima (più negativa). Bohr fece l'ipotesi che un sistema possa passare da uno stato consentito a un altro assorbendo o emettendo la differenza delle energie corrispondenti agli stati sotto forma di un quanto di energia raggiante (fotone). La relazione fra le energie di due stati i e j e la frequenza ν della radiazione elettromagnetica sarebbe:

$$(9) \quad E_j - E_i = h\nu.$$

La figura 12.1 mostra l'energia dei vari livelli calcolata mediante la (8). Essa è zero per $n=\infty$, cioè quando protone ed elettrone sono a distanza infinita: l'atomo è ionizzato e scisso in un protone e un elettrone. Le energie sono misurate in una unità molto usata in fisica atomica: 1 volt-elettrone = $1,60 \cdot 10^{-19}$ joule. Sono indicati mediante frecce i passaggi fra due stati ai quali corrisponde la emissione di radiazione sperimentalmente osservata.

Va notato che le ipotesi di Bohr non erano giustificate se non dal successo che lo schema ebbe nell'interpretazione degli spettri di emissione e di assorbimento dell'idrogeno. Lo schema presentato da Bohr per l'atomo di idrogeno può essere esteso ad atomi più complessi.

Partendo da questo schema, grandi progressi sono stati fatti nella teoria atomica. Nonostante siano state introdotte nella trattazione importanti variazioni, le seguenti idee introdotte da Bohr e da Sommerfeld nella teoria dell'atomo di idrogeno sono rimaste a base della teoria atomica:

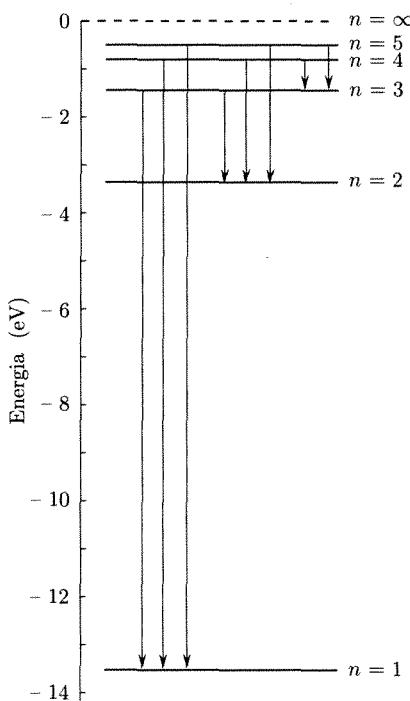


Fig. 12.1

1. il momento della quantità di moto di una particella o di un sistema è quantizzato;
2. un sistema atomico può trovarsi in un numero discreto di stati: lo stato più basso in energia (fondamentale) è quello in cui il sistema può rimanere stabile indefinitamente;
3. il passaggio di un sistema atomico da uno stato ad un altro è accompagnato dall'assorbimento o dall'emissione di un quanto di energia ben definito pari alla differenza d'energia dei due stati.

Nonostante che lo schema dell'atomo nella moderna teoria si differenzia notevolmente in importanti punti da quello di Bohr, pure quest'ultimo è ancora spesso usato per la sua semplicità per chiarire molti aspetti di numerosi problemi atomici.

■ 12.3. PROBABILITÀ E FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE

È opportuno, prima di procedere nel breve cenno sulle moderne idee relative alla struttura atomica, introdurre i concetti di probabilità e di funzione di distribuzione. Queste nozioni del resto sono fondamentali per le trattazioni statistiche che incontreremo in seguito nella descrizione del comportamento medio di sistemi molto complessi formati da numerosissime parti.

Si abbia un insieme formato da m sistemi componenti e si considerino certi eventi ciascuno dei quali consista nello scegliere a caso uno fra gli m sistemi. Per concretare le idee si può pensare a un sacchetto in cui siano contenute m palline e dal quale se ne estratta una presa a caso (evento). Si ponga l'attenzione su una caratteristica che i sistemi individuali possono presentare (per es. un certo colore delle palline) e sia n il numero degli m sistemi che possiede tale carattere. Per descrivere il fatto che, considerando un singolo evento (cioè scegliendo a caso una pallina), a esso corrisponda un sistema con la caratteristica in questione (evento favorevole), si definisce probabilità (p) dell'evento favorevole il rapporto

(10)

$$p = \frac{n}{m}$$

fra il numero di sistemi dotati di quel carattere e il numero totale dei sistemi dell'insieme⁽²⁾. La probabilità così definita è sempre minore o al massimo uguale a 1 (in quest'ultimo caso, la proprietà è caratteristica di tutti i componenti l'insieme e si parla di certezza nel senso che prendendo a caso un qualsiasi componente esso ha certamente la proprietà in questione). Alle volte le probabilità sono espresse in percento moltiplicando la frazione p data dalla (10) per 100.

Per concretare le idee si può considerare il caso che l'insieme considerato sia costituito da quella parte della popolazione di uno stato nata in un certo anno e porre l'attenzione sul carattere degli individui costituito dal sesso. Supponiamo che questa parte della popolazione sia costituita da 150.000 persone di cui 78.000 siano

*La probabilità
è il rapporto tra
gli eventi favorevoli
e il numero
di eventi possibili*

⁽²⁾ Nel caso in cui la costituzione dell'insieme non sia nota (come per es. quando essa non sia accessibile) si può giungere al concetto di probabilità nella seguente maniera, osservando un numero crescente di eventi. Dopo aver osservato parecchi eventi, si determina il rapporto fra il numero di eventi di un certo tipo (favorevoli) e quello degli eventi esaminati: tale rapporto si chiama frequenza dell'evento del tipo particolare. Al crescere del numero totale degli eventi considerati la frequenza di un tipo di evento può essere presa approssimativamente uguale alla probabilità. Se per es. supponiamo di non conoscere a priori il numero di palline di un colore presenti fra quelle contenute in un sacchetto e consideriamo 100, 1.000, 10.000 ecc. estrazioni, possiamo determinare come vari la frequenza della estrazione di palline di quel certo colore e vedere che esso finisce per approssimare un valore che si può verificare a posteriori essere n/m .

femmine. L'evento consiste nel prendere a caso una persona nata in quell'anno, per es. scegliendo un numero fra 1 e 150.000 cui corrisponde il nome di un individuo in un registro anagrafico. La probabilità che l'evento indichi una femmina è

$$p_f = \frac{78.000}{150.000} = 0,52$$

e che indichi un maschio

$$p_m = 0,48.$$

In genere queste probabilità dipendono dall'estensione dell'insieme considerato: se per es. si estendesse l'indagine precedente a persone nate in un intervallo più grande (o più piccolo) di tempo si potrebbero trovare valori diversi per p_f e p_m .

Come altro esempio consideriamo le famiglie che vivono in una grande città e poniamo attenzione sulla caratteristica costituita dal numero dei figli. Indichiamo

con $n_0, n_1, n_2 \dots$ il numero di famiglie con 0, 1, 2 ... figli e con $N = \sum_i^n n_i$ il numero totale di famiglie (il limite superiore nella sommatoria, r , è il numero massimo di figli riscontrato nell'insieme). Supponiamo di prendere a caso una di queste famiglie (in ciò consiste l'evento); la probabilità che essa abbia n_i figli è

$$(11) \quad p_i = \frac{n_i}{N}.$$

Tale probabilità varia con i .

Si può facilmente calcolare il valore medio i di figli per famiglia

$$(12) \quad \bar{i} = \frac{0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + \dots + i \cdot n_i \dots}{N} = \sum_0^r i p_i.$$

In questo esempio la proprietà (numero di figli) che si considera per i componenti l'insieme può assumere solo valori discontinui (zero o numeri interi positivi).

Consideriamo ora il caso più generale in cui i valori della proprietà che si considera possano essere contenuti in un insieme continuo di valori. Per es. si prenda in considerazione l'altezza degli abitanti di uno stato che hanno età entro certi limiti (per es. maggiore di 20 anni). In questo caso non ha significato chiedere il numero di persone che hanno una ben precisa altezza (per es. 1,725 m) perché la risposta sarebbe in genere zero. Ha invece senso chiedere il numero di persone la cui altezza è compresa entro un certo intervallo (per es. fra 1,71 e 1,73 m). Per avere informazioni quindi sull'altezza nell'insieme degli abitanti si può dividere l'intervallo di altezze riscontrate in tanti intervallini Δh e determinare la frazione di persone che compongono la comunità le quali hanno altezza entro i limiti di ciascun intervallino. La frazione relativa a un intervallino dà la probabilità che l'altezza di una persona dell'insieme presa a caso stia entro i limiti del corrispondente intervallo. Evidentemente le informazioni sulla distribuzione delle altezze saranno tanto più precise quanto più piccoli sono i Δh , cioè quanto più numerosi sono gli intervallini in cui è stato diviso il campo delle altezze riscontrate. Il risultato di questa indagine potrebbe essere rappresentato da un grafico, detto istogramma, se sulle ascisse si riportassero gli intervallini Δh e sulle ordinate le frazioni corrispondentemente determinate: tale grafico risulterebbe una successione di rettangoli contigui. In realtà è conveniente fare un grafico ove sulle ordinate si riporta non la frazione di persone che hanno altezza entro i limiti del corrispondente Δh , ma tale numero diviso per Δh : in tale rappresentazione la frazione di persone che hanno altezza entro Δh è rappresentata dall'area del rettangolo che ha base Δh .

Se indichiamo con F_i la frazione di persone che hanno altezza inferiore a h_i e F_{i+1} la frazione di persone che hanno altezza inferiore a $h_{i+1} = h_i + \Delta h$, la frazione di persone che hanno altezza nell'intervallino Δh fra h_i ed h_{i+1} è ΔF_i e quindi l'ordinata del grafico sarà $f_i = \Delta F_i / \Delta h$; la probabilità che una persona abbia altezza entro tali limiti è $p_i = \Delta F_i = f_i \cdot \Delta h$. La figura 12.2a riporta un grafico di questo genere: l'area totale racchiusa tra la spezzata e l'asse delle ascisse esprime la probabilità che una persona presa a caso abbia una qualsiasi altezza fra i limiti riscontrati e quindi è pari a uno.

Come si è detto, le informazioni divengono più precise man mano che gli intervallini si restringono (fig. 12.2b). Al limite, considerando una popolazione molto numerosa, si può ammettere che le altezze delle persone varino con continuità,

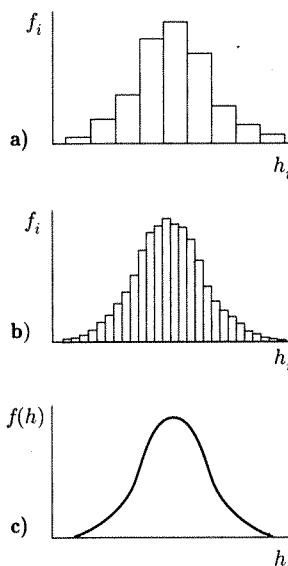


Fig. 12.2

sicché la frazione di persone aventi altezza inferiore a un valore h può considerarsi una funzione continua $F(h)$; di solito essa è anche dotata di derivata continua $f(h) = dF(h)/dh$. In tal caso la spezzata delle figure 12.2a e b si trasforma in una curva continua. La funzione $f(h)$ prende il nome di funzione di distribuzione normalizzata. È evidente che $f(h)dh$ dà la probabilità che una persona dell'insieme presa a caso abbia altezza compresa fra h e $h + dh$: per questa ragione $f(h)$ prende anche il nome di funzione densità di probabilità. La probabilità che una persona presa a caso abbia altezza compresa fra h_1 ed h_2 è

$$(13) \quad P_{h_1-h_2} = \int_{h_1}^{h_2} f(h)dh$$

e, se N è il numero di individui dell'insieme, il numero di individui con altezza fra h_1 ed h_2 è

$$(14) \quad n_{h_1-h_2} = N p_{h_1-h_2} = N \int_{h_1}^{h_2} f(h)dh.$$

Queste considerazioni svolte con semplicità nei casi particolari ora visti si applicano alla descrizione delle caratteristiche e delle proprietà di sistemi costituiti da individui molto numerosi oppure nelle analisi di situazioni in cui anche poche unità possono assumere nel tempo valori diversi per la proprietà in considerazione e quello che interessa sia appunto il comportamento medio nel tempo. In questi casi ovviamente non si può pensare di esaminare individualmente i singoli componenti dell'insieme, ma si potrebbe pensare di fare sull'insieme stesso un numero sufficientemente grande di osservazioni si da determinare la frequenza con cui un certo evento favorevole si verifica; tale frequenza si può ritenerne coincidente con la probabilità.

Una situazione di questo genere si incontra nel descrivere lo stato di un elettrone intorno al nucleo di un atomo: come si dirà, è possibile solamente calcolare delle funzioni che diano la densità di probabilità della sua posizione intorno al nucleo. La probabilità di trovare a un certo istante l'elettrone in questione in un elemento di volume dv è pari al prodotto di questa funzione densità di probabilità per dv . Altri casi di applicazione dei concetti di probabilità e di funzione di distribuzione si incontreranno in seguito.

■ 12.4. FONDAMENTI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

La descrizione dello stato degli elettroni in un atomo, come si è visto, non può essere fatta con la meccanica classica e richiede l'uso della meccanica quantistica.

Per cercare di dare una idea dei principi su cui questa teoria si basa, è bene considerare dapprima le caratteristiche di alcuni fenomeni luminosi ai quali si è già altre volte accennato. La luce (in genere, una radiazione elettromagnetica) si presenta in alcuni processi come un fenomeno ondulatorio nel quale certi vettori (vettore campo elettrico e vettore campo magnetico) si propagano oscillando normalmente alla direzione di propagazione e obbedendo ad una opportuna equazione delle onde⁽³⁾ mentre in altri processi essa si comporta come un insieme di particelle (fotoni).

Esempi di processi in cui si manifesta la natura ondulatoria della luce sono i fenomeni di interferenza e di diffrazione analoghi a quelli visti per le onde elastiche (cap. 9, par. 9.26 e 9.27). Nella figura 12.3a è rappresentato lo schema di un'esperienza di diffrazione; la luce proveniente da una sorgente è trasformata da una lente in un fascio parallelo (onde piane) e raggiunge uno schermo munito di un foro di dimensioni confrontabili con

*La luce manifesta una doppia natura:
ondulatoria
e corpuscolare*

⁽³⁾ Del tipo di quella vista per il vettore spostamento nella propagazione di onde in mezzi elastici (cap. 9).

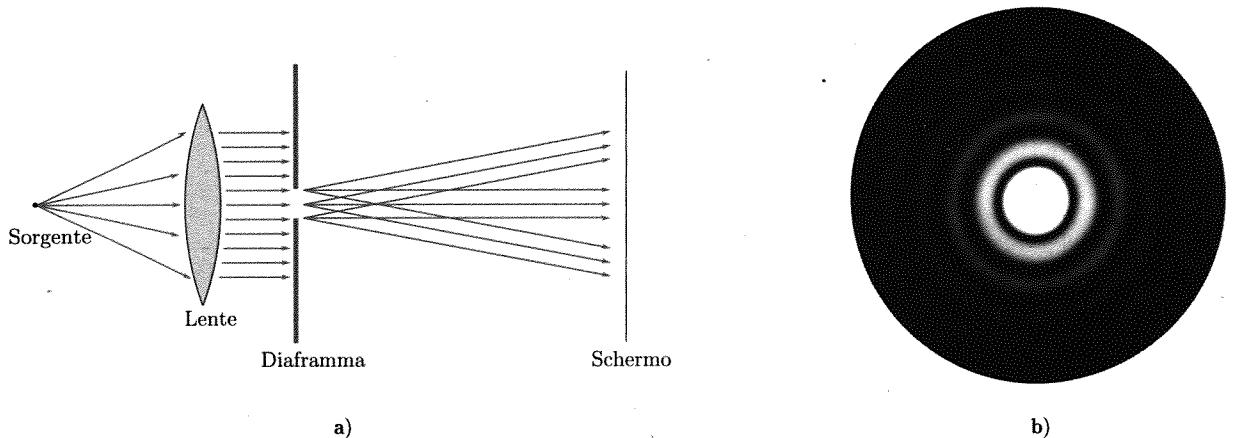


Fig. 12.3 a) Disposizione sperimentale per la osservazione della diffrazione della luce. **b)** Figura di diffrazione (Fraunhofer) da un foro circolare del diametro di 6 mm illuminato con luce gialla (5790 \AA) (H. Lipson, C.A. Taylor e B.J. Thompson).

*Fenomeni in cui la luce
manifesta la natura
ondulatoria*

quelle della lunghezza d'onda; al di là della apertura la luce è raccolta su uno schermo a distanza molto grande (teoricamente infinita). La figura 12.3b mostra l'immagine che si osserva sullo schermo: la luce si trova concentrata in corrispondenza a certi anelli.

Esperienze di diffrazione della luce possono essere fatte con disposizioni molto più raffinate nelle quali l'onda piana incidente incontra un ostacolo con molti fori o fenditure (reticolo).

Esperienze analoghe possono ripetersi con raggi X, cioè con radiazioni elettromagnetiche di lunghezza d'onda molto minore (circa 1 \AA): in questo caso, l'ostacolo è costituito da sottili cristalli e si trae profitto dalla distribuzione regolare degli atomi in piani reticolari a distanza dello stesso ordine di λ per ottenere una struttura equivalente a un reticolo. Nella figura 12.4a è indicato lo schema di una esperienza simile. I raggi X sono prodotti in un'ampolla facendo incidere su una superficie metallica un fascio di elettroni ad alta velocità (emessi da un catodo e accelerati da un campo elettrico). Un fascio di raggi X collimato attraversa un sottile strato di un campione policristallino (polvere o lamina sottile). La radiazione emergente dal campione si trova concentrata in certe direzioni e si ottengono figure di diffrazione come quelle di figura 12.4b in polvere di ZrO_2 (H. Swanson) e 12.4c in una lamina di rame (R. Krönig).

Esempi di processi nei quali si manifesta la natura corpuscolare sono l'effetto Compton (cap. 4, par. 4.14) e quello fotoelettrico.

Queste esperienze mostrano come la luce abbia una doppia natura: ondulatoria e particellare. Per una esperienza, quale quella di figura 12.3a, se si usa la descrizione (teoria) ondulatoria, date la forma, la posizione, la natura delle sorgenti e dei vari mezzi e oggetti presenti (lenti, specchi, schermi ecc.) è possibile calcolare quale deve essere la intensità luminosa⁽⁴⁾ I nei vari punti dello schermo e i risultati dei calcoli sono in ottimo accordo con l'esperienza.

*Fenomeni in cui la luce
manifesta la natura
corpuscolare*

⁽⁴⁾ L'intensità luminosa di un'onda è definita, in analogia alla intensità delle onde elastiche, come l'energia media trasportata dall'onda che attraversa al secondo una superficie unitaria disposta normalmente alla direzione di propagazione nel punto che si considera. Essa è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione del campo elettrico nel punto.

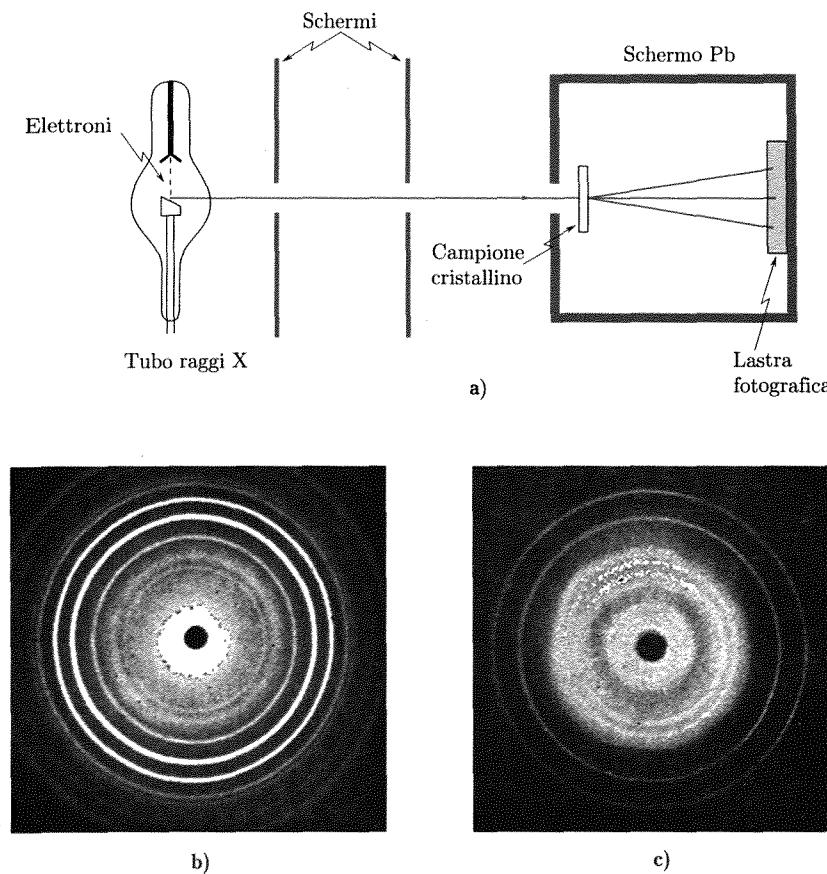


Fig. 12.4 a) Disposizione sperimentale per la osservazione della diffrazione di raggi X. b) Figura di diffrazione di raggi X da parte di cristalli di ZrO_2 in polvere (H. Swanson). c) Figura di diffrazione di raggi X da parte di una lamina policristallina sottile di rame (R. Krönig).

Quando d'altra parte si usa la descrizione particellare della luce, cioè quando si ricorre al concetto dei fotoni, l'intensità luminosa I in un fascio divisa per la energia $h\nu$ che ciascun fotone possiede fornisce direttamente il numero di fotoni presenti nel fascio.

Passando a considerare esperimenti in cui l'intensità luminosa è molto bassa, con pochi fotoni cioè (per es. uno solo), dalla teoria ondulatoria si ricava il risultato che l'intensità luminosa ha valori diversi da zero in una certa *regione* dello spazio, mentre secondo la teoria corpuscolare un fotone incide in un certo *punto* dello schermo. Queste conclusioni sembrano essere fra loro in contraddizione. Einstein ha però mostrato che in questo caso la intensità luminosa I fornisce la densità di probabilità che il fotone arrivi in un determinato punto. Naturalmente questa interpretazione dell'intensità luminosa vale anche quando i fotoni sono molto numerosi, e conduce alla definizione classica di intensità luminosa come densità di energia trasportata.

L'ottica ondulatoria può di conseguenza essere considerata come un metodo per calcolare la densità di probabilità della distribuzione dei fotoni.

Se ora si applica la teoria delle onde per determinare le variabili dinamiche del fotone (per es. posizione e quantità di moto) si vede che, quanto più esattamente si determina la posizione di un fotone, tanto

meno precisa risulta la determinazione della sua quantità di moto e viceversa. Questa affermazione prende il nome di principio di indeterminazione e rappresenta in un certo senso una proprietà fondamentale che caratterizza il comportamento di questi corpuscoli, i fotoni, nei processi nei quali essi sono sottoposti a osservazione. In altri termini noi possiamo spiegare i fenomeni cui partecipa la luce supponendo che questa sia costituita da fotoni che si comportano come particelle materiali purché si tenga anche conto del fatto che per essi vale il principio di indeterminazione.

*Per il principio
di indeterminazione non
si possono conoscere
con precisione
e contemporaneamente
i parametri del moto
di una particella*

I principi concettuali della meccanica quantistica si basano sul fatto (mostrato per la prima volta da Heisenberg nel 1927) che *il principio di indeterminazione vale* non solo per i fotoni ma *per ogni particella materiale*, come per es. gli elettroni. In altri termini, non si può mai conoscere con precisione grande quanto si voglia qual è lo stato dinamico (posizione e quantità di moto) di una particella perché per conoscere uno dei due parametri (per es. la posizione) occorre fare misure che disturbano il sistema tanto maggiormente quanto più la misura è precisa; questo fatto ha come conseguenza che la determinazione di altre grandezze (quali la quantità di moto) non può essere fatta con precisione ugualmente elevata. Ciò equivale a dire che non si può mai conoscere con precisione grande quanto si vuole lo stato dinamico (posizione e quantità di moto) di una particella: si può solo parlare di *probabilità* di trovare la particella a un certo istante in una data regione con una certa quantità di moto.

Queste considerazioni mostrano che per le particelle materiali (come già visto per i fotoni) la semplice rappresentazione corpuscolare (meccanica newtoniana) rappresenta solo un modello il cui limite di validità è, per così dire, fissato dal principio di indeterminazione.

L'abbandono del concetto intuitivo di potere descrivere il moto di una particella definendo in ogni punto lungo la sua traiettoria posizione e quantità di moto, conduce a una descrizione (analogia a quella valida per i fotoni) nella quale si definisce una funzione $\rho(x, y, z, t)$ tale che $\rho dx dy dz$ rappresenti la probabilità che, facendo una osservazione al tempo t , si trovi la particella nell'elemento di volume determinato da $x, x + dx, y, y + dy, z, z + dz$. La probabilità $\rho dx dy dz$ è massima nell'intorno del punto ove è massima la funzione *densità di probabilità* $\rho(x, y, z, t)$. In maniera analoga, si può definire una funzione densità di probabilità per le componenti della quantità di moto.

La descrizione dello stato di moto delle particelle materiali va quindi fatta mediante funzioni che forniscono le densità di probabilità così come si era già visto necessario per i fotoni. Ricordiamo che in questo ultimo caso la determinazione delle funzioni densità di probabilità è fatta con un metodo che corrisponde alla applicazione della teoria ondulatoria ai processi in istudio.

Se ora si considera che anche per le particelle materiali sono stati scoperti alcuni fenomeni di carattere nettamente ondulatorio, si è naturalmente portati a chiedersi se, nel caso di particelle materiali, le densità di probabilità non possano essere rappresentate da equazioni del tipo di quelle usate per la descrizione delle onde. Si è trovato che questo è possibile (equazione di Schrödinger) e si è giunti a riconoscere un doppio carattere particella-onda anche alle particelle materiali. La lunghezza dell'onda associata a una particella di quantità di moto di modulo p è, secondo

*Il moto di una
particella è descritto
da una funzione
di probabilità*

De Broglie⁽⁵⁾,

$$(15) \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

Si noti che associare un'onda a una particella non significa che il moto della particella sia effettivamente quello di un'onda. L'onda è usata come una descrizione figurativa di una certa funzione delle coordinate e del tempo per mezzo della quale possiamo studiare il comportamento della particella.

Sarà bene inoltre qui ricordare che la meccanica newtoniana è un'ottima approssimazione della meccanica quantistica nel caso di corpi per i quali la lunghezza d'onda (15) associata al corpo è molto piccola rispetto alle dimensioni del corpo stesso⁽⁶⁾. Per corpi grandi rispetto alle particelle atomiche e alle velocità ordinarie, la lunghezza dell'onda associata (15) è tanto piccola che qualsiasi effetto di diffrazione è trascurabile. Così per es. la λ associata a una molecola che si muova con velocità quali quelle che si hanno in un gas (circa 10^3 m/s) è minore delle dimensioni della molecola stessa; la λ associata a una pallina di acciaio avente massa 1 g e velocità di 1 m/s risulta

$$\lambda = \frac{6,625 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 1} = 6,625 \cdot 10^{-31} \text{ m}$$

che è estremamente piccola e priva di significato fisico.

Fenomeni di carattere ondulatorio per le particelle materiali

Citeremo qui la diffrazione degli elettroni e quella dei neutroni. Nella figura 12.5a è rappresentato lo schema della prima esperienza. Elettroni emessi da un catodo e accelerati da un campo elettrico attraversano un sottile foglio di materiale cristallino. Dopo avere attraversato la lamina, alcuni elettroni si trovano concentrati in certe direzioni e la lastra fotografica consente di rivelare figure di diffrazione come quella della figura 12.5b su una pellicola policristallina di oro (J.A. Suddeth). È evidente la somiglianza fra questa figura e quelle delle figure 12.4b e c ottenute con i raggi X.

La diffrazione di un fascio parallelo di neutroni monoenergetici (provenienti da un reattore nucleare) viene studiato con un metodo differente nel quale un fascio è ancora inviato sul campione cristallino ma si osservano le particelle diffuse nello spazio dalla stessa parte della superficie colpita dal campione. Tale tecnica può essere usata anche con raggi X. La figura 12.6 mostra i risultati ottenuti osservando la stessa sostanza policristallina (rame in polvere) con i raggi X (l'osservazione con il metodo di figura 12.4a condurrebbe alla figura 12.4c) e con i neutroni: sulle ascisse è riportato l'angolo α fra le direzioni di moto delle particelle incidenti e di quelle diffuse; sulle ordinate è indicata l'intensità del segnale rivelato, la quale è proporzionale al numero di particelle che giungono ai rivelatori. Come si vede, si ha una concentrazione di particelle diffuse in certe direzioni. I numeri fra parentesi indicano la giacitura cristallografica dei piani di atomi che funzionano da reticolo per le corrispondenti diffrazioni osservate.

⁽⁵⁾ Nel caso per es. di elettroni a velocità $v = 10^8$ m/s corrisponde

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6,620 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^8} = 7,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 7,2 \text{ \AA}$$

⁽⁶⁾ La situazione è analoga a quella che vale nei rapporti fra ottica geometrica e ottica ondulatoria oppure nei rapporti fra una descrizione della propagazione di perturbazioni elastiche in un mezzo mediante *raggi* (leggi simili a quelle dell'ottica geometrica) e la descrizione ondulatoria. L'approssimazione dell'ottica geometrica e quella corrispondente in acustica sono ottime approssimazioni della teoria ondulatoria finché le lunghezze d'onda sono piccole rispetto alle dimensioni degli ostacoli incontrati dalla radiazione: i fenomeni di diffrazione sono allora trascurabili.

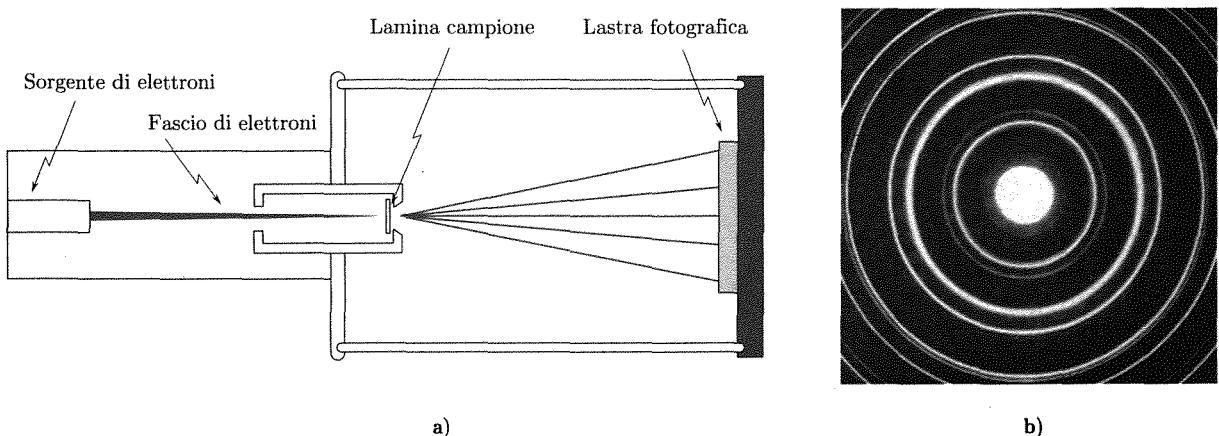


Fig. 12.5 a) Disposizione sperimentale per la osservazione della diffrazione di elettroni.
b) Figura di diffrazione di elettroni da parte di una pellicola policristallina di oro (J.A. Sudeth).

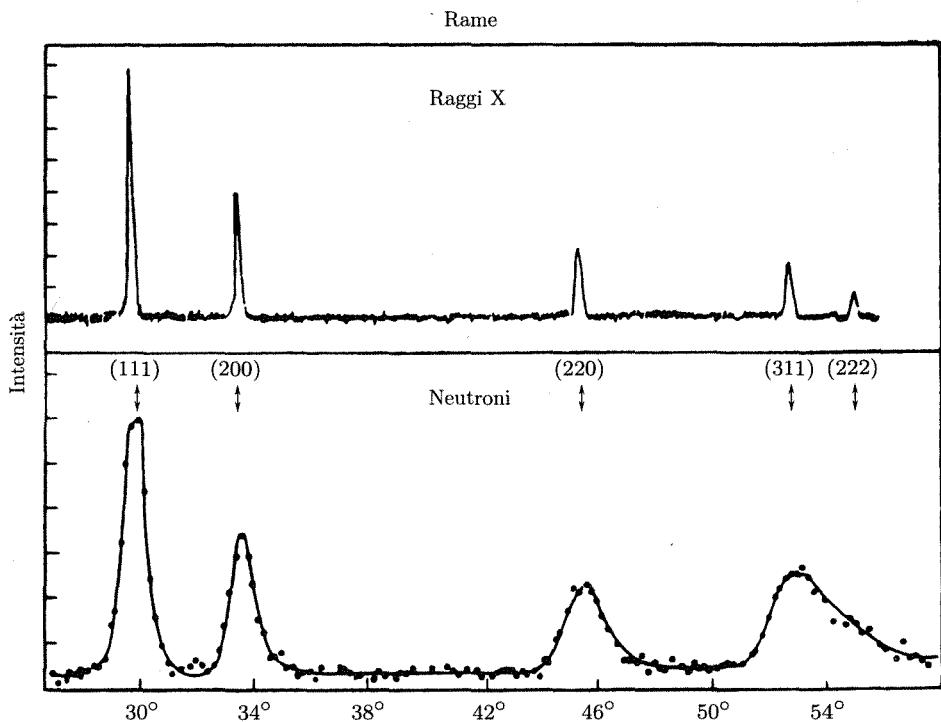


Fig. 12.6 Diagrammi di intensità del segnale (proporzionale al numero di particelle) in funzione dell'angolo α fra particelle diffuse ed incidenti in esperienze di diffrazione di raggi X e neutroni in rame.

■ 12.5. LIVELLI DI ENERGIA DEGLI ELETTRONI IN UN ATOMO

Come si è accennato, la teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno è stata di importanza fondamentale nello sviluppo delle nuove idee, nonostante sia stata in parte modificata dalla meccanica quantistica. È stata infatti abbandonata l'ipotesi, implicita nella trattazione di Bohr, di potere definire

posizione e velocità dell'elettrone e di potere, sia pure in linea di principio, seguire il percorso dell'elettrone. Le ipotesi invece concernenti la esistenza di stati stazionari, la quantizzazione e il legame fra assorbimento (o emissione) di energia raggiante e passaggio di elettroni da uno stato stazionario a un altro sono confermate e interpretate soddisfacentemente dalla teoria quantistica.

La semplicità dello schema dell'atomo di Bohr fa sì che esso spesso si usi ancora in molte situazioni e che ancora più spesso si faccia impiego di una terminologia a esso collegata. Ciò è possibile in alcuni casi e nettamente insufficiente in altri: va ad ogni modo sempre tenuto presente che il riferirsi allo schema di Bohr è solo una grossolana approssimazione. Si parla, così, spesso di *orbite* per descrivere la configurazione assunta dagli elettroni intorno al nucleo nello spazio e nel tempo. In realtà si dovrebbe parlare di probabilità di trovare un elettrone a un certo istante in un certo elemento di volume $dx dy dz = dV$: pensare che esso si muova su una linea che passi attraverso punti di massima densità di probabilità è una grossolana approssimazione utilizzabile solo in alcuni casi, quali si avrà modo di incontrare nel seguito.

Un atomo quindi è costituito da un nucleo centrale massivo di carica $+Ze$ e da Z elettroni in certi stati stazionari (nella espressione approssimata si può dire che essi si muovono intorno al nucleo su un numero discreto di orbite concentriche).

Per determinare gli stati stazionari consentiti per ciascun elettrone e le corrispondenti energie occorrerebbe trattare e risolvere il problema dinamico, assai complesso, nel quale un elettrone è sottoposto all'azione del nucleo e all'azione repulsiva degli altri $Z - 1$ elettroni. L'approssimazione che più comunemente si fa è quella di sostituire alle forze che effettivamente agiscono su un elettrone e che dipendono dalle posizioni dell'elettrone stesso e degli altri elettroni, una forza media, una media cioè delle forze che si riferiscono alle varie posizioni assunte dagli elettroni. Questa forza media è in genere una forza centrale che attira l'elettrone verso il nucleo. In tal caso la meccanica quantistica consente di trovare i livelli di energia per gli stati consentiti e le posizioni medie degli elettroni. Una tale trattazione applicata all'atomo dell'idrogeno ($Z = 1$) consente di studiare questo caso con completezza.

Lo stato di un elettrone in un campo di forze centrali è caratterizzato da quattro numeri quantici che fissano i valori che assumono alcune grandezze che possono variare solo discontinuamente secondo la meccanica quantistica. Tre di essi si riferiscono alla distribuzione spaziale delle posizioni che l'elettrone può prendere (in linguaggio approssimato, alla configurazione e grandezza delle *orbite* che un elettrone può trovarsi a descrivere) e alla sua energia.

Il primo di essi, l , chiamato numero quantico azimutale, fissa, in analogia con quella che è la ipotesi valida nella teoria originaria di Bohr-Sommerfeld, il fatto che l'intensità del vettore momento della quantità di moto dell'elettrone nel suo moto orbitale $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ può assumere solo alcuni valori dati pari a

$$(16). \quad b = l \frac{\hbar}{2\pi}$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$

*Quantizzazione
del momento
della quantità di moto:
il numero quantico
azimutale l*

*Quantizzazione
dell'energia: numero
quantico n*

Per un certo valore di l si hanno vari livelli di energia (stati quantici) in corrispondenza ai valori che assume un secondo numero quantico, n , chiamato numero quantico totale o principale; n è un intero più grande di l , esso cioè può avere i valori $(l+1), (l+2), \dots$.

Siccome per spiegare la interazione fra atomi e radiazione elettromagnetica (spettri di assorbimento e di emissione) si fa molto uso dei livelli di cui stiamo parlando, è invalso l'uso di una terminologia introdotta in spettroscopia per i livelli che corrispondono a un certo valore di l ; ciò è anche utile perché l è responsabile della forma della distribuzione spaziale delle posizioni che l'elettrone può assumere (cioè delle orbite) ed è quindi vantaggioso usare una notazione che ricordi alcune proprietà di simmetria di tali distribuzioni.

Tabella 12.1

l	0	1	2	3
	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
n_{\min}	1	2	3	4

I livelli che si ottengono per un certo valore di l sono in spettroscopia riuniti in serie contraddistinte da una lettera minuscola (v. tab. 12.1):

$l = 0$, denominazione *s* (serie di linee nette *sharp* e orbite a simmetria sferica)

$l = 1$, denominazione *p* (serie principale)

$l = 2$, denominazione *d* (serie diffusa)

$l = 3$, denominazione *f* (serie fondamentale)

$l = 4; l = 5$ si usano le denominazioni *g*, *h*.

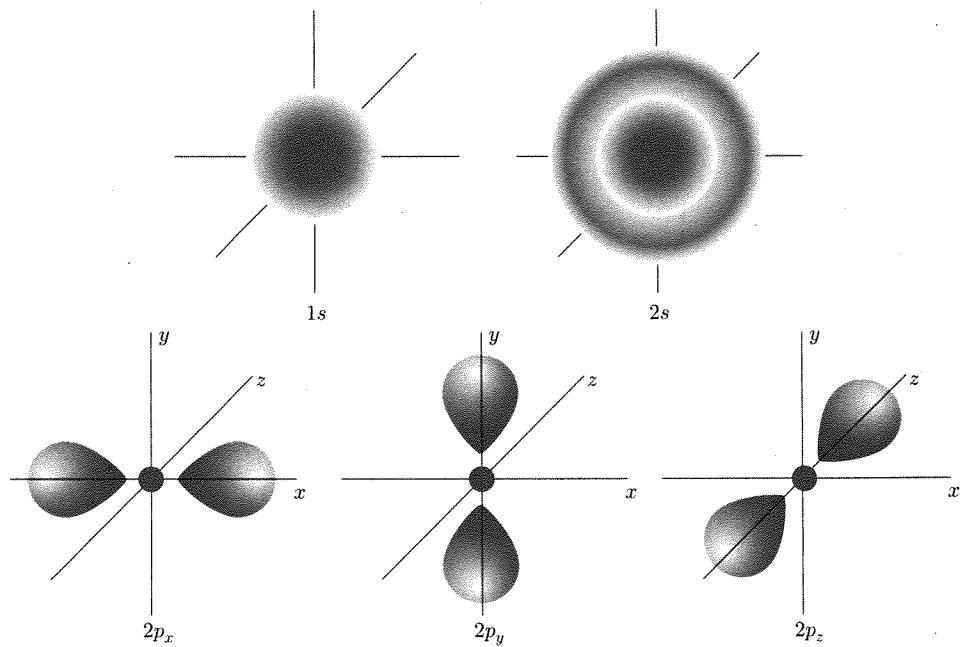


Fig. 12.7

Nella figura 12.7 è rappresentata mediante intensità di colore la densità di probabilità per stati di tipo *s* e *p* (il primo indice corrisponde al valore di n). Dove l'intensità è maggiore la probabilità di trovare un elettrone che sia nello stato considerato è maggiore e di conseguenza nella terminologia approssimata delle orbite si può dire che il cammino dell'elettrone avviene con maggiore probabilità attraverso le regioni di maggiore addensamento dei punti.

Un livello caratterizzato da certi valori di n ed l è indicato ponendo per primo il valore di n e in seguito la denominazione corrispondente a l , per es. $3d$ ($n = 3$, $l = 2$).

Il terzo numero quantico si riferisce al fatto che non solo l'intensità del momento della quantità di moto orbitale è quantizzato ma è anche

quantizzata la componente di \mathbf{b} lungo una direzione fissata nello spazio. Chiamando tale direzione z

$$(17) \quad b_z = m \frac{\hbar}{2\pi}$$

ove il numero quantico intero m può variare fra $-l$ e $+l$. Ciò significa che il vettore \mathbf{b} può assumere $2l+1$ orientazioni nello spazio, dall'orientazione secondo il verso positivo di z ($b_z = \hbar/2\pi$) a quella in verso opposto ($b_z = -\hbar/2\pi$).

A una coppia di valori consentiti per n ed l corrispondono quindi $(2l+1)$ livelli (o stati) e poiché l'orientazione di \mathbf{b} nello spazio non influenza l'energia dello stato, tutti questi livelli sono caratterizzati dalla stessa energia (quando più livelli hanno la stessa energia si dice che c'è degenerazione).

La energia di questi livelli o stati quantici stazionari in cui può trovarsi l'elettrone si può calcolare con esattezza solo nel caso che si abbia un solo elettrone che si muova intorno a un nucleo centrale avente carica positiva $+Ze$. Si ha in questo caso la formula (8) di Bohr, già trovata per il caso dell'idrogeno ($Z=1$):

$$(18) \quad E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

Ricordiamo che l'energia è posta pari a zero quando la distanza dell'elettrone dal nucleo è infinita (con energia cinetica zero); in tutti gli stati stazionari dell'elettrone l'energia è negativa e ha valori tanto più bassi quanto più piccolo è n : al diminuire di n , cioè, occorre una sempre maggiore energia per strappare l'elettrone e ionizzare l'atomo: questa energia misura la intensità del legame e si chiama energia di legame.

Nel caso che stiamo esaminando, quando cioè v'è un unico elettrone intorno al nucleo di carica Ze , i valori dell'energia dipendono esclusivamente da n e non da l , cioè dal tipo s, p, d, f dell'orbita.

In spettroscopia si usa chiamare *corteccia*, *anello*, *guscio* l'insieme di tutti i livelli che hanno una medesima energia. Si usa inoltre dare un nome all'insieme dei livelli che corrispondono a un certo valore di n e che nel caso di un unico elettrone avrebbero rigorosamente la stessa energia:

per $n=1$ anello K , per $n=2$ anello L , per $n=3$ anello M
per $n=4$ anello N , per $n=5$ anello O , per $n=6$ anello P

Al crescere di n , cioè al decrescere dell'energia di legame, l'*orbita* dell'elettrone cresce di dimensioni. In realtà si dovrebbe parlare, per ciascuno stato stazionario, di distanza dal nucleo alla quale è massima la probabilità di trovare l'elettrone. Chiamando tale distanza r_{\max} si ha

$$(19) \quad r_{\max} = r_0 \frac{n^2}{Z}$$

ove r_0 è il valore di r_{\max} per l'atomo di idrogeno ($Z=1$) nello stato fondamentale ($n=1$)

$$r_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,53 \text{ \AA}.$$

La (19) mostra che la grandezza dell'orbita, nel senso precisato, cresce con n^2 .

*Quantizzazione
della componente z
del momento
della quantità di moto:
numero quantico m*

Alla transizione
di un elettrone
tra due livelli
corrisponde
irraggiamento
o assorbimento
elettromagnetico

Lo spin, momento
della quantità
di moto intrinseco,
costituisce un quarto
numero quantico

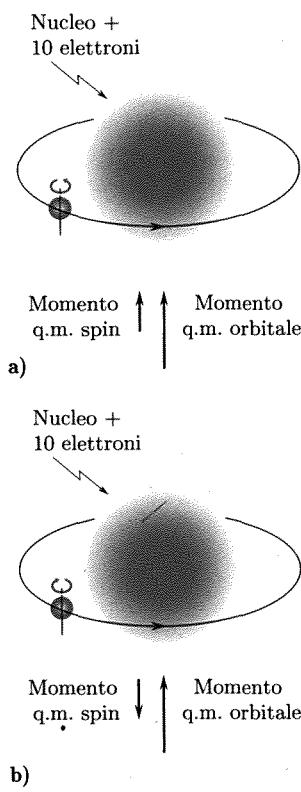


Fig. 12.8

Come nel caso dell'atomo di idrogeno, anche per gli altri atomi può accadere che elettroni prendano energia da un agente esterno (radiazione, corpuscoli) e passino dallo stato che normalmente occupano a un livello di energia superiore: si dice allora che l'atomo è in uno stato eccitato. Se l'energia presa dall'elettrone supera l'energia di legame esso si allontana definitivamente dal nucleo e l'atomo si trasforma in uno ione positivo. In un atomo eccitato, l'elettrone che si trova nello stato quantico superiore può passare su un livello di energia più basso emettendo la differenza di energia dei due stati (i ed j) sotto forma di un quanto di energia raggianti la cui frequenza ν è legata all'energia degli stati da

$$(20) \quad E_j - E_i = h\nu.$$

Non tutte le transizioni fra coppie di livelli sono consentite e valgono speciali regole di selezione fissate dalla meccanica quantistica per definire le transizioni possibili.

Si è detto inizialmente che lo stato di un elettrone in un campo di forze centrali è caratterizzato da quattro numeri quantici e finora ne sono stati considerati solamente tre, quelli che caratterizzano le posizioni che l'elettrone può assumere e la sua energia. Per introdurre il quarto bisogna considerare il fatto che, come varie esperienze hanno mostrato, *l'elettrone ha un momento della quantità di moto intrinseco* (e un momento magnetico); esso cioè va considerato come se fosse un corpo carico in rotazione intorno ad un suo asse: si dice che l'elettrone è dotato di spin (in inglese, rotazione). Il valore del momento della quantità di moto associato allo spin è fisso e pari a $1/2(h/2\pi)$: esso può essere orientato nella direzione e nel verso del momento della quantità di moto orbitale o in verso opposto (secondo il verso della rotazione) e dare quindi una componente $\pm 1/2(h/2\pi)$ al momento totale. Per rendere più evidente la situazione, nella figura 12.8 sono qualitativamente indicati due stati dell'atomo di sodio: esso è formato da un nucleo con carica $11e$, segnato come una sfera piena in figura, da 10 elettroni su gusci chiusi, che costituiscono come un mantello che circonda il nucleo, e da un elettrone su un'orbita più esterna. Il momento della quantità di moto orbitale dell'elettrone esterno è $h/2\pi$; il momento di spin può essere diretto in senso concorde o discorde con il primo momento, sicché il momento totale della quantità di moto è $3/2(h/2\pi)$ o $1/2(h/2\pi)$.

Il fatto che il momento di spin possa avere solo le due orientazioni viste e nessuna orientazione intermedia è in accordo con il fatto che il modulo del momento totale della quantità di moto \mathbf{b} fra due stati deve variare per multipli di $h/2\pi$ [prima condizione di quantizzazione (16)].

Il quarto numero quantico descrive appunto il momento della quantità di moto dello spin (in unità $h/2\pi$) e può avere i due valori $\pm 1/2$.

Si vede quindi che gli stati ottenuti considerando i primi tre numeri quantici, l, m, n si raddoppiano se si tiene conto del quarto numero, cioè dello spin. Siccome peraltro questo quarto numero quantico non ha influenza sull'energia dello stato e sulla forma dell'orbita, possiamo continuare a considerare i livelli possibili per l'elettrone mediante i tre numeri l, n, m , ricordando che per definire perfettamente lo stato quantico dell'elettrone occorre specificare anche il suo spin, cioè il quarto numero $\pm 1/2$.

■ 12.6. STRUTTURA DELL'ATOMO. SISTEMA PERIODICO DEGLI ELEMENTI

Le considerazioni precedenti sugli stati stazionari (o livelli) consentiti per gli elettroni in un campo di forze centrali intorno a un nucleo di carica ($+Ze$) in presenza di altri elettroni ci consentono di chiarire molti aspetti della struttura atomica se si aggiunge un altro importante fatto che riguarda il comportamento degli elettroni in un sistema: esso è espresso dal principio di esclusione di Pauli. Secondo tale principio nello stesso sistema *due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantico stazionario*, essi cioè non possono avere la stessa serie di quattro numeri quantici. Ciò significa che in un sistema atomico *due elettroni possono avere gli stessi valori di l, m, n* (cioè trovarsi sulla medesima orbita) purché abbiano spin opposti. Questo principio porta di conseguenza che nello stato di energia minima di un atomo (stato fondamentale o non eccitato) gli elettroni, se sono più di due, non possono tutti trovarsi nello stato quantico cui corrisponde per un elettrone l'energia più bassa (orbita più vicina al nucleo). La configurazione elettronica di un atomo può essere rappresentata indicando il numero degli elettroni che si trova nei vari stati quantici. Per convenzione questi numeri si segnano come esponenti degli stati: così per es. la configurazione che ha 2 elettroni nello stato $1s$, 2 elettroni nello stato $2s$, 5 negli stati $2p$ si indica $(1s)^2(2s)^2(2p)^5$; il numero totale degli elettroni è 9; tale distribuzione si ha nell'atomo di fluoro.

Si osservi che le dimensioni di un atomo dipendono dalle dimensioni delle *orbite* degli elettroni più esterni, cioè negli stati quantici più elevati. Inoltre quando gli atomi vengono avvicinati, le interazioni che si determinano sono essenzialmente dovute agli elettroni più esterni: questo fatto fa comprendere perché le proprietà chimiche dei vari elementi dipendano essenzialmente dalla configurazione degli elettroni nelle *orbite* più esterne e non dipendano dagli elettroni nei gusci interni chiusi. Siccome vari elementi presentano configurazioni simili nella distribuzione degli elettroni periferici, v'è da attendere che essi mostrino comportamenti chimici analoghi: questa è la base della spiegazione della periodicità delle proprietà chimiche che si osserva negli elementi al crescere del numero atomico.

Per meglio comprendere questa importante circostanza si consideri la tavola di Mendeleev (1834-1907) ove sono riportati i simboli dei vari elementi in ordine di numero atomico crescente, disposti secondo righe orizzontali e colonne verticali. Vi sono aggiunti anche elementi prodotti artificialmente. Le righe orizzontali costituiscono i periodi della tavola, mentre le colonne verticali costituiscono i gruppi o le famiglie chimiche. Gli elementi che appartengono alla stessa colonna si comportano chimicamente in maniera simile. In ciascuna casella della tavola, accanto al simbolo dell'elemento, sono indicati due numeri: il primo è il numero atomico Z che, con pochissime eccezioni, coincide con l'ordine di successione degli elementi per masse atomiche crescenti. Il secondo numero dà la massa atomica in unità di massa atomica.

Nella tabella 12.2 sono riportate le configurazioni fondamentali (cioè non eccitate) degli atomi degli elementi naturali.

Per comprendere le caratteristiche degli elementi, possiamo immaginare di costruire i vari atomi aggiungendo a uno a uno gli elettroni intorno al nucleo, il quale contemporaneamente deve variare la carica secondo multipli della carica elettronica in modo che l'atomo risulti neutro. L'elemento più leggero, il cui nucleo ha anche

Notazione degli stati elettronici

Le condizioni sui numeri quantici elettronici producono una periodicità nelle caratteristiche dei diversi atomi, che vengono rappresentate nella tavola di Mendeleev

Tavola di Mendeleev

Metalli di transizione																		Gas nobili
																		0
																		He 4.003
																		Gas nobili
1	H 1.008	IIA																0
2	Li 6.941	Be 9.012																He 4.003
3	Na 22.99	Mg 24.31	IIIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIIB										Gas nobili
4	K 39.10	Ca 40.08	Sc 44.96	Ti 47.90	V 50.94	Cr 52.00	Mn 54.94	Fe 55.85	Co 58.93	Ni 58.70	Cu 63.55	Zn 65.39	Ga 69.72	Ge 72.59	As 74.92	Se 78.96	Br 79.90	Kr 83.80
5	Rb 85.47	Sr 87.62	Y 88.91	Zr 91.22	Nb 92.91	Mo 95.94	Tc (98)	Ru 101.1	Rh 102.9	Pd 106.4	Ag 107.9	Cd 112.4	In 114.8	Sn 118.7	Sb 121.8	Te 127.6	I 126.9	Xe 131.3
6	Cs 132.9	Ba 137.3	La 138.9	Hf 178.5	Ta 180.9	W 183.9	Re 186.2	Os 190.2	Ir 192.2	Pt 195.1	Au 197.1	Hg 200.6	Tl 204.4	Pb 207.2	Bi 209.0	Po (209)	At (210)	Rn (222)
7	Fr (223)	Ra (226)	Ac (227)	Rf (261)	Ha (262)	Sg (263)	Ns (262)	Hs (265)	Mt (267)									

Serie Lantanidi

58 Ce 140.1	59 Pr 140.9	60 Nd 144.2	61 Pm (145)	62 Sm 150.4	63 Eu 152.0	64 Gd 157.3	65 Tb 158.9	66 Dy 162.5	67 Ho 164.9	68 Er 167.3	69 Tm 168.9	70 Yb 173.0	71 Lu 175.0
90 Th 232.0	91 Pa (231)	92 U 238.0	93 Np (244)	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (252)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (259)	103 Lr (260)

Gli elementi con i gusci completi sono inerti e vengono detti nobili

la carica più bassa ($+e$, protone) è l'idrogeno. Il suo unico elettrone nello stato fondamentale si trova nel livello di energia più bassa $1s$: la sua orbita è la più vicina possibile al nucleo. Il livello $1s$ può tuttavia ospitare un secondo elettrone purché i due elettroni abbiano spin opposti: ciò accade per gli atomi di elio. Per gli atomi di tale elemento l'anello K è completamente pieno. Una struttura atomica nella quale tutti i livelli fino a una certa energia sono completamente occupati (i corrispondenti anelli sono chiusi) mentre i livelli superiori sono notevolmente distanti e vuoti, è particolarmente stabile poiché è molto difficile spostare gli elettroni e le azioni esterne difficilmente riescono a rompere l'unità atomica: l'elemento corrispondente è chimicamente inerte e non forma aggregati con altri atomi. Gli elementi che hanno strutture di questo tipo sono detti gas nobili o inerti e l'elio ne è un primo esempio. Un nuovo gas nobile si ottiene quando oltre il guscio K anche quello L è completo: ciò richiede altri 8 elettroni (2 per lo stato $2s$ e 6 per gli stati $2p$) cioè un numero totale di elettroni $Z = 10$ ed è il neon. Gli elementi con un numero di elettroni fra 3 e 9 accomodano gli otto elettroni più esterni negli stati $2s$ e $2p$ e costituiscono la seconda riga del sistema periodico.

Il successivo gas nobile è l'argon, con 18 elettroni; l'aggiunta di altri elettroni, dopo l'argon, ha caratteristiche particolari. I primi due elettroni aggiunti (cui corrispondono potassio e calcio) vanno negli stati $4s$ che per questi elementi hanno una energia di poco inferiore a quella degli stati $3d$. Nell'elemento successivo e nei seguenti gli stati $3d$ hanno una energia minore di quella che avevano prima sicché l'aggiunta di nuovi elettroni avviene negli stati $3d$: per questi elementi dallo scandio

Tabella 12.2

Z	ele- mento	K 1s	L 2s 2p		M 3s 3p 3d			N 4s 4p 4d 4f				O 5s 5p 5d 5f 5g					P 6s 6p 6d 6f 6g 6h						Q 7s
1	H	1																					
2	He	2																					
3	Li	2	1																				
4	Be	2	2																				
5	Bi	2	2	1																			
6	C	2	2	2																			
7	N	2	2	3																			
8	O	2	2	4																			
9	F	2	2	5																			
10	Ne	2	2	6																			
11	Na	2	2	6				1															
12	Mg	2	2	6				2															
13	Al	2	2	6				2	1														
14	Si	2	2	6				2	2														
15	P	2	2	6				2	3														
16	S	2	2	6				2	4														
17	Cl	2	2	6				2	5														
18	Ar	2	2	6				2	6														
19	K	2	2	6				2	6				1										
20	Ca	2	2	6				2	6				2										
21	Sc	2	2	6				2	6	1			2										
22	Ti	2	2	6				2	6	2			2										
23	V	2	2	6				2	6	3			2										
24	Cr	2	2	6				2	6	4			2										
25	Mn	2	2	6				2	6	5			1										
26	Fe	2	2	6				2	6	6			2										
27	Co	2	2	6				2	6	7			2										
28	Ni	2	2	6				2	6	8			2										
29	Cu	2	2	6				2	6	9			2										
30	Zn	2	2	6				2	6	10			1										
31	Ga	2	2	6				2	6	10			2	1									
32	Ge	2	2	6				2	6	10			2	2									
33	As	2	2	6				2	6	10			2	3									
34	Se	2	2	6				2	6	10			2	4									
35	Br	2	2	6				2	6	10			2	5									
36	Kr	2	2	6				2	6	10			2	6									
37	Rb	2	2	6				2	6	10			2	6			1						
38	Sr	2	2	6				2	6	10			2	6			2						
39	Y	2	2	6				2	6	10			2	6	1		2						
40	Zr	2	2	6				2	6	10			2	6	2		2						
41	Nb	2	2	6				2	6	10			2	6	4		1						
42	Mo	2	2	6				2	6	10			2	6	5		1						
43	Tc	2	2	6				2	6	10			2	6	5		2						
44	Ru	2	2	6				2	6	10			2	6	7		1						
45	Rh	2	2	6				2	6	10			2	6	8		1						
46	Pd	2	2	6				2	6	10			2	6	10								
47	Ag	2	2	6				2	6	10			2	6	10		1						
48	Cd	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2						
49	In	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	1					
50	Sn	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	2					
51	Sb	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	3					
52	Te	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	4					
53	I	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	5					
54	Xe	2	2	6				2	6	10			2	6	10		2	6					

(segue)

Tabella 12.2 (*segue*)

Z	ele- mento	K	L		M			N				O					P						Q 7s	
			1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	5g	6s	6p	6d	6f	6g	6h	
55	Cs	2	2	6		2	6	10	2	6	10		2	6				1						
56	Ba	2	2	6		2	6	10	2	6	10		2	6				2						
57	La	2	2	6		2	6	10	2	6	10		2	6	1			2						
58	Ce	2	2	6		2	6	10	2	6	10	2	2	6				2						
59	Pr	2	2	6		2	6	10	2	6	10	3	2	6				2						
60	Nd	2	2	6		2	6	10	2	6	10	4	2	6				2						
61	Pm	2	2	6		2	6	10	2	6	10	5	2	6				2						
62	Sm	2	2	6		2	6	10	2	6	10	6	2	6				2						
63	Eu	2	2	6		2	6	10	2	6	10	7	2	6				2						
64	Gd	2	2	6		2	6	10	2	6	10	7	2	6	1			2						
65	Tb	2	2	6		2	6	10	2	6	10	8	2	6	1			2						
66	Dy	2	2	6		2	6	10	2	6	10	10	2	6				2						
67	Ho	2	2	6		2	6	10	2	6	10	11	2	6				2						
68	Er	2	2	6		2	6	10	2	6	10	12	2	6				2						
69	Tm	2	2	6		2	6	10	2	6	10	13	2	6				2						
70	Yb	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6				2						
71	Lu	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	1			2						
72	Hf	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	2			2						
73	Ta	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	3			2						
74	W	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	4			2						
75	Re	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	5			2						
76	Os	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	6			2						
77	Ir	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	7			2						
78	Pt	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	9			1						
79	Au	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			1						
80	Hg	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2						
81	Tl	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	1					
82	Pb	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	2					
83	Bi	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	3					
84	Po	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	4					
85	At	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	5					
86	Rn	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	6					
87	Fr	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	6					1
88	Ra	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	6					2
89	Ac	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	6	1				2
90	Th	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10			2	6	2				2
91	Pa	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2		2	6	1				2
92	U	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3		2	6	1				2
93	Np	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4		2	6	1				2
94	Pu	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6		2	6					2
95	Am	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7		2	6					2
96	Cm	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7		2	6	1				2
97	Bk	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8		2	6	1				2
98	Cf	2	2	6		2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	9		2	6	1				2

al rame, gli atomi nello stato fondamentale hanno 1 o 2 elettronni nel livello $4s$ e questo ha energie molto prossime a quella del livello $3d$. Per il rame è completo il guscio $3d$ e v'è un elettrone nello stato $4s$. Negli elementi successivi al rame gli elettronni si aggiungono negli stati $4s$ e $4p$ e quando questi gusci sono completi, essendo i livelli superiori $4d$ notevolmente distanti, si ha nuovamente la struttura di un gas nobile (il kripton). Dopo il kripton si ripete una situazione analoga a quella vista dopo l'argon, fino a giungere attraverso l'argento (simile al rame) al gas nobile xenon che ha pieno il guscio M ed i gusci $4s$, $4p$, $4d$, $5s$ e $5p$. Negli elementi che seguono, i primi due elettroni (cesio e bario) vanno nello stato $6s$, ma i successivi, invece di andare negli stati $5d$ in analogia ai casi precedenti, vanno negli stati $4f$, che divengono più bassi in energia dei $5d$: si hanno così 14 elementi (terre rare) che si differenziano per il numero di elettroni nello stato $4f$. Siccome le orbite corrispondenti a questi livelli sono molto interne nell'atomo, e le proprietà chimiche sono determinate dagli elettroni nelle orbite periferiche, tutte le terre rare hanno le stesse proprietà chimiche (determinate dagli elettroni negli stati $5d$ e $6s$). Dopo le terre rare, gli elettronni vanno a completare il guscio $5d$ fino al platino. L'elemento successivo, l'oro, è simile al rame e all'argento. In seguito vengono completati i gusci $6s$ e $6p$ fino a giungere al gas nobile più pesante, il radon. Vengono poi aggiunti gli elettroni $7s$ e $6d$.

Abbiamo accennato al fatto che le particolarità con cui i successivi livelli vengono riempiti dipendono dal fatto che le energie dei livelli per gli stessi valori di n e l variano passando da un atomo all'altro, cioè al cambiare di Z . È questo un fatto importante e, come abbiamo già detto, piuttosto difficile a trattare. La figura 12.9 mostra questi cambiamenti: si noti che al crescere del numero atomico i livelli di energia tendono a disporsi nell'ordine naturale (come per un solo elettrone intorno al nucleo Ze). La considerazione delle configurazioni elettroniche dei vari elementi, in particolare quella delle orbite più esterne, consente di spiegare le caratteristiche proprietà di ciascun gruppo.

Così tutti gli elementi del gruppo zero, come abbiamo visto, sono inertii perché hanno una configurazione a gusci chiusi molto stabile. I metalli alcalini (litio, sodio, potassio, rubidio e cesio) appartengono al primo gruppo e hanno una grande tendenza a perdere un elettrone, trasformandosi in ioni positivi monovalenti, perché in

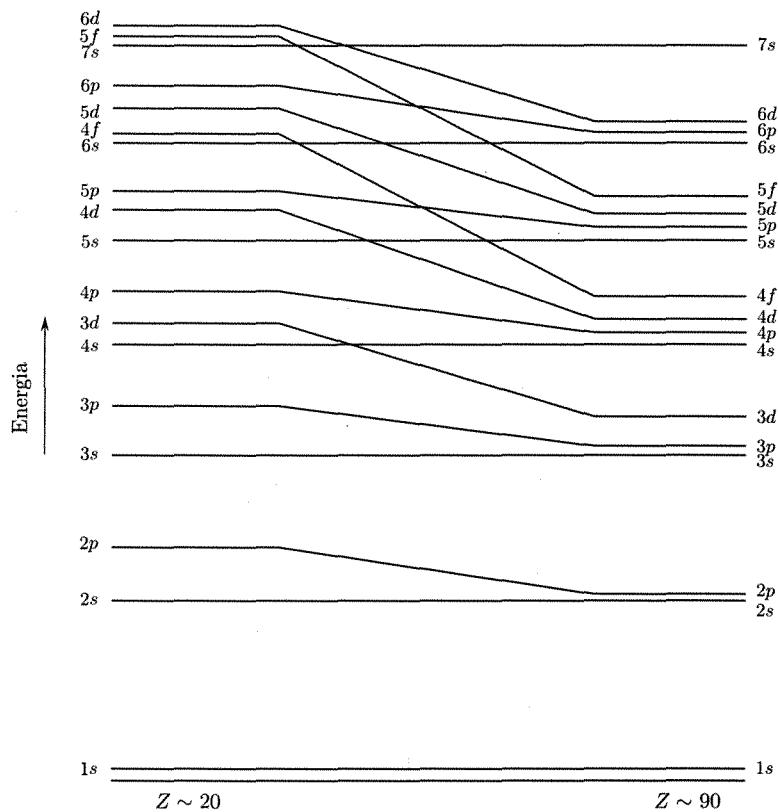


Fig. 12.9

tal modo assumono una configurazione elettronica (di un gas nobile) molto stabile. Le terre alcaline, cioè berillio, magnesio, calcio, stronzio e bario, per le stesse ragioni hanno grande tendenza a trasformarsi in ioni positivi bivalenti. Analogamente gli alogenuri, fluoro, cloro, bromo, iodio, hanno una grande tendenza a prendere un altro elettrone per assumere la configurazione di un gas nobile trasformandosi in ioni monovalenti negativi.

Altre proprietà dei costituenti un gruppo saranno esaminate quando sarà opportuno. È bene ricordare che tutti i componenti ciascun gruppo hanno configurazioni simili negli stati quantici occupati più elevati cioè nelle orbite più esterne; un egual numero di elettroni si trova in tali stati in condizioni analoghe, sicché le interazioni fra atomi, quando essi vengono avvicinati, non variano molto se ad un tipo di atomo se ne sostituisce un altro di un elemento appartenente allo stesso gruppo.

■ 12.7. FORZE FRA ATOMI

Quando due o più atomi della stessa specie o di elementi diversi vengono reciprocamente avvicinati si destano forze di vario genere, che è importante considerare se si vogliono comprendere le modalità con le quali gli atomi si associano per formare singole molecole e cristalli. Gli atomi sono sistemi formati da cariche elettriche; quindi le forze che si destano sono forze fra cariche. Solamente alcune di esse, tuttavia, sono di semplice natura elettrostatica, ottenibili cioè applicando la legge di Coulomb, per la attrazione o repulsione di due cariche, alla distribuzione di cariche esistenti negli atomi o negli ioni; altre invece derivano dalle particolari caratteristiche dei sistemi atomici e sono descritte dalla meccanica quantistica. Gli elettroni, di massa inferiore, si muovono con una rapidità molto maggiore di quella dei nuclei, e si possono trattare i problemi immaginando che i nuclei siano fermi e gli elettroni si muovano intorno a essi. Il problema si riduce allora a calcolare l'energia del sistema (di due o più atomi) in funzione delle distanze fra i nuclei. Questa energia è una energia potenziale e la sua variazione per un certo spostamento di un nucleo è pari al lavoro compiuto dalla forza di interazione.

1. Interazioni elettrostatiche fra atomi rigidi

Dato che gli elettroni sono in rapido movimento intorno al nucleo⁽⁷⁾ e che sono associati alla funzione densità di probabilità $\rho(x, y, z, t)$ ⁽⁸⁾, si può immaginare di sostituirli con una distribuzione continua di carica nello spazio eguale alla funzione ρ e considerare l'atomo come una struttura rigida costituita da un nucleo positivo puntiforme circondato da distribuzioni spaziali rigide di carica negativa, che non vengono disturbate dalla presenza di atomi vicini. In questo caso è possibile vedere che le azioni elettrostatiche prodotte dalle cariche positive e negative che costituiscono un atomo neutro sono, almeno in media, nulle al di fuori dello spazio occupato dall'atomo stesso. Nel caso poi, molto importante, in cui la distribuzione degli elettroni abbia simmetria sferica, questa conclusione è vera non solo in media ma anche istante per istante: questo è il caso degli atomi a gusci chiusi, come gli atomi dei gas inerti.

⁽⁷⁾ Le velocità degli elettroni sono dell'ordine di 10^6 m/s (vedi par. 12.2) e i diametri delle orbite dell'ordine di 1 Å.

⁽⁸⁾ Ricordiamo che la probabilità di trovare l'elettrone ad un dato istante in un elemento di volume $dV(dx dy dz)$ è pari a $\rho(x, y, z)dx dy dz$. Nel caso che qui interessa ρ non varia nel tempo e quindi ρdV è anche la frazione di tempo durante la quale si può immaginare che l'elettrone si trovi nel volume dV .

Ne risulta che quando due atomi si trovano a distanze tali che ciascuno è esterno all'altro, non si esercita nessuna azione fra di essi. Ciò non è più vero quando la distanza diviene inferiore alla somma dei loro raggi: qualora in queste condizioni fosse ancora lecito usare la ipotesi di rigidità degli atomi, le forze fra due atomi al decrescere della distanza al di sotto della somma dei raggi dei due atomi sarebbero dapprima attrattive e poi repulsive. Si considerino infatti le tre configurazioni di figura 12.10 nelle quali i nuclei sono rappresentati da punti e la circonferenza indica la zona ove è essenzialmente distribuita la carica negativa. Nella posizione *a* parte della carica negativa di ciascun atomo, trovandosi nell'interno dell'altro, è attratta dal nucleo del secondo atomo (azione risultante attrattiva); nella posizione *b*, l'azione attrattiva precedente comincia a essere ridotta dalla repulsione fra i nuclei, essendo ciascuno di essi penetrato nello spazio interno dell'altro atomo; nella posizione *c* gli atomi praticamente coincidono e la repulsione è molto forte.

Poiché si avrebbe una forza che al variare della distanza cambia da attrattiva a repulsiva, dovrebbe esistere una posizione intermedia di equilibrio: è possibile tuttavia vedere che la energia potenziale risultante per una interazione di questo tipo (fig. 12.11), pur avendo la forma esatta per spiegare il formarsi di un legame fra gli atomi, non va in pratica bene perché sia le energie di legame (in corrispondenza al minimo) sia le distanze di equilibrio fra atomi che si possono calcolare, sono ben lontane dai valori sperimentali. La ragione di tutto ciò è quella che considerare gli atomi rigidi è una approssimazione che non può essere mantenuta quando gli atomi vengono a trovarsi a distanze minori della somma dei loro raggi: le distorsioni nella distribuzione di carica sono molto forti e conducono a effetti che vedremo fra poco.

Quando si rompe l'equilibrio fra carica negativa e positiva in una struttura atomica, quando cioè invece di un atomo si consideri uno ione, le azioni elettriche non sono più limitate all'interno dell'atomo e si esercitano in tutto lo spazio circostante come se l'eccesso di carica (positivo o negativo) fosse concentrato nel centro dello ione. In questo caso si esercitano forti azioni elettrostatiche, repulsive o attrattive (secondo le cariche), fra ioni in accordo con la legge di Coulomb, che possono tenere uniti ioni di carica opposta a formare molecole o cristalli.

2. Interazioni di scambio

Si esaminino ora le interazioni fra due atomi tenendo conto della deformazione della loro distribuzione di carica, limitandosi al caso che ha interesse nella formazione di legami interatomici, cioè al caso in cui gli atomi siano portati a distanze fra loro tali che le distribuzioni si tocchino e si sovrappongano. L'analisi della situazione che si determina è notevolmente complicata e costituisce uno dei problemi più complessi della meccanica quantistica. Vari effetti si presentano contemporaneamente, il più importante dei quali è quello che determina il carattere repulsivo o attrattivo della interazione: esso è nettamente quantistico ed è legato al principio di esclusione di Pauli.

Cerchiamo di dare in maniera semplice una indicazione dello stato delle cose. Consideriamo dapprima il caso in cui vengano avvicinati due atomi con elettroni in gusci chiusi. Ciò vuol dire che ciascuno stato quantico occupato contiene due elettroni con spin opposti e che tutti gli stati quantici dal valore più basso dell'energia fino a un certo valore mas-

A brevi distanze le forze tra due atomi, da attrattive, divengono repulsive

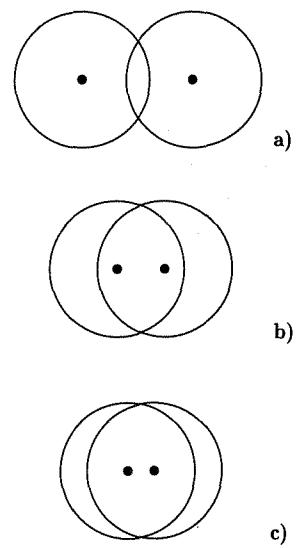


Fig. 12.10

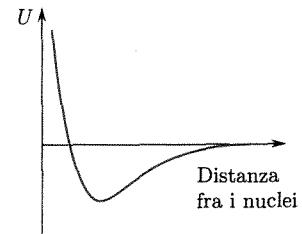


Fig. 12.11

simo sono pieni. Lo spazio che circonda il nucleo ha la densità di carica massima possibile e altri elettroni non possono essere portati nelle vicinanze del nucleo se non con energie superiori a quelle degli elettroni presenti in ciascun atomo. Quando due di tali atomi cominciano a sovrapporsi, la densità di carica nella regione comune aumenterebbe se le distribuzioni fossero rigide. In realtà non potendosi avere un tale aumento, si deve determinare una ridistribuzione di carica con un allontanamento di cariche dalla regione compresa fra i due nuclei verso le regioni esterne di ciascun atomo (cioè verso le regioni non comprese fra i due nuclei): ciò corrisponde a un aumento dell'energia potenziale con la distanza r fra i nuclei. Ciò equivale a dire che si origina una forza repulsiva ($\mathbf{F} = -\partial U/\partial r \cdot \mathbf{r}/r$). È chiaro che l'origine di questa forza repulsiva sta nel principio di Pauli che ha, per così dire, spinto la carica via dalla regione fra i nuclei.

*Il reciproco
orientamento
degli elettroni in due
atomi interagenti
determina forze
repulsive o attrattive
(di scambio)*

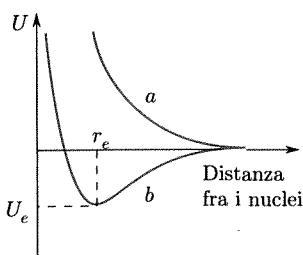


Fig. 12.12

Una situazione del tutto analoga si ha quando vengono avvicinati due atomi che, oltre a eventuali gusci chiusi, abbiano elettroni in livelli non pieni, se questi elettroni nei due atomi hanno spin nella medesima direzione. Per concretare le idee si pensi a due atomi di idrogeno che abbiano ciascuno l'unico elettrone con spin nello stesso verso. È chiaro che quando essi vengono avvicinati le orbite che si sovrappongono si comportano come completamente occupate per elettroni dello spin in questione, pur essendo vuote per elettroni di spin opposto. La curva *a* di figura 12.12 mostra il tratto repulsivo calcolato per due atomi di idrogeno di questo tipo: quando i due atomi giungono a distanze tali che le orbite occupate dagli elettroni si sovrappongono, nasce questa forza repulsiva e i due atomi non possono formare una molecola.

Consideriamo ora invece il caso in cui i due atomi che si avvicinano abbiano elettroni in gusci non chiusi e con spin opposto. In questo caso, innanzitutto, quando i due atomi cominciano a sovrapporsi non v'è alcun ostacolo che impedisca un aumento della densità di carica fra i nuclei: questo fatto, producendo sia un aumento della densità di carica fra i nuclei sia, in maniera opposta al caso precedente, una diminuzione dell'energia del sistema, origina una forza attrattiva. Il principio di esclusione peraltro opera ancora in un'altra maniera: esso tende a far sì che i due elettroni con spin opposto, provenienti ciascuno da uno degli atomi, finiscano per occupare uno stato quantico comune e nuovo. Questo effetto è visto analiticamente nella trattazione quantistica in un termine detto di *scambio* che corrisponde a uno scambio di elettroni fra due atomi e perciò questa nuova forza attrattiva si dice di scambio o anche di attrazione omopolare, volendo con ciò indicare che la attrazione non è dovuta a polarità elettriche determinatesi negli atomi componenti. La curva dell'energia potenziale per atomi che interagiscono in questa maniera è del tipo indicato nella figura 12.12b, che si riferisce al caso di due atomi di idrogeno. La curva ha un minimo marcato. Al diminuire della distanza fra nuclei, quando le orbite degli elettroni esterni cominciano a sovrapporsi, l'azione attrattiva che abbiamo descritta fa diminuire l'energia potenziale. Per distanze fra i nuclei molto piccole, quando cioè si sovrappongono anche le orbite di eventuali gusci chiusi e si sentono le azioni repulsive elettrostatiche fra i nuclei, le forze fra i due atomi sono repulsive e crescono molto rapidamente al ridursi della distanza stessa. V'è una posizione di minimo della energia potenziale che corrisponde alla posizione di equilibrio. Per fissare le idee nella tabella 12.3 sono indicate per alcune molecole biatomiche le distanze

Tabella 12.3

Sost.	r_e (Å)	U_e (joule)
H ₂	0,75	$7,1 \cdot 10^{-19}$
O ₂	1,20	$8,1 \cdot 10^{-19}$
N ₂	1,09	$11,8 \cdot 10^{-19}$
C ₂	1,31	$9,0 \cdot 10^{-19}$
Cl ₂	1,98	$3,9 \cdot 10^{-19}$
Br ₂	2,28	$3,1 \cdot 10^{-19}$
I ₂	2,66	$2,4 \cdot 10^{-19}$
CO	1,13	$15,3 \cdot 10^{-19}$

di equilibrio r_e e le energie di legame per molecola, cioè le profondità della buca nella curva dell'energia potenziale U_e .

Quando due atomi sono legati in questa maniera, si dice che hanno un legame di valenza covalente, dovuto ai due elettroni a spin opposto, ciascuno fornito da uno dei due atomi. Essi vengono a trovarsi in un nuovo stato quantico del sistema, localizzato; in maniera approssimata si può dire che tali due elettroni si trovano su una medesima orbita in uno spazio limitato che comprende i due nuclei.

Se un terzo atomo, C , anche esso con un elettrone a spin non accoppiato nell'orbita esterna, si avvicina ai due atomi A e B già legati covalentemente, esso, pur avendo l'elettrone con spin adatto a legarsi o con A o con B , non può farlo giacché gli elettroni di A e B sono già impegnati in un legame covalente, cioè completano uno stato quantico; di conseguenza, in accordo con il principio di esclusione, si produrrà una repulsione fra l'atomo C e gli altri due. Questo effetto si chiama saturazione della valenza: un legame covalente è formato da due elettroni, e, quando questo legame è stabilito, i suoi due elettroni non possono entrare in altri legami.

Se, peraltro, un atomo ha più elettroni nell'involucro esterno (elettroni di valenza) esso può realizzare uno, due o più legami covalenti con altri atomi diversi, in ciascuno dei quali viene implicato un solo elettrone di valenza. Ricordiamo che ciascun legame covalente è localizzato; gli elettroni che vi partecipano restano nelle vicinanze dei due nuclei degli atomi legati.

V'è un solo caso in cui non si ha né la saturazione della valenza né la localizzazione degli elettroni che costituiscono il legame covalente ed è il caso del legame metallico: se per es. due atomi di sodio sono avvicinati, il loro elettrone nell'orbita esterna serve a determinare un legame covalente; se ora alcuni altri atomi di sodio vengono avvicinati, il primo legame è parzialmente spezzato nel senso che gli elettroni di valenza dei primi due atomi spendono solo parte del loro tempo fra i due atomi e quindi hanno una parte di tempo disponibile per realizzare legami con i nuovi atomi.

Questo processo continua man mano che si aggiungono nuovi atomi e si finisce con l'avere numerosi atomi tenuti assieme da legami che sono essenzialmente covalenti ma che invece di essere ciascuno localizzato fra due atomi, sono diffusi fra tutti gli atomi dell'insieme. Naturalmente le forze che si esercitano fra due atomi sono notevolmente inferiori a quelle che si hanno per un legame covalente localizzato.

La ragione di questo comportamento particolare degli atomi metallici sembra dovuto al fatto che in questi atomi gli elettroni di valenza sono meno legati al loro nucleo di quanto non lo siano gli elettroni di valenza degli elementi non metallici; ciò porta di conseguenza al fatto che la loro orbita è molto estesa e può sovrapporsi a vari altri atomi conducendo a un legame attrattivo fra i vari atomi. Le proprietà caratteristiche del legame metallico sono:

1. la non saturazione della valenza, sicché può essere tenuto assieme un numero qualsiasi di atomi;
2. la densità elettronica è inferiore al valore massimo consentito dal principio di esclusione. Quest'ultima circostanza fa sì che gli elettroni di valenza possano muoversi liberamente, cioè senza apprezzabile aumento di energia, da un punto all'altro dell'insieme di atomi.

Il legame metallico degli elettroni è delocalizzato

■ 12.8. MOLECOLE E CRISTALLI

Le forze esercitansi tra atomi portano ad aggregazioni in molecole o in cristalli

Le considerazioni precedenti mostrano come gli atomi possano entrare nella formazione di unità complesse in virtù di legami particolari: queste unità sono le molecole ed i cristalli costituiti indifferentemente da atomi della stessa specie o di specie diverse. I legami che tengono gli atomi assieme in tali strutture sono essenzialmente ionici o covalenti.

Se per es. un atomo di sodio e uno di cloro sono avvicinati, la tendenza del primo a perdere un elettrone e quella del secondo a prenderne uno sono soddisfatte creando due ioni Na^+ e Cl^- che restano uniti da forze elettrostatiche. In maniera analoga si formano molte molecole: a volte gli ioni invece di essere semplici atomi che hanno la carica elettronica non uguale a quella del nucleo, sono gruppi di atomi uniti fra loro da legami covalenti che hanno la carica elettronica totale diversa dalla somma delle cariche nucleari. Legami di questo genere non hanno saturazione, nel senso che anche se due ioni Na^+ e Cl^- sono uniti a formare una molecola, l'effetto elettrostatico di ciascuno di essi si può esercitare su altri ioni e si può quindi generare una struttura più estesa: ciò può condurre a quelle distribuzioni regolari di ioni che si hanno nei cristalli (ionici).

Nel caso di atomi tenuti assieme da legami covalenti, a causa della saturazione di questi legami, è molto frequente che si producano molecole di dimensioni determinate e limitate: H_2 , O_2 , CO e i numerosi composti del carbonio che si incontrano nella chimica organica.

Si vedrà nel seguito che anche fra le molecole si esercitano forze attrattive (Van der Waals) che danno luogo a disposizioni ordinate in cui entrano molte molecole (cristalli molecolari). Le energie attrattive fra le molecole sono peraltro molto più piccole delle energie in gioco nei legami ionici e covalenti, e ciò porta di conseguenza che i cristalli molecolari possono essere ottenuti e preservati solo in particolari condizioni ove la struttura non venga soggetta a perturbazioni e sollecitazioni di intensità di qualche rilievo.

Gli atomi possono essere tenuti assieme con legami covalenti anche in strutture aperte: ciò accade quando si possono realizzare vari legami covalenti con più atomi contigui. Il diamante è formato da atomi di carbonio legati ciascuno da quattro legami covalenti ai quattro atomi contigui; lo stesso accade per il germanio e il silicio. I legami molto forti fra gli atomi e la loro natura covalente (elettroni localizzati) spiega le caratteristiche di resistenza meccanica e le proprietà elettriche di questi cristalli.

Vi sono infine alcuni elementi metallici che possono essere tenuti in strutture aperte da legami metallici simili al legame covalente ma senza la caratteristica della saturazione. Essi possono costituire aggregati molto grandi sotto forma di cristalli.

Infine, si vuole accennare a un tipo speciale di legame che si presenta in alcuni casi importanti (acqua, ghiaccio, proteine ecc.). Un atomo di idrogeno ha un solo elettrone e quindi potrebbe formare un solo legame covalente con un altro atomo. In alcune condizioni particolari esso è attratto da due atomi formando un legame, chiamato all'idrogeno o ponte-idrogeno, fra questi due atomi. Tale legame è essenzialmente del tipo ionico ed è formato solo con gli elementi che hanno una maggiore tendenza a prendere elettroni e a trasformarsi in ioni negativi: l'idrogeno perde il suo elettrone e il protone realizza il legame. Tale legame è relativamente debole; le energie di legame sono infatti circa 20 volte più piccole di quelle dei legami ionici puri.

Per dare una idea quantitativa della forza dei legami che tengono assieme atomi, ioni e molecole nei cristalli riportiamo nella tabella 12.4 le energie che sono necessarie per separare i componenti (atomi, ioni o molecole) di un cristallo. I dati si riferiscono a una quantità⁽⁹⁾ caratteristica di sostanza formata da un numero fisso di particelle costituenti: $6,022 \cdot 10^{23}$. I dati si riferiscono a misure effettuate a temperatura ambiente, tranne per i cristalli molecolari e per il ghiaccio per i quali sono state fatte alla temperatura di fusione.

Come si vede i legami più forti sono quelli ionici e quelli covalenti; i più deboli quelli fra le molecole di un cristallo molecolare.

Tabella 12.4

Cristallo	Tipo di cristallo	Energia di legame (joule) per $6,022 \cdot 10^{23}$ particelle
Na Cl	ionico	43
Li F	ionico	57,3
Diamante	covalente	40,7
Si C	covalente	67,8
Na	metalllico	6,2
Fe	metalllico	22,4
H ₂ O (ghiaccio)	legame idrogeno	2,87
H F	legame idrogeno	1,9
A	molecolare	0,43
CH ₄	molecolare	0,57

Nella costituzione delle molecole e dei cristalli, i prodotti hanno dimensioni e forme che dipendono dalle distanze di equilibrio fra gli atomi e dalle proprietà di simmetria dei legami che possono essere realizzati.

Bibliografia

- [1] J.C. SLATER, *Introduction to chemical physics*, McGraw-Hill, New York, 1939.
- [2] J.C. SLATER, *Modern physics*, International Student Series, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [3] L. PAULING, E.B. WILSON, *Introduction to quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1935.
- [4] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, M. SAND, *La fisica di Feynman*, vol. I e vol. III, Masson, Milano, 1985.
- [5] E. PERSICO, *Fundamentals of quantum mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1959.
- [6] G. CAGLIOTTI, *Introduzione alla fisica dei materiali*, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [7] E.V. WICHMANN, *La Fisica di Berkeley; Fisica quantistica*, vol. 4, Zanichelli, Bologna, 1973.

⁽⁹⁾ Tale quantità di sostanza, detta *kilomole*, è una massa che in kg è espressa da un numero pari al peso atomico (nel caso di atomi) o dalla somma dei pesi atomici degli atomi che entrano nella molecola (nel caso di molecole). Il numero di particelle presenti è N_A^* (numero di Avogadro per *kilomole*). Vedi cap. 15, par. 15.2 e 15.4.

TERMEOLOGIA

760 mn

760 mm Hg

- ▶ **Sensazione fisiologica di oggetti termicamente diversi:** principio zero dell'equilibrio termico tra tre corpi A , B , C (se A e B sono in equilibrio con C , sono in equilibrio tra loro) e possibilità di un termoscopio (e *termometro*) per definire la temperatura.

Proprietà di corpi dipendenti dallo stato termico e definizione di temperatura (t):

dalla lunghezza $l = l_0(1 + \alpha t)$ (e simili per aree, volumi, pressioni ecc.) con $l_0 = l(t = 0)$ e $t = 0$ da stabilire indipendentemente.

Gas come sostanze termometriche, con α eguale per tutti (se molto rarefatti) e eguale per variazioni di volume e di pressione

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (\text{Gay-Lussac})$$
$$p = p_0(1 + \alpha t);$$

con $t = 0$ per ghiaccio fondente e $t = 100$ per acqua bollente a pressione atmosferica (scala centigrada, $\alpha = \frac{1}{273,15} [{}^\circ\text{C}]^{-1}$).

- ✓ **Temperatura assoluta:** $T = t + T_0$, $T_0 = 273,15$.
- ✓ **Equazione dei gas:** $V/V_0 = T/T_0$ (isobare); $p/p_0 = T/T_0$ (isocore).
- ✓ **Calorimetria;** equilibrio termico tra quantità diverse di una medesima sostanza (equazione):

$$m_1(T_1 - T_e) = m_2(T_e - T_2),$$

e per sostanze diverse

$$c_1 m_1 (T_1 - T_e) = c_2 m_2 (T_e - T_2);$$

c , calore specifico; cm , capacità termica; $cm\Delta T$, quantità di calore scambiata.

- ✓ **Equilibrio tra più corpi:**

$$\sum_i Q_i = 0.$$

- ✓ **Calorimetri** per la misura di quantità di calore scambiate (ad acqua o delle mescolanze, e a ghiaccio o Bunsen).

Trasmissione del calore (modalità diverse):

conduzione, a contatto ($dQ/dt = -KA\Delta T/\Delta l$);

convezione, nei fluidi (per moto reciproco delle parti, dovuto alle spinte di galleggiamento);

irraggiamento, a distanza (per emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica).

mn

760
mm Hg

760 mm l

760 mm Hg

Hg

■ 13.1. INTRODUZIONE

Nella meccanica si è considerato il moto dei corpi rispetto a un sistema di riferimento, per il qual caso si poteva prescindere dall'analisi dettagliata dello stato delle particelle (molecole, atomi) costituenti il corpo stesso. Ora si vuole passare a considerare processi di genere diverso da quelli meccanici che pure sono in parte legati allo stato di moto delle particelle che costituiscono il corpo. Esempi di questi processi sono il riscaldamento di un corpo, la sua dilatazione, il passaggio da uno stato di aggregazione ad un altro (come la fusione) ecc. nei quali non ha tanto interesse il moto del corpo, il quale appare macroscopicamente in quiete, quanto il moto dei suoi singoli componenti.

Nella descrizione di questi processi si può partire da due punti di vista differenti. Nel primo caso (descrizione macroscopica), si osserva che il sistema è formato da un gran numero di particelle simili, delle quali non interessa conoscere singolarmente istante per istante lo stato di moto, mentre si desidera conoscere il comportamento globale dell'insieme nel processo in esame. Un sistema del genere ora detto viene descritto mediante grandezze fisiche la cui introduzione è suggerita dalla esperienza (volume, pressione, temperatura ecc.). La descrizione dei processi da questo punto di vista conduce alla termodinamica. L'altro punto di vista (microscopico) consiste nell'esaminare il comportamento delle singole particelle costitutive dell'insieme e la descrizione del sistema viene fatta mediante grandezze relative alle particelle (numero di particelle, energia, interazioni ecc.) che in genere non sono direttamente misurabili ma che possono condurre, usando opportune operazioni di media, a grandezze misurabili. Questa seconda trattazione conduce alla meccanica statistica e alla teoria cinetica.

Naturalmente la descrizione che segue uno dei due punti di vista trova sostegno e aiuto nelle indicazioni e conclusioni che si raggiungono con l'altro metodo. Per tale ragione pur seguendo in linea di massima la descrizione macroscopica, spesso saranno considerati gli aspetti microscopici dei problemi.

Lo studio dei processi in questa parte della fisica richiede, accanto alle grandezze fondamentali usate per lo studio della meccanica (o dell'elettromagnetismo), l'introduzione di una ulteriore grandezza fondamentale, di cui si tratterà nei prossimi paragrafi.

La descrizione macroscopica di un insieme di moltissime particelle è rappresentativa di valori medi delle grandezze fisiche proprie delle particelle

■ 13.2. TEMPERATURA. PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Per descrivere il comportamento globale di un sistema termodinamico si introduce una grandezza fisica detta temperatura: essa fornisce una indicazione dello stato termico di un corpo. La sua introduzione è suggerita dalle sensazioni che si provano toccando corpi diversi: uno di essi può apparire *più caldo* di un altro. Questa valutazione tattile è naturalmente soggettiva, poco precisa, suscettibile d'errori grossolani legati allo stato dell'osservatore, applicabile solo in certe condizioni fisiche dei corpi, sicché appare opportuno introdurre una grandezza fisica che descriva questo aspetto dello stato dei corpi, definendola operativamente, cioè precisando le modalità da seguire per la misura.

Per chiarire le ragioni che hanno condotto a una certa definizione della temperatura è bene procedere per gradi nella indicazione delle caratteristiche che si vogliono descrivere per la valutazione dell'aspetto dei corpi.

Occorre innanzi tutto osservare come semplici esperimenti mostrino che se due corpi, uno dei quali è stimato più caldo dell'altro, vengono lasciati a contatto per un tempo sufficientemente lungo, finiscono per sembrarci *ugualmente caldi*: si dice che essi hanno raggiunto l'equilibrio termico e la introduzione della nuova grandezza, la temperatura, dovrà essere tale da assegnare ai due corpi in queste condizioni lo stesso valore.

È possibile inoltre vedere che al variare dello stato termico di un corpo, cioè della sensazione di più o meno caldo che esso può dare, variano i valori che per esso assumono alcune grandezze fisiche come la lunghezza, il volume, la resistenza elettrica, il colore ecc. Si può quindi pensare di scegliere uno di questi corpi (*sostanza termometrica*) e porre attenzione a una sua proprietà che dipenda dallo stato termico del corpo (proprietà termometrica). È possibile, per es., introdurre una certa quantità di un liquido (mercurio, alcool ecc.) in un recipiente (fig. 13.1) formato da un bulbo e da un capillare avendo cura di eliminare qualsiasi altra sostanza prima di chiudere il capillare; si osserva allora l'altezza della colonna liquida nel capillare. È possibile anche porre una certa quantità di gas in un recipiente e osservare le variazioni della pressione (a volume costante) o del volume (a pressione costante). Si può scegliere un filo metallico e misurare la sua resistenza elettrica, e così via.

Si ottiene in questa maniera uno strumento (termoscopio) che consente di paragonare oggettivamente gli stati termici dei corpi. Disponendolo infatti successivamente a contatto con ciascuno dei corpi in esame e attendendo un tempo sufficiente perché si stabilisca l'equilibrio termico, la proprietà termometrica assume valori che possono essere usati per il confronto dello stato termico dei corpi stessi.

Se si pone il termoscopio successivamente in contatto con due corpi (e si attende abbastanza a lungo per lo stabilirsi dell'equilibrio termico) la grandezza termometrica assume in genere due valori diversi. Si pongano, quindi, i due corpi a contatto fra loro. All'equilibrio termico corrisponde un valore della grandezza termometrica unico per i due corpi ed intermedio fra i valori precedenti; si può dire che la temperatura dell'equilibrio termico è intermedia fra quelle che i corpi avevano prima di essere posti a contatto. Operando con attenzione, si constata che, al fine di non introdurre errori di valutazione, la massa del termoscopio dovrà essere sufficientemente piccola rispetto a quelle dei corpi da misurare.

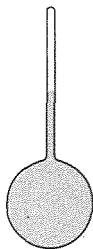


Fig. 13.1

Ciò premesso, diremo, nel paragonare gli stati termici di due corpi, che essi hanno la stessa temperatura qualora, disponendo un termoscopio successivamente a contatto con ciascuno di essi, la grandezza termometrica assuma il medesimo valore.

L'uso del termoscopio per stabilire l'egualanza delle temperature di due corpi è giustificato da quello che viene chiamato *principio* (o postulato) *zero della termodinamica*: se due corpi *A* e *B* sono in equilibrio termico con un terzo corpo *C*, essi sono in equilibrio termico fra loro.

Per giungere ad una valutazione quantitativa (misura) della temperatura occorre esaminare più dettagliatamente le relazioni fra proprietà termometriche e stato termico del corpo.

Si può pensare di avere realizzato diversi termoscopi e di usarli contemporaneamente ponendoli a contatto coi corpi aventi stati termici diversi. Se si indica con \mathcal{P} la proprietà termometrica di uno di questi termoscopi, essa sarà funzione della temperatura T e si potrebbe pensare di definire la grandezza temperatura in modo che questa funzione abbia una espressione analitica scelta a piacere, per esempio lineare. Verrebbe cioè posto

$$(1) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_0(1 + \alpha\Delta T)$$

essendo \mathcal{P} e \mathcal{P}_0 i valori che la proprietà termometrica assume in corrispondenza a due stati termici e α una costante arbitraria. Si avrebbe

$$(2) \quad \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{\mathcal{P}_0} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \alpha \Delta T.$$

Se si ripete questo ragionamento partendo da un termoscopio diverso si trova che le valutazioni di ΔT ottenute coi vari tipi di termoscopi, portati a contatto con due medesimi corpi, non coincidono. Se per es. si prende un termoscopio del tipo di figura 13.1 a mercurio (grandezza termometrica h , altezza raggiunta dal liquido nel capillare misurata rispetto a un punto di riferimento) e un termoscopio costituito da un filo di platino (grandezza termometrica R , resistenza elettrica), e con essi si studia lo stato termico di tre corpi (*A*, *B*, *C*), qualora fosse possibile scrivere relazioni lineari fra le grandezze termometriche (h , R) e la temperatura contemporaneamente compatibili, si avrebbe:

$$\frac{\Delta h_1}{h_0} = \alpha \Delta T_{AB} \quad \frac{\Delta h_2}{h_0} = \alpha \Delta T_{AC}$$

essendo h_0, h_1, h_2 i valori dell'altezza del liquido nel capillare quando il termoscopio è a contatto con i corpi *A*, *B*, *C* e $\Delta h_1 = h_1 - h_0$, $\Delta h_2 = h_2 - h_0$; inoltre

$$\frac{\Delta R_1}{R_0} = \beta \Delta T_{AB} \quad \frac{\Delta R_2}{R_0} = \beta \Delta T_{AC}$$

essendo R_0, R_1, R_2 le resistenze del filo di platino a contatto con ciascuno dei tre corpi e β l'opportuna costante che fornisca ad es. il medesimo ΔT_{AB} precedentemente misurato.

Seguirebbe:

$$(3) \quad \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{\Delta R_1}{\Delta R_2}.$$

Sperimentalmente si trova che questa relazione non è verificata ovvero che l'indicazione di ΔT_{AC} col nuovo termometro non coincide con quella

*Un primo strumento
di misura per le
temperature può basarsi
su una qualunque
grandezza fisica che vari
con lo stato termico
del sistema
che si misura*

del primo, sicché si deve concludere che le varie proprietà termometriche e stato termico non sono tutte dello stesso tipo e quindi non può ammettersi per tutte una relazione lineare con la temperatura. Questo ostacolo può essere superato, in una maniera non interamente soddisfacente, scegliendo una sostanza termometrica particolare e una grandezza termometrica per definire la temperatura e assumendo la validità di una legge lineare solo per questo caso. Si potrebbe per es. scegliere come sostanza termometrica il mercurio e porre l'altezza raggiunta nel capillare funzione lineare di T . In tal caso, si osservi bene, la legge lineare non vale più non solo nei riguardi di un termoscopio di tipo diverso (per es. a resistenza) ma anche per un termoscopio dello stesso tipo che faccia uso di un liquido differente. È questa una situazione non soddisfacente e una scelta del tipo ora indicato può essere utile solo provvisoriamente per poter continuare la ricerca di una soluzione migliore.

Si è così trovato che nei termoscopi che adoperano come sostanza termometrica un gas e come proprietà termometrica la pressione della massa gassosa tenuta a volume costante, le indicazioni ottenute usando gas diversi sono più vicine fra loro di quanto non siano le indicazioni ottenute con termoscopi che usano altre sostanze termometriche. Inoltre le differenze diminuiscono man mano che aumenta la rarefazione dei gas usati: al limite si può ammettere che le indicazioni dei termoscopi a *gas molto rarefatto* nei quali si determina la pressione a volume costante siano indipendenti dal gas usato. Analoghi risultati sperimentali si ottengono con termoscopi a gas nei quali la proprietà termometrica è il volume della massa gassosa a pressione costante. È possibile infine riscontrare che se si confrontano le risposte di due termoscopi entrambi a gas molto rarefatto, uno a volume costante (proprietà termometrica la pressione, p) ed uno a pressione costante (proprietà termometrica il volume, V), si trova verificata la relazione analoga alla (3):

$$(4) \quad \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2}.$$

Tutte queste circostanze fanno pensare che nel caso dei gas molto rarefatti (che approssimano quelli che chiameremo perfetti) le relazioni fra variazioni di volume (a pressione costante) e temperatura, e fra variazioni di pressione (a volume costante) e temperatura, siano dello stesso tipo, siano particolarmente semplici e corrispondano a proprietà generali dei gas.

Appare quindi consigliabile scegliere come sostanza termometrica un gas molto rarefatto, come proprietà termometrica il volume di una certa massa, a pressione costante, o la sua pressione, a volume costante, e porre lineari le relazioni fra queste grandezze e la temperatura.

Un termometro a gas a volume costante (più usato di quello a pressione costante) è realizzato come in figura 13.2. Si ha un bulbo di vetro, quarzo, platino o platino-iridio (secondo il campo di temperatura in cui esso deve essere usato) nel quale si trova una certa quantità di elio o idrogeno. Esso viene posto nell'ambiente di cui si vuole studiare lo stato termico (determinare la temperatura). Il bulbo è in collegamento, tramite un capillare, con un misuratore di pressione a mercurio e con un serbatoio di mercurio. Dopo che si è raggiunto l'equilibrio termico, il serbatoio di mercurio viene innalzato o abbassato per far in modo che il mercurio raggiunga un livello determinato (O) nel ramo del tubo a U collegato

I gas rarefatti reali sono buone sostanze termometriche: essi mostrano tutti il medesimo comportamento di variazione del volume o della pressione con la temperatura

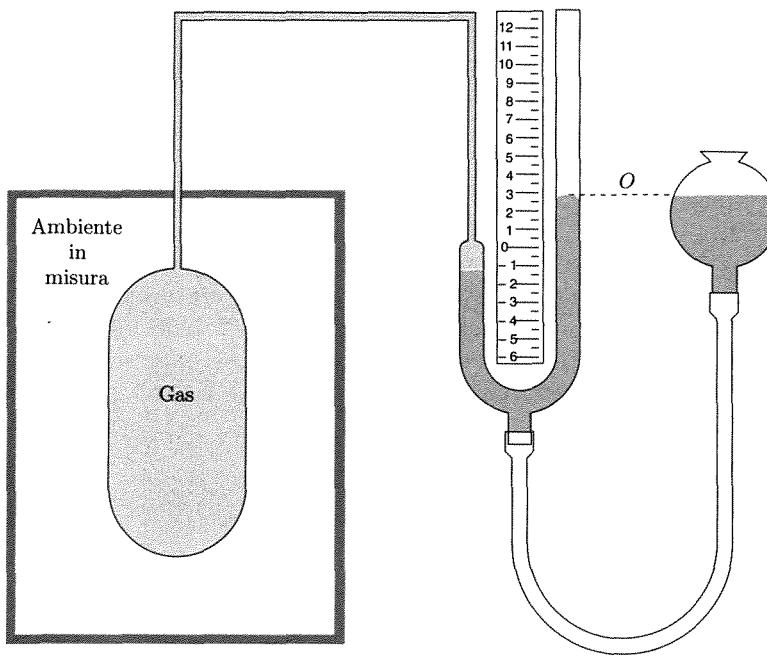


Fig. 13.2

con il bulbo e il volume del gas sia sempre lo stesso. La differenza del livello di mercurio nei due rami del tubo a U consente di determinare la differenza di pressione fra l'atmosfera e la pressione della massa gassosa. Alcune correzioni devono essere apportate per tenere conto dell'espansione del contenitore del gas e del fatto che non tutta la massa gassosa si trova nell'ambiente in misura. A ogni modo, apportando le dovute correzioni, si ha la possibilità di valutare la pressione da introdurre nella

$$(5) \quad T_p = T_0 + \beta \frac{p - p_0}{p_0}$$

essendo β una costante e p_0 la pressione in corrispondenza a uno stato termico di riferimento al quale si assegna per T il valore T_0 .

■ 13.3. SCALE TERMOMETRICHE

Per giungere a una valutazione numerica della temperatura occorre fissare i parametri costanti che intervengono nella (5), prendendo in considerazione stati termici che danno affidamento di stabilità e di facile riproducibilità. Sono questi gli stati termici di sostanze semplici in corrispondenza ai quali due o più fasi sono in equilibrio. Un esempio è il punto triplo dell'acqua, quando cioè coesistono in equilibrio le fasi liquida, gassosa e solida, a una ben determinata pressione. Altri casi importanti sono i punti di fusione e di ebollizione di sostanze semplici: vedremo che essi dipendono solamente dalla pressione.

Nella scala centigrada si sono scelti come punti fissi di riferimento la temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica normale (760 mm Hg) e la temperatura di ebollizione dell'acqua alla stessa pressione: a essi si è convenuto di assegnare i valori 0 °C e 100 °C (gradi

La scala centigrada delle temperature

centigradi). Per avere la scala centigrada si pone il termometro a gas nel ghiaccio fondente e successivamente nei vapori di acqua bollente sempre alla pressione atmosferica normale: l'intervallo delle posizioni raggiunte dall'indice del manometro nelle due misure viene diviso in cento parti. Questa taratura nell'intervallo fra 0 e 100 °C può essere estesa al di sopra di 100 °C e al di sotto di 0 °C usando la legge lineare (5).

L'impiego del termometro a gas è piuttosto delicato e richiede volumi notevoli degli ambienti in misura sicché si preferisce di solito usare altri tipi di termometri tarati per confronto con quello a gas. In queste tarature molto utile riesce la conoscenza dei valori della temperatura di processi che avvengono a temperature costanti (punti fissi). La tabella 13.1 indica per alcuni punti fissi i valori delle temperature (espressi in gradi centigradi) sanzionati in accordi internazionali (1927, 1948). I punti di fusione ed ebollizione sono a pressione atmosferica normale.

Tabella 13.1 Punti fissi della scala internazionale pratica di temperatura

Punto di ebollizione dell'ossigeno	-182,97 °C
Punto di fusione del ghiaccio	0,00
Punto triplo dell'acqua	0,01
Punto di ebollizione dell'acqua	100,00
Punto di ebollizione dello zolfo	444,60
Punto di fusione dell'antimonio	630,50
Punto di fusione dell'argento	960,80
Punto di fusione dell'oro	1063,00

I valori di molti altri punti fissi si trovano nella letteratura.

Nella taratura dei vari termometri che debbano essere usati in misure non particolarmente delicate si fa di solito l'ipotesi che le varie grandezze termometriche varino con legge lineare con la temperatura nell'intervallo fra i due punti fissi usati nella taratura, se questi sono abbastanza vicini. Gli errori che si commettono usando questa ipotesi sono in molti casi trascurabili. La tabella 13.2 indica i risultati del confronto delle indicazioni di un termometro a gas e di altri tre termometri di tipo diverso nell'intervallo fra 0 e 100 °C avendo per ciascuno di essi diviso l'intervallo fra le indicazioni ai punti fissi in cento parti uguali.

Tabella 13.2

Termometro a idrogeno a volume costante	Termometro a mercurio	Termometro a resistenza di platino	Termometro a termocoppia platino-platino rodio
0 °C	0 °C	0 °C	0 °C
20	20,091	20,240	20,150
40	40,111	40,360	40,297
60	60,086	60,360	60,293
80	80,041	80,240	80,147
100	100	100	100

Una scala termometrica diversa, e di maggiore importanza dal punto di vista scientifico, si ottiene studiando le proprietà caratteristiche dei gas perfetti; come si è già detto, lo stesso comportamento è approssimativamente mostrato dai gas reali a temperature distanti dalle temperature

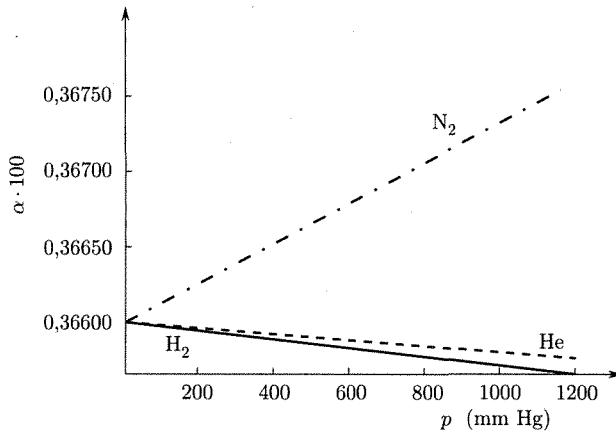


Fig. 13.3

alle quali essi possono essere liquefatti, purché siano mantenuti a pressioni molto basse.

Per il volume, a pressione costante, di una certa massa di un gas rarefatto si può scrivere, usando la temperatura centigrada t

$$(6) \quad V = V_0(1 + \alpha t)$$

e per la pressione a volume costante

$$(7) \quad p = p_0(1 + \alpha t)$$

essendo p_0 e V_0 la pressione e il volume a 0°C e $\alpha = 1/273,15$ il coefficiente uguale per tutti i gas perfetti. La figura 13.3 riporta, per alcuni gas reali, α in funzione di p . Come si vede, a pressioni molto basse il valore al quale tendono le linee è per tutti i gas $\alpha = 1/273,15 = 0,36604 \cdot 10^{-2}$. Appare perciò utile, invece che scegliere lo zero della scala della temperatura in maniera del tutto arbitraria (come avviene per la scala centigrada), sceglierlo in maniera che esso sia in qualche modo legato alle proprietà dei gas perfetti e ci consenta di esprimere in maniera più semplice le loro leggi.

Ciò si ottiene fissando una nuova scala (*delle temperature assolute*) che ha lo zero a una temperatura centigrada di $-273,15$ e che ha ancora diviso in cento parti l'intervallo fra le temperature del ghiaccio fondente e dei vapori d'acqua bollente a pressione normale. La temperatura assoluta T è quindi legata a quella centigrada t dalla relazione

$$(8) \quad T = 273,15 + t.$$

Le relazioni (6) e (7) per i gas perfetti si scrivono in maniera più semplice

$$(9) \quad V = \frac{V_0}{273,15} T$$

$$(10) \quad p = \frac{p_0}{273,15} T.$$

Va subito avvertito che queste relazioni non conservano la loro validità a temperature vicine allo zero giacché prima che si raggiungano tali

La scala della temperatura assoluta, o scala Kelvin, risulta traslata rispetto a quella centigrada

temperature i gas cessano di comportarsi come gas perfetti e addirittura cessano in genere di esistere come gas essendosi trasformati in liquidi e solidi.

In conclusione, si vede che è stato possibile fissare una misura della temperatura basandosi, sia per la scelta della sostanza termometrica sia per quella della scala, sulle proprietà dei gas perfetti. La misura così fissa è indipendente dalla natura del particolare gas usato nel termometro, purché esso possa essere considerato perfetto, ma è legata alle proprietà dei gas. Questo fatto, come si è visto, ha come conseguenza che non si può per questa via dare un significato alla temperatura dello zero assoluto: con termometri a elio a bassa pressione si può raggiungere la temperatura minima di circa 1 grado assoluto. È evidente che per dare un significato fisico alla temperatura dello zero assoluto occorre una definizione della scala delle temperature che non dipenda dalle proprietà della particolare sostanza impiegata nel termometro. È possibile fare ciò per mezzo della termodinamica, come vedremo in seguito: si introdurrà una *scala termodinamica delle temperature* facendo in modo che essa risulti coincidente con quella assoluta nel campo in cui il termometro a gas può essere usato.

Sul significato fisico della temperatura dello zero assoluto, come corrispondente allo stato in cui l'energia delle particelle di un corpo è minima (non zero), si tornerà in seguito.

Nelle considerazioni sulle grandezze fisiche (fondamentali e derivate) (vedi Introduzione, par. 6) è stato già menzionato che *nelle considerazioni della termologia e della termodinamica occorre introdurre una ulteriore grandezza fondamentale* accanto a quelle usate in meccanica. *La scelta* comune è la temperatura e quella *del sistema internazionale di unità* (SI) è appunto la temperatura termodinamica. L'unità SI corrispondente è il *grado Kelvin (K)*⁽¹⁾ definito come la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

Le convenzioni internazionali hanno fissato nel 1968 anche una *Scala Internazionale Pratica di Temperatura* (SIPT-68) che si approssima nei limiti di incertezza delle migliori misurazioni attualmente possibili alla temperatura termodinamica: la temperatura in tale scala si indica spesso con il simbolo T_{68} . Nella convenzione vengono fissati i valori delle temperature che corrispondono a certi punti fissi e sono date le formule per correggere i risultati delle misure per tener conto di variazioni nella pressione atmosferica. Sono inoltre specificati gli strumenti (termometri a resistenza di platino, termocoppie platino-platino rodio e pirometri) da usare nei vari campi di temperatura e le modalità di impiego.

Nella convenzione del 1968 la Scala Internazionale si estende fino a 13,81 K (punto triplo dell' H_2). Lo strumento interpolatore è fino a questa temperatura il termometro a resistenza di platino. Al di sotto di tale temperatura esistono le scale pratiche definite dalla tensione di vapore dell' He^4 (5 – 1 K) e dell' He^3 (3,5 – 0,3 K).

Accanto alla temperatura termodinamica del sistema SI, nelle formule termodinamiche si incontra ancora molto comunemente la scala centigrada in svariate applicazioni: si noti che $\Delta t \text{ } ^\circ\text{C} = \Delta T \text{ K}$.

⁽¹⁾ Dal nome di W. Thomson, Lord Kelvin, che nel 1854, basandosi sulla teoria di S. Carnot introdusse la misura termodinamica della temperatura.

13.4. TERMOMETRI

Nella trattazione precedente sono state date alcune informazioni sui vari tipi di termometri; si descrivono nel seguito alcuni tra i tipi più in uso, di impiego in situazioni particolari.

I termometri a liquido sono come si è detto costituiti da un bulbo contenente il liquido e da un capillare; si osserva l'altezza raggiunta dal liquido nel capillare. Molto usato come liquido è il mercurio per temperature un po' superiori a quelle di solidificazione ($-38,9^{\circ}\text{C}$) e fino a quella di circa 360°C quando la tensione di vapore del mercurio diviene elevata. Per temperature più basse di quelle raggiungibili con il mercurio si può usare come sostanza termometrica alcool colorato (fino a circa -80°C) o pentano (-190°C). I normali termometri a liquido possono essere facilmente modificati per renderli idonei a segnare la temperatura massima o quella minima raggiunta da un corpo in un certo intervallo di tempo. Un termometro a massima è quello clinico nel quale, in corrispondenza al collegamento fra bulbo e capillare, è stata prodotta una strozzatura. Quando il bulbo si scalda, il mercurio si espande ed è forzato a passare nel capillare; quando la temperatura del bulbo diminuisce il mercurio del capillare non riesce a rientrare nel bulbo a causa della strozzatura e resta a segnare la temperatura massima raggiunta. Per far passare il mercurio nel capillare dopo il raffreddamento è necessaria un'energica scossa. Un termometro a minima che usa alcool come sostanza termometrica può avere il seguente schema: nell'interno del capillare e dalla parte del liquido è posto un piccolo e leggero tubo cilindrico di acciaio che può muoversi a frizione sulla parete di vetro del capillare. Il menisco del liquido, quando si ritira in seguito a raffreddamento, lo trasporta indietro: se la temperatura cresce il liquido passa attraverso il tubetto che resta fermo a segnare la temperatura minima raggiunta nell'intervallo in considerazione.

Termometri metallici sono a volte usati, specie in dispositivi termostatici: essi sono costituiti da due sbarre sottili di metalli che hanno caratteristiche di espansione termica diverse e che sono saldate fra loro. Al variare della temperatura intorno ad un certo valore il sistema si incurva in un senso o nell'altro (fig. 13.4).

Più importanti sono i termometri a resistenza elettrica nei quali si usa un filo, in genere di platino, e se ne misura la resistenza mediante una opportuna disposizione sperimentale. Termometri di questo tipo possono essere usati in un vasto campo di temperature, hanno grande sensibilità (possono rivelare variazioni di 10^{-4}°C) e si prestano per effettuare misure a distanza del corpo in esame.

Termometri a liquidi

Termometri di massima e minima

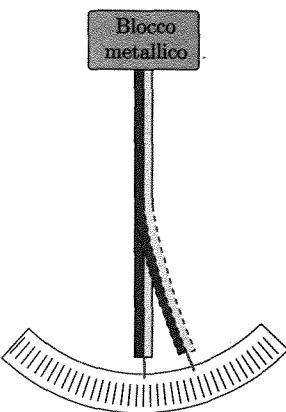


Fig. 13.4

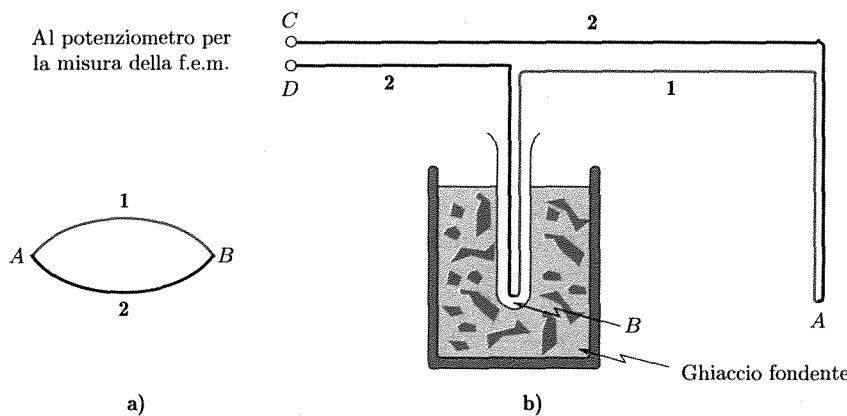


Fig. 13.5

Le coppie termoelettriche sono formate da due fili di metalli diversi (1, 2, fig. 13.5a) saldati in corrispondenza agli estremi *A* e *B*. Se le due giunzioni si trovano a temperature diverse si genera una forza elettromotrice (f.e.m.) che è funzione della differenza di temperatura. Uno schema di termometro a termocoppia è quello indicato in figura 13.5b. Una giunzione *A* fra i metalli 1 e 2 è tenuta alla temperatura del corpo in misura; gli altri estremi dei fili 1 e 2 sono in bagno

Termocoppie

termostatico a temperatura nota (per es. ghiaccio fondente). Il fatto che i punti C, D non siano uniti fra loro ma collegati entrambi con filo di rame al misuratore, non altera la f.e.m. prodotta. Coppie termoelettriche di rame e costantana (una lega di rame e nichel) si prestano per misure al di sotto di 500 °C. Molto usate sono le coppie formate da un filo di platino e uno di platino-rodio con il 10% di rodio: esse consentono misurazioni fino a 1.600 °C. Una notevole proprietà delle termocoppie, per la piccola massa del termometro (rispetto al bulbo dei termometri a liquido) è la minima perturbazione apportata alla misura.

Pirometri

Per temperature molto alte (forni) si usano pirometri ottici che si basano sul fatto che la luminanza dei corpi incandescenti è legata alla temperatura: per la misura si usa un metodo fotometrico. Le temperature molto basse sono di difficile misura: di solito si misura la pressione di vapore dell'elio.

■ 13.5. ESPANSIONE TERMICA DEI SOLIDI

Uno degli effetti più vistosi che accompagnano i cambiamenti di temperatura di un corpo è quello della variazione, a parità di altre condizioni, delle dimensioni del corpo stesso. Consideriamo dapprima il caso dei corpi solidi.

Da un punto di vista macroscopico⁽²⁾ la dilatazione di un solido può essere descritta nel modo seguente. Si prenda in considerazione un corpo solido e si fissi l'attenzione su una sua dimensione lineare, come, per es., la sua lunghezza l in una direzione. Se si varia la temperatura, senza produrre cambiamenti di stato o alterazioni chimiche, si può scrivere

$$(11) \quad l = l(t)$$

e, in accordo con quanto è già stato detto in precedenza (par. 13.3) si trova

$$(12) \quad l = l_0(1 + a\Delta t + b\Delta t^2 + c\Delta t^3 + \dots)$$

essendo l_0 ed l le lunghezze alle temperature di riferimento t_0 , e $t_0 + \Delta t$ e a, b, c , dei parametri costanti. La relazione fra l e t può anche scriversi nella forma

$$(13) \quad l = l_0[1 + \alpha(t)\Delta t]$$

essendo in questo caso $\alpha(t)$ funzione della temperatura, pari a

$$(14) \quad \alpha(t) = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}$$

$\alpha(t)$ prende il nome di coefficiente di espansione lineare.

Nelle applicazioni tecniche di solito si usa la (13) trattando α come costante e scegliendo per essa un valore medio fra i valori che al coefficiente

*Il coefficiente
di dilatazione lineare
di un solido misura
l'incremento relativo
di lunghezza per una
variazione unitaria
di temperatura*

⁽²⁾ La spiegazione su base atomica della espansione di un corpo cristallino, cioè della variazione della costante reticolare con la temperatura, può essere data secondo le seguenti linee. Gli atomi in un cristallo oscillano intorno a posizioni che si susseguono regolarmente nello spazio. La oscillazione di ciascuno di essi può essere descritta con riferimento a una curva di potenziale del tipo di quelle di figura 3.12, cap. 3, par 3.8. All'aumentare della temperatura aumenta l'energia dell'oscillatore e la ampiezza delle oscillazioni. Se la curva del potenziale fosse esattamente parabolica, l'oscillatore sarebbe armonico e all'aumentare della temperatura dallo zero assoluto, nonostante l'aumento dell'ampiezza delle oscillazioni, la posizione media dei singoli atomi e quindi la costante reticolare non varierebbero: non vi sarebbe espansione termica. Il fatto che la curva del potenziale nell'intorno del minimo non sia parabolica (anarmonicità) porta a una variazione della posizione media degli atomi nelle loro oscillazioni in funzione della ampiezza di oscillazione, cioè della temperatura.

competono nel campo di temperature che interessa; ciò equivale nella (12) ad arrestare lo sviluppo in serie alla prima potenza di Δt . Questa approssimazione è di solito lecita dato che i coefficienti α hanno valori molto piccoli. Nel caso di corpi anisotropi i coefficienti sono diversi nelle varie direzioni.

La tabella 13.3 riporta i valori dei coefficienti di espansione (medi nei campi di temperature normalmente usati) per alcune sostanze.

Tabella 13.3 Coefficienti di espansione lineare

Sostanza	$\alpha \cdot 10^6 \text{ } (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$	Sostanza	$\alpha \cdot 10^6 \text{ } (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$
Gomma dura	80	Quarzo	13,4
Ghiaccio	50,7	perpendicolarmente all'asse di simmetria	
Legno di quercia normalmente alle fibre	54,4	Quarzo parallelamente all'asse di simmetria	8,0
Legno di quercia parallelamente alle fibre	5,0	Quarzo fuso	0,3
Zinco	30	Ferro	4,2
Piombo	29,1	Acciaio	10,5
Alluminio	23	Platino	8,9
Stagno	22,5	Vetro d'ottica	7,8
Ottone	18,9	Vetro Pyrex	3,2
Argento	18,8	Porcellana	2,8
Rame	16,7	Invar	0,7

Alcune leghe metalliche, come quella nichel-ferro chiamata invar, hanno coefficienti molto bassi e trovano impiego in applicazioni in cui è necessario che la lunghezza degli oggetti non vari apprezzabilmente con la temperatura (aste e metri graduati, aste di pendoli, parti di orologi ecc.). A volte, come in alcuni orologi a pendolo, si realizzano sospensioni particolari con aste di materiali diversi (acciaio e ottone) e di lunghezza diversa in modo che la espansione verso il basso delle aste di acciaio al crescere della temperatura siano compensate dall'espansione verso l'alto di quelle di ottone.

L'esistenza della dilatazione termica lineare richiede la presenza di giunti di dilatazione in strutture (rotaie, ponti, edifici ecc.) che nel loro uso debbano subire variazioni di temperatura. Naturalmente, qualora il sistema non possa espandersi liberamente, si generano tensioni interne che possono produrre la rottura della struttura se questa non è in condizioni di resistere.

Come esempio del calcolo delle tensioni che si generano in una struttura elastica quando, pur variando la temperatura, viene impedita la deformazione, consideriamo il caso di una sbarra metallica cilindrica cui venga impedito di espandersi assialmente e di flettersi lateralmente. Se per es. una sbarra metallica non può espandersi quando la temperatura subisce un aumento Δt , la forza che deve essere applicata alle estremità di sezione S è quella che produrrebbe da sola una variazione di lunghezza uguale e opposta a quella causata dalla dilatazione termica. Si ha quindi

$$(15) \quad \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t.$$

Lo sforzo normale risulta

$$(16) \quad \sigma = \frac{F}{S} = E \alpha \Delta t.$$

Il fatto che rilevanti sforzi possano prodursi in strutture composte da parti realizzate con materiali diversi, quando varia la temperatura, impone un progetto accurato per assicurarne la resistenza. Un esempio di problemi di questo genere è quello dei giunti metallo-vetro necessari in dispositivi a vuoto (per es. tubi catodici). Il platino e alcune leghe metalliche hanno coefficienti di espansione prossimi a quelli di certi vetri e perciò vengono usati diffusamente. Si usa anche fare giunti rame-vetro avendo cura di rendere il filo di rame abbastanza sottile e di ispessire il vetro in modo che la struttura possa resistere agli sforzi che si generano all'aumentare della temperatura e che sono dovuti al maggiore coefficiente di espansione del rame rispetto al vetro.

Al variare della temperatura tutte le dimensioni lineari di un solido si alterano e la dilatazione di volume risulta naturalmente legata a quella lineare. Se V_0 e V sono i volumi alle temperature di riferimento t_0 e $t = t_0 + \Delta t$, si può scrivere

$$(17) \quad V = V_0(1 + a'\Delta t + b'\Delta t^2 + \dots) = V_0[1 + \alpha'(t)\Delta t]$$

con il coefficiente di espansione

$$(18) \quad \alpha' = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt}.$$

Entro piccoli intervalli di temperatura si può ammettere α' costante e pari ad a' . Il coefficiente di espansione cubica α' è legato al coefficiente di espansione lineare. Se il solido è isotropo:

$$(19) \quad \alpha' = 3\alpha.$$

Per ricavare la (19) si consideri un cubo di spigolo l_0 di un solido alla temperatura t_0 . Alla temperatura t si ha:

$$(20) \quad V = [l_0(1 + \alpha\Delta t)]^3 = V_0[1 + 3\alpha\Delta t + \dots]$$

potendosi trascurare i termini in α di ordine superiore al primo. Dal confronto delle (20) e (17) si ottiene la (19).

■ 13.6. ESPANSIONE TERMICA DEI FLUIDI

Al variare della temperatura anche il volume dei fluidi si altera. Nel caso dei gas ha grande interesse specificare le condizioni esterne (pressione e volume) alle quali avviene la variazione di cui si è già detto al par. 13.2.

Le relazioni (6) e (7) sono lineari. Nel caso di gas reali, il volume a pressione costante (o la pressione a volume costante) sono legate alla temperatura da relazioni più complesse che si possono esprimere mediante serie di potenze di Δt del tipo della (17). Tutto ciò sarà meglio esaminato nel cap. 15 dedicato allo stato gassoso.

I liquidi, come già si è detto, sono sistemi complessi e vari: alle volte sono simili a gas densi, alle volte hanno strutture pseudocristalline, più spesso sono mescolanze di varie strutture. Questa complessità si rispecchia nel fatto che il comportamento nei riguardi della espansione termica può essere molto diverso in liquidi differenti. Solo eccezionalmente si ritrovano liquidi nei quali la variazione di volume è funzione lineare della temperatura in un campo non molto piccolo. Occorre quindi di solito esprimere il volume in funzione della temperatura mediante serie di potenze del tipo (17) ove i termini di ordine superiore hanno importanza rilevante.

Esempio

L'acqua presenta una curva atipica di dilatazione termica

Un esempio caratteristico di questa particolarità dei liquidi è rappresentato dall'acqua. La figura 13.6 riporta il volume di un kilogrammo d'acqua espresso in m^3 (volume specifico); le misure sono state fatte alla pressione atmosferica normale e nel campo di temperature comprese tra -10°C e 100°C . Il tratto fra -10°C e 0°C corrisponde a liquidi in stato di falso equilibrio (surraffreddati). Il volume specifico ha un minimo a 4°C ; la densità corrispondente è $10^3 \text{ m}^3/\text{kg}$ nel SI.

La ragione di tale comportamento sta nel fatto che l'acqua, specie nelle vicinanze del punto di solidificazione, va considerata come una mescolanza di almeno due strutture diverse aventi volumi specifici differenti: al variare della temperatura cambia il rapporto delle due forme presenti in condizioni di equilibrio.

Si osservi che in conseguenza del caratteristico comportamento dell'acqua quando una massa d'acqua, quale quella di un lago o di un mare, viene raffreddata, la solidificazione ha inizio in corrispondenza alla superficie superiore; infatti nella regione di temperature inferiori a 4 °C, l'acqua a temperatura più elevata ha densità maggiore (volume specifico minore) e quindi si raccoglie in basso, mentre l'acqua più fredda va in superficie. Al di sotto della crosta del ghiaccio che si forma, resta l'acqua allo stato liquido: questa circostanza ha profonde conseguenze in quanto consente la vita animale nei periodi freddi nel mare e nei laghi.

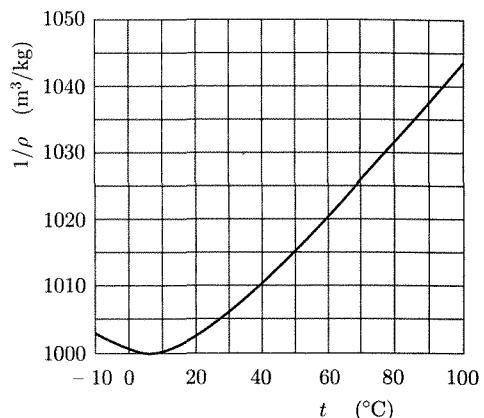


Fig. 13.6

■ 13.7. QUANTITÀ DI CALORE E CALORIMETRIA

Quando più corpi a temperature diverse sono isolati dall'esterno, il raggiungimento dell'equilibrio termico avviene con il raggiungimento di una medesima temperatura, intermedia fra quelle estreme che i corpi avevano inizialmente, corrispondente al passaggio di energia da un corpo all'altro e alla ripartizione dell'energia totale fra i gradi di libertà delle particelle componenti i corpi del sistema: questo trasferimento di energia dovuto alla differenza di temperatura corrisponde, in un certo contesto cui vogliamo ora accennare, a *quantità di calore* che dai corpi più caldi passano a quelli più freddi. Le vedute attuali sono fondate sulla conoscenza della costituzione dei corpi e saranno più diffusamente illustrate in seguito.

Lo sviluppo di questa parte della terminologia che tratta delle quantità di calore e dei suoi trasferimenti da un corpo a un altro fu effettuato, in maniera sufficientemente adeguata, al tempo in cui si ammetteva che il calore fosse una specie di fluido (calorico), che potesse passare da un corpo a un altro. Questa è la ragione storica che sta alla base della terminologia e della introduzione di certe grandezze (quale appunto la quantità di calore) tuttora in uso.

La quantità di calore richiesta per far passare un corpo da una temperatura t_1 a una temperatura t_2 non è altro che l'energia che bisogna che il corpo scambi con l'esterno in modo che i moti delle sue particelle passino da quelli caratteristici per il primo stato a quelli caratteristici del secondo stato. Tuttavia, se si vuole introdurre la quantità di calore come grandezza fisica senza far uso della relazione fra calore ed energia, è possibile procedere nella seguente maniera. Si può infatti definire come quantità di calore quell'ente che deve essere somministrato (o sottratto) a un corpo perché questo vari la sua temperatura. Perché possa essere considerato come grandezza fisica bisogna stabilire i criteri di uguaglianza e di somma e fissare l'unità di misura.

Per far ciò prendiamo in considerazione un apparecchio realizzato allo scopo, quale il calorimetro a ghiaccio di Bunsen (fig. 13.7). In un recipiente in cui v'è ghiaccio fondente (0 °C) è immerso un vaso a doppia parete. La parte B , riempita di acqua, continua con un capillare ove è disposto del

L'equilibrio termico tra corpi inizialmente a temperature diverse avviene attraverso lo scambio di quantità di calore

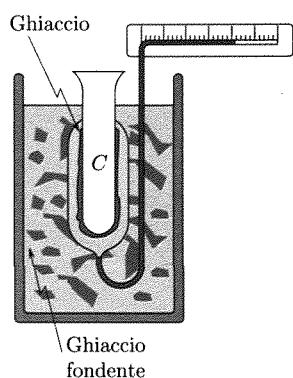


Fig. 13.7

La kilocaloria è la quantità di calore necessaria per innalzare da 14,5 a 15,5 °C 1 kg d'acqua

mercurio: l'estremità del mercurio nel capillare non a contatto con l'acqua si può spostare davanti a una scala graduata e costituisce l'indice dello strumento. In queste condizioni il vaso a doppia parete si porta alla temperatura del bagno termostatico esterno ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$). Se nella parte interna C si dispongono degli oggetti a temperatura inferiore a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, parte dell'acqua in B a contatto con la parte interna solidifica e siccome il passaggio acqua-ghiaccio produce un aumento di volume, il mercurio nel capillare e l'indice all'estremità libera si spostano. Se si toglie il corpo freddo dalla regione C si ha un dispositivo sperimentale alla temperatura di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ pronto per le esperienze che a noi interessano. Se per es. si pone nell'interno di C un corpo a temperatura superiore allo zero, esso si raffredderà fino a questa temperatura: si osservi che in tale disposizione la quantità di calore ceduta dal corpo viene impiegata non per variare la temperatura del calorimetro ma per produrre un cambiamento di stato (ghiaccio-acqua).

Si vedrà in seguito (cap. 15, par. 15.30; cap. 16, par. 16.9) che una proprietà dei cambiamenti di stato è di avvenire a temperatura costante, se la pressione è tenuta costante, e di richiedere un definito scambio di energia con l'esterno.

Sembra quindi logico ritenere che:

1. due corpi (di natura, massa, temperatura diverse) abbiano ceduto la stessa quantità di calore raffreddandosi dalla temperatura iniziale a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ se è uguale la massa di ghiaccio che per ciascuno di essi è stata convertita in acqua nel calorimetro;
2. le quantità di calore cedute da vari corpi nel loro raffreddamento fino a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ siano proporzionali alle masse di ghiaccio trasformate in acqua.

In tal maniera si possono fissare operativamente i criteri di uguaglianza e somma per le quantità di calore. Perché si possa considerare questa quantità una grandezza fisica occorre fissarne l'unità di misura. Il calorimetro descritto ci consente di fare alcune esperienze dalle quali si ricava che la quantità necessaria per far passare un corpo da una temperatura t_1 a una temperatura t_2 (non molto diversa), cioè la differenza delle quantità di calore cedute dal corpo al calorimetro quando esso passa da t_2 a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e da t_1 a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, è proporzionale alla differenza $t_2 - t_1$, alla massa del corpo m e dipende dalla natura del corpo stesso.

Questa esperienza mostra che la definizione di una unità di misura per le quantità di calore richiede la scelta di: 1. una sostanza, 2. una massa, 3. un intervallo di temperatura.

L'unità scelta è la grande caloria (kilocaloria), di simbolo Cal o kcal; essa è la quantità di calore richiesta per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua da ⁽³⁾ 14,5 a $15,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Usata è anche la piccola caloria, di simbolo cal, che è la quantità di calore richiesta per innalzare la temperatura di 1 g di acqua da 14,5 a $15,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Queste due unità vengono spesso usate in collegamento al SI. È bene peraltro subito notare che tali unità non appartengono a tale sistema, giacché come si è detto e come meglio si vedrà, le quantità di calore sono energie e quindi vanno espresse usando la corrispondente unità.

⁽³⁾ La scelta della posizione dell'intervallo di un grado ($14,5-15,5\text{ }^{\circ}\text{C}$) è stata fatta con il criterio di facilitare le misure per la determinazione dell'unità. Spesso si usa la *kcal media* definita come la centesima parte della quantità di calore richiesta per innalzare 1 kg di acqua da $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La quantità di calore richiesta per portare una massa m di acqua dalla temperatura t_1 alla temperatura t_2 è, per quanto si è detto,

$$(21) \quad Q = m(t_2 - t_1).$$

Nel caso che il corpo sia di una sostanza diversa

$$(22) \quad Q = cm(t_2 - t_1)$$

il parametro c , che rappresenta la natura del corpo nei riguardi della quantità di calore richiesta per variare la sua temperatura, prende il nome di calore specifico. Va subito osservato che il parametro c è in genere funzione della temperatura e dipende dalle modalità con le quali avviene la somministrazione di calore. Quando il parametro c non varia molto con la temperatura si può dire che il calore specifico è la quantità di calore che bisogna dare all'unità di massa del corpo perché la sua temperatura vari di un grado. Spesso occorre specificare la maniera in cui lo scambio di calore è effettuato (a volume costante, a pressione costante ecc.).

Il calore specifico si misura in kcalorie/kg °C.

Il prodotto cm prende il nome di capacità termica del corpo: anche per essa valgono le osservazioni precedenti circa la dipendenza dalla temperatura e dalle modalità di riscaldamento o raffreddamento del corpo. Con cautela può dirsi che essa rappresenta la quantità di calore necessaria al corpo di massa m perché la sua temperatura vari di un grado e si misura quindi in kcal/°C.

Prima di terminare queste considerazioni sul confronto e sulla misura delle quantità di calore, accenneremo ad alcuni altri tipi di calorimetri molto usati.

Il calorimetro delle mescolanze è costituito (fig. 13.8) da un recipiente cilindrico che contiene una massa nota m_1 di acqua a una temperatura t_1 non molto discosta da quella ambiente. Alcune precauzioni sono prese per ridurre a limiti trascurabili i possibili scambi di calore con l'ambiente di cui si dirà nel seguito:

1. la superficie del cilindro è riflettente per ridurre l'assorbimento di energia per irraggiamento;
2. il cilindro è sostenuto mediante sugheri che sono cattivi conduttori di calore;
3. il cilindro è disposto in un altro recipiente più grande in modo da isolarlo il più possibile dall'ambiente circostante;
4. il cilindro è munito di un coperchio (isolante).

Nel cilindro è disposto un agitatore per rendere rapidamente uniforme la temperatura e un termometro per determinarla. Se nell'interno del cilindro contenente acqua viene introdotto un corpo di massa m_2 , calore specifico c , temperatura t_2 , il sistema si stabilizzerà a una temperatura t_f . Qualora possano essere trascurate le perdite di calore verso l'esterno, si può affermare che la quantità di calore scambiata dal corpo, cioè $cm_2(t_2 - t_f)$, deve essere pari alla somma delle quantità di calore assorbite dall'acqua e dal calorimetro:

$$(23) \quad cm_2(t_2 - t_f) = m_1(t_f - t_1) + d(t_f - t_1).$$

In tale relazione d è la quantità di calore richiesta per innalzare di 1 °C la temperatura delle varie parti (vaso, termometro, agitatore) del calorimetro. Di solito si tiene conto di questa quantità di calore immaginando di avere una massa d'acqua presente nel calorimetro maggiore di quella effettiva di una quantità m' che richieda, per variare la sua temperatura di 1 °C, la stessa quantità di calore d richiesta dalle parti del calorimetro. La massa m' si chiama *equivalente in acqua del calorimetro*

Il calore specifico di un corpo è la quantità di calore necessaria per variare la temperatura dell'unità di massa di 1 °C

La capacità termica di un corpo è la quantità di calore necessaria per variarne la temperatura di 1 °C

Il calore specifico è la capacità termica dell'unità di massa

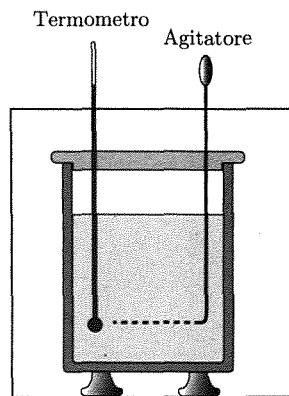


Fig. 13.8

e si determina sperimentalmente, facendo per una volta la esperienza descritta con un corpo di calore specifico noto. La (23) si scrive:

$$(24) \quad cm_2(t_2 - t_f) = (m_1 + m')(t_f - t_1).$$

Questo calorimetro è molto usato per misurare i calori specifici e, con semplici adattamenti, può servire per la misura di calori di fusione, di condensazione e dei calori sviluppati nelle reazioni chimiche.

La trasmissione del calore per convezione ha luogo nei fluidi in virtù del moto interno di parti, dovuto alle forze di galleggiamento sulle regioni più calde

■ 13.8. TRASMISSIONE DEL CALORE - CONVEZIONE

La trasmissione del calore consiste nel passaggio di quantità di calore da un corpo a un altro o da una parte di un corpo a un'altra. Essa avviene attraverso tre meccanismi diversi: convezione, conduzione e irraggiamento. La convezione è quel processo nel quale la trasmissione del calore è associata a movimento di materia: essa può aversi nei liquidi e negli aeriformi nei quali le varie particelle sono libere di muoversi e cambiano densità con la temperatura. Ad eccezione del caso dell'acqua al di sotto di 4 °C, l'aumento della temperatura produce una diminuzione della densità, in conseguenza della quale le particelle calde tendono a portarsi nella parte superiore della massa fluida e quelle più fredde nella parte inferiore; si creano correnti nella massa e un rimescolamento nel fluido in conseguenza del quale il calore è trasmesso da una parte all'altra del fluido stesso. Esempi di questo processo di trasmissione si hanno nel liquido contenuto in una pentola scaldata dal fondo e nell'acqua di un impianto di termosifone a circolazione naturale in cui l'acqua scaldata in caldaia sale nelle tubazioni verso i radiatori, mentre quella fredda scende in caldaia. La stessa origine hanno, almeno in parte, la corrente del Golfo e altre correnti oceaniche che si generano in superficie vicino all'Equatore e fuiscono verso regioni più fredde: correnti di acqua fredda scorrono in senso inverso in profondità. Processi di convezione nei gas sono implicati negli impianti di ventilazione e nella generazione dei venti. Come è noto le brezze che soffiano al mattino dal mare verso la terra e all'imbrunire da terra verso il mare sono le correnti di ritorno che servono a sostituire le masse d'aria che ascendono dalla terra (che si riscalda più rapidamente del mare al mattino perché assorbe più energia raggiante e ha un calore specifico medio più piccolo) o dal mare (che si raffredda più lentamente alla sera).

■ 13.9. CONDUZIONE

Se due corpi a diversa temperatura sono posti a contatto, o due parti dello stesso corpo si trovano a temperature diverse, si ha passaggio di quantità di calore per conduzione dalla parte calda verso quella fredda, senza che a ciò sia associato uno spostamento di materia.

L'energia corrispondente al calore è nei solidi l'energia cinetica e potenziale associata alle vibrazioni degli atomi che costituiscono l'edificio cristallino o l'energia cinetica di particelle (elettroni nei metalli) libere di muoversi nel solido. All'aumentare della temperatura aumenta l'ampiezza delle oscillazioni, così come aumenta l'energia delle particelle libere eventualmente presenti. Ponendo a contatto corpi a temperature diverse la natura delle interazioni fra le particelle che costituiscono i corpi fa sì che l'energia fluisca dalla regione calda ove maggiore è l'ampiezza di oscilla-

zione degli atomi a quella fredda ove tale ampiezza è minore. Vedremo in seguito che all'equilibrio corrisponde una precisa ripartizione dell'energia fra i vari gradi di libertà del sistema complessivo. A questo processo è associato un abbassamento della temperatura del corpo inizialmente caldo, e un innalzamento di quella del corpo freddo, fino all'equilibrio quando tutto il sistema è alla medesima temperatura.

Per giungere a una valutazione delle quantità di calore trasmesse per conduzione si consideri la situazione schematicamente illustrata in figura 13.9: una sbarra parallelepipedo omogenea ha le facce estreme fissate a pareti che vengono tenute a temperature T_1 e $T_2 > T_1$ costanti. Stabilitosi il regime stazionario, si trova sperimentalmente che la temperatura è costante in ogni sezione normale all'asse della sbarra e decresce uniformemente da un estremo all'altro. In tali condizioni la quantità di calore trasmessa nel tempo t da un estremo all'altro della sbarra e che passa attraverso ciascuna sezione parallela alle facce di ingresso ed uscita è direttamente proporzionale a $T_2 - T_1$, inversamente proporzionale alla lunghezza l della sbarra e direttamente proporzionale all'area A della sezione e al tempo t :

$$(25) \quad Q = K \frac{A(T_2 - T_1)}{l} t.$$

In tale relazione K è il coefficiente di conducibilità termica del materiale della sbarra. La (25) può facilmente essere scritta in termini differenziali; a tale scopo si consideri (fig. 13.9) in corrispondenza alla ascissa x uno strato di spessore infinitesimo dx e sulle due facce estreme di tale strato due areole infinitesime dS . Le condizioni poste precedentemente per tutta la sbarra possono essere ritenute valide per lo strato di spessore dx e sezione dS ; si può quindi scrivere, secondo Fourier, per la quantità di calore dQ che passa attraverso una sezione dS normale alla direzione x lungo la quale esiste il gradiente termico dT/dx

$$(26) \quad dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt.$$

Il segno meno compare perché il flusso termico è positivo nel verso nel quale il gradiente termico (dT/dx) è negativo.

Il coefficiente K si misura, usando le calorie in $\text{kcal m}^{-1}\text{s}^{-1}(\text{°C})^{-1}$. Va osservato che questo coefficiente è in realtà funzione della temperatura e si può ritenere costante solo se le differenze di temperatura in gioco non sono molto grandi. La tabella 13.4 riporta i coefficienti di varie sostanze: da essa si vede che i metalli sono *buoni conduttori* nel senso che essi hanno valori di K molto più elevati di quelli di altri solidi (*cattivi conduttori*); questi ultimi sono in genere materiali a fibre, porosi o vetrosi.

I metalli oltre che essere buoni conduttori di calore sono anche buoni conduttori di elettricità; le due proprietà sono legate fra loro giacché nei metalli lo stato delle cose può essere rappresentato, come si è già detto, pensando che vi sia un gran numero di elettroni liberi di muoversi che causa allo stesso tempo la conducibilità elettrica e, quasi interamente, la conducibilità termica.

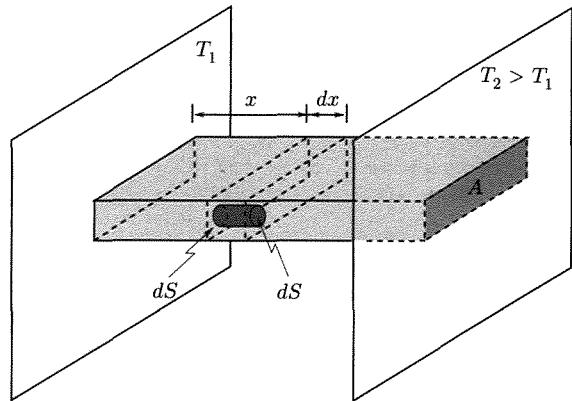


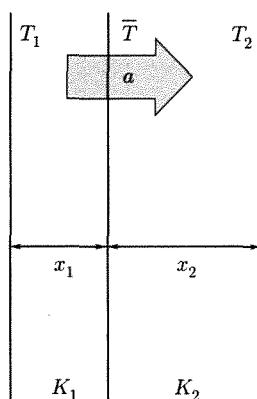
Fig. 13.9

*La conduzione
del calore è dovuta
al trasferimento diretto
dell'energia meccanica
delle particelle del corpo
a contatto reciproco*

Tabella 13.4 Coefficienti di conducibilità termica

Sostanza	$\text{kcal m}^{-1}\text{s}^{-1} (\text{°C})^{-1}$	Sostanza	$\text{kcal m}^{-1}\text{s}^{-1} (\text{°C})^{-1}$
<i>Solidi metallici</i>		<i>Solidi non metallici</i>	
Alluminio	$4,85 \cdot 10^{-2}$	Calcestruzzo	$2,2 \cdot 10^{-4}$
Rame	$9,27 \cdot 10^{-2}$	Sughero	$1,3 \cdot 10^{-5}$
Oro	$7,00 \cdot 10^{-2}$	Crosta terrestre	$4 \cdot 10^{-4}$
Ferro	$1,44 \cdot 10^{-2}$	Feltro	$1 \cdot 10^{-5}$
Argento	$10,0 \cdot 10^{-2}$	Ghiaccio	$5 \cdot 10^{-4}$
Piombo	$8,3 \cdot 10^{-2}$	Vetro	$24 \cdot 10^{-4}$
Nichel	$1,42 \cdot 10^{-2}$	Legno di quercia	$0,6 \cdot 10^{-5}$
Platino	$1,66 \cdot 10^{-2}$	Porcellana	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Stagno	$1,55 \cdot 10^{-2}$	Seta	$2,0 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	$0,20 \cdot 10^{-2}$	Mattoni isolanti	$3,5 \cdot 10^{-5}$
Zinco	$2,66 \cdot 10^{-2}$	Mattoni refrattari	$2,5 \cdot 10^{-4}$
		Mattoni normali	$1,5 \cdot 10^{-4}$
<i>Liquidi</i>		<i>Gas</i>	
Acqua	$1,4 \cdot 10^{-4}$	Aria	$5,7 \cdot 10^{-6}$
		Argon	$3,9 \cdot 10^{-6}$
		Elio	$3,4 \cdot 10^{-5}$
		Idrogeno	$3,3 \cdot 10^{-5}$
		Ossigeno	$5,6 \cdot 10^{-6}$

Le proprietà di conduzione termica dei liquidi e dei gas sono piuttosto limitate: in essi come si è visto la convezione è il metodo più efficiente di trasmissione del calore. Alle volte si trae profitto dei bassi coefficienti di conducibilità termica dei gas realizzando, a scopo di isolamento, delle disposizioni ove gli altri processi di trasmissione del calore attraverso i gas (convezione e irraggiamento) sono impediti. Ciò si ottiene mediante una sostanza solida porosa di materiale poco conduttore, con le cavità riempite di aria (poliestere espanso, piume, tessuti, coperte, materiali di isolamento ecc.).

Esempi

1. Si abbia una parete a facce parallele formata da due strati di spessore e materiali diversi che separa due ambienti a temperature T_1 e T_2 ($< T_1$) (fig. 13.10).

In condizioni stazionarie il flusso di calore Q/t sarà costante attraverso ogni sezione parallela alle facce. Facendo il conto per sezione unitaria ($A = 1$) e indicando con \bar{T} la temperatura sul piano di separazione dei due materiali, si può scrivere

$$(27) \quad \frac{Q}{t} = \frac{K_1(T_1 - \bar{T})}{x_1} = \frac{K_2(\bar{T} - T_2)}{x_2}.$$

Si ricava successivamente

$$(28) \quad \bar{T} = \frac{K_1 x_2 T_1 + K_2 x_1 T_2}{K_1 x_2 + K_2 x_1}$$

$$(29) \quad \frac{Q}{t} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{x_1}{K_1} + \frac{x_2}{K_2}}$$

Fig. 13.10

2. Si consideri (fig. 13.11) un tubo cilindrico di raggi interno r_1 ed esterno r_2 le cui pareti interne ed esterne siano alle temperature T_1 e T_2 ($T_2 < T_1$). Prendiamo in considerazione la trasmissione del calore attraverso l'unità di lunghezza della parete del tubo in condizioni stazionarie.

Se si indica con T la temperatura in corrispondenza alla superficie cilindrica di raggio r generico, si può scrivere

$$(30) \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{1}{2\pi r K} \frac{dQ}{dt}.$$

Il flusso di calore dQ/dt è, essendo il regime stazionario, uguale per ogni cilindro coassiale con le superfici interne ed esterne del tubo, cioè non dipende da r . Si ha:

$$dT = -\left(\frac{1}{2\pi K} \frac{dQ}{dt}\right) \frac{dr}{r}$$

ed integrando:

$$(31) \quad T_2 - T_1 = -\left(\frac{1}{2\pi K} \frac{dQ}{dt}\right) \ln \frac{r_2}{r_1}$$

e quindi:

$$(32) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi K(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

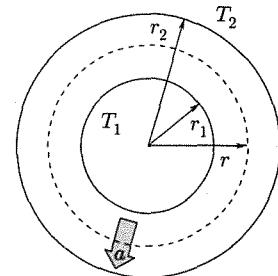


Fig. 13.11

■ 13.10. IRRAGGIAMENTO

Si usi una disposizione sperimentale quale quella di figura 13.12: una scatola metallica, che può essere evacuata, è munita di due piccole finestre di vetro e di una apertura che può essere chiusa. Al dispositivo che realizza tale chiusura venga sospeso un corpo C e un termometro; si usi per la sospensione un filo di un cattivo conduttore di calore (quarzo fuso, nylon, seta ecc.). Il corpo C sia portato, prima di essere introdotto nella scatola, a una temperatura T_2 diversa da quella T_1 alla quale si trovano le pareti dell'involucro; la scatola infine venga rapidamente evacuata dopo l'introduzione del corpo C . Illuminando il termometro con un fascetto di luce che entri da una finestra e osservando visivamente la scala del termometro dopo che è stato fatto il vuoto nel recipiente, si nota che la temperatura del corpo varia con il tempo fino a portarsi allo stesso valore T_1 della temperatura alla quale è tenuta la scatola (equilibrio termico). In tale esperienza la trasmissione del calore non può avvenire con i meccanismi esaminati in precedenza (la trasmissione per conduzione attraverso il filo può essere trascurata); il nuovo meccanismo è chiamato *irraggiamento*. La trasmissione per irraggiamento può quindi avvenire anche attraverso lo spazio vuoto: sua caratteristica fondamentale è quella che l'energia è trasportata nello spazio da un corpo a un altro mediante radiazione elettromagnetica. Questo processo di trasmissione implica la trasformazione dell'energia termica di un corpo in energia raggianti (*emissione*), la trasmissione di questa energia mediante onde elettromagnetiche (*propagazione*) e la trasformazione dell'energia raggianti in energia termica del secondo corpo (*assorbimento*).

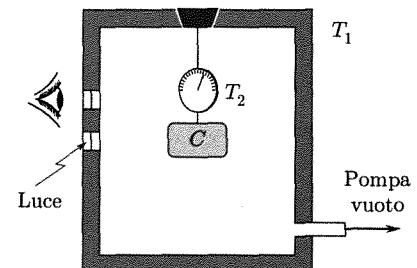


Fig. 13.12

La trasmissione di calore per irraggiamento avviene tra corpi a temperatura diversa ed è attuata, anche nel vuoto, dalla propagazione di onde elettromagnetiche

La natura elettromagnetica delle onde che qui sono implicate è stata dimostrata da numerose esperienze (Macedonio Melloni, 1842). Tali onde sono del tutto simili a quelle che costituiscono le onde radio (hertziane), la luce, i raggi X, i raggi γ : si tratta di campi elettrici e magnetici variabili nel tempo che *si propagano* nello spazio *per onde* alla velocità $3 \cdot 10^8$ m/s.

La figura 13.13 riporta uno schema delle denominazioni assegnate alle varie parti dello spettro delle onde elettromagnetiche: in esso sull'asse verticale è riportato il $\log_{10} \lambda$, essendo la lunghezza d'onda espressa in metri. Le frequenze corrispondenti sono date da $\nu = c/\lambda$. Onde elettromagnetiche di lunghezze d'onda fra kilometri e frazioni di mm (hertziane) sono usate nelle radiocomunicazioni circolari, nei radar, nei ponti radio: esse sono prevalentemente generate per mezzo di circuiti elettrici. Onde con lunghezze d'onda da 10^{-4} a 10^{-7} m sono quelle che hanno interesse rilevante nella propagazione del calore: esse sono emesse dai corpi in relazione alla loro temperatura. Le onde che sono rilevabili dall'occhio (visibili) hanno lunghezze d'onda da $7,6 \cdot 10^{-7}$ m a $3,9 \cdot 10^{-7}$ m e rientrano nella banda che ha interesse nella trasmissione del calore per corpi a temperatura elevata. I raggi X sono onde di lunghezza d'onda fra 10^{-8} e 10^{-11} m, mentre i raggi γ hanno λ fra 10^{-10} e 10^{-13} m.

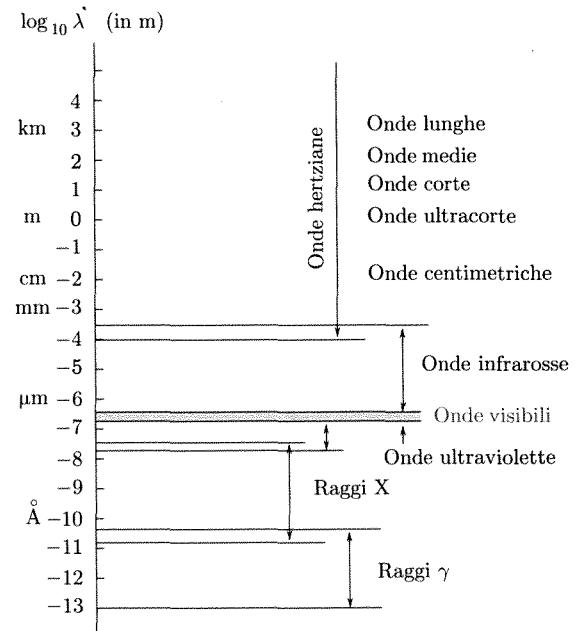


Fig. 13.13

La propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto o in un mezzo dielettrico è studiata mediante l'elettromagnetismo classico. La emissione e l'assorbimento di queste onde da parte della materia costituisce il primo esempio di interazione fra radiazione e materia che non può essere spiegato con le teorie della meccanica classica e dell'elettromagnetismo classico. Furono appunto le difficoltà incontrate nell'interpretare questi fenomeni di emissione e di assorbimento che spinsero Planck ad introdurre il concetto di quanto, cioè ad ammettere che le quantità di energia che possono passare dalla materia alla radiazione o viceversa non possono avere qualsiasi valore, ma debbano essere multipli di una quantità definita, quanto, proporzionale alla frequenza della radiazione ($E = h\nu$, con h costante di Planck). Si è visto in seguito che queste proprietà della radiazione non sono limitate ai

processi di emissione e assorbimento e che una caratteristica fondamentale della radiazione è quella di essere costituita da quanti di energia: essa cioè, accanto alla natura ondulatoria possiede anche quella corpuscolare; quest'ultima si manifesta in alcuni fenomeni quali quelli di emissione e assorbimento che interessano nella trasmissione per irraggiamento.

Si tornerà successivamente sui problemi relativi alla emissione e all'assorbimento di energia raggiante da parte della materia (cap. 21); qui si vuole solo aggiungere che per lo studio quantitativo dell'energia raggiante si fa in modo che questa sia assorbita da qualche corpo e si misura l'innalzamento della temperatura di quest'ultimo. In genere si usa come corpo e rivelatore un termometro a termocoppia in cui una delle giunzioni, annerita per aumentarne l'assorbimento, è esposta alla radiazione mentre l'altra è tenuta a temperatura costante: a volte si usano serie di termocoppe di questo genere con le quali si giunge a rivelare variazioni di temperatura dell'ordine di 10^{-6} °C. Un altro metodo molto usato è quello di far incidere la radiazione su un sottile nastro di platino, anche esso annerito, e osservare le variazioni di resistenza elettrica.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

✓ **Sistema termodinamico:** più generale sistema che scambia energia con l'esterno attraverso lavoro e calore.

✓ **Stato (termodinamico):** condizione del sistema definita da valori dei parametri macroscopici (**stato di equilibrio:** valori uniformi e costanti delle grandezze intensive).

✓ **Equazione di stato:** legame funzionale tra i valori dei parametri di un sistema che definiscono lo stato.

✓ **Trasformazione:** cambiamento di stato di un sistema termodinamico; **reversibile**, passante per tutti stati di equilibrio (ottenibile con differenze infinitesime tra i parametri intensivi del sistema e quelli esterni) e **irreversibile**.

Lavoro elementare per trasformazione **quasistatica** (reversibile): $dL = YdX$ (Y variabile intensiva, X estensiva); per X volume, $dL = pdV$.

✓ **Primo principio termodinamica:** in una qualunque trasformazione ciclica di un sistema è

$$JQ = L \quad (\text{Joule}),$$

con J costante = 4,18 joule/caloria; in una qualunque trasformazione è

$$Q = L + \Delta U$$

$$dQ = dL + dU,$$

con U , **energia interna** (funzione di stato), somma di tutti i tipi di energia contenuti nel sistema. Q e L non sono funzioni di stato, le variazioni dipendono dalla trasformazione compiuta.

► **Calori specifici** e legame generale con parametri di stato; calori specifici in trasformazioni isocore e isobare.

► **Trasformazioni isobare:** $dQ = dU + pdV = dH$, con $H = U + pV$, **entalpia**, funzione di stato.

■ Primo principio della termodinamica. Conservazione dell'energia

14.

■ 14.1. INTRODUZIONE

L'ipotesi che il calore sia un fluido indistruttibile contenuto nei corpi il quale possa passare da un corpo all'altro, pur consentendo di spiegare i processi di trasferimento del calore fra corpi a diversa temperatura posti a contatto, non può essere accettata giacché è in contrasto con numerose altre esperienze, come quelle nelle quali, in seguito alla presenza di attriti fra corpi in movimento, si osserva un innalzamento di temperatura senza che venga fornito del calore dall'esterno; in tali esperienze, cioè, apparirebbe una creazione di calore. Questi ultimi processi hanno consentito di indagare sul legame fra la quantità di energia di vario tipo che scompare e la quantità di calore che si manifesta nei processi stessi. Allo scopo di giungere a una presentazione del primo principio della termodinamica, che rispecchia le conclusioni tratte da queste osservazioni, è bene premettere alcune considerazioni sui sistemi termodinamici.

■ 14.2. SISTEMI TERMODINAMICI

Lo stato di un sistema formato da varie parti, assimilabili ciascuna a un punto materiale, viene descritto in meccanica mediante un numero di parametri, pari al numero di gradi di libertà, in genere, funzioni del tempo. Tale procedura perde evidentemente il suo significato nel caso di sistemi tanto complessi da richiedere un numero molto elevato di parametri indipendenti⁽¹⁾ giacché non si può immaginare di eseguire una misura che consenta di determinarli in un tempo sufficientemente breve in modo da poter ritenere che il sistema non abbia nel frattempo cambiato stato dinamico. D'altra parte in questi casi, per determinare il comportamento del sistema nel suo insieme, si è trovato che non è necessario conoscere lo stato di moto delle singole particelle; ma, proprio per il fatto che il sistema è costituito da un gran numero di particelle equivalenti,

⁽¹⁾ Si pensi che una massa gassosa che occupi a 0 °C e alla pressione di una atmosfera 1 cm³, contiene un numero di molecole $n = N_A/22,4 \cdot 10^3 = 6,022 \cdot 10^{23}/22,4 \cdot 10^3 = 2,69 \cdot 10^{19}$; N_A è il numero di (Avogadro) molecole contenute in una grammomolecola (millesima parte di una kilogrammomolecola) e questa occupa a 0 °C e a una atmosfera il volume di 22,41 litri, qualunque sia la sostanza gassosa (legge di Avogadro). Si vede quindi che, anche quando le molecole possono essere considerate come corpi rigidi, il numero $3n$ di gradi di libertà è molto grande.

Il più generico sistema fisico, per il quale si considerano tutti i possibili scambi energetici, è un sistema termodinamico

Le condizioni per l’equilibrio termodinamico

risulta sufficiente valutare alcune grandezze globali (pressione, temperatura ecc.). Un sistema di questo tipo, formato da un gran numero di particelle e che può essere descritto per mezzo di poche grandezze globali fra le quali è compresa la temperatura, si chiama sistema termodinamico. Lo studio del comportamento di questi sistemi nei casi in cui sono coinvolti scambi di calore e variazioni di temperatura, è compito della termodinamica.

Sebbene oggi sia possibile legare le grandezze globali che vengono usate nella descrizione dei sistemi termodinamici allo stato di moto dei singoli costituenti grazie alla meccanica statistica e alle conoscenze sulla struttura atomica e in questa maniera si riesca a illustrare molti aspetti delle leggi della termodinamica, va chiaramente detto che la termodinamica si è sviluppata indipendentemente basandosi su osservazioni dirette del comportamento dei sistemi formati da un gran numero di componenti simili, giungendo alla formulazione di *principi* che vanno presi come *postulati* da cui dedurre il comportamento dei sistemi materiali in processi nei quali avvengono trasformazioni dell’energia che implicano il calore. La termodinamica cioè costituisce un edificio separato dalle teorie statistiche basate sulla conoscenza della struttura microscopica della materia; essa è quindi indipendente dalle ipotesi semplificatrici che in tali trattazioni sono introdotte e consente di ottenere risultati di grande precisione e di validità molto generale.

■ 14.3. EQUILIBRIO TERMODINAMICO

Se si considera un sistema termodinamico, per es. una massa gasosa, e lo si lascia a se stesso (per es. isolato dall’ambiente esterno), si osserva *sperimentalmente* che, anche se inizialmente sono presenti fra le varie parti del sistema disuniformità quali quelle dovute a moti turbolenti, a correnti fluide o a differenze di pressione, di temperatura ecc., dopo un tempo più o meno lungo tali disuniformità scompaiono e si raggiunge uno stato nel quale non sono più evidenti moti macroscopici e alcune grandezze globali, quali la temperatura, hanno un valore uniforme in tutto il sistema: si dice che il sistema ha raggiunto uno stato di equilibrio termodinamico.

Diremo con maggiore precisione che un *sistema termodinamico si trova in equilibrio* quando:

1. *le forze meccaniche* che si esercitano sulle varie parti del sistema *sono in equilibrio*;
2. *non v’è moto macroscopico* osservabile fra le varie parti;
3. *tutte le parti del sistema sono alla medesima temperatura*;
4. *eventuali reazioni chimiche hanno raggiunto l’equilibrio* nel senso che non v’è ulteriore variazione di composizione;
5. *processi di cambiamenti di stato* (solidificazione, evaporazione ecc.) *hanno anche essi raggiunto l’equilibrio*.

Occorre precisare che se un sistema è in equilibrio termodinamico non vuol dire che in esso non vi sia movimento: i singoli costituenti il sistema si trovano sempre in moto, ma tali moti non sono percettibili su scala

macroscopica⁽²⁾). Se si indica col termine di microstato del sistema quello che corrisponde a un particolare insieme di valori per le posizioni, velocità, stati quantici delle singole particelle, si può dire che in condizioni di equilibrio termodinamico da un istante all'altro il sistema passa da un microstato a un altro al quale corrispondono gli stessi valori delle grandezze globali che descrivono lo stato termodinamico (macrostato di equilibrio).

Esempio

Per chiarire meglio i concetti di macrostato, di microstato e di equilibrio si consideri un caso semplice, che peraltro è ben lungi dalla realtà, quello di un sistema formato da otto oggetti (per es. molecole di un gas) identici ma distinguibili (A, B, C, D, E, F, G, H) che possano distribuirsi in due celle di ugual volume⁽³⁾, I e II (fig. 14.1).

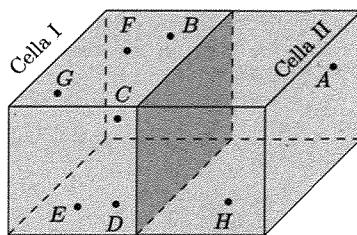


Fig. 14.1

Il macrostato che vede tutte le particelle in I è realizzato da un solo microstato; il macrostato che ha 7 particelle in I e una in II può essere realizzato in 8 diverse maniere, secondo quale è la particella in II, cioè in un numero⁽⁴⁾ pari alle combinazioni di classe 1 di 8 oggetti $8/1 = 8$. Ciò significa che 8 microstati corrispondono allo stesso macrostato. Se si considera il macrostato con due particelle in II il numero corrispondente di microstati è pari al numero di combinazioni di classe 2 di 8 oggetti $(8 \cdot 7)/2 = 28$. Si ponga infatti attenzione appunto alle possibili combinazioni di particelle in II

AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
BC	BD	BE	BF	BG	BH	
CD	CE	CF	CG	CH		
DE	DF	DG	DH			
EF	EG	EH				
FG	FH					
GH						

La tabella 14.1 riporta per i possibili macrostati caratterizzati dal numero di particelle in I e II i corrispondenti numeri di microstati.

Tabella 14.1

Macrostati		Microstati
Particelle in		Numero
I	II	
8	0	1
7	1	8
6	2	28
5	3	56
4	4	70
3	5	56
2	6	28
1	7	8
0	8	1

⁽²⁾ Nelle considerazioni termodinamiche di equilibrio non si considerano le *fluttuazioni*, cioè le deviazioni dallo stato di equilibrio che pure esistono e hanno grande importanza in talune situazioni.

⁽³⁾ Si noti che in questo esempio per semplicità ci si limita a considerare esclusivamente le posizioni degli oggetti, tralasciando altri elementi (per es. quantità di moto) che in genere occorrono per definire compiutamente lo stato (vedi cap. 17, par. 17.12).

⁽⁴⁾ Il numero di combinazioni di classe k di n oggetti ($k < n$) è

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tabella 14.2

Macrostatisti		Microstatisti
Particelle in		Numero
I	II	
20	0	1
19	1	20
18	2	190
17	3	1.140
16	4	4.845
15	5	15.504
14	6	38.760
13	7	77.520
12	8	125.970
11	9	167.960
10	10	184.756
9	11	167.960
8	12	125.970
7	13	77.520
6	14	38.760
5	15	15.504
4	16	4.845
3	17	1.140
2	18	190
1	19	20
0	20	1

Il numero di microstati per macrostato nel caso di occupazione parziale delle due celle cresce rapidamente con il numero di particelle.

Se per es. si considera il caso di 20 particelle che si possano distribuire fra due celle il numero di microstati per i vari possibili macrostati è dato nella tabella 14.2.

È abbastanza intuitivo che se le due celle sono alla stessa temperatura e non vi sono ostacoli al disporsi delle particelle nelle due celle la condizione di equilibrio corrisponderà al macrostato caratterizzato da uno stesso numero di particelle per cella: si vedrà in seguito che ciò significa, nel caso dei gas, uguale pressione nelle celle del sistema.

Dalle considerazioni precedenti e dalle tabelle si può intuire che tale macrostato di equilibrio è, fra i macrostati possibili, quello cui corrisponde il numero maggiore di microstati che lo realizzano.

Al crescere del numero delle celle e delle particelle del sistema il numero di microstati corrispondente a un macrostato cresce molto rapidamente, ma il macrostato di equilibrio è sempre quello cui corrisponde il numero massimo di microstati che lo realizzano; a ciò corrisponde la distribuzione delle particelle del sistema in un gran numero di stati consentiti (disordine massimo). Se tutti i microstati hanno uguale probabilità di essere realizzati, lo stato di equilibrio corrisponde al macrostato che è realizzato dal maggior numero di microstati distinti: la probabilità per ogni macrostato è pari al corrispondente numero di microstati diviso per il numero totale di microstati possibili⁽⁵⁾. Su queste relazioni fra stato di equilibrio e disordine si tornerà in seguito (cap. 17, par. 17.12).

■ 14.4. GRANDEZZE O VARIABILI DI STATO. EQUAZIONI DI STATO

Lo stato di equilibrio termodinamico è descritto per mezzo di un numero limitato di grandezze o parametri che prendono il nome di variabili di stato: tali sono la temperatura, il volume, la pressione ecc. I valori che esse assumono per un certo stato di equilibrio sono caratteristici di quello stato e non dipendono dalla maniera con la quale lo stato è raggiunto. Va sottolineato che tanto la tendenza di un sistema lasciato a sé di raggiungere uno stato di equilibrio termodinamico quanto l'esistenza di variabili termodinamiche che caratterizzano tale stato, *non sono deducibili da principi generali ma sono i risultati di osservazioni sperimentali*.

Le variabili di stato che caratterizzano l'equilibrio termodinamico sono di due tipi: intensive ed estensive. Le variabili intensive sono quelle i cui valori non dipendono dalle dimensioni del sistema. Grandezze di tale tipo sono per es. la temperatura e la pressione: se infatti si considera una massa gassosa in equilibrio e la si divide in due parti, i valori della temperatura e della pressione in ciascuna delle due parti sono eguali se ciascuna di esse è in equilibrio. Le variabili estensive hanno invece valori che dipendono dalla quantità di materia che costituisce il sistema. La più immediata di tali grandezze è la quantità di ciascuna sostanza chimica presente nel sistema. La maniera più conveniente per esprimere ciascuna di queste quantità è quella di riferirsi all'unità mole (simbolo mol)⁽⁶⁾ o al suo multiplo kmole

⁽⁵⁾) Il numero totale di microstati per un numero N di particelle che può distribuirsi in maniera diversa in un numero a di celle è a^N . Negli esempi precedenti $a = 2$: per $N = 8$, $a^N = 256$; per $N = 20$, $a^N = 1.048.576$.

⁽⁶⁾) La mole (o kmole) è una quantità riconducibile direttamente a una massa e quindi nessuna nuova grandezza fisica viene qui introdotta. Si faccia attenzione al fatto che l'elemento caratteristico non è qui la massa di questa quantità di sostanza, che varia da caso a

All'equilibrio
le variabili estensive
sono proporzionali alla
massa del sistema,
le intensive sono eguali
in ogni punto di un
sistema omogeneo

(kmol): una mole di una sostanza avente peso molecolare M è la massa di M grammi; per definizione essa contiene un numero costante delle particelle costitutive considerate, pari al numero di Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$; la kmole è pari a 10^3 mol e quindi contiene $N_A^* = 6,022 \cdot 10^{26}$ particelle. Queste quantità, nel caso che qui principalmente interessa di molecole o atomi, vanno indicate come moli (o kmoli) di molecole o di atomi; è bene avvertire tuttavia che esse sono spesso tuttora indicate con il nome di grammomolecole (grammoatomi) e kgrammomolecole (kg atomi).

Il numero di kmoli di molecole⁽⁷⁾ di ciascuna specie presente nel sistema può cambiare da uno stato termodinamico a un altro se avvengono reazioni chimiche o scambi di sostanza con l'esterno.

Si può dire che le altre variabili estensive sono quelle che risultano proporzionali al numero n di kmoli che costituiscono il sistema. Un esempio è costituito dal volume: se si divide un sistema (per es. gassoso) in due parti, il volume viene diviso in due e ciascun volume parziale è proporzionale al numero di kmoli che resta nella parte.

Prendiamo in considerazione alcuni esempi di sistemi termodinamici e vediamo quali sono le variabili di stato usate per descrivere l'equilibrio.

- a. Nel caso di un gas omogeneo, le variabili di stato sono la temperatura (intensiva), la pressione (intensiva), il volume (estensiva).
- b. Se si considera una sbarra sollecitata a trazione e si considera l'equilibrio termodinamico le variabili sono la temperatura, la forza che sollecita la sbarra (intensiva), la lunghezza (estensiva).
- c. Se si considera una sbarra sollecitata a torsione le variabili sono la temperatura, la coppia torcente (intensiva), l'angolo (di torsione) di cui ruotano le sezioni estreme della sbarra (estensiva).
- d. Per un materiale magnetico in un campo magnetico le variabili sono la temperatura, l'intensità del campo magnetico \mathbf{H} (intensiva) e la magnetizzazione totale \mathcal{M} (estensiva)⁽⁸⁾.
- e. Per un materiale dielettrico in un campo elettrico, le variabili sono la temperatura, il campo elettrico \mathbf{E} (intensiva), la polarizzazione dielettrica totale \mathcal{P} (estensiva).
- f. Per un materiale dielettrico in un campo elettromagnetico, sottoposto a una sollecitazione meccanica di compressione uniforme, le variabili intensive sono la temperatura, i campi elettrici e magnetici e la pressione; le variabili estensive sono il volume, la polarizzazione dielettrica totale, la magnetizzazione totale.

caso secondo la sostanza considerata, ma il fatto che il numero di particelle in essa è sempre lo stesso, qualunque sia la sostanza. L'elemento caratteristico cioè della nuova grandezza è il *numero di particelle presenti*. Ciò è di particolare importanza nei campi della fisica molecolare e statistica, della chimica fisica e della chimica in genere ove le considerazioni da svolgere si riferiscono alle particelle come elementi costitutivi. Per tali ragioni nei campi su menzionati la *quantità di sostanza intesa come numero di particelle presenti* viene trattata come una grandezza fondamentale e come tale è inclusa nel SI. In tal caso la unità mole (mol) è definita come la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante unità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0,012 kg di ^{12}C . Le unità elementari devono essere specificate (atomi, molecole, ioni, elettroni...).

(7) Nel presente testo si avrà a che fare in genere con sostanze nelle quali le unità elementari sono molecole e solo in pochi casi atomi o elettroni. Per tale ragione di solito si ometterà la specifica del tipo di particelle quando si intenda riferirsi a molecole.

(8) Per la comprensione del comportamento di un mezzo materiale, qui considerato come sistema termodinamico, ai campi elettrico e magnetico esterni si fa riferimento a quanto sarà studiato nell'Elettromagnetismo.

La considerazione di questi esempi mostra che i sistemi termodinamici possono essere sottoposti ad azioni di diverso genere (meccaniche, elettriche, magnetiche ecc.) e va osservato che ciascuna di tali azioni conduce a uno scambio d’energia del sistema con l’esterno. Va inoltre osservato che la presenza di una nuova interazione conduce alla introduzione di una coppia di variabili (una intensiva e una estensiva) per la determinazione dello stato termodinamico. Vedremo meglio in seguito che lo scambio di quantità di calore corrisponde a uno scambio d’energia e che tale scambio è caratterizzato dalla grandezza intensiva temperatura e da una grandezza estensiva (entropia).

Si osservi inoltre che anche alla grandezza estensiva n , numero di kmoli di una specie molecolare presente nel sistema, va associata una grandezza intensiva che prende il nome di potenziale chimico μ : quando si aggiungono dn kmoli al sistema si conferisce a esso l’energia μdn .

Si raggiunge così la conclusione generale che *le variabili di stato usate per descrivere uno stato di equilibrio termodinamico si presentano in coppie: una coppia per ogni maniera con la quale il sistema può scambiare energia con l’esterno* (in qualsiasi forma, cioè quantità di calore, energia meccanica, elettrica ecc.); si dice spesso che per la descrizione del sistema occorre una coppia di variabili per ciascun *contatto energetico*.

Le variabili di stato peraltro non sono tutte fra loro indipendenti. La natura del sistema fissa infatti delle relazioni o equazioni di stato fra di esse. Si ha una di tali relazioni per ogni azione alla quale il sistema è sensibile; di conseguenza le *grandezze di stato indipendenti*, necessarie per fissare lo stato di equilibrio di un sistema termodinamico, sono *una per ciascuna maniera con la quale è possibile al sistema scambiare energia con l’esterno* (contatto energetico).

Nel caso per es. di un gas che può avere contatti energetici con l’esterno mediante trasferimenti di quantità di calore e mediante azioni meccaniche che si esplicano tramite una pressione, le grandezze che servono per determinare lo stato di equilibrio sono: per il primo contatto la temperatura T e una nuova grandezza estensiva che sarà introdotta in seguito (entropia); per il secondo contatto, la pressione p e il volume V . Fra le quattro grandezze esistono due relazioni caratteristiche del sistema. Riservandoci di vedere in seguito, nel cap. 17, quella nella quale interviene la entropia e che consente di eliminare la entropia fra le grandezze da usare in questa fase per la descrizione del sistema, possiamo scrivere l’altra nelle forme

$$(1) \quad V = V(p, T)$$

$$(2) \quad p = p(V, T).$$

Tali *equazioni di stato* rispecchiano le caratteristiche del sistema e consentono di ridurre a due le grandezze indipendenti.

Se si considera un materiale magnetico in un campo magnetico, i contatti energetici sono quello termico e quello dovuto ad azioni magnetiche; le grandezze di stato sono T ⁽⁹⁾, \mathbf{H} , \mathcal{M} ; fra di esse esiste un’equazione di

⁽⁹⁾ Anche qui per il contatto termico va considerata accanto alla temperatura l’entropia. La esistenza di una relazione fra l’entropia e le altre grandezze di stato consente di non considerarla in questa fase.

stato

$$(3) \quad \mathcal{M} = f(\mathbf{H}, T)$$

sicché le variabili indipendenti sono due. Nel caso che intervengano anche azioni meccaniche le variabili sono T , \mathbf{H} , \mathcal{M} , p , V , ma poiché si possono scrivere due relazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{M} = f(\mathbf{H}, T, p) \\ V = f'(\mathbf{H}, T, P) \end{cases}$$

le grandezze indipendenti si riducono a tre.

Lo stato del sistema può essere rappresentato mediante un punto in uno spazio avente tante dimensioni quante sono le grandezze indipendenti. Nel caso più semplice di sistema termodinamico che possa scambiare solo azioni meccaniche con l'esterno mediante una pressione (per es. un gas) le grandezze indipendenti possono essere $T, V; T, p$ e p, V e lo stato sarà rappresentato da un punto nel piano corrispondente.

■ 14.5. TRASFORMAZIONI

Naturalmente noi saremo interessati in particolare ai cambiamenti di stato di un sistema, al suo passaggio da uno stato iniziale di equilibrio a uno stato finale, anche esso di equilibrio, cioè alle sue trasformazioni. Riferiamoci per semplicità a un sistema descritto mediante le grandezze p, V, T e prendiamo come parametri indipendenti T e V . Il sistema si trovi in equilibrio ed A sia il suo punto rappresentativo nel piano TV (fig. 14.2): esistono una temperatura e una pressione che sono le stesse in tutto il volume V . Si supponga di variare rapidamente il volume di una quantità molto piccola portandolo a $V + \Delta V$: il sistema in un tempo sufficientemente lungo giungerà ad una nuova situazione di equilibrio nella quale la temperatura sarà $T + \Delta T$ in tutto il volume $V + \Delta V$. Se si ripete consecutivamente questa operazione varie volte, il punto rappresentativo dello stato del sistema si muoverà nel piano V, T lungo una spezzata ed è chiaro che se si fanno i singoli incrementi ΔV sempre più piccoli, la spezzata tende a una curva continua che congiunge lo stato iniziale a quello finale.

Questa linea sta a rappresentare una trasformazione che è una successione di stati intermedi di equilibrio (per ciascuno dei quali si può parlare di un volume e di una temperatura del sistema) e che prende il nome di trasformazione quasi statica. La ragione del nome è evidente giacché il passaggio da uno stato intermedio al contiguo, secondo lo schema dato, avviene in un tempo estremamente lungo. Una trasformazione quasi statica del tipo ora visto ha la caratteristica di essere reversibile, cioè di potere essere eseguita da A a B quanto da B ad A ripassando per gli stessi stati intermedi: in quest'ultimo caso le variazioni di volume prodotte ΔV saranno delle riduzioni. Qui si è considerato un caso particolare, ma trasformazioni quasi statiche reversibili di vario genere si possono avere con vari sistemi termodinamici. Va però osservato che esistono anche trasformazioni quasistatiche *non reversibili* cioè irreversibili. Si pensi per es. al caso di una ruota che giri intorno al suo asse e venga rallentata mediante l'azione di un freno; anche se il processo avviene con grande lentezza in

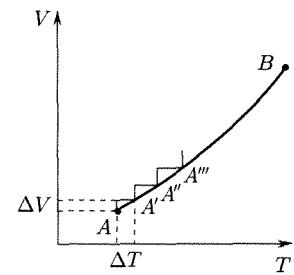


Fig. 14.2

modo che a ogni istante siano definiti i parametri descrittivi del sistema, non è possibile invertire il processo.

Per maggiore precisione diremo che *una trasformazione di un sistema termodinamico va ritenuta reversibile se, oltre ad essere quasi statica, non è accompagnata da processi dissipativi (attriti ecc.) e, in particolare, eventuali scambi di calore con l'esterno avvengono con corpi (sorgenti) alla stessa temperatura del sistema* (al momento dello scambio) ⁽¹⁰⁾. Le trasformazioni reversibili sono evidentemente trasformazioni ideali giacché i processi dissipativi non possono in realtà essere mai eliminati e gli scambi di calore richiedono differenze di temperatura; l'influenza di questi effetti può però essere sempre più ridotta sicché è sempre possibile pensare trasformazioni reali che approssimino quanto si voglia quelle reversibili: queste ultime vanno quindi considerate come caso limite di trasformazioni che possono essere effettivamente realizzate e il loro interesse sta proprio in ciò.

Nelle trasformazioni reversibili sono definiti istante per istante i valori di tutte le grandezze di stato e quelle intensive sono uniformi in tutto il sistema

È bene avvertire tuttavia che vi sono trasformazioni reali talmente differenti da uno schema di trasformazione quale quello qui ipotizzato per le trasformazioni quasi statiche, da non poter neanche approssimativamente essere considerate tali. Se per es. si fa espandere rapidamente un gas, mentre sono definiti perfettamente gli stati iniziali e finali del sistema, non è possibile specificare per un volume intermedio una temperatura e una pressione per tutta la massa: si producono in questi casi moti vorticosi che rendono impossibile specificare gli stati intermedi del sistema. In una rappresentazione del sistema in un piano T, V (fig. 14.3) lo stato iniziale e

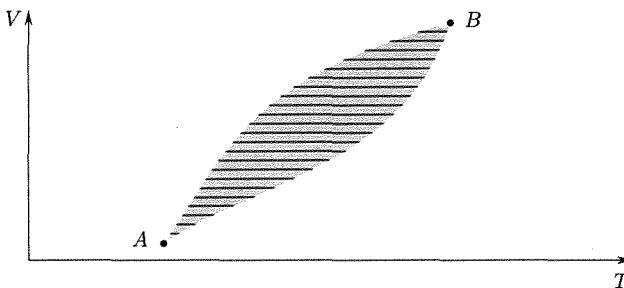


Fig. 14.3

finale sono rappresentati da punti; durante la trasformazione è specificato il valore del volume ma non quello della temperatura nel senso che vari elementi di volume (presi sufficientemente piccoli in modo che in ciascuno di essi si possa ritenere la temperatura uniforme) hanno temperature diverse. Ciò può rappresentarsi riportando per ogni volume del sistema un segmento che indica i valori assunti da T nei vari elementi. La trasformazione in questo caso è rappresentata non da una linea ma da una fascia di punti. Queste trasformazioni sono intrinsecamente non quasi statiche e *irreversibili*.

⁽¹⁰⁾ Usando una terminologia con cui lo studente diverrà familiare in seguito, si può dire: *una trasformazione di un sistema termodinamico dallo stato A allo stato B si dice reversibile se, dette Q_1, Q_2, \dots, Q_n le quantità di calore scambiate rispettivamente con le sorgenti a temperature T_1, T_2, \dots, T_n , è possibile effettuare una trasformazione che porti il sistema da B ad A scambiando con le suddette sorgenti rispettivamente le quantità di calore $(-Q_1), (-Q_2), \dots, (-Q_n)$.* Vedremo in seguito che alle quantità di calore conviene assegnare un segno secondo che siano assorbite o cedute dal sistema.

Sebbene le trasformazioni quasi statiche reversibili siano ideali, esse sono usate estesamente nelle considerazioni che si fanno per lo studio dei processi termodinamici.

Una trasformazione che riporta il sistema nello stato originario si dice ciclica: nel caso di trasformazione quasi statica essa è rappresentata da una linea chiusa nello spazio dei parametri.

■ 14.6. LAVORO IN TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

Durante una trasformazione un sistema può compiere del lavoro che nel caso di processi quasi statici, e quindi nelle trasformazioni reversibili, può essere calcolato mediante le grandezze di stato: si ritiene positivo il lavoro compiuto dal sistema sui corpi circostanti che costituiscono l'ambiente; tale convenzione è legata al fatto che la termodinamica si è sviluppata nello studio delle macchine termiche nelle quali si vuole che il sistema compia lavoro verso l'esterno.

Se si considera una massa gassosa contenuta in un cilindro chiuso da un pistone di area S , la forza esercitata sui corpi esterni, tramite il pistone, ha intensità $F = pS$. In corrispondenza a una variazione quasi statica di stato nella quale lo spostamento del pistone, nella direzione di \mathbf{F} , è Δl , si ha per il lavoro

$$(5) \quad \Delta L = \pm F \Delta l = p \Delta V$$

essendo la variazione di volume $\Delta V = \pm \Delta l S$ positiva in caso di aumento di V .

Questo lavoro è uguale e opposto a quello compiuto dalla forza di reazione $-\mathbf{F}$ che i corpi esterni esercitano sul sistema. Nel caso di variazione irreversibile il lavoro non può essere calcolato mediante le grandezze di stato.

Analogamente al caso precedente di una massa gassosa, se il sistema è costituito da una sbarra sollecitata a trazione dalla forza \mathbf{F} (e quindi $-\mathbf{F}$ è la forza esercitata dal sistema sull'esterno), il lavoro compiuto dal sistema in una variazione quasi statica è

$$(6) \quad \Delta L = -F \Delta l$$

essendo Δl la corrispondente variazione di lunghezza ed è negativo nel caso di allungamento per $\Delta l > 0$.

Se si tratta di una sbarra sollecitata a torsione da una coppia di momento \mathbf{M} , sempre per una variazione quasi statica si ha

$$(7) \quad \Delta L = -M \Delta \varphi.$$

Si vede da questi esempi come per la particolare azione scambiata dal sistema con l'esterno, rappresentata dalla grandezza intensiva Y e dalla grandezza estensiva X , il lavoro compiuto dal sistema per una variazione quasistatica sia dato da

$$(8) \quad \Delta L = Y \Delta X.$$

Se sono contemporaneamente presenti varie azioni, il lavoro sarà la somma dei contributi relativi a ciascuna azione.

Nel caso di una trasformazione reversibile che porti il sistema da uno stato A a uno stato B , il lavoro è espresso dalla somma dei lavori ΔL nelle

Il lavoro compiuto da un sistema termodinamico in una trasformazione reversibile può calcolarsi come integrale del prodotto di una grandezza intensiva per il differenziale di una estensiva

successive trasformazioni elementari. Al limite

$$(9) \quad L_{AB} = \int_{AC}^B dL = \int_{AC}^B Y dX$$

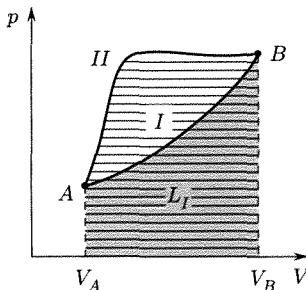


Fig. 14.4

ove la somma si intende formata da termini calcolati lungo la linea C e della trasformazione (integrale di linea).

Se per es. consideriamo il caso di una massa gassosa in un cilindro che passa dallo stato A allo stato B lungo la trasformazione I (fig. 14.4)

$$L_{AB} = \int_{A^I}^B pdV$$

essendo l'integrale calcolato lungo la I . Dalla interpretazione geometrica dell'operazione d'integrazione si ricava che tale lavoro è rappresentato nel piano p, V (detto di Clapeyron) dall'area racchiusa fra la curva che rappresenta la trasformazione, l'asse V e le ordinate per gli stati estremi della trasformazione. È quindi evidente che se per passare dallo stesso stato iniziale A allo stesso stato finale B si seguisse la trasformazione II si otterrebbe un lavoro del sistema diverso da quello ottenuto lungo la trasformazione I . Questa conclusione è generale e si può affermare che: *il lavoro compiuto da un sistema termodinamico nel passare da uno stato A a uno stato B dipende dalla particolare trasformazione seguita.*

Di conseguenza il *lavoro compiuto per una variazione elementare della variabile estensiva (volume) non è un differenziale esatto*. Per rappresentare questo fatto, d'ora in poi noi indicheremo il lavoro elementare corrispondente con

$$dL.$$

Il lavoro nel caso della figura 14.4 è positivo se la trasformazione è descritta nel senso dei volumi crescenti (da A a B); negativo nel caso contrario. Nel caso di una trasformazione ciclica rappresentabile nel piano p, V (per es. massa gassosa), il lavoro è rappresentato dall'area racchiusa dal ciclo (fig. 14.5): tale ciclo può infatti considerarsi formato dalla somma delle due trasformazioni ABC e CDA . Durante la prima il lavoro è positivo, durante la seconda è negativo. Il lavoro compiuto dal sistema in una trasformazione ciclica è positivo se questa viene descritta in senso *orario*.

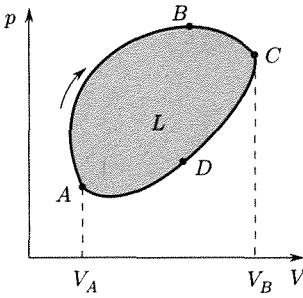


Fig. 14.5

■ 14.7. CALORE ED ENERGIA. EQUIVALENTE MECCANICO DELLA CALORIA

Per un sistema meccanico soggetto a sole forze conservative, l'energia meccanica (potenziale + cinetica) resta inalterata durante un processo qualsiasi; nel caso che siano presenti forze non conservative (come per es. le forze d'attrito), la conservazione dell'energia meccanica non è rispettata. Un esame dettagliato dei processi mostra tuttavia che contemporaneamente ai mutamenti dello stato meccanico del sistema cui sono associate le variazioni di energia meccanica, si presentano fenomeni (produzione di onde sonore, variazioni di temperatura ecc.) nei quali è possibile individuare la presenza di una energia che bilancia l'energia meccanica mancante. Lo stesso è vero nel caso di processi non meccanici (per es. elettrici) nei quali parte dell'energia posseduta inizialmente dal sistema sembra scomparire dal bilancio energetico durante il processo. Prima di

mostrare la validità del principio di conservazione nel caso che durante i processi intervengano delle quantità di calore, è necessario premettere alcune importanti considerazioni sul lavoro e sul calore.

Nell'esame dei processi di conduzione termica in corpi a temperature diverse posti a contatto, si è già visto che l'ipotesi che il calore sia qualcosa come un fluido, che possa trovarsi nei corpi, che possa passare da un corpo a un altro e che si conservi, è sufficiente a spiegare i risultati sperimentali: quantità di calore passano dal corpo a temperatura più alta a quello a temperatura più bassa fino allo stabilirsi dell'equilibrio a una temperatura intermedia.

Vi sono però esperienze che non possono essere spiegate in tal modo. Se per es. si considerano due corpi che scorrono l'uno sull'altro, la presenza dell'attrito fa sì che entrambi i corpi aumentino la loro temperatura sicché sembrerebbe che vengano create delle quantità di calore; contemporaneamente scompare energia meccanica. Il processo di creazione del calore può proseguire per un tempo indefinito e si può anche far restare il sistema nelle condizioni iniziali di temperatura se si rimuovono le quantità di calore man mano che esse si manifestano.

Esempi di questo genere hanno suggerito l'idea che il calore prodotto corrisponda a una trasformazione dell'energia meccanica, o di altra specie, che sembra scomparire. Un forte sostegno a questa tesi è stato quello di mostrare che ogni volta che una data quantità di energia meccanica, o elettrica o di altro genere, scompare mentre viene prodotto calore (senza che contemporaneamente appaiano altre forme di energia), la quantità di calore prodotta è sempre la stessa. Joule (1843) fu il primo a mostrare sperimentalmente questo fatto con l'apparecchiatura di figura 14.6.

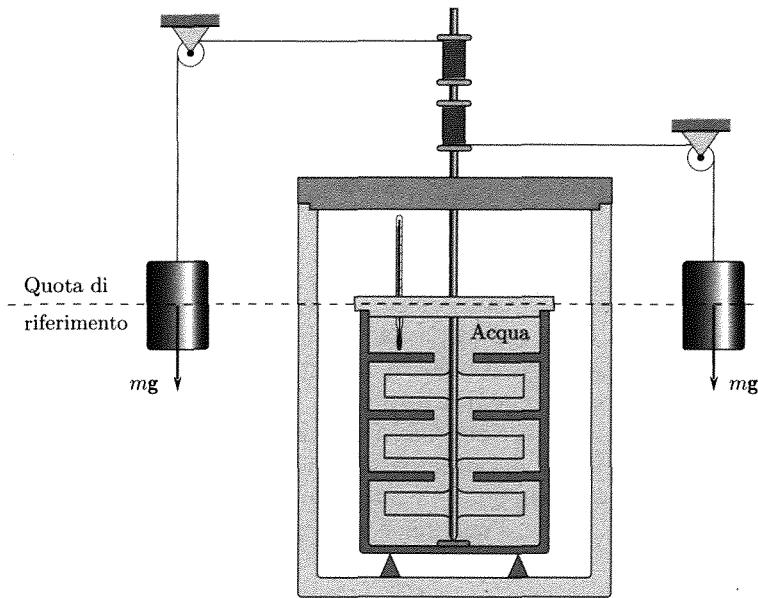


Fig. 14.6

Un sistema di pale montate su un asse può muoversi in un cilindro pieno d'acqua nel quale sono disposti alcuni diaframmi fissi. La rotazione dell'asse è determinata dalla caduta di due pesi noti e l'energia meccanica è dissipata per attrito nel liquido. Il cilindro è disposto in un calorimetro e

il calore prodotto può essere misurato e rimosso in modo da riportare il liquido nelle condizioni iniziali⁽¹¹⁾. Il sistema liquido ha subito una *trasformazione ciclica* durante la quale è stato compiuto del lavoro (ceduto al fluido, $-L$) ed è stata rimossa una quantità di calore $-Q$.

Il rapporto L/Q resta costante qualunque siano L e Q . Lo stesso risultato si ottiene in qualsiasi esperienza analoga nella quale un sistema descriva una *trasformazione ciclica* in cui venga spesa dell'energia meccanica (elettrica, ecc.) e sia prodotto del calore: il valore del rapporto è sempre lo stesso.

Si può quindi parlare di un equivalente meccanico della caloria, e *si può scrivere fra lavoro speso e quantità di calore prodotta in una trasformazione ciclica* (quando quindi non compaiono altre forme di energia) *la relazione*

(10)

$$L = JQ$$

essendo J , l'equivalente meccanico della caloria, indipendente dal tipo di trasformazione descritta dal sistema. Se si misura L in Joule e Q in kilocalorie, J ha, secondo le più precise determinazioni, il valore di 4186,8 joule/kcal. Se si misura Q in piccole calorie $J = 4,1868$ joule/cal.

Il calore quindi mostra avere le stesse dimensioni fisiche dell'energia e le quantità di calore possono essere misurate, oltre che nelle unità introdotte in termologia, anche nelle unità di energia usate in meccanica. In realtà la unità per le quantità di calore nel SI è lo joule⁽¹²⁾; la caloria e la kilocaloria vengono tuttora mantenute, in via transitoria, data la grande diffusione del loro impiego nelle applicazioni tecniche.

L'esperimento di Joule dimostrò l'equivalenza tra lavoro compiuto sul sistema e calore fornito al sistema

Il calore in realtà, pur avendo le dimensioni dell'energia, non deve essere considerato come una energia, cioè una capacità a compiere lavoro che un corpo può possedere, ma come un aspetto preso dall'energia nel passare da un corpo a un altro per effetto di una differenza di temperatura. Da quanto si è detto in precedenza si ricava, infatti, che non si può parlare di *calore contenuto in un corpo* giacché se il calore fosse un tipo definito di energia che mantenesse la propria identità quando è contenuto in un corpo, non dovrebbe essere possibile in esperimenti quali quello accennato precedentemente portarne via una quantità indefinita da un sistema che resta immutato.

Le uniche asserzioni circa il calore che hanno senso sono quelle relative al suo passaggio da un corpo (o da un sistema) a un altro.

La relazione fra energia e calore è del tutto analoga a quella fra lavoro ed energia: si è già detto che il lavoro non è energia (pur avendo le stesse dimensioni) e non può essere considerato come qualcosa che un corpo possieda in quantità definita. La differenza fra calore e lavoro è che nel primo caso il trasferimento di energia è legato a una differenza di temperatura; nel caso del lavoro invece l'energia è trasmessa senza che venga impli-

⁽¹¹⁾ Joule in realtà non considerò una trasformazione ciclica e si limitò a determinare le quantità di calore prodotte in seguito alla rotazione del sistema di pale mediante l'innalzamento di temperatura dell'acqua nel calorimetro. È tuttavia concettualmente esatta la esperienza quando la trasformazione del liquido fosse ciclica in modo da essere sicuri che altre forme di energia non intervengano.

⁽¹²⁾ Anche per tutte le grandezze precedentemente introdotte, nelle cui unità di misura entra la kcal, la corrispondente unità nel SI si ottiene sostituendo alla kcal il joule facendo uso dell'equivalente J .

cata una differenza di temperatura. Entrambe queste grandezze, lavoro e calore, non sono quindi caratteristiche di un sistema e assumono significato solo nella interazione di un sistema con altri corpi che costituiscono l'ambiente: in virtù di questa interazione l'energia può essere scambiata mediante un flusso di calore o mediante l'esecuzione di lavoro.

■ 14.8. PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Nel considerare un sistema termodinamico che interagisca con l'ambiente occorre precisarne i limiti fisici e, in tal senso, pensarla racchiuso da una superficie che lo separa e lo distingua dall'ambiente; attraverso tale superficie si effettueranno gli scambi energetici con l'esterno, in termini di calore e lavoro. Ricordiamo che, per ragioni storiche, legate alle applicazioni alle macchine termiche, si è convenuto di ritenere positive le quantità di calore scambiate fra sistema e ambiente quando sono assorbite dal sistema e positivo il lavoro fatto dal sistema verso l'esterno.

Ciò premesso, in un qualsiasi processo di interazione del sistema con l'ambiente, si possono distinguere tre fasi. Nella prima il sistema si trova in un preciso stato *termodinamico determinato da un insieme di valori delle grandezze di stato* (stato 1). Nella seconda fase avviene l'interazione in seguito alla quale una quantità di calore Q viene assorbita o ceduta dal sistema e un lavoro L è fatto o subito dal sistema stesso. Per via di questa interazione il sistema si porta in uno stato 2 cui corrisponde un nuovo insieme di valori delle grandezze di stato. Nella terza fase il sistema permane nel nuovo stato 2 di equilibrio.

Si può pensare di eseguire successive esperienze nelle quali il sistema passi in maniere diverse (reversibili o no) dallo stesso stato iniziale 1 allo stesso stato finale 2, cioè in maniere che, secondo lo schema ora visto, differiscano per la seconda fase e quindi per i valori di Q ed L . Se per es. la trasformazione $1 \rightarrow 2$ può essere rappresentata sul piano pV , possono essere seguite varie linee (trasformazioni reversibili): per ciascuna di esse il valore di L è dato dall'area racchiusa fra tale linea, l'asse delle V e le ordinate per i punti 1 e 2. Analogamente, si trova che la quantità di calore Q scambiata con l'esterno dipende dalla trasformazione seguita. La circostanza che tanto L quanto Q dipendano dalla trasformazione seguita corrisponde al fatto già illustrato che non si può parlare di calore e di lavoro contenuti in un corpo in un certo stato.

L'esperienza peraltro indica che *l'energia totale scambiata con l'esterno*

$$Q - L$$

non dipende dalla trasformazione seguita ma solo dagli stati estremi.

Questo risultato mostra che si può parlare di una *energia totale del sistema in un determinato stato termodinamico*, che chiameremo *energia interna* (U), la cui variazione nel passare da uno stato a un altro è pari all'energia scambiata con l'esterno tramite il flusso di calore e il lavoro⁽¹³⁾

$$(11) \quad U_2 - U_1 = Q - L.$$

Nelle trasformazioni di un sistema termodinamico, il calore fornito al sistema meno il lavoro fatto dal sistema sull'esterno corrispondono alla variazione di energia interna

⁽¹³⁾ Questa conclusione si può raggiungere anche partendo dal risultato sperimentale

La energia interna è quindi una funzione di stato, così come in meccanica si è visto che era l'energia potenziale, ed è definita a meno di una costante. L'energia interna cresce nel passaggio $1 \rightarrow 2$ se $Q - L$ è positivo.

La (11) costituisce l'espressione matematica del primo principio della termodinamica: *per un sistema termodinamico esiste una funzione di stato, energia interna, la cui variazione, quando il sistema passa da uno stato 1 a uno stato 2, dipende solo dagli stati iniziale e finale e non dalla trasformazione seguita: tale variazione è pari alla energia scambiata con l'esterno tramite il flusso di calore e il lavoro.*

Nel caso che si prendano in considerazione trasformazioni molto piccole, che chiameremo elementari o approssimativamente infinitesime, il primo principio si scrive

$$(12) \quad dU = dQ - dL.$$

Poiché U è una funzione dei parametri di stato, dU è analiticamente un differenziale esatto; Q ed L invece, come è stato precisato precedentemente, non sono funzioni di stato, cosicché dQ e dL non sono dei differenziali ma solo delle quantità molto piccole.

Vogliamo richiamare l'attenzione sul fatto che il lavoro che interviene nella espressione del primo principio può derivare da interazioni di tipo diverso con l'ambiente e corrisponde a scambi di energia non termica con l'ambiente: esso cioè può assumere le varie forme viste nel paragrafo 14.6 per i vari contatti energetici (differenti da quello termico). Per maggiore chiarezza diremo che se, com'è di frequente il caso, l'interazione non termica con l'ambiente è esclusivamente di natura meccanica, legata a una pressione, si ha

$$dL = p \, dV.$$

Se si tratta invece di un sistema (per es. una sbarra) sottoposta a una forza \mathbf{F} di trazione

$$dL = -F \, dl.$$

Se si tratta di un materiale magnetico la cui magnetizzazione viene aumentata nel campo \mathbf{H} (l'energia aumenta di $Hd\mathcal{M}$)

$$dL = -H \, d\mathcal{M}.$$

Se al sistema vengono aggiunte dn kmoli di una sostanza il cui potenziale chimico è μ , ciò corrisponde a un aumento di energia interna, cioè ad un lavoro subito dal sistema

$$dL = -\mu \, dn.$$

già discusso nel paragrafo precedente secondo cui in una trasformazione ciclica *qualsiasi* è

$$Q - L = 0.$$

Considerando trasformazioni cicliche reversibili (cioè rappresentabili mediante linee nel corrispondente diagramma delle variabili di stato) ciò equivale a dire che l'integrale di linea fra due punti 1 e 2

$$\int_{1c}^2 d(Q - L)$$

non dipende dal percorso di integrazione C . Da qui la (11) che, definendo una funzione di stato, diviene valida anche per trasformazioni irreversibili.

Se sono contemporaneamente presenti più contatti energetici l'espressione esplicita del primo principio è

$$(13) \quad dU = dQ - pdV + Fdl + HdM + \mu dn + \dots$$

Si è già osservato come il primo principio della termodinamica vada considerato come un caso particolare di un principio ancora più generale, quello della conservazione dell'energia. Seguendo il tipo di ragionamento fin qui svolto ed estendendolo al caso più generale di sistemi fisici qualsiasi, Helmholtz nel 1847 formulò il concetto che tutte le forme di energia sono equivalenti e che quando una certa quantità di una di esse scompare, una uguale quantità di energia di altre forme debba apparire. Tale principio è la generalizzazione di un gran numero di osservazioni sperimentali in processi fisici e chimici e non ha mai trovato contraddizione. Esso si può esprimere dicendo che *l'energia richiesta per far passare un sistema da uno stato a un altro non dipende dagli stati intermedi attraversati dal sistema né dalla forma in cui energia è scambiata con l'esterno.*

Il primo principio della termodinamica può essere applicato a ogni processo che avviene in natura nel quale ci siano scambi di energia dove intervenga il calore. Esso vale tanto per processi reversibili quanto per processi irreversibili. Nei processi irreversibili non sono quasi statici, infatti, se è vero che le trasformazioni non sono rappresentabili mediante una successione di stati ben definiti, sono però ben definiti gli stati iniziale e finale e solo questi intervengono nella formulazione del principio.

Va osservato che le informazioni fornite dal primo principio sono lungi dall'esaurire l'argomento delle trasformazioni di energia in cui interviene il calore.

Nel caso di esperienze come quelle di Joule (fig. 14.6) per es., nella quale si effettua una trasformazione di energia meccanica in calore e si sottrae calore al calorimetro per riportare il sistema nelle condizioni iniziali, tanto L quanto Q sono negativi ed il primo principio sancisce la uguaglianza dei due termini. Si potrebbe, peraltro, immaginare un processo ciclico nel quale la quantità di calore Q venisse prelevata dall'ambiente e venisse fatto un lavoro esterno: in tal caso il primo principio asserirebbe la uguaglianza di Q ed L :

$$(14) \quad Q = L.$$

In tal caso, il primo principio nulla direbbe sul fatto più importante e cioè che un tale processo (moto perpetuo di seconda specie) non è possibile. Questo è asserito invece dal secondo principio della termodinamica.

In un ciclo termodinamico, il calore scambiato del sistema è uguale al lavoro eseguito

■ 14.9. CAPACITÀ TERMICHE E CALORI SPECIFICI

Il primo principio della termodinamica consente di ricavare importanti relazioni relative alle capacità termiche e ai calori specifici delle sostanze. Ricordiamo che questi parametri dipendono dal tipo di trasformazione seguita dal sistema al variare della temperatura.

Si consideri dapprima il caso nel quale l'energia venga scambiata dal sistema con l'esterno non attraverso processi termici, ma semplicemente mediante un lavoro dovuto alla pressione. In tal caso, dal primo principio si ricava per il calore assorbito in una trasformazione reversibile

$$(15) \quad dQ = dU + pdV.$$

Se si scelgono come variabili indipendenti T e V , visto che l'energia interna è una funzione di stato e quindi dU è un differenziale esatto, si può scrivere la relazione⁽¹⁴⁾:

$$(16) \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Le (15) e (16) danno

$$(17) \quad dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV.$$

Se, in particolare, si considera una trasformazione a volume costante si ha per la capacità termica \bar{C}_v a volume costante, cioè per il rapporto fra quantità di calore dQ somministrata a volume costante e la corrispondente variazione di temperatura

$$(18) \quad \bar{C}_v = c_v m = \frac{dQ}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

avendo indicato con c_v il calore specifico a volume costante e con m la massa del sistema. Se, in particolare, il sistema ha la massa di un kilogrammo oppure di una kmole (e quindi la U è l'energia per kilogrammo o, rispettivamente, per kmole), la (18) fornisce direttamente il calore specifico c_v o, rispettivamente, il calore molare C_v a volume costante. La relazione (17) può scriversi per qualsiasi trasformazione, usando la (18)

$$(19) \quad dQ = \bar{C}_v dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV.$$

Si supponga ora di considerare una trasformazione nella quale la pressione resti costante. Essendo le due variabili indipendenti T e V , ciò significa che il volume deve essere fatto variare man mano che la temperatura varia in modo da tenere costante la pressione, cioè il dV risulterà

$$(20) \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT$$

e quindi il calore assorbito risulta

$$(21) \quad (dQ)_p = \bar{C}_v dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT.$$

Si ottiene allora per la capacità termica a pressione costante

$$(22) \quad \bar{C}_p = \frac{(dQ)_p}{dT} = \bar{C}_v + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right].$$

I calori specifici possono esprimersi in funzione delle dipendenze reciproche tra parametri e funzioni di stato

È questa una relazione generale di notevole interesse fra le capacità termiche a volume costante e a pressione costante. Relazioni analoghe valgono per i calori specifici e i calori molari.

Relazioni del tutto simili si ottengono se il sistema scambia energia non termica con l'esterno in maniere diverse da quella ora considerata. Si abbia per es. un materiale paramagnetico che scambi energia (oltre che mediante quantità di calore) solo mediante interazioni caratterizzate dalla coppia H, M (restano cioè costanti V, l, n ecc.); le variabili indipendenti che vengono scelte siano T e M . Si hanno due capacità termiche (e calori specifici): uno a magnetizzazione totale M costante, e uno a campo magnetico costante. Per esse valgono delle relazioni analoghe a quelle

⁽¹⁴⁾ Siccome le variabili indipendenti sono fissate in numero ma possono essere scelte a piacere, per rappresentare le derivate parziali si ritiene opportuno in ogni derivata indicare tutte le variabili indipendenti scelte segnando fuori parentesi quelle che nella operazione di derivazione parziale sono tenute costanti.

trovate nel caso precedente

$$(23) \quad \bar{C}_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M$$

$$(24) \quad \bar{C}_H = \bar{C}_M - \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \left[H - \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_T \right].$$

■ 14.10. QUANTITÀ DI CALORE FORNITE A VOLUME O A PRESSIONE COSTANTE. ENALPIA

Nel caso in cui il lavoro esterno compiuto dal o sul sistema sia legato alla pressione e alla variazione di volume, per una *trasformazione isocora*, il primo principio fornisce

$$(25) \quad Q = \int_1^2 dQ = U_2 - U_1.$$

In questo caso cioè la quantità di calore fornita, essendo uguale alla variazione di energia interna, dipende solo dagli stati estremi: siccome inoltre non è necessario specificare nulla sulla natura del processo, la (25) vale tanto per trasformazioni reversibili quanto per trasformazioni irreversibili.

Se, invece, il calore è fornito a pressione costante (*trasformazione isobarica*) il lavoro esterno è $p(V_2 - V_1)$ e quindi

$$(26) \quad Q = \int_1^2 dQ = U_2 - U_1 + pV_2 - pV_1 = (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1).$$

La quantità di calore assorbita dipende ancora solo dallo stato iniziale e finale (qualunque sia la natura, reversibile o irreversibile, del processo). Si trova utile introdurre una nuova *grandezza di stato*, entalpia:

$$(27) \quad H = U + pV$$

anche essa definita, come l'energia interna, a meno di una costante arbitraria. La quantità di calore assorbita durante una trasformazione isobarica è quindi

$$(28) \quad Q = \int_1^2 dQ = H_2 - H_1.$$

Per comprendere l'importanza di queste formule si considerino i cambiamenti di stato di una sostanza (fusione, evaporazione ecc.): in questo caso il calore viene scambiato per la variazione d'energia interna della sostanza nei due stati e perché, variando in genere il volume, deve essere compiuto lavoro esterno. Se per es. si considera l'evaporazione di 1 kg di acqua a 100 °C, il calore (latente di evaporazione) che bisogna fornire è pari a $2,26 \cdot 10^5$ J/kg; questa è la differenza di entalpia tra 1 kg di vapore e 1 kg di liquido a 100 °C. Siccome in questo caso il lavoro esterno è di $1,7 \cdot 10^4$ J/kg si vede che la differenza di energia interna fra i due stati pari a $2,1 \cdot 10^5$ J/kg, costituisce il termine principale nella differenza di entalpia. Nel passaggio dallo stato solido a quello liquido, le variazioni di volume sono in genere molto piccole e la differenza di entalpia coincide praticamente con la differenza di energia interna tra le due fasi.

Una nuova funzione di stato: l'entalpia

Le relazioni (25) e (28) trovano interessanti applicazioni nello studio degli effetti termici delle reazioni chimiche. Una legge stabilita in chimica da Hess afferma che:

il calore totale di reazione di una reazione chimica non dipende dagli stati intermedi per cui passa la reazione. Tale legge è vera solo se la reazione avviene a volume o a pressione costante perché solo in tali casi, in accordo con le (25) e (28), il calore totale fornito (o ceduto all'ambiente) dipende dallo stato iniziale (sostanza 1) e da quello finale (sostanza 2) e non dagli stati intermedi (prodotti intermedi).

La introduzione della grandezza entalpia consente di esprimere in maniera semplice la capacità termica a pressione costante. Infatti per una trasformazione elementare a pressione costante

$$(29) \quad (dQ)_p = dU + pdV = dH$$

e quindi

$$(30) \quad \bar{C}_p = \frac{(dQ)_p}{dT} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

Analoghe relazioni si ottengono per i calori specifici c_p e per i calori molari C_p se si considera rispettivamente una massa di sostanza di 1 kg o di una kmole.

■ 14.11. PROCESSI ISOTERMI

Nel caso di una trasformazione isoterma, se gli scambi di energia non termica avvengono solo mediante lavoro delle pressioni, si può scrivere, facendo uso della (17):

$$(31) \quad dQ = dU + dL = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV.$$

Si vede che il calore elementare assorbito in un'espansione isoterma differisce dal lavoro compiuto dal sistema a causa dell'aumento dell'energia interna che accompagna la variazione del volume. Vi sono sostanze (gas perfetti) nelle quali la variazione di energia interna a temperatura costante è nulla. In tali casi il processo isoterma reversibile funziona come un trasformatore perfetto di energia: tutta la quantità di calore presa dalla sorgente costituente l'ambiente esterno è trasformato in lavoro. La trasformazione peraltro non può continuare indefinitamente perché si avrebbe una crescita indefinita di volume.

Se lo scambio di energia non termica avviene mediante un campo magnetico in un materiale paramagnetico, le considerazioni precedenti si ripetono

$$(32) \quad dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{M}} \right)_T - H \right] d\mathcal{M}.$$

In un materiale nel quale l'energia interna dipenda solo da T (e non da \mathcal{M}) tutto il calore assorbito nel processo isoterma è trasformato in energia magnetica. I limiti in questo caso derivano dalla saturazione magnetica del materiale, cioè dal fatto che \mathcal{M} approssima un limite al crescere di H .

■ 14.12. PROCESSI ADIABATICI

Le trasformazioni adiabatiche sono caratterizzate dal fatto che durante il processo è impedito qualsiasi scambio di calore con l'esterno: in questi casi, quindi, $dQ = 0$.

Per un sistema che scambi energia con l'esterno per mezzo del lavoro delle pressioni, scegliendo come variabili indipendenti T e V , si ottiene dalle (19) e (22)

$$(33) \quad \bar{C}_v dT = - \frac{\bar{C}_p - \bar{C}_v}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} dV;$$

cioè in un *processo adiabatico reversibile*

$$(34) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -(\gamma - 1) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$$

essendo $\gamma = \bar{C}_p/\bar{C}_v = c_p/c_v$ ed avendo contraddistinto con l'indice S la derivata calcolata per un processo adiabatico, in quanto lungo un processo adiabatico reversibile rimane costante una grandezza (entropia, S) che introdurremo in seguito. La relazione (34) associata alla equazione di stato della sostanza che subisce la trasformazione consente di trovare la espressione della linea seguita dal sistema in un processo adiabatico reversibile. Durante un processo adiabatico reversibile è inoltre:

$$(35) \quad L = \int_1^2 (dL)_{ad} = U_1 - U_2$$

cioè il lavoro compiuto durante un processo adiabatico reversibile è pari alla *diminuzione* di energia interna del sistema, così che il lavoro elementare può scriversi come un differenziale.

Bibliografia

Presentiamo qui una lista di libri che lo studente può trovare utile consultare per allargare le sue conoscenze. Tali libri in genere trattano molti argomenti di termodinamica e del comportamento termico della materia; perciò la bibliografia non sarà ripetuta nei successivi capitoli.

- [1] E.A. GUGGENHEIM, *Termodinamica*, Einaudi, Torino, 1952.
- [2] J. SLATER, *Introduction to chemical physics*, McGraw-Hill, New York, 1939.
- [3] F. REIF, *La fisica di Berkeley*, vol. V, *Fisica statistica*, Zanichelli, Bologna.
- [4] M.W. ZEMANSKI, *Calore e termodinamica*, Zanichelli, Bologna.
- [5] P.M. MORSE, *Thermal physics*, Benjamin Inc., New York, 1964.
- [6] E. FERMI, *Termodinamica*, Boringhieri, Torino.
- [7] F.D. ROSSINI, *Thermodynamics and physics of matter*, Princeton University Press, 1955.
- [8] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *Course of theoretical physics*, vol. V, *Statistical physics*, Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [9] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, M. SANDS, *La fisica di Feynman*, vol. I, Masson, Milano, 1985.
- [10] G. BRUHAT, *Cours de physique générale, Thermodynamique*, Masson, Paris, 1962.

STATI GASSOSO E LIQUIDO DELLA MATERIA

- ✓ **Gas perfetto** modello di gas reale ad alte rarefazioni e temperature, di equazione:

$$pV = nRT.$$

Atomi come sfere infinitesime, non interagenti, se non nell'urto (elastico). Pressione, come variazione per unità d'area e di tempo della quantità di moto sulle pareti:

$$p = \frac{2}{3}n\frac{1}{2}mv^2.$$

Energia media e interna per grado di libertà (prima di traslazione, poi qualunque: *equipartizione*):

$$\bar{E} = \frac{1}{2}kT \quad , \quad U = (nN_A)\frac{1}{2}kT \cdot f.$$

- ✓ **Energia interna:** $U = U(T)$ (esperienza di Joule: espansione libera) e $dU = c_VdT$.

- ✓ **Calori molari:** $\bar{C}_p - \bar{C}_V = R$.

- ✓ **Trasformazioni adiabatiche** reversibili: $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$; $pV^\gamma = \text{cost}$.

- ✓ **Gas monoatomico:** $f = 3$; $U = \frac{3}{2}RT$ (per mole); $c_V = \frac{3}{2}R$; $c_p = \frac{5}{2}R$; $\gamma = 1,67$.

- ✓ **Gas biatomico:** $f = 7$; $U = \frac{7}{2}RT$ (per mole); $c_V = \frac{7}{2}R$; $c_p = \frac{9}{2}R$; a temperature ordinarie: $c_V = \frac{5}{2}R$; $c_p = \frac{7}{2}R$; $\gamma = 1,4$.

- **Interpretazione quantistica:** ogni grado di libertà possiede energia su livelli discreti, distanziati di ΔE . Se $\frac{1}{2}kT < \Delta E$, il grado di libertà corrispondente è *congelato*, non contribuisce a scambi energetici.

Quantizzazione dei gradi di libertà:

vibrazione: $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\nu, \quad \Delta E = \hbar\nu;$

rotazione: $E = \frac{\hbar^2}{I}j(j+1), \quad \Delta E \cong 2\frac{\hbar^2}{I}j$

traslazione: $\Delta E \rightarrow 0$ in dipendenza delle dimensioni del recipiente.

- **Distribuzione velocità ed energia a T fissa:**

$$N(v) \propto \frac{N}{T^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} v^2 \quad (\text{Maxwell});$$

$$n(\varepsilon) \propto g(\varepsilon) \frac{N}{T^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} \quad (\text{Maxwell-Boltzmann}), \text{ con } g(\varepsilon), \text{ densità degli stati.}$$

- **Calori specifici quantistici:** la distribuzione statistica per insiemi di *oscillatori* (o vibratori) quantistici si ottiene per sistemi quantistici (basse o bassissime temperature):

$$(C_V)_{\text{vibr.}} = R \left(\frac{\theta_{\text{vibr.}}}{T} \right)^2 e^{-\theta_{\text{vibr.}}/T}.$$

Interpretazioni della teoria cinetica

Diffusione (di particelle in un fluido), proporzionalità tra quadrato della distanza e tempo di diffusione. **Evaporazione**, passaggio allo stato di vapore, attraverso la superficie libera del liquido, delle molecole più energetiche, con raffreddamento del liquido. **Ebolizione**, evaporazione violenta, per egualianza tra tensione di *vapor saturo* e pressione esterna.

- ✓ **Gas reali:** particelle interagenti, dotate di volume proprio, seguono l'equazione di stato

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (\text{Van der Waals})$$

con b , volume proprio occupato da una mole (a disposizione: $V - b$); a/V^2 , termine di proporzionalità col quadrato della densità di molecole.

- ✓ **Tensione superficiale**, per interazione ridotta delle molecole sulla superficie $\sigma = F/2l = L/2S$. Fluido a contatto con parete e **capillarità** (menisco, concavo e convesso).

■ Stati gassoso e liquido della materia

15.

■ 15.1. INTRODUZIONE

Nel presente capitolo e nel successivo si esaminerà il comportamento della materia nei processi termici, nei quali cioè la temperatura e gli scambi di calore assumono un'importanza rilevante sull'andamento dei fenomeni.

Sebbene per la continuazione dello svolgimento della termodinamica sarebbe sufficiente presentare una descrizione macroscopica, globale, del comportamento termico dei corpi, nel seguito saranno esaminati spesso più in dettaglio i vari processi esaminandone la natura atomica, cioè cercando le ragioni del comportamento macroscopico sulla base delle proprietà delle singole particelle e delle azioni fra esse.

In questo capitolo saranno esaminati dapprima quei sistemi, i gas, che sono costituiti da un gran numero di particelle in moto disordinato le une rispetto alle altre; si vedrà che proprio il gran numero di particelle e la casualità del loro moto semplificano la trattazione dei problemi, che sarà di tipo statistico.

Nel successivo capitolo si considererà lo stato di aggregazione dei solidi cristallini: questi sono caratterizzati da un ordine molto elevato nella disposizione delle particelle. L'esistenza di questo ordine consente una trattazione non eccessivamente complicata dei problemi relativi a questi sistemi.

Lo stato di aggregazione più difficile da esaminare è quello liquido. In tale categoria rientrano sistemi a struttura molto varia: in alcuni casi sembra che la sostanza liquida si comporti come un gas molto denso, in altri i liquidi hanno proprietà simili a quelle dei solidi cristallini ed è più appropriato parlare di strutture pseudo-cristalline. Per tali ragioni si tratterà lo stato liquido sia in collegamento con lo studio dello stato gassoso sia dopo avere esaminato il comportamento dei solidi cristallini.

■ 15.2. EQUAZIONE DI STATO PER I GAS PERFETTI

I gas sono sistemi termodinamici che possono scambiare energia meccanica con l'esterno mediante il lavoro di forze legate alla pressione p . In accordo con quanto è già stato detto, le variabili che possono essere usate per caratterizzare lo stato di un gas di composizione omogenea sono la temperatura, la pressione e il volume; inoltre, poiché esiste fra queste grandezze una equazione di stato che caratterizza la natura del sistema, solo due delle tre variabili sono indipendenti.

Abbiamo precedentemente avuto occasione (cap. 13) di esaminare il comportamento di gas reali molto rarefatti; esso è particolarmente semplice e ciò è rispecchiato dal fatto che tutti i gas tendono allo stesso comportamento quando le pressioni alle quali si trovano vengono fatte gradualmente decrescere. Si è già visto che questo comportamento limite è descritto dalle tre relazioni

$$(1) \quad pV = p_0 V_0 \quad \text{a } T = \text{cost}$$

$$(2) \quad p_T = p_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{a } V = \text{cost}$$

$$(3) \quad V_T = V_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{a } p = \text{cost}$$

essendo T la temperatura assoluta $T_0 = 273,15$ K lo zero della scala centigrada e p_0 e V_0 una coppia di valori della pressione e del volume della massa gassosa alla temperatura T_0 .

Appare quindi di grande utilità, per comprendere le proprietà dei gas, studiare dapprima il comportamento di un gas ideale (o perfetto), intendendosi con tale dizione *un gas che segua perfettamente le leggi espresse dalle (1-3)*.

È bene tenere sempre presente, nella trattazione che faremo, che il comportamento del gas ideale che si considera può essere approssimato da gas molto rarefatti, sicché a volte, come già si è fatto per stabilire le (1-3), si farà ricorso alla esperienza.

Per ottenere l'equazione di stato che lega le tre grandezze p , V , T corrispondenti a uno stato termodinamico qualsiasi di una certa massa gassosa m , supponiamo che tale massa si trovi inizialmente alla temperatura T_0 (cioè allo zero centigrado), alla pressione p_0 , occupando il volume V_0 (punto 1 nel diagramma pV di figura 15.1) e che subisca le seguenti trasformazioni:

Fig. 15.1

1. venga riscaldata a volume costante fino alla temperatura T (punto 2); per la (2)

$$(4) \quad p'_T = p_0 \frac{T}{T_0};$$

2. venga fatta espandere isotermicamente ($T = \text{cost}$) dal volume V_0 al volume finale V (punto 3); per la (1)

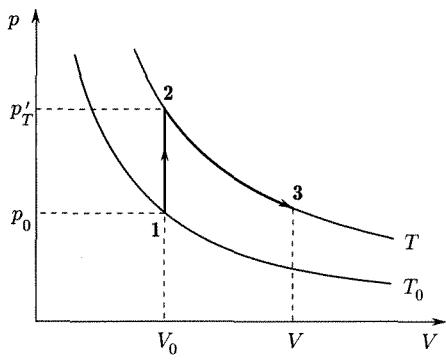
$$(5) \quad p'_T V_0 = pV.$$

Eliminando p'_T dalle (4) e (5) si ha

$$(6) \quad \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{cost}.$$

L'equazione di stato dei gas (perfetti) si ricava dall'unione delle equazioni di trasformazione a p , V e T costanti

La (6) si riduce a una delle (1-3) nelle condizioni valide per ciascuna di esse. Il valore della costante, cioè $p_0 V_0 / T_0$, dipende dalla massa m di



gas considerata e dalla natura del gas, per cui la (6) può porsi nella forma

$$(7) \quad \frac{pV}{T} = mR'$$

essendo R' dipendente dalla natura del gas.

Alla (7) può darsi una espressione più generale, valida per ogni gas perfetto, *usando la legge di Avogadro*.

Ricordiamo che, in base alla definizione (cap. 14, par. 14.4) di mole e kmole il numero di molecole contenute in ciascuna di tali masse è lo stesso per qualsiasi sostanza: esso prende il nome di numero di Avogadro (N_A) e vale $6,022 \cdot 10^{23}$ molecole per la mole e $N_A^* = 10^3 N_A = 6,022 \cdot 10^{26}$ molecole per la kmole. Il numero⁽¹⁾ di kmole contenute in una massa m , se M è il peso molecolare della sostanza, è:

$$(8) \quad n = \frac{m}{M}$$

con m espressa in kg. La stessa espressione vale per il numero di moli se m è espresso in grammi.

La legge di Avogadro (1811) stabilisce che *uguali volumi di gas diversi nelle stesse condizioni di pressione e temperatura contengono lo stesso numero di molecole*. Ciò equivale a dire che il volume occupato a una data temperatura e a una data pressione da una kmole (o da una mole) di gas è lo stesso per tutti i gas. Tale legge vale rigorosamente per i gas perfetti e con buona approssimazione per quelli reali.

*Comportamento comune
dei gas dato dalla legge
di Avogadro*

Da questa legge si deduce che il termine $p_0 V_0 / T_0$ nella (6) dipende esclusivamente dal numero n di kmoli presenti (e non dal particolare gas). Se si tiene conto che, a pressione e temperatura costanti, il volume è proporzionale a n , si può scrivere

$$(9) \quad \frac{p_0 V_0}{T_0} = nR$$

essendo R una costante universale valida per tutti i gas. Una relazione analoga vale se si usano le moli; naturalmente il valore di R è in tal caso ridotto per un fattore 10^3 .

L'equazione caratteristica dei gas perfetti si scrive allora:

1. per una massa m (kg) di un gas avente peso molecolare M :

$$(10) \quad pV = \frac{m}{M} RT$$

$$(11) \quad \boxed{pV = nRT};$$

*L'equazione di stato
dei gas perfetti*

2. per una kmole di qualsiasi gas

$$(12) \quad pV = RT;$$

⁽¹⁾ Il *peso molecolare* di una sostanza è un *numero puro* uguale al rapporto fra la massa di una molecola della sostanza e la massa dell'atomo di carbonio posta pari a 12: il peso molecolare è pari alla somma dei pesi atomici di tutti gli atomi che entrano nella molecola della sostanza in questione.

3. per l'unità di massa, indicando con v il volume specifico,

$$(13) \quad pv = \frac{R}{M}T.$$

Il valore numerico della costante R si determina misurando il volume occupato da una kmole di gas in corrispondenza a una temperatura e a una pressione di riferimento. Se si prende

$$T_0 = 273,15 \text{ °K}$$

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

risulta $V_0 = 22,41 \cdot 10^3$ litri = $22,41 \text{ m}^3$ e quindi

$$(14) \quad R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,41}{273,15} = \\ = 8,314 \cdot 10^3 \text{ J/kmol K} = 1,98 \text{ kcal/kmol K}.$$

Nel caso, abbastanza frequente, che ci si riferisca a una mole di sostanza il valore di R è

$$(15) \quad R = 8,314 \text{ J/mol K} = 1,98 \text{ cal/kmol}$$

e le (10) (11) (12) (13) si scrivono nella stessa maniera essendo però la massa in grammi e n il numero di moli. Le unità per le altre grandezze ($\text{N/m}^2, \text{m}^3, \text{K}$) restano invariate.

Si osservi che l'equazione di stato per i gas perfetti nella forma (11) è scritta per una massa qualsiasi di un gas e non contiene alcun riferimento al particolare gas. Se pertanto il gas è formato da una mescolanza di vari gas contenente n_1, n_2, n_3, \dots , kmoli (o moli) dei vari gas, la relazione vale nella forma:

$$(16) \quad pV = (n_1 + n_2 + n_3 + \dots)RT.$$

D'altra parte, se ciascuno dei gas che formano la mescolanza occupasse da solo il volume V , si stabilirebbero le pressioni parziali p_1, p_2, p_3, \dots date da

$$(17) \quad \begin{aligned} p_1 V &= n_1 RT \\ p_2 V &= n_2 RT \\ p_3 V &= n_3 RT \\ &\dots \end{aligned}$$

e quindi

$$(18) \quad p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

*La legge di Dalton
delle pressioni parziali
in una mescolanza
di gas*

La (18) costituisce la legge di Dalton: in una mescolanza gassosa la pressione è la somma delle pressioni (parziali) che ciascun componente eserciterebbe qualora occupasse da solo tutto il volume.

Esempio

Come esempio di applicazione dell'equazione di stato di un gas ideale, calcoliamo il lavoro L compiuto da una kmole di un tale gas quando si espande isotermicamente passando dal volume V_1 al volume V_2 . La trasformazione nel piano (p, V) di Clapeyron è rappresentata da un tratto del ramo di iperbole equilatera

$$pV = RT = \text{cost}$$

e il lavoro è rappresentato dall'area racchiusa fra l'iperbole, l'asse V e le ordinate per V_1 e V_2 (fig. 15.2, area in colore). Si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_{V_1}^{V_2} pdV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ (19) \quad &= RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \end{aligned}$$

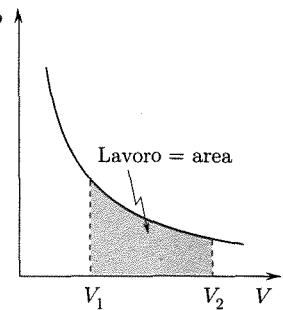


Fig. 15.2

15.3. ENERGIA INTERNA DI GAS PERFETTI

Al fine di determinare la dipendenza dell'energia interna dei gas perfetti dai parametri di stato, Joule iniziò una serie di esperienze sui gas in espansione libera, in una espansione cioè nella quale il gas non fa lavoro esterno. Un primo schema di esperimento eseguito è indicato in figura 15.3. Due recipienti A e B possono essere messi in comunicazione aprendo un rubinetto C e sono posti in un bagno termometrico D termicamente isolato dall'esterno (come il vaso interno di un calorimetro). All'inizio dell'esperienza uno dei due recipienti (A) è pieno di gas, l'altro è vuoto e tutto il *sistema formato dal gas, dai due recipienti e dal bagno* è in equilibrio a una data temperatura T . Dopo l'apertura del rubinetto C il gas si espande, occupando parzialmente anche il volume di B , e si constata che la temperatura del sistema non varia in conseguenza dell'espansione libera del gas.

Joule sperimentò con gas reali abbastanza rarefatti per avere indicazioni sul comportamento limite dei gas perfetti senza riscontrare alcuna variazione di temperatura. Fu però osservato che la disposizione sperimentale usata non è sufficientemente sensibile da poter rivelare eventuali variazioni di temperatura prodotte nell'espansione del gas nel caso che queste siano molto piccole, dato che il bagno termometrico nel quale si determina la temperatura ha una capacità termica molto elevata rispetto a quella della massa gassosa, nella quale la variazione di temperatura potrebbe essere originariamente prodotta. In seguito Joule e Kelvin svilupparono un altro metodo di maggiore sensibilità per avere le informazioni desiderate sulla espansione libera dei gas (cap. 17, par. 17.17). Traducendo i risultati ottenuti con questo nuovo metodo in un linguaggio corrispondente alla primitiva esperienza di Joule si può dire che nell'espansione libera di un gas reale rarefatto nello schema di figura 15.3 si ha una piccola variazione (riduzione) di temperatura, ma che tale variazione diminuisce gradatamente man mano che le condizioni iniziali del gas nel recipiente A approssimano quelle di gas perfetto. Si può

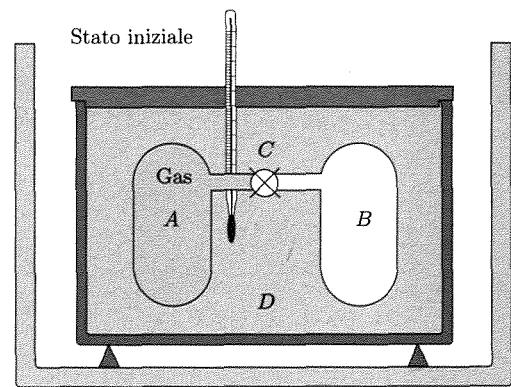


Fig. 15.3

Dall'esperienza di Joule dell'espansione libera di un gas si può dedurre che l'energia interna di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura

quindi concludere che nel caso di gas perfetti la variazione di temperatura nell'espansione libera dell'esperienza di Joule può considerarsi nulla.

Esaminiamo ora le conseguenze di questo risultato. Nell'espansione libera del gas che segue l'apertura del rubinetto il lavoro verso l'esterno del sistema (gas + recipienti + bagno) è ovviamente nullo ($L = 0$); lo stesso è per la quantità di calore scambiata con l'esterno giacché il sistema è isolato ($Q = 0$). Per il primo principio segue che l'energia interna del sistema (gas + recipienti + bagno) non è variata; poiché, d'altra parte, niente è cambiato nello stato dei recipienti e del bagno (e quindi il loro contributo all'energia interna del sistema resta inalterato) si può concludere che l'energia interna del gas perfetto non varia in seguito alla espansione.

In base a questi risultati si può quindi assumere come una *proprietà caratteristica dei gas perfetti* quella espressa dalla legge di Joule: *l'energia interna di un gas perfetto è indipendente dal suo volume*.

Siccome, prendendo come variabili indipendenti T e V , le varie grandezze possono dipendere da queste due variabili, si ottiene per l'energia interna di un gas perfetto il risultato che essa è funzione esclusivamente della temperatura

$$(20) \quad U = U(T) .$$

Di conseguenza il calore specifico a volume costante è, considerando una massa unitaria di gas:

$$(21) \quad c_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{dU}{dT}$$

e quindi

$$(22) \quad dU = c_v dT .$$

■ 15.4. ESPRESSIONE DEL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA PER I GAS PERFETTI

Il primo principio della termodinamica per i gas perfetti si può scrivere, nel caso di trasformazioni elementari (infinitesime) della massa unitaria, nella forma:

$$(23) \quad dQ = c_v dT + p dV .$$

Il calore specifico c_v a volte, come meglio si vedrà in seguito, può essere ritenuto costante entro intervalli di temperatura più o meno estesi e questo semplifica in molti casi le deduzioni che si possono ricavare dalla (23) nel caso di trasformazioni finite.

Se si considera una trasformazione a pressione costante, si ottiene dalla (13)

$$dv = \frac{R}{M} \frac{dT}{p}$$

e dalla (23)

$$(24) \quad (dQ)_p = c_v dT + \frac{R}{M} dT .$$

Risulta quindi:

$$(25) \quad c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = c_v + \frac{R}{M}.$$

Se, anziché considerare l'unità di massa del gas, si considera una kmole, si ha per i calori molari ($C_p = Mc_p$)

$$(26) \quad C_p - C_v = R.$$

Queste relazioni (25) (26) si possono anche ottenere dalla relazione generale [(22), cap. 14] osservando che in questo caso $(\partial U / \partial V)_T = 0$ e calcolando la $(\partial V / \partial T)_p$ dall'equazione di stato.

La differenza tra i calori molari a pressione e a volume costanti è, per i gas perfetti, eguale alla costante R

■ 15.5. TRASFORMAZIONI DI GAS PERFETTI

Nella figura 15.4 sono indicate sul piano pV alcune trasformazioni di un gas perfetto: a , a pressione costante (isobara $p = \text{cost}$); b , a volume costante (isocora $V = \text{cost}$); c , a temperatura costante (isoterma $T = \text{cost}$). Quest'ultima, come si è già visto, è un ramo di iperbole equilatera avente gli assi p , V come asintoti. Si noti che l'ipotesi che le grandezze di stato siano costanti durante le trasformazioni implica che queste siano reversibili, come indicato peraltro dalle linee continue che le rappresentano sul piano di Clapeyron.

Una quarta trasformazione, detta adiabatica, è usata di frequente; la sua caratteristica è, come si è già detto, quella che durante il suo svolgimento non v'è scambio di calore del sistema con l'esterno. È facile trovare, nel caso di una trasformazione irreversibile di un gas perfetto, l'espressione analitica della trasformazione adiabatica. Basta infatti usare l'equazione di stato nella relazione (34) del cap. 14, di validità generale. Poiché infatti, è in questo caso

$$(27) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = \frac{p}{mR/M} = \frac{T}{V}$$

si ha

$$(28) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = -(\gamma - 1) \frac{T}{V}.$$

In una trasformazione adiabatica reversibile pertanto ⁽²⁾:

$$(29) \quad \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

e integrando

$$(30) \quad \ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln(TV^{\gamma-1}) = \text{cost}.$$

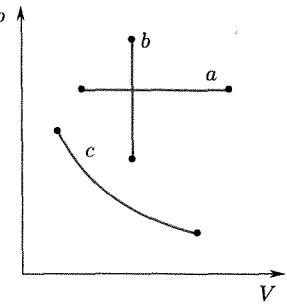


Fig. 15.4

⁽²⁾ La (29) si può dedurre direttamente usando l'espressione del primo principio (23), l'equazione di stato e la (25)

$$dQ = c_v dT + pdV = c_v dT + \frac{R}{M} T \frac{dV}{V} = c_v dT + (c_p - c_v) T \frac{dV}{V} = 0.$$

*Le trasformazioni
adiabatiche
reversibili*

Si ha infine

$$(31) \quad TV^{\gamma-1} = \text{cost.}$$

Espressioni equivalenti possono ottersi usando le equazioni di stato:

$$(32) \quad pV^\gamma = \text{cost}$$

$$(33) \quad p^{(1-\gamma)/\gamma} T = \text{cost.}$$

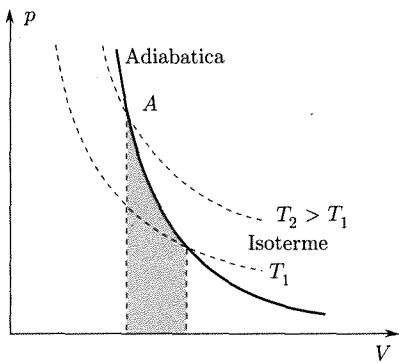


Fig. 15.5

La curva che nel piano pV rappresenta l'adiabatica passante per un punto ha, rispetto alla isoterma per il medesimo punto, una inclinazione maggiore rispetto all'asse dei volumi. Se infatti si comprime adiabaticamente un gas perfetto, cioè si riduce il volume della massa gassosa, la sua temperatura cresce e quindi l'adiabatica deve tagliare isoterme di sempre maggiore temperatura man mano che il volume della massa gassosa decresce (fig. 15.5).

Il lavoro esterno compiuto dalla massa gassosa nella trasformazione adiabatica corrisponde all'area tratteggiata in figura 15.5. Esso può ottersi facilmente dalla espressione del primo principio; essendo $dQ = 0$, il lavoro risulta pari alla variazione di energia interna cambiata di segno.

$$(34) \quad \int_1^2 (dL)_{ad} = U_1 - U_2 = c_v(T_1 - T_2).$$

Nella (34) si è considerata una massa di gas unitaria. Il lavoro è positivo in una espansione e a esso corrisponde una riduzione di temperatura del sistema.

Si voglia calcolare la quantità di calore assorbito da una massa (supponiamo una kmole) di gas perfetto nel passaggio da uno stato 1 a uno stato 2 lungo una delle trasformazioni ora considerate. Occorre evidentemente fare riferimento al primo principio della termodinamica per una trasformazione elementare

$$dQ = dU + dL,$$

esprimere dQ in funzione delle variabili di stato nelle condizioni della trasformazione e integrare lungo la trasformazione fra lo stato iniziale e quello finale.

Nel caso di una trasformazione isoterma, poiché per un gas perfetto l'energia interna dipende esclusivamente da T , dU risulta nullo e quindi

$$dQ = dL.$$

Il calore assorbito è quindi pari al lavoro esterno compiuto. Si ha quindi, ricordando la (19),

$$(35) \quad Q_{12} = L_{12} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Nel caso di trasformazione isocora ($V = \text{cost.}$), il lavoro esterno è nullo e quindi

$$dQ = dU = C_v dT$$

cioè il calore assorbito è pari alla variazione di energia interna e può essere ottenuto da

$$Q_{12} = \int_1^2 C_v dT.$$

Se C_v può ritenersi costante, tutto si riduce al calcolo della temperatura T_2 alla quale si porta la massa nello stato finale quando essa occupa il volume V e si trova alla pressione p_2 . Dall'equazione si stato

$$p_1 V = RT_1$$

$$p_2 V = RT_2$$

si ottiene

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}.$$

Quindi

$$(36) \quad Q_{12} = C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = C_v T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right).$$

Nel caso di trasformazione isobara ($p = \text{cost}$, $Vdp = 0$), si ha

$$dQ = dU + pdV = dU + d(pV) = d(U + pV) = dH = C_p dT;$$

la quantità di calore assorbita è pari alla variazione di entalpia e può calcolarsi in maniera analoga al caso precedente, qualora C_p possa ritenersi costante

$$(37) \quad Q_{12} = \int_1^2 C_p dT = C_p T_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right).$$

■ 15.6. TEORIA CINETICA E MODELLO DEI GAS PERFETTI

Il fatto che tutti i gas seguano le medesime leggi in un vasto campo delle variabili di stato indica come essi debbano possedere una struttura molto semplice. Un modello della loro costituzione microscopica può essere costruito partendo da: a) la conoscenza, acquisita in chimica, della esistenza delle molecole come le più piccole entità di una specie chimica; b) le indicazioni sperimentali relative alla equivalenza fra calore e lavoro: l'energia data a un corpo per variare il suo stato termico sembra ritrovarsi nel moto delle particelle che lo costituiscono. Appare quindi logico pensare che un gas sia costituito da un gran numero di molecole individualmente in continuo movimento. Da tale idea si è sviluppata la teoria cinetica dei gas per merito di J. C. Maxwell, L. Boltzmann, che ha raggiunto uno sviluppo tale da farne una delle teorie fisiche meglio elaborate e affermate⁽³⁾. Essa consente di legare grandezze macroscopiche, quali pressione, temperatura, coefficiente di viscosità ecc. a grandezze microscopiche (per es. quantità di moto) che descrivono il comportamento meccanico (newtoniano) delle molecole.

La teoria cinetica prende l'avvio dalla considerazione di un modello di gas perfetto che consente di spiegare il comportamento limite di gas reali man mano che la pressione decresce, cioè quando sono molto rarefatti: in tal caso è possibile ricavare l'equazione di stato dei gas perfetti e giungere a un'interpretazione cinetica della temperatura. Naturalmente con un modello di gas siffatto (perfetto) non possono spiegarsi alcune proprietà (come la viscosità) presenti nei gas reali; in questi casi il modello di gas preso a base della trattazione cinetica va in parte cambiato.

Allo scopo di definire il modello di gas perfetto occorre fare le seguenti ipotesi sul sistema:

1. *Il gas si ritiene formato da un gran numero di molecole, assimilabili a piccolissime sfere rigide, che si muovono in tutte le direzioni obbedendo alle leggi della meccanica classica.* In conseguenza del moto a caso il numero di molecole che si muove in una direzione con una certa velocità

Ipotesi per un gas perfetto, modello di un gas reale molto rarefatto

⁽³⁾ La teoria cinetica dei gas ha avuto notevole importanza nello sviluppo della fisica giacché alcuni concetti, quali quelli che entrano nella trattazione statistica e probabilistica dei problemi, sono stati introdotti in maniera semplice in tale teoria e sono diventati in seguito di grande importanza in altri rami della fisica (meccanica quantistica).

scalare è lo stesso in media del numero di molecole che si muove in un'altra qualsiasi direzione con la stessa velocità scalare.

2. *Il volume effettivamente occupato dalle molecole è completamente trascurabile rispetto al volume totale occupato dal gas*, cioè a quello del recipiente in cui esso è contenuto; di conseguenza nei calcoli ogni molecola viene considerata puntiforme. Questa ipotesi è giustificata dai fatti che: a) nel passaggio di una sostanza dallo stato gassoso a quello liquido il volume occupato si riduce per un fattore che è di solito di alcune migliaia; b) si considerano gas il cui comportamento è il limite del comportamento di gas reali a grandi rarefazioni.
3. *Le molecole non scambiano forze tra loro*. La giustificazione di questa ipotesi sta nel fatto che nei gas reali alle grandi rarefazioni le distanze medie sono in effetti molto grandi rispetto al raggio di azione delle forze molecolari. In conseguenza di questa ipotesi le molecole si muovono di moto rettilineo tra un urto e il successivo con le pareti del recipiente. L'ipotesi di non occupare un volume proprio permette altresì di non considerare la possibilità di urti tra le molecole. Se questi, peraltro, vi fossero in virtù della finitezza del volume proprio, le molecole si scambierebbero nell'urto quantità di moto in maniera che, ai fini degli urti sulle pareti, non vi sarebbe differenza di quale molecola specifica scambi con la parete la propria quantità di moto.
4. *Gli urti delle molecole con le pareti del recipiente sono perfettamente elastici*; non vi sono cioè perdite di energia cinetica. Tale ipotesi è giustificata dal fatto che altrimenti l'energia cinetica media delle molecole di un gas verrebbe a diminuire nel tempo e ciò comporterebbe, come vedremo, una diminuzione della temperatura del gas.

■ 15.7. PRESSIONE NELLA TEORIA CINETICA

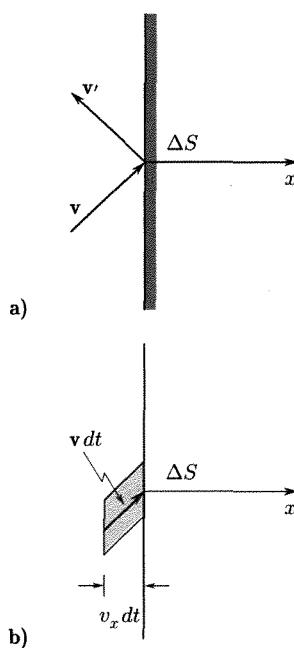


Fig. 15.6

Le molecole di un sistema come quello del modello di gas perfetto ora precisato sottopongono le pareti del recipiente a un bombardamento che produce una pressione, come avviene per un getto di sabbia che urti un corpo solido. Per effettuare il calcolo di tale pressione prendiamo in considerazione una porzione ΔS della superficie della parete, rigida e liscia, del recipiente di volume V che contiene il gas. Per semplicità supponiamo che ΔS sia piana e poniamo l'asse x perpendicolare a ΔS . Le molecole hanno diverse velocità con intensità da zero a valori elevati e si muovono in tutte le direzioni con uguale probabilità. Consideriamo una molecola di massa m che urti la parete ΔS con una velocità v di componenti v_x, v_y, v_z (fig. 15.6a). Per quanto è stato detto circa l'urto di un punto materiale di piccola massa contro una parete rigida (cap. 4, par 4.14, 4.15), le componenti della velocità v' dopo l'urto sono $-v_x, v_y, v_z$ e la variazione della quantità di moto, normale a ΔS , ha intensità $2mv_x$ e il verso di $-\mathbf{i}$. Va ora osservato che varie molecole urtano in un tempo dt l'elemento ΔS con la velocità v : esse sono tutte le molecole aventi velocità v che si trovano nel parallelepipedo segnato in figura 15.6b di base ΔS e altezza $v_x dt$ cioè di volume $\Delta S v_x dt$. Calcoliamo il numero di tali molecole.

Sebbene la velocità delle particelle possa in realtà assumere valori costituenti un campo continuo, si può supporre che le molecole abbiano solo certe velocità v_1, v_2, \dots , che possono del resto essere molto vicine fra loro. Indichiamo allora con $N(v)$ il numero di molecole di tutto il gas

contenuto nel volume V che hanno velocità in intensità e direzione uguali a quelli del vettore \mathbf{v} (ma nei due versi) e con $n(\mathbf{v}) = N(\mathbf{v})/V$ la loro densità (numero per unità di volume). Il numero di molecole contenute nel parallelepipedo in questione con velocità in intensità e direzione uguali a quelli di \mathbf{v} è $n(\mathbf{v})\Delta S v_x dt$; di esse una metà solamente si muove verso la parete (v_x positivo) mentre l'altra metà si allontana dalla parete.

Il numero di molecole quindi che urta l'elemento ΔS con velocità \mathbf{v} nel tempo dt è

$$(38) \quad \frac{1}{2}n(\mathbf{v})v_x dt \Delta S.$$

La variazione di quantità di moto legata agli urti delle molecole di massa m che nell'intervallo dt giungono su ΔS con velocità \mathbf{v} , ha intensità

$$(39) \quad mn(\mathbf{v})v_x^2 \Delta S dt.$$

Analogo calcolo può essere ripetuto per i gruppi di molecole che urtano ΔS con diversa velocità. La variazione totale della quantità di moto nel tempo dt si otterrà sommando termini analoghi a quello calcolato (39), per tutti i valori esistenti di v_x ; l'intensità risulta

$$(40) \quad m\Delta S dt \sum n(\mathbf{v})v_x^2.$$

Tale variazione è pari all'impulso $\mathbf{F} dt$ della forza media risultante dalle azioni esercitate dalla parete ΔS sulle molecole urtanti nel tempo dt . La forza media esercitata dalle molecole sulla parete ΔS è uguale e opposta a \mathbf{F} , cioè nel verso positivo di x . Se si indica con $p = F/\Delta S$ la pressione, si avrà:

$$(41) \quad p\Delta S dt = m\Delta S dt \sum n(\mathbf{v})v_x^2$$

$$(42) \quad p = m \sum n(\mathbf{v})v_x^2.$$

Indichiamo con $\overline{v_x^2}$, il quadrato di quella che si chiama normalmente velocità quadratica media, cioè poniamo

$$(43) \quad \overline{v_x^2} = \frac{n_1 v_{x_1}^2 + n_2 v_{x_2}^2 + n_3 v_{x_3}^2 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots} = \frac{\sum n(\mathbf{v})v_x^2}{n}$$

ove $n_1, n_2, n_3 \dots$ sono il numero di molecole che hanno le velocità $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3} \dots$ e $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$ il numero totale di molecole nell'unità di volume.

Essendo inoltre casuale il moto delle molecole, si può ammettere che il numero di molecole che si muovono con una certa intensità della velocità v in diverse direzioni sia lo stesso: il valore di $\overline{v_x^2}$ è quindi indipendente dalla direzione scelta come x . Si può porre allora per le tre componenti della velocità

$$(44) \quad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

essendo $\overline{v^2}$ il quadrato della media quadratica di v .

Dalle (42) (43) (44) risulta per la pressione l'espressione

$$(45) \quad p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n \left(\frac{1}{2}m\overline{v^2} \right).$$

Calcolo della pressione esercitata da un gas perfetto sulle pareti del recipiente: proporzionalità con l'energia cinetica media

La pressione così determinata per l'elemento ΔS non dipende da ΔS ed è la stessa per tutta la parete del recipiente e nell'interno della massa gassosa in accordo con il principio di Pascal.

Secondo la teoria cinetica quindi *la pressione è proporzionale al numero di molecole per unità di volume e all'energia cinetica media ($\frac{1}{2}mv^2$) di una molecola, cioè è proporzionale alla densità di energia cinetica di traslazione di un gas (u)*

$$(46) \quad u = n \left(\frac{1}{2}m\overline{v^2} \right).$$

■ 15.8. INTERPRETAZIONE CINETICA DELLA TEMPERATURA

Nel caso che si consideri una kmole di gas, la densità n nella (45) diviene N_A^*/V essendo $N_A^* = 10^3 N_A$ il numero di Avogadro per kmole e V il volume occupato dalla kmole. La (45) si scrive, essendo $N_A^*m = M$ (massa di una kmole, in kg numericamente pari al peso molecolare)

$$(47) \quad pV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}M\overline{v^2} \right).$$

Il confronto tra questa equazione e quella di stato dei gas perfetti per una kilomole: $pV = RT$ fornisce

$$(48) \quad \frac{1}{2}M\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT.$$

La teoria cinetica quindi consente di legare la temperatura di un gas alle caratteristiche di moto delle molecole costituenti: *l'energia cinetica di traslazione totale delle molecole di un gas è proporzionale alla temperatura assoluta*.

Dividendo entrambi i membri della (48) per N_A^* e ricordando che è $R/N_A^* = k = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$, si ha per l'energia cinetica media di una molecola

$$(49) \quad \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT.$$

Tale relazione mostra che a parità di temperatura l'energia cinetica media delle molecole di gas diversi è la stessa.

Dalla (48) si ottengono per la velocità quadratica media ⁽⁴⁾ le relazioni

$$(50) \quad v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

È possibile quindi determinare v_{qm} esclusivamente mediante grandezze macroscopiche quali la pressione e la densità senza fare alcuna ipotesi sulla natura o la massa delle molecole. Se si considera per es. l'idrogeno

⁽⁴⁾ È bene notare l'importanza della velocità quadratica media ai fini della descrizione del comportamento di un gas in quanto mentre non è facile effettuare misure che determinino il valore della media (aritmetica) delle velocità in una direzione orientata, è possibile fare misure che determinano l'energia cinetica media e questa è legata ai quadrati delle velocità.

L'energia cinetica media di traslazione delle molecole di un gas monoatomico è proporzionale alla temperatura assoluta

alla pressione di 1 atm = $1,013 \cdot 10^5$ N/m² e alla temperatura di 0 °C, $\rho = 8,99 \cdot 10^{-2}$ kg/m³, si ha

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,99 \cdot 10^{-2}}} = 1.838 \text{ m/s}$$

in accordo con i risultati sperimentali.

La tabella 15.1 mostra i valori di v_{qm} a 0 °C per altri gas calcolati con la (50).

Si osservi che per due gas alla stessa temperatura le v_{qm} stanno tra loro come la radice quadrata del rapporto inverso delle masse delle molecole

$$(51) \quad \frac{v_{1qm}}{v_{2qm}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Questa circostanza viene sfruttata per separare i costituenti di una miscela gassosa facendola diffondere da un recipiente in un secondo (nel quale la pressione viene tenuta molto bassa) attraverso un setto poroso. Lo spessore del setto poroso e il diametro dei pori possono essere fatti (molto più piccoli del libero cammino medio) in modo tale che le molecole entrando nel poro riescano a passare nel secondo recipiente. In tal caso le quantità dei gas che passano in un certo intervallo di tempo sono proporzionali alla velocità v_{qm} delle molecole e quindi inversamente proporzionali alle radici quadrate delle masse. Questo tipo di separazione riesce utile per la separazione di isotopi, di atomi cioè che differiscono solo per il peso del nucleo: in questo caso infatti non si possono usare metodi chimici di separazione giacché le proprietà chimiche degli isotopi di un elemento sono le stesse. Si tratta di processi di separazione molto poco efficienti data la piccola differenza nelle masse delle molecole dei gas che si vogliono separare. Nel caso per es. della separazione dell'uranio 235 (fissionabile) dall'uranio 238 contenuto per il 99,282% nell'uranio naturale, possono essere usati come gas i fluoruri ($^{235}\text{UF}_6$ e $^{238}\text{UF}_6$); la radice del rapporto delle masse è $\sqrt{352/349} = 1,0043$. Il gas che passa attraverso il setto è solo di poco più ricco di isotopo 235 della miscela originaria e il processo deve essere ripetuto molte volte per ottenere un arricchimento sensibile.

Tabella 15.1

Gas	v_{qm} (m/s)
H ₂	1838
He	1311
N ₂	493
O ₂	461
CO	493
CO ₂	393
Kr	286
N ₂	584

■ 15.9. DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI IN STATI DI EQUILIBRIO

La trattazione finora svolta non ha richiesto la conoscenza delle velocità delle singole molecole che costituiscono il gas: è stato infatti sufficiente considerare una velocità media assieme all'ipotesi che le velocità siano distribuite uniformemente in tutte le direzioni (distribuzione a caso per un gran numero di molecole).

È naturalmente assai poco probabile che in ogni istante tutte le molecole di una massa gassosa abbiano la stessa energia cinetica e v'è un grandissimo numero di modi in cui l'energia cinetica totale può essere suddivisa tra le molecole. Si vuole stabilire ora se esista una distribuzione media delle velocità fra le molecole di un gas in corrispondenza a uno stato stazionario, a uno stato cioè per il quale le grandezze macroscopiche non varino con il tempo (stato di equilibrio). È chiaro che in corrispondenza a un tale stato le velocità delle singole molecole non resteranno costanti, ché anzi esse variano in seguito agli urti: esaminando però il gas nel suo complesso, appare logico attendersi che la frazione di molecole con velocità comprese fra due certi limiti resti, a parte piccole fluttuazioni, costante nel tempo.

Il problema della determinazione della distribuzione delle velocità delle molecole in corrispondenza a uno stato stazionario di un gas è stato trattato da molti scienziati (Maxwell, Boltzmann, Gibbs) partendo da punti di vista diversi. Nella trattazione meccanico-statistica di Gibbs per es. lo stato di equilibrio di un gas è considerato come quello di maggiore probabilità: si calcola la probabilità per ogni particolare stato del gas, nel quale le molecole hanno certe velocità, e si ricerca il massimo di tale probabilità con le condizioni aggiuntive che il numero delle molecole e l'energia totale restino costanti. Si ottiene così una legge di distribuzione che coincide con quella trovata per primo da Maxwell.

Indicheremo qui una via che può essere seguita, la quale sottolinea il fatto che la distribuzione di equilibrio è conseguita e mantenuta per effetto degli urti fra le molecole. Nelle considerazioni seguenti le particelle del gas sono assimilate a piccolissime sfere rigide senza struttura interna; viene cioè preso come modello cinetico di gas quello di gas perfetto. Prendiamo in considerazione, per semplicità, l'unità di volume del gas nella quale sono contenute $n = N/V$ molecole, se N è il numero totale di molecole nel volume V ; in tal modo i risultati si esprimeranno mediante la densità di molecole n .

*Lo spazio delle fasi a $6N$ dimensioni
e lo spazio delle velocità
a $3N$ dimensioni*

Ricordiamo che in meccanica è stato introdotto lo *spazio delle fasi* (cap. 2, par. 2.20): per un sistema formato da N punti materiali si tratta in genere di uno spazio a $6N$ dimensioni. In esso può essere descritto con ogni dettaglio l'evolversi dello stato dinamico del sistema.

Nel caso di sistemi formati da un numero molto grande di particelle (punti materiali) identiche (come le molecole di un gas) che si muovono contemporaneamente con le stesse modalità (per es. interagendo solo durante gli urti) si ha di solito interesse allo studio del comportamento globale quale può essere descritto da considerazioni statistiche. In queste circostanze è sufficiente considerare uno *spazio delle fasi* a sei dimensioni in cui si descrive contemporaneamente l'evolversi dello stato dinamico di ciascuna particella.

I parametri necessari per determinare lo stato dinamico della particella sono quelli che forniscono la posizione e la velocità (o la quantità di moto). A questo spazio delle fasi faremo riferimento in questa sezione.

Lo *spazio delle velocità* che ora si vuole introdurre è un sottospazio a $3N$ dimensioni di questo spazio delle fasi.

Si consideri a tale scopo uno spazio tridimensionale di coordinate cartesiane che rappresentano le componenti della velocità della singola molecola a un dato istante (v_x, v_y, v_z). A ogni molecola e a ogni istante corrisponde un punto, che è l'estremo del vettore \mathbf{v} riportato a partire dall'origine del sistema di assi.

Riferendosi, come si è detto, all'unità di volume del gas, alle n molecole corrisponde nello spazio delle velocità una *nuvola* di n punti. In seguito agli urti tra le molecole, che qui si suppongono presenti avendo le molecole una sia pur minima interazione reciproca, i punti di questa rappresentazione mutano in continuazione nel senso che, a ogni istante, alcuni di essi spariscono dalle posizioni già occupate per apparire in altre. Se si considera (fig. 15.7) un elemento di volume A nello spazio delle velocità, $dv_x dv_y dv_z$, a ogni istante si ha che i punti rappresentativi di alcune molecole già contenuti in esso spariscono, mentre compaiono punti rappresentativi di altre molecole. Si può ammettere che in corrispondenza a uno stato stazionario il numero di punti presenti in $dv_x dv_y dv_z$ sia, a parte piccole fluttuazioni, costante. Il numero di tali punti, cioè di molecole le cui componenti della velocità sono comprese fra v_x e $(v_x + dv_x)$; v_y e $(v_y + dv_y)$; v_z e $(v_z + dv_z)$, può porsi pari a:

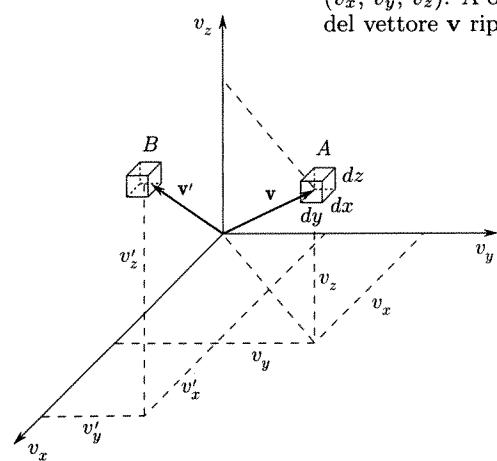


Fig. 15.7

La funzione $n(\mathbf{v})$ esprime la densità dei punti rappresentativi nello spazio delle velocità, cioè il rapporto tra il numero di punti rappresentativi delle n molecole (contenute nell'unità di volume del gas) che cadono in $dv_x dv_y dv_z$ intorno a \mathbf{v} nello spazio delle velocità e $(dv_x dv_y dv_z)$. È bene notare che il rapporto

$$f_M(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = \frac{n(\mathbf{v})}{n} dv_x dv_y dv_z$$

fornisce la frazione dei punti rappresentativi delle n molecole che si trovano in $dv_x dv_y dv_z$ intorno a \mathbf{v} , cioè la probabilità di trovare il punto rappresentativo di una delle n molecole nel volume $dv_x dv_y dv_z$ considerato. Mentre $n(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$ esprime la legge di distribuzione delle velocità di Maxwell, la $f_M(\mathbf{v})$ è la corrispondente funzione densità di probabilità (cap. 12, par. 12.3).

Per giungere alla determinazione di $n(\mathbf{v})$, si può pensare che tale funzione debba essere tale da assumere uno stesso valore in corrispondenza a tutti i punti entro un guscio sferico nello spazio delle velocità con centro nell'origine, in conseguenza del fatto che le velocità delle molecole sono distribuite a caso in tutte le direzioni. La funzione deve perciò dipendere da $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

La determinazione di $n(\mathbf{v})$ può farsi prendendo in considerazione un altro elemento dello spazio delle velocità (B) per i punti del quale le componenti della velocità sono comprese fra v'_x e $(v'_x + dv_x)$; v'_y e $(v'_y + dv_y)$; v'_z e $(v'_z + dv_z)$.

Si possono ora considerare gli urti fra molecole che appartengono all'elemento A e molecole dell'elemento B , e fra questi urti quelli che avvengono in modo che la linea formata dai centri delle molecole che urtano abbia i coseni direttori compresi entro determinati limiti. Il numero di urti di questo tipo che avvengono nell'intervallo di tempo dt può essere espresso mediante la funzione $n(\mathbf{v})$ (non ancora stabilita). Se si integra l'espressione di questo numero considerando tutti i possibili elementi B nello spazio delle velocità e tutti i valori dei coseni direttori della direzione d'urto, si ottiene il numero di molecole che lasciano l'elemento A nell'intervallo dt .

Si possono ora considerare gli urti fra due molecole caratterizzati dalle seguenti circostanze:

1. le due molecole abbiano, dopo l'urto, i corrispondenti punti rappresentativi uno in A e uno in B ;
2. gli urti accadano lungo una linea i cui coseni direttori siano compresi entro certi limiti.

In tali condizioni si possono determinare le velocità che le molecole devono aver avuto prima dell'urto. È possibile allora esprimere il numero di urti di questo tipo che avvengono nell'intervallo dt servendosi ancora della funzione incognita $n(\mathbf{v})$. Se si integra tale espressione considerando tutti i possibili elementi B e tutti i valori dei coseni direttori della direzione d'urto, si ottiene il numero di molecole i cui punti nello spazio delle velocità entrano nell'elemento A durante l'intervallo di tempo dt .

Eguagliando i numeri di molecole che nello stesso dt lasciano l'elemento A o entrano in esso per effetto degli urti con altre molecole, si ha il modo di determinare la forma della legge di distribuzione della velocità.

La legge di distribuzione che si trova, scritta nella forma della distribuzione delle velocità di Maxwell è data da

$$(53) \quad n(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = ae^{-bm(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z$$

essendo m la massa delle molecole e a e b due costanti che presto calcoleremo.

L'andamento della $n(\mathbf{v})$ è indicato in figura 15.8 per due valori di b , in funzione della intensità della velocità, cioè, nello spazio della velocità, della distanza dall'origine del punto nel cui intorno la densità dei punti rappresentativi delle molecole è $n(\mathbf{v})$. La $n(\mathbf{v})$ cresce nello spazio delle velocità man mano che ci si avvicina all'origine. La variazione della funzione nei pressi dell'origine è più rapida per valori più elevati di b . Inoltre al diminuire di b diviene più piccola la frazione di molecole che

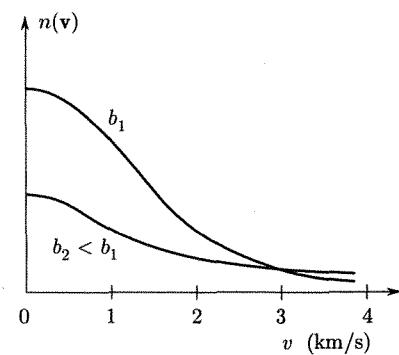


Fig. 15.8

ha certe velocità piuttosto basse e aumenta la frazione di molecole aventi velocità più elevate; in altri termini, a una diminuzione di b corrisponde un aumento della velocità quadratica media e quindi della temperatura.

La legge delle velocità di Maxwell può porsi in una forma di uso più generale considerando al posto del numero medio di molecole (fra le n per unità di volume del gas) che hanno velocità vettoriale fra \mathbf{v} e $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, il numero medio di molecole che hanno l'intensità della velocità fra v e $(v + dv)$. Per far ciò si ricordi che i punti rappresentativi delle molecole nello spazio delle velocità si dispongono con simmetria sferica e ciò è rispecchiato nel fatto che $n(\mathbf{v})$ nella (53) dipende da $(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, cioè assume lo stesso valore in corrispondenza a tutti i punti di ciascun guscio sferico con centro nell'origine degli assi. Se quindi si vuole conoscere il numero medio di molecole che hanno l'intensità della velocità compresa fra v e $(v + dv)$ indipendentemente dalla direzione della velocità, basterà determinare il numero dei punti rappresentativi di molecole che nello spazio delle velocità sono compresi fra le superfici sferiche di raggi v e $(v + dv)$ cioè moltiplicare la densità (53) per il volume $4\pi v^2 dv$ compreso fra le due superfici. Indicando questo numero con $n(v)dv$ (da non confondersi con $n(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z$) si ha

*Legge di distribuzione
di Maxwell delle velocità*

$$(54) \quad n(v)dv = a e^{-bm v^2} 4\pi v^2 dv .$$

È questa la forma più usata delle leggi di distribuzione delle velocità di Maxwell, giacché nella maggior parte dei problemi interessa $n(v)dv$ e non $n(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z$. La funzione di distribuzione (densità di probabilità) corrispondente alla (54) è

$$f_M(v) = \frac{n(v)}{n} .$$

Si osservi che la forma della funzione $n(v)$ è notevolmente diversa da quella della $n(\mathbf{v})$ (fig. 15.8); la presenza del fattore v^2 fa sì che essa vada a zero per $v = 0$; essa va inoltre a zero per $v \rightarrow \infty$ per la presenza dell'esponenziale [come per la (53)] e quindi deve avere un massimo per un certo valore di v .

Il valore della costante a si trova imponendo la condizione che l'integrale della (54) rispetto alla velocità, cioè il numero di molecole per unità di volume che abbiano una qualsiasi velocità deve essere eguale al valore n di molecole presenti per unità di volume:

$$(55) \quad n = 4\pi a \int_0^\infty e^{-bm v^2} v^2 dv = 4\pi a \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{b^2 m^3}} .$$

Da cui

$$(56) \quad a = n \left(\frac{bm}{\pi} \right)^{3/2} .$$

La costante b si determina calcolando la velocità quadratica media il cui valore è già noto:

$$(57) \quad \begin{aligned} \overline{v^2} &= \frac{1}{4} \int_0^\infty v^2 n(v) dv = \frac{1}{n} 4\pi a \int_0^\infty e^{-bm v^2} v^4 dv \\ \overline{v^2} &= \frac{4\pi a}{n} \left(\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{b^5 m^5}} \right) = \frac{3}{2bm} . \end{aligned}$$

Si può anche scrivere

$$(58) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4b}$$

e quindi, essendo per la (49) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$,

$$(59) \quad b = \frac{1}{2} \frac{1}{kT}.$$

Il parametro b risulta quindi inversamente proporzionale alla temperatura assoluta, in accordo a quanto già accennato.

L'espressione (54) della legge di distribuzione di Maxwell si può quindi scrivere

$$(60) \quad n(v)dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv.$$

Nel caso che, invece di considerare il numero n di molecole nell'unità di volume, si desideri considerare quello N nel volume V si ha:

$$(61) \quad N(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv.$$

La figura 15.9 mostra la distribuzione maxwelliana nel caso dell'idrogeno ($M = 2,016$) per varie temperature. Sulle ascisse v 'è la velocità; sulle ordinate $n(v)$ e l'unità corrispondente va scelta in modo che l'area racchiusa dalla curva e dall'asse delle ascisse sia pari al numero n totale di molecole per unità di volume. Per le varie curve tale area è la stessa. Se si tracciano due parallele all'asse delle ordinate per v e $v + dv$, esse, assieme all'asse delle ascisse e alla curva, determinano un'area che fornisce il numero di molecole per unità di volume che hanno velocità comprese fra v e $v + dv$. Tutte le curve di figura 15.9 partono da zero e raggiungono un massimo che si sposta verso le alte velocità con il crescere della temperatura. Al crescere della temperatura, inoltre, la distribuzione si allarga nel senso che aumenta il numero delle molecole più veloci.

Il valore della velocità che corrisponde al massimo di $n(v)$ in funzione di v è la velocità più probabile v^* :

$$(62) \quad v^* = \sqrt{\frac{1}{bm}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

La velocità quadratica media risulta, dalla (57)

$$(63) \quad v_{qm} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3}{2bm}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

*La funzione
di distribuzione
delle velocità di Maxwell
coi relativi parametri*

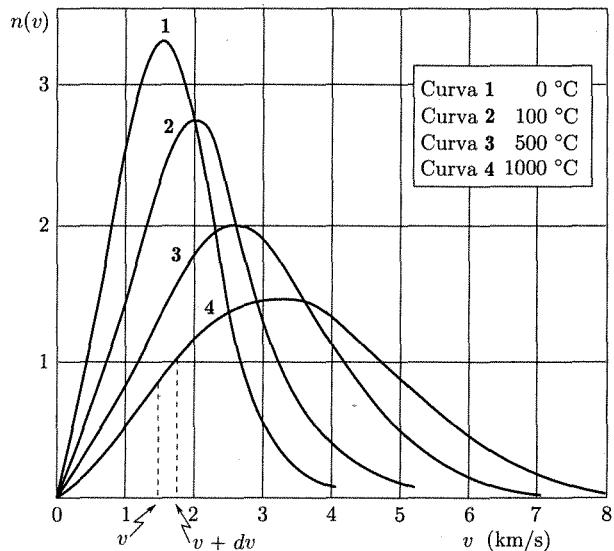


Fig. 15.9

*Dalla funzione
di Maxwell si possono
ricavare i valori della
velocità più probabile,
della velocità
quadratica media
e della velocità media*

L'intensità media delle velocità delle molecole, detta comunemente velocità media (aritmetica) è invece:

$$v_m = \frac{1}{n} \int_0^\infty v n(v) dv = \frac{4\pi a}{n} \int_0^\infty e^{-bm^2} v^3 dv.$$

L'integrale che appare nel secondo membro vale $\frac{1}{2}(2kT/m)^2$ e quindi è

$$(64) \quad v_m = \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} v_{qm} = 0,921 v_{qm}.$$

15.10. VERIFICA Sperimentale DELLA LEGGE DI MAXWELL

La legge di distribuzione delle velocità nei gas, come si è accennato, è stata oggetto di numerosi studi: essa può essere stabilita con varie trattazioni di diverso rigore e in seguito ai recenti sviluppi della tecnica dei fasci molecolari può essere anche stabilità sperimentalmente. Oltre a ciò essa trova conferma nell'accordo fra le deduzioni teoriche che consente di trarre in numerosi processi (per es. processi di trasporto, allargamento delle linee spettroscopiche emesse da atomi eccitati causato dall'effetto Doppler) e risultati sperimentali.

Si vuole ora accennare a un esperimento (Estermann-Simpson-Stern, 1947) eseguito per studiare sperimentalmente la distribuzione delle velocità nei gas mediante fasci molecolari.

La disposizione sperimentale è indicata in figura 15.10. O è una camera ad alta temperatura (sorgente) nella quale vengono prodotti vapori di cesio e questi si trovano alla pressione di circa 0,01 mm di Hg. Molecole di cesio fuoriescono in una regione a vuoto spinto, attraverso una sottile fenditura. Le cose sono disposte in modo che le molecole che effondono non subiscano praticamente urti nella regione evacuata.

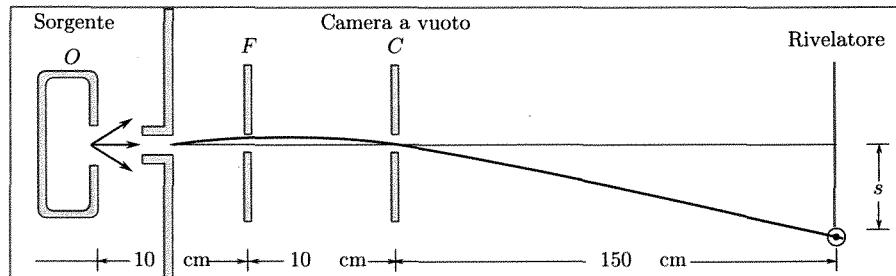


Fig. 15.10

Si ottiene in questa maniera un fascio molecolare; altre fessure vengono disposte per definire meglio il fascio molecolare eliminando le particelle che escono dalla sorgente formando un angolo con l'orizzontale superiore a un certo piccolo valore. Le molecole terminano il loro viaggio urtando un piano sul quale si trova un rivelatore⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ Nel caso dell'esperienza che descriviamo il rivelatore era costituito da un sottile (diametro 0,02 mm) filo caldo di tungsteno che trasforma un atomo di cesio che lo colpisca in uno ione il quale viene successivamente attratto da un elettrodo carico negativamente; la corrente nel circuito di tale elettrodo fornisce il numero di atomi che urtano il filo nell'unità di tempo. Tale rivelatore può essere spostato nella camera dall'alto in basso, nella disposizione che qui interessa.

La distanza percorsa dal fascio molecolare nella camera evacuata è considerevole: in tale regione, il campo di gravità agisce sulle molecole nel loro volo dalla fenditura F (larghezza 0,02 mm) al rivelatore. Indicando la distanza fra la fenditura F e il rivelatore con l (nel caso in considerazione quasi 2 m), si può scrivere per l'abbassamento verticale tra diaframma C e rivelatore di una molecola che viaggia con velocità orizzontale v : $s = \frac{1}{2}g(l^2/v^2)$. Si vede quindi che determinando il numero di molecole che raggiunge il rivelatore a diverse s si ha il modo di studiare la distribuzione delle v nel fascio molecolare. I risultati di un'esperienza con cesio a 450 °K sono riportati nella figura 15.11 assieme alla curva calcolata secondo la legge di Maxwell per la situazione sperimentale usata. Sull'asse verticale è riportata l'intensità della corrente al rivelatore, proporzionale alla frazione di molecole che hanno un abbassamento verticale tale da cadere sul rivelatore in ciascuna posizione s . L'accordo è ottimo nei limiti della precisione sperimentale.

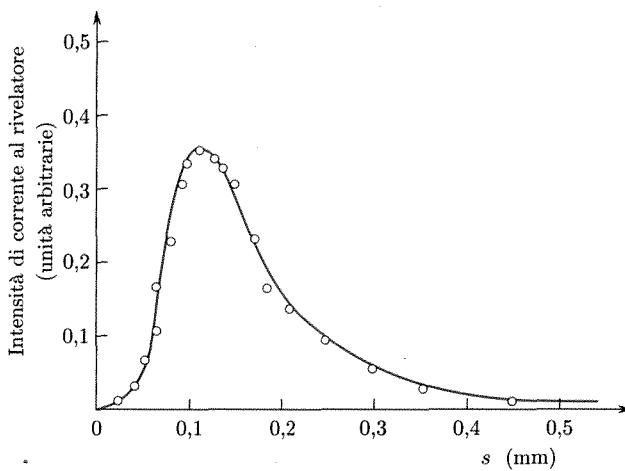


Fig. 15.11

■ 15.11. LEGGE DI BOLTZMANN DI DISTRIBUZIONE DELLE ENERGIE

La legge di distribuzione delle velocità di Maxwell, sebbene stabilita per un modello cinetico di gas perfetto, vale bene per rappresentare la distribuzione delle velocità di traslazione nei gas reali in quasi tutte le situazioni. Nel caso che si voglia considerare la distribuzione delle energie fra le molecole, la legge di Maxwell fornisce gli elementi necessari solo nel caso di gas reali che approssimino lo schema teorico, cioè nel caso di gas monoatomici (i quali hanno solo i gradi di libertà di traslazione) che non possiedono altre energie di interesse nel caso concreto in considerazione.

In genere però le molecole dei gas hanno, accanto all'energia cinetica di traslazione, energie di altro tipo. Molecole biatomiche e poliatomiche hanno gradi di libertà di rotazione e di vibrazione e, come vedremo fra breve, possono trovarsi in vari *stati di rotazione* o di *vibrazione*. Inoltre, alle alte temperature ci possono essere variazioni nella configurazione elettronica degli atomi cui corrispondono diverse energie, cioè gli atomi possono trovarsi in vari *stati eccitati*. A ciò va aggiunto il fatto che le molecole possono avere altre energie in relazione a campi esterni (per es. di gravità) o a campi dovuti alla presenza di altre particelle come avviene nel caso di elevata densità o comunque quando le particelle scambino in-

*La distribuzione
di Boltzmann per le
particelle in funzione
dell'energia posseduta*

terazioni con altre particelle. Assume quindi grande importanza stabilire la legge di distribuzione delle molecole fra i vari stati energetici nei quali esse possono trovarsi.

Ciò è stato fatto da Boltzmann il quale ha mostrato che la distribuzione delle molecole fra i vari stati dipende solo dall'*energia totale* (cinetica e potenziale) di ciascuno stato. La legge di Boltzmann dà per il numero di molecole aventi l'energia totale fra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$.

$$(65) \quad n(\varepsilon)d\varepsilon = ag(\varepsilon)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}d\varepsilon$$

essendo a una costante⁽⁶⁾ e $g(\varepsilon)$, detto peso dello stato di energia ε , è tale che $g(\varepsilon)d\varepsilon$ è il numero di stati differenti che hanno energia fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$. Il rapporto $f_B(\varepsilon) = n(\varepsilon)/n$, ove n è il numero totale di particelle, rappresenta la funzione di distribuzione di Boltzmann. La legge (65), come quella delle velocità di Maxwell, è relativa a una situazione stazionaria e non è influenzata dagli urti e dai conseguenti passaggi di molecole da uno stato a un altro fra quelli consentiti.

Siccome nei processi che di caso in caso si è condotti a esaminare solamente una parte dell'energia totale varia fra gli stati interessati, è sufficiente, per ottenere la distribuzione delle molecole fra questi stati, considerare nella (65) come ε non l'energia totale ma questa sua parte. Si consideri per es. il fatto che alle temperature normali le variazioni di configurazione elettronica sono tanto poco probabili che si può tralasciare il termine corrispondente in ε quando si voglia studiare la distribuzione delle molecole fra stati energetici quali quelli di vibrazione, rotazione ecc.

La legge di Boltzmann per la distribuzione delle particelle fra gli stati energetici che il sistema può assumere è di grandissima importanza e viene usata nello studio di numerosissimi processi in sistemi formati da un gran numero di particelle uguali disposte a caso. Si troverà di frequente questa legge come per es. per la determinazione dell'energia nei gradi di libertà di vibrazione (par. 15.16).

Si osservi che la legge (65) per la distribuzione delle energie nel caso di gas monoatomico conduce alla legge di Maxwell per la distribuzione delle velocità. In questo caso, infatti, innanzi tutto l'energia totale è la sola energia cinetica del centro di massa ($\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$): l'esponenziale quindi diviene $e^{-mv^2/2kT}$. Inoltre la distribuzione degli stati energetici costituisce uno *spettro continuo* e $g(\varepsilon)$ non è altro che il numero di stati per intervallo unitario di energia. Siccome l'energia è dovuta solamente all'esistenza della velocità, e uno stato energetico deriva da un punto nello spazio delle velocità, si può porre la distribuzione delle velocità nella forma

$$(66) \quad n(v) = ag(v)e^{-mv^2/2kT}$$

essendo $g(v)$ il numero di punti nello spazio delle velocità per intervallo unitario di velocità. Tale numero si determina facilmente pensando che nello spazio delle velocità tutti i punti compresi fra le superfici sferiche di raggio v e $v + dv$ rappresentano stati che hanno velocità comprese fra questi limiti e quindi $g(v)$ è pari al volume fra le sfere ($4\pi v^2 dv$), diviso per dv ; cioè

$$g(v) = 4\pi v^2.$$

Sostituendo nella (66) si ottiene la distribuzione delle velocità di Maxwell [vedi (54) (60)]:

$$n(v) = a4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

⁽⁶⁾ Che si determina come nel caso della legge di Maxwell con la condizione che la somma dei numeri di molecole che posseggono le diverse energie possibili deve essere uguale al numero totale di molecole presenti.

Per fare un esempio di applicazione della legge si consideri un gas (per es. aria) e supponiamo che i vari stati che le molecole possono occupare si diversifichino per l'energia potenziale gravitazionale (mgz , essendo l'asse z orientato verso l'alto). La legge di Boltzmann consente allora di ottenere immediatamente come varia il numero di molecole per unità di volume del gas con la quota z :

$$(67) \quad n(\varepsilon) = n(z) = n_0 e^{-mgz/kT},$$

n_0 essendo il numero di molecole per unità di volume per $z = 0$.

Se si moltiplica $n(z)$ per la massa delle molecole si ottiene la cosiddetta formula barimetrica che dà la variazione della densità dell'aria con la quota nell'atmosfera

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-mgz/kT}.$$

Questa formula conduce facilmente alla (22) del cap. 8; basta ricordare che $p/p_0 = \rho/\rho_0$ e moltiplicare numeratore e denominatore dell'esponente di e per il numero di Avogadro. Si ha:

$$\frac{Nm}{NkT} = \frac{M}{RT} = \frac{1}{p_0 v_0} = \frac{\rho_0}{p_0}$$

essendo m il peso molecolare, $v_0 = 1/\rho_0$ il volume specifico e avendo usato la (13).

*Formula barimetrica
della densità di un gas
isotermo*

■ 15.12. LIMITI DELLA STATISTICA DI MAXWELL-BOLTZMANN

La legge di distribuzione delle velocità di Maxwell e quella delle energie di Boltzmann si trovano, come si è già detto, in accordo con i risultati sperimentali nella stragrande maggioranza dei casi e sono impiegate molto estesamente nello studio dei gas. Peraltra ci sono alcuni casi in cui i risultati sperimentali si scostano dalle indicazioni ottenibili con le suddette relazioni. La ragione di ciò sta nel fatto che nella meccanica statistica di Maxwell-Boltzmann non viene considerato il problema della distinguibilità delle particelle nella descrizione dello stato del sistema. In realtà la soluzione di questo quesito si ha usando la meccanica quantistica e si è allora condotti a due nuove statistiche: quella di Bose-Einstein e quella di Fermi-Dirac: nel primo caso due particelle del gas non possono occupare uno stesso *stato* a disposizione secondo il cosiddetto principio di esclusione di Pauli. È possibile provare che la statistica di Maxwell-Boltzmann si ottiene come limite di entrambe le statistiche quantistiche per sistemi a bassa densità. I gas reali seguono alcuni la statistica di Bose-Einstein, altri quella di Fermi-Dirac: per tutti i gas reali comunque le correzioni da apportare alle formule della statistica di Maxwell-Boltzmann [quindi alle (60) (65)] sono in genere trascurabili tranne per gas densi alle basse temperature. Ciò si verifica praticamente⁽⁷⁾ solo per l'elio che può essere ancora allo stato gassoso (vapore) a tali temperature: in questo caso vale la statistica di Bose-Einstein.

*Nelle trattazioni
statistiche
di Bose-Einstein
e di Fermi-Dirac
si considerano come
un unico stato
microscopico
tutti quegli stati
ottenibili
scambiando tra loro
a due a due
le particelle*

Qui non si possono trattare queste statistiche; si vuole però osservare che la loro importanza sta non solo nel fatto che esse consentono di spiegare il comportamento dei gas reali nei pochi casi in cui la statistica di Maxwell-Boltzmann non è sufficiente, ma anche nel fatto che servono per

⁽⁷⁾ Recenti sviluppi nelle ricerche (I.F. Silvera - J.T.M. Walraven, 1980) hanno consentito di ottenere e mantenere a temperatura dell'ordine di millesimi di grado Kelvin un gas formato di atomi di idrogeno con spin in una direzione (spin polarizzato): tale gas segue la statistica di Bose-Einstein.

la descrizione di altri sistemi che si trovano in fisica, analoghi ai gas, formati cioè da un gran numero di particelle uguali che si comportano come le molecole di un gas. Importanti casi di questo genere sono gli elettroni liberi in un metallo e i fotoni della radiazione elettromagnetica. Le statistiche che valgono in questi casi sono quelle quantistiche: Fermi-Dirac per gli elettroni nei solidi, Bose-Einstein per i fotoni.

■ 15.13. CALORI SPECIFICI NEI GAS PERFETTI ED EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

La teoria cinetica dei gas perfetti consente il calcolo del calore specifico a volume costante per tali gas. Se si considera una trasformazione a volume costante e si tiene presente il primo principio della termodinamica, si può scrivere per una kmole

$$(68) \quad C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{dU}{dT} .$$

La parte dell'energia totale (energia interna) che varia con la temperatura è quella legata al moto delle molecole, le quali, come si è detto, sono considerate sfere rigide. Si può quindi porre per una kmole

$$(69) \quad U = N_A^* \frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{2} RT$$

e quindi

$$(70) \quad C_v = \frac{3}{2} R \simeq 3 \text{ kcal/kmol K}$$

e

$$(71) \quad C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R .$$

Risulta

$$(72) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,666 .$$

Questi risultati sono in accordo con l'esperienza solo nel caso di gas monoatomici (He, Ne, A, vapori di Hg ecc.) mentre i calori specifici di gas biatomici o poliatomici sono maggiori di quelli ora stabiliti. Ciò è dovuto al fatto che solo nel caso di gas monoatomici la forma e la struttura delle molecole si avvicinano a quelle postulate per i gas perfetti (sfere rigide). Negli altri casi la realtà è notevolmente diversa: ne segue che le molecole possono possedere energia anche in forme diverse dall'energia di traslazione del centro di massa.

Prima di passare a considerare in maggior dettaglio questi casi, si noti che nel caso dei gas monoatomici l'energia cinetica media per molecola è espressa mediante la somma di tre termini

$$(73) \quad \frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{1}{2} m \bar{v_x^2} + \frac{1}{2} m \bar{v_y^2} + \frac{1}{2} m \bar{v_z^2} = \frac{3}{2} kT$$

i quali a causa della distribuzione uniforme della velocità hanno ciascuno il valore $\frac{1}{2} kT$; ciò corrisponde a dire che l'energia cinetica è equipartita fra i tre gradi di libertà.

Una molecola non sferica ha gradi di libertà di rotazione. Nel caso di una molecola biatomica (fig. 15.12a) questi gradi di libertà corrispondono alle rotazioni intorno a due assi perpendicolari fra loro e alla retta congiungente i centri dei due atomi che formano la molecola; nel caso di una molecola poliatomica essi sono tre, e corrispondono alle rotazioni intorno a tre assi mutuamente ortogonali passanti per il centro di massa C (fig. 15.12b). In conseguenza degli urti le molecole sono poste in rotazione e la velocità di rotazione media di ciascun grado di libertà sarà tanto maggiore quanto più alta è la temperatura. Le energie che corrispondono a queste rotazioni hanno le espressioni: $\frac{1}{2}I_x\omega_x^2$, $\frac{1}{2}I_y\omega_y^2$, $\frac{1}{2}I_z\omega_z^2$, essendo I i momenti di inerzia rispetto agli assi x , y , z .

Siccome inoltre le molecole non sono rigide, le distanze fra gli atomi costituenti possono variare rispetto a quelle di equilibrio determinate in base alle azioni mutue fra atomi e si destano in conseguenza forze di richiamo che, se gli spostamenti ξ dalle posizioni di equilibrio sono piccole, possono ritenersi proporzionali agli spostamenti, $-k\xi$. Si originano allora oscillazioni armoniche, vibrazioni, di determinata frequenza ν . Nel caso di una molecola biatomica un solo modo di vibrazione è possibile; nel caso di una molecola triatomica lineare come quella CO_2 le vibrazioni possibili sono quattro che si deducono dalla figura 15.13. Sono qui indicati per tre modi di vibrazione (ν_1 , ν_2 , ν_3) le direzioni di moto simultaneo degli atomi in un certo istante; la quarta vibrazione (di flessione), ν_4 , è identica alla terza tranne per il fatto che la flessione si verifica nel piano ortogonale a quello del foglio: le due vibrazioni di flessione hanno la stessa frequenza (degenerazione). Per molecole poliatomiche è più difficile visualizzare i modi di vibrazione: il loro numero totale è, per una molecola con N atomi, pari alla differenza fra $3N$ (numero di gradi di libertà di un sistema di N punti) e il numero di gradi di libertà di traslazione e rotazione.

Secondo la teoria classica degli oscillatori (cap. 3, par. 3.7), *a ogni modo di vibrazione armonica della molecola corrisponde un'energia cinetica e un'energia potenziale con valori medi uguali fra loro*, che hanno espressioni del tipo $\frac{1}{2}mv'^2$ e $\frac{1}{2}k\xi^2$ dove k è la costante elastica distinta dalla costante di Boltzmann usata in questo paragrafo con lo stesso simbolo: anche queste energie sono tanto più elevate quanto più alta è la temperatura, cioè le oscillazioni avvengono con ampiezze che crescono con la temperatura.

Lo stato energetico degli elettroni negli atomi di una molecola può anche variare ma, tranne in casi particolari (per es. NO), tale circostanza non ha influenza sui calori specifici. Si osservi infine che le molecole possono possedere una energia potenziale dovuta a forze intermolecolari: si trascuri anche questo contributo al calore specifico poiché è importante solo a densità elevate.

In genere quindi si può ritenerne che l'energia di una molecola sia data dalla somma di termini del tipo $\frac{1}{2}mv_x^2$ (per ogni grado di libertà di traslazione); $\frac{1}{2}I_x\omega_x^2$ (per ogni grado di libertà di rotazione); $\frac{1}{2}mv'^2$ e $\frac{1}{2}k\xi^2$ (per ogni grado di libertà di vibrazione). Tutti questi termini hanno un'espressione matematica analoga: una costante positiva per il quadrato di una grandezza che può assumere valori positivi e negativi. Gli scambi di energia fra le molecole di un gas avvengono durante gli urti e ciò è

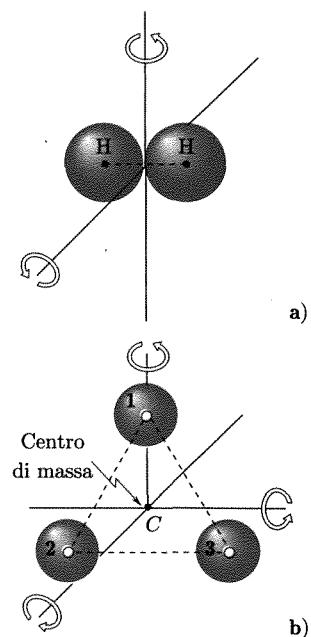


Fig. 15.12

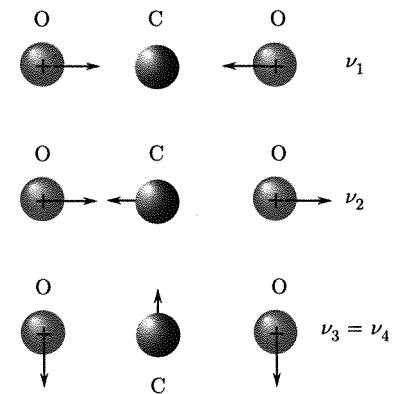


Fig. 15.13

Per il teorema di equipartizione dell'energia tutti i gradi di libertà sono equivalenti ai fini della distribuzione dell'energia all'equilibrio

vero per l'energia di tutti i vari modi in cui essa può essere posseduta da una molecola: naturalmente ciò accade con processi notevolmente diversi per i vari tipi di energia.

In linea con tali ragionamenti e con il fatto che non sembra esserci ragione perché le molecole di un gas in condizioni di equilibrio posseggano quantità differenti di energia media dei tipi che possono essere liberamente scambiati durante gli urti, si enuncia il teorema di Maxwell di equipartizione dell'energia secondo cui⁽⁸⁾: *i valori medi di tutti i termini che entrano nella espressione dell'energia di una molecola (del tipo $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}I\omega^2$, $\frac{1}{2}kx^2$) sono uguali e dipendono solo dalla temperatura.* In accordo con ciò che si è detto per il caso del gas perfetto tale valore comune è $\frac{1}{2}kT$. Con queste premesse è facile formulare le previsioni della teoria classica dei calori specifici.

Nel caso delle molecole biatomiche si ha per kmole

$$(74) \quad U = \frac{1}{2}N_A^*kT \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{traslazione} \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \text{rotazione} \end{array} + \underbrace{\begin{array}{c} (1+1) \cdot 1 \\ \text{cinetica} + \\ \text{potenziale} \\ \text{vibrazione} \end{array}}_{\text{vibrazione}} \right] = \frac{7}{2}RT$$

$$(75) \quad C_v = \frac{7}{2}R \quad C_p = \frac{9}{2}R$$

Nel caso di molecole poliameriche con n gradi di vibrazione

$$(76) \quad U = \frac{1}{2}RT \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{traslazione} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \text{rotazione} \end{array} + \begin{array}{c} 2n \\ \text{vibrazione} \end{array} \right]$$

Andamento dei calori molari di un gas biatomico in funzione della temperatura

Queste indicazioni delle teorie classiche sembrano giustificare i risultati sperimentali solo a temperature molto elevate mentre netti disaccordi esistono a temperature relativamente basse. La figura 15.14 mostra la curva sperimentale di C_v in funzione di T per l'idrogeno biatomico (H_2). A temperature basse il valore di C_v è $\frac{3}{2}R$ come per i gas perfetti monoatomici: in un intervallo di temperatura vicino alla temperatura ambiente C_v vale all'incirca $\frac{5}{2}R$ come sarebbe indicato dalla teoria classica per gas biatomici qualora si considerasse solo il contributo dei gradi di libertà di traslazione e di rotazione. Tali disaccordi possono essere spiegati solo facendo ricorso alla teoria quantistica.

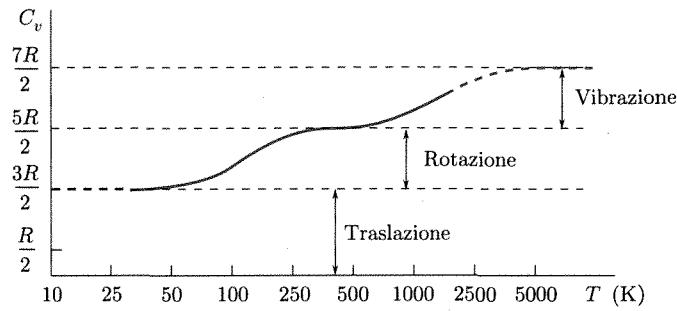


Fig. 15.14

⁽⁸⁾ La validità del teorema è limitata ai termini della struttura esaminata in precedenza ($\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{1}{2}I\omega^2$, $\frac{1}{2}k\xi^2$) e purché l'energia possa fluire liberamente, durante gli urti, fra i gradi di libertà. Il teorema non può essere applicato per determinare l'energia relativa ad altri contributi quali, ad es., l'energia potenziale dovuta a forze intermolecolari o alla gravità.

■ 15.14. OSCILLATORE ARMONICO E ROTATORE LIBERO NELLA MECCANICA QUANTISTICA

L'interpretazione del comportamento dei calori specifici nelle sostanze gassose, liquide e solide ha costituito uno dei primi e notevoli successi della meccanica quantistica. Prima di vedere l'interpretazione nel caso dei gas, occorre accennare alla trattazione quantistica dell'oscillatore armonico e del rotatore libero.

Si è visto in meccanica classica che un punto materiale di massa m che si muova in una direzione x sotto l'azione di una forza elastica diretta verso un punto (che supponiamo l'origine del sistema di riferimento), si muove di moto armonico (oscillatore armonico) con una frequenza propria ν_0 ben definita e un'ampiezza che può assumere un qualsiasi valore; in corrispondenza, anche l'energia può assumere qualsiasi valore. A differenza della trattazione classica, nella trattazione quantistica l'energia dell'oscillatore può assumere solo alcuni valori che caratterizzano gli stati stazionari possibili:

$$(77) \quad E_v = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu_0$$

ove h è la costante di Planck e n può essere zero o un numero intero qualsiasi ($n = 0, 1, 2, \dots$); esso prende il nome di numero quantico di vibrazione. La figura 15.15 mostra come sono disposti i livelli energetici. La distanza fra due successivi livelli è sempre $h\nu_0$. Lo stato fondamentale ($n = 0$) ha un'energia che è $\frac{1}{2}h\nu_0$ al di sopra dell'energia potenziale minima corrispondente alla posizione di equilibrio dell'oscillatore; tale energia residua non può essere portata via dall'oscillatore e viene mantenuta anche alla temperatura più bassa possibile (zero assoluto). Essa prende il nome di energia al punto di zero. La sua presenza è legata al principio di indeterminazione: non si può infatti pensare di localizzare esattamente l'oscillatore nella posizione di equilibrio e allo stesso tempo rendere la sua quantità di moto (e di conseguenza l'energia cinetica) pari a zero.

Si consideri ora una massa m che possa ruotare liberamente intorno a un punto fisso nello spazio e che rimanga a una distanza r fissa da questo punto (rotatore libero). Secondo la meccanica classica il momento della quantità di moto può assumere qualsiasi valore. Nella meccanica quantistica invece esso può assumere solo un certo numero di valori

$$(78) \quad b = j \frac{h}{2\pi}$$

con $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ numero quantico di rotazione.

Se si osserva che l'espressione classica dell'energia di rotazione intorno a un asse può essere posta [cap. 5, eq. (22)] nella forma $\frac{1}{2}b^2/I$, essendo $I = mr^2$ il momento d'inerzia, si potrebbe facilmente calcolare un'espressione per l'energia di rotazione negli stati consentiti pari a

$$\frac{j^2 h^2}{8\pi^2 I}.$$

In realtà la trattazione quantistica fornisce un'espressione leggermente diversa

$$(79) \quad E_r = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I} j(j+1)$$

in virtù del principio di indeterminazione: le tre componenti del vettore momento della quantità di moto non possono essere determinate accuratamente allo stesso istante; ne consegue un'incertezza nella direzione del vettore che si rispecchia nella formula (79). La figura 15.16 mostra la disposizione dei livelli di rotazione: si noti che la distanza fra due livelli successivi non è costante.

Per la meccanica quantistica i valori dell'energia di un oscillatore armonico o di un rotatore libero sono discretizzati su livelli ben definiti

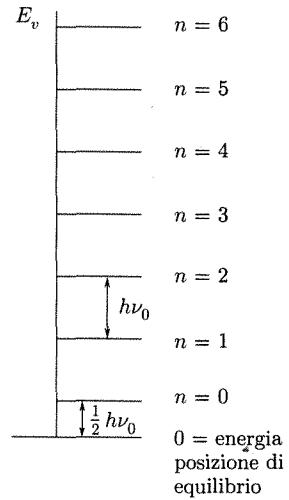


Fig. 15.15

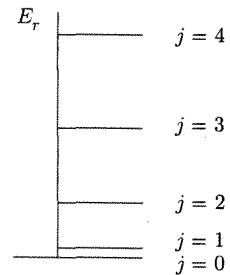


Fig. 15.16

■ 15.15. TEORIA QUANTISTICA DEI CALORI SPECIFICI

Se si considerano le molecole di un gas biatomico o poliatomico, esse, come si è visto, posseggono gradi di libertà di rotazione e di vibrazione. Gli scambi di energia fra i gradi di libertà di traslazione, di rotazione e di vibrazione avvengono in corrispondenza agli urti e secondo la trattazione classica si raggiungerebbe all'equilibrio una equipartizione nel senso che l'energia media che corrisponde a ciascun termine dell'energia che qui interessa ha lo stesso valore.

Ciò è vero purché l'energia possa fluire liberamente da un grado di libertà a un altro. In realtà, in accordo con la meccanica quantistica, ciascuna molecola poliatomica in relazione a ciascun grado di libertà di rotazione o di vibrazione va considerata come un rotatore libero o un oscillatore armonico: gli scambi di energia quindi con l'esterno possono avvenire solo secondo quantità ben definite.

Per essere precisi si deve dire che anche l'energia di traslazione è quantizzata; siccome tuttavia i livelli consentiti sono talmente numerosi e vicini fra loro da costituire quasi un insieme continuo, si può trascurare la quantizzazione dell'energia di traslazione. In altri termini la trattazione quantistica porta alle stesse conclusioni classiche per quel che riguarda i tre gradi di libertà di traslazione nella situazione ordinaria: a ciascuno di essi compete una energia media uguale e pari a $\frac{1}{2}kT$.

Per quanto riguarda gli altri gradi di libertà, lo scambio di energia fra essi e i gradi di libertà di traslazione durante gli urti dipende in maniera essenziale dalla temperatura. Si consideri innanzi tutto un grado di libertà di rotazione di una molecola intorno all'asse per il centro di massa. La energia dei vari stati consentiti è data dalla (79) e il suo calcolo richiede la determinazione del momento di inerzia della molecola rispetto a un asse per il centro di massa. Tale calcolo può farsi se si conosce la struttura (atomi e loro distanze) della molecola stessa. Per le nostre considerazioni è interessante determinare la energia minima per eccitare la rotazione della molecola, cioè per farla passare dal livello fondamentale $j = 0$ a quello $j = 1$:

$$(80) \quad E_1 - E_0 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 I}.$$

Questa è la quantità minima di energia che deve essere data a una molecola per eccitare al livello più basso la rotazione. Nell'urto con un'altra molecola l'eccitazione sarà quindi possibile solo se l'energia di traslazione che la molecola urtante possiede è almeno uguale al valore (80). Per giudicare della possibilità di eccitare un grado di rotazione in una molecola si deve quindi confrontare il valore (80) con l'ordine di grandezza kT dell'energia media di traslazione ($\frac{3}{2}kT$). Si usa spesso considerare una temperatura particolare,

$$(81) \quad \theta_{\text{rot}} = \frac{E_1 - E_0}{k} = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 I k}$$

caratteristica per ogni molecola e tale che per essa kT ($= k\theta_{\text{rot}}$) è pari alla differenza di energia fra i livelli 0 e 1 della rotazione considerata: la tabella 15.2 dà i valori di θ_{rot} per alcune molecole biatomiche (considerando l'asse con I maggiore). La tabella dà anche i valori di θ_{vibr} di cui parleremo fra poco. Si noti il fatto che l'idrogeno ha θ_{rot} molto superiore a quello degli altri gas per via del piccolo momento d'inerzia della molecola.

Tabella 15.2

Sost.	θ_{rot} (K)	θ_{vibr} (K)
H ₂	171	6140
CH	41,4	4100
HCl	30,5	4300
O ₂	4,17	2260
N ₂	5,78	3380
CO	5,53	3120
Cl ₂	0,693	2370
Br ₂	0,233	810
I ₂	0,108	470
Na ₂	0,447	140

A temperature molto inferiori a θ_{rot} (per es. $T/\theta_{\text{rot}} = \frac{1}{10}$) non si hanno molecole in numero significativo che possiedano energie di traslazione sufficienti per eccitare la rotazione di un'altra molecola urtandola. Di conseguenza, l'energia non può fluire nel grado di libertà di rotazione e tutto va come se esso non esistesse (*rotazione congelata*). Il calore specifico è allora quello classico⁽⁹⁾ di un gas monoatomico ($C_v = \frac{3}{2}R$).

Al crescere della temperatura verso θ_{rot} i gradi di rotazione cominciano a essere eccitati; avvengono cioè urti nei quali l'energia di traslazione è sufficiente per l'eccitazione. Gli scambi di energia fra rotazione e traslazione sono abbastanza facili e frequenti per $T = \theta_{\text{rot}}$ e il contributo dei gradi di rotazione al calore specifico C_v cresce gradatamente. A temperature molto elevate, kT è talmente grande rispetto alle differenze di energie fra i livelli di rotazione (e non solo fra i livelli 0 e 1) che gli scambi di energia fra la traslazione e la rotazione avvengono con tale facilità che tutto va come se la quantizzazione non esistesse e quindi il contributo al calore specifico è di nuovo quello classico $\frac{1}{2}R$ per ogni grado di libertà e per kilomole.

Come si vede, la teoria quantistica spiega completamente la prima parte della curva sperimentale dei calori specifici e il passaggio di C_v da $\frac{3}{2}R$ a $\frac{5}{3}R$ nella figura 15.14 per le molecole di idrogeno. Nel caso dell'idrogeno a temperature superiori ai 400 K i gradi di rotazione sono completamente eccitati e tutto va come se la rotazione non fosse quantizzata. Per gli altri gas (θ_{rot} minore) ciò avviene a temperature molto più basse (decine di gradi assoluti).

Considerazioni analoghe si debbono fare per quanto concerne i gradi di libertà di vibrazione. Ciascuna molecola infatti in corrispondenza a ogni grado di vibrazione va considerata come un oscillatore armonico: i livelli successivi sono in questo caso separati da una differenza d'energia (quanto) costante, pari a $h\nu_0$, che può essere calcolata conoscendo la struttura della molecola. Anche in questo caso conviene considerare una temperatura

$$(82) \quad \theta_{\text{vibr}} = \frac{E_n - E_{n-1}}{k} = \frac{h\nu_0}{k}$$

come rapporto fra la differenza di energia fra due livelli contigui $[n, (n-1)]$ e la costante di Boltzmann. La tabella precedente riporta alcuni valori per molecole biatomiche.

A temperature notevolmente inferiori a θ_{vibr} , la vibrazione molecolare non è praticamente eccitata (*congelata*) e il contributo al calore specifico è nullo. Esso cresce con la temperatura ed è notevole nelle vicinanze di $T = \theta_{\text{vibr}}$. A temperature molto elevate rispetto a θ_{vibr} il grado di libertà di vibrazione è completamente eccitato e tutto va come se la quantizzazione non esistesse e il contributo a C_v per ogni grado di libertà di vibrazione è R per kmole. Questo comportamento spiega l'ultima parte della curva di C_v per l'idrogeno (fig. 15.14). Si osservi la grande differenza fra θ_{vibr} e θ_{rot} . Per rendere ancora più evidente questa circostanza riportiamo in figura 15.17 i livelli energetici di rotazione e vibrazione per le molecole CO; si noti che la scala delle ordinate per il caso della rotazione è 100 volte più estesa di quella per la vibrazione.

I contributi alla distribuzione di energia fra i vari livelli quantistici dipendono dal rapporto tra gli intervalli energetici e l'energia media: i calori molari sono funzioni della temperatura

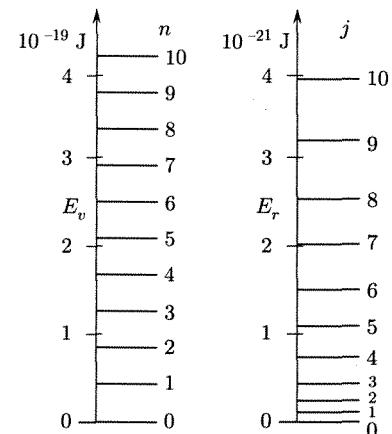


Fig. 15.17

⁽⁹⁾ Per molecole monoatomiche i valori che I può assumere sono così piccoli che la rotazione è congelata anche a temperature molto elevate.

Per molti gas (per es. idrogeno intorno alla temperatura ambiente ordinaria) v'è un campo di temperatura nel quale i gradi di libertà di rotazione sono eccitati completamente, mentre quelli di vibrazione non sono apprezzabilmente interessati agli scambi di energia. In tal caso C_v ha il valore classico per molecole aventi gradi di traslazione e rotazione:

1. per gas biatomici

$$(83) \quad C_v = \frac{5}{2}R \simeq 5 \text{ kcal/kmol K}; \quad C_p = \frac{7}{2}R; \quad \gamma = 1,4$$

2. per gas poliatomici

$$(84) \quad C_v = 3R \simeq 6 \text{ kcal/kmol K}; \quad C_p = 4R; \quad \gamma = 1,333$$

A temperatura ambiente
i gradi di libertà
vibrazionali
di molecole biatomiche
possono considerarsi
congelati

Circostanze di questo tipo si verificano intorno alla temperatura ambiente per N_2 e O_2 e giustificano l'uso di $\gamma = 1,4$ per l'aria in molte applicazioni nelle quali la temperatura non si discosta molto da quella ambiente.

Infine va ricordato che in taluni casi possono essere presenti altri contributi al calore specifico. A parte quello dovuto alla eccitazione degli elettroni che si può rendere apprezzabile qualche volta (per es. in NO), va osservato che quando la rarefazione non sia molto spinta, cioè le distanze medie fra le molecole non siano molto grandi e azioni apprezzabili siano scambiate fra loro per un tempo notevole, un contributo a C_v deriva dal fatto seguente: le molecole tendono per effetto delle forze attrattive ad avvicinarsi con una riduzione della energia del sistema; al crescere della temperatura le azioni attrattive sono contrastate sempre più con il risultato che le molecole mediamente si allontanano con un aumento dell'energia potenziale del sistema. Ciò significa che all'aumentare della temperatura cresce l'energia potenziale del sistema dovuta alle forze intermolecolari. A ciò corrisponde un contributo a C_v che prende il nome di *calore specifico dovuto alle forze intermolecolari*: esso spiega alcune particolarità osservate in C_v nei gas a densità elevate.

■ 15.16. ENERGIA DI VIBRAZIONE E CALORE SPECIFICO DI MOLECOLE BIATOMICHE

Le considerazioni precedenti sulla dipendenza della energia di rotazione e di vibrazione di molecole poliatomiche dalla temperatura possono essere usate per il calcolo dei calori specifici in funzione della temperatura. Qui si considererà il caso particolarmente importante dell'energia di vibrazione di un gas biatomico.

Supponiamo di avere N molecole biatomiche della stessa sostanza, ciascuna di esse sufficientemente lontana dalle altre da poter essere considerata, dal punto di vista quantistico e ai fini che interessano, un oscillatore armonico isolato. L'insieme di particelle può allora essere considerato come un insieme di oscillatori armonici identici che si trovano in certi stati energetici distribuiti discontinuamente, dati dalla (77)

$$(85) \quad \varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} + n \right) h\nu_0 \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

A un tale sistema può applicarsi la statistica di Boltzmann e ottenersi:

$$(86) \quad N_n = a e^{-\varepsilon_n/kT}.$$

La costante a può determinarsi mediante la condizione che la somma delle particelle che occupano tutti i vari stati deve essere uguale a N :

$$(87) \quad N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots = \sum_0^{\infty} N_n$$

Si ha, ricordando la somma di una progressione:

$$(88) \quad N = a e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)} \sum_0^{\infty} n e^{-n(h\nu_0/kT)} = a \frac{e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)}}{1 - e^{-h\nu_0/kT}}.$$

L'energia totale di vibrazione dell'insieme di molecole è la somma delle energie delle particelle che occupano i vari stati energetici

$$(89) \quad E_{\text{vibr}} = \varepsilon_0 N_0 + \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2 + \dots$$

Per il suo calcolo basta introdurre nella (89) le espressioni di ε_n e N_n . Si ha

$$\begin{aligned} E_{\text{vibr}} &= \frac{1}{2} h\nu_0 a e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)} + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) h\nu_0 a e^{-\left(\frac{1}{2}+1\right)(h\nu_0/kT)} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + 2 \right) h\nu_0 a e^{-\left(\frac{1}{2}+2\right)(h\nu_0/kT)} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} h\nu_0 a e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)} \left[1 + e^{-h\nu_0/kT} + e^{-2(h\nu_0/kT)} + e^{-3(h\nu_0/kT)} + \dots \right] + \\ &\quad + a e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)} \left[h\nu_0 e^{-h\nu_0/kT} + 2h\nu_0 e^{-2(h\nu_0/kT)} + 3h\nu_0 e^{-3(h\nu_0/kT)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Tenendo presente la (88) e di nuovo la somma di una progressione:

$$\begin{aligned} E_{\text{vibr}} &= \left(\frac{1}{2} h\nu_0 \right) N + h\nu_0 a e^{-\frac{1}{2}(h\nu_0/kT)} \frac{1}{e^{h\nu_0/kT} (1 - e^{-h\nu_0/kT})^2} \\ &= \frac{1}{2} (h\nu_0) N + N \frac{h\nu_0}{e^{h\nu_0/kT} - 1}. \end{aligned}$$

Si ottiene come risultato dei calcoli la importante relazione

$$(90) \quad E_{\text{vibr}} = E_0 + N \frac{h\nu_0}{e^{h\nu_0/kT} - 1},$$

ovè E_0 deriva dall'energia al punto di zero di ciascun oscillatore ed è l'energia totale al punto zero dell'insieme di molecole. Se si considera una kmole ($N = N_A^*$) e si differenzia la (90) rispetto a T si ha per il contributo a C_v

$$\begin{aligned} (C_v)_{\text{vibr}} &= R \frac{(h\nu_0/kT)^2}{(e^{h\nu_0/kT} - 1)(1 - e^{-h\nu_0/kT})} = \\ (91) \quad &= R \frac{(\theta_{\text{vibr}}/T)^2}{(e^{\theta_{\text{vibr}}/T} - 1)(1 - e^{-\theta_{\text{vibr}}/T})}. \end{aligned}$$

La funzione (91) è rappresentata nella figura 15.18: essa tende alle alte temperature al valore R , giacché $(e^{\theta_{\text{vibr}}/T} - 1)$ tende a $[1 + (\theta_{\text{vibr}}/T) - 1] = \theta_{\text{vibr}}/T$ e lo stesso avviene per

$$\left(1 - e^{-\theta_{\text{vibr}}/T} \right).$$

Per temperature basse

$$(92) \quad (C_v)_{\text{vibr}} = R \left(\frac{\theta_{\text{vibr}}}{T} \right)^2 e^{-\theta_{\text{vibr}}/T}$$

e quindi $(C_v)_{\text{vibr}}$ va a zero con una legge che non si scosta molto da un esponenziale.

L'espressione (90) che dà l'energia di vibrazione di N molecole biatomiche è importante e sarà usata in seguito.

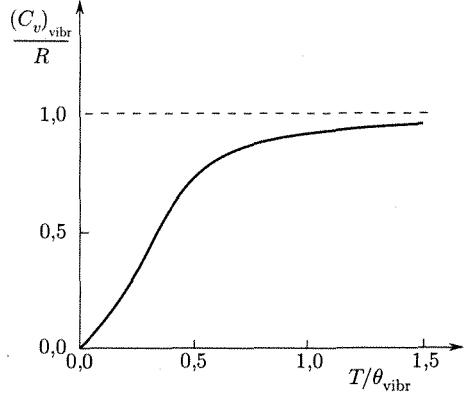


Fig. 15.18

Il contributo dell'energia vibrazionale di molecole biatomiche al calore molare

■ 15.17. LIBERO CAMMINO MEDIO

Una grandezza di notevole interesse nello studio molecolare dei processi che avvengono nei gas è il libero cammino (percorso) medio, l , inteso come distanza media percorsa da una molecola fra due urti successivi. Lo spazio percorso in un secondo da una molecola è in media pari alla velocità media v_m sicché per determinare l basterà valutare il numero di urti che la molecola subisce in un secondo.

Una valutazione approssimata⁽¹⁰⁾ può farsi immaginando (fig. 15.19) per un momento che tutte le molecole siano ferme tranne una (A) e che un urto avvenga tutte le volte che la molecola mobile giunge a una certa distanza, che porremo $2r$, da un'altra molecola. Tale distanza dipende dai campi di forze che circondano le molecole; approssimativamente, si possono considerare le molecole come sfere rigide di raggio r .

Finché il percorso fra urti successivi si mantiene molto più grande del diametro delle molecole, si vede che il numero di molecole urtato in un secondo è pari al numero di molecole il cui centro si trova in un cilindro di lunghezza v_m e raggio $2r$, cioè in un volume $4\pi r^2 v_m$. Se n è il numero di molecole per unità di volume, il numero medio di urti per secondo è $4\pi r^2 v_m n$ e quindi il libero cammino medio sarà

$$(93) \quad l = \frac{v_m}{4\pi r^2 n v_m} = \frac{1}{4\pi r^2 n}.$$

Questo calcolo è approssimato perché si è supposto che le molecole B, C, \dots fossero ferme; in realtà, esse si muovono, sicché occorrerebbe usare per il calcolo del numero di urti al secondo, cioè del denominatore della (93), la *velocità relativa media* delle molecole fra loro e non la velocità media delle molecole rispetto a un sistema esterno (recipiente). Ripetendo il calcolo⁽¹¹⁾ con tale precisazione e usando la legge di Maxwell per la distribuzione delle velocità si trova che il numero di urti al secondo è $\sqrt{2}$ volte più grande di quello precedentemente calcolato. Risulta quindi:

$$(94) \quad l = \frac{1}{\sqrt{2} 4\pi r^2 n}.$$

Il *libero cammino medio* è quindi inversamente proporzionale tanto alla sezione d'urto *apparente* πr^2 quanto a n e quindi alla pressione. Circa

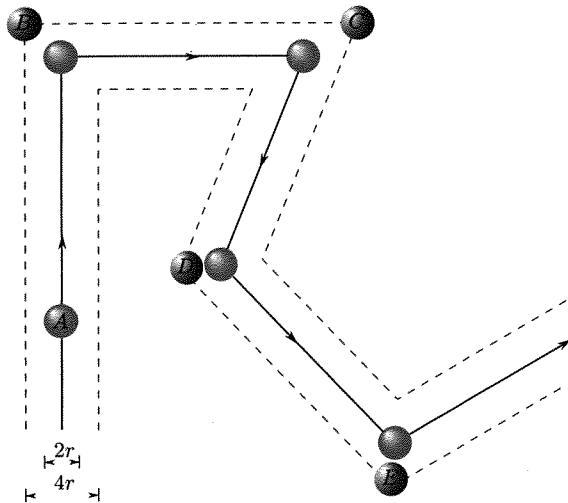


Fig. 15.19

Il libero cammino medio dipende in ragione inversa dalla pressione

⁽¹⁰⁾ Si osservi che il modello di gas preso nella trattazione cinetica del libero cammino medio e delle grandezze (per es. viscosità, par. 15.18) che vengono trattate facendo uso del libero cammino medio non è esattamente quella di gas perfetto poiché si considerano in maniera determinante le dimensioni finite delle molecole e le forze intermolecolari.

⁽¹¹⁾ Un calcolo approssimato della correzione può farsi in questa maniera. Le direzioni delle velocità possedute da due molecole, che urtano, prima dell'urto formano un angolo qualunque fra 0 e π . Poiché ogni valore è egualmente probabile è possibile considerare come valore medio dell'angolo sudetto $\pi/2$. Ne segue che se le due molecole che urtano hanno velocità rispetto a un sistema esterno di intensità pari a v_m e direzioni a 90° , la velocità relativa è $v_m\sqrt{2}$.

gli ordini di grandezza di l si osservi che il raggio delle molecole è dell'ordine di $1 \div 3 \cdot 10^{-8}$ cm e che, in condizioni normali di pressione (1 atm) e temperatura (ambiente) n è dell'ordine di $3 \cdot 10^{19}$ molecole/cm³; si ha allora $l \simeq 10^{-5}$ cm. Se si riduce la pressione, l aumenta: per 10⁻³ mmHg (pressioni che si hanno nell'atmosfera a 100 km di distanza dalla Terra) l è circa 1 m; per 10⁻⁶ mmHg (nell'atmosfera a 300 km di distanza) l è 10 km. In quest'ultimo caso n è circa 10⁸ molecole/cm³.

Secondo la (94) l non dipenderebbe da T purché n resti costante cioè il volume del gas non vari. In realtà esiste una dipendenza di l da T in conseguenza del fatto che le molecole non sono rigide, come invece si è ammesso nel calcolo, e la distanza alla quale due molecole interagiscono (urto) dipende dalla velocità relativa delle molecole stesse. Ciò porta di conseguenza che $2r$ diminuisce all'aumentare delle velocità delle molecole, cioè, a parità di altre condizioni, al crescere di T .

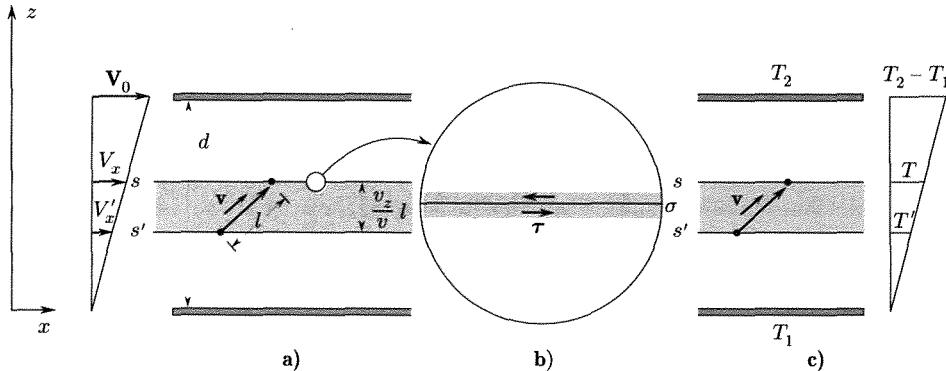
Si trova che l è proporzionale a $T^{1/a}$ essendo a compreso fra 6 (elio, idrogeno) e 2 (cloro).

15.18. VISCOSITÀ E CONDUZIONE TERMICA NEI GAS

I fenomeni della viscosità, della conduzione del calore e della diffusione nei gas hanno una medesima origine che risiede nel moto disordinato delle molecole di un gas e nel conseguente trasferimento di qualche proprietà (quantità di moto, energia, tipo delle molecole) caratteristica di una regione della massa gassosa a un'altra. Per tali ragioni questi fenomeni di solito vengono indicati con il nome di fenomeni di trasporto. La loro interpretazione mediante la teoria cinetica può essere fatta con una trattazione (Maxwell-Clausius) unificata. Per ragioni di semplicità espositiva, considereremo i tre processi separatamente.

Si consideri (fig. 15.20a) una massa gassosa compresa fra due piani (piastre) di dimensioni trasversali praticamente infinite, i quali si muovano uno rispetto all'altro: la velocità del piano inferiore sia zero rispetto a un sistema di riferimento esterno, quella dell'altro sia \mathbf{V}_0 , nella direzione e nel verso dell'asse x . Il moto del gas sia laminare, cioè i vari strati paralleli ai piani scorrono gli uni sugli altri, il primo e l'ultimo strato aderendo alle superfici dei piani estremi. Il gradiente della velocità è

$$(95) \quad \frac{dV_x}{dz} = \frac{V_0}{d}.$$



I fenomeni del trasporto

Fig. 15.20

Lo sforzo di taglio che si esercita fra strati contigui del gas in moto nella direzione x è

$$(96) \quad \tau = \eta \frac{dV_x}{dz}$$

pari all'intensità della forza per unità di area che, attraverso una superficie σ fra strati (fig. 15.20b), lo strato superiore esercita sull'inferiore accelerandolo e viceversa. Si noti per inciso che i coefficienti η dei gas sono molto piccoli (dell'ordine di 10^{-4} dine s/cm^2), circa 100 volte più piccoli di quello dell'acqua a $0^\circ C$.

Per interpretare il processo, occorre innanzi tutto notare che il moto delle molecole è dato dalla sovrapposizione del moto a caso (con velocità che indichiamo v) che esse avrebbero anche in assenza di scorrimenti e del moto della direzione x con velocità V_x . In quest'ultimo moto ciascuna molecola di massa m appartenente a uno stesso strato possiede una quantità di moto mV_x . A causa, tuttavia, del moto a caso, un certo numero di molecole passa da uno strato a un altro, ciascuno caratterizzato da una diversa quantità di moto nel moto laminare. È possibile vedere che ciò conduce a un flusso netto di quantità di moto del moto laminare dagli strati a velocità V_x superiore verso quelli a velocità inferiori; tale flusso corrisponde appunto a una azione acceleratrice che gli strati con velocità V_x maggiore esercitano su quelli a velocità minore e a una azione ritardatrice dei secondi sui primi.

Prendiamo in considerazione uno strato s (fig. 15.20a) la cui velocità di scorrimento sia V_x e in particolare una molecola che vi giunga dal basso con velocità, nel suo moto di agitazione termica, $v(v_x, v_y, v_z)$ attraverso un elemento di superficie $d\sigma$ che separa lo strato da quello inferiore. In media si può ritenere che la molecola abbia percorso dopo l'ultimo urto un cammino in linea retta di lunghezza pari al libero cammino medio l ; essa quindi proviene da uno strato s' al di sotto di s e a una distanza verticale da esso pari a $(v_z/v)l$.

Se si fa l'ipotesi che le molecole, in media, prendano le proprietà caratteristiche di uno strato (velocità V_x , temperatura ecc.) in seguito alle collisioni che subiscono in tale strato, si può ritenere che la velocità V'_x e la quantità di moto che una molecola, che passi da s' a s , aveva nello strato s' nel moto laminare siano

$$(97) \quad V'_x = V_x - \frac{dV_x}{dz} l \frac{v_z}{v}$$

$$(98) \quad mV'_x = mV_x - m \frac{dV_x}{dz} l \frac{v_z}{v}.$$

Quest'ultima espressione fornisce la quantità di moto media nel moto laminare che una molecola che giunge dal basso con la velocità v attraverso l'elemento di superficie $d\sigma$, trasferisce allo strato s . Per potere sommare gli effetti dovuti alle varie molecole che passano da strati inferiori a quello s , facciamo ora un ragionamento simile a quello visto nel caso della determinazione cinetica delle pressioni. Supponiamo di dividere le molecole in gruppi e indichiamo con $n(\mathbf{v})$ il numero per unità di volume di quelle che hanno velocità \mathbf{v} (in un verso o nell'altro); il numero, allora, di molecole di questo gruppo che attraversano l'unità di superficie fra gli strati s e s' nell'unità di tempo proveniente dal basso è data da $n(\mathbf{v})v_z$ purché si considerino soltanto i valori v_z positivi. Tale numero è uguale a quello delle molecole che attraversano l'unità di superficie nello stesso tempo con la stessa velocità diretta nell'altra direzione: $n(\mathbf{v})|v_z|$ con v_z negativo.

Segue da ciò che la quantità di moto media che viene trasportata nell'unità di tempo attraverso $d\sigma$ nello strato s dalle molecole provenienti dal basso che hanno velocità \mathbf{v} , è

$$(99) \quad n(\mathbf{v})v_z \left(mV_x - m \frac{dV_x}{dz} l \frac{v_z}{v} \right) d\sigma$$

con $v_z > 0$.

Se si vuole calcolare la quantità di moto totale trasportata dal basso in s occorrerà fare la somma di termini quali (99) per tutte le velocità \mathbf{v} , limitandosi però a considerare le molecole per cui v_z è positivo

$$(100) \quad d\sigma \sum \left[n(\mathbf{v}) v_z \left(mV_x - ml \frac{v_z}{v} \frac{dV_x}{dz} \right) \right] \text{ per } v_z > 0.$$

Il medesimo ragionamento può essere ripetuto considerando le molecole che giungono in s attraverso $d\sigma$ provenienti da strati superiori. Ne risulta un flusso totale di quantità di moto attraverso $d\sigma$:

$$(101) \quad -d\sigma ml \sum \left[n(\mathbf{v}) \frac{v_z^2}{v} \right] \frac{dV_x}{dz}$$

essendo ora la somma estesa a tutte le v_z (positive e negative). Il segno meno corrisponde al fatto che il flusso avviene nella direzione negativa di z . Usando il concetto di media e ricordando che secondo la (44) $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \overline{v^2}/3$ si ha

$$(102) \quad \frac{1}{n} \sum n(\mathbf{v}) \frac{v_z^2}{v} = \overline{\left(\frac{v_z^2}{v} \right)} = \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{v^2}{v} \right)} = \frac{1}{3} \bar{v} = \frac{1}{3} v_m.$$

La quantità di moto trasportata per unità di tempo (secondo) attraverso $d\sigma$ verso il basso è quindi

$$(103) \quad \frac{1}{3} n l m \bar{v} \frac{dV_x}{dz} d\sigma$$

e rappresenta (teorema dell'impulso) la forza che si esercita attraverso $d\sigma$ da una parte dello strato superiore su quello inferiore, cioè

$$\tau d\sigma.$$

Si ottiene quindi

$$(104) \quad \tau = \eta \frac{dV_x}{dz} = \frac{1}{3} n l m \bar{v} \frac{dV_x}{dz}$$

e

$$(105) \quad \eta = \frac{1}{3} n m l \bar{v} = \frac{1}{3} \rho l \bar{v}.$$

La viscosità è legata al fenomeno del trasporto di quantità di moto

Passando a trattare il processo di conduzione del calore, si consideri la disposizione di figura 15.20c. La parete superiore (di dimensioni trasversali praticamente infinite) si trova alla temperatura T_2 maggiore di quella T_1 della parete inferiore. La temperatura in ciascuno strato parallelo alle pareti è costante e varia linearmente con z . Il flusso termico per unità di superficie è

$$(106) \quad \frac{dQ}{dt} = -K \frac{dT}{dz}.$$

I coefficienti di conducibilità termica K dei gas sono dell'ordine di $0,014 \div 0,14 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (per riferimento si pensi che per l'acqua $K = 0,6 \text{ J m}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

In conseguenza del fatto che la temperatura nei vari strati è differente, le molecole posseggono in ciascuno strato una diversa energia. Per effetto dell'agitazione termica le molecole passano da uno strato a un altro e ciò produce un trasporto di energia e un flusso netto dagli strati più caldi verso quelli più freddi. La trattazione va fatta in maniera del tutto parallela a quella vista nel caso della viscosità, con la sola sostituzione della quantità trasportata, che è l'energia al posto della quantità di moto: se c_v è il calore specifico e m la massa della molecola, nel passaggio da uno strato a temperatura T a un altro a temperatura $(T \pm dT)$ è $dE = \mp c_v m dT$.

Si ottiene così per il flusso termico trasmesso per unità di area (energia termica per unità di area nell'unità di tempo), in maniera analoga alla (104):

La conducibilità termica è legata al fenomeno del trasporto dell'energia

$$(107) \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{3} n m l c_v \bar{v} \frac{dT}{dz}.$$

Si ha quindi dalle (106) e (107):

$$(108) \quad K = \frac{1}{3} n m l c_v \bar{v} = \frac{1}{3} \rho l c_v \bar{v}.$$

Se si tiene conto del fatto che il libero cammino medio è inversamente proporzionale al numero n di molecole per unità di volume, le relazioni (105) per il coefficiente di viscosità e (108) per il coefficiente di conduzione termica mostrano che tali due coefficienti risultano, secondo la teoria cinetica, indipendenti da n e quindi dalla pressione del gas. Queste indicazioni sono in accordo con l'esperienza tranne che a pressioni molto alte o molto basse, ove del resto il calcolo precedentemente fatto perde validità. La circostanza che i coefficienti η e K risultino entro un vasto campo indipendenti dalla pressione non deve meravigliare: intuitivamente, infatti, si consideri che al crescere della pressione aumenta n e quindi il numero di molecole che passa da uno strato all'altro; contemporaneamente però diminuisce (proporzionalmente a $1/n$) il libero cammino medio, cioè la distanza fra lo strato di partenza e quello di arrivo di ciascuna molecola e il contributo al trasporto di quantità di moto o di energia che essa può dare.

Il disaccordo fra la teoria cinetica e l'esperienza si manifesta per le alte pressioni quando il libero cammino medio diviene dell'ordine delle dimensioni delle molecole: in tal caso viene meno il modello di gas usato e in particolare le interazioni fra le molecole divengono notevoli durante tutto il tempo fra un urto e l'altro; inoltre un apprezzabile trasporto di quantità di moto attraverso un piano può essere dovuto a urti fra molecole i cui centri si trovino all'atto dell'urto da parti opposte del piano. Alle alte pressioni i coefficienti di conducibilità termica e viscosità reali sono maggiori di quelli previsti dalle (105) e (108).

Le deviazioni fra previsioni della teoria cinetica e risultati sperimentali alle basse pressioni si manifestano quando il libero cammino medio diviene dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni del recipiente che contiene il gas. A tali pressioni i due coefficienti divengono funzioni lineari della pressione e tendono a zero con essa⁽¹²⁾.

La (105) si presta anche a una valutazione approssimata della dipendenza del coefficiente di viscosità dalla temperatura. Poiché nella trattazione fatta il prodotto nl risulta indipendente dalla temperatura e \bar{v} proporzionale a $T^{1/2}$, risulterebbe che il coefficiente η dovrebbe crescere proporzionalmente a \sqrt{T} . In realtà si trova che η cresce con la temperatura più rapidamente di quanto comporterebbe una proporzionalità con $T^{1/2}$ e

⁽¹²⁾ Di questo fatto si trae profitto nella realizzazione di misuratori di basse pressioni negli impianti a vuoto, come per es. nel vacuometro di Pirani. Nell'interno dell'impianto s'inserisce una resistenza elettrica attraversata da una corrente costante. La temperatura di equilibrio alla quale la resistenza si porta dipende dal coefficiente di conducibilità del gas in cui essa è immessa. La temperatura del conduttore può essere determinata mediante una misura della sua resistenza elettrica.

inoltre la dipendenza di η da T è diversa per i vari gas. Questo andamento può essere spiegato tenendo conto delle azioni attrattive fra le molecole, le quali producono una riduzione del libero cammino medio rispetto a quello che si avrebbe in loro assenza; questo effetto decresce con la temperatura.

La tabella 15.3 riporta i coefficienti di viscosità per alcuni gas in funzione della temperatura.

■ 15.19. DIFFUSIONE

Si supponga di avere due gas (1 e 2) che all'inizio dell'esperimento siano stratificati secondo z in un recipiente con densità $n_1(z)$ e $n_2(z)$, data dalle funzioni di figura 15.21a e b: in corrispondenza a una parete ($z = z_0$) è massima la concentrazione del gas 1, e in corrispondenza alla parete opposta ($z = 0$) è massima la concentrazione del gas 2. La temperatura sia uniforme.

Se la pressione nel recipiente è uniforme, cioè è costante [(45) e (49)]

$$p = nkT,$$

si deve avere ovunque (v. fig. 15.21c):

$$(109) \quad n_1 + n_2 = n = \text{cost}$$

cioè

$$(110) \quad \frac{dn}{dz} = 0$$

$$(111) \quad \frac{dn_1}{dz} = -\frac{dn_2}{dz}.$$

Se si indicano con A_1 e A_2 il numero di molecole del primo e del secondo tipo che nell'unità di tempo attraversa l'unità di area normalmente a z e in verso positivo si ha

$$(112) \quad A_1 = -A_2.$$

Si definisce coefficiente di diffusione ($D_{1,2}$) di uno dei due gas, il rapporto fra il numero $A_{1,2}$ e il gradiente della concentrazione:

$$(113) \quad A_1 = -D_1 \frac{dn_1}{dz} \quad A_2 = -D_2 \frac{dn_2}{dz}.$$

I due coefficienti devono essere uguali in virtù delle relazioni sopra scritte:

$$(114) \quad D_1 = D_2 = D.$$

Considerazioni di teoria cinetica, analoghe a quelle svolte nel paragrafo precedente, consentono di trovare per D l'espressione

$$(115) \quad D = \frac{1}{3} \left[\frac{n_1}{n} l_2 \bar{v}_2 + \frac{n_2}{n} l_1 \bar{v}_1 \right]$$

essendo l_1 , l_2 e \bar{v}_1 e \bar{v}_2 , i liberi cammini medi e le velocità medie dei due gas.

Tabella 15.3

Gas	T (K)	$\eta \cdot 10^7$ g/(cm · s)
Ne	90	1320
	240	2708
	373	3646
	558	4708
	1100	7210
O ₂	90	691
	240	1202
	400	2568
	675	3693
	1102	5012
CO ₂	190	966
	300	1495
	500	2354
	885	3639
	1686	5537

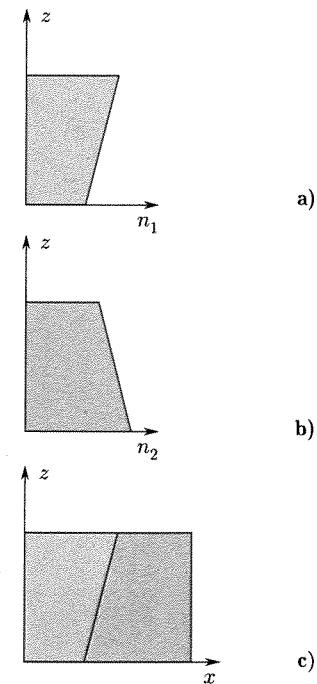


Fig. 15.21

La diffusione delle molecole è legata al fenomeno del trasporto di materia

Se si ha un unico gas, il rimescolamento delle sue molecole può essere immaginato come un processo di autodiffusione con un coefficiente di autodiffusione che si ottiene dalla (115) ponendo $l_1 = l_2$; $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ e ricordando che n_1 (il numero di molecole su cui si pone attenzione) e n_2 (il numero di molecole restanti) sono tali che $n_1 + n_2 = n$

$$(116) \quad D_a = \frac{1}{3} l \bar{v}.$$

Se si indica t^* il tempo medio fra collisioni cioè

$$(117) \quad t^* = \frac{l}{v}$$

la (116) si scrive

$$(118) \quad D_a = \frac{1}{3} \frac{l^2}{t^*}.$$

Se si indica con r la distanza effettiva percorsa da una molecola fra due urti e si calcola il valore medio con criteri statistici si trova naturalmente il libero percorso medio; se si calcola la media dei quadrati \bar{r}^2 si trova il valore $2l^2$, pertanto la (118) può anche scriversi

$$(119) \quad D_a = \frac{1}{6} \frac{\bar{r}^2}{t^*}.$$

È questa una formula ottenuta da Einstein per il calcolo del coefficiente di autodiffusione nella sua teoria dei moti browniani, che è valida per qualsiasi tipo di moto a caso, purché gli spostamenti di una particella in due successivi periodi di tempo t^* siano del tutto indipendenti fra loro per quel che riguarda la direzione; cioè essa è valida per la diffusione di particelle che seguano la statistica di Maxwell-Boltzmann.

15.20. PRODUZIONE ALTI VUOTI. POMPE A DIFFUSIONE

Un apparecchio (pompa a diffusione) molto usato nella produzione degli alti vuoti (10^{-7} mmHg) funziona con modalità che possono facilmente intendersi facendo uso del concetto di libero percorso medio.

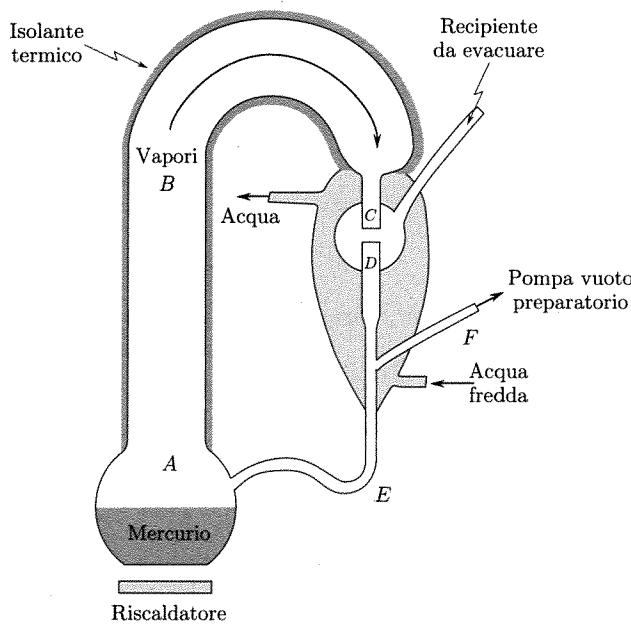


Fig. 15.22

Lo schema dell'apparecchio è dato in figura 15.22. Un liquido (in genere mercurio o un olio, apiezon, a bassa tensione di vapore) è contenuto in un recipiente A ove può essere scaldfato dall'esterno: i vapori prodotti passano nel tubo B giungendo in una regione C ove il tubo si restringe e si interrompe: sullo stesso asse del tubo della regione C , a una distanza di qualche millimetro o centimetro, vi è un altro tubo D . In corrispondenza al tratto fra C e D il circuito del vapore della pompa è in contatto con il recipiente da evacuare. La stessa regione, e in particolare il tubo D , è refrigerato dall'esterno in modo che i vapori condensino in D trasformandosi in liquido che attraverso E rientra nel recipiente A per ricominciare il ciclo. La pressione del recipiente da evacuare deve essere precedentemente portata con un'altra pompa a un valore sufficientemente basso (*vuoto preparatorio*: 10^{-3} mmHg) in modo che nella regione fra C e D il libero percorso medio sia maggiore della distanza fra C e D : in tali condizioni le molecole di vapore che escono da C entrano praticamente tutte in D . Esse tuttavia nella regione DC incontrano alcune molecole del

gas del recipiente da evadere giunte per diffusione e urtandole conferiscono a esse una velocità verso il basso che le porta in genere nel tubo D . Queste ultime molecole vengono in seguito eliminate dal liquido in cui si è condensato il vapore attraverso il tubo F collegato alla pompa per il vuoto preparatorio.

■ 15.21. GAS REALI E DEVIAZIONI DALL'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

I gas reali approssimano il comportamento dei gas perfetti quando sono molto rarefatti, ovvero abbiano piccole densità; le corrispondenti pressioni sono molto basse. Al crescere della densità e della pressione il loro comportamento si scosta sempre più dall'equazione caratteristica dei gas perfetti. In particolare il prodotto pV non è più costante a una certa temperatura come invece indicherebbe la legge di Boyle. A temperatura costante si può scrivere piuttosto

$$(120) \quad pV = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots$$

essendo $A, B, C, D \dots$ funzioni della sola temperatura che prendono il nome di coefficienti viriali⁽¹³⁾.

Il primo coefficiente vale, se n è il numero di kmole presenti nel gas, $A = nRT$. Gli altri coefficienti viriali sono ricavati dall'esperienza e si trovano tabulati per numerosi gas.

In genere è sufficiente, a pressioni non eccessivamente elevate, considerare nella (120) esclusivamente il termine B corrispondente al *secondo coefficiente viriale*. Il tipico andamento di B in funzione della temperatura è indicato in figura 15.23 per i casi dell'idrogeno, del neon e dell'elio: esso passa da valori grandi e negativi a valori positivi raggiungendo un massimo in tale regione (le unità usate sono metri di Hg per le pressioni e litri per i volumi; inoltre si è considerata una massa di gas tale che $p = 1$ quando $V = 1$). La temperatura per la quale B è zero si dice temperatura di Boyle giacché, se sono trascurabili nella (120) i termini di ordine superiore al primo, per tali temperature vale la legge di Boyle.

Nella figura 15.24 sono indicati per un gas reale le curve che a temperatura costante danno pV in funzione di p (le curve sono tracciate usando unità arbitrarie). Le temperature sono proporzionali ai numeri che contraddistinguono le curve. Siccome è

$$\left(\frac{\partial(pV)}{\partial p} \right)_{p=0} = B,$$

*I coefficienti viriali
dello sviluppo in serie
di pV*

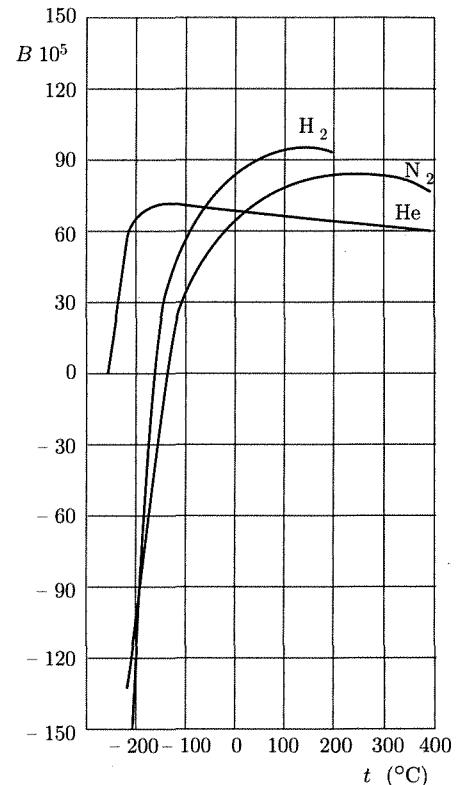


Fig. 15.23

⁽¹³⁾ A volte, invece della (120), si usa per rappresentare i risultati sperimentali, la relazione:

$$(121) \quad \frac{pV}{nRT} = 1 + \bar{B}(T) \left(\frac{n}{V} \right) + \bar{C}(T) \left(\frac{n}{V} \right)^2 + \dots$$

$\bar{B}(T)$, $\bar{C}(T)$ ecc. sono il secondo, terzo, ... coefficiente viriale nello sviluppo in serie di potenze di n/V . Questi coefficienti sono facilmente ottenibili da quelli della (120) applicando in prima approssimazione la $pV = nRT$ per esprimere p in funzione di n/V nei termini successivi al primo nello sviluppo in serie.

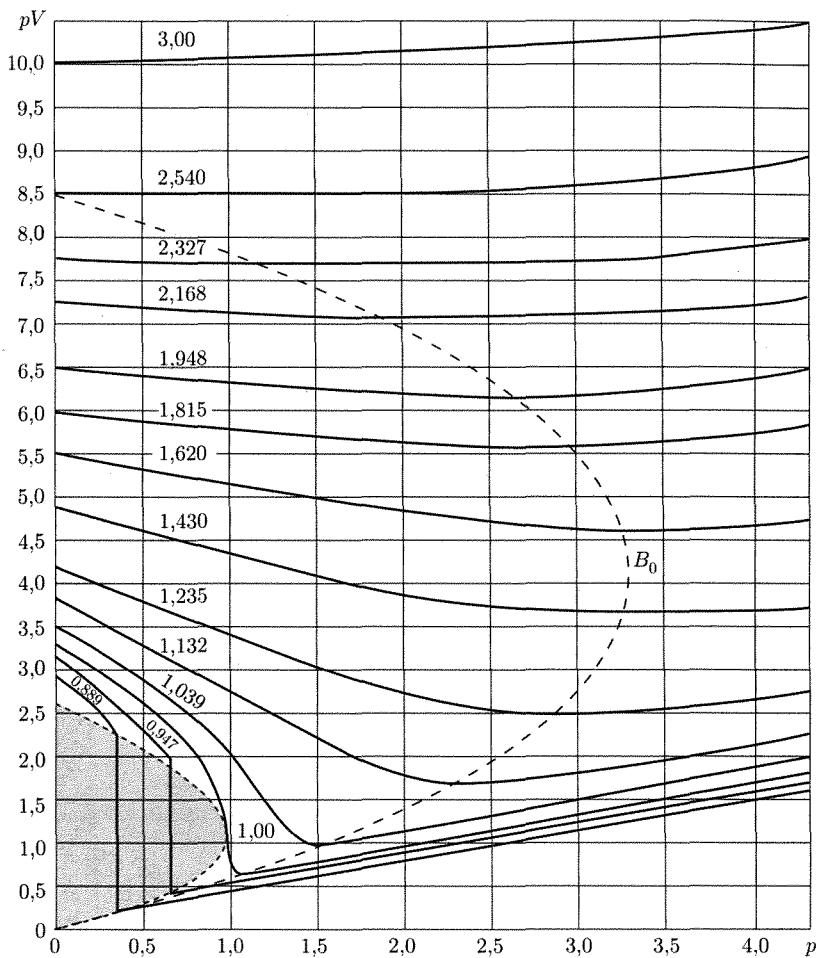


Fig. 15.24

il coefficiente $B(T)$ è rappresentato dalla pendenza delle curve per $p = 0$. A basse temperature le curve partono dall'asse delle ordinate con pendenza negativa; alle alte temperature tale pendenza diviene positiva; alla temperatura di Boyle la pendenza per $p = 0$ è zero (in figura ciò si ha per la curva contrassegnata con 2,540).

Le curve che partono con pendenza negativa raggiungono un minimo giacché il valore del terzo coefficiente viriale C è sempre positivo. La curva tratteggiata B_0 riunisce i punti di minimo, per le varie temperature: essi sono chiamati punti di Boyle giacché in un loro intorno pV resta costante. La posizione di tale minimo in corrispondenza alla temperatura di Boyle si ha per $p = 0$.

Per temperature superiori non si hanno più minimi e le curve crescono monotonicamente con p . La zona tratteggiata corrisponde alla liquefazione del gas: vedremo che durante tale processo la pressione è costante e quindi la isotermia nella figura 15.24 deve avere un tratto verticale. I tratti di isotermia al di là della zona di liquefazione corrispondono allo stato liquido.

15.22. ISOTERME PER I GAS REALI NEL PIANO PRESSIONE-VOLUME

Lo scostamento del comportamento dei gas reali da quello dei gas perfetti può essere messo in evidenza determinando, come fece Andrews per il CO_2 , la maniera con cui varia a temperatura costante il volume di

una massa gassosa al variare della pressione. I risultati sono analoghi per tutti i gas e sono indicati nella figura 15.25 ove sono mostrate a tratto pieno le isoterme per varie temperature; sulle ascisse è riportato il volume specifico, cioè il volume dell'unità di massa. È evidente innanzi tutto che per temperature sufficientemente elevate (per es. T_1), le isoterme si avvicinano a rami di iperboli equilatere, quali sono le isoterme dei gas perfetti. Se si considera la isoterma per una temperatura T_2 ($\ll T_1$) si osserva, partendo dalle basse pressioni, che al crescere della pressione il volume del gas decresce continuamente e il sistema resta omogeneo finché si giunge al punto A . Se si cerca di comprimere ulteriormente il gas, si trova che la pressione resta costante e si forma del liquido. L'isoterma ha allora un tratto rettilineo che corrisponde al processo di liquefazione durante il quale la massa di liquido aumenta e quella del gas diminuisce. Il sistema diviene omogeneo di nuovo in B dove è interamente liquido⁽¹⁴⁾. L'isoterma ha successivamente un andamento molto ripido perché a piccole variazioni di volume corrispondono variazioni molto grandi di pressione, essendo la complessibilità dei liquidi molto più bassa di quella dei gas: questa parte di isoterma corrisponde al sistema allo stato liquido. L'andamento delle isoterme a temperature come T_3 , T_4 è analogo: varia peraltro l'estensione del tratto lineare che corrisponde alla presenza delle due fasi liquido e gas (vapore), cioè alla liquefazione. Se si collegano i punti in cui alle diverse temperature inizia la liquefazione (punti di rugiada) e analogamente quelli dove la liquefazione è completa, si ottengono due curve $AA'A'' \dots$, $BB'B'' \dots$, che si congiungono in corrispondenza a una certa temperatura T_c . Per temperature superiori alla T_c non è possibile avere contemporaneamente in equilibrio le fasi liquida e gassosa. La temperatura T_c è chiamata temperatura critica ed è quella *temperatura al di sopra della quale non è possibile liquefare il gas qualunque sia la pressione alla quale esso venga sottoposto*. La isoterma critica ha il tratto orizzontale, in cui le fasi liquida e gassosa coesistono, praticamente ridotto a un punto (p_c , v_c , T_c : *stato critico*) e in tal punto ha un flesso con tangente orizzontale. Le curve $AA'A'' \dots$ e $BB'B'' \dots$ non si estendono fino all'asse delle ascisse giacché a basse temperature appare la fase solida. Limitandoci a considerare qui le fasi gassosa e liquida si vede che la isoterma critica e

⁽¹⁴⁾ Nel tratto lineare AB , il volume del sistema (riportato sulle ascisse) varia perché cambia la proporzione delle due fasi che hanno rispettivamente i volumi specifici v_A (gas) e v_B (liquido). In corrispondenza a un punto X rappresentativo del sistema sulla AB , si ha, indicando con m_l e m_g le masse delle fasi liquide e gassose,

$$v_x(m_l + m_g) = v_A m_g + v_B m_l.$$

Il rapporto tra le masse delle fasi gassosa e liquida presenti risulta

$$(122) \quad \frac{m_g}{m_l} = \frac{v_x - v_B}{v_A - v_x} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

pari all'inverso del rapporto delle distanze di X dai punti rappresentativi dell'inizio e della fine del processo di liquefazione.

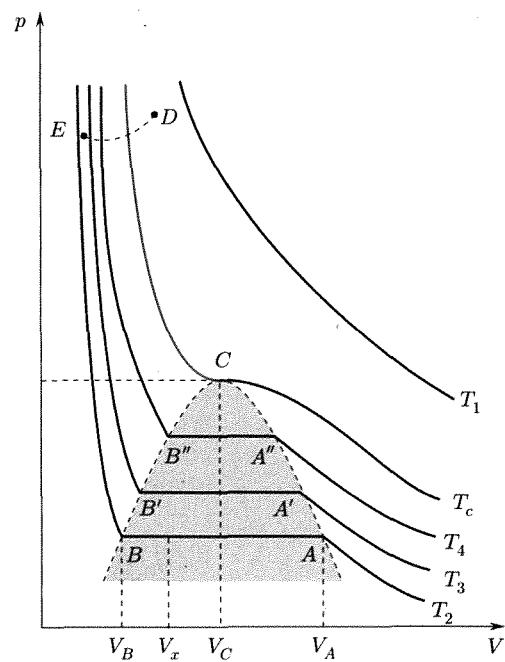


Fig. 15.25

Nelle trasformazioni
di gas reali si hanno
cambiamenti di stato

la curva $AA'A'' \dots B''B'B$ dividono il piano pV in quattro regioni. Al di sopra della isoterma critica si hanno punti che rappresentano lo stato gassoso del sistema: in tale regione cambiando il volume o la pressione il sistema resta sempre gassoso. Al di sotto della isoterma critica si hanno tre regioni: quella a sinistra della $BB'B'C$ corrisponde allo stato liquido; quella nell'interno della curva $A'A''CB''B$ corrisponde al liquido in equilibrio con il suo vapore (che quindi è saturo) e infine quella alla destra di $AA'A''C$ corrisponde a stati gassosi che vengono di solito indicati come stati di vapore surriscaldato, per indicare che il gas si trova al di sotto della temperatura critica ma a una temperatura superiore a quella del vapore saturo alla stessa pressione. Si osservi che il sistema in corrispondenza al punto D è sicuramente gassoso e in corrispondenza a E è liquido. Dalla descrizione fatta appare possibile passare da D a E attraverso una trasformazione che eviti la zona racchiusa dalla curva $AA'A''CB''B'B$, e che quindi consenta di passare dallo stato gassoso a quello liquido senza attraversare regioni di equilibrio fra due fasi (*continuità degli stati liquido e gassoso*): ciò accade in corrispondenza al passaggio attraverso la temperatura critica.

La tabella 15.4 indica per alcune sostanze le costanti critiche cioè le T_c , p_c e, invece di v_c (per una mole), la densità critica.

Tabella 15.4

	T_c (°C)	p_c (atm)	Densità critica g/cm ³
Acqua	374,0	217,7	0,4
CO ₂	31,2	73,0	0,460
He	-267,9	2,26	0,069
O ₂	-118,8	49,7	0,430
H ₂	-239,9	12,8	0,031
Alcool etilico	243,1	63,1	0,276

15.23. EQUAZIONE DI STATO DI VAN DER WAALS

I risultati sperimentali nei gas reali possono essere rappresentati mediante la (120) facendo uso di opportuni coefficienti viriali. Di fatto, una rappresentazione piuttosto fedele del comportamento dei gas reali si deve a Van der Waals (1870), che modificò in maniera semplice l'equazione di stato dei gas perfetti. Tale equazione, detta appunto di Van der Waals, è abbastanza interessante perché oltre a essere semplice, fornisce indicazioni che sono in genere in buon accordo qualitativo e spesso anche quantitativo con l'esperienza. Essa è di conseguenza molto usata. Inoltre, come si rivedrà, la continuità fra gli stati gassoso e liquido fornisce un'equazione di stato per gas reali che va bene anche per i liquidi, almeno nella regione nella quale i liquidi sono lontani dalla solidificazione.

Nella teoria dei gas perfetti si sono fatte due ipotesi che sono ben lungi dall'essere verificate nel caso dei gas reali:

1. *il volume occupato dalle molecole è trascurabile rispetto al volume totale del gas;*
 2. *le molecole non esercitano azioni reciproche tranne che durante gli urti.*
- Il non verificarsi di questa ultima ipotesi è dimostrato dal fatto che i gas condensano formando liquidi e solidi proprio in virtù delle azioni

intermolecolari. Van der Waals ha cercato di calcolare le correzioni da apportare all'equazione dei gas perfetti qualora si tolgano le restrizioni imposte dalle due ipotesi citate. Nelle considerazioni di Van der Waals le molecole sono considerate come sfere dotate di un certo volume, le quali oltre che a respingersi violentemente quando vengono a contatto, si attirano debolmente a distanze maggiori di quelle d'urto.

Il fatto che le molecole abbiano un volume proprio fa sì che il volume a disposizione per il moto di ciascuna di esse sia minore del volume totale (V) del recipiente occupato dal gás: il volume a disposizione può essere posto pari a $(V - b)$ essendo b il cosiddetto covolume⁽¹⁵⁾. Questo fatto produce un aumento del numero di urti che le molecole subiscono in media al secondo fra loro e con la parete nel rapporto $V/(V - b)$; lo stesso accade per la pressione che il gas esercita sulle pareti. Si può allora porre, essendo N il numero di molecole nella massa gassosa

$$(124) \quad p = \frac{NkT}{V} \frac{V}{V - b} = \frac{NkT}{V - b} .$$

Per quanto riguarda la pressione, occorre dire che all'interno del gas essa è maggiore di quella che le molecole urtanti la parete esercitano su di questa, in quanto le molecole che s'avvicinano e urtano la parete risentono in media di una forza, da parte delle restanti molecole del gas, che è diretta verso l'interno e riduce la loro energia cinetica. In base ai risultati della teoria cinetica [eq. (45)], ciò significa una riduzione della pressione, dal valore *cinetico* interno al gas al valore p sulle pareti. Detta p_i (pressione interna) la differenza tra i due valori, una valutazione approssimata di p_i può essere fatta in maniera semplice. Si osservi innanzi tutto che per due molecole, che non interagiscano chimicamente, le forze attrattive decrescono molto rapidamente (all'incirca con la settima potenza della distanza); si può tracciare intorno a ogni molecola una sfera d'azione tale che si possono trascurare le interazioni della molecola con altre fuori della sfera, essendo sufficiente tener conto solo di quelle con le molecole all'interno della sfera. Per tutte le molecole come A nella figura 15.26, per le quali la sfera d'azione è interamente contenuta nel volume occupato dal gas, la risultante di tali azioni è nulla. Per una molecola come B che disti dalla parete per meno del raggio della sfera d'azione, la risultante delle forze d'attrazione è diretta normalmente alla parete e verso l'interno del gas giacché l'effetto delle molecole nella sfera d'azione che si trovano nella regione (abc) più lontana dalla parete non è compensato. Se si considerano molecole come C sulla superficie esterna del volume occupato dal gas, esse saranno soggette a una forza normale alla parete proporzionale al numero di molecole che si trovano nella (mezza) sfera d'azione, cioè proporzionale al numero di molecole per unità di volume N/V , essendo N il numero totale di molecole del gas nel volume V . La forza globale che si esercita sull'unità di area delle pareti, come risultante delle forze che si esercitano sulle molecole ivi presenti, rappresenta la pressione p_i legata alle azioni

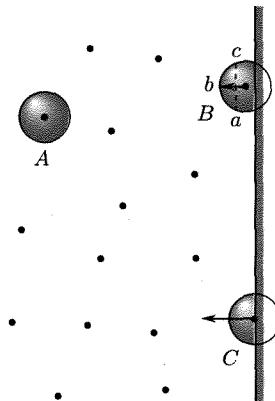


Fig. 15.26

⁽¹⁵⁾ b è dell'ordine di grandezza del volume totale proprio occupato dalle molecole del gas. Se, secondo Van der Waals, le molecole vengono considerate sfere rigide di raggio r_0 che si attraggono per distanze fra i centri superiori a $2r_0$ (con una forza che diminuisce con la distanza) e si respingono violentemente per distanze minori di $2r_0$, b viene valutato teoricamente pari a quattro volte il volume totale delle molecole del gas:

$$(123) \quad b = 4N \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right) .$$

intermolecolari, da aggiungere alla pressione p derivante dalla variazione della quantità di moto delle molecole sulla parete.

Siccome anche il numero di molecole che contemporaneamente si trova nell'unità d'area della parete del volume occupato dal gas è proporzionale al numero di molecole per unità di volume N/V si ha che

$$(125) \quad p_i = \text{numero di molecole sull'unità di superficie limite} \times \text{forza di attrazione verso l'interno su una molecola in superficie} \\ \simeq \left(\frac{N}{V} \right)^2 .$$

L'equazione di stato di Van der Waals prevede che il gas occupi un volume proprio e che l'interazione tra molecole aumenti la pressione presente sulle pareti di un termine proporzionale al quadrato della densità

Si ha in definitiva l'equazione di Van der Waals:

$$(126) \quad \left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = NkT$$

dove i parametri a e b dipendono dal particolare gas in questione e dalla massa presente. Le considerazioni svolte mostrano che a è proporzionale a N^2 e quindi al quadrato della massa del gas, mentre b è proporzionale alla prima potenza della massa. Inoltre a dipende dalla legge con cui varia la forza fra le molecole con la loro distanza⁽¹⁶⁾.

Per una kmole l'equazione diviene

$$(127) \quad \left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

con i valori appropriati di a e b .

Questa equazione può scriversi anche nella forma

$$(128) \quad p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} .$$

Nella figura 15.27 sono riportate le isoterme dette da questa equazione per vari valori di T .

È possibile vedere che l'andamento delle isoterme per temperature sufficientemente basse è quello della curva contrassegnata con T_2 . Essa presenta un massimo (B) e un minimo (C) relativi e la differenza delle ascisse corrispondenti ($V_B - V_C$) diminuisce all'innalzarsi della temperatura. Per una certa temperatura $T' = T_c$, V_B e V_C vengono a coincidere e l'isoterma ha un flesso a tangente orizzontale. La posizione di questo punto particolare può trovarsi ponendo le condizioni

$$(129) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0 \quad (\text{tangente orizzontale})$$

e

$$(130) \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = 0 \quad (\text{flesso}).$$

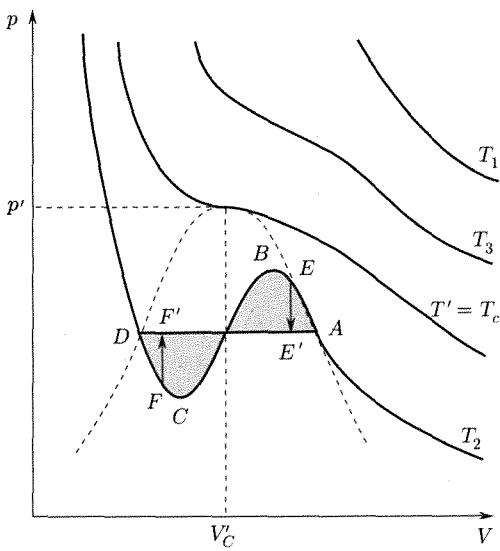


Fig. 15.27

⁽¹⁶⁾ Se la forza attrattiva è posta nella forma $F = -cr^{-s}$ essendo c costante e r la distanza fra le molecole, si trova:

$$a = \frac{2\pi N^2 c}{(s-1)(s-4)(2r_0)^{s-4}} .$$

Si ha

$$(131) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_T = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0. \end{array} \right.$$

Queste due equazioni assieme all'equazione di Van der Waals forniscono per il punto caratteristico:

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} V' = 3b \\ p' = \frac{a}{27b^2} \\ T' = \frac{8a}{27Rb}. \end{array} \right.$$

Le isoterme per temperature superiori a T' non hanno mai tangente orizzontale e vanno gradatamente avvicinandosi alla forma di rami di iperboli equilatere (da T_3 a T_1). Come si vede, queste isoterme hanno molte caratteristiche che qualitativamente sono in accordo con quelle delle isoterme reali.

Appare innanzitutto logico identificare la isoterma che possiede il flesso a tangente orizzontale con l'isoterma critica. Al di sotto della temperatura critica la principale differenza fra le isoterme di Van der Waals e quelle reali è che in queste ultime un tratto orizzontale sostituisce l'andamento a S ($ABCD$): in un certo senso tale disaccordo era da attendersi giacché questa parte della isoterma reale corrisponde a un sistema a due fasi (gas + liquido) e nell'equazione di Van der Waals non c'è alcuna informazione sul processo di liquefazione. Va inoltre osservato che, sperimentando con sostanze estremamente pure, è possibile fare descrivere al sistema gassoso il tratto di curva AB (vapore soprasatturo) e a quello liquido il tratto DC (liquido sovraraffreddato). Il sistema è in questi casi a una sola fase e in condizioni di falso equilibrio (metastabile): basta una piccola perturbazione perché il sistema si porti nelle condizioni stabili di vapore e di liquido rispettivamente da E a E' e da F a F' . Il tratto BC è invece irrealizzabile perché termodinamicamente instabile (volumi crescenti al crescere della pressione). Limitandosi quindi a usare le indicazioni della equazione di stato di Van der Waals nelle regioni a una sola fase (gas o liquido), la forma delle isoterme è qualitativamente analoga a quella delle isoterme reali. Per temperature inferiori alla critica la parte delle isoterme che corrisponde alla presenza contemporanea liquido e vapore va determinata tenendo conto del fatto che la relativa pressione deve essere tale che le due aree tratteggiate risultino uguali (come si vedrà in seguito).

Mentre è notevole l'accordo qualitativo fra le indicazioni dell'equazione di stato di Van der Waals e l'esperienza, lo stesso non è per un confronto quantitativo. Confrontando i valori di a e b che possono calcolarsi dai parametri critici sperimentalmente mediante le (132) ponendo $T' = T_c$, $p' = p_c$, $V' = V_c$ e i valori che occorre introdurre per gli stessi parametri nell'equazione di Van der Waals per giustificare lo scostamento del comportamento di un gas reale dalla legge dei gas perfetti, si riscontrano differenze relative del 20-30%. Il confronto può farsi anche in altro modo. Si può calcolare mediante la (132) il cosiddetto coefficiente critico

$$(133) \quad \frac{RT_c}{p_c V_c} = \frac{8}{3} = 2,667$$

Per un gas reale al di sotto della temperatura critica ci può essere coesistenza con la fase liquida

e confrontarlo con i valori sperimentali: questi ultimi vanno da 3,13 a circa 5. Tali confronti mostrano che non si può sperare di ottenere un buon accordo quantitativo con valori costanti di a e b . Le principali ragioni di ciò sono:

1. nella trattazione fatta si è supposto che le molecole abbiano un ben definito diametro;
2. le forze intermolecolari sono state considerate in maniera eccessivamente semplificata. Per giungere a risultati migliori occorre tenere conto dell'andamento effettivo delle forze intermolecolari e della relativa energia potenziale (par. 15.24).

L'equazione di Van der Waals può scriversi:

$$pV = \frac{RT}{\left(1 + \frac{a}{pV^2}\right)\left(1 - \frac{b}{V}\right)}.$$

Siccome le due correzioni a/pV^2 e b/V sono piccole rispetto all'unità purché le pressioni non siano molto elevate, si possono trascurare i quadrati e i prodotti misti di queste quantità nello sviluppo in serie. Si ottiene

$$(134) \quad pV = RT \left(1 + \frac{b}{V} - \frac{a}{pV^2}\right) = RT + \frac{RT}{V}b - \frac{RT}{pV^2}a.$$

Tale relazione ha nel secondo membro due termini correttivi rispetto all'equazione dei gas perfetti. Se in tali termini si pone approssimativamente $pV = RT$ si ha:

$$(135) \quad pV = RT + \left(b - \frac{a}{RT}\right)p$$

la quale mostra che l'equazione di Van der Waals equivale a una equazione del tipo (120) che ha solamente il secondo coefficiente viriale

$$(136) \quad B = b - \frac{a}{RT}.$$

Al crescere di T , il coefficiente B approssimerebbe il valore costante b . Questo fatto indica di nuovo il disaccordo con l'esperienza giacché si è già detto che B raggiunge un massimo e poi decresce (fig. 15.23).

Sempre rimanendo entro i limiti dell'equazione di Van der Waals, una descrizione più generale del comportamento dei vari gas può ottenersi se si esprimono il volume, la pressione e la temperatura in unità legate alle proprietà del particolare gas. Van der Waals fece ciò introducendo i rapporti delle tre grandezze per un certo gas ai loro valori critici, misurando cioè i volumi, le pressioni e le temperature in unità che sono caratteristiche di quel gas. Ponendo per le *grandezze ridotte*

$$(137) \quad p^* = \frac{p}{p_c} \quad V^* = \frac{V}{V_c} \quad T^* = \frac{T}{T_c}$$

e tenendo conto delle (132) con $T' = T_c$, $p' = p_c$, $V' = V_c$ l'equazione di Van der Waals si scrive nella forma

$$(138) \quad \left(p^* + \frac{3}{V^{*2}}\right) \left(V^* - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T^*$$

nota con il nome di legge degli stati corrispondenti. Essa è particolarmente utile per calcolare con discreta approssimazione le isoterme *non note* di un gas mediante la conoscenza delle sue costanti critiche e delle isoterme *misurate* di un altro gas.

La legge degli stati corrispondenti

15.24. FORZE INTERMOLECOLARI

In questo paragrafo saranno esaminate con maggiore accuratezza la natura e le caratteristiche delle forze che in realtà agiscono fra le molecole.

Quando la distanza fra due molecole va al di sotto di un certo valore caratteristico per ciascuna coppia, la forza è repulsiva e cresce rapidissimamente al diminuire della distanza. La distanza alla quale si manifesta questa forza è praticamente quella alla quale le distribuzioni elettroniche delle molecole cominciano a sovrapporsi e le cause della sua origine sono quelle stesse che sono state esaminate nel caso delle

forze repulsive fra atomi (cap. 12, par 12.7): vi sono azioni elettrostatiche legate alla repulsione di nuclei parzialmente schermati dalle distribuzioni elettroniche, ma la principale forza è dovuta a effetti quantistici legati alla distribuzione degli elettroni fra i livelli di energia consentiti e alle limitazioni imposte dal principio di esclusione di Pauli. Le forze repulsive fra molecole si risentono solo a distanze molto piccole e perciò sono chiamate *a corto raggio*: per i relativi potenziali sono spesso usate le relazioni seguenti in funzione della distanza r :

$$(139) \quad U(r) = Ae^{-\alpha r}$$

$$(140) \quad U(r) = Ar^{-\beta}$$

essendo A , α e β costanti scelte in maniera opportuna.

Oltre alle forze repulsive, che per così dire impediscono la sovrapposizione spaziale delle molecole e il collasso delle strutture, esistono forze attrattive fra le molecole. Esse decrescono con la distanza molto più lentamente delle forze repulsive, sicché sono sensibili a distanze intermolecolari alle quali le forze repulsive hanno perduto ogni valore pratico: per tale ragione esse si chiamano a *lungo raggio*; sono chiamate anche forze di Van der Waals perché sono appunto quelle che determinano le attrazioni prese in considerazione da Van der Waals. Esse sono forze di natura elettrica, esercitantesi tra molecole neutre, in virtù del fatto che le cariche, pure a somma nulla, sono poste in punti diversi nello spazio.

Due primi contributi alle forze attrattive fra molecole sono di semplice natura elettrostatica e possono facilmente essere individuati anche se si sostituisce agli elettroni, che in realtà sono in moto molto rapido, una distribuzione media di cariche ferme. Se la distribuzione delle cariche (positive e negative) non ha simmetria sferica, ciascuna molecola possiede un momento di dipolo μ tale che gli effetti che essa causa o subisce sono gli stessi che caratterizzerebbero un dipolo di momento μ . Se perciò le molecole di un gas sono polari cioè posseggono un momento di dipolo, fra di esse si esercitano delle azioni che tendono a orientare nello stesso senso i dipoli e sono perciò chiamate di orientamento (o di Keeson). L'energia potenziale corrispondente fra due molecole a distanza r fra loro, risulta essere:

$$(141) \quad U_0(r) = -\frac{2}{3kT} \frac{\mu^2}{r^6}.$$

Una seconda interazione elettrostatica si verifica quando una molecola polare (μ_1) si trova vicina a un'altra molecola anche se quest'ultima per suo conto non avrebbe momento di dipolo: la prima molecola produce con il suo campo un'alterazione nella distribuzione delle cariche nella seconda e ciò conduce alla comparsa di un momento di dipolo indotto in quest'ultima. Fra dipolo inducente e dipolo indotto si origina allora un'azione meccanica. L'energia relativa alla *interazione di induzione* per due molecole risulta (Debye-Falkenhangen)

$$(142) \quad U_i(r) = -\frac{\alpha_2 \mu_1^2}{r^6}.$$

Il parametro α_2 (dimensionale) che caratterizza la molecola indotta è chiamato polarizzabilità.

Accanto a queste due semplici interazioni elettrostatiche di dipolo ve ne è un'altra che in genere ha una importanza relativa molto maggiore e che è di natura quantistica. Si tratta delle forze di dispersione o di London. Non è possibile qui presentare la trattazione quantistica, ma si cerca di dare una spiegazione abbastanza approssimata della loro origine. Nelle considerazioni elettrostatiche precedenti si è immaginato di sostituire la distribuzione effettiva degli elettroni (che cambia in continuazione per effetto del moto degli elettroni) con una distribuzione statica. Ciò porta per molte molecole (non polari) ad avere un momento di dipolo medio nullo. In realtà, poiché la distribuzione cambia in continuazione, ciascuna molecola, anche *non polare*, possiede un momento di dipolo istantaneo, che muta in continuazione. Se si considerano due molecole non polari, l'effetto diretto della interazione (Keesom) dei dipoli istantaneei è mediamente nullo, poiché i dipoli nelle due molecole non sono correlati fra loro. Si consideri però che il dipolo istantaneo in una molecola induce un altro dipolo nella seconda; questi due dipoli (inducente e indotto), anche se fluttuanti nel tempo, sono a ogni istante correlati (paralleli) fra loro e pertanto conducono a una interazione in media non nulla. Si può infatti dire che la corrispondente energia di interazione (Debye-Falkenhangen) essendo proporzionale al

quadrato del valore istantaneo del dipolo inducente ha un valore medio diverso da zero. La trattazione quantistica conduce per la *energia di dispersione* (London) alla espressione

$$(143) \quad U_d(r) = -\frac{3h\nu_0\alpha^2}{4r^6}$$

essendo α la polarizzabilità molecolare, h la costante di Planck e ν_0 una frequenza caratteristica della molecola.

Le forze attrattive di Van der Waals fra molecole sono quindi di tre tipi, tutte legate a interazioni fra dipoli: forze di orientamento, di induzione e di dispersione. Il fatto che si tratti sempre di interazioni fra dipoli conduce per esse alla stessa dipendenza dalla distanza: esse diminuiscono proporzionalmente a r^7 .

Tranne che per alcune molecole che posseggono elevati momenti di dipolo⁽¹⁷⁾, il contributo predominante alle attrazioni di Van der Waals proviene dalle forze di dispersione di London.

L'analisi precedente mostra che le forze che agiscono fra le molecole sono di due generi: repulsive a corto raggio e attrattive a raggio più lungo. Al fine dello studio dei sistemi molecolari, come per es. quando si cerca una soddisfacente equazione di stato per i gas reali, sarebbe di grande importanza disporre di una espressione analitica che rappresenti l'energia intermolecolare per due molecole qualsiasi. Attualmente non si dispone di una tale funzione e anzi si può vedere che i calcoli divengono estremamente difficili se non si pone l'ipotesi semplificatrice che i campi di forze siano centrali, abbiano cioè simmetria sferica.

Nella teoria cinetica, secondo l'approssimazione che si vuole avere nella trattazione dei processi, si fanno differenti ipotesi sulle forze intermolecolari seguendo alcuni modelli di interazione. I modelli più comunemente usati sono i tre (due di essi sono già stati utilizzati in precedenza) riportati nel seguito.

1. Molecole costituite da sfere rigide elastiche

Questo modello nel quale le molecole sono considerate come palle da biliardo, tra le quali non vi sono forze attrattive, mentre le azioni repulsive si stabiliscono bruscamente in corrispondenza all'urto, è quello che è stato da noi usato per introdurre il concetto di libero cammino medio. La figura 15.28a mostra l'andamento dell'energia potenziale per due molecole siffatte in funzione della distanza r fra i loro centri: d è pari alla somma dei raggi delle due molecole.

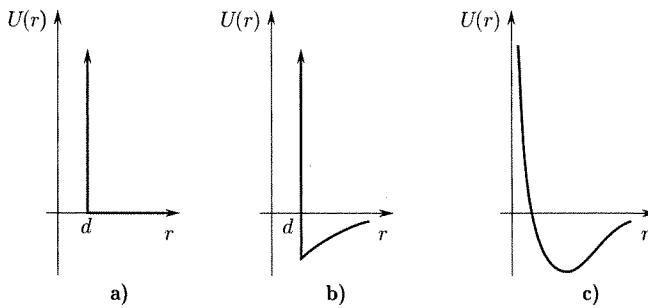


Fig. 15.28

2. Molecole costituite da sfere elastiche che si attirano debolmente

Questo modello è quello preso a base da Van der Waals per stabilire l'equazione di stato per i gas reali che porta il suo nome. La figura 15.28b mostra l'andamento della energia potenziale per questo caso. La discussione sull'equazione di Van der Waals ha mostrato i limiti dell'approssimazione conseguibile con questa ipotesi nella descrizione delle caratteristiche dei sistemi molecolari.

⁽¹⁷⁾ Nel caso delle molecole di acqua allo stato gassoso a 20 °C l'energia di orientamento è quattro volte più grande di quella di dispersione.

3. Molecole che si attraggono e si respingono con forze inversamente proporzionali a una potenza della distanza

Questo modello corrisponde a una descrizione più vicina alla realtà, in accordo con quanto si è detto sulle forze intermolecolari. La forza sulla seconda molecola (in posizione definita da \mathbf{r}) viene espressa nella seguente maniera

$$(144) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = (ar^{-\alpha} - br^{-\beta}) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ove a e b sono costanti positive. Il primo termine rappresenta la forza repulsiva e il secondo quella attrattiva. Dalla descrizione delle forze attrattive intermolecolari si ricava $\beta = 7$ (l'energia è inversamente proporzionale a r^6), e da quella delle forze repulsive $\alpha > \beta$.

L'andamento dell'energia potenziale per il terzo modello è indicato in figura 15.28c. I parametri a , b , α possono essere scelti in modo che la (144) segua i risultati sperimentali.

Si osservi che per avere indicazioni sperimentali sulle forze intermolecolari si possono studiare vari effetti; i principali sono:

1. i legami fra le grandezze p , V , T per il sistema molecolare allo stato gassoso e la determinazione dei coefficienti viriali;
2. le proprietà di trasporto e in particolare la viscosità allo stato gassoso;
3. le proprietà di equilibrio di solidi cristallini.

L'esame dei risultati sperimentali mostra che non c'è un esponente α nella (144) che vada bene in tutti i casi; sono però abbastanza frequenti i casi in cui un esponente vicino a 13 va abbastanza bene. Questo spiega il successo incontrato dalla formula data la Lennard-Jones per l'energia potenziale intermolecolare (cap. 3; par. 3.8):

$$(145) \quad U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right].$$

Le costanti a ed ϵ rappresentano nella curva di figura 15.28c per la particolare coppia di molecole considerate rispettivamente la distanza alla quale $U = 0$ e l'energia potenziale minima, che si ha per $r = 2^{1/6} \cdot a$.

L'energia ϵ rappresenta la massima energia potenziale di attrazione e a è la distanza di massimo avvicinamento di due molecole che si muovono l'una rispetto all'altra in virtù della forza attrattiva, supponendo che il moto sia iniziato con velocità nulla (energia cinetica iniziale nulla).

La tabella 15.5 dà alcuni valori ottenuti per ϵ e a in questo modello usando la formula di Lennard-Jones per lo studio di effetti di natura abbastanza diversa (per ciascuno dei quali è responsabile una parte diversa della curva dell'energia potenziale). L'accordo è spesso molto buono e giustifica l'uso esteso che si fa della relazione (145) nello studio di molti problemi molecolari. Va tuttavia osservato che le differenze che talvolta si riscontrano per i valori ϵ e a ottenuti partendo dallo studio dei diversi processi, sono superiori a quelle attendibili sulla base degli errori sperimentali e indicano i limiti di applicabilità della relazione approssimata di Lennard-Jones.

*Il potenziale
intermolecolare come
somma di due termini
di attrazione
e di repulsione*

Tabella 15.5 Valori delle costanti per l'energia potenziale di Lennard-Jones

Sostanza	Dati sui cristalli		Secondo coeff. viriale		Coeff. di viscosità	
	ϵ/k (K)	a (Å)	ϵ/k (K)	a (Å)	ϵ/k (K)	a (Å)
Ne	36,5	2,82	35,7	2,74	35,7	2,80
A	119	3,46	119,75	2,405	124,0	3,418
Kr	165	3,60	158	3,597	190	3,61
Xe	229	3,98	217	3,963	230	4,051
H ₂					33,3	2,968
N ₂	108	3,94	95,05	3,698	91,46	3,681
O ₂			117,5	3,58	113,2	3,433
CO ₂			189	4,486	190	3,996

Le precedenti considerazioni sulle forze intermolecolari hanno precisato importanti aspetti dello stato delle cose nei sistemi molecolari e indicato le cause dello scostamento del comportamento dei gas reali dalla descrizione ottenibile con equazioni semplici come quelle di Van der Waals. Esse forniscono la base per lo studio di equazioni più complete del tipo (120) in cui vari coefficienti viriali vengono considerati.

■ 15.25. STATO LIQUIDO ED EQUAZIONE DI VAN DER WAALS

I diversi stati di aggregazione nei quali una sostanza può trovarsi dipendono, da un punto di vista molecolare, dalla natura e dalla entità delle azioni intermolecolari e dall'agitazione termica. Nel caso di un gas, come si è visto, le molecole si trovano in moti individuali disordinati e interagiscono fortemente solo in corrispondenza agli urti; le forze intermolecolari sono molto piccole alle distanze alle quali le molecole si trovano per la maggior parte del tempo. Di conseguenza l'energia intermolecolare contribuisce in maniera esigua all'energia interna (totale) del sistema. Si è anche visto come la caratteristica di disordine nel moto delle molecole consenta una trattazione teorica abbastanza semplice e soddisfacente.

I solidi sono invece sistemi nei quali le particelle sono disposte secondo strutture spaziali regolari e periodiche in conseguenza delle mutue azioni; l'agitazione termica è piuttosto debole e si rispecchia in oscillazioni delle particelle intorno alle posizioni di equilibrio con ampiezze che crescono con la temperatura. I solidi cristallini sono sistemi nei quali esiste teoricamente un ordine nella distribuzione delle particelle, che si estende a distanza infinita da una qualsiasi particella: nella realtà i solidi sono formati da microcristalli, all'interno dei quali vige l'ordine di struttura.

Lo stato liquido è intermedio fra gli altri due: le molecole sono in costante interazione fra loro (a differenza dei gas) e ogni molecola è in uno stato di associazione con molecole che costituiscono un involucro intorno a essa. Alle parole *associazione* e *involucro* vanno dati qui significati piuttosto vaghi data la varietà di situazioni che si possono presentare. L'agitazione termica è comunque abbastanza violenta per contrastare le forze intermolecolari e impedire la costituzione di strutture regolari quali quelle che si hanno nei solidi.

La posizione dello stato liquido fra due stati (gassoso e solido) ben definiti fa sì che le caratteristiche dei liquidi possano essere notevolmente diverse e questa è la ragione di base delle difficoltà che si incontrano nella formulazione della teoria dei liquidi. Si è già visto, nella descrizione delle proprietà elastiche, come spesso i liquidi debbano essere considerati molto simili ai solidi e dotati di una struttura pseudo-cristallina. In molti casi tuttavia il loro comportamento rassomiglia molto a quello di gas densi come per es. mostra il fatto già rilevato che si possa, a pressioni superiori a quella critica, passare con continuità dallo stato gassoso a quello liquido e viceversa. In relazione a quanto ora detto è spesso opportuno descrivere alcune proprietà dei liquidi trattandoli come sistemi analoghi a gas densi, e descrivere altre proprietà che i liquidi (e alcuni di essi in particolare) presentano considerandoli dotati di struttura pseudo-cristallina.

Nel prossimo capitolo, dopo aver studiato lo stato solido, saranno esaminati alcuni processi (per es. fusione) nei quali la natura pseudo-

cristallina dei liquidi risulta importante. Vogliamo ora aggiungere qualcosa sulla trattazione relativa ai liquidi quando questi possano essere considerati gas densi.

Questo fatto fa intuire come lo stato di tali sistemi possa essere rappresentato da equazioni di stato del tipo di quelle esaminate per i gas reali (120) con opportuni coefficienti viriali. Anche in questo caso indicazioni qualitative abbastanza buone si possono avere con l'equazione di Van der Waals; nel descrivere l'andamento delle isoterme (fig. 15.25 e 27) si è già fatto notare quale è la regione dello stato liquido. Le isoterme sono molto ripide in accordo con la bassa compressibilità dei liquidi: grandi variazioni di pressione esterna producono piccole variazioni di volume.

In accordo con quanto detto sull'equazione di Van der Waals la pressione interna, dovuta alle azioni intermolecolari (coesione) e rappresentata dal termine a/V^2 , ha nel caso dei liquidi un valore grande rispetto alla pressione esterna p , sì che il sistema può restare spazialmente limitato anche senza la necessità di una pressione esterna. Se per es. consideriamo il mercurio in equilibrio con il suo vapore a temperatura ambiente, la pressione esterna esercitata dal vapore è di 0,012 mmHg mentre la pressione interna nei liquidi è di 1.000-10.000 atm. Ciò porta di conseguenza che nei liquidi, quando si vogliano studiare processi a pressione costante, si può spesso trascurare p (pressione esterna) rispetto al termine a/V^2 . L'equazione di Van der Waals si scrive allora

$$(146) \quad \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b}$$

ed esprime l'equilibrio fra la pressione dovuta alle azioni intermolecolari e quella $RT/(V - b)$ chiamata *pressione termica*.

L'equazione di stato di Van der Waals nella forma completa (128) e in quella data dalla (146) si usa spesso nello studio di sistemi liquidi a temperature abbastanza lontane dalla temperatura di fusione.

Nei prossimi paragrafi esamineremo alcuni altri effetti nei liquidi, i quali possono essere spiegati mediante considerazioni sulle azioni intermolecolari analoghe a quelle ora svolte.

■ 15.26. TENSIONE SUPERFICIALE NEI LIQUIDI

Le azioni attrattive fra le molecole fanno sì che, nel caso dei liquidi, le molecole dello strato superficiale siano soggette a una forza risultante verso l'interno e di conseguenza la superficie libera dei liquidi tende ad assumere l'estensione minima possibile compatibile col volume globale del liquido. Questa circostanza può essere mostrata sperimentalmente facendo uso di pellicole liquide ottenute estraendo da un liquido (per es. acqua saponata) un piccolo telaio metallico. Se al telaio è attaccato un filo che formi un cappio, come in figura 15.29, si può osservare, forando la pellicola nell'interno del cappio, che questo assume la forma di un cerchio; a questa configurazione corrisponde la superficie minima possibile per la restante pellicola.

Si può dire che le molecole sulla superficie posseggono una energia potenziale superiore a quella che hanno nell'interno del liquido, sicché se si vuole aumentare l'estensione della superficie libera di un liquido, dovendosi portare un certo numero di molecole in superficie, occorre spendere un

Nei liquidi le forze di coesione interna tra molecole sono di gran lunga maggiori di quelle corrispondenti alla pressione interna

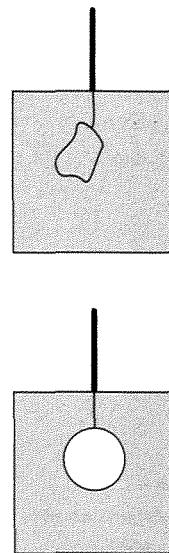


Fig. 15.29

lavoro proporzionale all'aumento di superficie: viceversa la condizione di equilibrio del liquido corrisponde alla minima estensione possibile della superficie libera.

Per valutare quantitativamente questa situazione prendiamo in considerazione una certa quantità di liquido avente energia interna totale U . Se il liquido viene sottoposto a una trasformazione che alteri esclusivamente l'area della sua superficie libera S , si ha una variazione dell'energia interna ΔU praticamente pari alla variazione di energia potenziale dello strato superficiale, e quindi proporzionale all'incremento ΔS dell'area. Tale variazione di energia interna è, per il primo principio della termodinamica, in parte calore Q fornito dall'energia cinetica delle molecole dell'ambiente e in parte lavoro L corrispondente al lavoro meccanico che deve essere fornito dall'esterno. Vedremo in seguito l'interesse di una grandezza di stato chiamata *energia libera*, che fornisce con la sua variazione $\Delta F = \Delta U - Q$ la parte della variazione di energia interna che deve essere fornita come energia meccanica in un processo isotermo.

Si definisce *tensione superficiale di un liquido* σ la quantità di lavoro richiesta per aumentare l'area della sua superficie di una unità, mantenendo costante la temperatura del sistema, cioè *l'aumento di energia libera per unità di superficie*. Nel SI essa si misura in J/m^2 .

In una disposizione sperimentale come quella in figura 15.30 una pellicola è ottenuta su un telaio rettangolare un cui lato può scorrere sui due contigui. In accordo a quanto detto, la superficie della lamina tenderà a ridursi se questa tendenza non è contrastata da una forza come in figura. Si può con un dispositivo di questo genere determinare σ facendo muovere il lato di lunghezza l di una quantità x . Poiché si hanno due superfici esterne della pellicola (le due facce) la variazione totale di area è $2lx$ e quindi

$$F \cdot x = 2lx\sigma$$

cioè che si può anche scrivere come

$$(147) \quad \sigma = \frac{F}{2l}.$$

La tensione superficiale risulta pari alla forza per unità di lunghezza dell'orlo della superficie libera. In genere gli effetti della tensione superficiale possono essere determinati immaginando che la superficie libera si comporti come una membrana elastica e che, in corrispondenza a una linea qualsiasi sulla superficie, si eserciti una forza normale alla linea stessa e tangente alla superficie che, per unità di lunghezza, vale σ . Questo spiega il nome di tensione superficiale. Si osservi tuttavia che la somiglianza tra la superficie libera di un liquido e una membrana elastica non è perfetta giacché nel primo caso il valore della tensione superficiale non varia all'aumentare della estensione della superficie stessa (l'aumento di energia potenziale è sempre lo stesso per variazione unitaria di area), mentre la tensione elastica cresce con l'estendersi della membrana.

Abbiamo svolto queste considerazioni senza tener conto di ciò che si trova al di fuori del liquido: in realtà ciò ha interesse sui valori della tensione giacché le molecole del secondo mezzo svolgono anche esse azioni sulle molecole dello strato superficiale del liquido e tali azioni in alcuni casi possono non essere trascurabili. Si comprende analogamente la grande importanza che sulla tensione superficiale hanno

La tensione superficiale di un liquido è pari alla variazione di energia (libera) per unità d'area o alla forza per unità di lunghezza del bordo

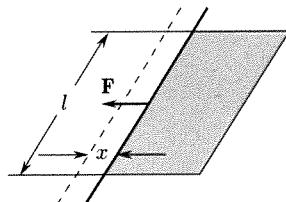


Fig. 15.30

anche piccole quantità di impurezze che vengono a trovarsi sulla superficie. La tensione superficiale inoltre dipende dalla temperatura e in genere decresce con questa.

Un apparecchio usato per la misura di σ è lo stalagnometro basato sulla caduta di gocce da un tubicino come in figura 15.31. La goccia è trattenuta dalla tensione superficiale lungo la linea $l = 2\pi r$, con r il raggio interno del tubo finché la forza risultante di intensità $2\pi r\sigma$ è sufficiente per equilibrare il peso. All'atto del distacco sarà

$$(148) \quad 2\pi r\sigma = mg$$

da cui si calcola σ .

La tabella 15.6 riporta alcuni valori di tensione superficiale per il caso in cui al di sopra del liquido vi sia aria.

Vogliamo infine accennare al fatto che le azioni molecolari che originano la tensione superficiale danno luogo, nel caso che la superficie limite S non sia piana, a una forza di pressione sull'elemento dS diretta verso il centro di curvatura della superficie stessa.

Se per es. si prende in considerazione una goccia sferica la tensione superficiale tende a contrarre la goccia e questa azione deve essere contrastata da una differenza di pressione dall'interno verso l'esterno per tenere la goccia in equilibrio. Se si immagina (fig. 15.32) un piano equatoriale che divida la goccia in due parti, le forze che spingono le due metà una contro l'altra sono dovute alla tensione superficiale lungo il bordo (intensità totale $2\pi r\sigma$); la forza che tende a separarle ha intensità $\pi r^2 \Delta p$. Si ha quindi per l'equilibrio

$$(149) \quad \Delta p = \sigma \frac{2}{r}.$$

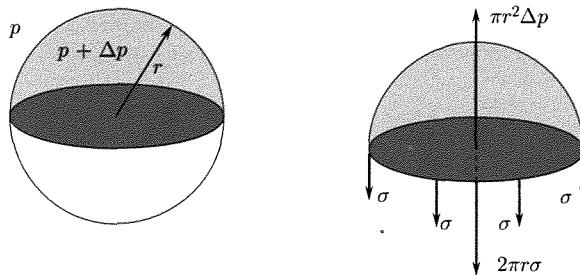


Fig. 15.32

La tensione superficiale conduce quindi a una forza di pressione sull'elemento di superficie dS uguale e contraria a quella prodotta da Δp , diretta cioè lungo la normale alla superficie limite e verso il centro di curvatura.

Tali considerazioni valgono per es. per il caso delle bolle di sapone. La differenza di pressione fra l'esterno e l'interno può essere misurata in questo caso con il dispositivo in figura 15.33. In questo caso

$$(150) \quad \Delta p = \sigma \frac{4}{r}$$

giacché si sommano gli effetti delle due superfici sferiche che limitano l'involucro, avendo esse praticamente lo stesso raggio di curvatura. La differenza di pressione è tanto maggiore quanto minore è r : se si hanno due bolle di raggio diverso collegate da un cannello si può osservare che la grande cresce ulteriormente mentre l'altra rimpiccolisce.

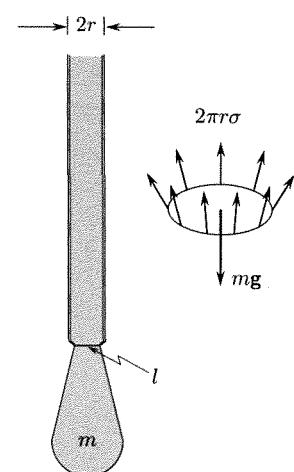


Fig. 15.31

Tabella 15.6

Liquido	Temp. (°C)	σ (10^{-3} N/m)
Acqua	0	75,6
	30	71,4
	90	62,9
Alcool etilico	0	23,5
	30	20,8
	70	17,3
Etere etilico	20	16,8
Glicerina	20	65
Olio oliva	20	34
Mercurio	20	520

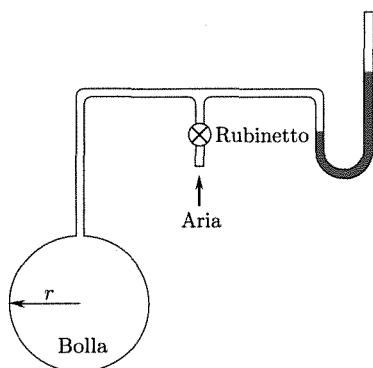


Fig. 15.33

Gli esempi considerati di superficie limite sferica sono un caso particolare. Nel caso generale di superficie limite curva qualsiasi si può stabilire una formula (formula di Laplace) che dà il valore della differenza di pressione (che ora indichiamo p) fra l'esterno del liquido e l'interno, in corrispondenza a un punto della superficie. In tale punto si considerino la normale e due piani contenenti la normale (e quindi normali alla superficie) i quali siano anche perpendicolari fra loro: essi tagliano la superficie secondo due curve aventi raggi di curvatura r_1 e r_2 nel punto considerato. Si può vedere che

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

è indipendente dalla particolare coppia di piani scelti in corrispondenza al punto della superficie e prende il nome di curvatura media. La formula di Laplace stabilisce che la forza di pressione che si origina per la curvatura della superficie sull'elemento di superficie dS intorno al punto è diretta lungo la normale, verso i centri di curvatura e ha intensità

$$(151) \quad pdS = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dS.$$

Essa è diretta verso l'interno del liquido se la superficie è convessa e verso l'esterno se la superficie è concava.

15.27. CONTATTO DI DUE FLUIDI CON UN TERZO MEZZO

Le considerazioni precedenti si riferiscono al caso della superficie limite di un liquido, quando questa lo separi da un altro fluido (gas o liquido non miscibile). Diverso è il caso in presenza di un terzo mezzo, solido o fluido.

Nella vicinanza di una parete solida, come in figura 15.34, la superficie libera di separazione liquido-gas che, in condizioni statiche, è sempre una superficie equipotenziale, in genere si incurva, sopraelevandosi (caso a) o abbassandosi (caso b).

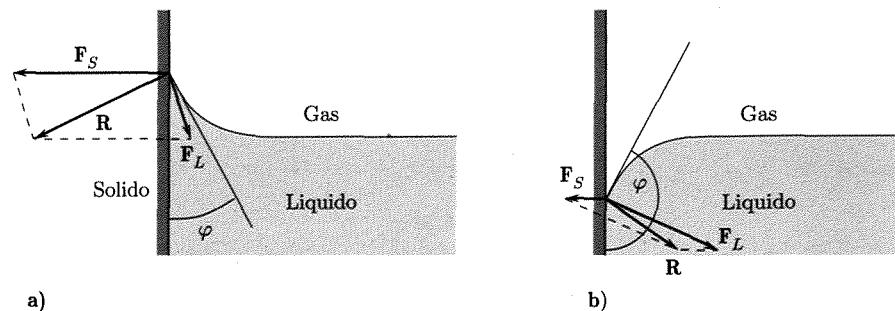


Fig. 15.34

La ragione di un tale comportamento è dovuta al fatto che in corrispondenza alla superficie di separazione liquido-solido le molecole sono soggette a forze attrattive di coesione da parte delle altre molecole del liquido che producono una risultante \mathbf{F}_L diretta verso l'interno del liquido, e a forze attrattive di adesione da parte delle molecole del solido che danno luogo a una risultante \mathbf{F}_S diretta verso l'interno del solido. Se si considera una particella sulla superficie ed è $F_L < F_S$, essa risulta soggetta a una forza $\mathbf{R} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_S$ diretta verso l'interno del solido e, siccome la superficie libera in equilibrio (sup. equipotenziale) deve essere normale a tale forza, la superficie stessa deve essere incurvata verso l'alto (caso a): l'angolo di contatto φ formato dalla tangente al profilo della superficie liquida, in corrispondenza del punto di contatto, con la traccia della parete di separazione liquido-solido, è acuto. Il caso b si ottiene per $F_L > F_S$; l'angolo di contatto è ottuso.

Per determinare quantitativamente l'angolo φ di attacco della superficie libera del liquido alla parete solida del recipiente, si può far uso delle espressioni delle energie libere delle superfici di separazione tra i tre mezzi a contatto: solido, liquido e gas, presi a due a due. Più direttamente, si può giungere alla determinazione dell'angolo considerando le forze di tensione tra le coppie dei mezzi a contatto. Come si è visto per il caso della superficie liquido-gas, anche per le altre superfici limite lo stato delle cose può rappresentarsi immaginando le superfici libere come membrane tali che ogni linea sulla superficie sia soggetta a una forza per unità di lunghezza normale alla linea, tangente alla superficie stessa e avente intensità numericamente pari all'energia libera per unità di area. Se si considera allora (v. fig. 15.35) la linea di incontro delle tre superfici, essa sarà, per ogni tratto di lunghezza unitaria, soggetta a tre forze di intensità σ , γ_{SL} , γ_{SG} dirette come in figura 15.36. Perché si abbia l'equilibrio, dovrà essere

$$\gamma_{SG} = \gamma_{SL} + \sigma \cos \varphi$$

da cui

$$(152) \quad \cos \varphi = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\sigma}.$$

Fra acqua e vetro, se la purezza e la pulizia sono molto spinte, l'angolo φ è prossimo a 0° ; bastano piccole contaminazioni, a volte provenienti dall'aria, perché esso salga a circa 25° . Nel caso mercurio-vetro φ è 148° in condizioni di elevata purezza e scende a 140° in presenza di piccole quantità di impurezze presenti.

Si noti inoltre che, se il fluido è tale che esso non bagnerebbe per suo conto la parete (per es. acqua su superfici di vetro coperto di grasso), una riduzione di σ può ridurre φ fino a renderlo acuto: ciò può farsi sciogliendo nel liquido sostanze opportune.

Considerazioni analoghe a quelle ora fatte valgono nel caso che i tre mezzi a contatto siano fluidi. Una situazione di questo tipo è quella illustrata in figura 15.36 nella quale, al posto dei mezzi solido, liquido e gassoso della figura 15.35, i mezzi siano rispettivamente un liquido (1), un altro liquido (una goccia) non miscibile con il primo (2) e un gas (3).

La (152) è ancora valida per l'equilibrio, scritta nella forma:

$$(153) \quad \cos \varphi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}.$$

A seconda dei valori delle σ , la forma della goccia è diversa: se, infatti, φ è ottuso essa si avvicina alla forma sferica, se φ è acuto essa è piuttosto piatta. Si osservi che in alcuni casi l'equilibrio non può stabilirsi: così, se è $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$, la goccia si spande fino a divenire un sottilissimo strato di spessore monomolecolare per il cui equilibrio valgono considerazioni diverse.

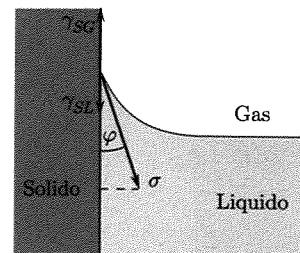


Fig. 15.35

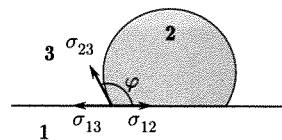


Fig. 15.36

15.28. CAPILLARITÀ

Legata alle considerazioni svolte sulla tensione superficiale e sull'angolo di contatto fra un liquido e pareti solide, è la descrizione di alcuni fenomeni che si verificano quando il liquido è in parte limitato da pareti solide molto vicine fra loro; tali fenomeni vanno sotto il nome di fenomeni di capillarità.

Il più semplice di essi (fig. 15.37) si ha quando un tubo di piccolo raggio, r , chiamato capillare, è posto verticalmente con l'estremità inferiore immersa in un liquido. Se il liquido bagna la parete (a) si osserva un innalzamento della superficie libera rispetto a quella esterna al capillare (per es. acqua in tubi di vetro); se il liquido non bagna la parete (b) si ha un abbassamento (per es. mercurio in tubi di vetro). La superficie libera, se il tubo è sufficientemente piccolo, ha una forma approssimativamente sferica (menisco sferico) il cui raggio indichiamo con R . Se è $\gamma_{SL} < \gamma_{SG}$, il liquido tende a bagnare le pareti e l'energia libera diminuisce quando il liquido si innalza nel capillare. In corrispondenza del passaggio da z a $z + dz$, tale diminuzione, pari al lavoro fatto dalle forze di tensione, vale $2\pi r dz (\gamma_{SG} - \gamma_{SL})$.

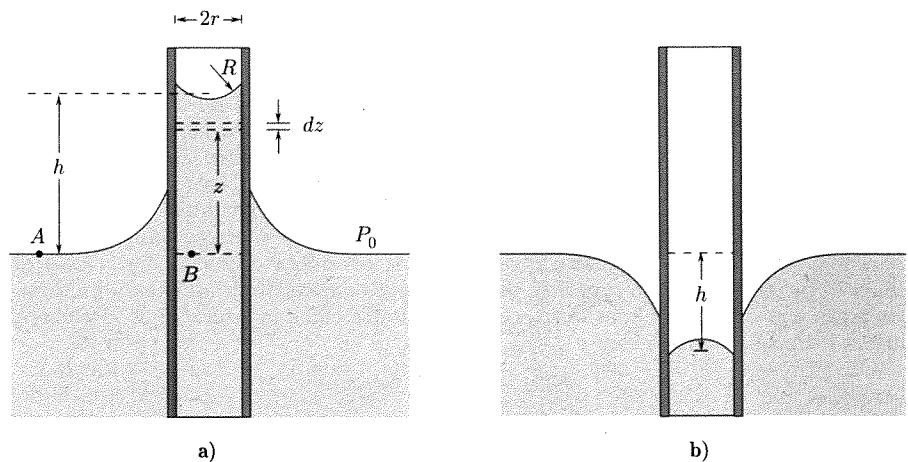


Fig. 15.37

Contemporaneamente occorre compiere un lavoro contro la forza di gravità per innalzare la colonna liquida nel capillare:

$$\pi r^2 \rho g z dz$$

essendo ρ la densità.

Il processo di ascesa del liquido continua finché il guadagno di energia libera egualgia la variazione di energia potenziale dovuta alla gravità:

$$(154) \quad 2\pi r dz (\gamma_{SG} - \gamma_{SL}) = \pi r^2 \rho g z dz.$$

Chiamando con h il valore di equilibrio di z , cioè l'altezza raggiunta dal liquido nel tubo, si ha

$$(155) \quad h = \frac{2(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})}{r \rho g}$$

e usando la (152)

$$(156) \quad h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r \rho g}.$$

La stessa formula⁽¹⁸⁾ vale anche nel caso che il liquido non bagni le pareti: in tal caso h è negativo, cioè si ha un abbassamento, essendo $\varphi > \pi/2$.

In determinazioni molto accurate bisogna specificare il punto del menisco ove si misura h : questo dipende dalla precisa forma geometrica del menisco che determina (tramite la curvatura) Δp e il volume della colonna liquida spostata.

⁽¹⁸⁾ La (156) può essere ottenuta anche in altri modi. Supponiamo (fig. 15.38) che la superficie del menisco si possa considerare sferica (raggio R). Essa incontri il tubo lungo una circonferenza (raggio del tubo r) e sia φ l'angolo di contatto. Si ha $R \cos \varphi = r$. Se il liquido bagna le pareti ($\varphi < \pi/2$) il menisco è concavo, il centro di curvatura è fuori del liquido. La formula di Laplace (151) fornisce per la differenza di pressione fra le due parti della superficie del menisco, creata dalla curvatura della superficie limite

$$(157) \quad \Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos \varphi}{r}.$$

La pressione nel liquido al di sotto del menisco è inferiore a quella che si avrebbe al di sotto di una superficie limite piana. Se ora si considera un piano di riferimento orizzontale, per es. quello della superficie libera esterna, giacché esso è equipotenziale nel campo della gravità, è anche isobarico. La pressione in un punto (A , fig. 15.37a) di questo piano, esterno al capillare (pressione atmosferica p_0), deve essere uguale a quella in corrispondenza a un punto dello stesso piano entro il tubo capillare (B , fig. 15.37a). Trascurando le variazioni di p_0 , per l'altezza h si ha

$$(158) \quad p_0 = p_0 - \frac{2\sigma \cos \varphi}{r} + h \rho g$$

da cui si ha la (156).

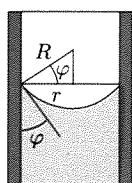


Fig. 15.38

Fenomeni analoghi si hanno quando due piastre parallele tra loro a una piccola distanza (d) vengono disposte verticalmente con le estremità inferiori in un liquido. Se questo le bagna, si osserva un innalzamento che si può determinare con le stesse considerazioni svolte nel caso dei tubi:

$$(159) \quad h = \frac{2\sigma \cos \varphi}{gpd}.$$

Si osservi che in questa formula compare la distanza fra le piastre e non il parametro $d/2$ che corrisponderebbe al raggio del capillare della situazione precedentemente vista: vi è cioè nel valore di h un fattore $\frac{1}{2}$ rispetto a quello che si ha nei capillari di diametro pari alla distanza delle piastre. Ciò è dovuto al fatto che questa volta il menisco è cilindrico e non sferico: segue che il corrispondente Δp , a parità di raggio fra cilindro e sfera, è metà. Si noti infatti che nel caso della sfera nella (151) $1/r_1 = 1/r_2$, mentre nel caso del cilindro, scegliendo una delle sezioni normali tale che contenga l'asse del cilindro si ha $1/r_2 = 0$ essendo infinito il raggio di curvatura corrispondente.

I fenomeni di capillarità hanno una importanza notevole: la linfa sale nei condotti delle piante in parte per azione capillare; l'acqua penetra nelle fessure delle rocce per capillarità e qualora venga in seguito a congelare causa la loro frantumazione; la terra non arata inaridisce perdendo rapidamente l'acqua che sale in superficie attraverso i pori ed evapora. Se si hanno due piastre levigate fra cui è interposto un sottile strato di acqua (fig. 15.39) è molto difficile separarle tirandole in direzione perpendicolare. In tal caso, essendo i menischi che limitano la pellicola d'acqua concavi verso l'esterno, la pressione nel liquido è minore della pressione atmosferica che v'è all'esterno delle piastre.

Numerosi altri esempi possono essere portati per mostrare gli effetti capillari.



Fig. 15.39

■ 15.29. EVAPORAZIONE ED EBOLLIZIONE

Si vogliono ora svolgere alcune considerazioni sul passaggio di una sostanza dallo stato liquido a quello gassoso, detto evaporazione.

Un'esperienza molto significativa è la seguente. Si prenda una canna di vetro chiusa a un estremo la quale sia stata riempita di mercurio e rivoltata su una vaschetta di mercurio. Se la canna è sufficientemente lunga (esperienza di Torricelli) si vede che la parte superiore non è occupata da mercurio liquido e può approssimativamente considerarsi vuota (in realtà v'è vapore di mercurio in equilibrio col liquido, ma la sua pressione è, a temperature ambienti normali, molto bassa). Se allora si introduce nella canna, dal basso, qualche goccia di un liquido leggero (per es. etere) tali gocce arrivano sulla superficie libera del mercurio e passano allo stato gassoso (evaporano); contemporaneamente si può notare un abbassamento della colonna di mercurio nella canna e un raffreddamento del mercurio stesso, cioè il vapore prodotto esercita una pressione sul liquido e l'evaporazione richiede somministrazione di quantità di calore. Se si continua a introdurre piccole quantità di liquido, si osserva che a un certo momento si forma sul mercurio uno strato del liquido aggiunto: abbiamo cioè presenti il liquido e il suo vapore. Ulteriori aggiunte di liquido non fanno aumentare la quantità della sostanza allo stato gassoso, cioè la sua pressione.

In accordo a quanto è stato detto in precedenza, le molecole di un liquido si trovano in moto disordinato ciascuna con una energia cinetica. L'energia cinetica media dipende dalla temperatura e, alle temperature ambienti normali, essa non è sufficiente perché le molecole escano dal liquido superando le azioni attrattive dovute alle molecole del liquido che si trovano sulla sua superficie. Ciò nonostante vi sono sempre alcune molecole che hanno individualmente una velocità abbastanza grande per sfuggire

*L'evaporazione
consiste nel passaggio
delle molecole
più energetiche di un
liquido alla fase gassosa
esternamente al liquido:
in corrispondenza il
liquido si raffredda*

dal liquido. In ciò consiste l'evaporazione, nella quale parte dell'energia cinetica delle molecole che fuoriescono dal liquido (o dal solido) viene convertita in energia potenziale. La perdita da parte del liquido di molecole di energia cinetica superiore alla media riduce l'energia cinetica media stessa, cioè la temperatura del liquido. Qualora si voglia fare avvenire il processo a temperatura costante occorre fornire dall'esterno delle quantità di calore.

Se il gas prodotto (vapore) è contenuto in un volume limitato al di sopra del liquido, come nell'esperienza citata, alcune molecole del vapore verranno a urtare la superficie liquida e saranno trattenute dalle altre molecole nella fase liquida (condensazione). È chiaro che man mano che aumenta il numero di molecole nella fase gassosa (e quindi la pressione da esse esercitata) aumenta anche il numero di molecole che in un certo tempo ritorna nella fase liquida. A un certo punto si stabilisce l'equilibrio statistico, nel senso che *un egual numero di molecole passa nell'unità di tempo dal liquido al gas e dal gas al liquido*. Questa condizione, che si ha quando liquido e vapore sono in equilibrio, è detta di vapore saturo: essa è realizzata nella esperienza descritta, in cui un liquido è introdotto nella canna con mercurio, quando la fase liquida appare sul mercurio. Naturalmente la pressione del vapore saturo, spesso detta tensione di vapore saturo, dipende dalla temperatura.

Ritorneremo su questa questione in termodinamica (cap. 19, par. 19.4). La tabella 15.7 mostra come varia la pressione del vapore saturo nel caso dell'acqua; i dati sono mostrati in figura 15.40.

Tabella 15.7 Tensione di vapore dell'acqua

t (°C)	Pressione (mmHg)
-20	0,770
-10	1,947
0	4,579
10	9,205
20	17,51
30	31,71
40	55,13
50	92,30
60	149,2
70	233,5
80	355,1
90	525,8
100	760
140	2710
180	7514
260	35187
360	139880

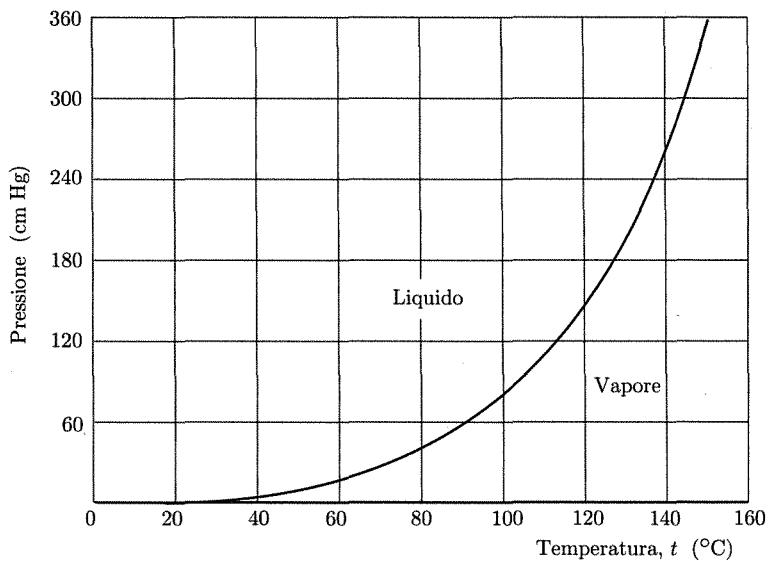


Fig. 15.40

Nel caso che lo spazio al di sopra del liquido contenga altri gas, la condizione di equilibrio liquido-vapore si realizza ancora quando un egual numero di molecole della sostanza passa nell'unità di tempo dal liquido al gas e viceversa: si comprende quindi come l'equilibrio richieda che *la pressione parziale del vapore sia uguale alla tensione del vapore saturo del liquido*. Nel caso che lo spazio al di sopra del liquido non sia limitato, è evidente che il vapore non può divenire mai saturo e quindi l'evaporazione a una certa temperatura procede fino a che tutto il liquido non sia evaporato.

I punti della curva di figura 15.40 rappresentano stati di equilibrio fra le due fasi. I punti del piano p , t a destra della curva rappresentano stati gassosi, quelli a sinistra stati liquidi. Se per es. lo stato del sistema è rappresentato da un punto sulla curva (per es. $t = 120^\circ\text{C}$; $p = 150 \text{ cm Hg}$) e si innalza la temperatura, occorre che la pressione del vapore vari in maniera ben precisa se si vuole mantenere la coesistenza delle fasi: se si cercasse di innalzare la temperatura mantenendo costante la pressione tutto il liquido vaporizzerebbe; se si variasse la pressione più di quello che corrisponde a un nuovo punto della curva di equilibrio tutto il vapore condenserebbe.

La linea di equilibrio fra le due fasi liquido-gas di un sostanza nel piano p , t si ferma bruscamente in corrispondenza alla temperatura e alla pressione critiche: non è possibile infatti avere la fase liquida a temperature superiori alla critica; per l'acqua $t_c = 370^\circ\text{C}$, $p_c = 218 \text{ atm}$.

All'aumentare della temperatura cresce la tensione di vapore saturo. Se il riscaldamento viene condotto in condizioni in cui la pressione esterna è costante, come per es. se il liquido confina con l'aria ambiente, si osserva sperimentalmente che a una certa temperatura vengono formate bolle di vapore in tutto il liquido: questo fenomeno si chiama ebollizione e la temperatura alla quale avviene è detta temperatura di ebollizione: a questa temperatura la tensione del vapore saturo egualia la pressione esterna. Il fenomeno consiste nel fatto che *l'evaporazione non avviene solo alla superficie esterna del liquido* (come alle temperature più basse) ma anche *nell'interno del liquido* in corrispondenza di superfici di discontinuità quali quelle create da particelle solide disperse o da bollicine di gas (nuclei). Dei nuclei sono sempre presenti in gran numero; se, tuttavia, si prepara un liquido rimuovendo la maggior parte dei nuclei e lo si riscalda lentamente è possibile portarlo a temperature superiori a quella di ebollizione, in condizioni di falso equilibrio (*liquido surriscaldato*), alle quali basta una piccola perturbazione per fare passare rapidissimamente il sistema in condizioni di equilibrio (alla temperatura di ebollizione) con lo stabilirsi vigoroso della ebollizione. Durante il processo di ebollizione a pressione costante, la temperatura resta costante: se si fornisce una maggiore quantità di calore per unità di tempo, si aumenta la produzione per unità di tempo del vapore, ma non varia la temperatura. È questa la ragione per cui *la temperatura di ebollizione dell'acqua a pressione stabilita è stata scelta come uno dei punti fissi della scala termometrica centigrada*. La temperatura di ebollizione cresce con la pressione esterna: ciò si vede dalla figura 15.40, giacché la tensione di vapore cresce con la temperatura e l'ebollizione si ha quando pressione esterna e tensione di vapore sono uguali.

La temperatura di ebollizione di una sostanza semplice viene alterata se in essa si scioglie una seconda sostanza.

Se questa sostanza non ha per suo conto una tensione di vapore apprezzabile (per es. zucchero in acqua), il punto di ebollizione del solvente aumenta e tale aumento, per soluzioni diluite, è proporzionale alla massa del soluto aggiunta; inoltre la costante di proporzionalità è approssimativamente la stessa per soluzioni che nello stesso solvente contengono lo stesso numero di kmole di soluti diversi. Questa proprietà del punto di ebollizione può essere usata per determinare il peso molecolare di sostanze (soluti nello stesso solvente).

Se invece la sostanza disciolta nel solvente ha per sé stessa un'apprezzabile tensione di vapore (per es. alcool in acqua), le cose sono più complicate e si può osservare un innalzamento o un abbassamento della temperatura di ebollizione della soluzione rispetto a quelle dei componenti puri.

*Si ha ebollizione
di un liquido quando
la tensione del vapore
saturo egualia
la pressione esterna*

Tabella 15.8 Calori latenti di evaporazione in corrispondenza al punto di ebollizione a pressione normale

	<u>kcal</u> <u>kg</u>
Acqua	539
Alcool etilico	107
H ₂ liquido	96
CO ₂ liquido	70
Mercurio	51
O ₂ liquido	50
Aria liquida	48

Si chiama calore latente di evaporazione la quantità di calore che occorre fornire per fare evaporare un kg di sostanza a una certa temperatura e a una certa pressione. Di solito la pressione è scelta pari alla pressione del vapore saturo alla temperatura che si considera. In tal caso il calore latente di evaporazione è funzione della temperatura solamente: per l'acqua vale 539 kcal/kg a 100 °C, 511 kcal/kg a 140 °C, 481 kcal/kg a 180 °C. Di solito nelle tabelle si trova indicato per ciascuna sostanza il calore latente di evaporazione alla temperatura di ebollizione alla pressione di una atmosfera. Nella tabella 15.8 vengono indicati alcuni di tali valori di kcal/kg.

Perché l'evaporazione prosegua a temperatura e pressione costanti occorre fornire calore al liquido dall'esterno. Se ciò non viene fatto, il liquido restante e i corpi a contatto si raffreddano: questo effetto di raffreddamento legato al processo di evaporazione è quello che produce l'abbassamento della temperatura del corpo umano quando una persona si trova in ambienti caldi (evaporazione del sudore).

Il processo inverso dell'evaporazione, condensazione o liquefazione, avviene con le stesse caratteristiche dell'evaporazione: naturalmente il calore latente deve questa volta essere asportato. Si osservi che per liquefare un gas bisogna che esso sia a una temperatura inferiore a quella critica. Nella tabella 15.9 sono indicate le temperature critiche e le pressioni critiche di alcuni gas.

Tabella 15.9

Sostanza	Temperatura critica (°C)	Pressione critica (atm)
Ossigeno	−118	50
Argon	−122	48
Aria	−140	37
Azoto	−146	33
Idrogeno	−239,9	13
Elio	−267,9	2,3

Il fatto che le temperature critiche siano notevolmente basse per alcuni di questi gas spiega le difficoltà che si incontrano per realizzare processi efficienti per la loro liquefazione (cap. 17, par. 17.18).

■ 15.30. SUBLIMAZIONE

Il passaggio diretto allo stato gassoso da quello solido si chiama sublimazione, quello inverso condensazione

I gas (vapori) possono essere ottenuti anche da solidi: il processo prende il nome di sublimazione e quello inverso il nome di condensazione. Per questi processi si può ripetere ciò che si è detto per l'evaporazione di un liquido: il calore che deve essere fornito per il passaggio dell'unità di massa dal solido al gas è chiamato calore latente di sublimazione ed è funzione di T e p . Di solito la tensione di vapore (equilibrio solido-vapore) è molto bassa; a volte, tuttavia, essa è considerevole (per es. naftalina) e può raggiungere il valore della pressione atmosferica a una temperatura più bassa di quella di fusione. In tal caso il solido sublima completamente prima di liquefarsi. In questi casi la sostanza può essere ottenuta allo stato liquido solo se portata a opportune pressioni e temperature.

■ 15.31. UMIDITÀ

Le considerazioni svolte nei riguardi dell'evaporazione hanno un interesse notevole per quanto riguarda lo studio del contenuto di vapore acqueo nell'aria atmosferica.

Si tenga presente infatti che l'atmosfera è in contatto con grandi superfici di acqua. Il grado di saturazione dell'aria, cioè quanto più o meno vicini si è alle condizioni di vapore saturo per la pressione e la temperatura dell'ambiente, è di grande importanza per il clima, giacché determina la velocità con cui il processo di evaporazione procede (quantità di vapore prodotto nell'unità di tempo) dalle superfici d'acqua (mari, laghi ecc.) e da superfici bagnate o umide come il corpo umano. Quanto più lontana dalla saturazione è l'aria, tanto più rapida è l'evaporazione e quindi il raffreddamento dei corpi a contatto con l'acqua che evapora. Ciò spiega perché una giornata calda è meno opprimente quando l'aria è secca che quando è umida.

Si vede quindi l'interesse di considerare il rapporto fra la quantità di acqua presente come vapore in un volume qualsiasi e quella che vi sarebbe se l'aria fosse satura alla stessa pressione e stessa temperatura. Questo rapporto è naturalmente uguale al rapporto tra la pressione parziale del vapore acqueo presente e quella del vapore saturo: si chiama umidità relativa. La massa di vapore contenuta in un m^3 di aria prende invece il nome di umidità assoluta.

L'umidità relativa è misurata dagli igrometri. Un igrometro semplice (fig. 15.41) è costituito da due termometri identici, posti nell'aria; il bulbo di uno di essi è coperto con un tessuto che viene tenuto umido, dato che il tessuto si prolunga in un'appendice immersa in un recipiente che contiene acqua. L'evaporazione che avviene dal tessuto, più o meno rapidamente secondo le condizioni ambientali, produce il raffreddamento del bulbo di uno dei termometri. Le differenze fra le temperature indicate dai due termometri consente, con l'uso di tavole, di determinare l'umidità relativa e quella assoluta.

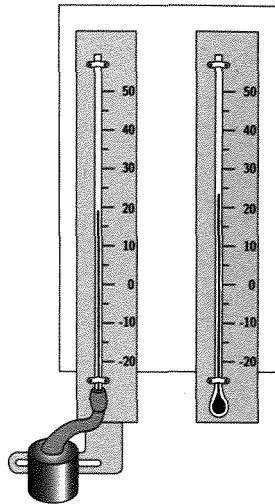


Fig. 15.41

STATI SOLIDO E LIQUIDO DELLA MATERIA

✓ **Strutture cristalline:** distribuzione ordinata degli atomi nello spazio su ogni scala delle distanze.

Strutture amorfhe: distribuzione casuale o ordinata solo su scala ravvicinata (vetri, plastiche, liquidi ecc.).

Equazione di stato

$$V = V_0[1 + a_0(T) - a_1(T)p + a_2(T)p^2 + \dots]$$

con coefficienti di compressibilità.

✓ **Cambiamenti di stato solido-liquido:** *fusione e solidificazione* per rottura e ricostituzione di legami interatomici o intermolecolari (*calori latenti* di fusione e solidificazione).

✓ **Calori specifici:**

cristalli (e solidi) a temperatura sufficientemente alta con sei gradi di libertà:

$$C_v = 3R \quad (\text{legge di Dulong-Petit}) ;$$

a basse temperature, per effetti quantistici:

$$C_v = 3R \frac{\theta_E/T}{(e^{\theta_E/T} - 1)(1 - e^{-\theta_E/T})}, \quad \theta_E = \frac{h\nu_0}{k} \quad (\text{Einstein})$$

con ν_0 , frequenza degli oscillatori (uguale per tutti).

► **Correzione di Debye:** cristallo come struttura unitaria; oscillazioni proprie di tutto il cristallo e modi propri determinati dalle dimensioni (frequenza minima) e dalla distanza reticolare (frequenza massima); conteggio dei modi e distribuzione dell'energia tra i modi; calcolo dell'energia interna e del calore specifico:

$$C_v = f(\theta_D/T), \quad \theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k} \quad (\text{Debye}).$$

Il contributo elettronico al calore specifico è lineare con T alle basse temperature ed è importante per $T \rightarrow 0$.

V

■ Stati solido e liquido della materia

16.

■ 16.1. INTRODUZIONE

Lo stato gassoso della materia è caratterizzato su scala microscopica, come abbiamo visto, da un altissimo grado di disordine nella distribuzione delle particelle costituenti. Gli altri stati in cui le particelle di una sostanza possono trovarsi si distinguono per l'esistenza di un ordine più o meno spinto nella distribuzione delle particelle. I sistemi nei quali l'ordine è il più elevato possibile sono corpi costituiti da un unico cristallo i cui atomi sono, con poche eccezioni (*difetti*), disposti secondo un reticolato spaziale molto regolare, cioè *in posizioni precise nell'interno di celle elementari* caratteristiche che si ripetono nello spazio: in questo caso il disordine presente è solo dovuto a imperfezioni e al fatto che gli atomi oscillano intorno alla loro posizione di equilibrio per effetto della agitazione termica. Esistono sistemi intermedi fra quello gassoso e quello di monocristallo regolare: essi comprendono i liquidi, i cosiddetti solidi amorfì, i corpi policristallini. In questo capitolo si considereranno alcuni aspetti del comportamento termico di questi sistemi caratterizzati dall'esistenza di un certo grado d'ordine. Si considererà essenzialmente il caso dei sistemi che posseggono un ordine molto elevato nella distribuzione dei componenti, perché essi si prestano meglio a mettere in evidenza le dipendenze del comportamento termico del sistema dalle caratteristiche di ordine nella distribuzione delle particelle. Essi inoltre sono i più semplici da trattarsi. Lo studio approfondito del caso dei sistemi in cui l'ordine è solo parziale e variabile da punto a punto e nel tempo richiede trattazioni statistiche più avanzate.

Alcune semplici considerazioni relative ai liquidi e al passaggio solido-liquido sono tuttavia presentate al termine del capitolo.

■ 16.2. SOLIDI CRISTALLINI E CORPI AMORFI

Nella meccanica dei sistemi deformabili (cap. 7, par. 7.1) è stato definito solido un corpo che abbia forma e volume propri e si è detto come questa definizione sia sufficiente per la trattazione del comportamento elastico di sistemi di questo tipo. Cerchiamo ora di precisare meglio la natura dei corpi solidi.

Un corpo si dice omogeneo quando le parti in cui può immaginarsi decomposto hanno proprietà fisiche identiche fra loro. È evidente quindi

come il giudizio di omogeneità di un corpo vada qualificato con la indicazione delle parti (elementi di volume) considerati come costituenti; queste a loro volta vanno scelte di caso in caso secondo il problema fisico da studiare. Così per es. se si vuole studiare il comportamento meccanico di una sbarra metallica, policristallina nei limiti elastici, essa potrà essere considerata omogenea se tale comportamento è lo stesso per la sbarra e per i suoi elementi di volume piccoli rispetto al volume della sbarra (per es. 1/100) ma grandi rispetto ai grani cristallini; la stessa sbarra non può più considerarsi omogenea in prove (per es. di trazione) spinte fino alla rottura del materiale, ove disuniformità locali fra i grani e la struttura stessa dei grani assumono importanza determinante. Si giunge quindi a vedere come un corpo possa essere considerato omogeneo fino a che si considerano come costituenti elementi di volume di certe dimensioni e non più omogeneo se si deve considerarne di più piccoli. Una graduale diminuzione degli elementi di volume può proseguire fino al limite inferiore posto dalla struttura atomica dei corpi: un tale volume limite delle parti componenti un corpo deve ancora possedere nel suo interno molti atomi (dimensione $\sim 10^{-10}$ m) in modo da non essere costretti a tenere conto della distribuzione discontinua delle particelle. Un corpo omogeneo fino a questo limite si dice omogeneo su scala atomica.

Metodi di indagine della distribuzione degli atomi nei corpi, quali la diffrazione dei raggi X e degli elettroni, hanno consentito di provare che i corpi solidi secondo la definizione data in teoria della elasticità, i quali sono ancora omogenei su scala atomica, possono essere divisi in due categorie: cristalli e corpi amorfi.

I cristalli, come varie volte è stato detto, sono caratterizzati da una *periodicità tridimensionale nella distribuzione degli atomi*; si possono individuare celle elementari aventi nel loro interno una ben precisa distribuzione di atomi e *il cristallo è formato da una successione di celle*. Nella descrizione termodinamica di questi sistemi si riscontra nel piano p, T una regione di esistenza ben precisa. Uscendo da tale regione il cristallo si trasforma in un altro tipo di cristallo (transizione polimorfica) o passa allo stato liquido (*fusione*) o a quello gassoso (*sublimazione*). Tutti questi cambiamenti di stato sono reversibili, richiedono un calore (latente) di trasformazione e sono caratterizzati da variazioni continue in alcune proprietà fisiche.

I corpi amorfi (vetri, cere, sostanze plastiche ecc.) non sono caratterizzati da regolarità nella distribuzione degli atomi che si estenda su notevoli distanze. Esiste tuttavia *un ordine a corto raggio* del tipo di quello che esiste nei liquidi; gli studi con raggi X mostrano però che il grado di ordine in questi corpi amorfi è maggiore di quello dei liquidi. Le determinazioni delle configurazioni assunte dagli atomi, del numero e del tipo di atomi che sono vicini a ciascuno di essi, vanno fatte con criteri statistici. Dal punto di vista termodinamico, i corpi amorfi non hanno una precisa regione di esistenza nel piano p, T (o p, V), non presentano cambiamenti di stato ben definiti cui corrispondano calori latenti e non sono accompagnati da variazioni continue delle proprietà fisiche. Il passaggio allo stato liquido, per es., avviene in un campo continuo di pressioni e temperature nel quale la sostanza (per es. vetro) si ammorbidisce gradualmente.

Per queste ragioni i corpi amorfi sono spesso considerati come liquidi surraffreddati. Questa assimilazione è a volte poco soddisfacente. Di solito, infatti, questi corpi sono sostanze che posseggono molecole molto

Nei solidi cristallini la struttura microscopica si ripete in tutto lo spazio occupato costituendo un reticolo ordinato

Nei solidi amorfi l'ordine di ripetizione della struttura è limitato a piccole regioni

grandi formate da numerosi gruppi di atomi: quando tali molecole sono portate molto vicine le une alle altre (per es. raffreddando il corpo) si stabiliscono legami fra gruppi appartenenti a molecole diverse. Si origina in tal modo un reticolo molto irregolare che spiega l'indurimento del sistema e l'aumento della sua viscosità all'abbassarsi della temperatura.

I cristalli sono quindi gli unici sistemi solidi, secondo la definizione data in teoria della elasticità, che hanno una struttura ben definita e la cui esistenza come sistemi termodinamici è definita entro precisi limiti delle variabili di stato. Per questa ragione si dice spesso che i cristalli (e gli aggregati di cristalli) sono gli unici solidi da un punto di vista termodinamico. Nel seguito ci si occuperà esclusivamente di questi solidi.

■ 16.3. EQUAZIONI DI STATO

Nello svolgere alcune considerazioni elementari sulla equazione di stato dei solidi si assumerà un punto di vista termodinamico, si esaminerà cioè il comportamento globale del sistema senza usare informazioni sulle caratteristiche delle particelle costituenti, sulla natura delle forze che le legano e sulla struttura che ne consegue. Va però detto che, in maniera analoga al caso dei gas, ci sono teorie basate sulla meccanica statistica e sulla meccanica quantistica che consentono di interpretare i risultati termodinamici e di fornire espressioni che legano i parametri dell'equazione di stato a proprietà atomiche e strutturali. Va inoltre osservato che, mentre nel caso dello stato gassoso il comportamento dei vari gas è molto simile, nello stato solido esiste un gran numero di tipi di cristalli in conseguenza dell'esistenza di diverse specie di forze fra gli atomi. Inoltre, anche limitandosi a soli contatti energetici di tipo meccanico, oltre che termico, una equazione di stato per un sistema dovrebbe legare le deformazioni in un punto alle sollecitazioni e alla temperatura: nel caso dei solidi, poiché essi possono resistere a sollecitazioni di taglio, bisognerebbe considerare sollecitazioni più complesse di quella costituita da una semplice pressione idrostatica e deformazioni più complesse di una semplice variazione di volume. Nonostante la grande importanza di questo particolare comportamento dei solidi, nelle considerazioni sull'equazione di stato ci si limiterà a trattare il caso in cui la sollecitazione è di semplice pressione idrostatica: in tal caso come variabili per descrivere il comportamento del sistema possono essere prese p , V , T ; due sole di esse sono indipendenti.

Le esperienze che vanno fatte per avere informazioni sul comportamento del sistema consistono, al solito, nel mantenere costante una variabile indipendente e nel determinare la relazione fra le altre due. Spesso si prendono come variabili indipendenti p e T , alcune volte invece si preferisce scegliere V e T .

Nella figura 16.1 sono riportate alcune isoterme che riuniscono i risultati ottenuti (Bridgman) per il sodio nel campo di pressioni fra 0 e 45.000 atm e nel campo di temperature fra una temperatura molto prossima allo zero assoluto e 373 K. A pressioni molto piccole, praticamente nulle, il solido ha un volume finito e tale volume cresce con la temperatura (espansione termica). Se si mantiene costante la temperatura e si aumenta la pressione, il volume decresce. Le isoterme sono state ottenute per pres-

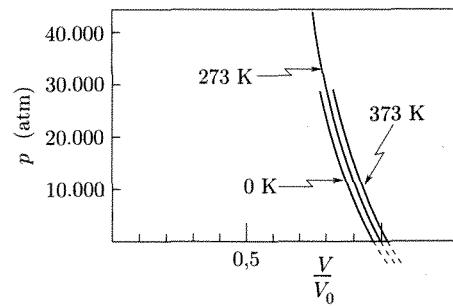


Fig. 16.1

*Espressione generale
della equazione di stato*

sioni positive, ma possono essere estrapolate per un piccolo tratto anche nella zona delle pressioni negative (linee tratteggiate).

Per rappresentare questi risultati mediante una equazione di stato, si può porre, scegliendo V come variabile dipendente:

$$(1) \quad V = V_0[1 + a_0(T) - a_1(T)p + a_2(T)p^2 + \dots]$$

dove V_0 è il volume del solido a pressione zero e temperatura molto prossima allo zero assoluto, $a_0, a_1 \dots$ sono parametri funzioni della temperatura; i segni sono stati scelti in modo che i parametri $a_0, a_1 \dots$ risultino positivi per i casi normali. Il significato dei parametri ora introdotti può essere facilmente riconosciuto.

Osserviamo che il coefficiente di espansione termica (cap. 13, par. 13.5), che qui indichiamo con α , può essere posto nella forma:

$$(2) \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p .$$

Se si calcola tale coefficiente per il solido, a pressione zero, o, quello che è lo stesso, a pressione atmosferica, dato che il volume cambia poco con la pressione, si ha

$$(3) \quad \alpha = \frac{1}{1 + a_0} \frac{da_0}{dT} \simeq \frac{da_0}{dT}$$

avendo trascurato a_0 rispetto a 1.

Questa relazione mostra il significato di $a_0(T)$. Il coefficiente di espansione α varia in genere con la temperatura e tende a zero all'approssimarsi di T allo zero assoluto. La funzione $a_0(T)$ ha valori piccoli rispetto all'unità e tende a zero per T tendente a zero, giacché V deve tendere a V_0 .

L'espressione del coefficiente di compressibilità (cap. 7, par. 7.6) si scrive:

$$(4) \quad \beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right) .$$

Se si calcola tale grandezza alla pressione zero, ricordando che il volume è $V_0(1 + a_0)$ si ha

$$(5) \quad \beta = \frac{a_1}{1 + a_0} \simeq a_1$$

avendo ancora trascurato a_0 rispetto a 1. Si vede quindi che $a_1(T)$ è praticamente pari al coefficiente di compressibilità a pressione atmosferica. Di solito il coefficiente di compressibilità cresce con la temperatura; si tratta però di variazioni piuttosto limitate (10% fra lo zero assoluto e le alte temperature). Analogamente si riconosce che $a_2(T)$ misura la variazione della compressibilità con la pressione.

Tranne che in casi particolari, per la descrizione del comportamento dei solidi sono sufficienti nella serie di potenze di p nella (1) i termini fino a p^2 : infatti in genere le variazioni di volume prodotte anche dalle più alte pressioni alle quali si sono fatte esperienze (45.000 atm) sono di solo poche unità per cento. Vi sono tuttavia dei casi in cui le variazioni di volume osservate sono notevolmente superiori e allora nella (1) vanno considerati termini di ordine più elevato.

*Il coefficiente
di espansione termica
isobarico*

*Il coefficiente
di compressibilità
isobarico*

Casi di questo genere si hanno nel cesio e negli altri metalli alcalini (litio, sodio, potassio, rubidio): nel cesio (il solido più compressibile) il volume si riduce a meno della metà passando da 1 a 45.000 atm, negli altri solidi citati la riduzione di volume è compresa fra il 20% e il 50% per la stessa variazione di pressione.

L'equazione di stato può anche essere espressa, prendendo come variabile dipendente la pressione, da una serie di potenze nel volume

$$(6) \quad p = p_0(T) + p_1(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right) + p_2(T) \left(\frac{V_0 - V}{V_0} \right)^2 + \dots$$

in cui i coefficienti sono funzioni della temperatura. Il significato di $p_0(T)$ è semplice: esso è la pressione che occorrerebbe applicare per ridurre il volume che il corpo ha alla temperatura T al valore che avrebbe alla temperatura dello zero assoluto e a pressione zero. Pur essendo tale pressione considerevole, i valori di p_0 sono sempre molto piccoli rispetto a quelli assunti da $p_1(T), p_2(T), \dots$. I coefficienti p_0, p_1, p_2, \dots della (6) possono essere espressi mediante quelli (a_0, a_1, a_2, \dots) della (1). Per far ciò si può calcolare dalla (1)

$$(7) \quad \frac{V_0 - V}{V_0} = -a_0(T) + a_1(T)p - a_2(T)p^2 + \dots$$

e sostituire nella (6)

$$(8) \quad p = p_0 + p_1(-a_0 + a_1p - a_2p^2 + \dots) + p_2(-a_0 + a_1p - a_2p^2 + \dots)^2 + \dots$$

Se si trascurano potenze superiori alla prima di a_0 e si uguaglano i coefficienti dei termini di ugual potenza in p nei due membri, si ottengono relazioni sufficienti a esprimere i coefficienti p_i in funzione di a_i .

16.4. CALORI SPECIFICI, TEORIA CLASSICA E TEORIA QUANTISTICA DI EINSTEIN

Si vuole ora considerare, piuttosto in dettaglio, il calore specifico dei solidi, sia per l'importanza dell'argomento sia perché la spiegazione teorica del comportamento dei solidi cristallini nei riguardi dell'energia che occorre fornire o sottrarre per alterare la loro temperatura costituisce un notevole successo delle idee fondamentali della fisica moderna.

Ci si limiterà per semplicità a considerare il caso, notevolmente importante, di *cristalli costituiti da atomi dello stesso elemento*. L'estensione al caso di cristalli che hanno nelle posizioni reticolari atomi di tipo diverso si fa senza grandi difficoltà; il caso invece di cristalli formati da molecole o da gruppi ionici complessi va fatto, pur sulla stessa linea che ora considereremo, con particolare cautela in modo da considerare l'energia che fluisce nei gradi di libertà interni delle molecole o dei gruppi ionici.

Già all'inizio del secolo scorso (1818) Dulong e Petit avevano mostrato sperimentalmente (legge di Dulong e Petit) che *per molte sostanze allo stato solido e a temperature abbastanza elevate, il calore specifico a volume costante per kmole di atomi (detto anche calore atomico) vale circa 6 kcal/kmol K*.

La teoria classica è in grado di giustificare questo risultato: in un cristallo di massa (in kg) pari al peso atomico dell'elemento che lo costituisce (cioè una quantità pari a una kmole di atomi) il numero di atomi presenti è pari al numero N_A^* di Avogadro e il numero di gradi di libertà del sistema è 3 N_A^* . Per effetto della agitazione termica ogni atomo oscilla intorno alla sua posizione di equilibrio: finché le elongazioni sono piccole e quindi le forze di richiamo proporzionali allo spostamento, le oscillazioni

*Il calore molare di un solido è pari a circa 6 cal/mol K
(legge di Dulong e Petit)*

sono armoniche. La frequenza ν_0 di questi oscillatori (cap. 2, par. 2.18) è proporzionale alla radice quadrata del rapporto tra la costante che entra nella espressione della forza elastica e la massa dell'atomo. Questa oscillazione può ritenersi composta da tre oscillazioni armoniche secondo tre direzioni mutuamente perpendicolari: a essa cioè competono tre gradi di libertà.

L'energia cinetica e l'energia potenziale media in ciascuna di queste oscillazioni componenti è, all'equilibrio, per il principio di equipartizione (cap. 15, par. 15.13), pari a $\frac{1}{2}kT$. Di conseguenza, la somma delle energie cinetiche e potenziali medie nella oscillazione tridimensionale di un atomo è $3(\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT) = 3kT$. L'energia di vibrazione totale per N_A^* atomi è $3N_A^*kT$, e quindi l'energia interna per kilogrammo-atomo può porsi nella forma

$$(9) \quad U = U_0 + 3RT$$

essendo U_0 l'energia potenziale degli atomi nelle posizioni di equilibrio. Quando la temperatura viene variata mantenendo costante il volume del cristallo, le distanze fra le posizioni di equilibrio nel reticolo degli atomi non sono alterate e quindi U_0 non muta.

Il calore specifico a volume costante per kmole di atomi è pertanto

$$(10) \quad C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R = 5,96 \text{ kcal/kmol K}$$

in accordo con la legge di Dulong e Petit.

Se invece la temperatura aumenta a pressione costante, le distanze interatomiche crescono leggermente e lo stesso avviene per U_0 . In virtù dell'espansione del solido, l'aumento di temperatura richiede anche la esecuzione da parte del solido di un piccolo lavoro esterno; di conseguenza l'energia che occorre fornire per riscaldare un solido a pressione costante è un po' maggiore di quella richiesta a volume costante. Per tale ragione il calore atomico a pressione costante risulta di circa 0,5 kcal/kmol K superiore di quello a volume costante.

La legge di Dulong e Petit spiega il comportamento del calore atomico delle sostanze solide a temperature relativamente elevate. Il calore atomico a temperature gradualmente decrescenti diminuisce e tende a zero con un andamento che non può essere spiegato dalla meccanica classica.

Una prima trattazione quantistica fu fatta da Einstein (1905), il quale osservò che le oscillazioni di un atomo in un cristallo devono essere considerate quantizzate come le vibrazioni degli atomi nell'interno di una molecola (cap. 15, par. 15.16): l'energia di un oscillatore armonico unidimensionale può assumere solo valori discreti che differiscono fra loro per quanti di valore $h\nu_0$.

Di conseguenza l'energia media di un tale oscillatore a temperatura T , a parte l'energia al punto zero ($\frac{1}{2}h\nu_0$), è data da [cap. 15, par. 15.16 (90)]

$$(11) \quad \frac{h\nu_0}{e^{h\nu_0/kT} - 1}.$$

L'energia del complesso degli N_A^* atomi di una kmole di cristallo alla temperatura T è (poiché a ogni atomo corrispondono 3 gradi di libertà)

$$(12) \quad U = U_0 + \frac{3N_A^*h\nu_0}{e^{h\nu_0/kT} - 1}.$$

Il termine U_0 contiene l'energia degli oscillatori al punto zero. Se si introduce una temperatura caratteristica (di Einstein) del solido

$$(13) \quad \theta_E = \frac{h\nu_0}{k}$$

la (12) si scrive

$$(14) \quad U = U_0 + 3RT \frac{\theta_E/T}{e^{\theta_E/T} - 1}$$

*Energia interna
di un solido quantistico
secondo Einstein*

e il calore atomico a volume costante risulta

$$(15) \quad C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \frac{\left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2}{\left(e^{\frac{\theta_E}{T}} - 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}} \right)}.$$

Nella figura 16.2 sono indicati alcuni risultati sperimentali (cerchietti) ottenuti per l'argento assieme alle curve indicate dalle teorie di Einstein e da un'altra teoria (Debye) che esamineremo in seguito. Come si vede, il calore atomico alle elevate temperature tende asintoticamente al valore previsto dalla legge di Dulong-Petit di $3R$, mentre per $T \rightarrow 0$ esso tende a zero.

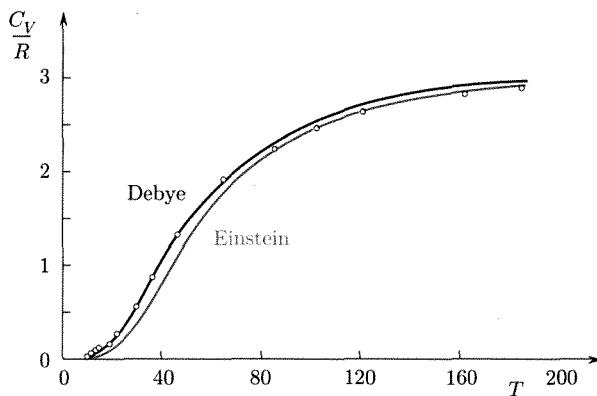


Fig. 16.2

La curva della teoria di Einstein è stata calcolata scegliendo il parametro θ_E in modo da avere il migliore accordo possibile alle temperature più elevate. Si vede allora che alle temperature basse c'è solo un accordo qualitativo fra teoria ed esperimento: la diminuzione di C_v prevista dalla teoria al decrescere di T è più rapida di quella reale.

Quest'ultima circostanza è stata spiegata da Debye osservando che gli atomi di un cristallo non possono essere considerati come oscillatori isolati, giacché il moto di uno di essi influenza quello degli altri. In altri termini la posizione di equilibrio di ciascun atomo dipende dalle posizioni degli atomi vicini a causa delle forze che gli atomi scambiano alle piccole distanze alle quali si trovano nei cristalli. Quando un atomo si muove dalla sua posizione, esso causa il moto degli atomi vicini e, se anche questi sono in oscillazione, altera le forze di richiamo cui essi sono soggetti istante per istante. Tutto ciò porta di conseguenza che non è possibile considerare il moto di agitazione degli atomi come se fossero delle unità isolate

in moto oscillatorio, ma è necessario vedere il loro moto coordinato con quello degli altri atomi, cioè considerare le diverse maniere indipendenti con cui gli atomi di un cristallo possono oscillare assieme: si trova che in un cristallo formato da N_A^* atomi si hanno $3N_A^*$ modi di vibrazione propri o indipendenti, a ciascuno dei quali va assegnata l'energia (11).

16.5. VIBRAZIONI INDIPENDENTI IN UN MEZZO CONTINUO

Per la comprensione e la formulazione della teoria di Debye si richiedono alcune nozioni sulle vibrazioni proprie di un cristallo. Dato il grande interesse di alcuni concetti collegati con questa fenomenologia, occorre premettere alle trattazioni specifiche alcuni cenni sulle vibrazioni proprie di un mezzo continuo e di un cristallo.

Si supponga di avere un mezzo continuo (gas, liquido, solido) contenuto fra due piani rigidi A e B come in figura 16.3. Si è visto⁽¹⁾ che se non ci sono perdite il mezzo può sostenere indefinitamente oscillazioni longitudinali che si propagano nella direzione normale a quella dei piani solo se fra la distanza l tra i piani e la lunghezza d'onda λ valga la relazione

$$(16) \quad n \frac{\lambda}{2} = l$$

essendo n un numero intero: 1, 2, 3, ... Si stabiliscono in corrispondenza onde stazionarie e n è anche il numero di nodi di vibrazione contati partendo da uno dei piani terminali (in cui v'è ancora un nodo, che non va contato): si osservi il grafico nella parte superiore della figura che fornisce lo stato della perturbazione in due diversi istanti. La frequenza di oscillazione più bassa ($n = 1$) si ha quando tutti i punti dello spazio oscillano in fase (con ampiezze diverse) e v'è un solo nodo (a parte quello sul piano terminale dal quale si inizia a contare) sull'altro piano terminale.

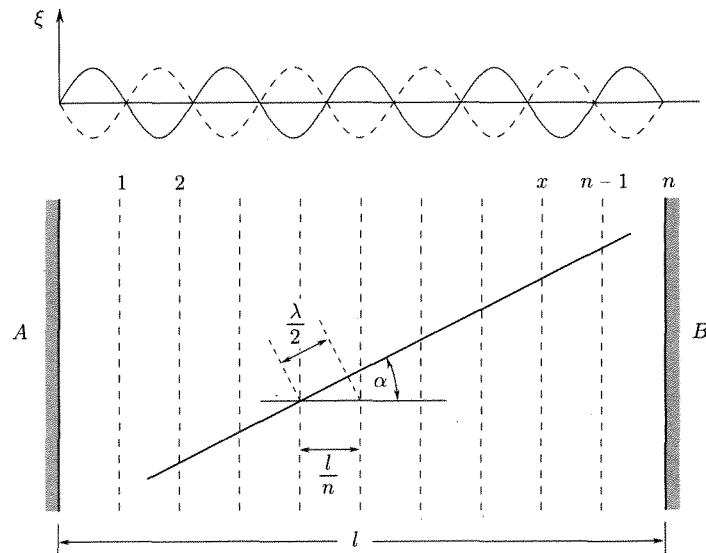


Fig. 16.3

⁽¹⁾ Le considerazioni qui fatte riprendono quelle svolte sulle sorgenti sonore al cap. 10, paragrafi 10.3-10.5. Esse vengono in parte ripetute per ragioni di chiarezza.

Le oscillazioni alle altre frequenze consentite ($n = 2, 3, \dots$) sono le armoniche. La fondamentale e le armoniche costituiscono modi di vibrazione del mezzo *indipendenti* fra loro, nel senso che dell'energia può essere posta in ciascuno di essi in maniera indipendente dagli altri.

Sappiamo che le onde stazionarie ora ricordate si stabiliscono in base alla interferenza delle onde elastiche incidenti e riflesse dai piani terminali. Finché la geometria dello spazio è quella semplice ora descritta, cioè quella di un mezzo che si trova fra due piastre parallele, le onde stazionarie si possono stabilire solo nella direzione di propagazione normale ai piani. Se peraltro la geometria è diversa (come per es. nel caso bidimensionale delle membrane) in modo che per riflessioni su altre superfici si possa avere interferenza di onde della stessa frequenza e della stessa ampiezza propagantis in versi opposti in direzioni che formano un certo angolo α con la normale ai due piani A e B , la relazione che deve essere soddisfatta si differenzia dalla (16).

Se infatti n_i è il numero dei piani nodali paralleli ai piani A e B , deve essere (fig. 16.3)

$$(17) \quad \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{l}{n_i}$$

cioè

$$(18) \quad n_i \frac{\lambda}{2} = l \cos \alpha$$

essendo n_i un numero intero: 1, 2, ...

Come si vede la (18) è una relazione più generale della (16) e la comprende come caso particolare ($\alpha = 0$).

Una situazione più generale è quella di un mezzo continuo racchiuso in un cubo di lato l . Se si suppone che vi siano n_1 piani nodali paralleli a una prima coppia di facce e che vi siano n_2 e n_3 piani nodali paralleli alle altre due coppie, la condizione perché si abbia un'onda stazionaria in una direzione che formi gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con le normali alle facce stesse è

$$(19) \quad \begin{aligned} n_1 \frac{\lambda}{2} &= l \cos \alpha_1 \\ n_2 \frac{\lambda}{2} &= l \cos \alpha_2 \\ n_3 \frac{\lambda}{2} &= l \cos \alpha_3 . \end{aligned}$$

Conteggio dei modi propri longitudinali in un solido cubico

Queste sono quindi le condizioni, già ritrovate nel cap. 10 formula (15), che caratterizzano un moto di vibrazione del mezzo continuo.

Si noti che $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ sono i tre coseni direttori della direzione di propagazione dell'onda riferita al sistema delle tre normali alle facce e pertanto $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$. Le (19), analoghe alle (16) e (17) nel cap. 10, par. 10.5, si possono quindi scrivere

$$(20) \quad \frac{\lambda}{2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = l .$$

Ricordando che $\lambda = c/\nu$, essendo c la velocità di propagazione e ν la frequenza dell'onda, si può anche porre

$$(21) \quad \nu = \frac{c}{2l} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} .$$

Questa relazione fornisce le frequenze dei modi di vibrazione indipendenti possibili per il mezzo contenuto nel cubo, al variare dei tre numeri interi positivi n_1, n_2, n_3 .

Cerchiamo ora di valutare il numero delle vibrazioni indipendenti (*modi*) la cui frequenza è compresa fra ν e $\nu + \Delta\nu$: si tratta di determinare il numero di combinazioni possibili di tre numeri interi n_1, n_2, n_3 tali che

$$(22) \quad \nu < \frac{c}{2l} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} < \nu + \Delta\nu .$$

Per fare questo calcolo con semplicità consideriamo tre assi coordinati sui quali riportiamo rispettivamente $n_1(c/2l)$, $n_2(c/2l)$, $n_3(c/2l)$ (fig. 16.4). Si ha un reticolo cubico dando a n_1, n_2, n_3 i valori con-

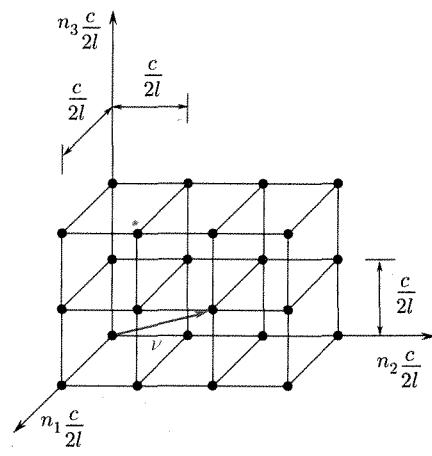


Fig. 16.4

sentiti. Ciascun modo possibile, caratterizzato da tre valori n_1, n_2, n_3 sarà rappresentato da un punto di questo reticolo: la sua frequenza (21) è data dalla distanza dall'origine del punto rappresentativo.

Per avere allora il numero di modi con frequenza compresa fra ν e $\nu + \Delta\nu$ basta considerare quanti punti del reticolo cadono fra le due sfere di raggi ν e $\nu + \Delta\nu$. Purché il $\Delta\nu$ non sia troppo piccolo, tale numero è il rapporto fra $\frac{1}{8}$ del volume compreso fra le due sfere e il volume di una cella del reticolo $(c/2l)^3$. Il fattore $\frac{1}{8}$ è dovuto al fatto che il reticolo si estende solo nello spazio compreso fra i semiassi positivi. Il numero cercato di vibrazioni indipendenti per un cubo di volume l^3 risulta

$$(23) \quad dM = \frac{1}{8} 4\pi\nu^2 \Delta\nu \left(\frac{2l}{c} \right)^3.$$

La densità dei modi di vibrazione indipendenti di un solido

Il numero di vibrazioni indipendenti per unità di volume, le cui frequenze giacciono fra ν e $\nu + \Delta\nu$ si può porre come

$$(24) \quad dM = \frac{dM}{l^3} = \frac{4\pi}{c^3} \nu^2 d\nu.$$

Tale relazione è stata ottenuta considerando inizialmente un corpo a forma di cubo, ma si può dimostrare che vale per corpi continui di qualsiasi forma.

La (24) è stata dedotta considerando solamente la possibilità di onde elastiche longitudinali. Essa va quindi senz'altro bene per il caso che il mezzo continuo sia un fluido: c è la velocità di propagazione di queste onde. Nel caso che si tratti di un solido, si devono considerare, oltre che le onde elastiche longitudinali, anche le onde trasversali: le velocità di propagazione sono diverse (c_l e c_t). Inoltre, per le onde trasversali, v'è da considerare la polarizzazione (cap. 9, par. 9.2), cioè il fatto che il piano determinato dalla direzione di propagazione e dallo spostamento delle particelle può essere diverso. In conseguenza di ciò in una direzione qualsiasi si possono propagare un'onda longitudinale e due onde trasversali polarizzate in piani normali fra loro. Ripetendo le considerazioni precedenti si trova che il numero di vibrazioni indipendenti, per unità di volume, aventi frequenze fra ν e $\nu + \Delta\nu$ è dato da

$$(25) \quad dM = 4\pi \left(\frac{2}{c_l^3} + \frac{1}{c_t^3} \right) \nu^2 d\nu.$$

Le formule (24) (25) sono di notevole interesse in molti problemi. Presto ne vedremo alcuni.

Nel caso inoltre dello studio di problemi di radiazione (per es. emissione del corpo nero) si ottengono formule analoghe considerando la propagazione di onde elettromagnetiche: in tal caso le onde sono trasversali e possono avere due polarizzazioni. Il numero di modi indipendenti per unità di volume, di frequenza compresa fra ν e $\nu + \Delta\nu$ è quindi

$$(26) \quad \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

con c la velocità della luce.

In queste considerazioni si è fatta l'ipotesi implicita che la velocità di propagazione non dipenda dalla frequenza dell'onda (*assenza di dispersione*).

16.6. NUMERO TOTALE DI VIBRAZIONI INDIPENDENTI IN UN CRISTALLO

Ci si propone ora di determinare il numero totale di modi di vibrazione indipendenti in un solido cristallino.

Si consideri ancora il caso di un solido di forma cubica (di lato l) e si supponga che esso abbia una struttura a celle cubiche con distanza reticolare d . Il numero di atomi è $N = (l/d)^3$.

Determiniamo dapprima il numero totale di vibrazioni longitudinali: la (23), ponendo $V = l^3$, fornisce il numero di modi di frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$ nel solido considerato come mezzo continuo:

$$(27) \quad dM_l = \frac{4\pi\nu^2}{c_l^3} V d\nu.$$

Per avere il numero totale di modi occorre integrare questa espressione, dopo avere precisato i limiti di integrazione. Il limite inferiore della frequenza dei modi è zero; il limite superiore va fissato tenendo conto che in realtà il solido non è un mezzo continuo ma è costituito da atomi disposti in un reticolo regolare con distanza reticolare d . Pertanto, in tale struttura si possono stabilire onde stazionarie purché la distanza $\lambda/2$ fra i nodi sia maggiore o al massimo uguale alla distanza reticolare d ⁽²⁾.

Ciò significa che in una rappresentazione quale quella di figura 16.4 i punti che rappresentano i modi indipendenti si trovano in una regione limitata da piani paralleli ai piani formati dagli assi e passanti per i punti degli assi aventi coordinate $c/2l$ (giacché per essi $l/n = d$).

È utile usare una rappresentazione dei modi del tutto equivalente a quella di figura 16.4, nella quale peraltro sui tre assi ortogonali si riportino, invece di $n(c/2l)$, le quantità n/l . In questa rappresentazione ogni modo è ancora rappresentato da un punto di un reticolo cubico (fig. 16.5) e la frequenza corrispondente è data dalla distanza r del punto dalla origine moltiplicata per $c_l/2$, cioè:

$$(28) \quad \nu = r \frac{c_l}{2}.$$

Il volume della cella elementare è $1/l^3$, cioè dipende dalle dimensioni del particolare cristallo considerato. I punti rappresentativi dei modi possibili sono racchiusi in un cubo di lato $1/d$, le cui dimensioni quindi dipendono solamente dalla distanza interatomica che separa gli atomi nel cristallo. Il numero totale di modi longitudinali indipendenti è pari al rapporto tra il volume del cubo di lato $1/d$ e il volume della cella elementare nella rappresentazione di figura 16.5: $N = l^3/d^3$.

Lo spazio della rappresentazione di figura 16.5 prende il nome di spazio reciproco giacché le distanze, le superfici e i volumi in esso sono i reciproci delle quantità corrispondenti nello spazio reale. La regione che racchiude i punti rappresentativi dei modi consentiti prende il nome di prima zona di Brillouin.

Se si vuole determinare il numero di modi per unità di intervallo di frequenza, cioè

$$\frac{dM_l}{d\nu}$$

si deve calcolare il numero di punti rappresentativi dei modi indipendenti nella prima zona di Brillouin compresi fra le sfere di raggi $(2/c_l)\nu$ e $(2/c_l)(\nu + d\nu)$ e dividere tale numero per $d\nu$.

Finché le due sfere nell'ottante occupato dalla zona di Brillouin sono interne alla zona stessa il risultato è facile a ottenersi e vale

$$(29) \quad \frac{dM_l}{d\nu} = \left(\frac{1}{8} 4\pi r^2 dr \right) \left(\frac{1}{l^3} \right)^{-1} \frac{1}{d\nu} = \frac{4\pi}{c_l^3} l^3 \nu^2$$

cioè il numero di modi per unità di intervallo di frequenza varia con il quadrato della frequenza (legge quadratica). Quando però la sfera supera i limiti della zona

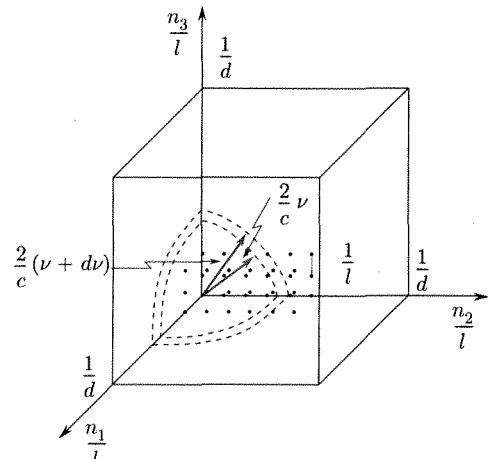


Fig. 16.5

⁽²⁾ Una trattazione più avanzata del problema farebbe vedere che in una struttura di questo genere vibrazioni che corrispondano a valori di n_1, n_2, n_3 maggiori di l/d producono spostamenti effettivi degli atomi uguali a quelli prodotti da una delle vibrazioni consentite comprese fra quelle che hanno n_1, n_2, n_3 minori o uguali a l/d . Di conseguenza tutti i modi indipendenti di muoversi degli atomi della struttura si hanno limitandosi a considerare le vibrazioni definite da n_1, n_2, n_3 , ciascuno minore o uguale a l/d . Osserveremo inoltre che la trattazione completa del problema mostra che la velocità di propagazione che compare può essere ritenuta costante solo per le onde più lunghe. All'avvicinarsi di λ al valore $2d$, la velocità decresce (dispersione), ma per le considerazioni che saranno qui svolte si può prescindere da tale variazione.

di Brillouin, cioè nel caso che si sta esaminando, la frequenza del modo è maggiore di $c_l/2d$, la (29) non vale più e il numero di punti del reticolo della zona di Brillouin, compresi fra le due sfere di raggi $(2/c_l)/\nu$ e $(2/c_l)(\nu + d\nu)$ decresce al crescere di ν fino ad annullarsi. Nella figura 16.6 è indicato qualitativamente l'andamento di $(dM_l/d\nu)$ in funzione del rapporto fra ν e la frequenza $c_l/2d$.

Finora ci siamo occupati di modi longitudinali. Se consideriamo i modi trasversali, si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per quelli longitudinali, tenendo presente che a una stessa direzione di propagazione sono associati due modi trasversali. Nello spazio reciproco gli stessi punti che rappresentano i modi longitudinali consentiti rappresentano quelli trasversali: le frequenze corrispondenti sono tuttavia diverse giacché per avere la frequenza di un modo bisogna moltiplicare la distanza del punto rappresentativo dall'origine nello spazio reciproco per $c_l/2$ e $c_t/2$ rispettivamente nel caso di modo longitudinale e trasversale. Il numero totale di modi consentiti sale a $3N$.

Le considerazioni sul calcolo del numero di modi per unità di intervallo di frequenza possono anche facilmente estendersi a comprendere i modi longitudinali e trasversali. Naturalmente la forma della funzione $dM/d\nu$ è un po' più complicata quando le sfere di raggi $(2/c_l)\nu$ e $(2/c_t)\nu$ superano il valore $1/d$.

Tutte queste considerazioni fatte per il caso semplice di cristallo di forma cubica a celle cubiche si estendono a cristalli di struttura diversa per i quali le prime zone di Brillouin assumono forme di altri poliedri regolari.

La trattazione può inoltre essere resa più aderente alla realtà se si tiene conto del fatto che le velocità c_l e c_t sono in genere nei cristalli diverse nelle varie direzioni (*anisotropia*) e variano con la frequenza ν (*dispersione*).

Anche con tutti questi elementi, vale la conclusione generale che la distribuzione dei modi indipendenti, cioè il loro numero per unità di intervallo di frequenze, in funzione di ν segue inizialmente una legge quadratica fino a una certa frequenza, diversa per i vari cristalli, dopo la quale $dM/d\nu$ decresce fino a ridursi a zero con modalità che dipendono dal cristallo particolare. Il numero totale di modi indipendenti, cioè l'area racchiusa fra la curva $dM/d\nu$ in funzione di ν e l'asse delle ascisse, è pari a tre volte il numero totale di atomi presenti nel cristallo (fig. 16.6).

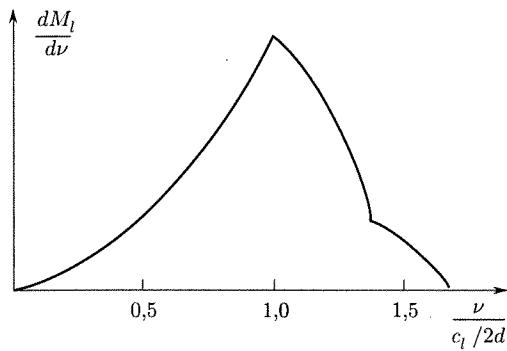


Fig. 16.6

16.7. TEORIA QUANTISTICA DI DEBYE

La distribuzione del numero di vibrazioni indipendenti in un cristallo reale a struttura discontinua in funzione della frequenza cresce a partire da zero inizialmente con una legge quadratica in ν e segue tale andamento fino a una certa frequenza, che dipende dal particolare tipo di cristallo, per poi decrescere fino a ridursi a zero con modalità caratteristiche del reticolo del cristallo stesso. In figura 16.7 la linea continua indica una distribuzione di questo tipo: dM è il numero di moli indipendenti aventi frequenze comprese fra ν e $\nu + d\nu$ per unità di volume del cristallo.

La teoria di Debye sui calori specifici è basata sull'ipotesi di potere sostituire, con buona approssimazione, alla distribuzione effettiva dei modi di vibrazione una diversa distribuzione che segue la legge quadratica (25) da zero fino a una frequenza massima ν_{\max} ed è pari a zero per $\nu > \nu_{\max}$. Tale distribuzione è indicata in figura 16.7 dalla linea parabolica extrapolata fino a ν_{\max} . La frequenza massima viene determinata dalla condizione che il numero totale dei modi deve essere $3N$ se N è il numero di atomi nel cristallo. Se V è il volume del cristallo, si ha dalla (25)

$$3N = 4\pi V \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \int_0^{\nu_{\max}} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi V}{3} \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \nu_{\max}^3$$

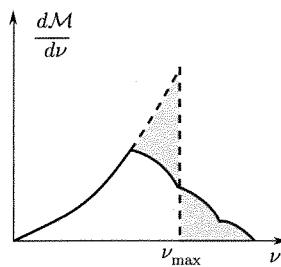


Fig. 16.7

e:

$$(30) \quad \nu_{\max} = \left(\frac{9}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{1}{\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}} \right)^{1/3}$$

L'ipotesi di Debye consente di calcolare facilmente l'energia totale di vibrazione: ciascun modo fornisce, infatti, un contributo medio dato dalla (11). Si ha quindi per l'energia totale di vibrazione

$$(31) \quad U - U_0 = \int_0^{\nu_{\max}} 4\pi V \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \nu^2 d\nu$$

e, se si fa uso della (30):

$$(32) \quad U - U_0 = \frac{9N}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

Nel caso di una kmole N va sostituito con il numero di Avogadro $N_A^* = 6,022 \cdot 10^{23}$ e il calore atomico a volume costante si ottiene derivando la (32) rispetto a T :

$$(33) \quad C_v = \frac{9N_A^*}{\nu_{\max}^3} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{\frac{h^2\nu^4}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} d\nu.$$

Le espressioni per l'energia (32) e per C_v (33) possono essere scritte in maniera più conveniente introducendo una particolare temperatura, θ_D , detta di Debye,

$$(34) \quad \theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}$$

Il conteggio del numero di modi di vibrazione indipendenti in un solido secondo Debye

e ponendo

$$(35) \quad \frac{h\nu}{kT} = x :$$

$$(36) \quad U - U_0 = 9RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{(\theta_D/T)} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

e

$$(37) \quad C_v = 9R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{(\theta_D/T)} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = f \left(\frac{\theta_D}{T} \right).$$

L'integrale nella espressione (37) di C_v non può essere calcolato analiticamente. È evidente comunque che l'unico parametro che caratterizza il particolare solido è θ_D e che esso entra nel risultato attraverso il rapporto T/θ_D . Ciò porta di conseguenza che la funzione che lega C_v a T/θ_D è la stessa per tutte le sostanze. Calcolando quindi numericamente l'integrale nella (37) si ottiene una curva che esprime C_v in funzione di T/θ_D valida per tutti i solidi. Tale curva è data in figura 16.8.

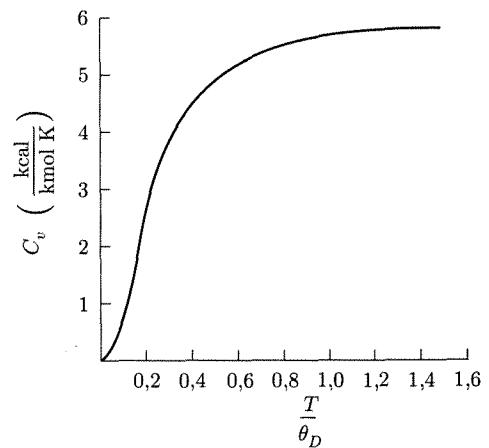


Fig. 16.8

Come si vede, l'andamento generale della curva è molto simile a quello fornito dalla teoria di Einstein (15) e se ne differenzia peraltro alle basse temperature. La figura 16.2 mostrava per il caso dell'argento la curva fornita dalla teoria di Debye accanto a quella della teoria di Einstein. Si osservi che la teoria di Debye consente di calcolare, tramite le (34) e (30), la temperatura caratteristica θ_D per mezzo delle velocità di propagazione delle onde elastiche (longitudinali e trasversali) (cap. 9, par. 9.8 e 9.12). Nella tabella 16.1 vengono dati alcuni valori di θ_D ottenuti cercando di adattare la curva (37) nella migliore maniera ai dati sperimentali e ai valori calcolati dai risultati di misure elastiche che determinano c_t e c_l .

Tabella 16.1

Sostanza	Temperatura di Debye (K)	
	da C_v	dalle costanti elastiche
A	85	
Ag	215	212
Al	398	399
Au	180	
C (diamante)	1860	
Cu	315	329
Fe	420	467
Cd	160	168
Ne	63	
Ni	370	
Pb	88	72
Pt	225	226
Zn	235	
NaCl	281	305
KCl	230	227
CaF ₂	474	510
FeS ₂	645	696

Osservando più da vicino l'andamento della curva di Debye e i risultati sperimentali di figura 16.2, si nota che l'accordo è ottimo alle basse temperature e a temperature abbastanza più alte di quella di Debye: si notano degli scostamenti per temperature intermedie (da circa $\theta_D/2$ a θ_D). Ciò può spiegarsi facilmente. Si noti infatti, innanzitutto, che l'ipotesi di Debye, cioè quella di sostituire alla distribuzione reale dei modi di vibrazione una distribuzione quadratica in ν fino a una ν_{\max} e un valore zero per $\nu > \nu_{\max}$, fornisce la distribuzione esatta dei modi di frequenze più basse e questi sono essenzialmente quelli coinvolti nei processi a temperature basse ove, essendo l'energia termica kT piccola, solamente i modi di frequenza bassa possono essere eccitati: gli altri modi hanno quanti di energia $h\nu$ troppo elevati per contribuire apprezzabilmente ai processi. L'andamento di C_v a basse temperature dato dalla teoria di Debye dovrebbe essere quindi quello esatto e l'ottimo accordo con l'esperienza lo conferma. A temperature elevate, quando l'energia termica (dell'ordine di kT) è largamente superiore ai quanti di energia di tutti i modi che in realtà si hanno nel solido, e quindi questi sono tutti eccitati, quello che interessa per l'energia, e per C_v , è il numero totale dei modi e la teoria di Debye tiene conto del loro numero totale esatto. Infatti, per temperature elevate nella (36) è $(e^x - 1) \approx x$; segue che l'integrale nella stessa relazione diviene $\frac{1}{3}(\theta_D/T)$, quindi $U - U_0 = 3RT$ e di conseguenza $C_v = 3R$.

Nel campo di temperature intermedie, nelle vicinanze di θ_D , l'ipotesi di Debye è un'approssimazione molto grossolana della reale distribuzione

dei modi e ciò spiega le deviazioni fra teoria ed esperimenti. Per ottenere migliore aderenza della teoria all'esperienza occorre considerare accuratamente l'andamento del numero di modi in funzione della frequenza nei vari cristalli. Ciò è stato fatto con successo da Blackman (1935).

Si considerino ora i risultati della teoria di Debye per il calore atomico alle temperature molto basse. Per $T \rightarrow 0$ il limite superiore nell'integrale contenuto nella (36) tende a infinito e si può mostrare che il valore dell'integrale definito tende al valore $\pi^4/15$. Si ottiene quindi per le temperature molto basse

$$(38) \quad U - U_0 = 3RT \frac{\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

e quindi

$$(39) \quad C_v = \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3.$$

È questa la legge di Debye per i calori atomici a bassissime temperature: essi sono proporzionali alla terza potenza della temperatura assoluta. Questa legge si trova sperimentalmente ben verificata e sulla base di quanto si è detto c'è da ritenere che essa valga non solo per le sostanze che seguono la teoria di Debye abbastanza bene anche a temperature elevate, ma per tutte le sostanze solide purché ci si limiti a considerare un campo di temperature sufficientemente piccolo nelle vicinanze dello zero assoluto.

*Il calore atomico
di Debye*

Tabella 16.2

Temperatura K	C_v kcal/(kmol K)	$\frac{\sqrt[3]{C_v}}{T} \times 10^2$
19,1	0,066	2,12
23,6	0,110	2,03
27,2	0,162	2,01
32,4	0,25	1,95
33,5	0,301	2,00
35,1	0,33	1,97

Come esempio della conferma sperimentale della (39), si riportano in tabella 16.2 i risultati sperimentali per l'alluminio fra 19 e 35 K. Nella terza colonna è calcolato il rapporto $\sqrt[3]{C_v}/T$ che dovrebbe restare costante al variare della temperatura, secondo la (39).

■ 16.8. CONTRIBUTO DEGLI ELETTRONI LIBERI AL CALORE SPECIFICO DEI METALLI

I metalli sono caratterizzati dal fatto che almeno un elettrone per atomo (elettroni di valenza) è talmente poco legato all'atomo da cui originariamente deriva da essere praticamente libero di muoversi nel reticolo formato dagli ioni positivi, cioè all'interno del campione di metallo. Nell'ipotesi che vi sia un elettrone libero per atomo, il numero totale di elettroni liberi è pari al numero N di atomi presenti. La situazione può essere descritta pensando che vi sia un gas di elettroni liberi nell'interno dello spazio occupato dal metallo.

Naturalmente per questo gas di elettroni vi sarà all'equilibrio una certa distribuzione delle velocità in corrispondenza a ogni temperatura. Si potrebbe pensare che la distribuzione di velocità sia quella data dalla formula di Maxwell-Boltzmann, cioè che, se n è il numero totale di elettroni liberi per unità di volume, il numero di elettroni con velocità di modulo compreso tra v e $v + dv$ sia

$$(40) \quad n(v)dv = ae^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv$$

con

$$(41) \quad a = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}.$$

In tal caso l'energia cinetica per N_A^* elettroni, che corrisponde agli elettroni stessi all'equilibrio, sarebbe $\frac{3}{2}RT$. L'energia totale di una kmole di atomi, comprensiva di reticolo ionico ed elettroni (tenendo conto che si è supposto un elettrone libero per atomo), sarebbe $3RT + \frac{3}{2}RT$ e quindi il calore atomico dovrebbe risultare pari a $4,5 R$. L'esperienza (legge di Dulong e Petit) mostra invece che il calore atomico può al massimo (cioè ad alte temperature) avere valori prossimi a $3R$. Ciò mostra che la statistica di Maxwell-Boltzmann non può essere applicata agli elettroni liberi nei metalli.

In realtà, al pari dell'energia di rotazione e di vibrazione delle molecole e dei sistemi di atomi, anche l'energia cinetica di traslazione deve essere considerata quantizzata; anche essa cioè può assumere solo alcuni valori cui corrispondono determinati stati del sistema. In genere, peraltro, per i sistemi di atomi e di molecole questi stati si differenziano in energia per molto poco e sono così numerosi rispetto al numero di particelle presenti (per es. molecole di un gas) che la quantizzazione può essere trascurata essendo i risultati ottenibili con la teoria quantistica praticamente coincidenti con quelli della teoria classica. Se per es. si considera elio (gassoso) a 273 K a una atmosfera, la meccanica quantistica fa vedere che ci sono 250.000 stati quantici diversi disponibili per molecola. La situazione è completamente diversa per il caso del gas di elettroni liberi: in questo caso infatti la massa delle particelle è molto piccola (circa 1.800 volte più piccola di quella dell'atomo di idrogeno) e la densità (numero di particelle per unità di volume) è notevolmente elevata. Nel caso per es. dell'argento, se la distribuzione degli elettroni fra gli stati quantici consentiti avvenisse secondo la legge di Maxwell-Boltzmann, vi dovrebbero essere circa 5.400 elettroni per stato. Siccome gli elettroni rispettano il principio di esclusione di Pauli, secondo il quale in corrispondenza a uno stato quantico non possono trovarsi più di due elettroni aventi spin opposti, è evidente che la statistica di Maxwell-Boltzmann non è più una approssimazione valida.

La statistica che vale in questo caso è quella di Fermi-Dirac. La $n(\mathbf{v})$ nella legge di distribuzione delle velocità di Maxwell va sostituita con

$$(42) \quad n(\mathbf{v}) = \frac{2 \left(\frac{m}{h} \right)^3}{\frac{1}{A} e^{\frac{mv^2}{2kT}} + 1}$$

essendo

$$(43) \quad A \simeq \frac{n}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}.$$

Il valore della costante di normalizzazione A è stato determinato in modo che l'integrale di $n(\mathbf{v})$, esteso a tutto il campo delle velocità, valga n . Quando il valore di A è piccolo (cioè a temperature molto elevate, densità n piccola e massa m grande) si può trascurare 1 nel denominatore della (42) rispetto all'altro termine e la distribuzione approssima quella classica (40).

Come si è detto, in genere, per la maggior parte dei gas, A è tanto piccolo che si possono trascurare le deviazioni dalla teoria quantistica di quella classica. Nel caso degli elettroni liberi in un metallo peraltro, a causa della piccola massa e dell'elevata densità, A diviene circa $5 \cdot 10^5$ volte maggiore del valore che ha per il gas elio e gli effetti quantistici divengono importanti.

Nella figura 16.9 è riportata la distribuzione $n(\mathbf{v})$ in funzione di v per gli elettroni liberi dell'argento in corrispondenza a tre temperature. È interessante paragonare il tipo di distribuzione dato dalla (42) con quella classica (fig. 15.8, cap. 15). Come si vede, la distribuzione di Fermi-Dirac prevede, allo zero assoluto, che lo

Agli elettroni liberi nei metalli non si applica la legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann: essi seguono la statistica di Fermi-Dirac

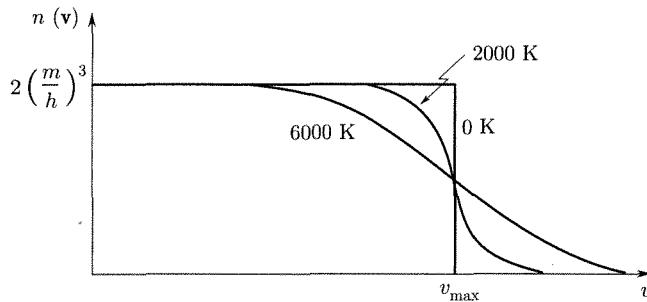


Fig. 16.9

spazio delle velocità sia riempito con punti distribuiti con densità costante fino a un certo valore della velocità v_{\max} . Questa densità è $2(m/h)^3$. Al crescere della temperatura il passaggio nello spazio delle velocità dalla zona piena a quella vuota avviene più gradualmente: si osservi che l'aumento della temperatura influenza solamente una regione piuttosto limitata vicino a v_{\max} e che la curva che sostituisce il lato del rettangolo per v_{\max} allo zero assoluto ha sempre come ordinata in corrispondenza a v_{\max} , $([n(v)]_{\max})/2$. L'energia totale di un sistema di N elettroni si può porre nella forma

$$(44) \quad U_{\text{el}} = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

ove ε_F , energia di Fermi, è l'energia che corrisponde a v_{\max} . Ne segue per il contributo alla capacità termica di una kmole, dovuto agli elettroni

$$(45) \quad (C_v)_{\text{el}} = \frac{\pi^2 k T}{2 \varepsilon_F} R .$$

Tale contributo è molto piccolo: per es., per l'argento alla temperatura di 273 K, risulta 0,04 kcal/kmol K. Come si vede, esso risulta molto inferiore al valore che sarebbe stato dato dalla teoria classica (3 kcal/kmol K). Si osservi che se si va a temperature molto basse (< 10 K), il contributo degli elettroni liberi al calore specifico totale può divenire rilevante. Mentre infatti il calore specifico dovuto alle oscillazioni reticolari decresce con il cubo della temperatura (39), quello dovuto agli elettroni liberi decresce proporzionalmente a T . La figura 16.10 riporta alcuni risultati ottenuti da Keeson e Kok per l'alluminio.

Il contributo al calore atomico dell'energia elettronica

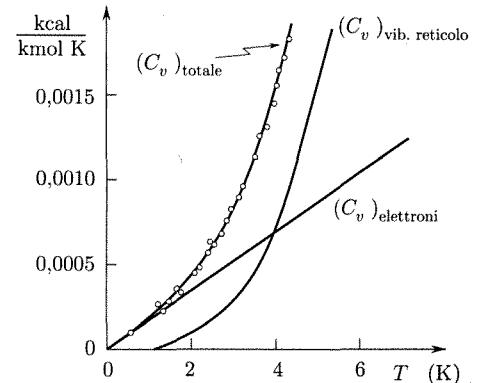


Fig. 16.10

16.9. FUSIONE E SOLIDIFICAZIONE

Quando a una sostanza cristallina viene fornito calore in modo continuativo, la sua temperatura cresce fino a raggiungere una temperatura alla quale compare la fase liquida. Successive cessioni di quantità di calore al sistema, a pressione costante, non alterano la temperatura ma fanno passare allo stato liquido altre porzioni del cristallo. Solo dopo che tutto il solido si sarà liquefatto, la temperatura del sistema aumenta. L'andamento di questo processo, che è chiamato fusione, è rappresentato mediante un grafico come quello in figura 16.11a: sulle ascisse sono riportate le quantità di calore date progressivamente al sistema, o i tempi di durata dell'esperienza se le quantità di calore sono fornite uniformemente e continuamente al sistema (Q proporzionale a t); sulle ordinate è riportata la temperatura del sistema. I tratti inclinati corrispondono alla presenza rispettivamente della sola fase solida o della sola fase liquida: le loro inclinazioni dipendono dai calori specifici del solido e

Come tutti i cambiamenti di stato, la fusione avviene a temperatura costante

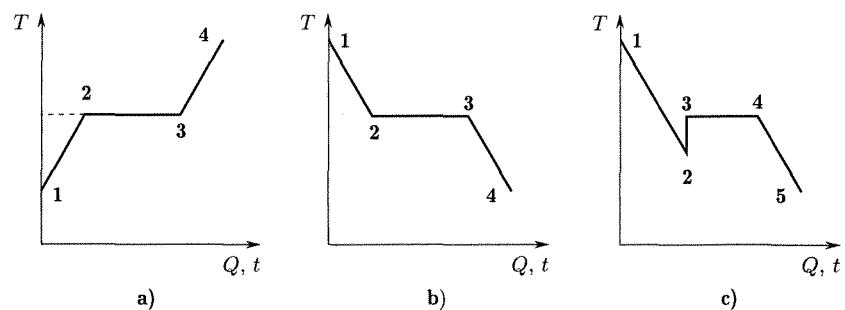


Fig. 16.11

Il cambiamento di stato da fase solida a liquida richiede calore, nel passaggio inverso il sistema cede calore

del liquido. Il tratto orizzontale corrisponde alla presenza delle due fasi, cioè al processo di fusione. La quantità di calore fornita all'unità di massa del solido alla temperatura di fusione, per farla passare dallo stato solido a quello liquido, prende il nome di calore latente di fusione (q_{lf}).

All'aumentare della temperatura del solido, l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi intorno alle loro posizioni di equilibrio aumenta gradatamente fino a un valore tale che qualche atomo, interagendo con altri atomi anche essi spostati, finisce per non ritornare più verso la sua posizione di riposo: tutto ciò crea disordine nell'edificio cristallino che a un certo punto non può più esistere come unità: si ha allora la fusione e il sistema passa a una forma meno ordinata e in genere più aperta. Il *punto di fusione* è, per ogni solido cristallino, quella temperatura alla quale la struttura reticolare, che già a temperature prossime ma inferiori presenta difetti localizzati, *cessa di essere una struttura unica con ordine a lungo raggio*. Il calore di fusione sta a rappresentare essenzialmente l'energia che bisogna spendere alla temperatura di fusione per rompere la struttura reticolare regolare del cristallo solido e vincere le forze attrattive fra gli atomi o le molecole: essa si ritrova come energia potenziale del sistema liquido. La tabella 16.3 riporta, per alcune sostanze, la temperatura di fusione (T_f), il calore latente di fusione (q_{lf}), il calore latente di evaporazione (q_e) alla temperatura di fusione e il loro rapporto. Il calore latente di evaporazione è sempre molto più grande del calore di fusione: ciò corrisponde al fatto che le strutture del solido e del liquido sono molto più vicine fra loro di quanto non siano le strutture del liquido e del gas.

Tabella 16.3

Sostanza	q_{lf} kcal/kmol	q_e kcal/kmol	q_{lf}/q_e	T_f (K)
<i>Metalli</i>				
Na	630	2620	0,024	371
Al	2550	67600	0,038	932
Cr	3930	89400	0,044	1823
Fe	3560	96500	0,037	1802
Pt	5330	125000	0,043	2028
<i>Sostanze molecolari</i>				
H ₂	28	220	0,13	14
H ₂ O	1430	11300	0,13	273
O ₂	96	2080	0,05	54
A	280	1880	0,15	83
N ₂	218	1690	0,13	63
CO ₂	1990	6440	0,31	217

Il calore di fusione di una sostanza può essere misurato in un calorimetro delle mescolanze (cap. 12, par. 12.7). Se t_1 e t_2 sono le temperature iniziali e finali del calorimetro, m la massa dell'acqua del calorimetro, m' l'equivalente in acqua del calorimetro, M la massa del solido che viene liquefatto, c_s e c_l i calori specifici della sostanza solida e liquida, t_f la temperatura di fusione, si ha

$$(m + m')(t_2 - t_1) = M[c_s(t_f - t_1) + q_{lf} + c_l(t_2 - t_f)]$$

da cui si calcola q_{lf} .

Il processo inverso si chiama solidificazione e avviene, se la pressione esterna è la medesima, *alla stessa temperatura della fusione*. In questo caso l'esperienza è descritta dalla curva della figura 16.11b. Il calore latente di fusione viene restituito dal sistema che solidifica all'ambiente. L'inizio della formazione dei cristalli richiede la presenza di germi: se si ha cura di rimuovere il più possibile le impurità dal liquido e si conduce con molta cura l'esperienza, si può portare il liquido al di sotto della temperatura di fusione (liquido surraffreddato), come indicato dal punto 2 figura 16.11c. Si tratta di uno stato di *falso equilibrio* e basta una piccola perturbazione come l'agitazione meccanica del liquido o l'aggiunta di un piccolo cristallo della stessa sostanza, perché il sistema ritorni in equilibrio alla temperatura di fusione: il calore necessario per innalzare la temperatura del sistema fino alla temperatura di fusione è costituito dal calore latente di solidificazione fornito dalla sostanza che solidifica.

Quasi tutte le sostanze espandono nel passare dallo stato solido a quello liquido: hanno cioè densità minore allo stato liquido. Alla solidificazione i cristalli si depositano sul fondo del recipiente in cui è il liquido.

L'acqua, il ferro, il bismuto e l'antimonio si comportano invece in maniera opposta, cioè la loro densità è minore allo stato solido.

L'effetto della pressione sul punto di fusione è legato alla differenza dei volumi specifici nei due stati e sarà studiato meglio in termodinamica. Si può dire che l'aumento di pressione favorisce la fusione quando questa avviene con aumento di densità; in tal caso un aumento di pressione produce un abbassamento del punto di fusione (per es. per l'acqua); il contrario avviene se il passaggio da solido a liquido è accompagnato da un'espansione del sistema, cioè il liquido ha densità minore del solido.

La presenza di piccole quantità di una sostanza estranea in soluzione abbassa il punto di solidificazione di un liquido. L'acqua del mare, per es., ha una temperatura di solidificazione più bassa dell'acqua pura. Si noti che quando inizia il processo di solidificazione, si deposita il solvente puro: nel caso di soluzioni diluite l'abbassamento è proporzionale alla quantità di sostanza disciolta. Inoltre soluzioni (diluite) nello stesso solvente di uno stesso numero di kmole di molecole di soluti diversi, presentano lo stesso abbassamento. Questa proprietà viene usata per la determinazione del peso molecolare delle sostanze disciolte.

Le precedenti considerazioni valgono per sostanze cristalline. Le sostanze amorfhe (grassi, cere, vetri), come si è detto, possono in genere essere considerate come liquidi sovraffusi di alta viscosità; esse all'aumentare della temperatura riducono la loro viscosità e divengono più fluide: non v'è in tal caso alcun processo di fusione e nessuna temperatura caratteristica.

Alle medesime condizioni di pressione i processi di fusione e di solidificazione di una sostanza avvengono alla medesima temperatura

16.10. LIQUIDI A STRUTTURA QUASI CRISTALLINA

Nello stato liquido sono compresi sistemi che hanno costituzione notevolmente differente: liquidi a temperature elevate e pressioni non altissime, quando cioè la densità è notevolmente diversa da quella che corrisponde allo stato solido, sono molto simili a gas densi. Ciò è fra l'altro mostrato dal fatto che il passaggio dallo stato liquido a quello gassoso a pressioni superiori a quella critica avviene senza discontinuità attraverso la isotermia critica.

È però anche possibile che a volte i liquidi, specie nelle vicinanze della temperatura di fusione, possiedano una struttura molto prossima a quella dei solidi. Gli elementi che rivelano ciò sono riportati nel seguito.

1. *Lo studio con i raggi X*, che consente di avere informazioni sulla distribuzione degli atomi nelle sostanze in esame, mostra che le particelle prossime a un atomo o a una molecola di molti liquidi sono disposte nella medesima maniera che nei corrispondenti solidi⁽³⁾, ma che tale distribuzione non si mantiene per le particelle più lontane.
2. La fusione è sempre accompagnata da una *variazione di volume* (di solito un aumento) relativamente piccola (circa 10%) e molto minore di quella che si osserva nel passaggio dallo stato liquido a quello gassoso⁽⁴⁾. Questo semplice fatto mostra che la distribuzione delle molecole nel liquido deve essere molto prossima a quella nel solido.
3. Il *calore latente di fusione* è molto minore di quello di *evaporazione*. Ciò significa che le forze di coesione diminuiscono molto poco in corrispondenza alla fusione.
4. Il *calore specifico del liquido* è solo di poco superiore a quello del solido in prossimità del punto di fusione, come è indicato nella tabella 16.4. Questa circostanza mostra che la maniera con cui l'energia termica è posseduta nei liquidi vicino al punto di fusione è praticamente la stessa di quella dei corpi solidi, cioè essa si trova nelle oscillazioni delle particelle intorno a posizioni di equilibrio o nei gradi di libertà di vibrazione interna delle molecole.
5. I liquidi come i solidi possono resistere a sollecitazioni di taglio (vedi cap. 7, par. 7.11).

Tabella 16.4

Sostanza	C_p solido (kcal/kmol K)	C_p liquido (kcal/kmol K)
Na	7,6	8
Hg	6,7	6,7
Pb	7,2	7,7
Zn	7,2	7,9
N_2	11,3	11,10
Cl_2	14	16,2
C_6H_6	26,6	30,1

⁽³⁾ È questo il caso generale. In alcuni casi (acqua, Bi, Sb), si osserva in corrispondenza alla fusione un cambiamento della struttura reticolare e questo spiega il fatto che in questi casi il volume diminuisce nella fusione. Le molecole d'acqua per es., pur conservando una struttura tetraedrica, passano dalla forma cristallina della trimidite nel ghiaccio a quella del quarzo quando sono allo stato liquido. In ogni caso il numero di molecole vicine è quattro. Lo studio con raggi X mostra ancora che questa struttura dell'acqua varia con la temperatura e in vicinanza della temperatura di ebollizione è sostituita da quella caratteristica di particelle sferiche, ciascuna circondata da altre 12 particelle.

⁽⁴⁾ Per es., 1 grammo di acqua, a 100 °C e alla pressione di 1 atmosfera, occupa 1 cm³, mentre allo stato di vapore saturo nelle stesse condizioni occupa 1,676 cm³.

La struttura dei liquidi quindi, almeno nella vicinanza del punto di fusione, sembra essere molto simile a quella dei solidi cristallini. Naturalmente essa è più complessa di quella dei solidi e tale complessità aumenta quando, al crescere della temperatura, l'ordine viene gradatamente ridotto: occorre in genere considerare il liquido come una mescolanza di componenti a struttura diversa e applicare criteri statistici. Lo studio diviene molto complesso.

Limitandosi al caso di liquidi a struttura quasi-cristallina, prossimi alla temperatura di fusione, una maniera approssimata ma suggestiva e abbastanza utile per descrivere le cose è quella di pensare che all'atto della fusione si siano prodotti a caso dei difetti nel reticolo del cristallo; questi difetti, o cavità, possono essere di vario genere, ma per una descrizione elementare si può pensare che siano semplicemente prodotti da atomi o molecole portati via dalle posizioni reticolari.

Ne consegue una struttura in qualche maniera simile a quella di un solido, ma con rilevante disordine. Abbiamo già visto come una tale struttura permetta di spiegare il comportamento elastico di questi liquidi (cap. 7, par. 7.12).

In questa descrizione ha notevole importanza il tempo medio τ di permanenza di una molecola in una posizione prima che essa possa saltare in una posizione vuota adiacente e quindi a distanza δ pari alla distanza media fra molecole contigue:

$$(46) \quad \tau = \tau_0 e^{W/kT}$$

dove τ_0 è un tempo caratteristico del liquido, W è l'altezza della barriera di energia potenziale che separa le posizioni di partenza e di arrivo della molecola ed è quindi l'energia che la molecola deve accumulare per poter effettuare il salto.

Una struttura quasi-cristallina di questo tipo consente di spiegare il processo di autodiffusione e la dipendenza della viscosità dalla temperatura nei liquidi, specie in prossimità della temperatura di solidificazione.

Il processo di autodiffusione, che conduce a un rimescolamento graduale del liquido, può essere facilmente descritto utilizzando la formula di Einstein (cap. 15, par. 15.19) per il coefficiente di autodiffusione, essendo soddisfatta la condizione che gli spostamenti delle particelle sono casuali e che due spostamenti successivi della stessa particella sono indipendenti fra loro per quel che riguarda la direzione. Naturalmente in questo caso la media quadratica degli spostamenti $\bar{r^2}$ va sostituita con δ^2 e t^* , il tempo fra spostamenti della particella, con τ (46).

Si ha

$$(47) \quad D_a = \frac{\delta^2}{6\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}}.$$

Questa espressione è stata confermata da risultati sperimentali ottenuti impiegando il metodo dei traccianti radioattivi: piccole quantità di un isotopo radioattivo della stessa sostanza liquida (per es. piombo fuso) sono immesse in una piccola regione e si segue come si distribuiscono nel tempo nella intera massa liquida.

Per quello che riguarda la viscosità, si ebbe già modo di osservare (cap. 7) che in un liquido quasi cristallino l'origine è ben diversa da quella della viscosità nei gas e che in realtà il parametro caratteristico di questi liquidi non è la viscosità ma la fluidità che può essere misurata dall'inverso del coefficiente di viscosità ($1/\eta$).

Per le brevi considerazioni che seguono è utile introdurre il concetto di mobilità delle particelle, cioè della velocità media rispetto alle particelle vicine assunta sotto l'azione di una forza esterna di grandezza unitaria.

*Nella vicinanza
del punto di fusione
il comportamento
di un liquido si avvicina
a quello del solido
corrispondente*

Appare abbastanza evidente che tale mobilità dipenda dalla maggiore o minore facilità con cui le particelle possono muoversi e quindi debba essere legata al coefficiente di autodiffusione (47). Una formula dovuta a Einstein fissa questa relazione fra la mobilità α e D_a :

$$(48) \quad \alpha = \frac{D_a}{kT}.$$

Si consideri un fluido che fluisca nella direzione y positiva nel quale la velocità decresca nella direzione x in una disposizione analoga a quella di figura 7.16 del cap. 7.

Consideriamo uno strato di spessore $\Delta x = \delta$ pari alla distanza media fra molecole adiacenti. Si può pensare che il liquido dello strato inferiore si muova come un tutt'uno con velocità media V_0 ; lo strato che si sta considerando si muove rispetto al precedente con una velocità media

$$(49) \quad \Delta V = \left(\frac{dV}{dx} \right) \delta.$$

Questo moto è dovuto a una forza esercitata sullo strato dallo strato superiore. Se si indica con τ_{yx} la forza esercitata dallo strato superiore per unità di area (sforzo di taglio), la forza esercitata su una molecola risulta $\Delta F = \tau_{yx} \delta^2$ poiché δ^2 è la superficie media dello strato per molecola.

Il moto dello strato si può immaginare composto da un moto delle posizioni di equilibrio (intorno a cui oscillano le molecole) trascinate dal liquido sottostante (con la stessa velocità V_0 dello strato sottostante) e da un moto dovuto ai salti delle molecole dello strato. Il movimento dello strato rispetto al sottostante è quindi dovuto ai salti delle molecole (per distanze δ) che avvengono discontinuamente, ma in genere nella direzione della forza che sollecita lo strato.

La velocità relativa dello strato rispetto al sottostante risulta

$$(50) \quad \Delta V = \alpha \Delta F = \alpha \tau_{yx} \delta^2$$

essendo α la mobilità, cioè la velocità assunta dalle particelle sotto l'azione di una forza esterna unitaria. Dalle (49) e (50) si ha, ($\delta = dx$)

$$(51) \quad \frac{dV}{dx} = \alpha \delta \tau_{yx}.$$

Se si ricorda la definizione di coefficiente di viscosità come rapporto fra lo sforzo di taglio e la derivata rispetto al tempo della deformazione di scorrimento e il fatto che nella disposizione qui usata il coefficiente di viscosità può porsi [cap. 7, eq. (34)]

$$(52) \quad \eta = \frac{\tau_{yx}}{\frac{dV}{dx}}$$

si vede che

$$(53) \quad \eta = \frac{1}{\alpha \delta}.$$

Facendo uso della (48) per α e della (47) per D_a si ottiene

$$(54) \quad \eta = \frac{6kT}{\delta^3} \tau_0 e^{\frac{W}{kT}}.$$

Questa relazione descrive bene la dipendenza del coefficiente di viscosità dalla temperatura nei liquidi. Si osservi che tale dipendenza è determinata essenzialmente dall'esponenziale, e quindi il coefficiente di viscosità dei liquidi secondo la (54) decresce con la temperatura. Questo risultato è in accordo con l'esperienza. Si osservi ancora che la dipendenza del coefficiente di viscosità dalla temperatura nei liquidi è nettamente diverso da quella nei gas ove invece η cresce con la temperatura (cap. 15, par. 15.18).

La viscosità di un liquido è legata alla mobilità delle particelle componenti e alla distanza media

■ 16.11. CALORI SPECIFICI NEI LIQUIDI

La notevole complessità nella costituzione dei liquidi e la grande varietà di tipi possibili porta di conseguenza il fatto che i gradi di libertà nel caso dei liquidi sono di vario genere: alcuni sono caratteristici dei sistemi solidi (legati alla struttura quasi cristallina), altri sono quelli visti per i sistemi gassosi (rotazione, vibrazioni interne delle molecole) e altri ancora possono essere di tipo diverso (per es. legati a equilibri chimici presenti nel liquido). In genere quindi l'energia è posseduta dai liquidi nel loro interno in forme diverse.

La dipendenza del calore specifico (a volume costante) dalla temperatura, che rispecchia le caratteristiche degli scambi di energia del sistema con l'esterno, è di solito piuttosto complessa, giacché, in maniera del tutto simile a quanto si è visto per l'eccitazione dei vari gradi di libertà nei gas e nei solidi, il fluire dell'energia tra i gradi di libertà avviene con modalità diverse per ciascuno di essi. In ogni caso la curva del calore specifico ha un andamento generalmente crescente al crescere della temperatura con, eventualmente, zone in cui resta all'incirca costante. Alle volte è possibile separare regioni di esistenza del liquido in ciascuna delle quali è nettamente predominante, nel determinare la dipendenza di C_v dalla temperatura, l'eccitazione di tipi particolari di gradi di libertà (strutturali, di vibrazione interna delle molecole ecc.).

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

sotermi

- **Limiti sperimentali** alle trasformazioni permesse dal primo principio.
- ✓ **Enunciati del secondo principio della termodinamica:** impossibilità di ottenere, unicamente, lavoro da una sola sorgente (Kelvin) e impossibilità di trasferire, unicamente, calore da una sorgente a un'altra a temperatura superiore (equivalenza degli enunciati).
- **Conseguenza del secondo principio:** egualianza del rendimento di macchine (cicli) reversibili, lavoranti tra due temperature e disegualianza con macchine irreversibili (*teorema di Carnot*).
- ✓ **Rendimento macchina di Carnot** (e di ogni altro ciclo reversibile tra due temperature):

$$\eta = \left(\frac{L}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \right) = 1 - \frac{T_2}{T_1} \longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Anche: $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$ e $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ (≤ 0 per cicli qualsiasi).

Da cui possibilità di definire:

1. temperatura termodinamica (coincidente con assoluta),
2. funzione di stato (su trasformazioni reversibili) $\int_A^B dQ/T$.

- ✓ **Entropia:** $\Delta S_{12} = \int_1^2 dQ/T$, su trasformazioni reversibili e $S = \int_0^T dQ/T$ ($S(T=0) \rightarrow 0$, *terzo principio termodinamico*)
- **Per trasformazioni reali** $I_{12} = \int_1^2 dQ/T$ (*integrale di Clausius*) con T temperatura della sorgente con cui c'è scambio termico; dal teorema di Carnot:

$$\Delta S_{12} \geq I_{12}$$

e crescita dell'entropia di sistemi isolati (adiabatici, Universo), $\Delta S \geq 0$ ($dQ = 0$).

- **Interpretazione del secondo principio:** evoluzione spontanea di sistemi termodinamici verso stati di equilibrio più probabili (realizzabili con maggior numero di stati microscopicamente diversi).

Entropia:

probabilità $\Delta S_{12} = k \ln P_2/P_1$ (*Boltzmann*), con $P_{1,2}$ probabilità di (numero microstati che realizzano uno stesso) macrostato; aumento di probabilità = riduzione di informazione I :

$$I_2 - I_1 = k \ln P_2/P_1;$$

gas perfetti (per mole):

$$\Delta S_{12} = \bar{c}_v \ln T_2/T_1 + R \ln V_2/V_1;$$

gas reali (di Van der Waals):

$$\Delta S_{12} \simeq R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - \frac{a}{T_1} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right);$$

trasformazioni di stato:

$$\Delta S = \lambda/T \quad (\text{per mole}),$$

trasformazione isoterma con T , temperatura della trasformazione e λ , calore latente (per mole) della trasformazione.

■ Secondo principio della termodinamica

17.

■ 17.1. INTRODUZIONE

Il primo principio della termodinamica, come si è detto, rappresenta il principio di conservazione dell'energia nel caso più generale in cui ci siano anche scambi di quantità di calore tra sistemi termodinamici. Si è già osservato che il primo principio non esaurisce la descrizione di quei processi nei quali intervengono quantità di calore assorbite (o cedute) e lavoro fatto (o subito) dal sistema. Si possono, infatti, immaginare numerosi processi che pur soddisfacendo il primo principio non avvengono nella realtà. Se per es. si pongono a contatto due corpi a diversa temperatura, il primo principio non vieta il passaggio di quantità di calore tanto dal corpo caldo a quello freddo quanto viceversa: il secondo caso tuttavia non avviene mai. Analogamente, se si ha una sorgente termica da cui si possono estrarre quantità di calore, il primo principio ci dice quanto lavoro si ottiene nella trasformazione di una certa quantità di calore, ma non pone alcuna limitazione alla possibilità di trasformare calore in lavoro (*moto perpetuo di seconda specie*). Si potrebbe pensare di realizzare una macchina che prendendo quantità di calore da una sola sorgente praticamente inesauribile, come l'oceano, le trasformi interamente in lavoro. Si trova invece in pratica che non è possibile trasformare interamente in lavoro quantità di calore estratte con continuità da una sorgente a temperatura costante.

Le limitazioni esistenti nei trasferimenti e nelle trasformazioni di quantità di calore sono riassunte dal secondo principio della termodinamica e sono chiarite da un esame dettagliato di alcune caratteristiche dei sistemi termodinamici rappresentate da una nuova grandezza fondamentale che sarà presto introdotta, l'entropia. Il secondo principio della termodinamica può essere espresso in varie maniere ciascuna delle quali pone in evidenza un aspetto diverso con cui si manifestano le limitazioni di base in oggetto: è possibile però vedere che tutte le varie espressioni si equivalgono giacché una porta di conseguenza l'altra. In quel che segue il secondo principio sarà introdotto mediante considerazioni sulla trasformazione in lavoro di quantità di calore.

■ 17.2. MACCHINE TERMICHE

Si abbia una sorgente termica, cioè un corpo dal quale possano essere estratte quantità di calore senza che praticamente vari la temperatura. Tali sorgenti possono essere corpi di capacità termica molto elevata (mare,

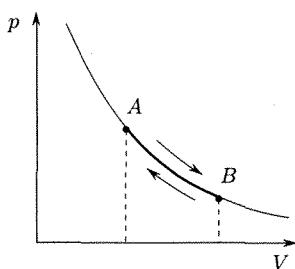


Fig. 17.1

Una macchina termica che lavori ciclicamente deve utilizzare più di una sorgente

grandi masse di aria ecc.) sì che l'effetto del calore preso da un corpo a temperatura diversa posto a contatto è trascurabile, oppure corpi di capacità termica non enorme ma che vengano via via riforniti delle quantità di calore che vengono via via estratte: quest'ultimo caso è per es. quello delle caldaie ove il calore estratto è rifornito mediante processi in cui intervengono energie di altro genere (meccanica, chimica, elettrica, nucleare).

Si pone il problema di trasformare in lavoro il calore estratto con continuità dalla sorgente in oggetto.

Si potrebbe pensare di utilizzare allo scopo una trasformazione isoterma di un sistema la cui energia interna dipenda solo dalla temperatura (cap. 14, par. 14.11): un tale sistema potrebbe essere un gas perfetto o un materiale paramagnetico perfetto. In tali casi durante la trasformazione isoterma il calore assorbito è interamente trasformato in lavoro meccanico (caso del gas perfetto) o elettromagnetico (materiale paramagnetico). Va però osservato che, per la forma delle trasformazioni in oggetto, esse non possono continuare indefinitamente: nel caso della espansione isoterma di un gas perfetto, ben presto le pressioni divengono piccolissime e le variazioni di volume necessarie per ottenere un certo lavoro enormi; nel caso di materiali magnetici si giunge a fenomeni di saturazione.

Si perviene quindi alla conclusione che, se si vuole ottenere indefinitamente trasformazione di calore in lavoro, occorre costruire un sistema termodinamico che possa operare ciclicamente, ritornando cioè periodicamente a possedere le stesse proprietà: tali sistemi sono le macchine termiche.

È evidente inoltre che una macchina termica non può operare rimanendo sempre a una stessa, unica, temperatura, quella della unica sorgente finora considerata: il punto rappresentativo del sistema (fig. 17.1) si sposterebbe lungo l'isoterma AB per ritornare nel punto di partenza al termine del ciclo BA . Il lavoro compiuto quindi in una parte del ciclo sarebbe perfettamente uguale a quello subito nel resto del ciclo stesso e il lavoro totale compiuto sarebbe nullo. Perché vi sia una trasformazione netta di calore in lavoro nel ciclo il punto rappresentativo del sistema deve muoversi su una linea che racchiuda un'area non nulla; esso quindi non può essere formato da tratti di trasformazioni isoterme alla stessa temperatura.

■ 17.3. CICLO DI CARNOT

La impossibilità di realizzare una macchina che trasformi ininterrottamente quantità di calore in lavoro funzionando a una temperatura costante, porta alla considerazione di cicli durante i quali la temperatura del sistema vari. Il caso che si presenta come il più semplice e anche il più efficiente è quello di un ciclo nel quale intervengano due sole temperature e le quantità di calore che devono passare da una sorgente a temperatura all'altra vengano trasferite integralmente, senza cioè che vi siano scambi di calore con l'esterno durante il passaggio. È questo il ciclo di Carnot: esso è costituito da due trasformazioni reversibili isoterme e due trasformazioni reversibili adiabatiche.

Nella figura 17.2 è rappresentato un tale ciclo per il caso che la sostanza che lo descriva sia un gas perfetto. Il ciclo richiede due sorgenti termiche alle temperature rispettivamente

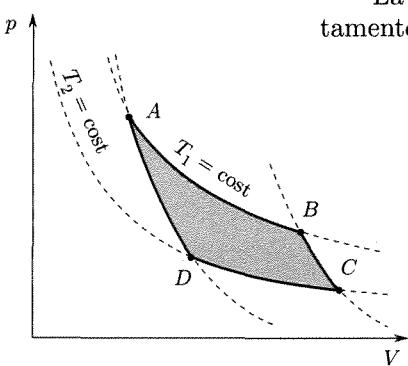


Fig. 17.2

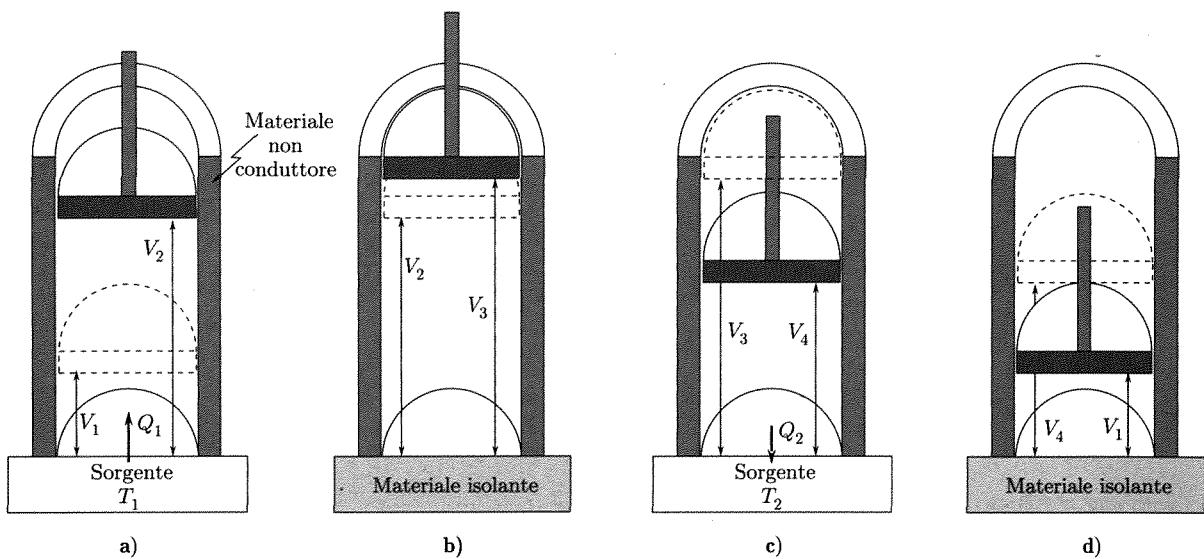


Fig. 17.3

di T_1 e $T_2 < T_1$. Si può pensare che le quattro trasformazioni avvengano nelle condizioni espresse in seguito (fig. 17.3).

1. La massa gassosa avente volume V_A e pressione p_A (punto A), contenuta in un cilindro con pistone, sia inizialmente in contatto termico, attraverso una parete trasparente al calore, con la sorgente a temperatura T_1 . Il gas venga fatto espandere isotermicamente fino a occupare il volume V_B alla pressione p_B (punto B)⁽¹⁾. Durante tale espansione il fluido assorbe una quantità di calore Q_1 e compie lavoro esterno (rappresentato nel piano pV dell'area del quadrilatero compreso fra la linea della trasformazione, l'asse delle ascisse e le ordinate per A e B).
2. Il cilindro venga ora isolato termicamente e si consenta una espansione adiabatica fino a che il gas raggiunga la temperatura $T_2 < T_1$; il volume e la pressione corrispondenti siano V_C e p_C (punto C). Durante l'espansione adiabatica il gas compie un lavoro esterno.
3. Il cilindro sia ora posto in contatto termico con la sorgente a temperatura T_2 e il gas venga compresso isotermicamente fino a un punto D (p_D , V_D) che giace sulla adiabatica per A. Durante questa fase il fluido cede alla sorgente una quantità di calore Q_2 , mentre viene fatto lavoro dall'esterno.
4. Il sistema viene nuovamente isolato termicamente e il gas, compresso adiabaticamente, è riportato alle condizioni iniziali: in tale fase viene fatto lavoro per comprimere il fluido.

Nel ciclo descritto il lavoro netto ottenuto L è rappresentato dall'area racchiusa dal ciclo stesso nel piano pV ; ripetendo il ciclo numerose volte si può ottenere una continua trasformazione di calore in lavoro. È peraltro evidente che non tutto il calore Q_1 assorbito dalla sorgente a tempera-

Il ciclo di Carnot si svolge reversibilmente tra due sorgenti a temperature diverse

⁽¹⁾ Si osservi che la scelta del punto B sull'isoterma per A è arbitraria, ma determina la parte restante del ciclo.

tura più alta è trasformata in lavoro, giacché una parte di esso (Q_2) è ceduto alla sorgente a temperatura più bassa. Per il primo principio della termodinamica, trattandosi di un ciclo, è

$$L = Q_1 - Q_2.$$

Il rendimento di una macchina termica è il rapporto tra il lavoro eseguito e la quantità di calore assorbita

Si chiama rendimento con il quale la quantità di calore Q_1 sottratta alla sorgente a temperatura più elevata è trasformata in lavoro il rapporto

$$(1) \quad \eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Questo rendimento è sempre minore di uno, giacché Q_2 non può mai essere zero. Si osservi che, siccome le trasformazioni del ciclo di Carnot sono reversibili, il ciclo può essere descritto in senso inverso. In tal caso (macchina refrigerante) la quantità di calore Q_2 è assorbita alla temperatura T_2 , la quantità di calore Q_1 è ceduta alla sorgente a temperatura più elevata e un lavoro, rappresentato dall'area del ciclo, è fatto dall'esterno sul fluido.

Qui si è fatto riferimento a un gas perfetto come sostanza che subisce le trasformazioni nel ciclo di Carnot. Le stesse considerazioni valgono per qualsiasi sostanza: la forma del ciclo nel piano p, V fra le temperature T_1 e T_2 naturalmente varia secondo l'equazione di stato della particolare sostanza scelta.

Cicli di Carnot si possono avere anche nel caso in cui non sia la coppia di variabili p e V quella usata per ottenere lavoro: come esempio si può considerare il caso di una sostanza paramagnetica nella quale le variabili che interessano per produrre energia magnetica sono l'intensità del campo magnetico H e la magnetizzazione totale M .

Il rendimento di un ciclo di Carnot che opera fra le due temperature T_1 e T_2 è facilmente calcolato nel caso che la sostanza sia un gas perfetto: lungo le trasformazioni isoterme, poiché $U = \text{cost}$, il calore assorbito è uguale al lavoro fatto dal fluido. Con riferimento alla figura 17.2

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = L_1 = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} \\ Q_2 = L_2 = RT_2 \ln \frac{V_C}{V_D} \end{array} \right.$$

Siccome i punti limite del ciclo si trovano su isoterme e adiabatiche, si possono scrivere le seguenti quattro relazioni:

$$p_A V_A = p_B V_B$$

$$p_C V_C = p_D V_D$$

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma$$

$$p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma.$$

Moltiplicando i primi membri fra loro e così pure i secondi ed eliminando il fattore comune $p_A p_B p_C p_D$, si ha:

$$V_A V_C V_B^\gamma V_D^\gamma = V_B V_D V_C^\gamma V_A^\gamma$$

cioè

$$V_B V_D = V_C V_A.$$

Di conseguenza si ottiene dalle (2)

$$(3) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

e

$$(4) \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Il rendimento della macchina di Carnot

essendo le temperature T quelle assolute ottenibili con un termometro a gas perfetto.

■ 17.4. IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il secondo principio della termodinamica è stabilito come una generalizzazione delle osservazioni sperimentali sulle limitazioni esistenti nelle trasformazioni di calore in lavoro e la sua validità si basa sul fatto che le deduzioni che se ne possono trarre per un numero grandissimo di processi fisici e chimici sono state sempre verificate dall'esperienza.

Come si è accennato, si possono dare vari enunciati del secondo principio. L'enunciato di Lord Kelvin è: *è impossibile realizzare una trasformazione il cui risultato finale sia solamente quello di trasformare in lavoro il calore estratto da una sorgente termica*. In accordo con quanto è stato detto nel paragrafo precedente, questa dizione del secondo principio sancisce che non è possibile realizzare una macchina che riesca a trasformare in lavoro, con continuità, quantità di calore prese da una sorgente a temperatura T_1 senza contemporaneamente trasferire un'altra quantità di calore a sorgenti a temperatura più bassa.

L'enunciato del secondo principio secondo Clausius è: *non è possibile realizzare una trasformazione il cui risultato finale sia solamente quello di trasferire una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore del primo*.

Si badi che questo principio non impedisce il trasferimento di quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore purché contemporaneamente venga speso del lavoro: è questo ciò che accade nelle macchine refrigeranti che in linea di principio potrebbero seguire un ciclo di Carnot percorso in senso inverso.

Sebbene i vari enunciati del secondo principio possano sembrare a prima vista non correlati, è facile vedere che essi esprimono le stesse limitazioni nella natura delle cose, giacché se si ammette che uno dei due enunciati non sia rispettato, ne consegne la nullità dell'altro.

Se, per es., si suppone, contro l'enunciato di Clausius, che sia possibile realizzare una trasformazione che faccia passare una quantità di calore Q_1 da un corpo a temperatura T_2 a un altro a temperatura $T_1 > T_2$ senza spesa di lavoro, si può pensare di associare a questa trasformazione una macchina di Carnot che prelevi la stessa quantità di calore Q_1 alla temperatura T_1 , ne consegni una parte Q_2 alla temperatura T_2 e fornisca un lavoro esterno L . Si otterrebbe così un insieme di trasformazioni il cui risultato finale è solo quello di trasformare in lavoro L una quantità di calore $Q_1 - Q_2$ prelevata da una sorgente a temperatura costante T_2 : l'enunciato di Kelvin sarebbe perciò falso. Si supponga ora che sia possibile, in contrasto con l'enunciato di Kelvin, realizzare una trasformazione il cui

*Enunciati equivalenti
del secondo principio
della termodinamica*

*Gli enunciati
del secondo principio
sono equivalenti, l'uno
cioè comporta l'altro*

risultato sia solamente quello di trasformare in lavoro le quantità di calore sottratte a un corpo a temperatura costante (sorgente). Si potrebbe allora dapprima prelevare lavoro dalla sorgente a temperatura più bassa e poi ritrasformare l'energia meccanica ottenuta in calore a una temperatura più alta, per es. traendo profitto dai processi d'attrito. In tal maniera si realizzerebbe una serie di trasformazioni il cui risultato finale è solamente il passaggio di una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura più alta, in contrasto con l'enunciato di Clausius. In tal modo si vede che la negazione di ciascuno dei due enunciati implica la negazione dell'altro, sancendone quindi la completa equivalenza.

Il secondo principio della termodinamica riconosce il fatto che molti processi avvengono spontaneamente in un verso ben preciso e che sono perciò intrinsecamente irreversibili, nel senso che non è possibile realizzare una combinazione di processi naturali che ripristini esattamente lo stato iniziale del sistema.

Si ponga per es. attenzione al passaggio di quantità di calore fra due corpi a temperature diverse: esso avviene spontaneamente dal corpo caldo a quello freddo e il secondo principio afferma l'impossibilità di invertire il processo. Si consideri ancora come esempio il caso di un oscillatore (pendolo) portato fuori dalla posizione di equilibrio e lasciato a se stesso: il processo naturale è quello delle oscillazioni smorzate fino al ritorno all'equilibrio con produzione di quantità di calore a causa della presenza di attriti e resistenze passive. Il processo non può avvenire spontaneamente in verso opposto: esso richiederebbe un lavoro da ottenersi per trasformazione di quantità di calore prelevate dall'ambiente (sorgente a temperatura costante) e ciò è vietato dal secondo principio. Si osservi infine che in una qualsiasi trasformazione reale v'è sempre trasformazione di una quantità di energia di altre specie in calore: essa risulta perciò irreversibile, giacché per il secondo principio la trasformazione inversa non può essere completa.

Le limitazioni espresse dal secondo principio della termodinamica sono intimamente legate a quelle cause che rendono i processi reali irreversibili e che di conseguenza fissano il verso delle trasformazioni spontanee di un sistema che si trovi fuori dall'equilibrio.

■ 17.5. TEOREMA DI CARNOT

Si vuole ora stabilire un teorema molto importante, che va sotto il nome dello scienziato che lo ha formulato: Carnot. La dimostrazione presentata da Carnot, tuttavia, è incorretta perché si basa sulla teoria del calorico. Esso è stato riformulato da Lord Kelvin e da Clausius ed è una conseguenza necessaria del secondo principio: esso può essere considerato come un altro enunciato del secondo principio della termodinamica. L'enunciato del teorema di Carnot è il seguente: *tutte le macchine reversibili operanti fra due medesime temperature⁽²⁾ hanno lo stesso rendimento; nessuna macchina irreversibile che lavori fra le stesse temperature può avere rendimento maggiore di quello delle macchine reversibili.*

⁽²⁾ Operando fra due temperature fissate sono macchine di Carnot; inoltre, con le dizioni: operanti, o che lavorano, fra due temperature si intende qui indicare che gli scambi di calore con l'esterno avvengono esclusivamente con sorgenti alle due determinate temperature.

Questo teorema contiene due affermazioni che vanno dimostrate successivamente. Si supponga di avere due macchine reversibili R e R' che operino fra le due stesse temperature T_1 e $T_2 < T_1$. Esse possono differire per la sostanza usata o per i punti che limitano le trasformazioni e che definiscono il ciclo. Siano Q_1 , Q_2 le quantità di calore che la R rispettivamente prende dalla sorgente a temperatura T_1 e cede alla sorgente alla temperatura T_2 , e L il lavoro compiuto. Siano Q'_1 , Q'_2 e L' le analoghe quantità per la macchina R' . I rendimenti delle due macchine sono

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta' = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Supponiamo per assurdo che sia $\eta > \eta'$, cioè

$$(5) \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Per vedere come una tale posizione non sia lecita, si immagini di proporzionare le macchine in modo che $L = L'$ e di collegarle in modo che R operi in senso diretto e R' in senso inverso (fig. 17.4); l'egualanza dei lavori esterni delle due macchine

$$(6) \quad L = Q_1 - Q_2 = Q'_1 - Q'_2 = L'$$

consente di ricavare dalla (5)

$$(7) \quad \frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q'_1}$$

e

$$Q_1 < Q'_1.$$

Ancora dalla (6) si ha

$$(8) \quad Q_2 < Q'_2.$$

Si ottiene allora che la sorgente ad alta temperatura guadagna una quantità di calore (positivo) $Q'_1 - Q_1$, mentre la sorgente a bassa temperatura ne perde la stessa quantità $Q'_2 - Q_2$. Ciò significherebbe che una quantità di calore è trasferita da un corpo a temperatura T_2 a un corpo a temperatura più alta senza necessità di fornire un lavoro dall'esterno: questo è contrario al secondo principio della termodinamica. Si conclude quindi che la (5) costituisce un assurdo e quindi che η non può essere maggiore di η' . Ripetendo lo stesso ragionamento nell'ipotesi che R' funzioni in senso diretto e R in senso inverso, si può mostrare che η' non può essere maggiore di η . Si conclude quindi che deve necessariamente essere:

$$(9) \quad \eta = \eta'.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema, si supponga che la macchina R sia irreversibile. Ripetendo il ragionamento precedente si può mostrare che η_{irr} non può essere maggiore di η' . Siccome peraltro la R non può essere fatta funzionare in senso inverso, non si può provare che η' non può essere maggiore di η_{irr} . Ne segue, poiché $\eta' = \eta_{\text{rev}}$:

$$(10) \quad \eta_{\text{irr}} \leq \eta_{\text{rev}}$$

che prova la seconda parte del teorema di Carnot.

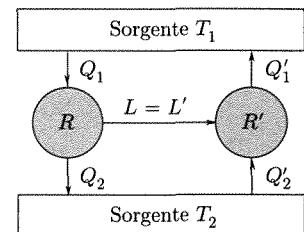


Fig. 17.4

Per il teorema di Carnot, tutte le macchine reversibili operanti tra due medesime temperature hanno rendimenti eguali

Quindi: *tutte le macchine termiche che seguono un ciclo reversibile prelevando quantità di calore a una temperatura T_1 e restituendo quantità di calore a una seconda temperatura T_2 hanno il medesimo rendimento, indipendentemente dalla natura e quantità della sostanza che descrive il ciclo, dall'estensione delle trasformazioni che costituiscono il ciclo e dalle grandezze che variano (p e V , H e M ecc.).*

Questa importantissima circostanza fa sì che il rendimento di una qualsiasi macchina reversibile che opera prelevando calore a temperatura T_1 e restituendo calore alla temperatura T_2 , può essere ottenuto facendo uso della (4) ricavata nel caso che la sostanza sia un gas perfetto. Si osservi che nella (4) vengono usate le temperature assolute da misurarsi con un termometro a gas perfetto.

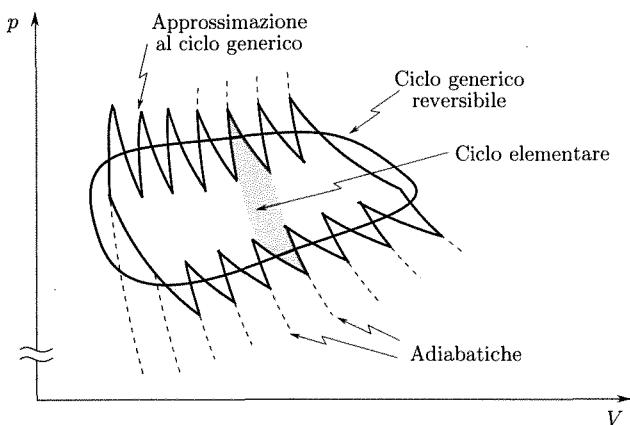


Fig. 17.5

fra le temperature massima e minima del ciclo dato: altri operano con un salto di temperatura inferiore e quindi la trasformazione di quantità di calore in lavoro verrà fatta con un rendimento globale inferiore a quello di una macchina di Carnot che operi fra le temperature estreme del ciclo dato.

Nel caso di cicli, anche reversibili, nei quali gli scambi di calore non avvengano esclusivamente alle temperature massima e minima del ciclo stesso, il rendimento è minore di quello precedentemente trovato. Ciò si vede facilmente osservando la figura 17.5. Un ciclo reversibile qualsiasi può sempre essere approssimato da un insieme di cicli di Carnot percorsi successivamente: si osservi infatti che le trasformazioni comuni a due cicli sono percorse due volte in sensi contrari e quindi tutto ciò equivale a approssimare la linea del ciclo data con una spezzata formata da tratti di isoterme e adiabatiche che si possono rendere piccoli a piacere. Solo alcuni dei cicli di Carnot possono essere tali da operare

17.6. TEMPERATURA TERMODINAMICA

Le considerazioni finora svolte sul secondo principio della termodinamica e sulle conseguenti caratteristiche del ciclo di Carnot consentono l'introduzione di una nuova scala delle temperature priva di quelle difficoltà che altre scale hanno e che abbiamo esaminato in precedenza (cap. 13). L'introduzione di tale scala fu fatta da Lord Kelvin. Essa si basa sul fatto che il rendimento di un ciclo di Carnot è *indipendente dalla natura della sostanza impiegata e dipende solamente dalle due temperature fra cui opera*. Se si misurano le temperature con una scala empirica qualsiasi, e si indicano la temperatura della sorgente più calda con θ_1 e quella della sorgente più fredda con θ_2 , il rendimento per tutti i cicli di Carnot (sempre minore di 1) che operano fra queste temperature può porsi nella forma

cioè, per la (1),

$$(12) \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \varphi(\theta_1, \theta_2).$$

Il rapporto fra la quantità di calore assorbito dalla sorgente calda e la quantità di calore ceduta alla temperatura più bassa è uguale per tutte le macchine che operano con un ciclo di Carnot fra queste temperature.

È possibile conoscere qualcosa di più sulla natura della funzione φ , cioè sul legame fra Q_2/Q_1 e le temperature misurate con un termometro. Per vedere ciò si divida il ciclo di Carnot considerato in due, mediante una isoterma a temperatura θ_m intermedia tra θ_1 e θ_2 (fig. 17.6). Il primo ciclo prenda la quantità di calore Q_1 alla temperatura θ_1 e ceda la quantità di calore Q_m alla sorgente a temperatura θ_m ; il secondo prenda la stessa quantità Q_m alla temperatura θ_m e ceda la quantità Q_2 alla temperatura θ_2 . L'insieme dei due cicli equivale al ciclo originario.

Per i rendimenti dei tre cicli si può scrivere:

$$(13) \quad \begin{aligned} 1 - \eta_1 &= \varphi(\theta_1, \theta_m) = \frac{Q_m}{Q_1} \\ 1 - \eta_2 &= \varphi(\theta_m, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_m} \\ 1 - \eta &= \varphi(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1}. \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$(14) \quad \varphi(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta_1, \theta_m)\varphi(\theta_m, \theta_2).$$

È questa la relazione che consente di specificare qualcosa sulla natura della funzione φ . Perché la (14) sia soddisfatta per tre valori qualunque di θ , la funzione φ deve avere la forma strutturale

$$(15) \quad \varphi(\theta, \theta') = \frac{\psi(\theta')}{\psi(\theta)}$$

essendo $\psi(\theta)$ una funzione a un sol valore e monotonicamente crescente della temperatura θ misurata con il termometro usato. In tal caso

$$(16) \quad \varphi(\theta_1, \theta_m)\varphi(\theta_m, \theta_2) = \frac{\psi(\theta_m)}{\psi(\theta_1)} \frac{\psi(\theta_2)}{\psi(\theta_m)} = \frac{\psi(\theta_2)}{\psi(\theta_1)} = \varphi(\theta_1, \theta_2).$$

Si può quindi scrivere:

$$(17) \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \varphi(\theta_1, \theta_2) = \frac{\psi(\theta_2)}{\psi(\theta_1)}$$

e

$$(18) \quad \frac{Q_1}{\psi(\theta_1)} = \frac{Q_2}{\psi(\theta_2)}.$$

La funzione $\psi(\theta)$ può essere determinata sperimentalmente, a meno di un fattore costante, ricorrendo a cicli di Carnot che abbiano una sorgente in comune (a temperatura θ_1) e un'altra (a temperatura θ) invece diversa per ciascun ciclo. Si ha infatti

$$(19) \quad \psi(\theta) = \psi(\theta_1) \frac{Q_\theta}{Q_1}$$

cioè la $\psi(\theta)$ è, a meno del fattore costante $\psi(\theta_1)$, data dal rapporto Q_θ/Q_1 .

Il secondo principio permette di definire termodinamicamente la temperatura

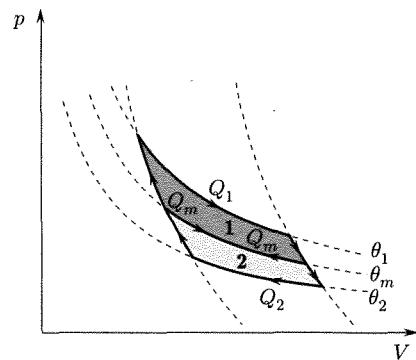


Fig. 17.6

La definizione della scala termodinamica delle temperature si fonda sull'enunciato del teorema di Carnot

Appare quindi possibile, e presto vedremo molto utile scegliere, al posto della temperatura θ data da una scala empirica qualsiasi, una nuova scala nella quale la temperatura T' è proprio data dalla funzione $\psi(\theta)$: $T' = \psi(\theta)$. Perché la nuova scala sia determinata occorre fissare in maniera arbitraria il fattore costante $\psi(\theta_1)$ nella (19). Conviene, per ragioni che saranno presto evidenti, scegliere tale fattore prendendo come sorgente a temperatura di riferimento una sorgente alla temperatura del punto triplo dell'acqua e ponendo $T' = 273,16$. *Il valore di una qualsiasi altra temperatura si ottiene considerando un ciclo di Carnot che operi fra la temperatura del punto triplo dell'acqua e la temperatura in oggetto e determinando $Q_{273,16}$ e $Q_{T'}$.*

Risulta

$$(20) \quad T' = \frac{Q_{T'}}{Q_{273,16}} 273,16.$$

La nuova scala si chiama scala termodinamica delle temperature e le temperature risultano misurate in gradi Kelvin.

Insistiamo sul fatto che la nuova scala, a differenza di tutte le altre precedentemente viste, non dipende dalla sostanza termometrica che viene usata, in base al risultato del teorema di Carnot. Essa quindi non risente delle obiezioni e limitazioni viste per le altre scale, compresa quella assoluta basata sulle proprietà dei gas perfetti. In particolare consente di chiarire il significato di zero assoluto.

Prima di fare ciò vogliamo notare che il rendimento di un ciclo di Carnot viene espresso, usando la scala termodinamica delle temperature, nella forma

$$(21) \quad \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T'_2}{T'_1}.$$

Se si confronta questa espressione con quella trovata usando le temperature assolute (4), si trova che

$$(22) \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{T'_2}{T'_1}$$

cioè le temperature nella scala assoluta T sono proporzionali alle temperature nella scala termodinamica. Se si fa attenzione al fatto che per la scelta fatta del fattore costante nella determinazione della scala delle temperature termodinamiche, la temperatura del punto triplo dell'acqua è in entrambe le scale pari a $273,16^\circ$, si conclude che i valori numerici che a una data temperatura corrispondono nelle due scale sono gli stessi, cioè *le scale assoluta e termodinamica coincidono*. La misura viene pertanto espressa in entrambi i casi in gradi Kelvin (K). D'ora in poi indicheremo con T anche le temperature nella scala termodinamica.

■ 17.7. ZERO ASSOLUTO E SUA IRRAGGIUNGIBILITÀ

La nuova scala e le considerazioni termodinamiche su cui essa si basa, consentono di dare un significato alla temperatura dello zero assoluto e di esaminare il problema della sua irraggiungibilità.

Ricordiamo innanzi tutto che la scala delle temperature assolute, basata sulle proprietà dei gas perfetti, non consente di precisare il significato della temperatura zero, perché, in aggiunta alle difficoltà

che normalmente si incontrano per realizzare un termometro contenente un gas reale che pure si comporti con buona approssimazione come un gas perfetto, quando le temperature divengono inferiori a 1 K non è più possibile avere termometri a gas: non si hanno più sostanze gassose.

La scala termodinamica non è invece legata ad alcuna particolare sostanza e quindi il procedimento usato per la sua definizione può essere impiegato anche per temperature comunque basse.

Per la misura delle temperature si può immaginare di realizzare dei cicli di Carnot limitati tutti da due medesime adiabatiche come in figura 17.7 ove la differenza di inclinazione fra adiabatiche e isoterme è stata aumentata per maggiore chiarezza. Misurando le quantità di calore assorbite e cedute lungo due isoterme si ha

$$(23) \quad \frac{T}{T_0} = \frac{Q}{Q_0}$$

essendo T_0 la temperatura più alta del ciclo, che è da considerarsi nota. La (23) determina T . La stessa relazione mostra che al decrescere di T , decresce la quantità di calore Q data alla sorgente a temperatura inferiore nei cicli di Carnot aventi le stesse due adiabatiche, e viceversa.

Siccome il più piccolo valore di Q è zero, il più basso valore di T è zero. Lo zero assoluto si può quindi macroscopicamente definire come quella temperatura alla quale *un sistema*, indipendentemente dalla natura della sostanza che lo realizza, *potrebbe seguire un processo isotermo reversibile senza scambi di calore con l'esterno*. Allo zero assoluto cioè i processi isotermi coincidono con quelli adiabatici.

La temperatura dello zero assoluto è peraltro una temperatura limite, giacché non esiste un procedimento per portare una sostanza a tale temperatura: la caratteristica fondamentale di tutti i processi di raffreddamento è che la loro efficienza decresce all'abbassarsi della temperatura. Vedremo in seguito meglio le ragioni che ostacolano il raggiungimento dello zero assoluto, pur essendo attualmente giunti a temperature di circa 10^{-9} K.

I risultati dell'esperienza in questi riguardi sono sintetizzati nella legge di Nernst, che viene anche indicata come terzo principio della termodinamica. Su di essa torneremo con maggior dettaglio (cap. 20). Diremo ora solamente che essa può essere espressa in vari modi, uno dei quali è: *non è possibile trovare un procedimento, neanche ideale, che consenta di portare un sistema allo zero assoluto in un numero finito di operazioni*.

Lo zero della temperatura termodinamica non è raggiungibile da nessun sistema termodinamico

Se si tiene presente l'espressione del rendimento di un ciclo di Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

si trova ancora che non potendo mai essere $T_2 = 0$, il rendimento deve sempre essere minore di uno.

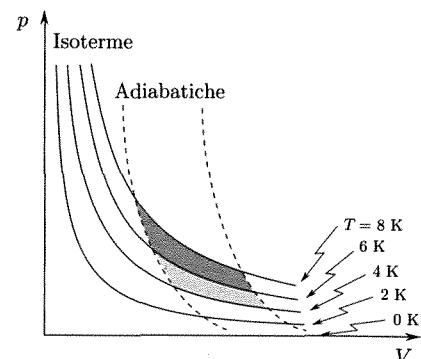


Fig. 17.7

17.8. ENTROPIA

L'esame del secondo principio della termodinamica conduce all'introduzione di una nuova grandezza di stato, l'entropia. Il concetto di en-

tropia, come del resto tutto il secondo principio, non è immediato: ciò è essenzialmente dovuto al fatto che non c'è un metodo sperimentale per la misura diretta dell'entropia. L'entropia ha peraltro in termodinamica un'importanza pari a quella dell'energia interna.

Prima di presentare la maniera formale per la definizione di entropia, vogliamo svolgere alcune considerazioni che illustrano le caratteristiche fondamentali di questa grandezza. In seguito se ne darà l'interpretazione da un punto di vista atomico e statistico e ne sarà mostrato il legame con il concetto di informazione.

Ogni sistema fisico che non sia già in uno stato di equilibrio, se lasciato a se stesso, subisce spontaneamente delle variazioni fino a raggiungere in un tempo più o meno lungo uno stato di equilibrio. Come esempi ricordiamo i seguenti:

1. l'espansione libera di un gas: un gas in un recipiente sia diviso mediante una membrana da un altro recipiente evacuato e si rompa il diaframma.
Nel caso di un gas perfetto il processo è isotermo (cap. 15, par. 15.3);
2. il passaggio di quantità di calore da un corpo caldo a uno freddo;
3. la diffusione di un soluto in un solvente;
4. una reazione chimica come la combustione di carbonio in ossigeno con produzione di CO_2 .

Questi processi avvengono fino allo stabilirsi di condizioni di equilibrio: pressione uniforme nel caso 1, temperatura uniforme nel caso 2, concentrazione uniforme nel caso 3 ed equilibrio della reazione nel caso 4. In tutti questi casi non si osserva mai il processo inverso che allontanerebbe spontaneamente il sistema dall'equilibrio: si tratta di trasformazioni intrinsecamente irreversibili.

Si osservi inoltre che man mano che il sistema si avvicina all'equilibrio esso perde la sua capacità di compiere lavoro. Nel caso dell'espansione del gas, il gas compresso potrebbe compiere un lavoro nell'espandersi se tale espansione fosse contrastata da un pistone: nell'espansione libera invece non è fatto nessun lavoro esterno. Nel caso del passaggio spontaneo del calore dal corpo caldo a quello freddo nessun lavoro esterno è stato fatto, mentre utilizzando i due corpi come sorgenti (o meglio collegati a sorgenti) di una macchina di Carnot si sarebbe potuto ottenere un lavoro. In tutti i casi un lavoro deve essere fatto dall'esterno sul sistema per ripristinare la situazione originaria, mentre nessun lavoro verso l'esterno è fatto nella trasformazione spontanea.

È evidente inoltre che la tendenza di un sistema a subire variazioni verso lo stato di equilibrio e quindi la diminuzione della capacità a compiere lavoro quando l'equilibrio è raggiunto, crescono nei casi considerati tanto più quanto maggiore è la differenza in pressione (caso 1), in temperatura (caso 2), in concentrazione (caso 3), dello stato della reazione (caso 4) fra le condizioni iniziali e quelle di equilibrio. È importante osservare che alle variazioni spontanee del sistema non è affatto necessario che si associno variazioni di energia interna. Si pensi per es. al caso dell'espansione libera di un gas perfetto, che avviene a energia interna costante (cap. 15, par. 15.3).

Si giunge così all'idea dell'esistenza di una grandezza funzione di stato che, con la differenza dei suoi valori in due stati di un dato sistema, misuri la *capacità del sistema di essere sede di trasformazioni spontanee* e,

di conseguenza, la perdita della capacità di compiere lavoro quando tali trasformazioni spontanee avvengono: tale grandezza è l'*entropia*.

Si vuole dare ora la definizione quantitativa dell'entropia.

Per un ciclo di Carnot è stata stabilita la relazione

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

essendo Q_1 e Q_2 le quantità di calore assorbite e cedute rispettivamente alle temperature dei processi isotermi T_1 e T_2 . Essendo le trasformazioni reversibili, queste temperature sono le temperature tanto delle sorgenti esterne quanto del sistema.

Finora le quantità di calore sono state considerate nel loro valore assoluto: se si conviene di ritenere positive quelle assorbite dal sistema che subisce le trasformazioni e negative quelle cedute, la relazione precedente si scrive

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

cioè per un ciclo di Carnot

$$(24) \quad \sum \frac{Q}{T} = 0.$$

La validità di questa relazione si può estendere a un ciclo reversibile qualsiasi, giacché questo può considerarsi come limite della somma di infiniti cicli di Carnot, per ciascuno dei quali l'area diverrà gradatamente molto piccola (infinitesima), così che la sommatoria si trasforma in un integrale

$$(25) \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

essendo l'integrale preso lungo il ciclo e dQ la quantità infinitesima di calore assorbita (se positiva) lungo la trasformazione isoterna infinitesima alla temperatura T .

Allo scopo di mostrare la maniera con la quale si procede in termodinamica si riporta la seguente dimostrazione della (24). Sia C un ciclo reversibile, il quale possa essere immaginato formato da tratti sufficientemente brevi di adiabatiche e isotermi (fig. 17.8, riferita al caso di un gas perfetto). Siano T_1, T_2, \dots, T_n le temperature alle quali avvengono gli scambi di calore con l'esterno, e siano Q_1, Q_2, \dots, Q_n le corrispondenti quantità di calore (positive o negative) scambiate con le sorgenti a queste temperature. Si immagini ora di disporre di una sorgente a una temperatura qualsiasi T_0 e di considerare n cicli di Carnot, ciascuno funzionante tra T_0 e una delle temperature T_1, T_2, \dots, T_n , proporzionali in modo che quello (C_i) che opera fra T_0 e T_i scambi con la sorgente a temperatura T_i una quantità di calore Q_i pari a quella scambiata nel ciclo C . Per il ciclo di Carnot di ordine i si avrebbe

$$\frac{Q_{i0}}{T_0} + \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

e quindi la quantità di calore scambiata alla temperatura T_0 sarebbe

$$Q_{i0} = -\frac{Q_i}{T_i} T_0.$$

Si immagini di avere una macchina che operi secondo un ciclo complesso che sia la somma del ciclo C e degli n cicli C_i operanti, questi ultimi, in verso opposto a quello prima visto. Nel funziona-

Per un ciclo reversibile l'integrale circuitato di dQ/T è nullo

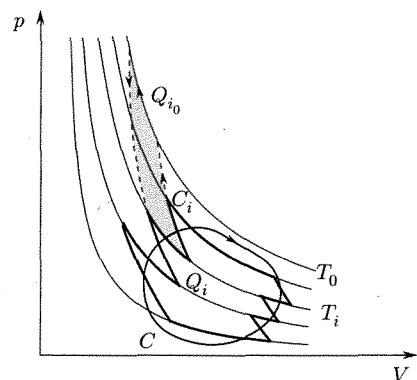


Fig. 17.8

mento di tale macchina le quantità di calore complessivamente scambiate a ciascuna temperatura T_i sono nulle giacché quelle relative al ciclo C sono uguali e di segno contrario a quelle scambiate nei cicli C_i invertiti.

Per il calcolo della quantità di calore Q'_0 scambiata complessivamente con la sorgente alla temperatura T_0 , si osservi che il contributo del ciclo C_i invertito è

$$Q'_{i_0} = -Q_{i_0} = \frac{Q_i}{T_i} T_0.$$

Si ha quindi

$$(26) \quad Q'_0 = \sum_1^n Q'_{i_0} = T_0 \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i}.$$

In complesso quindi la macchina assorbe quantità di calore da una sola sorgente.

Per il primo principio della termodinamica, siccome dopo un ciclo complessivo (formato da C e dai cicli C_i invertiti) il sistema ritorna nelle stesse condizioni iniziali, il lavoro compiuto è pari alla quantità di calore ricevuta dall'esterno; per il secondo principio (Lord Kelvin), essendo tale quantità sottratta da una sola sorgente, il lavoro prodotto non può essere positivo e quindi

$$(27) \quad L_0 = Q'_0 = T_0 \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

cioè, essendo T_0 positivo,

$$(28) \quad \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0.$$

Se il ciclo C è reversibile, il ragionamento ora fatto può essere ripetuto invertendo il senso di C e dei cicli di Carnot ausiliari. Di conseguenza cambiano di segno le Q_i nella (26); applicando il secondo principio si ottiene

$$(29) \quad \sum_1^n \left(-\frac{Q_i}{T_i} \right) \leq 0.$$

Le due relazioni (28) e (29) possono coesistere solo nel caso di validità del segno di uguaglianza, cioè per i cicli reversibili è

$$(30) \quad \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

coincidente con la (24).

Nel caso che il ciclo non sia reversibile

$$(31) \quad \sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

ovvero

$$(32) \quad \oint \frac{dQ}{T} \leq 0.$$

Si tratti per es. di un ciclo nel quale tutta la quantità di calore assorbita Q'_1 è presa dalla sorgente alla temperatura T_1 e tutta la quantità di calore ceduta Q'_2 è data alla sorgente a temperatura T_2 . Il rendimento $(1 - Q'_2/Q'_1)$ deve essere non superiore al rendimento di una macchina di Carnot che lavora fra le due stesse temperature. Quest'ultimo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

essendo Q_1 e Q_2 le quantità di calore nel ciclo di Carnot. Ciò significa che deve essere $Q'_1 \leq Q_1$ o che $Q'_2 \geq Q_2$ oppure che si verifichino entrambe le

Per un ciclo qualsiasi l'integrale circuitato di dQ/T non è mai positivo

condizioni. Di conseguenza, ricordando che nella somma (31) le Q_2 sono negative, la somma delle Q/T lungo il ciclo è minore che nel caso del ciclo di Carnot cioè di zero in accordo con la (30). Il ragionamento può essere esteso a cicli più complicati in maniera analoga a quanto visto nel caso dei cicli reversibili.

Si osservi che nel caso di trasferimenti reali, quando in genere esiste una differenza di temperatura fra sorgente e sistema, le T che compaiono nelle (31) e (32) sono *le temperature delle sorgenti che forniscono le quantità di calore Q_1 o dQ al sistema*.

In conclusione si può scrivere per qualsiasi ciclo

$$(33) \quad \oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

valendo il segno di uguaglianza solo per cicli reversibili. È questa una maniera matematica di formulare il secondo principio della termodinamica. L'integrale al primo membro si chiama integrale di Clausius.

Per un *qualsiasi* ciclo reversibile quindi vale la (25)

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

Si possono qui ripetere le considerazioni svolte in circostanze analoghe nel caso dell'energia potenziale (cap. 3, par. 3.4) e dell'energia interna (cap. 14, par. 14.8) e asserire che l'integrale di linea fra uno stato iniziale 1 e uno stato finale 2 del differenziale dQ/T non dipende dalla particolare trasformazione *reversibile* scelta per passare da 1 a 2. Si può quindi introdurre una funzione di stato, che dipenda solo dallo stato del sistema, definendola in modo che la differenza dei valori in due stati 1 e 2 sia uguale all'integrale di linea ora visto. Tale funzione di stato è chiamata entropia e indicata generalmente con S :

$$(34) \quad S_2 - S_1 = \int_{1C}^2 \frac{dQ}{T} \text{ su } C \text{ reversibile.}$$

La funzione entropia è determinata a meno di una costante, che rappresenta il valore da assegnare a essa arbitrariamente in corrispondenza a uno stato di equilibrio del sistema scelto come stato di riferimento. L'unità di misura per l'entropia nel SI è joule a grado; ancora spesso usata è la unità kcal a grado: 1 kcal a grado è pari a 4186,8 joule a grado.

Questi risultati si possono esprimere anche dicendo che

$$\frac{dQ}{T}$$

è un differenziale totale, oppure, ricordando che dQ non è un differenziale totale, dicendo che $1/T$ è il fattore integrante che trasforma dQ in un differenziale esatto:

$$(35) \quad dS = \frac{dQ}{T}.$$

Le relazioni (25), (34) e (35) sono conseguenze dirette del secondo principio e ciascuna di esse può essere presa come espressione analitica del principio stesso.

L'entropia è una funzione di stato: la sua variazione tra due stati è indipendente dalla trasformazione.

Si osservi che il fatto che si è giunti alla definizione dell'entropia con considerazioni relative a trasformazioni reversibili non deve trarre in inganno sulla validità generale delle conclusioni. L'entropia è una funzione di stato sicché ogni stato di equilibrio di un sistema è caratterizzato da un certo valore della entropia (una volta determinata la costante additiva fissando arbitrariamente l'entropia per uno stato di riferimento), nella stessa maniera in cui esso è caratterizzato da certi valori del volume, della pressione, della temperatura, dell'energia interna ecc. Il valore cioè dell'entropia in uno stato di equilibrio o, meglio, la differenza di entropia fra uno stato e un altro di riferimento, non può dipendere da come il sistema ha raggiunto lo stato stesso, se cioè attraverso una trasformazione reversibile o irreversibile. L'importanza delle considerazioni ora svolte sta nel fatto che *le trasformazioni reversibili* ci hanno dato la maniera di esaminare questa importante proprietà dei sistemi termodinamici, di giungere alla definizione della grandezza e ci forniscono *l'unico mezzo disponibile per calcolare le variazioni di entropia fra due stati*. Tutto ciò conferma quanto si è detto precedentemente, che cioè l'entropia non è una grandezza facilmente accessibile.

Riservandoci di esaminare in seguito i rapporti fra variazioni di entropia e quantità di calore somministrate dall'esterno lungo una trasformazione irreversibile, si vogliono ora svolgere alcune considerazioni sulle differenze di entropia fra gli stati estremi di trasformazioni irreversibili spontanee.

Consideriamo dapprima il caso della espansione libera di un gas perfetto. Allo stato iniziale (fig. 17.9a) corrispondono per le grandezze di stato che interessano i valori V_1, p_1, T, S_1 ; allo stato finale corrispondono i valori $V_2 > V_1, p_2 < p_1$, la stessa temperatura T e un valore diverso S_2 per l'entropia.

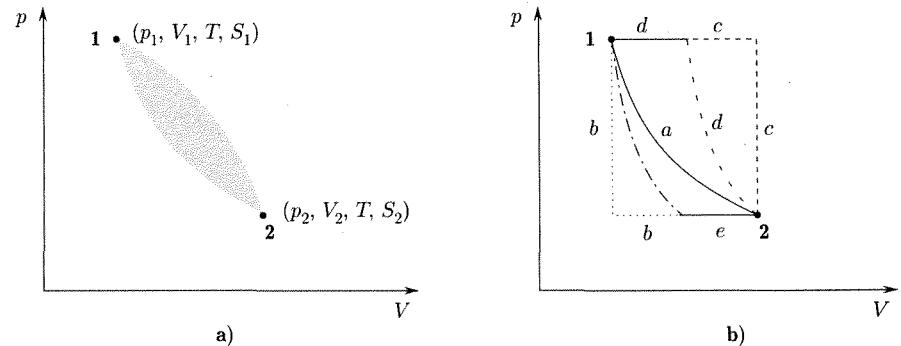


Fig. 17.9

Per calcolare la variazione di entropia $S_2 - S_1$ si immagini di sostituire alla trasformazione irreversibile reale, una trasformazione reversibile che porti il sistema dallo stato iniziale 1 allo stato finale 2 e si effettui lungo essa il calcolo con la (34) della variazione della funzione di stato. Nella figura 17.9b sono indicate varie trasformazioni reversibili che possono essere usate in maniera indifferente ($a, b, c \dots$). Nel caso presente la più semplice per i calcoli è, essendo la temperatura iniziale pari a quella finale, la trasformazione isoterma (a). In questo caso

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ .$$

Nel caso dei gas perfetti (cap. 15, par. 15.5) in una trasformazione isoterma reversibile, se n è il numero di kmoli presenti

$$(36) \quad Q_{1 \rightarrow 2} = L_{1 \rightarrow 2} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Si ha quindi

$$(37) \quad S_2 - S_1 = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Essendo $V_2 > V_1$, la variazione di entropia è positiva e cresce assieme a V_2/V_1 . Nella trasformazione spontanea il lavoro verso l'esterno è nullo, cioè il sistema ha perduto la capacità a compiere verso l'esterno il lavoro $L_{1 \rightarrow 2}$ dato dalla (36).

Si consideri come secondo esempio il passaggio di calore da un corpo caldo A (temperatura T_1) a uno freddo B (temperatura T_2). Il passaggio della quantità di calore dQ da A a B è un processo spontaneo irreversibile. Per calcolare la variazione di entropia a esso associata si immagini di sostituire al processo reale un processo reversibile che produca lo stesso effetto. In tale trasformazione la quantità di calore dQ è ceduta dal corpo A alla sua temperatura T_1 e una uguale quantità di calore è presa dal corpo B alla temperatura T_2 . Si ha per la variazione di entropia del sistema

$$(38) \quad dS = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

La variazione di entropia fra lo stato finale e quello iniziale nel processo irreversibile elementare è positiva poiché $T_2 < T_1$. Contemporaneamente il sistema ha perduto parte della sua capacità a compiere lavoro.

Vogliamo trarre una importante conclusione dall'esempio ora considerato. Se per semplicità si suppone che i due corpi posti a contatto abbiano la stessa capacità termica \bar{C} , indicando con T_m la temperatura finale, si ha che la variazione di entropia del sistema è la somma della variazione relativa al primo corpo, pari a $\int_{T_1}^{T_m} dQ/T = \bar{C} \int_{T_1}^{T_m} dT/T$ e della analogia variazione per il secondo corpo. Si ha

$$\Delta S = \bar{C} \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} + \bar{C} \int_{T_2}^{T_m} \frac{dT}{T} = \bar{C} \ln \frac{T_m^2}{T_1 T_2}.$$

Essendo $T_m = (T_1 + T_2)/2$, e quindi (con $T_1 - T_2 = \Delta T$)

$$T_m^2 = \frac{1}{4} [(T_1 - T_2)^2 + 4T_1 T_2] = \frac{1}{4} [\Delta T^2 + 4T_1 T_2],$$

risulta

$$\Delta S = \bar{C} \ln \left[\frac{1}{4} \frac{\Delta T^2}{T_1 T_2} + 1 \right].$$

Se si fa tendere ΔT a zero (e quindi T_1 e T_2 a T) si può sviluppare il logaritmo nella forma

$$\ln \left[\frac{1}{4} \frac{\Delta T^2}{T_1 T_2} + 1 \right] \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2$$

e si ha

$$(39) \quad \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \Delta S = \frac{\bar{C}}{4} \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2.$$

Si ottiene così l'importante risultato che la variazione di entropia corrispondente a un passaggio irreversibile di calore da un corpo a temperatura maggiore a uno a temperatura minore è un infinitesimo del secondo ordine se la differenza di temperatura è un infinitesimo del primo ordine. Questo risultato giustifica il fatto di

Per il calcolo della variazione dell'entropia si può scegliere una qualunque trasformazione che porti il sistema dallo stato iniziale a quello finale

considerare reversibili gli scambi infinitesimi di calore fra corpi aventi temperature che differiscano fra loro per un infinitesimo.

L'entropia di un sistema è massima quando è minima la capacità di effettuare variazioni spontanee

Questi esempi mostrano che la grandezza entropia, come è stata introdotta, è una misura della tendenza dei sistemi a subire variazioni spontanee che li portino verso stati di equilibrio e della capacità dei sistemi a compiere lavoro in opportune trasformazioni: il valore dell'entropia di un sistema cresce quando il sistema subisce variazioni spontanee e quindi quando perde parte della sua capacità a subire tali variazioni e a compiere lavoro in opportune trasformazioni. *L'entropia di un sistema raggiunge un massimo quando la capacità a subire variazioni spontanee raggiunge un minimo* (stato di equilibrio termodinamico).

Prima di chiudere questo paragrafo è utile fare un'altra osservazione che spesso si dimostra utile nel calcolo della entropia dei sistemi. Quando il sistema, che è composto di parti, è tale che tanto l'energia interna quanto il lavoro compiuto dal sistema possano esprimersi come somme delle analoghe grandezze relative alle parti componenti, anche l'entropia del sistema è somma delle entropie dei costituenti.

Se infatti

$$\Delta U = \sum \Delta U_i \quad L = \sum L_i$$

per il primo principio della termodinamica si ha

$$Q = \sum Q_i$$

e quindi

$$dQ = \sum dQ_i$$

e

$$(40) \quad dS = \frac{dQ}{T} = \sum dS_i .$$

■ 17.9. DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS

Si consideri ora il caso di cicli reali, irreversibili, per i quali è valida la (32): in particolare, si consideri un ciclo formato da una trasformazione irreversibile che porti da uno stato 1, di entropia S_1 , a uno stato 2, di entropia S_2 , e da una trasformazione reversibile che riporti da 2 a 1. Tale ciclo è irreversibile e per esso si può scrivere

$$(41) \quad \oint \frac{dQ}{T} = \left(\int_1^2 \frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} + \left(\int_2^1 \frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} \\ = \left(\int_1^2 \frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} + (S_1 - S_2) \leq 0 .$$

Cioè

$$(42) \quad \left(\int_1^2 \frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} \leq S_2 - S_1$$

o

$$(43) \quad \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} \leq dS .$$

La variazione di entropia nelle trasformazioni reali è sempre maggiore dell'integrale di Clausius

La (42) è la cosiddetta inequazione o disuguaglianza di Clausius, espressione del secondo principio della termodinamica per una trasformazione irreversibile. L'integrale di linea di dQ/T è minore della variazione di entropia. Resta quindi evidente che per il calcolo delle variazioni di entropia occorre, come si è detto, fare uso di trasformazioni reversibili.

La ragione della disuguaglianza è facilmente vista. Se si considera una trasformazione infinitesima del sistema, sulla variazione d'entropia hanno influenza due elementi, la quantità di calore ricevuta dal sistema e la temperatura alla quale il processo accade. Nel caso in cui si tratti di trasformazioni reversibili non ci sono incertezze giacché la quantità di calore che il sistema riceve è pari a quella fornita dall'esterno e la temperatura del processo è quella della sorgente esterna. Nel caso di trasformazioni irreversibili questo non è più vero, giacché cause di irreversibilità sono proprio:

1. l'esistenza di differenze di temperatura fra sorgenti e sistema o fra le varie parti del sistema;
2. l'esistenza di processi, come l'attrito, che conducono a trasformazioni di energia meccanica, elettrica ecc., in energia termica. In questo caso il sistema, ammesso che la sua entropia sia somma delle entropie delle parti costituenti, andrebbe diviso in un numero sufficientemente elevato di piccole parti (al limite infinitesime) tali che ciascuna possa ritenersi a temperatura costante.

Per ogni elemento i la variazione di entropia nella trasformazione infinitesima sarebbe

$$dS_i = \frac{dQ_i}{T_i}$$

essendo peraltro dQ_i , la quantità di calore totale ricevuta dall'elemento, cioè la somma di quella dQ_e ricevuta da sorgenti esterne all'intero sistema, di quella dQ_t ricevuta complessivamente per trasmissione dagli elementi contigui, e di quella dQ_a prodotta nel suo interno per trasformazione di altri tipi di energia (per es. per attrito); T_i è la temperatura dell'elemento durante la trasformazione. Si può scrivere

$$(44) \quad dS_i = \frac{(dQ_e)_i + (dQ_t)_i + (dQ_a)_i}{T_i}.$$

La variazione di entropia dell'elemento i per una trasformazione finita sarà

$$(45) \quad \int_1^2 \frac{(dQ_e)_i}{T_i} + \int_1^2 \frac{(dQ_t)_i}{T_i} + \int_1^2 \frac{(dQ_a)_i}{T_i}.$$

Per l'intero sistema

$$(46) \quad S_2 - S_1 = \sum_1^n \left\{ \int_1^2 \frac{(dQ_e)_i}{T_i} + \int_1^2 \frac{(dQ_t)_i}{T_i} + \int_1^2 \frac{(dQ_a)_i}{T_i} T \right\}.$$

La seconda sommatoria dà il contributo alla variazione dell'entropia del sistema dovuto a trasmissioni di calore nel sistema stesso: abbiamo già visto nel caso di passaggio di calore fra un corpo caldo e uno più freddo che la variazione di entropia è positiva. Questo risultato si estende facilmente al caso in cui lo scambio di calore avvenga fra più di due corpi. La seconda sommatoria è quindi positiva. Lo stesso vale per la terza sommatoria giacché la trasformazione di energia di altra specie in calore non può dare che dei termini dQ_a positivi.

Ne segue che nelle trasformazioni irreversibili la variazione di entropia può essere ancora calcolata mediante la stessa formula che vale per le trasformazioni reversibili a patto di considerare esattamente tutte le quantità di calore che entrano in gioco e le temperature delle varie parti del sistema. Naturalmente ciò è praticamente impossibile. È evidente peraltro che, se ci si limita a considerare solamente le quantità di calore ricevute dall'esterno, cioè solo la prima sommatoria nella (46), tale termine risulterà inferiore alla variazione di entropia fra lo stato iniziale e finale. Ancora di più, se nel calcolo si usano le temperature delle sorgenti (superiori a quelle del sistema se le quantità di calore sono cedute al sistema, inferiori se sono cedute dal sistema), è evidente che

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

*Rapporto tra
la variazione di entropia
e gli scambi termici reali
rapportati
alla temperatura*

17.10. ENTROPIA NEI SISTEMI ISOLATI. PROCESSI IRREVERSIBILI

Nel caso che si consideri un sistema isolato, per il quale quindi non sono possibili scambi con l'esterno ($dQ = 0$), le relazioni (34) e (42) si scrivono: per trasformazioni reversibili

$$(47) \quad S_2 = S_1$$

e per trasformazioni irreversibili

$$(48) \quad S_2 \geq S_1.$$

Nelle trasformazioni di un sistema isolato pertanto la entropia finale non può essere mai minore di quella iniziale. Se la trasformazione è reversibile si può avere solo trasferimento di entropia da una parte a un'altra, con conservazione dell'entropia totale. Nel caso di trasformazioni irreversibili l'entropia del sistema nel suo complesso aumenta. Naturalmente ciò non impedisce che la entropia di qualche parte del sistema diminuisca: in tal caso però v'è qualche altra parte del sistema la cui entropia aumenta ancora di più in modo da rispettare la condizione posta. Si pensi per es. a un sistema isolato formato da due corpi inizialmente a temperature diverse. La variazione di entropia del sistema in una trasformazione irreversibile elementare è

$$dS = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

positiva perché $T_1 > T_2$. Se si considera il primo corpo, esso subisce una diminuzione di entropia che peraltro è più che compensata dall'aumento di entropia del secondo corpo.

Si osservi che per le trasformazioni di un qualsiasi sistema ci si può sempre ridurre a considerare le trasformazioni di un nuovo sistema da considerarsi isolato: basta infatti comprendere nel nuovo sistema i corpi che costituiscono l'ambiente con cui il sistema originario interagisce. Siccome le trasformazioni reali sono tutte irreversibili si può dire che il secondo principio della termodinamica equivale ad affermare che l'*entropia dell'Universo cresce*. Per il primo principio, ricordiamo che invece l'*energia dell'Universo è costante*. È evidente quindi che per la grandezza di stato entropia non può valere un principio di conservazione quali quelli validi per altre grandezze (energia, quantità di moto, momento della quantità di moto).

Varie volte si sono considerate le caratteristiche dei processi irreversibili, che ora si possono sintetizzare dicendo che la differenza fra processi reversibili e irreversibili sta nella variazione dell'entropia dell'Universo: nei processi reversibili l'entropia complessiva del sistema e dell'ambiente resta costante, nei processi irreversibili cresce.

L'entropia di un sistema isolato non può mai diminuire e rimane invariata solo se in esso avvengono processi (ideali) reversibili

Esempi

- Per misurare la capacità termica di un oggetto, questo venga scaldato a 100 °C e poi messo in un calorimetro di Bunsen ove produce la fusione di $m = 20$ g di ghiaccio. Ponendo praticamente il calore latente di fusione pari a $q_f = 80$ cal/g (in realtà 79,6 cal/g), la capacità termica del corpo risulta essere

$$\bar{C} = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{80 \times 20}{100} = 16 \text{ cal/K.}$$

Il processo di raffreddamento del corpo nel calorimetro è irreversibile e quindi la variazione di entropia del corpo e del sistema formato dal corpo e dal calorimetro (sistema isolato) deve essere positiva.

Per calcolare la variazione di entropia del corpo si immagini di sostituire al processo irreversibile un raffreddamento reversibile ponendo il corpo a contatto con sorgenti a temperatura gradatamente decrescente da 100 a 0 °C. La corrispondente variazione di entropia risulta:

$$\Delta S_1 = \int_{373}^{273} \frac{dQ}{T} = \bar{C} \int_{373}^{273} \frac{dT}{T} = \bar{C} \ln \frac{273}{373} \simeq -4,99 \text{ cal/K}.$$

Il corpo subisce una diminuzione di entropia. Vediamo la variazione di entropia del calorimetro, in seguito alla fusione di 20 g di ghiaccio alla temperatura costante di 273 K

$$\Delta S_2 = \frac{m q_{lf}}{T} = \frac{1600}{273} = 5,6 \text{ cal/K}.$$

Tale variazione è positiva.

La variazione di entropia complessiva del sistema isolato è

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0,61 \text{ cal/K}$$

positiva.

2. Una massa $m = 5\text{kg}$ di acqua alla temperatura di 80 °C venga immessa in un lago. La temperatura dell'acqua del lago è inizialmente di 20 °C e resta praticamente invariata per l'operazione che si considera. Cerchiamo di calcolare la variazione di entropia della massa d'acqua messa nel lago e del sistema massa inserita nel lago + lago (sistema isolato). Si tratta di un processo irreversibile. Immaginiamo di sostituire al raffreddamento irreversibile dei 5 kg di acqua da 80 a 20 °C una trasformazione reversibile. Come nell'esempio precedente, per la variazione di entropia dei 5 kg di acqua si ha (esprimendo le quantità di calore in J):

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= mc \ln \frac{293}{353} = 4,18 \cdot 5 \cdot 10^3 \log 0,83 \\ &\simeq -3,89 \cdot 10^3 \text{ J/K}.\end{aligned}$$

Tale variazione è negativa.

Per il calcolo della variazione di entropia del lago, a esso viene fornita una quantità di calore

$$\begin{aligned}Q &= mc(T_2 - T_1) = 4,18 \cdot 5 \cdot 10^3 (353 - 293) \\ &\simeq 12,54 \cdot 10^5 \text{ J}.\end{aligned}$$

Immaginando che tale quantità di calore venga data reversibilmente alla temperatura costante del lago, la variazione di entropia risulta essere

$$\Delta S_2 = \frac{12,54 \cdot 10^5}{293} \simeq 4,28 \cdot 10^3 \text{ J/K}$$

essa è positiva.

La variazione di entropia nel sistema isolato

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0,39 \cdot 10^3 \text{ J/K}$$

è positiva.

17.11. TEMPERATURA ED ENTROPIA COME COPPIA DI VARIABILI DI STATO

Si è visto in precedenza come i sistemi termodinamici possano essere sottoposti ad azioni di diverso genere e come ciascuna di queste azioni conduca a uno scambio di energia: ogni tipo di scambio, o contatto, energetico

porta alla introduzione, per la determinazione dello stato termodinamico, di una coppia di variabili di stato (una intensiva e una estensiva) legate fra loro e con altre variabili da una equazione di stato valida per il sistema che si considera. Si è anche preannunciato che per la interazione che conduce a scambi di energia sotto forma termica (contatto termico), la coppia è costituita dalle grandezze temperatura (intensiva) ed entropia (estensiva). Si è ora infatti in condizione di porre:

$$dQ = T dS$$

formula del tutto analoga a quelle trovate (cap. 14, par. 14.6) per scambi di altri tipi di energia in trasformazioni reversibili: per es., per l'energia meccanica nel caso di azioni che si esplicano con una pressione

$$dL = pdV.$$

Per quanto si è detto riguardo all'entropia, è inoltre evidente che essa è una grandezza estensiva, giacché se si riduce in scala l'estensione del sistema l'entropia varia proporzionalmente; l'entropia cioè è proporzionale alla quantità di sostanza che costituisce il sistema.

È possibile inoltre per ogni sistema stabilire una relazione che lega l'entropia ad altre grandezze di stato. Per un gas ideale, per es., si troverà (par. 17.16)

$$(49) \quad S = R \ln \left(VT^{\frac{C_V}{R}} \right) + \text{cost.}$$

Entropia come variabile di stato

L'entropia quindi va considerata come una variabile di stato al pari di p , V , T ecc. Il fatto di usare l'entropia come una variabile di stato indipendente può sembrare strano, ma ciò è dovuto solamente al fatto che non si è familiari con tale grandezza perché non si dispone di uno strumento capace di misurarla direttamente, come invece avviene per p , V , T e altri parametri. Spesso conviene tuttavia scegliere l'entropia come variabile indipendente. Si usa a volte rappresentare le trasformazioni prendendo come variabili T e S . In un piano (entropico) che ha sulle ascisse le entropie (contate da uno zero convenzionale) e le temperature sulle ordinate (fig. 17.10) l'area della figura formato dalla curva della trasformazione, l'asse delle ascisse e le ordinate per i punti estremi della trasformazione, dà la quantità di calore fornita dall'esterno durante il processo. Se la trasformazione è ciclica, l'area racchiusa dal ciclo è pari alla quantità di calore fornita al sistema se il ciclo è percorso in senso orario.

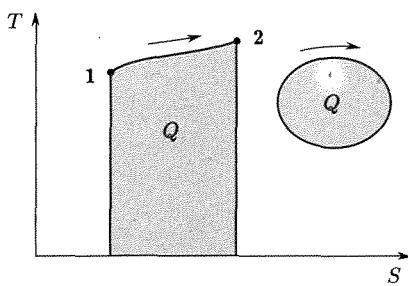


Fig. 17.10

■ 17.12. ENTROPIA E DISORDINE

Le considerazioni finora svolte sono strettamente termodinamiche: il sistema termodinamico viene considerato nel suo complesso, quale è descritto mediante grandezze globali p , V , T ecc. Il concetto di entropia può essere, peraltro, ulteriormente illustrato con considerazioni che partono dalla struttura atomica della materia e che sono proprie della meccanica statistica.

Si noti innanzitutto una fondamentale differenza fra energie, meccanica, elettrica ecc., da una parte, ed energia termica dall'altra. Le prime

forme di energia hanno associata una caratteristica di ordine che le rende completamente disponibili per trasformazioni in altre forme di energia: un corpo in moto è tale che le energie cinetiche delle sue parti componenti sono relative fra di loro e tale energia può interamente essere trasformata in energia potenziale e così via. L'energia termica è dovuta all'agitazione disordinata delle parti costituenti il corpo ed ha associata una caratteristica di disordine, che è la reale caratteristica che impedisce la trasformazione completa di energia termica in energie di altro genere. Spesso si dice che l'energia termica è una forma degradata di energia, tanto più degradata quanto più bassa è la temperatura del corpo che la possiede, giacché al decrescere della temperatura decresce la porzione di tale energia che può essere trasformata in altre forme di energia (per es. energia meccanica) in macchine che devono funzionare fra questa temperatura e quella, in genere fissa, dell'ambiente.

I processi naturali, in quanto implicano sempre, in quantità più o meno grandi, trasformazioni di energia ordinata in energia disordinata, conducono sempre a una degradazione, cioè avvengono sempre nella direzione di un aumento del disordine. Siccome i processi spontanei avvengono anche con un aumento di entropia, è evidente che debba esistere una relazione fra la grandezza termodinamica entropia e il disordine esistente su scala molecolare o atomica: è possibile vedere che *l'entropia è una misura del disordine del sistema*.

Se per es. si considera un cristallo perfetto alla temperatura dello zero assoluto, esso è costituito, in una descrizione classica, da una distribuzione regolare di atomi fissi in posizioni reticolari: l'ordine esistente in tale struttura è massimo, il disordine è nullo, l'entropia ha il valore più basso possibile (che può essere posto uguale a zero). Se si somministra calore il cristallo si riscalda, oscillazioni cominciano ad aver luogo nell'edificio reticolare, si instaura disordine e aumenta man mano che la temperatura cresce: lo stesso avviene per l'entropia. A un certo punto si giunge alla temperatura di fusione in corrispondenza alla quale il corpo passa allo stato liquido con un notevole aumento nel grado di disordine. Il processo richiede la somministrazione di una quantità di calore (di fusione) a temperatura costante: anche l'entropia subisce un brusco salto. Gli atomi nel liquido che è stato ottenuto conservano ancora un certo ordine simile a quello del cristallo, ma tale ordine è imperfetto e si estende solo a brevi distanze da ciascun atomo (corto raggio). Continuando la somministrazione di calore, l'agitazione termica aumenta, l'ordine pseudocristallino diminuisce e l'entropia aumenta. Si giunge infine alla ebollizione in corrispondenza alla quale si ha ancora un salto brusco nel disordine (molto maggiore che per la fusione), una quantità di calore fornita a temperatura costante e un salto brusco nell'entropia. Un ulteriore riscaldamento aumenta la agitazione termica delle molecole che si muovono a caso, cioè il disordine, e con esso l'entropia.

Questo insieme di trasformazioni così eseguite può essere reversibile giacché la somministrazione o la estrazione di calore può essere fatta quasi staticamente usando sorgenti la cui temperatura sia infinitamente poco diversa da quella del corpo. Riportando il corpo alle condizioni originarie anche il disordine gradatamente scompare, mentre l'entropia ritorna a zero.

Il passaggio dallo stato ordinato del cristallo allo zero assoluto a quello di massimo disordine quando è vaporizzato ad alte temperature, può però

farsi in maniera diversa, senza fornire calore dall'esterno, ma provocando la trasformazione di energia ordinata, come energia meccanica o elettrica. Si può pensare allo scopo di usare l'attrito, oppure più semplicemente di portare il corpo a una elevata velocità in modo che possieda una sufficiente energia cinetica e farlo poi cozzare contro un ostacolo: l'energia cinetica ordinata si trasforma in energia disordinata dei vari atomi, cioè in energia termica e il cristallo viene trasformato in vapore. Lo stato finale è lo stesso di quello che si aveva nella prima trasformazione: il disordine e l'entropia sono identici a quelli che si erano stabiliti con il riscaldamento reversibile. È evidente tuttavia che questo secondo processo non è reversibile: ciò infatti richiederebbe che la energia cinetica disordinata posseduta dai vari atomi allo stato di vapore possa in eventi del tutto casuali ritornare sotto forma di energia cinetica ordinata dell'insieme, mentre gli atomi si riuniscono a formare il cristallo perfettamente ordinato come era prima dell'urto. Si vede quindi che mentre il passaggio da energia ordinata a energia disordinata non ha limitazioni di sorta, il passaggio inverso è praticamente impossibile e ciò è la causa che rende irreversibili i processi naturali.

Le considerazioni ora fatte ci porterebbero a dire che l'inversione dei processi spontanei è enormemente improbabile come quando, avendo decomposto un mosaico, mescolate le tessere di diverse forme e colori, si speri di riavere l'immagine di partenza riponendo le tessere a caso una accanto all'altra. In realtà l'irreversibilità dei processi reali ha una base ancora più profonda che si lega al principio di indeterminazione: per invertire sperimentalmente un processo quando si è stabilito del disordine, bisognerebbe dare alle particelle a ogni istante posizioni e velocità ben precise in modo che esse possano cooperare a ricostruire il sistema originario. Questo non è possibile se il disordine è sceso a particelle sufficientemente piccole per cui assume importanza il principio di indeterminazione: non è possibile infatti regolare le coordinate e le velocità di una particella con precisioni superiori a un certo valore.

L'esempio su illustrato ha in conclusione mostrato che il disordine e l'entropia sono caratteristici di uno stato termodinamico del sistema; entrambi aumentano per somministrazione di calore dall'esterno o per trasformazione di energia di prima specie, ordinata, in energia termica. Altri esempi possono essere facilmente pensati per completare l'esame del parallelismo fra disordine ed entropia.

Si può quindi concludere che *la grandezza termodinamica entropia può essere presa come una misura del disordine esistente nel sistema termodinamico su scala molecolare e atomica*.

La meccanica statistica consente di precisare la relazione analitica fra queste due proprietà dei sistemi. Tale relazione è stata posta da Boltzmann nella forma:

(50)

$$S = k \ln W$$

essendo k la costante di Boltzmann e W un parametro che Boltzmann chiamò probabilità termodinamica⁽³⁾ di realizzare lo stato considerato (macrostato): supponendo che tutti i microstati abbiano uguale probabilità a priori (secondo la definizione normale; vedi cap. 14, par. 14.3),

La relazione di Boltzmann tra entropia e probabilità termodinamica di un sistema

⁽³⁾ Le probabilità termodinamiche (in genere $\gg 1$) non vanno confuse con le normali probabilità (< 1) incontrate nello studio statistico di eventi a caso (cap. 12, par. 12.3).

la *probabilità termodinamica* è proporzionale, per ogni macrostato, al numero di microstati corrispondenti. Ricordando quanto è stato detto su macrostati e microstati è evidente che in effetti W cresce con il disordine caratteristico dello stato e che uno stato può essere realizzato tanto più facilmente quanto maggiore è il corrispondente W .

Nelle seguenti considerazioni si suppone per semplicità di avere a che fare con un gas. L'estensione al caso di sistemi qualsiasi viene fatta in meccanica statistica con trattazioni più complete.

Prendiamo in considerazione lo *spazio delle fasi* a sei dimensioni (cap. 15, par. 15.9) in cui sono rappresentati contemporaneamente gli stati dinamici delle molecole del gas mediante i parametri che determinano la posizione (x, y, z) e la quantità di moto (p_x, p_y, p_z) di ciascuna molecola in funzione del tempo. Se il gas è formato da N molecole, il suo stato in un certo istante sarà rappresentato da N punti. Nell'intervallo fra due urti, ciascun punto rappresentativo di una molecola si muove con continuità nello spazio delle fasi, giacché così variano x, y, z . In corrispondenza a una collisione fra due molecole i punti rappresentativi saltano in altre posizioni dello spazio delle fasi, giacché le quantità di moto hanno variazioni discontinue. In tale spazio il volume elementare è $d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$.

Lo spazio delle fasi venga ora diviso in celle di ugual volume, essendo tale volume scelto in modo da essere sufficientemente piccolo sì che le proprietà fisiche (posizione e quantità di moto) delle molecole i cui punti rappresentativi cadono nella singola cella siano praticamente le stesse, e sufficientemente grande in modo che in ciascuna cella vi siano parecchi punti rappresentativi. Un *microstato* del sistema in un qualsiasi istante è rappresentato da una distribuzione dei punti rappresentativi delle N molecole fra le celle. In una trattazione classica, quale quella che qui stiamo accennando, le molecole vanno pensate distinguibili. Una variazione, quindi, dello stato di due o più molecole, tale che i corrispondenti punti rappresentativi si scambiano fra loro rimanendo nella stessa cella, non produce una variazione del microstato giacché le proprietà dinamiche delle molecole i cui punti stanno nella stessa cella sono praticamente le stesse. Invece una variazione che faccia scambiare i punti rappresentativi di due molecole fra celle diverse conduce a un nuovo microstato poiché le molecole hanno scambiato le loro proprietà dinamiche. Va avvertito che nella trattazione quantistica si ammette che le molecole siano indistinguibili fra loro e quindi il secondo tipo di urto non muta il microstato.

Lo stato del sistema quale si può rilevare con misure globali (p, V, T), cioè il *macrostato*, a un certo istante dipende esclusivamente dalla occupazione complessiva delle singole celle dello spazio delle fasi da parte dei punti rappresentativi, e non dal fatto che il punto rappresentativo di ciascuna particolare molecola si trovi in una determinata cella.

Un macrostato, cioè, a un certo istante è rappresentato dai numeri $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots$ di punti rappresentativi nelle celle $1, 2, \dots, i, \dots$. Poiché a ogni macrostato corrispondono molti microstati diversi, la *probabilità termodinamica del macrostato* $W(N_1, N_2, \dots)$ è pari al numero di microstati che realizzano lo stesso macrostato $\{N_1, N_2, \dots\}$ moltiplicato per la probabilità a priori di un microstato.

Nei riguardi delle probabilità a priori dei microstati, qui si assume, senza presentare le giustificazioni fornite dalla meccanica statistica, la semplice norma che tutti i microstati abbiano la stessa probabilità a priori di verificarsi, cioè che, ragionando nello spazio delle fasi, non vi sia nessuna ragione a priori perché un punto rappresentativo possa venirsi a trovare con maggiore o minore probabilità in una qualsiasi delle celle di ugual volume. Con tale ipotesi, la probabilità a priori che un punto particolare si trovi in una determinata cella, probabilità che indicheremo con g e supporremo indipendente dal numero di punti che a un istante si trovano in una cella, è una semplice probabilità geometrica: essa è cioè il rapporto fra il volume della cella e il volume della regione occupata dai punti rappresentativi del sistema nello spazio delle fasi. Ne segue che la probabilità a priori di un microstato è

$$g^{N_1} g^{N_2} \dots = g^N$$

essendo $N = \sum N_i$ il numero totale di molecole o, quel che è lo stesso, di punti rappresentativi.

Il numero di microstati che realizzano lo stesso macrostato $\{N_1, N_2, \dots\}$ è evidentemente dato dal numero di maniere in cui N oggetti possono essere distribuiti

in gruppi di N_1, N_2, N_3, \dots . Tale numero di combinazioni è

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\dots}$$

La probabilità, perciò, del macrostato $\{N_1, N_2, \dots\}$ ⁽⁴⁾ è

$$(51) \quad W(N_1, N_2, \dots) = \frac{N!}{N_1!N_2!\dots} g^N.$$

Si vuole ora individuare il legame fra probabilità di un macrostato e disordine.

Si supponga di avere un sistema di N molecole e di considerare varie distribuzioni dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi, e i macrostati corrispondenti. In tutti questi casi g^N ha lo stesso valore, sicché le probabilità dei macrostati dipendono dal primo fattore. Se si immagina che tutti i punti rappresentativi stiano in una sola cella $N_1 = N, N_2 = N_3 = \dots = 0$, il fattore vale $N!/N! = 1$; ricordiamo che $0! = 1$. L'ordine del macrostato corrispondente è elevato: tutte le molecole si trovano in una regione spaziale $dx dy dz$ molto piccola e sono dotate della stessa quantità di moto (nei limiti dp_x, dp_y, dp_z); esse possono essere utilizzate per produrre lavoro, per es. spingendo un pistone in un cilindro o colpendo un ostacolo qualsiasi; la loro energia cinetica è ordinata e interamente utilizzabile.

Si supponga ora che i punti rappresentativi siano distribuiti ugualmente in due sole celle; il fattore diviene

$$\frac{N!}{\frac{N}{2}! \frac{N}{2}!}$$

che è molto maggiore di 1. Per vedere come rapidamente cresca si consideri un caso numerico, lungi dalla realtà: $N = 4$. In tal caso $4!/2!2! = 6$.

La probabilità W del microstato cresce coll'aumentare del numero delle celle in cui sono distribuiti i punti rappresentativi e contemporaneamente aumentano le differenze di posizione e quantità di moto fra le particelle, cioè il disordine.

Lo stato di equilibrio, che è lo stato di massima probabilità, è anche quello di massimo disordine possibile: quando esso viene raggiunto il sistema ha perduto la tendenza a variazioni spontanee e la capacità di compiere lavoro.

Le considerazioni precedenti mostrano l'esistenza di un legame diretto fra disordine e probabilità che lo stato termodinamico venga realizzato e quindi giustificano una relazione fra W ed entropia. Questi risultati, ottenuti considerando sistemi gassosi, si possono estendere a tutti i sistemi termodinamici nella meccanica statistica.

Per mostrare che la forma (50) della relazione fra W e S corrisponde ai fatti consideriamo la sua applicazione a una trasformazione particolare, qual è l'espansione libera di un gas perfetto.

Si supponga innanzitutto di avere N molecole di un gas contenute in un recipiente di volume V . Limitandoci a considerare il sottospazio a tre dimensioni x, y, z , che coincide con lo spazio fisico, dello spazio delle fasi, se indichiamo con V_A il volume di una cella (sottomultiplo di V), la probabilità che si realizzi il macrostato in cui tutte le molecole si trovano in V_A è

$$(52) \quad W_A = \frac{N!}{N!0!} \left(\frac{V_A}{V} \right)^N = \left(\frac{V_A}{V} \right)^N.$$

Tale probabilità è proporzionale a V_A^N . Questo risultato si poteva ottenere in questo caso direttamente osservando che la probabilità di trovare una certa molecola nella posizione V_A di V è V_A/V e la probabilità di trovare nella stessa parte contemporaneamente N molecole è il prodotto di N probabilità identiche.

Se si considera allora un altro volume $V_B > V_A$ (che in particolare può coincidere con V), la probabilità che le N molecole si trovino in V_B , cioè la probabilità

⁽⁴⁾ Una maniera per ottenere la legge di distribuzione di Boltzmann (cap. 15, par. 15.11) è quella di usare la (51) e di determinare le N_i in modo che W sia massima, tenendo conto che $\sum N_i = N$ e che l'energia meccanica totale è costante essendo le collisioni elastiche. Si assume cioè che il gas è in equilibrio quando si trova nel macrostato di massima probabilità, compatibile con le condizioni ora menzionate.

del corrispondente macrostato è

$$(53) \quad W_B = \left(\frac{V_B}{V} \right)^N .$$

Quindi

$$(54) \quad \frac{W_B}{W_A} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^N > 1 .$$

Si consideri ora un sistema formato da due recipienti collegati da un rubinetto e si supponga di avere inizialmente un numero N di molecole nel primo recipiente di volume V_A . All'atto in cui si apre il rubinetto offrendo al gas il volume complessivo V_B dei due recipienti, il sistema passa per un'espansione libera da uno stato di probabilità W_A a uno stato di probabilità maggiore W_B . Se si applica la (50) a questa trasformazione

$$S_B - S_A = k \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^N .$$

Se N_A^* è il numero di Avogadro, e $kN_A^* = R$,

$$(55) \quad S_B - S_A = R \frac{N}{N_A^*} \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

essendo $n = N/N_A^*$ il numero di kmoli di molecole del gas nel sistema. Tale risultato coincide con la variazione di entropia nella espansione libera di un gas perfetto, già calcolata termodinamicamente [eq. (37)].

■ 17.13. ENTROPIA E INFORMAZIONE

Vogliamo ora accennare brevemente alla relazione che intercorre fra entropia e *informazione*, essendo questa ultima definita con particolare riferimento ai sistemi fisici, ai quali siamo qui interessati.

La definizione di informazione rientra nella trattazione statistica dei problemi. Se si considera un problema per il quale esistono P_0 soluzioni, casi, possibili di uguale probabilità ovvero, esprimendosi in termini fisici, se si considera un sistema fisico che in determinate condizioni può occupare un certo numero P_0 di stati diversi con uguale probabilità a priori, specificare quale di questi stati venga in realtà occupato richiede una informazione supplementare, che indicheremo con I . Ovviamente, l'informazione necessaria sarà tanto maggiore quanto maggiore è il numero P_0 degli stati possibili. Tale *informazione* viene definita da

$$(56) \quad I = K \ln P_0 .$$

Si sceglie questa definizione logaritmica per assicurare la proprietà di additività per la informazione quando due problemi indipendenti sono fra loro accoppiati. Se, per es., il primo ha P_{01} soluzioni ugualmente probabili a priori e il secondo P_{02} , il numero totale di stati iniziali possibili è

$$P_0 = P_{01} \cdot P_{02}$$

e l'informazione richiesta per determinare lo stato realizzato è

$$(57) \quad I = K \ln(P_{01} \cdot P_{02}) = I_1 + I_2$$

essendo

$$I_1 = K \ln P_{01} \quad I_2 = K \ln P_{02} .$$

Nella definizione su riportata di informazione si è considerato il caso in cui l'informazione raccolta consenta di determinare uno stato finale ben definito da una potenziale

situazione ove esistono P_0 (micro-) stati. Nel caso invece che la informazione raccolta consenta solo di limitare a un numero $P_1 < P_0$ gli stati possibili di uguale probabilità, tale informazione va posta, generalizzando la (56):

$$(58) \quad I_1 = K \ln \frac{P_0}{P_1} = K \ln P_0 - K \ln P_1.$$

La costante K può avere dimensioni fisiche e valori diversi secondo le scelte che vengono fatte per I .

Nella teoria dell'informazione si sceglie di avere I come un numero puro e lo stesso ne consegue per K . Si sceglie anche di usare unità binarie (bit).

In tal caso

$$K = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e.$$

Se quindi si considera un problema nel quale il sistema può assumere posizioni di uguale probabilità a priori descritte da n scelte binarie (con valori 0 o 1), il numero totale di stati possibili è

$$P_0 = 2^n$$

e l'informazione necessaria per determinare uno stato risulta

$$I = \log_2 e \cdot n \ln 2 = n$$

cioè

$$(59) \quad I = \log_2 P_0 \text{ bits.}$$

Una scelta possibile, utile in particolare nelle considerazioni sui rapporti tra informazione ed entropia, è quella di dare a K le stesse dimensioni e lo stesso valore della costante di Boltzmann nella (50) [si noti la somiglianza fra le relazioni (56) e (50)]. In tal caso

$$(60) \quad K = k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

e l'informazione I ha le stesse dimensioni dell'entropia termodinamica.

Dopo queste premesse, si ritorni a considerare la relazione (50) di Boltzmann che esprime l'entropia per un macrostato di un sistema termodinamico, quale per es. una massa gassosa, per il quale si possa assumere che tutti i microstati che possono realizzare il macrostato abbiano la stessa probabilità a priori. In tal caso la probabilità termodinamica W è proporzionale [si veda la (51)] al numero P di microstati della (56) e la (50) può anche essere posta come

$$(61) \quad S = k \ln P.$$

Si consideri ora una operazione la quale fornisca informazioni tali da restringere il numero di casi (microstati) possibili di uguale probabilità per un sistema, da un numero iniziale P_0 a un numero $P_1 < P_0$. L'informazione richiesta è

$$(62) \quad I_1 = k \ln \frac{P_0}{P_1}.$$

Contemporaneamente l'entropia è passata da

$$S_0 = k \ln P_0$$

a

$$(63) \quad S_1 = k \ln P_1 < S_0.$$

L'informazione è naturalmente ottenuta per mezzo di misure effettuate mediante l'impiego di opportuni apparati sperimentali in un laboratorio, a temperatura T . Ciò richiede:

1. portare a contatto (cioè a costituire un unico sistema) due sistemi originari (quello in esame e l'apparato di misura) inizialmente separati e aventi entropie rispettivamente S_0 e S'_0 ;
2. effettuare le misurazioni;
3. separare i due sistemi originari (entropie finali S_1 e S'_1).

L'entropia del sistema composto nella fase di misura (isolato) non può che aumentare, e quindi all'atto della separazione di ha:

$$S_1 + S'_1 \geq S_0 + S'_0.$$

La diminuzione di entropia del sistema in esame, secondo la (63), è possibile perché l'entropia finale dell'apparato di misura che fornisce l'informazione S'_1 può risultare maggiore di quella iniziale S'_0 . La (62) si può scrivere

$$(64) \quad I_1 = k \ln P_0 - k \ln P_1 = S_0 - S_1 > 0.$$

*Il guadagno
di informazioni sullo
stato di un sistema
si accompagna
a una diminuzione
di entropia; viceversa,
al crescere dell'entropia
si perde informazione*

L'informazione fornita è pari alla conseguente diminuzione dell'entropia del sistema. Spesso si considera un'altra grandezza, la negentropia (pronuncia, neghen-tropia) N , definita come l'entropia cambiata di segno ($-S$). Il risultato ottenuto si esprime dicendo che l'informazione fornita è pari alla crescita della negentropia del sistema (*principio della negentropia dell'informazione*).

Si vede quindi che partendo da un sistema fisico per il quale la conoscenza si ferma a riconoscere per esso la possibilità di esistere in uno qualsiasi di P_0 microstati di uguale probabilità a priori, l'acquisizione di ulteriori informazioni può ridurre il numero di microstati a un valore inferiore P_1 .

L'entropia, come si è già detto, esprime la mancanza di ordine nel senso che il sistema allo stato delle nostre conoscenze ha uguale probabilità di esistere in uno qualsiasi dei microstati consentiti e quindi può passare da uno di essi a un altro; essa esprime anche, in un certo senso, una mancanza di informazione atta a individuare lo stato preciso della struttura interna del sistema. Nel caso per es. di una massa gassosa, la mancanza di informazioni atta a specificare le posizioni e le velocità delle singole molecole conduce all'impossibilità di distinguere due campioni che differiscono solamente per queste informazioni e pertanto a considerare un disordine insito nello stato gassoso, che è espresso dall'entropia. Si può quindi concludere che, in questo quadro, *l'entropia misura il difetto di informazione sulla struttura del sistema fisico in esame*.

■ 17.14. ENTROPIA ED ESPRESSIONI DEL PRIMO E DEL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

L'espressione già trovata del primo principio della termodinamica (cap. 14, par. 14.8)

$$dU = dQ - dL$$

può essere modificata introducendo le conclusioni tratte dal secondo principio per le trasformazioni reversibili

$$(65) \quad dQ = T dS$$

per ottenere una espressione che sintetizzi entrambi i principi e sia *valida per le trasformazioni reversibili*:

$$(66) \quad dU = T dS - dL$$

$$(67) \quad dU = T dS - p dV + F dl + H dM + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2 + \dots$$

Nella seconda espressione si è esplicitato il lavoro compiuto dal sistema sotto varie forme. Nel caso di un sistema che compie lavoro semplicemente perché esiste una pressione e varia il volume, si ha

$$(68) \quad dU = T dS - p dV.$$

*Espressioni
del primo principio
per trasformazioni
reversibili*

La (67) è una relazione di grandissima importanza, poiché sintetizza i due principi per le trasformazioni reversibili elementari. La sua integrazione, nei casi particolari, può farsi se sono note le relazioni che legano le variabili intensive a quelle estensive.

Si è già altre volte notato che le grandezze da assumere come variabili indipendenti possono essere scelte a piacere in numero totale pari alle maniere diverse con cui è possibile fornire energia al sistema. Per un fluido per es. si possono scegliere p e V , T e V e così via. La (67) peraltro fa vedere che le variabili *estensive* S , V , l , M ecc. sono le *variabili indipendenti naturali* che si dovrebbero usare.

L'energia interna espressa nella maniera (67), cioè in funzione delle variabili estensive, si presenta con le caratteristiche di una *funzione potenziale*. Si noti infatti che le derivate parziali rispetto a ciascuna variabile estensiva forniscono la corrispondente grandezza intensiva, che potremmo chiamare forza in senso termodinamico:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,l,\dots} = T \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,l,\dots} = -p \\ \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{S,V,l,\dots} = H \\ \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S,V,l,\dots} = \mu_i. \end{array} \right.$$

Dalla (67), inoltre, una relazione termodinamica di notevole interesse può essere ricavata. Se indichiamo con X_1, X_2, \dots, X_r le grandezze estensive che si devono usare per descrivere lo stato di un sistema e con Y_1, Y_2, \dots, Y_r le corrispondenti grandezze intensive, l'energia interna del sistema considerato, in accordo alla (67), può scriversi come funzione delle variabili estensive

$$U(X_1, X_2, \dots, X_r).$$

Se si immagina di aumentare la sostanza che costituisce il sistema per un fattore γ , evidentemente tutte le grandezze estensive variano per lo stesso fattore e così accade pure per l'energia interna, cioè

$$(70) \quad U(\gamma X_1, \gamma X_2, \gamma X_3, \dots, \gamma X_r) = \gamma U(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r).$$

Derivando ora ciascun membro di questa relazione e ricordando che è

$$(71) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial X_i} \right)_{X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_r} = Y_i,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} U(\gamma X_1, \gamma X_2, \dots, \gamma X_r) &= \sum_1^r \frac{\partial U(\gamma X_1, \gamma X_2, \dots, \gamma X_r)}{\partial (\gamma X_i)} X_i = \\ &= \sum_1^r \frac{\partial U(X_1, X_2, \dots, X_r)}{\partial X_i} X_i = \sum_1^r X_i Y_i. \end{aligned}$$

Si ottiene di conseguenza dalla (70), per derivazione

$$(72) \quad \sum_1^r X_i Y_i = U(X_1, X_2, \dots, X_r).$$

La (67) quindi diviene

$$(73) \quad U(S, V, l, \mathcal{M}, n_1, n_2, \dots) = TS - pV + Fl + H\mathcal{M} + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \dots$$

Questa equazione, detta equazione di Eulero perché ottenuta con un procedimento dovuto a Eulero, lega i valori che in ciascuno stato del sistema assumono le diverse variabili.

L'energia interna si può sempre scrivere come somma di prodotti tra una variabile intensiva e la corrispondente estensiva

■ 17.15. ENTROPIA IN RELAZIONE ALLA TEMPERATURA, AL VOLUME E ALLA PRESSIONE

Si dedurranno ora delle relazioni che legano l'entropia di una sostanza che costituisce il sistema termodinamico ad altre grandezze di stato, supponendo che gli scambi energetici con l'esterno avvengano solo sotto la forma di scambi di calore e di lavoro nella forma $p\Delta V$.

In questo caso vale la (68) che lega cinque grandezze fondamentali del sistema durante le trasformazioni reversibili. Con essa si potranno esprimere le variazioni di entropia di una sostanza in funzione di due grandezze scelte come indipendenti e in particolare, in un primo momento, del volume V e della temperatura T .

Conviene partire invece che dalla (68), dall'espressione del primo principio. Detta \bar{C}_v la capacità termica a volume costante (cap. 14, par. 14.9) si ha:

$$(74) \quad dQ = \bar{C}_v dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV.$$

Nel caso dei gas perfetti $(\partial U / \partial V)_T = 0$ poiché U è solo funzione di T ; negli altri sistemi ciò non è vero.

Per introdurre il secondo principio e avere una relazione equivalente alla (68) basta porre $dQ = T dS$. Si ottiene:

$$(75) \quad dS = \frac{\bar{C}_v}{T} dT + \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T} \right] dV.$$

D'altra parte siccome anche dS è un differenziale esatto, si può scrivere

$$(76) \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV.$$

Dal confronto delle (75) e (76) si ha:

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\bar{C}_v}{T} \right) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{p}{T}. \end{array} \right.$$

La prima di queste relazioni esprime il fatto che, essendo \bar{C}_v sempre positivo, *l'entropia cresce sempre se si innalza la temperatura a volume costante*.

Per trovare una espressione equivalente alla seconda delle (77), eliminando la $(\partial U / \partial V)_T$ di difficile determinazione, si procede nella maniera seguente. Si derivi la prima delle (77) rispetto a V e la seconda rispetto a T . Per l'indipendenza dell'ordine di derivazione nelle derivate miste si ha:

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V} \right)_T = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{p}{T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Siccome inoltre

*Legami differenziali
tra funzioni e parametri
di stato*

$$\left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}$$

si ottiene, moltiplicando per T^2 ⁽⁵⁾

$$(78) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p.$$

Si osservi che al secondo membro compaiono quantità misurabili. La seconda delle (77) si può allora porre nella forma

$$(79) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Nella maggioranza delle sostanze al crescere della temperatura si ha una espressione positiva, sicché occorre aumentare p per tenere il volume costante: *in tali casi l'entropia aumenta quando il volume cresce a temperatura costante*. Vi sono però casi, come l'acqua fra 0° e 4 °C e come l'olio nella fase II al disotto di 2,19 K, nei quali il coefficiente di espansione è negativo: in tali casi $(\partial p / \partial T)_V$ è negativo e l'entropia diminuisce se il volume viene aumentato a temperatura costante.

La (75) può scriversi, usando la (78):

$$(80) \quad dS = \frac{\bar{C}_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

e fornisce *una relazione fra variazioni di entropia e variazioni di temperatura e di volume*. Essa risulta molto utile nei calcoli termodinamici per ottenere la differenza di entropia fra due stati.

⁽⁵⁾ È da sottolineare il notevole interesse della (78) che esprime la variazione di energia interna in funzione del volume a temperatura costante *per qualsiasi sostanza*.

Nel caso di una trasformazione finita si scrive:

$$(81) \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\bar{C}_v}{T} dT + \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV.$$

Per usare questa formula occorre conoscere \bar{C}_v in funzione di T e $(\partial p / \partial T)_V$ in funzione di V . Se non sono note le espressioni analitiche di queste funzioni, ma esse sono note per mezzo di grafici che riuniscono i risultati sperimentali, si possono usare metodi grafici di integrazione per avere l'entropia in funzione di T e V .

Si osservi che nel caso particolare che dal primo al secondo stato si passi con una trasformazione isocora, la (74) si riduce a

$$dQ = dU$$

e le (80) e (81) divengono

$$(82) \quad dS = \frac{\bar{C}_v}{T} dT$$

$$(83) \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\bar{C}_v}{T} dT = \int_1^2 \bar{C}_v d(\ln T).$$

*Variazione di entropia
in trasformazioni
a volume costante*

Nel caso inoltre di *trasformazioni a pressione costante* la variazione di entropia può ancora assumere una forma particolarmente semplice analoga alle (82) e (83). Si ricordi, a tal proposito, che per la definizione di entropia è

$$H = U + pV$$

e si ha

$$(84) \quad dH = dU + pdV + V dp = dQ + V dp$$

e, per il secondo principio della termodinamica:

$$(85) \quad dH = T dS + V dp.$$

In una trasformazione isobarica

$$dH = T dS$$

da cui

$$(86) \quad dS = \frac{dH}{T}.$$

Ricordando (cap. 14, par. 14.10) che

$$\bar{C}_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$$

e che in una trasformazione a pressione costante

$$(87) \quad dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT$$

si ottengono le relazioni:

$$(88) \quad dS = \bar{C}_p \left(\frac{dT}{T} \right)$$

$$(89) \quad S_2 - S_1 = \int_1^2 \bar{C}_p \frac{dT}{T} = \int_1^2 \bar{C}_p d(\ln T)$$

*Variazione di entropia
in trasformazioni
a pressione costante*

analoghe alle (82) e (83).

Esempi

Si calcoli la variazione dell'entropia di una kmole di acqua nel passare da ghiaccio, allo zero assoluto e alla pressione di una atmosfera, allo stato di vapore, a 25 °C alla pressione di una atmosfera.

La variazione di entropia cercata è la somma di termini corrispondenti alle trasformazioni reversibili successive con cui si può portare la massa d'acqua dallo stato iniziale a quello finale.

- Trasformazione a pressione costante fra 0 K e 10 K.** In questa regione si può assumere la validità della legge di Debye [cap. 16 (39)] per i calori specifici con $\theta_D = 192$ K. In tale regione inoltre la differenza fra C_v e C_p può essere trascurata ai fini del calcolo presente (fra 0 e 298 K): si ricordi che entrambi i calori specifici tendono a zero all'approssimarsi della temperatura allo zero assoluto.

Applicando la (89) si ottiene $\Delta S_1 = 0,022$ kcal/kmol K.

- Trasformazione a pressione costante fra 10 K e 273,1 K.** La figura 17.11 riporta i risultati di misure che danno C_p al variare di T . Si osservi che la scala delle temperature è logaritmica, sicché il valore dell'integrale (89) è rappresentato dall'area racchiusa fra l'asse delle ascisse, la curva e le ordinate per $T = 10$ K e $T = 273,1$ K. Risulta $\Delta S_2 = 9,081$ kcal/kmol K.

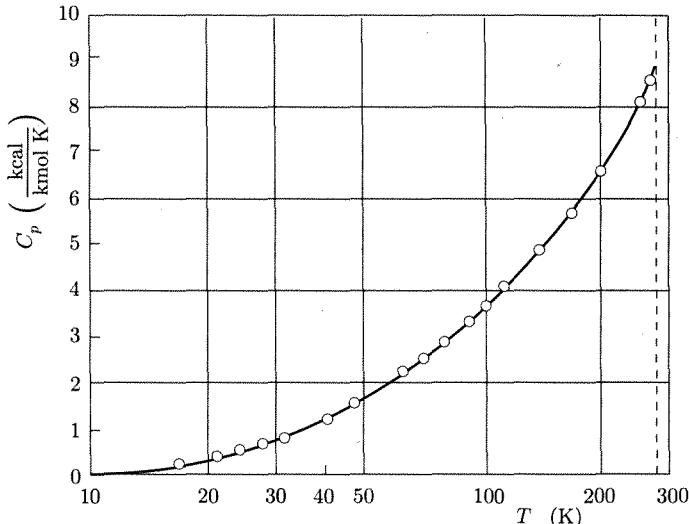


Fig. 17.11

- Trasformazione ghiaccio-acqua a 273,1 K.** La trasformazione è a temperatura e a pressione costanti. L'entropia nel cambiamento di stato (par. 17.18) è data da:

$$\Delta S_3 = \frac{\text{calore latente di fusione}}{T} = \frac{1435,7}{273,1} = \\ = 5,257 \text{ kcal/kmol K.}$$

- Trasformazione a pressione costante dell'acqua da 273,1 K a 298,1 K.** Si ricorre anche in questo caso a determinazioni sperimentali che danno il calore specifico dell'acqua in funzione della temperatura (fig. 17.12) e si effettua il calcolo dell'integrale (79) per via grafica (si noti che nella figura 17.12 le ascisse sono t (°C) e le ordinate C_p). Si ottiene

$$\Delta S_4 = 1,580 \text{ kcal/kmol K.}$$

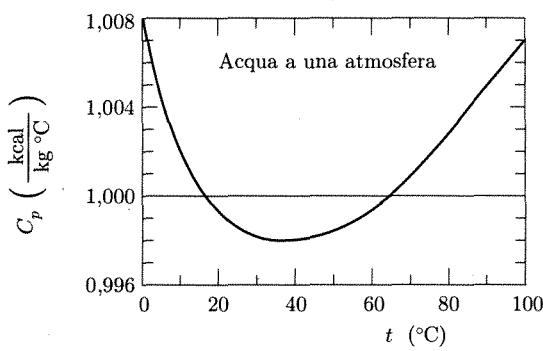


Fig. 17.12

5. Trasformazione acqua-vapore a 298,1 K. Il vapore ottenuto è alla pressione del vapore saturo a 298,1 K, pari a 23,756 mm Hg. L'entropia del cambiamento di stato (par. 17.18) è:

$$\Delta S_5 = \frac{\text{calore latente}}{T} = \frac{10.499}{298,1} = 35,200 \text{ kcal/kmol K}.$$

6. Compressione isoterma del vapore fino a una atmosfera. Usando l'equazione dei gas perfetti si ottiene

$$\Delta S_6 = R \ln \frac{p_1}{p_2} = R \ln \frac{23,756}{760} = -6,896 \text{ kcal/kmol K}.$$

Se peraltro si usa l'equazione di stato più adatta, con coefficienti viriali, si trova un valore leggermente più piccolo. Si ha così

$$\Delta S_6 = -6,884 \text{ kcal/kmol K}.$$

Sommando i vari contributi si ha per la variazione entropica di una mole di acqua nel passare da ghiaccio allo zero assoluto a vapore a 25 °C e una atmosfera:

$$\Delta S = \sum_1^6 \Delta S_i = 44,276 \text{ kcal/kmol K}.$$

■ 17.16. ENTROPIA DI UN GAS PERFETTO

Nel caso di un gas perfetto gli integrali nella (81) si semplificano notevolmente. Dall'equazione di stato

$$pV = nRT$$

si ha

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V}.$$

Inoltre per un gas perfetto⁽⁶⁾ (cap. 15, par. 15.13) è $U = \frac{3}{2}nRT$ e quindi

$$\bar{C}_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}nR$$

è indipendente da T .

Dalla (81) si ha⁽⁷⁾:

$$(90) \quad S_2 - S_1 = \bar{C}_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$(91) \quad S_2 - S_1 = nR \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\bar{C}_v}{nR}} \frac{V_2}{V_1}.$$

⁽⁶⁾ Nei gas non monoatomici si è visto che U ha un'espressione diversa nella quale intervengono i gradi di libertà che possono essere più o meno eccitati secondo la temperatura; ciò significa che \bar{C}_v varia con T . In taluni campi di temperatura peraltro si può ritenere \bar{C}_v non dipendente da T . In questi campi limitati della temperatura un gas poliatomico può essere trattato nella stessa maniera dei gas perfetti, con un idoneo valore di \bar{C}_v (cap. 15, par. 15.15).

⁽⁷⁾ Si può giungere alla (90) anche considerando l'espressione del primo principio:

$$dQ = \bar{C}_v dT + pdV = \bar{C}_v dT + nRT \frac{dV}{V}$$

e quindi

$$dS = \frac{dQ}{T} = \bar{C}_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

Varie espressioni
per l'entropia
di un gas perfetto

Se la trasformazione è isoterma si ritrova la (37) stabilità per l'espansione libera. Per una mole di gas perfetto l'entropia è data da

$$(92) \quad S = R \ln \left(VT^{\frac{C_v}{R}} \right) + \text{cost}$$

essendo la costante indipendente da V , T e p .

Usando l'equazione di stato la (82) può anche scriversi

$$(93) \quad S = R \ln \left(p^{\frac{C_v}{R}} V^{\frac{C_p}{R}} \right) + \text{cost}$$

inglobando $-C_v \ln R$ nella costante e valendo la relazione $C_p = C_v + R$. Si può anche scrivere

$$(94) \quad S = R \ln \frac{T^{\frac{C_p}{R}}}{p} + \text{cost}.$$

Nella figura 17.13 sono tracciate nel piano p - V le isentropiche, curve a entropia costante, ottenute dalla (93) ponendo la costante arbitrariamente uguale a zero: sono anche segnate in tratteggio le isoterme. Le isentropiche sono più ripide delle isoterme: le trasformazioni adiabatiche reversibili sono isentropiche ($dQ = 0$, $dS = 0$). Nella figura 17.14 sono invece mostrate le linee isobariche nel piano T - S ottenute dalla (94).

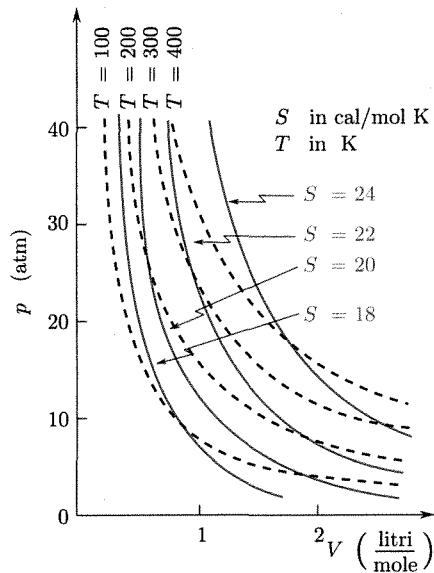


Fig. 17.13

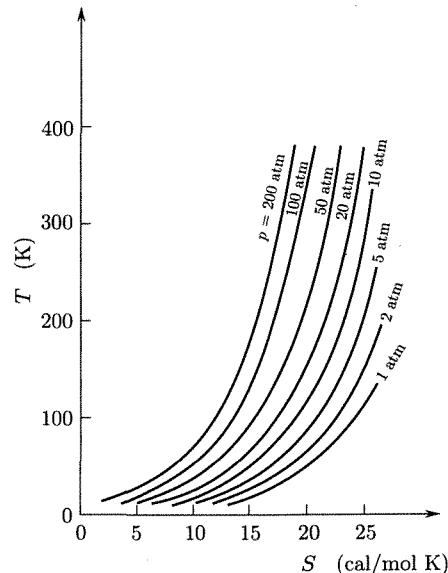


Fig. 17.14

L'equazione di Eulero (73) può essere usata per trovare il potenziale chimico di un gas perfetto. Si può infatti scrivere la (73)

$$(95) \quad U = TS - pV + \mu n$$

e sostituire in essa le varie grandezze in funzione di T e V , usando in particolare le espressioni su riportate di U , di \bar{C}_v , l'equazione caratteristica di stato e l'entropia nella forma (91)

$$S = nR \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{V_0} \right] + S_0.$$

Risulta

$$(96) \quad \mu = -Ts_0 + \frac{5}{2}RT + RT \ln \left[\frac{V_0}{V} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

essendo $s_0 = S_0/n$ l'entropia per mole a T_0 , V_0 .

17.17. ESPANSIONE DI UN GAS

Si è ora in condizioni di svolgere alcune considerazioni su alcuni processi già trattati che sono di grande importanza per chiarire il comportamento dei sistemi gassosi e che, in particolare, costituiscono la base sperimentale del riconoscimento della indipendenza dell'energia interna dal volume nei gas perfetti (cap. 15, par. 15.3)

Ci si riferisce innanzitutto all'esperienza di Joule nella quale un gas viene fatto espandere liberamente da un volume V_1 a un volume V_2 (la pressione varia da p_1 a p_2). Lo schema dell'esperienza può essere semplificato nella sua essenza come in figura 17.15. Il gas è inizialmente confinato in V_1 e per la rottura del diaframma esso si espande fino a occupare tutto lo spazio V_2 . Il recipiente è termicamente isolato ($dQ = 0$) e nessun lavoro esterno è compiuto ($dL = 0$). Applicando il primo principio si vede che il processo avviene a *energia interna costante* ($dU = 0$) qualunque sia il gas.

Si desidera ora trovare la variazione di temperatura fra lo stato iniziale T_1 e quello finale T_2 , sia per il caso del gas perfetto, sia per il caso del gas reale, e calcolare la variazione di entropia. La trasformazione è tipicamente irreversibile. Siccome gli stati estremi sono di equilibrio e hanno la stessa energia, si può calcolare la variazione di una qualsiasi grandezza di stato (T, S) considerando, al posto della trasformazione irreversibile, una trasformazione reversibile a $U = \text{cost}$ che faccia passare dallo stato iniziale a quello finale.

Abbiamo già stabilito, per le (77) e (78), che

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\bar{C}_v}{T}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

da cui, essendo:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

si ottiene⁽⁸⁾:

$$(97) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V} = \frac{1}{\bar{C}_v} \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \right].$$

⁽⁸⁾ Se z è una variabile dipendente, funzione di x e y , e si ha la forma differenziale

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy,$$

si ha per $z = \text{cost}$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y}.$$

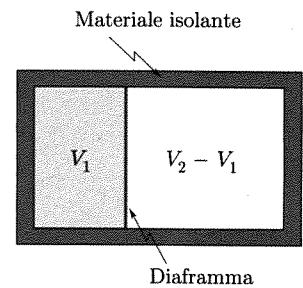


Fig. 17.15

La variazione di temperatura si ottiene integrando questa equazione: ciò può farsi se si conoscono \bar{C}_v e p in funzione di T e V .

Nel caso di un *gas perfetto*, dall'equazione di stato si ha:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V}$$

e quindi

$$(98) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = 0$$

cioè non vi è variazione di temperatura nell'espansione libera.

Le deviazioni del comportamento dei gas reali da quello dei gas perfetti sono rappresentate dal valore del cosiddetto coefficiente di Joule: $(\partial T / \partial V)_V$. È possibile vedere che i gas monoatomici si comportano in maniera molto vicina a quella dei gas perfetti: il coefficiente di Joule vale meno di $0,001 \text{ } ^\circ\text{K mole/m}^3$.

Si consideri ora un gas reale che segua l'equazione di Van der Waals nella forma:

$$(V - nb) \left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) = nRT.$$

Scegliendo V e T come variabili indipendenti e derivando rispetto a V si ha:

$$p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = -\frac{an^2}{V^2}$$

e quindi dalla (97), supponendo che \bar{C}_v sia indipendente da V ,

$$(99) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = -\frac{an^2}{V^2 \bar{C}_v(T)}.$$

Per la maggior parte dei gas questa derivata ha un valore molto piccolo. Poiché l'estensione del campo in cui la temperatura può cambiare nell'esperimento è anche piccolo, si può ritenere con buona approssimazione che sia \bar{C}_v costante. In tal caso si ha

$$(100) \quad T_2 - T_1 \simeq -\frac{an^2}{\bar{C}_v} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

si ha cioè una piccola riduzione di temperatura nell'espansione a energia interna costante di un gas che segua la legge di Van der Waals. Ciò è dovuto al fatto che per allontanare le molecole occorre compiere un lavoro contro le forze attrattive e ciò conduce a una riduzione dell'energia cinetica delle molecole e quindi della temperatura del gas.

Il calcolo delle variazioni di entropia durante queste espansioni si fa osservando che la (95) fornisce per una trasformazione a energia interna costante

$$(101) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U = \frac{p}{T}.$$

Nel caso di un gas perfetto, essendo T costante e facendo uso dell'equazione di stato, si ritrova l'espressione già nota

$$S_2 - S_1 = nR \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

Nel caso di un gas reale, usando l'equazione di Van der Waals, si ha

$$(102) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U = \frac{nR}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2 T(V)}.$$

La funzione $T(V)$ al denominatore si ottiene dalla (100) sostituendo T_2 e V_2 con T e V . Poiché, come si è visto, la variazione di temperatura durante l'espansione è piccola, si può ritenere la temperatura costante nel piccolo termine che la contiene.

*Nei gas reali,
all'espansione libera si
accompagna una piccola
diminuzione
della temperatura*

Si ha allora approssimativamente come variazione di entropia per un gas che segua la legge di Van der Waals e che si espanda a energia interna costante:

$$(103) \quad S_2 - S_1 \simeq nR \ln \left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right) - \frac{an^2}{T_1} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Come si è accennato (cap. 15, par. 15.3) lo schema per esperienze di espansione libera seguito inizialmente da Joule non consente una grande precisione nello studio del comportamento dei gas reali e, come caso limite, dei gas perfetti. Ciò in sostanza è dovuto al fatto che il coefficiente di Joule è in genere molto piccolo; di conseguenza le variazioni di temperatura sono piccole e per rivelarle sarebbe necessaria nelle misurazioni una precisione molto elevata, quale non è facilmente ottenibile con le disposizioni sperimentali possibili. Ricordiamo che nella realizzazione indicata nella figura 15.3 del capitolo 15 le variazioni di temperatura prodotte per l'espansione vengono rivelate dall'innalzamento di temperatura del bagno termometrico; la precisione è bassa perché la capacità termica del bagno è molto maggiore di quella del gas.

Uno schema diverso di esperienze, nel quale si ha un processo di espansione continuo, è quello noto con il nome di Joule-Kelvin. Esso è riportato in figura 17.16. Il gas passa da un recipiente all'altro attraverso i canali molto stretti di un materiale poroso e si trova in condizioni stazionarie di flusso: le temperature prima e dopo l'espansione possono essere misurate direttamente nel gas. L'uso di un gran numero di piccoli canali (pori) assicura, con una uniformità nel flusso, che non si producano variazioni locali nelle velocità medie delle molecole, cioè fluttuazioni apprezzabili di temperatura.

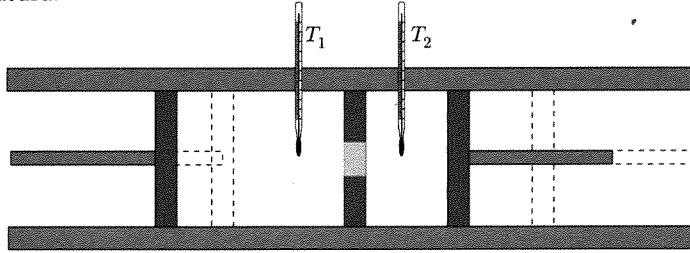


Fig. 17.16

Le pareti dei recipienti sono isolanti sicché non v'è scambio di calore con l'esterno. Il gas compie lavoro verso l'esterno: questo viene simboleggiato in figura mediante due pistoni che si muovono in modo da mantenere il salto di pressione costante. Va osservato che le dimensioni dei pori sono molto maggiori del libero cammino medio, sicché il moto del gas è un flusso effettivo (e non diffusione); la differenza di pressione serve per vincere la resistenza viscosa. Lo scopo dell'esperienza è di misurare il salto $T_2 - T_1$ nei vari gas. Per l'analisi dell'esperienza si considera il sistema nelle due condizioni quando i pistoni sono nelle posizioni 1 e 2, e si suppone che durante questo processo n kmoli di gas siano passate dal primo al secondo recipiente. Se indichiamo con V_1 il volume che le n kmoli di gas occupano alla pressione p_1 (cioè quando sono nel primo recipiente) e con V_2 quello che occupano alla pressione p_2 è chiaro che il lavoro fatto verso l'esterno dal gas durante l'espansione è

$$L = p_2 V_2 - p_1 V_1.$$

Applicando il primo principio ed essendo $Q = 0$, si ha

$$U_2 - U_1 + (p_2 V_2 - p_1 V_1) = 0.$$

A differenza del caso dell'espansione libera, nel processo che esaminiamo l'energia interna varia. In questo caso resta costante l'entalpia

$$(104) \quad H = U + PV.$$

L'analisi di questo processo irreversibile va fatta in maniera analoga a quella vista per l'espansione libera, solo che in questo caso va considerata, per il calcolo delle variazioni delle grandezze di stato, una trasformazione reversibile non a energia

interna costante, ma a entalpia costante. Per calcolare la differenza di temperatura $T_2 - T_1$, occorre trovare dapprima il cosiddetto coefficiente Joule-Kelvin:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

I risultati sperimentali mostrano che il salto $T_2 - T_1$ nei gas reali è piccolo e positivo alle alte temperature, mentre è piccolo e negativo alle basse temperature. La temperatura alla quale $(\partial T / \partial p)_H$ è zero si chiama punto di inversione⁽⁹⁾. A temperatura ordinaria tutti i gas comuni, con l'eccezione dell'idrogeno e dell'elio, sono al di sotto del punto di inversione.

Calcoliamo il coefficiente Joule-Kelvin. Si può scrivere, differenziando la (104),

$$(105) \quad dH = dU + p dV + V dp = T dS + V dp.$$

Le variabili indipendenti sono T e p . Esprimendo i differenziali totali dH e dS mediante le derivate rispetto alle variabili e tenendo conto della (105), si ha

$$(106) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp.$$

Eguagliando i coefficienti degli stessi differenziali nei due membri si ha:

$$(107) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \frac{\bar{C}_p}{T}$$

essendo $\bar{C}_p = (\partial H / \partial T)_p$, e

$$(108) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right].$$

Derivando la (107) rispetto a p , la (108) rispetto a T , e uguagliando le derivate miste risulta

$$(109) \quad \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Le (107) e (109) possono essere usate nella formula già vista che lega le derivate parziali (vedi nota 8) per ottenere il coefficiente cercato

$$(110) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p} = - \frac{1}{\bar{C}_p} \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right].$$

La variazione di entropia si ottiene dalla (105) per entalpia costante

$$(111) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_H = - \frac{V}{T}.$$

Nel caso di un gas perfetto il coefficiente Joule-Kelvin si annulla, e quindi non si osserva differenza di temperatura.

La variazione di entropia è

$$(112) \quad S_2 - S_1 = - \int_1^2 \frac{V}{T} dp = nR \ln \frac{p_1}{p_2}$$

che coincide con l'espressione già trovata per l'espansione libera.

Se il gas segue la legge di Van der Waals, si deve calcolare la derivata del volume rispetto alla temperatura, tenendo la pressione costante. Differenziando l'equazione di Van der Waals si ottiene

$$(V - nb)dp + \left[\frac{nRT}{V - nb} - \frac{2an^2}{V^3}(V - nb) \right] dV = nRdT$$

⁽⁹⁾ L'espansione di un gas al di sotto del punto di inversione viene usata comunemente nelle macchine frigorifere per ottenere temperature più basse della temperatura ambiente.

da cui

$$(113) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} (V - nb) \left[1 - \frac{2an}{V^3 RT} (V - nb)^2 \right]^{-1}.$$

Essendo $(V - nb)$ non molto diverso da V e sviluppando il denominatore della precedente relazione, si può porre approssimativamente, trascurando i termini più piccoli,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \simeq \frac{1}{T} (V - nb) \left[1 + \frac{2an}{RTV} \right].$$

Il coefficiente di Joule-Kelvin è allora (ancora ponendo $(V - nb)/V$ approssimativamente uguale a 1)

$$(114) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H \simeq \frac{1}{C_p} \left[\frac{2an}{RT} - nb \right] = \frac{nb}{C_p} \left[\frac{2a}{RTb} - 1 \right].$$

Il valore di questo coefficiente è piccolo, poiché piccole sono le costanti a e b . Si può quindi ritenere approssimativamente che T e C_p non varino molto durante l'espansione, sì che possono essere trattati come costanti nel secondo membro della (114). Si ottiene allora facilmente per integrazione,

$$(115) \quad T_2 - T_1 \simeq \frac{nb}{C_p} \left[1 - \frac{2a}{RT_1 b} \right] (p_1 - p_2).$$

Essa prevede un aumento della temperatura ($T_2 > T_1$) durante l'espansione ($p_1 > p_2$) quando $T_1 > 2a/Rb$, una diminuzione quando $T_1 < 2a/Rb$ e un punto di inversione approssimativamente quando $T_1 = 2a/Rb$. La figura 17.17 dà i risultati sperimentali e quelli calcolati nella maniera vista (linea continua) nel caso dell'elio la cui temperatura di inversione è 50 K.

La variazione di entropia nell'espansione in questo processo continuo è

$$(116) \quad S_2 - S_1 = - \int_1^2 \frac{V}{T} dp.$$

Scrivendo l'equazione di Van der Waals nella forma approssimata [cap. 15, eq. (135)]

$$(117) \quad pV = nRT + n \left(b - \frac{a}{RT} \right) p$$

si ha

$$(118) \quad S_2 - S_1 \simeq - \int_1^2 \left[\frac{nR}{p} + \frac{nb}{T} \left(1 - \frac{a}{RTb} \right) \right] dp$$

e trattando approssimativamente la temperatura come costante, dato che varia molto poco,

$$(119) \quad S_2 - S_1 \simeq nR \ln \frac{p_1}{p_2} - \frac{nb}{T_1} \left(1 - \frac{a}{RT_1 b} \right) (p_2 - p_1).$$

Questa variazione, tenendo presente che $p_2 < p_1$, è maggiore di quella che si avrebbe se il gas fosse perfetto.

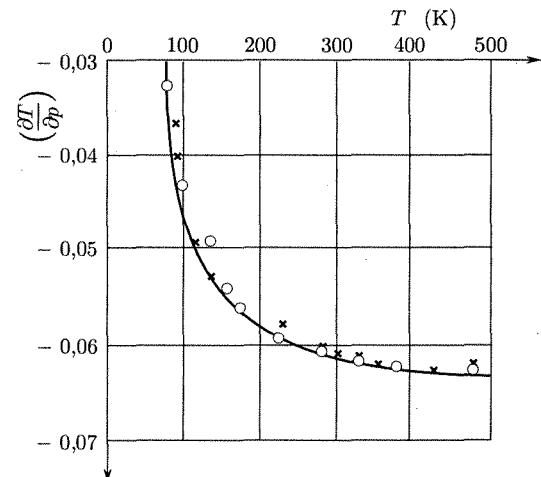


Fig. 17.17

17.18. ENTROPIA NEI CAMBIAMENTI DI STATO

Il passaggio di una sostanza da una fase a un'altra, come per es. il passaggio da una forma cristallina a un'altra, da solido a liquido o aeriforme ecc., avviene, a un certa pressione, a una temperatura costante con assorbimento (o cessione) di quantità di calore dall'esterno. I processi inversi avvengono nelle stesse condizioni di temperatura e pressione e le quantità di calore sono restituite (o, rispettivamente, prese) all'ambiente. Si tratta di processi reversibili e quindi

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

essendo dQ la quantità di calore presa dall'ambiente nella trasformazione reversibile elementare. Siccome il processo avviene a pressione costante

$$dQ = dH$$

essendo H l'entalpia.

Esempi

Se si considera per es. la fusione di un kilogrammo di acqua in un processo reversibile a 0 °C, poiché ΔH (calore latente di fusione) è 79,6 cal/g

$$(120) \quad \Delta S = S_{\text{acqua}} - S_{\text{ghiaccio}} = \int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_0^Q dQ = \\ = \frac{79,6 \cdot 10^3}{273} = 292 \text{ cal/K} = 1.222 \text{ J/K}.$$

Se si considera l'evaporazione reversibile della stessa quantità di acqua a 100 °C, poiché ΔH (calore latente di evaporazione) è 538,7 cal/g

$$\Delta S = S_{\text{vapore}} - S_{\text{acqua}} = \\ = \frac{538,7 \cdot 10^3}{273} = 1.400 \text{ cal/K}.$$

Come si vede, la variazione di entropia nel passaggio di una sostanza dallo stato liquido a quello gassoso è molto maggiore di quella nel passaggio solido-liquido, in accordo a quanto è stato detto sugli incrementi del disordine.

Si consideri ora il caso di un cambiamento di stato attraverso una trasformazione irreversibile: per es., il passaggio a vapore di un kilogrammo di acqua tenuta in uno stato di falso equilibrio (surriscaldata) a 110 °C e alla pressione di una atmosfera; il vapore prodotto si trovi a 110 °C e alla pressione atmosferica. Per il calcolo della variazione di entropia ΔS , possiamo sostituire alla trasformazione reale la seguente serie di tre trasformazioni reversibili: 1) passaggio dell'acqua a 110 °C dalla pressione di 1 atm a quella di equilibrio (1,414 atm); la corrispondente variazione di entropia sia ΔS_1 ; 2) evaporazione a 110 °C e alla pressione di equilibrio, con ΔS_2 ; 3) passaggio reversibile del gas a 110 °C dalla pressione di equilibrio di 1,414 atm a un'atmosfera, con ΔS_3 . Ora la variazione di entropia nella prima trasformazione è talmente piccola da potere essere trascurata ($\Delta S_1 = 0$). Nella seconda trasformazione, essendo il calore latente di evaporazione a 110 °C pari a 531,9 cal/g, si ha

$$\Delta S_2 = \frac{531,9 \cdot 10^3}{383} = 1.388 \text{ cal/K}.$$

Nella terza trasformazione, ammettendo di potere applicare le leggi dei gas perfetti, essendo la pressione iniziale 1,414 atm e quella finale 1 atm, per $n = 1000/18 = 55,5$

$$\Delta S_3 = nR \ln \frac{p_1}{p_2} = \\ = \frac{1.000}{18} \cdot 1.986 \ln 1,414 = 38 \text{ cal/K}.$$

Si ha quindi

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = \\ = 1.388 + 38 = 1.426 \text{ cal/K}.$$

Per convincersi della validità delle approssimazioni fatte nel calcolo delle variazioni di entropia nelle trasformazioni 1 e 3 facciamo le seguenti osservazioni. L'espressione per dS , usando come variabili indipendenti T e p , si scrive, analogamente alla (76):

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp.$$

Essa si semplifica nelle trasformazioni da considerare nel presente caso ($dT = 0$). Inoltre, per calcolare la seconda derivata si può usare una formula, analoga alla (79), che introdurremo formalmente fra poco (cap. 18, par. 18.5)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Si ha quindi:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = - \int_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp .$$

Se si conosce il coefficiente $(\partial V / \partial T)_p$, il calcolo può essere fatto.

Il coefficiente vale, per l'acqua allo stato liquido a 110°C , $0,015 \text{ cm}^3/\text{K}$ per mole. Per la prima trasformazione, quindi, essendo la variazione di pressione $0,414 \text{ atm}$, risulta

$$\Delta S_1 = \frac{1.000}{18} 0,015 \cdot 0,414 \text{ cm}^3 \text{ atm/K} = 0,0083 \text{ cal/K}$$

del tutto trascurabile poiché più piccola degli errori sperimentali.

Per quanto riguarda la terza trasformazione, prendiamo una equazione di stato che rappresenti bene il comportamento del vapore d'acqua. Scritta per una mole essa è

$$(121) \quad V = \frac{RT}{p} + 34,0 - \frac{47.590}{T} 10^{(8087/T^2)} \text{ cm}^3 .$$

Differenziando e ponendo $T = 383 \text{ K}$, si trova, sempre per una mole,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p} + 0,46 \text{ cm}^3/\text{K} .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= - \int_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = nR \ln \frac{1,414}{1} + n0,46(1,414 - 1) \frac{\text{cm}^3 \text{ atm}}{\text{K}} = \\ &= 38 + 0,2 \text{ cal/K} . \end{aligned}$$

Si vede che la correzione da apportare al calcolo fatto usando le relazioni per i gas perfetti è piccola.

■ 17.19. ENTROPIA DI MESCOLAMENTO

Supponiamo di avere un recipiente di volume V_0 diviso in due parti da una sottile parete che può essere rimossa. Inizialmente la prima parte, avente un volume $V_1 = \alpha V_0$ (essendo $\alpha < 1$), è occupata dal gas 1 alla temperatura T_0 e alla pressione p_0 . La seconda parte, avente volume $V_2 = (1 - \alpha)V_0$, è occupata dal gas 2 alla stessa temperatura T_0 e alla stessa pressione p_0 . Se indichiamo con n il numero totale di mole presenti, αn saranno del gas 1 e $(1 - \alpha)n$ del gas 2. Quando si elimina la separazione, ciascun gas diffonde in tutto il volume V_0 mescolandosi all'altro (si supponga che i due gas non reagiscano fra loro): il disordine aumenta e l'entropia deve subire un aumento (entropia di mescolamento). Si osservi che l'energia interna del sistema resta costante durante il processo in quanto l'energia del sistema mescolato è pari alla somma delle energie iniziali dei componenti. Il processo quindi equivale alla somma dei due processi di espansione (uno per ciascun gas componente) a energia interna costante.

Il calcolo della variazione di entropia per ciascuno di essi si ottiene allora usando la (101)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U = \frac{p}{T}.$$

Se i gas sono perfetti

$$(122) \quad \Delta S = \Delta S_{\text{gas}_1} + \Delta S_{\text{gas}_2} = n\alpha R \ln \frac{V_0}{\alpha V_0} + n(1-\alpha)R \ln \frac{V_0}{(1-\alpha)V_0} = \\ = nR \left[\alpha \ln \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha) \ln \frac{1}{1-\alpha} \right].$$

Poiché $\alpha < 1$, ΔS risulta positiva. Il valore massimo si raggiunge per $\alpha = \frac{1}{2}$ perché allora il rimescolamento dei due gas e il disordine sono massimi. In tale processo la temperatura resta costante e così è per la pressione.

Se invece i gas non sono perfetti, la (101) va calcolata facendo uso della adatta equazione di stato. Il caso della validità dell'equazione di Van der Waals è stato già esaminato nell'espansione di un solo gas e i risultati lì ottenuti [eq. (103)] possono essere usati nel presente caso. È possibile vedere che nel rimescolamento di gas reali (a energia interna costante) p e T subiscono piccole variazioni dei valori iniziali che abbiamo supposto validi per entrambi i gas.

Nel caso che si debba calcolare la variazione di entropia dovuta al mescolamento di gas che inizialmente non sono nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, e che il miscuglio venga a trovarsi a una pressione ancora diversa, occorre sostituire al processo reale una serie di processi che portino dapprima i gas a una stessa pressione e a una stessa temperatura, in seguito producano il mescolamento come considerato in precedenza, e poi portino il miscuglio alle condizioni finali specificate. La somma delle variazioni di entropia nella varie fasi di questa serie di processi dà l'entropia di mescolamento cercata.

17.20. PROCESSI DI REFRIGERAZIONE PER IL RAGGIUNGIMENTO DI BASSE TEMPERATURE

Vogliamo ora indicare brevemente alcuni processi che hanno una grandissima importanza per portare sistemi a basse temperature e la cui illustrazione si fonda sul II principio e sui concetti da esso derivati, che siamo venuti analizzando.

Illustreremo innanzitutto il processo Claude per la liquefazione dell'aria. Nella figura 17.18 sono indicate nel piano entropico (TS) le trasformazioni usate. È bene premettere che le linee a pressione costante per un gas reale nel piano entropico si approssimano a quelle già viste (fig. 17.14) per gas ideali solo a temperatura elevata: inoltre, in corrispondenza alla zona nell'interno della curva tratteggiata, quando liquido e vapore sono in equilibrio, esse coincidono con le linee a temperatura costante.

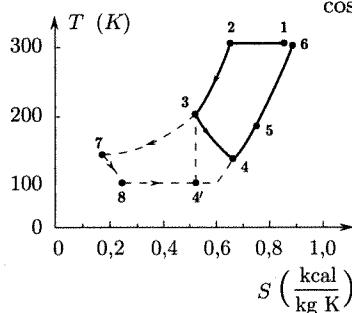


Fig. 17.18

Il processo Claude inizia partendo da aria alla temperatura ambiente (300 K) e alla pressione di 1 atm (punto 1 nella figura): essa viene compressa isotermicamente fino ad essere portata alla pressione di 40 atm (punto 2). In tale operazione viene speso un lavoro L_{12} . L'aria viene in seguito raffreddata nello scambiatore di calore in controcorrente con aria più fredda (come presto vedremo) fino a raggiungere il punto 3 alla pressione di 40 atm e alla temperatura di 200 K.

Quando la massa di aria ha raggiunto questo stato, essa viene divisa in due parti che seguono trasformazioni diverse. Una prima parte viene inviata in un cilindro con pistone ove si espande fino alla pressione atmosferica (punto 4), seguendo una trasformazione (3-4) che non si scosta molto da una isoentropica (verticale). Il lavoro esterno (L_{34}) compiuto dal gas viene consegnato all'albero del primo compres-

sore: l'energia meccanica che quindi bisogna dare dall'esterno al primo compressore in funzionamento continuo è $L_{12} - L_{34}$.

In conseguenza dell'espansione, l'aria si raffredda e viene usata per raffreddare altra aria in scambiatori di calore mentre ritorna alla temperatura ambiente (punti 5 e 6) ⁽¹⁰⁾.

L'altra parte dell'aria viene raffreddata negli scambiatori fino a 120 K (punto 7) e giunge a una strozzatura in corrispondenza della quale espande passando da 40 atm a 1 atm: in conseguenza dell'effetto di Joule-Kelvin, circa il 60% di aria diviene liquida (circa 80 K). Il punto rappresentativo del sistema è il punto 8. Il vapore viene portato via attraverso uno scambiatore fino a unirsi al gas che si è espanso nel cilindro, in corrispondenza del punto 4. Nel processo illustrato, come si vede, si utilizza sia il raffreddamento di un fluido in una espansione prossima a una espansione isoentropica (trasformazione 3-4), sia un raffreddamento per il processo di espansione Joule-Kelvin. P. Kapitza è riuscito a realizzare uno schema simile di trasformazione per liquefare l'elio.

Un processo diverso usato per l'ottenimento di temperature più basse è quello della demagnetizzazione adiabatica di sostanze paramagnetiche. Una sostanza solida paramagnetica ideale va considerata come un cristallo formato da atomi o ioni ciascuno dei quali si comporta come un magnetino (un aghetto magnetico) libero di orientarsi in una direzione qualsiasi ruotando liberamente intorno al centro di massa dell'atomo o dello ione.

L'esistenza delle proprietà magnetiche, del fatto cioè che i singoli atomi o ioni si comportano come magnetini, equivale a dire che il numero di gradi di libertà delle particelle è aumentato di due (quanti sono i parametri necessari a individuare una direzione) e quindi l'energia termica deve ripartirsi fluendo anche in questi gradi di libertà.

Se il materiale è invece magnetizzato, cioè è disposto in un campo magnetico che orienta nella sua direzione pressoché tutti i magnetini elementari, tutto va come se i gradi di libertà legati ai magnetini scomparissero; l'energia termica è essenzialmente tenuta come agitazione normale degli atomi o degli ioni: nel caso di un cristallo formato da atomi semplici si tratta evidentemente dell'agitazione reticolare. Naturalmente lo stato magnetizzato è uno stato del sistema a maggiore ordine, e quindi a minore entropia, rispetto a quello alla stessa temperatura non magnetizzato.

Un sistema di demagnetizzazione adiabatica analogo, in cui peraltro i magnetini sono i nuclei di alcuni atomi, è stato di recente sviluppato. In questo caso le interazioni fra i singoli magnetini sono molto più piccole di quelle nei sali paramagnetici e possono essere raggiunte temperature più basse. Kurti in Gran Bretagna magnetizzando un campione di rame alla temperatura di 0,01 K è riuscito ad ottenere nella successiva demagnetizzazione la temperatura di 10^{-6} K.

Un ulteriore sviluppo è stato conseguito di recente (W.P. Philips, premio Nobel 1997) sfruttando l'azione di raggi laser su atomi. In opportune condizioni, la forza che un raggio laser esercita sul singolo atomo può ridurre la velocità dell'atomo stesso: gli atomi del gruppo in questione vengono trattenuti in opportune trappole magnetiche. Tale processo consente di portare la temperatura al di sotto di 10^{-6} K.

⁽¹⁰⁾ Si osservi che si potrebbe pensare di far compiere all'aria una espansione perfettamente isoentropica a partire dal punto 3: essa sarebbe rappresentata da una linea verticale che taglia la isobara a 1 atm in un punto 4' ove il 12% circa di aria è liquida. Una espansione di tal genere farebbe sì che si produrrebbe aria liquida nei cilindri e ciò renderebbe più difficoltosa la realizzazione dell'impianto. Per tali ragioni si preferisce seguire lo schema illustrato.

FUNZIONI TERMODINAMICHE CARATTERISTICHE

Funzioni termodinamiche caratteristiche, dalla cui conoscenza si deducono informazioni termodinamiche per i sistemi (calori specifici, coefficienti di espansione e compressibilità ecc.):

energia interna, $U = TS - pV(+Fl + H\mathcal{M}) + \sum_i \mu_i n_i$,

entalpia, $H = U + pV = TS(+Fl + H\mathcal{M}) + \sum_i \mu_i n_i$,

energia libera (Helmholtz), $A = U - TS = -pV(+Fl + H\mathcal{M}) + \sum_i \mu_i n_i$,

entalpia libera (Gibbs), $G = A + pV = H - TS = (Fl + H\mathcal{M}) + \sum_i \mu_i n_i$;

da limitarsi a quanto è fuori di parentesi per scambi energetici non termici dovuti a solo lavoro di pressioni.

- Per trasformazioni elementari (per sistemi omogenei, $i = 1$):

$$dU \leq T dS - p dV + \mu dn,$$

$$dH \leq T dS + V dp + \mu dn,$$

$$dA \leq -S dT - p dV + \mu dn,$$

$$dG \leq -S dT + V dp + \mu dn;$$

col solo segno di egualianza per trasformazioni reversibili.

- Legami differenziali tra le funzioni (regola mnemonica per le equazioni di Maxwell):

$$(\partial T / \partial V)_S = -(\partial p / \partial S)_V$$

$$(\partial T / \partial p)_S = (\partial V / \partial S)_p$$

$$(\partial S / \partial V)_T = (\partial p / \partial T)_V$$

$$(\partial S / \partial p)_T = -(\partial V / \partial T)_p$$

■ Funzioni termodinamiche caratteristiche

18.

■ 18.1. INTRODUZIONE

Nei capitoli precedenti dedicati alla termodinamica e allo studio delle caratteristiche di alcuni sistemi, ci si è preoccupati di introdurre e chiarire i concetti fondamentali di stato termodinamico di un sistema, di variabili di stato, di equazione di stato e di trasformazione e si è discusso dei primi due principi della termodinamica.

Nel fare ciò abbiamo stabilito numerose formule che legano le grandezze di stato e che esprimono caratteristiche del comportamento termodinamico dei sistemi.

Nel presente capitolo si cercherà di riassumere con un po' d'ordine quanto la termodinamica può fornire per lo studio sui sistemi e come convenga trattare un problema particolare. Prima di fare ciò, tuttavia, occorre considerare alcune *funzioni termodinamiche* di grande importanza, le quali godono della proprietà che *la conoscenza di ciascuna di esse per un sistema omogeneo consente di ricavare mediante operazioni di derivazione tutte le informazioni termodinamiche relative al sistema*. Di queste funzioni caratteristiche considereremo le quattro più importanti e comuni: energia interna, entalpia, funzione di Helmholtz (o energia libera), funzione di Gibbs (o entalpia libera). Illustrando le loro proprietà si dedurranno le condizioni in cui ciascuna di esse è particolarmente utile.

■ 18.2. ENERGIA INTERNA

Si è più volte considerata l'energia interna di un sistema; si mostrerà ora come la conoscenza della funzione energia interna consenta di determinare tutti i parametri che servono per la descrizione del sistema.

Si è già mostrato (cap. 17, par. 17.14) che l'energia interna di un sistema omogeneo si esprime in funzione delle grandezze $S, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots$ (equazione di Eulero)

$$(1) \quad U(S, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots) = TS - pV + Fl + H\mathcal{M} + \sum_i \mu_i n_i$$

e che si comporta come un'energia potenziale, nel senso che le sue derivate rispetto alle variabili indipendenti forniscono le forze termodinamiche, cioè

le grandezze intensive accoppiate con ciascuna variabile estensiva

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,l,\dots} = T \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,l,\dots} = -p \\ \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S,V,l,\dots} = \mu_i. \end{array} \right.$$

Nel caso molto comune in cui il sistema scambi energia non termica con l'esterno solo mediante il lavoro delle pressioni, la (1) assume la forma semplice

$$(3) \quad U(S, V) = TS - pV$$

e si hanno solo le due derivate che forniscono T e p :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p \end{array} \right.$$

Se si elimina S fra queste due relazioni si ottiene l'equazione di stato per la sostanza che costituisce il sistema.

Se per es. si conoscesse l'espressione dell'energia interna per un gas perfetto (una kilomole) in funzione di S e V :

$$(5) \quad U = C_v T_0 e^{(S-S_0)/C_v} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/C_v}$$

applicando le (4) si avrebbe

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/C_v} e^{(S-S_0)/C_v} = T \\ -RT_0 e^{(S-S_0)/C_v} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{R/(C_v-1)} \frac{V_0}{V^2} = -p \end{array} \right.$$

Da tali relazioni si ricava la equazione caratteristica

$$(7) \quad pV = RT$$

Tenendo presente (cap. 17, par. 17.15) che

$$(8) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V = \frac{T}{C_v}$$

si vede che una ulteriore differenziazione della prima delle (4) consente di calcolare il calore specifico. Se inoltre si osserva che il coefficiente di espansione termica α' , la compressibilità isoterma β_T e la compressibilità

adiabatica β_{ad} si esprimono⁽¹⁾ mediante derivate di V rispetto a p o T

$$(9) \quad \alpha' = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$(10) \quad \beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$$(11) \quad \beta_{ad} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$$

si comprende come questi parametri possano essere facilmente calcolati.

Se si differenzia la prima delle (4) rispetto a V e la seconda rispetto a S , essendo le derivate seconde miste indipendenti dall'ordine di derivazione, si ottiene l'utile relazione

$$(12) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V$$

*Prima relazione
di Maxwell*

che è una delle relazioni che vanno sotto il nome di relazioni di Maxwell.

Nel caso che lo scambio di energia non termica con l'esterno avvenga in una maniera diversa, le considerazioni ora svolte per dedurre la equazione di stato, parametri caratteristici ed equazione di Maxwell, si ripetono. Se sono presenti più processi diversi di scambio di energia non termica, le relazioni dedotte per ciascun tipo di scambio sono contemporaneamente valide.

Cerchiamo ora di esaminare in quali situazioni l'uso della funzione energia interna è particolarmente utile per studiare il comportamento dei sistemi.

Il primo principio della termodinamica, come varie volte si è visto, si scrive in forma differenziale come:

$$(13) \quad dU = dQ - pdV + Fdl + HdM + \sum \mu_i dn_i + \dots$$

dove dQ è la quantità di calore che il sistema riceve dall'esterno durante la trasformazione. Nel caso di *trasformazioni reversibili* $dQ = TdS$, essendo T la temperatura sia della sorgente sia del sistema che scambiano quantità di calore. Nel caso di trasformazioni irreversibili, bisogna ricordare che la quantità di calore che il sistema riceve dall'esterno dQ è minore di quella che sarebbe necessaria per la variazione di entropia in una trasformazione reversibile, cioè in questo caso

$$dQ < T dS.$$

In questo caso T è la temperatura della sorgente, che può differire da quella del sistema. Si ottiene quindi come espressione valida per trasformazioni elementari qualsiasi

$$(14) \quad dU \leq TdS - pdV + Fdl + HdM + \sum \mu_i dn_i + \dots$$

⁽¹⁾ L'espressione di α' si ricava da quanto detto nel cap. 13 par. 13.5 e quelle per β , analogamente, dalle definizioni date in cap. 7, par. 7.5, considerando variazioni infinitesime di pressione.

ove il segno di uguaglianza vale solamente per trasformazioni reversibili e quello di disuguaglianza per trasformazioni irreversibili (2).

Se si considerano trasformazioni reversibili nelle quali tutte le variabili estensive, a eccezione di S , cioè V, l, \mathcal{M}, n sono tenute costanti, la variazione di energia interna è pari alla quantità di calore fornita dall'esterno

$$(15) \quad (dU)_{V,l,\mathcal{M},n} = T dS.$$

Se si considera una trasformazione adiabatica reversibile (quindi isoentropica), nella quale le altre grandezze estensive variano, la variazione di energia interna è pari all'energia non termica scambiata con l'esterno ($-p dV$ nel caso che solo V vari),

$$(16) \quad dU = -pdV + Fdl + Hd\mathcal{M} + \sum \mu_i dn_i + \dots$$

Si consideri ora un sistema in cui siano fissate a valori determinati tutte le variabili estensive: $S, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots$. Se nel fare ciò il sistema ha seguito trasformazioni reversibili, esso è pervenuto in uno stato nel quale sono perfettamente determinate tutte le sue condizioni, cioè a uno stato di equilibrio. Evidentemente, essendo nulle tutte le variazioni dS, dV, dl, \dots , deve essere, per la (13), $dU = 0$. Se nello stabilire le condizioni esterne ($S, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots$) le trasformazioni del sistema non sono state reversibili, il fatto di avere fissato i valori di tutte le variabili estensive non significa che il sistema si trovi in uno stato di equilibrio. Se esso è lasciato a se stesso in queste condizioni, raggiungerà lo stato di equilibrio spontaneamente, ma è evidente che in queste trasformazioni (irreversibili) di avvicinamento all'equilibrio, per la (14), (pur essendo ancora nulli dS, dV, \dots) l'energia interna non può che diminuire ($dU < 0$): le trasformazioni spontanee si fermano quando non è più possibile una ulteriore diminuzione di U . La condizione di equilibrio è quindi in questo caso (tutte le variabili estensive costanti) che l'energia interna sia minima.

*In condizioni
di invarianza
dei parametri estensivi
l'equilibrio si raggiunge
per il valore minimo
dell'energia interna*

Si osservi che mentre è relativamente facile mantenere a valori costanti quasi tutte le variabili estensive (per es. V, l, \dots), la realizzazione della condizione $S = \text{cost}$ non è sperimentalmente semplice perché implica la cessione o l'assorbimento di ben precise quantità di calore da parte delle sorgenti durante le trasformazioni. Si riesce invece a realizzare abbastanza bene la condizione di adiabaticità, cioè di scambio di calore con l'esterno nullo ($dQ = 0$). Conviene esaminare la condizione di equilibrio del sistema se accanto alla adiabaticità si pone la condizione di costanza di tutte le variabili estensive fatta eccezione per S . La variazione di energia interna è la stessa per trasformazioni reversibili e irreversibili e quindi secondo la (13) vale

$$dU = 0.$$

Poiché peraltro le trasformazioni che possono avvenire spontaneamente quando il sistema approssima l'equilibrio nelle condizioni dette sono irreversibili, si ha dalla (14)

$$(17) \quad 0 < T dS$$

(2) Per ben comprendere il significato di questa disuguaglianza, e di altre nel seguito del capitolo, si deve osservare che nel caso di una trasformazione irreversibile il valore indicato per almeno una delle variabili intensive, come T, p, \dots , al secondo membro, è diverso da quello (o quelli) assunto nel sistema. Ovviamente i differenziali come dU, dS, \dots , dipendono solo dagli stati iniziale e finale della trasformazione, non dalla sua natura.

cioè l'entropia aumenta. *La condizione di equilibrio in questo caso è quella di entropia massima.*

Da quanto si è detto resta evidente che l'impiego della funzione energia interna, avendo come variabili indipendenti le variabili estensive, si presta allo studio di processi nei quali queste vengono controllate (processi isoentropici, a volume costante ecc.).

18.3. ENTALPIA

L'interesse della funzione caratteristica entalpia sta nel fatto che essa, oltre a essere una funzione di stato, ha la pressione come variabile indipendente della coppia p, V ; le altre tre variabili indipendenti sono le stesse di quelle della energia interna. Di conseguenza in alcuni casi di notevole importanza pratica (per es. trasformazioni di una sostanza a pressione costante) l'entalpia si presta meglio dell'energia interna all'esame dei problemi.

Ricordiamo che la funzione entalpia è definita come:

$$(18) \quad H = U + pV.$$

Differenziando

$$(19) \quad dH = dU + pdV + Vdp \leq TdS + Vdp + Fdl + HdM + \mu_1 dn_1 + \dots$$

ove il segno di uguaglianza vale per le trasformazioni reversibili, quello di disuguaglianza per le trasformazioni irreversibili.

Se, in particolare, si considerano trasformazioni reversibili nelle quali gli scambi di energia non termica con l'esterno avvengano solo per effetto della presenza di pressioni, è

$$(20) \quad dH = TdS + Vdp.$$

Si possono fare qui considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo precedente a partire da dU . In particolare:

$$(21) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p = T \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S = V.$$

Eliminando H fra queste due relazioni si ottiene l'equazione di stato per la sostanza che costituisce il sistema.

Eguagliando le due derivate seconde miste si ha una seconda equazione di Maxwell

$$(22) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p$$

*Seconda relazione
di Maxwell*

e si prosegue in maniera analoga al caso precedente se gli scambi di energia non termica possono avvenire in modi diversi.

Dalla (19) si vede che se il sistema viene tenuto a $S, p, l, M, n_1 \dots$ costanti, la variazione di entalpia non può essere che negativa e quindi allo stato di equilibrio nelle trasformazioni spontanee di questo tipo corrisponde una entalpia minima.

A parametri estensivi costanti l'equilibrio si raggiunge per il valore minimo dell'entalpia

La entalpia viene alle volte chiamata contenuto termico a pressione costante: l'origine di questa denominazione impropria sta nel fatto che in trasformazioni reversibili in cui p, l, \mathcal{M}, n_1 sono costanti, la somministrazione di calore dall'esterno (TdS) si rispecchia in un uguale aumento dell'entalpia.

L'impiego della funzione caratteristica entalpia appare particolarmente utile nei sistemi che scambiano energia non termica con l'esterno esclusivamente tramite il lavoro delle pressioni nel caso di processi a $p = \text{cost}$, appunto perché in tali processi, se reversibili, l'aumento di entalpia è pari alla quantità di calore assorbita. L'entalpia nei riguardi dei processi a pressione costante di questi sistemi ha quindi lo stesso ruolo dell'energia interna nei processi a volume costante.

■ 18.4. FUNZIONE DI HELMHOLTZ O ENERGIA LIBERA A TEMPERATURA COSTANTE

La introduzione della entalpia accanto alla funzione energia interna è stata suggerita dal fatto che essa consente di scambiare le variabili V e p nel ruolo di variabili indipendenti.

Analogamente, la introduzione di una nuova funzione caratteristica chiamata funzione di Helmholtz è utile per la trattazione di processi di notevole importanza quali quelli isotermi proprio perché in essa, rispetto alla energia interna, la variabile intensiva T sostituisce come variabile indipendente quella estensiva S .

La definizione della funzione di Helmholtz A è la seguente

$$(23) \quad A(T, V, l, \mathcal{M}, n \dots) = U - TS$$

e in essa le variabili indipendenti sono la T e tutte le variabili estensive a eccezione della S .

Innanzitutto va osservato che la funzione A è una funzione di stato perché costruita con funzioni e grandezze di stato: essa quindi assume un valore per ogni stato del sistema ed è determinata, al solito, a meno di una costante.

In forma differenziale, ricordando che $d(TS) = TdS + SdT$, si può scrivere

$$(24) \quad dA \leq -SdT - pdV + Fdl + Hd\mathcal{M} + \mu_1 dn_1 + \dots$$

Al solito, il segno di uguaglianza vale solo per le trasformazioni reversibili, mentre quello di disuguaglianza vale per le trasformazioni irreversibili.

La $A(T, V, l \dots)$ è una funzione caratteristica; da essa infatti possono ricavarsi tutte le informazioni termodinamiche sul sistema. Anche per la A consideriamo il caso semplice e importante nel quale energia non termica venga scambiata con l'esterno solamente tramite un lavoro legato alla pressione. L'estensione delle considerazioni ora svolte al caso generale si fa come per le altre funzioni caratteristiche.

Si ha allora per un processo reversibile

$$(25) \quad dA(T, V) = -SdT - pdV.$$

Derivando si ricava

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_V = -S \\ \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_T = -p. \end{array} \right.$$

La seconda di queste relazioni, essendo una relazione fra V, T e p costituisce la equazione di stato.

Se si deriva la prima relazione ancora rispetto a T si ottiene, ricordando la (77) del capitolo precedente, la capacità termica a volume costante.

$$(27) \quad \bar{C}_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_V.$$

Eguagliando le derivate seconde miste della A rispetto a V e T , si ha una terza equazione di Maxwell

$$(28) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Se si deriva la (27) rispetto a V e si fa uso del fatto che nelle derivate miste può essere scambiato l'ordine di derivazione

$$\left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = T \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

e per la (28)

$$(29) \quad \left(\frac{\partial \bar{C}_v}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V.$$

Tale relazione mostra che mentre la dipendenza di \bar{C}_v da T è, per una certa sostanza, qualcosa che va determinato sperimentalmente, la dipendenza di \bar{C}_v dalle altre variabili, come per es. V , si ricava dall'equazione di stato: il calcolo della derivata al secondo membro della (29) si fa infatti usando la $p = f(V, T)$.

Nel caso di processi reversibili e irreversibili la (25) si scrive

$$(30) \quad dA \leq -SdT - pdV.$$

Consideriamo ora il caso in cui le variabili indipendenti (T e V) vengano fissate a certi valori. (Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso generale di validità della (24) quando si fissano i valori di tutte le variabili indipendenti). Se il sistema ha subito trasformazioni reversibili, ciò significa che nel porre le condizioni $T = \text{cost}$ e $V = \text{cost}$, esso ha raggiunto uno stato di equilibrio. Se invece le trasformazioni che esso ha subito sono irreversibili, il fatto che si siano fissati V e T (temperatura della sorgente esterna con cui il sistema può scambiare calore) non vuol dire che il sistema abbia raggiunto lo stato di equilibrio. Lasciato a sé stesso esso lo raggiungerà attraverso trasformazioni irreversibili che, per la (30), non possono non implicare una diminuzione di A . In altri termini nei processi spontanei che avvengono in queste condizioni ($V = \text{cost}$ e temperatura della sorgente $T = \text{cost}$) la condizione di equilibrio del sistema corrisponde al minimo valore consentito per la funzione di Helmholtz.

Dall'espressione dell'energia libera si ricavano per derivazione i valori dei parametri di stato

Terza relazione di Maxwell

Per valori di V e T della sorgente costanti l'equilibrio si raggiunge per il valore minimo dell'energia libera

Esempio

Vogliamo illustrare con un esempio la circostanza ora vista, cioè la proprietà della funzione A di assumere il valore minimo consentito quando un sistema è in equilibrio essendo fissati i valori di V e della temperatura T della sorgente esterna, e porre in relazione questa proprietà con il comportamento molecolare delle sostanze.

Si osservi innanzi tutto che la struttura della funzione $A = U - TS$ è tale che essa diminuisce tanto per una riduzione di U quanto per un aumento di S .

Se per es. consideriamo un sistema formato da un cristallo e dal suo vapore contenuto in un recipiente ($V = \text{cost}$) immerso in un termostato (quindi $T = \text{cost}$), si osserva sperimentalmente che si stabilisce un equilibrio in corrispondenza al quale la pressione del vapore, e quindi la quantità presente, ha un certo valore. È facile vedere che questo equilibrio si stabilisce fra due opposte tendenze. Vi sono da una parte le forze di attrazione fra le molecole che tendono a far passare allo stato solido le molecole di vapore: contemporaneamente quantità di calore passerebbero dal sistema al bagno termostatico. Se questo processo potesse andare avanti senza limitazioni e tutto il vapore condensasse, evidentemente l'energia interna raggiungerebbe un minimo. A questo stato corrisponderebbe il minimo possibile disordine e quindi l'entropia sarebbe anche minima. D'altra parte v'è la tendenza a passare verso stati aventi maggior disordine (e maggiore probabilità statistica di essere realizzati) che

si manifesta con il passaggio di molecole dallo stato cristallino a quello di vapore. Se ciò potesse andare avanti fino a far vaporizzare tutto il cristallo, la entropia avrebbe valori elevati e lo stesso sarebbe per l'energia interna: durante questo processo quantità di calore verrebbero infatti assorbite dal termostato. Nella figura 18.1 sono indicate le curve per U e per TS calcolate nella meccanica statistica per un sistema cristallo-vapore in funzione della frazione di sostanza del sistema che si trova allo stato di vapore.

Nella curva dell'energia libera A si ha un minimo che corrisponde alle condizioni di equilibrio fra cristallo e vapore. Si osservi che mentre la U cresce proporzionalmente alla frazione di vapore, la TS cresce molto più rapidamente per piccoli valori che per alti valori della frazione di vapore. Quest'ultima circostanza è dovuta al forte aumento nel disordine del sistema (entropia) quando il cristallo comincia a trasformarsi in vapore.

Si osservi che abbiamo svolto queste considerazioni sul sistema cristallo-vapore. Se si fosse considerato anche il termostato come parte del sistema, lo stato di equilibrio ora trovato (minimo di A per il sistema cristallo-vapore) si sarebbe espresso con la condizione già nota per un sistema isolato cioè di massimo dell'entropia.

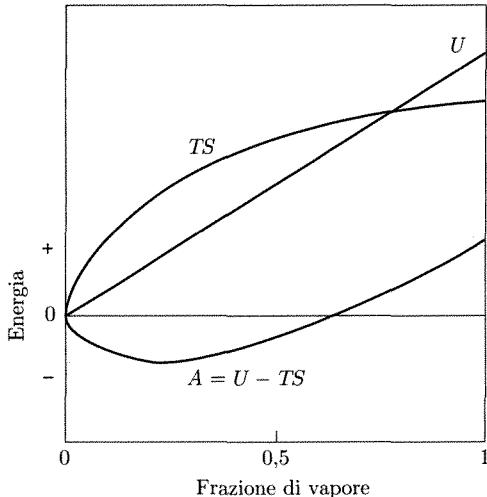


Fig. 18.1

Come si è accennato la introduzione della funzione $A(T, V, l, \mathcal{M}, n_1 \dots)$ è particolarmente interessante nella trattazione dei processi isotermi.

Se infatti T (nei processi reversibili T è la temperatura tanto della sorgente quanto del sistema) è tenuta costante mentre le altre variabili indipendenti ($V, l, \mathcal{M}, n_1 \dots$) possono variare, è chiaro che nelle trasformazioni reversibili le variazioni di A corrispondono a energia non degradata scambiata con l'esterno, cioè la diminuzione di A fra uno stato iniziale e uno stato finale sta a rappresentare la energia non degradata che si può ottenere in una trasformazione qualsiasi (e che si ottiene se la trasformazione è reversibile). Questa è la ragione per cui la funzione di Helmholtz è anche chiamata energia libera a temperatura costante. Per chiarire meglio questa espressione, consideriamo una trasformazione finita qualsiasi nel caso particolare che energia non termica sia scambiata con l'esterno

mediante un lavoro pdV . Si può scrivere

$$(31) \quad A_2 - A_1 = (U_2 - T_2 S_2) - (U_1 - T_1 S_1).$$

Se in particolare la trasformazione è tale che la temperatura dello stato iniziale e quella dello stato finale siano uguali fra loro ($T = T_1 = T_2$) e pari alla temperatura della sorgente con cui viene scambiato calore ($dT = 0$) (processo monotermo), la (31) si semplifica

$$(32) \quad A_2 - A_1 = (U_2 - U_1) - T(S_2 - S_1) \leq - \int_1^2 pdV = -L \\ L \leq A_1 - A_2.$$

Si osservi che la validità di questa relazione richiede solamente:

1. che durante la trasformazione gli scambi di calore avvengano solamente con una sorgente a temperatura costante (T);
2. che gli stati iniziali e finali si trovino alla stessa temperatura T della sorgente.

È evidente quindi che la sua validità resta se, soddisfatte le due condizioni poste, il sistema passa per stati intermedi nei quali la temperatura è diversa da quella iniziale e finale. Si vede cioè che le condizioni di validità della (32) sono meno restrittive di quelle relative a un processo isotermo e sono naturalmente ampiamente verificate in tal caso.

La (32) mostra che *il lavoro esterno fatto in un processo nel quale le temperature degli stati iniziali e finali sono uguali a quella dell'unica sorgente con la quale avvengono scambi di calore, è pari alla diminuzione della funzione di Helmholtz (energia libera a temperatura costante) fra lo stato iniziale e quello finale se la trasformazione è reversibile; esso è invece più piccolo di tale diminuzione se il processo è irreversibile.*

Si vede quindi che la differenza dei valori di A in due stati misura il valore massimo del lavoro esterno che si può ottenere con una trasformazione del tipo descritto (il lavoro è positivo se $A_1 > A_2$).

Per apprezzare a pieno la utilità della introduzione della funzione A si faccia attenzione al fatto che in una trasformazione *isoterma reversibile* il lavoro esterno

$$(33) \quad dL = -dU + TdS$$

è legato tanto a una variazione di energia interna quanto a una variazione di entropia del sistema. La capacità quindi di un sistema a compiere lavoro in una trasformazione isoterma non può essere espressa semplicemente in termini di energia interna. La funzione di Helmholtz, o energia libera a temperatura costante, consente invece di esprimere facilmente il lavoro compiuto in una trasformazione isoterma reversibile

$$(34) \quad dL = -dA.$$

La nuova funzione si può dire che ha nei processi isotermi un ruolo uguale a quello che l'energia interna ha nei processi adiabatici (16).

Per terminare la illustrazione dell'interesse della funzione A , diremo ancora che la meccanica statistica consente un calcolo teorico relativamente semplice della funzione di Helmholtz per i sistemi materiali. È quindi attraverso questa funzione che la meccanica statistica consente la determinazione dell'equazione di stato, dei calori specifici e delle altre proprietà dei sistemi materiali.

Relazione tra lavoro compiuto da un sistema termodinamico a temperature estreme eguali e variazioni dell'energia libera

Esempi

1. Tensione superficiale. Ricordiamo la esperienza di figura 15.30 nella quale una pellicola liquida fra i lati di un quadrilatero avente un lato mobile viene usata per determinare la tensione superficiale. Il lavoro che si deve compiere, in condizioni isoterme, per spostare il lato mobile di dx è dato da

$$\sigma dO$$

essendo $dO = 2l dx$ la variazione dell'area della pellicola liquida. L'espressione della variazione dell'energia interna (essendo il lavoro fatto dal sistema verso l'esterno $dL = -\sigma dO$) è data da

$$(35) \quad dU = TdS - dL = TdS + \sigma dO.$$

La espressione della variazione di energia libera si scrive

$$(36) \quad dA = dU - TdS - SdT = -SdT + \sigma dO.$$

Dalla (36) si deduce che, essendo il processo isoterma, il lavoro esterno fatto dalla pellicola è pari a

$$(37) \quad dL = -\sigma dO = -(dA)_T$$

cioè

$$(38) \quad \sigma = \left(\frac{\partial A}{\partial O} \right)_T.$$

Ricordando che si trova che σ è indipendente dall'area O della pellicola, la (38) si può esprimere dicendo che la tensione superficiale è pari alla variazione di energia libera per l'aumento unitario della superficie libera o che essa è la energia libera per unità di superficie.

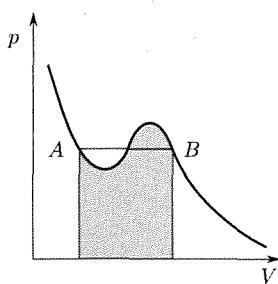


Fig. 18.2

2. Energia libera ed equazione di Van der Waals. Le isoterme di Van der Waals (fig. 15.27) si scostano da quelle reali nella zona liquido-vapore in quanto, come si è detto, l'equazione di Van der Waals è costruita per descrivere sistemi a una sola fase. Abbiamo anche detto che due piccole parti della curva di Van der Waals nella zona dell'equilibrio liquido-vapore possono essere realizzate da sistemi a una fase in stato metastabile. Vogliamo ora determinare quale è la zona della *isoterma* di Van der Waals che va sostituita da un segmento rettilineo orizzontale, cioè la posizione del punto A (inizio dell'evaporazione) e del punto B (inizio della liquefazione) nella figura 18.2. Si osservi che si può pensare di passare da A a B (entrambi alla stessa temperatura, $T_A = T_B$) attraverso una trasformazione reversibile rappresentata dalla curva di Van der Waals (idealmente superando le instabilità), oppure attraverso la trasformazione rettilinea AB . In ciascuno dei due casi gli scambi di calore avverrebbero con un ambiente alla stessa temperatura di A e B , e il lavoro esterno (rappresentato dall'area del quadrilatero formato dalla linea della trasformazione, dall'asse V e dalle ordinate in A e B) dovendo essere pari alla variazione (cambiata di segno) della funzione di stato energia libera, deve essere lo stesso. Ciò significa che le aree delle due regioni racchiuse fra la curva di Van der Waals e il segmento AB devono essere uguali. Questa circostanza determina la posizione di A e B .

3. Elasticità delle gomme. Vogliamo ora completare quanto è stato detto nel cap. 7, par. 7.10 sull'elasticità delle gomme. Rimandando a quel paragrafo per una descrizione del sistema, ricorderemo qui che un pezzo (per es. di forma cubica) di gomma vulcanizzata può considerarsi strutturalmente costituito da un reticolo tridimensionale ottenuto bloccando a caso, in un certo numero di punti, varie macromolecole (molecole polimeriche lineari). Ricordiamo inoltre che ciascuna macromolecola presa a sé è costituita da una catena di numerosissimi segmenti i quali possono disporsi rispetto ai contigui in un numero enorme di disposizioni con l'unica limitazione che l'angolo fra elementi contigui abbia un determinato valore: tutte queste configurazioni sono energeticamente equivalenti, a esse cioè corrisponde la stessa energia interna. Dopo la vulcanizzazione, i tratti di catena fra due successivi nodi è ancora costituito da numerosissimi elementi e può disporsi in numerose configurazioni di uguale energia.

Per spiegare nella maniera più semplice la natura della elasticità che compare in sistemi di questo genere, si comincerà con il considerare il comportamento di catene

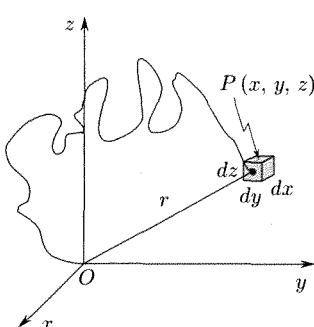


Fig. 18.3

(macromolecole) non bloccate fra loro in alcun punto, e si estenderanno i risultati al caso delle gomme vulcanizzate.

Supponiamo di considerare una di queste molecole, e poniamo uno dei suoi estremi nell'origine del sistema di riferimento: l'altra estremità si muoverà a caso nello spazio. La meccanica statistica peraltro può essere impiegata per esprimere la probabilità di trovare tale estremo in un piccolo volume $dxdydz$ nell'intorno di un punto P (fig. 18.3) a un istante qualsiasi, cioè la probabilità che le estremità della catena abbiano una certa separazione (pari alla distanza r di P da O). Questo problema è equivalente a quello di determinare la probabilità di giungere in un certo punto, partendo da un altro, mediante n passi che si seguano a caso l'un l'altro in uno spazio tridimensionale con l'unica restrizione che gli spostamenti corrispondenti a due passi successivi formino l'angolo θ . Valutare questa probabilità praticamente corrisponde a trovare il numero relativo di configurazioni delle catene formate da n elementi, ciascuno di lunghezza l , compatibili con la condizione posta che abbiano origine in O e termine nel volume dV intorno a P . La meccanica statistica fornisce per la probabilità cercata la espressione

$$(39) \quad \psi(x, y, z) dxdydz = Ce^{-\beta^2(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$$

essendo β e C due costanti:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3}{2nl^2} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ C &= \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

La (39) ha la forma della funzione gaussiana che si incontra nel calcolo degli errori (Introduzione, par. 11) e in molti processi statistici nei quali si ha sovrapposizione di eventi a caso. È una funzione a simmetria sferica e ha il massimo nell'origine: cioè per una molecola del tipo considerato, il punto ove con maggiore probabilità si può trovare il secondo estremo è l'origine (cioè nella stessa posizione del primo estremo).

La (39) può anche scriversi

$$(40) \quad \psi(r) dV = Ce^{-\beta r^2} (4\pi r^2) dr$$

essendo l'elemento di volume $dV = 4\pi r^2 dr$.

In base a quanto detto, se si fissa un estremo delle catene (n elementi) in O , e si considerano le configurazioni che abbiano l'altro estremo in dV , il loro numero è proporzionale a $\psi(r)dV$. Se facciamo variare P , mantenendo costante dV , il numero relativo di configurazioni viene a dipendere solo da r ed è proporzionale a $e^{-\beta r^2}$. Siccome l'entropia è proporzionale al logaritmo delle configurazioni possibili per uno stato, si può porre per l'entropia delle macromolecole in funzione della posizione del secondo estremo P

$$(41) \quad S = d + k \ln e^{-\beta r^2} = d - k\beta r^2$$

essendo d una costante e k la costante di Boltzmann.

L'entropia è massima per $r = 0$ (disordine massimo, cioè stato di massima probabilità) e decresce al crescere di r : infatti al crescere di r si riduce il numero di configurazioni possibili e di conseguenza la probabilità dello stato.

Se ora consideriamo la energia libera

$$A = U - TS$$

e immaginiamo che le molecole (origine in O , altro estremo in ΔV in corrispondenza a P , a distanza r) vengano stirate a temperatura costante, sicché la separazione degli estremi passi a $r + dr$, la variazione di energia libera è

$$(42) \quad dA = -TdS = -dL$$

poiché tutte le configurazioni hanno la stessa energia interna ($dU = 0$). Se si indica con \mathbf{F} una forza che agisca fra le estremità della molecola nella direzione e in verso opposto a quello del vettore $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ si può porre:

$$-dL = Fdr = -TdS$$

$$(43) \quad F = -T \frac{dS}{dr} = 2kT\beta r.$$

Ciò significa che se si allunga una molecola si presenta fra le sue estremità una forza \mathbf{F} che tende a riportarla alla lunghezza più probabile: l'intensità di tale forza è proporzionale all'allungamento e quindi si può pensare che la molecola sia dotata di elasticità come le sostanze che seguono la legge di Hooke. È chiaro peraltro che la forza deriva dal fatto che spostando gli estremi della molecola si porta il sistema in una configurazione di minore probabilità (minore entropia) e la tendenza del sistema a ritornare nelle condizioni di equilibrio si manifesta con la comparsa della forza.

Si osservi che la energia necessaria per compiere il lavoro esterno è presa dall'ambiente sotto forma di calore $T\Delta S$. Si osservi inoltre che la intensità della forza (43) è ottenuta statisticamente e quindi ha fluttuazioni; la (43) va presa come espressione del valore medio. Il coefficiente di proporzionalità nella (43) è proporzionale alla temperatura assoluta: cioè se si mantiene costante l'allungamento e si innalza la temperatura, F cresce.

Le precedenti considerazioni possono essere estese dal caso considerato di singole molecole al caso di un pezzo di gomma vulcanizzata. Per vedere ciò in maniera semplice si osservi che anche in quest'ultimo caso il sistema può trovarsi in numerosissime configurazioni di uguale energia interna, giacché i tratti delle catene fra due punti nodali successivi possono disporsi in numerosissime maniere. Inoltre è lecito ammettere che il sistema, all'atto della vulcanizzazione (cioè del bloccaggio dei nodi) si trovi nello stato di maggiore probabilità e massima entropia. Qualsiasi variazione nella distanza dei nodi allora fa passare il sistema in uno stato di uguale energia interna ma di minore probabilità e minore entropia: si possono allora ripetere le considerazioni svolte nel caso delle singole molecole per la comparsa di una forza al variare della distanza fra i nodi (rispetto a quella di equilibrio), come avviene quando la gomma vulcanizzata viene deformata.

4. Equilibrio atomo interstiziale-vacanza nei cristalli. Un cristallo perfetto ha, a temperature prossime allo zero assoluto, tutti i suoi atomi in posizioni reticolari regolari e la sua energia, al tendere della temperatura allo zero assoluto, tende al valore minimo consentito. Al crescere della temperatura la energia termica cresce, l'ampiezza delle oscillazioni degli atomi intorno alle posizioni di equilibrio aumenta e può accadere che un atomo avendo accumulato una sufficiente energia rompa i legami con gli atomi vicini e si sposti. Quando ciò avviene esso oscilla intorno a una posizione che non è più quella originaria nel reticolo regolare, ma è invece una posizione irregolare nella cella cristallina (atomo interstiziale). Contemporaneamente risulta vuota una posizione che nel reticolo regolare dovrebbe essere occupata. Si dice che si crea una coppia: atomo interstiziale-vacanza. Perché si verifichi un evento di questo genere occorre impiegare energia, sicché un cristallo che contenga difetti di tale genere viene a possedere una energia interna superiore a quella che avrebbe se mancassero i difetti.

È chiaro peraltro che la condizione di equilibrio del sistema, a temperatura e volume costante, non può essere quella di energia interna minima, cioè di assenza di difetti. Bisogna infatti tenere presente oltre all'energia nel suo complesso, la esistenza della tendenza del sistema a evolvere verso forme di maggiore disordine, cioè caratterizzate da maggiore entropia. Per queste ragioni, come sappiamo, la condizione di equilibrio va espressa mediante la funzione di Helmholtz

$$A = U - TS$$

dicendo che questa deve avere un minimo. In condizioni di equilibrio, perciò, non sarà nullo il numero di difetti.

Se per es. supponiamo che la creazione di un difetto interstiziale-vacanza in alluminio richieda la energia $E = 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$, possiamo calcolare il numero di difetti n in equilibrio in un cm^3 di materiale a 300 K.

A partire da un certo stato possiamo calcolare la variazione di energia libera dovuta alla introduzione di n difetti,

$$(44) \quad \Delta A = \Delta U - T\Delta S.$$

La parte dovuta alla energia interna è

$$\Delta U = nE.$$

Il contributo alla entropia dovuto alla presenza di n difetti fra N atomi in posizione normale, si ottiene con la formula (50) del capitolo precedente ove W

esprime i modi con i quali gli n difetti possono distribuirsi fra gli atomi normali. Si ha

$$(45) \quad \Delta S = k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Risulta perciò

$$(46) \quad \Delta A = nE - kT[\ln N! - \ln n! - \ln(N-n)!]$$

cioè l'energia libera in funzione di n sarà

$$(47) \quad A = nE - kT[\ln N! - \ln n! - \ln(N-n)!] + \text{cost.}$$

La condizione di equilibrio è quella di minimo per la funzione $A(n)$, cioè

$$(48) \quad \frac{dA}{dn} = 0.$$

Essendo approssimativamente

$$\frac{d}{dn} \ln n! = \ln n, \quad \frac{d}{dn} \ln(N-n)! = -\ln(N-n)$$

si ha

$$(49) \quad E - kT[-\ln n + \ln(N-n)] = 0$$

$$\ln \frac{n}{N-n} = -\frac{E}{kT}$$

cioè

$$n = (N-n)e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Poiché è sempre $n \ll N$, si può scrivere

$$(50) \quad n = Ne^{-\frac{E}{kT}}.$$

Nel caso in oggetto, essendo la densità dell'alluminio $\rho = 2,56 \text{ g/cm}^3$ e il peso atomico 26,98, in un cm^3 di materiale vi sono circa 0,095 moli di atomi cioè $N = 5,7 \cdot 10^{22}$ atomi.

Ricordando che $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$, si ha, alla temperatura ambiente, circa $n = 10^6$ difetti presenti in un cm^3 di alluminio.

5. Separazione di isotopi. Il deuterio (idrogeno pesante) si trova nell'idrogeno naturale contenuto nella frazione molare dello 0,0015. Si supponga di volere preparare 100 g di deuterio separandolo dall'idrogeno normale alla temperatura di 300 K e si desideri calcolare la spesa di energia necessaria.

Evidentemente il lavoro minimo necessario è dato dalla variazione di energia libera

$$(51) \quad L_{\min} = -\Delta A = A_1 - A_2 = -\Delta U + T\Delta S$$

per una trasformazione consistente nella separazione di una massa $m = m_D + m_H$ di idrogeno naturale nelle masse dei costituenti m_D e m_H .

Trattando il deuterio e l'idrogeno come gas perfetti e poiché $T = \text{cost.}$, risulta $\Delta U = 0$. Tutto quindi si riduce al calcolo di ΔS . Per far ciò consideriamo il processo inverso reversibile, cioè un mescolamento a partire dalle masse m_D e m_H che si trovano alla stessa pressione, p , fino a giungere a uno stato in cui i due gas sono mescolati e si trovano a pressioni parziali p_D e p_H tali che $p_D + p_H = p$. Perché il processo sia reversibile esso può essere immaginato formato:

1. da variazioni isoterme reversibili di pressione;
2. da un mescolamento adiabatico reversibile (mediante l'uso di opportune pareti semipermeabili) dei due gas già portati alle pressioni p_D e p_H .

Mentre in questa seconda trasformazione non v'è né assorbimento di calore dall'esterno né quindi variazione di entropia, nelle operazioni di variazione di pressione il calore assorbito (trasformazione isoterma) è

$$(52) \quad Q = \frac{m_D}{M_D} RT \ln \frac{p}{p_D} + \frac{m_H}{M_H} RT \ln \frac{p}{p_H}$$

ove $M_D = 4$ e $M_H = 2$ sono i pesi molecolari del deuterio e dell'idrogeno.

Si osservi inoltre che p/p_D e p/p_H sono gli inversi delle frazioni molari dei due gas $x_D = n_D/(n_D + n_H)$ e x_H . Si ha

$$Q = -RT \left[\frac{m_D}{M_D} \ln x_D + \frac{m_H}{M_H} \ln x_H \right].$$

Si ha quindi nel processo che ora si sta considerando una variazione di entropia

$$\Delta S_{\text{mesc}} = \frac{Q}{T}$$

e quindi

$$(53) \quad \Delta S_{\text{sep}} = -\frac{Q}{T} = R \left[\frac{m_D}{M_D} \ln x_D + \frac{m_H}{M_H} \ln x_H \right].$$

Si ottiene perciò in accordo con la (51)

$$(54) \quad L_{\min} = T \Delta S_{\text{sep}} = RT \left[\frac{m_D}{M_D} \ln x_D + \frac{m_H}{M_H} \ln x_H \right].$$

Nel caso in oggetto, essendo

$$R = 8,31 \text{ joule/mole K}, \quad x_D = 0,00015, \quad m_D = 100 \text{ g},$$

$$m_H = m_D \left(\frac{x_H M_H}{x_D M_D} \right) = 3332,83 \text{ g}, \quad T = 300 \text{ K},$$

si ottiene

$$L_{\min} = -615,023 \text{ joule}.$$

Il segno meno corrisponde al fatto che il lavoro va fornito al sistema.

■ 18.5. FUNZIONE DI GIBBS O ENALPIA LIBERA

Una estensione ovvia delle considerazioni fatte ci porta a considerare una nuova funzione caratteristica nella quale le variabili indipendenti siano T, p e le variabili extensive a eccezione di S e V . È questa la funzione di Gibbs

$$(55) \quad G(T, p, l, \mathcal{M}, n_1 \dots) = U + pV - TS = A + pV = H - TS.$$

Come si vede essa sta alla funzione di Helmholtz come l'entalpia all'energia interna. Per questa ragione essa viene anche chiamata entalpia libera.

In forma differenziale si può scrivere per processi reversibili (uguaglianza) ed irreversibili (disuguaglianza)

$$(56) \quad dG \leq -SdT + Vdp + Fdl + Hd\mathcal{M} + \mu_1 dn_1 + \dots$$

Come negli altri casi si vede che essa è una funzione di stato ed è anche una funzione caratteristica. Limitiamoci a vederlo nel caso che gli scambi di energia non termica con l'esterno avvengano solo tramite un lavoro delle pressioni. Allora in trasformazioni reversibili

$$(57) \quad dG(T, p) = -SdT + Vdp.$$

Risulta

$$(58) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -S \\ \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = V. \end{cases}$$

La seconda di queste relazioni, essendo una relazione fra T, p, V , costituisce l'equazione di stato.

Ricordando la (78) del cap. 17 e differenziando la prima delle (58) rispetto a T , si ottiene la dipendenza di \bar{C}_p dalle variabili meccaniche:

$$(59) \quad \bar{C}_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p.$$

Uguagliando le derivate seconde miste della G si ha una quarta equazione di Maxwell:

$$(60) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

*Quarta relazione
di Maxwell*

Se in un processo vengono tenute costanti T, p , e le variabili estensive diverse da S e V , la (56) mostra che G non può che diminuire e quindi lo stato di equilibrio di un sistema in queste condizioni corrisponde a un minimo di G .

Per vedere l'interesse della introduzione di questa funzione, consideriamo nuovamente il caso di una trasformazione nella quale gli stati finali e iniziali siano alla stessa temperatura dell'unica sorgente con la quale la sostanza effettua scambi di calore e supponiamo ancora che l'unico scambio di energia non termica con l'ambiente avvenga tramite il lavoro delle forze di pressione. Per il lavoro vale la (32)

$$(61) \quad L \leq A_1 - A_2$$

Supponiamo ora di considerare una trasformazione che sia contemporaneamente isoterma (e quindi la (61) è valida) e isobarica. Se sottraiamo a entrambi i membri della (61) il lavoro esterno fatto, pari a $p(V_2 - V_1)$, otteniamo

$$(62) \quad L - p(V_2 - V_1) = 0 \leq A_1 + pV_1 - A_2 - pV_2 = G_1 - G_2.$$

Cioè

$$(63) \quad G_2 \leq G_1$$

in un processo isotermo e isobarico reversibile la funzione di Gibbs (entalpia libera) resta costante; se il processo è irreversibile essa diminuisce.

Esempi importanti di processi isotermi e isobarici sono i cambiamenti di stato. Nella evaporazione reversibile di un liquido, per es., T e p sono costanti e quindi si può dire che l'entalpia libera del vapore e quella del liquido per unità di massa sono uguali.

Si osservi che invece la differenza di energia libera (funzione di Helmholtz) fra liquido e vapore ($A_1 - A_2$) è pari al lavoro fatto dalla sostanza nell'evaporare [$p(V_2 - V_1)$].

Se invece il sistema a due fasi, liquido e vapore, non si trova alla temperatura e alla pressione di equilibrio, ciascuna delle due fasi sarà caratterizzata da un valore diverso dell'entalpia libera per unità di massa: la fase più stabile è quella a entalpia libera più bassa. Se il sistema si trova nella fase a cui corrisponde un valore maggiore per la funzione di Gibbs (per es. liquido surriscaldato), esso si trova in condizioni di falso equilibrio e basta una piccola perturbazione perché si sposti irreversibilmente nelle condizioni di equilibrio stabile con diminuzione dell'entalpia libera.

In processi isotermi e isobarici l'entalpia libera non può mai aumentare

Considerazioni analoghe valgono per altri cambiamenti di stato. Esse fanno vedere che la funzione di Gibbs ha nella pratica una grande importanza.

Vogliamo infine richiamare l'interesse di alcune formule che spesso sono usate e che esprimono i potenziali chimici in funzione di G . Sono formule simili alle (2). Dalla (56)

$$(64) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial G}{\partial n_1} \right)_{T,p,l,\mathcal{M},n_2,n_3} = \mu_1 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial n_2} \right)_{T,p,l,\mathcal{M},n_1,n_3} = \mu_2 \end{cases}$$

ecc.

Naturalmente altre espressioni per i potenziali chimici possono essere ottenute usando le altre funzioni caratteristiche, ma queste ottenute usando G sono particolarmente utili. Se si considera il caso particolare in cui per il sistema non abbiano importanza altri termini nell'energia interna oltre quelli qui indicati

$$U = TS - pV + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \dots$$

risulta

$$(65) \quad G = U - TS + pV = \sum \mu_i n_i.$$

Se in particolare la sostanza è una sola

$$(66) \quad G = \mu n$$

si vede che in questo caso il *potenziale chimico* è la entalpia libera per kilomole.

■ 18.6. ALTRE FUNZIONI CARATTERISTICHE. RIEPILOGO

I quattro casi considerati in precedenza hanno mostrato la utilità di disporre di funzioni caratteristiche adatte per semplificare la trattazione dei singoli problemi termodinamici: si è visto infatti che la presenza nelle varie funzioni caratteristiche di differenti grandezze usate come variabili indipendenti rende ciascuna di esse particolarmente adatta all'esame di alcuni tipi di trasformazioni.

Nel caso che siano possibili altri scambi di energia non termica diversi dal lavoro delle pressioni, altre funzioni caratteristiche possono essere costruite in modo da scambiare F con l , H con \mathcal{M} , μ con n sia singolarmente, sia contemporaneamente. Così per es. si può introdurre una funzione caratteristica, chiamata gran potenziale, nella quale le variabili indipendenti sono T, V, l, H, μ, \dots , nella quale cioè le variabili estensive S e n sono sostituite da T e μ .

Nei casi più comuni peraltro sono sufficienti le quattro funzioni caratteristiche: energia interna (U), entalpia (H), funzione di Helmholtz o energia libera (A), funzione di Gibbs o entalpia libera (G). Ricordando la equazione di Eulero per la energia interna si può scrivere, per trasforma-

zioni reversibili

$$(67) \quad \begin{aligned} U(S, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots) &= TS - pV + Fl + H\mathcal{M} + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \dots \\ H(S, p, l, \mathcal{M}, n_1, \dots) &= U + pV \\ A(T, V, l, \mathcal{M}, n_1, \dots) &= U - TS \\ G(T, p, l, \mathcal{M}, n_1, \dots) &= A + pV = U - TS + pV. \end{aligned}$$

Nel caso più semplice ma molto importante che scambi di energia non termica siano rappresentati esclusivamente dal lavoro di pressioni, si ha, per una sostanza omogenea costituita da n kmoli

$$(68) \quad \begin{aligned} U(S, V) &= TS - pV + \mu n \\ H(S, p) &= U + pV = TS + \mu n \\ A(T, V) &= U - TS = -pV + \mu n \\ G(T, p) &= A + pV = \mu n. \end{aligned}$$

Per trasformazioni elementari

$$(69) \quad \begin{aligned} dU(S, V, n) &\leq TdS - pdV + \mu dn \\ dH(S, p, n) &\leq TdS + Vdp + \mu dn \\ dA(T, V, n) &\leq -SdT - pdV + \mu dn \\ dG(T, p, n) &\leq -SdT + Vdp + \mu dn, \end{aligned}$$

ove il segno di uguaglianza vale per trasformazioni reversibili e quello di disuguaglianza per trasformazioni irreversibili. Si è visto come la derivata di ciascuna funzione rispetto a una delle variabili indipendenti consenta di ottenere l'altra variabile accoppiata con la prima nel caratterizzare ciascun contatto di energia che il sistema ha con l'esterno. Tramite queste derivate prime si giunge alla determinazione delle equazioni di stato per il sistema.

Si è anche visto come relazioni di notevole interesse si ottengano uguagliando le derivate seconde miste di ciascuna funzione rispetto a due sue variabili indipendenti. Nel caso di sistemi nei quali il lavoro esterno è descritto dal termine pdV , le equazioni di Maxwell sono quattro:

$$(70) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T &= - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

Ricordiamo inoltre come siano state facilmente ottenute le dipendenze dei calori specifici dalle variabili meccaniche.

Ciascuna delle funzioni caratteristiche quindi assomma tutte le informazioni termodinamiche di un sistema e ciascuna di esse può essere costruita se si hanno a disposizione le informazioni sul sistema, se cioè si conosce dall'esperienza o per vie teoriche: 1) l'equazione di stato; 2) la dipendenza del calore specifico a volume costante, o a pressione costante, dalla temperatura.

È importante infine notare come *ciascuna di queste funzioni caratteristiche*, essendo una funzione di stato, cioè assumendo un determinato valore per ogni stato, *può essere anche trattata come grandezza di stato*

Relazioni tra funzioni termodinamiche caratteristiche e grandezze di stato

Vincoli sui differenziali delle funzioni termodinamiche caratteristiche

Riepilogo delle relazioni di Maxwell

al pari delle altre grandezze p, V, T ecc. È evidente inoltre che si tratta di grandezze estensive.

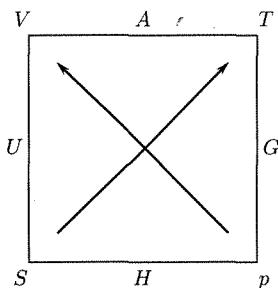


Fig. 18.4

Una utile regola mnemonica relativa alle quattro funzioni caratteristiche, per ricordare le proprietà principali di ciascuna di esse, è legata al quadrato indicato nello schema di figura 18.4. Ciascuna funzione è indicata lungo uno dei lati mentre in corrispondenza degli estremi del lato stesso sono indicate le sue variabili indipendenti. Seguendo le frecce si possono ricavare, col loro segno, le grandezze che sono ottenute mediante la derivazione di ciascuna funzione rispetto a una delle sue variabili indipendenti. Per es.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -p.$$

Si può ricavare anche la struttura delle equazioni di Maxwell. Ciascuna delle equazioni di Maxwell contiene le derivate parziali di alcune delle grandezze segnate agli angoli del quadrilatero rispetto ad altre di esse: in ogni relazione intervengono i simboli di tutte e quattro le grandezze S, V, T, p . Se si parte da un angolo qualsiasi (per es. S) la freccia dà la grandezza che va tenuta costante (nell'esempio T) nella derivazione di S e il segno della derivata. La derivazione può farsi rispetto a una delle altre due grandezze (V o p). Si ottengono naturalmente due diverse equazioni: la derivata a secondo membro è della grandezza restante (nell'esempio p o V). Anche in questo caso la freccia indica la grandezza che nella derivazione va tenuta costante e il segno della derivata; la grandezza rispetto a cui si fa la seconda derivata si ricava osservando il primo membro giacché grandezza tenuta costante e grandezza rispetto a cui si fa la derivata sono nel primo e nel secondo membro scambiate.

Per esempio

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

■ 18.7. DERIVATE PARZIALI E FORMULE TERMODINAMICHE

Il fatto che nei sistemi termodinamici le variabili indipendenti siano sempre più di una (una per ogni tipo di contatto energetico con l'esterno e questi sono almeno due) porta di conseguenza che la maniera più semplice per studiarne il comportamento consiste nel fare assumere valori diversi a una sola grandezza, che rappresenta una variabile indipendente, mantenendo costanti le altre grandezze indipendenti.

È questo il metodo sperimentale che si segue per avere le informazioni necessarie per la descrizione del sistema, cioè per ottenere le equazioni di stato e i calori specifici. Noi ricordiamo per es. che per ottenere la equazione di stato dei gas si sono fatte esperienze tenendo costante la temperatura e facendo variare il volume (o la pressione) (legge di Boyle-Mariotte) ed esperienze tenendo costante il volume (o la pressione) e facendo variare la temperatura [leggi di Gay-Lussac; equazioni (6)(7), cap. 13]. Analogamente per determinare i calori specifici si è tenuto costante il volume (o la pressione) facendo variare la temperatura.

Dal punto di vista analitico questa procedura corrisponde, attestata la esistenza di una relazione funzionale fra le grandezze in oggetto, alla de-

terminazione di derivate parziali. Così nel caso di un sistema nel quale gli scambi di energia non termica avvengano tramite il lavoro delle pressioni (p. es. gas), l'equazione di stato si può porre

$$V = V(T, p)$$

da cui

$$(71) \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp$$

e la esperienza serve a fornirci

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

La determinazione dei calori specifici ci fornisce invece

$$\bar{C}_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

È quindi una caratteristica essenziale della descrizione termodinamica dei sistemi quella che i vari parametri che servono a rappresentare le loro proprietà si ottengono facendo operazioni che analiticamente equivalgono a effettuare derivate parziali di funzioni di grandezze termodinamiche; in altri termini, l'operazione analitica di calcolo delle derivate di relazioni funzionali fra grandezze termodinamiche corrisponde perfettamente al tipo di misura che si può pensare di organizzare per la determinazione sperimentale dei parametri d'interesse. Si comprende quindi la grande importanza che assumono le seguenti semplici considerazioni sulle derivate parziali delle funzioni termodinamiche.

Osserviamo innanzitutto che le variabili che possono essere in gioco sono:

1. una coppia di variabili intensiva-estensiva ($T-S$; $p-V$; $F-l$; $H-M$; $\mu-n, \dots$) per ogni contatto energetico del sistema con l'esterno;
2. le funzioni caratteristiche U, H, A, G (ed eventualmente altre) che, come si è detto, possono essere considerate come grandezze (e variabili) di stato.

Le variabili indipendenti sono in numero pari al numero di contatti energetici del sistema con l'esterno, ma esse possono essere scelte in maniera arbitraria fra le grandezze disponibili.

Il numero di derivate parziali che si possono considerare è quindi enorme.

Fortunatamente esistono legami fra di loro che vengono non solo dalla termodinamica, ma anche dall'analisi.

Ricordiamo alcune regole:

- a. Se si hanno le derivate di due funzioni rispetto alla stessa variabile (u), fatte tenendo costante una medesima seconda variabile (z), come per es. $(\partial x / \partial u)_z$ e $(\partial y / \partial u)_z$, le funzioni (x e y) possono essere considerate come funzioni a una sola

variabile (u). In tal caso vale la relazione $(dx/du)/(dy/du) = dx/dy$, e quindi

$$(72) \quad \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_z}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z} = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z.$$

b. Nel caso che la forma differenziale

$$(73) \quad dz = B(x, y)dx + C(x, y)dy$$

sia un differenziale esatto, si ha innanzitutto

$$(74) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = B \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = C$$

e

$$(75) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{C}{B} = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}.$$

Quest'ultima relazione può anche scriversi

$$(76) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

La (75) non va confusa con la (72): si faccia attenzione alle variabili tenute costanti nelle operazioni di derivazione.

Un esempio di applicazione della (75) si è avuto per dedurre le (97) e (110) nel capitolo precedente. Un altro esempio si può avere calcolando per un gas che segua la equazione di Van der Waals $(\partial V/\partial T)_p$ in funzione delle variabili T, V .

$$(77) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \frac{\frac{nR}{V-nb}}{\frac{nRT}{(V-nb)^2} - \frac{2an^2}{V^3}} = \\ &= \frac{R(V-nb)V^3}{RTV^3 - 2an(V-nb)^2}. \end{aligned}$$

Tale relazione è stata già calcolata nel capitolo precedente (formula (113)).

c. Ancora nel caso di un differenziale esatto (73) l'indipendenza delle derivate seconde miste dall'ordine di derivazione porta a:

$$(78) \quad \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_y.$$

Abbiamo già visto varie applicazioni di questa regola nella deduzione delle equazioni di Maxwell.

La risoluzione dei problemi quali si presentano in termodinamica si riduce essenzialmente a esprimere alcune derivate parziali che rappresentano le proprietà di interesse in funzione di altre derivate parziali che rappresentano quantità direttamente misurabili quale il calore specifico a pressione costante $(\partial H/\partial T)_p$ e l'equazione di stato [per es. $(\partial V/\partial T)_p$ e $(\partial V/\partial p)_T$].

Queste relazioni (formule termodinamiche) si ottengono di caso in caso utilizzando le caratteristiche delle varie grandezze e funzioni che abbiamo via via illustrate e le relazioni analitiche fra di esse.

Esistono tabelle di relazioni termodinamiche e suggerimenti di procedura per giungere facilmente al risultato voluto.

EQUILIBRIO NEI SISTEMI TERMODINAMICI

✓ Criteri per le condizioni di equilibrio di sistemi termodinamici

Valori estremali per le funzioni termodinamiche estensive (S , U , H , A , G).

Eguaglianza delle grandezze intensive (T , p , μ), deducibile dall'invarianza delle corrispondenti grandezze estensive per trasformazioni virtuali (es.: sistema adiabatico in due parti: $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2$).

► Equilibrio tra due fasi di una sostanza:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_l}{T\Delta V} \quad (\text{Clausius-Clapeyron}),$$

con q_l , calore latente della trasformazione; ΔV , differenza tra i volumi occupati dalle due fasi.

► Equilibrio tra più componenti (numero c) con più fasi (numero m): egualanza dei potenziali chimici (μ) di tutte le fasi di ciascun componente presente nel sistema.

Gradi di libertà per il sistema:

$$F = 2 + c - m.$$

μ_1

μ_2

■ 19.1. INTRODUZIONE

Dopo avere discusso il primo e il secondo principio della termodinamica, introdotto le funzioni caratteristiche e sommariamente mostrato come si possa procedere per ricavare le indicazioni che la termodinamica può dare nei riguardi del comportamento dei sistemi nel caso particolare che di volta in volta interessa, si vuole ora prestare una particolare attenzione all'aspetto dell'equilibrio dei sistemi termodinamici, che spesso si presenta in problemi di grande importanza.

Ciò permetterà di discutere alcune questioni relative all'equilibrio dei sistemi a più di una fase già in parte accennati nelle discussioni sui cambiamenti di fase.

■ 19.2. CRITERI DI EQUILIBRIO IN TERMINI DI GRANDEZZE ESTENSIVE

Un sistema che non si trovi in condizioni di equilibrio tende a evolvere spontaneamente fino a raggiungere lo stato di equilibrio seguendo trasformazioni spontanee. I criteri di equilibrio si esprimono in maniera diversa secondo le limitazioni che sono imposte al sistema per le sue trasformazioni: in precedenza si sono visti vari casi nei quali questi criteri sono espressi mediante grandezze estensive. Vogliamo riassumere in breve i casi più interessanti.

Se si ha un sistema completamente isolato, la seconda legge della termodinamica impone che sia

$$dS \geq 0$$

e quindi si può dire che *in un sistema adiabatico in condizioni di equilibrio la entropia è massima*.

In condizioni di equilibrio si estremizza un'opportuna funzione termodinamica

Per un sistema che viene tenuto in maniera che la temperatura e tutte le variabili estensive a eccezione della entropia siano costanti, la condizione di equilibrio è che la funzione di Helmholtz, o energia libera a temperatura costante, sia minima.

Questa è la condizione di equilibrio in particolare per un sistema che può scambiare energia non termica con l'esterno solamente per mezzo del lavoro di pressioni quando esso venga tenuto a temperatura costante (isoterma) e a volume costante.

Per un sistema tenuto in maniera che siano costanti temperatura, pressione e tutte le variabili estensive a eccezione di S e V , la condizione di equilibrio è che la funzione di Gibbs, o entalpia libera, sia minima. In particolare questa è la condizione di equilibrio per un sistema che può scambiare energia non termica con l'esterno solamente tramite il lavoro pdV , quando venga tenuto a temperatura e pressione costanti.

Sono questi i casi che interessano più comunemente. Meno frequenti sono invece quelli in cui il sistema raggiunge l'equilibrio essendo tutte le variabili estensive costanti (nel qual caso l'equilibrio corrisponde a energia interna minima), o in cui il sistema raggiunge l'equilibrio essendo costanti la pressione e tutte le variabili estensive a eccezione del volume (nel qual caso l'equilibrio corrisponde a entalpia minima).

■ 19.3. CRITERI DI EQUILIBRIO IN TERMINI DI GRANDEZZE INTENSIVE

Si vogliono ora esprimere le condizioni di equilibrio per i casi più comuni in termini di grandezze intensive (T, p, μ): per ora saranno considerati tre casi.

1. Equilibrio termico

Si abbia un sistema *adiabatico*, per es. costituito da due parti separate da una parete conduttrice di calore. Si pensi per es. a due fluidi che si trovino a temperature e pressioni diverse dalle due parti di una parete conduttrice. Tutto il sistema sia isolato dall'esterno. Si è visto che la condizione di equilibrio richiede che l'entropia del sistema abbia il valore massimo possibile. Ciò significa che se si immagina una trasformazione virtuale infinitesima reversibile, consentita dalle limitazioni cui il sistema è soggetto, che sposti il sistema dalla posizione di equilibrio, la variazione di entropia δS deve essere nulla:

$$(1) \quad \delta S = 0.$$

(Si noti il simbolo δ , usato per variazioni infinitesime virtuali.) Siccome il sistema considerato è formato da due parti, la (1) può scriversi

$$(2) \quad \delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = 0.$$

Una possibile trasformazione elementare virtuale consentita dalla condizione di adiabaticità del sistema è quella che fa passare la quantità di calore δQ dalla prima parte (a temperatura T_1) alla seconda (a temperatura T_2). In tal caso è

$$\delta S_1 = -\frac{\delta Q}{T_1}, \quad \delta S_2 = \frac{\delta Q}{T_2}$$

e la condizione di equilibrio si scrive:

$$(3) \quad \delta S = \delta Q \left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) = 0.$$

Poiché $\delta Q \neq 0$, essa può essere soddisfatta solo se

$$(4) \quad T_1 = T_2$$

in accordo con l'esperienza.

Questo risultato può essere esteso a sistemi più complicati, costituiti da più componenti separati da pareti fisse o mobili purché termicamente conduttrici. Si può quindi concludere dicendo che *nelle condizioni di equilibrio di un sistema adiabatico* che non contenga pareti di separazione termicamente isolanti, *la temperatura deve essere ovunque la stessa*.

In assenza di pareti adiabatiche un sistema all'equilibrio dev'essere isotermo

2. Equilibrio meccanico

Si consideri un sistema nel quale vengano mantenuti costanti la temperatura e il volume (e le altre grandezze estensive a eccezione di S), quale per es. quello costituito da due fluidi a temperatura costante contenuti in due parti di un cilindro separate da un pistone mobile; il volume del sistema è fisso ma la pressione nelle due parti può essere diversa. L'esperienza mostra che in condizioni di equilibrio il pistone si muove fino a che le pressioni nelle due parti del sistema risultino le medesime. Per ritrovare questo risultato si osservi che la condizione di equilibrio nelle condizioni specificate è quella di energia libera minima. Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso precedente si può vedere che ciò equivale a dire che se si considera una trasformazione virtuale reversibile infinitesima consentita dalle limitazioni poste al sistema a partire dalla condizione di equilibrio, deve essere

$$(5) \quad \delta A = 0.$$

Una trasformazione consentita è uno spostamento del pistone in condizioni isoterme. Supponiamo che il primo fluido aumenti il suo volume di δV_1 : la variazione di volume del secondo è allora $\delta V_2 = -\delta V_1$. Per le energie libere si ha, ricordando la (24) del capitolo precedente,

$$\delta A_1 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial V} \right)_T \delta V_1 = -p_1 \delta V_1$$

$$\delta A_2 = -p_2 \delta V_2 = p_2 \delta V_1.$$

Quindi, per l'equilibrio:

$$(6) \quad \delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = \delta V_1(p_2 - p_1) = 0.$$

che, essendo $\delta V_1 \neq 0$, può essere soddisfatta solo se $p_1 = p_2$. Queste considerazioni possono essere estese a casi più generali e non richiedono che le pareti di separazione delle parti del sistema siano reali.

Si conclude dicendo che *nello stato di equilibrio di un sistema che non contiene pareti di separazione fisse, la pressione deve avere lo stesso valore ovunque*.

In assenza di pareti fisse un sistema all'equilibrio dev'essere isobaro

3. Equilibrio nel passaggio di materia fra fasi; sostanze semplici

Si consideri il caso di un sistema a più fasi che venga mantenuto a temperatura e pressione costanti, per il quale cioè siano soddisfatte le condizioni di equilibrio termico e meccanico. Vi è la possibilità che della materia passi da una fase a un'altra. Per ora noi ci si limita a considerare il caso che il sistema sia formato da un'unica sostanza; l'estensione al caso di più sostanze sarà fatta in seguito.

Per es., immaginiamo di avere un liquido e il suo vapore. Si è già detto che il passaggio da uno stato all'altro è una trasformazione che avviene a temperatura e pressione costanti. La condizione di equilibrio deve fissare

la quantità di vapore presente (cioè la pressione) nel sistema; ciò va naturalmente inteso come equilibrio statistico nel senso che deve eguagliarsi il numero di molecole che passano in un certo tempo da uno stato all'altro. La condizione di equilibrio, essendo il sistema a temperatura, pressione e variabili estensive, eccetto S e V , costanti, richiede che la entalpia libera sia minima.

Ciò equivale ad affermare che, se si considera una qualsiasi trasformazione reversibile infinitesima consentita (virtuale) che sposti il sistema dalla posizione di equilibrio, deve essere:

$$(7) \quad \delta G = 0.$$

Come trasformazione di questo tipo consideriamo una trasformazione a temperatura e pressione costanti che sposti una quantità di sostanza, pari a δn kmoli, dalla fase 1 a quella 2. Ricordando la (66) del capitolo precedente, risulta, essendo $\delta n_1 = \delta n$ e $\delta n_2 = -\delta n$,

$$\delta G = \delta G_1 + \delta G_2 = \mu_1 \delta n - \mu_2 \delta n = (\mu_1 - \mu_2) \delta n = 0.$$

Poiché $\delta n \neq 0$, si ha

$$(8) \quad \mu_1 = \mu_2.$$

Nello stato di equilibrio di un sistema formato da una sola sostanza e nel quale sono possibili trasferimenti di materia da una fase a un'altra, il potenziale chimico della sostanza nelle due fasi deve essere uguale.

Si osservi che quando si assegnano i valori per le due grandezze indipendenti, lo stato di ciascuna fase è perfettamente determinato: in particolare è determinato il valore del potenziale chimico $\mu(T, p)$. Se quindi si rappresentano le funzioni $\mu = \mu(T, p)$ nello spazio μ, T, p , si ottengono due superfici diverse (una per fase): se si fissano due valori qualsiasi per p e T si trovano facilmente nel grafico (fig. 19.1) i potenziali chimici delle due fasi. La condizione di equilibrio (8) può quindi essere verificata solo lungo la linea di intersezione delle due superfici; ciò impone che i valori delle grandezze T e p non siano qualsiasi ma siano legati da una relazione $\mu = \mu_1(T, p) = \mu_2(T, p)$. Si deduce che se il sistema deve restare in equilibrio il grado di libertà del sistema è *uno*. Se la pressione e la temperatura sono diverse da quelle cui corrisponde la intersezione delle due superfici, i potenziali chimici delle due fasi sono diversi: in tal caso si avrà passaggio di materia dalla fase a potenziale chimico maggiore verso quella a potenziale chimico minore giacché ciò produce una riduzione di G .

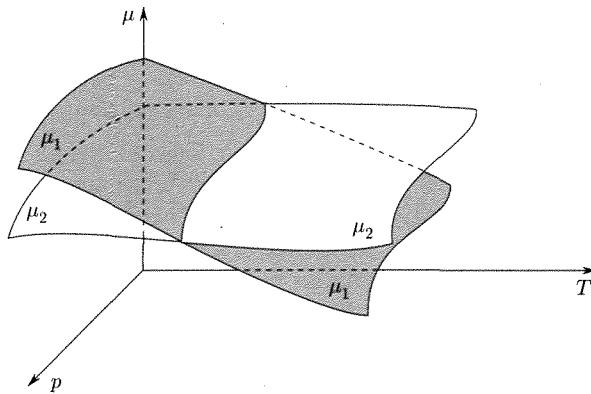


Fig. 19.1

■ 19.4. EQUILIBRIO FRA DUE FASI DELLA MEDESIMA SOSTANZA. EQUAZIONE DI CLAUSIUS-CLAPEYRON

La relazione (8) è, come si è detto, una relazione fra p e T ; rappresenta cioè la proiezione sul piano p, T della intersezione delle superfici $\mu = \mu_1$ e $\mu = \mu_2$. Essa rappresenta il legame fra p e T perché lo stato del sistema (a un grado di libertà) sia uno stato di equilibrio fra le due fasi; essa è cioè la equazione di quella linea che nel diagramma p, T separa le regioni di stabilità di due fasi e che noi abbiamo già considerato trattando il cambiamento di stato solido-liquido (fusione), o liquido-vapore (evaporazione), o solido-vapore (sublimazione) (per es. fig. 15.40).

La figura 19.2 riunisce per una sostanza normale qualsiasi le linee di equilibrio dei tre sistemi a due fasi ora dette; come già si ebbe modo di osservare, la linea di evaporazione si arresta bruscamente al punto critico (P.C.). Le tre curve hanno un punto in comune, T , il cosiddetto punto triplo che rappresenta *uno stato particolare in cui coesistono le tre fasi*.

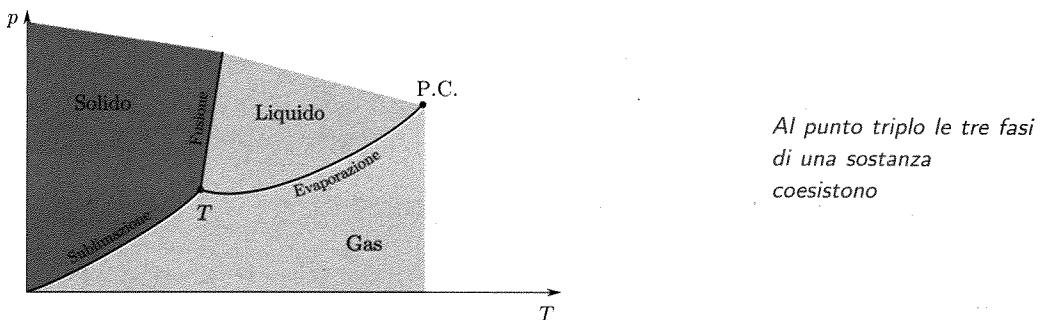


Fig. 19.2

La (8) è molto utile per esaminare i legami fra grandezze termodinamiche nei cambiamenti di stato. Alcune considerazioni saranno qui svolte con riferimento al caso dell'equilibrio liquido-vapore: esse peraltro si applicano immediatamente all'equilibrio fra due altre fasi.

Si osservi innanzi tutto che la (8) si scrive in maniera esplicita per kmole [ricordando che il potenziale chimico è pari alla entalpia libera per kmole, eq. (65) del capitolo precedente] come

$$(9) \quad U_1 - TS_1 + pV_1 = U_2 - TS_2 + pV_2.$$

Dividendo entrambi i membri per M (peso molecolare), si deduce una relazione analoga nella quale le grandezze estensive sono espresse per unità di massa (kg).

La (9) può porsi

$$(10) \quad T(S_2 - S_1) = (U_2 - U_1) + p(V_2 - V_1).$$

Il primo membro rappresenta il calore di evaporazione [per kilomole (kcal/kmole) o per unità di massa (kcal/kg) secondo la quantità di sostanza considerata nello scrivere la (10)]; esso è quindi costituito da due parti:

1. $(U_2 - U_1)$ rappresenta la variazione di energia interna fra liquido e vapore (fasi iniziale e finale);
2. $p(V_2 - V_1)$ rappresenta il lavoro che durante la evaporazione viene fatto contro la pressione esterna. A volte i due termini prendono i nomi di calori latenti interni ed esterni (di evaporazione).

Si consideri ora un punto P (fig. 19.3) sulla linea di trasformazione (liquido-vapore). Se μ_1 e μ_2 sono rispettivamente i valori dei potenziali chimici per la fase liquida e la fase vapore, vale la (8)

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Supponiamo ora di variare la temperatura e la pressione mediante gli incrementi dT e dp , in modo peraltro da rimanere sulla linea di transizione. Se indichiamo con $d\mu$ gli incrementi dei potenziali chimici, la condizione di equilibrio nel nuovo stato si scrive

$$\mu_1 + d\mu_1 = \mu_2 + d\mu_2$$

da cui risulta

$$(11) \quad d\mu_1 = d\mu_2,$$

ove $d\mu_1$ e $d\mu_2$ rappresentano gli incrementi dei potenziali chimici lungo la linea di transizione.

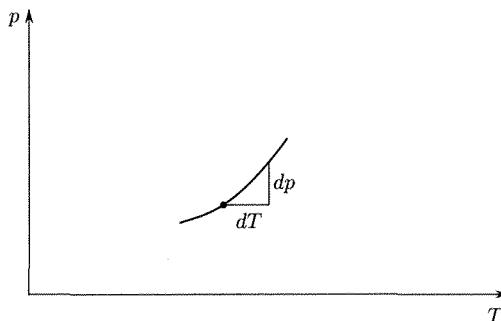


Fig. 19.3

In ciascuna fase v'è una sola sostanza e quindi in accordo con la (65) del capitolo precedente, μ è pari all'entalpia libera per kmole (che indichiamo con G^*). Dalla (11) si ha quindi

$$dG_1^* = dG_2^*.$$

La variazione di entalpia libera per kmole per passare dallo stato iniziale a quello finale per ciascuna fase si calcola mediante la (56) del cap. 18 tenendo presente che in questi casi la quantità di sostanza non varia ($dn = 0$). Si ha

$$(12) \quad -S_1dT + V_1dp = -S_2dT + V_2dp$$

ove, come già detto, dT e dp sono gli incrementi lungo la linea di equilibrio e S e V sono entropia e volume per kmole delle due fasi in corrispondenza ad un punto di equilibrio. Dividendo i termini della (12) per M si vede che essa è valida nella stessa forma se S e V si riferiscono alla massa unitaria. La (12) si scrive

$$(13) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}.$$

Se si ricorda, dunque, che il calore latente della trasformazione (in kcal/kmole o kcal/kg secondo che si consideri una kmole o un kg di so-

stanza) è $q_1 = T(S_2 - S_1)$, si ha

$$(14) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{q_1}{T(V_2 - V_1)}.$$

È questa la cosiddetta equazione di Clausius-Clapeyron che vale non solo per l'equilibrio liquido-vapore, ma anche per gli altri equilibri fra due fasi. Essa precisa come sono legate le variazioni di pressione e di temperatura negli equilibri fra due fasi della stessa sostanza e ha numerose applicazioni.

Se, considerando ancora l'equilibrio liquido-vapore, si aumenta la temperatura avvicinandosi alla temperatura critica, la differenza delle densità e quindi dei volumi delle due fasi diminuisce; ciò significa che il denominatore nella (14) decresce tendendo a zero. D'altra parte la pendenza della curva di transizione dp/dT non è infinita alla temperatura critica. Pertanto il calore latente deve anche esso diminuire al crescere di T e deve tendere a zero all'approssimarsi della temperatura critica. I risultati sperimentali confermano questa conclusione.

Nel caso del passaggio liquido-vapore, V_2 è sempre maggiore di V_1 e quindi dp/dT è positivo, cioè *un aumento di pressione produce un innalzamento della temperatura di equilibrio nel cambiamento di stato*.

Se si considera invece il caso del passaggio da stato solido (1) a liquido (2), si nota che in molti casi la fusione avviene con espansione, cioè con riduzione di densità ($V_2 > V_1$). In tal caso *un aumento di pressione produce un aumento della temperatura di equilibrio*, cioè del punto di fusione. Ciò appare logico, giacché il cambiamento di stato in questo caso richiede un lavoro positivo (espansione del sistema) contro la pressione esterna ed è quindi ostacolato da un aumento della pressione stessa.

Vi sono però alcune sostanze, come l'acqua, che fondendo aumentano di densità, per le quali cioè $V_2 - V_1$ è negativo. In tal caso anche dp/dT è negativo, cioè ad un aumento della pressione esterna corrisponde un abbassamento del punto di fusione.

L'equazione di Clausius-Clapeyron specifica le variazioni di pressione e temperatura negli equilibri tra due fasi di una medesima sostanza

■ 19.5. EQUILIBRIO DI SISTEMI FORMATI DA PIÙ COMPONENTI IN VARIE FASI. REGOLA DELLE FASI

Consideriamo ora un sistema formato da più componenti ($1, 2, 3, \dots, c$) il quale si trovi a temperatura e pressione costanti, nel quale siano presenti varie fasi; supporremo per semplicità che le fasi siano due. La condizione di equilibrio è ancora in questo caso quella che la entalpia libera sia minima. Per esprimere questa condizione per mezzo delle grandezze intensive potenziali chimici, poniamo attenzione al componente i e immaginiamo una trasformazione (virtuale) elementare reversibile che abbia il solo effetto di fare passare la quantità δn_i della sostanza i dalla fase 1 alla fase 2. Ripetendo il ragionamento fatto nel caso di un sistema a un solo componente, si trova che l'equilibrio richiede

$$\mu_{i1} = \mu_{i2}$$

cioè che i potenziali chimici per la sostanza i nelle due fasi siano uguali. Ripetendo queste considerazioni per ciascun componente si trovano le c

condizioni

$$\begin{aligned}
 \mu_{11} &= \mu_{12} \\
 \mu_{21} &= \mu_{22} \\
 &\dots\dots \\
 \mu_{c1} &= \mu_{c2}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

*Eguaglianza
dei potenziali chimici
delle singole sostanze
presenti all'equilibrio
di un sistema*

Generalizzando al caso in cui le fasi presenti siano più di due si ha che: *nello stato di equilibrio di un sistema nel quale siano possibili passaggi di materia fra varie fasi, i potenziali chimici di ciascuna sostanza componente devono essere uguali in tutte le fasi presenti.*

Come nel caso di una sola sostanza e due fasi, la esistenza di una delle (15) per un componente e due fasi impone una relazione fra le grandezze che determinano lo stato, riduce cioè di uno il numero di gradi di libertà del sistema.

Se si ha un sistema formato da c componenti (che non reagiscono fra loro) e m fasi, si possono scrivere per ogni componente i ($m - 1$) relazioni

$$\mu_{i1} = \mu_{i2} + \dots = \mu_{im}$$

sicché il numero totale di relazioni del tipo (15) è $c(m - 1)$.

I parametri che occorre specificare per determinare lo stato del sistema sono T, p e quelli che determinano la composizione del sistema, cioè n_i in ogni fase. A tale scopo si possono per es. usare le frazioni molari di ciascun componente per ciascuna fase, cioè il rapporto fra il numero di kmoli del componente i in una fase e quello del numero totale di kmoli nella fase. La composizione di ciascuna fase richiede quindi $(c - 1)$ parametri: la frazione molare di uno dei componenti è determinata dalla condizione che la somma di tutte le frazioni per ciascuna fase è 1.

Il numero totale di parametri che occorre determinare per individuare uno stato del sistema risulta quindi:

$$2 + m(c - 1).$$

Il numero di gradi di libertà del sistema, chiamato varianza del sistema (F), risulta essere

$$\begin{aligned}
 F &= (\text{numero di parametri da fissare}) - (\text{numero di relazioni fra essi}) = \\
 &= 2 + m(c - 1) - c(m - 1) = 2 + c - m.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

È questa la regola delle fasi di Gibbs: *il numero di gradi di libertà di un sistema (varianza) è pari al numero dei componenti più due, meno il numero delle fasi presenti.*

Come esempio di applicazione consideriamo innanzi tutto il caso più semplice possibile, quello di un sistema a un solo componente (sostanza semplice). Se una sola fase è presente, $F = 2$, il sistema si dice bivariante o a due gradi di libertà: la pressione e la temperatura possono essere fissate a piacere (entro certi limiti che l'esperimento e non la termodinamica fissano). È il caso di figura 19.2.

Se invece vi sono due fasi (liquido-vapore, solido-liquido, solido-vapore), è $m = 2$ e $F = 1$. Il sistema è a un solo grado di libertà (univariante). Come si è visto, in tal caso si può fissare arbitrariamente la pressione o la temperatura; l'altra grandezza viene determinata dalla condizione $\mu_1 = \mu_2$.

Se infine ci sono tre fasi presenti, è $m = 3$ e $F = 0$. Il numero di gradi di libertà del sistema è zero (invariante): ciò significa che pressione e temperatura sono entrambe determinate dalle relazioni termodinamiche di equilibrio. *Se si tenta di variare una di esse, una delle tre fasi scompare.* Lo stato di equilibrio che si considera prende il nome di punto triplo. Nel piano pV (fig. 19.2) le linee di equilibrio liquido-vapore, solido-liquido e solido-vapore convergono in tale punto. Nel caso dell'acqua il punto triplo si trova a una temperatura di 273,16 K, che è di poco superiore (0,007 K) a quella della fusione a pressione atmosferica: la pressione del punto triplo è 4,58 mm Hg.

Come secondo esempio consideriamo il sistema a due componenti rappresentato dalla soluzione di un sale in acqua. Si abbiano due fasi: liquido e vapore. La varianza è $F = 2 + 2 - 2 = 2$; si possono quindi fissare due dei quattro parametri T, p e x_1, x'_1 (che danno le frazioni molari di un componente nelle due fasi).

*La varianza
di un sistema è pari al
numero di componenti
diminuito del numero
delle fasi più due*

Se si scelgono la temperatura e la concentrazione del sale nell'acqua (x_1), risultano fissati p e la concentrazione del sale nel vapore (x'_1). Se si aggiunge sale al liquido (o si abbassa la temperatura), si giunge a un punto in cui comincia la cristallizzazione, cioè compare una terza fase. Le tre fasi sono: sale solido, soluzione satura, vapore. La varianza si riduce a uno e si può fissare arbitrariamente solamente un parametro, per es. la temperatura. Se si abbassa sufficientemente la temperatura, si presenta una quarta fase: ghiaccio con piccole quantità di sale. Le fasi sono ora: sale, questa soluzione solida di ghiaccio con poco sale, liquido e vapore. Il sistema diviene invariante: lo stato si chiama punto eutettico ed è per i sistemi a due componenti l'analogo del punto triplo per i sistemi a un solo componente.

TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0$$

✓ Terzo principio della termodinamica:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0, \quad (\text{Nernst})$$

per qualsiasi processo isotermo, che coinvolga solo sistemi con fasi in equilibrio interno.

Evidenze sperimentali

Coefficiente di espansione di sostanze omogenee nullo per $T \rightarrow 0$.

Trasformazione di fase solido-liquido dell'He a basse temperature: $dp/dT \rightarrow 0$ per $T \rightarrow 0$ (Clausius-Clapeyron, anche $\Delta S \rightarrow 0$).

Transizioni a basse temperature tra forme cristalline diverse di una stessa sostanza.

Annullo calori specifici per $T \rightarrow 0$: $\Delta S = \int_0^T \frac{C(T)}{T} dT \rightarrow 0$.

Irraggiungibilità dello zero assoluto: $\Delta Q = \Delta S T \rightarrow 0$ più rapidamente di T .

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow 0}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Delta S$$

■ Terzo principio della termodinamica

20.

■ 20.1. IL TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Due parametri di grande importanza per la caratterizzazione dello stato di un sistema termodinamico sono la energia interna e l'entropia. Abbiamo varie volte osservato che, al decrescere della temperatura di un sistema, diminuisce la energia interna del sistema nel suo stato di equilibrio. Infatti, la energia che si trova nella agitazione termica decresce con la temperatura e inoltre in corrispondenza a variazioni di stato, se si sottrae calore al sistema, si stabilisce la fase a energia minore. Possiamo quindi dire che l'energia interna di una sostanza, al decrescere della temperatura decresce e finisce per tendere verso il valore minimo consentito (dalle limitazioni quantistiche) quando la temperatura tende allo zero assoluto: l'energia residua che il sistema avrebbe anche allo zero assoluto prende il nome di energia di punto zero.

Al decrescere della temperatura inoltre decresce il disordine e l'entropia del sistema. Se noi seguiamo, come altre volte abbiamo fatto, un sistema dallo stato di vapore a quello liquido e a quello solido fino ad avere un cristallo a temperatura bassa, vediamo che il disordine va gradatamente diminuendo e notiamo una tendenza all'ordine.

Un esempio suggestivo di questa tendenza verso forme più ordinate quando si abbassa la temperatura, è dato dalla distribuzione degli atomi in una lega formata da rame e oro in uguali proporzioni molari. A temperatura elevata gli atomi dei due tipi appaiono distribuiti a caso nei nodi di un reticolo cubico; se però si abbassa la temperatura, la distribuzione tende gradualmente verso una condizione nella quale gli atomi dei due tipi si alternano regolarmente nel reticolo.

Si può dire che a una temperatura qualsiasi si stabilisce un equilibrio fra due opposte tendenze:

1. il sistema tende a raggiungere *lo stato di minore energia*;
2. per la presenza dell'agitazione termica, il sistema tende a raggiungere la situazione di *massimo disordine e massima entropia*.

Si comprende l'interesse di esaminare processi a temperatura sempre più bassa allo scopo di avere indicazioni sulla maniera con cui varia la entropia. Fu proprio nell'esame di processi di questo tipo che nel 1906 Nernst fu portato a formulare una ipotesi che si è dimostrata finora soddisfatta generalmente, tanto da essere considerata come una legge, o meglio un postulato, che va sotto il nome di terzo principio della termodinamica.

*L'energia residua
che un sistema tende
a mantenere
nel raggiungimento dello
zero assoluto si dice
energia di punto zero*

La espressione di questo principio ha avuto varie formulazioni non tutte interamente soddisfacenti. Nella forma oggi più comunemente accettata il terzo principio della termodinamica si enuncia come segue: *per qualsiasi processo isotermo che involva solo fasi in equilibrio interno, oppure fasi in equilibrio metastabile congelato⁽¹⁾ purché il processo non disturbì tale equilibrio, si ha*

*Il terzo principio,
o postulato,
della termodinamica*

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0.$$

Con la frase equilibrio interno si intende dire che lo stato della fase è interamente determinato dalla sua temperatura, pressione e composizione. La legge non può essere applicata per es. a stati vетrosi o di liquidi surraffreddati nei quali lo stato dipende anche dalla storia del materiale come per es. dalla velocità di raffreddamento. A titolo di esempio diremo che il principio può applicarsi a una piccola compressione isoterna di un cristallo purché non venga alterato il tipo e sostanzialmente il grado di disordine nella distribuzione degli atomi e delle molecole: si può allora infatti pensare che la variazione di entropia sia praticamente nulla a temperature abbastanza basse. Il principio non può essere usato per reazioni del tipo $\text{CO} + \frac{1}{2}\text{O}_2 = \text{CO}_2$ perché in tale processo il disordine del cristallo CO è interamente perduto e non v'è ragione per ritenere che esso sia compensato da fattori corrispondenti nel reticolo del CO_2 : non si può aspettare quindi che una tale reazione abbia una variazione limite di entropia nulla.

A sostegno del principio enunciato noi vedremo fra breve varie conferme sperimentali.

Vogliamo ora cercare di svolgere alcune considerazioni per chiarire meglio il significato del principio.

Abbiamo stabilito che la variazione di entropia di un sistema che riceva la quantità di calore dQ alla temperatura T è

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Questa relazione, qualora si potessero conoscere le quantità di calore assorbite in funzione della temperatura lungo una trasformazione reversibile qualsiasi *a partire dallo zero assoluto*, ci darebbe per la entropia alla temperatura T (e a un certo altro valore delle altre variabili indipendenti)

$$(2) \quad S = S_0 + \int_0^T \frac{dQ}{T}$$

S_0 è la entropia del sistema considerato allo zero assoluto; su di essa torneremo tra breve.

In realtà *non è possibile raggiungere lo zero assoluto* (e questa è un'altra maniera di formulare il terzo principio) sicché il fisico non può fare misure che a partire da una temperatura T' che cerca di rendere sempre più bassa, ma che non è infinitesima. Di conseguenza se si vuole valutare l'integrale a secondo membro della (2) lo si deve spezzare in due parti scrivendo

$$(3) \quad S = S_0 + \int_0^{T'} \frac{dQ}{T} + \int_{T'}^T \frac{dQ}{T}.$$

Mentre il secondo integrale può essere valutato con precisione sulla base di misure termiche (calori specifici, calori di trasformazione fra fasi solide, calori latenti e simili), il primo integrale, fra la temperatura zero e la temperatura più bassa realizzabile, va invece, se possibile, calcolato sulla base di estrapolazioni di misure

⁽¹⁾ Falso equilibrio bloccato, che cioè non viene facilmente alterato.

a temperature più elevate. Il terzo principio ci dice quando è possibile fare questi calcoli. È evidente infatti che queste estrapolazioni saranno lecite solo se il sistema prosegue una qualsiasi trasformazione che lo ha portato da T a T' si avvicini allo zero assoluto con gradualità e continuità. Ma questo è il caso appunto che si verifica se è soddisfatto il terzo principio. Dire infatti che la differenza di entropia in una trasformazione isoterma tende a zero con T implica che l'entropia per gli stati del sistema che si considerano sia finita e vari con continuità in funzione di T all'approssimarsi dello zero assoluto.

Al solo scopo di rendere tutto ciò didatticamente più evidente faremo un ragionamento di validità limitata. Si considerino nel piano ST (fig. 20.1) due trasformazioni generiche (1 e 2), che possono essere usate per portare un sistema dalla temperatura T alla temperatura più bassa disponibile per le misure (T'). Si potrà pensare di usare estrapolazioni per il calcolo di S , nel senso preciso, solo se l'andamento delle curve rende semplici le estrapolazioni e se il risultato della estrapolazione delle varie curve disponibili dà lo stesso valore S_0 . Si osservi che in tale caso la differenza di entropia in una *trasformazione isoterma* che porti il sistema da un punto P_1 o P'_1 della prima linea a un punto della seconda P_2 o P'_2 tende a zero con la temperatura come è richiesto dal terzo principio.

Le estrapolazioni sono quindi possibili solo se il sistema soddisfa alle condizioni poste nell'enunciato del principio. Se il sistema è in equilibrio interno, infatti, la differenza fra lo stato alla temperatura T' e quello alla temperatura zero sta solamente nell'energia che deve essere sottratta e nel disordine che deve contemporaneamente ridursi, senza che intervengano altre variazioni nel sistema stesso; il calcolo del primo integrale della (3) può essere fatto con estrapolazione delle misure fatte a temperature più alte e con l'aiuto di qualche teoria che tenga conto del terzo principio. Questo tipo di estrapolazione è anche lecito se il sistema è in uno stato di equilibrio metastabile, purché questo sia congelato e tutto vada come se il sistema fosse in equilibrio. Si osservi che la applicazione del terzo principio non pone limitazioni sullo stato fisico della sostanza (solido, liquido, gas), sebbene praticamente tutte le sostanze tendano a trovarsi allo stato solido quando si avvicinano allo zero assoluto. Ripetiamo che la sola condizione posta per la validità del principio è che il sistema alla temperatura più bassa raggiunta, T' , differisca dallo stato allo zero assoluto solo per la energia che deve essere estratta e i cui effetti possono essere calcolati mediante estrapolazioni che fanno uso di misure a temperature superiori a T' . È evidente che se per es. la sostanza alla temperatura T' si trova in uno stato di aggregazione diverso da quello a temperature più basse (per es. vi sia un passaggio tra forme cristallografiche diverse a temperatura inferiore a T'), il calcolo del primo integrale nella (3) non può farsi mediante estrapolazioni di misure a temperature più elevate: nel grafico della figura 20.2 le linee fra T' e 0 avrebbero delle discontinuità e se si facessero estrapolazioni allo zero assoluto delle linee che danno le variazioni di entropia fra T e T' si avrebbero valori di S_0 diversi per ogni singola trasformazione considerata.

Ritornando a S_0 , valore dell'entropia di un sistema allo zero assoluto, esso è indubbiamente il valore più basso dell'entropia del sistema, e spesso viene posto uguale a zero: è bene chiarire che questa è solo una convenzione, potendo noi scegliere arbitrariamente il valore della costante nella definizione di entropia. Non significa che intendiamo affermare che allo zero assoluto non c'è per nulla disordine e che vi sia una ragione fisica per sostenere che l'entropia di tutte le sostanze è nulla allo zero assoluto. Va infatti precisato che, innanzitutto, nulla si è detto sul contributo al disordine dell'assetto nell'interno dei nuclei, e inoltre anche l'*entropia convenzionale*, dovuta cioè al disordine nella distribuzione degli atomi e delle molecole, può non ridursi a zero a causa del disordine di configurazione che può rimanere anche alle più basse temperature raggiungibili, come per es. nei cristalli imperfetti.

Per queste ragioni e per il fatto che lo zero assoluto non può essere mai raggiunto, oggi non viene usata volentieri la espressione del terzo principio data da Planck: *al diminuire indefinito della temperatura, la entropia di una sostanza chimicamente omogenea di densità finita si approssima indefinitamente al valore zero.*

Un'altra formulazione del terzo principio che a volte si incontra è la seguente: *allo zero assoluto tutte le trasformazioni avengono a entropia costante.* Questa formulazione peraltro non è interamente soddisfacente perché lo zero assoluto non può essere in realtà raggiunto.

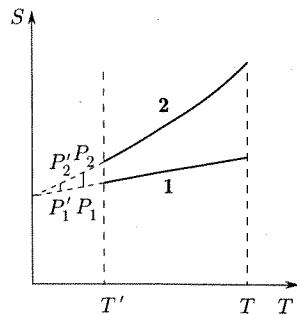


Fig. 20.1

20.2. EVIDENZA Sperimentale del Terzo Principio

Vogliamo indicare alcune conferme sperimentali della validità del terzo principio per sostanze omogenee.

a. Coefficiente di espansione di solidi

Se si considera una sostanza omogenea e isotropa e si scelgono come variabili indipendenti p e T , ricordando la equazione di Maxwell [cap. 18, eq. (60)]

$$(4) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

e il terzo principio della termodinamica che afferma che $(\partial S / \partial p)_T$ deve tendere a zero per $T \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 0;$$

cioè secondo il terzo principio il coefficiente di espansione di tutte le sostanze omogenee e isotrope deve tendere a zero quando la temperatura tende a zero.

L'esperienza è in accordo con questa conclusione e ciò conferma la validità del principio. La figura 20.2 mostra i risultati di misure in argento e rame: una loro extrapolazione a zero è in accordo con le previsioni.

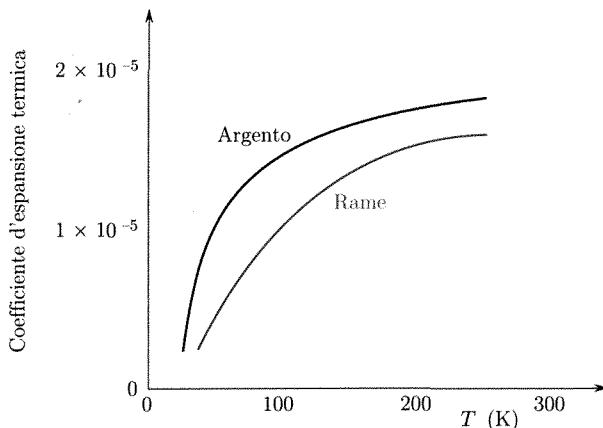


Fig. 20.2

Ancora più evidente è il caso dell'olio. La figura 20.3 mostra il diagramma $p-T$ per l'olio, il quale è molto particolare se paragonato a quello delle sostanze normali (fig. 19.2 del capitolo precedente). Si noti la assenza della curva di sublimazione e del punto triplo: lo stato liquido infatti si estende fino allo zero assoluto. La forma della curva del diagramma è quella di una λ , e le fasi che vengono separate sono la solida e due fasi liquide (1 e 2). La transizione fra olio liquido 1 ed olio liquido 2 differisce dai cambiamenti di stato che finora abbiamo considerato (fusione, evaporazione, sublimazione) giacché non è né accompagnata da variazioni di densità né caratterizzata da calori latenti. Essa è accompagnata da discontinuità nel coefficiente di espansione, nella compressibilità e nei calori specifici. Poiché questi parametri si ottengono per differenziazione delle

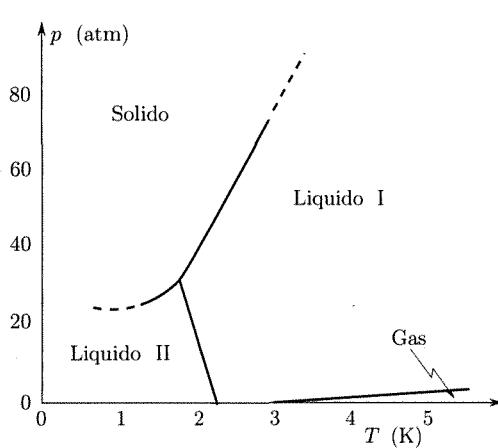


Fig. 20.3

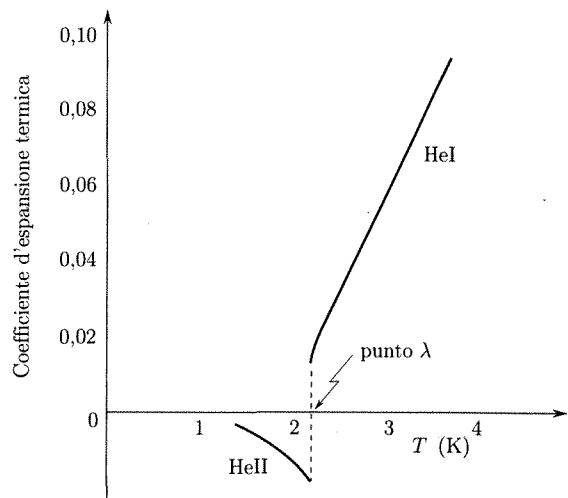


Fig. 20.4

grandezze termodinamiche principali, la transizione λ si chiama transizione del secondo ordine.

Ciò premesso, si osservi la figura 20.4 che dà i coefficienti di espansione dell'elio I e II: man mano che la temperatura diminuisce il coefficiente dapprima decresce rimanendo positivo, poi con una discontinuità al punto λ diviene negativo ed infine cresce per tendere a zero all'approssimarsi dello zero assoluto.

b. Equilibrio liquido-solido nell'elio

È questa una transizione (fig. 20.3) che può essere studiata anche a temperature notevolmente più basse di 1 K. Per essa vale la legge di Clausius-Clapeyron che può scriversi

$$(5) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

essendo $\Delta S = S_{\text{sol}} - S_{\text{liq}}$ e $\Delta V = V_{\text{sol}} - V_{\text{liq}}$.

Si è trovato sperimentalmente che i valori del primo membro sono molto piccoli al di sotto di 1,4 K. Diremo ancora che si è trovata una dipendenza del coefficiente dalla settima potenza di T

$$(6) \quad \frac{dp}{dT} = 0,425T^7.$$

Ciò è indicato nel diagramma pT dal fatto che la linea della transizione tende a divenire normale all'asse p man mano che la temperatura decresce. Dall'equazione (5) si ricava, essendo ΔV finito, che la differenza ΔS di entropia fra liquido e solido deve tendere rapidamente a zero al decrescere di T , in accordo con quanto afferma il terzo principio.

c. Transizione cristallo-cristallo

Supponiamo di avere due forme cristalline diverse (1 e 2) della stessa sostanza, che possano essere portate in condizioni di equilibrio interno a bassa temperatura. Ciò non vuol dire che le due forme debbano necessariamente essere in equilibrio fra loro qualora vengano poste in contatto.

Indichiamo inoltre con T_e e q_{12} la temperatura di equilibrio a pressione normale e il corrispondente calore latente di transizione. Si ha

$$(7) \quad (S_2 - S_1)_{T_e} = \frac{q_{12}}{T_e}.$$

D'altra parte ricordando che ciascuna delle fasi è, anche alle più basse temperature, in equilibrio interno (cioè tale che la sola causa di riduzione di entropia nel passare dalla più bassa temperatura sperimentale T' allo zero è lo smorzamento delle vibrazioni reticolari) si può applicare la (3) e scrivere per le entropie calcolate alla temperatura T_e

$$(8) \quad \Delta S_{1(0-T_e)} = S_{1c} - S_{10} = \left(\int_0^{T'} \frac{dQ}{T} \right)_{\text{estr}} + \int_{T'}^{T_e} \frac{dQ}{T}$$

$$(9) \quad \Delta S_{2(0-T_e)} = S_{2c} - S_{20} = \left(\int_0^{T'} \frac{dQ}{T} \right)_{\text{estr}} + \int_{T'}^{T_e} \frac{dQ}{T}.$$

Il calcolo di queste variazioni di entropia richiede misure di calori specifici, per es. a pressione costante nelle due fasi da T_e fino alle temperature più basse possibili.

Si consideri ora un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni.

1. Il cristallo nella forma 1 è portato da $T = 0$ a $T = T_e$; la variazione di entropia è data dalla (8).
2. Il cristallo si trasforma nella forma 2 alla temperatura di equilibrio T_e ; la variazione di entropia è data dalla (7).
3. Il cristallo viene portato nella forma 2 dalla temperatura T_e a $T = 0$; la variazione di entropia è data dalla (9) cambiata di segno.
4. Il cristallo passa dalla forma 2 alla 1 allo zero assoluto; la variazione di entropia è $(S_{10} - S_{20})$.

La variazione totale di entropia nel ciclo deve essere nulla e quindi

$$(10) \quad S_{20} - S_{10} = \Delta S_{1(0-T_e)} + \frac{q_{12}}{T} - \Delta S_{2(0-T_e)}.$$

La differenza a primo membro può essere determinata sperimentalmente misurando le grandezze al secondo membro: per il terzo principio, trattandosi di una trasformazione isoterma allo zero assoluto, il suo valore dovrebbe essere zero.

La tabella 20.1 mostra alcuni risultati ottenuti che confermano questa conclusione.

Tabella 20.1

Sostanza	Forma 1	Forma 2	T_e (K)	$(S_{20} - S_{10})$ (cal/mol K)
zolfo	monoclinio	rombico	368,6	0,02
stagno	bianco	grigio	286,4	-0,07
fosfina	α	β	49,43	0,01
cicloesanolo	α	β	263,5	-0,3

Il risultato è differente se si paragona lo stato cristallino di una sostanza con quello vetroso. Per es. la entropia extrapolata a zero per la glicerina vettroso è 4,6 kcal/kmol K più grande che per la glicerina cristallina; analogamente la entropia extrapolata a zero per l'alcool etilico vetroso supera di 2,6 kcal/kmol K quella dello stato cristallino.

d. Calori specifici

Il terzo principio della termodinamica considera processi isotermi, la variazione di entropia in essi e il limite di tale variazione per $T \rightarrow 0$. Ciò implica che la differenza di entropia calcolata per un sistema da 0 K a un certo stato sia finita, cioè che (essendo $C(T)$ il calore specifico per es. a pressione costante o a volume costante) l'integrale nella espressione

$$(11) \quad S - S_0 = \int_0^T \frac{dQ}{T} = \int_0^T \frac{C(T)}{T} dT$$

sia finito.

Data la regolarità di $C(T)$, perché ciò accada è necessario che sia

$$(12) \quad \lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0 .$$

*Allo zero assoluto
i calori specifici delle sostanze tendono a zero*

Questo risultato è confermato dall'esperienza: C_v per i solidi tende a zero con T come T^3 (cap. 16, par. 16.7), per gli elettroni nei metalli C tende a zero come T (cap. 16, par. 16.8). I calori specifici dei gas tendono anche a zero con la temperatura quando si portino in conto particolari effetti quantistici (degenerazione).

e. Irraggiungibilità dello zero assoluto

Abbiamo avuto occasione (cap. 17, par. 17.7) di citare una espressione del terzo principio perfettamente equivalente a quella inizialmente data: è *impossibile ridurre un sistema alla temperatura dello zero assoluto con un numero finito di operazioni*.

Senza dilungarci troppo, faremo vedere la plausibilità di questa conclusione supponendo che cicli di Carnot invertiti vengano usati per abbassare la temperatura di un corpo. Naturalmente, man mano che il raffreddamento procede, bisogna che la temperatura inferiore del ciclo si abbassi: l'effetto utile è appunto la sottrazione della quantità di calore ΔQ dal corpo in corrispondenza alla trasformazione isoterna a temperatura più bassa. Durante questa trasformazione, all'assorbimento della quantità di calore ΔQ corrisponde una variazione di entropia ΔS :

$$\Delta Q = \Delta S T .$$

Come si vede al decrescere di T , e al suo tendere a zero, poiché ΔS per il terzo principio tende a zero, ΔQ decresce e tende a zero più rapidamente di T . Ciò significa che man mano che il raffreddamento procede diviene sempre più difficile asportare calore e non si può sperare di portare il corpo in un numero finito di operazioni allo zero assoluto poiché le quantità di calore asportabili decrescono molto più rapidamente della temperatura stessa.

La impossibilità di raggiungere lo zero assoluto è confermata dall'esperienza.

RADIAZIONE E MATERIA

Definizioni:

potere assorbente, a_λ : intensità assorbita/intensità incidente;

potere riflettente, r_λ : intensità riflessa/intensità incidente;

potere trasmittente, t_λ : intensità trasmessa/intensità incidente;

$$a_\lambda + r_\lambda + t_\lambda = 1 \quad (\text{conservazione energia});$$

potere emissivo parziale, $e_\lambda d\lambda$: intensità emessa dall'unità d'area nell'intervallo di lunghezza d'onda $\lambda - \lambda + d\lambda$;

potere emissivo totale, $e = \int e_\lambda d\lambda$.

✓ **Legge di Lambert**: $J_\lambda(\alpha) = (J_\lambda)_0 \cos \alpha$.

✓ **Corpo nero**: corpo (cavità) per il quale è $a_\lambda = 1$; internamente si ha all'equilibrio

$$u_\lambda = 4 \frac{e_\lambda}{c} \quad \text{e} \quad u = \frac{4}{c} e,$$

non dipendenti dalla cavità realizzante il corpo, ma solo da T :

$$e = sT^4 \quad (\text{Stefan-Boltzmann}).$$

► **Emissione di corpo nero**,

a grandi lunghezze d'onda: $e_\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$ (*Rayleigh-Jeans*).

su tutte le lunghezze d'onda: $e_\lambda = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} (e^{hc/kT\lambda} - 1)$ (*Planck*), tenuto conto della quantizzazione dell'energia della radiazione elettromagnetica.

■ 21.1. INTRODUZIONE

Abbiamo in precedenza visto (cap. 13) che uno dei meccanismi di trasmissione del calore è quello dell'irraggiamento. Tale meccanismo è in realtà costituito da tre processi distinti:

1. trasformazione dell'energia termica di un corpo in energia della radiazione (emissione di onde elettromagnetiche);
2. propagazione delle onde elettromagnetiche;
3. assorbimento delle onde elettromagnetiche da parte del secondo corpo e ritrasformazione dell'energia della radiazione in energia termica.

Mentre la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto o in un mezzo dielettrico è ben descritta dalla teoria classica dell'elettromagnetismo, i processi di emissione ed assorbimento, quelli cioè in cui si ha l'interazione fra radiazione e materia, non possono essere completamente spiegati dalla meccanica e dall'elettromagnetismo classico. Si è già detto che è stato appunto l'esame di queste questioni quello che ha manifestato per primo in maniera netta l'insufficienza, e stimolato il riesame, delle teorie classiche e che ha suggerito le idee innovative che hanno condotto alle teorie quantistiche.

Vogliamo in questo capitolo esaminare appunto l'emissione e l'assorbimento di energia raggiante da parte della materia in relazione alla trasmissione del calore per irraggiamento.

■ 21.2. EMISSIONE, ASSORBIMENTO E RIFLESSIONE DI ENERGIA RAGGIANTE

Tutti i corpi a temperatura superiore allo zero assoluto emettono onde elettromagnetiche (radiazione) e sono capaci di assorbirne se sono da esse investiti. La emissione di onde elettromagnetiche, tanto nella descrizione classica quanto in quella quantistica⁽¹⁾, è legata a una variazione dello stato di moto di particelle; la energia della radiazione è, nel caso che a noi

⁽¹⁾ Nella trattazione classica la emissione di onde e. m. è dovuta a un moto accelerato di cariche elettriche; nella trattazione quantistica, l'emissione e l'assorbimento di energia raggiante costituisce uno dei due meccanismi principali (l'altro è l'urto di particelle) con i quali atomi e molecole possono *saltare* da uno stato stazionario a un altro.

interessa (emissione termica), trasformata dall'energia che le particelle del corpo hanno nei loro moti disordinati (agitazione termica) sicché il corpo, in conseguenza della emissione, si raffredda. Quando delle onde elettromagnetiche investono un corpo possono verificarsi processi inversi a quelli di emissione e l'energia presa dalle particelle materiali del corpo può:

1. essere trasformata in energia termica del sistema, producendo un riscaldamento del corpo e corrispondendo a un effettivo assorbimento di energia raggiante;
2. essere nuovamente irradiata dando luogo a radiazione diffusa (scattering).

In quest'ultimo caso le onde diffuse dalle varie particelle del corpo interessate dalle onde incidenti possono comporsi per dare la radiazione riflessa o quella rifratta (nei corpi trasparenti alla radiazione) o viaggiare nel corpo fino a essere assorbite.

Siccome noi vogliamo discutere situazioni che hanno interesse nella trasmissione del calore per irraggiamento, considereremo il caso in cui i corpi siano opachi alla radiazione: in essi si può ammettere che i processi più importanti siano quelli di emissione, assorbimento e riflessione, che essi avvengano in superficie e possano essere studiati mediante misure sulla radiazione (cap. 13, par. 13.10) effettuate nelle vicinanze della superficie stessa.

Sulla base di queste misure si definisce potere assorbente di una superficie il rapporto fra l'energia raggiante assorbita e quella che giunge sulla superficie stessa. Tale quantità (a_λ) dipende dalla natura e dalle condizioni in cui si trova la superficie, dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda della radiazione. In realtà essa può dipendere anche dalla direzione di incidenza: noi però trascureremo questa dipendenza prendendo un opportuno valore medio. Questa maniera di procedere è rigorosa nel caso di radiazione isotropa (uguale nelle varie direzioni) ed è soddisfacente nel caso di superfici ruvide, le quali possono essere immaginate formate da superfici elementari aventi tutte le possibili orientazioni.

In maniera analoga si definisce potere riflettente (r_λ) di una superficie il rapporto fra l'energia raggiante riflessa e quella incidente: esso è funzione delle stesse grandezze da cui dipende il potere assorbente. Nel caso di corpi opachi, giacché la radiazione incidente è assorbita o riflessa, dovrà essere:

(1)

$$a_\lambda + r_\lambda = 1.$$

Nel caso di corpi trasparenti alla radiazione, bisogna considerare un potere trasmittente, t_λ , e un terzo addendo comparirà nella (1). Si noti che i poteri assorbente, riflettente e trasmittente sono grandezze adimensionate.

Si definisce corpo nero un corpo il quale presenta $a_\lambda = 1$ per qualsiasi λ , il quale cioè assorbe interamente la energia raggiante che cade su di esso. La migliore realizzazione del corpo nero è costituita da una piccola apertura in un corpo cavo di dimensioni lineari molto più grandi di quelli della apertura (fig. 21.1). La radiazione che entra nella cavità deve infatti subire molte riflessioni prima di poter uscire; se per es. r_λ per la superficie della cavità è $\frac{1}{2}$, l'energia della radiazione dopo 10 riflessioni è ridotta per un fattore $(\frac{1}{2})^{10} = 0,001$; l'apertura quindi assorbe quasi completamente la radiazione che incide su di essa e riflette molto poco.

La somma del potere assorbente, di quello riflettente ed, eventualmente, di quello trasmittente è uguale a uno

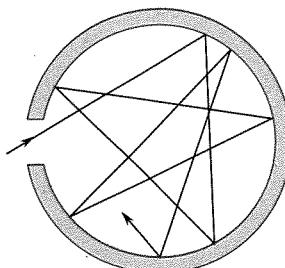


Fig. 21.1

Passando a considerare la emissione da parte di una superficie, si definisce potere emissivo parziale, e_λ , quella grandezza tale che $e_\lambda d\lambda$ rappresenti la quantità di energia raggiante emessa (in tutte le direzioni) nell'unità di tempo dall'unità di superficie nell'intervallo di lunghezza d'onda compreso fra λ e $\lambda + d\lambda$. Anche esso dipende dalla lunghezza d'onda, dalla natura, dalle condizioni e dalla temperatura della superficie. In realtà la energia irradiata non è la stessa nelle varie direzioni e in alcuni problemi interessa specificare questa dipendenza. Per far ciò si introduce il potere emissivo parziale relativo che rappresenta l'energia irradiata in un secondo in un angolo solido unitario intorno a una certa direzione, nell'intervallo di lunghezza d'onda fra λ e $\lambda + d\lambda$.

Una legge di dipendenza di tale potere relativo, che ha validità piuttosto generale, è quella di Lambert (o del coseno): in tal caso detto J_{λ_0} il potere relativo in direzione normale alla superficie, quello in una direzione che forma l'angolo α con la normale è $J_{\lambda_0} \cos \alpha$. È possibile in tal caso calcolare in maniera semplice la relazione fra l'energia emessa in tutte le direzioni nell'unità di tempo dall'unità di superficie (e_λ) e J_{λ_0} ; risulta

$$(2) \quad e_\lambda = \pi J_{\lambda_0} .$$

Si definisce infine potere emissivo totale, e si esprime in W/m^2 , l'energia raggiante (di qualsiasi λ) emessa in tutte le direzioni dall'unità di superficie per unità di tempo:

$$(3) \quad e = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda .$$

È facile vedere sperimentalmente che i buoni assorbitori di energia raggiante sono anche buoni emettitori, cioè che i poteri assorbente ed emissivo delle superfici dei corpi sono intimamente legati. Si può per es. fare su una superficie di porcellana una serie di macchie con inchiostro di China: tali macchie appaiono nere, se la temperatura della porcellana è relativamente bassa, poiché esse assorbono energia mentre la superficie circostante riflette; se il corpo viene portato ad alta temperatura le macchie appaiono brillanti poiché emettono molto più della superficie intorno a esse.

Per esaminare questo legame fra i due poteri prendiamo in considerazione una cavità in equilibrio alla temperatura T . Poiché le superfici della cavità emettono e assorbono, l'equilibrio richiede che nell'interno della cavità i singoli elementi della superficie della parete della cavità debbano emettere e assorbire una uguale quantità di energia nella unità di tempo. In queste condizioni è possibile parlare di una densità di energia (energia per unità di volume) che risulta essere la stessa nell'intorno di un qualsiasi punto della cavità, per ciascuna lunghezza d'onda, e che non dipende dal tempo.

Cerchiamo di raggiungere questa importante conclusione dapprima per il caso che le pareti della cavità siano nere (non vi sia radiazione riflessa). Supponiamo, per semplificare i calcoli, che la cavità sia sferica (fig. 21.2) e consideriamo un volume τ molto piccolo rispetto al volume della cavità e contenente il centro della sfera. Queste ipotesi semplificative ci consentono, nel calcolo dell'energia che in condizioni di equilibrio si trova in τ , di usare il potere emissivo parziale *relativo* alla direzione normale di ciascun elemento di superficie dS della cavità sferica, cioè J_{λ_0} da noi precedentemente introdotto, senza tener conto della variazione dell'emissione con la direzione.

L'energia irradiata in un secondo da un elemento dS della cavità nell'angolo solido $d\omega$ e nell'intervallo di lunghezze d'onda fra λ e $\lambda + d\lambda$ è

$$(4) \quad J_{\lambda_0} dS \frac{ds}{R^2}$$

essendo J_{λ_0} il potere emissivo relativo per la direzione normale alla parete (del corpo nero), ds la sezione del cono di apertura $d\omega$ con una sfera di raggio R . Questa energia viaggia con velocità c e si può ritenere sia quella contenuta in un cilindro di volume cds . La densità di energia si ottiene quindi dalla (4) dividendo per cds

$$(5) \quad \frac{J_{\lambda_0}}{c} \frac{dS}{R^2}.$$

La energia della radiazione del fascio considerato che si trova nell'interno del volume τ è quella che si trova nel cilindro di volume $l \cdot ds$ (vedi figura 21.2) cioè pari a

$$(6) \quad \frac{J_{\lambda_0}}{c} \frac{dS}{R^2} l \cdot ds.$$

Se si vuole calcolare il contributo dell'energia emessa da dS all'energia che si trova in τ , bisogna sommare termini del tipo (6) per i vari fascetti emessi da dS che intercettano τ : per le ipotesi poste, la direzione degli assi dei vari angoli solidi è sempre molto prossima alla normale a dS . Si ha:

$$(7) \quad \frac{J_{\lambda_0}}{c} \frac{dS}{R^2} \int_{\Sigma} l ds = \frac{J_{\lambda_0}}{c} \frac{dS}{R^2} \tau = \frac{J_{\lambda_0}}{c} \tau d\Omega.$$

La superficie Σ alla quale va esteso l'integrale è la intersezione di τ con una sfera di raggio R con centro in un punto di dS ; l'angolo solido $d\Omega$ è quello con cui ds è visto dal centro della sfera.

Se si desidera l'energia che in condizioni di regime si trova in τ , occorre sommare i contributi provenienti dagli elementi dS in cui la superficie della cavità è divisa, cioè integrare la (7) rispetto all'angolo solido Ω fra 0 e 4π . L'energia totale (lunghezza d'onda fra λ e $\lambda + d\lambda$ in τ) è

$$(8) \quad \frac{J_{\lambda_0}}{c} 4\pi \tau$$

e quindi la densità cercata (u_{λ}) è

$$(9) \quad u_{\lambda} = \frac{J_{\lambda_0}}{c} 4\pi.$$

Essa può scriversi in altro modo ricordando la (2).

La densità di energia della radiazione di frequenza λ è per una cavità nera:

$$(10) \quad u_{\lambda} = 4 \frac{e_{\lambda_n}}{c}.$$

Questa relazione è stata da noi stabilita in una disposizione geometricamente semplice, ma può essere ricavata con tutta generalità nell'interno di una cavità a pareti perfettamente assorbenti. Essa mostra che per una qualsiasi temperatura e per una qualsiasi λ , la densità di radiazione nell'interno di una cavità a pareti nere è proporzionale al potere emissivo; ciò porta di conseguenza che tanto la densità di energia quanto e_{λ_n} debbono dipendere da T e λ nella stessa maniera.

Se inoltre si indica con u la densità di energia totale

$$(11) \quad u = \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda,$$

si ottiene

$$(12) \quad u = \frac{4}{c} e_n.$$

Per estendere questo risultato al caso di cavità con superfici parzialmente riflettenti, si può considerare il seguente esperimento immaginario. Si pensi di avere due cavità alla *medesima temperatura*, una con pareti parzialmente riflettenti; si pratichi un piccolo foro in ciascuna delle cavità e queste vengano poste una accanto all'altra in modo che la radiazione possa passare dalla prima cavità alla seconda e viceversa. Se le densità di radiazione nelle due cavità fossero diverse, energia raggiante dovrebbe passare dalla cavità ove la densità è originariamente più alta nell'altra in quantità maggiore che non nella direzione opposta fino a che le due densità non diventino uguali: ciò porterebbe all'innalzamento della temperatura della seconda cavità e al raffreddamento della prima. In ultima analisi una delle due cavità, che inizialmente sono alla stessa temperatura, si scalderebbe a danno dell'altra: un tale processo è vietato dal secondo principio della termodinamica. Si conclude quindi che le densità di radiazione nelle due cavità alla stessa temperatura devono essere uguali e pari a quella data dalla (12), cioè: *la densità di radiazione in una cavità dipende solo dalla temperatura e non dalla natura della superficie.*

Questo ragionamento è stato fatto considerando la radiazione di tutte le lunghezze d'onda, ma si può ripetere immaginando di porre fra le cavità, in corrispondenza ai fori, dei filtri che facciano passare radiazione di una sola lunghezza d'onda (monocromatica). Di conseguenza, la densità di radiazione u_λ in una cavità qualsiasi alla temperatura T è quindi ancora data dalla (10) valida per una cavità nera.

Per proseguire nelle nostre considerazioni, supponiamo ora di avere due cavità alla medesima temperatura, una a pareti perfettamente assorbenti, l'altra a pareti qualsiasi. Per esse si può affermare che:

1. essendovi in ciascuna di esse equilibrio fra pareti e radiazione, l'energia emessa dalle pareti in un secondo deve essere uguale in ciascuna cavità alla energia assorbita dalle stesse pareti nel medesimo tempo;
2. essendo uguale la densità di radiazione nelle due cavità, l'energia che incide in un secondo sull'unità di superficie delle pareti è uguale nelle due cavità, giacché tale quantità dipende esclusivamente dalla densità di radiazione;
3. l'energia incidente sulle pareti è completamente assorbita nella cavità con pareti nere ($a = 1$), mentre è solo parzialmente ($a < 1$) assorbita nell'altra cavità.

Tutto ciò porta di conseguenza ad affermare che l'energia emessa dalle pareti non completamente assorbenti è minore di quella emessa dalle pareti nere. Fra il potere emissivo delle pareti nere (e_n) e quello delle pareti dell'altra cavità (e) vale la relazione

(13)

$$e = ae_n$$

essendo a il potere assorbente delle pareti parzialmente assorbenti. Si ha quindi

$$(14) \quad \frac{e}{a} = e_n = \frac{c}{4}u.$$

Una relazione analoga vale per ciascuna lunghezza d'onda

$$(15) \quad \frac{e_\lambda}{a_\lambda} = \frac{c}{4}u_\lambda.$$

*Indipendenza
della densità
della radiazione dalla
natura delle pareti
di una cavità*

*Indipendenza
del rapporto tra potere
emissivo e potere
assorbente
di una parete
dalla natura di questa*

Questa relazione costituisce la legge di Kirchhoff: *il rapporto fra il potere emissivo e il potere assorbente di una qualsiasi superficie non dipende dalla natura della superficie stessa, ma solo dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda.* Tale rapporto è pari al potere emissivo parziale $e_n(\lambda, T)$ del corpo nero.

Questa legge chiarisce la relazione che esiste fra i poteri emissivi ed assorbenti delle superfici dei corpi e mostra come i corpi che sono buoni assorbitori per radiazioni di una certa λ , sono al tempo stesso buoni emettitori.

Appare inoltre evidente l'importanza di determinare la funzione $e_n(\lambda, T)$, cioè il potere emissivo del corpo nero.

21.3. PRESSIONE DI RADIAZIONE

La radiazione elettromagnetica che colpisce un ostacolo esercita su questo una pressione che prende il nome di pressione di radiazione, in maniera perfettamente analoga a quello che fanno le onde elastiche che incidono su un ostacolo (cap. 9, par. 9.29).

L'esistenza della pressione esercitata dalle onde elettromagnetiche fu postulata da Keplero sulla base dell'osservazione che le code delle comete sono sempre dirette lungo la congiungente la cometa col Sole ma dalla parte opposta a quella del Sole rispetto alla cometa, come se la luce del Sole esercitasse una pressione sulla materia di cui è costituita la coda della cometa. È stato poi possibile fare delicate esperienze di laboratorio che mostrano l'esistenza di una pressione quando un fascio di luce colpisce un oggetto.

*La pressione esercitata
sulle pareti
dalla radiazione
contenuta in una cavità
è pari a un terzo
della densità di energia*

La teoria elettromagnetica consente di calcolare questa pressione p ⁽²⁾: si trova

$$(16) \quad p = \frac{1}{3}u$$

essendo u la densità di energia data dalla (12).

Ricordiamo che secondo la teoria quantistica la radiazione di frequenza ν può considerarsi formata da particelle, i fotoni, di energia $\varepsilon = h\nu$ ed evidentemente, se si indica con n_ν il numero di fotoni di frequenza ν presenti nell'unità di volume, è

$$(17) \quad u_\nu = n_\nu h\nu.$$

Ciascun fotone ha una sua quantità di moto⁽³⁾ p_m che si manifesta in certi effetti, come l'effetto Compton (cap. 4, par. 4.14):

$$(18) \quad p_m = \frac{h\nu}{c}.$$

La pressione di radiazione può essere anche interpretata come dovuta all'urto dei fotoni sull'ostacolo, come se la radiazione fosse *un gas di fotoni*. In particolare se si considera una superficie perfettamente riflettente su cui giunge la radiazione, i fotoni urtano elasticamente (la componente della quantità di moto in direzione normale alla parete si inverte). Si possono ripetere le considerazioni fatte per il calcolo della pressione di un gas sulle pareti del contenitore: va peraltro tenuto

⁽²⁾ Questa formula è analoga a quelle trovate per la pressione di radiazione dovuta alle onde elastiche. Stabiliremo qui la formula per p seguendo una via diversa da quella là impiegata.

⁽³⁾ Indichiamo la quantità di moto con p_m per non creare confusione con la pressione.

presente che la velocità con cui si muovono i fotoni è c . Di conseguenza si trova per la pressione invece della (45) del cap. 15:

$$(19) \quad p = \frac{1}{3} \sum_{\nu=0}^{\infty} n_{\nu} \left(\frac{h\nu}{c} \right) c = \frac{1}{3} \sum_{\nu=0}^{\infty} n_{\nu} h\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{3} u_{\nu} = \frac{1}{3} u.$$

Tale espressione per p differisce dall'analogia [ottenibile dalle (45) e (46) del cap. 15] per un gas perfetto ($p = \frac{2}{3}u$).

Se si ripetesse il calcolo per il caso di radiazione incidente su superficie perfettamente assorbente si otterebbe ancora la (19) perché:

1. da una parte la variazione di quantità di moto per ciascun fotone incidente è la metà di quella che si ha nel caso della riflessione e quindi un fattore $\frac{1}{2}$ andrebbe posto nella formula;
2. dall'altra parte, poiché la densità di radiazione deve restare costante, verrebbe emesso un numero di fotoni pari al numero dei fotoni incidenti e assorbiti e la variazione della quantità di moto a essi dovuta farebbe introdurre un fattore 2 nella formula.

La radiazione nell'interno di una cavità può essere trattata come un sistema termodinamico, o gas di fotoni. Un tale sistema ha alcune caratteristiche degne di nota che lo differenziano da un gas perfetto. Innanzitutto la densità di energia u dipende solo dalla temperatura. Di conseguenza la energia interna del sistema, se V è il volume della cavità, è

$$(20) \quad U = Vu.$$

Se il volume viene aumentato, altri fotoni vengono emessi dalla superficie per riportare la densità al valore di equilibrio alla temperatura della cavità. Usando la (19) si può scrivere per la equazione di stato della radiazione

$$(21) \quad pV = \frac{1}{3}U$$

che va paragonata con la relazione per i gas perfetti:

$$pV = \frac{2}{3}U.$$

Inoltre, nel caso della radiazione, la pressione (19) dipende dalla temperatura (come u) e non dal volume. Si ha inoltre

$$(22) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = u = 3p.$$

21.4. RADIAZIONE DEL CORPO NERO

Prendiamo ora in considerazione il problema della determinazione del potere emissivo del corpo nero.

Dall'analisi dei risultati sperimentali, Stefan stabilì (1879) che il potere emissivo totale (in tutto lo spettro di frequenza) di un corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo stesso (della cavità con foro che realizza il corpo nero). Successivamente Boltzmann ha giustificato termodinamicamente questo risultato ⁽⁴⁾, sicché

⁽⁴⁾ Una formula simile alla (23), ma con un esponente fra 4,4 e 5,5 viene usata in pratica per molte superfici metalliche in un campo abbastanza vasto di temperatura. L'esponente maggiore di 4 corrisponde a un progressivo avvicinarsi dell'emissione della superficie al comportamento di corpo nero, man mano che la temperatura cresce; naturalmente i corrispondenti valori della costante s sono per ciascuna superficie metallica inferiori a quello per il corpo nero, giacché, come si è già visto, nessuna sostanza, a una certa temperatura, può emettere più del corpo nero.

questa legge è nota con il nome di Stefan-Boltzmann e si esprime

$$(23) \quad e_n(T) = \int_0^\infty e_{\lambda n}(\lambda, T) d\lambda = sT^4$$

essendo il valore della costante $s = 5,69 \cdot 10^{-8}$ watt/m²K⁴.

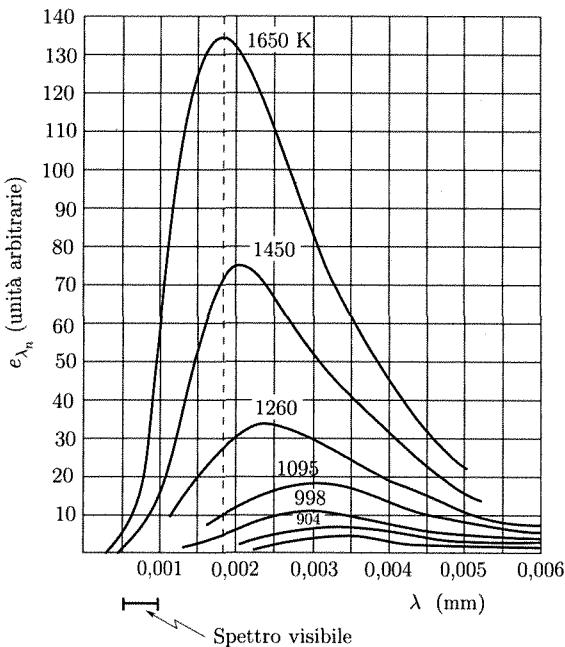


Fig. 21.3

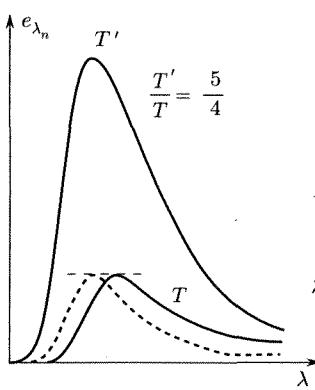


Fig. 21.4

La giustificazione termodinamica può essere condotta come segue. Per la energia interna di un sistema termodinamico (variabili indipendenti V e T) si ha in generale [cap. 17, par. 17.15, eq. (78)]

$$(24) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p.$$

Consideriamo la radiazione come un sistema termodinamico (par. prec.). Se si usano le (19), (20) e (22) per calcolare i termini nella (24) e si ricorda che, essendo u funzione solo di T , $(\partial u / \partial T)_V = du / dT$, si ha

$$(25) \quad u = \frac{1}{3} T \frac{du}{dT} - \frac{1}{3} u$$

cioè

$$(26) \quad \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}.$$

Si ha quindi integrando

$$(27) \quad u = s'T^4$$

che, mediante la (12), conduce alla (23).

Lo studio sperimentale dell'emissione del corpo nero (1899, Lummer, Pringsheim) ha consentito di tracciare per $e_{\lambda n}(\lambda, T)$ le curve di figura 21.3 nell'intervallo di temperatura fra 723 e 1650 K. Da esse si ricava immediatamente che per un

innalzamento della temperatura, cresce la radiazione emessa a ogni lunghezza d'onda, e che l'aumento è maggiore per le lunghezze d'onda più piccole (frequenze più elevate)⁽⁵⁾.

Un'analisi accurata delle curve sperimentali mostra la esistenza di alcune relazioni fra le grandezze in gioco. Per vedere ciò, si considerino (fig. 21.4) le curve $e_{\lambda n}$ in funzione di λ per due temperature T e T' . È possibile mostrare che la curva, per la temperatura T' può essere ottenuta da quella per la temperatura T mediante le due seguenti operazioni:

1. si alterino le ascisse dei punti della curva per la temperatura T *moltiplicandole per il fattore T/T'* (in tal modo si ottiene la curva tratteggiata in figura);
2. si alterino le ordinate della curva così ottenuta *moltiplicandole per il fattore $(T'/T)^5$* .

Questa somiglianza fra le curve $e_{\lambda n}$ fu scoperta da Wien (1893) con argomenti di natura termodinamica ed è stata confermata da successive accurate misure.

⁽⁵⁾ Nel caso di radiazione di corpi non neri le curve di $e_{\lambda}(\lambda, T)$ in funzione di λ e T hanno un andamento analogo a quelle per il corpo nero: anche in questo caso al crescere della temperatura il massimo si sposta verso le lunghezze d'onda più piccole. È noto infatti che scaldando un corpo la luce emessa va dal rosso (maggior contenuto di radiazione di lunghezze d'onda più lunghe), al giallo, al blu.

Da essa si deduce la legge di Wien o dello spostamento. Infatti, siccome la seconda operazione non altera la posizione del massimo (λ'_{\max}) si può scrivere

$$(28) \quad \frac{\lambda_{\max}}{\lambda'_{\max}} = \frac{T'}{T}$$

cioè

$$(29) \quad \lambda_{\max} T = \lambda'_{\max} T' = \text{cost}$$

che è la espressione della legge.

Inoltre siccome il valore della ordinata massima è cambiato solo dalla seconda operazione, si può scrivere

$$(30) \quad \frac{e_{\lambda_n} \max}{e'_{\lambda_n} \max} = \left(\frac{T}{T'} \right)^5.$$

Il valore del massimo della curva di emissione è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta della sorgente di emissione

■ 21.5. TRATTAZIONE CLASSICA E QUANTISTICA DELL'EMISSIONE DEL CORPO NERO

Il problema della determinazione teorica di $e_{\lambda_n}(\lambda, T)$ è stato di sommo interesse nello sviluppo della fisica moderna e, come si è varie volte detto, è stato il primo caso di interazione fra radiazione e materia che è stato felicemente studiato e risolto introducendo l'ipotesi quantistica.

La trattazione classica può essere fatta considerando la radiazione in una cavità. In maniera analoga a quello che si è visto per le vibrazioni meccaniche in un cristallo (cap. 16, par. 16.5) la cavità (che per semplicità possiamo ritenere di forma parallelepipedo) può sostenere onde elettromagnetiche stazionarie di certe frequenze e si può ritenere che l'insieme di queste onde stazionarie costituisca la radiazione termica. A differenza però del caso delle vibrazioni meccaniche in un cristallo ove la struttura atomica pone un limite ai modi di oscillazione possibili, i modi possibili per le onde elettromagnetiche non sono limitati in numero non essendovi una struttura discreta che lo richieda. Abbiamo già visto quale è il numero di onde elettromagnetiche (onde trasversali) la cui frequenza è compresa fra ν e $\nu + d\nu$ [vedi cap. 16, (26)]; se il volume della cavità è V , tale numero risulta:

$$(31) \quad \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu.$$

Come nel caso dei modi di vibrazione, ciascun modo per la radiazione elettromagnetica nella cavità va considerato come un oscillatore cui compete, in condizioni di equilibrio termico, un'energia media pari a quella di una vibrazione armonica $2(\frac{1}{2}kT)$. Di conseguenza l'energia totale nell'interno della cavità, nell'intervallo di frequenza fra ν e $\nu + d\nu$, è

$$(32) \quad U_{\nu n} d\nu = 8\pi \frac{V}{c^3} kT \nu^2 d\nu.$$

La densità di energia $u_{\nu} = U_{\nu}/V$ dipende dalla T e da ν :

$$(33) \quad u_{\nu n} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu.$$

Questa espressione può trasformarsi facilmente se si desidera usare le λ invece delle ν . Indichiamo con $(-d\lambda)$ l'intervallo di lunghezze d'onda

che corrispondono a $d\nu$: il segno meno compare perché a un intervallo positivo di frequenze $d\nu = \nu'' - \nu'$ corrisponde un intervallo negativo di lunghezze d'onda $d\lambda = \lambda'' - \lambda'$. Il primo membro della (33) si scrive quindi $-u_\lambda d\lambda$. Nel secondo membro si deve porre $\nu = c/\lambda$ e $d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda$. Risulta

$$(34) \quad u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda.$$

Da questa relazione si ricava u_λ e quindi

$$(35) \quad e_{\lambda_n} = \frac{u_\lambda c}{4} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT.$$

La legge di emissione di Rayleigh-Jeans approssima bene i dati sperimentali nel campo delle grandi lunghezze d'onda

Lo scambio di energia tra radiazione e materia avviene per quantità finite, o quanti

È questa la legge di Rayleigh-Jeans. Essa interpreta bene i risultati sperimentali (fig. 21.3) nella regione delle grandi lunghezze d'onda. Le previsioni classiche si diversificano sempre più dai risultati sperimentali man mano che le λ decrescono: la legge (35) non prevede un massimo nelle curve e_{λ_n} in funzione di λ e l'area racchiusa fra ciascuna di queste curve (per varie temperature) e l'asse delle λ , cioè l'energia totale emessa, sarebbe infinita. Quest'ultima previsione, in contrasto con l'esperimento, fu chiamata catastrofe ultravioletta. Questo netto disaccordo fra la teoria classica e i risultati sperimentali è una precisa indicazione del fatto che nella trattazione classica non deve essere stato tenuto conto di qualcosa di fondamentale che limita la energia nei modi di frequenza più elevata (λ più piccola) a valori molto più bassi di quelli corrispondenti a una equipartizione dell'energia fra i gradi di libertà del sistema. È stato appunto per superare questa difficoltà che Planck (1900) formulò l'ipotesi che lo scambio di energia fra radiazione e materia potesse avvenire solamente in quantità finite, quanti, di valore $h\nu$ (h , costante di Planck).

Noi abbiamo visto a varie riprese (e anche in questo capitolo, par. 21.3) come il concetto della quantizzazione originatosi nella trattazione della radiazione del corpo nero, si sia mostrato utile nell'esame di numerosi processi fisici e sia divenuto una delle basi fondamentali nello sviluppo della fisica moderna.

Vogliamo ora vedere come l'ipotesi di Planck consenta di spiegare completamente la radiazione del corpo nero. Per un esame qualitativo dell'andamento delle cose, si osservi che il fatto che energia possa essere scambiata fra onde elettromagnetiche e pareti della cavità (particelle che costituiscono la parete) solamente in quantità finite, non ha praticamente conseguenze per quanto riguarda la radiazione di grande lunghezza d'onda, giacché l'energia dei quanti ($h\nu$) è molto piccola rispetto all'energia (kT) che compete ai diversi gradi di libertà eccitati del sistema materiale e che in particolare si trova negli oscillatori costituiti dalle molecole e dagli atomi della parete: in tal caso la oscillazione ottica nella cavità può essere facilmente eccitata e l'energia media in essa può essere posta, come nella trattazione classica, pari a kT . Al diminuire della lunghezza d'onda (al crescere di ν), i quanti di energia delle onde elettromagnetiche divengono confrontabili con l'energia media che compete ai gradi di libertà eccitati nella agitazione (a caso) termica; lo scambio di energia fra radiazione e materia diviene più difficile e l'energia media nell'oscillazione ottica risulta maggiore di kT . Per frequenze molto elevate ($h\nu \gg kT$), il quanto diviene tanto grande rispetto all'energia media delle particelle materiali che le oscillazioni elettromagnetiche non possono più essere eccitate e quindi non possono contribuire all'energia della radiazione. La teoria quantistica

quindi dà la soluzione del problema della catastrofe ultravioletta: i modi di frequenze più elevate, cioè quelli che causerebbero la catastrofe, cessano di contribuire all'energia della radiazione poiché il valore del loro quanto è talmente elevato rispetto all'energia media disponibile che essi non possono essere eccitati.

Per giungere a una valutazione quantitativa in maniera semplice anche se non nella maniera più rigorosa⁽⁶⁾, diremo che in accordo con la (90) del cap. 15 l'energia media (a parte l'energia al punto zero) per un oscillatore è

$$(36) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

e tale valore va assegnato a ogni modo di oscillazione elettromagnetica nella cavità.

La densità di radiazione nella cavità si ottiene dalla (34) sostituendo $\bar{\varepsilon}$ a kT :

$$(37) \quad u = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT\lambda}} - 1}.$$

Ne segue la legge di radiazione di Planck

$$(38) \quad e_{\lambda_n} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1},$$

in ottimo accordo con l'esperienza (fig. 21.3).

In particolare se si integra rispetto a λ fra 0 e ∞ si ottiene il potere emissivo totale del corpo nero

$$e_n = \int_0^\infty e_{\lambda_n} d\lambda.$$

Se si pone $z = hc/kT\lambda$ e quindi $dz = -(hc/kT\lambda^2) d\lambda$, si ha

$$(39) \quad e_n = -2\pi c \int_\infty^0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 kT \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi \frac{k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{z^3}{e^z - 1} dz.$$

Poiché vale la

$$(40) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{z^3}{e^z - 1} dz = \frac{\pi^4}{15},$$

si ha

$$(41) \quad e_n = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 = s T^4$$

cioè si ottiene la legge di Stefan-Boltzmann e il valore di s in tale legge.

Analogamente considerando la posizione dei massimi di e_{λ_n} in funzione di T si può ricavare la legge di Wien.

Vogliamo infine osservare che per grandi lunghezze d'onda l'esponenziale nella eq. (38) può essere posto approssimativamente uguale a $(1 + hc/kT\lambda)$ e la legge di Planck si riduce alla legge di Rayleigh-Jeans (35) che quindi, come si era visto, costituisce una buona approssimazione di quella nel campo delle radiazioni di grande lunghezza d'onda.

La legge di Planck costituisce la migliore espressione per l'emissione di corpo nero

⁽⁶⁾ Possibile con la statistica di Bose-Einstein.

Indice analitico

I numeri in nero si riferiscono alle pagine in cui le voci sono definite;
i numeri in chiaro alle pagine in cui le voci sono soltanto citate.

- accelerazione, **29**, 47, 69
 - angolare, 184
 - applicata, 30
 - centripeta, **39**, 112, 216
 - complementare, **53**
 - di gravità, 209
 - di trascinamento, 54
 - istantanea, 31
 - media, 32
 - normale, **36**, 43
 - tangenziale, **30**, **36**
 - vettoriale, **29**
- accelerometro, **63**
- accorciamento, 231
- acqua
 - bollente, 466
 - profonda, 307
 - surriscaldata, 628
- acustica, **349**
 - ambientale, 350
 - fisiologica, 350
 - musicale, 350
- adattamento delle impedenze, 330, 363
- additività
 - del centro di massa, 152
 - dell'informazione, 613
- adiabatico, processo, 641
- aeroplano, 268
- aerosol, 376
- aggregati, 236
- agitazione termica, 550
- ala, **268**
- albero assiale, 247
- alluminio, 645
- alogenuri, **454**
- altezza
 - di arresto, **266**
 - di un suono, **361**
 - geometrica, **266**
 - piezometrica, **266**
- altitudine, dipendenza di g da, 216
- altoparlante, 359
- ammoniaca, 9
 - ampere, 88
 - ampiezza 102
 - delle oscillazioni, 95
 - analisi
 - di Fourier, 288
 - dimensionale, **13**
 - spettrale, 361
 - anarmonicità, 470
 - ancia, 353
 - anello, 447
 - momento d'inerzia, **195**
 - angolo, 5
 - di attacco, 269
 - di incidenza, 322
 - di Mach, 343
 - limite, **329**
 - anidride carbonica solida, 66
 - anisotropia, 574
 - Archimede, 92
 - principio di, **259**
 - area, 5
 - armonica, 351, 362, 384, 571
 - dispari, 352
 - armoniche, **286**
 - arpa, strumenti a corda, 350
 - ascissa
 - curvilinea, **25**, 100
 - temporale, **24**
 - asse fisso, moto attorno a, **191**
 - asse istantaneo di rotazione, 185, 199
 - assorbimento, **300**, 370, 479
 - coefficiente di, **301**, 371
 - spettro di, 62
 - astrofisica, 143
 - astronomia, 66, 67, 170
 - atmosfera, 219, **251**, 418
 - isoterma, 256, 523
 - terrestre, 219
 - unità di misura, **258**
 - atomo, **433**
 - di Bohr, 445
 - di idrogeno, 436
 - di Rutherford, **180**
 - interstiziale, 644
 - raggio dell', **110**
 - atto di moto, 54, 185
 - attrattore, **382**
 - caotico, 386, **388**
 - strano, 386, **388**, 419
 - attrazione
 - lunare, 163
 - omopolare, **456**
 - attrito, 68, **84**, 246, 249
 - coefficienti di, 85
 - cono di, **84**
 - dinamico, **85**
 - di rotolamento, coefficiente di, **246**
 - radente, **85**
 - autodiffusione, 583
 - autosimmigrazione, 391, 398
 - Avogadro, 483, 575
 - legge, **505**
 - numero di, 567
 - azione e reazione, 159
 - principio di, **75**, 150, 250
 - bacino
 - di attrazione, **385**
 - di separazione, 429
 - back scattering, 180
 - baria, **251**
 - baricentro, **189**
 - barn, **180**
 - barometro aneroide, **258**
 - barriera, 241
 - bassa temperatura, **630**
 - battimento, **313**
 - bel, **367**
 - Bernoulli, teorema di, **265**
 - bersaglio, 172, 176, 179
 - bicicletta, effetto giroscopio, **202**
 - biforcazione, **393**
 - biforazioni
 - del pendolo forzato, 404
 - tipi di, **394**
 - big bang, 80
 - bilancia, **204**

- di precisione, 205
- di torsione, 212, 344
- idrostatica, **260**
- bit, 614
- Blasius, 273
- Bohr, 109, 444
- teoria di, **434**
- bolla oscillante, **411**
- Boltzmann, **511**, 516, 612, 614, 679
 - costante di, 241, **610**
- Bose-Einstein, 683
- statistica di, **523**
- Boyle, 346
 - temperatura di, 539
- Boyle-Mariotte, 650
- Boyle e Mariotte, legge di, 245
- braccio, **104**
- Braginsky, 215
- brezza, 476
- Brillouin, prima zona di, **573**
- Bureau International des Poids et Mesures di Sèvres, 3, 71

- calibro, 6
- calore
 - atomico di Debye, 577
 - latente
 - di evaporazione, 499, **560**, 628
 - valori, **560**
 - di fusione, **580**, 582, 628
 - di sublimazione, **560**
 - interno ed esterno, 659
 - molare, **498**
 - isobaro ed entalpia, 499
 - specifico, **475**, **497**, 634
 - allo zero assoluto, 671
 - dei metalli, contributo elettronico, **577**
 - liquido-solido, valori, **582**
 - teoria, **567**
 - teoria classica, **567**
 - teoria quantistica, **528**
- calorico, 473
- calorimetria, **473**
- calorimetro, 493
 - a ghiaccio di Bunsen, 473
 - delle mescolanze, **475**
- cambiamenti di stato, 474, 579
- entropia, 620, **627**
- camera
 - a ionizzazione, 177
 - di Wilson, 177
- campana, strumenti a percussione, 350
- campo
 - di flusso, **276**
 - di forza conservativo, **124**
 - elettrico, **88**, 93, 487
 - elettrostatico, 276
- magnetico, **89**, 94, 487
- vettoriale, 276
- canna, condizioni di risonanza, 354
- cannone, 156
- Cantor, insieme di, **424**
- caos, 272
 - deterministico, 78, **379**, **381**, **388**, 399, 418
 - e meccanica celeste, **420**
- stocastico, 392
- capacità termica, **475**, **497**
- capillare, 271, 462
- capillarità, **555**
- caratteri distintivi del suono, **361**
- carbonio **126C**, **433**
- carica elettrica, 79, 93
 - quantizzazione della, **80**
- cariche, 80
- carico utile, 155
- Carnot, 594, 600
 - ciclo di, **588**
 - teorema di, **592**
- catastrofe ultravioletta, **682**
- catena molecolare, 239
- cavallo-vapore, **122**
- Cavendish, 211, 212
- cavitazione acustica, 376
- cavità
 - nera, 676
 - orale, 362
- cella, 236, 564
- centro
 - delle forze parallele, 188, 189
 - di curvatura, **42**
 - di massa, **150**, 155
 - e baricentro, 189
 - velocità del, 164
- cerchio
 - limite, **385**
 - osculatore, 42, 45
- cesio, 520
- chimico, potenziale, **648**
- Chladni, figure di, **356**
- ciclo
 - di Carnot, **588**, 599
 - di isteresi, 393
 - reversibile, 594
 - termodinamico, lavoro netto, 589
- cifre significative, **17**
- cilindro, 198
 - coassiale, 234
- cinematica, **23**
- cinematografia, 55
- circonferenza
 - osculatrice, 42
 - tangente, 42
- Clapeyron, piano di, 492
- clarino, strumenti ad aria soffiata, 350
- classi cristallografiche, 236
- Claude, processo di, **630**
- Clausius, 592
 - disuguaglianza di, **604**
 - enunciato del secondo principio, **591**
- Clausius-Clapeyron, 669
 - equazione di, **659**
- climatologia, 414
- coclea, 364
- coefficiente
 - di attrito statico, **84**
 - di primo distacco, **84**
 - di riflessione, **172**
 - di trasmissione, **172**
 - elastico, legame tra, **232**, **233**
- coesione, 551
 - forze di, 86
- combustione, 155
- cometa, 221, 678
- compressibilità, **231**, 249, 566
 - adiabatica, coefficiente, 296
- compressione, 228, **231**, 290
 - assiale, 231
 - di volume, **230**
 - di un gas, 245
 - modulo di, **230**
- Compton, 178, 678
 - effetto, 440
- concentrazione, 537
 - di energia, 332
- condensatore, 93, 277
- condensazione, **292**, 558, 560
- condizioni iniziali, 47, 102
- conducibilità
 - elettrica, 477
 - termica di materiali, **478**
 - termica, coefficiente di, **477**
- conduttori, 90, 477
- conduzione, 274, 416, **476**, 535
 - termica nei gas, **533**
- Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure, 4, 9, 11
- congelamento dei gradi di libertà, **529**
- coniche, 216
- conservativo, sistema, 103
- conservazione
 - del momento della quantità di moto, **156**, **161**, 168
 - dell'energia, **138**
 - dell'energia meccanica, 133, **166**
 - della massa, 264
 - principi di, nei processi d'urto, 169
- contatto
 - di due fluidi, **554**
 - energetico, 488, 651
 - termico, 608
- conteggio dei modi propri, **571**
- continuità, equazione di, **264**, **297**

- contrazione
 — delle lunghezze, **142**
 — laterale, coefficiente di, **231**
 controllo, parametri di, **393**, 427
 convezione, 274, 416, **476**
 — di Rayleigh-Bernard, 416
 Copernico, **208**
 coppia, **190**
 — momento intrinseco, 190
 — termoelettrica, 469
 — torcente, 487
 corda, **326**, **350**
 — condizioni di risonanza, 351
 Coriolis
 — accelerazione di, **53**
 — forza di, **116**
 corpo
 — deformabile, 23, 249
 — nero, **674**
 radiazione del, **679**
 — omogeneo, 563
 — rigido, 23, **183**, 191, 223
 cinematica del, **184**
 dinamica del, **186**
 energia cinetica, **197**
 corrente
 — del Golfo, 476
 — elettrica, 277
 correzione di bocca, 355
 Corti, organo del, 364
 costante
 — di Planck, 178
 — elastica, **83**
 — universale, R , 4, **505**
 Coulomb, 140, 434, 455,
 — legge di, **88**
 coulomb, 88
 covolume, **543**
 cristallo, 236, **458**, 563, **564**
 — ionico, **458**
 — molecolare, **458**
 cronometro, 10
 cronotopo, 211
 cubo, 230
 curva λ , **668**
 curvatura, 211, 554
- D'Alembert, equazione di, 303
 Dalton, legge di, **506**
 De Broglie, lunghezza d'onda di, **443**
 Debye 569, 620
 — legge di, **577**
 — temperatura di, **575**
 valori, **576**
 — teoria quantistica di, **574**
 decadimento β , 79
 decremento logaritmico, 96
 deformazione, 82, 170, 224, **225**
 — di scorrimento, **225**
 — di volume, **225**
- elastica, 224
 — omogenea, 225
 — permanente, 224
 — plastica, 224
 — reversibile, 224
 degenerazione, 447, 525, 671
 — di modi, 356
 demagnetizzazione adiabatica, 631
 densità, 151, 249
 — di energia, 344
 — di energia totale, 676
 — di probabilità, **15**
 — di radiazione, 677
 — elettronica, 457
 — volumica, **183**
 — misura della, **260**
 dente di sega, **287**
 derivate parziali e formule termodinamiche, **650**
 determinismo, **379**
 deterministic, sistema, 102
 deviazione
 — massima, 173
 — standard, **15**
 diagonale, 233
 diagrammi di biforcazione, 395
 diamante, 458
 diapason, **353**
 — modi propri, 353
 Dicke, 215
 dielettrica, costante, **88**
 dielettrici, 88
 difetto, 563, 644
 — di massa, 147
 differenza
 — di fase, 289, 337
 — di massa, 157
 differenziale totale, 166
 diffrazione, 178, **334**, 349
 — da cilindro, 336
 — da un foro circolare, **337**
 — da una fenditura, **337**
 — degli elettroni, 443
 — della luce da ultrasuoni, **371**
 — di neutroni, 444
 — di raggi X, **441**
 diffusione, **537**, 625
 — coefficiente di, **537**
 dilatazione, 470
 — degli intervalli di tempo, **142**
 dimensione
 — frattale, **422**
 — topologica, 426
 dimensioni, **5**, **11**
 dinamica, 23
 — non lineare, **379**
 dinamometro, **75**
 direttività di una sorgente, 359
 Dirichlet, condizioni di, 285
 disco, centro di massa, **152**
 disintegrazione, 157
- dislivello, 125
 disordine, 609
 dispersione, **14**, **300**, 307, 572, 573, 574
 — curva di, **14**
 distanza reticolare, **236**
 distribuzione
 — degli elettroni, 454
 — delle energie, legge di Boltzmann, **521**
 — delle velocità molecolari, **515**
 — funzione di, **437**
 — gaussiana degli errori, **15**
 disuguaglianza di Clausius, **605**
 divergenza
 — delle onde difratte, **339**
 — delle orbite, **400**
 — di un vettore, **265**
 Doppler, 62, 345, 520
 — effetto, **339**
 Duffing
 — equazione di, 407
 Dulong e Petit, 568
 — legge di, **567**
- ebollizione, **557**
 — punto di, 559
 eccitazione di gradi di libertà, 528
 eco, 61, 373, 374
 ecografia diagnostica, 374
 ecolocalizzazione, 373
 effetto Compton, **178**
 Eigenfunktion, 356
 Einstein, 141, 441, 538, 568, 569, 583, 584
 elastica, forza, 95
 elasticità
 — modulo di, **231**
 valori, **234**
 — teoria della, **223**
 elettrodinamica quantistica, 80
 elettromagnetismo, 88, 140
 elettrone, 88, 109
 — carica, **434**
 — di valenza, 577
 — localizzato, 458
 — massa, **434**
 — nei metalli, 476
 — raggio classico dell', **434**
 elettronvolt, **80**
 elicoidale
 — uniforme, moto, 93, 185
 elicotremo, 364
 elio, 147, 219, 668
 — equilibrio liquido-solido, 669
 — temperatura di inversione, 627
 ellissoide, 215
 elongazione, **33**, 96
 emissione, 479
 — acustica, 374

- del corpo nero, trattazione classica e quantistica, **681**
- termica, **674**
- energia, **127**, **144**
 - al punto zero, **569**, **683**
 - chimica, **138**
 - cinetica, **122**
 - di un corpo rigido, **192**
 - di un sistema, **164**
 - media, **514**
 - di dispersione, **548**
 - di dissociazione, **136**
 - di legame, **455**
 - di riposo, **146**
 - di un punto in campo conservativo, **134**
 - disordinata, **609**
 - elastica, **138**
 - elettrica, **138**
 - interna, **495**, **498**, **623**, **633**
 - e condizioni di equilibrio, **636**
 - libera, **236**, **552**, **633**
 - a temperatura costante, **638**, **640**
 - e condizioni di equilibrio, **639**
 - ed equazione di Van der Waals, **642**
 - ordinata, **609**
 - potenziale, **127**, **456**
 - di Lennard-Jones, **549**
 - di un sistema di punti, **165**
 - terrestre, **218**
 - raggiante, **673**
 - termica, **138**
 - trasporto, **536**
 - entalpia, **499**, **628**, **633**, **637**
 - libera, **633**, **646**, **660**
 - minima e condizioni di equilibrio, **637**
 - entropia, **597**
 - come funzione di stato, **601**
 - convenzionale, **667**
 - di mescolamento, **629**
 - e disordine, **608**
 - e informazione, **613**
 - e probabilità, **610**
 - nei sistemi isolati, **606**
 - variazioni di, **618**
 - epicicli, **207**
 - equatore, **116**, **215**
 - equazione
 - caratteristica, **634**
 - cardinale della dinamica prima, **153**
 - seconda, **160**
 - del moto, **150**
 - di stato, **486**, **504**, **566**
 - oraria, **32**, **44**
 - equazioni
 - cardinali dell'equilibrio, **168**, **203**
 - di stato, **565**
 - differenziali non lineari, **399**
 - dimensionali, **11**
 - equilibrio, **73**, **168**, **485**
 - condizioni sufficienti, **203**
 - di sistemi a più componenti, **661**
 - di un sistema
 - di punti, **168**
 - fisico, **598**
 - fra due fasi, **559**
 - indifferente, **135**
 - instabile, **135**
 - interno, **666**
 - liquido-vapore, **661**
 - meccanico, **657**
 - metastabile, **666**
 - posizioni di, **135**
 - stabile, **135**
 - termico, **462**, **473**, **479**
 - termodinamico
 - condizioni, **484**
 - entropia ed, **604**
 - equipartizione dell'energia, **177**, **524**
 - equivalente
 - in acqua del calorimetro, **475**
 - meccanico della caloria, **492**
 - equivalenza debole, principio di, **215**
 - erg, **120**
 - errore, **13**
 - accidentale, **13**
 - quadratico medio della media, **15**
 - sistematico, **13**
 - espansione
 - di solidi, **668**
 - di un gas, **623**
 - coefficiente di, **472**
 - libera, **624**
 - lineare, coefficienti di, **471**
 - termica, **565**
 - dei solidi, **470**
 - esplosione di un proiettile, **154**
 - estremità aperta, condizioni, **327**
 - euleriane, equazioni, **261**
 - Eulero, **261**
 - equazione di, **617**
 - Eustachio, tromba di, **363**
 - eutettico, **663**
 - evaporazione, **557**, **659**
 - evento, **437**
 - favorevole, **437**
 - frequenza dell', **437**
 - evoluzione, **381**
 - Eötvos, **214**
 - falso equilibrio, **581**, **666**
 - farfalla, effetto, **420**
 - fascetto di particelle, **179**
 - fascio molecolare, **520**
 - fase, **96**, **290**
 - differenza di, **312**
 - iniziale, **33**
 - opposizione di, **312**
 - fasi, regola delle, **661**
 - Feigenbaum, **381**, **396**, **418**
 - numero di, **399**
 - Fermi, energia di, **579**
 - Fermi-Dirac, statistica di, **523**, **578**
 - Feynman, **80**
 - filetto fluido, **269**
 - finestra ovale, **363**
 - flessione, **225**
 - Fletcher, **364**
 - Fletcher-Munson, **368**
 - fluidi
 - condizioni di equilibrio, **257**
 - dinamica dei, **261**
 - pesanti, statica dei, **254**
 - sollecitazioni e deformazioni nei, **240**
 - fluido
 - ideale, **252**
 - moto stazionario di un, **262**
 - omogeneo, **254**
 - fluidodinamica, **414**
 - fluoruri, **515**
 - flusso
 - bidimensionale, **276**
 - termico, **535**
 - fluttuazione, **13**, **485**, **515**
 - della pressione atmosferica, **364**
 - forza, **68**
 - apparente, **72**, **111**, **117**, **139**
 - applicata, **187**
 - centrale, **108**, **216**, **217**
 - energia potenziale, **128**
 - lavoro di, **125**
 - centrifuga, **81**, **112**
 - centripeta, **101**, **112**
 - conservativa, **492**
 - rotazione, **263**
 - d'attrito, **84**, **137**
 - di coesione, **240**
 - di dispersione, **547**
 - di gravità
 - centro della forza, **189**
 - energia potenziale, **128**
 - di Lorentz, **93**
 - di scambio, **456**
 - di superficie, **226**, **251**
 - di volume, **226**, **251**
 - conservativa, **254**
 - elastica, **82**
 - energia potenziale, **128**
 - elettrica, **87**
 - elettrostatica, **126**

- esterna, 83, 149
- fittizia, 111
- gravitazionale, 126
- in senso termodinamico, 616
- interna, 149
- linee di, 129
- magnetica, 89
- parallela, 188
- peso, 115, 129
- reale, 72, 83, 111, 117
- sistemi equivalenti, 187
- termodinamica, 633
- totale, 150
- uniforme, 124
- forze
 - di Van der Waals, 547
 - esterne, 151
 - nei processi d'urto, 169
 - intermolecolari, 530, 546
 - interne, 150
 - nei processi d'urto, 170
 - parallele discordi, 190
- fotoelettrico
 - effetto, 178, 440
- fotografia
 - stroboscopica multipla, 58
 - veloce, 55
- fotone, 146, 156, 178, 436, 441
- Foucault, 200
- Fourier, 477
 - teorema di, 285
- frangia, 336
- frattale, 391, 424
- Fraunhofer
 - diffrazione di, 337
- freni, 86
- frequenza, 10, 285
 - armonica, 286
 - dei modi di vibrazione, 571
 - fondamentale, 286
 - propria, 351, 359
 - udita, 342
- Fresnel, 320
- frizione, 86, 194
- fronte d'onda, 283, 319
- fumi, 376
- funzione
 - di stato, 650
 - potenziale, 616
- funzioni, 18
 - omogenee, 12
 - termodinamiche caratteristiche, 633
- fusione, 240, 564, 579, 609, 659

- g**, accelerazione di gravità, 115
- G**, costante di gravitazione universale, 211
- Galassia, 67
 - distribuzione, 422
- Galilei, 66, 143

- gas, 223
 - biatomici, 530
 - di elettroni liberi, 577
 - di fotoni, 678
 - ideale, 504
 - nobili, 450
 - parametri critici, 560
 - perfetti
 - energia interna, 507
 - entropia, 621
 - equazione di stato, 503
 - primo principio, 508
 - poliatomici, 530
 - rarefatto, 464
 - reali, 539
 - sollecitazioni e deformazioni nei, 244
 - trasformazioni isobare, 467
 - trasformazioni isocore, 467
 - Gay-Lussac, 650
 - Geiger e Marsden, 180
 - geometria frattale, 422
 - ghiaccio
 - fondente, 466
 - secco, 66
 - Gibbs, 516, 648, 662
 - funzione di, 646
 - giorno
 - sidereo, 9
 - solare, 9
 - medio, 9
 - giroscopio, 199
 - gittata, 154
 - Glashow, 80
 - gomma, 238, 642
 - vergine, 239
 - goniometro, 8
 - grado
 - di libertà, 27, 149, 183, 521, 524
 - di traslazione, 302
 - di vibrazione, 302
 - interni, 301
 - Kelvin, 596
 - gradiente, 130
 - della velocità, 244
 - grafici, 18
 - grammoatomo, 487
 - grammomolecola, 487
 - gran potenziale, 648
 - grande caloria, 474
 - grandezza
 - derivata, 2
 - di stato, 495
 - estensiva, 655
 - fisica, 2
 - adimensionata, 5
 - scalare, 2
 - fondamentale, 2
 - intensiva, 656
 - ridotta, 546
 - termometrica, 463
 - vettoriale, 2
 - gravitazione, 81
 - energia potenziale, 217
 - universale, 209
 - gruppo di onde, 308
 - guscio, 447

 - Heisenberg, principio di indeterminazione, 442
 - Helmholtz, 272, 408, 497, 648
 - funzione di, 638
 - risuonatori di, 361
 - hertz, 10
 - Hess, legge di, 499
 - Hooke, 207, 229, 237, 239, 295, 296, 644
 - legge di, 229
 - Hopf, 394
 - horse power, 122
 - Huygens, 196
 - principio di, 319
 - teorema di, 194
 - Huygens-Fresnel, principio di, 321

 - idrogeno, 645
 - biatomico, 526
 - pesante, 645
 - idrostatica, paradosso dell', 255
 - igrometro, 561
 - impedenza, 172
 - acustica caratteristica, 330
 - del mezzo, 300
 - imperfezioni nel reticolato, 236
 - imprecisione, 17, 19
 - impulso, 74, 169, 513
 - angolare, 107
 - della forza, 74
 - di luce, 143
 - incertezza, 19
 - incompressibilità, 250
 - incudine, 363
 - indeterminazione, 19
 - indice di rifrazione, 328
 - indipendenza delle azioni simultanee, 73
 - induzione magnetica, 89
 - inerzia, 70
 - legge di, 65
 - principio di, 68
 - informazione, 613
 - infrarosso, 480
 - infrasuoni, 349
 - instabilità meteorologiche, 418
 - integrale
 - di Fourier, 288
 - primo, 131
 - intensità
 - della sensazione sonora, 362
 - di corrente, 90
 - di un'onda, 298

- fisica, 362
- incidente, 345
- intensive, grandezze, 608
- interazione
 - di Debye-Falkenhangen, 547
 - elettromagnetica, 79
 - fondamentale, 79
 - gravitazionale, 79
 - nucleare
 - debole, 79
 - forte, 79
 - interferenza, 178, 308, 312, 315, 336
 - costruttiva, 312
 - distruttiva, 312
 - interstiziale-vacanza, 644
 - intervallo energetico, 529
 - invar, 6
 - invariante, sistema, 662
 - inversione
 - del moto, 135
 - punto di, 626
 - involtucro sferico, 209
 - ione, 434, 455
 - iperbole, 315
 - iperboloide, 315
 - Iperione, 421
 - ipotesi, 20
 - irraggiamento, 479, 673
 - irraggiungibilità dello zero assoluto, 597
 - irreversibilità dei processi naturali, 592
 - irrotazionale, 303
 - isocronismo, 101
 - isofoniche, curve, 368
 - isolanti, 88
 - isoterma reversibile, 641
 - isotermo, processo, 642
 - isotopi, separazione, 645
 - isteresi, 393
 - istogramma, 438
 - iterazione, 380, 398

 - jet, 155
 - joule, 120
 - Joule, 497, 507
 - coefficiente di, 625
 - esperienza di, per l'equivalente meccanico della caloria, 493
 - esperienza sull'energia interna dei gas, 507
 - Joule-Kelvin, 627, 631
 - coefficiente di, 626
 - esperimento di, 625
 - Julia, insieme di, 427

 - Kapitza, 631
 - Keeson, 547, 579

 - Kelvin, 467, 507, 592, 594, 600
 - Keplero, 208, 217, 678
 - leggi di, 208, 216
 - kilocaloria, 474
 - kilogrammetro, 120
 - kilogrammomolecola, 487
 - kilomole, 459
 - kilowatt, 121
 - kilowattora, 122
 - Kirchhoff, 301
 - legge di, 678
 - Kock, curva di, 425
 - Kok, 579
 - Kurti, 631
 - König, teorema di, 165

 - Lagrange, 261
 - lagrangiane, equazioni, 261
 - Lambert, legge di, 675
 - Laplace, espressione di, per le velocità delle onde longitudinali, 296
 - larghezza della risonanza, 359
 - Larmor, 345
 - latitudine, dipendenza di g da, 215
 - Lauterborn, 411
 - lavoro, 127
 - delle forze interne, 165
 - di un momento, 193
 - di una forza, 119
 - ed energia cinetica, 122
 - nei sistemi di punti, 163
 - in trasformazioni reversibili, 491
 - legame
 - covalente, 457, 239
 - idrogeno, 458
 - metallico, 457
 - Lennard-Jones
 - energia potenziale, 549
 - potenziale di, 135
 - lente, 332
 - leva, 204
 - potenza in una, 205
 - resistenza in una, 205
 - levigatezza, 85
 - libero cammino medio, 532, 536
 - limite di elasticità, 224
 - linea
 - di corrente, 263, 266
 - di flusso, 263, 276
 - equipotenziale, 276
 - nodale, 356
 - linearità, 229, 284
 - Liouville, teorema di, 382
 - liquefazione, 540, 560
 - dell'aria, 630
 - liquido, 223, 582
 - calore specifico, 585
 - miscibile, 555

 - modulo di compressibilità e di scorrimento, valore, 242
 - non miscibile, 255
 - pseudo-cristallino, 244
 - sovraraffreddato, 545
 - surraffreddato, 581
 - surriscaldato, 559
 - tempo caratteristico, 583
 - Lissajous, figure di, 57, 99
 - livello
 - di energia, 444
 - energetico, 529
 - equivalente, 368
 - localizzazione, 457
 - London, forze di, 547
 - Lord Kelvin, enunciato del secondo principio, 591
 - Lorentz, 342, 418
 - attrattore di, 388
 - forza di, 89
 - Lorentz-Fitzgerald, contrazione di, 142
 - Lummer, 680
 - Luna, 207
 - moto orbitale, 163
 - lunghezza, 3, 3
 - d'onda, 291
 - Lyapunov, esponenti di, 400

 - macchina
 - acceleratrice, 144
 - di Carnot, rendimento, 591
 - frigorifera, 626
 - refrigerante, 590
 - termica, 588
 - reversibile e irreversibile, rendimento, 593
 - Mach, 273
 - numero di, 343
 - macromolecola, 643
 - macrostato, 485, 610, 611
 - magnetizzazione totale, 487
 - magnetostrettivo, effetto, 359
 - Mandelbrot, 424
 - insieme di, 427
 - manometro, 258
 - differenziale, 267
 - marea, 161
 - oceanica, 163
 - martello, 363
 - mascheramento, 369
 - massa, 3, 70, 82
 - atomica, 434
 - dipendenza da v , 144
 - di riposo, 146
 - e peso, proporzionalità, 190
 - inerziale, 69
 - e gravitazionale, 213
 - molla, 289
 - nella teoria della relatività, 144

- relativa, 434
- materiale
 - magnetico, 496
 - paramagnetico, 500
- Maxwell, 139, **511**, 516, 522, 526
 - distribuzione di, **518**
 - prima relazione di, **635**
 - quarta relazione, **647**
 - seconda relazione di, **637**
 - terza relazione di, **639**
- Maxwell-Boltzmann, 538
 - statistica di, **523**
- meccanica
 - dei fluidi, **249**
 - newtoniana, 77, 139
 - quantistica, 24, 77, **439**
 - relativistica, 24, 143, 167
 - statistica, 24, 461
- media, **13**
- Melloni, 480
- membrana, 355
 - basilare, 364
- Mendeleev, tavola di, **449**
- menisco, 469, **555**
- Mercurio, 217
- mercurio, 258
- mescolamento, entropia, **629**
- metacentro, **260**
- Metakow, 86
- metalli alcalini, **453**
- metastabile, stato, 545
- meteorologia, 418
- metodo fotografico, **55**
- metro, **3**, **4**
- mezzo di propagazione, velocità del, 340
- Michelson e Morley, esperienza di, **140**
- microfono a carbone, **360**
- microsaldature, 86
- microstato, **485**, 611
- millimetro di mercurio, **251**
- missile, 155
- misura
 - assoluta, **13**
 - oggettiva, 366
 - relativa, **13**
- mobilità, **583**
- modello, **23**, 149, 183
- modo
 - di vibrazione, 681
 - indipendente in un mezzo continuo, **570**
 - proprio, 355
 - radiativo, 681
- molecola, 135, 433, **458**, 512
 - biatomica, 236, 530
 - distanza di equilibrio, 136
 - poliatomica, gradi di libertà, 526
- momento
 - assiale, **104**, **161**, **192**
 - della quantità di moto, 106, 160
 - delle forze esterne, 160
 - della quantità di moto, **105**, **106**, 445
 - conservazione, **106**
 - dell'elettrone, quantizzazione, 435
 - di un sistema di punti, **159**
 - intrinseco, 448
 - di dipolo, 547
 - di una forza, **103**
 - d'inerzia, **106**, 124, 162, **194**, 195, 197
 - totale delle forze applicate, **159**
 - monomero, 238
 - monotermo, processo, 641
 - moto
 - centrale, 46
 - circolare, **37**
 - uniforme, **37**, 43
 - componente, **25**
 - del centro di massa, 187
 - di rotazione della Terra, 163
 - di trascinamento, **49**, 54
 - di rotazione, **51**
 - traslatorio, **50**
 - incipiente, 85, 91
 - irrotazionale, **262**, 277
 - laminare, 272, 533
 - orbitale, 161
 - perpetuo di seconda specie, 587
 - piano, **25**
 - relativo, 49
 - rettilineo uniforme, **27**, 65, 66
 - uniformemente accelerato, **31**
 - rotazionale, **262**
 - traslatorio, 198
 - uniforme, **50**
 - turbolento, **272**
 - vorticoso, 262
 - moto armonico, **32**, 289
 - ampiezza, **33**
 - componenti, **39**
 - fase, **33**
 - motori a reazione, 155
 - multifrattale, **422**
 - multipli, 4
 - natura ondulatoria e corpuscolare della luce, **439**
 - Navier-Stokes, 400, 414
 - navigazione, 200
 - negentropia, 615
 - Nernst, principio di, **597**
 - neutrino, 79
 - neutrone, 79, 434
 - cattura del, 180
 - Newton, 66, **77**, 116, 139, 144, 167, 207, 209, 214, 217
 - formula di, per moto nei fluidi, **275**
 - nodo, 351, 570
 - di vibrazione, **317**
 - non linearità, 344
 - acustiche, 376
 - nonio, 7
 - normale principale, **45**
 - notazione degli stati elettronici, **449**
 - nucleo, 88
 - atomico, **433**
 - numero
 - d'onde, **291**
 - di Avogadro, 487
 - di Feigenbaum, 399
 - quantico
 - azimutale, **445**
 - di rotazione, 527
 - di vibrazione, 527
 - principale, **446**
 - oceanografia, 373
 - ombra, 334
 - onda
 - bidimensionale, 283
 - cilindrica, 284
 - convergente, 304
 - d'urto, **343**
 - di capillarità, **307**
 - di grande ampiezza, 285
 - di gravità, **307**
 - di pressione, 292
 - di shock, **285**
 - divergente, 304
 - longitudinale, **281**
 - piana, **284**
 - sinusoidale, **288**
 - progressiva, **291**, **293**, 297
 - quadra, **286**
 - regressiva, **293**
 - riflessa, 324
 - secondaria, 320
 - sferica, **283**, 284, **302**
 - spostamento, 281
 - elementare, 319
 - equazione, 304
 - interferenza di, 313
 - stazionaria, **317**, 327, 351
 - superfici di, **283**
 - su superfici liquide, **306**
 - superficiale, diffrazione di, 335
 - trasversale, **281**, **304**
 - in una corda, **305**
 - velocità, **305**
 - tridimensionale, 283
 - unidimensionale, 283
 - onde
 - elettromagnetiche
 - assorbimento delle, 673

- emissione di, 673
 propagazione delle, 673
 — hertziane, 480
 — radio, 480
 — sferiche, intensità, 300
 opposizione di fase, 324
 orbita, 221, 448
 — dell'elettrone, 447
 — ellittica, 208
 orbite, 216
 — elettroniche, 445
 ordine
 — a corto raggio, 564
 — a lungo raggio, 240, 580
 orecchio, 360
 — esterno, 363
 — interno, 364
 — medio, 363
 normale, 361
 — sensibilità, 364
 — umano, 363
 organo, strumenti ad aria soffiata, 350
 orientamento, polarizzazione per, 547
 orifizio, 267
 orologio atomico, 9
 oscillatore
 — armonico, 94, 527
 energia cinetica, 132
 energia dell', 131
 energia potenziale, 132
 processi, 94
 — di Duffing, 407
 — non lineare forzato, 407
 oscillazioni
 — forzate, 97
 — smorzate, 95
 osservatore, nell'effetto Doppler, 340
 osservatori inerziali, 110, 141
 osservazioni, 1
 — oggettive, 1
 — soggettive, 1
 — sperimentali, 1
 ostacolo per diffrazione, 336
- pacchetto d'onda, 309
 padiglione, 363
 Palmer, 7
 parabola logistica, 395
 parallelepipedo, momento d'inerzia, 195
 paramagnetiche, sostanze, 631
 parametri elastici
 — E , 234
 — G , 234
 — K , 234
 — μ , 234
 parete
- adiabatica, 657
 — fissa, 657
 — nera, 677
 — rigida, 324
 particella α , 177, 157
 pascal, 251
 Pascal, principio di, 257
 Pauli, 547
 — principio di esclusione, 455
 pellicola, 551
 pendolo
 — balistico, 173
 — composto, 196, 196
 — forzato, 402
 — semplice, 100, 214, 383
 accelerazione normale nel, 101
 accelerazione tangenziale nel, 101
 perdita di carico, 270
 periodicità, 9
 — spaziale degli atomi, 564
 periodo, 9, 132, 285
 — dei pianeti, 208
 — spaziale, 290
 permeabilità magnetica, 89
 perturbazione impulsiva, 283
 peso, 81, 214
 — atomico, 433
 — specifico, 260
 Philips, 631
 phon, 368
 pianeti, 207, 216
 piano
 — di appoggio, 204
 — di Clapeyron, 509
 — di polarizzazione, 282
 — di vibrazione, 282
 — entropico, 608
 — equipotenziale, 129
 — inclinato, 137
 moto di un, 198
 — orizzontale, 65
 — osculatore, 45
 — strumento a corde, 350
 — tangente, 45
 piastra, 355
 piccola caloria, 474
 piegatura, 389
 piezoelettrico, effetto, 322, 359
 piometro, 470
 Pitot, tubo di, 268
 Planck, 109, 435, 682
 — legge di radiazione, 683
 platino-iridio, 3
 plexiglas, 332
 Poincaré, 391
 — mappa di, 387
 — sezione di, 386
 poise, 244
 Poiseuille, 273, 276
 — legge di, 271
 Poisson, 296
- coefficiente di, 231
 polarizzabilità, 547
 polarizzazione, 572
 — dielettrica, 487
 — di un'onda elastica, 282
 poli, 116, 215
 poligono di appoggio, 204
 polisobutilene, 238
 polisoprene, 238
 polimero, 238
 polimorfica, transizione, 564
 polo, 159
 pompa idraulica, 268
 pompe a diffusione, 538
 ponte-idrogeno, 458
 portanza, 269
 portata, 264, 265, 271
 posizione, 24, 37, 47, 127
 potenza, 121
 — media, 121
 potenziale
 — asimmetrico, 408
 — chimico, 488
 ed equilibrio termodinamico, 658
 — della velocità, 303
 — intermolecolare, 549
 potere
 — assorbente, 674
 — emissivo
 — parziale, 675
 — relativo, 675
 — totale, 675
 — riflettente, 674
 — trasmittente, 674
 pozzo, 263, 265, 277
 Prandtl, 393, 418
 precessione
 — dell'asse terrestre, 202
 — moto di, 199
 precipitazione, 376
 precisione della misura, 15
 pressa idraulica, 257
 pressione, 250, 252, 486
 — acustica, 344
 — atmosferica, 258
 dipendenza dall'altitudine, 256
 — cinetica, 543
 — costante, variazione di entropia, 619
 — di radiazione, 344, 678
 — idrostatica, 255, 228, 259
 — media, 250
 — nella teoria cinetica, 512
 — parziale, 506
 del vapore, 558
 — termica, 551
 — uniforme, 228
 primi vicini, 237
 primo principio della termodinamica, 495
 Pringsheim, 680

- prisma, 233
 probabilità, 437, 442, 486
 — densità di, 439, 441
 — d'interazione, 179
 — di inversione dei processi spontanei, 610
 — di un macrostato e disordine, 612
 — termodinamica, 610, 614
 processo
 — adiabatico, 500
 — isotermo, 500
 profondità, dipendenza di g da, 216
 proiettile, 154
 prontezza, 205
 propagazione, 479
 — geometrica, 321, 331
 protone, 79, 109, 434
 prove non distruttive, 374
 pseudo-cristallo, 550
 puleggia, 196
 pulsazione, 33, 95, 132
 punto
 — critico, 541, 659
 — di applicazione di una forza, 188
 — di fusione, 580
 — fisso, 396
 instabile, 397
 stabile, 397
 termometrico, 466
 — iperbolico, 384
 — materiale, 23, 65, 66, 69, 149
 libero, 66
 — sella, 384, 394
 — triplo, 465, 659, 662
 dell'acqua, 596
 — zero, 665
- quadratura, 41
 quadrilatero delle equazioni di Maxwell, 650
 quanti di luce, 109
 quantità
 — di calore, 473
 — di modo di un sistema di punti, 154
 — di moto, 74, 103, 513
 trasporto, 534
 quantizzazione del momento della quantità di moto, 436
 quanto, 480
- radar, 61
 raddoppio
 — del periodo, 394, 397, 399
 radiante, 6
 radiazione, 673
 radioattività, 157
- raffreddamento, 607
 raggi
 — γ , 480
 — beta, 94
 — X, 236, 443, 480
 raggio
 — d'azione delle forze, 79
 — di curvatura, 42
 — di propagazione, 284
 — equazione del, 291
 — incidente, 322
 — rettilineo, 321
 — riflesso, 322
 — rifratto, 328
 rarefazione, 290
 Rayleigh, 364
 Rayleigh-Bernard, instabilità di, 416
 Rayleigh-Jeans, 683
 — legge di, 682
 razzo, 155
 reattore nucleare, 443
 reazioni, 111
 — nucleari, 147
 — vincolari, 83
 regole di selezione, 448
 relatività
 — generale, 210, 217
 — ristretta, 141
 teoria della, 139
 rendimento, 590
 resistenza, 274
 — dell'aria, 156
 — di rotolamento, 246
 resistenze passive, 87
 reticolo, 237, 665
 — cubico, 573
 — spaziale, 563
 — ultrasonoro, 371
 retrodiffusione, 180
 Reynolds, 87, 273, 393, 418
 — numero di, 273
 riemanniana, geometria, 211
 riflessione, 321
 — angolo di, 322
 — su parete cedevole, 331
 — totale, 329
 coefficiente di, 330
 riflettore, 345
 rifrazione, 321, 328
 — angolo di, 328
 rilassamento, 302, 370
 — tempo di, 241
 rinculo, 157
 risonanza, 97, 359
 risuonatore, 358
 ritardo di fase, 338
 rollio, 260
 rotatore libero, 527
 rotazione, 161, 184, 199
 — della Terra, 200
 — gradi di libertà, 525
- intorno a un asse fisso, 196
 rotolamento, 86, 246
 — attrito di, 245
 — moto di, 198
 rotore della velocità, 262
 rototraslatorio, moto, 185
 rottura, 224
 Rubbia, 80
 rugiada, punto di, 541
 rugosità, 85
 rumore, 349
 — bianco, 409
 Rutherford, 109, 180, 434
- Salam, 80
 salto, velocità di rotazione, 162
 satellite artificiale, 420
 satelliti, 216
 saturazione magnetica, 500
 Saturno, 421
 sbarra, 225, 296, 352, 496
 — cilindrica, centro di massa, 153
 — condizioni di risonanza, 352
 — libera, velocità delle onde sonore, 296
 — sottile, momento d'inerzia, 195
 — strumenti a percussione, 350
 Scala Internazionale Pratica di Temperatura, 468
 scala
 — centigrada, 465
 — della temperatura assoluta, 467
 — termodinamica, 596
 delle temperature, 468
 — termometrica, 465
 scambio, 456
 scarto, 13
 — dalla media, 14
 — frequenza dello, 14
 — quadratico medio, 15
 scattering, 302, 674
 Schaefer-Bergmann, esperienza di, 372
 schermo, 337
 Schrödinger, equazione di, 442
 scia, 275
 scienza delle costruzioni, 223
 scorrimento, 86, 228, 584
 — deformazione di, 232
 — modulo, 305
 di, 233
 secondi vicini, 238
 secondo, 10
 — solare medio, 9
 sensazione fisiologica, 366
 sensibilità, 205
 serbatoio, 267
 serie, 287

- di Fourier, 287
- diffusa, righe spettrali, 446
- fondamentale, righe spettrali, 446
- principale, righe spettrali, 446
- *sharp*, righe spettrali, 446
- sestante, 8
- sezione di Poincaré, 395
- sfera
 - cava, momento d'inerzia, 195
 - piena, momento d'inerzia, 195
- sferometro, 7
- sforzo, 226
 - di taglio, 584
 - normale, 227
 - specifico, 227
 - tangenziale, 243
- shock, 343
- SI, 11
- Sierpinski, triangolo di, 426
- simmetria, 152
 - elementi di, 152
- sismometro, 63
- Sistema Internazionale, 11
- sistema
 - adiabatico, equilibrio termico, 656
 - di coordinate cartesiane ortogonali, 49
 - di forze irriducibile, 190
 - di forze parallele, 188
 - di punti materiali, 156
 - di riferimento, 24, 49, 117, 210
 - fisso, 49, 143
 - inerziale, 67, 76, 110, 139
 - mobile, 49
 - di unità di misura
 - coerente, 11
 - MKS, 11
 - dissipativo, 400
 - isolato, 167, 606
 - periodico degli elementi, 449
 - pratico degli ingegneri, 82, 120
 - rigido, 24
 - solare, 161, 219
- sistemi
 - caotici, 392
 - di punti, 149
 - di riferimento
 - del centro di massa, 175
 - del laboratorio, 175
 - di unità di misura, 2, 3, 4
 - pratico, 11
 - dissipativi, 384
 - fluidodinamici non lineari, 414
 - non inerziali, 110
 - termodinamici, 483
- smorzamento
 - coefficiente di, 95
 - critico, 97
- Snellius, leggi di, 322
- snervamento, 224
- sodio, equazione di stato, 565
- soglia
 - del dolore, 365
 - di udibilità, 364
- solare, sistema, 420
- Sole, 207, 217
- Sole-Terra, centro di massa, 152
- solenoide, 90, 277
- solidi
 - moduli di compressibilità e di scorrimento, valori, 242
 - proprietà elastiche, 236
 - solidificazione, 579
 - solido, 223
 - amorfico, 563
 - cristallino, 563
 - quantistico, 569
 - sollecitazione, 186, 225
 - omogenea, 227
- Sommerfeld, 435
- sonar, 61, 370, 373
- sorgente, 263, 265, 277
 - in moto, 339
 - puntiforme, 315
 - sonora, 358
 - termica, 587, 592
 - tridimensionale, 357
 - unidimensionale, 350
- sorgenti, 130
 - classificazione, 350
 - coerenti, 314
- sostegno alare, 269
- sottomultipli, 4
- sottosistemi, 152
- sovraposizione, 308
 - legge di, 229
 - principio di, 284
- spazio
 - delle fasi, 382, 516, 611
 - delle velocità, 516
 - reciproco, 573
 - riemanniano, 211
- spettro, 288
 - continuo, 522
 - delle onde elettromagnetiche, 480
 - di assorbimento, 62, 446
 - di emissione, 436
 - di frequenza, 679
 - spettroscopio, 62
 - spin, 161, 448, 456
 - spinta, 155, 260
 - centro di, 260
 - spostamento, 26, 37, 83, 119, 327
 - continuità, 329
 - di trascinamento, 51
 - lungo la linea di azione di una forza, 188
 - staffa, 363
 - stallo, 269
 - stati corrispondenti, 546
 - stati dinamici o delle fasi, spazio delle, 102
 - statica, 23
 - dei fluidi, equazioni della, 253
 - statistica
 - di Fermi-Dirac, 578
 - di Maxwell-Boltzmann, 578
 - stato
 - critico, 541
 - di aggregazione, 236, 503, 550
 - di equilibrio, 515, 601
 - di tensione, 227
 - eccitato, 448, 521
 - fondamentale, 436
 - liquido, 550
 - stazionario, 445
 - termodinamico, 495
 - Stefan, 679
 - Stefan-Boltzmann, 683
 - legge di, 680
 - stelle fisse, 67, 110
 - steradiante, 6
 - Stevino, legge di, 255
 - stiramento, 388, 401
 - Stokes, 301
 - legge di, 87, 275
 - strato monomolecolare, 555
 - stroboscopia, 56
 - strumenti musicali, bande acustiche, 365
 - struttura quasi cristallina dei liquidi, 582
 - subarmonica, 409
 - sublimazione, 560, 564, 659
 - suono, 349
 - puro, 361
 - livello della sensazione di un, 367
 - superfici equipotenziali, 129
 - superficie
 - equipotenziale, 254
 - isobara, 254
 - nodale, 357
 - riflettente
 - cedevole, 325
 - rigida, 324
 - surraffreddato, liquido, 472
 - sviluppo di Fourier, 287
 - coefficienti, 286
 - tabelle, 18
 - tachimetro, 114
 - taglio, forza di, 235
 - tamburo, strumenti a percussione, 350
 - tangente, 35
 - geometrica, 30
 - Taylor, 233
 - temperatura, 462, 486, 514
 - assoluta, 467
 - critica, 541

- di ebollizione, 559
- di fusione, 581
- ed entropia, come coppia di variabili di stato, **607**
- T_{68} , 468
- termodinamica, 468, **594**
- tempo, **8**
 - di riverberazione, 334
 - intervallo di, 3, **8**, 142
 - medio di permanenza, 240
 - universale, **8**
- tensione
 - di vapore dell'acqua, valori, **558**
 - di vapore saturo, **558**
 - superficiale, **551**, 642
 - valori, **553**
- teodolite, **8**
- teorema delle forze vive, **123**
- teoria
 - cinetica, 461, **511**
 - generale della relatività, **141**
 - teorie di gauge, **80**
- termocoppia, 469
- termodynamicà
 - primo principio, **496**
 - e differenziali esatti, **496**
 - secondo principio, **591**
 - terzo principio, **665**
- termodynamico, criteri di equilibrio, **655**
- termometro, 468, **469**
 - a elio, 468
 - a gas, **464**
 - a liquido, 469
 - a resistenza elettrica, 469
 - di massima e minima, 469
 - usato, 595
- termoscopio, 462
- termosifone, 476
- termostato, 640
- terna
 - inerziale, **65**
 - mobile, 52
 - solidale, 49
- Terra, 207, 217
 - accelerazione centripeta, 212
 - densità della, 212
 - sfericità della, 215
 - sistema di riferimento, 67
- Terra-Luna, distanza, 209
- terre
 - alcaline, **454**
 - rare, **453**
- Thompson, 180
- Lord Kelvin, 468
- timbro, 359
- timpano, 360, **363**
- Toda, 407
 - oscillatore di, 409
- toro, 385
- Torricelli, 557
- barometro di, **258**
- teorema di, **267**
- torsione, 225, 234, 487
 - deformazione di, **234**
- traiettoria, **25**, 102, 395
 - chiusa, 280
 - ellittica, 41
 - rettilinea, 32
- transiente, 238
- transitorio, 97
- transizione
 - λ , **669**
 - cristallo-cristallo, **669**
 - del secondo ordine, 669
- trasformatore acustico, 363
- trasformazione, 509
 - adiabatica, 509
 - ciclica, 494, 496
 - di Lorentz, 143
 - di massa, **146**
 - galileiana, **68**
 - irreversibile, **489**, 598
 - reale, 602
 - isentropica, 622
 - isobara, 511
 - isobarica, 499
 - isocora, 499, 510
 - isoterma, 510, 667
 - quasi statica, **489**
 - reversibile, **489**, 601
 - spontanea, 598
 - termodynamicà, **489**
- trasformazioni
 - di Lorentz, **142**
 - galileiane, 140
- traslazione, 184
- trasmissione
 - coefficiente di, **330**
 - del calore, **476**
- trasparenza di una lamina, **333**
- trasporto, **533**
 - di energia, **298**
- trave, 234
- trazione, 225, 228
- treno d'onda, 283
- triangolo, strumenti a percussione, 350
- tromba, strumenti ad aria soffiata, 350
- trottola, **201**
- tubo, 326
 - a U, 256
 - cilindrico, momento d'inerzia, **195**
 - di flusso, **264**
- tuffatore, 162
- tunnel aerodinamico, 268
- turbolenza, 272
- Tycho Brahe, 208
- uditio, 363
- ultrasuoni, 322, 349, **370**
 - di grande intensità, **375**
- ultravioletto, 480
- umidità, **561**
 - assoluta, **561**
 - relativa, **561**
- unificazione delle forze, **80**
- Unione Astronomica Internazionale, 9
- unità
 - binarie, 614
 - di massa atomica, **434**
 - di misura, **2**
 - adimensionate, 11
 - derivate, 2
 - fondamentali, 2
 - univariante, sistema, 662
 - Universo, entropia, **606**
 - urto, 512
 - anelastico, **170**, **172**
 - centrale, **171**
 - elastico, **170**
 - esoenergetico, 177
 - nel sistema del centro di massa, **174**
 - nello spazio, **175**
 - parametro d', **176**, 179
 - perfettamente anelastico, 172
 - processi d', **169**
 - sezione d', **179**
 - vacuometro di Pirani, 536
 - valenza
 - elettroni di, **457**
 - saturazione della, **457**
 - valore medio, **14**
 - Van der Waals, 458, 624, 626, 652
 - equazione di stato, **542**
 - vapore
 - saturo, 542, **558**
 - soprassaturo, 545
 - variabile
 - di stato, **486**
 - estensiva, **486**
 - intensiva, **486**
 - varianza, **662**
 - variazione di entropia, 602, 603
 - vasi comunicanti, **255**
 - veicolo spaziale, 155
 - velocimetria a effetto Doppler, **62**
 - velocità, **27**, **28**, 47
 - angolare, 162, 184
 - scalare, **37**
 - vettoriale, **37**
 - areolare, 108, 208
 - scalare, **46**
 - vettoriale, **46**
 - della luce, 4, 61, 75, 78, 140
 - delle onde longitudinali, valori nei solidi, **296**

- di fase, **308**
- di fuga, **219**
- di gruppo, **308**
- di onde longitudinali in aria, valori, **297**
 - valori in gas e liquidi, **297**
 - di onde trasversali, valori nei solidi, **305**
 - di propagazione delle onde elastiche, **576**
 - di trascinamento, **52**
 - istantanea, **35**
 - media, **35**
 - in distribuzione di Maxwell, **519**
 - più probabile, in distribuzione di Maxwell, **519**
 - quadratica media, **513**
 - radiale, **63**
 - relativa, **171, 342**
 - scalare, **27**
 - istantanea, **35**
 - spostamento, **34**
 - supersonica, **343**
 - vettoriale, **35**
 - ventre di vibrazione, **317**
 - Venturi, tubo di, **267**
 - Verhulst, **396**
 - versori coordinati, **25**
 - vettore
 - applicato, **187**
 - di posizione, **25**
 - libero, **26, 28**
 - vibrazione, energia di, **568**
 - vibrazione, gradi di libertà, **525**
 - vibrometro, **63**
 - vincolo, **81, 83**
 - lavoro del, **121**
 - violino, strumenti a corde, **350**
 - viriali coefficienti, **539, 551**
 - visco-elasticità, **244**
 - viscosimetro, **271**
 - viscosità, **240, 249, 269, 533, 583, 584**
 - coefficiente di, **87, 243**
 - visibile, **480**
 - voce
 - sonora, **362**
 - umana, **362**
 - volt-elettrone, **436**
 - volume, **5, 486**
 - proprio, **512**
 - specifico, **472**
 - vortice, **269, 272, 277**
 - Voyager, **421**
 - vulcanizzazione, **239, 644**
 - vuoto
 - alto, **538**
 - preparatorio, **538**
 - produzione, **538**
 - watt, **121**
 - Watt, velocimetro, **113**
 - Weber e Fechner, legge di, **366**
 - Wegel, **365**
 - Weinberg, **80**
 - Wien, **683**
 - legge dello spostamento, **681**
 - Wilson, camera di, **94**
 - Young, **295, 296**
 - modulo di, **231**
 - zattera, **157**
 - zero
 - assoluto, **468, 596, 609, 666**
 - principio zero della termodinamica, **463**

GRANDEZZE FONDAMENTALI NEL SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ (SI)

Grandezza	Unità SI		
	Nome	Simbolo	Definizione
<i>Fondamentali</i>			
lunghezza	metro	m	Lunghezza del percorso della luce nel vuoto nell'intervallo di tempo $1/299.792.458$ s. In Italia il metro è attuato mediante il campione dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino
massa	kilogrammo	kg	Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres). In Italia il campione del kilogrammo è conservato presso il Ministero dell'Industria, del Commercio e dell'Artigianato (Servizio Metrico), a Roma.
tempo	secondo	s	Intervallo di tempo che contiene $9\ 192\ 631\ 770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133. In Italia il secondo è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.
intensità di corrente elettrica	ampere	A	Intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di 1 m l'uno dall'altro nel vuoto, produce tra i due conduttori la forza di 2×10^{-7} N su ogni metro di lunghezza. In Italia l'ampere è attuato mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.
temperatura termodinamica	kelvin	K	Frazione $\frac{1}{273,16}$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua. In Italia la scala termodinamica delle temperature è attuata mediante i campioni dell'Istituto di Metrologia Gustavo Colonnetti del CNR, a Torino.
intensità luminosa	candela	cd	Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e che ha un'intensità di radiazione in quella direzione di $1/683$ W/sr. In Italia la candela è attuata mediante il campione dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, a Torino.
quantità di sostanza	mole	mol	Quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi di 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni ecc. ovvero gruppi specificati di tali particelle.
<i>Supplementari</i>			
angolo piano	radiante	rad	Angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.
angolo solido	steradiane	sr	Angolo solido al centro che su una sfera intercetta una calotta di area uguale a quella del quadrato il cui lato ha la lunghezza del raggio.

Valori di alcune costanti e grandezze fisiche

velocità della luce nel vuoto*	c_0	$2,99792458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
costante gravitazionale	G	$6,670 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$
accelerazione di gravità al livello del mare e 45° di latitudine	g	$9,80665 \text{ ms}^{-2}$
raggio medio della terra		$6,37 \times 10^6 \text{ m}$
velocità del suono in aria secca (STP)**	v_0	$331,4 \text{ ms}^{-1}$
numero di Avogadro*	N_A	$6,0225 \times 10^{23} \text{ particelle} \cdot \text{mol}^{-1}$
costante dei gas*	R	$8,3143 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = 1,98 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
costante di Boltzmann*	k	$1,3805 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
costante di Plank*	h	$6,6256 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
densità aria secca (STP)**		$1,293 \text{ kg m}^{-3}$
densità dell'acqua (20°C)		$1,00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
calore latente di fusione dell'acqua (0°C)		$79,7 \times 10^3 \text{ cal kg}^{-1}$
calore latente di evaporazione dell'acqua (100°C)		$539 \times 10^3 \text{ cal kg}^{-1}$
punto triplo dell'acqua		$273,16 \text{ K}$
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$8,85415 \times 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
carica dell'elettrone*	e	$1,60210 \times 10^{-19} \text{ C}$
momento magnetico dell'elettrone*	μ_e	$9,2732 \times 10^{-24} \text{ J m}^2 \text{ Wb}^{-1}$
massa di riposo dell'elettrone*	m_e	$9,1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$
massa di riposo del protone*	m_p	$1,67252 \times 10^{-27} \text{ kg}$
massa di riposo del neutrone*	m_m	$1,67482 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Alcune equivalenze fra unità SI e altre di uso frequente

$$1 \text{ atmosfera} = 760 \text{ mm Hg} = 1,013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

$$1 \text{ dine cm}^{-2} = 10^{-1} \text{ Nm}^{-2}$$

$$1 \text{ bar} = 10^6 \text{ dine cm}^{-2} = 0,987 \text{ atm} = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

$$1 \text{ unità di massa atomica (u)} = 1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$K = 273,15 + C$$

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

$$\text{energia} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ eV} = 1,6021 \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ u} = 1,492 \times 10^{-10} \text{ J} = 913,0 \text{ MeV} \end{array} \right.$$

* Valore indicato dalla Unione Internazionale di Fisica Pura ed Applicata.

** STP = condizioni standard di temperatura (0°C) e pressione (1 atm).

