Francesco Michelotti

FISICA GENERALE

Esercizi svolti
per corsi del nuovo ordinamento universitario

PROGETTO LEONARDO
BOLOGNA

Francesco Michelotti

FISICA GENERALE

Esercizi svolti per corsi del nuovo ordinamento universitario

SECONDA EDIZIONE

PROGETTO LEONARDO
BOLOGNA

Scritto con i software Word 2000 per Windows della Microsoft Corporation

Impaginazione
grafica
e
composizione
a cura dell'Autore

Realizzato presso il
Dipartimento di Energetica
dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Via Antonio Scarpa, 16
00161 Roma
Tel. 06/49916562
Fax. 06/44240183
E-Mail. francesco.michelotti@uniroma1.it
WebPage. http://w3.uniroma1.it/cattedra_michelotti/

In copertina: Galileo Galilei in una incisione di Francesco Villamena del 1623

PROGETTO LEONARDO

Prima edizione: Luglio 2001
Seconda edizione: Gennaio 2003

40131 Bologna - Via U. Terracini, 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

PREFAZIONE

Il nuovo ordinamento degli studi delle Facoltà di Ingegneria degli atenei italiani prevede l'insegnamento delle discipline mediante un sistema basato sul concetto di credito. Esso stabilisce che a dieci ore di lezione ed esercitazione in aula tenute dal docente corrispondano quindici ore di studio individuale dello studente.

L'allargamento delle frontiere della conoscenza ha inoltre fatto sì che il numero di ore di lezione dedicate all'insegnamento della Fisica, e di altre discipline di base, si sia ridotto rispetto al passato. Ciò rende difficile al docente trattare durante le lezioni casi particolari, applicazioni o esercizi che rendano migliore la comprensione della materia. E' necessaria quindi una nuova impostazione didattica in cui lo studente sia chiamato settimanalmente a risolvere individualmente degli esercizi scelti per la cui soluzione debbano essere utilizzati tutti i concetti appresi nella settimana precedente; è indispensabile inoltre che egli possa accedere alla loro risoluzione in forma quanto più estesa possibile. Ciò anche nella convinzione che è meglio svolgere pochi esercizi scelti in forma molto estesa che svolgerne molti simili velocemente.

Il presente testo raccoglie gli esercizi svolti proposti settimanalmente, a gruppi di cinque, nel corso dello svolgimento di corsi di Fisica Generale da dieci crediti per studenti di Ingegneria Informatica. Alla fine di ogni capitolo sono inoltre riportati esercizi non svolti con risultato. Il testo può essere utilizzato sia durante i corsi che per la preparazione delle prove di valutazione finali.

L'Autore ringrazia la Dott.ssa Francesca Menchini per il costante impegno riposto nella preparazione gli esercizi aggiuntivi di fine capitolo.

INDICE

.... Oggi ogni ramo della scienza sembra ci voglia dimostrare che il mondo si regge su entità sottilissime: come i messaggi del DNA, gli impulsi de neuroni, i quarks, i neutrini vaganti nello spazio dall'inizio dei tempi...
Poi, l'informatica. E' vero che il software non potrebbe esercitare i poteri della sua leggerezza se non mediante la pesantezza del hardware; ma è il software che comanda, che agisce sul mondo esterno e sulle macchine, le quali esistono solo in funzione del software, si evolvono in modo d'elaborare programmi sempre più complessi. La seconda rivoluzione industriale non si presenta come la prima con immagini schiaccianti quali presse di laminatoi o colate d'acciaio, ma come i bits d'un flusso d'informazione che corre sui circuiti sotto forma d'impulsi elettronici. Le macchine di ferro ci sono sempre, ma obbediscono ai bits senza peso.

Italo Calvino, Lezioni americane, 1988

.... Arrivato alla fine, dopo mesi di insonnia, ho sentito che il libro si incarnava in me, perché quello è il mio destino. Per raccontarvi questa storia non avrò nemmeno bisogno di aprire il quaderno, intanto perché ne ho imparato a memoria ogni passo, e poi per prudenza. Tra poco, brave gente, il giorno si lascerà scivolare nelle tenebre; io mi ritroverò solo con il libro e voi soli con l'impazienza. Sbarazzatevi della febbre malsana che accende i vostri sguardi. Siate pazienti, scavate con me la galleria della domanda e sappiate aspettare, non tanto le mie frasi - che sono vuote - quanto il canto che si leverà lentamente dal mare e verrà per iniziarvi sulla strada del libro all'ascolto del tempo e di quanto il tempo sa fare in frantumi. Sappiate anche che il libro ha sette porte, aperte in un muro dello spessore di almeno due metri e alto come almeno tre uomini aitanti e vigorosi. Vi darò io, una dopo l'altra, le chiavi per aprire tutte quelle porte. In verità già possedete quelle chiavi, ma non lo sapete; e se anche lo sapeste, non sareste in grado di farle girare e ancora meno sapreste sotto quale pietra tombale sotterrarle.....

Tahar Ben Jelloun, Creatura di sabbia, 1987

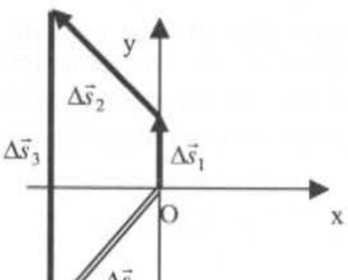
Capitolo 1

Cinematica del punto materiale

ESERCIZIO 1.1 *Un'automobile si muove con velocità di modulo costante pari a 60km/h. Essa si dirige verso nord per 20 min, poi si muove in una direzione 45° a nord-ovest per 40 minuti e torna verso sud per 80 min. Considerando lo spostamento complessivo dal punto di partenza, con quale velocità media esso è stato compiuto?*

SOLUZIONE

Nel sistema di riferimento cartesiano bidimensionale in cui gli assi coordinati coincidono con le direzioni O-E e S-N il moto dell'automobile è quello descritto in figura con partenza dall'origine O degli assi. Lo spostamento complessivo dell'autovettura è dato dal vettore $\Delta\vec{s}$:



$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2 + \Delta\vec{s}_3$$

le cui componenti sono facilmente ricavabili proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} \Delta s_x = \Delta s_{x1} + \Delta s_{x2} + \Delta s_{x3} \\ \Delta s_y = \Delta s_{y1} + \Delta s_{y2} + \Delta s_{y2} \end{cases}$$

Con i dati del problema, chiamando Δt_1, Δt_2, Δt_3 i tempi di percorrenza dei singoli spostamenti in ore e v la velocità espressa in km/h, si ha:

$$\begin{cases} \Delta s_x = 0 - v \cdot \Delta t_2 \cdot cos(45°) + 0 \\ \Delta s_y = v \cdot \Delta t_1 + v \cdot \Delta t_2 \cdot sin(45°) - v \cdot \Delta t_3 \end{cases}$$

Inserendo i valori dati nel testo si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta s_x = -28.28\, km \\ \Delta s_y = -31.72\, km \end{cases}$$

Dal momento che la velocità vettoriale media mantenuta da un punto materiale nel corso di un intervallo di tempo Δt è definita come:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

avremo che nel corso dello spostamento complessivo del punto esso ha mantenuto una velocità media data dal vettore di componenti:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta s_x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta s_y}{\Delta t}\hat{y}$$

dove sono i versori degli assi coordinati e $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$. La velocità media sarà quindi pari a:

$$\overline{\vec{v}} = (-12.14, -13.61) km / h$$

ed il suo modulo vale:

$$\overline{v} = \sqrt{\overline{v}_x^2 + \overline{v}_y^2} = 18.24 km / h$$

ESERCIZIO 1.2 *Un punto materiale si muove in direzione x seguendo la legge oraria* $x(t) = At + Bt^2$, *in cui x è misurato in metri, il tempo t in secondi e le costanti valgono A=20m/s e B=5m/s². Calcolare:*

1) *la velocità media del punto durante i primi 4 secondi di moto;*
2) *la velocità istantanea del punto nell'istante t=2.0 s;*
3) *l'accelerazione istantanea allo stesso istante.*

SOLUZIONE

Il moto è lungo la direzione x.

1) La velocità media avrà solo la componente x che si ricava proiettando la relazione:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

sull'asse x. Si ottiene:

$$\bar{v}_x = \bar{v} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Dal momento che conosciamo la legge oraria possiamo ricavare il valore della velocità media, che sarà pari allo spazio percorso diviso per il tempo Δt impiegato per percorrerlo:

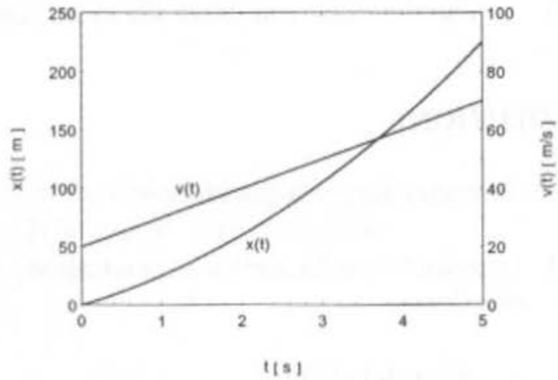
$$\bar{v} = \frac{x(\Delta t) - x(0)}{\Delta t} = \frac{A\Delta t + B\Delta t^2 - 0}{\Delta t} = A + B\Delta t$$

Sostituendo i valori delle costanti si ottiene:

$$\bar{v} = 20m/s + 5m/s^2 \cdot 4s = 40m/s$$

2) La velocità istantanea ad ogni istante t si ricava derivando la x(t) rispetto a t. Si ha:

$$v_x(t)=v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=A+2Bt$$



In figura vengono riportati gli andamenti della posizione e della velocità in funzione del tempo, ottenuti graficando le espressioni di x(t) e v(t). Lo spostamento ha l'andamento parabolico previsto mentre la velocità aumenta linearmente nel tempo.

Il valore della velocità istantanea all'istante t=2.0s sarà dato da:

$$v(2s)=20m/s+10m/s^2\cdot 2s=40m/s$$

3) L'accelerazione ad ogni istante può essere ricavata derivando lo spostamento due volte rispetto al tempo o la velocità istantanea una volta rispetto al tempo. Si ha:

$$a_x(t)=a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=2B$$

L'accelerazione è quindi costante nel tempo, moto uniformemente accelerato, e vale:

$$a_x(t)=10m/s^2$$

Al tempo t=2.0 secondi essa ha il valore numerico indicato.

ESERCIZIO 1.3 *Un tram parte da una fermata mantenendo un'accelerazione costante pari a 0.2 m/s² . Esso mantiene tale accelerazione fino a metà del percorso per arrivare alla fermata successiva, quindi decelera con lo stesso ritmo nella seconda metà del percorso. Se le fermate distano 2 km l'una dall'altra, calcolare:*

1) *la durata del percorso tra le due fermate;*
2) *la velocità massima del tram.*

SOLUZIONE

Il moto è di tipo uniformemente accelerato. Nelle prima metà del moto l'accelerazione è nello stesso verso dello spostamento e nella seconda in verso opposto ad esso. Prendiamo un asse x lungo la congiungente le due fermate, con origine nella fermata di partenza e verso tale che la coordinata x della seconda fermata sia positiva.

1) Il moto è descritto dalla legge oraria:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

e da un andamento della velocità dato da:

$$v(t) = v_0 + at$$

Nella prima parte del moto, dal momento che nel sistema scelto posizione e velocità iniziali sono nulle si hanno le due relazioni per spostamento e velocità del tram:

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

e

$$v(t) = at$$

Dalla prima relazione consegue che per coprire la metà della distanza D tra le due fermate il tram impiegherà un intervallo di tempo:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot D/2}{a}}$$

Convertendo la distanza tra le fermate da chilometri in metri prima di inserirla nella relazione precedente, si ottiene il valore:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000m/2}{0.2m/s^2}} = 100s$$

Dalla seconda relazione possiamo ricavare la velocità raggiunta in corrispondenza del punto di mezzo tra le due fermate:

$$v(\Delta t) = 0.2m/s^2 \cdot 100s = 20m/s = 72km/h$$

Per studiare la seconda parte del moto possiamo cambiare il riferimento temporale scegliendo l'istante 0 nel momento in cui il tram si trova a metà percorso. Il moto è allora descritto dalle relazioni:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

e

$$v(t) = v_0 + at$$

dove x_0 e v_0 sono la posizione e la velocità iniziale al tempo $t=0$ e valgono:

$$\begin{cases} x_0 = D/2 = 1000m \\ v_0 = 20m/s \end{cases}$$

Il tempo impiegato per fermarsi si può calcolare imponendo la condizione:

$$x(\Delta t) = D$$

ovvero la condizione:

$$v(\Delta t) = 0$$

Sfruttando la seconda relazione si ha:

$$\Delta t = -\frac{v_0}{a}$$

nella quale si deve tenere conto del fatto che, essendo il moto decelerato, la componente dell'accelerazione lungo la direzione x nella seconda parte del moto è negativa, di modulo pari a $0.2m/s^2$. Si ottiene:

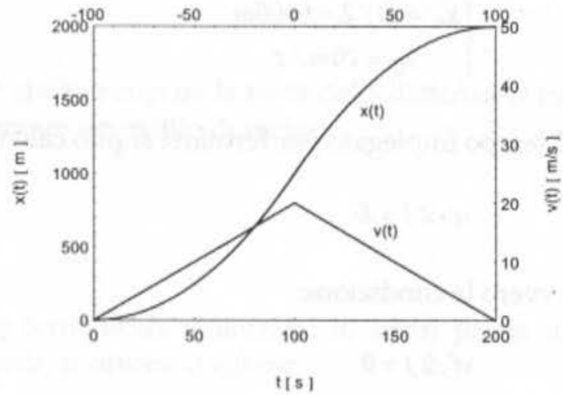
$$\Delta t = -\frac{20m/s}{-0.2m/s^2} = 100s$$

Ovviamente essendovi simmetria nella fase di accelerazione e decelerazione il tempo di frenata è uguale a quello di accelerazione. Ciò conferma ciò che potevamo aspettarci intuitivamente.
La durata del percorso tra le due fermate è pari quindi a:

$$\Delta t_T = 2\Delta t = 200s$$

2) La velocità massima del tram è ovviamente quella nel punto di mezzo che abbiamo calcolato, pari a:

$$v_{MAX} = 20m/s$$



In figura riportiamo gli andamenti dello spostamento e della velocità del tram in funzione del tempo, calcolati mediante le espressioni ricavate precedentemente. Sull' asse x primario, in basso nella figura, viene riportato il tempo misurato a partire dall'istante in cui il tram inizia a muoversi dalla prima fermata. L'asse x secondario, in alto nella figura, ha il proprio zero nell'istante in cui il tram transita nel punto di mezzo tra le due fermate; esso è stato utilizzato per calcolare posizione e velocità nel secondo tratto di percorso.

ESERCIZIO 1.4 *Un sasso viene lasciato cadere in mare da uno scoglio dall'altezza di 8 m misurata rispetto al pelo dell'acqua. Esso colpisce la superficie dell'acqua ad una certa velocità e, supponendo che la sua velocità si mantenga costante e pari a quella immediatamente precedente all'impatto con l'acqua, raggiunge il fondo 3 s dopo che lo si è lasciato cadere. Calcolare:*

1) *la profondità del mare in corrispondenza del punto di caduta;*
2) *la velocità media del sasso durante il movimento;*
3) *Supponendo che a causa della bassa marea in corrispondenza della verticale di caduta non vi sia più acqua, calcolare la velocità iniziale che occorre imprimere al sasso affinché colpisca il suolo dopo lo stesso intervallo di tempo di 3 s dal lancio.*

Si consideri il sasso sottoposto all'accelerazione di gravità costante diretta lungo la verticale verso il basso e di intensità pari a $9.81 m/s^2$

SOLUZIONE

1) Il moto del sasso è rettilineo uniformemente accelerato fino all'impatto con la superficie del mare, descritto dalle relazioni:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

e

$$v(t) = v_0 + at$$

Scegliamo un asse di riferimento x verticale diretto verso l'alto con origine sul fondo del mare. Utilizzando le condizioni iniziali ed il valore dell'accelerazione di gravità, si ha:

$$x(t) = (\xi + \xi_M) - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v(t) = -gt$$

dove con ξ abbiamo indicato l'altezza di partenza rispetto alla superficie del mare e con ξ_M l'altezza del mare. Il tempo t_1 in cui il sasso raggiunge la superficie dell'acqua si ottiene imponendo $x(t_1)=\xi_M$. Si ha:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\xi}{g}}$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8m}{9.81m/s^2}} = 1.28s$$

La velocità del sasso al momento dell'impatto, che poi si manterrà costante fino all'arrivo sul fondo, è data da:

$$v(t_1) = -gt_1 = -\sqrt{2g\xi}$$

Numericamente si ha:

$$v(t_1) = -\sqrt{2 \cdot 9.81 m/s^2 8m} = -12.55 m/s$$

La seconda parte del moto è di tipo rettilineo uniforme, per cui:

$$v(t) = v_0$$

La legge oraria si può ricavare integrando la relazione precedente. Sappiamo infatti che sussiste la relazione:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

da cui si ha:

$$dx(t) = v(t)dt$$

Integrando i due termini con le corrette condizioni iniziali, si ha:

$$\int_{\xi_M}^{0} dx(t) = \int_{t_1}^{t} v(t)dt = \int_{t_1}^{t} v(t_1)dt$$
$$x(t) - \xi_M = v(t_1) \cdot (t - t_1)$$

ovvero:

$$x(t) = \xi_M + v(t_1) \cdot (t - t_1)$$

Non abbiamo fatto ricorso ad un cambiamento dello zero del riferimento temporale, come si era fatto invece nell'esercizio precedente. Ciò comporta che, nello scrivere le leggi del moto, bisogna prestare attenzione al valore del tempo corrispondente alle condizioni iniziali che stiamo imponendo. In questo caso il punto si trova nella posizione iniziale ξ_M al tempo $t=t_1$.
Nell'istante t_2 in cui il sasso tocca il fondo si ha la condizione $x(t_2)=0$, per cui:

$$x(t_2)=0=\xi_M+v(t_1)\cdot(t_2-t_1)$$

nella quale dobbiamo ricordare che la velocità del sasso è negativa. Si ricava quindi un'espressione che permette di ricavare l'altezza del mare:

$$\xi_M=-v(t_1)\cdot(t_2-t_1)$$

Imponendo la condizione $t_2=3s$, si ottiene il valore numerico della profondità del mare:

$$\xi_M=12.55m/s\cdot(3s-1.28s)=21.59m$$

2) La velocità media si può calcolare effettuando il rapporto tra la distanza percorsa ed il tempo impiegato a percorrerla:

$$\bar{v}=\frac{\xi+\xi_M}{t_2}$$

Si ha quindi:

$$\bar{v}=\frac{8m+21.59m}{3s}=9.86m/s$$

3) Se non vi fosse acqua, il moto sarebbe di tipo uniformemente accelerato lungo tutto il percorso. Esso sarebbe regolato dalle relazioni:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

e

$$v(t) = v_0 + at$$

Imponendo nella prima relazione la condizione $x(t_2)=0$ possiamo ricavare la condizione sul valore di v_0 affinché il sasso arrivi al suolo nel medesimo istante t_2, partendo dall'altezza $\xi+\xi_M$ con velocità non nulla. Si ha:

$$x(t_2) = 0 = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

da cui si ricava:

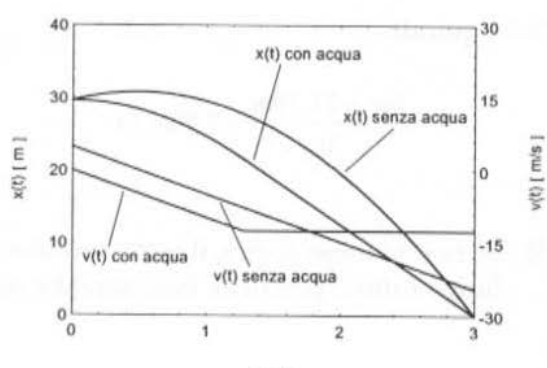
$$v_0 = -\frac{x_0 + 1/2 a t_2^2}{t_2}$$

Sostituendo i valori numerici si ricava:

$$v_0 = -\frac{(8m + 21.59m) - 0.5 \cdot 9.81 m/s^2 \cdot 9s^2}{3s} = 4.85 m/s$$

La velocità è positiva, quindi bisognerà lanciare il sasso verso l'alto perché impieghi lo stesso tempo a raggiungere il suolo.

In figura riportiamo gli andamenti dello spostamento e della velocità del sasso in



funzione del tempo, calcolati mediante le espressioni ricavate in precedenza, per entrambi i casi trattati (assenza o presenza di acqua del mare). Il confronto ci permette di comprendere meglio la cinematica della caduta, nei due casi.

ESERCIZIO 1.5 *La ruota di un parco dei divertimenti ha un raggio di 15 m. Essa compie 1 giro al minuto intorno al proprio asse orizzontale. Calcolare:*

1) *l'accelerazione a cui sono sottoposti i passeggeri nel punto più alto;*
2) *l'accelerazione a cui sono sottoposti i passeggeri nel punto più basso.*

SOLUZIONE

Il moto è circolare uniforme. L'accelerazione centripeta è in modulo data dalla relazione:

$$a_c = \frac{v_s^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

dove v_s è la velocità scalare istantanea, r è il raggio dell'orbita e T è il periodo di rotazione. Con i dati dell'esercizio si ha:

$$a_c = \left(\frac{2\pi}{60s}\right)^2 \cdot 15m = 0.16m/s^2$$

Nel punto più basso l'accelerazione è diretta verso l'alto, nel punto più alto verso il basso.

ESERCIZIO 1.6 *Una pietra viene lanciata dalla sommità di una torre alta h=50m con velocità di modulo pari a v_0=18m/s e direzione inclinata di α=50°, verso l'alto, rispetto al piano orizzontale. Si ricavi: (1) l'intervallo di tempo necessario perché la pietra arrivi al suolo, (2) la distanza percorsa in orizzontale* *prima di colpire il suolo, (3) il modulo della velocità con cui la pietra colpisce il suolo, (4) l'angolo formato tra la traiettoria della pietra ed il piano orizzontale nel punto d'impatto. Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma che l'accelerazione di gravità sia diretta lungo la verticale verso il basso e che abbia modulo g=9.81 m/s².*

SOLUZIONE

1) Il moto della pietra è di tipo uniformemente accelerato. La posizione e la velocità istantanea della pietra, schematizzata come un punto materiale, vengono descritte dalle relazioni:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

Scegliamo un sistema di riferimento Oxy tale che all'istante $t=0$ il punto materiale abbia coordinata $x=0$ e coordinata $y=h$ e che il piano xy contenga il vettore velocità istantanea del punto all'istante $t=0$. Proiettiamo le relazioni precedenti sui due assi cartesiani così scelti. Si ha:

$$\begin{cases} x(t)=x_0+v_{x0}t+\frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t)=y_0+v_{y0}t+\frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_x(t)=v_{x0}+a_x t \\ v_y(t)=v_{y0}+a_y t \end{cases}$$

Sappiamo però che al tempo $t=0$ si ha $x_0=0$, $y_0=h$, $v_{x0}=v_0\cos\alpha$, $v_{y0}=v_0\sin\alpha$ e che $a_x=0$ e $a_y=-g$. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} x(t)=v_0\cos\alpha t \\ y(t)=h+v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_x(t)=v_0\cos\alpha \\ v_y(t)=v_0\sin\alpha-gt \end{cases}$$

Possiamo ricavare il valore dell'istante t^* in cui il punto toccherà terra, semplicemente imponendo $y(t^*)=0$ e ricavando per quali valori di t^* ciò accade. Si ha:

$$y(t^*) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$h + v_0 \sin\alpha t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Delle due soluzioni teniamo solo quella con il segno positivo. L'altra soluzione matematica, senza significato fisico, corrisponde al calcolo dell'istante di tempo, precedente a $t=0$ e quindi negativo, in cui sarebbe stato necessario lanciare una pietra dal suolo perché essa passi all'istante $t=0$ nel punto di coordinate $(x,y)=(0,h)$ con velocità di modulo v_0 inclinata di 50° rispetto all'orizzontale. Avremo quindi che la pietra toccherà il suolo all'istante:

$$t^* = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 4.89s$$

2) La distanza percorsa in orizzontale prima di colpire il suolo sarà data da:

$$x(t^*) = v_0 \cos\alpha t^* = 56.58m$$

Si noti che se il punto non fosse partito da $x=0$ tale distanza sarebbe stata data da $x(t^*)-x_0$.

3) e 4) Al momento dell'impatto con il suolo il punto materiale avrà una velocità istantanea vettoriale di componenti:

$$\begin{cases} v_x(t^*) = v_0 \cos\alpha = 11.57m/s \\ v_y(t^*) = v_0 \sin\alpha - gt^* = -34.18m/s \end{cases}$$

Si ha quindi, come è logico aspettarsi, che la componente verticale della velocità è negativa e l'angolo formato dal vettore velocità istantanea con l'orizzontale è negativo. Per quanto riguarda il modulo della velocità al momento dell'impatto avremo:

$$v(t^*) = \sqrt{v_x^2(t^*) + v_y^2(t^*)} = 36.09 m/s$$

Per quanto riguarda l'angolo β formato con l'orizzontale si ha:

$$\tan\beta = \frac{v_y(t^*)}{v_x(t^*)} = -2.95 \qquad \text{da cui otteniamo} \qquad \beta = -71.27°$$

ESERCIZIO 1.7 *Un punto materiale viene accelerato lungo una traiettoria circolare di raggio R=8cm, partendo da fermo, sottoposto ad una accelerazione tangenziale costante nel tempo a_t. Si ricavi il valore dell'accelerazione tangenziale a_t sapendo che la velocità istantanea scalare del punto materiale vale v=50cm/s nel momento in cui esso completa la quinta rivoluzione intorno al centro della traiettoria dal momento in cui si è messo in moto. Si ricavi poi il valore dell'accelerazione normale a_n all'istante in cui il punto completa la settima rivoluzione intorno a centro della traiettoria.*

SOLUZIONE

In linea di principio il moto non è uniformemente accelerato. Il punto materiale è infatti sottoposto ad una accelerazione tangenziale costante nel tempo, che causa la variazione del modulo della velocità scalare istantanea del punto materiale, e ad un'accelerazione normale centripeta, che mantiene il punto sulla traiettoria circolare di raggio costante R variando la direzione della velocità istantanea vettoriale. Dal momento che nel moto circolare l'accelerazione normale centripeta vale $a_n = v_s^2/R$ è chiaro che aumentando la velocità scalare essa debba aumentare. Ne consegue che l'accelerazione totale cui è sottoposto il punto materiale non è costante nel tempo.

Se descriviamo però il moto del punto materiale mediante un'ascissa curvilinea $s(t)$ misurata sulla traiettoria circolare di raggio R e ci disinteressiamo per il momento dell'accelerazione normale potremo scrivere:

$$s(t)=s_0+v_{s0}t+\frac{1}{2}a_t t^2 \qquad \text{e} \qquad v_s(t)=v_s+a_t t$$

dove v_{s0} è la velocità scalare all'istante $t=0$ e s_0 è la posizione a $t=0$. In questo modo trattiamo il moto lungo la traiettoria come uniformemente accelerato. Dal momento che $s_0=0$ e $v_{s0}=0$, avremo:

$$s(t)=\frac{1}{2}a_t t^2 \qquad \text{e} \qquad v_s(t)=a_t t$$

Possiamo eliminare il parametro tempo da queste due relazioni, ricavandolo dalla seconda e sostituendolo nella seconda, ed ottenere:

$$s(t)=\frac{1}{2}\frac{v_s^2(t)}{a_t} \qquad \text{da cui} \qquad a_t=\frac{v_s^2(t)}{2s(t)}$$

Possiamo allora imporre che $v_s=50cm/s=0.5m/s$ nel momento in cui il punto si trova in $s(t)=5(2\pi R)=2.51m$ per ottenere il valore di a_t. Si ha:

$$a_t=0.05m/s^2$$

Il tempo t^* impiegato dal punto per compiere sette rivoluzioni intorno al centro della traiettoria si può ricavare invertendo la relazione:

$$s(t)=\frac{1}{2}a_t t^2$$

dove ora a_t è nota. Avremo:

$$t=\sqrt{2s(t)/a_t}$$

Imponendo $s(t^*)=7(2\pi R)$ si ricava:

$$t^*=\sqrt{2\cdot 7\cdot 2\cdot \pi \cdot 0.08m/0.05m/s^2}=11.86s$$

Il valore della componente normale dell'accelerazione per $t=t^*$ si ricava immediatamente ricordando che:

$$a_n(t^*)=\frac{v_s^2(t^*)}{R}=\frac{(a_t t^*)^2}{R}=4.40m/s^2$$

Notiamo che tale valore è molto maggiore di quello dell'accelerazione tangenziale costante a_t.

ESERCIZIO 1.8 *Un ragazzo calcia un pallone imprimendogli una velocità iniziale di modulo v_0=8m/s ad un angolo α=45° rispetto al piano orizzontale. La palla colpisce un muro ad una distanza di s=2.5m dal ragazzo. Si calcoli dopo quanto tempo la palla colpisce il muro e l'altezza da terra del punto d'impatto. Si determini anche la velocità della palla al momento dell'impatto. Si trascuri la resistenza dell'aria.*

SOLUZIONE

Il moto è piano ed uniformemente accelerato con accelerazione di gravità di modulo $g=9.81\ m/s^2$ diretta lungo la verticale verso il basso. Come al solito esso sarà descritto dalle relazioni:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Scegliamo un sistema di riferimento Oxy tale che all'istante $t=0$ il punto materiale si trovi nell'origine e che il piano xy contenga il vettore velocità istantanea del punto all'istante $t=0$. Proiettiamo le relazioni precedenti sui due assi cartesiani così scelti. Si ha:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{x0} + a_x t \\ v_y(t) = v_{y0} + a_y t \end{cases}$$

Sappiamo però che al tempo $t=0$ si ha $x_0=0$, $y_0=0$, $v_{x0}=v_0 cos\alpha$, $v_{y0}=v_0 sin\alpha$ e che $a_x=0$ e $a_y=-g$. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

Osserviamo che la componente x della velocità rimane costante durante tutto il moto.

Possiamo determinare l'istante dell'impatto t^* semplicemente imponendo che $x(t^*)=s$ ovvero che:

$$x(t^*) = s = v_0 \cos\alpha t^* \qquad \text{da cui} \qquad t^* = \frac{s}{v_0 \cos a} = 0.44s$$

All'istante dell'impatto l'altezza da terra sarà data da:

$$y(t^*) = v_0 \sin\alpha t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = 1.54m$$

La velocità della palla al momento dell'impatto sarà data dal vettore che ha componenti:

$$\begin{cases} v_x(t^*) = v_0 \cos\alpha = 5.66 m/s \\ v_y(t^*) = v_0 \sin\alpha - gt^* = -1.82 m/s \end{cases}$$

Dal momento che $v_y(t^*)<0$ si ha che la palla colpisce il muro con velocità che forma un angolo negativo con l'orizzontale, quindi nella fase discendente della traiettoria parabolica.

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 1.9 *Se la posizione di un corpo è espressa dall'equazione $x(t)=3t^3$, con x in metri e t in secondi, trovare:*

a) la velocità media e l'accelerazione media nell'intervallo da t=1 s a t=3 s;

b) *la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea a t=1 s e t= 3 s.*

Sol. a) 39 m/s, 36 m/s^2; b) 9 m/s, 81 m/s, 18 m/s^2, 54 m/s^2

ESERCIZIO 1.10 *Allo scattare del verde ad un semaforo, un'automobile parte con un'accelerazione costate a=2 m/s^2. Nello stesso istante un autocarro raggiunge e sorpassa l'automobile muovendosi ad una velocità costante di 12 m/s.*

a) A che distanza dal semaforo l'automobile raggiungerà l'autocarro?

b) *A che velocità starà viaggiando l'automobile in quell'istante?*

Sol. a) 144 m; b) 24 m/s

ESERCIZIO 1.11 *Un automobilista procede alla velocità di 60 Km/h quando si accorge di un ostacolo ad una distanza di 42 m e frena immediatamente. Dopo 5 secondi l'automobile urta l'ostacolo.*

a) Qual è stata la decelerazione dell'automobile?

b) A che velocità avviene l'urto?

Sol. a) 3.3 m/s^2; b) 0.2 m/s

ESERCIZIO 1.12 *Con quale velocità deve essere lanciata verso l'alto una palla per farla salire fino a 18 m?*

a) Per quanto tempo resterà in aria?

Sol. a) 18.8 m/s; b) 3.8 s

ESERCIZIO 1.13 *Un proiettile viene sparato orizzontalmente con una velocità di 200 m/s da un cannone situato ad un'altezza di 40 m.*

a) *Quanto tempo rimane in aria il proiettile prima di arrivare a terra?*
b) *A quale distanza dall'altura il proiettile tocca il suolo?*
c) *Qual è il modulo della componente verticale della velocità quando ciò avviene?*
d) *Qual è l'angolo formato dalla direzione del proiettile col suolo?*

Sol. a) 2.8 s; b) 560 m; c) 27.4 m/s; d) 7.8°

ESERCIZIO 1.14 *Un'aquila, in picchiata ad un angolo di 60° con la verticale, lascia cadere il topolino che teneva fra gli artigli da un'altezza di 400 m, e questo tocca il suolo dopo 8 secondi.*

a) *Qual è la velocità dell'aquila?*
b) *Qual è lo spostamento orizzontale del topolino?*
c) *Quali sono le componenti orizzontale e verticale della velocità del topolino un istante prima che tocchi terra?*

Sol. a) 21.6 m/s; b) 149.6 m; c) 18.721 m/s, 89.2 m/s

ESERCIZIO 1.15 *Una stazione spaziale ha la forma di una piattaforma rotante di diametro 160 m. L'accelerazione prodotta sul bordo della piattaforma è uguale all'accelerazione di gravità sulla luna, cioè g/6.*

a) *Quale deve essere la velocità angolare della piattaforma?*
b) *Quanto vale il periodo di rotazione?*

Sol. a) 0.14 rad/s; b) 44.9 s

ESERCIZIO 1.16 *Un bambino fa ruotare sopra la sua testa, a 1.8 m da terra, un sasso attaccato ad una corda lunga 1 m. La corda si spezza e la pietra schizza via orizzontalmente, andando a colpire il terreno a 10 m di distanza. Quanto valeva l'accelerazione centripeta durante il moto circolare?*

Sol. 272.2 m/s^2

ESERCIZIO 1.17 *Un proiettile viene sparato da terra con velocità iniziale di modulo pari a 100m/s inclinata di α=60° rispetto al suolo. Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare:*

a) la traiettoria;
b) l'altezza massima raggiunta dal proiettile;
c) la gittata;
d) il tempo di volo;
e) il valore di α che rende massima la gittata.

Sol. Traiettoria parabolica, 382.26m, 882.80m, 17.66s, 45°

ESERCIZIO 1.18 *Una pallina rotolando sul pianerottolo imbocca la scala con una velocità di 1.5 m/s. I gradini sono larghi 20 cm e alti 20 cm. Quale gradino viene colpito per primo dalla pallina?*

Sol. Il terzo

ESERCIZIO 1.19 *La velocità alla quale un uomo può far avanzare una barca a remi rispetto all'acqua ferma è di 5 km/h. a) Se l'uomo desidera attraversare un fiume raggiungendo il punto esattamente di fronte a quello di partenza (sull'altra sponda) in presenza di una corrente di 2.5 km/h, quale direzione deve dare alla barca? (si consideri il fiume orientato N - S, e la corrente diretta da N a S). b) Se il fiume è largo 5 km, quanto tempo impiegherà ad attraversarlo? c) Quanto tempo impiegherebbe a remare per 3 km in favore di corrente e poi tornare al punto di partenza? d) In quale direzione dovrebbe puntare l'imbarcazione per effettuare l'attraversamento nel minor tempo possibile? Calcolare tale tempo.*

Sol. a) 30° a nord rispetto alla direzione ortogonale alla sponda; b) $1^h 9'$; c) $1^h\ 36'$; d) in direzione ortogonale alla sponda, 1^h

ESERCIZIO 1.20 *Un'automobile viaggia alla velocità di 70 km/h su una strada pianeggiante. a) Quali sono l'accelerazione e la velocità del punto sul bordo esterno di una delle sue ruote, di diametro 64cm, più lontano da quello di contatto? b) Quali sono l'accelerazione e la velocità di un punto alla base del pneumatico? c)*

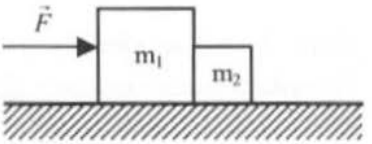
Quali sono l'accelerazione e la velocità del centro della ruota? Calcolare tutte le grandezze sia dal punto di vista (1) di un passeggero dentro l'auto che (2) di un osservatore sul bordo della strada su cui transita il veicolo.

Sol. a1) 1182 m/s^2, centripeta; 70 km/h, verso del moto; b1) 1182 m/s^2, centripeta; 70 km/h verso opposto al moto; c1) 0 m/s^2, 0 km/h; a2) 1182 m/s^2 centripeta, 140 km/h verso del moto; b2) 1182 m/s^2, centripeta; 70 km/h, verso del moto; c2) 0 m/s^2; 70 km/h, verso del moto

Capitolo 2

Dinamica del punto materiale

ESERCIZIO 2.1 *Due blocchi di massa m_1=4.0kg e m_2=2.0kg sono posti a contatto tra loro su un piano orizzontale che li sostiene e che non presenta attrito. Si applichi una forza orizzontale come in figura. Se l'intensità della forza è pari a F=6N, si determini la forza di contatto tra i due corpi. Mostrare che se la forza viene applicata in verso opposto al blocco di massa m_2 la forza di contatto è differente e darne il valore.*



SOLUZIONE

Il sistema costituito dai due blocchi è sottoposto alle forze descritte in figura. Oltre alla forza esterna $\vec{F}$ sono presenti due forze di contatto, interne al sistema di corpi, $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ che, per il principio di azione e reazione, sono uguali in modulo ma dirette in verso opposto.

Da un punto di vista qualitativo si ha che il corpo 1 viene accelerato dalla forza esterna $\vec{F}$ e decelerato dal corpo 2 che esercita una azione frenante tramite la forza di contatto $\vec{F}_1$; il corpo 1 esercita a sua volta la forza di contatto $\vec{F}_2$ sul corpo 2 che viene accelerato. I due corpi rimangono in contatto durante il moto che ne consegue e si muovono con la stessa cinetica, ovvero con pari accelerazione e velocità.

Quantitativamente si ha che il sistema dei due corpi è sottoposto alla forza totale:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$$

in cui le forze di contatto, uguali in intensità ed opposte in verso, si annullano tra loro. Di conseguenza l'equazione di Newton per il sistema si scrive:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} = m_{TOT}\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

dove $\vec{a}$ è l'accelerazione che caratterizza il moto di entrambi i corpi. Proiettata lungo un asse diretto come la forza $\vec{F}$ e orientato verso destra, essa si traduce nella relazione scalare:

$$F = (m_1 + m_2)a$$

da cui possiamo ricavare il valore dell'accelerazione cui sono sottoposti entrambi i blocchi. Si ha:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Possiamo ricavare la forza di contatto $\vec{F}_1$ concentrando la nostra attenzione sul solo corpo di massa m_1. L'equazione di Newton si scrive:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{a}$$

nella quale l'accelerazione $\vec{a}_1$ che subisce il corpo 1 è pari all'accelerazione $\vec{a}$ che abbiamo già calcolato. Proiettando sull'asse scelto precedentemente si ha:

$$F - F_1 = m_1 a = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

da cui si ricava il modulo di $\vec{F}_1$:

$$F_1 = F\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo i dati del problema si ha:

$$F_1 = 6N\frac{2kg}{4kg + 2kg} = 2.0N$$

La forza $\vec{F}_2$ ha modulo pari ad $\vec{F}_1$, stessa direzione e verso opposto. Essa è la causa del moto del corpo di massa m_2. Possiamo verificare che l'accelerazione che essa imprime è proprio pari all'accelerazione $\vec{a}$ che abbiamo calcolato per il sistema di due corpi. Scrivendo l'equazione di Newton per il corpo di massa m_2 si ha infatti:

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2$$

che, proiettando sull'asse parallelo al piano e sostituendo il valore del modulo di $\vec{F}_2$, dà:

$$F\frac{m_2}{m_1 + m_2} = m_2 a_2$$

da cui si ottiene:

$$a_2 = \frac{F}{m_1 + m_2} = a$$

Se la forza $\vec{F}$ viene applicata al corpo 2 nella stessa direzione ma in verso opposto, da destra con riferimento alla figura, il moto del sistema costituito dai due corpi sarà esattamente lo stesso, a meno del verso del moto. Tuttavia le forze di contatto hanno intensità differente. Intuitivamente è chiaro che il corpo 1 tenderà ad esercitare un'azione frenante maggiore quando viene accelerato dalla forza di contatto esercitata dal corpo 2, in quanto la sua inerzia (massa) è maggiore. Ne consegue che l'accelerazione con cui si muovono i due corpi ha verso opposto ma stessa direzione e stessa intensità del caso precedente. Scegliendo un asse di riferimento diretto come nel caso precedente ma orientato verso sinistra si ha:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Concentrando l'attenzione sulla dinamica del solo corpo 2 e ripetendo le considerazioni fatte in precedenza si ottiene:

$$F - F_2 = m_2 a = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

da cui si ricava:

$$F_2 = F \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo i dati del problema si ha:

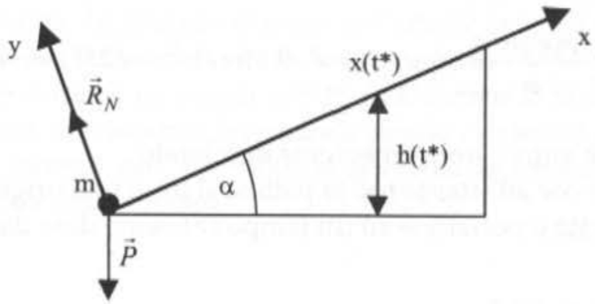
$$F_2 = 6N \frac{4kg}{4kg + 2kg} = 4.0N$$

Le forze di contatto sono in questo caso di intensità doppia, sempre dirette lungo la stessa direzione con verso opposto.

ESERCIZIO 2.2 *Una pallina di dimensioni trascurabili e massa m=20g viene lanciata lungo un piano inclinato in salita con velocità pari a v_0=10m/s. L'angolo* *di inclinazione del piano sia pari ad α=25°. Si calcoli il tempo necessario perché la pallina si fermi, la distanza percorsa dal momento del lancio e la variazione di posizione lungo la direzione verticale. Si trascurino tutte le forze di resistenza passiva.*

SOLUZIONE

Facciamo riferimento alla figura seguente in cui viene indicata la scelta del sistema di riferimento rispetto al quale misuriamo le grandezze cinetiche della pallina di massa m.



Durante il suo moto la pallina è sottoposta sia alla forza peso che alla reazione vincolare del piano. Per il secondo principio della dinamica avremo che:

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

Tale relazione può essere proiettata sui due assi coordinati x ed y, dando luogo alle due relazioni:

$$\begin{cases} -P\sin\alpha = ma_x \\ -P\cos\alpha + R_N = ma_y \end{cases}$$

Dalla seconda relazione, imponendo che $a_y=0$ dal momento che il vincolo impedisce al corpo di spostarsi lungo y, si ottiene:

$$-P\cos\alpha + R_N = 0$$

che permette di determinare l'intensità della forza di reazione vincolare:

$$R_N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

La prima relazione ci permette invece di determinare la cinetica del moto, dal momento che da essa si ricava il valore dell'accelerazione a_x:

$$a_x = \frac{-P\sin\alpha}{m} = \frac{-mg\sin\alpha}{m} = -g\sin\alpha = -9.81m/s^2\ \sin(25°) = -4.15m/s^2$$

Il moto lungo x è quindi uniformemente decelerato.

Assumendo che all'istante $t=0$ la pallina si trovi nell'origine e che abbia velocità v_0, velocità e posizione ad un tempo $t>t_0$ sono date da:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a_x t \\ x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{cases}$$

Il tempo necessario perché la pallina si fermi si può ricavare imponendo la condizione che ad un certo istante t^* la velocità sia nulla. Si ha:

$$v(t^*) = v_0 + a_x t^* = 0$$

da cui

$$t^* = -\frac{v_0}{a_x} = 2.41s$$

In tale tempo la pallina si sarà spostata nella posizione:

$$x(t^*) = v_0 t^* + \frac{1}{2} a_x t^{*2} = 12.05m$$

Lo spostamento verticale della pallina sarà dato da:

$$h(t^*) = x(t^*) \cdot sin(25°) = 5.09m$$

ESERCIZIO 2.3 *Un bambino fa roteare una pietra attaccata ad una funicella di moto circolare uniforme. La traiettoria sia contenuta in un piano verticale e sfiori appena il suolo nel punto O. Siano R=1m e ω=5rad/s il raggio e la velocità angolare della pietra. La funicella si rompe nell'istante in cui la pietra si trova nel semicerchio inferiore della traiettoria, in fase ascendente, e la funicella stessa forma con la direzione verticale un angolo α=60°. Determinare la distanza da O in cui atterrerà la pietra. Si trascurino le resistenze passive e la massa della funicella. Se la massa della pietra è pari a m=400g si determini la tensione esercitata dalla funicella prima che essa si rompa.*

SOLUZIONE

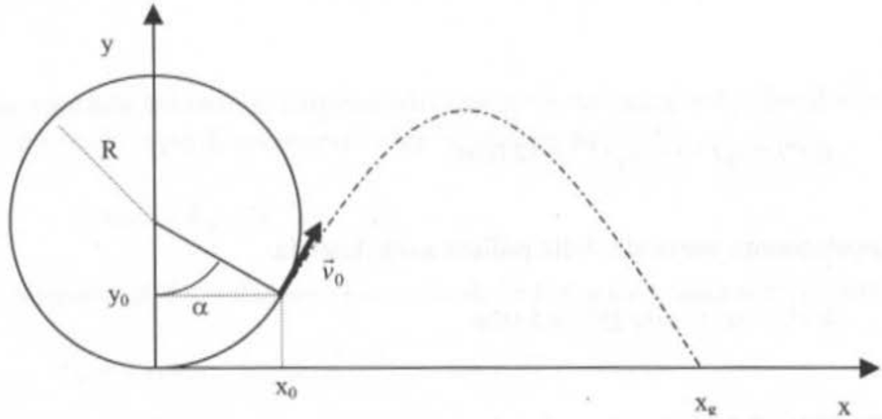
Prima della rottura della funicella la pietra si muove di moto circolare uniforme con velocità scalare pari a:

$$v_0 = \omega R = 5rad / s \cdot 1m = 5m / s$$

Al momento della rottura la velocità vettoriale ha modulo pari a v_0 forma un angolo $\alpha=60°$ con la direzione verticale come mostrato in figura. Poniamo $t=0$ al momento della rottura.

All'istante $t=0$ la posizione e la velocità della pietra hanno componenti date da:

$$\begin{cases} x_0 = R\,sin\,60° = 0.87m \\ y_0 = R - R\,sin\,60° = 0.5m \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_{ox} = v_0\,cos\,60° = 2.50m / s \\ v_{oy} = v_0\,sin\,60° = 4.33m / s \end{cases}$$



Per $t>0$ il moto della pietra è uniformemente accelerato con accelerazione che ha componenti:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g = -9.81 m/s^2 \end{cases}$$

Le equazioni orarie lungo le due direzioni x ed y saranno date da:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Possiamo imporre la condizione $y(t^*)=0$ per trovare l'istante $t^*>0$ in cui la pietra tocca il suolo. Avremo:

$$y_0 + v_{oy} t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0$$

che restituisce come unica soluzione positiva:

$$t^* = \frac{v_{0y}}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2y_0 g}{v_{0y}^2}}\right]$$

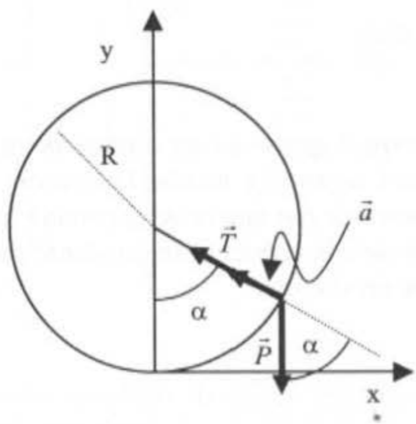
Numericamente otteniamo:

$$t^* = 0.99s$$

Sostituendo tale valore nella equazione oraria per la direzione x troveremo la coordinata x della pietra al momento dell'impatto, ovvero la distanza da O:

$$x_g = x(t^*) = x_0 + v_{0x}t^* = 0.87m + 2.50m/s \cdot 0.99s = 3.34m$$

La tensione esercitata dalla funicella negli istanti precedenti alla sua rottura può essere ricavata imponendo la condizione per cui la somma delle forze applicate alla pietra deve essere pari alla massa per l'accelerazione della pietra. Facendo riferimento alla figura che segue,



avremo che:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Proiettando tale relazione sulla direzione che congiunge il centro della traiettoria con la posizione della pietra al generico istante t, con verso uscente dal centro, avremo che:

$$-T + P\cos\alpha = -ma = -m\frac{v_0^2}{R}$$

dove abbiamo utilizzato il valore dell'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme. Si ottiene per la tensione l'espressione:

$$T = P\cos\alpha + m\frac{v_0^2}{R} = m\left[g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R}\right].$$

La tensione che si deve esercitare per mantenere la pietra in rotazione di moto circolare uniforme assume quindi valore massimo quando $\alpha=0$ (passaggio in basso) e minimo quando $\alpha=180°$ (passaggio in alto). Con i valori numerici del testo si ha:

$$13.92N > T > 6.08N$$

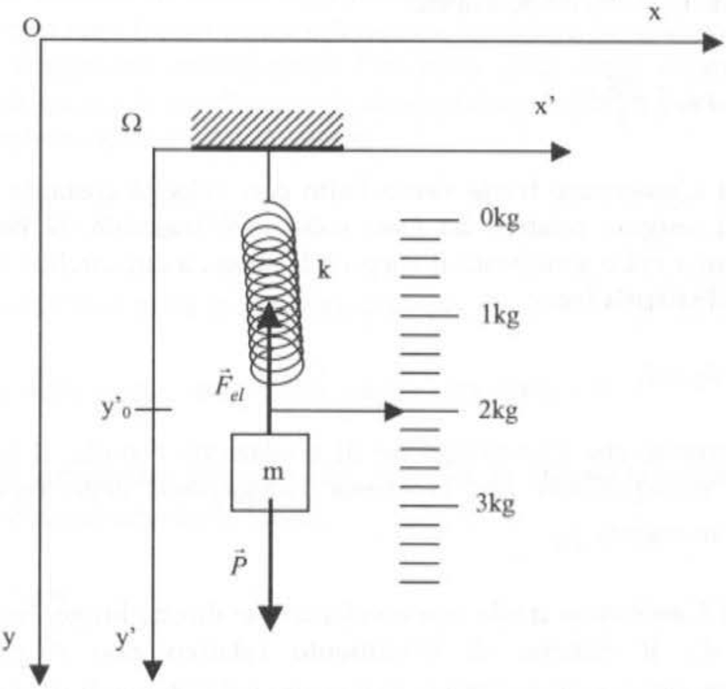
ESERCIZIO 2.4 *Un corpo è appeso ad un dinamometro fissato al soffitto di un ascensore. Il dinamometro segna 2kg mentre l'ascensore è fermo. Cosa indica il dinamometro se l'ascensore sale con una velocità costante pari a 4 m/s? Cosa indica invece se l'ascensore scende con accelerazione costante pari a 0.5m/s²? Qual è la forza che agisce sul corpo nei due casi?*

SOLUZIONE

Scegliamo un sistema di riferimento solidale con l'ascensore $\Omega x'y'$, che chiameremo relativo, in moto rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la terra Oxy, che considereremo inerziale e che chiameremo assoluto. In entrambe le condizioni citate nel problema il sistema relativo trasla rispetto a quello assoluto senza ruotare. Le leggi di trasformazione delle velocità e delle accelerazioni per sistemi in traslazione relativa danno:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t \end{cases}$$

dove i suffissi *a, r* e *t* si riferiscono rispettivamente alle grandezze



caratteristiche del sistema assoluto, di quello relativo e del moto del sistema relativo rispetto a quello assoluto.

Ad ascensore fermo, sia nel sistema fisso che in quello mobile, il corpo è fermo con accelerazione nulla in quanto la somma vettoriale della forza peso e della forza elastica della molla è nulla, come mostrato in figura:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{el} + \vec{P} = 0$$

Se supponiamo che la molla abbia lunghezza a riposo nulla, proiettando sull'asse y', si ha:

$$-ky'_0 + mg = 0$$

dove y_0 è l'elongazione della molla. Possiamo ricavare quindi di quanto è allungata la molla all'equilibrio:

$$y'_0 = \frac{mg}{k}$$

Caso 1) L'ascensore trasla verso l'alto con velocità costante rispetto alla terra. Il sistema relativo ad esso solidale è inerziale. Si ha che l'accelerazione a cui è sottoposto il corpo è la stessa a cui sarebbe sottoposto se fosse nel sistema fisso:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r$$

dal momento che l'accelerazione di traslazione è nulla. Il corpo rimane quindi in equilibrio per lo stessa elongazione della molla calcolata precedentemente y'_0.

Caso 2) L'ascensore trasla con accelerazione diretta lungo l'asse y verso il basso $\vec{a}_t$. Il sistema di riferimento relativo non è più inerziale. L'accelerazione a cui è sottoposto il corpo nel sistema di riferimento è pari a:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Se la molla rimanesse allungata della stessa quantità il corpo, sarebbe sottoposto nel sistema di riferimento relativo ad una accelerazione pari a:

$$\vec{a}_r = -\vec{a}_t$$

come se fosse sottoposto ad una forza, detta apparente, supplementare:

$$\vec{F}_{app} = m\vec{a}_r = -m\vec{a}_t$$

e si muoverebbe di moto rettilineo accelerato. Rispetto all'asse y' l'accelerazione relativa ha verso negativo come pure la forza apparente. Affinché il corpo resti fermo con accelerazione zero sarà necessario che la molla cambi lunghezza, modificando l'intensità della forza elastica per raggiungere di nuovo la condizione di accelerazione nulla in presenza di tale forza supplementare. Si dovrà avere:

$$\vec{F}'_{TOT} = \vec{F}'_{el} + \vec{P} + \vec{F}'_{app} = 0$$

che proiettata sull'asse y' dà la relazione scalare:

$$-k(y'_0 + \Delta y'_0) + mg - ma_t = -ky'_0 - k\Delta y'_0 + mg - ma_t = 0$$

Utilizzando la condizione per cui $-ky'_0 + mg = 0$ si ottiene la valutazione dell'ulteriore elongazione della molla:

$$\Delta y'_0 = \frac{-ma_t}{k}$$

ovvero la molla si comprime. Se per un'elongazione pari ad y'_0 corrisponde all'indicazione del dinamometro pari a 2kg, per la nuova posizione il dinamometro darà una lettura che si può ricavare con una semplice proporzione:

$$ky'_0 : 2kg = k(y'_0 + \Delta y'_0) : xkg$$

da cui:

$$x = \frac{2k(y'_0 + \Delta y'_0)}{ky'_0} = \frac{2ky'_0 + 2k\Delta y'_0}{ky'_0} = \frac{2mg - 2ma_t}{mg} = \frac{2(g - a_t)}{g}$$

la relazione ottenuta è dimensionalmente corretta e restituisce risultati coerenti in alcune situazioni limite. Se l'accelerazione di trascinamento è nulla si ha x=$2kg$ corrispondente alla lettura nel sistema di riferimento fermo. Se l'accelerazione è pari a g, ascensore in caduta libera, x=$0kg$, ovvero il corpo non esercita nessuna azione sulla molla che si porta ad elongazione zero. L'ultima situazione corrisponde agli esperimenti di simulazione di gravità zero in cui un aereo si lancia in picchiata sottoposto alla sola azione della gravità ed i passeggeri al suo interno perdono "apparentemente" il loro peso.

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

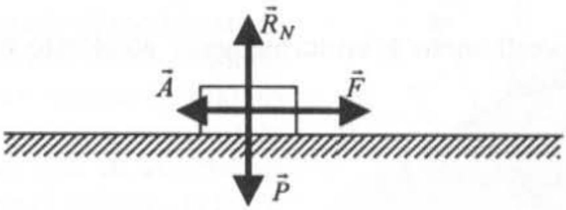
$$x = \frac{2kg(9.81m/s^2 - 0.5m/s^2)}{9.81m/s^2} = 1.90kg$$

Il dinamometro indica quindi un valore inferiore a quello ottenuto ad ascensore fermo od in moto uniforme. Se si prendesse tale lettura come indicazione della massa del corpo, si commetterebbe un errore (5%). Se invece si considera tale valore come risultato del rapporto tra la forza che deve esercitare la molla per contrastare tutte le altre forze per mantenere il corpo fermo e la massa del corpo, si evidenzia la presenza della forza apparente dovuta al moto accelerato di traslazione.

ESERCIZIO 2.5 *Si abbia un libro di massa pari a 400g appoggiato su un tavolo orizzontale. Siano* μ_s=0.54 *e* μ_d=0.31 *rispettivamente i coefficienti di attrito statico e dinamico tra libro ed tavolo. A partire dall'istante t=0, al libro viene applicata* *una forza $\vec{F}$ costante nel tempo diretta orizzontalmente. Si determini quale deve essere l'intensità minima della forza perché il libro si metta in moto ed il tempo necessario perché, una volta partito, esso raggiunga la velocità di modulo 20m/s. Determinare la distanza percorsa nell'intervallo di tempo trovato.*

SOLUZIONE

In figura mostriamo il diagramma delle forze che agiscono sul libro.



Fino a che il libro è in quiete sul tavolo il vincolo è in grado di esercitare una reazione vincolare normale uguale ed opposta alla forza peso ed una reazione tangenziale di attrito proporzionale al peso del libro. La forza di attrito ha modulo massimo pari a $F_{att}=\mu_s P$, è diretta lungo la stessa direzione della forza esterna $\vec{F}$, in verso opposto ad essa. Fino a che $\vec{F}$ non assume un intensità almeno pari a $\mu_s P$ la forza di attrito sarà quindi in grado di opporvisi e rendere nulla la forza totale applicata al libro ed il libro, sottoposto ad accelerazione nulla, resterà fermo. Si ha quindi:

$$F_{min} = \mu_s P = \mu_s mg = 0.54 \cdot 0.4kg \cdot 9.81m/s^2 = 2.12N$$

Una volta che il libro si mette in moto la forza di attrito è sempre diretta in verso opposto ad $\vec{F}$ ma ha modulo inferiore, pari a $\mu_d P=\mu_d mg$. Dal secondo principio della dinamica si ha:

$$\vec{F} + \vec{F}_{att} = m\vec{a}$$

che proiettata lungo un asse x diretto come le due forze dà:

$$F - \mu_d mg = ma$$

da cui ricaviamo l'accelerazione cui è sottoposto il libro:

$$a = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{2.12N - 0.31 \cdot 0.4kg \cdot 9.81m/s^2}{0.4kg} = 2.26m/s^2$$

costante nel tempo. Il moto è uniformemente accelerato e la velocità al generico tempo t vale:

$$v(t) = a \cdot t$$

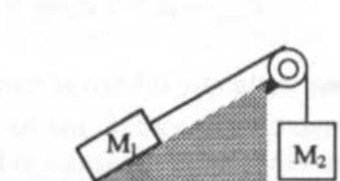
Ne consegue che il tempo t^* necessario affinché il libro acquisti velocità v è dato da:

$$t^* = \frac{v(t^*)}{a} = \frac{20m/s}{12.46m/s^2} = 8.85s$$

In tale tempo il punto si sarà spostato nella posizione:

$$x(t^*) = \frac{1}{2}at^{*2} = \frac{1}{2} \cdot 2.26m/s^2 \cdot (8.85s)^2 = 88.58m$$

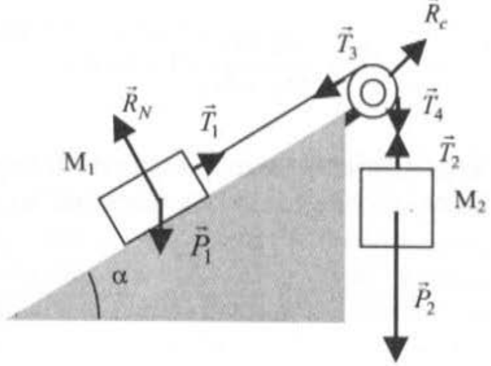
ESERCIZIO 2.6 *Un blocco di massa M_1=30 kg è appoggiato su un piano liscio inclinato di α=30° rispetto all'orizzontale. Il blocco è collegato tramite una fune, inestensibile e di massa nulla, ad un altro corpo di massa M_2=25kg che pende verticalmente. La fune può scorrere intorno all'angolo del piano grazie ad una carrucola senza*



attrito. Si calcoli l'accelerazione che subisce ciascuno dei due corpi. Si determini poi la tensione della fune.

SOLUZIONE

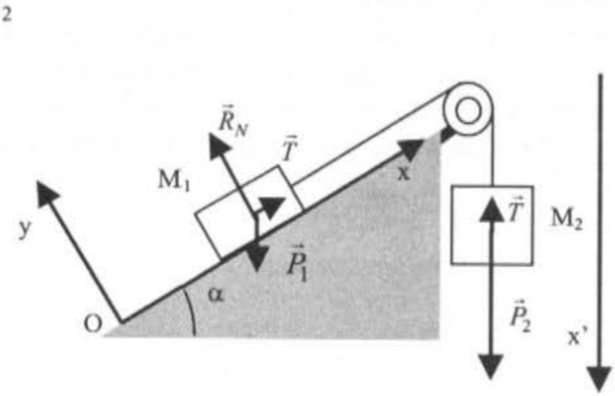
Il sistema di forze che agiscono sui corpi è riportato in figura. La carrucola viene in genere schematizzata come un dispositivo meccanico in grado di modificare la direzione di azione della tensione esercitata dal un vincolo (corda); in tal caso, e non è raro trovare tale condizione nei testi di esercizi di fisica, si omette di indicare le forze che qui abbiamo chiamato $\vec{T}_3$, $\vec{T}_4$ e $\vec{R}_c$ dal momento che la loro somma vettoriale è sempre nulla. Dal momento poi che la tensione esercitata da un vincolo è la stessa ai due capi (principio di azione e reazione) possiamo semplificare ulteriormente lo schema come indicato nella seconda figura, dove si è scelto anche un sistema di riferimento opportuno.



Per i due corpi possiamo scrivere rispettivamente le seguenti equazioni di Newton:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{T} = M_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{TOT} = \vec{P}_2 + \vec{T} = M_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Proiettando la prima relazione sull'asse x e la seconda sull'asse x' si ottiene:



$$\begin{cases} -P_1 sin\alpha + T = M_1 a_1 \\ P_2 - T = M_2 a_2 \end{cases}$$

Possiamo imporre la condizione $a_1=a_2$, che traduce il fatto che i due corpi si devono muovere con pari accelerazione e velocità in quanto il vincolo ne fissa la distanza, e ricavare il valore della tensione T della corda. Si ha:

$$T = g\frac{M_1 M_2}{M_2 + M_1}(1 + sin\alpha)$$

Possiamo utilizzare questo risultato per ricavare da una qualsiasi delle due relazioni precedenti il valore dell'accelerazione del corpo 2. Si ha:

$$a_2 = a_1 = \frac{P_2 - P_1 sin\alpha}{M_2} = \frac{M_2 g - M_1 g sin\alpha}{M_2} = g\frac{M_2 - M_1 sin\alpha}{M_1 + M_2}$$

Il risultato ottenuto è corretto dal punto di vista dimensionale. Esso conferma poi ciò ci aspettiamo intuitivamente in alcuni casi limite. Nel caso $\alpha=0$ i due corpi si muoverebbero con accelerazione $a = g\frac{M_2}{M_1 + M_2}$. Occorre però ricordare che si è considerato il piano senza attrito; se l'attrito non fosse nullo avremmo a minore di tale valore. Se fosse $\alpha=90°$ (corpi appesi alla carrucola), si avrebbe che l'accelerazione varrebbe $a = g\frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}$; tale caso descrive ad esempio il moto di un uomo che si getta da un balcone appeso ad una corda che passa attorno ad una carrucola ed al cui secondo estremo sia connesso un sacco pieno di sabbia di contrappeso. Nel caso $M_1=M_2$ l'ultima condizione si trasforma in $a=0$, ovvero i corpi resterebbero in quiete o in moto rettilineo uniforme (caduta con velocità costante).

Sostituendo i valori numerici dell'esercizio si ottiene:

$$a_1 = a_2 = \frac{9.81m/s^2}{25kg + 30kg}\left[25kg - 30kg \cdot sin(30°)\right] = 1.78m/s^2$$

con verso tale per cui la massa M_2 è accelerata verso il basso.

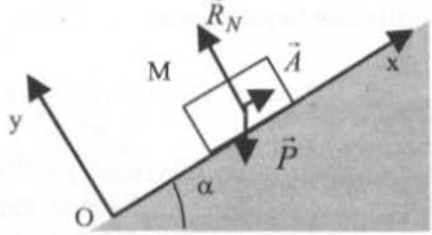
Si ha poi:

$$T = 9.81m/s^2 \frac{25kg \cdot 30kg}{25kg + 30kg}(1 + sin(30°)) = 200.7N$$

ESERCIZIO 2.7 *Uno studente di ingegneria vuole determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico tra una blocco ed un tavolo di legno. Egli appoggia il blocco di legno sul tavolo ed inclina quest'ultimo gradualmente. Nell'istante in cui il piano del tavolo forma un angolo di 30° rispetto ad un piano orizzontale il blocco inizia a muoversi e scivola per una distanza di 4.0m lungo l'asse in un intervallo di tempo pari a 4.0 s. Quanto valgono μ_s e μ_m?*

SOLUZIONE

Per inclinazioni del piano inferiori all'angolo per il quale si ha inizio del moto la forza di attrito esercitata dal piano riesce a contrastare la componente della forza peso lungo il piano ed a mantenere il blocco di legno in quiete. Nella situazione limite lo schema delle forze è quello indicato in figura. La forza di attrito assume il valore massimo che può prendere, dipendente dal valore della reazione vincolare normale. Si ha:



$$\vec{F}_{TOT} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{R}_N = 0$$

Proiettando sui due assi coordinati del sistema scelto si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} -Psin\alpha + A = -Psin\alpha + \mu_s R_N = 0 \\ -P\cos\alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

dalle quali, eliminando R_N possiamo ricavare il valore di μ_s. Si ottiene:

$$\mu_s = tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58$$

Nel momento in cui il blocco inizia a muoversi il coefficiente di attrito cambia e diventa pari a μ_d, coefficiente di attrito dinamico, sempre minore di μ_s. La forza di attrito sarà minore e si avrà accelerazione diversa da zero. Si ha:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{P} + \vec{A} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

che proiettata sull'asse x (l'unico lungo il quale può avvenire il moto) restituisce la relazione:

$$-Psin\alpha + A = -Psin\alpha + \mu_d R_N = ma_x$$

Sostituendo nella relazione precedente la condizione ottenuta proiettando lungo la direzione y, che non cambia rispetto al caso statico in quanto è sempre $a_y=0$, si ottiene:

$$a_x = \frac{P}{m}(\mu_d \cos\alpha - sin\alpha) = g(\mu_d \cos\alpha - sin\alpha)$$

Il corpo si muove quindi di moto uniformemente accelerato con l'accelerazione trovata e, a partire dall'istante iniziale in cui la velocità è nulla, percorre l'intervallo di spazio:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x \Delta t^2$$

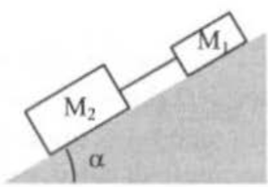
Estraendo a_x da quest'ultima relazione e sostituendo nella precedente possiamo ricavare il valore di μ_d. Si ha:

$$\mu_d = tg\alpha + \frac{2\Delta x}{g\Delta t^2 \cos\alpha}$$

La relazione conferma le nostre aspettative nel caso limite in cui si misuri che $\Delta x=0$ vale a dire se il corpo rimanga fermo; si avrebbe infatti $\mu_d=\mu_s$. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\mu_d = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2 \cdot (-4m)}{9.81m/s^2 \cdot (4s)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.52$$

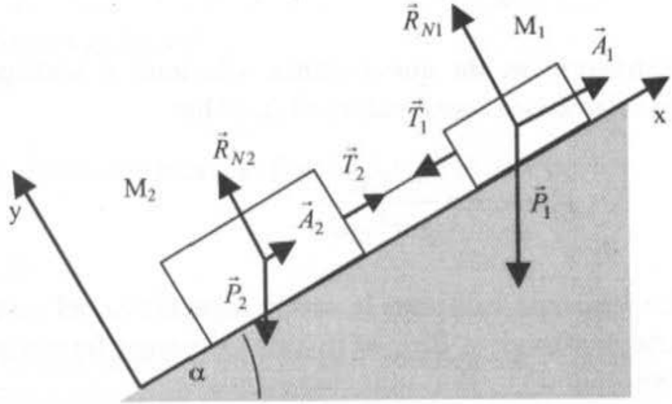
dove si è tenuto conto del fatto che lo spostamento subito dal blocco di legno è negativo.



ESERCIZIO 2.8 *Due corpi di massa M_1=1.65kg e M_2=3.3kg scivolano lungo un piano scabro inclinato di α=30° rispetto ad un piano orizzontale. Essi sono uniti tra loro da un'asta rigida di massa trascurabile parallela al piano inclinato. Il coefficiente di attrito dinamico del corpo 1 vale μ_{d1}=0.226, quello del corpo 2 vale μ_{d2}=0.113. Calcolare la tensione dell'asta che collega i due corpi e l'accelerazione (comune) cui sono sottoposti i due corpi. Dire se le risposte ai quesiti precedenti cambiano se i due corpi sono invertiti di posizione.*

SOLUZIONE

I corpi sono soggetti al sistema di forze schematizzato in figura. Si suppone che il vincolo sia in grado di esercitare tensione lungo la congiungente i due corpi, in modo da mantenere costante la loro distanza, ma che non possa esercitare forze lungo la direzione y. Per ognuno dei due corpi possiamo scrivere le relazioni:



$$\begin{cases} \vec{F}_1^{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{A}_1 + \vec{R}_{N1} + \vec{T}_1 = M_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{TOT} = \vec{P}_2 + \vec{A}_2 + \vec{R}_{N2} + \vec{T}_2 = M_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Dal momento che i due corpi sono vincolati essi subiranno la stessa accelerazione ($\vec{a}_1 = \vec{a}_2$). Proiettando entrambe le relazioni sulla direzione y otteniamo la condizione di equilibrio delle componenti y delle forze che ci permette di calcolare le intensità delle reazioni vincolari normali. Si ha:

$$\begin{cases} -P_1 \cos\alpha + R_{N1} = 0 \\ -P_2 \cos\alpha + R_{N2} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} R_{N1} = P_1 \cos\alpha \\ R_{N2} = P_2 \cos\alpha \end{cases}$$

Tali relazioni possono essere introdotte nelle relazioni che si ottengono proiettando le relazioni vettoriali sulla direzione x e imponendo che le accelerazioni dei due corpi siano uguali tra loro e pari ad a. Proiettando lungo x si ha:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + A_1 - T_1 = M_1 a \\ -P_2 \sin\alpha + A_2 + T_2 = M_2 a \end{cases}$$

e sostituendo:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + \mu_{d1} R_{N1} - T_1 = -P_1 \sin\alpha + \mu_{d1} P_1 \cos\alpha - T = M_1 a \\ -P_2 \sin\alpha + \mu_{d2} R_{N2} + T_2 = -P_2 \sin\alpha + \mu_{d2} P_2 \cos\alpha + T = M_2 a \end{cases}$$

dove si è fatto uso del fatto che le due tensioni hanno stessa intensità e verso opposto (T_1=T_2=T). Sommando le due relazioni così ottenute membro a membro possiamo ricavare:

$$-g(M_1 + M_2)\sin\alpha + g(M_1 \mu_{d1} + M_2 \mu_{d2})\cos\alpha = (M_1 + M_2)a$$

da cui si ottiene l'accelerazione dei due corpi:

$$a = -g\sin\alpha + g\frac{M_1 \mu_{d1} + M_2 \mu_{d2}}{M_1 + M_2}\cos\alpha$$

L'accelerazione può essere sostituita in una delle relazioni ottenute proiettando lungo y per ricavare la tensione. Si ha:

$$T = g\cos\alpha \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(\mu_{d1} - \mu_{d2})$$

Verifichiamo che tali relazioni restituiscono risultati plausibili in alcune condizioni limite. Se i coefficienti di attrito fossero entrambi nulli avremmo che l'accelerazione assume il valore $-g\ sin\alpha$, come nel caso del piano inclinato senza attrito e la tensione esercitata dal vincolo sarebbe nulla, mostrando l'inutilità del vincolo in quanto i corpi si muoverebbero comunque con pari accelerazione. Se uno dei due coefficienti, ad esempio μ_{d2}, è nullo il moto procede con accelerazione inferiore rispetto al caso senza attrito; T sarebbe positiva, ovvero per il verso degli assi che abbiamo scelto, il corpo 1 sarebbe tirato dalla tensione dell'asta verso il basso, mentre il corpo 2 ne verrebbe frenato. Il corpo due, senza attrito tenderebbe infatti a scendere con accelerazione maggiore di quella che hanno i due corpi vincolati in presenza di attrito sotto il primo. Il caso simmetrico in cui l'altro coefficiente d'attrito è nullo è analogo, con inversione delle forze vincolari.

Nel caso proposto dal testo del problema, sostituendo i valori numerici dati, si ottiene:

$$a = -9.81 m/s^2 sin 30° + 9.81 m/s^2 \frac{1.65kg \cdot 0.226 + 3.3kg \cdot 0.113}{1.65kg + 3.3kg} cos\,30° =$$

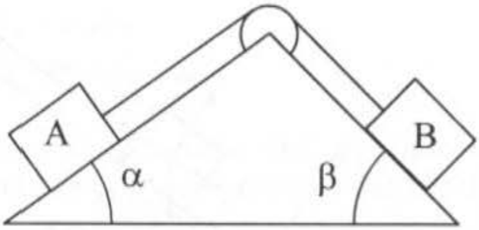
$$= -3.62 m/s^2$$

e

$$T = 9.81 m/s^2\ cos\,30° \frac{1.65kg \cdot 3.3kg}{1.65kg + 3.3kg}(0.226 - 0.113) = 1.06N$$

Ovvero i corpi sono accelerati verso il fondo del piano ed il vincolo trascina verso il basso il corpo 1 mentre trattiene verso l'alto il corpo 2.

Nel caso in cui i due corpi si invertissero di posizione si può verificare facilmente, ripetendo il procedimento, che l'accelerazione con cui si muovono sarebbe la stessa del caso precedente. La reazione esercitata dal vincolo cambierebbe di segno invertendo il comportamento che abbiamo brevemente discusso. Nel caso numerico citato l'accelerazione sarebbe sempre uguale mentre il corpo 1 sarebbe trattenuto dal vincolo verso l'alto mentre il corpo 2 sarebbe tirato dal vincolo verso il basso.



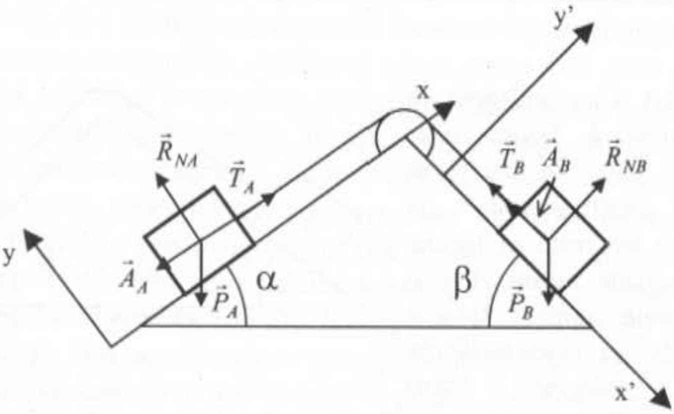
ESERCIZIO 2.9 *Una puleggia di massa trascurabile è fissata sullo spigolo tra due piani inclinati che formano angoli α=30° e β=45° con l'orizzonte, come mostrato in figura. Due corpi di uguale massa A e B (M_A=M_B=1kg) sono connessi tramite un filo inestensibile di massa nulla che passa sulla puleggia. Siano μ_{dA}= μ_{dB}=0.1 i coefficienti di attrito dinamico tra le masse A e B ed i piani inclinati. Si calcolino:*

1) *l'accelerazione con cui si muovono i due corpi;*
2) *la tensione esercitata dal filo.*

SOLUZIONE

Su ognuno dei due corpi agiscono le forze indicate in figura. L'equazione di Newton scritta per ognuno dei due corpi dà le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \vec{P}_A + \vec{R}_{NA} + \vec{A}_A + \vec{T}_A = M_A \vec{a}_A \\ \vec{P}_B + \vec{R}_{NB} + \vec{A}_B + \vec{T}_B = M_B \vec{a}_B \end{cases}$$



Occorre scegliere un sistema di riferimento su cui proiettare le relazioni per ottenere il valore delle incognite. E' conveniente scegliere due sistemi di riferimento indipendenti su cui proiettare ognuna delle due relazioni vettoriali, salvo poi raccordarli tra loro. Dal momento che il moto dei due corpi è vincolato dalla presenza del filo è conveniente scegliere i versi degli assi in modo tale che ad uno spostamento positivo del corpo A corrisponda uno spostamento positivo, uguale, del corpo B. La scelta degli assi è riportata in figura.

Proiettando le equazioni del moto vettoriali sugli assi si ottiene:

$$\begin{matrix} y) \\ x) \end{matrix} \begin{cases} -M_A g\cos\alpha + R_{NA} = 0 \\ -M_A g sin\alpha - A_A + T = M_A a_A \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y') \\ x') \end{matrix} \begin{cases} -M_B g\cos\beta + R_{NB} = 0 \\ -M_B g sin\beta - A_B + T = M_B a_B \end{cases}$$

Da ognuna delle relazioni ottenute proiettando lungo gli assi y ed y' si ricavano le espressioni per i moduli delle reazioni normali esercitate dal piano inclinato che, sostituite nelle relazioni ottenute proiettando lungo x ed x', danno luogo ad un sistema di equazioni nelle due incognite richieste dal problema. Si ha:

$$\begin{cases} -M_A g sin\alpha - \mu_{dA} M_A g \cos\alpha + T_A = m_A a_A \\ M_B g sin\beta - \mu_{dB} M_B g \cos\beta - T_B = m_B a_B \end{cases}$$

Il sistema si semplifica notevolmente se si ricorda che, per ipotesi, $M_A=M_B=M$ e $\mu_{dA}=\mu_{dB}=\mu_d$, che la condizione di inestensibilità del filo dà $\left|\vec{T}_A\right| = \left|\vec{T}_B\right| = T$ e che deve essere $a_A=a_B=a$, dal momento che la dinamica di A e B è la stessa a causa del vincolo costituito dal filo (Si noti che se si scegliessero i versi degli assi x ed x′ in modo discorde si avrebbe $a_A=-a_B$). Si ottiene:

$$\begin{cases} -Mg sin\alpha - \mu_d Mg \cos\alpha + T = Ma \\ Mg sin\beta - \mu_d Mg \cos\beta - T = Ma \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono come soluzione le espressioni per l'accelerazione comune dei corpi e la tensione del filo:

$$a = \frac{1}{2} g\left[sin\beta - sin\alpha - \mu_d(\cos\alpha + \cos\beta)\right]$$

$$T = \frac{1}{2} Mg\left[sin\alpha + sin\beta + \mu_d(\cos\alpha - \cos\beta)\right]$$

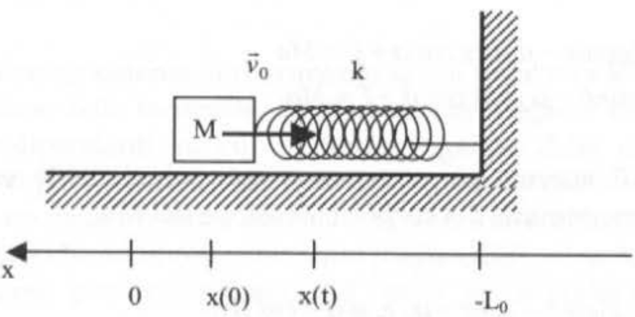
Sostituendo i dati del problema si ottengono i seguenti valori numerici:

$$a = 0.244 m/s^2$$
$$T = 6.0 N$$

ESERCIZIO 2.10 *Una molla di costante elastica k=10N/m e lunghezza a riposo L_0=50cm è appoggiata su un piano orizzontale e vincolata per un suo estremo ad una parete verticale. Un corpo di massa M=0.2kg è appoggiato sullo stesso piano ed è collegato al secondo estremo della molla. Un forza esterna agisce sul corpo lungo la direzione della molla e ne causa la compressione. Nel momento in cui la molla è compressa di una lunghezza Δl=5cm e la velocità del corpo è pari a v_0=0.4m/s la forza cessa di agire. Si determini il moto della massa M negli istanti successivi a quello in cui la forza cessa di agire sul corpo. Si trascuri l'attrito tra molla e piano e tra corpo e piano.*

SOLUZIONE

In assenza di resistenze passive, facendo riferimento alla figura, il moto



della massa M collegata alla molla è governato dall'equazione differenziale:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

in cui $x(t)$ è la posizione della massa M al generico tempo t e si è scelta come origine la posizione dell'estremo della molla a riposo.

Scegliamo l'origine dei tempi $t=0$ nell'istante in cui la forza esterna cessa di agire. Sappiamo che la soluzione di tale equazione differenziale è del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

con $\omega = \sqrt{k/M}$ e dove A e ϕ sono due costanti di integrazione che si possono determinare imponendo due condizioni iniziali. Dal momento che conosciamo il valore della posizione e della velocità di M al tempo $t=0$ possiamo determinare A e ϕ imponendo che:

$$\begin{cases} x(0) = A\cos(\phi) = x_0 \\ v(0) = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_0 = -A\omega\sin(\phi) = v_0 \end{cases}$$

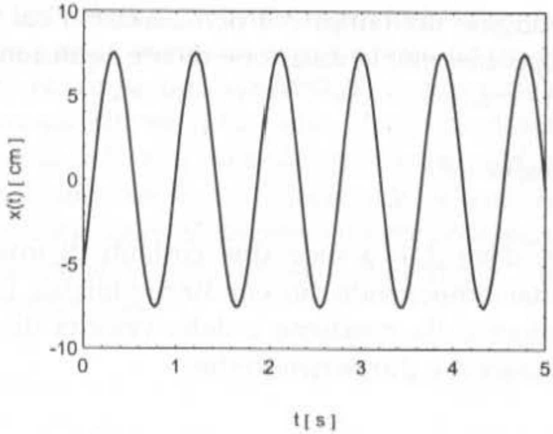
da cui otteniamo:

$$\phi = arctg(-\frac{v_0}{\omega x_0}) \qquad \text{e} \qquad A = \frac{x_0}{\cos\phi}$$

Con i dati del problema avremo:

$$\omega = 7.07 rad/s, \qquad \phi = 0.84 rad \qquad \text{e} \qquad A = -0.0755 m = -7.55 cm$$

La massa M oscillerà quindi intorno all'origine O seguendo la legge sinusoidale data con i valori trovati di ω, A e ϕ. L'andamento è riportato nel grafico che segue.

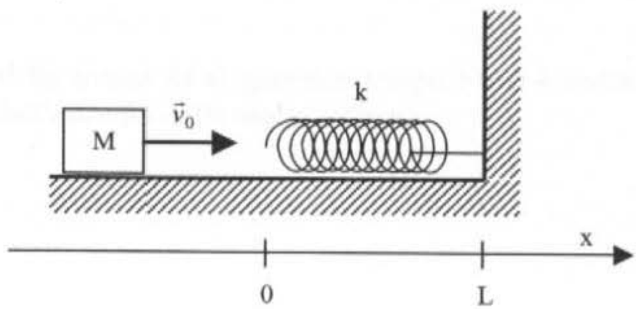


ESERCIZIO 2.11 *Un corpo di massa m=2kg si muove con velocità costante di modulo pari a 10m/s su un piano orizzontale. Ad un certo istante il corpo tocca l'estremo di una molla, di massa nulla, appoggiata sul piano ed inizialmente a riposo, il cui secondo estremo sia fissato ad un muro. Siano k=10^3 N/m ed L, rispettivamente la costante elastica e lunghezza a riposo della molla. L'asse della molla e la direzione della velocità iniziale del corpo siano paralleli e si trascurino tutte le forze di attrito o resistenza passiva. Calcolare:*

1) *La massima compressione ΔL della molla;*
2) *La velocità del corpo nel punto di massima compressione*
3) *La velocità del corpo nel momento in cui, respinto indietro, si distacca dalla molla.*

SOLUZIONE

Scegliamo un sistema di riferimento *Ox* parallelo alla direzione del moto del corpo nonché all'asse della molla. Poniamo



l'origine del sistema nel punto in cui si tro-va l'estremo libero della molla in condizioni di riposo. Nel momento in cui il corpo entra in contatto con la molla questa, comprimendosi, esercita una forza elastica diretta nel verso negativo dell'asse x che si oppone al moto del corpo. Si ha quindi decelerazione. Raggiunta la massima compressione della molla, in corrispondenza della quale la velocità del corpo risulta essere nulla, la forza elastica è anch'essa massima ed inizia ad accelerare il corpo nella direzione x negativa. Nel momento in cui la molla raggiunge la lunghezza a riposo la forza elastica è nulla, il corpo si distacca dalla molla e continua il moto rettilineo con velocità uniforme.

Durante tutto il tempo in cui corpo e molla restano in contatto il sistema può essere considerato come un oscillatore armonico. L'unica forza agente è quella elastica e l'equazione di Newton si scrive:

$$\vec{F} = -kx\hat{i} = m\vec{a}$$

Si noti che il sistema di riferimento è stato scelto in maniera opportuna in modo che il verso della forza sia sempre tale che essa punti verso l'origine. Proiettando l'equazione sull'asse x si ottiene:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Sappiamo che la soluzione di tale equazione differenziale lineare omogeneo del secondo ordine è data dalla funzione spostamento seguente:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

dove $\omega = \sqrt{k/m}$ e A e ϕ sono due costanti di integrazione che possono essere determinate imponendo che la posizione (funzione posizione) e velocità (derivata prima della funzione posizione) ad un tempo fissato assumano un determinato valore (condizioni iniziali). Nel nostro caso, scegliendo il riferimento dei tempi in modo tale che il contatto avvenga al tempo $t=0$, si hanno le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

che danno luogo alle seguenti condizioni su A e ϕ:

$$\begin{cases} x(0) = A sin(\phi) = 0 \\ \dot{x}(0) = A\omega\, cos(\phi) = v_0 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ A = \dfrac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

Ne consegue che, durante il contatto, il moto è descritto dalle espressioni:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega} sin(\omega t) \\ v(t) = v_0\, cos(\omega t) \end{cases}$$

La compressione massima della molla si ha quindi quando, per la prima volta dopo l'istante *t=0*, *sin(ωt)=1* (vale a dire per $\omega t_1 = \pi / 2$, $t_1 = \pi / 2\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{m/k} = 0.07s$) e vale:

$$\Delta L = x^{MAX} = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 10m/s\sqrt{\frac{2kg}{10^3 N/m}} = 0.45m$$

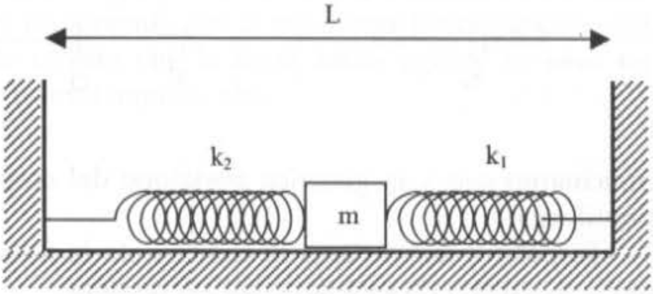
All'istante di massima compressione *cos(ωt)=0* e la velocità del corpo è nulla.

Al momento del distacco il corpo si trova di nuovo in $x=0$. In questo caso $sin(\omega t)=0$ (ovvero per $\omega t_2=\pi$, $t_2 = \pi / \omega = 2\sqrt{m/k} = 0.14s$) e la velocità vale:

$$v(t_2) = v_0 \cos(\pi) = -v_0$$

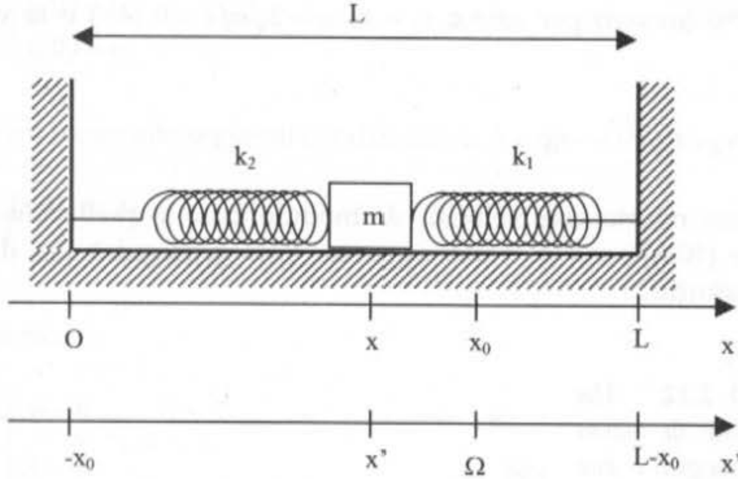
ossia il corpo riparte con velocità di modulo pari a quella che aveva inizialmente ($10 m/s$) ma di verso opposto. Esso proseguirà poi di moto rettilineo uniforme.

ESERCIZIO 2.12 *Un corpo materiale di massa $m=50kg$ è collegato a due molle disposte come in figura. Le molle hanno lunghezza a riposo nulla e costante elastica pari a $k_1=250N/m$ e $k_2=100N/m$. La distanza tra le pareti cui le molle sono fissate sia pari a $L=2m$. Si calcoli a quale distanza dalle pareti si dovrà posizionare il corpo materiale se si vuole che rimanga in tale posizione fermo (equilibrio stabile). Se a partire da questa posizione si dà una spinta al corpo esso si metterà in moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio; si determini il periodo di oscillazione. Si trascurino tutte le resistenze passive.*



SOLUZIONE

Il vincolo costituito dal piano farà in modo che il moto si svolga solamente lungo esso, lungo la direzione delle molle. Scegliamo un sistema di riferimento unidimensionale Ox come in figura.



Indichiamo con x la generica posizione del corpo di massa *m*, supposto puntiforme.

Rispetto a tale sistema di riferimento la forza elastica esercitata dalla molla di sinistra (2) sarà data dall'espressione:

$$\vec{F}_{el}^{(2)} = -k_2 x \cdot \hat{i} \; ,$$

avendo supposto che la molla abbia lunghezza a riposo nulla. Si osservi che per qualsiasi posizione del corpo la molla 2 eserciterà sempre una forza elastica diretta in verso opposto all'asse x. La forza elastica esercitata dalla molla di destra (1) sarà data dall'espressione:

$$\vec{F}_{el}^{(1)} = -k_1 (x - L) \cdot \hat{i} \quad ,$$

avendo supposto anche qui che la lunghezza a riposo sia nulla. Si osservi che per qualsiasi posizione del corpo la molla 1 eserciterà sempre una forza elastica diretta nel verso dell'asse x e che tale forza si annulla per $x=L$ (molla a riposo). La forza totale cui è sottoposto il corpo, avendo trascurato la forza peso e la reazione normale del piano che si compensano tra loro, sarà data da:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{el}^{(1)} + \vec{F}_{el}^{(2)} = -k_1(x-L)\cdot\hat{i} - k_2 x\cdot\hat{i} \quad .$$

Il secondo principio della dinamica stabilisce che l'accelerazione cui è sottoposto il corpo di massa m deve essere tale da soddisfare l'equazione:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{el}^{(1)} + \vec{F}_{el}^{(2)} = m\vec{a} \qquad \text{o} \qquad -k_1(x-L)\cdot\hat{i} - k_2 x\cdot\hat{i} = m\vec{a}$$

La posizione x_0 in cui il corpo materiale rimane fermo se vi viene lasciato in quiete si otterrà imponendo che in tale punto l'accelerazione del punto materiale sia nulla ovvero che la forza totale agente su esso sia anch'essa nulla. Dovremo quindi imporre che:

$$\vec{F}_{el}^{(1)} + \vec{F}_{el}^{(2)} = 0$$

e quindi che:

$$-k_1(x_0-L)\cdot\hat{i} - k_2 x_0\cdot\hat{i} = 0 \quad .$$

Proiettando l'ultima relazione sull'asse x si ha:

$$-k_1(x_0-L) - k_2 x_0 = 0,$$

da cui si ottiene:

$$x_0 = \frac{k_1}{k_1+k_2}L \; .$$

Con i dati forniti dal testo si ottiene che la distanza del punto di equilibrio dal muro di sinistra è pari a:

$$x_0 = \frac{250Nm}{250Nm + 100Nm} 2m = 1.43m \quad .$$

Se si sposta il corpo materiale da tale posizione di equilibrio e lo si lascia poi libero di muoversi esso sarà sempre sottoposto ad una forza che tende a riportarlo verso la posizione x=x_0. Il punto potrà ripassare nella posizione di equilibrio ma avendo velocità non nulla non vi rimarrà. Il moto sarà descritto dall'equazione di Newton in cui l'accelerazione può non essere nulla. Di nuovo si ha:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{el}^{(1)} + \vec{F}_{el}^{(2)} = m\vec{a} \qquad \text{che dà} \qquad -k_1(x-L)\cdot\hat{i} - k_2 x\cdot\hat{i} = m\vec{a} \; .$$

Proiettando tale relazione sull'asse delle x si ha:

$$-k_1(x-L) - k_2 x = a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

che ordinata può essere riscritta nella forma:

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = k_1 L$$

L'equazione differenziale ottenuta è quella di un moto armonico. Tuttavia vi compare un termine noto, con cui non abbiamo in genere dimestichezza, rispetto al caso dell'oscillatore armino classico. Sarebbe facile verificare (e lo studente è invitato a farlo) per sostituzione che la soluzione di tale equazione è del tipo:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

con A e ϕ costanti di integrazione da determinare tramite le condizioni iniziali e dove:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

A tale conclusione si può arrivare effettuando un cambiamento di sistema di riferimento dal sistema Ox ad un sistema Ωx', anch'esso fisso, con la medesima direzione e verso del precedente e che abbia origine nel punto di equilibrio $x=x_0$ trovato precedentemente (si veda la figura). La legge di trasformazione tra i due sistemi sarà data da:

$$x' = x - x_0$$

ed inoltre avremo che:

$$\ddot{x}' = \ddot{x} \quad .$$

Sostituendo tali relazioni nell'equazione differenziale e semplificando si ottiene:

$$m\ddot{x}' + (k_1 + k_2)x' = 0$$

che è la classica equazione dell'oscillatore armonico con costante elastica pari a $k_1 + k_2$ di cui sappiamo la soluzione. Sarà:

$$x'(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

con A e ϕ costanti di integrazione da determinare tramite le condizioni iniziali e dove:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Applicando la trasformazione di coordinate all'inverso si otterrà quindi che:

$$x(t) = x'(t) + x_0 = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

come detto precedentemente.

Sostituendo nella relazione che ci dà la pulsazione di oscillazione i dati numerici del testo si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{250Nm + 100Nm}{50kg}} = 2.65rad/s$$

da cui possiamo calcolare il periodo di oscillazione:

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6.28rad}{2.65rad/s} = 2.37s$$

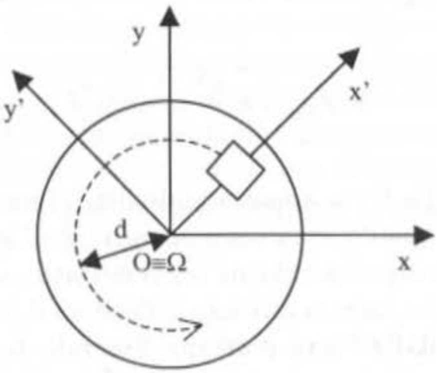
ESERCIZIO 2.13 *Un corpo è appoggiato su una piastra orizzontale che ruota attorno ad un asse verticale con velocità angolare dipendente dal tempo ω. Il corpo si trova ad una distanza dall'asse di rotazione pari a d=8cm. Nel momento in cui la velocità di rotazione raggiunge il valore ω_0=7rad/s il corpo, inizialmente in quiete, inizia a muoversi. Calcolare il coefficiente di attrito statico tra corpo e piano.*

SOLUZIONE

Descrivendo il moto in un sistema di riferimento *Oxy* fisso ed inerziale, il moto del corpo è circolare uniforme intorno al centro *O* della traiettoria fino a quando la forza di attrito riesce ad esercitare l'azione centripeta necessaria per mantenere il corpo sulla traiettoria circolare.

Per mantenere il corpo in rotazione intorno al punto *O* ad una distanza generica *r* da esso è necessario che sia presente una forza centripeta pari a:

$$\vec{F} = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{r}\hat{r} = -m\omega^2\vec{r}$$



diretta verso O (nella relazione si è fatto comparire il versore $\hat{r}$ del raggio vettore $\vec{r}$). Tale forza può essere esercitata dalla forza d'attrito tra il corpo ed il piano, che al massimo può avere l'intensità:

$$A = \mu_s R_N$$

ed è diretta verso il centro di rotazione O. Dal momento che il piano rotante è orizzontale la reazione normale sarà in modulo pari alla forza peso, $R_N=P=mg$, per cui:

$$\vec{A} = -\mu_s P\hat{r} = -\mu_s mg\hat{r}$$

Uguagliando le espressioni per le due forze, nel caso particolare in cui il corpo sia a distanza d da O ($|\vec{r}| = d$), si ottiene:

$$-m\omega^2 d = -\mu_s mg$$

da cui possiamo ricavare la condizione sul valore di μ_s affinché il corpo rimanga sulla traiettoria circolare:

$$\mu_s = \frac{\omega^2 d}{g} = \frac{7^2 \cdot 0.08}{9.81} = 0.40$$

Allo stesso risultato si perviene se si studia il moto in un sistema di riferimento che ruoti con velocità istantanea di rotazione ω insieme al piano. Tale sistema non è inerziale per cui il corpo è sottoposto all'azione delle forze reali (peso, reazione vincolare, attrito) e di forze apparenti. Nel sistema scelto la sola forza apparente che agisce è quella centrifuga, data da:

$$\vec{F}_{app} = m\frac{v^2}{r}\hat{r} = m\omega^2\vec{r}$$

La forza apparente dovuta al moto di traslazione dell'origine Ω è nulla in quanto essa resta sempre in O e la forza di Coriolis è nulla in quanto il corpo ha velocità nulla nel sistema relativo $\Omega x'y'$.
La forza centrifuga solleciterà il corpo in direzione radiale e sarà contrastata dalla forza d'attrito. Essendo fermo il corpo, la somma delle forze che agiscono su di esso deve essere vettorialmente nulla, in modo che anche l'accelerazione risulti nulla.

Forza peso e reazione vincolare del piano agiscono lungo la direzione verticale e si annullano tra loro portando alla condizione già citata:

$$R_N=P=mg$$

Forza centrifuga e forza d'attrito, dirette radialmente, devono equilibrarsi tra loro, per cui si ha:

$$\vec{F}_{app} + \vec{A} = 0$$

ovvero:

$$m\omega^2\vec{r} - \mu_s mg\hat{r} = 0$$

da cui, per distanza del corpo dall'origine pari a d, si ottiene la stessa condizione trovata precedentemente:

$$\mu_s = \frac{\omega^2 d}{g} = \frac{49rad^2/s^2 \cdot 0.08m}{9.81m/s^2} = 0.40$$

ESERCIZIO 2.14 *Un corpo sferico di raggio R=40cm e di massa M=80kg cade nell'atmosfera soggetto alla forza peso ed alla resistenza passiva dovuta all'aria, con coefficiente di resistenza passiva b=10kg/s. Dire se esiste una condizione limite per cui la velocità del corpo si mantiene costante, giustificando il risultato. In caso affermativo calcolare il valore della velocità limite. Supponendo che l'aria presenti un coefficiente b proporzionale al raggio della sezione presentata dai corpi in caduta dire quale deve essere la dimensione di un paracadute circolare perché, una volta aperto, rallenti la caduta fino ad una velocità massima pari a 3m/s.*

SOLUZIONE

1) Nel corso della caduta la dinamica del moto del corpo è determinata dall'equazione di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dove $\vec{F}$ è pari alla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul corpo in caduta. Esse sono la forza peso diretta verso il basso lungo la verticale e la forza di resistenza passiva dell'aria diretta in verso opposto alla velocità. Si ha:

$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v}$$

Dal momento che la caduta avviene lungo la verticale possiamo scegliere un sistema di riferimento *Oy* con asse diretto verso il basso. Proiettando l'equazione di Newton su tale asse si avrà:

$$mg - bv(t) = ma(t)$$

Immaginando che il corpo parta da una certa altezza con velocità nulla, esso subirà inizialmente un'accelerazione diretta verso il basso dovuta alla sola forza di gravità ($v=0$). Appena esso assumerà velocità, la forza di resistenza passiva tenderà a frenarlo (decelerarlo); tale forza frenante aumenterà man mano che la velocità di caduta aumenta fino a che, ad un certo istante, uguaglierà la forza peso e l'accelerazione del corpo sarà nulla; da tale istante in poi il corpo continuerà di moto rettilineo uniforme in quanto sottoposto sempre ad accelerazione nulla. Quindi la condizione per trovare la velocità limite si ottiene imponendo che l'accelerazione sia nulla:

$$a = g - \frac{bv_{LIM}}{m} = 0$$

da cui:

$$v_{LIM} = \frac{mg}{b}$$

Numericamente si ha:

$$v_{LIM} = \frac{80kg \cdot 9.81m/s^2}{10kg/s} = 78.5m/s = 283km/h$$

Si noti che se il corpo ad un certo istante avesse velocità di quella limite la resistenza passiva dell'aria sarebbe più intensa della forza peso ed il corpo verrebbe decelerato fino alla velocità limite.

2) Assumendo che il coefficiente di resistenza passiva è proporzionale al raggio della sezione presentata dai corpi in caduta si ha:

$$\frac{b}{b_{par}} = \frac{R}{R_{par}}$$

dove si è indicato con R_{par} il raggio della superficie presentata dal paracadute all'aria durante la caduta. La nuova velocità limite sarà data da:

$$v'_{LIM} = \frac{mg}{b_{par}} = \frac{mg}{b} \cdot \frac{R_m}{R_{par}}$$

da cui possiamo ricavare la condizione su R_{par}:

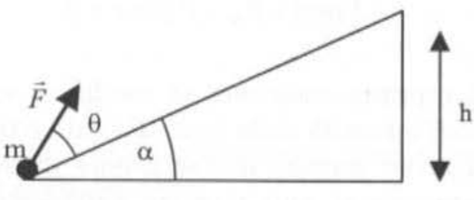
$$R_{par} = \frac{mg}{b} \cdot \frac{R_m}{v'_{LIM}}$$

Sostituendo i dati del problema si ha:

$$R_{par} = \frac{80kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot .4m}{10kg/s \cdot 3m/s} = 10.46m$$

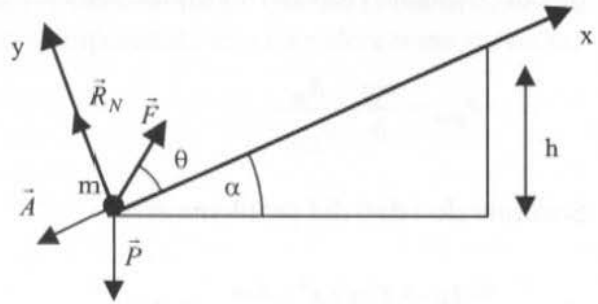
Nel ricavare tale condizione abbiamo supposto che la resistenza passiva presentata dal paracadute sia molto maggiore (per un fattore pari a $R_{par}/R \approx 26$) di quella presentata dal corpo stesso, che abbiamo trascurato.

ESERCIZIO 2.15 *Un corpo di dimensioni trascurabili e massa m=1kg è posto in quiete alla base di un piano inclinato. Il piano è inclinato di α=20° ed ha lato verticale pari a h=1m. A partire da un certo istante si applica al corpo una forza la cui direzione forma un angolo θ=30° con il piano inclinato ed il cui modulo è pari al minimo necessario per vincere la forza di attrito statico e mettere il corpo in movimento. Dati i coefficienti di attrito statico e dinamico μ_s=0.5 e μ_d=0.4, determinare il tempo che il corpo impiega per giungere alla sommità del piano.*



SOLUZIONE

1) Sul corpo di massa m agiscono le forze indicate in figura. Nella condizione limite in cui la forza F è meno intensa del valore necessario per mettere in moto il corpo, forza peso, reazione normale del vincolo, forza F ed attrito statico massimo si fanno equilibrio. Nella situazione limite si ha quindi:



$$\vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} + \vec{A}_{MAX} = 0$$

Proiettiamo la relazione vettoriale su un sistema di assi Oxy scelto in maniera opportuna. Si ha:

$$\begin{cases} F\cos\theta - P\sin\alpha - A_{MAX} = 0 \\ F\sin\theta + R_N - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

La prima relazione si modifica se ricordiamo che il massimo valore dell'intensità della forza d'attrito è proporzionale alla reazione normale del vincolo tramite il coefficiente di attrito statico; il valore della reazione normale si può ricavare dalla seconda espressione (si noti che questa equilibra sia la forza peso che la forza *F*). Si ha:

$$\begin{cases} F\cos\theta - P\sin\alpha - \mu_s R_N = 0 \\ R_N = P\cos\alpha - F\sin\theta \end{cases}$$

Possiamo sostituire l'espressione per R_N nella prima relazione ed ottenere la condizione sull'intensità della forza *F*. Abbiamo:

$$F\cos\theta - P\sin\alpha - \mu_s(P\cos\alpha - F\sin\theta) = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$F = \frac{P(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{mg(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}$$

La relazione che abbiamo ottenuto è dimensionalmente corretta. Inoltre restituisce il risultato che ci aspettiamo in alcune condizioni limite semplici ($\alpha=0$ oppure $\mu_s=0$). Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$F = \frac{1kg \cdot 9.81m/s^2(\sin 20° + 0.5\cos 20°)}{\cos 30° + 0.5\sin 30°} = 7.14N$$

2) Nel momento in cui il corpo si mette in moto, fissata F, il coefficiente di attrito assume un valore inferiore e la forza d'attrito diminuisce. Ne consegue che il corpo viene accelerato. Il moto del corpo sarà dettato dall'equazione di Newton:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} + \vec{A} = m\vec{a}$$

Lungo l'asse y non si ha moto in quanto il vincolo impone la condizione $y=0$. Proiettando l'equazione vettoriale sugli assi si ha:

$$\begin{cases} F\cos\theta - P\sin\alpha - A = ma \\ F\sin\theta + R_N - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

ed effettuando la solita sostituzione per l'intensità della forza d'attrito, considerando però che ora l'attrito è dinamico, si ha:

$$F\cos\theta - P\sin\alpha - \mu_d(P\cos\alpha - F\sin\theta) = ma$$

L'accelerazione, tutta diretta lungo *x*, a cui è sottoposto il corpo è pari a:

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) - mg(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)}{m}$$

Sostituendo i dati del problema si ottiene il seguente valore:

$$a = \frac{7.14N(\cos 30° + 0.4\sin 30°) - 1kg \cdot 9.81m/s^2(\sin 20° + 0.4\cos 20°)}{1kg} =$$
$$= 0.57m/s^2$$

Dal momento che all'istante iniziale il corpo si trova nell'origine con velocità nulla, la sua legge del moto sarà data da:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

da cui si ricava il tempo necessario per percorrere lo spazio $x(t)$:

$$t = \sqrt{2x(t)/a}$$

Essendo la lunghezza del piano inclinato pari ad $L=h/\sin\alpha$ il tempo necessario per percorrerla sarà dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a \cdot \sin\alpha}}$$

Si ha quindi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1m}{0.57m/s^2 \cdot \sin 30°}} = 3.2s$$

ESERCIZIO 2.16 *Tre molle, ciascuna di lunghezza riposo L=20cm, di massa trascurabile e di costanti elastiche k_1=15N/m, k_2=18N/m e k_3=28N/m, sono collegate fra loro in modo da formare un segmento che viene stirato fino alla lunghezza L=1.1m. Trovare la lunghezza di ciascuna molla in tali condizioni.*

SOLUZIONE

Vale il principio di azione e reazione e, in condizioni di equilibrio, la forza esercitata da una molla sulla molla vicina è uguale ed opposta a quella che la molla vicina esercita su di essa. Agli estremi del sistema le forze verranno compensate dalle forze di tensione esterne che mantengono le molle allungate. Se indichiamo con ΔL_i l'allungamento subito dalla molla i-esima si ha che i moduli delle forze elastiche devono essere uguali e la somma delle elongazioni ΔL_i deve essere pari all'elongazione totale ΔL:

$$\begin{cases} k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 = k_3 \Delta L_3 \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = \Delta L \end{cases}$$

Dividendo la prima relazione per k_1 si ottengono le relazioni:

$$\Delta L_1 = \frac{k_2}{k_1} \Delta L_2 = \frac{k3}{k_1} \Delta L_3$$

che fissano le ampiezze relative delle elongazioni ΔL_i.
Sostituendo nella seconda relazione a ΔL_2 e ΔL_3 le loro espressioni derivate in base alle relazioni appena ottenute si ha:

$$\Delta L_1 + \frac{k_1}{k_2} \Delta L_1 + \frac{k_1}{k_3} \Delta L_1 = \Delta L$$

Possiamo allora ricavare il valore di equilibrio di ΔL_1:

$$\Delta L_1 = \frac{k_2 k_3}{k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_2 k_1} \Delta L$$

Con i dati del problema si ha:

$$\Delta L_1 = \frac{18N/m \cdot 28N/m}{18N/m \cdot 28N/m + 15N/m \cdot 28N/m + 18N/m \cdot 15N/m} \cdot$$

$$\cdot (1.1m - 0.2m \cdot 3) = 0.21m$$

Procedendo in maniera analoga si possono ricavare le elongazioni delle altre due molle: Si avrà:

$$\Delta L_2 = \frac{k_1 k_3}{k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_2 k_1} \Delta L$$

e

$$\Delta L_3 = \frac{k_2 k_1}{k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_2 k_1} \Delta L$$

Da cui si ottiene:

$$\Delta L_2 = 0.18m$$

e

$$\Delta L_3 = 0.11m$$

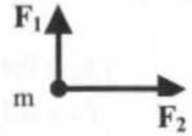
Si osservi che la somma numerica delle elongazioni delle molle è pari a 0.5m, ovvero all'allungamento totale del sistema di molle. Si osservi poi che la molla di costante elastica maggiore (la più rigida) si allunga di meno, mentre quella di costante elastica inferiore subisce il massimo allungamento. All'equilibrio si avrà quindi che le molle avranno lunghezze pari a:

$$\begin{cases} L_1 = 0.41m = 41cm \\ L_2 = 0.38m = 38cm \\ L_3 = 0.31m = 31cm \end{cases}$$

ESERCIZI CON RISULTATO

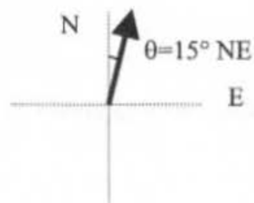
ESERCIZIO 2.17 *Ricavare il vettore accelerazione di un corpo di massa m sul quale agiscono due forze F_1 ed F_2, come mostrato in figura, se $m=3$ kg, $F_1=5$ N, $F_2=8$ N.*

Sol. 3.1 m/s², inclinata di 32° rispetto a F_2



ESERCIZIO 2.18 *Un aereo da turismo tiene una velocità, rispetto all'aria, di 600km/h. Il pilota vuole percorrere 900km in direzione nord, ma a causa del vento, l'aereo deve puntare a 15° NE (vedi disegno). Se il viaggio dura 2h, ricavare il vettore velocità del vento.*

Sol. 203 km/h, 40° OS



ESERCIZIO 2.19 *Una navicella spaziale percorre un'orbita circolare di raggio 3000 km alla velocità di 27000 km/h. Calcolarne a) la velocità angolare, b) l'accelerazione radiale, c) l'accelerazione tangenziale.*

Sol. a) 9 rad/h; b)18.75 m/s^2; c) zero

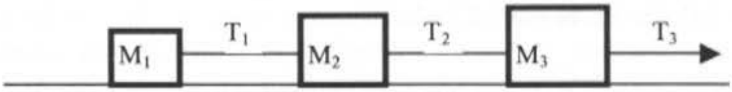
ESERCIZIO 2.20 *Un elettrone viene sparato, con velocità di 1.5×10^7 m/s, in una regione spaziale in cui è presente un campo elettrico, che esercita su di esso una forza verticale costante di 4×10^{-16} N. Sapendo che la massa dell'elettrone è di 9.1×10^{-31} kg, calcolare lo spostamento verticale dell'elettrone nel tempo che impiega ad avanzare orizzontalmente di 25 mm.*

Sol. 0.61 mm

ESERCIZIO 2.21 *Un blocco di massa 3 kg è trattenuto in quiete su un piano inclinato a 25° rispetto all'orizzontale da una fune attaccata ad una parete verticale. Calcolare a) la tensione della fune, b)la forza normale che agisce sul blocco e c) l'accelerazione del blocco se la fune viene tagliata.*

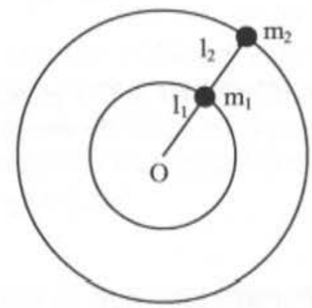
Sol. a) 12.4 N; b) 26.7 N; c) 4.15 m/s^2

ESERCIZIO 2.22 *Tre blocchi di massa M_1=5 kg, M_2=20 kg, M_3=25 kg poggiano su un piano orizzontale e sono collegati fra loro da una fune (vedi figura). Calcolare le tensioni T_1 e T_2 quando i corpi sono tirati verso destra con una forza T_3=50 N.*



Sol. T_1=5 N, T_2=25 N

ESERCIZIO 2.23 *Una massa puntiforme m_1 è attaccata ad un estremo di una corda avente lunghezza l_1 il cui altro estremo è fissato su di un piano orizzontale privo di attrito: la massa si muove di moto circolare uniforme su tale piano. Una seconda massa puntiforme m_2 è attaccata radicalmente alla prima tramite una corda di lunghezza l_2 e si muove anch'essa di moto circolare uniforme con la stessa velocità angolare di m_1. Noto il periodo T del moto, trovare la tensione t_1 e t_2 in ciascuna delle due corde. Entrambe le corde sono inestensibili e prive di massa.*

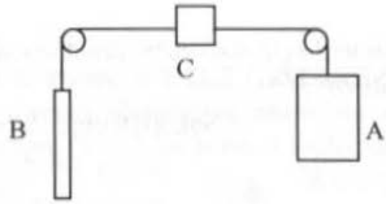


Sol. $\tau_2 = m_2\omega^2(l_1 + l_2)$, $\tau_1 = \omega^2[m_2(l_1 + l_2) + m_1 l_1]$, con $\omega = 2\pi/T$

ESERCIZIO 2.24 *Un paracadutista dopo il lancio è soggetto ad una accelerazione verso il basso di 2.3 m/s^2. Sapendo che la massa dell'uomo è di 75 kg e quella del paracadute di 3 kg, calcolare quanto vale a) la forza verso l'alto esercitata dall'aria sul paracadute e b) la forza verso il basso esercitata dall'uomo sul paracadute.*

Sol. a) 585 N; b) 562.5 N

ESERCIZIO 2.25 *Un ascensore è formato da una cabina A di massa 1000 kg, da un contrappeso B di massa 900 kg, dal sistema di guida C e dal cavo e pulegge, come in figura. Quando l'ascensore accelera verso l'alto di 2.5 m/s^2, calcolare a)* *quanto vale la tensione del cavo sul contrappeso, b) quella sulla cabina e c) qual è la forza esercitata sul cavo dal sistema di guida.*



Sol. a) 6.57×10^{3} N; b) 1.23×10^{4} N ; c) 5.73×10^{3} N

ESERCIZIO 2.26 *La scala graduata di un dinamometro è lunga 8 cm e segna da 0 a 12 kg. Determinare la massa di un carico che, appeso al dinamometro, lo fa oscillare con una frequenza di 2.5 Hz.*

Sol. 6 kg

ESERCIZIO 2.27 *L'estremo di una molla vibra con un periodo di 3 s quando ad esso è attaccata un massa m. Quando tale massa viene aumentata di 2.5 kg, il periodo diventa 5 s. Calcolare m.*

Sol. 1.4 kg

ESERCIZIO 2.28 *Si consideri una particella che si muove di moto armonico intorno alla posizione x=0, e per la quale all'istante t=0 sia x=0.28 cm. Se la frequenza del moto è di 0.25 Hz, determinare a) il periodo, b) la frequenza angolare, c) l'ampiezza, d) lo spostamento al tempo t, e) la velocità al tempo t, f) la velocità massima, g) l'accelerazione massima, h) lo spostamento all'istante t=3 s, i) la velocità per t=3 s.*

Sol. a) 4 s; b) $\pi/2$ rad/s; c) 0.28 cm; d) $[0.28\cos(\pi t/2)]$ cm; e) $[-0.44\ \mathrm{sen}\ (\pi t/2)]$ cm; f) 0.44 cm/s; g) 0.69 cm/s^2; h) 0; I) 0.44 cm/s

ESERCIZIO 2.29 *Un corpo di massa 3 g si trova su un disco che ruota alla velocità di 2 giri in 3.14 s. Calcolare: a) la velocità del corpo quando esso si trova, senza scivolare, ad una distanza di 4 cm dal centro del disco, b) il vettore accelerazione del corpo nel caso precedente e c) la forza di attrito agente sul corpo nella stessa situazione. Se il corpo vola via dalla piattaforma quando esso si trova a* *più di 20 cm dal centro del disco, d) qual è il coefficiente di attrito statico fra corpo e disco?*

Sol. a)16 cm/s; b) 64 cm/s^2, centripeta; c) 1.92×10^{-3} N; d) 0.33

ESERCIZIO 2.30 *Un corpo di massa m_1=3 kg poggiato su un piano inclinato di 35° rispetto all'orizzontale è collegato tramite una fune ad un corpo di massa m_2=1.5 kg poggiato su un piano orizzontale come in figura. Il piano inclinato è liscio, mentre il coefficiente di attrito fra m_2 e piano orizzontale è 0.46. calcolare a) la tensione della fune e b) l'accelerazione dei due blocchi.*

Sol. a) 10.1 N; b) 2.2 m/s^2

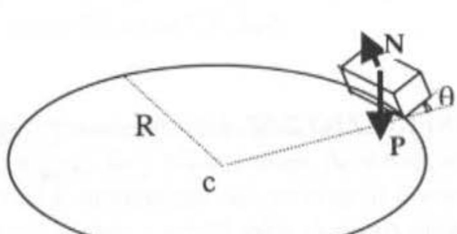
ESERCIZIO 2.31 *Un ragazzo trascina a velocità costante lungo un piano orizzontale una slitta di massa 5 kg. Calcolare la forza che il ragazzo deve esercitare sulla slitta mediante una fune che forma un angolo di 40° con il piano orizzontale, sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra slitta e suolo è 0.18.*

Sol. 10 N

ESERCIZIO 2.32 *a) Calcolare la più breve distanza entro la quale può fermarsi, senza azionare i freni, un'automobile che percorra una strada rettilinea ad una velocità di 80 km/h se il coefficiente di attrito statico fra pneumatico e strada è μ_s=0.55. b) Spiegare perché bisogna considerare il coefficiente di attrito statico.*

Sol. a) 46 m; perché il punto di contatto fra il pneumatico e la strada è sempre fermo.

ESERCIZIO 2.33 *Un'automobile percorre a velocità costante di 60km/h un tratto, di raggio di curvatura 150 m, di una pista orizzontale. a) Quale deve essere il minimo valore del coefficiente d'attrito fra pneumatico e strada affinché la macchina resti in pista? Nel caso che la pista sia ghiacciata, il coefficiente di attrito si riduce a zero. b)*



Calcolare il valore θ dell'angolo di cui deve essere sopraelevata la strada per garantire alla vettura la tenuta.

Sol. a) 0.19; b) $\theta \geq 10.7°$

ESERCIZIO 2.34 *Un blocco di massa M_1=2kg posto su una superficie orizzontale priva di attrito è collegato tramite una fune ad un blocco di massa M_2=1kg sospeso ad una puleggia. Trovare l'accelerazione del sistema e la tensione della fune.*

Sol. a_2=3.3 m/s² verso il basso; T=6.5 N

ESERCIZIO 2.35 *Un blocco di massa M_1= 25 kg, appoggiato su un piano liscio inclinato a 30° rispetto all'orizzontale, è collegato tramite una fune ad un altro corpo di massa M_2= 20 kg che pende verticalmente. La fune può scorrere intorno all'angolo del piano grazie ad una carrucola che si considera senza peso e senza attrito. Si calcoli l'accelerazione che subisce ciascuno dei due corpi. Si determini inoltre la tensione della fune.*

Sol. a_2=1.63 m/s² verso il basso, a_1=a_2; T=163.3 N

ESERCIZIO 2.36 *Su un tavolo senza attrito è appoggiata una massa m, collegata mediante una cordicella che passa attraverso un foro nel tavolo ad una massa M, che pende verticalmente. Trovare la velocità di rotazione per la massa m, se il suo raggio di rotazione è R=8 cm, affinché M resti ferma. Si pensi poi di aggiungere ad M una massa ΔM e di tirarla verso il basso fino alla posizione di equilibrio, mentre m continua a girare. Si calcoli la nuova velocità di m e la sua distanza dal buco sapendo che M=1.2 kg, m=10 kg, ΔM= 150 g.*

Sol. 9.7 m/s; 10 m/s; 7.8 cm

ESERCIZIO 2.37 *Una massa m=5 kg è appesa all'estremità libera di una molla (supposta di massa nulla e di lunghezza a riposo nulla) attaccata al soffitto. In questa situazione l'allungamento della molla è di 30 cm. Successivamente la massa viene tirata di altri 10 cm e quindi lasciata libera. Si calcolino a) la frequenza e b) l'accelerazione massima del moto oscillatorio.*

Sol. a) 5.71 rad/s; b) 3.26 m/s²

Capitolo 3

Lavoro ed Energia

ESERCIZIO 3.1 *Un punto materiale di massa m=1kg è vincolato a muoversi solamente lungo la direzione x. Esso è sottoposto ad una forza conservativa la cui energia potenziale è data dalla funzione $U(x)=\alpha x^2$, con α=5 J/m^2. Ad un certo istante il punto si trova nel punto di coordinate x_0=2m ed ha velocità positiva di modulo pari a v_0=4m/s. Si calcoli l'intervallo spaziale all'interno del quale si svolge il moto del punto (x_{min} ed x_{max}). Si disegni un grafico del valore della forza, in modulo e segno, esercitata sul punto in funzione della sua posizione.*

SOLUZIONE

Dal momento che l'unica forza che agisce sul punto materiale è conservativa varrà il principio di conservazione dell'energia meccanica. Si ha:

$$U + T = cost = E_0$$

Possiamo calcolare il valore dell'energia meccanica totale a partire dalle condizioni iniziali fornite dal problema al tempo t_0. Si ha infatti:

$$U[x(t_0)] + T[v(t_0)] = E_0$$

da cui, esplicitando le espressioni per U e T, possiamo ricavare E_0:

$$E_0 = \alpha x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Con i dati del problema si ha:

$$E_0 = 5J / m^2 \cdot 4m^2 + \frac{1}{2} 1kg \cdot 4^2 m^2 / s^2 = 28J$$

L'energia potenziale è quella di un oscillatore armonico con lunghezza a riposo della molla nulla. Si avrà quindi un moto armonico nel quale la posizione del punto oscilla tra due valori di x, massimo e minimo, uguali in modulo ed opposti in segno. In tali punti la velocità del punto è nulla e l'energia cinetica di conseguenza anche. Essi possono quindi essere determinati imponendo che l'energia del punto sia completamente potenziale. Si ha:

$$U(x_{MIN,MAX}) = E_0$$

che esplicitata permette di calcolare i valori $x_{MIN,MAX}$. Si ottiene:

$$\alpha x^2_{MIN,MAX} = E_0$$

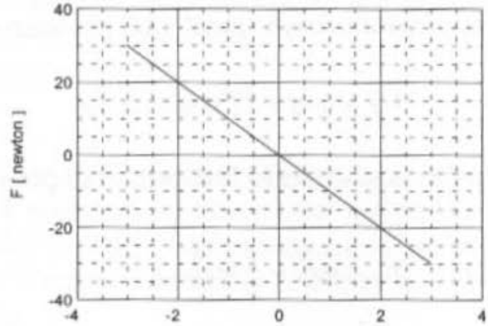
da cui:

$$x_{MIN,MAX} = \pm\sqrt{\frac{E_0}{\alpha}}$$

Si ottiene quindi:

$$x_{MIN,MAX} = \pm\sqrt{\frac{28J}{5J / m^2}} = \pm 2.37m$$

Il punto materiale oscilla quindi nell'intervallo $x \in [x_{MIN}, x_{MAX}]$.



La forza che agisce sul punto si ricava dall'energia potenziale dal momento che:

$$\vec{F} = -grad(U(x))$$

Dal momento che U è funzione della sola coordinata x, la forza avrà solo componente x, data da:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = -2\alpha x$$

Il grafico della forza è riportato in figura. La forza è positiva per valori di x negativi e negativa per valori di x positivi. Tende quindi ad accelerare il punto materiale verso l'origine del sistema di riferimento, dando così luogo al moto oscillatorio.

ESERCIZIO 3.2 *Un'automobile di massa m=1500kg che procede in piano su traiettoria rettilinea viene rallentata da una forza frenante costante. All'istante in cui ha inizio l'azione frenante la velocità è pari a 130km/h e la distanza percorsa successivamente è pari a 100m. Si calcoli l'intensità della forza frenante.*

SOLUZIONE

Possiamo utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, secondo il quale il lavoro compiuto dalla forza frenante sulla vettura è pari alla sua variazione di energia cinetica:

$$L = T_2 - T_1 = T_{fin} - T_{in}$$

Possiamo esplicitare l'espressione del lavoro effettuato dalla forza:

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dal momento che la forza frenante è diretta in verso opposto allo spostamento ed è costante in modulo, possiamo semplificare tale espressione:

$$L = -\int F ds = -F \int ds = -F\Delta s$$

Si ottiene quindi:

$$-F\Delta s = -T_{in}$$

essendo l'automobile nella situazione finale ferma. Esplicitando l'espressione dell'energia cinetica otteniamo:

$$F = \frac{T_{in}}{\Delta s} = \frac{mv_{in}^2}{2\Delta s}$$

Numericamente si ha:

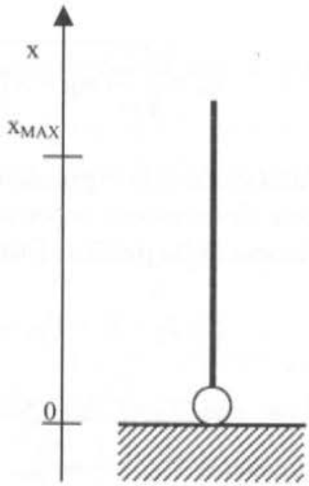
$$F = \frac{1500kg \cdot \left[130km/h \dfrac{1000m/km}{3600s/h}\right]^2}{2 \cdot 100m} = 9780N$$

dove si sono convertite le unita dei km/h in m/s nell'introdurre il valore della velocità iniziale.

ESERCIZIO 3.3 *Una pallina forata, di massa pari a 300g, è infilata su un'asta verticale ed è vincolata a muoversi scorrendo lungo essa. Ad un certo istante una forza esterna impulsiva (che agisce in un intervallo di tempo molto breve) fornisce alla pallina,*

inizialmente ferma alla base dell'asta, una quantità di moto diretta verso l'alto. La pallina raggiunge un'altezza massima pari a 0.3 m. Successivamente essa ricade e raggiunge la base dell'asta con una velocità di modulo 1.5m/s diretta verso il basso. Si calcoli la velocità iniziale della pallina e l'impulso fornito dalla forza che l'ha messa in moto. [Si consideri la forza d'attrito dinamico tra pallina ed asta come una forza di intensità costante diretta in verso opposto allo spostamento e si trascuri la resistenza viscosa dell'aria]

SOLUZIONE



Sulla pallina agiscono la forza peso e la forza di attrito, che per ipotesi è costante e diretta sempre in verso opposto al moto. Scegliamo un sistema di riferimento Ox come indicato in figura. Durante la fase di salita forza peso ed attrito sono entrambe dirette verso il basso, in verso opposto al verso dell'asse x. Possiamo sfruttare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica per cercare di ricavare la velocità iniziale. Si ha:

$$L = T_2 - T_1 = T_{fin} - T_{in}$$

dove T_{in} è l'energia cinetica alla base dell'asta e T_{fin} è quella in corrispondenza del punto di quota massima raggiunto dalla pallina. Per quanto riguarda il lavoro compiuto dalle due forze si ha:

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{x_{MAX}} (m\vec{g} + \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_0^{x_{MAX}} (-mg - A)ds =$$

$$= -(mg + A) \int_0^{x_{MAX}} ds = -(mg + A)x_{MAX}$$

dove si è tenuto conto che le forze sono dirette in verso opposto allo spostamento infinitesimo e che sono costanti in modulo durante il moto. Tale lavoro deve essere pari alla variazione di energia cinetica, ottenuta imponendo che $T_{fin}=0$:

$$L=-(mg+A)x_{MAX}=-T_{in}=-\frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Il modulo della velocità iniziale può essere ricavato dalla seguente relazione, ottenuta con rapidi passaggi dalla precedente:

$$v_{in}=\sqrt{\frac{2}{m}(mg+A)x_{MAX}}$$

Tuttavia in tale espressione l'intensità della forza d'attrito non è conosciuta. Essa deve essere determinata analizzando in modo equivalente la fase di discesa della pallina. Durante la discesa si ha infatti sempre che:

$$L=T_2-T_1=T_{fin}-T_{in}$$

dove ora $T_{in}=0$, essendo l'energia cinetica della pallina all'inizio della discesa, e $T_{fin}=\frac{1}{2}mv_{fin}^2$, con v_{fin} fornita come dato dal testo del problema. Per quanto riguarda il lavoro compiuto dalle forze il calcolo è analogo, con la sola differenza che in questo caso la forza peso, essendo diretta nel verso dello spostamento (diretto in basso), compie lavoro positivo. Si ha:

$$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_{MAX}}^{0} (m\vec{g} + \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_{MAX}}^{0} (-mg + A) ds =$$

$$= (-mg + A) \int_{x_{MAX}}^{0} ds = (mg - A) x_{MAX}$$

Uguagliando il lavoro alla differenza di energia cinetica si ottiene:

$$L = (mg - A) x_{MAX} = \frac{1}{2} m v_{fin}^2$$

dalla quale con rapidi passaggi si ottiene un'espressione da cui si può ricavare il valore dell'intensità della forza d'attrito:

$$A = m(g - \frac{1}{2} \frac{v_{fin}^2}{x_{MAX}})$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo:

$$A = m(g - \frac{1}{2} \frac{v_{fin}^2}{x_{MAX}}) = 0.3kg \left[9.81 m/s^2 - \frac{1}{2} \frac{1.5^2 m^2/s^2}{0.3m} \right] = 1.82N$$

Il valore ottenuto può essere inserito nell'espressione che avevamo ricavato precedentemente per la velocità iniziale della pallina. Si ottiene:

$$v_{in} = \sqrt{\frac{2}{m}(mg + A) x_{MAX}} = \sqrt{\frac{2}{0.3kg}(0.3kg \cdot 9.81 m/s^2 + 1.82N) \cdot 0.3m} = 3.09 m/s$$

Possiamo ricavare l'impulso fornito dalla forza che ha messo in moto la pallina, ricordando che l'impulso fornito da una forza è pari sempre alla variazione della quantità di moto del corpo cui essa viene applicata. Si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = p_2 - p_1 = \Delta p$$

Dal momento che la quantità di moto della pallina prima che la forza agisca su essa è nulla, l'impulso è pari alla quantità di moto immediatamente dopo l'azione della forza, ovvero:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = p_2 = m v_{in}$$

Si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = 0.3kg \cdot 3.09m/s = 0.927Ns$$

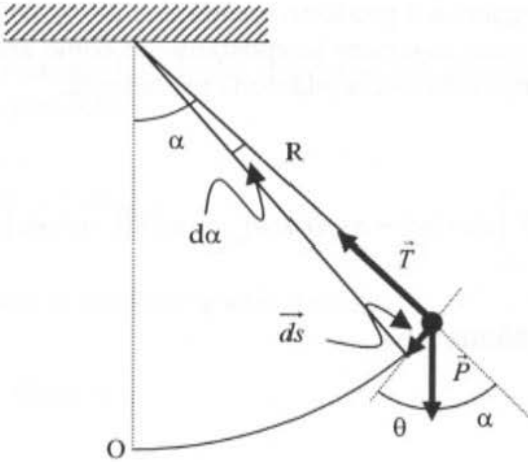
ESERCIZIO 3.4 *Un corpo materiale di massa m=350g è appeso mediante un filo inestensibile lungo R=1m e di massa nulla al soffitto. Il corpo viene spostato dalla posizione di equilibrio in modo che il filo, rimasto teso, formi un angolo α_0=45° con la verticale e viene poi lasciato con velocità iniziale nulla. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza peso e dalla tensione del filo dal momento di rilascio al momento in cui il corpo si trova nel punto più basso O della traiettoria. Si determini la velocità scalare e quella angolare del corpo nel punto O. Il moto è armonico?*

SOLUZIONE

Facciamo riferimento alla figura che segue per la soluzione del problema, in cui il corpo si trova in una generica posizione individuata dall'angolo α. Il lavoro compiuto dalla forza peso sarà dato dall'integrale:

$$L_P = \int_{\alpha_0}^{0} \vec{P} \cdot \overrightarrow{ds}$$

che può essere svolto secondo i seguenti passaggi.



$$L_P = \int_{\alpha_0}^{0} m \cdot g \cdot ds \cdot \cos\theta = mg \int_{\alpha_0}^{0} ds \sin\alpha$$

Il vettore spostamento infinitesimo $\overrightarrow{ds}$ ha modulo ds e direzione che coincide con la tangente alla circonferenza traiettoria. Esso può essere confuso con l'elemento di arco di circonferenza sotteso dall'angolo $d\alpha$. La relazione tra ds e $d\alpha$ è data dalla seguente espressione:

$$ds = -Rd\alpha$$

Il segno meno, che normalmente non compare e che può portare confusione, origina dal fatto che noi abbiamo considerato positivo lo spostamento disegnato in figura. In effetti, secondo la convenzione normalmente adottata, gli spostamenti lungo la traiettoria di un pendolo sono positivi se percorsi in senso antiorario e corrispondono ad un aumento dell'angolo α. Nel disegno avremmo dovuto disegnare un vettore di verso opposto e l'angolo θ sarebbe stato quello supplementare di quello indicato. Di conseguenza il prodotto scalare nell'integrale avrebbe cambiato segno. Conviene però assumere lo spostamento come abbiamo fatto salvo ricordarsi del segno meno nella relazione precedente.
Abbiamo:

$$L_P = -mgR\int_{\alpha_0}^{0} d\alpha \sin\alpha = mgR\cos\alpha\Big|_{\alpha_0}^{0} = mgR[1-\cos\alpha_0]$$

Con i dati del problema si ha:

$$L_P = 1.01J$$

Il lavoro compiuto dalla tensione durante lo spostamento è dato dall'espressione:

$$L_T = \int_{\alpha_0}^{0} \vec{T}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Esso è nullo perché tensione e spostamento sono sempre perpendicolari durante il moto ed il loro prodotto scalare è zero.

Il teorema delle forze vive (del lavoro e dell'energia cinetica) ci assicura che il lavoro delle forze applicate ad un corpo nel corso di un suo spostamento è pari al valore dell'energia cinetica finale del corpo meno quello dell'energia cinetica iniziale:

$$L = T_{fin} - T_{in}$$

Nel nostro caso l'unica forza che compie lavoro è quella peso e l'energia cinetica iniziale è nulla , essendo la velocità iniziale nulla. Si ha quindi:

$$L_P = \frac{1}{2} m v_{fin}^2$$

da cui possiamo ricavare la velocità del corpo nel momento in cui si trova sulla verticale del pendolo:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2L_P}{m}} = 2.40 m/s$$

La velocità angolare in tale istante sarà data da:

$$\omega = \frac{v}{R} = 2.40 rad/s$$

Il moto del pendolo semplice viene descritto in generale dalla equazione differenziale:

$$m\ddot{s} + mg \sin\theta = 0$$

in cui s è l'ascissa curvilinea e θ è l'angolo che il pendolo forma con la verticale. Utilizzando la condizione $\theta = s/R$ si ha:

$$m\ddot{s} + mg \sin\frac{s}{R} = 0$$

Se le oscillazioni sono piccole, vale a dire se il pendolo si discosta poco dalla verticale, possiamo approssimare il seno con l'argomento ed otteniamo l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico la cui soluzione è una funzione sinusoidale, quindi armonica. Normalmente si intende che le oscillazioni sono piccole, e che l'approssimazione è valida, se il seno e l'argomento possono essere usati indifferentemente a meno del 1%. Vediamo nel nostro caso, in cui al massimo $\alpha = 45° = 0.785rad$, l'errore percentuale che compiamo nel sostituire a sin(45°) il suo argomento (misurato in radianti). Si ha:

$$sin(45°) = 0.707$$

da cui possiamo ricavare l'errore percentuale che compiamo nella sostituzione:

$$\left|\frac{sin\,\alpha - \alpha(rad)}{sin\,\alpha}\right| = \left|\frac{0.707 - 0.785}{0.707}\right| = 0.11 = 11\%$$

L'errore è quindi maggiore del 1% ed il moto non sarà ben descritto dall'equazione differenziale semplificata. Esso sarà più complesso. Nonostante ciò, mediante il teorema delle forze vive, abbiamo potuto calcolare il valore esatto della velocità scalare nel minimo della traiettoria. Qui di seguito riportiamo una tabella in cui per ogni angolo viene riportato l'errore percentuale.

α (deg)	α(rad)	sinα	Errore percentuale
15	0.262	0.259	0.01
20	0.349	0.342	0.02
25	0.436	0.423	0.03
30	0.523	0.5	0.05
35	0.611	0.574	0.06

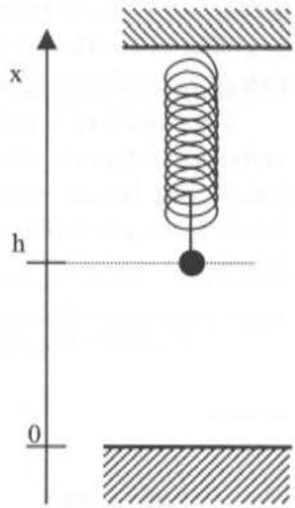
Ne consegue che quando l'angolo rimane sempre minore di 15° nel corso delle oscillazioni l'approssimazione dell'equazione sarà valida ed il moto sarà descritto bene (all'1%) da un andamento armonico.

ESERCIZIO 3.5 *Un corpo puntiforme di massa m=1kg è sospeso ad una molla a sua volta appesa ad un sostegno da cui pende verticalmente. In assenza del carico dovuto al punto materiale l'estremo libero della molla si trova ad un'altezza h=20cm da terra. Si determini il minimo valore della costante elastica della molla affinché il punto, lasciato andare dall'altezza h, non tocchi terra.*

SOLUZIONE

Nella figura viene riportato il sistema di riferimento Ox scelto per risolvere il problema. Dal momento che le due forze che agiscono sul punto, forza peso e forza elastica, sono entrambe conservative potremo usare la conservazione dell'energia meccanica.

L'energia elastica della molla può essere espressa tramite la formula:



$$U_{el}(x) = \frac{1}{2}k(x-h)^2$$

avendo scelto la costante in modo che se l'estremo della molla si trova nel punto di coordinata $x=h$ l'energia immagazzinata in essa è nulla. La forza elastica sarà quindi data dall'espressione:

$$F_{el} = -\frac{dU_{el}}{dx} = -k(x-h)$$

Si noti che essa è diretta sempre in modo da riportare l'estremo della molla verso la posizione $x=h$.

L'energia potenziale della forza peso è invece data da:

$$U_{peso}(x) = mgx$$

avendo scelto la costante in modo che l'energia potenziale sia zero nel punto di coordinata $x=0$. La forza peso sarà data da:

$$P = -\frac{dU_{peso}}{dx} = -mg$$

ed è diretta sempre verso il basso.

L'energia potenziale totale del punto materiale sarà data quindi da:

$$U_{tot}(x) = \frac{1}{2}k(x-h)^2 + mgx$$

L'energia meccanica è data sempre dalla somma $U_{tot}+T$. Se il punto materiale viene lasciato da h con velocità iniziale nulla esso verrà prima accelerato verso il basso e poi decelerato. Se si vuole che non tocchi il suolo, in $x=0$ la velocità è di nuovo nulla ed il verso del moto si inverte. Quindi in $x=h$ ed in $x=0$ l'energia cinetica sarà nulla.

Per risolvere il problema dobbiamo imporre la condizione che il punto materiale, appeso alla molla, stia fermo nella posizione $x=0$. In queste condizioni la sua energia meccanica è pari alla sola energia potenziale e deve essere pari all'energia potenziale del punto fermo nella posizione $x=h$. Si ottiene:

$$U_{tot}(0) = U_{tot}(h)$$

ovvero:

$$\frac{1}{2}kh^2 = mgh$$

da cui possiamo ricavare il valore della minima costante elastica necessaria affinché il punto non tocchi terra:

$$k = \frac{2mg}{h}$$

Sostituendo i valori numerici del testo del problema abbiamo:

$$k = \frac{2 \cdot 1kg \cdot 9.81m/s^2}{0.2m} = 98.1N/m$$

ESERCIZIO 3.6 *Un punto materiale si muove lungo una retta sotto l'azione di una forza elastica di richiamo F = - kx. Il moto del punto sia armonico con elongazione massima pari ad A=3cm. Si calcoli la distanza x dall'origine alla quale l'energia cinetica uguaglia l'energia potenziale, assumendo che l'energia potenziale sia nulla in x=0.*

SOLUZIONE

La forza che agisce sul punto è conservativa e l'energia meccanica si conserva durante il suo moto. Sarà:

$$U + T = cost = E_0$$

Il valore E_0 può essere calcolato dalla conoscenza della massima elongazione del moto. Nel punto di massima elongazione l'energia cinetica è infatti nulla in quanto la velocità del punto è nulla. Si ha:

$$\frac{1}{2}kA^2 = E_0$$

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha:

$$\frac{1}{2}kx^2 + T = E_0 = \frac{1}{2}kA^2$$

che nel caso in cui energia potenziale e cinetica siano uguali restituisce la:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Dopo rapidi passaggi si ottiene:

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3cm}{\sqrt{2}} = \pm 2.12cm$$

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 3.7 *Calcolare l'accelerazione impressa ad un corpo di massa 2 kg da una forza costante che lo solleva verticalmente di 1 m producendo un lavoro di 78.5J.*

Sol. 29.4 m/s^2

ESERCIZIO 3.8 *Calcolare la potenza sviluppata dal motore di una macchina di massa 1 ton che si muove con velocità costante 36 km/h a) su una strada piana, b) lungo una salita di pendenza 1/20, c) lungo una discesa di pendenza 1/20. Si consideri la presenza dell'attrito dinamico con coefficiente μ_d=0.07.*

Sol. a) 6.9 kW; b) 11.8 kW ; c) 1.96 kW

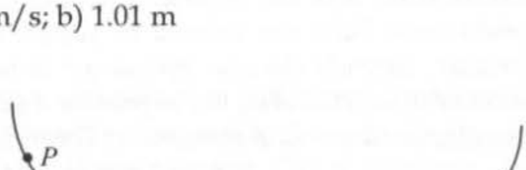
ESERCIZIO 3.9 *Un oggetto di massa 6 g viene lanciato verso il basso da un'altezza di 200 m con velocità iniziale 15 m/s. Arrivato al suolo, esso penetra nella sabbia per 30 cm. Calcolare la forza media esercitata dalla sabbia sull'oggetto.*

Sol. 41.4 N

ESERCIZIO 3.10 *La cabina di un ascensore, di massa 2200 kg, si trova ad un'altezza h=3 m da una molla di attenuazione, di costante elastica k= 1.3×10^5 N/m. Ad un certo punto, il cavo di sospensione si rompe, e la cabina viene frenata durante la discesa da un sistema di sicurezza capace di sviluppare una forza d'attrito costante pari a 5000 N. a) calcolare la velocità della cabina immediatamente prima di urtare la molla. b) Calcolare di quanto si è compressa la molla.*

Sol. a) 6.72 m/s; b) 1.01 m

ESERCIZIO 3.11 *Una slitta percorre una pista della forma in figura, in cui la parte piana è*



lunga 4 m. Se la slitta viene lasciata andare dal punto P posto 1.2 m al di sopra della parte piana, dove si fermerà la slitta, supponendo che lungo le curve non ci sia attrito e che il coefficiente d'attrito nella parte piana sia 0.2?

Sol. Al centro del tratto piano

ESERCIZIO 3.12 *Un blocco di massa 3 kg si trova a contatto con una molla di costante elastica 110 N/m. Comprimendo la molla di un tratto s e quindi rilasciandola, il corpo viene lanciato su un piano orizzontale con coefficiente di attrito 0.22, e dal momento in cui si stacca dalla molla percorre 6 m. Calcolare a) l'energia cinetica massima del blocco e b) la compressione iniziale della molla. Si trascuri l'attrito nella fase di elongazione della molla.*

Sol. a) 38.8 J ; b) 84 cm

ESERCIZIO 3.13 *Un pendolo semplice di lunghezza 1 m e massa m ha velocità v_0=3 m/s quando la fune forma un angolo di 20° con la verticale. Determinare a) la velocità di m quando essa passa per la posizione più bassa; b) il minimo valore di v_0 necessario perché la fune raggiunga la posizione orizzontale durante il moto.*

Sol. a) 3.19 m/s; b) 4.29 m/s; c)

ESERCIZIO 3.14 *Un blocco di massa 4 kg viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato a 30° rispetto ad un piano orizzontale con velocità iniziale 4.8 m/s. Dopo aver percorso 1.4 m, il blocco si ferma, inverte il moto e torna alla base del piano inclinato. Calcolare a) la forza di attrito (costante) che agisce sul blocco e b) la velocità con cui esso ripassa alla base del piano.*

Sol. a) 13.3 N; b) 2.1 m/s

ESERCIZIO 3.15 *Un pendolo semplice di massa 1.5 kg e lunghezza 3 m viene spinto verso l'alto con velocità v_0 quando esso forma un angolo di 60° con la verticale. Sapendo che esso ripassa per la posizione in basso con velocità 6 m/s, calcolare a) la velocità v_0, b) l'angolo che il pendolo formerà con la verticale quando l'oscillazione arriverà al massimo, c) l'energia meccanica totale del pendolo.*

Sol. a) 2.6 m/s; b) 67°; c) 26.9 J

Capitolo 4

Conservazione dell'energia e della quantità di moto

ESERCIZIO 4.1 *Un ragazzo allunga l'elastico della propria fionda di 10 cm per lanciare una pietra di massa m=20g. A quale velocità sarà lanciata? Si sappia che per allungare la fionda di 1cm è necessario applicare una forza pari a 10N. Si trascuri la resistenza dell'aria.*

SOLUZIONE

Dalla seconda parte del testo dell'esercizio è possibile ricavare il valore della costante elastica dell'elastico della fionda. Se infatti è necessario che il ragazzo applichi una forza di *10N* per mantenere l'elastico allungato ciò vuol dire che la forza esercitata dall'elastico in modulo vale *10N* ed è diretta in verso opposta a quella esercitata dal ragazzo. Si ha infatti che la forza esercitata da una molla di lunghezza a riposo x_0 è pari a:

$$\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{i} = -k\Delta x\hat{i}$$

se l'allungamento avviene lungo la direzione x. Proiettando l'equazione vettoriale lungo l'asse e sostituendo i valori $F=10N$ per $\Delta x=1cm$ si ottiene:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{10N}{0.01m} = 10^3\, N/m$$

Per trovare la velocità di partenza del sasso è sufficiente imporre la condizione di conservazione dell'energia meccanica durante la fase di accelerazione del sasso dovuta alla forza elastica. Ciò è possibile dal momento che l'unica forza che agisce sul corpo, quella elastica, è conservativa. Si ha:

$$T^{in} + U_{el}^{in} = T^{fin} + U_{el}^{fin}$$

dove l'energia cinetica iniziale è nulla (T^{in}) mentre l'energia potenziale elastica al momento del distacco della pietra dall'elastico è nulla (U_{el}^{fin}). Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_{fin}^2$$

da cui:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x$$

Numericamente si ottiene per la velocità di partenza del sasso il valore:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{10^3 N/m}{0.02kg}} \cdot 0.1m = 22.36m/s$$

ESERCIZIO 4.2 *Una granata che sta volando alla velocità di 10m/s esplode in due frammenti. Il frammento più grande, che possiede il 60% della massa iniziale della granata, continua a muoversi nella stessa direzione e verso precedente all'esplosione con velocità pari a 25m/s. Si trovi la velocità del frammento più piccolo.*

SOLUZIONE

Durante l'esplosione, sui due pezzi di granata agiscono forze interne al sistema e la forza peso esterna. L'esplosione ha una durata estremamente breve e l'intensità delle forze interne è molto maggiore di quella della forza peso. Possiamo ritenere quindi che il lavoro compiuto dalla forza peso durante l'esplosione sia trascurabile ovvero che possiamo trascurare l'effetto della forza peso stessa. Sotto tale ipotesi il sistema costituito dai due frammenti di granata è sottoposto a sole forze interne. Ne consegue che la quantità di moto totale si deve conservare durante l'esplosione. Si ha:

$$(m_1 + m_2)\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Per ipotesi le velocità dei due frammenti dopo l'esplosione, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, sono dirette nella stessa direzione della velocità $\vec{V}$ della granata prima dell'esplosione. Possiamo quindi proiettare la relazione vettoriale lungo tale direzione:

$$(m_1 + m_2)V = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Possiamo ricavare allora la velocità del frammento più piccolo, supponendo che esso abbia massa m_1:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}V - \frac{m_2}{m_1}v_2 = \frac{M}{0.4M}V - \frac{0.6M}{0.4M}v_2 = \frac{5}{2}V - \frac{3}{2}v_2$$

Sostituendo i valori dati per ipotesi, considerando sia V che v_2 positive, si ha:

$$v_1 = \frac{5}{2}V - \frac{3}{2}v_2 = 2.5 \cdot 10m/s - 1.5 \cdot 25m/s = -12.5m/s$$

Il frammento di granata più piccolo di muove quindi con velocità diretta in verso opposto alla velocità originale della granata.

ESERCIZIO 4.3 *Un pattinatore di massa M=70kg è in piedi sul ghiaccio e lancia orizzontalmente una pietra di massa m=3kg con velocità iniziale pari a 8m/s. Si trovi la distanza che egli percorrerà a causa del rinculo se il coefficiente di attrito dinamico tra i pattini ed il ghiaccio è pari a* μ_d*=0.02.*

SOLUZIONE

Analogamente al caso descritto nell'esercizio precedente la quantità di moto totale del sistema costituito dal pattinatore e dalla pietra si conserva nel lancio. Essa è inizialmente nulla, in quanto pattinatore e pietra sono fermi prima del lancio, per cui si ha:

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

dove $\vec{V}$ e $\vec{v}$ sono rispettivamente le velocità iniziali di rinculo del pattinatore e di lancio del sasso, misurate in un sistema di riferimento fisso nella posizione iniziale dei due. La relazione, proiettata su un asse parallelo al suolo lungo la direzione di lancio, dà:

$$MV + mv = 0$$

da cui:

$$V = -\frac{m}{M}v$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo:

$$V = -\frac{3kg}{70kg}8m/s = -0.34m/s$$

Quindi il pattinatore dopo il lancio si muove con velocità diretta in verso opposto a quella della pietra. Immediatamente dopo il lancio egli possiede un'energia cinetica pari a:

$$T_{in} = \frac{1}{2} M V^2$$

il cui valore è dato da:

$$T_{in} = 0.5 \cdot 70kg \cdot 0.34^2 m^2 / s^2 = 4.05J$$

Durante il moto successivo il pattinatore è soggetto alla forza resistente di attrito che lo frena. Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica ci assicura che il lavoro compiuto da tale forza nel frenare il pattinatore è pari alla sua variazione di energia cinetica, ovvero:

$$L = \int \vec{A} \cdot d\vec{s} = T_{fin} - T_{in}$$

Dal momento che al termine della corsa il pattinatore è fermo e che la forza di attrito è costante, proporzionale al peso del pattinatore e diretta in verso opposto al moto si ha:

$$-A \cdot \Delta s = -\mu_d Mg \cdot \Delta s = -T_{in}$$

da cui otteniamo:

$$\Delta s = \frac{Tin}{\mu_d \cdot M \cdot g}$$

Lo spostamento subito dal pattinatore durante il rinculo sarà quindi pari a:

$$\Delta s = \frac{4.05J}{0.02 \cdot 70kg \cdot 9.81m/s^2} = 0.29m$$

ESERCIZIO 4.4 *Un vagone scoperto di massa pari a $M_1=10^4kg$ si trova su rotaie orizzontali e reca un cannone di massa $M_2=5\cdot10^3$ kg fissato sul suo piano. Un proiettile viene sparato dal cannone lungo la direzione delle rotaie; il proiettile ha massa $m=100kg$ e velocità iniziale rispetto al cannone pari a $v_0=500m/s$. Quale distanza percorrerà il vagone dall'istante dello sparo se: (1) inizialmente è a riposo, (2) inizialmente si muove alla velocità $v_1=18km/h$ ed il colpo è sparato nel verso del moto, (3) inizialmente si muove alla velocità $v_1=18km/h$ ed il colpo è sparato in verso opposto al moto? Si prendano in considerazione le forze di attrito che si oppongono al moto del vagone tramite un coefficiente di attrito dinamico complessivo pari a $\mu_d=0.002$.*

SOLUZIONE

Vagone, cannone, proiettile costituiscono un sistema di punti materiali. Chiamiamo $\vec{v}_1$ la velocità del sistema prima dello sparo. Dal momento che le forze che agiscono durante lo sparo sono esclusivamente interne la quantità di moto totale si conserva e, chiamate $\vec{v}_2$ e $\vec{V}$ rispettivamente le velocità del proiettile e del sistema vagone più cannone, potremo scrivere:

$$(m + M_1 + M_2)\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + (M_1 + M_2)\vec{V}$$

che possiamo proiettare su un asse parallelo alla direzione delle rotaie:

$$(m + M_1 + M_2)v_1 = mv_2 + (M_1 + M_2)V$$

Occorre notare che il testo dell'esercizio fornisce il valore iniziale della velocità del proiettile rispetto al cannone, che è in moto, mentre nella relazione precedente si intende che la velocità v_2 del proiettile è misurata rispetto ad un sistema fisso. Dalla legge di trasformazione delle velocità tra sistemi in moto di traslazione si ha:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{V}$$

da cui:

$$v_2 = v_0 + V$$

Quest'ultima relazione è algebrica e tiene conto dei segni delle velocità. Dovremo considerare positive le velocità nel verso dello sparo e negative quelle in verso opposto ad esso. Per la condizione di conservazione della quantità di moto si ha quindi:

$$(m + M_1 + M_2)v_1 = m(v_0 + V) + (M_1 + M_2)V$$

dalla quale ricaviamo la velocità del sistema vagone più cannone dopo lo sparo:

$$V = v_1 - \frac{mv_0}{m + M_1 + M_2}$$

Caso 1) Il sistema ha inizialmente velocità nulla. Si ha allora:

$$V = -\frac{mv_0}{m + M_1 + M_2}$$

La velocità del vagone dopo lo sparo varrà:

$$V = -\frac{100kg \cdot 500m/s}{(100 + 10000 + 5000)kg} = -3.31m/s$$

Caso 2) Il sistema si muove inizialmente con velocità di modulo v_1=*18km/h* ed il colpo è sparato nel verso del moto. Si ha allora:

$$V = 18km/h\frac{1000m/km}{3600s/h} - \frac{100kg \cdot 500m/s}{(100+10000+5000)kg} = 1.69m/s$$

Caso 3) Il sistema si muove inizialmente con velocità di modulo v_1=*18km/h* ed il colpo è sparato in verso opposto al moto. Si ha allora:

$$V = -18km/h\frac{1000m/km}{3600s/h} - \frac{100kg \cdot 500m/s}{(100+10000+5000)kg} = -8.31m/s$$

Nei tre casi vale il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, per cui che il lavoro compiuto dalla forza di attrito nel frenare vagone e cannone è pari alla loro variazione di energia cinetica. Considerando che il lavoro della forza di attrito è resistente e che essa è costante durante il moto e proporzionale al peso di cannone e vagone, si ha:

$$A \cdot \Delta s = \mu_d(M_1 + M_2)g \cdot \Delta s = T_{in}$$

ovvero:

$$\Delta s = \frac{T_{in}}{\mu_d(M_1+M_2)g} = \frac{1/2(M_1+M_2)V^2}{\mu_d(M_1+M_2)g} = \frac{V^2}{2\mu_d g}$$

Nei tre casi si ha rispettivamente $\Delta s_1 = 279.2m$ in direzione opposta al moto del proiettile, $\Delta s_2 = 72.8m$ nella stessa direzione del proiettile, $\Delta s_3 = 1759.8m$ in direzione opposta al moto del proiettile.

ESERCIZIO 4.5 *Un cannone di massa M=1000kg è poggiato su un piano orizzontale che è in grado di esercitare solamente una reazione vincolare normale. Il cannone spara un proiettile di massa m=10kg che inizialmente ha velocità di modulo pari a v_0=100m/s inclinata di 60° rispetto al piano orizzontale. Si calcoli la* *velocità iniziale con cui rincula il cannone. Il moto del cannone viene in seguito arrestato da un sistema di ammortizzatori che può essere schematizzato come una molla di costante elastica k=7500N/m. Si calcoli di quanto si comprimerà il sistema per arrestare il moto del cannone.*

SOLUZIONE

La prima equazione cardinale stabilisce che nel processo di sparo del proiettile la risultante delle forze esterne è pari alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema di punti materiali costituiti dal cannone e dal proiettile:

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Durante lo sparo agiscono sia una forza interna, che non deve essere quindi presa in considerazione nella relazione precedente, ed una sola forza esterna data dalla reazione vincolare del piano $\vec{R}_N$. Avremo:

$$\vec{R}_N = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

L'impulso esercitato dalla forza esterna $\vec{R}_N$ sul sistema durante lo sparo ne farà variare la quantità di moto totale di una grandezza pari a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}_N dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}$$

dove t_1 e t_2 sono l'istante iniziale e finale del processo di sparo. Se cannone e proiettile sono inizialmente fermi la loro quantità di moto totale è inizialmente nulla. Essa cambierà nel corso dell'esplosione del colpo a causa della presenza della forza esterna data dalla reazione normale.

Se scegliamo un sistema di riferimento Oxy con l'asse y verticale e l'asse x orizzontale, tale che il piano xy contenga la velocità iniziale del proiettile, possiamo proiettare la relazione precedente sugli assi coordinati.
Dal momento che la reazione normale ha solo componente y avremo:

x) $$0 = p_x(t_2) - p_x(t_1)$$

y) $$\int_{t_1}^{t_2} R_N dt = p_y(t_2) - p_y(t_1)$$

Ne consegue che la componente x della quantità di moto totale si conserva durante lo sparo. Quella y invece cambia. Tuttavia a noi interessa solo il moto del cannone che avviene lungo la direzione x e siamo interessati solo alla prima relazione. Riscrivendo tale espressione in termini di velocità e masse si ha:

$$Mv_{c,x}^{(in)} + mv_{p,x}^{(in)} = Mv_{c,x}^{(fin)} + mv_{p,x}^{(fin)}$$

dove abbiamo indicato con il suffisso *c* e *p* le velocità del cannone e del proiettile e con *(in)* e *(fin)* i valori di tali grandezze fisiche immediatamente prima e dopo lo sparo rispettivamente. Dal momento che prima dello sparo cannone e proiettile sono fermi si ha:

$$0 = Mv_{c,x}^{(fin)} + mv_{p,x}^{(fin)}$$

da cui si ricava:

$$v_{c,x}^{(fin)} = -\frac{m}{M} v_{p,x}^{(fin)}$$

D'altra parte il testo del problema ci fornisce il valore del modulo della velocità iniziale del proiettile da cui possiamo ricavare la componente x della sua velocità iniziale. Abbiamo quindi:

$$v_{c,x}^{(fin)} = -\frac{m}{M} v_0 \cos\alpha$$

Numericamente si ottiene:

$$v_{c,x}^{(fin)} = 0.5 m/s$$

La proiezione della relazione che lega l'impulso della reazione normale alla variazione della quantità di moto lungo l'asse delle y non è utile ai fini della soluzione del problema. Potrebbe però essere utilizzata per calcolare quale è l'impulso esercitato dalla reazione normale durante lo sparo. E' comunque importante notare che dopo lo sparo il cannone ha velocità diretta solo lungo l'asse x, pari al valore che abbiamo calcolato.
Immediatamente dopo lo sparo il cannone inizierà quindi a rinculare con velocità pari a $v_{c,x}^{(fin)}$ e ad un certo istante verrà in contatto con i respingenti del sistema di arresto e la sua energia cinetica inizierà a trasformarsi in energia potenziale della molla, inizialmente nulla. Durante la compressione della molla, dal momento che agiscono solo forze conservative, si avrà conservazione dell'energia meccanica. All'istante in cui il cannone si fermerà, tutta l'energia cinetica si sarà trasformata in energia potenziale. In generale avremo che:

$$U_{elastica}^{(in)} + T^{(in)} = U_{elastica}^{(fin)} + T^{(fin)}$$

Dal momento che sappiamo che l'energia potenziale iniziale e quella cinetica finale sono nulle, si avrà:

$$T^{(in)} = U_{elastica}^{(fin)}$$

Sostituendo le espressioni per le due energie abbiamo:

$$\frac{1}{2}M(v_{c,x}^{(fin)})^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

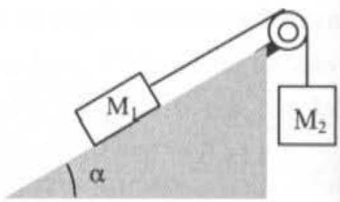
dove x misura la compressione della molla. Semplificando si ha:

$$x = \sqrt{\frac{M}{k}}v_{c,x}^{(fin)}$$

e numericamente:

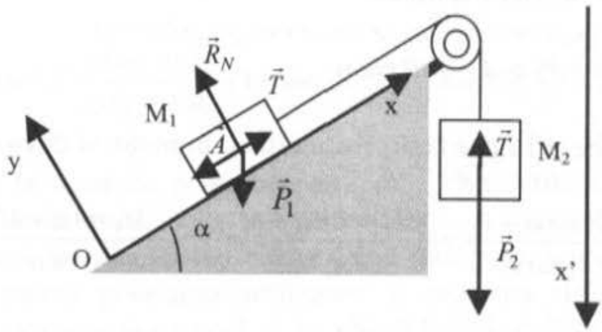
$$x = 18.3cm$$

ESERCIZIO 4.6 *Un blocco di massa M_1=30 kg è appoggiato su un piano inclinato di α=30° rispetto all'orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico tra piano e corpo siano rispettivamente pari a μ_s=0.3, μ_d=0.1. Il blocco è collegato tramite una fune ad un altro corpo di massa M_2=25kg che pende verticalmente. La fune può scorrere intorno all'angolo del piano grazie ad una carrucola senza attrito. Inizialmente il corpo 1 viene trattenuto da una forza esterna che lo mantiene fermo. Ad un certo istante la forza viene rimossa ed i corpi si mettono in moto. Si calcoli la velocità del corpo 1 quando la posizione del corpo 2 è cambiata di un metro.*



SOLUZIONE

Innanzitutto occorre determinare se i corpi si metteranno in moto o meno. Facendo riferimento alla figura che segue, per i due corpi possiamo scrivere rispettivamente le seguenti equazioni di Newton:



$$\begin{cases} \vec{F}_1^{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{T} + \vec{A} = M_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{TOT} = \vec{P}_2 + \vec{T} = M_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Proiettando la prima relazione sugli assi x ed y si ottiene:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + T - A = M_1 a_1 \\ -P_1 \cos\alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che la forza di attrito statico può prendere qualsiasi valore fino ad un valore massimo dato da:

$$A = \mu_s R_N$$

Se vogliamo che la massa M_1 si metta in moto lungo il piano, con accelerazione non nulla, dovrà quindi essere che la risultante delle componenti di forza peso e tensione del filo lungo x sia di intensità maggiore del massimo attrito statico che il piano è in grado di esercitare:

$$-P_1 \sin\alpha + T > A = \mu_s P_1 \cos\alpha$$

D'altra parte, se i corpi sono fermi, la tensione del filo è pari al peso del corpo di massa M_2. Si ha quindi:

$$-P_1 \sin\alpha + P_2 > A = \mu s P_1 \cos\alpha$$

Ne consegue che, affinché i corpi si mettano in moto, si deve avere che:

$$\mu_s < \frac{-P_1 \sin\alpha + P_2}{P_1 \cos\alpha} = \frac{-M_1 g \sin\alpha + M_2 g}{M_1 g \cos\alpha} = \frac{-M_1 \sin\alpha + M_2}{M_1 \cos\alpha}$$

Sostituendo i valori noti si ricava che i corpi si metteranno in moto solo se:

$$\mu_s < 0.38$$

Dal momento che il coefficiente di attrito statico dato dal testo è pari a 0.3 effettivamente i corpi si metteranno in moto. Possiamo verificare facilmente che a_1 è positiva e che il corpo di massa M_1 risalirà lungo il piano mentre quello di massa M_2 scenderà verso il basso.

Proiettando entrambe le relazioni vettoriali relative al corpo 1 e 2 sugli assi, possiamo ottenere il valore della tensione del filo durante il moto. Proiettando infatti la prima relazione sull'asse x e la seconda sull'asse x' si ottiene:

$$\begin{cases} -P_1 \sin\alpha + T - A = M_1 a_1 \\ P_2 - T = M_2 a_2 \end{cases}$$

dove la forza di attrito del corpo in moto ha modulo pari a $A=\mu_d R_N$. Possiamo imporre la condizione $a_1=a_2$, che traduce il fatto che i due corpi si devono muovere con pari accelerazione e velocità in quanto il vincolo ne fissa la distanza, e ricavare il valore della tensione T della corda. Si ha:

$$T = g\frac{M_1 M_2}{M_2 + M_1}(1 + \sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)$$

Si ha:

$$T = 9.81m/s^2 \frac{25kg \cdot 30kg}{25kg + 30kg}(1 + sin(30°) + 0.1cos(30°)) = 212.2N$$

Si osserva che la tensione è minore di quella che il filo deve esercitare quando i corpi sono fermi.

Per calcolare la velocità del corpo 1 nel momento in cui il corpo 2 è sceso di un metro possiamo utilizzare il teorema delle forze vive. Applicando il teorema al corpo 1 si ha che il lavoro della risultante delle forze che agiscono su di esso durante lo spostamento deve essere pari alla variazione di energia cinetica. Si ha:

$$L = \int_{in}^{fin} \vec{F}_{TOT}^{(1)} \cdot \overrightarrow{ds} = T^{(fin)} - T^{(in)}$$

dove gli apici *(in)* e *(fin)* indicano le posizioni iniziale e finale del corpo 1. Il lavoro può essere scomposto nella somma dei lavori fatti dalle singole forze separatamente:

$$L = \int_{in}^{fin} \vec{F}_{TOT}^{(1)} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{in}^{fin} (\vec{P}_1 + \vec{A} + \vec{R}_N + \vec{T}) \cdot \overrightarrow{ds} =$$
$$= \int_{in}^{fin} \vec{P}_1 \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{in}^{fin} \vec{A} \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{in}^{fin} \vec{R}_N \cdot \overrightarrow{ds} + \int_{in}^{fin} \vec{T} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Lo spostamento del corpo 1 avviene lungo la direzione x e si ha che $\overrightarrow{ds} = (dx,0,0)$. Nel calcolo dei prodotti scalari tra forze e spostamento si avrà:

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} P_{1,x} dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} A_x dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} R_{N,x} dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} T_x dx$$

dove abbiamo indicato con x_{in} e x_{fin} la posizione iniziale e finale del corpo 1. A questo punto inseriamo negli integrali le espressioni per le componenti x delle forze. Si ha:

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} - M_1 g\, sin\,\alpha dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} - \mu_d M_1 g\, cos\,\alpha dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} 0 dx + \int_{x_{in}}^{x_{fin}} T dx$$

avendo messo in evidenza che la componente lungo x della reazione normale è nulla. Avremo quindi:

$$L = -M_1 g\, sin\,\alpha \Delta x - \mu_d M_1 g\, cos\,\alpha \Delta x + T\Delta x =$$
$$= (-M_1 g\, sin\,\alpha - \mu_d M_1 g\, cos\,\alpha + T)\Delta x$$

Lo spostamento $\Delta x = x_{fin} - x_{in}$ subito dal corpo 1 è esattamente lo stesso, ma in direzione diversa, di quello subito dal corpo 2, pari ad un metro. Possiamo quindi calcolare numericamente il lavoro compiuto dalle forze:

$$L = 39.6 J$$

Tale lavoro deve essere pari alla variazione di energia cinetica del corpo 1. Tuttavia l'energia cinetica iniziale del corpo 1 è nulla perché esso parte da fermo. Avremo quindi:

$$L = T^{(fin)} = \frac{1}{2} M_1 v_{fin}^2$$

da cui si ricava:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2L}{M_1}} = 1.62 m/s$$

ESERCIZIO 4.7 *Si trovi la potenza erogata dal motore di un'autovettura di massa m=1000kg se essa si muove ad una velocità costante pari a 36km/h, nelle seguenti condizioni: (1) lungo una strada orizzontale, (2) lungo una salita di pendenza pari al 5%, (3) lungo una discesa con la stessa pendenza. Si prenda in considerazione una forza d'attrito complessiva schematizzata da un coefficiente di attrito dinamico pari a* μ_d*=0.07. [NOTA Una salita ha pendenza del 10% quando la quota sale di 10 metri ogni 100 metri percorsi]*

SOLUZIONE

Le forze d'attrito compiono sempre un lavoro negativo sui corpi in quanto sono dirette sempre in verso opposto allo spostamento. Se si vuole quindi che, muovendosi in piano, una vettura si muova a velocità costante sarà necessario rimpiazzare continuamente, tramite la spinta del motore, l'energia cinetica che le viene sottratta dalla forza di attrito. Se poi il corpo si muove in salita o in discesa l'energia fornita dal motore dovrà sopperire anche alle variazioni di energia potenziale dell'autovettura.
Il lavoro compiuto dalle forze che agiscono sulla vettura lungo una certa distanza è sempre pari alla variazione di energia cinetica:

$$L = T_{fin} - T_{in}$$

Le forze che agiscono sull'autovettura sono l'attrito, la forza peso e la forza esercitata dal motore, per cui

$$L = \int \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int \vec{S} \cdot d\vec{s} = T_{fin} - T_{in}$$

Tuttavia il peso è una forza conservativa ed il lavoro da essa compiuto può essere espresso in termini di variazione di energia potenziale:

$$\int \vec{P} \cdot d\vec{s} = U_{in} - U_{fin}$$

Si ha quindi che:

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int \vec{S} \cdot d\vec{s} = U_{fin} + T_{fin} - U_{in} - T_{in}$$

Nel caso dell'autovettura sappiamo che essa si muove a velocità costante per cui l'energia cinetica è anch'essa costante. Si ha quindi:

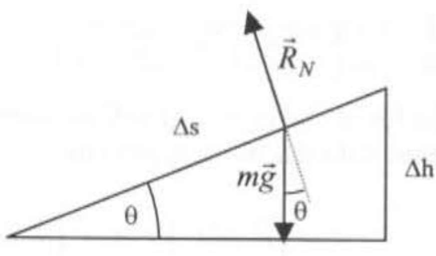
$$\int \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int \vec{S} \cdot d\vec{s} = U_{fin} - U_{in}$$

Se l'autovettura si muove su una strada di pendenza α la relazione precedente calcolata per uno spostamento Δs dà:

$$-A \cdot \Delta s + S \cdot \Delta s = mgh_{fin} - mgh_{in} = mg\Delta h = mg\alpha\Delta s$$

dove si è sfruttata la relazione tra spostamento dell'autovettura ed aumento della sua quota $\Delta h = \alpha\Delta s$. Si ottiene:

$$-A + S \cdot = mg\alpha$$



da cui:

$$S \cdot = mg\alpha + A = mg\alpha + \mu_d R_N$$

dove R_N è la reazione normale del piano stradale. Con riferimento alla figura si ha che:

$$R_N = mg\cos\theta = mg\sqrt{1 - \sin^2\theta} = mg\sqrt{1 - \left[\frac{\Delta h}{\Delta s}\right]^2} = mg\sqrt{1 - \alpha^2}$$

Si ha quindi che:

$$S = mg\alpha + \mu_d R_N = mg\alpha + \mu_d mg\sqrt{1-\alpha^2} = mg(\alpha + \mu_d \sqrt{1-\alpha^2})$$

La potenza erogata, lavoro effettuato per unità di tempo, da tale forza di spinta del motore è pari a:

$$W = \frac{L}{\Delta t} = \frac{S\Delta s}{\Delta t} = S \cdot v = mg(\alpha + \mu_d \sqrt{1-\alpha^2}) \cdot v$$

Caso 1) Strada in piano (*α=0*). Si ha:

$$W = mg\mu_d v = 1000kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 0.07 \cdot 36km/h \frac{1000m/km}{3600s/h} = 6.87kW$$

Caso 2) Strada in salita (*α=0.05*). Si ha:

$$W = \frac{S\Delta s}{\Delta t} = S \cdot v = mg(\alpha + \mu_d \sqrt{1-\alpha^2}) \cdot v =$$
$$= 1000kg \cdot 9.81m/s^2 (0.05 + 0.07\sqrt{1-(0.05)^2}) \cdot 36km/h \frac{1000m/km}{3600s/h} =$$
$$= 11.76kW$$

Caso 3) Strada in discesa (*α=-0.05*). Si ha:

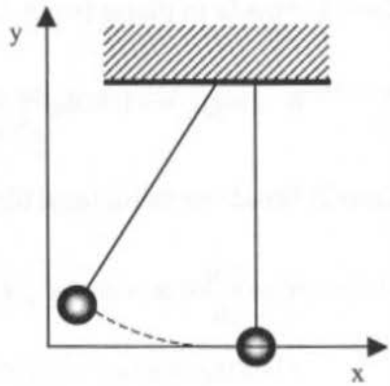
$$W = \frac{S\Delta s}{\Delta t} = S \cdot v = mg(\alpha + \mu_d \sqrt{1-\alpha^2}) \cdot v =$$
$$= 1000kg \cdot 9.81m/s^2 (-0.05 + 0.07\sqrt{1-(0.05)^2}) \cdot 36km/h \frac{1000m/km}{3600s/h} =$$
$$= 1.95kW$$

ESERCIZIO 4.8 *Due sfere sono sospese tramite due fili paralleli di uguale lunghezza in modo tale che siano in contatto tra loro. La massa della prima sfera* *sia m_1=0.2kg e quella della seconda sia pari a m_2=100g. La prima sfera viene spostata dalla posizione di equilibrio, sempre mantenendo il filo che la sostiene teso, in modo tale che il suo centro di massa salga di 4.5cm e viene in seguito lasciata libera di muoversi. A quale altezza risaliranno le due sfere dopo la collisione se:*

1) *L'urto è elastico;*
2) *L'urto è completamente anelastico.*

SOLUZIONE

Una volta lasciata libera, la sfera di massa m_1 si metterà in moto acquistando velocità. La velocità ad un istante immediatamente precedente l'impatto con la sfera di massa m_2 può essere calcolata sfruttando il principio di conservazione dell'energia meccanica. Si ha:



$$E_{mecc}^{(1)} = U_{in}^{(1)} + T_{in}^{(1)} = U_{fin}^{(1)} + T_{fin}^{(1)}$$

Scegliamo un sistema di riferimento con asse y tale che la posizione di equilibrio delle sfera sia data da $y=0$ ed imponiamo che l'energia potenziale delle sfere sia zero per $y=0$. Dal momento che l'energia cinetica iniziale della sfera è nulla si ha:

$$T_0 = T_{fin}^{(1)} = U_{in}^{(1)} = m_1 g h_{in}^{(1)}$$

Tale valore diventa il valore iniziale dell'energia cinetica della sfera di massa m_1 nel processo d'urto tra le due sfere. Da ora in poi i suffissi in e fin faranno riferimento alle grandezze fisiche prima e dopo l'urto.

Nel corso dell'urto si ha sempre conservazione della quantità di moto totale del sistema:

$$m_1\vec{v}_{in}^{(1)} + m_2\vec{v}_{in}^{(2)} = m_1\vec{v}_{fin}^{(1)} + m_2\vec{v}_{fin}^{(2)}$$

Dal momento che la velocità iniziale della sfera di massa m_2 è nulla e che la velocità della massa m_1 è diretta lungo x, considerando che l'urto è centrale, le due velocità finali delle sfera saranno anch'esse dirette lungo x. Possiamo quindi proiettare l'espressione precedente lungo l'asse x e, tenendo in considerazione che $\vec{v}_{in}^{(2)} = 0$, ottenere:

$$m_1 v_{in}^{(1)} = m_1 v_{fin}^{(1)} + m_2 v_{fin}^{(2)}$$

Tale espressione non ci permette da sola di ricavare i valori delle velocità finali delle due sfere, necessari per calcolare successivamente le quote di arresto. E' necessario avere a disposizione una seconda relazione che, messa a sistema con la precedente ci permetta di risolvere il sistema. Trattiamo separatamente il caso dell'urto elastico e di quello completamente anelastico, utilizzando in ognuno dei casi una caratteristica particolare del processo d'urto per ricavare un'ulteriore relazione tra le velocità delle sfere.

Urto elastico

Nel caso degli urti elastici si ha sempre conservazione dell'energia cinetica del sistema nel corso dell'urto, da cui:

$$T_{in}^{(1)} + T_{in}^{(2)} = T_{fin}^{(1)} + T_{fin}^{(2)}$$

ovvero:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_{in}^{(1)}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_{fin}^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_{fin}^{(2)}\right)^2$$

Tale relazione può essere messa a sistema con quella ricavata dalla conservazione della quantità di moto. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} v_{fin}^{(1)} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{in}^{(1)} \\ v_{fin}^{(2)} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{in}^{(1)} \end{cases}$$

Le energie cinetiche con cui le due sfere escono dall'urto sono date da:

$$\begin{cases} T_{fin}^{(1)} = \dfrac{1}{2} m_1 \left[v_{fin}^{(1)}\right]^2 = \dfrac{1}{2} m_1 \left[v_{in}^{(1)}\right]^2 \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = T_0 \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ T_{fin}^{(2)} = \dfrac{1}{2} m_2 \left[v_{fin}^{(2)}\right]^2 = \dfrac{1}{2} m_2 \left[v_{in}^{(1)}\right]^2 \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = T_0 \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \end{cases}$$

Tali espressioni possono essere ora utilizzate per calcolare la quota massima alla quale si arresterà il moto delle sfere. Per far ciò si utilizza di nuovo il principio di conservazione dell'energia meccanica separatamente per ognuna delle due sfere, secondo il quale l'energia cinetica all'uscita dall'urto si trasforma completamente in energia potenziale:

$$\begin{cases} T_{fin}^{(1)} = U_{max}^{(1)} \\ T_{fin}^{(2)} = U_{max}^{(2)} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases} U_{max}^{(1)} = m_1 g h_{max}^{(1)} = T_{fin}^{(1)} = T_0 \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = m_1 g h_{in}^{(1)} \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ U_{max}^{(2)} = m_2 g h_{max}^{(2)} = T_{fin}^{(2)} = T_0 \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = m_1 g h_{in}^{(1)} \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \end{cases}$$

Semplificando le espressioni precedenti si ottiene quindi:

$$\begin{cases} h_{max}^{(1)} = h_{in}^{(1)} \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ h_{max}^{(2)} = h_{in}^{(1)} \dfrac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \end{cases}$$

Numericamente si ha:

$$\begin{cases} h_{max}^{(1)} = 0.5cm \\ h_{max}^{(2)} = 8.0cm \end{cases}$$

Urto completamente anelastico

In un urto completamente anelastico i due corpi rimangono solidali dopo l'urto e continuano il moto con la stessa legge oraria. Si ha quindi che:

$$\vec{v}_{fin}^{(1)} = \vec{v}_{fin}^{(2)}$$

Tale espressione costituisce la seconda relazione da mettere a sistema con la conservazione della quantità di moto del sistema. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$v_{fin} = v_{fin}^{(1)} = v_{fin}^{(2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{in}^{(1)}$$

L'energia cinetica di uscita dall'urto sarà data da:

$$T_{fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{fin}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{in}^{(1)}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\left[v_{in}^{(1)}\right]^2 = T_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica per il moto successivo all'urto delle due sfere solidali, si ottiene l'espressione della quota massima raggiunta:

$$U_{max} = (m_1 + m_2)gh_{max} = T_{fin} = T_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = m_1 g h_{in}^{(1)} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Da cui semplificando si ottiene:

$$h_{max} = h_{in}^{(1)} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Numericamente si ha:

$$h_{max} = 2cm$$

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 4.9 *Un corpo di massa $m=1.2$ kg scivola lungo un piano inclinato alto 1 m e lungo 8 m. Trovare: a) l'energia cinetica del corpo alla base del piano, b) la velocità alla base del piano e c) il cammino percorso in direzione orizzontale dal corpo prima di fermarsi. Il coefficiente d'attrito dinamico vale 0.05.*

Sol. a) 7 J; b) 3.4 m/s; c) 11.9 m

ESERCIZIO 4.10 *Un pendolo semplice di massa $m=0.4$ kg e di lunghezza $l=55$ cm è inizialmente fermo nella posizione di equilibrio stabile. Dopo aver ricevuto un impulso orizzontale, la quantità di moto del pendolo nel punto di minima quota diventa pari a q_{in}. Calcolare la reazione vincolare del filo nel punto di massima quota nei due casi a) $q_{in}=0.8$ N·s e b) $q_{in}=8$ N·s.*

Sol. a) 2.5 N; b) 271.3 N

ESERCIZIO 4.11 *Una palla di massa 40 g viene lanciata da una finestra con velocità iniziale 10 m/s ad un angolo di 30° in alto rispetto all'orizzontale. Determinare a) l'energia cinetica della palla nel punto più alto della traiettoria, b) la quota massima raggiunta rispetto alla finestra e c) la sua velocità quando essa viene a trovarsi 2 m sotto la finestra. Usare considerazioni di conservazione dell'energia.*

Sol. a) 1.5 J; b) 1.27 m ; c) 11.8 m/s

ESERCIZIO 4.12 *Calcolare le coordinate del centro di massa di una sbarra cilindrica il cui asse coincida con l'asse x e di lunghezza $l=x_2-x_1$ nei due casi in cui essa sia omogenea e b) essa sia composta per il tratto x_2-x' di un materiale di densità λ_2 e per il resto di un materiale di densità λ_1.*

Sol. a) $\frac{x_2-x_1}{2}$; b) $\frac{1}{m_1+m_2}\left[\frac{m_1}{2}(x_1+x')+\frac{m_2}{2}(x_2+x')\right]$

ESERCIZIO 4.13 *Giovanni, di massa 80 kg, e Valeria si trovano su un lago calmo a bordo di una barca di massa 45 kg. I loro posti sono simmetrici rispetto al centro della canoa e distano tra di loro 2.5 m. Ad un certo punto i ragazzi si scambiano di posto, e Giovanni osserva che la barca si è spostata di 0.35 m rispetto ad un palo sporgente conficcato sul fondo del lago. In questo modo ricava la massa di Valeria. Quanto vale?*

Sol. 54.8 kg

ESERCIZIO 4.14 *Due blocchi di massa M_1=2 kg e M_2=3 kg si trovano in quiete su un piano orizzontale senza attrito. Tra di essi è sistemata una molla di massa trascurabile tenuta compressa da un filo che collega i due blocchi. I blocchi e la molla non sono attaccati. Ad un certo istante il filo viene tagliato e i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla, dalla quale si staccano. Sapendo che la velocità acquistata dal blocco M_1 è v_1=0.5 m/s, calcolare la compressione iniziale della molla se la sua costante elastica è k=50 N/m.*

Sol. 13 cm

ESERCIZIO 4.15 *Un volano con momenti d'inerzia I=245 kg·m^2 ruota a 20 giri/s. Esso viene frenato da un momento esterno e si ferma dopo 1000 giri. Calcolare a) il modulo del momento frenante e b) il tempo necessario all'arresto del volano.*

Sol. a) 141.3 N·m ; b) 133 s

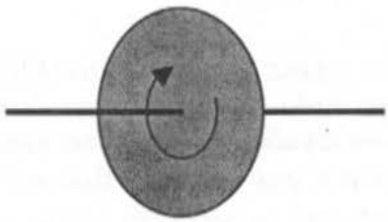
ESERCIZIO 4.16 *Un proiettile di massa m=200 g e velocità v=40 m/s viene sparato contro una porta, in direzione ortogonale al piano della porta stessa, e vi rimane conficcato ad una distanza di 60 cm dai cardini. La porta è alta 2.2 m, larga 80 cm ed ha una massa di 80 kg. Calcolare con quale velocità angolare la porta viene messa in rotazione attorno ai suoi cardini.*

Sol. 0.28 rad/s

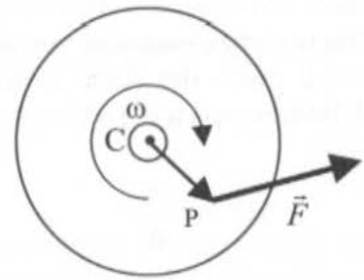
Capitolo 5

Corpi rigidi

ESERCIZIO 5.1 *Un volano che ha momento di inerzia I=63.6 kg·m² ruota con velocità angolare costante ω=31.4 rad/s. Si trovi il modulo del momento frenante, supposto costante, che deve essere applicato per fermare il volano in 20 secondi.*

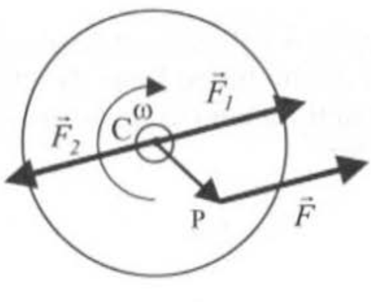


SOLUZIONE



Il disco descritto nel testo del problema è un corpo rigido vincolato a ruotare intorno ad un asse fisso nel tempo. La velocità angolare vettoriale è diretta lungo l'asse di rotazione in verso tale da vedere il disco ruotare in senso antiorario (nella figura la sua proiezione viene indicata con un puntino contornato da un cerchietto).

E' intuitivo che per arrestare la rotazione del disco un agente esterno deve applicare una forza $\vec{F}$ che si opponga al moto. Per semplicità supponiamo che $\vec{F}$ sia applicata in un generico punto P e che giaccia nel piano che contiene il disco. Si può osservare che la forza $\vec{F}$ è equivalente ad una forza



applicata in un punto dell'asse di rotazione più una coppia forze. Possiamo infatti aggiungere due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ di modulo pari ad F, applicate in C ma dirette in verso opposto. La forza $\vec{F}_1$ viene compensata dalla reazione vincolare dell'asse in modo che la risultante delle forze totali risulti nulla e che il sistema non trasli. Le forze $\vec{F}$ e $\vec{F}_2$ formano una coppia di momento dato da:

$$\vec{M} = \overrightarrow{CP} \times \vec{F}$$

che agisce sul disco modificandone lo stato dinamico rotazionale. Il momento è diretto lungo l'asse di rotazione ed il suo modulo è pari al momento assiale della forza M_a. Il suo verso è entrante nel piano del foglio, come si può dedurre utilizzando la regola del prodotto vettore.

Nel caso generale in cui la forza $\vec{F}$ sia diretta in modo da formare un angolo qualsiasi con l'asse di rotazione il vincolo dovrà esercitare sia una forza che una coppia per imporre la condizione che l'asse non trasli e non ruoti. Si ha quindi che l'unica componente del momento che non riesce ad essere compensata dal vincolo è diretta lungo l'asse.

Il moto del disco è determinato dalla seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi rigidi:

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

dove $\vec{b}$ è il momento della quantità di moto totale del sistema. Il vettore $\vec{b}$ è diretto lungo l'asse di rotazione del disco dal momento che tutti i suoi punti ruotano di moto circolare intorno a C con velocità angolare ω. Si ha che:

$$\vec{b} = I_C \vec{\omega}$$

dove I_c è il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per C. Si ha quindi:

$$\vec{M}^{(e)} = I_C \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Dal momento che entrambi i vettori sono diretti lungo l'asse di rotazione, nel proiettare la relazione lungo tale direzione si ha:

$$-M = I_C \frac{d\omega}{dt}$$

dove si è tenuto in conto che $\vec{M}^{(e)}$ è diretto in verso opposto alla velocità angolare di rotazione. Si ha quindi:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{I_C}$$

da cui si ricava per integrazione l'andamento temporale di $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \omega - \frac{M}{I_C} t$$

nella quale ω è la velocità angolare nel momento in cui la forza inizia ad agire, data per ipotesi. Se si vuole che il sistema si fermi in un tempo $t^*=20s$ si dovrà avere:

$$\omega(t^*) = \omega - \frac{M}{I_C} t^* = 0$$

da cui si ricava:

$$M = \frac{\omega I_C}{t^*}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$M = \frac{31.4 rad/s \cdot 63.6 kg \cdot m^2}{20s} = 99.85 N \cdot m \approx 100 N \cdot m$$

ESERCIZIO 5.2 *Un disco di massa m=2kg rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale alla velocità di 4m/s. Si trovi il valore dell'energia cinetica del disco. Si ricordi che il momento di inerzia di un disco rispetto ad un asse perpendicolare ad esso e passante per il centro è pari a $I=mR^2/2$. (Il fatto che il disco rotoli senza strisciare fa sì che il punto del disco che è a contatto con il piano sia ad ogni istante fermo).*

SOLUZIONE

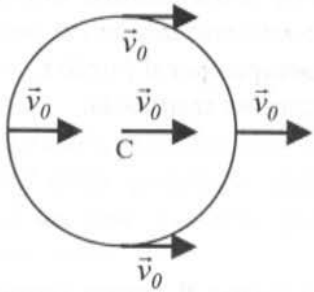
Il moto del disco può essere descritto in due modi differenti. Possiamo studiarlo come sovrapposizione del moto di traslazione del suo centro e del moto di rotazione del disco intorno ad esso. Oppure possiamo descriverlo come una pura rotazione intorno al punto di contatto tra disco e piano.

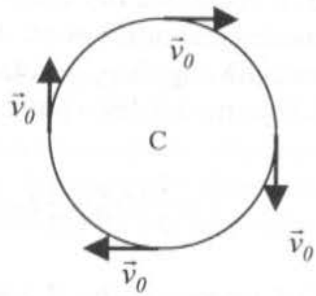
In ogni caso l'energia cinetica totale del disco è data dall'espressione:

$$T = \frac{1}{2} M v_a^2 + \frac{1}{2} I_a \omega_a^2$$

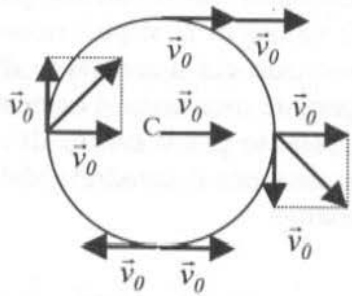
dove M è la massa totale del disco, v_a è la velocità di traslazione di un punto P del disco, I_a è il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse passante per tale punto e perpendicolare al disco e ω_a è la velocità di rotazione intorno all'asse. L'espressione è valida se il punto P coincide con il centro di massa oppure se è in quiete.

Caso 1 - Sovrapposizione di traslazione e rotazione

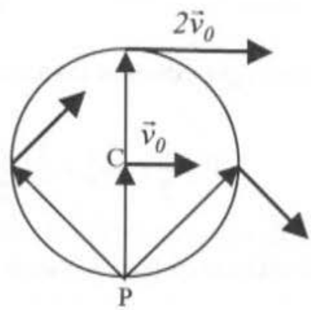




Il moto del disco può essere decomposto nei due moti mostrati in figura. Dal momento che il punto inferiore del disco a contatto con il piano deve essere fermo la somma delle velocità deve essere nulla. Ciò comporta che la velocità di traslazione e la velocità scalare di rotazione di un punto che si trovi sul diametro debbano essere uguali in modulo. Se scegliamo un asse passante per il centro di massa C e perpendicolare al disco si ha:



$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_C^2$$



nella quale la velocità angolare può essere espressa in termini della velocità scalare v_0. Si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I_C \frac{v_0^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} M R^2\right]\frac{v_0^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_0^2$$

Caso 2 - Rotazione intorno al punto di contatto tra disco e piano

Se sovrapponiamo i diagrammi delle velocità relativi al moto di traslazione e di rotazione del disco si ottiene il diagramma indicato in figura. Esso mostra che tutti i punti del disco ruotano intorno al punto di contatto P. La velocità angolare, calcolata ad esempio per il punto C, è sempre pari a V_0/R. L'energia del disco può essere espressa tramite la:

$$T = \frac{1}{2}Mv_P^2 + \frac{1}{2}I_P\omega_P^2$$

Dal momento che il punto P è fermo il primo termine è identicamente nullo. Nel secondo termine compare il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto all'asse passante per P e perpendicolare al piano del disco. Il valore di I_p si può ricavare utilizzando il teorema di Huygens-Steiner, secondo cui il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi è sempre pari al momento d'inerzia rispetto ad una asse parallelo al precedente passante per il centro di massa più un termine dato dal prodotto della massa per il quadrato della distanza tra gli assi. Nel caso del disco in esame:

$$I_P = I_C + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

L'energia cinetica sarà quindi data da:

$$T = \frac{1}{2}I_P\omega_P^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MR^2\right]\omega_P^2 = \frac{3}{4}MR^2\omega_P^2 = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

Si ottiene quindi lo stesso valore del caso precedente.

ESERCIZIO 5.3 *Una piattaforma orizzontale di massa pari a M=100kg ruota alla velocità di 10 giri al minuto intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un uomo di massa pari a m=60kg si trova in piedi sul bordo della piattaforma. A quale velocità angolare inizierà a ruotare la piattaforma se l'uomo si muove dal* *bordo fino al centro? Si consideri la piattaforma come un disco omogeneo circolare e l'uomo come un punto materiale.*

SOLUZIONE

Il sistema costituito dalla piattaforma e dall'uomo ha momento d'inerzia variabile, dipendente dalla posizione dell'uomo. Il momento d'inerzia, calcolato rispetto ad un asse passante per il centro della piattaforma e perpendicolare ad essa, vale:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + md^2$$

dove R è il raggio della piattaforma e d la distanza dell'uomo dall'asse. Durante lo spostamento dell'uomo agiscono esclusivamente forze interne al sistema e la risultante del loro momento è nulla. Ne deriva che il momento della quantità di moto totale del sistema deve conservarsi, secondo quanto previsto dalla seconda equazione cardinale:

$$0 = \vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Ne consegue che nel moto dovrà essere:

$$\vec{b} = I\vec{\omega} = cos\,tan\,te$$

ovvero che la componente assiale del momento della quantità di moto deve essere costante:

$$b_a = I_a\omega = cos\,tan\,te$$

Imponiamo la condizione di conservazione per ricavare la velocità angolare finale. Si ha:

$$I_a^{(in)}\omega^{(in)} = I_a^{(fin)}\omega^{(fin)}$$

da cui:

$$\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(d^{(in)}\right)^2\right]\omega^{(in)} = \left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(d^{(fin)}\right)^2\right]\omega^{(fin)}$$

Dal momento che $d^{(in)}=R$ e $d^{(fin)}=0$ si ottiene:

$$\omega^{(fin)} = \frac{\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(d^{(in)}\right)^2\right]}{\left[\frac{1}{2}MR^2 + m\left(d^{(fin)}\right)^2\right]}\omega^{(in)} = \frac{M+2m}{M}\omega^{(in)}$$

Sostituendo i valori numerici dati nel testo del problema si ottiene:

$$\omega^{(fin)} = \frac{100kg + 2\cdot 60kg}{100kg}\cdot 10giri/min = 22giri/min = 2.30rad/s$$

ESERCIZIO 5.4 *Un uomo dei massa m=60 kg è in piedi su una piattaforma circolare di massa M=100kg, vincolata a ruotare intorno ad un asse verticale passante per il suo centro e che sia inizialmente immobile. Se ad un certo istante l'uomo inizia a muoversi lungo un cerchio di raggio r=5m centrato intorno all'asse di rotazione della piattaforma, quanti giri al minuto compierà la piattaforma? L'uomo si muove con velocità scalare pari a 4 km/h rispetto alla piattaforma. Il raggio della piattaforma sia R=10m. Si schematizzi la piattaforma come un disco omogeneo e l'uomo come un punto materiale.*

SOLUZIONE

Come nel caso dell'esercizio precedente, dal momento che non sia ha un momento della forza esterna, si conserva il momento della quantità di moto totale, ovvero:

$$\vec{b}(t=0)=\vec{b}(t) \qquad , \forall t \geq 0s$$

Se l'uomo inizia a camminare quindi lungo una circonferenza centrata sull'asse di rotazione la piattaforma inizierà a ruotare nel verso opposto. In generale si avrà:

$$\vec{b}=\vec{b}^{(piatt)}+\vec{b}^{(uomo)}=I^{(piatt)}\omega^{(piatt)}+I^{(uomo)}\omega^{(uomo)}=0$$

dal momento che all'istante iniziale il sistema è immobile. Nell'espressione precedente le due velocità angolari sono riferite ad un sistema di riferimento immobile con origine nel centro di rotazione. La velocità angolare dell'uomo può ricavarsi dalla sua velocità scalare e dal raggio della traiettoria. Tuttavia il testo del problema fornisce la velocità dell'uomo rispetto alla piattaforma, ovvero rispetto ad un sistema di riferimento rotante solidale con essa. Occorre trasformare tale valore secondo la:

$$\omega^{(uomo)}=\omega^{(uomo-piatt)}+\omega^{(piatt)}$$

da cui si ricava:

$$\omega^{(uomo)}=\frac{v}{r}+\omega^{(piatt)}$$

La condizione di conservazione diviene quindi:

$$I^{(piatt)}\omega^{(piatt)} + I^{(uomo)}\omega^{(uomo)} = I^{(piatt)}\omega^{(piatt)} + I^{(uomo)}\left[\frac{v}{r} + \omega^{(piatt)}\right] = 0$$

che opportunamente elaborata dà l'espressione per la velocità angolare della piattaforma:

$$\omega^{(piatt)} = -\frac{I^{(uomo)}}{I^{(piatt)} + I^{(uomo)}} \cdot \frac{v}{r} = -\frac{mr^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \cdot \frac{v}{r}$$

sostituendo i valori numerici si ottiene il valore della velocità angolare della piattaforma:

$$\omega^{(piatt)} = -\frac{60kg5^2m^2}{0.5 \cdot 100kg \cdot 10^2m^2 + 60kg \cdot 5^2m^2} \cdot \frac{4km/h \cdot \frac{1000m/km}{3600s/h}}{5m} =$$
$$= 0.051 rad/s = 0.49 giri/min$$

ESERCIZIO 5.5 *Un forza costante F=20N viene applicata tangenzialmente al bordo di un disco di massa m=5kg, inizialmente fermo e vincolato a ruotare intorno ad un asse passante per il suo centro e perpendicolare ad esso. Quale sarà l'energia cinetica del disco dopo un intervallo di tempo Δt=5s dall'istante in cui la forza inizia ad agire?*

SOLUZIONE

La forza tangenziale esercita rispetto al centro di rotazione un momento pari a:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Il momento è diretto lungo l'asse di rotazione ed ha modulo pari al prodotto dei moduli di $\vec{r}$ e $\vec{F}$, essendo i due vettori perpendicolari tra loro:

$$M = rF$$

La dinamica del moto viene determinata dalla seconda equazione cardinale che può essere direttamente proiettata sull'asse di rotazione:

$$M_a = \frac{db_a}{dt} = \frac{dI_a\omega}{dt} = I_a \frac{d\omega}{dt}$$

Si ha quindi:

$$rF = I_a \frac{d\omega}{dt}$$

da cui si ricava:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{rF}{I_a}$$

Integrando l'equazione differenziale si ottiene per l'andamento temporale di ω:

$$\omega(t) = \frac{rF}{I_a} t + cost$$

La costante di integrazione è nulla in quanto la velocità iniziale del disco è nulla, per cui:

$$\omega(t) = \frac{rF}{I_a} t$$

L'energia cinetica sarà data quindi dall'espressione:

$$T(t)=\frac{1}{2}I_a\omega^2=\frac{1}{2}I_a\left(\frac{rF}{I_a}\right)^2t^2=\frac{r^2F^2}{2I_a}t^2$$

Dal momento che sappiamo che il momento d'inerzia assiale di un disco che ruota intorno ad un asse passante per il centro e perpendicolare ad esso vale $I_a=mr^2/2$ si ottiene:

$$T(t)=\frac{r^2F^2}{2I_a}t^2=\frac{F^2}{m}t^2$$

L'energia cinetica di rotazione aumenta quadraticamente con il tempo e dopo $5s$ dall'istante in cui si inizia ad applicare la forza assume il valore:

$$T(5s)=\frac{20^2N^2}{5kg}5^2s^2=2kJ$$

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 5.6 *Un volano con momento d'inerzia di 245 kg·m² ruota compiendo 20 giri/s. La ruota si ferma 20 minuti dopo l'azione di un momento frenante. Calcolare a) l'intensità del momento frenante e b) il numero di giri completati dalla ruota dal momento dell'applicazione della forza frenante all'istante d'arresto.*

Sol. a) 513 N·m; b) 600 giri

ESERCIZIO 5.7 *Due corpi di massa M_1=2 kg ed M_2= 1kg sono attaccati agli estremi di una corda e sospesi a cavallo di una puleggia (un disco omogeneo) di massa m=1kg. Calcolare a) l'accelerazione a con la quale si muovono i due corpi e b) le tensioni T_1 e T_2 agli estremi della corda.*

Sol. a) 2.8 m/s²; b) 14 N, 12.6 N

ESERCIZIO 5.8 *Una sfera di 6 cm di diametro e 0.25 kg di massa rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale con una frequenza angolare di 4 giri/s. Calcolare l'energia cinetica della sfera.*

Sol. 0.1 J

ESERCIZIO 5.9 *Due masse di 2 kg sono attaccate alle estremità di una sottile asta di massa trascurabile e lunga 5 cm, libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Una goccia di cera cade su una delle due masse con velocità di 3 m/s e si attacca ad essa. Calcolare: a) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto; b) il rapporto fra l'energia cinetica del sistema dopo l'urto e quello della goccia di cera prima di colpire la massa. c) Il sistema riuscirà a compiere una rotazione completa? Se no, di quanto ruoterà?*

Sol. a)1.5 rad/s; b)1.25×10^{-2}; c)193°

ESERCIZIO 5.10 *Un cilindro pieno, di massa M e raggio R, rotola su un piano inclinato senza strisciare. Trovare la velocità del suo centro di massa quando arriva in fondo. Il piano è alto h; il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse longitudinale è ½MR².*

Sol. $\sqrt{4/3gh}$

ESERCIZIO 5.11 *Un piccolo oggetto di massa m poggiato su un tavolo è attaccato ad un'estremità di uno spago leggero che passa attraverso un buco del tavolo e pende al di sotto di esso. L'estremità libera dello spago viene afferrata con una mano, mentre l'oggetto viene posto in rotazione con una velocità 1 m/s su un cerchio di raggio 10 cm. In seguito, lo spago viene tirato diminuendo il raggio della traiettoria fino al valore 8 cm. Trovare a) la nuova velocità tangenziale e b)angolare* ω_2.

Sol. a) 1.25 m/s; b) 15.6 rad/s

ESERCIZIO 5.12 *Una piattaforma orizzontale (un disco omogeneo) di 80 kg di peso e raggio 1 m ruota senza attriti con una frequenza angolare di 20giri/min. Un uomo sta in piedi al centro della piattaforma tenendo le braccia aperte e sostenendo con ciascuna mano un peso. Se l'uomo abbassa le mani, riducendo così il suo momento d'inerzia da 2.94 kg·m² a 0.98 kg·m², quale sarà il nuovo valore della frequenza angolare di rotazione?*

Sol. 21 giri/min

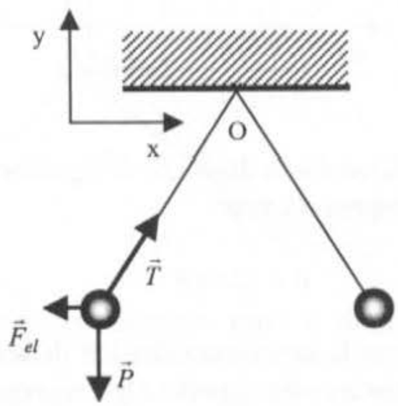
Capitolo 6

Elettrostatica

ESERCIZIO 6.1 *Due sfere metalliche dello stesso raggio e massa sono sospese a due fili isolanti in modo tale che le loro superfici siano in contatto. Quale carica deve essere data al sistema perché la tensione dei fili diventi pari a 0.098N? Siano date la distanza tra il punto di sospensione delle sfere ed il loro centro, pari a 10 cm, e la massa di ogni sfera, pari a 5 g.*

SOLUZIONE

Una volta caricate le due sfere si separeranno a causa della repulsione elettrostatica; dal momento che sono identiche ipotizziamo che la carica si equipartisca tra le due. In condizioni di equilibrio ognuna delle sfere è ferma. La risultante delle forze che agiscono su ognuna di esse è nulla. Dal momento che il problema è simmetrico sarà sufficiente occuparsi di una sola delle due sfere. Si ha quindi per una qualsiasi delle due:



$$\vec{F}_{el} + \vec{T} + \vec{P} = 0$$

La relazione vettoriale proiettata sugli assi x ed y, avendo introdotto l'angolo θ tra la direzione del filo e la perpendicolare al suolo, dà:

$$\begin{cases} -Fel + T\sin\theta = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda relazione si ottiene :

$$\theta = \arccos\left(\frac{mg}{T}\right)$$

Con i dati del problema si ha:

$$\theta = \arccos(0.5) = 60°$$

Dalla prima relazione, sostituendo l'espressione della forza di repulsione elettrica tra le due sfere, si ha:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2} - T\sin\theta = 0$$

dove d è la distanza di equilibrio tra i centri delle due sfere, che può essere espressa come:

$$d = 2L\sin\theta$$

con L lunghezza dei fili di sospensione. Sostituendo l'espressione di d e risolvendo rispetto a q si ricava:

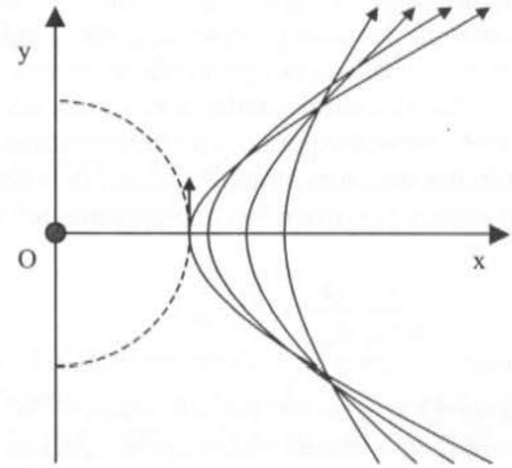
$$q = 4L\sqrt{\pi\varepsilon_0 T}\sin\theta^{3/2} = 0.53\mu C$$

La carica totale che si è dovuta dare al sistema è quindi pari a:

$$q_{TOT} = 2q = 1.06\mu C$$

ESERCIZIO 6.2 *Una sfera di massa m=40mg, carica uniformemente con una carica pari a 10nC si muove alla velocità di 10cm/s. A che distanza minima essa può avvicinarsi ad una carica puntiforme positiva di carica q=1μC e fissa nello spazio? Si considerino le cariche inizialmente a distanza infinita.*

SOLUZIONE



Studiamo il moto in un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* centrato sulla carica puntiforme con direzioni degli assi costanti nel tempo. Si scelga il piano *xy* in modo che esso contenga la velocità iniziale della sfera carica. La sfera, a causa della simmetria di distribuzione di carica, potrà essere descritta considerando la sua carica come se fosse concentrata tutta al suo centro. Dal momento che anche la forza elettrica di interazione è contenuta nel piano *xy*, durante tutto il moto rimarrà contenuta nel piano stesso (moto piano). La traiettoria del centro della sfera potrà variare a seconda della direzione della velocità iniziale. In generale nel punto di massimo avvicinamento la velocità istantanea sarà non nulla e diretta tangenzialmente alla circonferenza centrata in *O* di raggio pari alla distanza minima di avvicinamento stessa. In figura si riportano alcune traiettorie possibili.

Durante il moto, dal momento che la forza di repulsione elettrica è conservativa, si conserva l'energia meccanica, per cui:

$$T_{in} + U_{in} = T_{fin} + U_{fin}$$

Assumendo che l'energia potenziale sia nulla a distanza infinita ed esprimendo l'energia cinetica in termini della velocità, si ha:

$$U_{fin} = \frac{1}{2} m v_{in}^2 - \frac{1}{2} m v_{fin}^2$$

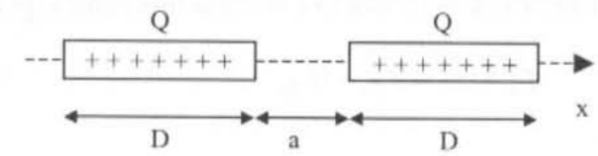
E' chiaro che quanto più la velocità iniziale del centro della sfera sarà diretta verso la carica puntiforme tanto più essa riuscirà ad avvicinarsi, come si nota in figura; analogamente la velocità istantanea tangenziale nel punto di massimo avvicinamento tenderà a diminuire. La condizione di velocità minima nel punto di massimo avvicinamento si ha nel caso in cui la velocità iniziale della sfera carica sia diretta esattamente verso la carica puntiforme; in questo caso la traiettoria è rettilinea, la velocità nel punto di minima distanza è nulla e l'energia potenziale immagazzinata nel sistema è massima. Sostituendo l'espressione dell'energia potenziale si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{d_{min}} = \frac{1}{2} m v_{in}^2$$

dove Q e q sono rispettivamente le cariche della sfera e della carica puntiforme. Risolvendo rispetto a d_{min} si ha:

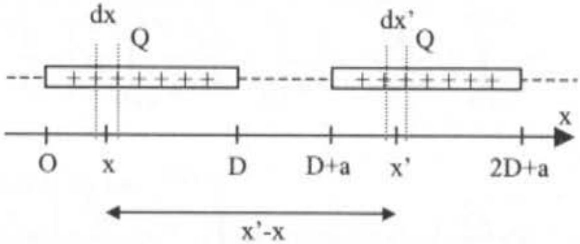
$$d_{min} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{m v_{in}^2} = 450m$$

ESERCIZIO 6.3 *Nel vuoto due sottili aste, uguali tra loro e cariche positivamente, sono disposte sulla stessa retta, come mostrato in figura. La lunghezza delle aste vale D e la carica su ciascuna di esse è Q, uniformemente distribuita sulle aste stesse. La distanza tra gli estremi più vicini delle due aste vale*



a. Ricavare l'espressione del modulo della forza che un'asta esercita sull'altra.

SOLUZIONE



Scegliamo l'origine O sull'asse di riferimento x come in figura. Un tratto dx del segmento carico di sinistra, posto in posizione x, eserciterà su un tratto dx' del segmento carico di destra, in posizione x', una forza elementare data da:

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx \cdot \lambda dx'}{(x - x')^2} \hat{x}$$

La relazione si ottiene considerando che gli elementi dx e dx' possono essere considerati di dimensione infinitesima ed applicando la formula di Coulomb di interazione tra le cariche puntiformi λdx e $\lambda dx'$, dove $\lambda = Q/D$ è la densità di carica lineare sui segmenti.

Integrando su dx otterremo la forza totale che agisce sull'elemento dx'. Integrando su dx' otterremo la forza totale che si esercita sul segmento carico di destra. Si ha:

$$\vec{F} = \iint d\vec{F} = \int_{a+D}^{a+2D} dx' \int_0^D dx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda^2}{(x-x')^2} =$$

$$= \int_{a+D}^{a+2D} dx' \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x-x'} \Bigg|_D^0 = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{a+D}^{a+2D} dx' \left[-\frac{1}{x'} - \frac{1}{D-x'} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\ln x' + \ln(x'-D) \right] \Bigg|_{a+D}^{a+2D} = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln \frac{a+D}{a} - \ln \frac{a+2D}{a+D} \right] =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(a+D)^2}{a(a+2D)}$$

Sostituendo l'espressione della densità di carica sui segmenti si ottiene:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} \ln \frac{(a+D)^2}{a(a+2D)} \hat{x}$$

Verifichiamo che nella condizione limite $a \gg D$ si ottiene il comportamento che ci aspettiamo intuitivamente. Anticipiamo che per $a \gg D$ i segmenti saranno così lontani che li potremo considerare puntiformi e potremo applicare direttamente la legge di Coulomb tra le cariche Q concentrate in due punti. Dal punto di vista analitica possiamo approssimare il logaritmo nell'ultima formula per $a \gg D$. Si ha:

$$\ln \frac{(a+D)^2}{a(a+2D)} = \ln \frac{(1+D/a)^2}{(1+2D/a)} = 2\ln(1+D/a) - \ln(1+2D/a)$$

La quantità D/a sarà molto minore di uno e potremo sviluppare i logaritmi in serie di Taylor secondo la:

$$ln(1+\varepsilon) \approx ln(1) + \left.\frac{1}{1+\varepsilon}\right|_0 \varepsilon - \frac{1}{2}\left.\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\right|_0 \varepsilon^2 + \ldots.. \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \ldots..$$

Si ottiene:

$$2\,ln(1+D/a) - ln(1+2D/a) \approx$$

$$\approx 2\left[D/a - \frac{1}{2}(D/a)^2\right] - \left[2D/a - \frac{1}{2}(2D/a)^2\right] \approx \frac{D^2}{a^2}$$

Si ha quindi che l'espressione della forza, nel limite $a>>D$, assume la forma:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} ln \frac{(a+D)^2}{a(a+2D)} \hat{x} \approx \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 D^2} \frac{D^2}{a^2} \hat{x} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \hat{x}$$

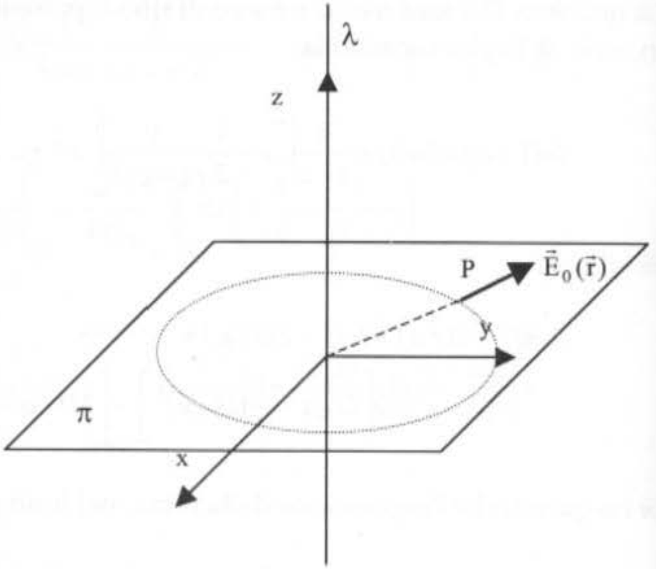
Si ha quindi che la forza scambiata tra i due segmenti a distanza a è quella che si ottiene se si considera tutta la loro carica concentrata in due punti a distanza a.

ESERCIZIO 6.4 *Un filo indefinito è carico con densità di carica lineare uniforme positiva $\lambda=2\cdot10^{-9}$C/cm. Quale velocità verrà impartita dal campo elettrostatico ad un elettrone che parta da fermo da una distanza pari a 1cm quando esso transita ad una distanza di 0.5 cm dal filo.*

SOLUZIONE

L'elettrone subisce la forza di attrazione elettrostatica esercitata dalla carica positiva distribuita uniformemente sul filo con densità λ.

Come al solito spezziamo il problema in due sottoproblemi. Calcoliamo prima il campo elettrostatico generato dal filo in tutto lo spazio intorno ad esso $\vec{E}_0(\vec{r})$. In seguito ci ricorderemo che la forza subita dall' elettrone è data da:



$$\vec{F} = -e\vec{E}_0$$

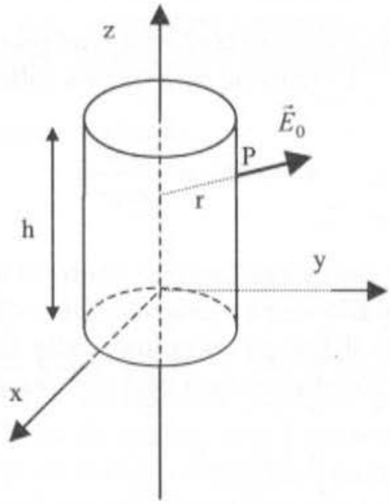
ed applicheremo tale risultato per ricavare l'equazione del moto dell'elettrone e la sua velocità finale.

Calcoliamo quindi il campo generato dal filo. Per simmetria ci aspettiamo che la struttura delle linee di campo generate dal filo sia cilindrica; il campo in un punto P è sempre contenuto nel piano π perpendicolare al filo indefinito passante per P ed avrà simmetria radiale in tale piano, come indicato in figura; la struttura delle linea di campo non cambia se si trasla il piano lungo la direzione del filo. Data la simmetria possiamo utilizzare agevolmente il teorema di Gauss per ricavare l'espressione del campo elettrostatico in un generico punto P a distanza r dal filo. Scegliamo una superficie Σ cilindrica passante per P, quindi di raggio di base r, e altezza h e d applichiamo ad essa il teorema di Gauss:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_0(\vec{r})) = \frac{Q^{INT}}{\varepsilon_0}$$

L'integrale di flusso può essere calcolato in modo semplice, spezzandolo nei tre contributi dati dalle superfici di base e da quella laterale.

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_0(\vec{r}) = \int_{\Sigma_{base1}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS + \int_{\Sigma_{base2}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS + \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS$$



I primi due integrali sono nulli dal momento che il campo elettrostatico $\vec{E}_0(\vec{r})$ è sempre parallelo alle superfici di base, ovvero perpendicolare ai loro versori normali, ed i prodotti scalari negli integrandi sono identicamente nulli. Il terzo integrale si semplifica notevolmente dal momento che $\vec{E}_0(\vec{r})$ è sempre parallelo alla normale alla superficie laterale e costante in modulo su essa. Si ha:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_0(\vec{r}) = \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = \int_{\Sigma_{lat}} E_0 dS = E_0 \int_{\Sigma_{lat}} dS = E_0 2\pi r h$$

Il flusso deve essere uguagliato alla carica totale contenuta all'interno della superficie Σ, pari alla carica che si trova sul segmento di lunghezza h delimitato dalle due superfici di base del cilindro. Si ha:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_0(\vec{r}) = E_0 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Elaborando si ottiene l'espressione del campo elettrico:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{n}$$

con $\hat{n}$ versore contenuto nel piano π e radiale su di esso.

L'elettrone sarà quindi sottoposto alla forza elettrica:

$$\vec{F} = -e\vec{E}_0 = \frac{-e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{n}$$

Se esso viene lasciato libero di muoversi, inizialmente fermo, a distanza R_1 dal filo verrà accelerato verso di esso. Il teorema delle forze vive ci assicura che il lavoro compiuto dalla forza elettrica nel corso dello spostamento dell'elettrone sarà pari alla variazione delle sua energia cinetica:

$$L = T_2 - T_1$$

Dal momento che all'istante iniziale la velocità è nulla si ha $T_1=0$ e l'energia cinetica dell'elettrone nel momento in cui transita a distanza R_2 sarà:

$$T_2 = L = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F}el \cdot \vec{dl} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{n}\cdot dl = \frac{\lambda e}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_1}{R_2}$$

Esprimendo l'energia cinetica in termini di velocità e ricavando l'espressione per quest'ultima si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda e}{m\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_1}{R_2}}$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$v = 2.96 \cdot 10^6 m/s$$

Alternativamente possiamo ricavare dall'espressione del campo elettrostatico quella del potenziale elettrostatico generato dal filo carico. Risolviamo il problema anche in questo modo perché ciò permette di mettere in evidenza una particolarità del potenziale generato da distribuzioni di carica che non sono circoscritte ad una zona limitata dello spazio ma si estendono fino all'infinito.

Dalla definizione di potenziale elettrostatico abbiamo:

$$V_0(r)-V_0(r_{rif})=-\int_{r_{rif}}^{r}\vec{E}_0\cdot\vec{dl}$$

Occorre fissare un punto di riferimento nel quale fissare il valore di V_0. Tuttavia la scelta di imporre $V_0(\infty)=0$, che è usualmente adottata per distribuzioni di carica circoscritte ad una zona di spazio, non è corretta. Non è infatti vero che all'infinito si è lontani da cariche elettriche e quindi che il potenziale è nullo. Tale evenienza è evidente se si tenta di imporre la condizione $V_0(\infty)=0$ e si risolve l'integrale di campo:

$$V_0(r)=-\int_{\infty}^{r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'}dr'=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\,r'\Big|_{\infty}^{r}$$

che ovviamente dà una soluzione divergente se si prova a sostituire l'estremo di integrazione inferiore nella funzione integrale. Occorre quindi imporre la condizione di annullamento in un punto al finito. Poniamo:

$$V_0(R_1)=0$$

Avremo:

$$V_0(r)=-\int_{R_1}^{r}\vec{E}_0\cdot\vec{dl}==\int_{r}^{R_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'}dr'=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}ln\frac{R_1}{r}$$

A partire dalla conoscenza della funzione potenziale possiamo utilizzare il teorema di conservazione dell'energia meccanica per ricavare l'energia cinetica dell'elettrone in R_2. Avremo:

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

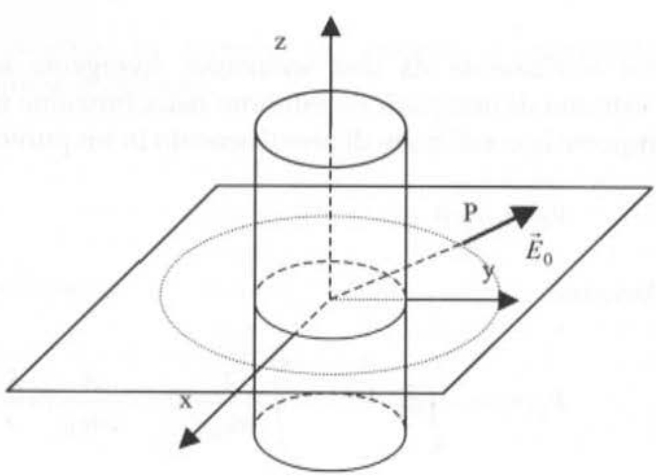
Ovvero, essendo $T_1=0$:

$$T_2 = U_1 - U_2 = -eV_{01} + eV_{02} = e(V_{02} - V_{01}) =$$
$$= \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(ln\frac{R_1}{R_2} - ln\frac{R_1}{R_1} \right) = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{R_1}{R_2}$$

ottenendo lo stesso risultato analitico che avevamo ricavato in precedenza.

ESERCIZIO 6.5 *Si calcolino in tutto lo spazio gli andamenti del campo e del potenziale elettrostatico generati da una distribuzione uniforme di carica, con densità di volume ρ_0, contenuta in un volume cilindrico di lunghezza infinita e raggio della sezione pari ad R. Per il calcolo si utilizzi il teorema di Gauss e si considerino le cariche nel vuoto.*

SOLUZIONE

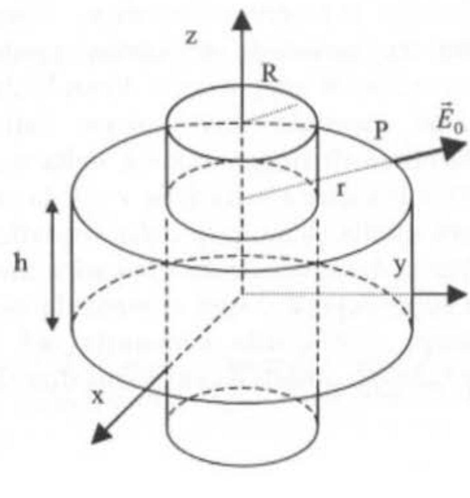


Volendo applicare il teorema di Gauss per risolvere l'esercizio, è necessario identificare una particolare simmetria del campo elettrostatico generato dalla distribuzione di carica. Solo in tal caso infatti il calcolo dell'integrale di flusso del campo elettrostatico presente nel teorema risulta facile. Nel caso in cui la simmetria del campo generato sia molto complessa, o addirittura inesistente, l'uso del teorema di Gauss, pur rimanendo questo assolutamente valido, non ci aiuta nella soluzione del problema.

La distribuzione di carica del problema è rappresentata schematicamente in figura, ove si intende che il cilindro sia infinitamente esteso lungo la direzione z. Data la simmetria della distribuzione di carica e la sua estensione all'infinito, il campo elettrico in un generico punto P sarà sempre contenuto nel piano perpendicolare all'asse di simmetria passante per P. In tale piano la simmetria delle linee di campo è radiale, ovvero il campo elettrostatico ad una distanza fissata r dall'asse assume la stessa intensità e direzione sempre passante per la proiezione dell'asse di simmetria sul piano. In complesso la simmetria del campo elettrostatico generato dalla distribuzione di carica è di tipo cilindrico.

Volendo calcolare il campo in un generico punto P a distanza r dall'asse della distribuzione mediante il teorema di Gauss dobbiamo scegliere una superficie che passi per P e che renda particolarmente semplice il calcolo dell'integrale di flusso. Data la simmetria è naturale scegliere una superficie cilindrica con asse coincidente con l'asse z, di raggio r ed altezza h, come indicato in figura. Il teorema di Gauss espresso in termini integrali, stabilisce che:

$$\int_{S_{cil}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = \frac{Q^{INT}}{\varepsilon_0}$$



Dobbiamo quindi calcolare l'integrale a sinistra dell'uguaglianza. Per qualsiasi valore di r, l'integrale di flusso può essere spezzato in tre integrali, effettuati sulle superfici laterale e di base. Si ha:

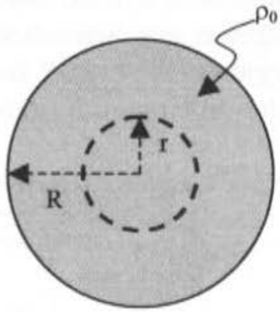
$$\int\limits_{S_{cil}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS = \int\limits_{S_{base1}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS + \int\limits_{S_{base2}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS + \int\limits_{S_{lat}} \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dS$$

I primi due integrali sono nulli; il vettore campo elettrostatico è infatti sempre perpendicolare alla normale alle superfici di base ed il prodotto scalare campo normale è identicamente nullo. L'integrale sulla superficie laterale è particolarmente semplice, con la scelta della superficie che abbiamo effettuato. Si ha infatti:

$$\int\limits_{S_{lat}} \vec{E}_0(r) \cdot \hat{n} dS = \int\limits_{S_{lat}} E_0(r) dS = E_0(r) \int\limits_{S_{lat}} dS = 2\pi r h E_0(r)$$

dove la prima uguaglianza deriva dal parallelismo tra il campo elettrostatico ed il versore normale alla superficie ovunque su questa e la seconda è determinata dal fatto che l'intensità del campo è la stessa per qualsiasi punto alla stessa distanza r dall'asse del cilindro.

Una volta calcolato l'integrale di flusso è sufficiente uguagliarlo alla carica totale contenuta nella superficie di integrazione divisa per ε_0 per ottenere l'espressione del campo elettrico per ogni valore di r. Risulta evidente che la quantità di carica contenuta nella superficie di integrazione dipende da r. In figura viene mostrata una sezione della superficie cilindrica di integrazione e della zona in cui si trova la carica elettrica. Se $r \leq R$ la carica interna sarà quella delimitata dalla superficie cilindrica di Gauss di raggio r ed altezza h; aumentando r la carica interna aumenterà. Se $r \geq R$, nonostante la superficie di Gauss aumenti la carica al suo interno rimarrà sempre la stessa, cioè quella contenuta nel cilindro di raggio R ed altezza h. Dividiamo quindi il calcolo nei due casi.



$\underline{r \leq R}$

La carica interna alla superficie di Gauss è data da:

$$Q^{INT} = \int_V \rho_0 d\tau = \rho_0 \int_V d\tau = \pi r^2 h \rho_0$$

dove V è il volume racchiuso dalla superficie di integrazione. Si noti che l'integrale è di facile valutazione dal momento che la densità di carica è costante.

Uguagliando il flusso alla carica interna divisa per la costante dielettrica del vuoto si ha:

$$2\pi r h E_0(r) = \frac{\pi r^2 h \rho_0}{\varepsilon_0}$$

dalla quale si ricava l'espressione del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio per cui $r \leq R$. Si ha:

$$E_0(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \qquad , \qquad r \leq R$$

Il campo elettrico cresce quindi linearmente con r, a partire dall'origine fino ad $r=R$. In $r=R$ il campo vale:

$$E_0(r) = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}$$

$\underline{r \geq R}$

La carica interna alla superficie di Gauss, comunque grande si scelga $r \geq R$, è quella contenuta nel cilindro di raggio R ed altezza h. Analogamente al caso precedente si ha:

$$Q^{INT} = \int_V \rho_0 d\tau = \rho_0 \int_V d\tau = \pi R^2 h \rho_0$$

dove V è il volume racchiuso dalla superficie di integrazione. Uguagliando il flusso alla carica interna divisa per la costante dielettrica del vuoto si ha:

$$2\pi r h E_0(r) = \frac{\pi R^2 h \rho_0}{\varepsilon_0}$$

dalla quale si ricava l'espressione del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio per cui $r \geq R$. Si ha:

$$E_0(r) = \frac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0 r} \qquad , \qquad r \geq R$$

Il campo elettrico decresce come $1/r$ a partire da $r=R$ fino all'infinito. Si noti che per $r=R$ esso vale:

$$E_0(r) = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}$$

ovvero che il campo è continuo nel punto $r=R$ dove le due soluzioni che si sono trovate si raccordano.
Si noti che l'espressione che abbiamo ricavato per $r \geq R$ può essere riscritta in forma differente facendo comparire la carica per unità di lunghezza contenuta nella distribuzione data $\lambda = \frac{\rho_0 \pi R^2 h}{h} = \rho_0 \pi R^2$. Si ha:

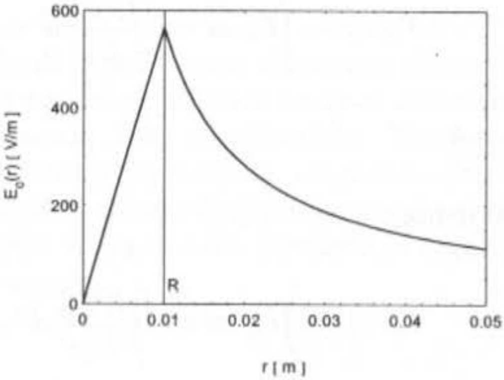
$$E_0(r) = \frac{\lambda}{2\lambda \varepsilon_0 r}$$

Quest'ultima espressione mostra che all'esterno della distribuzione di carica ($r \geq R$) il campo è esattamente uguale a quello generato da un filo indefinito con densità di carica lineare λ, ovvero che è come se tutta la carica fosse concentrata sull'asse di simmetria cilindrica.

Riassumendo, il campo generato dalla distribuzione di carica è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E_0(r) = \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} & r \le R \\ E_0(r) = \dfrac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0 r} & r \ge R \end{cases}$$

In figura viene riportato l'andamento del campo elettrico per alcuni valori scelti dei parametri ($\rho_0=10^{-6}C/m^3$, $R=0.01m$).



Il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica si può ricavare a partire dalla conoscenza del campo elettrostatico, applicando la definizione:

$$V_0(r) - V_0(r_{rif}) = -\int_{r_{rif}}^{r} \vec{E}_0 \cdot \vec{dl}$$

Occorre fissare un punto di riferimento nel quale fissare il valore di V_0. Tuttavia la scelta di imporre $V_0(\infty)=0$, che è usualmente adottata per distribuzioni di carica circoscritte ad una zona di spazio, non è corretta. Non è infatti vero che all'infinito si è lontani da cariche elettriche e quindi che il potenziale è nullo. Occorre quindi imporre la condizione di annullamento in un punto al finito. Poniamo:

$$V_0(R) = 0$$

A partire dal valore del potenziale in tale punto possiamo calcolare il valore in tutti i punti interni ed esterni al volume della distribuzione. Spezziamo il problema nei due casi $r \le R$ ed $r \ge R$

.

<u>$r \le R$</u>

Avremo:

$$V_0(r) = -\int_R^r \vec{E}_0 \cdot \vec{dl} == \int_r^R \frac{\rho_0 r'}{2\varepsilon_0} dr' = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right)$$

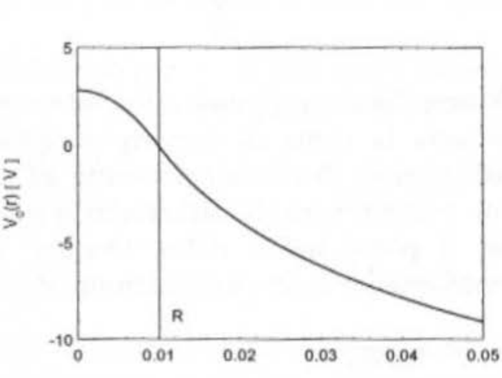
<u>$r \ge R$</u>

Avremo:

$$V_0(r) = -\int_R^r \vec{E}_0 \cdot \vec{dl} == \int_r^R \frac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0 r'} dr' = \frac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} \ln\frac{R}{r}$$

Il potenziale elettrostatico in tutto lo spazio è dato quindi da:

$$\begin{cases} V_0(r) = \dfrac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right) & r \le R \\ V_0(r) = \dfrac{R^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} \ln\dfrac{R}{r} & r \ge R \end{cases}$$



In figura viene riportato l'andamento del potenziale per alcuni valori scelti dei parametri ($\rho_0=10^{-6}C/m^3$, $R=0.01m$).

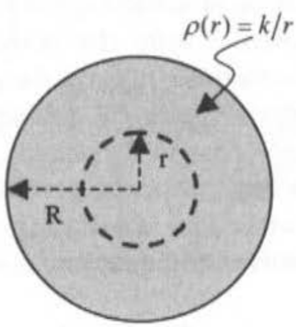
ESERCIZIO 6.6 *Della carica elettrica è distribuita all'interno di una sfera di raggio R=1cm secondo una distribuzione di carica dipendente da r, data da* $\rho(r)=k/r$ *con* $k=10^{-8}$ C/m^2. *Si considerino le cariche nel vuoto. Si calcoli l'andamento del campo elettrostatico in tutto la spazio ($0 \le r < \infty$) dando un grafico del risultato. Si dia il valore numerico del campo elettrostatico per r=R.*

SOLUZIONE

Dal momento che la distribuzione di carica ha una simmetria sferica il campo elettrico da essa generato sarà a simmetria sferica. Le linee di campo saranno uscenti dal centro di simmetria della distribuzione. Possiamo applicare il teorema di Gauss per risolvere il problema, scegliendo come superficie di integrazione una superficie sferica di generico raggio r. Si ricorda che è proprio la genericità della scelta di r che permette in seguito di avere l'espressione del campo per ogni *r*.

L'integrale di flusso sarà dato da:

$$\int_S \vec{E}_0(r)\cdot\hat{n}dS=\int_S E_0(r)dS=E_0(r)\int_S dS=4\pi r^2E_0(r)$$



dove la prima uguaglianza deriva dal parallelismo tra il campo elettrostatico ed il versore normale alla superficie ovunque su questa e la seconda è determinata dal fatto che, per simmetria, l'intensità del campo è la stessa per qualsiasi punto alla stessa distanza *r* dal centro della superficie sferica.

Analogamente al caso dell'esercizio precedente, una volta calcolato l'integrale di flusso è sufficiente uguagliarlo alla carica totale contenuta nella superficie di integrazione divisa per ε_0 per ottenere l'espressione del campo elettrico per ogni valore di r. Anche in questo caso risulta evidente che la quantità di carica contenuta nella superficie di integrazione dipende da r. In figura viene mostrata una sezione della superficie sferica di integrazione e della zona in cui si trova la carica elettrica. Se $r \leq R$ la carica interna sarà quella delimitata dalla superficie sferica di Gauss di raggio r; aumentando r la carica interna aumenterà. Se $r \geq R$, nonostante che la superficie di Gauss aumenti la carica al suo interno rimarrà sempre la stessa, cioè quella contenuta nella sfera raggio R. Occorrerà tuttavia prestare attenzione al fatto che la densità di carica elettrica della distribuzione non è costante all'interno della superficie sferica ma dipende dall'inverso di r. Dividiamo quindi il calcolo nei due casi.

$\underline{r \leq R}$

La carica interna alla superficie di Gauss è data da:

$$Q^{INT} = \int_V \rho(r)d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{r} \frac{k}{r'} r'^2 \, dr' = \int_0^{r} \frac{k}{r'} 4\pi r'^2 \, dr'$$

dove V è il volume racchiuso dalla superficie di integrazione. Dal momento che la simmetria è sferica si è espresso l'elemento di volume in coordinate polari. Il fatto che la densità ρ dipenda solo dalla distanza dal centro di simmetria e non da θ e ϕ, rende il calcolo semplice. Si noti che nella forma intermedia in cui abbiamo lasciato espresso l'integrale risulta che la carica può essere calcolata sommando i contributi infinitesimi ottenuti moltiplicando la densità di carica in r', pari a k/r', per il volume della corteccia sferica di raggio r', superficie $4\pi r'^2$, e spessore dr'. Semplificando e risolvendo l'integrale si ottiene:

$$Q^{INT} = 2\pi k r^2$$

Uguagliando il flusso alla carica interna divisa per la costante dielettrica del vuoto si ha:

$$4\pi r^2 E_0(r) = \frac{2\pi k r^2}{\varepsilon_0}$$

dalla quale si ricava l'espressione del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio per cui $r \le R$. Si ha:

$$E_0(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0} \qquad , \qquad r \le R$$

Il campo elettrico è quindi costante all'interno della distribuzione di carica.

<u>$r \ge R$</u>

La carica interna alla superficie di Gauss, comunque grande si scelga $r \ge R$, è quella contenuta nella sfera di raggio R. Analogamente al caso precedente si ha:

$$Q^{INT} = \int_V \rho(r)d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R \frac{k}{r'} r'^2\, dr' = \int_0^R \frac{k}{r'} 4\pi r'^2\, dr' = 2\pi k R^2$$

dove V è il volume racchiuso dalla superficie di integrazione. Uguagliando il flusso alla carica interna divisa per la costante dielettrica del vuoto si ha:

$$4\pi r^2 E_0(r) = \frac{2\pi k R^2}{\varepsilon_0}$$

dalla quale si ricava l'espressione del campo elettrostatico in tutti i punti dello spazio per cui $r \geq R$. Si ha:

$$E_0(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \qquad , \qquad r \geq R$$

Il campo elettrico decresce come $1/r^2$ a partire da $r=R$ fino all'infinito. Si noti che per $r=R$ esso vale:

$$E_0(R) = \frac{k}{2\varepsilon_0}$$

ovvero che il campo è continuo nel punto $r=R$ dove le due soluzioni che si sono trovate si raccordano.
Si noti che l'espressione che abbiamo ricavato per $r \geq R$ può essere riscritta in forma differente facendo comparire la carica totale contenuta nella distribuzione data $Q^{TOT} = 2\pi k R^2$. Si ha:

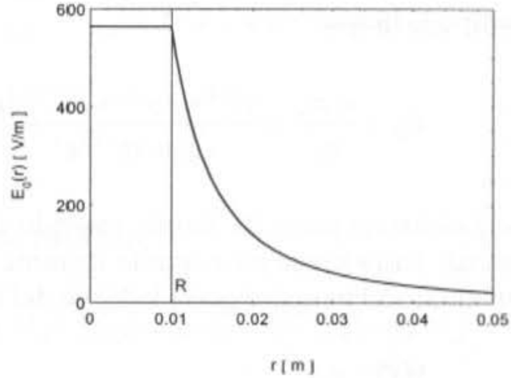
$$E_0(r) = \frac{Q^{TOT}}{4\lambda\varepsilon_0 r^2}$$

Quest'ultima espressione mostra che all'esterno della distribuzione di carica ($r \geq R$) il campo è esattamente uguale a quello generato da tutta la carica della distribuzione concentrata nel centro di simmetria.

Riassumendo il campo generato dalla distribuzione di carica è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} E_0(r) = \dfrac{k}{2\varepsilon_0} & r \leq R \\ E_0(r) = \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$$

In figura viene riportato l'andamento del campo elettrico per i valori dati dei parametri. In $r=R$ il valore di campo elettrico è pari a $E_0(R)=565$ V/m.



ESERCIZIO 6.7 *Un elettrone che si trova in una regione dello spazio in cui il campo elettrostatico è omogeneo (indipendente dalla posizione) subisce un'accelerazione pari a 10^{14} cm/s^2. Si trovino: (1) L'intensità del campo elettrostatico, (2) la velocità che acquista l'elettrone in un intervallo di tempo pari a $1\mu s$, considerando che inizialmente sia fermo, (3) Il lavoro compiuto dalle forze elettriche durante tale intervallo di tempo, (4) La differenza di potenziale che in tale intervallo di tempo esperimenta l'elettrone.*

SOLUZIONE

L'accelerazione subita dall'elettrone è causata dalla forza elettrica che agisce su di esso. Disinteressandoci della natura vettoriale della equazione di Newton, pensando quindi di averla proiettata su un asse parallelo alla forza elettrica, si ha:

$$a = \frac{F_{el}}{m_e} = \frac{q_e E_0}{m_e}$$

dove m_e e q_e sono rispettivamente la massa ed il modulo della carica dell'elettrone. Dal momento che la carica dell'elettrone è negativa il campo elettrico è diretto in verso opposto all'accelerazione. Per il modulo del campo si ricava:

$$E_0 = \frac{a \cdot m_e}{q_e} = \frac{10^{12} m/s^2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} kg}{1.6 \cdot 10^{-19} C} = 5.63V/m$$

Se l'elettrone parte da fermo, essendo il campo elettrostatico omogeneo e quindi l'accelerazione costante durante il moto, esso avrà velocità che in funzione del tempo seguirà la legge del moto uniformemente accelerato:

$$v(t) = a \cdot t$$

Ad un microsecondo dall'inizio del moto esso avrà assunto la velocità:

$$v(1\mu s) = 10^{12} m/s^2 \cdot 10^{-6} s = 10^6 m/s$$

Si noti che tale valore è solo trecento volte inferiore alla velocità della luce nel vuoto.

Il lavoro compiuto dalle forze elettriche durante l'intervallo di tempo detto è dato da:

$$L = \int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s}$$

Dal momento che lo spostamento avviene in direzione della forza e che questa è costante durante il moto si ha semplicemente:

$$L(t) = q_e E_0 s(t)$$

dove $s(t)$ è lo spazio percorso dall'istante in cui ha avuto inizio il moto ed è dato da:

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

avendo scelto $s(0)=0$. Si ha quindi che:

$$L(t) = \frac{1}{2} a q_e E_0 t^2 = \frac{1}{2} \frac{(q_e E_0)^2}{m_e} t^2$$

che calcolata per $t=1\mu s$ dà il seguente risultato:

$$L(1\mu s) = \frac{1}{2} 10^{12}\, m/s^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 5.63 V/m \cdot 10^{-12}\, s^2 = 4.5 \cdot 10^{-19}\, J$$

Per definizione la differenza di potenziale tra due punti dello spazio è pari all'integrale di linea del campo elettrico tra i due punti:

$$\Delta V = V_{fin} - V_{in} = -\int_{P_{in}}^{P_{fin}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s}$$

l'integrale a destra dell'uguaglianza è pari al lavoro delle forze elettriche compiuto sulla carica dell'elettrone diviso per la carica stessa, per cui:

$$\Delta V = V_{fin} - V_{in} = -\int_{P_{in}}^{P_{fin}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{q_e} \int_{P_{in}}^{P_{fin}} q_e \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{q_e} \int \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -\frac{L}{q_e}$$

Si ha quindi che la differenza di potenziale tra la posizione finale e quella iniziale dell'elettrone è data da:

$$\Delta V = V_{fin} - V_{in} = \frac{-4.5 \cdot 10^{-19}\, J}{-1.6 \cdot 10^{-19}\, C} = 2.81 V$$

Nel suo moto l'elettrone passa da punti in cui il potenziale elettrostatico è più basso a punti in cui esso è più alto. Conseguentemente l'energia elettrostatica dell'elettrone, pari al prodotto della sua carica, negativa, per il potenziale, diminuisce convertendosi in energia cinetica.

ESERCIZIO 6.8 *Due sfere di metallo, una con carica di 10nC e raggio 3cm e l'altra con raggio 2cm e che si trova ad un potenziale elettrostatico pari a 9000V, ad un certo istante sono poste in contatto elettrico tramite un filo conduttore la cui capacità può essere trascurata. Si avrà passaggio di carica tra le due sfere per raggiungere una situazione di equilibrio (scarica). Si trovino: (1) il potenziale della prima sfera prima del contatto, (2) la carica della seconda sfera prima del contatto, (3) l'energia di ciascuna sfera prima del contatto, (4) la carica ed il potenziale della prima sfera dopo il contatto, (5) la carica ed il potenziale della seconda sfera dopo il contatto, (6) l'energia delle sfere connesse dal filo.*

SOLUZIONE

Sappiamo che in un conduttore carico il potenziale elettrostatico è costante all'interno del conduttore superficie compresa, e la carica in eccesso si dispone sulla superficie del conduttore. Ricaviamo prima di tutto l'espressione del potenziale elettrostatico al quale si porta una sfera conduttrice di raggio generico R se viene caricata con una carica Q. Nel caso di un conduttore sferico, data la simmetria ci aspettiamo che la carica si disponga sulla superficie con densità di carica costante pari a:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Dal momento che il conduttore è equipotenziale, possiamo calcolare il potenziale elettrostatico V_0 di un suo qualsiasi punto, riferito al valore del potenziale in un punto all'infinito che sceglieremo essere nullo, per ottenere il potenziale del conduttore. Scegliamo come punto per il calcolo il centro della sfera conduttrice. Un generico elemento di superficie dS sulla superficie sarà carico con carica:

$$dq = \sigma dS$$

Dal momento che le sue dimensioni sono infinitesime lo potremo considerare di dimensioni nulle e scrivere il potenziale che esso genera al centro della sfera, a distanza R, come:

$$dV_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R}$$

Tale espressione presuppone che si sia scelta la costante arbitraria del potenziale in modo che il potenziale stesso si annulli all'infinito. Il potenziale elettrostatico dovuto a tutta la carica disposta sulla superficie sarà dato, per il principio di sovrapposizione, dalla somma di tutti i contributi dei singoli dS, ovvero dall'integrale:

$$V_0 = \int_S dV_0$$

esteso alla superficie S del conduttore. Si ha:

$$V_0 = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{R}\int_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{R}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Si ha quindi che tutta la sfera conduttrice carica, caricata con Q, si porta al potenziale V_0 che abbiamo ricavato.

L'energia immagazzinata in un sistema di cariche elettriche disposte secondo una configurazione geometrica qualsiasi, se si considerano cariche discrete e puntiformi, è data dall'espressione:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}$$

dove r_{ij} è la distanza mutua tra ogni coppia di cariche i e j. Tale espressione può essere modificata, facendo comparire il potenziale elettrostatico, notando che la carica Q_i può essere spostata fuori dalla sommatoria su j, in quanto non dipende da j, e che la sommatoria su j risulta essere pari al potenziale elettrostatico nel punto in cui si trova la carica i a causa di tutte le altre $N-1$ cariche elettriche. Analiticamente:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i V_{0i}$$

Quindi l'energia elettrostatica totale è pari alla somma dei prodotti di ogni carica per il potenziale a cui si trova divisa per due. In generale se la carica è distribuita in modo continuo nello spazio con densità di volume di carica ρ si avrà:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(x,y,z) V_0(x,y,z)\, d\tau$$

Tale espressione si ricava considerando che la carica contenuta in un volume $d\tau$, data da $\rho d\tau$, darà all'energia elettrostatica un contributo elementare dato da $1/2\rho d\tau \cdot V_0$ dove V_0 è il potenziale a cui si trova il volumetto $d\tau$.

Possiamo ora procedere alla soluzione dei quesiti proposti.

(1) Il potenziale della prima sfera prima del contatto avrà quindi il valore:

$$V_0^{(1)} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{10\cdot 10^{-9}\,C}{4.\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\,C/V\cdot m\cdot 0.03m} = 2996V$$

(2) La carica sulla seconda sfera prima del contatto sarà:

$$Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_0^{(2)} = 4.\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\,C/V\cdot m\cdot 0.02m\cdot 9000V = 20nC$$

(3) L'energia elettrostatica di ciascuna sfera carica sarà data dall'espressione:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{S^{(i)}} \sigma^{(i)} V_0^{(i)} dS = \frac{1}{2} \sigma^{(i)} V_0^{(i)} \int_{S^{(i)}} dS = \frac{1}{2} \sigma^{(i)} V_0^{(i)} S^{(i)} = \frac{1}{2} Q_i V_0^{(i)}$$

dove si è tenuto in considerazione che la carica è distribuita su una superficie con densità costante e che il potenziale della superficie è costante. Numericamente si ottiene nei due casi:

$$U^{(1)} = \frac{1}{2} Q_1 V_0^{(1)} = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{-9} C \cdot 2996V = 3.0 \cdot 10^{-5} J$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} Q_2 V_0^{(2)} = \frac{1}{2} 20 \cdot 10^{-9} C \cdot 9000V = 1.8 \cdot 10^{-4} J$$

(4 e 5) Dopo che le sfere saranno state portate in contatto esse si porteranno ad un nuovo valore del potenziale elettrostatico V_0', comune alle due. La carica totale presente sul sistema, pari a $Q^{TOT} = Q_1 + Q_2$, si ripartirà tra le due sfere con nuove proporzioni, Q_1' e Q_2', stante però il fatto che la carica totale Q^{TOT} rimarrà la stessa. Il potenziale cui si porta ognuna delle due sfera si otterrà dalla stessa formula usata precedentemente:

$$V_0' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1'}{R_1}$$

$$V_0' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2'}{R_2}$$

da cui, uguagliando, si ricava:

$$\frac{Q_1'}{Q_2'}=\frac{R_1}{R_2}$$

Accoppiando tale relazione alla conservazione della carica, per cui $Q^{TOT}=Q_1+Q_2=Q_1'+Q_2'=cost$, si ottiene:

$$Q_2'=Q^{TOT}\frac{R_2}{R_1+R_2}$$
$$Q_1'=Q^{TOT}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Numericamente si ha:

$$Q_2'=30nC\frac{0.02m}{0.05m}=12nC$$
$$Q_1'=30nC\frac{0.03m}{0.05m}=18nC$$

Il potenziale elettrostatico cui si portano le due sfere vale quindi:

$$V_0'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1'}{R_1}=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\ C/V\cdot m}\frac{12\cdot 10^{-9}C}{0.03m}=3595V$$

(6) L'energia elettrostatica totale del sistema dopo il contatto sarà data da:

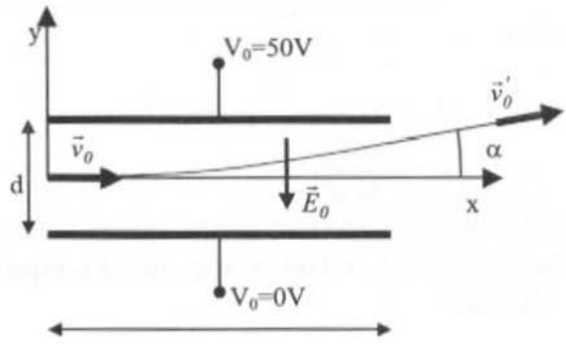
$$U=\frac{1}{2}Q^{TOT}V_0'=\frac{1}{2}30\cdot 10^{-9}C\cdot 3595V=5.39\cdot 10^{-5}J$$

Si noti che tale valore è inferiore alla somma dei valori di energia elettrostatica dei due corpi precedenti al contatto. Ciò indica che una parte dell'energia elettrostatica è andata perduta durante il processo di ridistribuzione della carica tra le sfere. La perdita di energia è dovuta alla dissipazione per effetto Joule causata dallo scorrimento di carica, e quindi di corrente elettrica, nei conduttori.

ESERCIZIO 6.9 *Un elettrone entra nella zona compresa tra le armature di un condensatore piano con velocità contenuta in un piano parallelo alle armature e diretta lungo uno dei loro lati, di modulo pari a $10^7 m/s$. Le armature del condensatore sono quadrate di lato 5cm e sono distanti tra loro 0.5 cm. La differenza di potenziale tra le armature del condensatore è pari a 10V. Si trovi il modulo e direzione della velocità dell'elettrone nel momento in cui esce dal condensatore.*

SOLUZIONE

Nel momento in cui l'elettrone entra nella zona di spazio delimitata dalle armature del condensatore esso subisce un forza di natura elettrostatica pari a:



$$\vec{F} = -e\vec{E}_0$$

dove $\vec{E}_0$ è il campo elettrostatico costante tra le armature del condensatore, con direzione e verso indicati in figura. L'elettrone sarà quindi soggetto ad una accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}_0}{m}$$

costante diretta nel verso positivo dell'asse y. Il moto sarà quindi uniformemente accelerato lungo la direzione y ed uniforme lungo la direzione x. La traiettoria sarà analoga alla traiettoria di un corpo di massa m lanciato in aria sotto l'azione dell'accelerazione di gravità, quindi parabolica. Scomponendo il problema lungo i due assi cartesiani si ha:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{eE_0}{m} \end{cases}$$

Ricordando che il campo elettrostatico in un condensatore piano è dato da:

$$E_0 = \frac{\Delta V_0}{d}$$

si ha:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{e\Delta V_0}{m \cdot d} \end{cases}$$

Integrando tale relazioni rispetto al tempo si ottengono le espressioni delle velocità:

$$\begin{cases} v_x = \int a_x dt = v_{x0} \\ v_y = \int a_y dt = a_y t + v_{y0} \end{cases}$$

Dal momento che all'ingresso del condensatore la velocità dell'elettrone ha solo componente x si ha:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \dfrac{e\Delta V_0}{m \cdot d} t \end{cases}$$

L'elettrone continua quindi a muoversi nella direzione x con la stessa velocità che aveva all'ingresso e contemporaneamente acquisterà velocità lungo y. Integrando ancora una volta le relazioni precedenti si ottengono le leggi orarie lungo x e lungo y. Si ha:

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x dt = v_0 t + x_0 \\ y(t) = \int v_y dt = \int \dfrac{e\Delta V_0}{m \cdot d} t dt = \dfrac{e\Delta V_0}{2m \cdot d} t^2 + y_0 \end{cases}$$

Per la scelta del sistema di riferimento che si è fatta si ha $x_0 = y_0 = 0$ e:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{e\Delta V_0}{2m \cdot d} t^2 \end{cases}$$

Eliminando il parametro tempo dalle due relazioni precedenti si ottiene la traiettoria seguita dall'elettrone:

$$y = \frac{e\Delta V_0}{2m \cdot d \cdot v_0^2} x^2$$

La traiettoria è quindi una parabola con concavità rivolta verso l'alto. Il tempo t^* impiegato dall'elettrone ad attraversare il condensatore si ricava dalla condizione $x(t^*) = L$ e vale:

$$t^* = \frac{L}{v_0}$$

All'uscita del condensatore la velocità dell'elettrone avrà componenti:

$$\begin{cases} v_x' = v_x(t^*) = v_0 \\ v_y' = v_y(t^*) = \dfrac{e\Delta V_0}{m \cdot d}\dfrac{L}{v_0} \end{cases}$$

Il modulo della velocità di uscita sarà quindi:

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{e\Delta V_0}{m \cdot d}\frac{L}{v_0}\right)^2}$$

Numericamente si ottiene:

$$v' = \sqrt{10^{14} m^2/s^2 + \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 10V}{9 \cdot 10^{-31} kg \cdot 0.005m}\frac{0.05m}{10^7 m/s}\right)^2} = 1.02 \cdot 10^7 m/s$$

La velocità formerà un angolo α con l'asse delle x che può essere ricavato dalla relazione:

$$v_y' = v_x' tg\alpha$$

Si ha quindi:

$$\alpha = arctg\frac{v_y'}{v_x'} = arctg\frac{e\Delta V_0}{m \cdot d}\frac{L}{v_0^2}$$

Effettuando i calcoli si ottiene:

$$\alpha = 10.1°$$

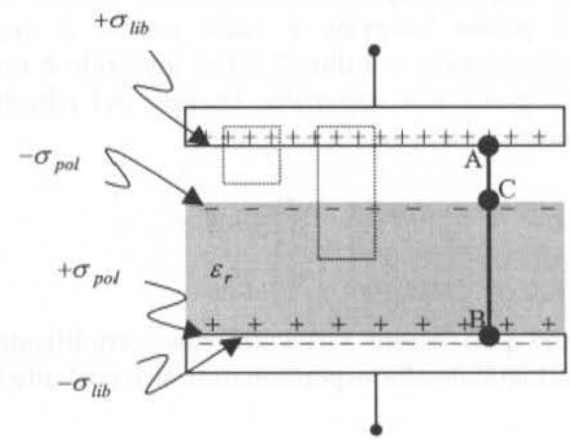
Si noti che per i valori dei parametri dati all'uscita del condensatore l'elettrone avrà traslato lungo la direzione y di una quantità pari a:

$$y(t^*) = \frac{e\Delta V_0}{2m \cdot d} t^{*2} = \frac{e\Delta V_0}{2m \cdot d} \frac{L^2}{v_0^2} = 0.44cm$$

Se l'elettrone entra nel condensatore radente all'armatura inferiore riesce ad uscire senza colpire l'armatura superiore. Se si aumentasse la differenza di potenziale tra le armature ad esempio a *50V*, l'elettrone colpirebbe l'armatura superiore prima di uscire dal condensatore.

ESERCIZIO 6.10 *Un condensatore piano nel quale la distanza tra le armature è di 1cm si trova alla differenza di potenziale di 100V. Il condensatore è scollegato da qualsiasi circuito esterno. All'interno del condensatore vi è un cristallo di bromuro di tallio (ε_r=173), spesso 9.5mm e di superficie tale da occupare tutta la sezione del condensatore, in contatto con una di esse. Il cristallo viene rimosso dal condensatore. A quale differenza di potenziale si porterà il condensatore?*

SOLUZIONE



Dal momento che il condensatore si trova ad una differenza di potenziale ΔV le sue armature saranno cariche con densità di carica $\pm\sigma_{lib}$. Dato che il dielettrico riempie trasversalmente tutto il condensatore, anche se parzialmente il suo spessore, ci aspettiamo che $\pm\sigma_{lib}$ sia costante sulle armature. Il dielettrico sarà polarizzato e sulle sue facce sarà presente una densità di carica di polarizzazione $\pm\sigma_{pol}$, come indicato in figura (gli spessori degli strati non sono in scala). Il campo elettrico avrà direzione perpendicolare alle armature ed il suo modulo cambierà a seconda che ci si trovi nel dielettrico o nell'intercapedine di aria.

Il campo elettrico in ognuno dei due mezzi si può calcolare utilizzando il teorema di Gauss. Scegliamo una superficie di integrazione cilindrica con le superfici di base parallele alle armature del condensatore e le generatrici della superficie laterale perpendicolari ad esse. Una delle due basi sia contenuta nell'armatura superiore e l'altra nel mezzo in cui si vuole calcolare il campo elettrico. La superficie è raffigurata in sezione in figura, per due scelte della seconda base. Per il teorema di Gauss potremo scrivere:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}(\vec{r})) = \frac{Q_{lib}^{(INT)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

L'integrale di flusso può spezzarsi in tre contributi, sulle due superfici di base e su quella laterale:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Sigma_{base1}} \vec{E}\cdot\hat{n}dS + \int_{\Sigma_{base2}} \vec{E}\cdot\hat{n}dS + \int_{\Sigma_{lat}} \vec{E}\cdot\hat{n}dS$$

Il primo integrale è nullo perché il campo all'interno dell'armatura, conduttrice, è nullo. Il terzo integrale è nullo perché il campo elettrico è tangente alla superficie laterale del cilindro, ovvero perpendicolare alla normale ad essa. Si ha quindi:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Sigma_{base2}} \vec{E}\cdot\hat{n}dS$$

che può essere notevolmente semplificato, ricordando che il campo è ortogonale alla superficie di base e costante su di essa. Si ha quindi:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}(\vec{r})) = \int_{\Sigma_{base1}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_{\Sigma_{base1}} E dS = E \int_{\Sigma_{base1}} dS = E \cdot \Sigma_{base1}$$

Utilizziamo ora questa espressione per ricavare il valore del campo elettrico in ognuno dei due mezzi. Se scegliamo la seconda base del cilindro all'interno dell'intercapedine vuota (prima scelta della superficie in figura) avremo che tale flusso dovrà essere eguagliato alla carica libera interna alla superficie di Gauss divisa per la costante dielettrica assoluta del vuoto. Dal momento che la carica libera interna alla superficie è quella intercettata dal cilindro sull'armatura, pari a $\sigma_{lib} \cdot \Sigma_{base1}$, si avrà:

$$E_0 \cdot \Sigma_{base1} = \frac{\sigma_{lib} \cdot \Sigma_{base1}}{\varepsilon_0}$$

dove E_0 è il modulo del campo elettrico nel vuoto che, semplificando, risulta essere pari a:

$$E_0 = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0}$$

Per ricavare il valore di campo elettrico E nel dielettrico, sceglieremo la seconda base del cilindro al suo interno (seconda scelta della superficie in figura). In questo caso si ha:

$$E \cdot \Sigma_{base1} = \frac{\sigma_{lib} \cdot \Sigma_{base1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

da cui:

$$E = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

I valori di campo elettrico così calcolati possono essere utilizzati per calcolare la differenza di potenziale iniziale tra le armature. Per definizione abbiamo che:

$$\Delta V^{(in)} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

dove l'integrale di linea si estende da un punto A sull'armatura superiore ad un punto B sull'armatura inferiore. L'integrale può essere spezzato in due parti, compiute nel mezzo e nel vuoto, dove il campo ha valore diverso. Si ha:

$$\Delta V^{(in)} = \int_A^C \vec{E}_0 \cdot \vec{dl} + \int_C^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Tra tutti i cammini possibili, e tutti equivalenti, ci conviene sceglierne uno che vada dall'armatura superiore a quella inferiore ortogonalmente ad esse, per cui gli integrali si semplificano notevolmente:

$$\Delta V^{(in)} = \int_o^{d-h} E_0 dl + \int_{d-h}^{d} E dl$$

dove h è lo spessore di materiale dielettrico e d è la distanza tra le armature del condensatore. Avremo:

$$\Delta V^{(in)} = \int_o^{d-h} \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0} dl + \int_{d-h}^{d} \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dl = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0} \left[d - h + \frac{h}{\varepsilon_r} \right]$$

Tale risultato ci permette di determinare la densità di carica libera sulle armature del condensatore:

$$\sigma_{lib} = \frac{\varepsilon_0 \Delta V^{(in)}}{d - h + \dfrac{h}{\varepsilon_r}}$$

Nella situazione in cui il dielettrico è stato estratto dal condensatore, dal momento che esso è isolato, la carica sulle sue armature sarà la stessa e così anche la densità di carica. Il campo nel condensatore, che ora è vuoto, sarà dato da:

$$E_0 = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0} = \frac{\Delta V^{(in)}}{d - h + \dfrac{h}{\varepsilon_r}}$$

La differenza di potenziale tra le armature sarà data da:

$$\Delta V^{(fin)} = E_0 d = \frac{\Delta V^{(in)}}{d - h + \dfrac{h}{\varepsilon_r}} d$$

Numericamente si ottiene:

$$\Delta V^{(fin)} = E_0 d = \frac{\Delta V^{(in)}}{d - h + \dfrac{h}{\varepsilon_r}} d = \frac{100V \cdot 0.01m}{0.01m - 0.0095m + \dfrac{0.0095m}{173}} = 1802V$$

ESERCIZIO 6.11 *All'interno di quali limiti può variare la capacità di un sistema costituito da due condensatori variabili la cui capacità può essere variata nell'intervallo compreso tra 10 e 450pF? Un condensatore variabile è un dispositivo nel quale la capacità può essere variata a piacere, entro certi limiti, ad esempio modificandone la superficie.*

SOLUZIONE

Potremo disporre i due condensatori in serie o in parallelo. Sappiamo che la capacità equivalente di due condensatori disposti in parallelo è pari alla somma delle capacità dei singoli condensatori. La capacità di due condensatori in serie è pari all'inverso della somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori; la capacità serie è comunque più piccola della più piccola delle capacità dei singoli condensatori del parallelo.

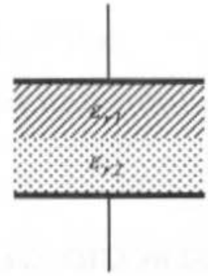
Otterremo quindi la massima capacità equivalente disponendo i due condensatori in parallelo e rendendo massima la loro capacità. Si avrà:

$$C_{eq}^{(max)} = C_1^{(max)} + C_2^{(max)} = 450\,pF + 450\,pF = 0.9\,nF$$

Si otterrà invece la capacità minima disponendo i condensatori in serie e rendendo minima la loro capacità. Si avrà:

$$C_{eq}^{(max)} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1^{(max)}} + \dfrac{1}{C_2^{(max)}}} = 5\,pF$$

ESERCIZIO 6.12 *Un condensatore piano è riempito con due dielettrici differenti come mostrato in figura. Se lo spessore di ognuno dei dielettrici è pari alla metà dello spessore d del condensatore, con superficie S, e le costanti dielettriche relative sono ε_{r1} ed ε_{r2}, quanto vale la capacità del condensatore?*



SOLUZIONE

La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 6.10. Supponiamo di caricare il condensatore con carica Q. Essa si disporrà sulle armature con densità di carica σ_{lib}. Il campo nei due dielettrici potrà calcolarsi applicando il teorema di Gauss analogamente al caso dell'esercizio 6.10. Ripetendo la procedura di calcolo si ottengono i valori dei campi elettrici:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \\ E_2 = \dfrac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \end{cases}$$

rispettivamente nei dielettrici 1 e 2. La differenza di potenziale tra le armature del condensatore sarà data da:

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

dove l'integrale di linea si estende da un punto A sull'armatura superiore ad un punto B sull'armatura inferiore. L'integrale può essere spezzato in due parti, compiute nel dielettrico 1 e 2 di uguale spessore, dove il campo ha valore diverso. Si ha:

$$\Delta V = \int_A^C \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} + \int_C^B \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl}$$

Tra tutti i cammini possibili, e tutti equivalenti, ci conviene sceglierne uno che vada dall'armatura superiore a quella inferiore ortogonalmente ad esse, per cui gli integrali si semplificano notevolmente:

$$\Delta V = \int_o^{d/2} E_1 dl + \int_{d/2}^{d} E_2 dl$$

dove d è la distanza tra le armature del condensatore. Avremo:

$$\Delta V = \int_{o}^{d/2} \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} dl + \int_{d/2}^{d} \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} dl = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \right] \frac{d}{2}$$

La capacità del sistema, definita come rapporto tra la carica del condensatore e la differente di potenziale cui si portano le armature, sarà:

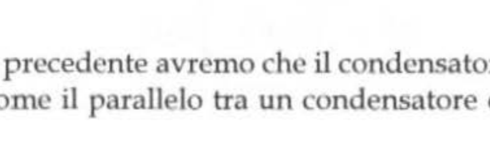
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma_{lib} S}{\frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \right] \frac{d}{2}} = \frac{S}{\frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \right] \frac{d}{2}}$$

Si noti che tale espressione può essere posta nella forma:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \frac{d}{2S} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \frac{d}{2S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Ovvero la capacità del condensatore è pari a quella della serie di due condensatori di spessore d/2 e superficie S riempiti di due dielettrici di costante dielettrica differente.

ESERCIZIO 6.13 *Qual è la capacità del condensatore in figura?*



SOLUZIONE

Sfruttando il risultato dell' esercizio precedente avremo che il condensatore di figura potrà essere considerato come il parallelo tra un condensatore di superficie $S/2$ e spessore d riempito di dielettrico di costante dielettrica ε_{r3} in parallelo alla serie di due condensatori di superficie $S/2$, spessore $d/2$ e riempiti di dielettrici diversi di costanti rispettivamente ε_{r1} e ε_{r2}. Per la serie la capacità sarà tale che:

$$C_{serie} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} \frac{d/2}{S/2} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \frac{d/2}{S/2}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}$$

La capacità complessiva, parallelo di quella serie appena calcolata e di quella riempita di dielettrico con costante dielettrica ε_{r3} sarà data da:

$$C_{TOT} = C_{serie} + C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S/2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left[\frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} + \frac{\varepsilon_{r3}}{2} \right]$$

ESERCIZIO 6.14 *Si calcolino gli andamenti del campo elettrico e del potenziale elettrostatico generati da un conduttore sferico di raggio R carico con una carica Q, se esso è avvolto da una corteccia sferica di raggio interno R ed esterno 3R di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r. Il sistema complessivo si trova nel vuoto. Dare la differenza di potenziale tra la faccia interna ed esterna del guscio sferico se R=1m, Q=5nC ed ε_r =5.*

SOLUZIONE

La carica si disporrà sulla superficie del conduttore sferico. Data la simmetria essa sarà distribuita uniformemente e le linee di campo elettrostatico generate saranno a simmetria radiale. Possiamo applicare il teorema di Gauss nella forma:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}(\vec{r})) = \frac{Q_{lib}^{(INT)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

per ricavare l'andamento di campo elettrico nel conduttore, nel guscio dielettrico e nel vuoto. Nell'applicare il teorema scegliamo una superficie sferica centrata nel centro del conduttore di raggio generico r. Sfruttando le proprietà di simmetria del campo elettrico l'integrale di flusso sulla superficie sferica si riduce semplicemente a:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}(\vec{r})) = E(\vec{r})4\pi r^2$$

Utilizziamo tale risultato per risolvere il problema nelle tre zone $r<R$, $R<r<3R$ e $r>3R$.

<u>$r<R$</u>

Nel conduttore il calcolo conduce al risultato che già conosciamo, ovvero che il campo elettrostatico è nullo. Si ha infatti che la carica interna alla superficie è nulla. Ne consegue che:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}(\vec{r})) = E(\vec{r})4\pi r^2 = 0$$

da cui:

$$E(\vec{r}) = 0 \qquad \text{per} \qquad r<R$$

<u>$R<r<3R$</u>

Il flusso deve essere uguagliato alla carica totale interna diviso la costante dielettrica del guscio sferico:

$$E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

da cui si ha:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{per} \qquad R<r<3R$$

<u>$r>3R$</u>

Il flusso deve essere uguagliato alla carica totale interna diviso la costante dielettrica del vuoto:

$$E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

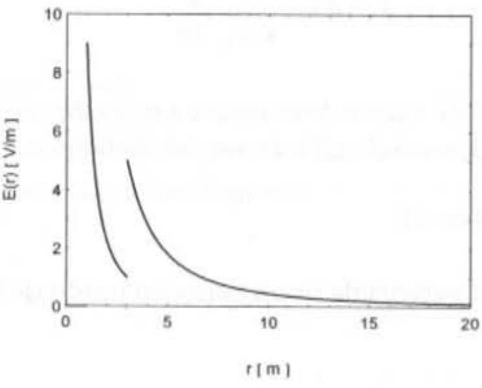
da cui si ha:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{per} \qquad r>3R$$

In definitiva avremo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q}{r^2} & R<r<3R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r>3R \end{cases}$$

In figura riportiamo il grafico dell' andamento del campo elettrico ottenuto per i valori dei parametri dati dall'esercizio.



L'andamento del potenziale elettrostatico si può ricavare utilizzando la definizione:

$$V(r)-V(r_{rif})=-\int_{r_{rif}}^{r}\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

ed imponendo che il potenziale all'infinito si annulli. Calcoliamo il potenziale nelle tre zone, cominciando da quella esterna.

r>3R

Il potenziale in un punto qualsiasi con r>3R sarà dato dall'espressione:

$$V(r)-V(\infty)=-\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

ovvero:

$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}dr'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad \text{per} \qquad r>3R$$

Il potenziale sulla superficie esterna del dielettrico (r=3R) varrà:

$$V(3R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{3R}$$

Tale valore deve essere utilizzato come valore di riferimento nel calcolo del potenziale all'interno del dielettrico.

R<r<3R

Il potenziale in un generico punto del dielettrico sarà dato da:

$$V(r)-V(3R)=-\int_{3R}^{r}\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

ovvero:

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{3R}-\int_{3R}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r'^2}dr'= \qquad \text{per} \qquad R<r<3R$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{3R}+\frac{1}{\varepsilon_r r}-\frac{1}{3\varepsilon_r R}\right)$$

Il potenziale sulla superficie esterna del conduttore (r=R) varrà:

$$V(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{3R}+\frac{2}{3\varepsilon_r R}\right)$$

<u>r<R</u>

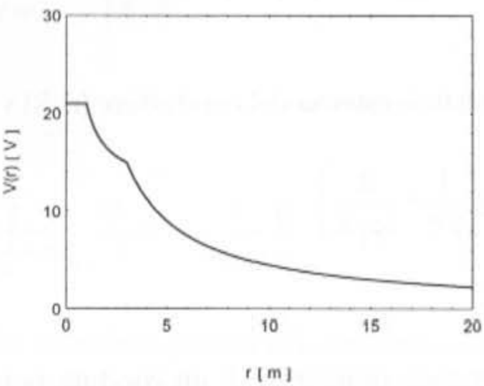
Sappiamo che il potenziale all'interno di un conduttore è costante, pari a quello della superficie per cui si ha:

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{3R}+\frac{2}{3\varepsilon_r R}\right) \qquad \text{per} \qquad r<R$$

In definitiva il potenziale in tutto lo spazio avrà l'andamento:

$$V(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\dfrac{1}{3R}+\dfrac{2}{3\varepsilon_r R}\right) & r<R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\dfrac{1}{3R}+\dfrac{1}{\varepsilon_r r}-\dfrac{1}{3\varepsilon_r R}\right) \quad \text{per} & R<r<3R\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & r>3R\end{cases}$$

L'andamento del potenziale è riportato nella figura che segue. Il potenziale è continuo ma non derivabile alle interfacce tra i vari materiali. Ne consegue che il campo, ottenuto derivando il potenziale, non è continuo,



come abbiamo avuto già modo di verificare.

La differenza di potenziale tra la superficie interna e quella esterna del dielettrico sarà data da:

$$\Delta V=V(R)-V(3R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{3R}+\frac{2}{3\varepsilon_r R}\right)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q\left(\frac{1}{3R}\right)=$$

$$=\frac{Q}{6\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

Numericamente si ottiene:

$$\Delta V = \frac{5 \cdot 10^{-9}\, C}{6\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\; C/V \cdot m \cdot 5 \cdot 1m} = 5.99V$$

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 6.15 Due *cariche puntiformi Q_1=7.5×10^{-9} C e Q_2=-16.7×10^{-9} C si trovano ad una distanza di 5 cm. Trovare l'intensità del campo elettrico in un punto distante 3 cm dalla carica positiva e 4 cm da quella negativa.*

Sol. 1.2×10^5 V/m

ESERCIZIO 6.16 *Una carica negativa viene posta nel centro di un quadrato ciascun vertice del quale è occupato da una carica di 2.3×10^{-9} C. Trovare il valore della carica negativa se la forza risultante su ciascuna carica è nulla.*

Sol. –2.2×10^{-9} C

ESERCIZIO 6.17 *Calcolare la forza esercitata da una lastra carica infinita su ciascun metro di un filo carico infinitamente lungo. La densità lineare di carica del filamento è 3×10^{-8} C/cm e la densità superficiale di carica del piano è 2×10^{-9} C/cm^2.*

Sol. 3.4 N

ESERCIZIO 6.18 *Determinare la forza per unità di area con la quale si respingono due piani infiniti aventi la stessa carica superficiale di 3×10^{-8} C/cm^2.*

Sol. 5.1×10^3 N/m^2

ESERCIZIO 6.19 *Un anello costituito da un filo carico, di raggio 10 cm, possiede una carica -5×10^{-9} C. A quale distanza dal centro dell'anello, sul suo asse, sarà massimo il campo elettrico?*

Sol. 7.1×10^{-2} m

ESERCIZIO 6.20 *Quale lavoro si compie quando una carica puntiforme di 2×10^{-8} C viene trasportata dall'infinito ad un punto distante 1 cm dalla superficie di una sfera di raggio 1 cm e densità superficiale di carica 10^{-8} C/cm^2?*

Sol. 1.13×10^{-3} J

ESERCIZIO 6.21 *Una carica puntiforme $Q=0.67\times10^{-9}$ C si trova ad una distanza di 4 cm da un filo carico infinitamente lungo. Sotto l'azione di una forza, la carica viene avvicinata fino ad una distanza di 2 cm dal filo, compiendo un lavoro pari a 5 μJ. Ricavare la densità lineare di carica del filo.*

Sol. 6×10^{-7} C/m

ESERCIZIO 6.22 *Una carica puntiforme $Q=0.67\times10^{-9}$ C si trova vicino ad un piano carico infinito. Il campo elettrico prodotto dal piano fa muovere la carica su una distanza di 2 cm compiendo un lavoro di 5 μJ. Calcolare la densità di carica superficiale del piano.*

Sol. 6.6×10^{-6} C/m^2

ESERCIZIO 6.23 *Una particella carica di massa 5×10^{-11} g posta in un campo gravitazionale cade con velocità costante determinata dalla legge* $m\vec{g}=\alpha\vec{v}$ *a causa della resistenza dell'aria. Nella stessa zona di spazio in cui si trova la particella, viene prodotto un campo elettrico costante diretto verso l'alto e pari a 6×10^4 V/m, a causa del quale la particella cade con velocità dimezzata. Trovare la carica della particella.*

Sol. 4.1×10^{-18} C

ESERCIZIO 6.24 *A distanza a da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità λ, è posta una carica $-Q$. Si chiede la forza che si esercita su una carica $+Q$ posta a distanza 2a dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica $-Q$. [Dati: a=1cm, λ=+10nC/m, Q=1nC]*

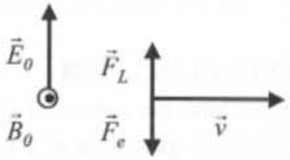
Sol. $8.1\cdot10^{-5}$N, forza diretta verso il filo

Capitolo 7

Magnetostatica

ESERCIZIO 7.1 *Si abbia in una zona di spazio un campo magnetico di induzione magnetica $B_0=5\cdot10^{-4}T=5\cdot10^{-4}$ Wb/m^2 uniforme con linee di campo perpendicolari a quelle di un campo elettrostatico uniforme di intensità pari a $E_0=10V/cm$. Un fascio di elettroni si propaga in tale zona di spazio, con velocità $\vec{v}$ perpendicolare al piano in cui giacciono $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$. Si trovi: (1) Il modulo della velocità degli elettroni affinché il fascio non sia deflesso in presenza di entrambi i campi; (2) Il raggio di curvatura della traiettoria degli elettroni nel caso in cui sia presente il solo campo magnetico.*

SOLUZIONE



Nella soluzione facciamo riferimento alla figura riportata qui accanto. Fissato il verso della velocità degli elettroni e quello del campo elettrico, il campo di induzione, perpendicolare a quello elettrico, non può avere che un verso se si vuole che gli elettroni non siano deflessi. Il verso per il campo di induzione indicato in figura fa sì che la forza elettrica:

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_0$$

e quella magnetica:

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}_0$$

siano opposte e possano farsi equilibrio. Se il verso del vettore induzione fosse opposto, oppure se gli elettroni si muovessero in verso opposto, le due forze avrebbero lo stesso verso e non potrebbero annullarsi. In quest'ultimo caso non si riesce a trovare una condizione sul modulo della velocità che non faccia deflettere il fascio di elettroni.

(1) Affinché si abbia equilibrio la somma delle forze che agiscono sul singolo elettrone deve essere nulla:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_e + \vec{F}_L = -e\vec{E}_0 - e\vec{v} \times \vec{B}_0 = 0$$

Proiettando la relazione vettoriale sull'asse lungo cui sono dirette le forze si ha:

$$E_0 - vB_0 = 0$$

da cui si ottiene:

$$v = \frac{E_0}{B_0}$$

Numericamente si avrà:

$$v = \frac{10^3 V/m}{5 \cdot 10^4 T} = 2 \cdot 10^6 m/s$$

(2) Se si rimuove il campo di induzione, mantenendo la velocità degli elettroni costante, si ha che il moto degli elettroni è circolare uniforme. La forza di Lorentz agisce da forza centripeta ed imprime agli elettroni un moto circolare in senso antiorario. Imponendo l'uguaglianza tra il modulo

della forza di Lorentz e l'espressione della forza centripeta in un moto circolare uniforme si ha:

$$evB_0 = m\frac{v^2}{R}$$

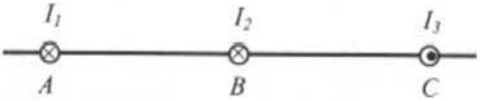
da cui si ricava:

$$R = \frac{mv}{eB_0}$$

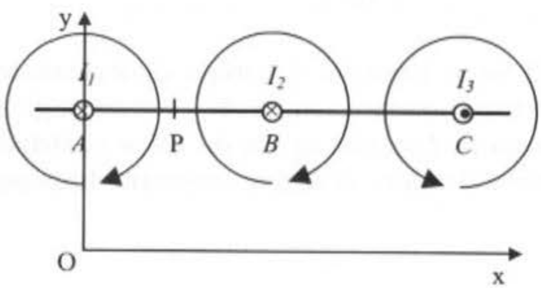
Numericamente abbiamo:

$$R = \frac{9\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 2\cdot 10^6\,m/s}{1.6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 5\cdot 10^{-4}\,T} = 0.0225m = 2.25cm$$

ESERCIZIO 7.2 *In figura è riportata la sezione di tre fili indefiniti rettilinei paralleli disposti nel vuoto e percorsi da corrente. Siano le distanze AB=BC=5cm e le correnti $I_1=I_2=I$ e $I_3=2I$. Si trovi la posizione del punto sul segmento AC in cui l'intensità del vettore $\vec{B}_0$ è nulla.*



SOLUZIONE



Il verso delle linee del campo di induzione generato da ognuno dei fili sono riportate in figura. L'unico intervallo del segmento AC nel quale i campi di induzione generati dai vari fili possono compensarsi è quello compreso tra A e B. Scegliamo un sistema di riferimento Oxy come in figura. La posizione del punto P deve essere tale che:

$$\vec{B}_{TOT} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 0$$

Dal momento che i fili sono indefiniti, il modulo del campo da essi generato ad una generica distanza r dall'asse è dato dalla legge di Biot e Savart:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

con verso dato dalle convenzioni standard per le linee di campo di induzione. Nel punto P i contributi dei tre fili al campo saranno tutti ortogonali all'asse x; quelli di A e C hanno proiezione lungo y negativa, quello dovuto a B positiva. Proiettando la relazione vettoriale sull'asse y si ha quindi:

$$-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi \overline{AP}} + \frac{\mu_0 I2}{2\pi \overline{PB}} - \frac{\mu_0 I_3}{2\pi \overline{CP}} = 0$$

che, esprimendo le correnti in termini di I e le distanze in termini di AB e x, diviene, dopo alcune ovvie semplificazioni:

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{\overline{AB} - x} - \frac{2}{2\overline{AB} - x} = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

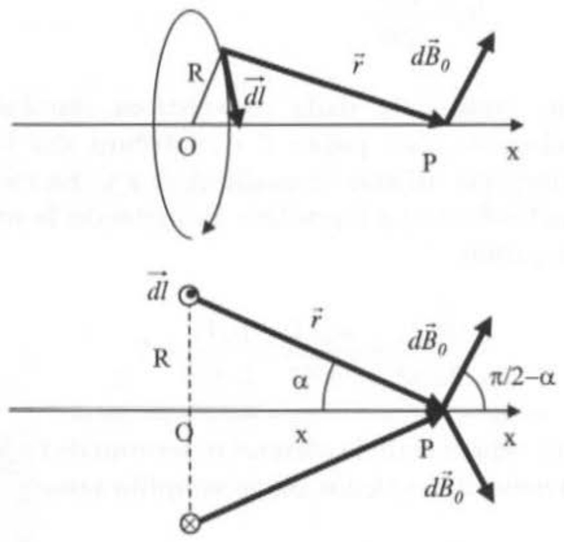
$$x = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

che numericamente dà come risultato:

$x = 3.33cm$

ESERCIZIO 7.3 *Si determini l'andamento del campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ nel vuoto sull'asse di una spira circolare di raggio R percorsa da corrente stazionaria I.*

SOLUZIONE



Ogni elemento dl della spira percorso dalla corrente I genererà nel punto P sull'asse un campo di induzione infinitesimo dato dalla prima formula di Laplace:

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

come mostrato nella parte superiore della figura.
Per comprendere meglio come i contributi di tutti gli elementi infinitesimi si sommino in P, facciamo riferimento alla parte inferiore della figura, nella quale la spira viene mostrata in sezione. Concentriamo l'attenzione sui due elementi di spira perpendicolari al piano di sezione e diretti in verso opposto. Il loro contributo al vettore induzione in P sarà uguale in modulo e dato da:

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}$$

dal momento che i vettori $\vec{r}$ e $\vec{dl}$ sono perpendicolari tra loro. I contributi dei due elementi hanno direzione e verso differenti. Ognuno di essi può essere scomposto in un vettore diretto lungo l'asse x ed uno ad esso perpendicolare. Si capisce subito che, sommando i contributi al campo dei due elementi di circuito scelti, i contributi perpendicolari all'asse x si annullano e le componenti lungo x si sommano. Il campo risultante sarà quindi diretto lungo l'asse x. Ciò è vero per qualsiasi coppia di elementi dl che siano opposti al centro della spira. Ne consegue che il campo generato da tutta la spira in P deve essere diretto lungo l'asse x. Possiamo quindi dire che ogni elemento dl contribuirà al campo in P con un termine:

$$dB_{0x} = dB_0 \cos(\pi / 2 - \alpha) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \cos(\pi / 2 - \alpha) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin(\alpha)$$

Possiamo ricavare il valore dell'intensità del campo totale in P integrando sulla spira. Si ha:

$$B_{0x} = \oint dB_{ox} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin\alpha \oint dl = \frac{\mu_0 IR}{2} \frac{\sin\alpha}{r^2}$$

dove si è tenuto conto del fatto che durante l'integrazione lungo la spira sia α che r sono costanti. L'espressione può essere ulteriormente semplificata, esprimendo $\sin\alpha$ ed in funzione di x, dal momento che:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \qquad \text{e} \qquad \sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Il campo sull'asse dello spira sarà quindi dato da:

$$\vec{B}_0 = (B_{0x}, 0, 0)$$

con

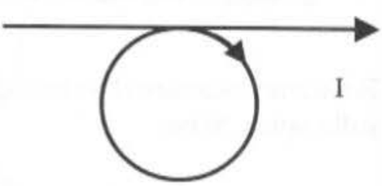
$$B_{0x} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Si osservi che nel limite per cui $x \to \infty$ il campo si annulla. Al centro della spira la componente x del campo prende invece il valore:

$$B_{0x} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

ESERCIZIO 7.4 *Un filo rettilineo indefinitamente lungo forma in un punto della sua lunghezza un anello circolare come mostrato in figura.*

Il filo è percorso da una corrente pari a I=5A. Si trovi il raggio dell'anello se il campo di induzione magnetica al suo centro è pari a 50μT.



SOLUZIONE

In corrispondenza del centro dell'anello circolare il campo di induzione sarà dovuto alla sovrapposizione degli effetti del filo indefinito e dell'anello circolare, entrambi percorsi dalla medesima corrente I.

Con riferimento alla figura entrambi i contributi saranno perpendicolari al piano del foglio ed entranti rispetto ad esso. Chiamando R il raggio dell'anello i due contributi saranno dati rispettivamente da:

$$B_0^{(filo)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad \text{(legge di Biot e Savart)}$$

e

$$B_0^{(spira)} = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \text{(campo di induzione al centro della spira)}$$

Il campo di induzione complessivo sarà quindi dato da:

$$B_0^{(tot)} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$$

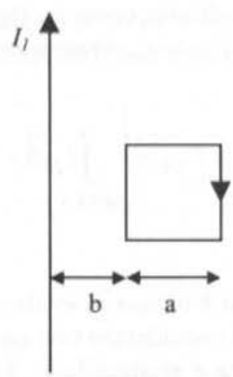
Invertendo la relazione precedente si trova la condizione sul raggio dell'anello necessario affinché il campo di induzione abbia un valore definito:

$$R = \frac{\mu_0 I}{2B_0^{(tot)}}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$$

Sostituendo i dati del problema, numericamente si ottiene:

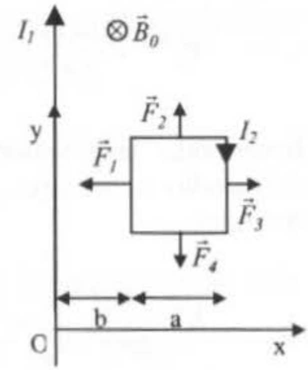
$$R = \frac{4\pi 10^{-7}\, Wb/_{A\cdot m}\cdot 5A}{2\cdot 50\cdot 10^{-6}T}\left(1+\frac{1}{\pi}\right) = 0.083m = 8.3cm$$

ESERCIZIO 7.5 *Un filo indefinito percorso da una corrente stazionaria I_1=1A è complanare ad una spira quadrata di lato a=10cm percorsa da una corrente I_2=2A, come mostrato in figura. La distanza tra filo e spira è pari a b=5cm. Si determini direzione, verso ed intensità della forza che il filo esercita sulla spira. I due circuiti siano nel vuoto.*



SOLUZIONE

Il filo definito percorso da corrente genererà intorno a se un campo di induzione con linee di campo chiuse circolari, contenute in piani perpendicolari al filo e con verso tale che la corrente elettrica le veda percorse in senso antiorario (legge di Biot e Savart). Con riferimento alla figura, se consideriamo che filo e spira giacciano nel piano del foglio, il campo di induzione è entrante nel foglio ed ha intensità data da:



$$B_0 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

dove x è la distanza dall'asse del filo. Ogni elemento di lato della spira quadrata percorsa da corrente I_2 sarà sottoposto ad una forza di natura magnetica che può essere calcolata mediante la seconda formula di Laplace:

$$d\vec{F} = I_2 \overrightarrow{dl} \times \vec{B}_0$$

Prendendo in considerazione i versi del campo e della corrente tali forze dovranno essere dirette come in figura. Le forze che agiscono sui lati 2 e 4 saranno dirette lungo l'asse y, avranno verso opposto ed avranno la stessa intensità data da:

$$F_{2,4} = \left| \int_{lato 2,4} I_2 \overrightarrow{dl} \times \vec{B}_0 \right| = \int_{lato 2,4} I_2 B_0(x) dx = \int_{lato 2,4} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx$$

dove si è messo in evidenza che il campo di induzione dipende da x e deve essere quindi considerato non costante durante l'integrazione. Le due forze sono uguali ed opposte e si annullano. La spira non subirà quindi alcuna sollecitazione lungo la direzione y. Volendo calcolare la loro intensità, ma non è necessario, si avrà:

$$F_{2,4} = \int_{b}^{a+b} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

Le forze che agiscono sui lati 1 e 3 saranno dirette lungo l'asse x, avranno verso opposto ma non avranno la stessa intensità. Si ha:

$$F_1 = \left| \int_{lato1} I_2 \vec{dl} \times \vec{B}_0 \right| = \int_{lato1} I_2 B_0(b) dx = \int_{lato1} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} dx =$$
$$= I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} \int_{lato1} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi b}$$

diretta nel verso negativo dell'asse x. Per la forza sul lato 3 si ha invece:

$$F_3 = \left| \int_{lato3} I_2 \vec{dl} \times \vec{B}_0 \right| = \int_{lato3} I_2 B_0(a+b) dx = \int_{lato3} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} dx =$$
$$= I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)} \int_{lato3} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(a+b)}$$

diretta nel verso positivo dell'asse delle x. Nelle integrazioni si noti che il campo di induzione assume un valore costante ma differente per i due lati. La componente x della forza totale agente sulla spira sarà data quindi da:

$$F_x = F_3 - F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} \right)$$

Numericamente si ottiene:

$$F_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ Wb/_{A \cdot m} \cdot 1A \cdot 2A \cdot 0.1m}{2\pi} \left(-\frac{1}{0.05m} + \frac{1}{0.15m} \right) = -5.3 \cdot 10^{-7}\ N$$

ESERCIZIO 7.6 *Due fili conduttori indefiniti paralleli tra loro sono distanti 10 centimetri. Essi sono percorsi dalle correnti I_1=20A e I_2=30A nella stessa direzione. Quale lavoro per unità di lunghezza dei conduttori è necessario per allontanarli fino alla distanza di 30 centimetri? Si considerino i fili nel vuoto.*

SOLUZIONE

Il filo conduttore percorso dalla corrente elettrica I_1 produrrà ad una distanza r dal proprio asse campo di induzione $\vec{B}_{01}$ secondo la legge di Biot e Savart, la cui intensità è data da:

$$B_{01}(r)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Le linee di campo sono circonferenze contenute in piani perpendicolari al filo e centrate intorno all'intersezione del filo con i piani stessi. Il filo percorso da corrente I_2 si trova nel campo generato dalla corrente I_1 e subisce una forza di natura magnetica. La forza elementare che agisce su un tratto elementare di filo 2, dovuta al campo $\vec{B}_{01}$ generato dal filo 1, si ottiene applicando la seconda formula di Laplace:

$$d\vec{F}_{12}=I_2\,\vec{dl}\times\vec{B}_{01}$$

Dal momento che i fili sono paralleli il campo $\vec{B}_{01}$ sarà ortogonale al filo 2 e quindi alla corrente che scorre in esso. Ne consegue che la forza che agisce su un tratto dl del filo 2 avrà intensità data semplicemente da:

$$dF_{12}=I_2 dlB_{01}=I_2 dl\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}dl$$

dove r è la generica distanza tra i due fili. La forza è diretta perpendicolarmente al filo 2 in direzione del filo 1 e ha verso tale da spingerlo verso il filo 1 stesso. La forza totale che agisce su un tratto h di filo sarà data quindi da:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} h$$

Per il principio di azione e reazione tale forza è uguale ed opposta a quella che il filo 2 esercita sul filo 1. Per allontanare il filo 2 ulteriormente dal filo 1 sarà necessario applicare una forza esterna uguale e contraria alla forza di natura magnetica. Il lavoro esercitato da tale forza esterna nello spostamento sarà dato da:

$$L = \int_{d_1}^{d_2} \vec{F}_{est} \cdot \overrightarrow{ds} = -\int_{d_1}^{d_2} \vec{F}_{12} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} h dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} h \int_{d_1}^{d_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} ln \frac{d_2}{d_1} h$$

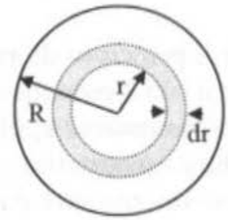
dove si è tenuto in considerazione che la forza $\vec{F}_{12}$ ha verso opposto allo spostamento elementare $\overrightarrow{ds}$ del filo ed il prodotto scalare $\vec{F}_{12} \cdot \overrightarrow{ds}$ è pari a $-F_{12} ds$. Numericamente si ottiene che il lavoro necessario per spostare il filo 2 dalla distanza di 10cm a quella di 30cm dal filo 1 è pari a:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \, Wb/_{A \cdot m} \cdot 20A \cdot 30A}{2\pi} ln \frac{30cm}{10cm} \cdot 1m = 1.32 \cdot 10^{-4} J$$

ESERCIZIO 7.7 *Un disco molto sottile di materiale isolante di raggio R=10cm reca una carica elettrica pari a Q=1mC distribuita uniformemente nel suo volume.*

Il disco ruota intorno ad un asse perpendicolare ad esso passante per il centro con velocità angolare ω=2000giri/min. Si determini il valore dell'induzione magnetica al centro del disco.

SOLUZIONE



Dal momento che il disco è molto sottile ne potremo trascurare lo spessore e considerare che la carica sia distribuita con una densità di carica di superficie uniforme pari a:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

La carica elettrica sarà trascinata dal moto di rotazione del disco. Ciò darà luogo ad un flusso di corrente elettrica su traiettorie circolari. Facendo riferimento alla figura, una corona circolare di raggio interno *r* e raggio esterno *r+dr* recherà su di essa una carica elettrica infinitesima pari a:

$$dQ = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

dove σ è la densità di carica superficiale sul disco isolante:
La corona circolare in rotazione con velocità angolare ω potrà essere assimilata ad una spira circolare di raggio *r* e di sezione pari allo spessore del disco moltiplicato per dr, percorsa da una corrente elettrica infinitesima pari a:

$$di = \frac{dQ}{T}$$

ottenuta applicando la definizione di corrente elettrica come carica che transita attraverso la sezione di un conduttore diviso il tempo impiegato a transitare. In questo caso tutta la carica dQ presente sulla corona circolare compie un giro nel periodo di rotazione $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ e quindi transita attraverso una sezione della corona nel tempo T stesso. Si ha:

$$di = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot \omega r dr$$

D'altra parte sappiamo che una spira circolare di raggio R, percorsa da corrente I, genera nel suo centro un campo di induzione $\vec{B}_0$ perpendicolare al piano dello spira, con verso tale da vedere la spira percorsa in senso antiorario dalla corrente e d'intensità pari a:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

La corona circolare, assimilata ad una spira di raggio r, genera quindi al suo centro un campo di induzione infinitesimo pari a:

$$dB_0 = \frac{\mu_0 di}{2r} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \cdot dr$$

Il campo $\vec{B}_0$ al centro del disco in rotazione nel suo centro sarà dato dalla sovrapposizione di tutti i contributi delle corone circolari infinitesime. Dal momento che tali contributi sono tutti paralleli tra loro, perpendicolari al disco, si ha:

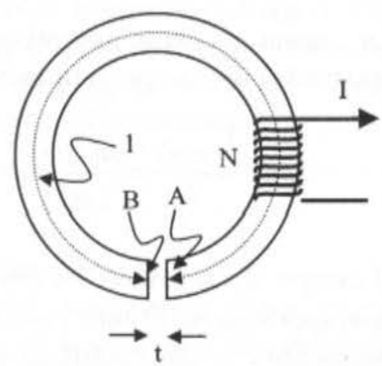
$$B_0 = \int_0^R dB_0 = \int_0^R \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \cdot dr = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \cdot \int_0^R dr = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R}$$

Numericamente si ottiene:

$$B_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\, {}^{Wb}\!/_{A\cdot m} \cdot 10^{-3}\, C \cdot 2000 giri/min \cdot 2\pi rad/60s}{2\pi \cdot 0.1m} = 4.19 \cdot 10^{-7}\, T$$

ESERCIZIO 7.8 *La lunghezza del nucleo di ferro (μ_r=5000 supposta costante) di un elettromagnete toroidale è pari a l=50cm e quella del traferro di aria è pari a t=2mm. Il prodotto della corrente che scorre nell'avvolgimento esterno per il numero di spire avvolte sull'elettromagnete sia pari a NI=2000 Asp. Di quante volte diminuirà l'intensità del campo magnetico nel traferro se lo spessore di quest'ultimo viene raddoppiato, mantenendo sempre costante NI? (Si consideri il raggio del toro molto maggiore del raggio della sua sezione)*

SOLUZIONE



In un elettromagnete le linee di campo del campo di induzione e del campo magnetico sono circolari. I campi sono uniformi all'interno di ognuno dei mezzi. L'intensità del campo magnetico all'interno del ferro e del traferro può essere calcolata utilizzando il teorema di Ampère e le proprietà di continuità delle componenti dei campi magnetico e di induzione alle interfacce tra materiali magnetici.

Facendo riferimento alla figura possiamo scegliere un cammino di circuitazione per applicare il teorema di Ampère lungo la circonferenza mediana del toro. Il cammino sarà all'interno del ferro per una lunghezza *l* e nel vuoto per una lunghezza *t*. Si osservi che, con i dati del problema, si ha *t*<<*l*. Il teorema ci assicura che la circuitazione del vettore campo magnetico lungo il cammino è pari alla somma delle correnti elettriche concatenate con il circuito di integrazione moltiplicate per il loro ordine di concatenazione, ovvero:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_k n_k I_k$$

dove le correnti hanno segno positivo o negativo a seconda che il loro verso sia tale da vedere il cammino di integrazione scelto percorso in senso antiorario o orario. Nel nostro caso, per il cammino scelto, la corrente è una sola, I, che però si concatena N volte con il circuito di integrazione. Avremo quindi:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = NI$$

L'integrale è di facile soluzione. Il campo magnetico ha infatti linee di campo circolari ed è uniforme all'interno di ciascun mezzo. Avremo quindi:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint Hdl = \int_A^B H_f dl + \int_B^A H_t dl = H_f l + H_t t$$

avendo spezzato l'integrale di circuitazione in due integrali di linea nel ferro e nel traferro. Sfruttando quindi l'uguaglianza del teorema otteniamo:

$$H_f l + H_t t = NI$$

dove H_f e H_t sono i valori di campo magnetico nel ferro e nel traferro.

La relazione ottenuta non ci permette di calcolare il valore del campo magnetico all'interno dei due mezzi che costituiscono l'elettromagnete. Possiamo tuttavia sfruttare la conservazione della componente normale del campo di induzione nel passaggio tra due mezzi di permeabilità diversa. Si ha che nel passare dal ferro al traferro il campo di induzione deve conservare la propria componente normale all'interfaccia. Ma il campo di induzione è proprio ortogonale a tale interfaccia a causa dell'orientazione delle sue linee di campo. Si ha quindi:

$$B_f = B_t$$

che può essere riscritta in termini di campo magnetico richiamando la relazione per cui:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

in un mezzo a permeabilità costante. Avremo quindi che:

$$\mu_0 \mu_{rf} H_f = \mu_0 H_t$$

ovvero

$$H_f = \frac{H_t}{\mu_{rf}}$$

Sostituendo tale relazione in quella ottenuta mediante l'applicazione del teorema di Ampère si ha:

$$H_t = \frac{\mu_f NI}{l + \mu_f t}$$

Se il traferro raddoppia di spessore l'intensità del campo magnetico al suo interno sarà data da:

$$H_t' = \frac{\mu_f NI}{(l-t) + \mu_f (2t)}$$

dove si è tenuto conto che l'aumento di spessore del traferro comporta una diminuzione di lunghezza del nucleo di ferro; in effetti, essendo t<<l possiamo trascurare la variazione di lunghezza del nucleo e scrivere:

$$H_t^{'} \cong \frac{\mu_f NI}{l + \mu_f(2t)}$$

Il rapporto delle intensità dei campi magnetici ottenuti per i due spessori del traferro sarà data quindi da:

$$\frac{H_t^{'}}{H_t} = \frac{l + \mu_f(2t)}{l + \mu_f t}$$

Numericamente si ottiene:

$$\frac{H_t^{'}}{H_t} = 1.95$$

Si noti che in un caso reale la permeabilità del ferro non è costante. La relazione tra $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ non è lineare e non possiamo sfruttare la relazione:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Dovremo conoscere la relazione reale tra le intensità di $\vec{B}$ ed $\vec{H}$, data dalla curva di isteresi. Nella figura che segue riportiamo la curva di isteresi per un materiale ferromagnetico generico. Per trovare il valore dei campi all'interno del traferro dovremo ripartire dal risultato ottenuto tramite l'applicazione del teorema di Ampère, sempre valido:

$$H_f l + H_t t = NI$$

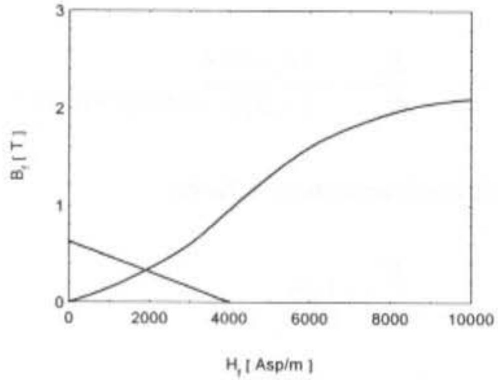
e sfruttare la relazione tra $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ nel solo traferro, sempre valida dal momento che siamo nel vuoto:

$$B_t = \mu_0 H_t$$

Si ottiene:

$$H_f l + \frac{B_t}{\mu_0} t = NI$$

Sfruttando la conservazione della componente normale del campo di induzione all'interfaccia tra mezzi di permeabilità diversa, per cui $B_f = B_t$, otterremo poi:

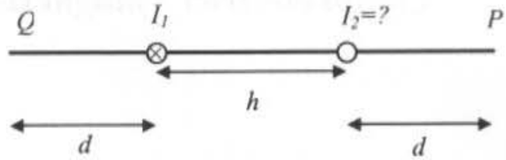


$$H_f l + \frac{B_f}{\mu_0} t = NI$$

La relazione ottenuta, graficata in un piano (H_f,B_f), è una retta con pendenza negativa. Essa interseca la curva d'isteresi in un punto di coordinate pari ai valori dei campi magnetico e di induzione all'interno del ferro. Nella figura riportiamo anche il grafico di tale retta per i valori numerici dei parametri dati nell'esercizio (*t=2mm, l=50cm, NI=2000*). Una volta ricavato il valore dell'intensità del campo di induzione sappiamo che esso è pari al valore del campo di induzione nel traferro per continuità e che il campo magnetico nel traferro può essere ricavato dividendo il valore per la permeabilità magnetica del vuoto.

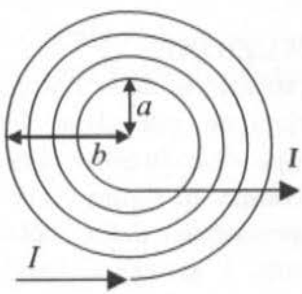
ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 7.9 *Due fili rettilinei paralleli sono separati nel vuoto da una distanza h: il filo 1 porta una corrente I_1, in senso entrante nel piano del foglio. Quale deve essere l'intensità ed il verso della corrente I_2 (nel filo 2) affinché il campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ nel punto P sia nullo? Qual è, in questo caso, il campo risultante nel punto Q? [Dati: h=1m, d=0.5m, I_1=5A]*



Sol. I_2=1.67° uscente dal piano, $B_0(Q)=2.2\cdot10^{-6}$T

ESERCIZIO 7.10 *Una bobina piatta in aria è costituita da un numero N molto grande di spire di filo sottile avvolte in modo da riempire con una spirale piana e compatta la corona circolare di raggio interno a e raggio esterno b indicata in figura. Se la bobina è percorsa da una corrente I, ricavare l'espressione del vettore induzione magnetica $\vec{B}_0$ nel centro O della bobina stessa.*



Sol. $B_0 = \dfrac{\mu_0 IN}{2(b-a)} ln\dfrac{b}{a}$

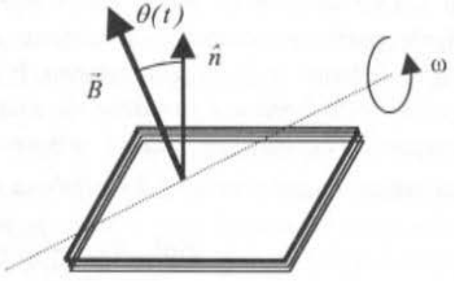
Capitolo 8

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

ESERCIZIO 8.1 *Una bobina planare è composta da 100 spire e ruota uniformemente in un campo di induzione magnetica di intensità pari a 0.1T. La bobina compie 5 giri al secondo ed ha superficie pari a 100cm². L'asse di rotazione è perpendicolare alla normale alla superficie della bobina ed alla direzione del campo di induzione. Si trovino l'espressione della forza elettromotrice indotta nella bobina ed il suo valore massimo.*

SOLUZIONE

La rotazione della bobina causa una variazione periodica del flusso di campo di induzione concatenato con la bobina. In figura viene mostrata la disposizione della bobina ad un istante t generico. Qualsiasi sia la direzione del vettore induzione riusciamo sempre a trovare un asse di rotazione perpendicolare sia ad esso



che alla normale alla bobina. Si noti che non necessariamente la bobina ha superficie geometrica regolare e che l'asse non passa per un suo punto particolare. Nella bobina si genera una forza elettromotrice indotta che segue la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Il flusso del vettore induzione concatenato con la bobina $\Phi(\vec{B})$ è pari ad N volte il flusso concatenato con una qualsiasi superficie Σ che ha per bordo la bobina stessa $\Phi_\Sigma(\vec{B})$, dal momento che il campo si concatena N volte con il circuito stesso:

$$\Phi(\vec{B}) = N\Phi_\Sigma(\vec{B})$$

dove $\Phi_\Sigma(\vec{B})$ è dato dall'integrale:

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

Tra tutte le superfici ammesse è conveniente scegliere quella che rende più semplice il calcolo dell'integrale, quindi quella piana che ha per bordo la bobina. In questo caso l'integrale di flusso si può calcolare semplicemente dal momento che il campo di induzione è uniforme e che l'asse di rotazione della bobina è fisso nel tempo. Si ha:

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \int_\Sigma B\, cos[\theta(t)] dS$$

in cui $\theta(t)$ è l'angolo compreso tra normale e campo di induzione al generico istante t. Potremo porre:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

con ω velocità angolare costante della bobina e θ_0 angolo tra normale e campo al tempo $t=0$. Dal momento che il campo di induzione è uniforme si avrà:

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = B\, cos[\omega t + \theta_0] \int_\Sigma dS = BS\, cos[\omega t + \theta_0]$$

Per la forza elettromotrice indotta otteniamo quindi:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d[N\Phi_\Sigma(\vec{B})]}{dt} = -\frac{d}{dt}[BNS\cos(\omega t + \theta_0)] = BNS\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

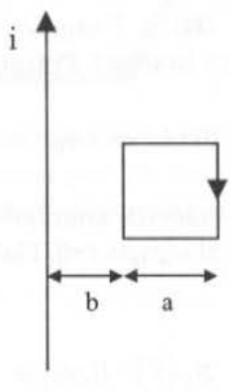
La forza elettromotrice è sinusoidale di ampiezza massima pari a:

$$f_0 = BSN\omega$$

Numericamente si ottiene:

$$f_0 = 0.1T \cdot 0.01m^2 \cdot 100 \cdot 5giri/sec \cdot 2\pi rad = 3.14V$$

ESERCIZIO 8.2 *Un filo indefinito è percorso da una corrente data dall'espressione* $i(t) = I_0 sin(\omega t)$, *con* I_0*=1A e* ω*=314rad/s. Esso è complanare ad una spira quadrata di lato a=20cm come mostrato in figura. La distanza tra filo e spira è pari a b=2cm. Si determini l'espressione della forza elettromotrice indotta nella spira. Sapendo poi che il filo di cui è costituita la spira ha sezione* $s=10^{-2}mm^2$ *e resistività* $\rho=1.7\cdot10^{-8}\ \Omega\cdot m$*, si calcoli l'ampiezza massima della corrente indotta. I due circuiti siano nel vuoto.*



SOLUZIONE

Il filo indefinito genera campo secondo la legge di Biot e Savart. Dal momento che la corrente è variabile nel tempo anche il campo di induzione sarà variabile nel tempo, con intensità:

$$B_0(x,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}$$

con x distanza dall'asse del filo. Dal momento che la spira è complanare con il filo, il vettore induzione magnetica ha direzione parallela alla normale alla spira stessa e segno dipendente dal segno della corrente elettrica. Scegliamo un sistema di riferimento con asse y coincidente con il filo ed asse x perpendicolare al filo sul piano di giacenza della spira (si veda il problema 7.5). Il flusso attraverso la superficie della spira sarà dato da:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_S \vec{B}_0(x,t) \cdot \hat{n} dS = \int_S B_0(x,t) dS = \int_{y_0}^{y_0+a} dy \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x} dx$$

dove y_0 è la generica posizione del lato inferiore della spira. Si noti che il valore di y_0 è del tutto ininfluente, dal momento che una traslazione della spira lungo y non causa alcun effetto, data la invarianza traslazionale dovuta al fatto che il filo è indefinito. Integrando si ottiene:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} ln \frac{b+a}{b} i(t) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} ln \frac{b+a}{b} I_0 \sin(\omega t)$$

Possiamo quindi calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira utilizzando la legge di induzione elettromagnetica. Abbiamo:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 a}{2\pi} ln\frac{b+a}{b} I_0 \, sin(\omega t)\right] = -\frac{\mu_0 a\omega}{2\pi} ln\frac{b+a}{b} I_0 \, cos(\omega t)$$

La forza elettromotrice indotta genererà una corrente nel circuito della spira data da:

$$i_{spira}(t) = \frac{f_i(t)}{R}$$

dove R è la resistenza elettrica della spira data da:

$$R = \rho\frac{l_{spira}}{S_{spira}} = \rho\frac{4a}{s}$$

Effettuando le sostituzioni necessarie si ottiene per la corrente nella spira:

$$i_{spira}(t) = \frac{f_i(t)}{R} = -\frac{\mu_0 s\omega}{8\pi\rho} ln\frac{b+a}{b} I_0 \, cos(\omega t)$$

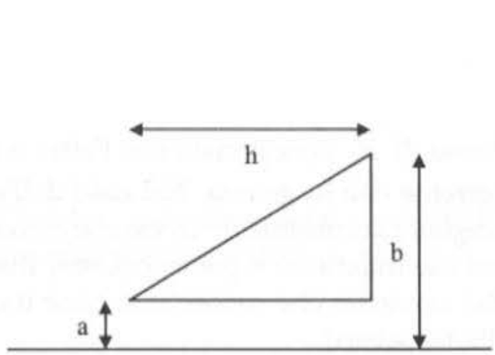
L'ampiezza massima della corrente indotta nella spira sarà data quindi da:

$$i_0^{spira} = \frac{\mu_0 s\omega}{8\pi\rho} ln\frac{b+a}{b} I_0$$

Numericamente si ha:

$$i_0^{spira} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\, Wb/_{A\cdot m}\cdot 10^{-8}\, m^2\cdot 314 rad/s}{8\pi\cdot 1.7\cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot m} ln(11)\cdot 1A = 22.1\mu A$$

ESERCIZIO 8.3 *Si calcoli il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti elettrici costituiti da un filo indefinito ed un percorso chiuso triangolare giacente nello stesso piano che contiene il filo, disposti come in figura.Si consideri il sistema nel vuoto.*



SOLUZIONE

Secondo la definizione, il coefficiente di mutua induzione M tra due circuiti elettrici è pari al coefficiente di proporzionalità tra il flusso di campo di induzione $\vec{B}_0$ concatenato uno dei due circuiti, dovuto alla sola azione dell'altro circuito, e la corrente che circola nell'altro circuito e che è origine di $\vec{B}_0$. Se ad esempio nel circuito 1 scorre una corrente i_1, essa genererà campo $\vec{B}_0$ in tutto lo spazio intorno al circuito stesso; il flusso del campo $\vec{B}_0$ concatenato con il circuito 2 sarà proporzionale ad i_1 tramite M, ovvero:

$$\Phi_{21}(\vec{B}_0) = Mi_1$$

Sappiamo che il coefficiente di mutua induzione è simmetrico; se una corrente i_2 scorre nel circuito 2, il flusso del campo $\vec{B}_0$ concatenato con il circuito 1 sarà proporzionale ad i_2 tramite lo stesso coefficiente M:

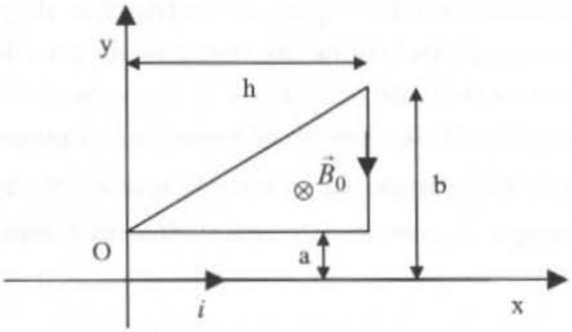
$$\Phi_{12}(\vec{B}_0) = Mi_2$$

Se in particolare $i_2=i_1$ si ha $\Phi_{12}(\vec{B}_0) = \Phi_{21}(\vec{B}_0)$.

Per calcolare il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti è quindi sufficiente supporre che uno di essi sia percorso da corrente i, calcolare il flusso di $\vec{B}_0$ concatenato con l'altro e ricavare M dal rapporto tra flusso e corrente che lo genera. Nel caso dell'esercizio abbiamo due possibilità di scegliere la corrente. E' ovvio che conviene supporre che la corrente i scorra nel filo indefinito e poi calcolare il flusso attraverso il circuito triangolare, dal momento che conosciamo bene il campo generato da un filo indefinito (Biot e Savart).

Supponiamo quindi che il filo indefinito sia percorso da una corrente i. Esso genererà intorno a sé campo di induzione con intensità pari a:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}$$



dove y è la distanza dall'asse identificato dal filo, misurata rispetto al sistema di riferimento indicato in figura. La direzione di $\vec{B}_0$ è tangente alle circonferenze contenute in piani perpendicolari al filo e centrate sull'intersezione del filo con i piani stessi; il verso è tale che la corrente veda le linee di campo percorse in senso antiorario. Scegliamo un verso di percorrenza del circuito triangolare in senso orario.

Per il calcolo di flusso, tra tutte le superfici che hanno per bordo il circuito, è chiaro che è conveniente scegliere quella piana che ha per bordo il circuito stesso; la normale alla superficie è in questo caso costante, perpendicolare al piano del foglio ed entrante nel foglio stesso, parallela a $\vec{B}_0$.

Per calcolare il flusso di $\vec{B}_0$ scomponiamo la superficie in tante superfici infinitesime rettangolari di lati dx e dy. Il flusso elementare di $\vec{B}_0$ attraverso la superficie infinitesima è pari a:

$$d\Phi(\vec{B}_0) = \vec{B}_0 \cdot \hat{n} dS = \vec{B}_0 \cdot \hat{n} dxdy$$

Dal momento che la normale ed il vettore induzione sono paralleli il prodotto scalare è pari al prodotto dei moduli dei due vettori:

$$d\Phi(\vec{B}_0) = B_0(y)dxdy$$

Nell'espressione precedente abbiamo evidenziato la dipendenza del campo di induzione dalla distanza y dal filo.

Il flusso totale attraverso la superficie triangolare sarà dato dalla somma dei flussi elementari attraverso tutte le superfici infinitesime, quindi all'integrale:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_S d\Phi(\vec{B}_0) = \iint B_0(y)dxdy$$

Dobbiamo ora scegliere con cautela gli estremi di integrazione dei due integrali. Integriamo considerando strisce elementari successive di spessore dx, ognuna delle quali sia divisa in rettangoli elementari di lati dx e dy. Per una generica striscia in posizione x la coordinata y potrà prendere valori compresi tra a, posizione del lato del triangolo parallelo al filo, e la coordinata della retta che contiene l'ipotenusa del triangolo, di equazione $y(x)$. Avremo:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_0^h dx \int_a^{y(x)} B_0(y)dy$$

L'equazione della retta che contiene l'ipotenusa del triangolo può calcolarsi mediante semplici considerazioni di geometria analitica. Si ha:

$$y(x) = a + \frac{b-a}{h}x$$

L'integrale di flusso assume quindi la forma:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_0^h dx \int_a^{a+\frac{b-a}{h}x} \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{dy}{y}$$

Integrando in y si ottiene:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \int_0^h dx \int_a^{a+\frac{b-a}{h}x} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^h \left[ln\, y\Big|_a^{a+\frac{b-a}{h}x} \right] dx = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^h ln\left[1 + \frac{b-a}{ah}x\right] dx$$

L'integrale in x può essere calcolato per parti. Definendo:

$$\alpha = \frac{b-a}{ah}$$

e ricordando che:

$$\int ln(1+\alpha x)dx = x\, ln(1+\alpha x) - \int \frac{\alpha x}{1+\alpha x}dx = x\, ln(1+\alpha x) + \int\left(\frac{1}{1+\alpha x} - 1\right)dx =$$

$$= x\, ln(1+\alpha x) + \frac{1}{\alpha} ln(1+\alpha x) - x = \left(x + \frac{1}{\alpha}\right) ln(1+\alpha x) - x$$

avremo che:

$$\Phi(\vec{B}_0) = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\left[\left(x + \frac{1}{\alpha}\right) ln(1+\alpha x) - x\Big|_0^h\right] = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\left[\frac{b}{b-a} ln\frac{b}{a} - 1\right]$$

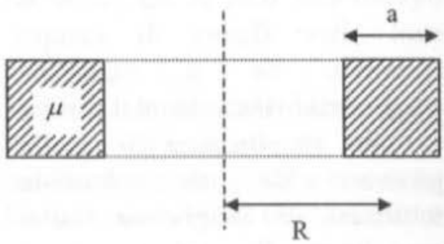
Applicando la definizione di coefficiente di mutua induzione si ha quindi:

$$M = \frac{\Phi(\vec{B}_0)}{i} = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left[\frac{b}{b-a} ln\frac{b}{a} - 1\right]$$

Si osservi che, data la simmetria di definizione dei coefficienti di mutua induzione, se la corrente i scorresse nel circuito triangolare il flusso di $\vec{B}_0$ concatenato con il circuito dato dal filo indefinito sarebbe semplicemente lo stesso calcolato nella penultima espressione ricavata.

Calcolare il coefficiente di mutua induzione supponendo che la corrente scorra nel circuito triangolare sarebbe stato molto più difficile dal momento che è difficile identificare la superficie chiusa S racchiusa dal circuito costituito dal filo, anzi ci potrebbe sembrare che tale superficie non esista proprio. Bisogna considerare che, perché vi scorra corrente, il filo dovrà chiudersi all'infinito; la superficie da utilizzare sarà quindi quella di uno dei due semipiani infiniti che hanno per bordo il filo. Tuttavia, anche avendo identificato la superficie rimarrebbe non banale il calcolo del campo generato dal circuito triangolare e quello del suo flusso. Per questi motivi, nel caso in cui si debba calcolare il flusso concatenato con un filo indefinito dovuto ad una corrente che scorra in un circuito chiuso, triangolare o di altra forma, è opportuno procedere nel seguente modo: supporre che la corrente scorra nel filo; determinare il flusso di $\vec{B}_0$ concatenato con il circuito chiuso; ricavare il coefficiente di mutua induzione come abbia appena fatto; richiamare la simmetria dei coefficienti di mutua induzione; scrivere il flusso concatenato con il filo come la corrente che scorre nel circuito per il coefficiente di mutua induzione calcolato.

ESERCIZIO 8.4 *Si consideri un toro a sezione quadrata di lato a e raggio medio R comparabile ad a, la cui sezione è riportata in figura. Il materiale di cui è costituito il toro abbia permeabilità magnetica assoluta costante pari a μ. Sul toro siano avvolte due bobine costituite rispettivamente da*

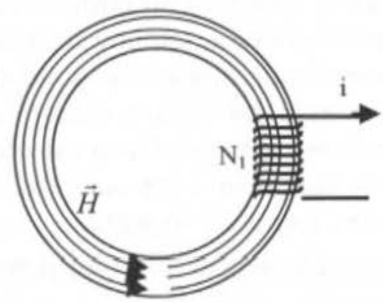


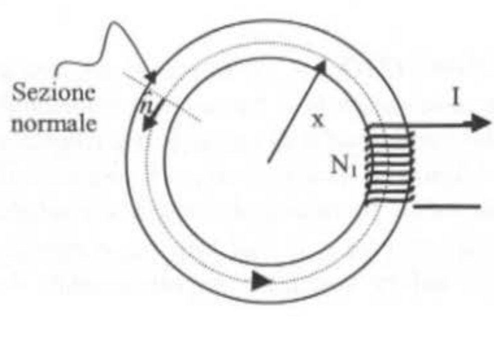
N_1 ed N_2 avvolgimenti. Si calcolino i coefficienti di autoinduzione L_1 ed L_2 ed il coefficiente di mutua induzione M. Quale relazione lega le tre quantità? Quanto vale il rapporto M/L_1?

SOLUZIONE

Il calcolo dei coefficienti di auto o mutua induzione si esegue supponendo che uno degli avvolgimenti sia percorso da corrente i e calcolando il flusso di campo di induzione $\vec{B}$ concatenato con l'avvolgimento stesso (autoinduzione) o con 'altro avvolgimento (mutua induzione).

Nel caso del problema proposto occorre innanzitutto notare che le linee di campo magnetico generato da uno dei due avvolgimenti, supponiamo quello con N_1 spire che chiameremo *1*, percorso da corrente i hanno una simmetria particolare. A causa dell'elevato valore della permeabilità magnetica assoluta del toro, che in genere è compresa tra 100 e 1000, le linee di campo generate dall'avvolgimento rimangono confinate all'interno del toro stesso. Ciò rimane vero anche se l'avvolgimento è limitato ad una zona ristretta del toro, come ad esempio in figura. Tale circostanza fa sì che tutte le linee di campo generate da un avvolgimento di concatenino con il secondo avvolgimento, ovvero che non vi sia come si suol dire flusso di campo disperso. Se il materiale magnetico fosse assente il campo avrebbe la struttura di quello generato da un solenoide rettilineo di lunghezza finita, con linee di campo che si





estendono fino a grande distanza che potrebbero non concatenarsi completamente con il secondo avvolgimento.

Il campo magnetico $\vec{H}$ avrà quindi linee di campo circolari centrate sull'asse di simmetria del toro. Il verso è tale che una vite destrorsa che si avviti nel verso del campo ruoti come la corrente origine del campo, come riportato in figura. Non è detto che il campo sia uniforme sulla sezione del toro, anzi in generale il suo valore sarà maggiore vicino al raggio interno del toro e minore vicino a quello esterno.

Data la simmetria, per il calcolo del modulo di $\vec{H}$ all'interno del toro è estremamente utile l'applica-zione del teorema di Ampère. Scegliamo un cammino di integrazione come indicato nella figura a lato. Il cammino abbia raggio generico x e sia orientato in verso antiorario. Il teorema di Ampère ci assicura che la circuitazione del campo magne-tico $\vec{H}$ lungo il cammino scelto è pari alla somma algebrica delle correnti concatenate con il cammino stesso ognuna moltiplicata per il proprio ordine di concatenazione:

$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \sum_k i_k n_k$$

Dal momento che le linee di campo di $\vec{H}$ sono circolari l'integrale si semplifica notevolmente, in quanto $\vec{H}$ e $\vec{dl}$ sono sempre paralleli; inoltre a causa della simmetria $\vec{H}$ avrà lo stesso modulo lungo tutta la linea di raggio x costante. Si ha quindi:

$$\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_c H(x)dl = H(x)\oint_c dl = H(x)2\pi x$$

avendo evidenziato la dipendenza del modulo di $\vec{H}$ dalla distanza x dall'asse del toro. Nel caso in esame la corrente concatenata con il cammino di circuitazione è la sola i, che però si concatena N_1 volte con esso; il suo segno è positivo, dal momento che un osservatore che osservi il cammino scelto dal verso in cui scorre la corrente lo vede percorso in senso antiorario. Si ha quindi:

$$H(x)2\pi x = N_1 i$$

da cui si ricava:

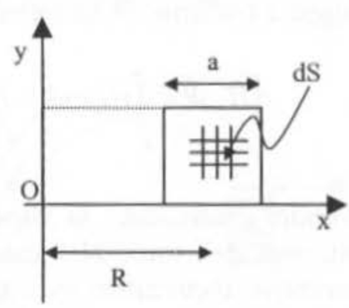
$$H(x) = \frac{N_1 i}{2\pi x}$$

Come avevamo anticipato il campo $\vec{H}$ ha intensità che dipende dalla distanza x dall'asse del toro. Il campo di induzione $\vec{B}$ si ottiene moltiplicando $\vec{H}$ per la permeabilità magnetica assoluta del mezzo ed ha intensità:

$$B(x) = \frac{\mu N_1 i}{2\pi x}$$

Una volta calcolato il campo di induzione generato dall'avvolgimento N_1 possiamo calcolarne il flusso concatenato con il circuito stesso o con il secondo circuito per ottenere le espressioni dei coefficienti di auto e mutua induzione. Per il momento valutiamo il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso una generica sezione normale del toro:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$



Dal momento che $\vec{B}$ ha linee di campo circolari esso sarà perpendicolare alla sezione del toro, ovvero parallelo alla normale ad essa. L'integrale si semplifica in:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S B(x)dS = \int_0^a dy \int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{\mu N_1 i}{2\pi x} dx$$

Svolgendo si ottiene:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \frac{\mu a N_1 i}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2}$$

Si noti che se a<<R, quindi per un toro di raggio medio molto maggiore delle dimensioni medie della sezione, l'espressione può essere approssimata, sviluppando in serie il logaritmo al primo ordine dal momento che $\frac{a}{2R} << 1$. Si ha infatti:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \frac{\mu a N_1 i}{2\pi} [ln(R + a/2) - ln(R - a/2)] =$$
$$= \frac{\mu a N_1 i}{2\pi} \left[ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) - ln\left(1 - \frac{a}{2R}\right) \right] \approx \frac{\mu a N_1 i}{2\pi} \left[\frac{a}{2R} + \frac{a}{2R} \right] \approx \frac{\mu N_1 i}{2\pi R} a^2$$

Si è ottenuto così lo stesso risultato che si otterrebbe se, data la condizione $a<<R$, si calcolasse il flusso di $\vec{B}$ considerando che esso varia di poco nella sezione e che può essere considerato uniforme e pari al suo valore nel punto a distanza media dall'asse e se ne ricavasse il flusso moltiplicandone il modulo per la superficie della sezione del toro pari ad a^2. Tale approssimazione viene spesso utilizzata (si veda il problema 7.8) per valutare i coefficienti di auto e mutua induzione di un toro a sezione quadrata o circolare ma in questo caso, non avendo indicazioni sui valori relativi di R ed a non è in generale lecita.

Calcoliamo ora il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento *1*. Il flusso autoconcatenato, che indichiamo con Φ_{11}, con il circuito sarà pari ad N_1 volte il flusso concatenato con la sua generica sezione S, dal momento che ogni linea di campo si concatena N_1 volte con il circuito stesso. Si ha:

$$\Phi_{11}(\vec{B}) = N_1\Phi_S(\vec{B}) = \frac{\mu a N_1^2}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2} i$$

Seguendo la definizione di coefficiente di autoinduzione si ha:

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}(\vec{B})}{i} = \frac{\mu a N_1^2}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2}$$

Calcoliamo ora il coefficiente di mutua induzione tra l'avvolgimento *1* e l'avvolgimento 2. Il flusso del campo generato dall'avvolgimento *1* concatenato con il circuito 2, che indichiamo con Φ_{21}, sarà pari ad N_2 volte il flusso concatenato con la generica sezione S, dal momento che ogni linea di campo si concatena N_2 volte con il secondo circuito. Si ha:

$$\Phi_{21}(\vec{B}) = N_2\Phi_S(\vec{B}) = \frac{\mu a N_1 N_2}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2} i$$

Seguendo la definizione di coefficiente di mutua induzione si ha:

$$M = \frac{\Phi_{21}(\vec{B})}{i} = \frac{\mu a N_1 N_2}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2}$$

Supponendo che la corrente i scorra nell'avvolgimento 2 possiamo poi ricavare le espressioni per L_2 ed M. L'espressione di M viene ovviamente uguale alla precedente, mentre per L_2 si ricava in completa analogia con il caso precedente:

$$L_2 = \frac{\mu a N_2^2}{2\pi} ln \frac{R + a/2}{R - a/2}$$

Si noti che, nel caso in cui $a << R$, sviluppando in serie i logaritmi l'espressione dei coefficienti di autoinduzione diviene:

$$L_1 = \frac{\mu a^2 N_1^2}{2\pi R} \qquad \text{e} \qquad L_2 = \frac{\mu a^2 N_2^2}{2\pi R}$$

vale a dire la stessa espressione che si ottiene per un solenoide rettilineo di lunghezza pari a $2\pi R$ e sezione di superficie a^2, rispettivamente con N_1 ed N_2 spire.

Si può facilmente verificare che i tre coefficienti che abbiamo ricavato nel caso generale verificano la relazione:

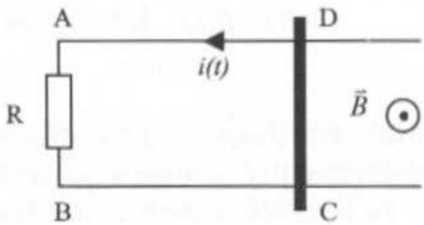
$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

che è sempre verificata se il flusso di campo disperso è nullo.

Il rapporto tra i coefficienti di mutua ed auto induzione vale poi:

$$\frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

ESERCIZIO 8.5 *Si considerino due rotaie conduttrici parallele ed orizzontali collegate tramite un resistenza R. Una sbarretta conduttrice di resistenza trascurabile di lunghezza a è disposta perpendicolar-mente alle rotaie come indicato in figura, in modo da realizzare un circuito elettrico chiuso. L'attrito tra sbarretta e rotaie sia trascurabile. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme ma variabile nel tempo di induzione $\vec{B}(t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t)\hat{k}$, dove $\hat{k}$ è il versore unitario che indica la direzione ortogonale al dispositivo. Quale forza è necessario esercitare mediante un agente esterno affinché la sbarretta rimanga ferma nel tempo?*



SOLUZIONE

Le variazioni di $\vec{B}$ inducono una forza elettromotrice $f_i(t)$ nel circuito ABCD data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Scegliamo un'orientazione del circuito elettrico antioraria. Di conseguenza la normale alla superficie piana ce ha per bordo il circuito è perpendicolare al piano del foglio ed uscente da esso. Per il flusso si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{S_{ABCD}} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS$$

ed essendo il campo uniforme e sempre diretto parallelamente alla normale alla superficie del circuito:

$$\Phi(\vec{B}) = B(t) \int_{S_{ABCD}} dS = B(t) a \overline{AD}$$

dove AD, distanza della sbarretta dal lato del circuito che contiene la resistenza, può assumere qualsiasi valore maggiore di zero.

La forza elettromotrice indotta sarà data quindi da:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[B_0 \cos(\omega t) a \overline{AD}\right] = a\omega \overline{AD} B_0 \sin(\omega t)$$

La forza elettromotrice causa circolazione di corrente nel circuito la cui intensità deve soddisfare l'equazione della maglia:

$$f_i(t) = i(t) R$$

da cui si ottiene:

$$i(t) = \frac{a\omega \overline{AD} B_0}{R} sin(\omega t)$$

Si noti che nell'espressione che abbiamo ricavato si sta considerando la posizione della sbarretta fissa, ovvero che il valore di $\overline{AD}$ sia costante. Dobbiamo però notare che il fatto che la sbarretta sia percorsa da corrente e che sia immersa in un campo di induzione magnetica fa sì che essa risenta di una forza di natura magnetica. Sappiamo infatti che un elemento di circuito infinitesimo $\overrightarrow{dl}$ percorso da corrente i subisce una forza magnetica data dalla seconda legge di Laplace:

$$\overrightarrow{dF} = i\overrightarrow{dl} \times \vec{B}$$

La sbarretta, di lunghezza finita, subirà quindi una forza data da:

$$\vec{F} = \int_C^D \overrightarrow{dF} = \int_C^D i(t)\overrightarrow{dl} \times \vec{B}(t)$$

In effetti la forza di natura magnetica agisce su tutti i lati del circuito ma dal momento che solo la sbarretta è in grado di muoversi, ci limitiamo allo studio della forza che agisce su di essa. Esplicitando le espressioni per la corrente ed il vettore induzione ed osservando che $\overrightarrow{dl}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro si ottiene:

$$F = \int_C^D i(t)\overrightarrow{dl} \times \vec{B}(t) = (B_0 a)^2 \frac{\omega \, sin(2\omega t)}{2R} \overline{AD}$$

diretta perpendicolarmente alla sbarretta stessa. Sarà quindi necessario applicare una forza uguale ed opposta a quella magnetica che abbiamo ricavato, affinché la sbarretta rimanga immobile alla distanza $\overline{AD}$.

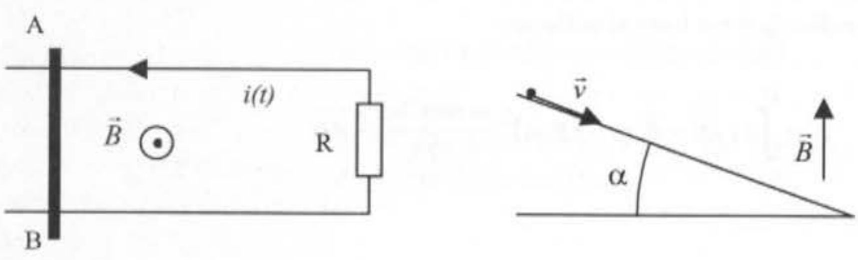
Si noti che se la sbarretta fosse libera di muoversi, nel ricavare la derivata del flusso del vettore induzione attraverso la superficie del circuito, non sarebbe più lecito considerare $\overline{AD}$ costante; tale circostanza renderebbe il calcolo della forza elettromotrice indotta più complesso.

Si noti infine che la forza che è necessario applicare deve cambiare periodicamente verso con frequenza doppia rispetto alle oscillazioni periodiche del campo di induzione e che essa ha valore massimo tanto più grande quanto più grande è la distanza $\overline{AD}$.

ESERCIZIO 8.6 *Una sbarretta conduttrice di lunghezza a e massa m è appoggiata su due rotaie parallele conduttrici inclinate di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale. La sbarretta e le rotaie presentano una resistenza al passaggio della corrente trascurabile. Le rotaie sono poste in collegamento tra loro tramite una resistenza R, come indicato in figura, in modo da dar luogo ad un circuito elettrico chiuso. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme di induzione B diretto verticalmente verso l'alto.*

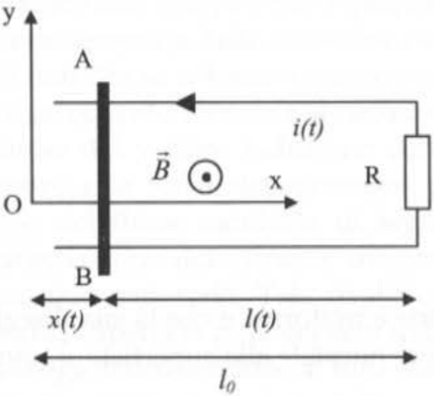
Detta $\vec{v}$ la velocità istantanea di traslazione della sbarretta:

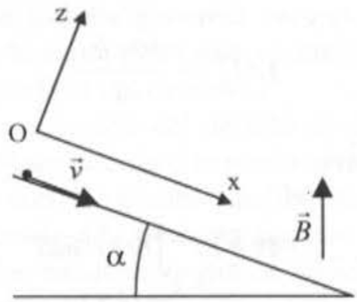
1) *Si descriva qualitativamente il funzionamento del dispositivo;*
2) *Si ricavi la relazione tra la corrente indotta nel circuito e la velocità della sbarretta;*
3) *Si ricavi l'andamento nel tempo della velocità della sbarretta.*



SOLUZIONE

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, rispetto al quale calcoleremo la posizione della sbarretta, come indicato nella figura che segue. Dal momento che dovremo utilizzare la legge di Faraday-Neumann-





Lenz per determinare la forza elettromotrice indotta nel circuito, scegliamo subito un'orientazione per la normale alla superficie del circuito. Scegliamo la normale nella direzione e verso del versore dell'asse z; di conseguenza rimane fissato il verso convenzionale di orientazione del percorso chiuso costituito dalla rotaie e dalla sbarretta, antiorario come indicato in figura.

1) Dal punto di vista qualitativo possiamo dire che , se non vi fosse campo di induzione $\vec{B}$ la sbarretta scivolerebbe verso il basso sotto l'azione della sola forza peso; abbiamo risolto problemi di questo tipo nel Capitolo 2. La presenza del campo $\vec{B}$ fa sì che si induca una forza elettromotrice all'interno del circuito e che questa dia luogo a circolazione di corrente. Analogamente a quanto accade nel caso dell'esercizio precedente, la sbarretta, percorsa da corrente ed immersa in campo $\vec{B}$ subirà una forza di

natura magnetica. Ne consegue che la dinamica del moto non sarà dovuta alla sola forza peso ma anche alla forza di natura magnetica.

2) Supponiamo che ad un certo istante la sbarretta si stia muovendo con velocità istantanea $\vec{v}$ diretta nel verso positivo dell'asse x. Possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nel circuito dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

dove:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{S_{circ}} \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS$$

Dal momento che il campo di induzione è uniforme e che la sua direzione forma sempre un angolo α con il versore normale alla superficie $\hat{n}$, ovvero con $\hat{z}$, si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{S_{circ}} |\vec{B}| \cdot |\hat{n}| \cos \alpha dS = B \cos \alpha \int_{S_{circ}} dS = B \cos \alpha S(t)$$

nella quale si è posta in evidenza la dipendenza della superficie del circuito dal tempo. La superficie $S(t)$ può essere espressa come:

$$S(t) = a \cdot l(t) = a \cdot [l_0 - x(t)]$$

Nel circuito si indurrà quindi una forza elettromotrice data da:

$$f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\{B \cos(\alpha) a [l_0 - x(t)]\} = B \cos(\alpha) a \frac{dx(t)}{dt}$$

Ma la derivata rispetto al tempo di $x(t)$ non è altro che la velocità della sbarretta. Si ha quindi:

$$f_i(t) = B\cos(\alpha)av(t)$$

La forza elettromotrice ha segno positivo, tale da indurre circolazione di corrente nel verso convenzionale scelto sul circuito, cioè in senso antiorario. Ciò è in accordo con il fatto che la corrente indotta genererà campo di induzione con componente z positiva, in modo da opporsi alla variazione di flusso generata dalla diminuzione della superficie del circuito.

Si noti che se si fosse scelta la normale alla superficie del circuito rivolta in verso opposto all'asse z, il circuito sarebbe stato orientato in senso orario; il flusso del vettore induzione concatenato con il circuito sarebbe stato negativo e la forza elettromotrice, proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso cambiata di segno, sarebbe risultata negativa rispetto all'orientazione del circuito; ovvero la corrente indotta sarebbe risultata comunque antioraria. Tale risultato evidenzia che l'orientazione di una superficie aperta si può scegliere indifferentemente nei due modi, purché si mantenga la convenzione in tutti i calcoli successivi.

La forza elettromotrice indotta causa circolazione di corrente nel circuito la cui intensità deve soddisfare l'equazione della maglia:

$$f_i(t) = i(t)R$$

da cui si ottiene:

$$i(t) = \frac{B\cos(\alpha)av(t)}{R}$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti se invece di applicare la legge di Faraday-Neumann-Lenz si fosse considerato che all'interno della sbarretta in moto nel campo di induzione $\vec{B}$ agisce il campo elettromotore indotto:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} = -vB\sin(\vec{v},\vec{B})\hat{y} = -vB\cos(\alpha)\hat{y}$$

e che la forza elettromotrice indotta nel circuito è pari a:

$$f_i = \oint \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{E}_i \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B vB\,cos(\alpha)dl = vBa\,cos(\alpha)$$

3) Analogamente a caso dell'esercizio precedente, il fatto che la sbarretta sia percorsa da corrente e che sia immersa in un campo di induzione magnetica fa sì che essa risenta di una forza di natura magnetica, data da:

$$\vec{F}_{magn} = \int_A^B i(t)\overrightarrow{dl} \times \vec{B}(t)$$

In effetti la forza di natura magnetica agisce su tutti i lati del circuito ma dal momento che solo la sbarretta è in grado di muoversi, ci limitiamo allo studio della forza che agisce su di essa. Si osserva immediatamente che la forza è diretta lungo l'asse x in verso opposto alla velocità; essa tende quindi a decelerare la sbarretta. Esplicitando le espressioni per la corrente ed il vettore induzione ed osservando che $\overrightarrow{dl}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro si ottiene per il modulo della forza:

$$F_{magn} = \int_A^B \frac{B^2\,cos(\alpha)av(t)}{R}dl = \frac{a^2B^2\,cos(\alpha)v(t)}{R}$$

La forza magnetica sarà quindi data da:

$$\vec{F} = -\frac{a^2B^2\,cos(\alpha)}{R}\vec{v}$$

Si osserva che la forza di natura magnetica è opposta alla velocità e proporzionale ad essa tramite un coefficiente che dipende dalle dimensioni del circuito e dal campo di induzione. Essa ha quindi la stessa espressione della forza di resistenza passiva che si oppone al moto di un grave in un mezzo viscoso, che in genere viene espressa come:

$$\vec{F} = -\beta\vec{v}$$

Ci aspettiamo quindi che il moto della sbarretta sia simile a quello che si avrebbe se la sbarretta subisse una forza di resistenza passiva.

Il moto della sbarretta sarà, come al solito, determinato dal secondo principio della dinamica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

dove la forza $\vec{F}$ è somma di tutte le forze che agiscono su di essa:

$$\vec{F} = \vec{F}_{magn} + \vec{P} = -\gamma\vec{v} + \vec{P}$$

avendo definito γ come:

$$\gamma = \frac{a^2 B^2 \cos(\alpha)}{R}$$

Si ha quindi che:

$$-\gamma\vec{v} + \vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

La relazione vettoriale può essere proiettata lungo l'asse x. Otteniamo:

$$-\gamma v + mg\sin(\alpha) = m\frac{dv}{dt}$$

Abbiamo quindi un'equazione differenziale ordinaria di primo ordine che può essere risolta per separazione di variabili. Si ha:

$$\frac{dt}{m} = \frac{dv}{-\gamma v + mg\,sin(\alpha)}$$

che integrata restituisce l'espressione:

$$-\frac{\gamma}{m}t + cost = ln(-\gamma v + mg\,sin(\alpha))$$

Passando dai logaritmi ai numeri si arriva all'espressione:

$$-\gamma v + mg\,sin(\alpha) = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

dove A è una costante di integrazione che può essere determinata imponendo una condizione iniziale. Tramite dei semplici passaggi si ottiene:

$$v(t) = \frac{1}{\gamma}\left[mg\,sin(\alpha) - Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]$$

Poniamo ad esempio che la velocità della sbarretta all'istante zero sia nulla:

$$v(0) = \frac{1}{\gamma}[mg\,sin(\alpha) - A] = 0$$

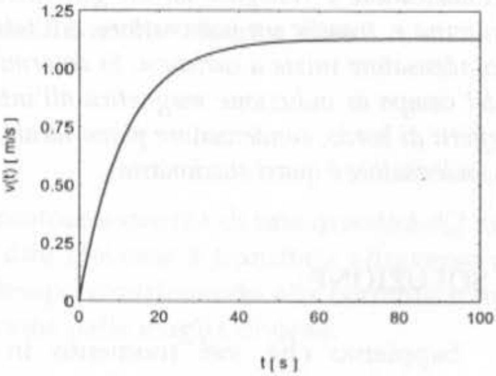
Ciò fissa il valore della costante:

$$A = mg\,sin(\alpha)$$

In definitiva otteniamo per l'andamento temporale della velocità l'espressione:

$$v(t)=\frac{mg\,sin(\alpha)}{\gamma}\left[1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]$$

Il grafico della velocità della sbarretta viene riportato nella figura con i seguenti valori delle grandezze fisiche: *m=10g, a=30°, B=1T, a=10cm, R=1Ω.* Si osserva che la velocità della sbarretta aumenta e raggiunge un valore di velocità limite oltre il quale non è più accelerata. In queste condizioni limite, la forza peso e la forza magnetica sono uguali ed opposte e si bilanciano esattamente, dando accelerazione nulla.



Si noti che si è scelto un valore di induzione magnetica molto elevato, ad esempio rispetto a quelli ottenibili con elettromagneti di dimensioni normali, per metterne in evidenza l'effetto. Per valori di campo di induzione più bassi, ad esempio quello del campo di induzione terrestre ($B\approx 5\cdot 10^{-5}T$), l'effetto è così piccolo che può essere trascurato. Per valori piccoli di B si ha infatti:

$$\gamma / m << 1$$

e l'espressione della velocità può essere approssimata sviluppando in serie di Taylor la funzione esponenziale. Si ha:

$$v(t)\approx\frac{mg\,sin(\alpha)}{\gamma}\left[1-1+\frac{\gamma}{m}t\right]=g\,sin(\alpha)t$$

che è lo stesso risultato che si ottiene per un corpo di massa qualsiasi che scivoli su un piano inclinato senza attrito inclinato di un angolo α rispetto ad un piano orizzontale.

ESERCIZIO 8.7 *Si consideri un condensatore piano con armature circolari di superficie S parallele ed a distanza h. Lo spazio tra le armature sia vuoto. Il condensatore è collegato ad un generatore di forza elettromotrice f e resistenza interna r, tramite un interruttore. All'istante t=0 l'interruttore viene chiuso ed il condensatore inizia a caricarsi. Si determinino gli andamenti del campo elettrico e del campo di induzione magnetica all'interno del condensatore. Si trascurino gli effetti di bordo, condensatore piano ideale, e si consideri che il regime di carica del condensatore è quasi stazionario.*

SOLUZIONE

Sappiamo che, nel momento in cui l'interruttore viene chiuso, il generatore inizia a far circolare corrente nel circuito ed il condensatore inizia a caricarsi. La corrente nel circuito è variabile nel tempo. Possiamo tuttavia considerare che le variazioni siano molto lente dal momento che si è in regime quasi stazionario. Tale considerazione permette di ritenere ancora valide le leggi di Kirchhoff per lo studio dei circuiti, per i valori istantanei di corrente e di differenza di potenziale. Per la maglia costituita dalla serie di generatore, resistenza interna e condensatore, potremo scrivere:

$$f - v_c(t) = ri(t)$$

dove $i(t)$ e $v_c(t)$ sono rispettivamente i valori istantanei di corrente che circola nel circuito e di differenza di potenziale ai capi del condensatore. Come noto, $v_c(t)$ può essere messa in relazione con il valore istantaneo della carica immagazzinata al suo interno $Q(t)$ tramite la:

$$v_c(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

e l'equazione della maglia diviene:

$$f - \frac{Q(t)}{C} = ri(t)$$

Sappiamo inoltre, dalla definizione di corrente elettrica, che:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

ovvero che se la carica sul condensatore aumenta di una quantità dQ in un intervallo di tempo dt, ciò vuol dire che essa è transitata attraverso una sezione del circuito nello stesso tempo contribuendo alla corrente tramite l'espressione precedente. L'equazione della maglia diviene:

$$fC - Q(t) = rC\frac{dQ}{dt}$$

che, una volta ordinata secondo l'ordine di derivazione, risulta essere una equazione differenziale ordinaria non omogenea di primo ordine:

$$rC\frac{dQ}{dt} + Q(t) = fC$$

Possiamo ricavare la soluzione dell'equazione integrando per separazione di variabili. Avremo:

$$rC\frac{dQ}{dt} = fC - Q(t)$$

e

$$\frac{dQ}{fC - Q(t)} = \frac{dt}{rC}$$

Integrando ambo i membri otteniamo:

$$-\ln[fC - Q(t)] = \frac{t}{rC} + cost$$

e passando dai logaritmi ai numeri:

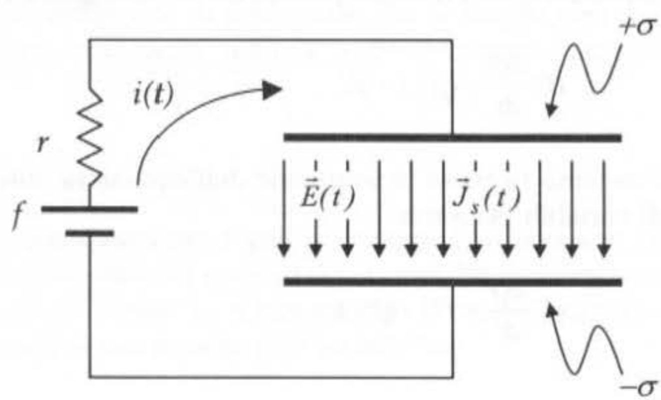
$$fC - Q(t) = Ae^{-t/rC}$$

Il valore della costante di integrazione può essere determinato imponendo la condizione iniziale $Q(0)=0$, ovvero che il condensatore sia inizialmente scarico. Si ha:

$$fC - Q(0) = fC - 0 = A$$

da cui si ricava che $A=fC$. L'andamento temporale della carica immagazzinata nel condensatore al tempo t sarà dato quindi dall'espressione:

$$Q(t) = fC\left[1 - e^{-t/rC}\right]$$



Sappiamo quindi che al tempo t sulle armature del condensatore saranno presenti le cariche $Q(t)$ e $-Q(t)$, come mostrato in figura. Se trascuriamo gli effetti di bordo, potremo considerare che tali cariche siano distribuite uniformemente sulla superficie delle armature con densità di carica di superficie rispettivamente pari a $+\sigma(t)=Q(t)/S$ e $-\sigma(t)=-Q(t)/S$. All'interno del condensatore il campo elettrico sarà quello che si ottiene per un doppio strato elettrico carico con densità di carica uguali ed opposte:

$$E_0(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

diretto perpendicolarmente alle armature e con verso dall'armatura carica positivamente a quella carica negativamente. Esprimendo la relazione precedente in termini di carica elettrica avremo per l'intensità del campo elettrico:

$$E_0(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S}=\frac{fC\left[1-e^{-t/rC}\right]}{\varepsilon_0 S}=\frac{f\varepsilon_0\dfrac{S}{d}\left[1-e^{-t/rC}\right]}{\varepsilon_0 S}=\frac{f}{d}\left[1-e^{-t/rC}\right]$$

All'interno del condensatore è presente, durante il processo di carica, anche un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0(t)$ dipendente dal tempo. Tale circostanza non è del tutto evidente a prima vista. Cerchiamo di darne una spiegazione a partire dalla quarta equazione di Maxwell, scritta in forma integrale nel caso del vuoto. Sappiamo che, scelto un cammino di integrazione chiuso qualsiasi orientato C, l'integrale di circuitazione del campo di induzione $\vec{B}_0$ lungo tale cammino è sempre pari al flusso della somma dei vettori densità di corrente di conduzione $\vec{J}_c$ e densità di corrente di spostamento $\vec{J}_s$ attraverso una qualsiasi superficie Σ che abbia per bordo il cammino C. In termini matematici si ha:

$$\oint_C \vec{B}_0\cdot\overrightarrow{dl}=\mu_0\int_\Sigma(\vec{J}_c+\vec{J}_s)\cdot\hat{n}dS$$

Nel calcolare gli integrali dovremo sempre utilizzare le convenzioni note per l'orientazione delle normale alla superficie scelta.

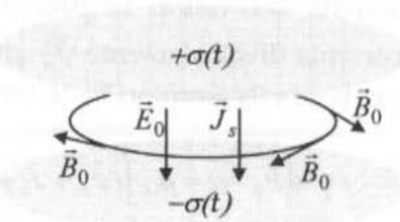
All'interno del condensatore la densità di corrente di conduzione $\vec{J}_c$ è nulla, dal momento che il vuoto non è conduttore e non vi può essere scorrimento di carica al suo interno. Tuttavia la densità di corrente di spostamento $\vec{J}_s$, definita come:

$$\vec{J}_s = \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}$$

è diversa da zero se il campo elettrico cambia nel tempo. Essa sarà un vettore parallelo al vettore $\vec{E}_0$ in ogni punto all'interno del condensatore con intensità pari a:

$$J_s = \frac{\partial(\varepsilon_0 E_0)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{dE_0}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left\{\frac{f}{d}\left[1 - e^{-t/rC}\right]\right\} = \frac{f}{rS} e^{-t/rC}$$

Se scegliamo quindi un cammino di integrazione all'interno del condensatore ci dobbiamo aspettare che la circuitazione di $\vec{B}_0$ non sia nulla e che il campo $\vec{B}_0$ stesso non sia nullo. Per simmetria ci aspettiamo che il campo $\vec{B}_0$ abbia linee di campo circolari contenute in piani paralleli alle armature del condensatore e centrate sul suo asse di simmetria, come mostrato nella figura che segue. Inoltre il valore di $\vec{B}_0$ non dipende dalla distanza del piano che contiene la linea di campo dalle armature. Se scegliamo come cam-mino di integrazione nella quarta equa-zione di Maxwell una linea circolare di raggio generico x che coincida con una linea di campo di $\vec{B}_0$ il calcolo dell'in-tegrale di circuitazione sarà molto semplice. Avremo:



$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_C B_0 dl = B_o \oint_C dl = 2\pi x B_0$$

avendo preso la linea orientata in senso orario, con riferimento alla figura. D'altra parte tale integrale di linea deve essere pari al flusso della densità di corrente totale attraverso la superficie piana che ha per bordo la linea circolare, che all'interno del condensatore si riduce al solo termine:

$$\mu_0 \int_\Sigma \vec{J}_s \cdot \hat{n} dS$$

Il verso di percorrenza del circuito di integrazione impone che la normale alla superficie sia diretta verso il basso, parallelamente a $\vec{J}_s$. L'integrale si semplifica notevolmente, dal momento che $\vec{J}_s$ è uniforme all'interno del condensatore:

$$\mu_0 \int_\Sigma \vec{J}_s \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_\Sigma J_s dS = \mu_0 J_s \int_\Sigma dS = \mu_0 J_s \pi x^2$$

Imponendo l'uguaglianza dei due termini della quarta equazione di Maxwell otteniamo:

$$B_0 2\pi x = \mu_0 J_s \pi x^2$$

da cui si ha:

$$B_0(t) = \frac{\mu_0 J_s(t) x}{2} = \frac{\mu_0 f x}{2rS} e^{-t/rC}$$

Il campo $\vec{B}_0$ è quindi nullo sull'asse di simmetria del condensatore ($x=0$) e cresce linearmente allontanandosi verso il bordo.

Notiamo che $\vec{J}_s$ è diversa da zero solo mentre il condensatore si sta caricando. La sua espressione matematica tende infatti a zero per $t \to \infty$. Se integriamo $\vec{J}_s$ su tutta la sezione del condensatore, di superficie S, otteniamo l'intensità di corrente di spostamento $i_s(t)$. L'integrazione è semplice dal momento che è uniforme nel condensatore. Avremo:

$$i_s(t) = \int_S \vec{J}_s \cdot \hat{n} dS = \int_S J_s dS = J_s \int_S dS = J_s S = \frac{f}{r} e^{-t/rC}$$

Tale espressione è esattamente equivalente alla corrente di conduzione che scorre nel circuito esterno e che si ricava derivando la carica elettrica:

$$i_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{f}{r} e^{-t/rC}$$

mostrando che, durante il transitorio di carica, la corrente di spostamento garantisce, all'interno del condensatore, la continuità di corrente.

Anche il campo di induzione $\vec{B}_0$ all'interno del condensatore è diverso da zero solamente durante la carica del condensatore, come mostra anche la sua espressione matematica. Nel momento in cui si raggiunge la situazione stazionaria in cui il condensatore è carico ed il campo elettrico $\vec{E}_0$ diventa stazionario il campo $\vec{B}_0$ si annulla.

ESERCIZI CON RISULTATO

ESERCIZIO 8.8 *Il coefficiente di mutua induzione fra due solenoidi è pari a 0.005 H. La corrente nel primo avvolgimento varia nel tempo secondo la legge $I_1=I_0 \sin \varpi t$, con $I_0=10$ A, $\varpi=2\pi/T$ e $T=0.02$ s. Determinare a) la dipendenza dal tempo della f.e.m. indotta nel secondo avvolgimento e b) il valore massimo di tale f.e.m.*

Sol. a) $[-15.7 \cos (100\pi t)]$ V ; b) 15.7 V

ESERCIZIO 8.9 *In un solenoide di induzione 0.021 H scorre una corrente $I= I_0 \sin \varpi t$, con $I_0=5$ A, $\varpi=2\pi/T$ e $T=0.02$ s. Determinare a) la dipendenza dal tempo della f.e.m. autoindotta nel circuito e b) l'energia del campo magnetico nel solenoide.*

Sol. a) $[-33 \cos (100\pi t)]$ V ; b) $[0.26 \text{ sen}^2 (100\pi t)]$ J

ESERCIZIO 8.10 *Un filo di rame ($\rho_{Cu}=1.7\times10^{-8}\ \Omega{\cdot}m$) di sezione $S=1$ mm^2 è piegato in modo da formare un quadrato di lato $l=5$ cm. Esso è immerso in un campo magnetico uniforme diretto ortogonalmente al piano del quadrato e di induzione $B=B_0 \sin \varpi t$, con $B_0=0.01$ T, $\varpi=2\pi/T$ e $T=0.02$ s. Determinare la dipendenza dal tempo di a) il flusso magnetico concatenato con il quadrato, b) la f.e.m. indotta nel circuito e c) l'intensità della corrente indotta nel circuito.*

Sol. a) 2.5×10^{-5} sen $(100\pi t)$ Wb;
b) $[-7.85\times10^{-3}\cos(100\pi t)]$ V
c) $[-2.3 \cos(100\pi t)]$ A

ESERCIZIO 8.11 *Un filo di rame ($\rho_{Cu}=1.7\times10^{-8}\ \Omega{\cdot}m$) di sezione $S=1$ mm^2 è piegato in modo da formare un quadrato di lato $l=5$ cm. Esso è immerso in un campo magnetico uniforme di induzione 0.1 T diretto ortogonalmente al piano del quadrato. Calcolare la quantità di elettricità che passa nel circuito quando il campo magnetico scompare.*

Sol. 0.074 C

ESERCIZIO 8.12 *Una spira di raggio r=5 cm e resistenza R=1 Ω è immersa in un campo magnetico uniforme di induzione 0.2 Wb/m² diretto ortogonalmente al piano della spira stessa. Calcolare la quantità di elettricità che passa attraverso la spira quando essa viene ruotata di 90°.*

Sol. 2.5×10^{-4} C

ESERCIZIO 8.13 *Un solenoide ha resistenza R=10 Ω e induttanza L=0.144 H. Quanto tempo è necessario affinché la corrente circolante nel circuito si riduca alla metà di quella, continua, che circolava inizialmente?*

Sol. 0.01 s

ESERCIZIO 8.14 *Un solenodide costituito da 50 avvolgimenti collegato ad un galvanometro balistico (misura la quantità di carica che lo attraversa) viene posto fra le espansioni polari di un magnete per misurare l'induzione del campo magnetico. L'asse del solenoide è parallelo alle linee del campo. La sezione del solenoide è di 2 cm² e la sua resistenza è trascurabile rispetto a quella del galvanometro. Quando il solenoide viene rapidamente allontanato dal magnete, il galvanometro segna 10^{-6} C. Calcolare l'induzione del campo magnetico.*

Sol. 0.2 T

ESERCIZIO 8.15 *Un solenoide costituito da 500 avvolgimenti di diametro 10 cm si trova in un campo magnetico.Calcolare la forza elettromagnetica media indotta ai capi del solenoide se l'induzione del campo magnetico varia da 0 a 2 Wb/m² in 0.1 secondi.*

Sol. 78.5 V

ESERCIZIO 8.16 *Una sbarretta lunga 1 m ruota con una velocità angolare costante di 20 rad/s in un campo magnetico di induzione 0.05 T. L'asse di rotazione passa per una delle estremità della sbarretta, ed è parallelo alle linee del campo magnetico. Calcolare la f.e.m. indotta ai capi della sbarretta.*

Sol. 0.5 V

ESERCIZIO 8.17 *Un solenoide costituito da 100 spire di sezione 100 cm² ruota in un campo magnetico omogeneo di induzione 0.1 T. L'asse di rotazione è ortogonale all'asse del solenoide e alle linee del campo magnetico. Calcolare la massima f.e.m. indotta ai capi del solenoide.*

Sol. 3.14 V

Il nuovo ordinamento degli studi delle Facoltà di Ingegneria degli atenei italiani prevede l'insegnamento delle discipline mediante un sistema basato sul concetto di credito. Un credito corrisponde a dieci ore di lezione ed esercitazione in aula tenute dal docente, seguite da almeno quindici ore di studio individuale dello studente.
L'allargamento delle frontiere della conoscenza ha inoltre fatto sì che il numero di ore di lezione dedicate all'insegnamento della Fisica, e di altre discipline di base, si sia ridotto rispetto al passato. Ciò rende difficile al docente trattare durante le lezioni casi particolari, applicazioni o esercizi che rendano migliore la comprensione della materia. È necessaria quindi una nuova impostazione didattica in cui lo studente sia chiamato settimanalmente a risolvere individualmente degli esercizi scelti per la cui soluzione debbano essere utilizzati tutti i concetti appresi nella settimana precedente; è indispensabile inoltre che egli possa accedere alla loro risoluzione in forma quanto più estesa possibile e che nella soluzione compaiano richiami estesi di teoria. Ciò anche nella convinzione che è meglio svolgere pochi esercizi scelti in forma molto estesa che svolgerne molti simili velocemente.
Il presente testo raccoglie gli esercizi svolti proposti settimanalmente, a gruppi di cinque, nel corso dello svolgimento di un corso di Fisica Generale da dieci crediti per studenti di Ingegneria Informatica, tenutosi in un semestre dell'A.A.2000/2001. Alla fine di ogni capitolo sono inoltre riportati esercizi non svolti con risultato. Il testo può essere utilizzato sia durante i corsi che per la preparazione delle prove di valutazione finali.

FRANCESCO MICHELOTTI – Professore Associato di Fisica Sperimentale presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza". Svolge attività didattica nell'ambito dei corsi di Fisica dal 1991. Si occupa dello studio delle proprietà ottiche lineari e nonlineari di materiali polimerici e molecolari per applicazioni in optoelettronica e fotonica. Tutta la sua attività didattica e scientifica è riportata e aggiornata continuamente su
w3.uniroma1.it/cattedra_michelotti/

ISBN 88-7488-040-5
9 788874 880409

PROGETTO LEONARDO
è una realizzazione
SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO
40131 Bologna via U. Terracini 30 Tel. 051-63.40.343 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

Euro 20,00