

**P. Mazzoldi**

**M. Nigro**

**C. Voci**

*Dipartimento di Fisica Galileo Galilei Padova*

# **FISICA**

Vol. II

ELETTROMAGNETISMO – ONDE

SECONDA EDIZIONE

EdiSES

e otteniamo

$$P = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \phi \quad (11.30) \quad \text{Formula di Galileo Ferraris}$$

della formula di Galileo Ferraris; il termine  $\cos \phi$  è chiamato *fattore di potenza*.

La potenza media, detta *potenza reale*, dissipata nel circuito è in generale diversa da zero, a meno che non sia  $\phi = \pi/2$ , fatto che si verifica solo per un induttore o per un condensatore o per una loro combinazione, qualora si possano trascurare le resistenze intrinseche di tali elementi e quelle dei collegamenti. La condizione  $\phi = 0$ ,  $\cos \phi = 1$  viceversa si realizza quando la reattanza del circuito è nulla, come avviene per un circuito puramente resistivo o in particolari situazioni, come quelle di risonanza o antirisonanza.

La (11.30) può essere applicata a qualsiasi elemento particolare di un circuito, considerando la corrente che lo attraversa e la tensione ai capi, come a tutto un circuito, nel qual caso  $V_{\text{eff}}$  è il valore efficace della f.e.m. del generatore e  $i_{\text{eff}}$  il valore efficace della corrente totale da questo erogata.

Il termine istantaneo  $V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t$  che porta a (11.29) è sempre positivo; invece il termine  $\frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \phi \sin 2\omega t$  a valor medio nullo è alternativamente positivo e negativo e corrisponde ad energia ceduta dal generatore al circuito, immagazzinata in questo e successivamente restituita al generatore. Il valore massimo

$$Q = \frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \phi = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin \phi$$

Potenza reattiva

è anche chiamato *potenza reattiva*, in quanto presente solo se la reattanza del circuito è diversa da zero. La somma

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2} V_0 i_0 = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$$

Potenza apparente

è la *potenza apparente*.

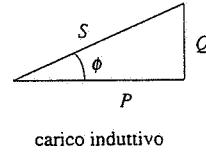
In sostanza  $S$  ha il significato di massima potenza istantanea richiesta al generatore; questo infatti deve essere dimensionato in modo tale da poter fornire con una data f.e.m.  $V_0$  almeno la corrente  $i_0$ , anche se poi nel circuito non viene mediamente utilizzata tutta la potenza disponibile a causa dello sfasamento. In generale è conveniente che  $\cos \phi$  sia vicino a 1, per non dover disporre di un generatore capace di erogare molta più potenza di quella realmente necessaria; graficamente, nella figura 11.35 il cateto  $Q$  non dovrebbe essere paragonabile al cateto  $P$  per non avere una  $S$  abbastanza superiore a  $P$ , indice di un notevole scambio energetico col circuito senza una dissipazione effettiva. Per questa ragione se un circuito ha  $\phi$  significativamente diverso da zero si inseriscono tra il generatore e il circuito opportuni elementi induttori o capacitivi che non assorbono potenza media, ma cambiano lo sfasamento complessivo avvicinandolo a zero (operazione di rifasamento). D'altra parte non è nemmeno conveniente lavorare con  $\phi = 0$ , perché è meglio lasciare una certa quantità di potenza inutilizzata e disponibile in caso di variazione dell'assorbimento di potenza media da parte del circuito.

Queste considerazioni non sono molto significative se si hanno piccoli carichi di potenza, facilmente erogabili da un generatore anche modesto; esse diventano invece molto importanti per grossi carichi, come sono quelli rappresentati dalle reti di distribuzione dell'energia elettrica, i quali hanno anche la caratteristica di essere variabili.

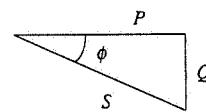
La differenza di significato delle tre potenze  $P$ ,  $Q$  e  $S$  viene messa in evidenza anche con i nomi delle unità di misura loro attribuite nella pratica: mentre  $P$  si esprime nell'unità standard, il watt, per  $Q$  si usa l'unità var, detta *voltampere reattivo*, e per  $S$  l'unità va, *voltampere*; esse sono identiche numericamente al watt.

Le (11.29) e (11.30) sono scritte nella forma più generale; però per un dato circuito o per un dato elemento di circuito  $V_0$  e  $i_0$  sono legati dalla (11.19), dove  $Z_0$  è il modulo dell'impenetranza complessa; analogamente  $V_{\text{eff}} = Z_0 i_{\text{eff}}$ . Si può pertanto scrivere

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z_0} \cos \phi = \frac{1}{2} Z_0 i_0^2 \cos \phi = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z_0} \cos \phi = Z_0 i_{\text{eff}}^2 \cos \phi \quad (11.31)$$



carico induttivo



carico capacitivo

Figura 11.35

In particolare per un elemento resistivo  $\phi = 0$  e  $P_r = R i_{\text{eff}}^2 = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$ , formalmente identica a

(6.34): i valori efficaci di corrente e tensione sono tali da dare per la potenza (media) dissipata in un resistore la stessa formula valida per la corrente continua.

### Esempio 11.6

Per il trasformatore dell'esempio 11.5 si dimostri che la potenza erogata dal generatore nel circuito primario è eguale a quella dissipata nel resistore  $R_2$  del circuito secondario.

#### Soluzione

Dalla trattazione del trasformatore con  $R_1 = 0$ , fatta nel paragrafo 11.5, abbiamo che nel primario f.e.m. e corrente valgono

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}, \quad I_1 = \frac{\omega L_2 - iR_2}{\omega L_1 R_2} \mathcal{E},$$

e hanno i valori massimi

$$\mathcal{E}_0, \quad I_{1,0} = \frac{\sqrt{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}}{\omega L_1 R_2} \mathcal{E}_0.$$

Inoltre

$$\operatorname{tg}\phi = -\frac{R_2}{\omega L_2} \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{\omega L_2}{\sqrt{\omega^2 L_2^2 + R_2^2}}$$

e la potenza (11.29) erogata nel primario dal generatore è

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}_0 I_{1,0}}{2} \cos\phi = \frac{L_2}{L_1} \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R_2} = \frac{N_2^2}{N_1^2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R_2}.$$

Nel secondario, secondo (11.31),

$$P_2 = \frac{R_2 I_{2,0}^2}{2} = \frac{R_2}{2} \left( \frac{N_2}{N_1} \frac{\mathcal{E}_0}{R_2} \right)^2 = \frac{N_2^2}{N_1^2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R_2} = P_1.$$

La potenza disponibile nel primario, e ivi non spesa per l'assenza di elementi dissipativi, è trasferita tramite il campo magnetico variabile nel secondario, dove è spesa su  $R_2$ . Nel caso reale una piccola percentuale di potenza sarà dissipata sulla resistenza sempre presente nel primario e una parte assorbita da fenomeni di isteresi nel nucleo di ferro; inoltre non sarà possibile realizzare in generale un accoppiamento magnetico perfetto e si avrà del flusso disperso. L'insieme di questi fattori impedisce, nel circuito in esame, il completo trasferimento di potenza dal primario al secondario, anche se di norma l'efficienza è piuttosto alta.

Con i dati numerici dell'esempio 11.5

$$P_1 = \frac{312.6 \cdot 10.41}{2} \cos 72.6^\circ = 486.6 \text{ W}, \quad P_2 = \frac{1 \cdot 31.26^2}{2} = 488.6 \text{ W},$$

e si verifica che entro le approssimazioni numeriche i valori sono eguali. Si noti che nel secondario la corrente è maggiore che nel primario; è questo un uso classico dei trasformatori in cui, giocando soprattutto sul rapporto del numero di spire, si passa da una situazione di grande f.e.m. e piccola corrente nel primario a una situazione di piccola f.e.m. equivalente e grande corrente nel secondario (o viceversa), rispettando la conservazione dell'energia.

Per il calcolo della potenza non abbiamo adottato una notazione complessa: in effetti la procedura di eseguire il prodotto  $VI$  tra tensione e corrente complessa e poi prendere la parte reale del risultato sarebbe errata in quanto la potenza è eguale al prodotto delle parti reali di  $V$  e  $I$ , che non è la parte reale del prodotto  $VI$ . Il metodo simbolico si applica correttamente solo a relazioni lineari tipo  $V = ZI$  o a somme di tali relazioni e trova la sua radice nel fatto che l'equazione cui obbedisce la corrente (equazione del circuito) è un'equazione differenziale lineare; nulla di simile si può dire per la potenza.

Però è possibile attribuire il significato di potenza complessa alla metà del prodotto  $VI^*$  tra la tensione complessa e il complesso coniugato della corrente complessa:

$$\frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} V_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i\omega t} = \frac{1}{2} V_0 I_0 e^{i\phi} = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} e^{i\phi}$$

Il modulo di questo numero è la potenza apparente  $S = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$ , la parte reale è la potenza media effettiva  $P = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \phi$ , la parte immaginaria è la potenza reattiva  $Q = V_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \sin \phi$ . Osserviamo che  $VI^*/2$  riassume le informazioni sui valori massimi e sul valore medio della potenza, ma che, essendo un numero costante, non dice nulla sulla potenza istantanea.

## 11.7 Generatori e motori

Abbiamo già trattato nell'esempio 10.3 un caso ideale di circuito che, a causa di un movimento rotatorio in un campo magnetico, diventa sede di una f.e.m. alternata, data dalla (10.14). Riprendiamo adesso la questione per accennare a sistemi più realistici con cui produrre una f.e.m. alternata; l'argomento ha rilevanza tecnologica fondamentale, in quanto è alla base della produzione di energia elettrica, e costituisce uno dei capitoli più importanti dell'elettrotecnica.

### Alternatore

Lo schema più elementare di *alternatore* consiste in un magnete al cui interno può ruotare un cilindro sul quale è avvolta una bobina; il cilindro è formato da lamierini di ferro, incollati tra loro con materiale isolante e disposti in modo da minimizzare le correnti di Foucault. Lo spessore di aria tra il cilindro e i poli del magnete è molto piccolo, per ridurre la dispersione di flusso magnetico, e la bobina è situata in una scanalatura praticata nel cilindro.

La bobina non è chiusa su se stessa, ma è collegata in modo opportuno al circuito esterno di utilizzazione, ad esempio come mostrato nella figura 11.37. Il filo della bobina è interrotto e ciascun capo è fissato ad un anello conduttore che ruota rigidamente insieme alla bobina: su questi anelli sono poggiati due contatti strisciante (spazzole) ai quali sono connessi i terminali del circuito esterno.

Un alternatore come quello descritto è detto *monofase* e fornisce la f.e.m.  $\varepsilon_0 \sin \omega t$ , dove la pulsazione  $\omega$  coincide con la velocità angolare della bobina. Se nel cilindro sono praticate tre scanalature che ospitano tre bobine identiche e indipendenti, poste in piani a  $120^\circ$  l'uno rispetto all'altro, le f.e.m. fornite dalle tre bobine sono

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin \omega t, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (11.32)$$

Lo sfasamento è appunto dovuto alla diversa posizione, ad un dato istante, rispetto alle linee del campo magnetico.

In questo caso l'alternatore si dice *trifase*; una possibile connessione all'esterno, detta connessione a stella, è mostrata in figura 11.38. La tensione tra ciascun terminale, ovvero tra ciascuna fase, e il punto in comune, detto *neutro*, ha la stessa ampiezza  $\varepsilon_0$ ; invece la tensione tra due fasi qualsiasi risulta avere ampiezza  $\sqrt{3} \varepsilon_0$ , come si prova facilmente calcolando  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  o  $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$  o  $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$ . Se ad esempio  $\varepsilon_0 = 311$  V così che il suo valore efficace è 220 V, tra due fasi l'ampiezza è  $\sqrt{3} \varepsilon_0 = 539$  V con valore efficace 381 V.

Il movimento rotatorio della bobina può essere generato in vari modi: nei piccoli alternatori montati sulle automobili è il motore stesso che provoca la rotazione, negli alternatori di media potenza spesso sono appositi motori diesel che provvedono al funzionamento. Nelle

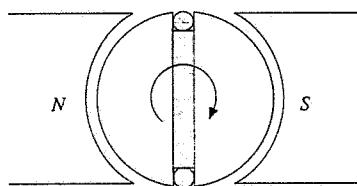


Figura 11.36

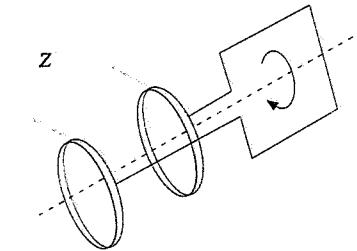


Figura 11.37

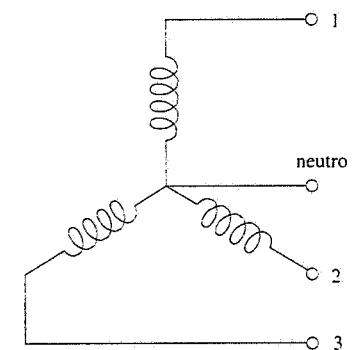


Figura 11.38

centrali elettriche il movimento è comunicato da una turbina che a sua volta è mossa da acqua che ha acquistato velocità per caduta su un certo dislivello (*centrali idroelettriche*) oppure da vapore ad alta temperatura (*centrali termiche a carbone, a petrolio, a metano e centrali nucleari*). In queste ultime il calore deriva dalla perdita di energia cinetica dei neutroni emessi nelle reazioni di *fissione* e frenati in un mezzo materiale.

Nei grossi alternatori vengono fatte muovere le parti che producono il campo magnetico e mantenute fisse le bobine in cui viene generata la f.e.m.; in tal modo le connessioni sono più semplici e sicure.

La distribuzione dell'energia elettrica all'utenza normale avviene in Europa a una frequenza di 50 Hz e una tensione efficace monofase di 220 V (trifase di 381 V), mentre negli Stati Uniti la frequenza è 60 Hz e la tensione efficace 115 V (trifase 199 V).

### Dinamo

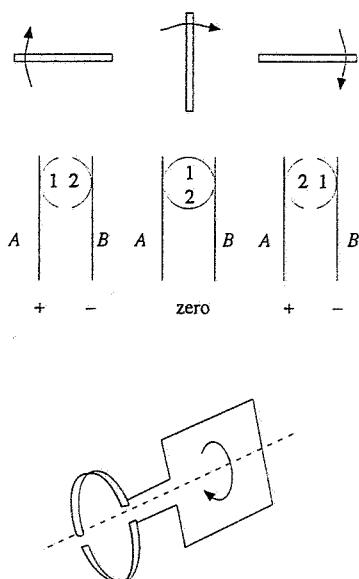


Figura 11.39

Seguendo lo stesso principio di funzionamento dell'alternatore si può produrre una f.e.m. più o meno costante. Il caso più semplice è la *dinamo*, mostrata schematicamente in figura 11.39; i capi della bobina sono connessi a due semianelli i quali durante la rotazione entrano in contatto prima con una spazzola e poi con l'altra. Teniamo presente che ad ogni mezzo giro si invertono le polarità dei semianelli: pertanto se ad esempio in un certo istante il capo positivo è a contatto con la spazzola A, dopo mezzo giro esso, che è diventato negativo, tocca la spazzola B mentre la spazzola A è toccata dall'altro capo che, nel mezzo giro, da negativo è diventato positivo. Di conseguenza la spazzola A è sempre positiva rispetto alla spazzola B e la tensione ha l'andamento della figura 11.40. Non si ha più una grandezza alternata, ma una grandezza il cui valor medio è  $(2/\pi) \xi_0 = 0.64 \xi_0$ . Con più avvolgimenti ad un certo angolo tra loro o con un unico avvolgimento che equivale alla somma di più avvolgimenti è possibile avere una tensione quasi costante in uscita.

Le pile chimiche e le dinamo non sono gli unici sistemi capaci di generare una f.e.m. continua. Con vari mezzi elettronici è possibile *raddrizzare* una tensione sinusoidale e generare f.e.m. continue in un intervallo molto ampio di valori. Questi strumenti, detti *alimentatori in continua*, hanno vastissime applicazioni sia in laboratorio che nelle più svariate apparecchiature industriali e domestiche, come radio, televisori, calcolatori. Le f.e.m. fornite possono essere di qualche volt come di centinaia di volt o di decine di chilovolt; le potenze erogabili possono variare da qualche watt a centinaia o migliaia di watt.

### Motori in continua

Sempre nel capitolo 10 abbiamo visto come il passaggio di corrente in un opportuno circuito immerso in campo magnetico possa mantenere in moto il circuito o alcune sue parti. Su questo principio sono basati i *motori elettrici*, che si dividono in due categorie distinte a seconda che il moto sia dovuto al passaggio di una corrente continua o di una corrente alternata.

Schematicamente il *motore in corrente continua* è un dispositivo simile alla dinamo, con la differenza che il circuito esterno è costituito da un generatore di f.e.m. continua: la corrente erogata dal generatore circola nell'avvolgimento mobile in campo magnetico passando attraverso le spazzole e i semianelli. Con riferimento alla figura 11.39, guardata da sinistra a destra, la bobina ruota per effetto delle forze magnetiche e tende a portarsi con il momento magnetico parallelo e concorde a **B**, che supponiamo orizzontale. In tale posizione essa arriva con una certa velocità angolare, pertanto prosegue nel suo moto e dovrebbe venire frenata dalle forze magnetiche; però contemporaneamente è avvenuta l'inversione dei contatti, la corrente ha cambiato verso e si ripete la situazione precedente: la bobina continua a ruotare nello stesso verso.

Le equazioni che permettono di calcolare la velocità angolare di regime sono le seguenti:

$$M_m - M_{\text{ext}} = I \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad M_m = k i \quad , \quad i = \frac{\xi_0 - \xi_i(\omega)}{R}$$

$M_m$  è il momento delle forze magnetiche, sempre proporzionale alla corrente,  $M_{\text{ext}}$  è il momento resistente esterno,  $I$  il momento d'inerzia della parte mobile,  $\xi_0$  la f.e.m. del gene-

ratore,  $\mathcal{E}_i$  la f.e.m. indotta legata alla variazione di flusso magnetico dovuta alla rotazione e quindi funzione della velocità angolare,  $R$  la resistenza complessiva del circuito. La velocità varia da zero al valore di regime  $\omega_m$ ; a regime  $M_m = M_{ext}$ , la corrente assorbita ha il valore costante  $i_m = M_{ext}/k$ , la potenza erogata dal generatore è  $R i_m^2 + M_{ext} \omega_m$ .

All'inizio del funzionamento  $\mathcal{E}_i(\omega)$ , che cresce con  $\omega$ , è piccola e quindi la corrente assorbita può essere notevole, tanto da danneggiare l'avvolgimento; per questa ragione nella fase di avviamento è inserita in serie una resistenza variabile (reostato), il cui valore viene diminuito all'aumentare di  $\omega$ .

Ricordiamo che nel paragrafo 10.3 abbiamo trattato alcuni casi particolari simili.

### *Motori in alternata*

Un primo tipo di motore che funziona se alimentato con corrente alternata è il *motore sincrono*; nel caso più semplice lo schema è quello dell'alternatore monofase in cui tramite un generatore esterno viene fatta passare una corrente alternata. Si dimostra che è possibile una rotazione con velocità angolare costante  $\omega$  eguale alla pulsazione della corrente alternata (ciò giustifica il nome di motore sincrono). All'avviamento è necessario un motore supplementare, o un dispositivo equivalente, che porti la velocità angolare da zero ad un valore vicino a quello di regime.

L'altro tipo di motore in corrente alternata è il *motore asincrono*. Esso si basa sulle seguenti considerazioni. Prendiamo tre avvolgimenti fissi, posti a  $120^\circ$  uno rispetto all'altro (figura 11.41) e li alimentiamo con una corrente trifase; nella zona centrale i campi magnetici prodotti dagli avvolgimenti percorsi dalle correnti (11.32) sono

$$B_1 = B_0 \sin \omega t, \quad B_2 = B_0 \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \pi \right), \quad B_3 = B_0 \sin \left( \omega t + \frac{4}{3} \pi \right)$$

e il campo risultante ha le componenti

$$B_x = -\frac{3}{2} B_0 \cos \omega t, \quad B_y = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t, \quad B_z = 0$$

Il vettore che rappresenta il campo magnetico ruota nel piano  $x, y$  con velocità angolare  $\omega$  (si parla di *campo rotante*).

Poniamo ora nella zona centrale una bobina con asse di rotazione parallelo all'asse  $z$ , che potrebbe pertanto seguire  $\mathbf{B}$  nella sua rotazione. In effetti il campo rotante, producendo un flusso magnetico variabile attraverso la bobina, induce in questa una f.e.m. e, in dipendenza della resistenza e dell'induttanza della bobina, una corrente: il passaggio di corrente provoca a sua volta l'azione di forze magnetiche sulla bobina che viene messa in rotazione con velocità angolare che raggiunge un valore di regime inferiore a  $\omega$  e dipendente dal momento resistente che il motore deve vincere.

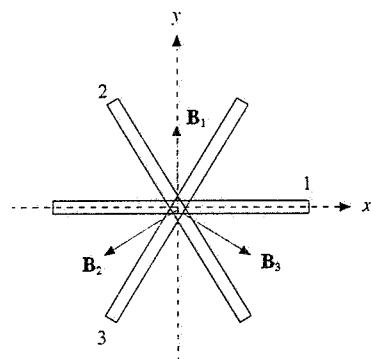
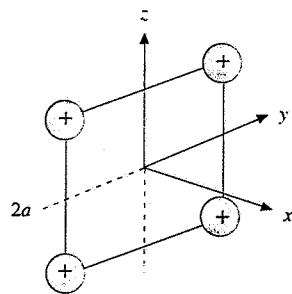


Figura 11.41



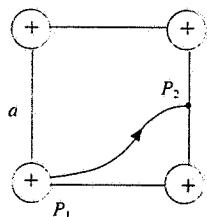
# Problemi di Elettromagnetismo

- 1.1** Quattro cariche puntiformi di egual valore  $q$ , due positive e due negative, sono poste nei vertici di un quadrato di lato  $2a$  che giace nel piano  $y-z$ , con la disposizione mostrata in figura. Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche sulla carica  $+q$  posta nel vertice  $(a, a)$  e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse  $x$ . Dimostrare che a grandi distanze il campo elettrostatico sull'asse  $x$  coincide con quello di un dipolo di momento  $\mathbf{p} = 4qa\mathbf{u}_z$  posto nel centro del quadrato.



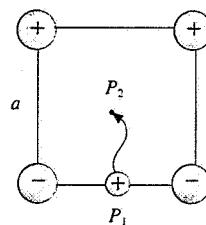
- 1.2** Quattro cariche puntiformi positive, di egual valore  $q = 10^{-8}$  C, sono disposte come nel problema 1, con  $2a = 10$  cm. Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche sulla carica posta nel vertice  $(a, a)$  e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse  $x$ . Calcolare inoltre l'energia cinetica con la quale passa per il centro un elettrone abbandonato con velocità nulla in un punto dell'asse  $x$  distante  $x_0 = 2a$  dal centro.

- 1.3** Quattro cariche puntiformi di egual valore  $q = 10^{-8}$  C sono poste ai vertici di un quadrato di lato  $a = 10$  cm. Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro necessario per spostare una delle cariche dalla posizione iniziale  $P_1$  al punto  $P_2$  indicato in figura e situato nel centro del lato.

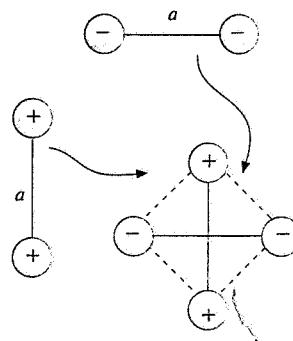


- 1.4** Due cariche positive  $q$  e due cariche negative  $-q$ , eguali in modulo, sono poste nei vertici di un quadrato di lato  $a = 14.1$  cm, come in figura. L'energia elettrostatica del

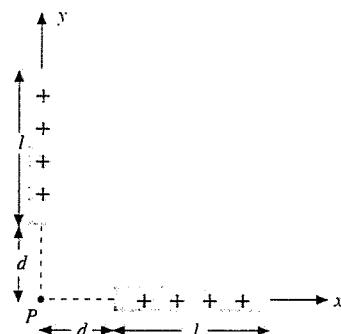
sistema vale  $U_e = -3.6 \cdot 10^{-5}$  J. Una carica  $q^*$  viene spostata da  $P_1$  a  $P_2$  compiendo un lavoro  $W = 2.8 \cdot 10^{-7}$  J contro le forze del campo elettrostatico. Calcolare i valori di  $q$  e  $q^*$ . Calcolare inoltre il lavoro che bisogna spendere per allontanare una delle quattro cariche dalle altre tre che rimangono fisse.



- 1.5** Due cariche positive eguali, di valore  $q = 10^{-9}$  C, sono mantenute fisse a una distanza  $a = 5$  cm; esse sono molto lontane da un'altra coppia di cariche negative eguali, di valore  $q = -10^{-9}$  C, mantenute anch'esse a distanza  $a = 5$  cm. Quanto lavoro compiono le forze elettrostatiche per avvicinare le due strutture in maniera da formare il rombo mostrato nella figura?

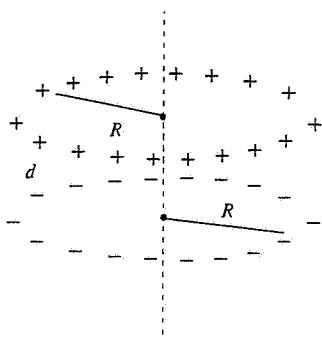


- 1.6** Due sbarrette sottili di materiale isolante, lunghe  $l = 0.5$  m, sono disposte perpendicolarmente tra loro; la

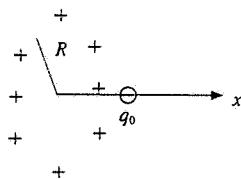


distanza del punto  $P$  dalle estremità delle due sbarrette è  $d = 0.1$  m. Determinare il valore del campo elettrostatico in  $P$  se su ciascuna sbarretta è distribuita uniformemente la carica  $q = 0.5 \cdot 10^{-9}$  C.

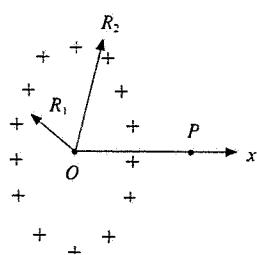
- 1.7 Due cariche  $q_1 = 1.88 \cdot 10^{-8}$  C e  $q_2 = -7.54 \cdot 10^{-8}$  C sono distribuite uniformemente su due anelli eguali di raggio  $R = 30$  cm, disposti come in figura su due piani paralleli distanti  $d = 3$  mm. Calcolare la forza  $F$  tra i due anelli e il lavoro che bisogna compiere per allontanarli di 2 mm.



- 1.8 Una particella di massa  $m = 10^{-3}$  kg e carica  $q_0 = -10^{-10}$  C è posta al centro di un anello di raggio  $R = 10$  cm, su cui è distribuita uniformemente la carica  $q = 10^{-8}$  C. La particella viene spostata di un tratto  $x_0 = 0.5$  cm lungo l'asse e abbandonata. Dimostrare che la particella oscilla con moto armonico intorno all'origine e determinare il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni e l'energia cinetica della particella quando passa per l'origine.

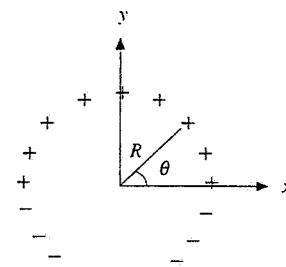


- 2.1 Una carica  $q = 1.39 \cdot 10^{-6}$  C è distribuita con densità superficiale uniforme  $\sigma$  su una corona circolare piana di raggio interno  $R_1 = 20$  cm e raggio esterno  $R_2 = 30$  cm. Determinare le espressioni del campo elettrostatico  $E(x)$  e del potenziale  $V(x)$  sull'asse della corona. Calcolare l'energia cinetica con la quale un elettrone lasciato libero in un punto  $P$  di coordinata  $x = 20$  cm raggiunge il centro  $O$  e la forza agente su un dipolo elettrico di momento  $p = p_0 \mathbf{u}_x$ , con  $p_0 = 10^{-10}$  Cm, posto in  $O$ . Calcolare infine la frequenza delle piccole oscillazioni



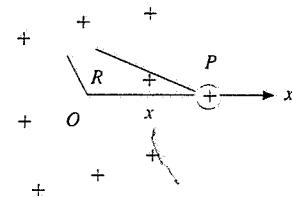
lungo l'asse  $x$  intorno al centro  $O$  di una particella di massa  $m$  e carica  $-q_0$ .

- 2.2 Un anello sottile di raggio  $R$ , posto nel piano  $x-y$  e con centro nell'origine, possiede una carica distribuita con densità  $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo formato con l'asse  $x$ . Determinare il campo elettrostatico nel centro e a grande distanza sia lungo l'asse  $x$  che lungo l'asse  $y$ .

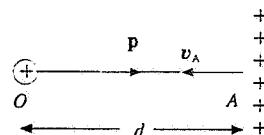


- 2.3 Si consideri l'anello del problema 2.2, con  $R = 10$  cm e  $\lambda_0 = 10^{-8}$  C/m, e si calcoli il momento risultante  $M$  delle forze agenti sull'anello in presenza di un campo elettrostatico uniforme  $E = 10^4$  V/m, che forma un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $x$ .

- 2.4 In un foglio isolante piano indefinito, carico con densità superficiale uniforme  $\sigma = 10^{-6}$  C/m<sup>2</sup>, è praticato un foro circolare di raggio  $R = 0.1$  m. Sull'asse del foro, in un punto  $P$  distante  $x = R$  dal centro  $O$  del foro, è sospesa in equilibrio, tramite un filo attaccato al bordo superiore del foro, una sferetta di massa  $m = 10^{-3}$  kg e carica  $q$ . Calcolare il valore di  $q$  e il lavoro che occorre spendere per spostare la sferetta, se lasciata libera, da  $P$  ad  $O$ . Determinare inoltre il lavoro necessario per far compiere lo stesso spostamento a un dipolo di momento  $p = p_0 \mathbf{u}_x$ , con  $p_0 = 10^{-10}$  Cm.



- 2.5 Una carica positiva  $q$  dista  $d = 40$  cm da un piano indefinito carico uniformemente con densità  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-10}$  C/m<sup>2</sup>. Un dipolo elettrico di momento  $p = 10^{-12}$  Cm, parallelo e concorde al vettore  $OA$ , equidistante dalla carica e dal piano, è soggetto alla forza  $F = 2.25 \cdot 10^{-9}$  N.

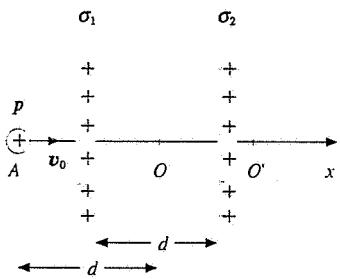


Calcolare il valore della carica  $q$  e la velocità con cui un elettrone, che parte da  $A$  con velocità  $v_A = 3 \cdot 10^6$  m/s, arriva nel punto  $B$  distante  $d/4$  dalla carica.

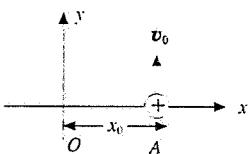
- 2.6 Tre piani indefiniti paralleli sono carichi con densità uniformi  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -2\sigma$ ,  $\sigma_3 = \sigma$ , con  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup>. Determinare il campo elettrostatico nello spazio esterno ai piani e nelle intercapedini tra i piani.

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
+	-	+
+	-	+
$P_1$	$P_2$	$P_3$
+	-	+
+	-	+
+	-	+
+	-	+

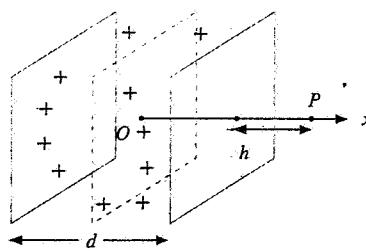
- 2.7 Due piani indefiniti paralleli, distanti  $d = 20$  cm, sono carichi con densità uniformi  $\sigma_1 = 17.72 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup> e  $\sigma_2 = \sigma_1 / 2$ . Determinare il potenziale  $V(x)$ , ponendolo eguale a zero nel punto di mezzo  $O$  tra i due piani, origine delle coordinate. Determinare inoltre l'energia cinetica minima  $E_{k,\min}$  che deve avere un protone nel punto  $A$  ( $x = -d$ ) per giungere in un generico punto  $O'$ . Se un elettrone viene lasciato libero in  $A$  con velocità nulla, dove arriva?



- 2.8 In una regione di spazio il potenziale elettrostatico è espresso dalla relazione  $V = V_0 (x^2 + y^2)$  con  $V_0 = 10^7$  V/m<sup>2</sup>. Una particella con rapporto carica su massa pari a  $q/m = 5 \cdot 10^6$  C/kg si trova all'istante  $t = 0$  nel punto  $A$  di coordinate  $(x_0, 0)$  con velocità  $v = v_0 u_y$ ; i valori numerici sono  $x_0 = 1$  cm,  $v_0 = 10^5$  m/s. Determinare la traiettoria della particella.

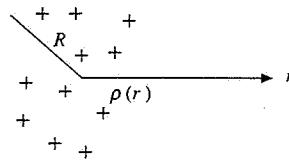


- 3.1 Una carica puntiforme  $q = 1.5 \cdot 10^{-8}$  C si trova nel piano mediano di una carica distribuita uniformemente con densità  $\rho = 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup> tra due piani paralleli indefiniti distanti  $d = 2$  cm. Calcolare il lavoro fatto dalle forze del campo elettrostatico per trasportare la carica  $q$  in un

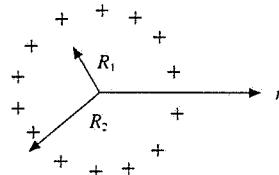


punto  $P$ , situato all'esterno della regione carica e distante  $h = 3$  cm dal piano più vicino.

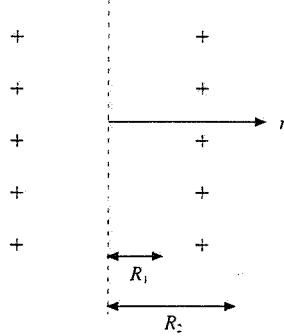
- 3.2 Una carica è distribuita all'interno di una sfera di raggio  $R$  con densità non uniforme  $\rho(r) = c/r$ , essendo  $c$  una costante. Determinare le espressioni del campo elettrostatico  $E(r)$  e del potenziale  $V(r)$  per  $0 \leq r \leq \infty$ .



- 3.3 Tra due superficie sferiche concentriche di raggio  $R_1 = 10$  cm e  $R_2 = 20$  cm è distribuita una carica elettrica con densità uniforme  $\rho = 26.58 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup>. Determinare l'espressione del campo elettrostatico  $E(r)$  in funzione della distanza  $r$  dal centro del sistema. Se un elettrone viene abbandonato sulla superficie esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?

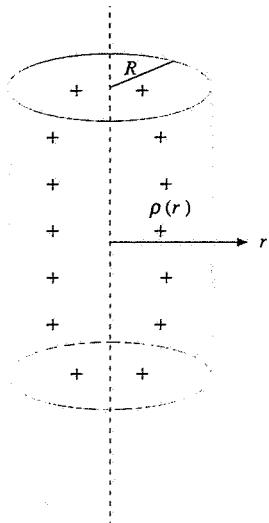


- 3.4 Tra due superficie cilindriche indefiniti coassiali, di raggi  $R_1 = 10$  cm e  $R_2 = 20$  cm, è distribuita una carica con densità costante  $\rho = 17.72 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>3</sup>. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione della distanza  $r$  dall'asse del sistema e calcolare il lavoro che



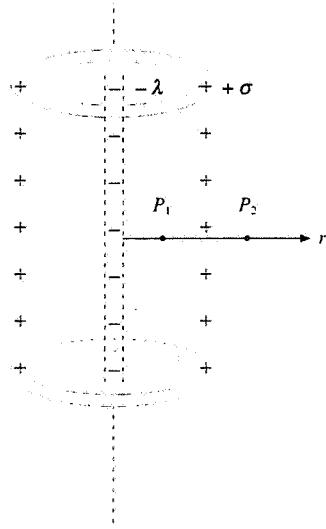
bisogna compiere per portare un protone dalla superficie esterna all'asse.

- 3.5 Una carica è distribuita all'interno di una superficie cilindrica indefinita con densità  $\rho = \rho_0 (a - b r)$ , essendo  $r$  la distanza dall'asse e  $\rho_0, a, b$  costanti. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione di  $r$ .

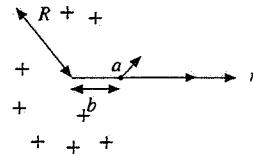


- 3.6 Dimostrare che un elettrone abbandonato in quiete all'interno di una distribuzione uniforme di carica contenuta tra due piani paralleli, all'interno di un cilindro indefinito uniformemente carico e all'interno di una sfera uniformemente carica, compie un moto armonico la cui pulsazione è  $\omega = \sqrt{\gamma \rho e / m \epsilon_0}$ , dove  $\gamma = 1$  per la distribuzione piana,  $\gamma = 1/2$  per la distribuzione cilindrica e  $\gamma = 1/3$  per la distribuzione sferica.

- 3.7 Un filo rettilineo indefinito è carico con densità lineare  $-\lambda$ ; una superficie cilindrica indefinita, di raggio  $R_0 = 2$  cm, avente il filo come asse, è carica con densità superficiale  $\sigma$ . Se la d.d.p.  $\Delta V$  tra un punto  $P_1$  distante  $R_1 = 1$  cm dall'asse e un punto  $P_2$  distante  $R_2 = 4$  cm dall'asse è nulla, quanto vale il rapporto  $\sigma / \lambda$ ?

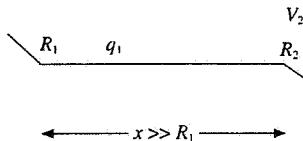


- 3.8 Entro un cilindro di raggio  $R$  è praticato un foro cilindrico parallelo all'asse, di raggio  $r \leq R/4$ ; la distanza tra l'asse del cilindro e l'asse del foro è  $b$ . Se il cilindro è carico con densità  $\rho$  costante, calcolare come varia il campo elettrostatico nel foro lungo la congiungente i due assi. Ripetere il calcolo per un foro sferico di raggio  $r$  distante  $b$  dal centro di una sfera uniformemente carica di raggio  $R$ .

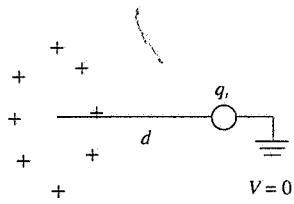


- 3.9 Dimostrare che la funzione  $V(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2$ , con  $a$  e  $b$  costanti, può rappresentare una funzione potenziale. Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica  $\rho(x, y)$ .

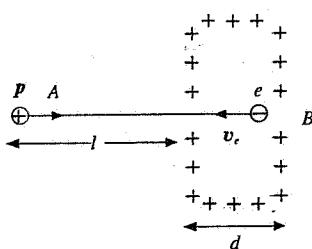
- 4.1 Due sfere conduttrici  $S_1$  e  $S_2$ , di raggi  $R_1$  e  $R_2$ , sono poste nel vuoto ad una distanza  $x$  tra i centri molto grande rispetto a  $R_1$  e  $R_2$ . La sfera  $S_1$ , isolata, ha una carica  $q_1$  e la sfera  $S_2$  è mantenuta al potenziale  $V_2$  rispetto all'infinito. Calcolare il potenziale  $V_1(x)$  della sfera  $S_1$ , la carica  $q_2(x)$  della sfera  $S_2$  e la forza  $F(x)$  tra le sfere in funzione della distanza  $x$ .



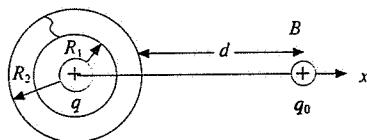
- 4.2 Una piccola sfera conduttrice di raggio  $r = 1$  mm è posta sull'asse di un disco di raggio  $R = 10$  cm, uniformemente carico con densità  $\sigma = 10^{-11} \text{ C/m}^2$ ; il centro della sferetta dista  $d = 30$  cm dal centro del disco. La sferetta è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale è nullo. Calcolare la carica  $q_1$  indotta sulla sferetta.



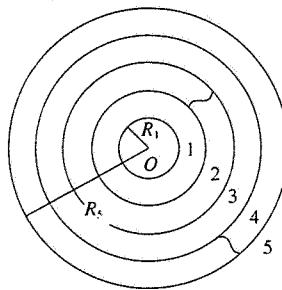
- 4.3 Una lastra piana conduttrice molto estesa è cava, con distanza  $d = 50$  cm tra le facce; essa è carica con densità superficiale costante  $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$ . Determinare l'energia cinetica minima  $E_{k,\min}$  che deve avere un protone nel punto  $A$  per arrivare fino al punto  $B$ , passando per un piccolo foro praticato su una faccia. Quanto tempo impiega un elettrone, lasciato libero in  $B$  con energia cinetica  $E_{k,\min}$ , per arrivare in  $A$ ? La distanza di  $A$  dalla lastra è  $l = 20$  cm (il disegno non è in scala).



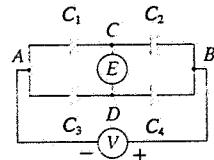
- 4.4 Due fogli metallici sferici di spessore trascurabile, concentrici, aventi raggi  $R_1 = 2$  cm e  $R_2 = 5$  cm, sono collegati con un sottile filo conduttore. Una carica  $q = 10^{-10}$  C è posta al centro del sistema e una carica  $q_0 = q$  è posta in un punto  $B$  a distanza  $d = 25$  cm dal foglio esterno. Calcolare la forza esercitata da  $q_0$  su ciascun foglio e il lavoro che occorre compiere per portare  $q_0$  dal punto  $B$  al punto  $A$  distante  $x_0 = 0.5$  cm dal centro del sistema.



- 4.5 Cinque fogli metallici sferici di spessore trascurabile, tutti concentrici, aventi raggi pari rispettivamente a 1, 2, 3, 4, 5 cm, sono collegati con sottili fili conduttori come in figura. Il sistema è inizialmente scarico. Una carica  $q = 10^{-10}$  C è depositata sulla superficie più interna. Calcolare la carica presente su ciascuna superficie sferica e l'energia elettrostatica  $U_e$  dell'intero sistema. Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico e l'energia elettrostatica quando: la sfera 1 è posta in contatto con la sfera 2, la sfera 3 è posta in contatto con la sfera 4, la sfera 5 è collegata a terra.

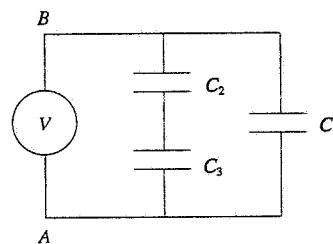


- 4.6 Quattro condensatori sono disposti come mostrato in figura. Un generatore è collegato ai terminali  $A$  e  $B$  e un elettroskopio tra  $C$  e  $D$ , per misurare la d.d.p.  $V_C - V_D$ . Dimostrare che l'elettroskopio segna zero se  $C_1 / C_2 = C_3 / C_4$  (questa disposizione, nota come *ponte capacitivo*).



tivo, permette di misurare la capacità di un condensatore (note le altre tre).

- 4.7 Tre condensatori di capacità  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 4 \mu\text{F}$  sono collegati come in figura. La d.d.p. applicata tra  $A$  e  $B$  è  $V = 100$  V. Calcolare la capacità equivalente tra  $A$  e  $B$ , la carica e la d.d.p. per ciascun condensatore, l'energia elettrostatica totale del sistema.



- 4.8 Dopo aver caricato due condensatori di capacità  $C_1 = 5 \mu\text{F}$  e  $C_2 = 4 \mu\text{F}$  alle d.d.p.  $V_1 = 300$  V e  $V_2 = 250$  V, si collegano tra loro le armature positive e le armature negative e viene posto in parallelo ai primi due un terzo condensatore, scarico, di capacità  $C = 1 \mu\text{F}$ . Determinare la carica presente alla fine su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo.

- 4.9 Un condensatore piano di capacità  $C_0 = 0.6 \mu\text{F}$ , avente le armature di area  $\Sigma$  distanti  $h = 1$  cm, viene collegato ad un generatore che fornisce la d.d.p.  $V_0 = 10^3$  V. Una lastra conduttrice a facce piane e parallele di area  $\Sigma$ , spessa  $x = 4$  mm, viene inserita parallelamente tra le armature. Calcolare di quanto varia la capacità e quanto lavoro compiono le forze del campo se durante il processo resta costante la carica sulle armature o la d.d.p. tra le stesse.

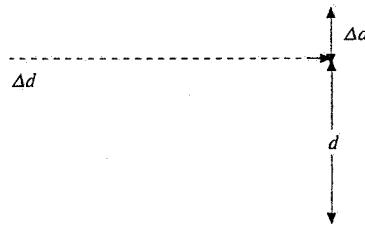


- 4.10 Tre conduttori piani molto sottili, di area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , paralleli tra loro, sono collegati come in figura ad un generatore di d.d.p.  $V$ . Il foglio centrale, di massa  $m = 10^2$  kg, può muoversi verticalmente restando parallelo



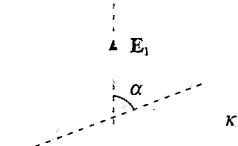
agli altri due, la cui distanza è  $d = 6 \text{ mm}$ . Si trova che il foglio centrale è in equilibrio quando dista  $d/4$  dal foglio superiore. Calcolare il valore di  $V$ , la carica del conduttore centrale e l'energia elettrostatica del sistema. Il conduttore centrale viene successivamente spostato così da essere equidistante dagli altri due conduttori. Calcolare il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrostatico se il generatore rimane collegato durante lo spostamento oppure no.

- 4.11 Un condensatore è formato da due armature quadrate di lato  $l$ , leggermente inclinate come in figura, in modo tale che  $\Delta d \ll d$  e quindi le linee di forza possano considerarsi parallele. Calcolare la capacità del condensatore in funzione di  $\Delta d/d$  e di  $C_0$ , capacità con le armature allineate. Nell'ipotesi che  $C_0 = 0.5 \mu\text{F}$ ,  $\Delta d/d = 0.2$  e che il condensatore abbia la carica  $q = 10^{-4} \text{ C}$ , calcolare il lavoro necessario per allineare le armature, a carica costante.

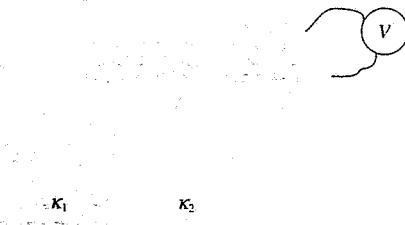


- 4.12 Un pallone sferico di raggio  $R_1 = 0.5 \text{ m}$  è fatto con un materiale elastico metallizzato. Se si comunica al pallone la carica  $q = 10^{-10} \text{ C}$  si osserva una dilatazione fino al raggio  $R_2 = 0.7 \text{ m}$ . Calcolare la pressione elettrostatica finale sulla superficie del pallone e il lavoro delle forze del campo elettrostatico nell'espansione.

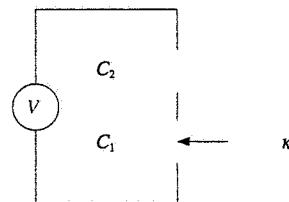
- 5.1 In un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa = 3$  esiste un campo elettrostatico uniforme  $E_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ . Una cavità lunga e sottile, orientata rispetto a  $E_1$  come in figura, è praticata nel dielettrico. Calcolare il campo elettrostatico  $E_2$  all'interno della cavità se  $\alpha = 30^\circ$ .



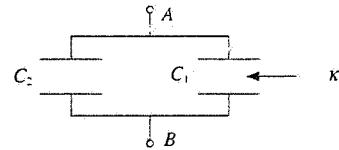
- 5.2 Un condensatore piano, con armature quadrate di area  $\Sigma = 400 \text{ cm}^2$  distanti  $d = 2 \text{ mm}$ , è riempito per metà da mica ( $\kappa_1 = 5$ ) e per metà da paraffina ( $\kappa_2 = 2$ ). Calcolare la capacità del condensatore. Se viene applicata una d.d.p.  $V = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$  tra le armature calcolare la densità di carica sulle armature, la densità di carica di polarizzazione sulle superficie del dielettrico, l'energia elettrostatica del condensatore.



- 5.3 A due condensatori piani di capacità  $C_1 = 500 \text{ pF}$  e  $C_2 = 1000 \text{ pF}$ , connessi in serie, è collegato un generatore che mantiene una d.d.p. costante  $V = 400 \text{ V}$ . Una lastra di dielettrico, con costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ , viene inserita in  $C_1$  così da riempirlo completamente. Calcolare la variazione della carica di  $C_2$ , la variazione della d.d.p. ai capi di  $C_1$ , la carica di polarizzazione su ciascuna faccia del dielettrico, l'energia fornita dal generatore nel processo.



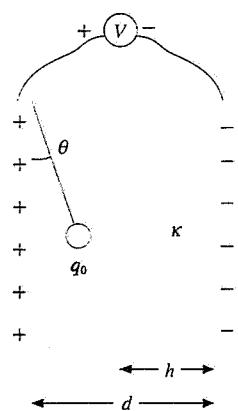
- 5.4 Due condensatori di capacità  $C_1 = 200 \text{ pF}$  e  $C_2 = 1000 \text{ pF}$  sono connessi in parallelo e caricati a una d.d.p.  $V_0 = 400 \text{ V}$ . Successivamente lo spazio tra le armature di  $C_1$  viene completamente riempito di acqua distillata ( $\kappa = 80$ ). Calcolare la variazione della carica di  $C_1$ , la variazione della d.d.p. ai capi di  $C_2$ , la carica di polarizzazione sulle facce del dielettrico, la variazione di energia elettrostatica del sistema.



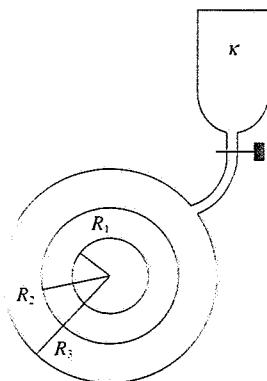
- 5.5 Due condensatori piani eguali, aventi armature quadrate di lato  $l = 20 \text{ cm}$  distanti  $h = 5 \text{ mm}$ , sono connessi a due generatori che mantengono una d.d.p.  $V_1 = 500 \text{ V}$  ai capi del primo e  $V_2 = 1000 \text{ V}$  ai capi del secondo. Una lastra di dielettrico, di dimensioni  $20 \cdot 20 \cdot 0.5 \text{ cm}^3$ , densità  $\rho = 1.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 5$ , può scorrere senza attrito tra le armature, mantenendo sempre un estremo dentro un condensatore e uno dentro l'altro. Calcolare il tempo impiegato dalla lastra per compiere un tratto  $x = 5 \text{ cm}$  se al tempo  $t = 0$  è ferma e la densità di carica di polarizzazione sulla lastra.



- 5.6 Un condensatore piano, avente armature verticali di area  $\Sigma = 500 \text{ cm}^2$  distanti  $d = 1 \text{ cm}$ , è collegato ad un generatore di d.d.p.  $V = 10^3 \text{ V}$ . Una lastra di dielettrico, di spessore  $h = 0.6 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ , è inserita tra le armature ed è addossata a quella carica negativamente. All'armatura positiva è appesa tramite un filo sottile isolante, una pallina di massa  $m = 10^{-3} \text{ kg}$  e carica  $q_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ , che rimane in equilibrio con il filo ad angolo  $\theta$  rispetto alla verticale. Calcolare il valore del campo elettrico che agisce sulla pallina, dell'angolo  $\theta$  di equilibrio, della carica presente sulle armature e della carica di polarizzazione presente sulla superficie del dielettrico.

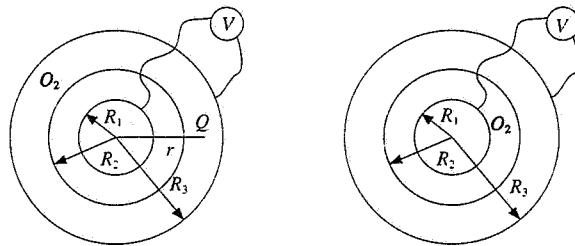


- 5.7 Tre conduttori sferici cavi concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggi  $R_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 4 \text{ cm}$ . Una carica  $q$  è depositata sul conduttore più interno e si osserva che tra i due condensatori più esterni c'è una d.d.p.  $V_2 - V_3 = 9 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Si riempie completamente l'intercapedine compresa tra i conduttori di raggio  $R_2$  e  $R_3$  con un liquido dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa$  e si osserva che la d.d.p.  $V_2 - V_3$  scende al valore  $3 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Calcolare il valore di  $\kappa$ , la variazione percentuale di energia elettrostatica nel processo di riempimento, la carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico. Alla fine è variata la d.d.p.  $V_1 - V_2$  tra i due conduttori più interni e il potenziale del conduttore esterno?

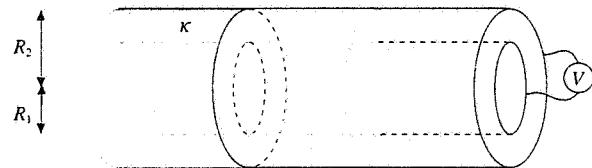


- 5.8 Tre conduttori sferici cavi concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggi  $R_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 40$

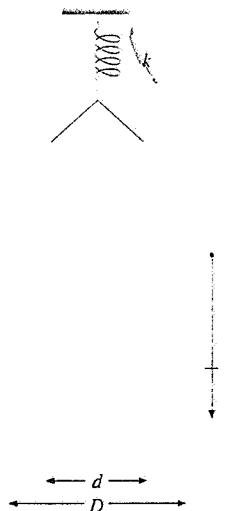
cm. All'inizio l'intercapedine compresa tra  $R_2$  e  $R_3$  è riempita di ossigeno liquido (susceettività  $\chi = 0.5$ , massa molare  $A = 32$ , densità  $\rho = 1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) e la d.d.p. tra il conduttore interno e quello esterno è mantenuta fissa a  $V = 600 \text{ V}$ . Calcolare la carica  $q$  del conduttore interno, il valore della polarizzazione  $P$  in un punto  $Q$  distante  $r = 25 \text{ cm}$  dal centro, il valore della componente del momento di dipolo  $p$  della molecola di  $O_2$  in direzione di  $E$ , sempre a distanza  $r = 25 \text{ cm}$  dal centro. Successivamente si vuota l'intercapedine tra  $R_2$  e  $R_3$  e si riempie l'intercapedine tra  $R_1$  e  $R_2$ . Quanto lavoro compie il generatore durante il processo di travaso del liquido?



- 5.9 Un condensatore cilindrico molto lungo, le cui armature hanno raggio  $R_1 = 2 \text{ cm}$  e  $R_2 = 4 \text{ cm}$ , è parzialmente riempito da un guscio di dielettrico, con raggi  $R_1$  e  $R_2$  e costante dielettrica relativa  $\kappa = 5$ . Un generatore mantiene la d.d.p.  $V = 5 \cdot 10^3 \text{ V}$  tra le armature. Calcolare la forza con cui il dielettrico è risucchiato nel condensatore e, per un avanzamento  $x = 5 \text{ cm}$ , la variazione di energia elettrostatica.

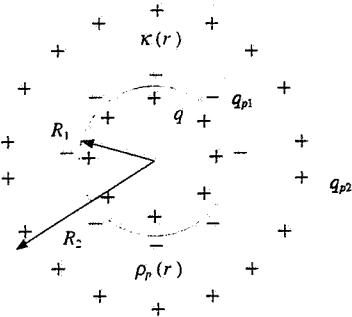


- 5.10 Un cilindro conduttore di diametro  $d = 5 \text{ cm}$  è sospeso verticalmente ad una molla di costante elastica  $k = 0.1$

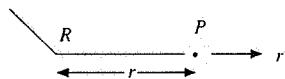


N/m; la parte inferiore è contenuta in un secondo cilindro cavo conduttore, di diametro interno  $D = 6 \text{ cm}$ , coaxiale con il primo. Lo spazio tra i conduttori è riempito da un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\kappa = 4$ . Quando tra i cilindri si applica la d.d.p.  $V = 4 \cdot 10^3 \text{ V}$  tramite un generatore si osserva che il primo cilindro si abbassa di  $\Delta x$ . Calcolare il valore di  $\Delta x$  e la carica di polarizzazione per unità di lunghezza sulle superficie del dielettrico a contatto con i conduttori.

- 5.11** Una sfera conduttrice di raggio  $R_1 = 1 \text{ cm}$  possiede una carica  $q = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  ed è circondata da un involucro sferico di dielettrico non omogeneo di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2 = 3 \text{ cm}$ . La costante dielettrica relativa dell'involucro varia con la distanza dal centro della sfera secondo la legge  $\kappa = c / r^2$  con  $c = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Calcolare il campo elettrostatico  $E(r)$  in tutto lo spazio, l'energia elettrostatica del sistema e le densità di carica di polarizzazione, verificando che la carica totale di polarizzazione è nulla.



- 5.12** Un piccolo cilindro di materiale dielettrico ( $\kappa = 3$ ) è posto a distanza  $r = 5R$  dal centro di una sfera conduttrice isolata di raggio  $R = 1 \text{ cm}$ , al potenziale  $V = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$ . Il volume del cilindro è  $\tau = 20 \text{ mm}^3$  e le sue dimensioni sono trascurabili rispetto a  $R$ . Calcolare la forza che agisce sul cilindro.

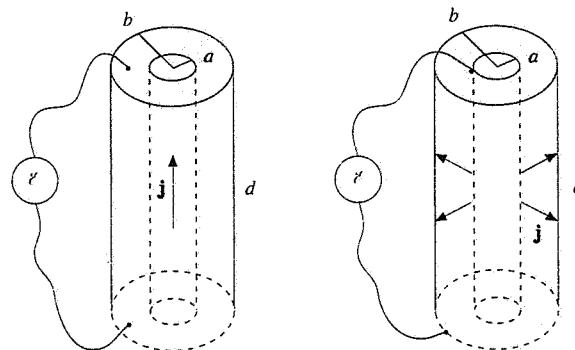


- 6.1** Un acceleratore lineare accelera elettroni portandoli all'energia  $E_k = 45 \text{ GeV}$ . La macchina funziona in regime impulsivo: in ciascun impulso che dura  $\tau = 1 \mu\text{s}$  sono accelerati  $N = 10^{14}$  elettroni; la frequenza di ripetizione è  $v = 500 \text{ Hz}$ . Calcolare l'intensità di corrente massima  $i_{\max}$  e quella media  $i_{\text{med}}$  del fascio di elettroni, la potenza massima  $P_{\max}$  e media  $P_{\text{med}}$ . Nell'ipotesi che il fascio abbia un diametro  $d = 3 \text{ mm}$  calcolare inoltre la densità di corrente massima  $j_{\max}$  e media  $j_{\text{med}}$ , la densità di elettroni  $ne$  massima e media. Si assume che gli elettroni abbiano velocità  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

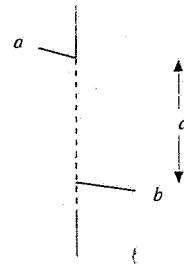
- 6.2** Dai risultati dell'esempio 6.2 si ricava che in un filo di rame percorso da una corrente di densità  $j = 2 \text{ A/mm}^2$  la

velocità di deriva degli elettroni è  $v_d = 0.15 \text{ mm/s}$ . Calcolare il valore del campo elettrico  $E$  che mantiene la corrente nel filo, l'accelerazione  $a$  degli elettroni di conduzione tra due urti consecutivi, il tempo  $\tau$  impiegato da un elettrone per raggiungere  $v_d$ , la potenza  $P_v$  per unità di volume spesa per far circolare la corrente. La resistività del rame è  $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

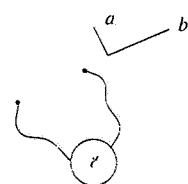
- 6.3** Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza  $d = 2 \text{ cm}$  ha raggi  $a = 2 \text{ mm}$  e  $b = 5 \text{ mm}$ ; esso è costituito da una sostanza con resistività  $\rho = 2 \Omega\text{m}$ . Una f.e.m.  $\varepsilon = 20 \text{ V}$  può essere applicata al conduttore in modo che la corrente fluisca parallelamente all'asse del cilindro o radialmente dalla superficie interna a quella esterna. Calcolare nei due casi l'intensità di corrente  $i$  che percorre il conduttore, la potenza dissipata e la densità di corrente sulle superficie terminali.



- 6.4** Un resistore ha la forma di un tronco di cono lungo  $d$  e con raggi estremi  $a$  e  $b$ . Calcolare la resistenza  $R$  e verificare la formula per  $a = b$ .

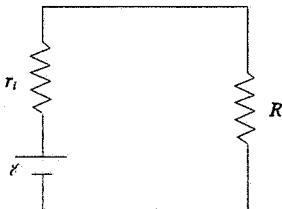


- 6.5** Un guscio semisferico di silicio ( $\rho = 2300 \Omega\text{m}$ ) ha il raggio interno  $a = 1 \text{ cm}$  e il raggio esterno  $b = 2 \text{ cm}$ ; esso è collegato ad un generatore che mantiene la d.d.p.  $V = 2 \text{ V}$  tra le superficie che lo delimitano. Calcolare la resistenza.



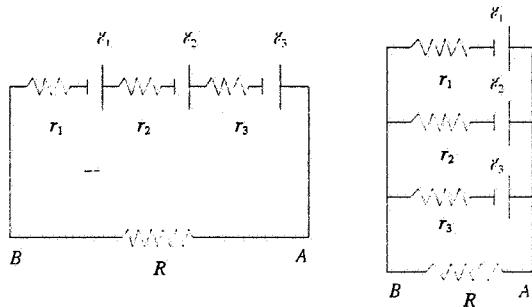
za  $R$  del guscio, la corrente che lo percorre e la potenza dissipata, la densità di corrente attraverso le superficie esterne. Queste sono ricoperte da un sottile strato d'oro così da poterle assumere a potenziale costante.

- 6.6** Nel circuito in figura il generatore ha f.e.m.  $\mathcal{E} = 0.5 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 1 \Omega$ ; il resistore  $R$  è costituito da un filo di alluminio lungo  $d = 5 \text{ m}$  e di sezione  $\Sigma = 0.5 \text{ mm}^2$ ; la resistività e il coefficiente termico sono riportati nella tabella 6.1. Calcolare la corrente  $i_1$  nel circuito a  $0^\circ\text{C}$ , la temperatura  $t$  per cui la corrente vale  $i_2 = 0.95 i_1$ , la potenza dissipata su  $R$  nelle due situazioni. Si supponga  $r$ , costante.

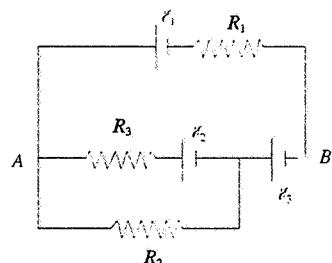


- 6.7 Un filo di nichelcromo ( $\alpha = 4 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ) di una stufa dissipava una potenza  $P_1 = 500\text{W}$  quando la d.d.p. applicata è  $V = 200 \text{ V}$  e la temperatura  $t_1 = 800^\circ\text{C}$ . Supponendo che esso venga mantenuto alla temperatura  $t_2 = 200^\circ\text{C}$  immergendolo in un bagno d'olio, calcolare la potenza  $P_2$  dissipata e la corrente che percorre il filo nei due casi.

6.8 Tre batterie aventi la stessa f.e.m.  $\mathcal{E} = 6 \text{ V}$  e la stessa resistenza interna  $r_i = 1 \Omega$  possono essere collegate tutte in serie o tutte in parallelo ad un resistore con  $R = 6 \Omega$ . Calcolare nei due casi la resistenza complessiva dei generatori vista dai capi  $A$  e  $B$  di  $R$ , la corrente che circola attraverso  $R$ , la potenza complessivamente erogata dai generatori e quella trasferita su  $R$ .

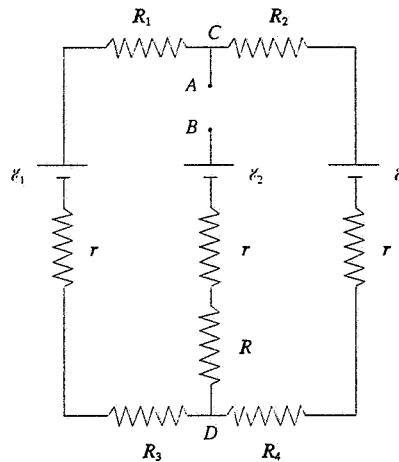


- 6.9** Nel circuito in figura  $\gamma_1 = 12 \text{ V}$ ,  $\gamma_2 = 10 \text{ V}$ ,  $\gamma_3 = 8 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ . Calcolare la corrente in cia-

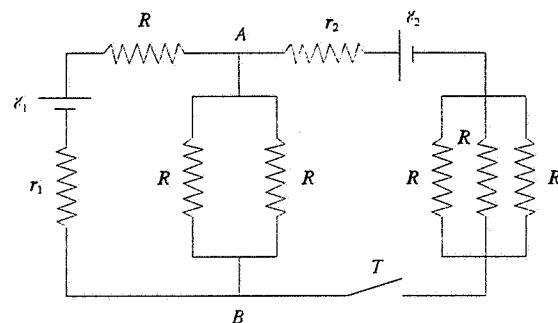


scun resistore, la d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$ , la potenza totale dissipata nel sistema, verificando che è eguale a quella erogata dai generatori.

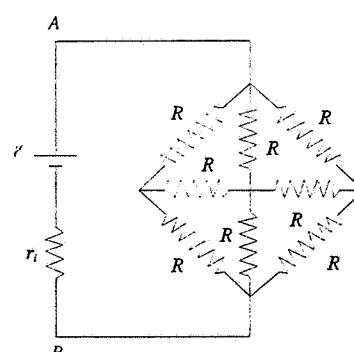
- 6.10** Nel circuito in figura  $\xi_1 = 4 \text{ V}$ ,  $\xi_2 = 8 \text{ V}$ ,  $\xi_3 = 12 \text{ V}$ ,  $r = 1 \Omega$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R = 8 \Omega$ . Calcolare la d.d.p. tra i punti  $A$  e  $B$  e tra i punti  $C$  e  $D$ . I punti  $A$  e  $B$  vengono collegati con un filo; calcolare la d.d.p.  $V_C - V_D$ , la potenza erogata dai tre generatori, la potenza trasferita sul sistema  $R_1, R_2, R_3, R_4, R$ .



- 6.11** Nel circuito in figura  $\xi_1 = 3 \text{ V}$ ,  $r_1 = 1 \Omega$ ,  $\xi_2 = 6 \text{ V}$ ,  $r_2 = 2 \Omega$ ,  $R = 6 \Omega$ . Calcolare, prima con l'interruttore  $T$  aperto e poi con  $T$  chiuso, la d.d.p.  $V_A - V_B$  e la potenza erogata dai generatori.

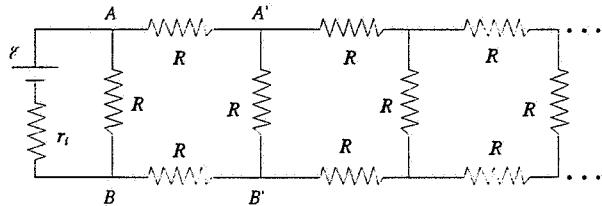


- 6.12 Un generatore di f.e.m.  $\gamma = 9 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 2 \Omega$  è collegato a una rete di resistenze tutte uguali di valore  $R = 6 \Omega$ . Calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$ .

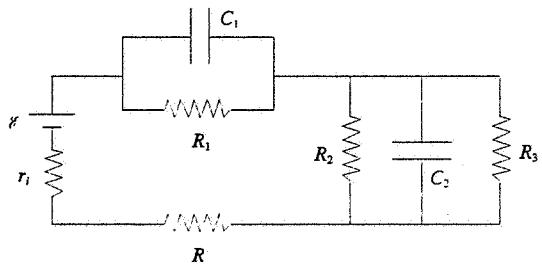


della rete vista dal generatore, la corrente  $i$  che circola nelle singole resistenze, la potenza complessiva trasferita dal generatore alla rete.

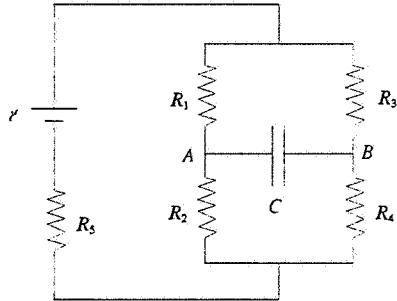
- 6.13** In figura è mostrata una catena infinita di resistenze tutte uguali, di valore  $R = 10 \Omega$ . Calcolare la resistenza equivalente  $R_{eq}$  della catena e la potenza trasferita alla catena se ai suoi capi viene connesso un generatore con f.e.m.  $\mathcal{E} = 9 \text{ V}$  e resistenza interna  $r_i = 2 \Omega$ .



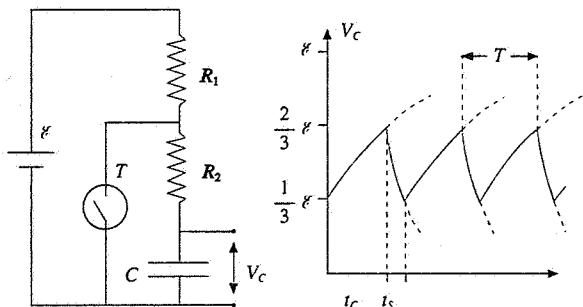
- 6.14** Nel circuito in figura  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ ,  $r_i = 2 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$ ,  $R_3 = 24 \Omega$ , la corrente che circola nel generatore è  $i = 0.5 \text{ A}$ . L'energia elettrostatica immagazzinata in  $C_1$  e  $C_2$  vale rispettivamente  $U_1 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$  e  $U_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ . Calcolare il valore di  $R_1$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .



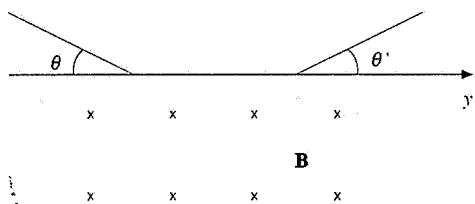
- 6.15** Nel circuito in figura  $\mathcal{E} = 25 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 8 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$ ,  $C = 3 \mu\text{F}$ . Calcolare la d.d.p.  $V_B - V_A$  in condizioni stazionarie e, se si sconnette il generatore, in quanto tempo la carica del condensatore si riduce a un decimo di quella iniziale.



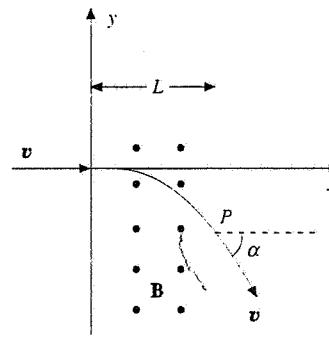
- 6.16** L'interruttore  $T$  del circuito in figura si chiude quando  $V_C = 2 \mathcal{E}/3$  e si apre quando  $V_C = \mathcal{E}/3$ . Il risultato è che  $V_C$  ha l'andamento mostrato. Se  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , calcolare quanto valgono il tempo di carica  $t_c$ , il tempo di scarica  $t_s$  e il periodo dell'oscillazione.

**7.1**

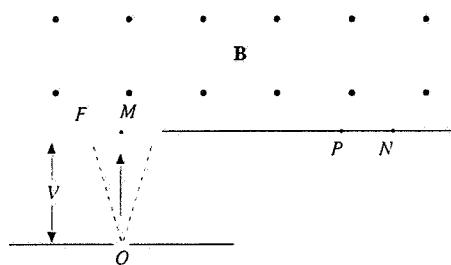
Un protone di energia cinetica  $E_k = 6 \text{ MeV}$  entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico  $B = 1 \text{ T}$  ortogonale al piano della traiettoria, formando con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare l'angolo  $\theta'$  della direzione di uscita con l'asse  $y$  e la distanza lungo  $y$  tra punto d'uscita e punto di ingresso.

**7.2**

Un protone di energia cinetica  $E_k = 50 \text{ MeV}$  si muove lungo l'asse  $x$  ed entra in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$ , ortogonale al piano  $xy$ , che si estende da  $x = 0$  a  $x = L = 1 \text{ m}$ . Calcolare all'uscita del magnete l'angolo che la velocità del protone forma con l'asse  $x$  e la coordinata  $y$  del punto  $P$ .

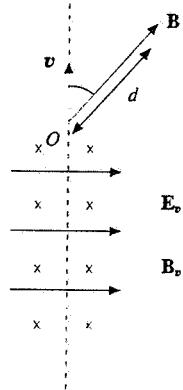
**7.3**

Nel dispositivo in figura un fascetto di ioni, con carica  $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e massa  $m$ , accelerato da una d.d.p.

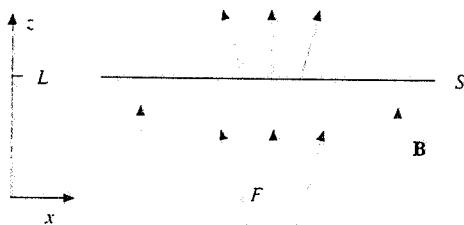


$V = 24.5 \text{ V}$ , penetra attraverso una fenditura  $F$  in una regione in cui esiste un campo magnetico  $B = 10^{-2} \text{ T}$  uniforme, ortogonale al disegno. Gli ioni che attraversano perpendicolarmente la fenditura nel punto  $M$  arrivano su un rivelatore  $R$  nel punto  $N$ , con  $MN = 35 \text{ cm}$ . Quelli che attraversano  $F$  in una direzione che forma con la normale un angolo  $\theta$  piccolo arrivano sul rivelatore in un punto  $P$ , distante  $d$  da  $N$ . Calcolare la massa  $m$  degli ioni e il valore  $\theta$  per cui risulta  $d/MN = 10^{-3}$ . L'unità di massa atomica vale  $m_u = 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

- 7.4 Da un selettori di velocità, che opera in un campo elettrico  $E_v = 10^5 \text{ V/m}$  e in un campo magnetico  $B_v = 0.5 \text{ T}$ , esce un fascio collimato di ioni  ${}^7\text{Li}^+$ . Nel punto  $O$  il fascio entra in una regione in cui esiste un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme, parallelo al piano del disegno e formante l'angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ . Dopo un tempo  $t = 6.28 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  una particella si è allontanata da  $O$  di una distanza  $d = 62.8 \text{ cm}$  percorrendo 10 giri attorno a  $\mathbf{B}$ . Calcolare la velocità degli ioni, il valore di  $\mathbf{B}$ , il valore di  $\theta$ , il raggio  $r$  della traiettoria elicoidale.

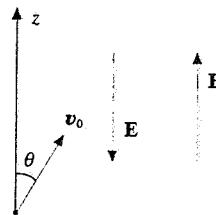


- 7.5 Nel dispositivo mostrato in figura attraverso la fenditura  $F$  escono elettroni accelerati da una d.d.p.  $V = 3 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Lungo l'asse  $z$ , nella regione oltre la fenditura, c'è un campo magnetico  $\mathbf{B}$  uniforme parallelo all'asse  $z$  e uno schermo fluorescente  $S$  distante  $L = 2 \text{ cm}$  da  $F$ . Se l'angolo  $\theta$  è piccolo, regolando opportunamente  $B$  è possibile che alla distanza  $L$  le traiettorie degli elettroni incontrino lo schermo  $S$  coprendo la stessa area che in  $F$ . Determinare i valori di  $B$  a ciò necessari.

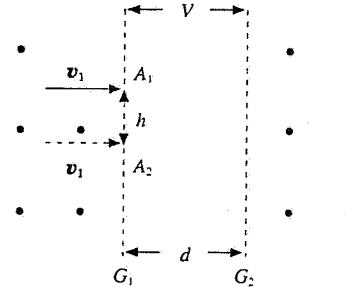


- 7.6 Una regione di spazio è sede di un campo elettrico  $\mathbf{E} = -E \mathbf{u}_z$  con  $E = 10^5 \text{ V/m}$  e di un campo magnetico  $\mathbf{B} = Bu_z$

con  $B = 0.1 \text{ T}$ . Un protone viene immesso nella regione con velocità  $v_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  formante un angolo  $\theta = 30^\circ$  con l'asse  $z$ . Mostrare che il protone percorre un'orbita elicoidale, il cui asse è parallelo all'asse  $z$ , calcolando il raggio  $r$  dell'elica e la distanza  $z_1$  percorsa dal protone nel primo giro. Calcolare inoltre la distanza  $z_0$  percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo l'asse  $z$ .



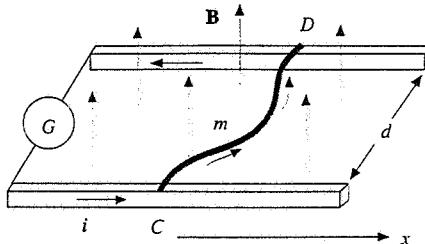
- 7.7 Due griglie  $G_1$  e  $G_2$  metalliche parallele molto estese, distanti  $d = 4 \text{ cm}$ , tra le quali è applicata una d.d.p.  $V$ , separano due regioni in cui esiste un campo magnetico  $B = 0.8 \text{ T}$  uniforme, ortogonale al disegno. In un punto  $A_1$  viene iniettato un protone con velocità  $v_1$ , che all'istante  $t = 0$  attraversa la griglia perpendicolarmente. Dopo un tempo  $t = 1.22 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  il protone rientra in  $G_1$  nello stesso verso in un punto  $A_2$  distante  $h = 5.2 \text{ cm}$  da  $A_1$ . Descrivere la traiettoria percorsa dal protone tra  $A_1$  e  $A_2$  e calcolare la d.d.p.  $V$  applicata tra le griglie e le velocità  $v_1$  e  $v_2$  del protone nelle due regioni in cui c'è campo magnetico.



- 7.8 Un ciclotrone con magnete superconduttore ha un raggio  $R = 80 \text{ cm}$  e un campo magnetico  $B = 4.2 \text{ T}$ . Nell'ipotesi che esso acceleri ioni  ${}^7\text{Li}^+$  ( $q/m = 1.38 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$ ) calcolare la velocità massima  $v_{\max}$  e l'energia cinetica  $E_{k,\max}$  raggiungibili dagli ioni, il valore  $V$  della d.d.p. acceleratrice affinché un ciclo di accelerazione duri  $t = 42.2 \mu\text{s}$ , il numero  $N$  di giri compiuti in un ciclo, la frequenza  $\nu$  di rivoluzione. Se si considera la correzione relativistica, di quanto varia percentualmente la frequenza di rivoluzione tra l'inizio e la fine del ciclo?

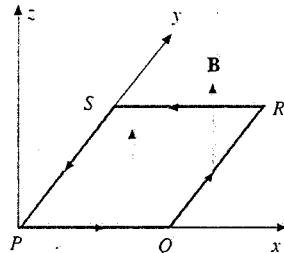
- 7.9 Facendo passare una corrente  $i = 20 \text{ A}$  in un conduttore con sezione quadrata di area  $\Sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$  immerso in un campo magnetico  $B = 0.8 \text{ T}$  si crea una tensione di Hall  $\xi_H = 0.85 \cdot 10^{-6} \text{ V}$ . Calcolare la densità  $n$  dei portatori di carica, la velocità  $v_d$  di deriva degli elettroni, il campo elettrico  $E$  che mantiene in moto gli elettroni se la condutività del materiale è  $\sigma = 6.14 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , il rapporto tra  $E$  e il campo di Hall  $E_H$ .

- 7.10** Un filo metallico rigido di forma qualunque ha i due estremi  $C$  e  $D$  che possono scorrevare senza attrito su due rotaie orizzontali distanti  $d = 20$  cm. Le rotaie sono poste in un campo magnetico  $B = 0.5$  T uniforme e verticale. Il circuito è percorso da una corrente costante  $i = 2$  A fornita dal generatore  $G$ . Se la massa del filo è  $m = 2$  g calcolare la velocità  $v$  del filo e lo spazio  $x$  percorso dopo un tempo  $t_1 = 0.1$  s, nell'ipotesi che per  $t = 0$  il filo sia fermo.

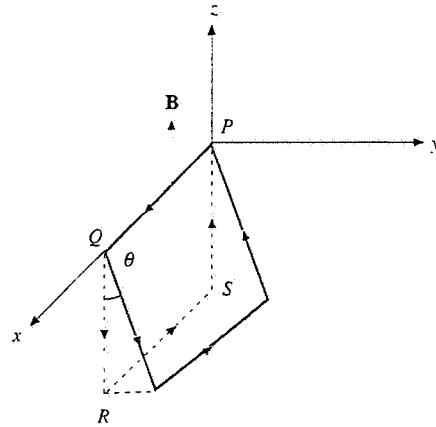


- 7.11** Una spira quadrata di lato  $a = 5$  cm è percorsa da una corrente  $i$ . Il momento magnetico della spira è  $\mathbf{m} = m_x \mathbf{u}_x + m_y \mathbf{u}_y$ , con  $m_x = 0.6 \cdot 10^{-3}$  Am<sup>2</sup>,  $m_y = -0.8 \cdot 10^{-3}$  Am<sup>2</sup>. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_z \mathbf{u}_z$ , con  $B_x = 0.25$  T,  $B_z = 0.30$  T. Calcolare il valore della corrente  $i$ , il modulo del momento meccanico  $M$ , l'angolo  $\alpha$  tra  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}$ , l'energia potenziale magnetica  $U_p$ .

- 7.12** Una spira quadrata di lato  $a = 20$  cm è posta nel piano  $x$ ,  $y$  ed è percorsa dalla corrente  $i = 5$  A nel verso indicato. Essa risente dell'azione del campo magnetico  $\mathbf{B} = \alpha x \mathbf{u}_z$ , con  $\alpha = 0.2$  T/m. Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  che agisce sulla spira e l'energia potenziale magnetica  $U_p$ .

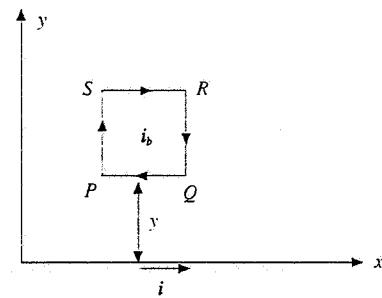


- 7.13** Una spira rettangolare rigida, di lati  $PQ = RS = a = 20$  cm e  $QR = SP = b = 10$  cm, ha una massa per unità di lunghezza  $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$  g/cm ed è percorsa da una corren-

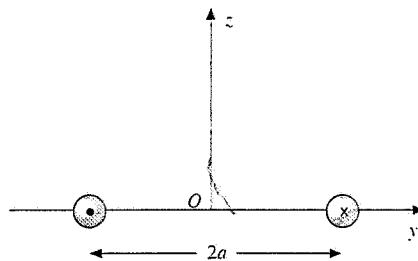


te  $i$ . Essa può ruotare senza attrito intorno a  $PQ$  che è parallelo all'asse  $x$  orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale  $\mathbf{B} = Bu$ , con  $B = 2 \cdot 10^{-2}$  T, essa ruota di un angolo  $\theta = 30^\circ$ . Calcolare il valore della corrente  $i$  e il lavoro  $W$  fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.

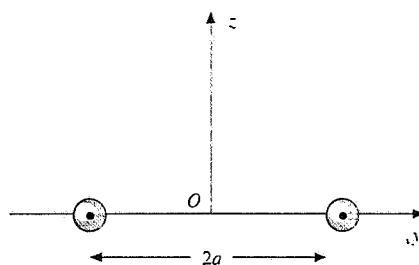
- 8.1** Una bobina rigida quadrata di lato  $a = 2$  cm, formata da  $N = 20$  spire compatte, è percorsa da una corrente  $i_b = 2$  A ed è posta a distanza  $y$  da un filo indefinito percorso da una corrente  $i = 50$  A. I versi delle correnti sono indicati nella figura. Calcolare la forza magnetica  $\mathbf{F}(y)$  che agisce sulla bobina, dimostrando che per  $y \gg a$ ,  $\mathbf{F} = m dB/dy$ , se  $m$  è il momento magnetico della bobina e  $B$  il campo del filo. Calcolare inoltre il lavoro  $W_1$  compiuto dalla forza magnetica per spostare la bobina da  $y_1 = 1$  cm a  $y_2 = 2$  cm e il lavoro  $W_2$  compiuto dalla forza magnetica per ruotare di  $180^\circ$  la bobina, quando  $y = y_3 = 20$  cm.



- 8.2** Due fili indefiniti distanti  $2a = 4$  cm, paralleli all'asse  $x$ , sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 50$  A con i versi indicati in figura. Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}(z)$  sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro  $O$  si arresta un piccolo magnete lanciato con velocità  $v_0 = 7.1 \cdot 10^{-2}$  m/s da  $O$  lungo l'asse  $z$ , di massa  $m_p = 3.97 \cdot 10^{-2}$  kg e momento magnetico  $m = 0.2$  Am<sup>2</sup>, parallelo e concorde a  $\mathbf{B}$ . Si assuma che l'asse  $z$  sia orizzontale.

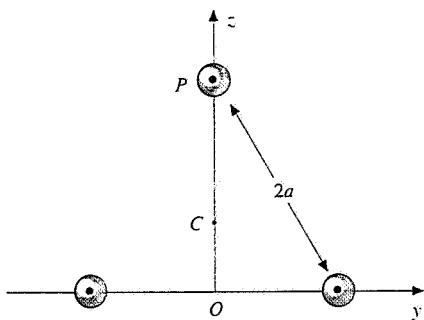


- 8.3** Due fili indefiniti distanti  $2a = 4$  cm, paralleli all'asse  $x$ , sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 50$  A, concorde

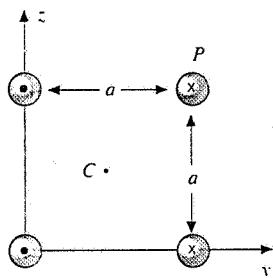


all'asse  $x$ . Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}(z)$  sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro  $O$  un piccolo ago magnetico orientato parallelamente a  $\mathbf{B}$  risente di una forza nulla.

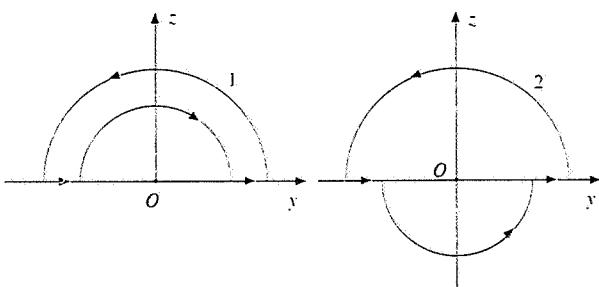
- 8.4 Tre lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $2a = 15$  cm. Essi sono percorsi dalla stessa corrente  $i = 10$  A concorde all'asse  $x$ . Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}_c$  nel centro  $C$  del triangolo e la forza  $\mathbf{F}$  per unità di lunghezza sul filo disposto in  $P$ .



- 8.5 Quattro lunghi fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un quadrato di lato  $a = 20$  cm; in ogni filo circola la corrente  $i = 30$  A, con i versi mostrati in figura. Calcolare il campo magnetico  $\mathbf{B}_c$  nel centro  $C$  del quadrato, il campo magnetico  $\mathbf{B}_P$  nel vertice  $P(a, a)$  del quadrato e la forza  $\mathbf{F}$  per unità di lunghezza sul filo disposto in  $P$ .

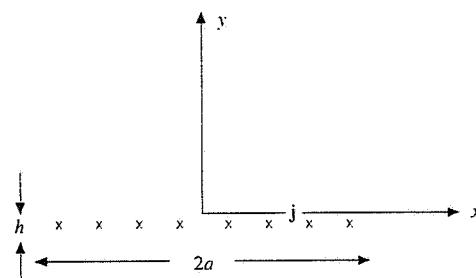


- 8.6 Nei due circuiti in figura i raggi delle semicirconferenze sono  $a = 10$  cm e  $b = 15$  cm. Se la corrente vale  $i = 20$  A calcolare per entrambi il campo magnetico  $\mathbf{B}_o$  nel centro  $O$  delle semicirconferenze e il momento magnetico  $\mathbf{m}$ .

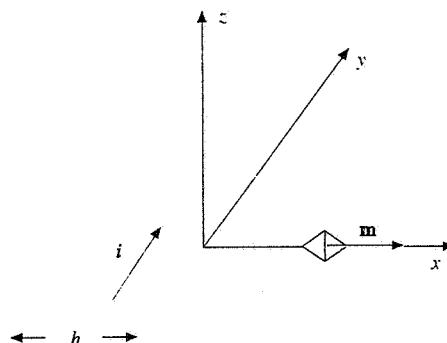


- 8.7 Una lamina conduttrice infinitamente lunga, di sezione rettangolare con lati  $2a = 10$  cm e  $h = 0.1$  cm (mostrata

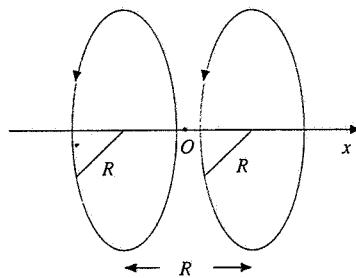
in figura), è percorsa da una corrente di densità uniforme  $j = 2$  A/mm<sup>2</sup>. Calcolare il campo magnetico lungo l'asse  $y$  della lamina e il momento meccanico  $\mathbf{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $\mathbf{m} = 0.2 \mathbf{u}_y$  Am<sup>2</sup>, posto a distanza  $y_0 = 4$  cm dalla lamina. Dimostrare che per  $a$  tendente all'infinito si ottengono i risultati dell'esempio 8.8 e per  $2a \ll y$  i risultati dell'esempio 8.5.



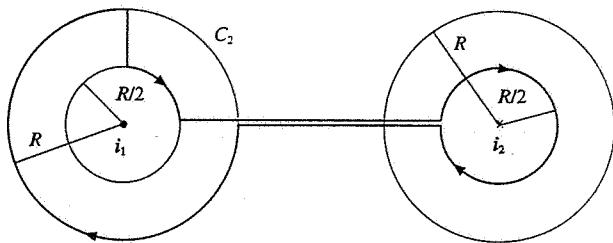
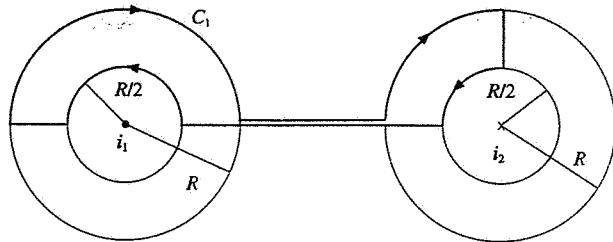
- 8.8 Una sottile striscia metallica di larghezza  $h = 2$  cm è percorsa dalla corrente  $i = 10$  A. Calcolare il valore del campo magnetico  $\mathbf{B}(x)$  a distanza  $x$  dal bordo della striscia (in particolare per  $x \gg h$ ) e il momento meccanico  $\mathbf{M}$  che agisce su un piccolo ago magnetico di momento  $\mathbf{m} = 0.1 \mathbf{u}_x$  Am<sup>2</sup>, posto a distanza  $x = 1$  cm.



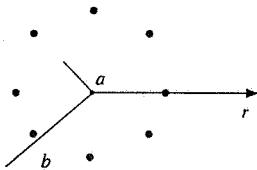
- 8.9 Due spire circolari di raggio  $R$  hanno lo stesso asse e giacciono in piani paralleli distanti  $2d = R$ ; esse sono percorse nello stesso verso dalla stessa corrente  $i$ . Detto  $\mathbf{B}_o$  il valore di  $\mathbf{B}$  nel punto  $O$  di mezzo tra le due spire, dimostrare che in un punto  $P$  distante  $x$  da  $O$  il campo magnetico  $\mathbf{B}(x)$  differisce da  $\mathbf{B}_o$  solo per termini del quarto ordine in  $x/R$  e di ordine superiore. Calcolare inoltre a quale distanza  $x_0$  da  $O$  il campo  $B(x_0)$  differisce da  $B_o$  dell'1%. Il dispositivo è noto come bobine di Helmholz.



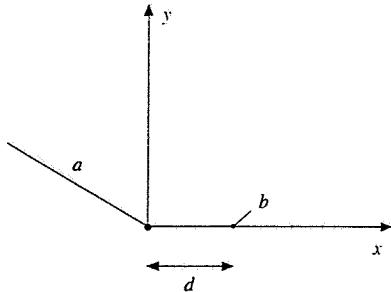
- 8.10** Due conduttori cilindrici molto lunghi di raggio  $R$ , paralleli tra loro e a notevole distanza l'uno dall'altro, sono percorsi dalle correnti  $i_1$  e  $i_2$  in versi opposti. La circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi chiusi  $C_1$  e  $C_2$  indicati in figura vale rispettivamente  $\Gamma_1(\mathbf{B}) = 0$  e  $\Gamma_2(\mathbf{B}) = -20\pi \cdot 10^{-7}$  Tm. Calcolare  $i_1$  e  $i_2$ .



- 8.11** Un conduttore cilindrico cavo di raggi  $a$  e  $b$  è percorso da una corrente distribuita uniformemente. Calcolare il campo magnetico  $B(r)$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse e verificare che per  $a = 0$  si ottengono i risultati dell'esempio 8.5 relativi ad un conduttore cilindrico pieno.

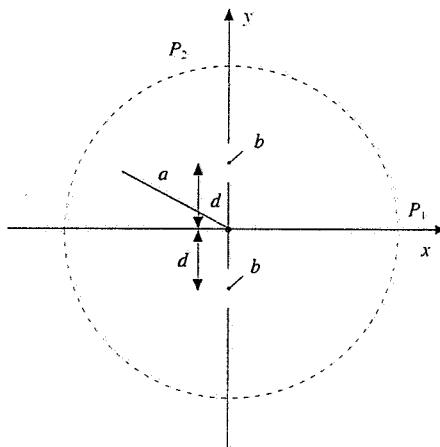


- 8.12** Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio  $a = 2$  cm ha nel suo interno una cavità cilindrica di raggio  $b = 0.3$



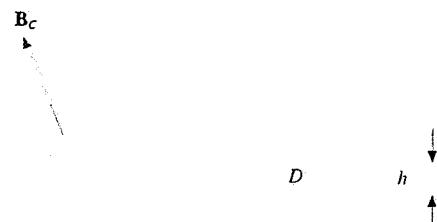
cm, essa pure molto lunga. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e distano  $d = 1$  cm. Nel conduttore fluisce una corrente  $i = 20$  A, distribuita uniformemente. Dimostrare che il campo magnetico  $\mathbf{B}$  all'interno della cavità è costante, calcolandone modulo e direzione. Calcolare inoltre l'energia magnetica e l'induttanza per unità di lunghezza del conduttore.

- 8.13** Si consideri un conduttore cavo con le stesse dimensioni di quello visto nel problema 8.12 con in più una seconda cavità eguale alla prima e disposta simmetricamente rispetto all'asse; i centri delle cavità stanno sull'asse  $y$ . Il conduttore è percorso da una corrente distribuita uniformemente. La circuitazione del campo magnetico lungo una circonferenza di raggio  $h = 2.5$  cm concentrica al conduttore vale  $\Gamma(\mathbf{B}) = 10^{-5}$  Tm. Calcolare la densità di corrente  $j$ , il campo magnetico  $\mathbf{B}$  nei punti  $P_1(h, 0)$  e  $P_2(0, h)$ , l'espressione del campo magnetico a distanze  $r \gg d$ .



- 9.1** Un ago magnetico a forma di sbarretta con sezione  $\Sigma = \pi \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$  e lunghezza  $d = 4$  cm è sottoposto ad un campo magnetico  $B = 10^{-4}$  T; si trova che il momento meccanico massimo che agisce sull'ago vale  $M_0 = 10^{-5}$  Nm. Calcolare la magnetizzazione  $M$  dell'ago nell'ipotesi che sia uniforme, la corrente amperiana, il momento magnetico medio di ogni atomo se il materiale di cui è fatto l'ago è ferro ( $A = 55.85$ ,  $\rho = 7.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ).

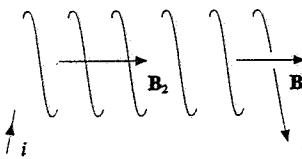
- 9.2** Due anelli toroidali uguali sono formati dallo stesso materiale ferromagnetico magnetizzato uniformemente; la lunghezza media è  $d = 20$  cm. Il primo anello  $C$  è continuo, il secondo anello  $D$  ha un interferro di spesso-



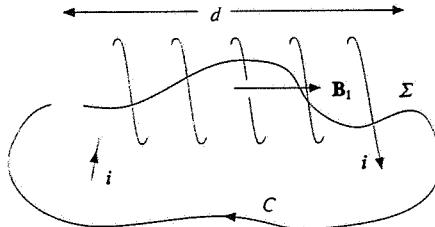
re  $h = 5 \text{ mm}$ . Il campo magnetico nel primo anello è  $B_C = 0.314 \text{ T}$ . Calcolare il campo  $H_C$  nel primo anello e quando valgono nel secondo anello il campo magnetico  $B_D$ , il campo  $H_0$  nell'interferro e il campo  $H_D$  nel ferro, la pressione magnetica sulle facce dell'interfero.

- 9.3** Due guaine cilindriche conduttrici, indefinite, coassiali, di spessore trascurabile, sono percorse entrambe e nello stesso verso da una corrente  $i$ . I raggi delle due guaine sono  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ . L'intercapedine tra di esse, inizialmente vuota, viene completamente riempita con un materiale di permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m$  e l'energia magnetica per unità di lunghezza aumenta di  $\Delta U_m = 1.73 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}$ . Sapendo che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo una circonferenza di raggio  $r > b$ , concentrica al sistema, è  $\Gamma(\mathbf{B}) = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ Tm}$  calcolare i valori della corrente  $i$ , della permeabilità  $\kappa_m$  e della densità di corrente amperiana sulle superficie del materiale.

- 9.4** In un materiale ferromagnetico contenuto all'interno di un solenoide molto lungo sono praticate due piccole cavità cilindriche, entrambe coassiali al solenoide. Nella prima, larga e piatta, si misura  $B_2 = 7.54 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ , nella seconda, sottile e allungata, si misura  $B_1 = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ T}$ . Calcolare la suscettività magnetica del materiale e la sua magnetizzazione.



- 9.5** Un cilindro di ferro, di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  e lunghezza  $d = 20 \text{ cm}$ , è magnetizzato uniformemente ad opera di un avvolgimento disposto sulla sua superficie e formato da  $N = 200$  spire percorse dalla corrente  $i$ . Il campo magnetico misurato in una cavità nel ferro, sottile e allungata, con l'asse parallelo all'asse del cilindro, è  $B_1 = 2.51 \cdot 10^{-3} \text{ T}$  e la circuitazione del campo magnetico lungo la linea  $C$  è  $\Gamma(\mathbf{B}) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}$ . Calcolare la corrente  $i$  che alimenta il solenoide, la magnetizzazione  $M$  e la suscettività magnetica  $\chi_m$  del ferro, l'energia magnetica del sistema.



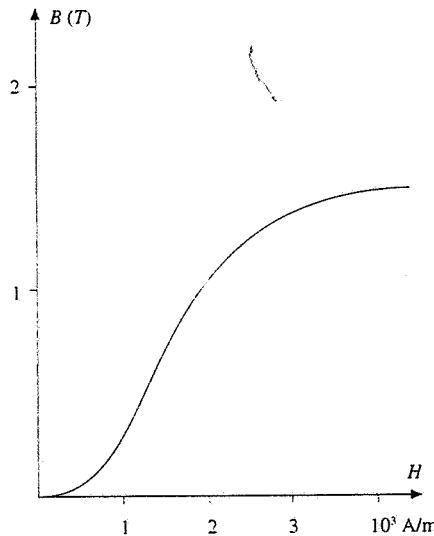
- 9.6** Un elettromagnete è costituito da un avvolgimento di  $N = 500$  spire, percorse da una corrente  $i = 10 \text{ A}$ , disposte su un anello toroidale di materiale ferromagnetico dolce (isoperm) avente permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 60$ , costante in un ampio intervallo di valori di  $H$ .

L'anello, di sezione  $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$ , ha lunghezza media  $d = 132 \text{ cm}$ , in cui è compreso un interferro di spessore  $h = 2 \text{ cm}$ . Calcolare i valori dei campi  $B$ ,  $H$ ,  $M$  nel ferro, il valore del campo  $H_0$  nell'interferro, la corrente di magnetizzazione  $i_m$ , l'energia magnetica immagazzinata nel sistema e il coefficiente di autoinduzione.

- 9.7** Su un anello toroidale di materiale ferromagnetico di lunghezza  $d$ , sezione  $\Sigma = 1 \text{ cm}^2$ , suscettività magnetica  $\chi_m$ , sono avvolte  $N = 100$  spire. Quando nelle spire circola la corrente  $i$ , il campo magnetico vale  $B$  e l'energia magnetica del sistema è  $U_1$ . Se si toglie un dischetto di materiale di spessore  $h = 5 \text{ mm}$ , in modo da realizzare un interferro, bisogna aumentare la corrente al valore  $i_2$  per mantenere lo stesso valore di  $B$ ; in questa configurazione l'energia magnetica vale  $U_2$ . Sapendo che  $\Delta i = i_2 - i_1 = 10\pi \text{ A}$  e  $\Delta U = U_2 - U_1 = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ J}$  calcolare il campo magnetico  $B$ , la suscettività magnetica  $\chi_m$ , la magnetizzazione  $M$  del materiale.

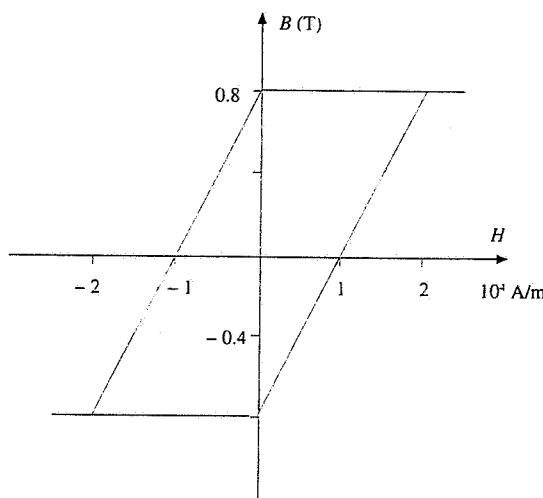
- 9.8** Un elettromagnete toroidale ha lunghezza  $d = 40.5 \text{ cm}$ , nella quale sono compresi due interferri, diametralmente opposti, di spessore  $h = 2.5 \text{ mm}$  e sezione  $\Sigma = 4\pi \text{ cm}^2$ . Esso è alimentato tramite  $N = 100$  spire da un generatore che fornisce una corrente  $i = 27 \text{ A}$ . Le proprietà magnetiche del ferro sono esprimibili tramite la relazione  $B = \alpha H$  con  $\alpha = 4\pi \cdot 10^{-5} \text{ Tm/A}$ . Calcolare il campo magnetico  $B_C$  all'interno di una piccola cavità sferica praticata nel ferro e la forza totale  $F$  con cui si attraggono i poli. Per effetto di questa forza i poli si congiungono e si forma un anello toroidale di lunghezza  $d' = 40 \text{ cm}$ ; nel processo  $i$  rimane costante. Calcolare il campo magnetico  $B'_C$  nella stessa cavità e il lavoro fatto dal generatore nel processo.

- 9.9** Un elettromagnete ha una lunghezza magnetica complessiva  $d = 101 \text{ cm}$  in cui è compreso un interferro di spessore  $h = 1 \text{ cm}$ ; esso è alimentato tramite  $N = 50$  spire da un generatore di corrente. La curva di prima magnetizzazione è riportata in figura. Calcolare il valore della corrente  $i$  per avere nell'interferro un campo magnetico  $B = 0.7 \text{ T}$ , la corrente  $i$  necessaria per generare lo stesso

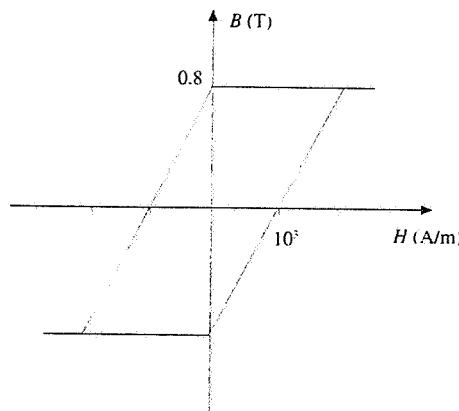


campo magnetico in assenza di interferro, di quanto varia il campo magnetico  $B$  nell'interfero se  $i$  viene dimezzata o raddoppiata, la forza  $F$  con cui si attraggono i poli dell'elettromagnete in questi ultimi due casi (la sezione è  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$ ).

- 9.10** Un magnete permanente di lunghezza media  $d = 110 \text{ cm}$ , nella quale è compreso un interfero spesso  $h = 10 \text{ cm}$ , è costituito da una materia che ha il ciclo di isteresi schematicamente rappresentato in figura. Calcolare il valore del campo magnetico  $B$ , il valore del campo  $H$  nell'interfero, il rapporto tra l'energia magnetica contenuta nell'interfero e quella contenuta nel materiale.

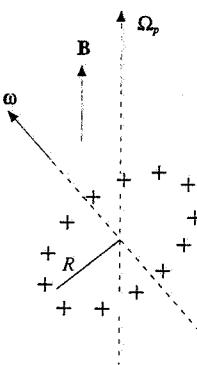


- 9.11** Lo spazio interno di un solenoide toroidale è riempito completamente da una materia ferromagnetico con il ciclo di isteresi mostrato schematicamente in figura. Il solenoide è alimentato con una corrente sinusoidale di frequenza  $v = 50 \text{ Hz}$  e di intensità tale che i valori di  $H$  e  $B$  nel materiale si trovano in ogni istante sul ciclo di isteresi (e non in punti interni). Calcolare, nell'ipotesi che il sistema sia termicamente isolato, l'innalzamento in un secondo della temperatura del materiale, la cui densità è  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e il cui calore specifico è  $c = 400 \text{ J/kg K}$ .

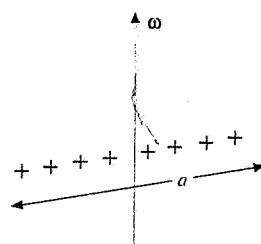


- 9.12** Le molecole di un materiale paramagnetico hanno un momento magnetico intrinseco  $m_0 = 5 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$ . Se esso viene posto in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$  calcolare a quale temperatura l'energia cinetica media di traslazione di una molecola è eguale all'energia necessaria per rovesciare un tale dipolo magnetico e a quale temperatura la magnetizzazione del materiale è pari al 50% e all'80% della magnetizzazione di saturazione.

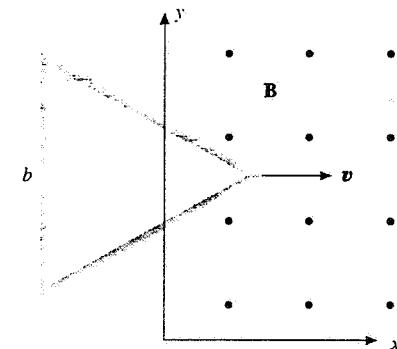
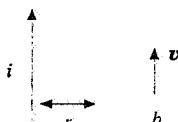
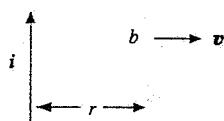
- 9.13** Un anello sottile di raggio  $R$ , massa  $M$  e carica  $q$  distribuita uniformemente, ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse ortogonale al piano in cui giace l'anello e passante per il centro. Calcolare il momento magnetico dell'anello e il rapporto giro magnetico. Ripetere il calcolo supponendo che la carica sia invece uniformemente distribuita su un disco sottile. Calcolare infine la velocità angolare di precessione se l'anello e il disco vengono posti in un campo magnetico.



- 9.14** Una sottile sbarretta isolante lunga  $a$ , di massa  $M$  e carica  $q$  distribuita uniformemente con densità  $\lambda$  su tutta la lunghezza, ruota con velocità angolare  $\omega$  intorno ad un asse ortogonale passante per il suo centro. Calcolare il momento magnetico della sbarretta e il rapporto giro magnetico.

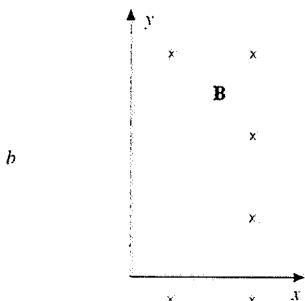


- 10.1** Una sbarretta conduttrice di lunghezza  $b$  si muove con velocità  $v$  costante e ortogonale ad un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente  $i$ . Calcolare la tensione ai capi della sbarretta in funzione della distanza  $r$  dal filo. Ripetere il calcolo quando la sbarretta si muove con velocità costante e parallela al filo e l'estremo più vicino al filo dista da questo  $r$ .



moto una volta entrata completamente nel campo magnetico, la carica  $q$  che percorre il circuito nell'intero processo.

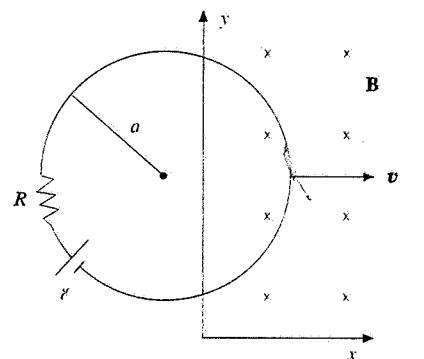
- 10.2** Una spira conduttrice quadrata, di lato  $b = 20$  cm, massa  $m = 4$  g, resistenza  $R = 25 \Omega$ , si muove senza attrito sul piano  $x, y$  con velocità costante  $v_0 = 4 \cdot 10^{-2}$  m/s. Per  $x \geq 0$  esiste un campo magnetico uniforme e costante di valore  $B = 0.5$  T e la spira entra in questa regione all'istante  $t = 0$ ; il verso del campo è indicato in figura. Calcolare la velocità  $v_1$  raggiunta dalla spira dopo  $t_1 = 2.9$  s sapendo che in quell'istante la spira è ancora soltanto parzialmente inserita nel campo, l'energia dissipata nel circuito fino al tempo  $t_1$ , la velocità  $v_2$  con cui la spira si muove dopo essere entrata completamente nel campo magnetico, l'istante  $t_2$  in cui viene raggiunta la velocità  $v_2$ , la carica  $q$  che circola nella spira durante l'intero processo.



- 10.3** Un circuito a forma di triangolo equilatero di lato  $b = 20$  cm, massa  $m = 10$  g e resistenza  $R = 0.5 \Omega$ , si muove con velocità costante  $v_0 = 5$  m/s lungo l'asse  $x$ . Nel semipiano  $x \geq 0$  esiste un campo magnetico  $B = 0.8$  T uniforme e costante, perpendicolare al piano contenente il circuito, mentre per  $x < 0$   $B = 0$ . Calcolare la velocità della spira in funzione della distanza  $x$  percorsa dal vertice dall'istante  $t = 0$  in cui inizia ad entrare nel campo magnetico, la velocità  $v_1$  con cui la spira continua il suo

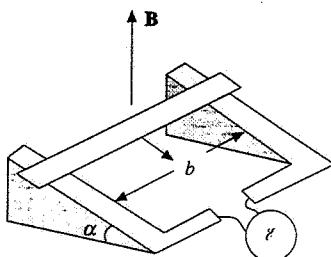
- 10.4** Una spira quadrata di lato  $b = 9$  cm, massa  $m = 5$  g e resistenza  $R = 10^{-3} \Omega$ , si muove con velocità costante  $v_0 = 5$  m/s lungo l'asse  $x$ . All'istante  $t = 0$  il suo lato anteriore comincia ad entrare nella regione  $x \geq 0$  in cui esiste un campo magnetico  $B$ , ortogonale al piano della spira, dipendente da  $x$  secondo la legge  $B(x) = \alpha x$  con  $\alpha = 2$  T/m. Calcolare la forza  $F(x)$  che agisce sulla spira, la velocità  $v(x)$  della spira e in particolare  $v(x = b)$ , la carica  $q$  che circola nella spira.

- 10.5** Una spira circolare di raggio  $a = 20$  cm, resistenza  $R = 20 \Omega$ , alimentata da un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E} = 2$  V collegato come in figura, si muove su un piano orizzontale con velocità costante  $v = 20$  m/s nella direzione  $x$ . Ortagonale al piano ed entrante in esso esiste un campo magnetico, uniforme e costante con valore  $B = 0.25$  T per  $x \geq 0$  e nullo per  $x < 0$ . Calcolare il valore della corrente  $i(x)$  che percorre la spira e della forza  $F(x)$  che agisce sulla spira. Nell'ipotesi che la velocità della spira venga sempre mantenuta eguale al valore iniziale calcolare la distanza  $x$  alla quale  $F(x)$  è nulla e la carica che percorre la spira.

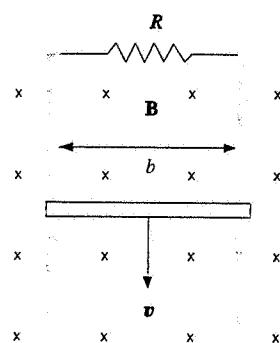


- 10.6** Una sbarra orizzontale di lunghezza  $b = 20$  cm, sezione  $\Sigma$ , densità  $d = 3 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, resistività  $\rho = 2 \cdot 10^{-5} \Omega \text{m}$ , può scivolare senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza  $b$  e inclinate di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto al piano orizzontale. Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}$ . Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme  $B = 0.3$  T diretto secondo la verticale. Calcolare il valore

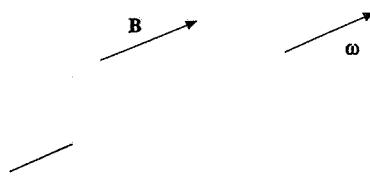
di  $\ell$  affinché la sbarra rimanga ferma, la velocità limite  $v_0$  con cui la sbarra scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la potenza dissipata nella sbarra quando essa scende con velocità  $v_0$  (per quest'ultima domanda si assuma  $\Sigma = 1 \text{ cm}^2$ ).



- 10.7** Due guide conduttrici parallele, distanti  $b = 20 \text{ cm}$ , sono chiuse ad un estremo da un resistore con  $R = 4 \Omega$ . Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una sbarretta conduttrice di massa  $m = 10^{-2} \text{ kg}$ . Il dispositivo è immerso in un campo magnetico  $B = 1 \text{ T}$  uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito. Calcolare come variano nel tempo la velocità  $v(t)$  della sbarretta e la corrente  $i(t)$ , i valori limite  $v_0$  e  $i_0$ , l'energia  $W_1$  dissipata nel circuito per ogni centimetro percorsso dalla sbarretta in queste ultime condizioni.

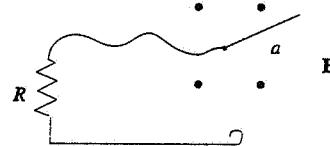


- 10.8** Un cilindro di materiale isolante, di raggio  $R = 5 \text{ cm}$ , lunghezza  $a = 20 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_r = 3$ , ruota intorno al proprio asse con velocità angolare  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  ed è immerso in un campo magnetico  $B = 0.5 \text{ T}$ , uniforme e costante, parallelo all'asse. Calcolare la densità di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  che si forma sulla superficie del cilindro, la densità di carica di polarizzazione  $\rho_p$  che si forma all'interno e le corrispondenti cariche totali di polarizzazione  $q_\sigma$  e  $q_p$ .

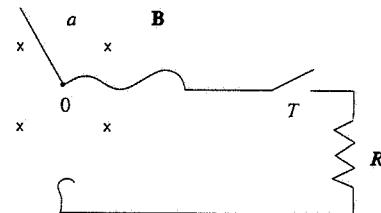


- 10.9** Al centro e al bordo di un disco metallico di raggio  $a = 15 \text{ cm}$  sono collegati due contatti strisciati e il circuito

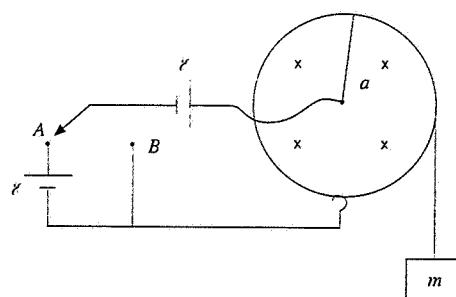
viene chiuso su un resistore; la resistenza totale risulta  $R = 8 \cdot 10^{-2} \Omega$ . Il disco è immerso in un campo magnetico uniforme e costante  $B = 0.03 \text{ T}$  parallelo all'asse. Calcolare il momento  $M$  da applicare al disco per mantenerlo in rotazione ad una frequenza  $v = 1800 \text{ giri/minuto}$ , la potenza  $P$  dissipata nel circuito in queste condizioni e la carica  $q$  che passa nel circuito in un minuto.



- 10.10** Un disco conduttore, di raggio  $a = 0.1 \text{ m}$  e momento d'inerzia  $I = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$  rispetto all'asse ortogonale al disco e passante per il centro, ruota rispetto a tale asse con velocità angolare  $\omega_0$ ; esso è immerso in un campo magnetico  $B$  uniforme e costante parallelo all'asse. Tramite due contatti strisciati al centro e al bordo, un resistore e un interruttore si forma un circuito la cui resistenza, con  $T$  chiuso, è  $R = 9.23 \cdot 10^{-2} \Omega$ . L'interruttore viene chiuso per  $t = 0$  e riaperto all'istante  $t_1 = 20 \text{ s}$ . In questo intervallo di tempo nel circuito viene dissipata l'energia  $W = 75 \text{ J}$  e la velocità angolare si riduce a  $\omega_1 = \omega_0 / 2$ . Calcolare il valore del campo magnetico  $B$ , la velocità angolare iniziale  $\omega_0$ , il numero  $N$  di giri compiuti dal disco nell'intervallo  $t_1$ , la carica totale che passa nel circuito in tale intervallo.



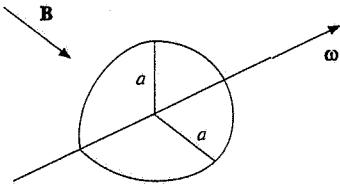
- 10.11** Nel dispositivo in figura il raggio del disco è  $a = 20 \text{ cm}$  e una massa  $m = 10^{-2} \text{ kg}$  è appesa al disco tramite un filo. Il campo magnetico che agisce sul disco è  $B = 0.05 \text{ T}$ . Con il commutatore nella posizione  $A$  il disco è fermo. Quando si passa nella posizione  $B$  dopo un certo tempo il disco ruota con velocità angolare costante  $\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$ . Calcolare la f.e.m.  $\ell$  dei due generatori, la resi-



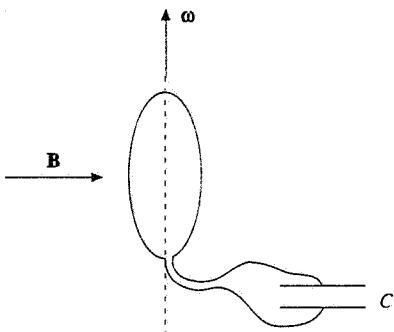
stenza  $R$  del circuito, la carica  $q$  che attraversa il circuito ad ogni giro del disco quando  $\omega$  è costante.

- 10.12** Una bobina quadrata, di lato  $a = 2$  cm e resistenza  $R = 0.1 \Omega$ , disposta con due lati verticali, ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno all'asse verticale passante per il centro. Essa è immersa in un campo magnetico  $B = 0.6$  T uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione, ed è alimentata da un generatore di resistenza interna nulla che fornisce la f.e.m.  $\xi = 0.2 + 0.24 \sin \omega t$  V. Si osserva che durante il moto la corrente  $i$  nella bobina resta costante. Calcolare la corrente  $i$  e la velocità angolare  $\omega$ .

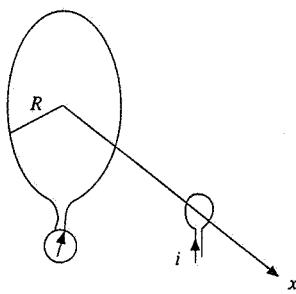
- 10.13** Una bobina è formata da  $N = 20$  spire, le quali sono disposte secondo due semicirconferenze eguali, di raggi  $a = 10$  cm, situate in due piani ortogonali tra loro. Tale bobina ruota con velocità angolare  $\omega = 100$  rad/s attorno all'asse individuato dall'intersezione dei due piani ed è immersa in un campo magnetico  $B = 0.5$  T uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione. Calcolare la f.e.m.  $\xi$ , il suo valore massimo  $\xi_{\max}$ , la potenza media sviluppata se la resistenza totale della bobina è  $R = 10 \Omega$ .



- 10.14** Una bobina circolare, formata da  $N = 50$  spire con area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , ruota con velocità angolare costante  $\omega = 80$  rad/s attorno ad un asse coincidente con un diametro; essa è posta in un campo magnetico uniforme e costante  $B = 0.5$  T, ortogonale all'asse di rotazione, ed è opportunamente collegata in serie ad un condensatore di capacità  $C = 2 \mu\text{F}$ . Calcolare la potenza istantanea  $P(t)$ , il momento meccanico istantaneo  $M(t)$  e i valori medi  $P_m$  e  $M_m$ .

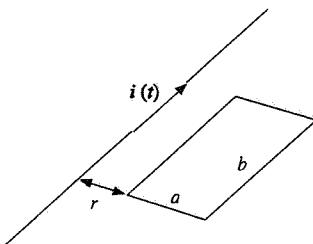


- 10.15** Una bobina circolare compatta, formata da  $N_1 = 3 \cdot 10^3$  spire di raggio  $R = 25$  cm, è collegata ad un misuratore di f.e.m.; una seconda bobina compatta, coassiale alla prima e ad essa parallela, composta da  $N_2 = 100$  spire di raggio  $r = 0.5$  cm, è percorsa dalla corrente  $i = 15$  A e si

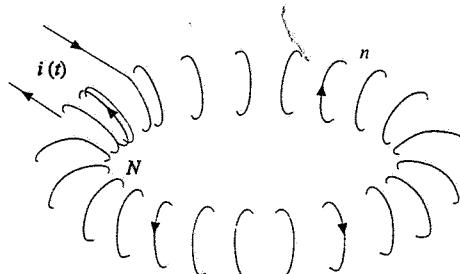


muove lungo l'asse  $x$  con velocità costante. Calcolare il coefficiente di mutua induzione  $M(x)$  in funzione della distanza  $x$  tra i centri e il valore  $\xi(x)$  misurato nella prima bobina quando la seconda ha velocità  $v = 20$  m/s.

- 10.16** Un filo rettilineo indefinito è percorso dalla corrente  $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ , con  $i_0 = 10$  A e  $\tau = 5$  s, e si trova in un piano in cui c'è una spira rettangolare di lati  $a = 6$  cm,  $b = 12$  cm, con il lato più vicino parallelo al filo alla distanza  $r = 4$  cm. Calcolare la f.e.m. indotta nella spira e la carica  $q$  che percorre la spira nell'intervallo di tempo da zero a  $+\infty$ , se essa ha una resistenza  $R = 2 \Omega$ .

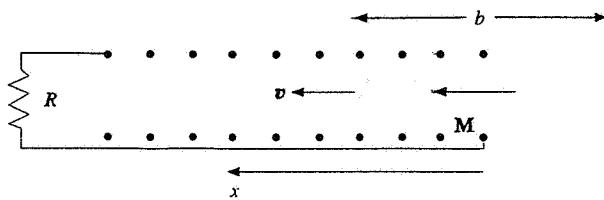


- 10.17** Una bobina formata da  $N = 5$  spire è concatenata ad un solenoide toroidale di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  e con densità di spire  $n = 10$  spire/cm, avvolto su un nucleo di ferro di permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 10^3$ . Se la corrente nella bobina varia secondo la legge  $i(t) = i_0 - \alpha t$ , con  $i_0 = 10$  A e  $\alpha = 10^{-2}$  A/s, calcolare la f.e.m. indotta nel solenoide toroidale, la corrente indotta  $I$  se la resistenza del solenoide è  $R = 10 \Omega$ , la carica indotta nell'intervallo di tempo in cui la corrente varia da  $i_0$  a zero.

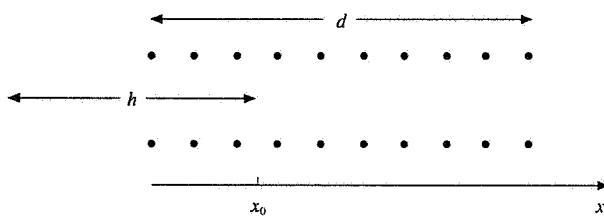


- 10.18** Un magnete permanente, di raggio  $r_1 = 5$  mm e lunghezza  $b = 20$  cm, magnetizzato uniformemente con  $M = 5 \cdot 10^5$  A/m, si muove alla velocità  $v = 10$  m/s, costante durante tutto il processo, lungo l'asse di un solenoide molto lungo, con  $n = 10$  spire/cm e resistenza  $R = 5 \Omega$ . Calcolare l'intensità di corrente indotta nel solenoide, la

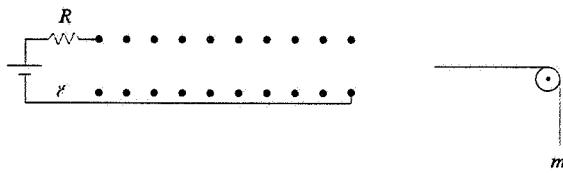
carica totale indotta dal momento in cui il magnete inizia ad entrare al momento in cui è completamente all'interno del solenoide, il lavoro speso nello stesso intervallo di tempo.



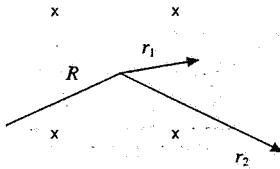
- 10.19** Un solenoide di lunghezza  $d = 80$  cm e sezione  $\Sigma = 4 \text{ cm}^2$ , con  $n = 20$  spire/cm, è alimentato da un generatore che mantiene la corrente costantemente al valore  $i = 10$  A. Una sbarretta di materiale ferromagnetico, con densità  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , permeabilità magnetica relativa  $\kappa_m = 500$ , lunghezza  $h = 20$  cm, sezione eguale a quella del solenoide, è trattenuta dall'esterno con un tratto  $x_0 = 5$  cm nell'interno del solenoide. All'istante  $t = 0$  la sbarretta viene lasciata libera e inizia a entrare nel solenoide; trascorso un tempo  $t_0$  essa ritorna nella posizione che aveva all'istante  $t = 0$ . Calcolare la forza  $F$  che agisce sulla sbarretta durante il moto e il tempo  $t_0$ .



- 10.20** Un solenoide molto lungo, di sezione  $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$  con  $n = 10$  spire/cm, è alimentato da un generatore di f.e.m.  $\xi$ ; la resistenza complessiva del circuito è  $R = 15 \Omega$ . Parzialmente all'interno si trova una sbarra di ferro ( $\kappa_m = 10^3$ ) con la stessa sezione. La sbarra è collegata tramite un filo e una carrucola con un corpo di massa  $m = 6.4 \text{ kg}$  e si osserva che essa si muove verso l'esterno con velocità costante  $v = 10 \text{ m/s}$ . Calcolare il valore della corrente  $i$  che percorre il solenoide e la potenza  $P$  erogata dal generatore.

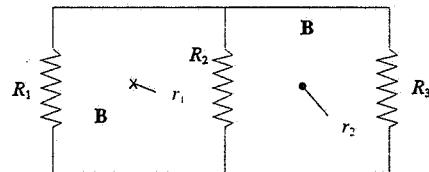


- 10.21** Un campo magnetico variabile nel tempo con la legge  $B = 0.05 t^2 - 0.2 t \text{ T}$  è definito in una regione cilindrica di raggio  $R = 5 \text{ cm}$ ; in tale regione il campo è uniforme e parallelo all'asse (nel disegno è entrante). Calcolare la forza  $F_1$  che agisce su un elettrone a distanza  $r_1 = 0.04 \text{ m}$  dal centro all'istante  $t_1 = 4 \text{ s}$ , la forza  $F_2$  che agisce nello stesso istante su un elettrone a distanza  $r_2 = 0.07 \text{ m}$  dal

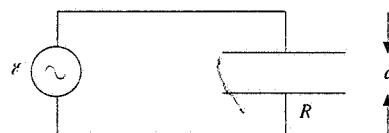


centro, l'istante in cui a qualsiasi distanza la forza è nulla.

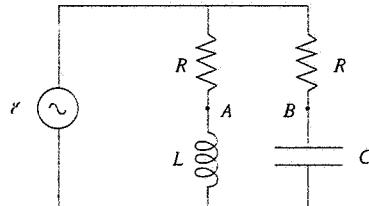
- 10.22** Nel circuito in figura le due maglie sono quadrate e i due solenoidi, mostrati in sezione in quanto perpendicolari al disegno, hanno raggi  $r_1 = 0.1 \text{ m}$  e  $r_2 = 0.15 \text{ m}$ ; gli assi dei solenoidi passano per il centro dei quadrati. Il campo magnetico dei solenoidi, col verso indicato, cresce linearmente nel tempo con derivata  $\alpha = 10 \text{ T/s}$ . I valori delle resistenze sono  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ . Calcolare le correnti che circolano nelle resistenze, le d.d.p. ai capi delle singole resistenze, la potenza totale spesa nel circuito.



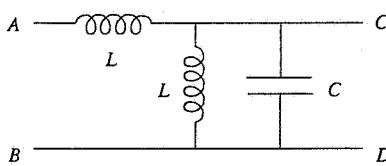
- 10.23** Le due armature piane circolari di un condensatore hanno area  $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ , distano  $d$  e sono collegate ad un generatore di f.e.m.  $\xi = \xi_0 \sin \omega t$  con  $\xi_0 = 200 \text{ V}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . La corrente massima di conduzione nei fili è  $i_0 = 8.86 \mu\text{A}$ . Calcolare i valori massimi della corrente di spostamento e della densità di corrente di spostamento, i valori massimi di  $d\Phi(\mathbf{D})/dt$  e  $d\Phi(\mathbf{E})/dt$ , la distanza  $d$  tra le armature, il valore massimo del campo magnetico in funzione della distanza  $r$  dal centro del condensatore.



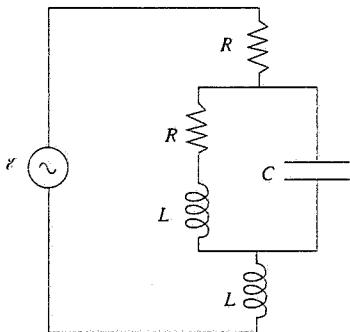
- 11.1** Nel circuito in figura il generatore fornisce la f.e.m.  $\xi = 311 \cos 314 t \text{ V}$ , le resistenze valgono  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0.50 \text{ H}$ ,  $C = 10^{-4} \text{ F}$ . Calcolare le correnti nei due rami, la corrente totale e la d.d.p.  $V_A - V_B$ .



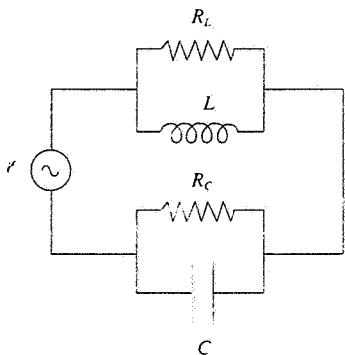
- 11.2 Nel circuito in figura calcolare per quale valore di  $\omega$  si ha che  $V_C - V_D = V_A - V_B$ .



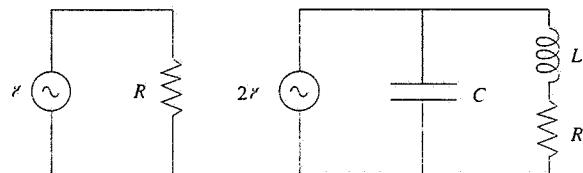
- 11.3 Dimostrare che per il circuito in figura la pulsazione di risonanza è  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  e che in risonanza l'impedenza del circuito è  $R + L/CR$ .



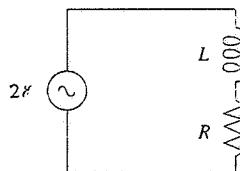
- 11.4 Determinare per il circuito in figura l'espressione della pulsazione di risonanza e calcolarla in particolare per  $R_L = R_C = 1 \Omega$ ,  $L = 10^{-3} \text{ H}$ ,  $C = 10^{-9} \text{ F}$ . Se  $R_L$  e  $R_C$ , pur restando eguali, assumono un qualsiasi valore diverso da 1 il risultato cambia?



- 11.5 Un resistore con  $R = 100 \Omega$  è connesso ad un generatore di f.e.m. alternata  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$  con  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ . Successivamente esso è connesso ad un generatore con  $2\varepsilon = 2\varepsilon_0 \cos \omega t$  secondo lo schema della figura. Si vuole che anche in questo secondo collegamento la corrente erogata dal generatore sia in fase con la f.e.m. e che la d.d.p. ai capi di  $R$  valga  $\varepsilon$ . Calcolare i valori di  $L$  e  $C$ .



- 11.6 Nel circuito del problema 11.5, con  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0.55 \text{ H}$ ,  $C = 13.8 \mu\text{F}$ ,  $2\varepsilon = 311 \text{ V}$ , si supponga di connettere prima l'induttanza e poi la capacità. Calcolare, quando è connessa solo l'induttanza, i valori della potenza reale, della potenza reattiva e della potenza apparente. Ripetere il calcolo per il circuito completo.



# Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo. Risultati numerici

$$1.1 \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \mathbf{u}_y - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{(x^2 + 2a^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z, \quad V(x) = 0 \quad \text{su tutto l'asse.}$$

$$\text{Per } x \gg a \quad \mathbf{E}(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{r^3} \mathbf{u}_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_z.$$

$$1.2 \quad \mathbf{F} = 1.22 \cdot 10^{-4} (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) \text{ N}$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qx}{(x^2 + 2a^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x, \quad V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{(x^2 + 2a^2)^{1/2}}$$

$$E_k = 3.45 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 2158 \text{ eV.}$$

$$1.3 \quad U_e = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4.87 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

$$W = 1.97 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

$$1.4 \quad U_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q^2}{a} \text{ da cui } q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C. Il lavoro svolto contro le forze del campo}$$

è  $W = -q^* [V(P_1) - V(P_2)] = -q^* V(P_1)$  in quanto  $V(P_2) = 0$ .  $V(P_1) = -2823 \text{ V}$  e  $q^* = 10^{-10} \text{ C.}$

$$1.5 \quad W = \frac{4\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 10.15 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

$$1.6 \quad E = \frac{\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 d(d+l)} \quad E(P) = 106.1 \text{ V/m.}$$

1.7 Essendo  $d \ll R$  calcoliamo la forza come se i fili fossero rettilinei:

$$dF_{12} = E_1 \lambda_2 ds_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 d} \lambda_2 ds_2,$$

$$F_{12} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{\epsilon_0 d} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 \epsilon_0 d R} = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ N.}$$

Il lavoro è  $W = 6.9 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$

1.8 Il campo sull'asse dell'anello, per  $(x/R)^2 \ll 1$ , è  $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{R^3}$  ;

la forza agente su  $q_0$  è attrattiva e lineare con la distanza per cui il moto è armonico, di equazione

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{R^3} x = 0$$

La pulsazione è  $\omega = \sqrt{qq_0 / 4\pi\epsilon_0 m R^3}$  e il periodo è  $T = 2\pi/\omega = 66.2$  s. L'energia cinetica vale  $E_k = 1.13 \cdot 10^{-10}$  J.

2.1 La densità di carica vale  $\sigma = q / \pi(R_2^2 - R_1^2) = 8.86 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup>. Dall'esempio 2.9,

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{x^2 + R_2^2} - \sqrt{x^2 + R_1^2} \right] ,$$

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} \right] \mathbf{u}_x .$$

$E_k = 107.2$  eV. Per il dipolo :

$$F = p_0 \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{x=0} = p_0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 8.33 \cdot 10^{-7}$$
 N.

Infine, con  $x \approx 0$   $E(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ ,

$$F(x) = q_0 E(x) = -m \omega^2 x \text{ e } v = \omega / 2\pi = \sqrt{\sigma(R_2 - R_1) q_0 / 2m\epsilon_0 R_1 R_2} .$$

2.2  $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R d\theta}{R^2} \cos\theta \mathbf{u}_x - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \sin\theta R d\theta}{R^2} \sin\theta \mathbf{u}_y =$   
 $= -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R} \mathbf{u}_y .$

Dividendo l'anello in strisce parallele all'asse y, ciascuna striscia equivale a un dipolo di momento  $dp = \lambda R d\theta \cdot 2R \sin\theta$  e integrando tra 0 e  $\pi$ ,  $\mathbf{p} = \lambda_0 \pi R^2 \mathbf{u}_y$ . Detta  $q$  la carica del semianello positivo,  $q = \int_0^\pi \lambda_0 \sin\theta R d\theta = 2R \lambda_0$ , per cui  $\mathbf{p} = \frac{1}{2} q \pi R \mathbf{u}_y$ .

A grande distanza lungo l'asse x  $\mathbf{E} = -\mathbf{p} / 4\pi\epsilon_0 x^3$  e lungo l'asse y  $\mathbf{E} = 2\mathbf{p} / 4\pi\epsilon_0 y^3$ .

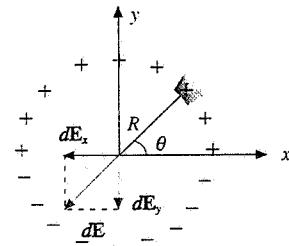
2.3  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  con  $\mathbf{p} = \lambda_0 \pi R^2 \mathbf{u}_y$  (vedi problema 2.2). Il momento delle forze è diretto lungo l'asse z e vale in modulo  $\lambda_0 \pi R^2 E \sin 60^\circ = 2.72 \cdot 10^{-6}$  Nm.

2.4 Ragionando come nel problema 2.1 e ricordando l'esempio 1.8,

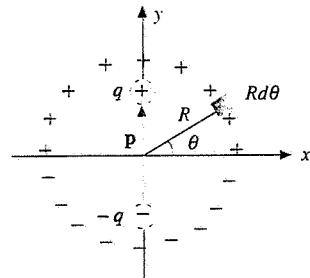
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{piano}} - \mathbf{E}_{\text{disco}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \mathbf{u}_x , \quad E(P) = \sigma / 2\sqrt{2}\epsilon_0 .$$

Dalla condizione di equilibrio:  $q = 2.46 \cdot 10^{-7}$  C.  $W = 5.7 \cdot 10^{-4}$  J.

Per il dipolo,  $dW = F dx = p \frac{dE}{dx} dx = p dE$ ,  $W = 4 \cdot 10^{-6}$  J.



Soluzione 2.2



Soluzione 2.3

2.5 Detto  $\mathbf{u}_r$  il versore di OA,

$$\mathbf{E} = \left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_r , \quad F = p \frac{dE}{dr} = -2p q / 4\pi \epsilon_0 r^3 ,$$

cioè rivolta verso O; risulta  $q = 10^{-9}$  C. La d.d.p. vista dall'elettrone è

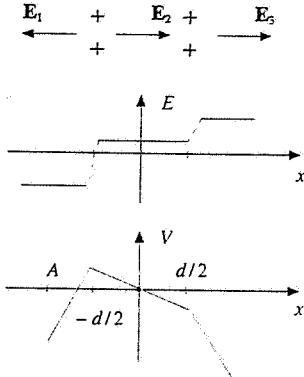
$$\left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{d}{4} - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 d} \right) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{3}{4} d = 52.5 \text{ V per cui } v_B = 5.24 \cdot 10^6 \text{ m/s} .$$

$$2.6 \text{ All'esterno } \mathbf{E}(P_1) = \mathbf{E}(P_4) = \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = 0 , \text{ nelle intercapedini}$$

$$\mathbf{E}(P_2) = \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}} ,$$

$$\mathbf{E}(P_3) = -\mathbf{E}(P_2) .$$

## 2.7 Nelle tre regioni abbiamo



Soluzione 2.7

$$x < -\frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = -1.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}} , \quad V_1(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (3x + 2d) ,$$

$$-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 0.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}} , \quad V_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} x ,$$

$$x > \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x = 1.5 \cdot 10^4 \mathbf{u}_x \frac{\text{V}}{\text{m}} , \quad V_3(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d) ,$$

$\Delta V = V_1(-d/2) - V_1(A) = 3\sigma_2 d / 4\epsilon_0 = 1500 \text{ V} , E_{k,\min} = 1.5 \text{ KeV} .$  L'elettrone si ferma nel punto dell'asse x positivo tale che  $V(x) = V(A)$  ovvero

$$\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} d , \text{ per cui } x = 2d/3 = 13.3 \text{ cm} .$$

## 2.8 Le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = q E_x = -q \frac{\partial V}{\partial x} = -2q V_0 x ,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = q E_y = -q \frac{\partial V}{\partial y} = -2q V_0 y ;$$

tenuto conto delle condizioni iniziali le soluzioni si scrivono  $x = x_0 \cos \omega t , y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$  con  $\omega = \sqrt{2qV_0/m} = 10^7 \text{ rad/s}$ .

Poiché  $x_0 = v_0 / \omega$  la traiettoria è una circonferenza di raggio  $x_0$ .

$$3.1 \text{ Applicando la legge di Gauss, per } 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x ,$$

$$\text{per } x \geq \frac{d}{2} \quad \mathbf{E}(x) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x .$$

$$V(0) - V(d/2) = \frac{\rho d^2}{8\epsilon_0} , \quad V(d/2) - V(h) = \frac{\rho dh}{2\epsilon_0} ,$$

$$\Delta V = 0.4 \text{ V}, \quad W = 0.6 \cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

3.2 All'interno, per  $r \leq R$ ,  $4\pi r^2 E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$  con  $q(r) = \int_0^r \frac{c}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi c r^2$ ,

$E_{\text{int}} = c/2\epsilon_0$ , costante. All'esterno, per  $r \geq R$ ,  $E_{\text{est}} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$  con  $q = 2\pi c R^2$  per cui

$$E_{\text{est}} = cR^2/2\epsilon_0 r^2 . \quad V(r \geq R) = \int_0^\infty E_{\text{est}} dr = cR^2/2\epsilon_0 r, \text{ in particolare } V(R) = cR/2\epsilon_0 .$$

Per  $r \leq R$   $V(r) - V(R) = \int_r^R E_{\text{int}} dr = \frac{c}{2\epsilon_0} (R-r)$ ,  $V(r) = \frac{c}{2\epsilon_0} (2R-r)$ ; al centro

$$V(0) = \frac{cR}{\epsilon_0} .$$

3.3 Per  $r \leq R_1$   $E = 0$ ; per  $R_1 \leq r \leq R_2$   $4\pi r^2 E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$  con  $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$ ,

$$E_{\text{int}} = \rho (r^3 - R_1^3)/3\epsilon_0 r^2 ; \text{ per } r \geq R_2 \quad q = \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3),$$

$$E_{\text{est}} = q/4\pi\epsilon_0 r^2 = \rho (R_2^3 - R_1^3)/3\epsilon_0 r^2 .$$

$$\Delta V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^3 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = 100 \text{ V} ,$$

$$E_k = 100 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J}, \quad v = 5.93 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \quad t = 33.7 \text{ ns}.$$

3.4 Per  $r \leq R_1$   $E = 0$ ; per  $R_1 \leq r \leq R_2$  la carica per unità di lunghezza è  $q(r) = \pi\rho(r^2 - R_1^2)$ , mentre per  $r \geq R$   $q = \pi\rho(R_2^2 - R_1^2)$ , quindi  $2\pi r E_{\text{int}} = q(r)/\epsilon_0$ ,

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r^2 - R_1^2}{r}, \quad 2\pi r E_{\text{est}} = q/\epsilon_0, \quad E_{\text{est}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{r} .$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{int}} dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = 80.7 \text{ V},$$

$$W = 80.7 \text{ eV} = 1.29 \cdot 10^{-17} \text{ J}.$$

3.5 La carica per unità di lunghezza fino al raggio  $r \leq R$  è

$$q(r) = 2\pi \rho_0 r^2 \left( \frac{a}{2} - \frac{b}{3} r \right) ,$$

$$\text{per cui } E_{\text{int}} = q(r)/2\pi\epsilon_0 r = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \left( a - \frac{2}{3} b r \right) ,$$

$$\text{mentre all'esterno } E_{\text{est}} = q/2\pi\epsilon_0 r = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \left( a - \frac{2}{3} b R \right) .$$

3.6 Nei tre casi citati applicando la legge di Gauss si trova

$$\mathbf{E} = \gamma \rho \frac{r}{\epsilon_0} \mathbf{u}, \text{ con } \gamma = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ rispettivamente per la distribuzione piana, cilindrica,}$$

sferica. La forza sull'elettrone è  $-e\mathbf{E} = -e\gamma\rho\frac{r}{\epsilon_0}\mathbf{u}_r$ , centrale di tipo elastico e pertanto, visto che l'elettrone è inizialmente in quiete, il moto è armonico con la pulsazione data nel testo.

- 3.7 Campo del filo  $\mathbf{E}_\lambda = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{u}_r$ , campo della superficie nullo per  $r \leq R_0$  e pari a

$$\mathbf{E}_\sigma = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r \text{ per } r \geq R_0.$$

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_\lambda \cdot d\mathbf{r} + \int_{R_0}^{R_2} \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_0} = 0,$$

$$\frac{\sigma}{\lambda} = 15.9 \text{ m}^{-1}.$$

- 3.8 Il campo elettrostatico nella cavità si può pensare come somma del campo di un cilindro pieno di raggio  $R$ , carico positivamente, e del campo di un cilindro avente le dimensioni del foro, carico negativamente. A distanza  $r$  dal centro lungo la congiungente i due assi  $\mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_r - \frac{\rho}{2\epsilon_0} (r - b) \mathbf{u}_r = \frac{\rho b}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_r$ , indipendente da  $r$ .

$$\text{Analogamente per la sfera si trova } \mathbf{E} = \frac{\rho b}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r.$$

- 3.9 Si calcola il campo elettrostatico  $\mathbf{E} \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y} \right)$  e si verifica che

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \mathbf{u}_z = 0. \text{ Risulta inoltre } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \text{ e quindi}$$

$\rho(x, y) = 0$ . Si vede anche che la funzione proposta è soluzione dell'equazione di Laplace.

$$4.1 \quad V_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2(x)}{x} \right), \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2(x)}{R_2} + \frac{q_1}{x} \right) \text{ da cui}$$

$$q_2(x) = 4\pi\epsilon_0 R_2 V_2 - \frac{R_2 q_1}{x}, \quad V_1(x) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x^2} \right) + \frac{R_2 V_2}{x},$$

$$F(x) = \frac{q_1 q_2(x)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{R_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 x^2} \left( 4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x} \right).$$

- 4.2 Dove c'è la sferetta  $V_{\text{disco}} = 9 \cdot 10^{-3}$  V e inoltre  $V_i = q_i / 4\pi\epsilon_0 r$ , imponendo  $V_{\text{disco}} + V_i = 0$  risulta  $q_i = -10^{-15}$  C.

- 4.3  $E_{k,\min} = 2 \text{ KeV}$ ,  $v_s = 2.65 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ ,  $t_1 = d/v_s = 1.87 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ,  $t_2 = 2l/v_s = 1.51 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ,  $t = t_1 + t_2 = 3.38 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ .

- 4.4 Per l'azione di schermo elettrostatico  $q_0$  esercita una forza solo sul foglio esterno:  $F = 10^{-9} \text{ N}$ .  $V_A - V_B = 150 \text{ V}$ ,  $W = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ .

- 4.5  $q_1 = q_3 = q_5 = q = 10^{-10} \text{ C}$ ,  $q_2 = q_4 = -q = -10^{-10} \text{ C}$ ,  $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  nelle zone A, B, C (nelle altre è nullo).

$$U_e = U_A + U_B + U_C = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_5} = 3.51 \cdot 10^{-9} \text{ J}.$$

Se si mettono in contatto le superficie 1 e 2, il campo si annulla nella zona A e si annulla anche  $U_A$ ,  $\Delta U_e = U_A = 2.25 \cdot 10^{-9}$  J, negativa; nelle zone esterne non succede nulla, per le proprietà di schermo. Se si mettono in contatto le superficie 3 e 4, il campo si annulla nella zona B,  $U_B = 0$ ,  $\Delta U_e = -0.36 \cdot 10^{-9}$  J, all'interno e all'esterno non avviene nulla. Infine se si mette a terra la superficie 5, il campo all'esterno è nullo,  $U_C = 0$ ,  $\Delta U_e = -0.90 \cdot 10^{-9}$  J, all'interno non cambia nulla.

$$4.6 \quad V_C = V_A + \frac{q_1}{C_1}, \quad V_D = V_A + \frac{q_3}{C_3}, \quad V_B = V_C + \frac{q_2}{C_2}, \quad V_B = V_D + \frac{q_4}{C_4}.$$

All'equilibrio  $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3}$ ,  $\frac{q_2}{C_2} = \frac{q_4}{C_4}$ ; inoltre le due capacità  $C_1$  e  $C_2$  risultano in serie per cui  $q_1 = q_2$  e analogamente  $q_3 = q_4$ : segue  $C_1 / C_2 = C_3 / C_4$ .

$$4.7 \quad C_{eq} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 3.33 \mu F, \quad V_1 = V, \quad q_1 = C_1 V = 2 \cdot 10^{-4} C.$$

La carica totale è  $q = C_{eq}V = 3.33 \cdot 10^{-4}$  C e  $q_2 = q_3 = q - q_1 = 1.33 \cdot 10^{-4}$  C.  $V_2 = q_2 / C_2 = 66.7$  V,  $V_3 = q_3 / C_3 = 33.3$  V.

$$U_e = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = 1.67 \cdot 10^{-2} J.$$

$$4.8 \quad q_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} C, \quad q_2 = 1.0 \cdot 10^{-3} C, \quad q = q_1 + q_2 = 2.5 \cdot 10^{-3} C, \\ U_{in} = 0.350 \text{ J}. \text{ Alla fine } V_{fin} = q / (C_1 + C_2 + C_3) = 250 \text{ V}, \quad q'_1 = 1.25 \cdot 10^{-3} C, \\ q'_2 = 1.00 \cdot 10^{-3} C, \quad q'_3 = 0.25 \cdot 10^{-3} C, \quad U_{fin} = 0.313 \text{ J}, \quad \Delta U = -0.037 \text{ J}.$$

$$4.9 \quad \frac{1}{C} = \frac{x_1}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{x_2}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{h-x}{\epsilon_0 \Sigma}, \quad C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h-x}, \quad \text{mentre } C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \text{ e quindi } C = C_0 \frac{h}{h-x} \\ = 1 \mu F. \text{ La carica iniziale è } q_0 = 0.6 \cdot 10^{-3} \text{ C e } U_{in} = 0.30 \text{ J}; \text{ a carica costante } U_{fin} = 0.18 \text{ J}, \Delta U = -0.12 \text{ J}. \text{ La diminuzione di energia elettrostatica corrisponde al lavoro speso per attirare la lastra. Se resta costante il potenziale al valore } V_0, \quad q_{fin} = 10^{-3} \text{ C,} \\ U_{fin} = 0.5 \text{ J, } \Delta U = 0.20 \text{ J. Il lavoro compiuto dal generatore è } W_{gen} = 0.40 \text{ J: la metà va in aumento di energia elettrostatica e la restante metà in lavoro per attirare la lastra.}$$

$$4.10 \quad \text{Equilibrio delle forze } \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 \Sigma + mg \text{ con } E_1 = 4V/d \text{ e } E_2 = 4V/3d:$$

$$V = \frac{3}{8} d \sqrt{\frac{mg}{\epsilon_0 \Sigma}} = 748 \text{ V.}$$

Capacità iniziale  $C_{in} = 788 \text{ pF}$ ,  $q_{in} = 5.89 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ ,  $U_{in} = 2.20 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

Capacità finale  $C_{fin} = 591 \text{ pF}$ .

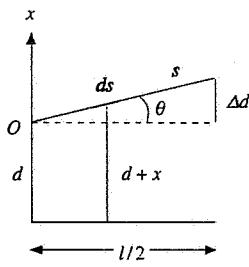
– *Potenziale costante*:  $U_{fin} = 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $\Delta U_e = -0.55 \cdot 10^{-4} \text{ J} = W$   
(si verifichi che  $W_{gen} = 2 \Delta U_e$ )

– *Carica costante*:  $U_{fin} = 2.93 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ,  $\Delta U_e = 0.73 \cdot 10^{-4} \text{ J} = -W$ .

$$4.11 \quad dC = \frac{\epsilon_0 l ds}{d+x}, \quad \text{con } s \sin \theta = x, \quad \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{2\Delta d}{l}, \quad ds = \frac{dx}{\sin \theta} = \frac{l}{2} \frac{dx}{\Delta d};$$

$dC = \frac{\epsilon_0 l^2}{2\Delta d} \frac{dx}{d+x}$ ; considerando tutti i condensatori elementari in parallelo e

integrandolo,

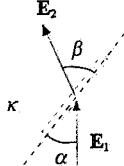


$$C = \int_{-\Delta d}^{+\Delta d} dC = \frac{C_0}{2} \frac{d}{\Delta d} \ln \frac{1 + \frac{\Delta d}{d}}{1 - \frac{\Delta d}{d}}, \text{ con } C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}$$

$$\Delta U_e = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C} \frac{\Delta C}{C_0} = 1.35 \cdot 10^{-4} \text{ J, pari al lavoro compiuto per allineare le armature.}$$

**Soluzione 4.11**

$$4.12 \quad p = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R_2^2} \right)^2 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}, \quad W = 2.57 \cdot 10^{-11} \text{ J.}$$

**Soluzione 5.1**

$$\sigma_2 = \epsilon_0 \kappa_2 E = 1.77 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2, \quad \sigma_{1p} = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} \sigma_1 = 3.54 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2,$$

$$\sigma_{2p} = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} \sigma_2 = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2, \quad W = 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

$$5.3 \quad C_{in} = 333.3 \text{ pF}, \quad q_{in} = 1.33 \cdot 10^{-7} \text{ C}; \text{ dopo l'inserzione } C'_1 = \kappa C_1 \text{ e } C_{fin} = 666.7 \text{ pF}, \\ q_{fin} = 2.67 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad \Delta q_2 = 1.34 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad V'_1 = q_{fin} / C'_1 = 133 \text{ V mentre } V_1 = q_{in} / C_1 = 266 \text{ V}, \quad \Delta V_1 = -133 \text{ V}; \quad W_{gen} = V \Delta q = V (q_{fin} - q_{in}) = 5.36 \cdot 10^{-5} \text{ J},$$

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q_{fin} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

$$5.4 \quad \text{Inizialmente } q_1 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q_2 = 40 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q = 48 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad C = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ F}, \\ U_e = 9.60 \cdot 10^{-5} \text{ J. Dopo l'inserzione } C'_1 = 1.6 \cdot 10^{-8} \text{ F}, \quad C' = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ F}, \quad V' = 28.2 \text{ V}, \\ q'_1 = 45.2 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad \Delta q_1 = 37.2 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad \Delta V_2 = \Delta V = -371.8 \text{ V}, \quad U'_e = 0.68 \cdot 10^{-5} \text{ J}, \\ \Delta U_e = -8.92 \cdot 10^{-5} \text{ J},$$

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q'_1 = 44.6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

$$5.5 \quad \text{La forza sul dielettrico è } F = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l}{2h} (V_2^2 - V_1^2) = 5.32 \cdot 10^{-4} \text{ N; la massa è} \\ m = \rho l^2 h = 0.3 \text{ kg; } a = F / m = 1.77 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2, \quad t = 7.5 \text{ s,}$$

$$\sigma_{1p} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \frac{V_1}{h} = 3.54 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad \sigma_{2p} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \frac{V_2}{h} = 7.09 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

$$5.6 \quad E_1 = 1.82 \cdot 10^5 \text{ V/m; dalla condizione di equilibrio: } \theta = 5.31^\circ; \\ q = \sigma \Sigma = \epsilon_0 E_1 \Sigma = 8.06 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad q_p = 6.04 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

$$5.7 \quad \text{La costante dielettrica relativa del liquido è pari al rapporto tra la d.d.p. iniziale e finale,}$$

$$\kappa = 9 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^3 = 3. \quad \text{Da } \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 9 \cdot 10^3 \text{ V, } q = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

$$\text{Inizialmente } U_1 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ J,}$$

$$U_2 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J,} \quad U_3 = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ J,}$$

$U_e = U_1 + U_2 + U_3 = 7.2 \cdot 10^{-4}$  J. Nel processo varia solo  $U_2$ :  $U'_2 = U_2 / \kappa = 0.6 \cdot 10^{-4}$  J,  $U'_e = 6.0 \cdot 10^{-4}$  J,  $\Delta U_e / U_e = -0.167$ .  $q_p = 2.67 \cdot 10^{-8}$  C. La d.d.p.  $V_1 - V_2$  e il potenziale  $V_3$  non cambiano.

5.8  $q = 10^{-8}$  C,  $P(Q) = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} = 0.42 \cdot 10^{-8}$  C/m<sup>2</sup>,  $n = 2.26 \cdot 10^{28}$  molecole / m<sup>3</sup>,  $p = P / n = 1.85 \cdot 10^{-37}$  Cm. Dopo il travaso  $q' = 1.14 \cdot 10^{-8}$  C,  $W_{\text{gen}} = 0.84 \cdot 10^{-6}$  J.

5.9  $F = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (\kappa-1) V^2 = 4.0 \cdot 10^{-3}$  N,  $W = 2 \cdot 10^{-4}$  J (il generatore deve fornire  $4 \cdot 10^{-4}$  J =  $\Delta U_e + W$ ).

5.10  $F = \frac{\pi \epsilon_0 \kappa V^2}{\ln(R_2/R_1)}$ ;  $F = K \Delta x$ ,  $\Delta x = 9.8$  cm.

Per unità di lunghezza  $q = CV = \frac{2\pi \epsilon_0 \kappa V}{\ln(D/d)} = 4.9 \cdot 10^{-6}$  C,  $q_p = 3.7 \cdot 10^{-6}$  C.

5.11  $D(r) = q / 4\pi r^2$  per  $r \geq R_1$ . Per  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $E(r) = D / \kappa = q / 4\pi \epsilon_0 c$ , per  $r \geq R_2$ ,  $E(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$ .

$$U_c = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2 d\tau + \int_{R_2}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \text{ con } d\tau = 4\pi r^2 dr :$$

$$U_c = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ J} + 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 9.0 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

$$P(r) = \frac{\kappa-1}{\kappa} D = \frac{(c-r^2)q}{4\pi cr^2}, q_{1p} = -4\pi R_1^2 P(R_1) = -\frac{c-R_1^2}{c} q = -5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C},$$

$$q_{2p} = 4\pi R_2^2 P(R_2) = \frac{c-R_2^2}{c} q = 0, q_{1p} + q_{2p} = \frac{q}{c} (R_1^2 - R_2^2) = -5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

Essendo diversa da zero la carica superficiale di polarizzazione, nel volume deve esserci una densità  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  che calcoliamo tramite (3.23):

$$\rho_p = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 P) = \frac{q}{2\pi cr}.$$

La carica di polarizzazione contenuta nel volume è

$$q_p = \int_{R_1}^{R_2} \rho_p(r) 4\pi r^2 dr = \frac{q}{c} (R_2^2 - R_1^2) = +5.33 \cdot 10^{-8} \text{ C}; \text{ in totale la carica di polarizzazione è nulla.}$$

5.12 Il campo interno è  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ , con  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , per cui  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{E}_0$  e il momento

$$\text{di dipolo del cilindro è } p = P\tau : E_0 = q / 4\pi \epsilon_0 r^2 \text{ e } p = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q\tau}{4\pi r^2}.$$

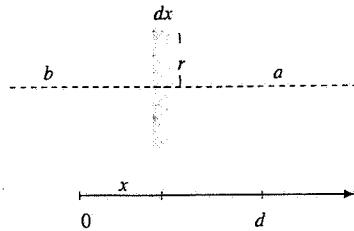
$$\text{La forza sul dipolo è } F = p \frac{dE_0}{dr} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q^2 \tau}{8\pi^2 \epsilon_0 r^5}, \text{ attrattiva.}$$

La carica della sfera è  $q = 4\pi \epsilon_0 RV$  e risulta in definitiva

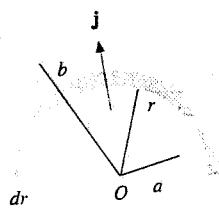
$$F = \frac{9.44 \cdot 10^{-15}}{r^5} : \text{ con } r = 5R \quad F = -3.08 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

- 6.1  $i_{\max} = Ne / \tau = 16 \text{ A}, \quad i_{\text{med}} = NE / T = Nev = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 8 \text{ mA};$   
 $P_{\max} = Vi_{\max} = 45 \cdot 10^9 \cdot 16 = 7.2 \cdot 10^{11} \text{ W} = 720 \text{ GW},$   
 $P_{\text{med}} = Vi_{\text{med}} = 3.6 \cdot 10^8 \text{ W} = 360 \text{ MW};$   
 $\Sigma = \pi d^2 / 4, \quad j_{\max} = i_{\max} / \Sigma = 2.26 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2, \quad j_{\text{med}} = 1.13 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2,$   
 $j = nec, \quad (ne)_{\max} = j_{\max} / c = 7.53 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^3, \quad (ne)_{\text{med}} = 3.77 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3.$

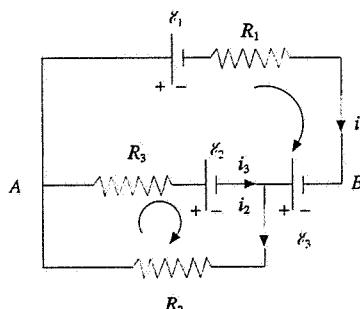
- 6.2  $E = \rho j = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}, \quad a = eE / m = 5.87 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2, \quad \tau = v_d / a = 2.56 \cdot 10^{-14} \text{ s},$   
 $P_{\tau} = jE = 6.68 \cdot 10^4 \text{ W/m}^3 = 6.68 \cdot 10^{-5} \text{ W/mm}^3.$



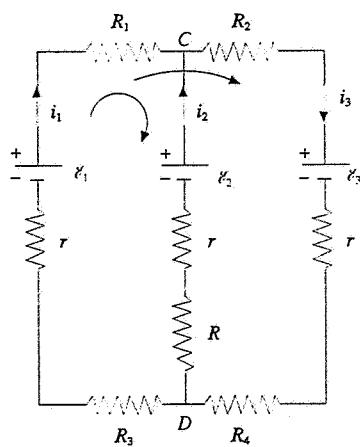
#### Soluzione 6.4



#### Soluzione 6.5



#### Soluzione 6.9



- 6.3 caso 1  $R = \rho d / \pi(b^2 - a^2) = 606.3 \Omega, \quad i = 33 \text{ mA}, \quad P = Ri^2 = 0.66 \text{ W},$   
 $j = i / \pi(b^2 - a^2) = 500 \text{ A/m}^2$ , eguale in entrata e in uscita

- caso 2  $dR = \rho dr / 2\pi r d, \quad R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a} = 14.6 \Omega$ , si può anche ricavare da (6.62):  $i = 1.37 \text{ A}, \quad P = 27.4 \text{ W}, \quad j_a = i / 2\pi a d = 5.45 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2, \quad j_b = 2.17 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2.$

$$6.4 \quad r = b - \frac{b-a}{d}x, \quad dR = \frac{\rho dx}{\pi r^2} = \frac{\rho dx}{\pi [b - (b-a)x/d]^2},$$

$$R = \int_0^d dR = \frac{\rho d}{\pi(b-a)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\rho d}{\pi a b} \quad (\text{come se fosse un conduttore a sezione ellittica costante}); \quad \text{se } a = b \quad R = \rho d / \pi a^2, \quad \text{formula corretta per un conduttore cilindrico.}$$

$$6.5 \quad dR = \rho dr / 2\pi r^2, \quad R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 18.3 \text{ k}\Omega, \quad i = 0.11 \text{ mA},$$

$$P = 0.22 \text{ W}, \quad j_a = i / 2\pi a^2 = 0.175 \text{ A/m}^2, \quad j_b = 0.044 \text{ A/m}^2.$$

$$6.6 \quad R_0 = \rho_{20} (1 - \alpha 20) d / \Sigma = 0.24 \Omega, \quad i_1 = \epsilon / (r_i + R_0) = 0.403 \text{ A}$$

$$R + r_i = (R_0 + r_i) / 0.95, \quad R = 0.305 \Omega = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta t) l / \Sigma,$$

$$\Delta t = 35.1^\circ \text{C}, \quad t = 55.1^\circ \text{C}$$

$$P_1 = R_0 i_1^2 = 3.9 \cdot 10^{-2} \text{ W}, \quad P_2 = R i_2^2 = 4.5 \cdot 10^{-2} \text{ W.}$$

$$6.7 \quad P_2 = P_1 \frac{R_1}{R_2} = P_1 \frac{[1 + \alpha(800 - 20)]}{[1 + \alpha(200 - 20)]} = 612 \text{ W}$$

$$i_1 = P_1 / V = 2.5 \text{ A}, \quad i_2 = P_2 / V = 3.06 \text{ A.}$$

$$6.8 \quad \text{caso 1} \quad r_{AB} = 3r_i = 3 \Omega, \quad i = 3\epsilon / (3r_i + R) = 2 \text{ A},$$

$$P_{\text{gen}} = 3\epsilon i = 36 \text{ W}, \quad P_R = Ri^2 = 24 \text{ W}, \quad P_R / P_{\text{gen}} = 0.67$$

$$\text{caso 2} \quad r_{AB} = r_i / 3 = 0.33 \Omega, \quad i = \epsilon / (r_{AB} + R) = 0.95 \text{ A.}$$

$$P_{\text{gen}} = \epsilon i = 5.70 \text{ W}, \quad P_R = Ri^2 = 5.42 \text{ W},$$

$$P_R / P_{\text{gen}} = 0.95.$$

$$6.9 \quad -\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = R_1 i_1 - R_3 i_3, \quad -\epsilon_2 = R_2 i_2 + R_3 i_3, \quad i_3 + i_1 = i_2, \quad i_1 = 0.047 \text{ A},$$

$$i_2 = -0.318 \text{ A}, \quad i_3 = -0.365 \text{ A.}$$

$$V_A - V_B = \epsilon_2 + \epsilon_3 + R_3 i_3 = 14.35 \text{ V}$$

$$R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 = 3.46 \text{ W}, \quad -\epsilon_1 i_1 + \epsilon_3 i_1 - \epsilon_2 i_3 = 3.46 \text{ W}; \quad \text{i segni nell'ultima relazione sono in accordo con i versi preventivamente scelti per le correnti, poi i segni effettivi dipendono dalla soluzione trovata (i}_2 \text{ e } i_3 \text{ sono negativi).}$$

#### Soluzione 6.10

$$6.10 \quad \epsilon_3 - \epsilon_1 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2r)i. \quad i = 0.667 \text{ A}, \quad V_A = V_C = V_D + (R_1 + R_3 + r)i + \epsilon_1,$$

$$\begin{aligned}
 V_B &= V_D + \mathcal{E}_2, \quad V_A - V_B = 0.67 \text{ V}, \quad V_C - V_D = 8.67 \text{ V} \\
 \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= (R_1 + R_3 + r)i_1 - (R + r)i_2, \quad \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = (R_1 + R_3 + r)i_1 + (R_2 + R_4 + r)i_3, \\
 i_1 + i_2 &= i_3, \quad i_1 = -0.643 \text{ A}, \quad i_2 = -0.056 \text{ A}, \quad i_3 = -0.699 \text{ A}, \quad V_C - V_D = \mathcal{E}_2 - (r + R) \\
 i_2 &= 8.50 \text{ V} \\
 P_{\text{gen}} &= \mathcal{E}_1 i_1 + \mathcal{E}_2 i_2 - \mathcal{E}_3 i_3 = 5.37 \text{ W}, \quad P_{\text{res}} = (R_1 + R_3)i_1^2 + R i_2^2 + (R_2 + R_4)i_3^2 = 4.46 \text{ W}, \\
 \text{per verifica } P_r &= r(i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) = 0.91 \text{ W} = P_{\text{gen}} - P_{\text{res}}
 \end{aligned}$$

**6.11**  $T$  aperto  $R_{\text{eq}} = r_1 + R + R/2 = 10 \Omega$ ,  $i = \mathcal{E}_1 / R_{\text{eq}} = 0.3 \text{ A}$ ,  
 $V_A - V_B = Ri/2 = 0.9 \text{ V}$ ,  $P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i = 0.9 \text{ W}$

$T$  chiuso  $\mathcal{E}_1 = (r_1 + R) i + R i_1/2$ ,  $-\mathcal{E}_2 = (r_2 + R/3) i_2 - R i_1/2$ ,  $i = i_1 + i_2$ ,  
 $i_1 = 0.885 \text{ A}$ ,  $i_2 = -0.836 \text{ A}$ ,  $i = 0.049 \text{ A}$ ,  $V_A - V_B = R i_1/2 = 2.66 \text{ V}$ ,  
 $P_{\text{gen}} = \mathcal{E}_1 i - \mathcal{E}_2 i_2 = 5.16 \text{ W}$ .

**6.12** I punti  $C$ ,  $O$ ,  $D$  sono allo stesso potenziale per cui le resistenze dei rami  $CO$  e  $OD$  non sono percorse da corrente;  $R_{\text{eq}} = 2(R/3) = 4 \Omega$ ,  $i_T = \mathcal{E} / (R_{\text{eq}} + r_i) = 1.5 \text{ A}$ ,  
 $i_R = 0.5 \text{ A}$  in ogni resistenza,  $P_R = R_{\text{eq}} i_T^2 = 6 R i_R^2 = 9 \text{ W}$ .

**6.13** La resistenza vista da  $AB$  o da qualsiasi altra coppia di punti  $A'B'$  è sempre la stessa perché la catena è infinita, per cui  $1/R_{\text{eq}} = 1/R + 1/(2R + R_{\text{eq}})$ ,  $R_{\text{eq}} = (-1 \pm \sqrt{3}) R = (\sqrt{3} - 1) R = 0.73 R = 7.3 \Omega$ ,  $i = \mathcal{E} / (r_i + R_{\text{eq}}) = 0.97 \text{ A}$ ,  $P = R_{\text{eq}} i^2 = 6.87 \text{ W}$ .

**6.14**  $R_{\text{eq}} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 8 \Omega$ ,  $R_T = r_i + R_1 + R_{\text{eq}} + R = \mathcal{E} / i = 24 \Omega$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ;  
 $V_1 = R_1 i = 2 \text{ V}$ ,  $C_1 = 2 U_1 / V_1^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $V_2 = R_{\text{eq}} i = 4 \text{ V}$ ,  
 $C_2 = 2 U_2 / V_2^2 = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**6.15**  $R_T = R + R_{\text{eq}} = R + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{25}{3} \Omega$ ,  $i = \mathcal{E} / R_T = 3 \text{ A}$

$$(R_1 + R_2) i_1 = (R_3 + R_4) i_2, \quad i_1 + i_2 = i, \quad i_1 = 2 \text{ A}, \quad i_2 = 1 \text{ A}, \quad V_A - V_Q = R_2 i_1 = 8 \text{ V}, \\ V_B - V_Q = R_4 i_2 = 2 \text{ V}, \quad V_B - V_A = -6 \text{ V};$$

resistenza di scarica  $R_s = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 3.6 \Omega$ ,  $\tau = R_s C = 10.8 \mu\text{s}$ ,  
 $t = \tau \ln 10 = 24.9 \mu\text{s}$ .

**6.16** La carica avviene attraverso  $R_1 + R_2$  con  $V_C$  che passa da  $\mathcal{E}/3$  all'istante  $t_1$  a  $2\mathcal{E}/3$  all'istante  $t_2$ ;  $\tau_c = (R_1 + R_2) C = 100 \mu\text{s}$ ,  $t_c = t_2 - t_1 = \tau_c \ln 2 = 69.3 \mu\text{s}$ ; la scarica da  $2\mathcal{E}/3$  a  $\mathcal{E}/3$  avviene attraverso  $R_2$ ,  $\tau_s = R_2 C = 20 \mu\text{s}$ ,  $t_s = \tau_s \ln 2 = 13.9 \mu\text{s}$ ;  $T = t_c + t_s = 83.2 \mu\text{s}$ ,  $v = 1/T = 12.0 \text{ kHz}$ .

**7.1**  $\theta' = \theta = 30^\circ$ ;  $E_k = 6 \text{ MeV} = 9.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ,  $p = mv = \sqrt{2mE_k} = 5.67 \cdot 10^{-20} \text{ kg m/s}$ ,  
 $r = mv/qB = 0.354 \text{ m}$ ,  $y = 2r \sin \theta = 0.354 \text{ m}$ .

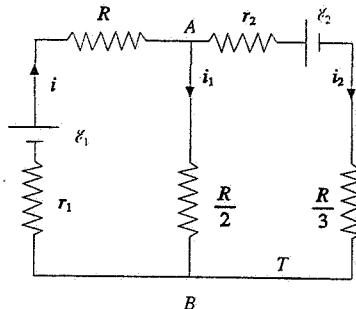
**7.2**  $E_k = 50 \text{ MeV} = 8.0 \cdot 10^{-12} \text{ J}$ ,  $mv = \sqrt{2mE_k} = 1.64 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$ ,  $r = mv/qB = 2.04 \text{ m}$ .  $\sin \alpha = L/r = 0.489$ ,  $\alpha = 29.3^\circ$ ,  $y = -r(1 - \cos \alpha) = -0.26 \text{ m}$ .

**7.3**  $mv^2/2 = qV$ ,  $mv/qB = r$ ,  $m/q = B^2 r^2/2V = 6.25 \cdot 10^{-8} \text{ kg/C}$ ,  $m = 10^{-26} \text{ kg} = 6$

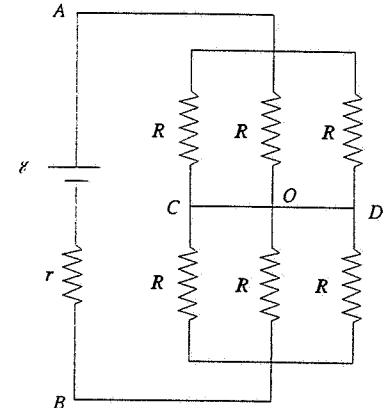
unità di massa atomica  $m_u$ ;  $r \cos \theta \approx r \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$  se  $\theta$  è piccolo.  $d/MN =$

$$\frac{2r - 2r \cos \theta}{2r} = \frac{\theta^2}{2} = 10^{-3}, \quad \theta = 0.0447 \text{ rad} = 2.56^\circ. \quad \text{Si tratta di un esempio di focalizzazione magnetica.}$$

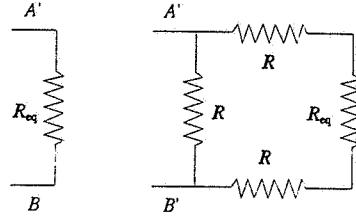
**7.4**  $q/m = e/7 m_u = 1.38 \cdot 10^7 \text{ C/kg}$ ;  $v = E_v/B_r = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ ;  $\omega = qB/m$ ,  $T = 2\pi m/qB = 1/N = 6.28 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ ,  $B = 2\pi m/qT = 0.73 \text{ T}$ ;  $d = v \cos \theta t$ ,  $\cos \theta = d/vt = 0.5$ ,  $\theta = 60^\circ$ ;  $r = mv \sin \theta / qB = 17.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .



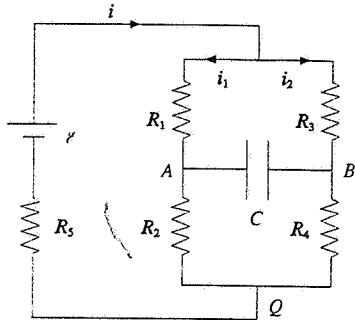
Soluzione 6.11



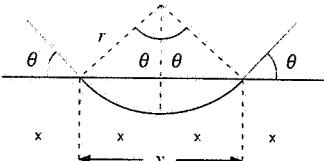
Soluzione 6.12



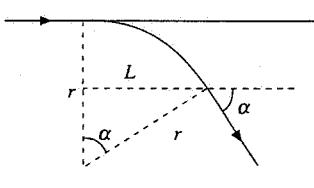
Soluzione 6.13



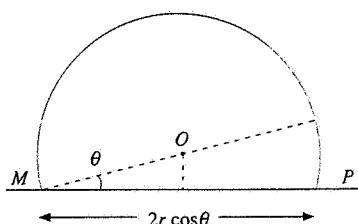
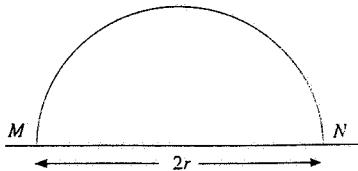
Soluzione 6.15



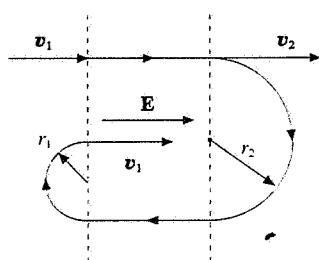
Soluzione 7.1



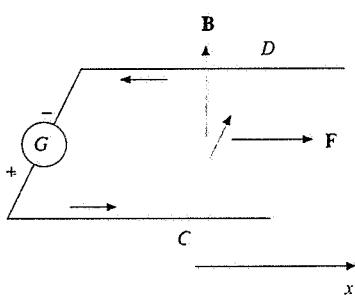
Soluzione 7.2



Soluzione 7.3



Soluzione 7.7



Soluzione 7.10

- 7.5  $v_x = v \sin \theta \approx v\theta, v_z = v \cos \theta \approx v(1 - \theta^2/2) \approx v = \sqrt{2eV/m}, r = mv \sin \theta / eB \approx mv\theta / eB$ , passo dell'elica  $h = v_z T = 2\pi v_z / \omega = 2\pi v / m / eB$ : se  $\theta$  è piccolo le traiettorie elicoidali hanno raggi diversi, ma passi eguali; da  $L = nh$  con  $n$  intero si ha

$$B = \frac{2\pi m v}{eh} = \frac{n \pi}{L} \sqrt{\frac{8mV}{e}} = n 5.8 \cdot 10^{-2} \text{ T. Le traiettorie si avvitano intorno alle linee del campo magnetico e non divergono.}$$

- 7.6 Lungo l'asse  $z$  moto uniformemente accelerato con equazione  $m dv_z / dt = -qE$ ,  $v_z = v_0 \cos \theta - \frac{qE}{m} t, z = v_0 \cos \theta t - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$ ; ortogonalmente all'asse  $z$   $m \frac{dv_{\perp}}{dt} = q \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$ , moto circolare uniforme,  $r = mv \sin \theta / qB, \omega = qB / m, T = 2\pi/\omega$ .

Il passo dell'elica non è costante. Numericamente  $r = 0.26 \text{ m}, \omega = 9.58 \cdot 10^6 \text{ rad/s}, T = 6.56 \cdot 10^{-7} \text{ s}, z_1 = 0.78 \text{ m}, z_0 = mv_0^2 \cos^2 \theta / 2qE = 0.98 \text{ m}$ .

- 7.7  $t = 2t_{1,2} + \frac{2\pi m}{qB}, t_{1,2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}, v_1 + v_2 = \frac{2d}{t_{1,2}} = 4 \cdot 10^6 \text{ m/s};$

$$h = 2(r_2 - r_1) = \frac{2m}{qB}(v_2 - v_1), v_2 - v_1 = \frac{qBh}{2m} = 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}, v_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ m/s},$$

$$v_1 = 1 \cdot 10^6 \text{ m/s}, V = \frac{m}{2q}(v_2^2 - v_1^2) = 4.18 \cdot 10^4 \text{ V.}$$

- 7.8  $v_{\max} = qBR/m = 4.63 \cdot 10^7 \text{ m/s} (\beta_{\max} = v_{\max} / c = 0.1545), E_{k,\max} = 1.25 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 77.8 \text{ MeV}; t = \pi R^2 B / 2V, V = \pi R^2 B / 2t = 10^5 \text{ V}, N = E_{k,\max} / 2qV = 390 \text{ giri}; v = qB / 2\pi m = 9.21 \text{ MHz}. Il fattore relativistico è } \gamma_{\max} = 1/\sqrt{1 - \beta_{\max}^2} = 1.012 \text{ e } \Delta v / v = (1 - \gamma) / \gamma = -0.012 = -1.2\%.$

- 7.9  $E_H = \epsilon_H / \sqrt{\sum} = 4.24 \cdot 10^{-4} \text{ V/m}, j = i / \Sigma = 5 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2, n = jB / e, E_H = 5.9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}; v_d = j / ne = 0.53 \text{ mm/s}, E = j / \sigma = 8.1 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}, E / E_H = 191$ .

- 7.10  $\mathbf{F} = i \int_C^D ds \times \mathbf{B} = i \mathbf{CD} \times \mathbf{B} = iB d\mathbf{u}_x, v = iB dt_1 / m = 10 \text{ m/s}, x = iB d t_1^2 / 2m = 0.5 \text{ m.}$

- 7.11  $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 10^{-3} \text{ Am}^2, i = m / a^2 = 0.4 \text{ A}; B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = 0.39 \text{ T};$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = m_x B_z \mathbf{u}_x - m_x B_z \mathbf{u}_y - m_y B_x \mathbf{u}_z, M = \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) B_z^2 + m_y^2 B_x^2} = 0.36 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}; \text{ in modulo } M = m B \sin \alpha, \sin \alpha = M / m B = 0.923, \alpha = 67.4^\circ; U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m_x B_z = -1.5 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

- 7.12  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{SP} + \mathbf{F}_{PQ} + \mathbf{F}_{QR} + \mathbf{F}_{RS} = 0 - \frac{i \alpha a^2}{2} \mathbf{u}_y + i \alpha a^2 \mathbf{u}_x + \frac{i \alpha a^2}{2} \mathbf{u}_y = i \alpha a^2 \mathbf{u}_x,$

in modulo  $F = 0.04 \text{ N}$ , diversa da zero perché  $\mathbf{B}$  non è uniforme, tende a spostare la spira in modo che il flusso magnetico aumenti:

$$U_p = - \int_{\Sigma} d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = - \int_0^a i a dx \mathbf{u}_z \cdot \alpha x \mathbf{u}_z = -i \alpha a \int_0^a x dx = -\frac{-i \alpha a^3}{2} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

- 7.13  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = i a b B \cos \theta \mathbf{u}_x, \mathbf{M}_{\text{peso}} = -2\delta(a+b) \frac{b}{2} g \sin \theta \mathbf{u}_x$ , in equilibrio

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\text{peso}} = 0, \quad i = \frac{\delta g}{B} \frac{a+b}{a} \tan \theta = 2.12 \text{ A};$$

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta = i a b B \int_0^{30^\circ} \cos \theta d\theta = i a b B \sin 30^\circ = 4.24 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

8.1  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{PQ} + \mathbf{F}_{RS} = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y (y+a)} \mathbf{u}_y$ , repulsiva (se la

spira si allontana il flusso di  $\mathbf{B}$  diventa meno negativo, cioè aumenta); per  $y \gg a$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y^2} \mathbf{u}_y; \text{ dato che } m = -N i_b a^2 \text{ e } B = \mu_0 i / 2\pi y, \text{ si vede che } F = m dB/dy.$$

$$W_1 = \int_{y_1}^{y_2} F dy = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y(y+a)} = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \ln \frac{y_2(y_1+a)}{y_1(y_2+a)} = 3.24 \cdot 10^{-6} \text{ J};$$

$$W_2 = -\Delta U_p = 2mB(y_3) = 2Ni_b a^2 \frac{\mu_0 i}{2\pi y_3} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ J}, \text{ positivo perché } \mathbf{m} \text{ si porta parallelo e concorde a } \mathbf{B}.$$

8.2  $\mathbf{B} = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cos \alpha \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 i a}{\pi(a^2+z^2)} \mathbf{u}_z;$

$$\frac{1}{2} m_g v_0^2 - \frac{m \mu_0 i}{\pi a} = -\frac{m \mu_0 i a}{\pi(a^2+z^2)}, \quad z = 2 \text{ cm.}$$

8.3  $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i z}{\pi(a^2+z^2)} \mathbf{u}_y; F = m \frac{dB}{dz} = 0 \text{ per } z = a = 2 \text{ cm, in questo punto il modulo di } B(z) \text{ è massimo.}$

8.4  $\mathbf{B}_C = 0; \text{ dal problema 8.3 } \mathbf{B}_P = -\frac{\mu_0 i \sqrt{3}}{4\pi a} \mathbf{u}_y \text{ (infatti } z = a\sqrt{3} \text{ ),}$

$$\mathbf{F} = i \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}_P = -\frac{\mu_0 i^2 \sqrt{3}}{4\pi a} \mathbf{u}_z, \quad F = 2.31 \cdot 10^{-4} \text{ N/m.}$$

8.5  $\mathbf{B}_C = \frac{2\mu_0 i}{\pi a} \mathbf{u}_z, \quad B_C = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \quad \mathbf{B}_P = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \mathbf{u}_y + \frac{3\mu_0 i}{4\pi a} \mathbf{u}_z = (1.5 \cdot 10^{-5} \mathbf{u}_y + 4.5 \cdot 10^{-5} \mathbf{u}_z) \text{ T}; \quad \mathbf{F} = -i \mathbf{u}_x \times \mathbf{B}_P = (1.35 \cdot 10^{-3} \mathbf{u}_y - 4.5 \cdot 10^{-4} \mathbf{u}_z) \text{ N/m}, \quad F = 1.42 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}, \quad \alpha = 18.4^\circ.$

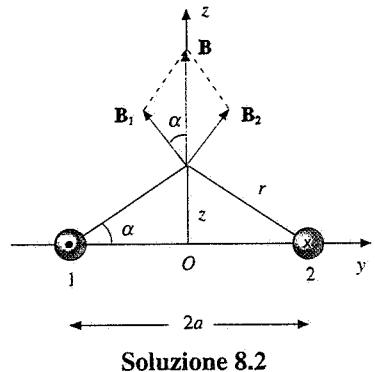
8.6 caso 1  $\mathbf{B}_O = \frac{\mu_0 i}{4b} \mathbf{u}_x - \frac{\mu_0 i}{4a} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_x, \quad B_O = -2.1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

(i tratti rettilinei danno contributo nullo);

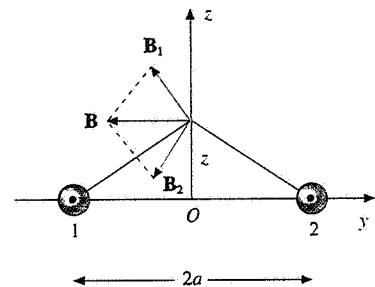
$$\mathbf{m} = i \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) \mathbf{u}_x, \quad m = 0.39 \text{ Am}^2$$

caso 2  $\mathbf{B}_O = \frac{\mu_0 i}{4} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_x, \quad B_O = 10.5 \cdot 10^{-5} \text{ T},$

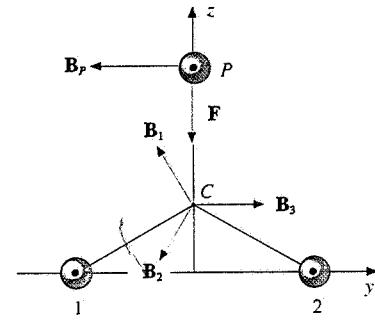
$$\mathbf{m} = i \frac{\pi}{2} (b^2 + a^2) \mathbf{u}_x, \quad m = 1.02 \text{ Am}^2.$$



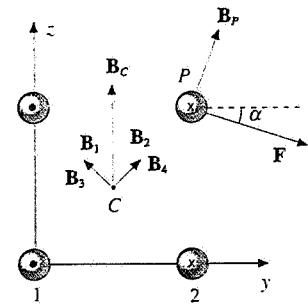
Soluzione 8.2



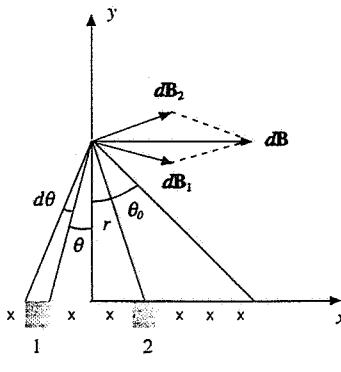
Soluzione 8.3



Soluzione 8.4



Soluzione 8.5



Soluzione 8.7

8.7  $di = j h dx$ ,  $d\mathbf{B} = 2 \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \cos\theta \mathbf{u}_x$  (problema 8.2), dalla figura risulta

$$dx \cos\theta = r d\theta, \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} d\theta \mathbf{u}_x,$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{\theta_0} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \theta_0 \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{y} \mathbf{u}_x;$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -\frac{m \mu_0 j h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{y_0} \mathbf{u}_z, \quad M = 2.87 \cdot 10^{-4} \text{ Nm};$$

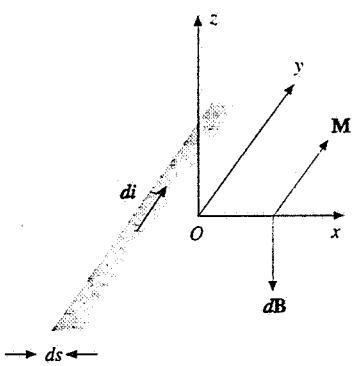
$$a \rightarrow \infty, \quad \theta_0 \rightarrow \pi/2, \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mu_0 j h}{2} \mathbf{u}_x; \quad a \ll y, \quad \theta_0 = \frac{a}{y}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \mathbf{u}_x.$$

8.8  $di = i ds / h$ ,  $d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)} \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \frac{ds}{x+s} \mathbf{u}_z,$

$$\mathbf{B} = \int_0^h d\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \ln \frac{x+h}{x} \mathbf{u}_z, \quad \text{per } h \ll x \quad \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi h} \frac{h}{x} \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x} \mathbf{u}_z, \quad \text{campo di un filo indefinito};$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = m \mathbf{u}_x \times (-B \mathbf{u}_z) = m B \mathbf{u}_y, \quad M = \frac{m \mu_0 i}{2\pi h} \ln 3 = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}.$$



Soluzione 8.8

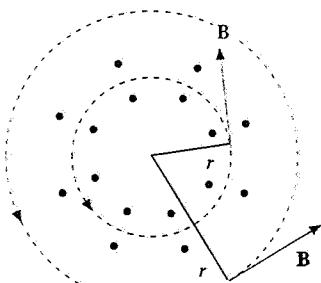
8.9  $B(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[ \frac{1}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right]; \quad B_0 = B(0) = \frac{8\mu_0 i}{5\sqrt{5} R}.$

Sviluppando in serie nell'intorno di  $x = 0$

$$B(x) = B_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{4d^2 - R^2}{(R^2 + d^2)} x^2 - \frac{15}{8} \frac{8d^4 - 12d^2R^2 + R^4}{(R^2 + d^2)^4} x^4 + \dots \right];$$

$$\text{ponendo } d = R/2, \quad B(x) = B_0 \left[ 1 - \frac{144}{125} (x/R)^4 + \dots \right];$$

$$\frac{B_0 - B(x_0)}{B_0} = 1.15 (x_0/R)^4 = 0.01, \quad x_0 = 0.305 R.$$



Soluzione 8.11

8.10  $\Gamma_1(\mathbf{B}) = -\frac{3}{8} \mu_0 \left(i_1 - \frac{i_2}{2}\right) = 0, \quad \Gamma_2(\mathbf{B}) = -\frac{\mu_0}{4} \left(\frac{13}{4} i_1 - i_2\right) = -20\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm},$

$$i_1 = 16 \text{ A}, \quad i_2 = 32 \text{ A}.$$

8.11 Si applica il teorema di Ampère ad una circonferenza di raggio  $r$ :

$$r \leq a \quad B(r) = 0, \quad a \leq r \leq b \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r} = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{r^2 - a^2}{r},$$

$$r \geq b \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}; \quad \text{con } a = 0 \quad B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$

- 8.12** Si ricorre al principio di sovrapposizione, immaginando che tutta la sezione sia interessata da una densità di corrente  $j_+$  e solo la cavità da una densità di corrente  $j_- = -j_+$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 j r_+}{2} (-\sin \alpha_+ \mathbf{u}_x + \cos \alpha_+ \mathbf{u}_y) + \frac{\mu_0 j r_-}{2} (\sin \alpha_- \mathbf{u}_x + \cos \alpha_- \mathbf{u}_y) = \\ &= \frac{\mu_0 j}{2} (-r_+ \sin \alpha_+ + r_- \sin \alpha_-) \mathbf{u}_x + \frac{\mu_0 j}{2} (r_+ \cos \alpha_+ + r_- \cos \alpha_-) \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 j d}{2} \mathbf{u}_y = \\ &= \frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2 - b^2)} \mathbf{u}_y, \quad B = 1.02 \cdot 10^{-4} \text{ T}; \end{aligned}$$

$$j = i / \pi(a^2 - b^2) = 1.63 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2, \quad i_+ = j \pi a^2 = 20.46 \text{ A}, \quad i_- = j \pi b^2 = 0.46 \text{ A}.$$

$$U_m = \frac{\mu_0}{16\pi} (i_+^2 - i_-^2) = 1.05 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}, \quad L = 2 U_m / i^2 = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ H/m}.$$

- 8.13**  $i = \Gamma(\mathbf{B}) / \mu_0 = 8 \text{ A}, \quad j = i / \pi(a^2 - b^2) = 6.67 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2;$   
 $i_+ = j \pi a^2 = 8.38 \text{ A}, \quad i_- = j \pi b^2 = 0.19 \text{ A},$

$$\text{in } P_1 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_+}{h} - \frac{2i_- h}{h^2 + d^2} \right) \mathbf{u}_y = B_1 \mathbf{u}_y, \quad B_1 = 0.644 \cdot 10^{-4} \text{ T},$$

$$\text{in } P_2 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( -\frac{i_+}{h} + \frac{i_-}{h-d} + \frac{i_-}{h+d} \right) \mathbf{u}_x = B_2 \mathbf{u}_x, \quad B_2 = -0.634 \cdot 10^{-4} \text{ T};$$

$$\text{per } h \gg d \text{ in modulo } B_1 = B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_+ - 2i_-}{h} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}.$$

- 9.1**  $m = M_0 / B = 0.1 \text{ Am}^2, \quad M = m / \Sigma d = 7.96 \cdot 10^5 \text{ A/m}; \quad i_m = M d = 3.18 \cdot 10^4 \text{ A} \text{ (esclusivamente superficiale); } n = \rho N_A / A = 8.52 \cdot 10^{28} \text{ atomi/m}^3, \quad \langle m \rangle = M / n = 9.34 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2.$

- 9.2**  $B_C = \mu_0 M, \quad M = 2.5 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad H_C = 0; \quad B_D d = \mu_0 i_m = \mu_0 M (d-h), \quad B_D = \mu_0 M (1 - h/d) = 0.306 \text{ T}; \quad H_0 = B_D / \mu_0 = 2.44 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad H_D = -H_0 h / (d-h) = -6.26 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad p = B_D^2 / 2 \mu_0 = 0.37 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$

- 9.3**  $i = \Gamma(\mathbf{B}) / 2 \mu_0 = 25 \text{ A}; \quad \Delta U_m = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} (\kappa_m - 1) \ln \frac{b}{a}, \quad \kappa_m = 40.9;$

$$H = i / 2 \pi r, \quad M_1 = \chi_m i / 2\pi a = 7.94 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad M_2 = M_1 a / b = 3.97 \cdot 10^3 \text{ A/m}.$$

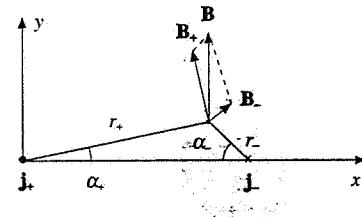
- 9.4**  $B_1 = \mu_0 H, \quad B_2 = \mu_0 (H + M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H, \quad \chi_m = \frac{B_2 - B_1}{B_1} = 58.8,$   
 $M = (B_2 - B_1) / \mu_0 = 5.9 \cdot 10^4 \text{ A/m}.$

- 9.5**  $H = B_1 / \mu_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad i = Hd / N = 2 \text{ A}; \quad \Gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 (M d + Ni), \quad M = (\Gamma / \mu_0 - Ni) / d = 9.94 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad \chi_m = M / H = 4.97; \quad U_m = 1/2 \mu_0 \kappa_m H^2 \Sigma d = 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$

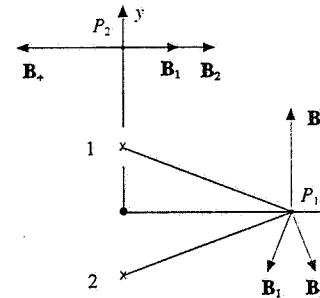
- 9.6**  $B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} = \mu_0 (-65 H + 2.5 \cdot 10^5), \quad B = \mu_0 \kappa_m H = \mu_0 60 H,$

$$B = 0.15 \text{ T}, \quad H = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad M = \chi_m H = 1.18 \cdot 10^5 \text{ A/m};$$

$$H_0 = B / \mu_0 = 1.2 \cdot 10^5 \text{ A/m}; \quad i_m = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = M (d-h) = 1.53 \cdot 10^5 \text{ A};$$



Soluzione 8.12



Soluzione 8.13

$$U_m = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + \chi_m h) = 3.73 \text{ J}, \quad L = 2 U_m / i^2 = 7.46 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

9.7  $U_1 = \frac{B^2 \Sigma d}{2\mu_0 \kappa_m}, \quad B = \mu_0 \kappa_m \frac{Ni_1}{d}, \quad U_2 = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + \chi_m h), \quad \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} (d - h) +$   
 $\frac{B}{\mu_0} h = Ni_2, \quad \Delta U = \frac{B^2 \Sigma h \chi_m}{2\mu_0 \kappa_m}, \quad \Delta i = \frac{B h \chi_m}{\mu_0 \kappa_m N}, \quad B = \frac{2}{N \Sigma} \frac{\Delta U}{\Delta i} = 0.8 \text{ T};$   
 $\frac{\chi_m}{\kappa_m} = \frac{\mu_0 N \Delta i}{B h} = \frac{2\mu_0 \Delta U}{B^2 \Sigma h} = 0.987, \quad \chi_m = 75.9; \quad M = \chi_m \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = 1.18 \cdot 10^5 \text{ A/m.}$

9.8  $\alpha = \mu_0 \kappa_m, \quad \kappa_m = 100, \quad \chi_m = 99; \quad H(d - 2h) + \kappa_m H 2h = Ni, \quad H = 3 \cdot 10^3 \text{ A/m},$

$$M = \chi_m H = 2.97 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad B_C = \mu_0 \left( H + \frac{M}{3} \right) = 0.128 \text{ T};$$

$$B = \mu_0 \kappa_m H = 0.377 \text{ T}, \quad F = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma \right) = 142 \text{ N};$$

$$H = Ni / d = 6.75 \cdot 10^3 \text{ A/m}, \quad M' = \chi_m H' = 6.68 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \quad B'_C = 0.288 \text{ T};$$

$$B' = \mu_0 \kappa_m H' = 0.848 \text{ T}, \quad U = \frac{B^2 \Sigma}{2\mu_0 \kappa_m} (d + 2\chi_m h) = 0.64 \text{ J},$$

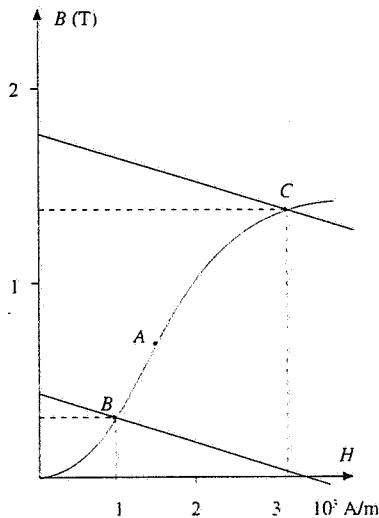
$$U' = \frac{B'^2 \Sigma d'}{2\mu_0 \kappa_m} = 1.44 \text{ J}, \quad W_{\text{gen}} = 2\Delta U = 1.6 \text{ J.}$$

9.9 Dal grafico se  $B_A = 0.7 \text{ T}$ ,  $H_A = 1500 \text{ A/m}$ ,  $H_0 = B_A / \mu_0 = 5.57 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ ,  $Ni = H_0 h + H_A (d - h) = 7070 \text{ A}$ ,  $i = 141.4 \text{ A}$ ;  $i = H_A d / N = 30.3 \text{ A}$ ;

$$B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} = -4\pi \cdot 10^{-5} H + 2\pi \cdot 10^{-3} i; \quad \text{se } i = 70.7 \text{ A si trova}$$

$B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 0.444$  e dall'intersezione con la curva di prima magnetizzazione  $B_B \approx 0.32 \text{ T}$ ,  $H_B \approx 10^3 \text{ A/m}$ , se  $i = 282.8 \text{ A}$   $B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 1.777$ ,

$$B_C \approx 1.38 \text{ T}, \quad H_C \approx 3.2 \cdot 10^3 \text{ A/m}; \quad F = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma, \quad F_B = 40.7 \text{ N}, \quad F_C = 757.7 \text{ N.}$$



9.10 Dal circuito magnetico  $B = -\mu_0 \frac{d-h}{h} H = -4\pi \cdot 10^{-6} H$ , dal ciclo di isteresi  $B = -0.8 + 0.8 \cdot 10^{-4} H$  (tratto a destra),  $B = 0.8 + 0.8 \cdot 10^{-4} H$  (tratto a sinistra); risolvendo il sistema si ha  $H = 8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ,  $B = -0.11 \text{ T}$  oppure  $H = -8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ,  $B = 0.11 \text{ T}$ ;

$$H_0 = -\frac{d-h}{h} H = -10 \text{ H} = \mp 8.64 \cdot 10^4 \text{ A/m}; \quad \frac{1}{2} B H_0 \Sigma h / \frac{1}{2} B H \Sigma (d-h) = 1.$$

### Soluzione 9.9

9.11 L'area del ciclo è  $3.2 \cdot 10^3 \text{ TA/m} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3$ , la potenza assorbita per unità di volume è  $P = 3.2 \cdot 10^3 \cdot 50 = 1.6 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$ , eguale al calore assorbito per unità di volume e per secondo  $\rho c \Delta T$ ,  $\Delta T = 0.05 \text{ K/s} = 0.05^\circ \text{ C/s}$ .

9.12  $W = 2m_0 B = 3/2 k_B T, \quad T = 4 m_0 B / 3 k_B = 2.41 \text{ K}$ ; dalla figura 9.57 con  $M / M_{\text{sat}} = 0.5$ ,  $a \approx 1.8$ , con  $M / M_{\text{sat}} = 0.8$ ,  $a \approx 4.6$ : dato che  $a = m_0 B / k_B T$ , nei due casi  $T \approx 1 \text{ K}$  e  $T \approx 0.4 \text{ K}$ .

9.13 anello  $i = q / T = q\omega / 2\pi$ ,  $\mathbf{m} = q \frac{\omega}{2\pi} \pi R^2 = \frac{1}{2} qR^2 \omega$ ,  $\mathbf{L} = MR^2 \omega$ ,

$$m / L = q / 2M, g = 1$$

disco  $d\mathbf{m} = dq \frac{r^2}{2} \omega$ ,  $dq = 2\pi \sigma r dr$ ,  $\mathbf{m} = \int_0^R d\mathbf{m} = \frac{\pi \sigma R^4}{4} \omega = \frac{q R^2}{4} \omega$ ,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} M R^2 \omega, m / L = q / 2M, g = 1$$

in entrambi i casi  $\Omega_p = g B = qB / 2M$ .

9.14  $di = dq / T = \lambda ds \omega / 2\pi$ ,  $d\mathbf{m} = \frac{\lambda ds}{2\pi} \pi s^2 \omega$ ,

$$\mathbf{m} = \int_{-a/2}^{a/2} d\mathbf{m} = \frac{\lambda a^3}{24} \omega = \frac{q a^2}{24} \omega, \mathbf{L} = \frac{1}{12} M a^2 \omega, m / L = q / 2M, g = 1.$$

10.1  $\mathcal{E}_1 = \int_0^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^b \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i v b}{2\pi r}$ ; con riferimento alla figura è positivo l'estremo più alto.

$$\mathcal{E}_2 = \int_r^{r+b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^{r+b} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{b}{r} \right);$$

il segno indica che è positivo l'estremo più vicino al filo. Si arriva ai risultati anche ragionando col flusso tagliato.

10.2  $\mathcal{E} = v b B$ ,  $i = v b B / R$ ,  $F = i b B = \frac{b^2 B^2}{R} v$  opposta al moto, che risulta esponenzialmente smorzato con costante di tempo  $\tau = m R / b^2 B^2 = 10$  s,  $v_1 = v_0 e^{-t_1 / \tau} = 3 \cdot 10^{-2}$  m/s;

$$W = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ J};$$

$$v(x) = v_0 - \frac{x}{\tau}, \text{ per } x = b \quad v_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s, resta costante;}$$

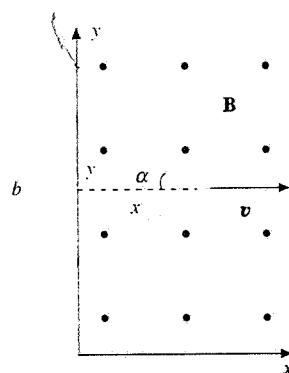
$$v_2 = v_0 e^{-t_2 / \tau}, t_2 = 6.9 \text{ s (e si verifica che è maggiore di } t_1\text{)}; \text{ si applica la legge di Faraday, } q = \frac{B b^2}{R} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ C.}$$

10.3  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2B v y = 2B v x \operatorname{tg} \alpha$ , funzione di  $x$ ,  $i = \mathcal{E} / R$ ,  $F = 4 B^2 \operatorname{tg}^2 \alpha v x^2 / R$  opposta al moto.

$$v(x) = v_0 - \frac{4B^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3m R} x^3 = 5 - 56.89 x^3 \text{ m/s;}$$

$$x_{\max} = b \cos \alpha = 0.173 \text{ m, } v_1 = 4.71 \text{ m/s;}$$

$$q = \frac{\Delta \Phi}{R} = \frac{B \Sigma}{R} = \frac{B}{R} \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = 2.78 \cdot 10^{-2} \text{ C.}$$



Soluzione 10.3

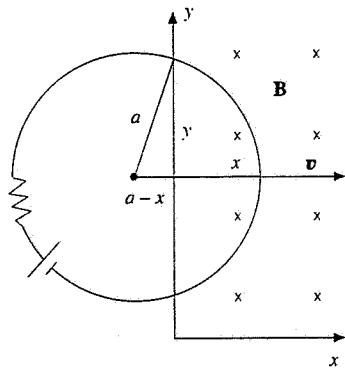
10.4  $\xi_i(x) = v b \alpha x$ ,  $i(x) = v b \alpha x / R$ ,  $F(x) = b^2 \alpha^2 x^2 v / R$  opposta al moto;

$$v(x) = v_0 - \frac{b^2 \alpha^2}{3 m R} x^3 = 5 - 2.16 \cdot 10^3 x^3, \text{ per } x = b \quad v = 3.43 \text{ m/s; si noti che con la}$$

spira quadrata e campo lineare in  $x$  si ha lo stesso andamento che con la spira triangolare e campo costante (problema 10.3), in quanto la variazione di flusso è la stessa;

$$q = \frac{1}{R} b \int_0^b \alpha x dx = \frac{\alpha b^3}{2R} = 0.73 \text{ C.}$$

10.5  $\xi_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -2B v y = -2B v \sqrt{x(2a-x)}$ , il segno risulta opposto a quello



Soluzione 10.5

$$\text{di } \xi, i(x) = \frac{\xi + \xi_i(x)}{R} = \frac{1}{R} (\xi - 2B v \sqrt{x(2a-x)});$$

$$F(x) = 2 i B y = \frac{2B}{R} \left[ \xi - 2B v \sqrt{x(2a-x)} \right] \sqrt{x(2a-x)}, \text{ si annulla per } x = 0.2 \text{ m};$$

$$t = \frac{2a}{v} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, q = \frac{\xi}{R} t - \frac{B \pi a^2}{R} = 4.3 \cdot 10^{-4} \text{ C};$$

$\xi$  cresce fino ad egualare  $\xi$  per  $x = 0.2 \text{ m}$ , poi decresce fino a zero.

10.6  $\frac{\xi}{R} B b \cos \alpha = mg \sin \alpha$ ,  $\xi = \frac{\rho \delta b g}{B} \tan \alpha = 0.226 \text{ V}$ ; velocità limite quando la forza magnetica e forza peso sono eguali in modulo,

$$\frac{B^2 b^2 \cos^2 \alpha}{R} v_0 = mg \sin \alpha, v_0 = \frac{\rho \delta g}{B^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4.36 \text{ m/s};$$

$$P = mg \sin \alpha v_0 = \delta \sum b g \sin \alpha v_0 = 1.28 \text{ W.}$$

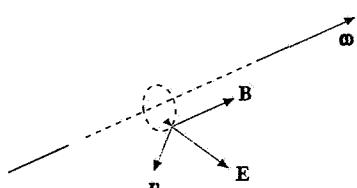
$$10.7 \quad \xi_i = v b B, \frac{dv}{dt} = g - \frac{i B b}{m} = g - \frac{B^2 b^2}{m R} v,$$

$$v(t) = \frac{mg R}{B^2 b^2} (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R}) = 9.8 (1 - e^{-t}) \text{ m/s, al limite } v_0 = \frac{mg R}{B^2 b^2} = 9.8 \text{ m/s;}$$

$$i(t) = \frac{mg}{B b} (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R}) = 0.49 (1 - e^{-t}) \text{ A, al limite } i_0 = \frac{mg}{B b} = 0.49 \text{ A;}$$

$$W_x = mg x = R i_0^2 t = \frac{R i_0^2 x}{v_0} = 9.8 \cdot 10^{-2} x \text{ J, per } x = 10^{-2} \text{ m } W_1 = 9.8 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

10.8  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \omega r B \mathbf{u}_r$ , diretto verso l'esterno se  $\mathbf{B}$  è concorde a  $\omega$ ,  $\mathbf{P}(r) = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) \omega r B \mathbf{u}_r$ ,  $\sigma_p = \epsilon_0 (\kappa_e - 1) \omega R B = 4.43 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2$ ;  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon_0 (\kappa_e - 1) \omega B \nabla \cdot \mathbf{r} = -2 \epsilon_0 (\kappa_e - 1) \omega B = -1.77 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^3$ ;  $q_\sigma = \sigma 2 \pi R a = 2.78 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ ,  $q_p = \rho_p \pi R^2 a = -2.78 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ ,  $q_\sigma + q_p = 0$ . Si noti che il campo  $\mathbf{E}$  non è un campo elettrostatico.



Soluzione 10.8

10.9  $\xi_i = B a^2 \omega / 2$ ,  $i = \xi / R$ ,  $dM = i B r dr$ ,  $M = B^2 a^4 \omega / 4 R$ , che si oppone al moto: bisogna quindi applicare un momento esterno eguale e contrario, con  $\omega = 2 \pi v = 188.5 \text{ rad/s}$   $M = 2.68 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$ ;  $P = M \omega = 5.1 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ ;  $i = \sqrt{P/R} = 0.80 \text{ A}$ ,  $q = 60 i = 48 \text{ C}$ .

**10.10** Moto smorzato esponenzialmente con costante di tempo  $\tau = \frac{4 R I}{B^2 a^4}$ ,

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\eta/\tau} = \omega_0/2, \quad \tau = 28.9 \text{ s}, \quad B = 0.8 \text{ T}; \quad W = \frac{1}{2} I (\omega_0^2 - \omega_1^2),$$

$$\omega_0 = 200 \text{ rad/s}; \quad \omega(\theta) = \omega_0 - \frac{\theta}{\tau} = \omega_1 = \frac{\omega_0}{2}, \quad \theta = 2890 \text{ rad}, \quad N = 460 \text{ giri};$$

$$q = \frac{1}{R} B \left( \frac{1}{2} a^2 \theta \right) = 125.2 \text{ C.}$$

**10.11** Sia in equilibrio statico che in equilibrio dinamico alla velocità angolare  $\omega_0$  il momento della forza applicata è eguale ed opposto al momento della forza peso,  $i B a^2 / 2 = m g a$ ,  $i = 2 m g / B a = 19.6 \text{ A}$ ; segue  $2 \xi = \xi + \xi_i = \xi + B a^2 \omega_0 / 2 = 0.2 \text{ V}$ ;

$$R = 2 \xi / i = 2 \cdot 10^{-2} \Omega; \quad q = i \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.62 \text{ C.}$$

**10.12**  $\xi_i = -B \sum \omega \sin \omega t = -0.24 \sin \omega t$ ,  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ;

$$i = \frac{\xi(t) + \xi_i}{R} = \frac{0.2}{R} = 2 \text{ A.}$$

**10.13**  $\Phi(t) = N B \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t + N B \frac{\pi a^2}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right)$ ,

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right), \quad \xi_{\max} = \omega N B \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} = 22.2 \text{ V};$$

$$P_m = \frac{\xi_0^2}{2R} = \frac{\xi_{\text{eff}}^2}{R} = 24.7 \text{ W.}$$

**10.14**  $\xi_i = N \sum B \omega \sin \omega t = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt} = C N \sum B \omega^2 \cos \omega t,$

$$P = \xi_i i = C (N \sum B)^2 \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{C}{2} (N \sum B)^2 \omega^3 \sin 2 \omega t = 3.2 \sin 160 t \text{ W};$$

$$M = \frac{P}{\omega} = 0.04 \sin 160 t \text{ Nm}; \quad P_m = 0, \quad M_m = 0.$$

**10.15**  $M(x) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi r^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{9.25 \cdot 10^{-7}}{(x^2 + 6.25 \cdot 10^{-2})^{3/2}} \text{ H};$

$$\xi(x) = -\frac{d\Phi}{dt} = -i \frac{dM}{dt} = 3\mu_0 i N_1 N_2 R^2 \pi r^2 \frac{x v}{(x^2 + R^2)^{5/2}} = \frac{1.11 \cdot 10^{-4} x}{(x^2 + 6.25 \cdot 10^{-2})^{5/2}} \text{ V}$$

**10.16**  $\Phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{r} \right), \quad \xi_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i_0 b}{2\pi \tau} e^{-t/\tau} \ln \left( 1 + \frac{a}{r} \right) = 4.4 \cdot 10^{-8} e^{-t/5} \text{ V};$

$$\text{nella spira } I = \xi_i / R = 2.2 \cdot 10^{-8} e^{-t/5} \text{ A}, \quad q = \int_0^\infty I dt = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$$

10.17  $M = \mu_0 \kappa_m N n \Sigma = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $\Phi = M i$ ,  $\xi_i = -d\Phi/dt = M \alpha = 6.28 \cdot 10^{-5} \text{ V}$ ;  $I = \xi_i/R = 6.28 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $t = i_0/\alpha = 10^3 \text{ s}$ ,  $q = I t = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ .

10.18  $d\Phi(x) = \mu_0 M \pi r_1^2 n dx$ ,  $\xi_i = -d\Phi/dt = -\mu_0 M \pi r_1^2 n v = -0.49 \text{ V}$  (con i suoi effetti si oppone al moto);  $i = \xi_i/R = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ A}$ , costante durante il processo che dura  $t = b/v = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ ;  $q = i t = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ;  $W = R i^2 t = 9.6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ .

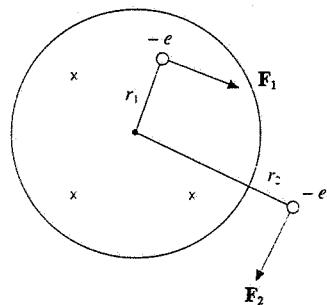
10.19  $F = (dU_m/dx)_{i=\text{cost}} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma = 50.2 \text{ N}$ , costante per tutto il tempo in cui la sbarretta è parzialmente inserita nel solenoide e attrattiva verso l'interno,  $F = 0$  quando la sbarretta è completamente inserita;  $m = \rho h \Sigma = 0.64 \text{ kg}$ ,  $a = F/m = 78.1 \text{ m/s}^2$ ,

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h-x_0)}{a}} = 6.2 \cdot 10^{-2} \text{ s}, v_1 = a t_1 = 4.84 \text{ m/s}, t_2 = (d-h)/v_1 = 8.3 \cdot 10^{-2} \text{ s},$$

$$t_0 = 4 t_1 + 2 t_2 = 0.41 \text{ s}.$$

10.20  $\frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma = m g$ ,  $i = 10 \text{ A}$ ;  $dW_{\text{gen}} = 2 dU_m = 2 \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m (ni)^2 \Sigma dx$ ,

$$P = R i^2 + dW_{\text{gen}}/dt = (R + \mu_0 \chi_m n^2 \Sigma v) i^2 = 2.76 \text{ kW}.$$



Soluzione 10.21

10.21  $0 \leq r \leq R$   $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} (0.1 t - 0.2)$ , forza sulla carica  $-e$

$$F_1 = \frac{e r_1}{2} (0.1 t_1 - 0.2) = 6.4 \cdot 10^{-22} \text{ N}, \text{ in senso orario nella figura}; R \leq r$$

$$E = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} = -\frac{R^2}{r} (0.1 t - 0.2), F_2 = \frac{e R^2}{2r_2} (0.1 t_1 - 0.2) = 5.7 \cdot 10^{-22} \text{ N},$$

sempre in senso orario;  $F = 0$  per  $t = 2 \text{ s}$ .

10.22 Nelle due maglie compaiono rispettivamente le f.e.m. indotte  $\xi_1 = \pi r_1^2 \alpha = 0.314 \text{ V}$ ,  $\xi_2 = \pi r_2^2 \alpha = 0.707 \text{ V}$ , che rappresentiamo in ciascuna maglia con quattro generatori equivalenti aventi i segni indicati e i valori  $\xi'_1 = \xi_1/4$ ,  $\xi'_2 = \xi_2/4$ . Le equazioni del circuito sono quindi:

$$\xi'_1 + \xi'_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2, \quad \xi'_2 + \xi'_1 = R_2 i_2 + R_3 i_3, \quad i_2 = i_1 + i_3,$$

$$i_1 = 0.025 \text{ A}, \quad i_2 = 0.144 \text{ A}, \quad i_3 = 0.089 \text{ A};$$

$$R_1 i_1 = \Delta V(R_1) + \xi'_1, \quad \Delta V(R_1) = R_1 i_1 - \xi'_1 = 0.072 \text{ V},$$

$$\Delta V(R_2) = R_2 i_2 - (\xi'_1 + \xi'_2) = 0.087 \text{ V}, \quad \Delta V(R_3) = R_3 i_3 - \xi'_2 = 0.268 \text{ V};$$

$$R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 = 3 \xi'_1 i_1 + 3 \xi'_2 i_3 + (\xi'_1 + \xi'_2) i_2 = 8.24 \cdot 10^{-2} \text{ W}.$$

10.23  $i_{s,0} = i_0 = 8.86 \mu\text{A} = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $j_{s,0} = i_{s,0}/\Sigma = 8.86 \cdot 10^{-5} \text{ A/m}^2$ ;  $[d\Phi(\mathbf{D})/dt]_{\text{max}} = i_{s,0} = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ A}$ ;  $[d\Phi(\mathbf{E})/dt]_{\text{max}} = i_{s,0}/\epsilon_0 = 10^6 \text{ Vm/s}$ ;

$$i_s = \frac{d\Phi(\mathbf{D})}{dt} = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\xi}{dt} = C \omega \xi_0 \cos \omega t, \quad i_{s,0} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{d} \omega \xi_0, \quad d = 2 \text{ mm};$$

$$R = \sqrt{\Sigma/\pi} = 0.178 \text{ m}, \quad 0 \leq r \leq R \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_s r}{2\pi R^2}, \quad B_{\text{max}} = 5.59 \cdot 10^{-11} r \text{ T},$$

$$R \leq r \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_s}{2\pi r}, \quad B_{\text{max}} = \frac{1.77 \cdot 10^{-12}}{r} \text{ T}.$$

11.1  $Z_1 = R + i \omega L = 100 + i 157 = 186.1 e^{j57.5^\circ}$ ,

$$Z_2 = R + \frac{1}{i \omega C} = 100 - i 31.8 = 104.9 e^{-i 17.6^\circ}$$

$$I_1 = \frac{314 e^{i 0^\circ}}{186.1 e^{i 57.5^\circ}} = 1.67 e^{-i 57.5^\circ} = 0.90 - i 1.41, \quad I_2 = \frac{314 e^{i 0^\circ}}{104.9 e^{-i 17.6^\circ}} = 2.96 e^{i 17.6^\circ} =$$

$2.82 + i 0.90$  (si tralascia  $e^{i \omega t}$ , le grandezze sono espresse in V, A,  $\Omega$ );  
 $I = I_1 + I_2 = 3.72 - i 0.51 = 3.75 e^{-i 7.8^\circ}$ ; alternativamente

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad I = \mathcal{E} / Z; \text{ la corrente totale ha il valore massimo } 3.75 \text{ A ed è sfasata}$$

rispetto a  $\mathcal{E}$  di  $7.8^\circ$  in ritardo;

$$V_A = i \omega L I_1 = 262.2 e^{i 32.5^\circ} = 221.4 + i 140.9,$$

$$V_B = \frac{1}{i \omega C} I_2 = 94.1 e^{-i 72.4^\circ} = 28.5 - i 89.7,$$

$V_A - V_B = 300.6 e^{i 50.1^\circ} = 192.9 + i 230.6$ : la d.d.p.  $V_A - V_B$  ha valore massimo 300.6 V ed è sfasata rispetto a  $\mathcal{E}$  di  $50.1^\circ$  in anticipo.

$$11.2 \quad \text{Impedenza totale } Z = i \omega L + \frac{i \omega L \frac{1}{i \omega C}}{i \omega L + \frac{1}{i \omega C}} = i \omega L \frac{2 - \omega^2 L C}{1 - \omega^2 L C},$$

$$\text{impedenza del parallelo } Z' = \frac{i \omega L}{1 - \omega^2 L C}, \quad V_C - V_D = \frac{V_A - V_B}{Z} Z' = \frac{V_A - V_B}{2 - \omega^2 L C}.$$

$$2 - \omega^2 L C = 1, \quad \omega^2 = 1 / L C.$$

$$11.3 \quad Z = R + i \omega L = \frac{(R + i \omega L) \frac{1}{i \omega C}}{R + i \omega L + \frac{1}{i \omega C}}; \text{ la parte immaginaria è}$$

$$\omega L - \frac{\frac{L}{C} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{R^2}{\omega C}}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{e si annulla se } \omega L = \frac{1}{\omega C};$$

$$\text{la parte reale è } R + \frac{\frac{L R}{C} - \frac{R}{\omega C} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \text{e in risonanza vale } R + \frac{L}{C R}.$$

$$11.4 \quad Z = \frac{R_C \frac{1}{i \omega C}}{R_C + \frac{1}{i \omega C}} + \frac{R_L i \omega L}{R_L + i \omega L}; \quad \text{Imm}(Z) = - \frac{\omega R_C^2 C}{1 + \omega^2 R_C^2 C^2} + \frac{\omega L R_L^2}{R_L^2 + \omega^2 L^2}.$$

si annulla per  $\omega^2 = \frac{R_L^2}{L C R_C^2} \frac{C R_C^2 - L}{C R_L^2 - L}$  : se  $R_C = R_L$   $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s.}$$

**11.5** Sfasamento nullo vuol dire  $\text{Im } (Z) = 0$  a  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ , deve essere

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} : I_R = \frac{2\varepsilon}{R + i\omega L}, V_R = \frac{2\varepsilon R}{R + i\omega L}, \text{ in modulo deve essere}$$

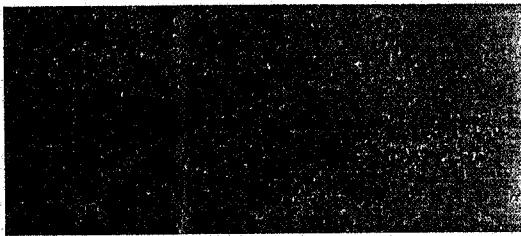
$$\text{eguale a } \varepsilon, L = \sqrt{3} \frac{R}{\omega} = 0.55 \text{ H}, C = 13.8 \mu\text{F}.$$

**11.6**  $I_R = \frac{2\varepsilon}{R + i\omega L} = 0.78 - i1.35 = 1.56 e^{-j60^\circ}; V_{\text{eff}} = 220 \text{ V}, I_{\text{eff}} = 1.1 \text{ A},$

$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi = 121 \text{ W}, Q = 209.6 \text{ VAR}, S = 242 \text{ VA} = 2P$ ; connettendo il condensatore si porta a zero  $\phi$ :  $Z_{\text{tot}} = 398 \text{ W}, I_{\text{tot}} = 2\varepsilon / Z_{\text{tot}} = 0.78 \text{ A}, I_{\text{eff}} = 0.55 \text{ A}, P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = 121 \text{ W}, Q = 0, S = P$ : su  $R$  viene spesa la stessa potenza.

**ONDE**

# Fenomeni ondulatori



## 12.1 Descrizione di un'onda. Equazione differenziale delle onde piane

La propagazione di una grandezza fisica tramite *onde* è uno dei fenomeni più caratteristici e importanti della Fisica. Abbiamo già incontrato alcuni esempi nel corso del primo volume, relativi alla propagazione di onde elastiche in una sbarra solida, in una corda tesa e in una colonna di gas, mentre un caso di onde legate a fenomeni elettromagnetici è stato trattato nel paragrafo 11.5.

Per comodità di consultazione i paragrafi dedicati alle onde nel primo volume sono riportati integralmente nel secondo paragrafo di questo capitolo e ne consigliamo una lettura attenta, in quanto vi sono esposte le prime nozioni fondamentali dei fenomeni ondulatori, cui faremo riferimento e che talvolta ripeteremo per maggior chiarezza, e vi sono ricavate molte formule necessarie per gli sviluppi successivi.

Diamo dunque per noti gli argomenti richiamati nel paragrafo 12.2 e iniziamo l'esposizione delle proprietà generali dei fenomeni ondulatori.

Le *onde elastiche* hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi e la loro propagazione è dovuta all'interazione tra gli atomi o le molecole del mezzo: ad esempio un'onda sonora in un gas si trasmette attraverso gli urti tra le molecole. Però in nessuno dei casi citati la propagazione comporta un trasporto effettivo di materia: gli atomi o le molecole oscillano attorno ad una posizione di equilibrio. Vengono invece trasportate energia e quantità di moto, come si deduce dal fatto che l'arrivo di un'onda elastica può mettere in movimento un corpo materiale opportunamente collegato al mezzo in cui avviene la propagazione; su questo effetto sono basati strumenti capaci di rivelare la presenza di un'onda di pressione (*trasduttori*).

Di origine meccanica sono anche le *onde sismiche* generate nei terremoti e le *onde sulla superficie di un liquido*, che tratteremo nel paragrafo 12.6.

Esistono altri tipi di onde che non hanno bisogno di un mezzo materiale per propagarsi; tra queste vi sono le *onde elettromagnetiche* cui abbiamo accennato più volte e che saranno discusse nel capitolo 13. Sono onde elettromagnetiche quelle utilizzate nelle trasmissioni radiotelevisive, le onde luminose visibili, infrarosse e ultraviolette, i raggi X. Tali onde si propagano nel vuoto con velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e possono attraversare anche mezzi materiali, nei quali la propagazione avviene con velocità sempre inferiore a  $c$ .

In generale si definisce come *onda una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita*. Le onde hanno origine da una sorgente, in cui si produce la perturbazione: questa può consistere in una vibrazione di un corpo materiale che mette in movimento le molecole di un mezzo (onde elastiche) o in un movimento di cariche elettriche (onde elettromagnetiche).

Da quanto detto si intuisce che la varietà dei fenomeni che danno luogo ad una propagazione ondosa è notevole. Vi sono però delle caratteristiche generali, comuni a tutti i tipi di onde, che ne permettono una descrizione matematica unificata.

Formalmente un'onda si riconduce alla perturbazione delle condizioni di equi-

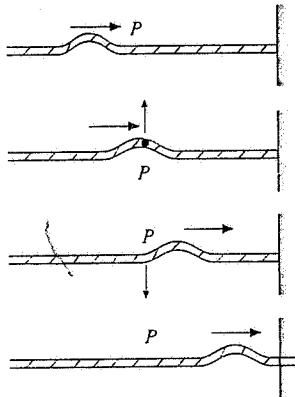


Figura 12.1

## Campo

librio di un campo che descrive una proprietà di un sistema fisico. Ricordiamo che con il nome di *campo* si indica una grandezza fisica che può essere definita in ogni istante in ciascun punto dello spazio.

La temperatura, la pressione, la densità di un fluido, pensato come un mezzo continuo, sono esempi già incontrati di campi, descrivibili mediante funzioni del tipo

$$T(x, y, z, t), \quad p(x, y, z, t), \quad \rho(x, y, z, t).$$

Questi *campi* vengono detti *scalari* perché basta una sola funzione per definirli completamente: il valore del campo in un punto  $(x, y, z)$  in un certo istante  $t$  è quindi un numero.

Il campo elettrico e il campo magnetico  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ , nel vuoto o in mezzi materiali, sono esempi di *campi vettoriali*; per definirli in un dato sistema cartesiano occorrono tre funzioni,

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t), \quad E_y(x, y, z, t), \quad E_z(x, y, z, t), \\ B_x(x, y, z, t), \quad B_y(x, y, z, t), \quad B_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Altri esempi di campi vettoriali sono il campo delle velocità in un fluido  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , che diventa  $\mathbf{v}(x, y, z)$  in regime stazionario, e il campo gravitazionale  $\mathbf{G}$ .

Un'onda sonora è una perturbazione dello stato di equilibrio della pressione e della densità che si propaga in un gas; un'onda elastica in una sbarra è una deformazione locale, rappresentabile con uno spostamento dalla posizione di equilibrio di una sezione della sbarra e con una variazione di pressione, che si propaga lungo la sbarra stessa; un'onda elettromagnetica è una perturbazione del campo elettrico e del campo magnetico, prodotta da cariche in moto, che si propaga nello spazio circostante. Si ipotizza, anche se non c'è ancora una verifica sperimentale sicura, che variazioni nella distribuzione spaziale di una massa diano luogo a una perturbazione del campo gravitazionale  $\mathbf{G}$  che si dovrebbe propagare nello spazio sotto forma di *onde gravitazionali*, con velocità nel vuoto eguale a  $c$ .

La perturbazione di un campo che, prodotta da una sorgente, si propaga nello spazio viene rappresentata con la funzione  $\xi(x, y, z, t)$ , detta *funzione d'onda*. Il simbolo  $\xi$  può rappresentare sia lo spostamento di un elemento del sistema dalla posizione di equilibrio, che ha luogo in tutte le onde elastiche, che una variazione  $\Delta p$  di pressione o  $\Delta\rho$  di densità e anche una forza  $F$  o una potenza  $P$ . A partire dal paragrafo 12.3 utilizzeremo la lettera  $\xi$  per le discussioni generali e ci serviremo di un simbolo specifico per le singole grandezze (ad esempio  $s$  per gli spostamenti).

Una situazione particolare, che comprende tutte quelle finora studiate, è costituita dalle cosiddette *onde piane*, descritte dalla funzione  $\xi(x, t)$ , spazialmente *unidimensionale*, cioè dipendente dalla sola coordinata spaziale  $x$  oltre che dal tempo. Il nome di onda piana deriva dal fatto che la perturbazione in un certo istante  $t_0$  assume lo stesso valore  $\xi(x_0, t_0)$  in tutti i punti del piano di equazione  $x = x_0$ , ortogonale all'asse di propagazione  $x$  e quindi parallelo al piano  $y, z$ .

Limitandoci per ora a considerare soltanto onde piane, abbiamo trovato che la funzione d'onda soddisfa sempre all'equazione differenziale

## Equazione delle onde piane

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (12.1)$$

che è detta appunto *equazione delle onde piane* o *equazione di d'Alembert*; il coefficiente  $v^2$  è il quadrato della velocità di propagazione.

La (12.1) è una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti, *lineare* nella funzione incognita  $\xi$  (questa cioè compare soltanto alla prima potenza). L'origine fisica della proprietà di linearità, nel caso delle onde elastiche, risiede nel fatto che i fenomeni sono dovuti a piccole perturbazioni che provocano piccoli spostamenti dallo stato di equilibrio. Chiaramente esistono situazioni diverse, che possono dare origine a equazioni non lineari, anche se i fenomeni più comuni, come le onde sonore, rientrano nell'ambito descritto matematicamente dalla (12.1). Nel caso delle onde elettromagnetiche la linearità deriva dalla linearità delle equazioni di Maxwell.

Si dimostra che le funzioni soluzioni di (12.1) possono essere di qualsiasi tipo, però la dipendenza dalle variabili  $x$  e  $t$  deve assumere una delle due forme

$$\xi(x-vt), \xi(x+vt) \quad \text{ovvero} \quad \xi\left(t-\frac{x}{v}\right), \quad \xi\left(t+\frac{x}{v}\right), \quad (12.2)$$

L'argomento di  $\xi$  deve cioè contenere le variabili  $x$  e  $t$  sotto forma di combinazione lineare. Pertanto

$$\xi = (x-vt)^2, \quad \xi = \xi_0 \operatorname{senk}(x-vt), \quad \xi = \xi_0 e^{k(x+vt)}$$

sono tutte possibili soluzioni di (12.1), mentre non lo sono  $\xi = xvt$ ,  $\xi = x/vt$  e simili.

Nel paragrafo 9.10 del primo volume, richiamato nel paragrafo 12.2, si è dimostrato direttamente che le funzioni tipo (12.2) sono soluzioni di (12.1); accettiamo senza dimostrazione che si tratti delle sole soluzioni. Dalla linearità di (12.1) segue inoltre che la somma di due soluzioni è ancora soluzione. La soluzione più generale di (12.1) si ottiene quindi come

$$\xi(x, t) = \xi_1(x-vt) + \xi_2(x+vt), \quad (12.3)$$

cioè come somma delle soluzioni indipendenti (12.2).

Il significato fisico delle funzioni (12.2) sta nel fatto che esse rappresentano, per via della loro struttura, un *fenomeno di propagazione* lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ . Riprendendo quanto già visto nel suddetto paragrafo 9.10, il valore  $\xi_0$  assunto dalla funzione  $\xi$  all'istante  $t_0$  nella posizione  $x_0$ ,  $\xi_0 = \xi(x_0 - vt_0)$ , si ritrova in qualsiasi istante successivo  $t > t_0$  nel punto  $x$  che soddisfa alla condizione

$$x - vt = x_0 - vt_0 \quad \text{ovvero} \quad x = x_0 + v(t - t_0),$$

relazione che esprime un moto rettilineo lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ . Analogamente  $\xi(x+vt)$  rappresenta una grandezza che si propaga con velocità  $v$  lungo il verso negativo dell'asse  $x$ . In entrambi i casi si tratta di una *traslazione rigida*, nel senso che la funzione non cambia mai forma (si riveda la figura 8.19 del paragrafo 12.2). Questa invarianza della forma durante la propagazione è una caratteristica delle singole funzioni che sono soluzioni di (12.1).

### Esempio 12.1

Una perturbazione che si propaga in una corda tesa ha l'espressione

$$\xi = \frac{10^{-2}}{(x-2t)^2 + 1}.$$

Essa rappresenta lo spostamento trasversale dei punti della corda. Trovare la forma della

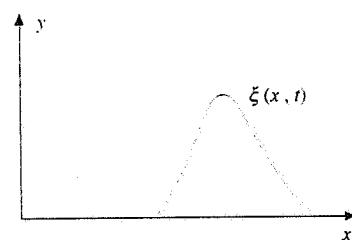
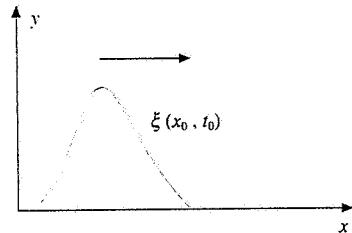


Figura 12.2

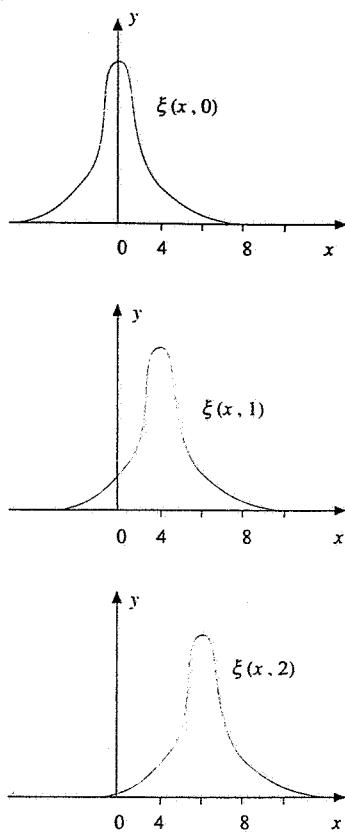


Figura 12.3 (Esempio 12.1)

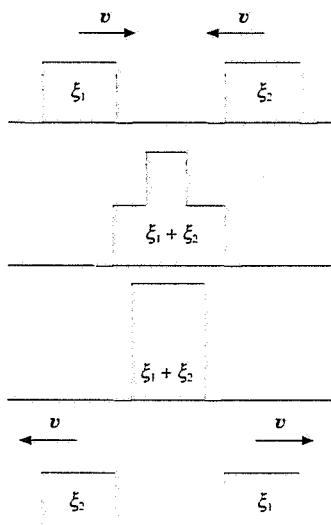


Figura 12.4

corda per  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ .  $\xi$  e  $x$  sono espresse in metri,  $t$  in secondi.

### Soluzione

Osserviamo innanzitutto che la funzione è del tipo  $\xi(x - vt)$  e che la velocità di propagazione, lungo l'asse  $x$  positivo, è di 2 m/s. Nei diversi istanti la funzione ha le espressioni:

$$t = 0 \quad \xi(x, 0) = \frac{10^{-2}}{x^2 + 1} ,$$

$$t = 1 \quad \xi(x, 1) = \frac{10^{-2}}{(x - 2)^2 + 1} ,$$

$$t = 2 \quad \xi(x, 2) = \frac{10^{-2}}{(x - 4)^2 + 1} ,$$

Si tratta di curve che hanno tutte la stessa forma, ottenute una dall'altra con una traslazione  $x' = x + a$ , dove  $a = 0, 2, 4$ .

Abbiamo già detto che la somma di due funzioni tipo (12.2) è soluzione dell'equazione delle onde (12.1): la *sovraposizione* di due onde è ancora un'onda che si ottiene in ogni istante e in ogni punto effettuando l'operazione di somma. Se ciò avviene vuol dire che due onde, anche se agiscono insieme, restano indipendenti, non vengono modificate l'una dalla presenza dell'altra, perché se così fosse il risultato non sarebbe la semplice somma delle due perturbazioni, ciascuna considerata come se l'altra non ci fosse.

Una situazione che permette di verificare queste affermazioni è mostrata nella figura 12.4. In una corda tesa due onde  $\xi_1(x - vt)$  e  $\xi_2(x + vt)$  si propagano in versi opposti; la forma delle onde è eguale. Quando esse si sovrappongono ciò che si osserva è proprio la somma  $\xi_1 + \xi_2$  e quando la sovrapposizione cessa le onde continuano a propagarsi come facevano prima della sovrapposizione. Nella figura 12.4  $\xi_1$  e  $\xi_2$  hanno lo stesso segno e l'onda risultante è maggiore delle due considerate singolarmente, nella figura 12.5 i segni sono opposti e durante la sovrapposizione si ha elisione completa.

Le onde che soddisfano (12.1) obbediscono dunque al *principio di sovrapposizione*; abbiamo incontrato lo stesso risultato in altre situazioni regolate da equazioni differenziali lineari, come sono l'equazione del moto armonico e le stesse equazioni di Maxwell.

La sovrapposizione di due o più onde in una regione dello spazio può dar luogo, in particolari condizioni, ai *fenomeni di interferenza* che studieremo nel capitolo 15.

## 12.2 Richiamo sulle onde elastiche

In questo paragrafo sono riportati integralmente i paragrafi del capitolo 9 del primo volume dedicati alla propagazione di onde piane elastiche. Il primo caso esaminato è quello di una *sbarra solida* sollecitata ad una estremità. La formula (7.2) cui si fa riferimento dà la deformazione  $d\xi$  di un elemento di sbarra lungo  $dx$  quando è applicata la forza  $F$ :

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad . \quad (7.2)$$

$S$  è la sezione della sbarra,  $E$  il modulo di elasticità detto anche modulo di Young.

Il secondo esempio di propagazione è quello in una *corda tesa*. Si tratta sempre di un sistema unidimensionale; nel fenomeno non interviene nessuna costante elastica, è sufficiente che la corda sia sottoposta a una tensione meccanica  $T$ .

Infine il terzo esempio riguarda le onde nei gas, precedute da un richiamo sulle proprietà elastiche dei gas.

## 9.10 Introduzione ai fenomeni ondulatori

Le realizzazioni meccaniche di un oscillatore armonico alle quali abbiamo fatto riferimento sono il punto materiale attaccato ad una molla, in cui l'oscillazione è dovuta alla forza elastica della molla, il pendolo di torsione, dove agisce il momento elastico di torsione del filo, e i pendoli che oscillano a causa della forza peso; a questi possiamo assimilare la massa d'acqua oscillante dell'esempio 9.6. In qualche caso l'oscillazione è armonica anche se ampia, in altri l'ampiezza deve essere limitata, altrimenti il moto è oscillatorio, ma non armonico. Bisogna poi nella pratica forzare l'oscillazione che viene smorzata dai vari effetti dissipativi sempre presenti.

Caratteristica comune dei suddetti dispositivi è il fatto che l'oscillazione sia, per così dire, macroscopica. Tutto il sistema nel suo insieme oscilla e nel fenomeno non entrano in modo determinante proprietà legate alla struttura microscopica.

Gli esempi citati, e i molti altri di natura simile, non esauriscono le possibilità di produzione di moti oscillatori, in particolare armonici. Oscillazioni locali, sia armoniche che qualsiasi, possono essere provocate in una zona specifica di un corpo continuo elastico, solido o fluido (che viene chiamato *mezzo*). Facciamo tre esempi:

- in un punto della superficie di una massa d'acqua in quiete viene fatto oscillare verticalmente un piccolo corpo;
- ad una estremità di un tubo pieno d'aria viene fatta vibrare una membrana (come quella di un altoparlante);
- la base di una sbarra metallica viene colpita da una piccola punta.

Nel primo esempio, che è quello visivamente più immediato, si osserva che l'oscillazione del corpo provoca un'oscillazione dell'acqua (innalzamento e abbassamento locale della superficie) che non resta localizzata, ma si allontana con simmetria circolare dal centro. Nel secondo, se si mette all'altro estremo del tubo un opportuno rivelatore di vibrazioni (come un microfono) si trova che esso entra in vibrazione con un certo ritardo rispetto all'istante in cui ha iniziato a vibrare la membrana. Analogamente nel terzo esempio una puntina appoggiata all'altra estremità della sbarra si mette a vibrare. Come nel primo caso, ciò che avviene nel gas e nel metallo è che il movimento della membrana o della punta causa il movimento degli elementi contigui del mezzo elastico e che questi a loro volta interagiscono con altri elementi a loro contigui mettendoli in movimento e così via.

Questa volta non abbiamo un movimento macroscopico di materia, il mezzo nel suo complesso resta fermo. Invece l'oscillazione, indotta localmente dall'esterno, si propaga nel mezzo: i vari elementi del mezzo oscillano attorno alla loro posizione di equilibrio, con un certo ritardo rispetto alla *sorgente* che dipende dalla distanza dalla sorgente e dalla velocità di propagazione. Un fenomeno di questo tipo viene chiamato *ondulatorio* e l'oscillazione che si propaga nel mezzo con una ben definita velocità costituisce un'onda.

Nel seguito descriviamo alcune caratteristiche distintive, sia fisiche che matematiche, dei fenomeni ondulatori. L'argomento, che è di fondamentale importanza in tutti i campi della Fisica, verrà ripreso e trattato a fondo nel secondo volume.

Premettiamo che limiteremo le nostre considerazioni al caso unidimensionale, in cui la propagazione avviene lungo una determinata direzione, ad esempio l'asse  $x$  (quindi non ci occuperemo più di situazioni come quella del primo esempio). L'oscillazione, che chiamiamo perturbazione (del mezzo), può essere una qualsiasi funzione  $f(x, t)$  della posizione e del tempo. In particolare  $f(0, t)$ , cioè la funzione nell'origine che supponiamo coincidente con la sorgente, dà l'oscillazione iniziale, che dipende dalla sollecitazione esterna; si può trattare di una funzione impulsiva, con una forma come quella della figura 9.20, oppure periodica, per esempio sinusoidale:  $f(0, t) = A \sin(\omega t + \phi)$ .

Riprendiamo il terzo esempio e la funzione  $f$  sia lo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio degli elementi della base della sbarra metallica colpita impulsivamente da una punta:  $f(0, t) = \xi(0, t)$  rappresenta ciò che vede al passare del tempo un osservatore nell'origine; la base si sposta di una certa quantità, normalmente molto piccola, e poi torna nella configurazione iniziale (tutto ciò senza che la sbarra nel suo insieme si muova). Analogamente  $f(x, t)$  rappresenta l'andamento temporale della perturbazione in una diversa posizione  $x$ ; se assu-

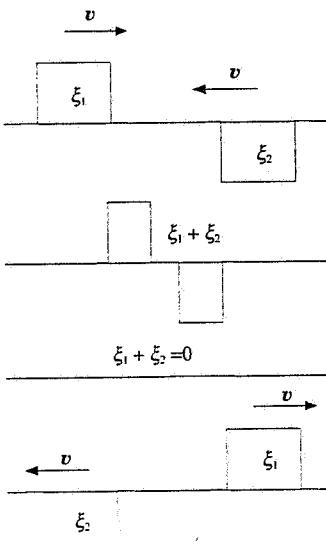


Figura 12.5

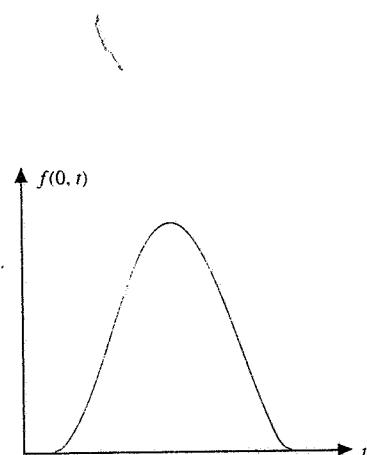


Figura 9.20

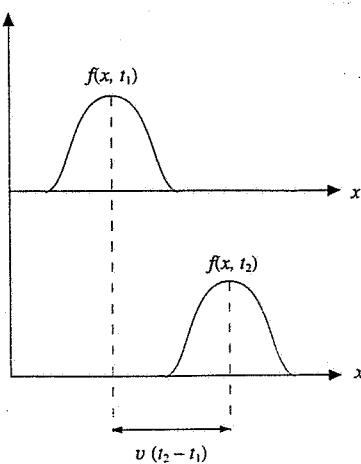


Figura 9.21

Equazione delle onde piane

miamo che la perturbazione si propaghi senza subire deformazioni, la forma in funzione del tempo deve essere la stessa. La figura 9.20 è quindi la stessa in qualsiasi posizione dell'asse  $x$ , con questa avvertenza: un osservatore in  $x_1$  vede la perturbazione con un ritardo rispetto all'osservatore nell'origine dato dal tempo  $x_1/v$ , essendo  $v$  la velocità di propagazione dell'onda.

Diverso è il significato di  $f(x, t_1)$ : ora si tratta dei valori che la perturbazione assume nei vari punti dell'asse  $x$  ad un certo istante (è la fotografia istantanea di  $f$ ). Nella parte alta della figura 9.21 è mostrata  $f(x, t_1)$ : in quell'istante c'è una posizione  $x$  particolare in cui la perturbazione è massima, mentre subito prima e dopo si ha un andamento decrescente e nel resto dell'asse non si ha nessuna perturbazione. Nella parte bassa della figura si vede la perturbazione in un istante successivo  $t_2$ : essa interessa con le stesse modalità un'altra zona dell'asse  $x$ , mentre la zona precedente è ora imperturbata; la distanza tra i due massimi è  $v(t_2 - t_1)$ .

Come vedremo nei paragrafi successivi in cui trattiamo casi specifici, ogni qual volta si verificano le condizioni per la propagazione si trova che la perturbazione soddisfa all'equazione differenziale, detta *equazione delle onde*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (9.29)$$

Questo vuol dire che la funzione  $f$ , per rappresentare un fenomeno ondulatorio, deve avere una proprietà precisa: la derivata seconda rispetto allo spazio deve essere proporzionale alla derivata seconda rispetto al tempo (il coefficiente deve avere le dimensioni dell'inverso di una velocità al quadrato e per questo viene scritto  $1/v^2$ ).

Si dimostra che una funzione  $f$  con tale proprietà, e quindi soluzione di (9.29), ha una particolare dipendenza dallo spazio e dal tempo: precisamente l'argomento di  $f$  deve avere la struttura  $x - vt$  o  $x + vt$ . La funzione  $f$  cioè non può dipendere dal prodotto  $xt$  o dal rapporto  $x/t$ , tanto per fare due esempi, ma deve dipendere dalla combinazione lineare delle due variabili. Pertanto

$$\sin k(x - vt) \quad , \quad e^{-k(x+vt)} \quad , \quad 1/(x - vt)^2$$

sono possibili soluzioni della (9.29), mentre non lo sono

$$(x^2 + v^2 t^2) \quad , \quad x vt \quad , \quad x^3/v^2 t^2 \quad .$$

Possiamo dire che (9.29) non è una condizione sulla forma della funzione (come abbiamo trovato nelle altre equazioni differenziali finora incontrate), bensì *una condizione sull'argomento della funzione*, la quale può invece avere qualsiasi forma.

È semplice verificare che la funzione  $f(x - vt)$  è soluzione di (9.29). Infatti, posto  $z = x - vt$ , per cui  $\partial z / \partial x = 1$  e  $\partial z / \partial t = -v$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(z) &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial t} f(z) &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z) = -v \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad , \end{aligned}$$

e quindi  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z)$  e  $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z)$  sono eguali. Nello stesso modo si prova che  $g(x + vt)$  è soluzione. Dalla dimostrazione si ha la conferma che la forma effettiva di  $f$  non ha influenza sul risultato.

È invece argomento dei casi di Analisi Matematica la prova che solo le funzioni  $f(x - vt)$  e  $g(x + vt)$  sono soluzioni, cioè che non esistono altre soluzioni diverse. Si dimostra anche che la soluzione più generale di (9.29) è data dalla somma

$$G(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad .$$

Discutiamo ora il significato fisico della funzione  $f(x - vt)$ , soluzione di (9.29). Consideriamo un valore costante dell'argomento, supponiamo cioè che sia  $x - vt = k$ , e chia-

miamo  $F$  il valore della funzione:  $F = f(k)$ . È chiaro che la funzione  $f$  assume il valore  $F$  in tutti i punti dell'asse  $x$  che soddisfano alla condizione

$$x = k + vt \quad ,$$

equazione di un moto uniforme lungo il verso positivo dell'asse  $x$ . Quindi al tempo  $t = 0$   $f$  vale  $F$  nel punto  $x = k$ , al tempo  $t_1$   $f$  vale  $F$  nel punto  $x_1 = k + vt_1$  e così via. Concludiamo che una funzione  $f(x - vt)$  rappresenta un fenomeno che si propaga lungo il verso positivo dell'asse  $x$  con velocità  $v$ , senza subire deformazioni; possiamo paragonare questo moto ad una traslazione rigida, per citare una situazione che conosciamo. Analogamente  $g(x + vt)$  rappresenta una propagazione lungo il verso negativo dell'asse  $x$ . Si capisce così perché (9.29) sia chiamata equazione delle onde e si chiarisce anche il significato della costante  $v$  che compare nella (9.29): è la velocità di propagazione della perturbazione.

Più esattamente l'equazione differenziale (9.29) è detta *equazione delle onde piane*, per il fatto che la funzione  $f$ , dipendendo solo da  $x$ , ha lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse  $x$  (piano  $y, z$ ).

Nei paragrafi che seguono trattiamo tre casi classici di onde elastiche: le onde che si propagano lungo una sbarra solida, lungo un filo teso e lungo una colonna di gas. Alla fine discuteremo alcune ulteriori proprietà dei fenomeni ondulatori.

### 9.11 Onde elastiche in una sbarra solida

Supponiamo di deformare il tratto iniziale di una sbarra solida applicando una forza impulsiva; tale tratto iniziale, compresso dalla forza, successivamente si dilata comprimendo l'elemento contiguo e questo fenomeno, dovuto alle proprietà elastiche del mezzo, interessa via via tutta la sbarra fino a raggiungere l'altro estremo. Vogliamo dare una veste matematica a questa propagazione di una perturbazione elastica e calcolarne la velocità.

Consideriamo un elemento di sbarra a distanza  $x$  dall'estremo colpito e lungo  $dx$ ; nella figura 9.22 esso è rappresentato come un cilindretto di base  $S$ , sezione della sbarra, e altezza  $dx$ . Sulle due basi di questo cilindretto agiscono le forze  $F(x)$  e  $F(x + dx)$  esercitate rispettivamente dagli elementi di sbarra che stanno a sinistra e a destra del cilindretto. Nel processo di propagazione la forza  $F$  non è costante lungo la sbarra, ma varia sia lungo l'asse  $x$  che nel tempo.

Sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia, seppur di poco, posizione; indichiamo con  $\xi(x, t)$  la funzione che descrive lo spostamento dalla posizione iniziale, all'ascissa  $x$  e al tempo  $t$ , e con  $\xi(x + dx, t)$  lo spostamento nello stesso istante all'ascissa  $x + dx$ . Le configurazioni del cilindretto sono mostrate in figura 9.23, la lunghezza, che era  $dx$ , diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + d\xi$$

in quanto  $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + d\xi$ . L'allungamento relativo del cilindretto è  $d\xi/dx$  o, meglio,  $\partial\xi/\partial x$ : il simbolo di derivata parziale evidenzia che stiamo considerando una variazione solo rispetto a  $x$  e non rispetto al tempo. Dalla (7.2) abbiamo quindi:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \Rightarrow F(x) = ES \frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Utilizzando questa relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come

$$F(x + dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx$$

D'altra parte il moto del cilindretto, di massa  $dm = \rho S dx$ , avviene con accelerazione  $a = \partial^2\xi/\partial t^2$  e, per la legge di Newton,

$$ES \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} dx$$

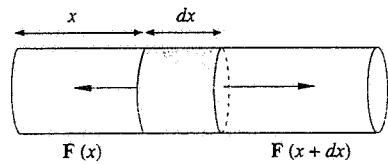


Figura 9.22

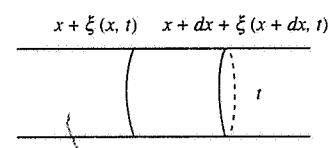
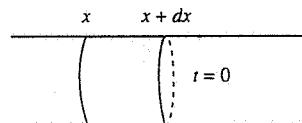


Figura 9.23

In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (9.30)$$

avendo indicato con

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9.31)$$

una grandezza che ha necessariamente le dimensioni di una velocità.

Abbiamo così trovato che lo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio dei punti di una sezione della sbarra sollecitata ad una estremità obbedisce all'equazione delle onde (9.29): lungo la sbarra si ha un'onda di spostamento, con velocità di propagazione (9.31) che dipende dalle proprietà elastiche ( $E$ ) e di inerzia ( $\rho$ ) della sbarra.

### Esempio 9.8

Le densità di alluminio, ferro, piombo, rame, sono, rispettivamente,  $2.7 \cdot 10^3$ ,  $7.9 \cdot 10^3$ ,  $11.4 \cdot 10^3$ ,  $9.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Calcolare le velocità di propagazione di un'onda elastica in una sbarra costituita da tali metalli.

#### Soluzione

Nella tabella 7.1 si trovano i valori del modulo di Young, che riportiamo nell'ordine:  $0.7 \cdot 10^{11}$ ,  $2.0 \cdot 10^{11}$ ,  $0.14 \cdot 10^{11}$ ,  $1.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ . Da (9.31) abbiamo:  $v_{\text{Al}} = 5090$ ,  $v_{\text{Fe}} = 5030$ ,  $v_{\text{Pb}} = 1110$ ,  $v_{\text{Cu}} = 3500 \text{ m/s}$ .

Insieme allo spostamento  $\xi$  dalla posizione di equilibrio si propaga lungo la sbarra anche la forza  $F$ . Infatti dalla relazione  $F = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$  e da (9.30) si ricava:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES v^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dove il secondo passaggio è reso possibile dal noto teorema di analisi secondo cui una deriva-  
ta mista non dipende dall'ordine con cui si eseguono le derivate. Inoltre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

e si conclude che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Lungo la sbarra abbiamo anche un'onda di forza o, meglio, di pressione se ricordiamo che nei processi di compressione è significativo il rapporto  $F/S$ .

Onda longitudinale

Sia lo spostamento  $x$  ( $x \mp vt$ ) che la forza  $F$  ( $x \mp vt$ ), che descrivono le onde che si pro-  
pagano lungo l'asse  $x$ , sono paralleli a questo asse. Onde che hanno una tale proprietà si dicono *longitudinali*.

### 9.12 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente l'estremità di una corda tesa, che abbia ad esempio l'altra estremità fissa, come in figura 9.24, si ha una perturbazione che si propaga lungo la corda, visualizzata da una *gobba* che si sposta progressivamente da un'estremità all'altra. Anche in questo caso lo spostamento dalla posizione di equilibrio si manifesta dapprima nell'estremo in cui si esercita la perturbazione esterna e successivamente e progressivamente negli altri punti della corda.

Supponiamo di spostare di poco la corda dalla sua posizione di equilibrio, coincidente con l'asse  $x$ , e di chiamare  $\xi(x, t)$  la funzione che descrive lo spostamento dall'equilibrio. Consideriamo un piccolo tratto di corda  $dl$  sottoposto ad una tensione  $T$  che agisce ad entrambi gli estremi e siano  $\alpha$  e  $\alpha'$  gli angoli formati con l'asse  $x$  dalla tangente all'elemento  $dl$  negli estremi, ovvero dalla tensione  $T$ . La risultante delle forze di tensione agenti su  $dl$  ha una componente parallela all'asse  $x$  e una all'asse  $y$ :

$$F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) ,$$

$$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) .$$

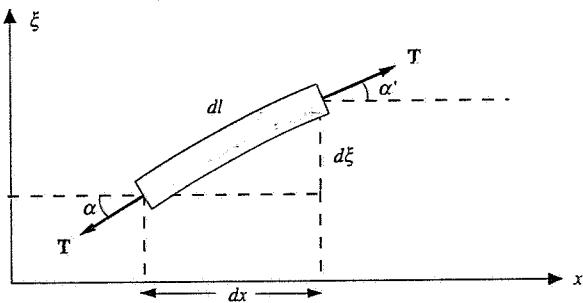


Figura 9.25

Se gli spostamenti della corda sono piccoli, come abbiamo ipotizzato, anche la curvatura della corda è piccola: allora nello sviluppo in serie delle funzioni

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots , \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots ,$$

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots ,$$

si possono trascurare tutti i termini di ordine superiore al primo. Di conseguenza

$$\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha , \quad \sin\alpha' = \tan\alpha' = \alpha' ,$$

$$\cos\alpha = 1 , \quad \cos\alpha' = 1$$

e per le componenti della forza agente sull'elemento  $dl$  si ottiene

$$F_x = 0 , \quad F_y = T(\tan\alpha' - \tan\alpha) = T \frac{\partial}{\partial x}(\tan\alpha) dx ,$$

ammettendo che, a causa della piccolezza di  $dx$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$  siano poco diversi così che

$$\tan\alpha' = \tan\alpha + \frac{\partial}{\partial x}(\tan\alpha) dx .$$

Il risultato  $F_x = 0$  dice che non c'è spostamento lungo la direzione della corda ovvero che

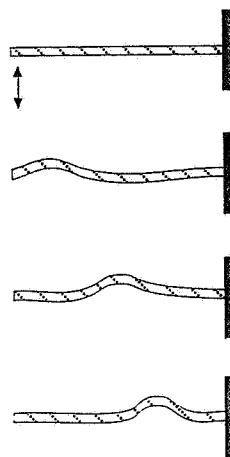


Figura 9.24

il moto di ogni elemento di corda avviene in direzione perpendicolare all'asse  $x$  sotto l'azione della forza  $F_y$ . Poiché, come si vede in figura 9.25 e come discende dalla definizione di derivata,  $\tan \alpha = \partial \xi / \partial x$ , abbiamo

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx .$$

La massa dell'elemento di corda  $dl$  è

$$dm = \rho S dl = \rho S \frac{dx}{\cos \alpha} = \rho S dx = \rho_i dx ,$$

indicando con  $\rho_i = dm/dx = \rho S$  la *densità lineare di massa* (paragrafo 6.3), costante se la corda è omogenea ( $\rho$  = costante) e calibra ( $S$  = costante, sezione della corda). L'accelerazione dello stesso elemento è  $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$  e, per la legge di Newton,

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho_i dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_i} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

che è ancora la (9.29); la velocità di propagazione risulta data da

Velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_i}} . \quad (9.32)$$

Lo spostamento trasversale, provocato in un estremo della corda, si propaga lungo la corda con una velocità  $v$ , che dipende dalla tensione della corda e dalla massa per unità di lunghezza.

In un filo di acciaio di raggio 1 mm e  $\rho_i = 0.025 \text{ kg/m}$ , se  $T = 10 \text{ N}$ , risulta  $v \approx 20 \text{ m/s}$ .

Osserviamo che le approssimazioni fatte per  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  non sono particolarmente stringenti: fino a  $15^\circ$   $\sin \alpha$  differisce da  $\tan \alpha$  al più del 3.5%, come del resto della stessa percentuale  $\cos \alpha$  differisce da 1.

Onda trasversale

L'*onda di spostamento* lungo la corda si dice *trasversale* poiché la grandezza che si propaga giace in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

### 9.13 Proprietà elastiche dei gas. Onde nei gas

Abbiamo descritto nel paragrafo 7.5 le proprietà elastiche di un fluido e introdotto con la (7.8) il modulo di compressibilità  $\beta$ , considerando anche esplicitamente un gas che seguia la legge isotermica di Boyle.

Riprendiamo la definizione di modulo di compressibilità:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta} dp \Rightarrow \beta = -V \frac{dp}{dV} .$$

A una variazione di volume si accompagna una variazione di densità e poiché  $V\rho = m$  = costante abbiamo

$$\Rightarrow \rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} .$$

Segue che il *modulo di compressibilità* si può scrivere

$$\beta = \rho \frac{d\rho}{dp} . \quad (9.33)$$

e questa è la definizione termodinamica di modulo di compressibilità. Il valore di  $\beta$  dipende da come la pressione varia con la densità, cioè dalla forma della funzione  $p(\rho)$ .

In un gas ideale, se il processo di compressione è isotermo abbiamo già ricavato nel paragrafo 7.5 la (7.10), che riscriviamo:

$$\beta_T = p \quad ,$$

dove con la lettera  $T$  vogliamo ricordare che la relazione è vera solo se la temperatura rimane costante.

Vedremo nel capitolo 11 che per mantenere un gas a temperatura costante sono necessari scambi di calore tra il gas e l'ambiente esterno. Un processo di compressione o di espansione può però essere molto rapido, così da non consentire scambi di calore; si parla di questo caso di condizioni adiabatiche e la (7.10) non è più valida. Anticipando un risultato del paragrafo 11.6, diciamo che in un processo adiabatico di un gas ideale vale la legge di Poisson  $pV^\gamma = \text{costante}$ , invece della legge isoterna di Boyle. La grandezza  $\gamma$  è una costante caratteristica del tipo di gas. Procedendo come nel paragrafo 7.5 abbiamo:

$$pV^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p/\rho^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p = C\rho^\gamma \quad ,$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma C \rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad ,$$

$$\beta_s = \gamma p \quad . \quad (9.34)$$

Modulo di compressibilità adiabatica

Viene così definito il *modulo di compressibilità adiabatica*, sempre maggiore del modulo di compressibilità isoterna  $\beta_T$  essendo  $\gamma$  sempre maggiore di uno.

Alla pressione atmosferica  $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura  $T = 273.15 \text{ K}$  e considerando l'aria come un gas ideale biamomico ( $\gamma = 1.4$ , vedi paragrafo 11.5) abbiamo

$$\beta_s = 1.418 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad , \quad \beta_T = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(il valore citato della temperatura, espresso in kelvin, corrisponde a  $0^\circ\text{C}$ ; parleremo della temperatura e delle sue unità di misura nel capitolo 10).

### Propagazione di onde in un gas

Abbiamo constatato che un gas è un sistema con notevoli proprietà elastiche. È quindi naturale che come una perturbazione elastica si propaga in una sbarra solida (paragrafo 9.11), così si debba propagare in un gas. La velocità di propagazione nella sbarra è data da (9.11),

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ,$$

che, come già rilevato, evidenzia la dipendenza del fenomeno dalla proprietà elastica del materiale, descritta dal modulo di Young  $E$ , e dalla densità, cioè dalla massa per unità di volume, come è prevedibile trattandosi pur sempre del moto di particelle con una certa massa a cui è stata applicata la legge di Newton. Per un gas ci attendiamo

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

essendo  $\beta$  il modulo di compressibilità (adiabatico o isotermo).

Per verificare che anche in un gas si ha un fenomeno di propagazione regolato da un'equazione tipo (9.29), consideriamo una massa di gas contenuta in un lungo tubo a pareti rigide, disposto lungo l'asse  $x$ , e indichiamo con  $\rho_0$  e  $p_0$  i valori di equilibrio della densità e della pressione. Con il rapido spostamento di un pistone o di una membrana elastica si comprime il volumetto di gas immediatamente adiacente alla sorgente della perturbazione, producendo una variazione locale  $d\rho$  della densità e  $dp$  della pressione: la variazione di pressione determina un movimento del gas che comporta la compressione dell'elemento di gas con-

tiguo. In tal modo le perturbazioni  $d\rho$  e  $dp$  vengono trasmesse da un elemento al successivo; la descrizione matematica di questo meccanismo ci porterà all'equazione tipica della propagazione.

Supponiamo che le variazioni di densità e pressione siano piccole: i rispettivi valori modificati si scrivono allora

$$\rho = \rho_0 + d\rho, \quad p = p_0 + dp;$$

inoltre siano piccoli gli spostamenti dalla posizione di equilibrio, indicati dalla funzione  $s(x, t)$ , così come la derivata di questa funzione rispetto a  $x$ ,  $\partial s / \partial x$ .

Consideriamo una massa di gas contenuta tra due piani perpendicolari all'asse  $x$ , intersecanti l'asse nei punti di coordinate  $x$  e  $x + dx$ : assumendo unitaria la sezione del cilindro la massa di gas è  $dm = \rho_0 dx$ . A seguito della perturbazione  $dm$  subisce uno spostamento e la troviamo, in un istante  $t$  immediatamente successivo, tra

$$x + s(x, t) \quad \text{e} \quad x + dx + s(x + dx, t),$$

così che la dimensione lineare di  $dm$  passa da  $dx$  a

$$dx + s(x + dx, t) - s(x, t) = dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx.$$

La situazione geometrica è quella descritta nella figura 9.23.

La stessa massa occupa pertanto un volume diverso e la sua densità è cambiata da  $\rho_0$  a  $\rho_0 + d\rho$ . Quindi

$$dm = (\rho_0 + d\rho) \left( dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right) = \left( \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + d\rho + d\rho \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx.$$

Trascuriamo il quarto termine rispetto ai primi tre in quanto infinitesimo di ordine superiore ed eguagliamo a  $dm = \rho_0 dx$ ; otteniamo

$$d\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9.35)$$

che rappresenta il collegamento tra moto del gas e variazione di densità. Il segno meno indica correttamente che se il volumetto è compresso ( $\partial s / \partial x < 0$ ) la densità aumenta ( $d\rho > 0$ ), mentre se il gas si espande la densità diminuisce.

A una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione data da (9.33) che riscriviamo:

$$dp = p - p_0 = \frac{\beta}{\rho_0} d\rho$$

e utilizzando (9.35)

$$p = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9.36)$$

La variazione di pressione causa un movimento del gas: la forza risultante che agisce su  $dm$  (ricordiamo che la sezione è unitaria) vale

$$p(x, t) - p(x + dx, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx = \beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

avendo introdotto (9.36); questa forza provoca l'accelerazione  $\partial^2 s / \partial t^2$  secondo la legge del moto

$$\beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

e in conclusione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (9.37)$$

Lo spostamento  $s(x, t)$  dalla posizione di equilibrio soddisfa l'equazione (9.29) delle onde piane: lungo la colonna di gas si propaga un'onda di spostamento con velocità data da

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (9.38)$$

come avevamo anticipato.

Dalla (9.36) derivando rispetto a  $x$  e rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

In modo analogo, derivando la densità  $\rho$  data dalla (9.35), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e una perturbazione della densità del gas, tutte con la stessa velocità data da (9.38).

La rapidità con cui avviene il fenomeno induce a ritenere adiabatici i processi di compressione e di espansione del gas, per cui il modulo di compressibilità è quello adiabatico (9.34) e la velocità (9.38) ha l'espressione

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (9.39)$$

Nelle cosiddette condizioni standard ( $T = 273.15$  K,  $p = 1.01325 \cdot 10^5$  Pa) la densità dell'aria vale  $\rho = 1.29$  Kg/m<sup>3</sup>; con  $\gamma = 1.4$   $v = 331.61$  m/s; il valore misurato in queste condizioni è 331.45 m/s. L'ottimo accordo giustifica le ipotesi fatte di perturbazioni di piccolo valore e con un'alta velocità di propagazione, sostanzialmente adiabatiche.

In un gas ideale la pressione e la densità sono legate alla temperatura dall'equazione  $p/\rho = RT/A$  dove  $R$  è la costante dei gas e  $A$  la massa molecolare (vedi paragrafo 11.1). Introducendo questa espressione nella (9.39) si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{A}} = \alpha \sqrt{T} \quad , \quad (9.40)$$

che dà la dipendenza della velocità di propagazione in un gas ideale dalla temperatura.

I valori della velocità di propagazione di un'onda elastica in alcuni gas (ideali) alla temperatura  $T = 300$  K sono riportati nella tabella 9.1. L'unità di misura della costante  $\alpha$  è  $\text{ms}^{-1} \text{K}^{-1/2}$ .

**Tabella 9.1 Velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas a 300 K**

gas	$\alpha$	$v$ (m/s)
idrogeno	76.288	1321
elio	58.857	1019
azoto	20.389	353
ossigeno	19.072	330

È attraverso il meccanismo ora descritto che avviene la propagazione del suono nei gas, in particolare nell'aria, anche se il fenomeno va trattato tridimensionalmente. Dai dati precedenti si ricava nell'aria  $\alpha = 20.055 \text{ ms}^{-1} \text{ K}^{-1/2}$  e quindi la velocità del suono nell'aria a 20°C è  $\sim 343 \text{ m/s}$ .

Nel caso della voce, la perturbazione che genera il suono è prodotta da vibrazioni rapide della laringe, che agisce come una lamina vibrante. La sensazione sonora ha origine sul timpano, che è anch'esso una membrana elastica e segue i processi rapidi di vibrazione dell'aria. Ci rendiamo conto che nell'onda sonora, come in qualsiasi onda elastica, c'è trasporto di energia e quantità di moto, visto che essa è capace di fare entrare in vibrazione un corpo materiale come il timpano. Il valore minimo dell'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas che l'orecchio è capace di percepire è dell'ordine di  $10^{-10} \text{ m}$ , cioè delle dimensioni atomiche, a cui corrisponde una variazione di pressione di  $10^{-4} \text{ Pa}$  rispetto alla pressione atmosferica, cioè  $\Delta p / p = 10^{-9}$ .

### 9.14 Ulteriori considerazioni sulle onde

Riprendiamo, dopo gli esempi, il discorso sulle proprietà generali dei fenomeni ondulatori. Intanto ripetiamo che si ha una propagazione ondosa ogni qual volta l'evoluzione spaziale e temporale di una grandezza fisica obbedisce a un'equazione del tipo (9.29): la funzione soluzione si propaga lungo l'asse  $x$  conservando la stessa forma (figura 9.21) e con una velocità che non dipende dalla perturbazione, ma solo dalle caratteristiche del mezzo.

È interessante osservare come si è arrivati alla (9.29) nei casi considerati. Nella propagazione in una sbarra il risultato si ottiene unendo l'equazione caratteristica del fenomeno elastico considerato (compressione) alla legge del moto di Newton; lo stesso avviene in altri fenomeni elastici, come per esempio nelle onde di pressione in un gas. Invece in una corda (o in una membrana) tesa basta la sola equazione del moto per dimostrare la propagazione.

Questi risultati fanno vedere che, mentre normalmente la soluzione dell'equazione del moto  $F = ma$  descrive il moto di un corpo dotato di massa e quindi un *movimento di materia*, in alcuni casi porta a predire nuovi fenomeni in cui la *materia*, pur muovendosi, *rimane mediamente ferma* e invece si ha la propagazione di una *perturbazione locale*, che si trasmette cioè progressivamente da un elemento al successivo.

Esemplifichiamo di nuovo questo fatto, approfittando dell'esempio per introdurre al posto di una perturbazione impulsiva una perturbazione armonica. All'estremo libero della corda della figura 9.24 applichiamo la perturbazione

$$\xi(x_0, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x_0 - vt) \quad ;$$

con  $k$  costante opportuna e  $\xi_0$  sufficientemente piccola da poter ritenere validi i risultati del paragrafo 9.12. La perturbazione si propaga lungo la corda con legge

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) \quad ;$$

che chiaramente è soluzione di (9.29). In un punto  $P_1$  di coordinata  $x_1$ ,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x_1 - vt) \quad ;$$

il punto  $P_1$  compie oscillazioni armoniche di ampiezza  $\xi_0$  intorno alla posizione di equilibrio. Si tratta delle stesse oscillazioni dell'estremo con  $x = x_0$ , solo che avvengono con un certo ritardo, dovuto al tempo di propagazione: la differenza di fase tra le due oscillazioni è  $k(x_1 - x_0)$ .

Se eseguiamo una fotografia del sistema all'istante  $t_0$  (figura 9.26 in alto), la posizione di tutti i punti della corda è data da

$$\xi(x, t_0) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt_0) \quad ;$$

la corda pertanto assume la forma di una sinusoide di ampiezza  $\xi_0$ . In istanti successivi  $t$  la forma è la stessa, però è spostata verso destra di  $v(t - t_0)$ . La corda nel suo complesso in media rimane ferma: nessun punto si muove verso un estremo o l'altro, *non si ha spostamento netto di materia*.

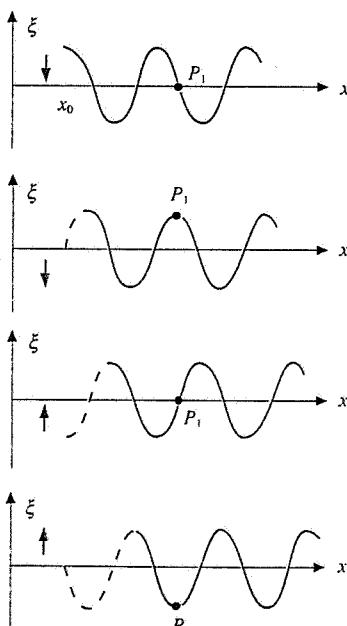


Figura 9.26

Le variazioni della grandezza che si propaga possono avvenire in direzione parallela alla direzione di propagazione (onde in un gas e in una sbarra) oppure in direzione ortogonale (onde in una corda e sulla superficie di un liquido). Si parla rispettivamente, come già detto, di *onde longitudinali e onde trasversali*.

Questa caratteristica dipende dalle proprietà elastiche e quindi in definitiva da proprietà microscopiche del mezzo. In un fluido indefinito non c'è resistenza ad uno sforzo di taglio e l'unica proprietà elastica è la compressione: un tale mezzo può essere sede soltanto di onde longitudinali. In una sbarra solida invece possono esserci sia onde longitudinali, generate col già visto meccanismo della compressione e che si propagano con velocità  $\sqrt{E/\rho}$ , che onde trasversali: queste si provocano sollecitando un estremo della sbarra ortogonalmente all'asse e si propagano con un meccanismo di scorrimento, come è evidenziato dall'espressione  $\sqrt{G/\rho}$  della velocità di propagazione, dove  $G$  è il modulo di rigidità. La sbarra, bloccata ad una estremità e sollecitata all'altra con un momento di torsione variabile, trasmette anche onde torsionali, la cui velocità di propagazione è di nuovo  $\sqrt{G/\rho}$ .

Alla fine del paragrafo 9.13 abbiamo osservato che un'onda elastica deve trasportare energia e quantità di moto in quanto è capace di fare entrare in movimento corpi materiali investiti dall'onda. La trasmissione di energia e quantità di moto avviene inizialmente dalla sorgente di vibrazione agli elementi contigui del mezzo e poi da un elemento al successivo; il fatto stesso che un elemento precedentemente indisturbato entri in oscillazione dimostra il trasporto di energia e quantità di moto da parte dell'onda. Altra prova ne è la registrazione dell'arrivo dell'onda fatta con un rivelatore esterno che ha una parte sensibile alle vibrazioni del mezzo, capace di tradurle normalmente in un segnale elettrico. Se la sollecitazione dovuta alla sorgente è impulsiva, le oscillazioni locali dovute al passaggio dell'onda possono essere considerate come un fenomeno transitorio; se invece la sollecitazione è periodica, abbiamo un fenomeno tipo di oscillazione forzata. Le espressioni esplicative dell'energia e della quantità di moto trasportate da un'onda elastica saranno determinate nel secondo volume.

### 12.3 Onde piane armoniche

Un tipo particolare, ma molto importante, di onda piana è l'*onda armonica*, la cui funzione d'onda si scrive

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x - vt) \quad \text{oppure} \quad \xi(x, t) = \xi_0 \cos k(x - vt) \quad (12.4)$$

$\xi_0$  è l'ampiezza dell'onda e la costante  $k$ , inserita per ragioni dimensionali in quanto l'argomento di un seno o di un coseno deve essere espresso in radianti e non in metri, è detta *numero d'onda*. Di norma il numero d'onda  $k$  viene portato all'interno della parentesi e le (12.4) diventano

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad \xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t), \quad (12.5)$$

in cui

$$\omega = kv \quad (12.6)$$

Pulsazione

è chiamata pulsazione dell'onda armonica. Naturalmente quanto detto è valido anche se l'argomento della funzione d'onda è  $k(x + vt) = kx + \omega t$ .

Abbiamo già rilevato che una funzione con la struttura di (12.5) si sposta rigidamente lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$  (pari a  $\omega/k$ ). Se fissiamo un determinato istante  $t_0$  la (12.5) dà, in quell'istante, il valore della funzione d'onda  $\xi(x, t_0)$  in tutti i punti dell'asse  $x$ ; si tratta evidentemente di una sinusoida nella variabile  $x$ , che si ripete identica per ogni coppia di punti consecutivi aventi coordinate  $x_1$  e  $x_2$  tali che  $k(x_1 - x_2) = 2\pi$ . La distanza  $\lambda = x_2 - x_1$  data da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \left( \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad (12.7)$$

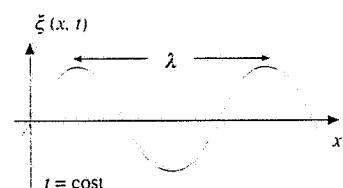


Figura 12.6

è detta *lunghezza d'onda* dell'onda armonica; essa dà la periodicità spaziale di (12.5). Da (12.7) si deduce che  $k$  è eguale al numero di lunghezze d'onda che stanno su una distanza uguale a  $2\pi$  metri e da questa proprietà deriva il nome di numero d'onde.

Se invece fissiamo una determinata posizione  $x = x_0$  la (12.5) dà, nel punto di coordinata  $x_0$ , la variazione nel tempo della funzione d'onda  $\xi(x_0, t)$ . Trattandosi di una variazione armonica la funzione d'onda ha lo stesso valore in due istanti successivi  $t_1$  e  $t_2$  tali che  $\omega(t_2 - t_1) = 2\pi$ . L'intervallo di tempo  $T = t_2 - t_1$  è il *periodo* dell'onda armonica ed è legato alla pulsazione dalla relazione

Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \quad (12.8)$$

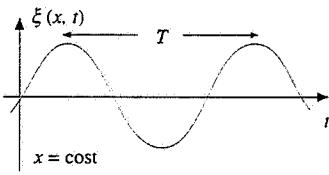


Figura 12.7

Le figure 12.6 e 12.7 illustrano le due funzioni  $\xi(x, t_0)$  e  $\xi(x_0, t)$ ; la prima è come una fotografia ad un dato istante della funzione d'onda, la seconda è il diagramma orario della perturbazione in un determinato punto. Se si tratta di un'onda in una corda tesa, la figura 12.6 mostra la posizione assunta dai vari punti della corda in un certo istante e la figura 12.7 mostra il moto di un qualsiasi punto in funzione del tempo, consistente in una oscillazione armonica completa rispetto alla posizione di equilibrio, svolta in un tempo  $T$ .

Mettendo insieme (12.6, 12.7, 12.8) si trova che i due periodi, spaziale e temporale, sono legati dalla relazione

$$\lambda = v T \quad . \quad (12.9)$$

da cui, ricordando che la frequenza di oscillazione  $v$  è l'inverso del periodo  $T$ ,  $v = 1/T$ , si arriva a

$$\lambda v = v \quad . \quad (12.10)$$

Le espressioni (12.6), (12.9) e (12.10) mostrano, in tre modi diversi, il legame che esiste in un'onda armonica tra la velocità di propagazione, il periodo spaziale (espresso tramite  $\lambda$  o  $k$ ) e il periodo spaziale (espresso tramite  $T$  o  $v$  o  $\omega$ ): le tre grandezze non sono dunque indipendenti.

Riprendendo la figura 9.26 del paragrafo 12.2 in cui è rappresentata una sinusoide che avanza con velocità  $v$  (si tratta in sostanza della figura 12.6 ripetuta negli istanti  $t_0, t_0 + T/4, t_0 + T/2, t_0 + 3T/4$ ), si vede che nel tempo  $T$  la sinusoide avanza di  $\lambda$ : la lunghezza d'onda ha quindi il significato di *distanza percorsa da un'onda armonica in un periodo*, come è specificato dalla legge (12.9).

Nel seguito dovremo spesso considerare onde armoniche del tipo

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

dove  $\delta$  è il valore dell'argomento per  $x = 0$  e  $t = 0$  e per qualunque altra coppia di valori  $x, t$  tali che  $kx - \omega t = 0$ . L'argomento completo della funzione

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \delta \quad . \quad (12.11)$$

Onda armonica

si chiama *fase dell'onda armonica*. La (12.11) esprime la propagazione della fase dell'onda che assume lo stesso valore per  $x = x_0, t = t_0$  e per  $x, t$  tali che  $x = x_0 + v(t - t_0)$ ; si tratta di un diverso modo di dire che la sinusoide  $\xi(x, t)$  avanza con velocità  $v$ .

Tenuto conto di (12.7) e (12.8) abbiamo vari modi equivalenti per scrivere l'espressione generale della funzione d'onda armonica:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t + \delta) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \delta\right] = \\ &= \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \delta\right]\end{aligned}\quad (12.12)$$

## 12.4 Analisi di Fourier

Un'onda armonica è un'onda molto particolare; essa fa parte della classe più generale delle *onde periodiche*, rappresentate lungo l'asse di propagazione da una forma che si ripete sempre eguale e in un punto da un'oscillazione periodica generica. Vi sono poi le *onde impulsive*, in cui la funzione d'onda non è periodica.

Per quanto questi casi possano apparire molto diversi, essi sono collegati dal *teorema di Fourier*, che abbiamo enunciato nel paragrafo 9.9 del primo volume. Ricordiamo dunque che una qualsiasi funzione periodica  $f(t)$ , la quale deve soddisfare alla condizione che l'intervallo  $T$ , pari al suo periodo, sia divisibile in un numero finito di tratti in cui la funzione è continua e monotona, è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali e cosinusoidali:

$$f(t) = a_0 + \sum_m^{\infty} (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t) \quad (12.13)$$

I *coefficienti* di questo sviluppo in serie si calcolano a partire dalla  $f(t)$  stessa:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega t \, dt, \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\omega t \, dt.$$

Il termine  $a_0$  è il valore medio di  $f(t)$ :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt.$$

La pulsazione  $\omega$  è pari a  $2\pi/T$ ,  $m$  è un numero intero positivo.

Il teorema di Fourier si applica anche a una funzione  $f(x)$ , periodica con periodo  $\lambda$ , come può essere una perturbazione che si propaga lungo l'asse  $x$  quando viene considerata in un istante determinato, ad esempio  $t = 0$ . Per questa funzione la (12.13) si scrive

$$f(x) = a_0 + \sum_m^{\infty} (a_m \sin mx + b_m \cos mx), \quad (12.14)$$

con  $k = 2\pi/\lambda$  e i coefficienti dati da

$$a_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin mx \, dx, \quad b_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos mx \, dx, \quad a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \, dx.$$

Il formalismo dello sviluppo in serie di Fourier si estende anche alle *funzioni non periodiche* (si veda sempre il paragrafo 9.9 del primo volume):

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t] \, d\omega, \quad (12.15)$$

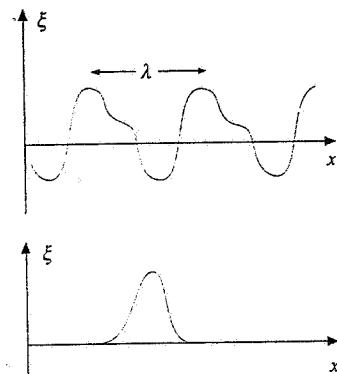


Figura 12.8

Serie di Fourier

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(k) \sin kx + b(k) \cos kx] dk, \quad (12.16)$$

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin kx dx, \quad b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos kx dx.$$

La funzione non periodica è descritta come sovrapposizione di un insieme continuo di termini armonici, i cui contributi sono dati dalle funzioni  $a$  e  $b$ , continue nelle variabili  $\omega$  o  $k$ .

Per completezza citiamo una diversa forma di sviluppo di Fourier. Dalla formula di Eulero (11.22) si ricava

$$\sin m \omega t = \frac{1}{2i} (e^{im\omega t} - e^{-im\omega t}), \quad \cos m \omega t = \frac{1}{2} (e^{im\omega t} + e^{-im\omega t})$$

e quindi il termine  $m$ -esimo di (12.13) diventa

$$a_m \sin m \omega t + b_m \cos m \omega t = c_m e^{im\omega t} + c_{-m} e^{-im\omega t},$$

dove i coefficienti  $c$  sono numeri complessi coniugati:

$$c_m = \frac{b_m - i a_m}{2}, \quad c_{-m} = \frac{b_m + i a_m}{2}.$$

In conclusione, posto  $c_0 = a_0$ , si ha

Serie complessa di Fourier

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t}, \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t} dt. \quad (12.17)$$

La (12.17) rappresenta la *serie complessa di Fourier* relativa a una funzione reale periodica  $f(t)$ ; una formula analoga vale per  $f(x)$ . Infine, per una funzione non periodica si ottiene

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(z) e^{izu} dz, \quad c(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-izu} du, \quad (12.18)$$

avendo indicato con  $u$  e  $z$  una coppia di variabili che corrisponde a  $t$ ,  $\omega$  oppure a  $x$ ,  $k$ .

Prendiamo ora in considerazione un'onda piana  $\xi(x, t)$  e supponiamo che la perturbazione sia prodotta in  $x = 0$  dove ha quindi l'andamento temporale  $\xi(0, t)$ . A seconda che questa funzione sia periodica o no avremo i vari sviluppi (12.13), (12.17) oppure (12.15), (12.18). Se ciascun termine armonico si propaga lungo l'asse alla stessa velocità, la somma rimane ovunque la stessa e si può scrivere, ad esempio,

$$\xi(x, t) = \xi(kx - \omega t) = a_0 + \sum_m [a_m \sin m(kx - \omega t) + b_m \cos m(kx - \omega t)],$$

valida per  $x = 0$  e per qualsiasi altro punto. La forma di  $\xi(x, t)$  resta cioè sempre eguale, come abbiamo ammesso. Notiamo però che è possibile una situazione diversa, in cui la forma della perturbazione cambia durante la propagazione, se la velocità delle singole onde armoniche, tutte di pulsazione diversa, dipende dalla pulsazione.

Si comprende pertanto in generale l'importanza dell'analisi di Fourier e delle onde armoniche. Se dobbiamo studiare la propagazione di un'onda di forma qualunque in un mezzo, si esegue l'analisi di Fourier della funzione d'onda e si esamina come si comportano le diverse onde armoniche. La soluzione del problema si ottiene sommando i singoli termini. Per tale motivo in seguito daremo particolare rilievo alle onde armoniche.

## 12.5 Onde longitudinali. Onde trasversali. Polarizzazione

Un'onda piana è caratterizzata da un'unica direzione di propagazione, che per semplicità abbiamo identificato con l'asse  $x$ . Se tutte le grandezze significative relative alla perturbazione che si propaga hanno direzione di variazione che coincide con l'asse  $x$ , ovvero se non c'è nessun'altra direzione fisicamente importante diversa da  $x$ , l'onda si dice *longitudinale*. Gli esempi visti finora riguardano un'onda elastica che si propaga lungo una sbarra solida o lungo una colonna di gas.

Invece in una corda tesa può avvenire la propagazione di una perturbazione consistente in uno spostamento trasversale rispetto all'asse  $x$ , che coincide con la posizione di quiete della corda oltre che con la direzione di propagazione. La perturbazione è funzione soltanto di  $x$  e del tempo, anche se avviene in un piano ortogonale a  $x$ , cioè lungo una direzione diversa da  $x$ . Un altro esempio molto importante di questo tipo di onda piana, che è detta *trasversale*, è costituito dalle onde elettromagnetiche piane.

In una qualunque onda trasversale, fissati arbitrariamente gli assi  $y$  e  $z$  in un piano ortogonale all'asse  $x$ , la funzione d'onda  $\xi(x, t)$  è rappresentabile come un vettore  $\xi(x, t)$ , le cui componenti sono  $\xi_y(x, t)$  e  $\xi_z(x, t)$ . Il vettore  $\xi$  può assumere ad un dato istante nei vari punti dell'asse  $x$  qualsiasi direzione ortogonale a  $x$  ovvero, fissato un punto, in esso al passare del tempo il vettore d'onda può assumere qualsiasi direzione ortogonale a  $x$ . In questo caso di dipendenza completamente casuale della direzione di  $\xi$  da  $x$  e  $t$  l'onda si dice *non polarizzata*. Oppure la variazione di direzione di  $\xi$  nel piano  $y, z$  in funzione di  $x$  e di  $t$  può essere espressa da una legge precisa e allora si dice che l'onda è *polarizzata*.

Considerando un'onda piana trasversale armonica le componenti si scrivono

$$\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \xi_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (12.19)$$

in cui  $\delta$  rappresenta la differenza di fase tra le due onde componenti. Le ampiezze  $\xi_{0y}$  e  $\xi_{0z}$  insieme a  $\delta$  permettono di costruire ovunque e in ogni istante la funzione d'onda  $\xi$ .

Esaminiamo prima alcuni casi in cui  $\delta$  ha un valore costante. Quando  $\delta = 0$  (componenti dell'onda in fase), in ogni punto dell'asse  $x$  e in ogni istante il vettore d'onda  $\xi$  ha direzione fissa, formante con l'asse  $y$  l'angolo  $\theta$  tale che

$$\tan \theta = \frac{\xi_z}{\xi_y} = \frac{\xi_{0z}}{\xi_{0y}} = \text{costante}$$

Polarizzazione rettilinea

Se  $\delta = \pi$  (componenti dell'onda in opposizione di fase) la situazione è la stessa, solo che la direzione di  $\xi$  forma con l'asse  $y$  l'angolo  $-\theta$ . In un dato istante l'onda è rappresentata da una sinusoida posta in un piano passante per l'asse  $x$  e formante l'angolo  $\theta$  ( $0 - \theta$ ) col piano  $x, y$ . Detta  $\xi_0$  l'ampiezza dell'onda, le ampiezze delle componenti sono  $\xi_{0y} = \xi_0 \cos \theta$ ,  $\xi_{0z} = \xi_0 \sin \theta$  e le componenti stesse si scrivono

$$\xi_y = \xi_0 \cos \theta \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \pm \xi_0 \sin \theta \sin(kx - \omega t), \quad (12.20)$$

dove il segno positivo corrisponde a  $\delta = 0$  e quello negativo a  $\delta = \pi$ . In una posizione fissata la perturbazione è un'oscillazione armonica nel suddetto piano di giacitura di  $\xi$ .

Quando, come nel caso appena descritto, il vettore  $\xi$  ha direzione fissa si dice che l'onda piana è *polarizzata rettilineamente* o *linearmente*; la direzione fissa di  $\xi$  è chiamata *direzione di polarizzazione* e il piano fisso in cui giace  $\xi$  è chiamato *piano di polarizzazione*.

Poniamo ora  $\delta = \pi/2$ : le (12.19) diventano

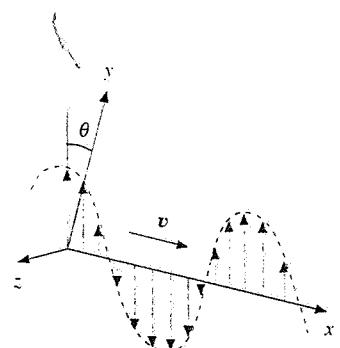


Figura 12.9

## Polarizzazione ellittica

$$\xi_y = \xi_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad \xi_z = \xi_{0z} \cos(kx - \omega t) \quad (12.21)$$

In una data posizione  $P$  di coordinata  $x_0$  le componenti dell'onda soddisfano in qualsiasi istante alla

$$\frac{\xi_y^2}{\xi_{0y}^2} + \frac{\xi_z^2}{\xi_{0z}^2} = 1 \quad , \quad (12.22)$$

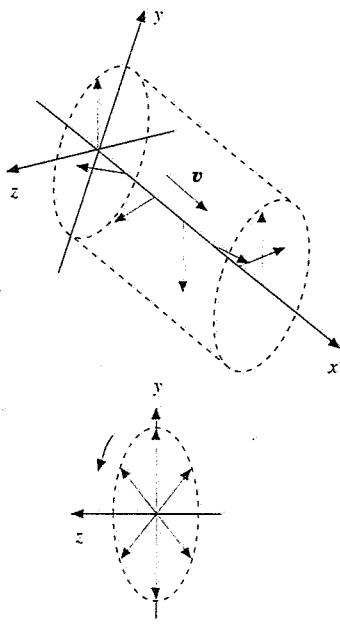


Figura 12.10

che è l'equazione di un'ellisse nel piano  $y, z$  con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati. Pertanto nel punto  $P$  al passare del tempo si vede la punta del vettore  $\xi$  descrivere un'ellisse; il periodo di rotazione è  $2\pi/\omega$ , il verso di rotazione appare orario guardando lungo il verso di propagazione, il modulo del vettore d'onda varia tra i valori  $\xi_{0y}$  e  $\xi_{0z}$ ; in qualsiasi istante modulo e direzione di  $\xi$  in  $P$  si ricavano da (12.21) in cui il termine  $kx$  è costante e vale  $kx_0$ .

In un dato istante  $t_0$  la direzione del vettore  $\xi$ , che ha le componenti (12.21) nei vari punti dell'asse  $x$ , è mostrata in figura 12.10: la punta del vettore  $\xi$  sta su una superficie che possiamo chiamare cilindrica con sezione ellittica e la proiezione sul piano  $y, z$  è sempre l'ellisse (12.22). Se ad esempio in un punto  $x$  il vettore  $\xi$  è parallelo e concorde all'asse  $y$ , esso ha la stessa direzione, verso e modulo nel punto di coordinate  $x + \lambda$ , mentre nei punti intermedi direzione, verso e modulo si ricavano da (12.21) in cui il termine  $\omega t$  è costante e vale  $\omega t_0$ .

Con  $\delta = 3\pi/2$  il fenomeno è lo stesso, ma il verso di rotazione è antiorario. Si parla in entrambi i casi di *onda polarizzata ellitticamente*.

Visivamente si deve immaginare che la figura 12.10, fotografia di  $\xi$  ad un certo istante, compia nel tempo una traslazione rigida, senza ruotare, lungo l'asse  $x$  con velocità pari alla velocità  $v = \omega/k$  dell'onda. È allora chiaro che in un qualsiasi piano fisso ortogonale a  $x$  attraversato dall'onda noi vediamo nei diversi istanti i vettori  $\xi$  relativi a diversi punti e che quindi  $\xi$  appare compiere un moto di rotazione.

Un caso particolare, con  $\delta = \pi/2$  o  $\delta = 3\pi/2$ , si ha quando  $\xi_{0y} = \xi_{0z} = \xi_0$ : l'equazione (12.22) dell'ellisse degenera in quella di una circonferenza,

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \xi_0^2 \quad ,$$

e l'onda è detta *polarizzata circolarmente*. L'ampiezza dell'onda è costante, per il resto valgono tutte le considerazioni fatte per la polarizzazione ellittica.

Più in generale, se lo sfasamento  $\delta$  ha un valore costante generico, la polarizzazione è ancora ellittica, ma gli assi dell'ellisse non sono paralleli agli assi coordinati.

Osserviamo che i vari casi esposti sono strettamente collegati alla composizione di moti armonici su assi ortogonali, che abbiamo studiato nel paragrafo 9.5 del primo volume.

Ritornando a quanto detto all'inizio del paragrafo concludiamo che le (12.19) con  $\delta$  costante costituiscono un preciso legame tra le componenti dell'onda armonica trasversale e quindi forniscono la legge di variazione della direzione e del modulo di  $\xi$ . Sull'esistenza di una tale legge si basa appunto la definizione di polarizzazione dell'onda trasversale. Risulta anche evidente che il concetto di polarizzazione perde significato per un'onda longitudinale.

Formalmente le (12.19) si usano anche per rappresentare un'onda piana armonica trasversale non polarizzata, ammettendo che  $\delta$  possa assumere qualsiasi valore al variare di  $x$  e  $t$ .

Gli argomenti trattati in questo paragrafo trovano un'applicazione molto importante nei fenomeni connessi con la propagazione delle onde elettromagnetiche, che studieremo nel capitolo 13 e in quelli successivi.

## Polarizzazione circolare

Onda trasversale  
non polarizzata

## 12.6 Onde sulla superficie di un liquido

Come ulteriore esempio di onda piana in un sistema materiale consideriamo le onde sulla superficie di un liquido. Pur essendo questo il fenomeno da cui ha origine il nome di onda, poi esteso a tutti gli altri campi, nella realtà è forse il caso più complicato da trattare analiticamente.

Un'onda piana sulla superficie di un liquido può essere generata da una piccola asta piatta che viene fatta oscillare verticalmente. Da questa sorgente hanno origine delle onde che si allontanano lungo la superficie; nella figura 12.11 sono mostrate le creste, che hanno un andamento rettilineo, parallelo all'asta; esse sono separate da una distanza pari alla lunghezza d'onda  $\lambda$ .

Qualitativamente, quando si applica una perturbazione sulla superficie di un liquido, si produce un moto degli elementi di liquido che stanno vicino alla superficie, come schematizzato nella figura 12.12. Gli spostamenti di ogni singolo elemento hanno componente sia orizzontale che verticale; che debba esserci anche un moto orizzontale lo si intuisce dal fatto che, essendo il liquido praticamente incompressibile, una parte del liquido deve spostarsi dagli avvallamenti verso le creste. In particolare un elemento sulla cresta e uno nell'avvallamento hanno soltanto moto orizzontale con verso opposto. Si dimostra che le traiettorie dei singoli elementi sono circolari, per cui lo spostamento orizzontale locale è in media nullo e quindi anche in queste onde (né longitudinali né trasversali) non si ha uno spostamento effettivo globale di materia sulla superficie.

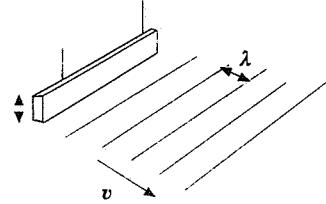


Figura 12.11

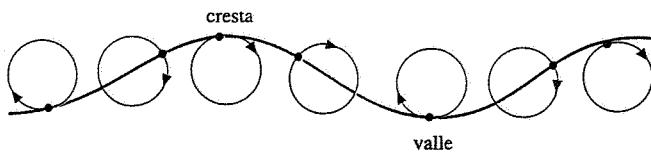


Figura 12.12

Nella dinamica intervengono vari tipi di forze: la forza peso del liquido, la pressione atmosferica, la tensione superficiale (vedi paragrafo 8.15 del primo volume). Un altro parametro importante è la profondità  $h$  del liquido che si confronta, come vedremo, con la lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda che si propaga. Invece si possono trascurare gli effetti della viscosità, almeno per liquidi poco viscosi come l'acqua.

Riportiamo soltanto il risultato relativo alla velocità di propagazione, valido per onde armoniche di piccola ampiezza:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right) \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad ; \quad (12.23)$$

Velocità di propagazione

$\rho$  è la densità del liquido,  $\tau$  la tensione superficiale. La tangente iperbolica è definita come

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Discussiamo la (12.23) in alcuni casi di interesse. Se la profondità  $h$  è molto maggiore della lunghezza d'onda, per cui  $2\pi h \gg \lambda$ , la tangente iperbolica assume valore unitario e la velocità di propagazione diventa

$$v = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}} \quad . \quad (12.24)$$

Onde in acqua profonda:  
velocità di propagazione

Nella figura 12.13 è rappresentata la (12.24) nell'acqua per valori di  $\lambda$  da  $10^{-4}$  m a  $10^2$  m e nella tabella a fianco sono riportati alcuni dati numerici, anche relativi alla frequenza, calcolata per ogni coppia di valori  $\lambda$ ,  $v$  tramite la (12.10).

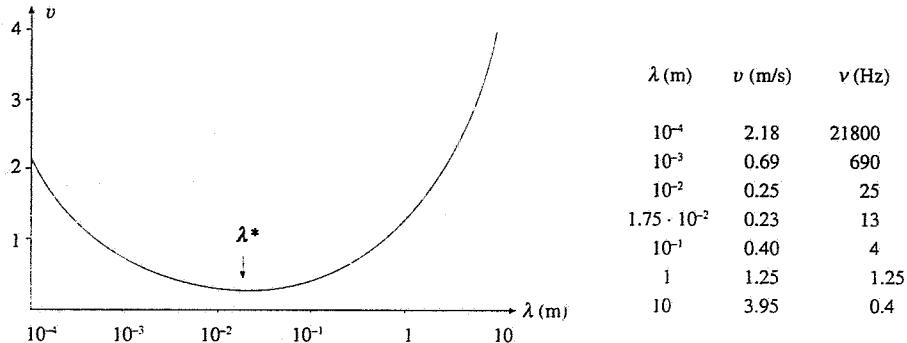


Figura 12.13

Il valore minimo della velocità si ha per quella lunghezza d'onda  $\lambda^*$  tale che i due termini sotto radice nella (12.24) siano eguali:

$$\frac{g \lambda^*}{2\pi} = \frac{2\pi \tau}{\rho \lambda^*} \Rightarrow \lambda^* = 2\pi \sqrt{\frac{\tau}{\rho g}}$$

Nell'acqua  $\tau = 75.6 \cdot 10^{-3}$  N/m,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\lambda^* = 1.75 \cdot 10^{-2}$  m,  $v_{\min} = 0.233$  m/s.  
Per  $\lambda \gg \lambda^*$  la *velocità di propagazione* vale

Onde di gravità:  
velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} \quad (12.25)$$

È questo il caso di maggiore interesse pratico, nel mare o nei laghi; l'effetto preponderante è dovuto alla gravità, per cui queste onde prendono anche il nome di *onde di gravità*.

Quando  $\lambda \ll \lambda^*$  la (12.24) diventa

Onde capillari:  
velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{2\pi \tau}{\rho \lambda}} \quad (12.26)$$

Nell'acqua, con  $\lambda = 10^{-3}$  m  $v = 0.69$  m/s. Queste onde sono dette anche *onde capillari*. Ad esempio si tratta delle increspature che si osservano sulla superficie del mare quando soffia un vento leggero che provoca perturbazioni di piccola lunghezza d'onda e grande frequenza.

Supponiamo ora che la profondità del liquido sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda:  $2\pi h \ll \lambda$  e dal confronto con (12.25) si vede che, a parità di lunghezza d'onda, la velocità è maggiore dove il liquido è profondo.

La (12.24) mostra una caratteristica particolare delle onde di superficie in un liquido profondo, completamente diversa in confronto a tutti i casi esaminati nei paragrafi precedenti: la velocità di propagazione è funzione della lunghezza d'onda, ovvero della frequenza. Questo fatto è molto importante per un'onda di forma qualunque: in base allo sviluppo in serie di Fourier essa è data da una sovrapposizione di termini armonici, ciascuno dei quali ha una frequenza diversa e pertanto si propaga con velocità diversa. La forma dell'onda viene così modificata durante la propagazione e si dice che l'onda tende a disperdersi.

Un mezzo in cui la velocità di propagazione dipende dalla frequenza si dice *dispersivo*. Ritorneremo sull'argomento nel paragrafo 12.11.

#### Nota. Altri casi di onde meccaniche

Accanto alle varie situazioni studiate ve ne sono altre in cui si hanno fenomeni di propagazione, in parte già richiamate alla fine del paragrafo 12.2.

In una sbarra solida oltre alle onde longitudinali si possono generare onde trasversali, applicando ad una estremità una sollecitazione ortogonale alla sbarra, e anche onde torsionali: queste si ottengono facendo agire su una base un momento torcente variabile nel tempo. Nell'onda torsionale lo spostamento di un singolo punto della sbarra consiste in una (piccola) rotazione attorno all'asse della sbarra, che è la direzione di propagazione. La velocità di entrambi i tipi di onda è  $v = \sqrt{G/\rho}$  dove  $G$  è il modulo di rigidità; i valori sono dello stesso ordine di grandezza di quelli delle onde longitudinali.

Invece in una colonna di gas non si possono avere onde trasversali in quanto il modulo di rigidità è praticamente nullo: un gas non reagisce ad uno sforzo di taglio, che comporta lo scorrimento di un elemento rispetto ad un altro.

Una molla tesa può essere sede di onde longitudinali, che si propagano con velocità  $v = \sqrt{k d / m}$  se  $k$  è la costante elastica della molla,  $d$  la lunghezza e  $m$  la massa.

## 12.7 Propagazione dell'energia. Intensità di un'onda

È semplice mettere in evidenza, con alcuni esempi, come alla propagazione di un campo che descrive un'onda si accompagni sempre una propagazione di energia. Se appendiamo un piccolo corpo ad una corda tesa e sollecitiamo un estremo con un impulso osserviamo che la massa si sposta quando passa l'onda per poi tornare in quiete negli istanti successivi. Allo stesso modo una barca in quiete viene messa momentaneamente in oscillazione dalle onde prodotte dal passaggio di un motoscafo. Oppure possiamo mantenere in moto oscillatorio armonico con una certa frequenza la membrana di un altoparlante e le onde che si propagano nell'aria circostante mantengono in movimento la membrana di un ricevitore o il timpano di un orecchio umano.

Per ottenere un'espressione del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica consideriamo una corda tesa con tensione  $T$  e densità lineare  $\rho_l$ : l'onda di spostamento trasversale è data dall'espressione

$$s = A \sin(kx - \omega t) \quad (12.28)$$

e si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad . \quad (12.29)$$

Seguendo la figura 12.15 indichiamo con  $T$  la forza esercitata su un elemento di corda centrato nel punto  $P$  da parte dell'elemento immediatamente a sinistra e con  $ds$  lo spostamento infinitesimo trasversale. Il lavoro infinitesimo vale  $dW = T \cdot ds$  e la corrispondente potenza è

$$P = \frac{dW}{dt} = T \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{\partial s}{\partial t} = -T \sin\alpha \frac{\partial s}{\partial t} \quad .$$

Questa è la potenza trasferita dall'onda all'elemento di corda, che acquista la velocità  $\partial s / \partial t$ . Come già visto nel paragrafo 12.2, si può porre  $\sin\alpha = \tan\alpha = \partial s / \partial x$  e l'espressione della potenza diventa

$$P = -T \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} = TA^2 \omega k \cos^2(kx - \omega t) \quad . \quad (12.30)$$

dove abbiamo utilizzato le derivate parziali di (12.28)

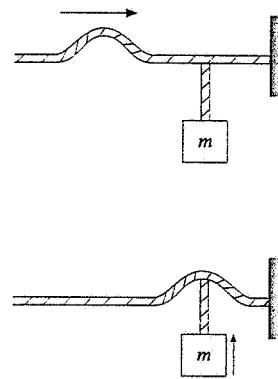


Figura 12.14

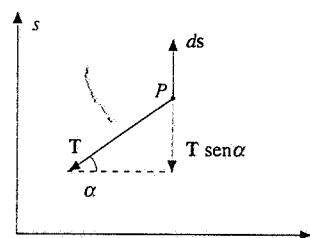


Figura 12.15

$$\frac{\partial s}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t) , \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

La forma di (12.30) indica che la potenza si propaga lungo la corda con la stessa velocità dell'onda di spostamento: abbiamo dunque trasporto di energia e conseguentemente di quantità di moto.

La potenza media trasmessa in un periodo, ricordando che il valore medio della funzione  $\cos^2 \theta$  è 1/2, risulta

$$P_m = \frac{1}{2} T \omega k A^2 ;$$

utilizziamo (12.29) per  $T$ , (12.6) per  $k$  e otteniamo

$$P_m = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2 v . \quad (12.31)$$

Sappiamo che a causa del passaggio dell'onda l'elemento di corda descrive un'oscillazione armonica di ampiezza  $A$  e pulsazione  $\omega$  rispetto alla posizione di equilibrio. La velocità massima del moto di oscillazione è  $v_{\max} = \omega A$  e quindi l'energia meccanica dell'elemento di corda, in accordo con quanto visto nel paragrafo 9.3 del primo volume, è

$$dU_{\text{mecc}} = \frac{1}{2} dm v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho_l dx \omega^2 A^2 ;$$

essa è costante durante l'oscillazione trasformandosi alternativamente da cinetica a potenziale. L'energia meccanica per unità di lunghezza è

$$w_l = \frac{dU_{\text{mecc}}}{dx} = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2$$

per cui la potenza media (12.31) diventa

$$P_m = w_l v , \quad (12.32)$$

prodotto della densità lineare di energia meccanica per la velocità di propagazione.

Consideriamo ora una sbarra di densità  $\rho$ , modulo di elasticità  $E$  e sezione  $\Sigma$ , in cui si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (12.33)$$

un'onda di spostamento longitudinale data ancora da (12.28). La forza esercitata su un elemento di sbarra da parte dell'elemento immediatamente a sinistra è la (7.2) del paragrafo 12.2 e la potenza è data da

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = -F \frac{\partial s}{\partial t} = -E \Sigma \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial t} ;$$

abbiamo tenuto conto del fatto che forza e spostamento sono paralleli e discordi (vedi figura 9.22 del paragrafo 12.2) e sostituito  $\Sigma$  a  $S$ . Deriviamo (12.28), utilizz-

ziamo (12.33) e (12.6), eseguiamo la media e otteniamo

$$P_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \Sigma$$

Infine, definendo la densità di volume di energia meccanica,

$$w_\tau = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

arriviamo a

$$P_m = w_\tau v \Sigma \quad . \quad (12.34)$$

La stessa espressione si ottiene per un'onda che si propaga in una colonna di gas (paragrafo 12.8). Per un'onda piana superficiale, come quelle descritte nel paragrafo 12.6, la potenza media si scrive

$$P_m = w_\Sigma v l \quad , \quad (12.35)$$

$w_\Sigma$  è la densità superficiale di energia meccanica,  $l$  è la sezione lineare dell'onda (nella figura 12.11 sarebbe una lunghezza confrontabile con quella dell'asta).

La potenza media trasportata dall'onda nel caso tridimensionale, cioè la (12.34), può essere ricavata anche con un ragionamento di questo tipo: presa una superficie di area  $\Sigma$ , ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda piana, nel tempo  $T$  passa attraverso  $\Sigma$  tutta l'energia contenuta nel volume (a monte di  $\Sigma$ ) che ha base  $\Sigma$  e altezza  $\lambda$ , essendo  $\lambda$  lo spazio percorso dall'onda nel tempo  $T$ . Il valore del volume è  $\Sigma \lambda = \Sigma v T$  e in esso è contenuta l'energia  $w_\tau \Sigma v T$ . Nel tempo  $T$  la potenza che passa attraverso  $\Sigma$  è  $w_\tau v \Sigma$ .

Dividendo (12.34) per  $\Sigma$  otteniamo una grandezza che dipende solo dalla densità di energia e dalla velocità di propagazione; questa grandezza si chiama *intensità dell'onda* e rappresenta il *valore medio dell'energia che passa attraverso una sezione ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di area*. L'espressione dell'intensità è

$$I = \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{\Sigma} = w_\tau v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad . \quad (12.36)$$

In modo analogo nel caso bidimensionale si definisce intensità dell'onda

$$I = \frac{1}{l} \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = \frac{P_m}{l} = w_\Sigma v \quad ; \quad (12.37)$$

il valore medio dell'energia che passa per unità di tempo attraverso l'unità di lunghezza posta perpendicolarmente alla direzione di propagazione. E, infine, nel caso unidimensionale, l'intensità coincide con la potenza media:

$$I = \left( \frac{dU_{\text{mecc}}}{dt} \right)_m = P_m = w_l v \quad . \quad (12.38)$$

Possiamo dire che vale sempre la formula generale

$$I = w_i v \quad (i = \tau, \Sigma, l)$$

Intensità di un'onda

dove  $w_i$  è la densità di energia relativa alla dimensione del sistema considerato, cioè energia per unità di volume, di superficie o di lunghezza. Bisogna notare che l'unità di misura dell'intensità non è la stessa nei tre casi, ma è rispettivamente  $\text{W/m}^2$ ,  $\text{W/m}$ ,  $\text{W}$ .

Nelle onde meccaniche esaminate l'energia, e quindi anche la densità di energia, è proporzionale a  $\omega^2$  e ad  $A^2$ : pertanto l'*intensità* di tali onde è *proporzionale al quadrato della pulsazione* (ovvero *della frequenza*) e al *quadrato dell'ampiezza dell'onda*.

### Esempio 12.2

In una corda, tesa con tensione  $T = 96 \text{ N}$  e avente densità lineare  $\rho_l = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Kg/m}$ , si vogliono produrre onde armoniche di frequenza  $v = 5 \text{ Hz}$  e ampiezza  $A = 5 \text{ cm}$ . Determinare tutti i parametri che descrivono l'onda, la velocità massima dei punti della corda e l'intensità dell'onda.

#### Soluzione

La velocità di propagazione dell'onda secondo (12.29) vale

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = 40 \text{ m/s}$$

Gli altri parametri sono:

$$\omega = 2 \pi v = 31.4 \text{ rad/s}, k = \frac{\omega}{v} = 0.785 \text{ rad/m}, \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\omega} = 8 \text{ m}$$

La velocità massima dei punti della corda risulta

$$v_{\max} = \omega A = 1.57 \text{ m/s}$$

ed è bene notare che tale valore non deve essere confuso con la velocità di propagazione dell'onda  $v = 40 \text{ m/s}$  (le due velocità sono legate dalla relazione  $v_{\max} = \omega A = k v A$ , ma hanno chiaramente significato fisico ben diverso).

La densità lineare di energia vale

$$w_l = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2 = 7.4 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}$$

e l'intensità, pari alla potenza media, è

$$I = w_l v = 2.96 \text{ W}$$

L'origine del flusso di energia che abbiamo caratterizzato con la grandezza *intensità* è nella sorgente delle onde: in essa viene compiuto un certo lavoro meccanico che poi compare come energia trasportata dall'onda. Se questa è impulsiva, nel senso che la perturbazione ha una breve durata, troviamo ovviamente la stessa caratteristica nel trasporto di energia: un elemento del sistema in quiete viene messo in moto attraverso una cessione di energia da parte dell'elemento che lo precede e poi cede la stessa energia all'elemento successivo ritornando in quiete. Se invece il fenomeno è continuo, come in un'onda armonica, c'è un flusso continuo di energia che non si accumula in nessun punto del sistema: un elemento continua a ricevere una data energia dall'elemento precedente e la cede integralmente a quello successivo, restando però in movimento appunto perché il flusso di energia è continuo.

La trasmissione integrale di energia è sempre un caso limite: sia a causa di attriti interni che della cessione di energia all'ambiente l'energia trasmessa diminuisce mentre l'onda avanza. Si parla di *assorbimento*, ma per ora ci limitiamo soltanto a menzionare il fenomeno.

## 12.8 Intensità delle onde sonore. Battimenti

Ripetiamo per un'onda sonora in una colonna di gas il calcolo dell'intensità con lo scopo di mostrare che il risultato (12.36) è valido anche in tale sistema. Dalla (9.36) del primo volume riportata nel paragrafo 12.2 abbiamo che la forza su un elemento della colonna, di sezione  $\Sigma$ , è

$$(p - p_0) \Sigma = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} \Sigma ,$$

avendo indicato con  $\beta$  il modulo di compressibilità e con  $s = A \sin(kx - \omega t)$  l'onda armonica di spostamento che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad . \quad (12.39)$$

La potenza è

$$P = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} \Sigma \frac{\partial s}{\partial t}$$

ovvero, derivando l'espressione di  $s$  e passando al valor medio,

$$P_m = \frac{1}{2} \beta \omega k A^2 \Sigma$$

Si usano (12.39), (12.6) e si ottiene anche ora

$$P_m = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v \Sigma = w_r v \Sigma \quad , \quad I = w_r v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v \quad .$$

All'onda di spostamento si accompagna un'onda di pressione; sempre dalla (9.36) sopra citata abbiamo

$$\Delta p = p - p_0 = -\beta \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta k A \cos(kx - \omega t) = \rho_0 v \omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) :$$

L'onda di pressione è in quadratura di fase con l'onda di spostamento e la sua ampiezza vale

$$(\Delta p)_{\max} = \rho_0 v \omega A \quad .$$

Per l'intensità possiamo quindi avere le due espressioni equivalenti

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 v = \frac{(\Delta p)_{\max}^2}{2\rho_0 v} \quad .$$

Poiché vogliamo riferirci alle onde sonore in aria percepite dall'orecchio umano, esprimiamo  $\omega$  in funzione della frequenza  $v$ , come si fa correntemente, e otteniamo

$$(\Delta p)_{\max} = 2 \pi v \rho_0 v A \quad , \quad (12.40)$$

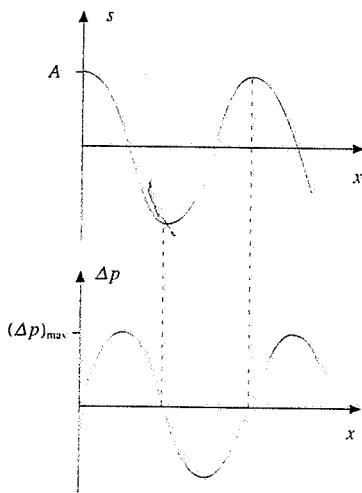


Figura 12.16

$$I = 2\pi^2 v^2 A^2 \rho_0 v = \frac{(\Delta p)_{\max}^2}{2\rho_0 v} \quad (12.41)$$

I dati numerici di riferimento per l'aria a 20° C sono  $\rho_0 = 1.29 \text{ Kg/m}^3$  e  $v = 343 \text{ m/s}$ .

### Caratteristiche fisiche dell'orecchio. Fonometria

L'apparato rivelatore del suono negli esseri umani è l'orecchio e più precisamente il timpano, una membrana elastica che viene posta in vibrazione dalla pressione esercitata su di essa dall'onda sonora. Per essere messo in movimento il timpano ha bisogno di un'intensità minima. Nella figura 12.17 la curva inferiore rappresenta la *soglia di udibilità* in funzione della frequenza, intesa come intensità minima al di sotto della quale il suono non è udibile. La curva superiore rappresenta, sempre in funzione della frequenza, la *soglia del dolore*, cioè l'intensità al di sopra della quale si percepisce una sensazione dolorosa; per intensità molto più grandi della soglia del dolore si possono produrre lesioni permanenti nel timpano. L'ordinata a sinistra dà l'intensità in  $\text{W/m}^2$ , quella a destra la corrispondente ampiezza dell'onda di pressione, in Pa. Si osservi che le scale sono logaritmiche in base 10. L'ascissa va da 20 a 20000 Hz, che sono approssimativamente i limiti dell'intervallo delle frequenze udibili; le curve sono disegnate da circa 25 a circa 15000 Hz. Il limite superiore 20000 Hz in effetti non è facilmente raggiungibile e in ogni caso scende rapidamente a 15000 Hz e anche al di sotto con l'età.

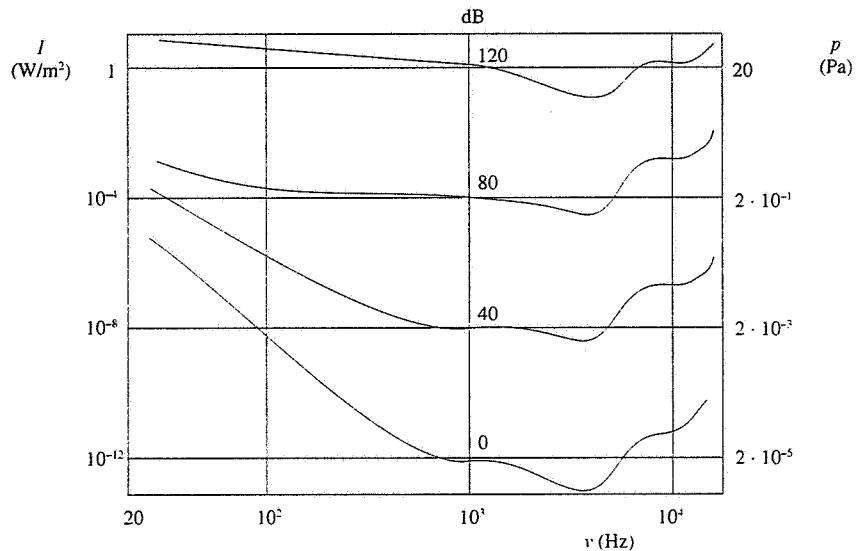


Figura 12.17

Normalmente si assume come soglia minima dell'udibilità l'intensità  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  alla frequenza  $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ . Il corrispondente valore dell'ampiezza dell'onda di pressione, secondo (12.41), è

$$(\Delta p)_{\max} = \sqrt{2 \rho_0 v I_0} = 2.97 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

L'orecchio umano è pertanto in grado di percepire fluttuazioni relative della pressione atmosferica dell'ordine di  $(\Delta p)_{\max} / p_0 = 2.97 \cdot 10^{-5} / 1.01 \cdot 10^5 \approx 3 \cdot 10^{-10}$ , cioè di 3 parti su  $10^{10}$ . L'ampiezza delle oscillazioni delle molecole d'aria in corrispondenza alla soglia minima e a  $10^3 \text{ Hz}$  si ricava da (12.40):

$$A = \frac{(\Delta p)_{\max}}{2\pi v \rho_0 v} = 1.07 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

inferiore al diametro delle molecole, che è dell'ordine di  $10^{-10}$  m.

All'altro estremo, se eseguiamo gli stessi calcoli con  $I = 1 \text{ W/m}^2$ , si ha:

$$(\Delta p)_{\max} = 29.7 \text{ Pa}, A = 1.07 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 10.7 \mu\text{m}$$

Riassumendo, la capacità uditiva dell'orecchio si estende su 3 ordini di grandezza in frequenza, 12 ordini di grandezza in intensità e 6 ordini di grandezza in ampiezza di oscillazione.

Rispetto alla soglia di udibilità  $I_0$  si definisce il *livello sonoro B* di una certa intensità  $I$  tramite la formula

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}; \quad (12.42)$$

Livello sonoro

con il simbolo log mettiamo in evidenza che si tratta di logaritmi decimali. Per  $I = 10 I_0$   $B = 10$ , per  $I = 100 I_0$   $B = 20$  e così via; l'unità di misura di  $B$  è il *decibel* (simbolo dB). Dalla (12.42) si ricava che il livello sonoro dell'intensità di riferimento è zero e che l'intensità corrispondente a un livello sonoro di  $B$  dB rispetto al riferimento è data da

$$I = I_0 10^{B/10};$$

in particolare  $B = 1 \text{ dB}$  vuol dire  $I = I_0 10^{1/10} \approx 1.256 I_0$ .

Nella figura 12.17 sono segnati, in corrispondenza a  $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ , i livelli sonori rispetto al valore  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ; il livello sonoro della soglia del dolore è 120 dB.

Notiamo che, essendo definito tramite un rapporto, il livello sonoro non dipende dal valore di riferimento  $I_0$  e quindi nemmeno dalla frequenza. La curva di soglia di udibilità della figura 12.17 mostra che l'intensità minima è funzione della frequenza,  $I_0(\nu)$ , anche se un certo livello sonoro  $B$  individua un determinato rapporto tra  $I$  e  $I_0$ , che è lo stesso a qualsiasi frequenza. Naturalmente, a parità di  $B$ , se varia  $I_0$  varia  $I$ : eguale livello sonoro non vuol dire eguale intensità, ma eguale intensità relativa.

Una definizione logaritmica tipo (12.42) è utile quando si hanno notevoli variazioni delle grandezze in esame come nel caso dell'intensità cui è sensibile l'orecchio; e infatti l'unità decibel è estesa ad altre situazioni simili (ad esempio si esprime in dB l'amplificazione di un circuito amplificatore) e viene utilizzata anche quando invece di esponenti positivi (come  $10^n I_0$ ) si hanno esponenti negativi ( $10^{-n} I_0$ ): in tal caso il numero di dB è negativo.

L'andamento della curva di soglia di udibilità mostra che la sensibilità dell'orecchio varia notevolmente con la frequenza; essa inoltre dipende dal livello sonoro. Nella figura 12.17 sono mostrate due altre curve che sono costruite nel modo seguente. Supponiamo di produrre a 1000 Hz un livello sonoro  $B = 40 \text{ dB}$ , che dà una certa sensazione sonora; si cerca poi alle altre frequenze quali livelli sonori producano la stessa sensazione uditiva. Si trova che non si tratta sempre di  $B = 40 \text{ dB}$ ; ad esempio alle basse frequenze la stessa sensazione uditiva è ottenuta con valori di  $B$  inferiori: a 100 Hz si ha con  $I = 10^2 I_0$  la stessa sensazione prodotta a 1000 Hz da  $I = 10^4 I_0$ . I valori di  $B$  che producono la stessa sensazione uditiva di  $B = 40 \text{ dB}$  a 1000 Hz stanno su una curva che è detta *isofonica*, diversa come forma dalla curva di minima udibilità. Allo stesso modo è costruita la curva isofonica con  $B = 80 \text{ dB}$  a 1000 Hz, ancora diversa dalla precedente. È chiaro che in queste misure c'è un notevole grado di soggettività e che esse vanno mediate su molte determinazioni.

Le curve isofoniche sono dunque curve di eguale *sensazione sonora S* e non curve di eguale livello sonoro  $B$ , sempre con riferimento alla curva di minimo. Il valore della sensazione sonora si assume eguale a quello del livello sonoro a 1000 Hz, ma si indicano con una unità diversa, il *fon*: le due curve disegnate sono perciò le curve isofoniche a 40 fon e a 80 fon.

Le due grandezze  $S$ , fisiologica, e  $B$ , fisica, non sono quindi proporzionali; però oltre 1000 Hz le curve sono abbastanza simili, quasi ottenibili per traslazione una dall'altra. Se ciò fosse rigorosamente vero varrebbe la legge

$$S = k B = k 10 \log \frac{I}{I_0} = k' \log \frac{I}{I_0}, \quad (12.43)$$

detta *legge psicofisica di Fechner e Weber*. La (12.43) si scrive anche

$$S_2 - S_1 = k' \log \frac{I_2}{I_1};$$

Decibel

la variazione di sensazione sonora è proporzionale al logaritmo del rapporto tra le intensità che hanno prodotto le sensazioni.

Nella realtà la risposta dell'orecchio (sensazione sonora) all'intensità che lo colpisce è approssimativamente logaritmica alle medie ed alte frequenze, dove è proporzionale al livello sonoro, ma si discosta sostanzialmente da questo comportamento al di sotto di 1000 Hz.

Le misure di intensità sonora e livello sonoro possono esser eseguite con strumenti, detti *fonometri*, opportunamente tarati in fon o in dB. Nella tabella 12.1 sono riportati alcuni valori indicativi di livello sonoro di varie sorgenti, percepite alle distanze usuali del loro ascolto.

Sorgente del suono	Livello sonoro (dB)
motore a reazione (nelle vicinanze)	150
martello pneumatico	130
concerto rock	120
traffico intenso	80
conversazione normale	50
sussurro	20

La normativa italiana fissa a 80 dB il valore massimo del rumore negli ambienti di lavoro, quali ad esempio le officine meccaniche in cui operano macchine utensili.

### Ultrasuoni

Le onde sonore con frequenza superiore al limite di udibilità ( $2 \cdot 10^4$  Hz) sono dette *ultrasuoni*. Questo termine viene utilizzato fino a frequenze dell'ordine di  $10^9$  Hz, oltre le quali si parla di *ipersuoni*; le massime frequenze ottenute arrivano a  $10^{11}$  Hz.

Alle frequenze degli ultrasuoni corrispondono, nei mezzi di propagazione più comuni, che sono l'aria ( $v = 340$  m/s) e l'acqua ( $v = 1500$  m/s), lunghezze d'onda molto piccole e ciò permette di formare fasci di ultrasuoni sottili e ben collimati, che non subiscono diffrazione in modo apprezzabile (vedi capitolo 16) e sono utilizzati in numerose applicazioni.

Nella tecnica gli ultrasuoni vengono usati ad esempio per studi di imperfezioni di metalli, per pulire a fondo superficie di svariati materiali, per misurare la distanza di eventuali ostacoli in condizioni di non visibilità (*sonar*); anche in medicina l'uso è diffuso, sia per terapie che per indagini diagnostiche (*ecografia*).

### Battimenti

Il fenomeno dei *battimenti* tra due oscillazioni armoniche di pulsazione diversa è stato trattato nel paragrafo 9.4 del primo volume. Esso si verifica anche nella propagazione delle onde e quindi riprendiamo l'argomento, con particolare riferimento alle onde sonore. In queste infatti i battimenti sono facilmente osservabili; bisogna ricordare però che essi si possono verificare con qualsiasi tipo di onda.

Nel paragrafo 12.11 vedremo il fenomeno in generale; adesso invece concentriamo l'attenzione su ciò che accade in un punto  $P$ , che potrebbe essere un orecchio o uno strumento di ricezione, interessato da due onde sonore piane armoniche di eguale ampiezza e pulsazioni diverse,  $\omega_1 = 2\pi\nu_1$  e  $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ , con  $\omega_1 > \omega_2$ , che arrivano in  $P$  dalla stessa direzione. Sappiamo che in un punto fisso la funzione d'onda descrive un'oscillazione armonica e scriviamo semplicemente

$$s_1 = A \sin \omega_1 t, \quad s_2 = A \sin \omega_2 t,$$

ammettendo anche che lo sfasamento sia nullo. La sovrapposizione delle due oscillazioni dà

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

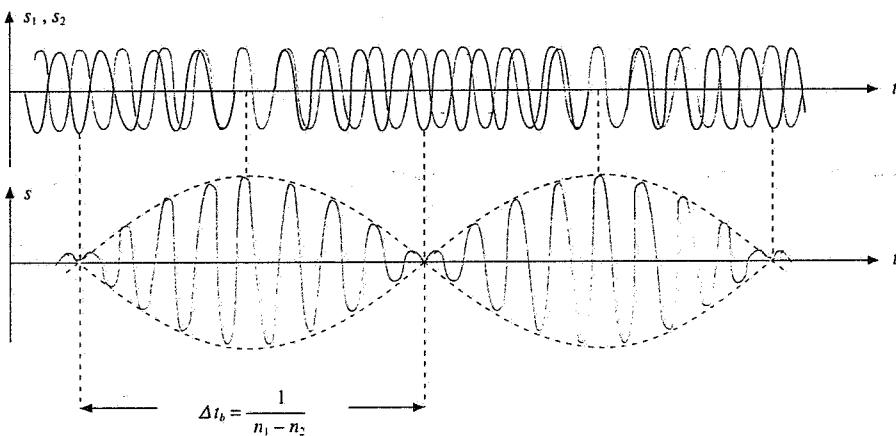


Figura 12.18

Definendo

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

si ha

$$s = 2A \cos \Omega t \sin \omega t \quad (12.44)$$

L'oscillazione nel punto  $P$  non è più armonica in quanto l'ampiezza non è costante, ma a sua volta varia in modo armonico nel tempo (*modulazione di ampiezza*). Se le due pulsazioni sono quasi uguali la pulsazione  $\omega$  è molto prossima sia a  $\omega_1$  che a  $\omega_2$ , mentre la pulsazione  $\Omega$  è molto inferiore a  $\omega$ .

Nell'intervallo delle frequenze udibili l'orecchio percepisce un suono di frequenza

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

la cui intensità varia periodicamente nel tempo. La legge di variazione dell'intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di (12.44), ha la forma

$$I = I_{\max} \cos^2 \Omega t = I_{\max} \cos^2 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t.$$

Il periodo della funzione  $\cos^2 \Omega t$  è la metà del periodo della funzione  $\cos \Omega t$  e quindi la corrispondente frequenza è doppia; l'orecchio percepisce una variazione dell'intensità con frequenza

$$\nu_b = \nu_1 - \nu_2,$$

Frequenza di battimento

detta *frequenza di battimento*, molto inferiore a  $v$  se  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono poco diverse.

Supponiamo ad esempio che sia  $\nu_1 = 438$  Hz e  $\nu_2 = 442$  Hz; l'orecchio percepisce la frequenza  $v = 440$  Hz e la frequenza di battimento  $\nu_b = 4$  Hz, sente cioè variare l'intensità 4 volte al secondo (si noti che questa frequenza  $\nu_b$  non è quella di vibrazione del timpano). Il limite fisiologico è  $\nu_b = 10$  Hz; per valori superiori le variazioni dell'intensità sono troppo rapide per essere percepiti. Con questo esempio si precisa il quadro delle caratteristiche dell'orecchio come ricevitore sonoro.

Il fenomeno dei battimenti può essere usato per confrontare una frequenza non nota  $v$  poco diversa da una frequenza nota  $\nu_0$ : dalla frequenza di battimento si risale al valore di  $v$ .

## 12.9 Onde in più dimensioni

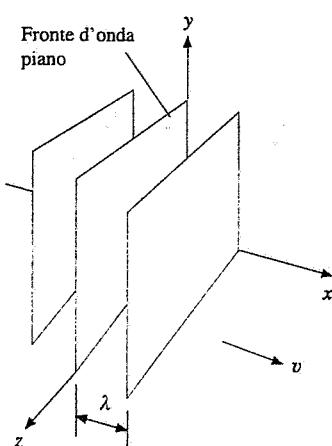


Figura 12.19

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito un'onda piana come un'onda che si propaga in un'unica direzione. Se la direzione di propagazione coincide con l'asse  $x$  e l'onda è armonica, la funzione d'onda si scrive  $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ . Il valore della funzione è costante su ogni piano ortogonale alla direzione di propagazione; nei punti di un tale piano è quindi costante la fase  $\phi = kx - \omega t$ : tutti i punti del piano oscillano in fase tra loro. E in effetti, quando diciamo che l'onda si propaga lungo l'asse  $x$ , non intendiamo che il fenomeno sia localizzato nei punti dell'asse  $x$ , ma che è lo stesso in tutti i punti con la stessa  $x$ : in una sbarra o in una colonna di gas di sezione finita oscillano in fase tutti gli elementi appartenenti alla stessa sezione  $\Sigma$  ortogonale all'asse  $x$ .

Si definisce come *fronte d'onda* una superficie su cui in un certo istante la fase è costante. Per un'onda piana il fronte d'onda è un piano o quanto meno una porzione di piano. Il fronte d'onda piano si sposta con la velocità  $v$  di propagazione dell'onda, in accordo con (12.11), percorrendo una distanza pari alla lunghezza d'onda  $\lambda$  in un tempo pari al periodo  $T$  dell'onda; due fronti d'onda consecutivi, tra i quali ci sia la differenza di fase  $2\pi$ , distano tra loro di  $\lambda$ . I segmenti tracciati nella figura 12.11 possono essere interpretati come fronti d'onda distanti  $\lambda$ .

Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda piana, che dipende da come è fatta la sorgente, ma non dal sistema di coordinate, si introduce il *vettore di propagazione*  $\mathbf{k}$ , che ha modulo  $k = 2\pi/\lambda$  e direzione e verso eguali a quelli di  $\mathbf{v}$ . Detto  $\mathbf{r}$  il raggio vettore che individua un punto  $P$  di un certo fronte d'onda piano, abbiamo

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k r \cos \theta = k x$$

e la funzione d'onda si può scrivere

$$\xi = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad . \quad (12.45)$$

L'invarianza del prodotto scalare  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  assicura che (12.45) costituisce l'espressione generale di un'onda armonica piana, indipendentemente dal sistema di coordinate prescelto per la descrizione analitica; la direzione di propagazione è quella del vettore  $\mathbf{k}$ , i fronti d'onda sono i piani ortogonali a tale direzione, luogo dei punti in cui è costante la fase  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ .

In un generico sistema di coordinate cartesiane

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z$$

e la (12.45) diventa

$$\xi = \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad . \quad (12.46)$$

con

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad . \quad (12.47)$$

In tale sistema di coordinate l'*equazione generale delle onde piane* è

Equazione generale  
delle onde piane

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \quad (12.48)$$

Si verifica facilmente, servendosi anche di (12.47), che (12.46) è soluzione di (12.48). Se l'ambiente in cui avviene la propagazione è bidimensionale, ad esempio il piano  $x, y$ , (12.48) diventa

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \quad (12.49)$$

Nel caso di onde piane le (12.48) e (12.49) possono essere sempre ricondotte, con una trasformazione di coordinate, alla forma (12.1) tipica dell'onda piana.

L'interesse di (12.48) e (12.49) sta però nel fatto che esse ammettono soluzioni diverse da quelle tipo onda piana. Precisamente, nel caso tridimensionale sono soluzioni di (12.48) anche onde con *fronte d'onda sferico* e onde con *fronte d'onda cilindrico*: le prime sono emesse da sorgenti con simmetria sferica, al limite puntiformi, le seconde da una sorgente distribuita lungo una linea. Il fronte d'onda può essere sferico solo se la velocità di propagazione della perturbazione è la stessa in tutte le direzioni; nel caso di simmetria cilindrica la velocità deve essere la stessa almeno per tutte le direzioni ortogonali all'asse su cui sta la sorgente. Onde circolari in due dimensioni si hanno da una sorgente al limite puntiforme se la velocità di propagazione non dipende dall'angolo. Un mezzo isotropo soddisfa certamente alla condizione che la velocità sia la stessa in tutte le direzioni.

Alla simmetria del fronte d'onda non si accompagna necessariamente una simmetria dell'intensità. Avremo modo di vedere come in un'onda sferica si possa avere un'intensità che varia con l'angolo rispetto ad una certa direzione significativa; tale proprietà dipende dalla sorgente più che dal mezzo.

La nozione di fronte d'onda piano, sferico, cilindrico o di qualsiasi altra forma, porta con sé quella di *raggio*. Si chiama così la *linea ortogonale al fronte d'onda in un dato punto che rappresenta, in quel punto, la direzione di propagazione dell'onda e dell'energia ad essa associata*. Per fronti d'onda generici i raggi possono essere linee curve; nel caso di fronti d'onda piani essi sono rette ortogonali ai fronti d'onda, per fronti d'onda sferici sono le semirette uscenti dal centro delle superficie sferiche, per fronti d'onda cilindrici le semirette ortogonali all'asse delle superficie cilindriche.

Molte proprietà delle onde possono essere descritte per mezzo dei raggi, come vedremo soprattutto nella propagazione delle onde luminose.

### Onde elastiche in una membrana tesa

Per dimostrare come si possa arrivare direttamente all'equazione (12.49) consideriamo una membrana piana tesa con tensione  $T$ . Questa tensione, che è una forza per unità di lunghezza, può essere messa in evidenza praticando un piccolo taglio lungo  $d$ : per mantenere uniti i bordi bisogna applicare ortogonalmente al taglio due forze eguali e contrarie, ciascuna pari in modulo a  $Td$ . La situazione ricorda quella della tensione superficiale di un liquido (paragrafo 8.15 del volume primo).

La perturbazione consiste in uno spostamento  $s(x, y, t)$  di un elemento di membrana di area  $dx dy$  e massa  $dm = \rho_x d\Sigma = \rho_x dx dy$ , dove  $\rho_x$  è la densità superficiale; lo spostamento è ortogonale al piano  $x, y$ . Sui due lati lunghi  $dx$ , distanti tra loro  $dy$ , agiscono le due forze  $(T dx)_1$  e  $(T dx)_2$ , uguali in modulo, ma diverse in direzione. La situazione è identica a quella della corda tesa vista nel paragrafo 12.2 e concludiamo che la risultante lungo l'asse  $z$  è

$$dF_1 = T dx \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} dx dy .$$

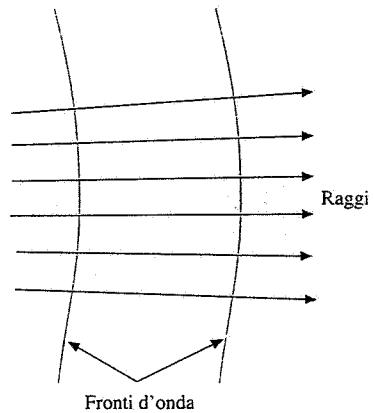


Figura 12.21

Raggio

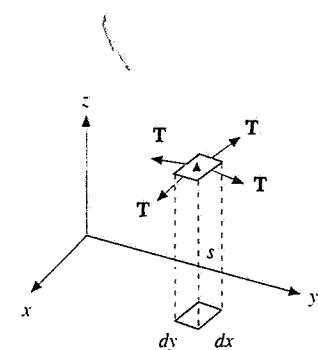


Figura 12.22

Analogamente, per le forze agenti sui lati lunghi  $dy$  e distanti tra loro  $dx$ , la risultante è

$$dF_2 = T dy \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx = T \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx dy .$$

In totale la forza lungo l'asse z è

$$dF_1 + dF_2 = T \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) dx dy$$

e deve essere eguale al prodotto massa per accelerazione dell'elemento:

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) dx dy = \rho_\Sigma dx dy \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\rho_\Sigma}{T} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} ,$$

coincidente con (12.49). Si tratta di onde elastiche trasversali che si propagano con velocità  $v = \sqrt{T/\rho_\Sigma}$ .

La forma dei fronti d'onda dipende da come viene generata la perturbazione.

### Onde sferiche e circolari

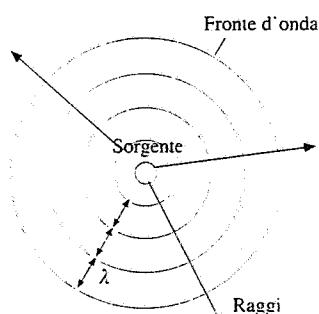


Figura 12.23

Un'onda prodotta da una sorgente puntiforme posta nel punto  $O$  si propaga in tutte le direzioni e il fronte d'onda risulta sferico con centro in  $O$  se la velocità di propagazione è la stessa in tutte le direzioni, cioè se il mezzo è *isotropo*.

La funzione d'onda di un'onda sferica armonica è

$$\xi(r, t) = A(r) \sin(kr - \omega t) ;$$

$r$  è la distanza da  $O$  e l'ampiezza  $A$  può essere funzione di  $r$ , ma non della direzione di emissione, per ragioni di simmetria essendo la sorgente puntiforme.

Dai risultati del paragrafo 12.7 sappiamo che l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza,  $I(r) = CA^2(r)$ , dove la costante  $C$  dipende dalla natura dell'onda. La potenza media trasmessa attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  è

$$P_m = I \Sigma = CA^2(r) 4 \pi r^2$$

e deve risultare costante qualunque sia il valore di  $r$ , in quanto corrisponde alla potenza media emessa dalla sorgente. Pertanto  $A(r)$  risulta inversamente proporzionale a  $r$ ,  $A(r) = \xi_0/r$ , e la *funzione d'onda dell'onda sferica armonica* ha la struttura

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t) . \quad (12.50)$$

Di conseguenza l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Ripetiamo che le relazioni

Onda sferica armonica

Ampiezza e intensità di un'onda sferica

$$A = \frac{\xi_0}{r} , \quad I = \frac{I_0}{r^2} \quad (12.51)$$

derivano soltanto dalla conservazione dell'energia e dalla geometria del problema.

Per una sorgente a simmetria sferica reale, che non può essere puntiforme, ma ha raggio  $r_0$ , le considerazioni fatte valgono per  $r \gg r_0$ .

Se l'onda sferica è sonora, dal paragrafo 12.8 e da (12.50) abbiamo, detta  $A_0$  la costante  $\xi_0$ ,

$$\Delta p = \frac{\rho_0 v \omega A_0}{r} \cos(kr - \omega t), \quad I(r) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \frac{A_0^2}{r^2} v$$

L'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas e l'ampiezza dell'onda di pressione diminuiscono come  $1/r$ .

La (12.50) può essere ricavata direttamente. Ammettendo la simmetria sferica vale la (3.30),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \nabla^2 \xi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

ed è semplice provare che l'ultimo membro è eguale a  $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2}$ . Abbiamo quindi da (12.48)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{r}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial t^2},$$

essendo lecito l'ultimo passaggio in quanto la derivata parziale rispetto al tempo è fatta a  $r$  costante. Abbiamo così dimostrato che in presenza di simmetria sferica la funzione  $r \xi$  è soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale in  $r$  e  $t$ ; ne segue che  $r \xi$  è eguale a una  $f(r \pm vt)$ . Nel caso di onde armoniche

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr \pm \omega t).$$

### Esempio 12.3

La potenza media di un'onda sonora sferica uscente da un altoparlante è  $P_m = 10 \text{ W}$ . Calcolare l'intensità  $I_1$  alla distanza di 1 m e la distanza  $r_2$  alla quale il livello sonoro è  $B_2 = 40 \text{ dB}$ .

#### Soluzione

Per  $r = 1 \text{ m}$   $I_1 = P_m / 4 \pi r^2 = 0.796 \text{ W/m}^2$ . Detta  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  la soglia di udibilità, il livello sonoro a 1 m è  $B_1 = 10 \log (I_1 / I_0) \approx 119 \text{ dB}$ , corrispondente all'incirca alla soglia del dolore.

Il livello sonoro  $B_2 = 40 \text{ dB}$  corrisponde a un'intensità  $I_2$  tale che

$$\log \frac{I_2}{I_0} = \frac{B_2}{10} = 4, \quad I_2 = 10^4 I_0 = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

e quindi  $r_2 = \sqrt{P_m / 4 \pi I_2} = 8921 \text{ m} = 8.921 \text{ km}$ .

In realtà, a causa dei processi di assorbimento, l'intensità diminuisce molto più rapidamente allontanandosi dalla sorgente. Il fenomeno avviene anche per le onde piane, che teoricamente dovrebbero avere ampiezza costante.

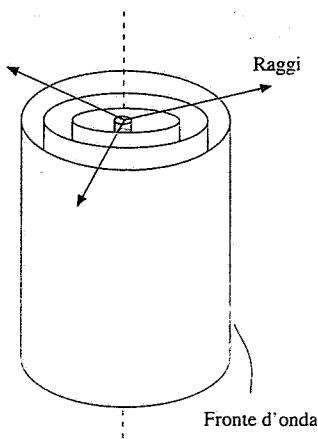


Figura 12.24

All'aumentare della distanza dalla sorgente i fronti d'onda sferici hanno raggio sempre maggiore per cui, se si considera una porzione limitata del fronte d'onda, la superficie sferica tende a confondersi con un piano; lontano dalla sorgente ogni piccola porzione di onda sferica può quindi essere approssimata con un'onda piana. In queste condizioni l'ampiezza dell'onda sferica può essere considerata costante, come richiede la definizione di onda piana, se ci si limita a variazioni di distanza non troppo grandi. Nella pratica spesso un'onda piana viene generata a partire da un'onda sferica, delimitando con un opportuno diaframma un fronte sferico molto distante dalla sorgente o, come si fa in ottica, utilizzando una lente (Capitolo 17).

Quanto detto per le onde sferiche si ripete, con le ovvie modifiche, per le onde circolari in un piano. In particolare valgono le (12.51) per la dipendenza dell'ampiezza e dell'intensità dalla distanza  $r$  dalla sorgente.

### Onde cilindriche

Le onde cilindriche hanno fronti d'onda che sono superficie cilindriche coassiali: sull'asse delle superficie è posta la sorgente. Nella pratica la produzione di onde cilindriche può avvenire da parte di una serie di sorgenti puntiformi distribuite lungo un asse e che oscillano tutte con la stessa fase.

Detta  $r$  la distanza dalla sorgente, misurata lungo un raggio ortogonale alla sorgente, e supponendo che le onde siano armoniche, possiamo ripetere il ragionamento sull'intensità già fatto per le onde sferiche. Presa una superficie cilindrica  $\Sigma = 2\pi rh$ , cioè di raggio  $r$  e altezza  $h$ , la potenza media che la attraversa è

$$P_m = I(r) \Sigma = CA^2(r) 2\pi rh$$

e deve essere costante al variare di  $r$ : ciò comporta che l'intensità sia inversamente proporzionale a  $r$  e l'ampiezza a  $\sqrt{r}$ . La funzione d'onda di un'onda cilindrica armonica è

Onda cilindrica armonica

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \quad (12.52)$$

e l'intensità ha l'espressione

Intensità di un'onda cilindrica

$$I = \frac{I_0}{r} \quad . \quad (12.53)$$

A grande distanza dalla sorgente vale localmente l'approssimazione con un'onda piana, come discusso per le onde sferiche.

### Caratteristiche delle onde meccaniche in relazione al mezzo

L'esame delle proprietà delle onde esposte finora mette in evidenza che alcune dipendono dalla sorgente, come la frequenza, l'ampiezza e la distribuzione dell'intensità nelle varie direzioni, mentre altre dipendono dal mezzo, come la velocità di propagazione.

Dalla sorgente, ma anche dal mezzo, dipende la proprietà delle onde di poter essere longitudinali o trasversali. In un fluido ideale le onde possono essere solo longitudinali, poiché un'oscillazione trasversale non può propagarsi. Invece in un solido, che ha modulo di rigidità diverso da zero, possono propagarsi onde sia longitudinali che

trasversali; in una corda e in una membrana tesa le onde sono soltanto trasversali.

Con onde trasversali si può avere *polarizzazione*: l'emissione di onde polarizzate può essere una caratteristica della sorgente oppure la polarizzazione può essere ottenuta in mezzi particolari, che ad esempio selezionano una direzione di vibrazione rispetto alle altre.

Nel vuoto non è possibile avere propagazione di onde meccaniche, essendo questa dovuta alle interazioni tra gli elementi del mezzo.

### Assorbimento

La verifica sperimentale in un mezzo materiale della costanza (onde piane) o della decrescita dell'intensità secondo le leggi  $1/r^2$  (onde sferiche) o  $1/r$  (onde cilindriche) mostra che l'intensità decresce più rapidamente di quanto previsto. Questo fatto viene attribuito ad un *assorbimento dell'energia* trasportata dall'onda da parte del mezzo attraversato e da parte di eventuali altri mezzi circostanti. Considerando l'assorbimento del mezzo, esso è dovuto a fenomeni di attrito interno; le misure portano alla conclusione che su uno spessore  $dx$  attraversato tra  $x$  e  $x + dx$  la diminuzione di intensità è proporzionale all'intensità in  $x$  e allo spessore  $dx$ :

$$dI = -\alpha I(x) dx ,$$

dove il segno negativo indica appunto che si tratta di diminuzione e  $\alpha$  è una grandezza caratteristica del mezzo, detta *coefficiente di assorbimento*. Integrando su uno spessore finito e supponendo  $\alpha$  costante si ha

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx , \ln \frac{I(x)}{I_0} = -\alpha x , I(x) = I_0 e^{-\alpha x} . \quad (12.54)$$

La decrescita dell'intensità è esponenziale;  $\alpha$  è il parametro che caratterizza la rapidità di decrescita, come abbiamo visto più volte in casi analoghi. La distanza  $x_0 = 1/\alpha$ , detta *lunghezza di assorbimento*, misura la distanza tra due punti tali che  $I(x_2)/I(x_1) = 1/e \approx 0.368$ .

Dato che l'ampiezza varia come  $\sqrt{I}$ , la funzione d'onda in un mezzo che assorbe energia secondo (12.54) è:

$$\begin{aligned} \text{onde piane} \quad & \xi = \xi_0 e^{-\alpha x/2} \sin(kx - \omega t) , \\ \text{onde sferiche} \quad & \xi = \xi_0 \frac{e^{-\alpha r/2}}{r} \sin(kr - \omega t) , \\ \text{onde cilindriche} \quad & \xi = \xi_0 \frac{e^{-\alpha r/2}}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) . \end{aligned} \quad (12.55)$$

Per dare un'idea quantitativa dell'entità del fenomeno, diciamo che nell'aria l'intensità di un'onda sonora alla frequenza di 400 Hz viene attenuata di circa 2 dB/km, cui corrisponde un coefficiente di assorbimento  $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , ovvero una lunghezza di assorbimento  $1/\alpha = 2.2 \text{ km}$ . Infatti, detta  $A$  l'attenuazione in decibel sulla distanza  $x$ , lungo cui l'intensità passa dal valore  $I_1$  al valore  $I_2 < I_1$ , abbiamo in base alle definizioni (12.42) e (12.54),

$$A = -10 \log \frac{I_2}{I_1} , \alpha x = -\ln \frac{I_2}{I_1} = -\ln 10 \log \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \alpha = 0.23 \frac{A}{x} .$$

Questo valore, relativamente costante per umidità relative comprese tra 50% e 100%, cresce con la frequenza. A  $2 \cdot 10^3$  Hz  $A \approx 6.3$  dB/km, mentre alla frequenza ultrasonica  $8 \cdot 10^4$  Hz  $A = 3 \cdot 10^3$  dB/km.

## 12.10 Pacchetti d'onde

Pacchetto d'onda

Abbiamo finora parlato di onde armoniche che, per definizione, non hanno né inizio né fine, cioè hanno lunghezza e durata infinita. Tutte le sorgenti in generale emettono onde attraverso processi che hanno una durata  $\Delta t$  finita e quindi nella realtà un'onda, anche se ha un andamento praticamente armonico, ha sempre una durata e un'estensione spaziale finite. Definiamo come *pacchetto d'onda o impulso un'onda di durata e lunghezza finite*.

Nella figura 12.25 è rappresentato, a confronto con un'onda armonica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e periodo  $T = 1/v = \lambda/v$ , un pacchetto d'onda armonico, visto ad un certo istante (in funzione di  $x$ ) o in una certa posizione (in funzione di  $t$ ). Pur essendo simile a un'onda armonica, il pacchetto ha lunghezza  $\Delta x$  e durata  $\Delta t$  finite, legate tra loro da  $\Delta x = v\Delta t$ , se  $v$  è la velocità di propagazione dell'onda. Il numero di oscillazioni (cicli) contenute nel pacchetto è determinato dalle

$$\Delta x = N\lambda \quad , \quad \Delta t = NT$$

ed esprimiamo il numero d'onda  $k$  e la pulsazione  $\omega$  del pacchetto come

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{\Delta x} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{\Delta t} \quad .$$

Se ammettiamo, come mostra la figura 12.25, che  $N$  non sia completamente fissato, ma abbia una certa indeterminazione che esprimiamo con  $\Delta N = 1$ , deriviamo le seguenti indeterminazioni per  $k$  e  $\omega$ ,

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad , \quad \Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{\Delta t} \quad ,$$

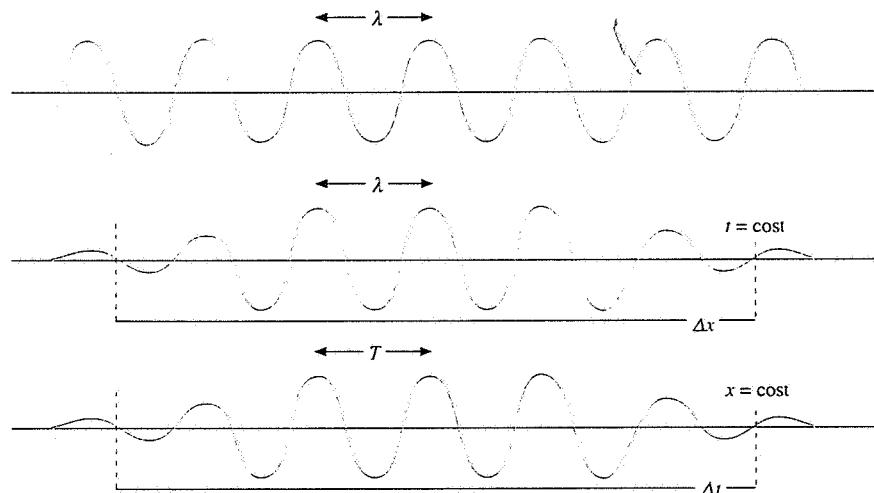


Figura 12.25

che possono essere riscritte come

$$\Delta k \Delta x = 2\pi, \quad \Delta \omega \Delta t = 2\pi, \quad \Delta v \Delta t = 1. \quad (12.56)$$

Queste relazioni mettono in evidenza la sostanziale differenza tra l'onda armonica e il pacchetto d'onde armonico: mentre la prima ha una lunghezza d'onda  $\lambda$  e una frequenza  $v$  ben definite che la descrivono completamente, nel secondo è presente una *banda di frequenze*  $\Delta v = 1/\Delta t$  nell'intorno della frequenza  $v$  e un *intervallo di numeri d'onda*  $\Delta k = 2\pi/\Delta x$  nell'intorno di  $k = 2\pi/\lambda$ . Maggiori sono  $\Delta x$  e  $\Delta t$  minori risultano queste bande (e al limite per  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendenti all'infinito si ottiene l'onda armonica), ma per brevi durate e lunghezze nel pacchetto sono contenute lunghezze d'onda e frequenze significativamente diverse da  $\lambda$  e  $v$ .

Relazioni analoghe alle (12.56) valgono per pacchetti d'onde di forma qualunque. Esse sono ricavate con un procedimento matematico rigoroso che naturalmente si basa sull'analisi di Fourier e verrà esposto più avanti.

Vediamo prima alcuni esempi relativi alle (12.56), per stabilirne numericamente l'importanza. Supponiamo che venga emesso in aria un suono di frequenza  $v = 500$  Hz e che la durata dell'emissione sia  $\Delta t = 0.1$  s; il numero di cicli è quindi  $\sim 50$ . Da (12.56)

$$\Delta v = \frac{1}{\Delta t} = 10 \text{ Hz}, \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{10}{500} = 0.02$$

L'intervallo di frequenze che compongono il pacchetto ha una larghezza pari al 2% della frequenza media  $v = 500$  Hz, andando da 495 a 505 Hz. Nell'aria a  $20^\circ\text{C}$   $v = 343$  m/s e quindi  $\Delta x = v \Delta t = 34.3$  m è la lunghezza del pacchetto. Da questo valore si può calcolare  $\Delta k = 0.183$  rad/m e poi  $\Delta \lambda$ ; oppure da (12.10) si ha in modulo

$$\Delta \lambda = \frac{v}{v^2} \Delta v = 0.014 \text{ m}$$

Rispetto al valore centrale  $\lambda = v/v = 0.686$  m abbiamo l'intervallo  $\Delta \lambda$  tra 0.693 m e 0.679 m ( $\Delta \lambda / \lambda = \Delta v / v$ ).

Come vedremo nel paragrafo 13.8 le sorgenti delle onde luminose sono gli atomi e la durata di emissione di un impulso luminoso è  $\Delta t \approx 10^{-8}$  s. Per la luce gialla  $v \approx 5 \cdot 10^{14}$  Hz e da (12.56) otteniamo

$$\Delta v = \frac{1}{\Delta t} \approx 10^8 \text{ Hz}, \quad \frac{\Delta v}{v} \approx 2 \cdot 10^{-7}$$

La velocità della luce nel vuoto è  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e quindi  $\Delta x = c \Delta t = 3$  m. Per motivi che verranno chiariti nel capitolo 15, in cui tratteremo i fenomeni di interferenza delle onde,  $\Delta t$  e  $\Delta x$  sono chiamati rispettivamente *tempo di coerenza* e *lunghezza di coerenza*.

Nel 1960 è stato messo a punto per la prima volta il processo di amplificazione di luce per mezzo di emissione stimolata di radiazioni da parte degli atomi, detto processo *laser* dalle iniziali in lingua inglese: *light amplification by stimulated emission of radiation*; si tratta di un effetto quantistico che sarà descritto nel capitolo 18. Caratteristica di una sorgente laser è una larghezza relativa  $\Delta v/v$  dell'ordine di  $10^{-12} \div 10^{-13}$ ; essa è capace di emettere impulsi luminosi di durata notevole: ad esempio, alla stessa frequenza prima considerata e con  $\Delta v/v = 10^{-12}$ ,

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta v} = \frac{1}{v} \frac{v}{\Delta v} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Tempo di coerenza  
Lunghezza di coerenza

Laser

Il corrispondente  $\Delta x$  è  $c \Delta t = 6 \cdot 10^5 \text{ m} = 600 \text{ km}$ . Il tempo di coerenza e la lunghezza di coerenza della luce laser sono almeno 5 ordini di grandezza maggiori di quelli delle ordinarie sorgenti atomiche.

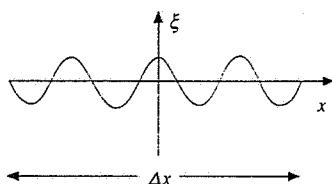


Figura 12.26

Vediamo adesso come si ricavano in modo rigoroso le (12.56). Definiamo un pacchetto d'onde armonico di lunghezza  $\Delta x$ , nell'istante  $t = 0$ :

$$\xi(x) = \xi_0 \cos k_0 x \quad -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}, \quad \xi(x) = 0 \quad |x| > \frac{\Delta x}{2}.$$

Utilizziamo l'integrale di Fourier (12.16); nel caso specifico si può dimostrare che, essendo la funzione un coseno, (12.16) non contiene l'integrale con il seno:

$$\xi(x) = \int_0^{+\infty} b(k) \cos k x dk.$$

La funzione  $b(k)$  è data da

$$\begin{aligned} b(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \cos k x dx = \frac{\xi_0}{\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \cos k_0 x \cos k x dx \\ &= \frac{\xi_0}{2\pi} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} [\cos(k+k_0)x + \cos(k-k_0)x] dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale vale

$$\frac{2}{k+k_0} \sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2} = \Delta x \frac{\sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}$$

e pertanto il risultato finale è

$$b(k) = \frac{\xi_0 \Delta x}{2\pi} \left[ \frac{\sin(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k+k_0) \frac{\Delta x}{2}} + \frac{\sin(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}} \right].$$

Se  $k$  e  $k_0$  sono abbastanza simili e  $\Delta x$  non è troppo piccolo, il denominatore del primo termine è molto maggiore di quello del secondo e concludiamo che

$$b(k) = \frac{\xi_0 \Delta x}{2\pi} \frac{\sin(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}{(k-k_0) \frac{\Delta x}{2}}.$$

Questa funzione, che dà al variare di  $k$  il contributo di ciascuno degli infiniti termini armonici che compongono il pacchetto d'onde, è massima per  $k = k_0$  dove vale

$b(k) = \xi_0 \Delta x / 2\pi$  in quanto  $\sin \theta / \theta$  vale 1 per  $\theta = 0$ . Essa è rappresentata in figura 12.27 e si vede che decresce rapidamente per  $k \neq k_0$ . Nell'intervallo di valori di  $k$  definito dalla condizione

$$-\frac{\pi}{2} < (k - k_0) \frac{\Delta x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{\Delta x} < k - k_0 < \frac{\pi}{\Delta x}$$

risulta

$$\frac{b(k)}{b(k_0)} > \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 0.637 ,$$

ossia in tale intervallo  $b(k)$  è maggiore del 63.7% del valore massimo. Se assumiamo che le onde armoniche contenute nel detto intervallo, largo  $\Delta k = 2\pi/\Delta x$ , siano quelle che contribuiscono maggiormente a  $\xi(x)$ , concludiamo che tra larghezza dell'intervallo significativo e lunghezza dell'impulso sussiste la relazione  $\Delta k \Delta x = 2\pi$ . La stessa procedura, applicata ai parametri temporali  $\Delta t$  durata dell'impulso e  $\omega_0$  pulsazione dello stesso, fornisce  $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$  ovvero  $\Delta\nu \Delta t = 1$ .

Definendo opportunamente gli intervalli  $\Delta k$  e  $\Delta\omega$  è chiaro che relazioni simili alle (12.56) si possono trovare per qualunque pacchetto d'onde.

Sottolineamo che il significato fisico delle (12.56) sta nel mettere in relazione la durata spaziale e temporale con gli intervalli di  $k$  e  $\nu$  in cui si trovano i contributi sostanziali delle onde armoniche che compongono il pacchetto d'onde. Minori sono tali durate e più largo è lo spettro di numeri d'onde e frequenze necessari per rappresentare il pacchetto.

Il ragionamento appena svolto per dimostrare le (12.56) suggerisce che queste in realtà debbano essere considerate limiti inferiori e che la forma più corretta sia

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi, \Delta\omega \Delta t \geq 2\pi, \Delta\nu \Delta t \geq 1 \quad (12.57)$$

## 12.11 Velocità di fase e velocità di gruppo

La discussione sui pacchetti d'onde e sulle relazioni (12.56) che abbiamo svolto nel paragrafo 12.10 si basa sull'applicazione dell'integrale di Fourier a una funzione non periodica dello spazio e del tempo. La particolarità della funzione di avere durata e lunghezza finite e, in generale, piuttosto contenute, permette di limitare la banda delle componenti armoniche importanti. Osserviamo che le proprietà di propagazione non intervengono nel calcolo.

Adesso invece vogliamo vedere quali conseguenze nascano dal fatto che il pacchetto d'onde, e tutte le sue componenti armoniche, una volta prodotti dalla sorgente si propaghi nello spazio. In sostanza si presentano due possibilità: la velocità di propagazione della perturbazione non dipende dalla frequenza della stessa oppure  $v$  è funzione della frequenza.

Nel primo caso si dice che la propagazione avviene in un *mezzo non dispersivo*; in queste condizioni tutte le componenti del pacchetto d'onde hanno la stessa velocità e quindi la somma, cioè il pacchetto, viaggia con tale velocità e non cambia forma. Nella relazione (12.6)  $v$  è una costante che non dipende da  $\omega$  e quindi nemmeno da  $k$ :  $\omega$  e  $k$  sono semplicemente proporzionali. Sono esempi di propagazione in mezzi non dispersivi:

- le onde elastiche in un gas (onde sonore)

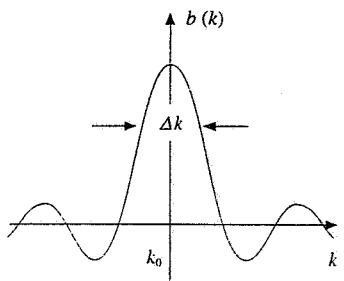


Figura 12.27

## Mezzi dispersivi

- le onde elastiche in una sbarra solida, in una corda tesa, in una membrana tesa
- le onde elettromagnetiche nel vuoto.

Quando la velocità di propagazione è una  $v(v)$  o  $v(\lambda)$  si parla di *mezzo dispersivo* e di *fenomeno di dispersione*. In questo caso le componenti del pacchetto, che hanno pulsazioni diverse, si propagano con velocità diverse e la forma del pacchetto cambia durante la propagazione: con un'espressione visivamente intuitiva si dice che le onde si disperdonno. La velocità del pacchetto non può più essere identificata con quella delle componenti e anzi il problema, che dobbiamo affrontare, è di determinare con quale velocità avanza il pacchetto: ciò è essenziale in quanto il fenomeno fisico effettivo è il pacchetto stesso ed è con la velocità del pacchetto che si propaga ad esempio l'energia dell'onda. Tale velocità, che adesso calcoliamo, è detta *velocità di gruppo* (si intende del gruppo d'onde che formano il pacchetto); la velocità delle singole componenti è detta *velocità di fase*.

Esempi di propagazione in mezzi dispersivi sono:

- le onde elettromagnetiche in mezzi materiali o in cavità conduttrici
- le onde sulla superficie di un liquido

Per esemplificare il concetto di velocità di gruppo consideriamo un caso semplice, e cioè un pacchetto formato da due sole onde armoniche, di eguale ampiezza  $A$ , numeri d'onda  $k_1$  e  $k_2$ , pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$ :

$$\xi(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x - \omega_2 t) .$$

Abbiamo già esaminato questa situazione nel paragrafo 12.8 in relazione al fenomeno dei battimenti in una posizione definita. Adesso ci occupiamo di come si propaga  $\xi(x, t)$ . Poniamo

$$\Delta k = k_1 - k_2 , \quad k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} , \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 , \quad \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

e trasformiamo  $\xi(x, t)$  secondo le regole trigonometriche di somma:

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(k_m x - \omega_m t) . \quad (12.58)$$

Il grafico in funzione di  $x$  in un certo istante è rappresentato nella figura 12.28.

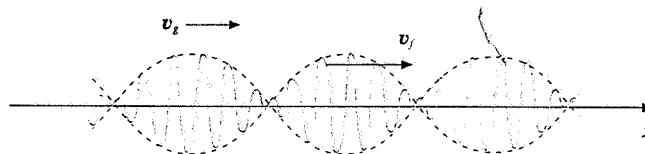


Figura 12.28

La velocità di fase media dell'onda è

Velocità di fase

$$v_f = \frac{\omega_m}{k_m}$$

ed è all'incirca eguale a quelle delle onde componenti,  $v_1 = \omega_1/k_1$  e  $v_2 = \omega_2/k_2$ , se  $\omega_1 \approx \omega_2$  e  $k_1 \approx k_2$ . L'ampiezza dell'onda

$$\xi_0 = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

non è costante e presenta una struttura di tipo ondulatorio  $f(x - vt)$ , con velocità

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 v_1 - k_2 v_2}{k_1 - k_2}$$

La velocità  $v_g$  con cui si propaga l'ampiezza è la velocità del pacchetto delle due onde ed è appunto la velocità di gruppo nel caso considerato.

In sostanza, il moto relativo di un'onda rispetto all'altra produce la sovrapposizione mostrata nella figura 12.29: la curva rapidamente oscillante all'interno cambia durante il moto, ma l'inviluppo conserva la stessa forma propagandosi con velocità  $v_g$ .

L'esempio del pacchetto formato da due sole componenti, pur essendo utile per introdurre la nozione di velocità di gruppo, non è molto realistico; tra l'altro ha anch'esso la caratteristica di essere indefinito come le onde componenti e non si presta a rappresentare un segnale fisico.

Un pacchetto reale emesso da una sorgente ha durata finita e contiene sempre un gran numero di componenti, determinabili con l'analisi di Fourier in forma integrale, come si è visto nel paragrafo 12.10.

In un mezzo dispersivo la velocità di fase delle singole componenti dipende da  $k$  e (12.6), che è ancora valida, si scrive

$$\omega(k) = v_f(k) k \quad (12.59) \quad \text{Relazione di dispersione}$$

ed è chiamata *relazione di dispersione* del mezzo in esame. La definizione di *velocità di gruppo* viene precisata come

Velocità di gruppo

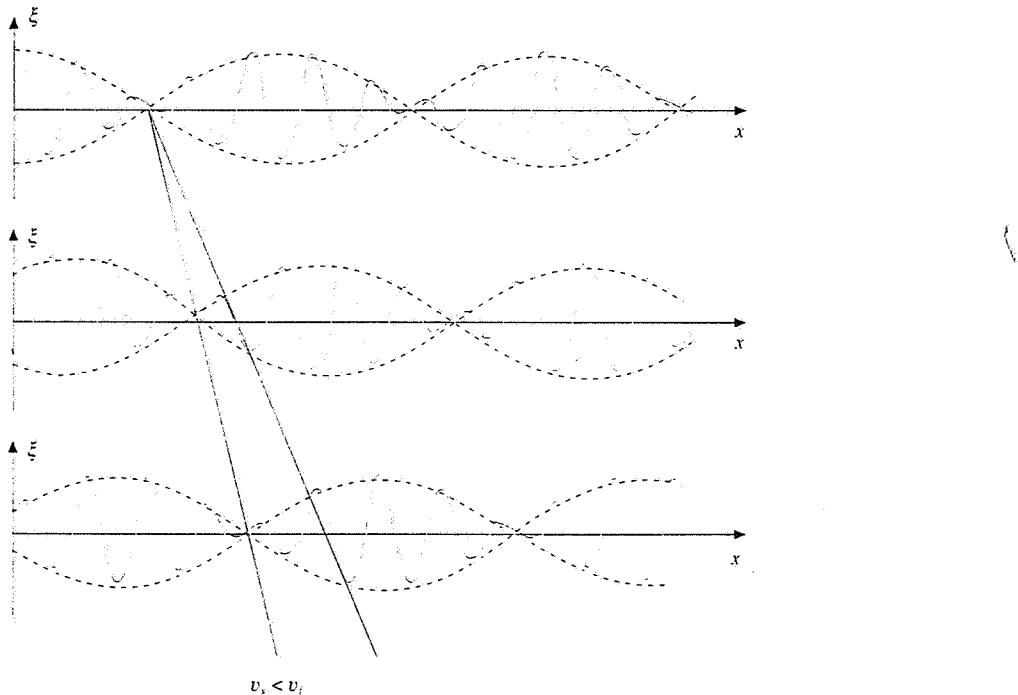


Figura 12.29

$$v_g = -\frac{d\omega}{dk} \quad (12.60)$$

Esplcitando tramite (12.59) e servendosi delle relazioni  $dk/k = -d\lambda/\lambda = dv/v$  si ottiene

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} = v_f + v \frac{dv_f}{dv} \quad (12.61)$$

La velocità di gruppo può essere minore o maggiore di  $v_f$  a seconda del segno della derivata di  $v_f$  rispetto alla variabile considerata. Nella (12.61) è compreso anche il caso del mezzo non dispersivo, nel quale  $v_g = v_f$  in quanto  $dv_f/dk = 0$ .

Abbiamo già detto che una conseguenza della dipendenza della velocità di fase da  $k$  è che la struttura del pacchetto in generale si modifica durante la propagazione. In effetti la stessa velocità di gruppo può dipendere da  $k$ , a seconda della forma della funzione  $v_f(k)$ , e quindi essere variabile all'interno del pacchetto; l'esistenza stessa di una banda  $\Delta k$  comporta una banda  $\Delta v_g$ . Per un pacchetto di larghezza zero la larghezza dopo un tempo  $t$  sarebbe  $\Delta v_g t$  e quindi in prima approssimazione concludiamo che un pacchetto, emesso con larghezza  $\Delta x$  al tempo  $t=0$ , al tempo  $t$  è largo  $\Delta x + \Delta v_g t$ .

#### Esempio 12.4

Calcolare la velocità di gruppo per un pacchetto d'onde sulla superficie di un liquido nell'ipotesi che il liquido sia profondo ( $h \gg \lambda$ ).

#### Soluzione

La velocità di fase nel caso in esame è data da (12.24) che riscriviamo sotto forma di relazione di dispersione:

$$\omega = v_f k = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k \tau}{\rho}} \quad k = \sqrt{gk + \frac{k^3 \tau}{\rho}}$$

Nella regione in cui predomina il termine  $gk$

$$\omega = \sqrt{gk} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f$$

Invece nella regione in cui predomina il termine  $k^3 \tau / \rho$

$$\omega = \sqrt{\frac{k^3 \tau}{\rho}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{k \tau}{\rho}} = \frac{3}{2} v_f$$

La velocità di gruppo varia con  $k = 2\pi/\lambda$ : all'aumentare di  $\lambda$  si ha un passaggio graduale da  $v_g = 3v_f/2$  a  $v_g = v_f/2$ . Chiaramente ci deve essere un valore di  $\lambda$  per cui  $v_g = v_f$ . Dato che  $v_g = v_f - \lambda dv_f/d\lambda$  e che  $v_f$  ha un minimo per  $\lambda = \lambda^*$  (paragrafo 12.6),  $v_g = v_f$  proprio per  $\lambda = \lambda^*$ . A seconda della banda di lunghezze d'onda presenti nel pacchetto la velocità di gruppo è maggiore o minore della velocità di fase e nell'intorno di  $\lambda^*$  è circa eguale a  $v_f$ .

Se sulla superficie dell'acqua si produce tramite una breve perturbazione un pacchetto d'onde nel regime onde di gravità ( $v_g = v_f/2$ ), si riesce ad osservare che all'interno del pacchetto le singole creste avanzano con velocità superiore a quella del pacchetto.

## 12.12 Effetto Doppler. Onda d'urto

Quando una sorgente di onde  $S$  e un rivelatore di onde  $R$  si muovono l'una rispetto all'altro, la frequenza percepita dal rivelatore risulta in generale diversa dalla frequenza propria della sorgente. Il fenomeno venne evidenziato per la prima volta con le onde sonore e chiamato *effetto Doppler*, dal nome dello scopritore; esso si osserva con tutti i tipi di onde, anche quelle elettromagnetiche e in particolare luminose, come vedremo nel paragrafo 13.11.

Chiamiamo  $\lambda_0$  e  $v_0$  la lunghezza d'onda e la frequenza delle onde sferiche armoniche emesse dalla sorgente; queste si propagano isotropicamente nel mezzo con velocità  $v$  e vengono percepite dal rivelatore. Supponiamo inizialmente che, fissato un determinato sistema di riferimento, sorgente, rivelatore e mezzo siano in quiete.

Ricordiamo che abbiamo definito fronte d'onda una superficie, in questo caso sferica, su cui la fase è costante; supponendo di far coincidere un fronte d'onda con una cresta d'onda, la successiva cresta è distante  $\lambda_0$  come spazio e  $T_0$  come tempo dalla prima, con differenza di fase  $2\pi$ . In un tempo  $\Delta t$  l'onda avanza di  $v\Delta t$  e in questa distanza sono contenuti  $N = v\Delta t/\lambda_0$  fronti d'onda tutti in fase tra loro. Quindi il rivelatore nel tempo  $\Delta t$  viene attraversato da questi  $N$  fronti d'onda ovvero percepisce  $N$  oscillazioni nel tempo  $\Delta t$ : ciò equivale a dire che misura la frequenza (numero di oscillazioni al secondo)

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\lambda_0 \Delta t} = \frac{v}{\lambda_0} = v_0 \quad ,$$

coincidente con la frequenza propria della sorgente.

La descrizione precedente viene modificata quando vi è uno stato di moto relativo tra sorgente e rivelatore. Vediamo il problema prima in modo qualitativo. Supponiamo che la sorgente si muova con velocità  $v_s$ , inferiore alla velocità di propagazione delle onde, lungo la retta congiungente  $S$  con  $R$  e nel verso da  $S$  a  $R$ . Nella figura 12.31 sono rappresentati alcuni fronti d'onda emessi dalla sorgente a intervalli di tempo pari a  $T_0$ ; in ogni periodo  $T_0$  la sorgente si è spostata di  $v_s T_0$  che è minore di  $\lambda_0$  in quanto  $v_s < v$ . Si vede chiaramente che nella zona in cui si trova  $R$  i fronti d'onda sono più vicini tra loro di quando la sorgente è ferma; la distanza tra due consecutivi è minore di  $\lambda_0$  e quindi  $R$  nell'unità di tempo è interessato da un numero maggiore di fronti d'onda e misura una frequenza  $v_R$  superiore a  $v_0$ . Se  $R$  fosse nella posizione  $R'$  (sorgente che si allontana invece di avvicinarsi) la frequenza misurata risulterebbe inferiore a  $v_0$  poiché la distanza tra i fronti d'onda è maggiore di  $\lambda_0$ .

Quantitativamente, la distanza tra due fronti d'onda consecutivi quando la sorgente si muove non è più  $\lambda_0$  bensì  $\lambda_0 - v_s T$  per cui la lunghezza d'onda e la frequenza misurata da  $R$  sono

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{v}{v_0} - \frac{v_s}{v_0} = \frac{v - v_s}{v_0}, \quad v_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{v - v_s} v_0 \quad ; \quad (12.62)$$

oppure, alternativamente,

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v \Delta t}{\lambda_R} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_0 - v_s T_0} = \frac{v}{v - v_s} v_0$$

La formula vale sia in caso di avvicinamento ( $v_s > 0, v_R > v_0$ ) che di allontanamento ( $v_s < 0, v_R < v_0$ ).

Supponiamo adesso che la sorgente sia ferma e che invece sia in moto il rivelatore, con velocità  $v_R$  lungo la retta congiungente  $S$  con  $R$ ; supponiamo inoltre che  $R$  si stia allontanando da  $S$ . Nel dato sistema di riferimento la distanza tra i fronti d'onda è sempre  $\lambda_0$ , però il numero di fronti d'onda che interessano il rivelatore è  $N = (v - v_R) \Delta t / \lambda_0$ , in quanto la velocità dell'onda rispetto a  $R$  è  $v - v_R$ . Quindi

$$v_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v - v_R}{\lambda_0} = \frac{v - v_R}{v} v_0 \quad . \quad (12.63)$$

Se  $R$  si allontana da  $S$  la frequenza percepita è minore, se invece  $R$  si avvicina  $v_R$  cambia

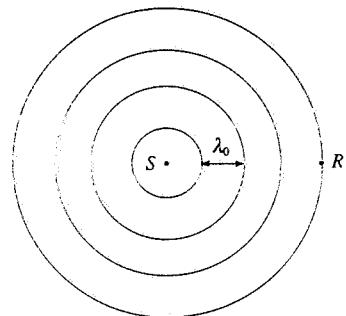


Figura 12.30

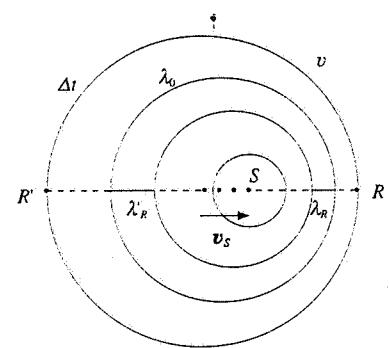


Figura 12.31

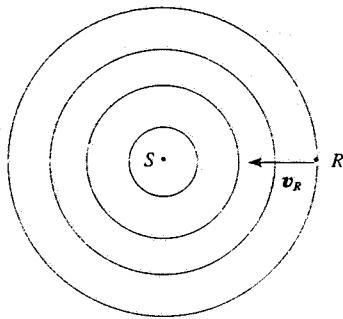


Figura 12.32

segno e la frequenza percepita è maggiore.

Le equazioni (12.62) e (12.63) possono essere compendiate in un'unica formula, relativa al caso in cui la sorgente  $S$  si muova con velocità  $v_s$  e il rivelatore con velocità  $v_R$ , parallele tra loro. Si applicano entrambe le correzioni viste: la velocità dell'onda relativa al rivelatore è  $v - v_R$ , la distanza tra i fronti d'onda è  $\lambda_0 - v_s T_0 = (v - v_s) T_0$  e si ottiene

$$v_R' = \frac{v - v_R}{v - v_s} v_0 \quad (12.64)$$

Si intende sempre che la velocità della sorgente e del rivelatore siano minori in modulo della velocità di propagazione.

Osserviamo che se  $v_R$  e  $v_s$  hanno stesso modulo e stesso verso  $v_R = v_0$ : ciò che è importante è il moto relativo. Tuttavia (12.62), (12.63), e (12.64) che le riassume, non sono simmetriche: l'effetto non è lo stesso se la sorgente è ferma e il rivelatore si avvicina ( $v_s = 0$ ,  $v_R = -v_0$ ) o se il rivelatore è fermo e la sorgente gli si avvicina ( $v_s = v_0$ ,  $v_R = 0$ ). Si ha infatti

$$v_R' = \frac{v + v_0}{v}, \quad v_R'' = \frac{v}{v - v_0} = \frac{v + v_0}{v \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right)} = \frac{v_R'}{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}$$

e  $v_R''$  non è eguale a  $v_R'$  a meno che non sia  $v_0^2 \ll v^2$ . Solo per velocità piccole rispetto a  $v$  le formule (12.62) e (12.63) danno risultati praticamente coincidenti e non è possibile stabilire se è in moto la sorgente o il rivelatore.

La *non simmetria* dell'effetto Doppler nelle onde meccaniche risulta dalla trattazione dei due casi che abbiamo svolto all'inizio: la velocità dell'onda vista dal rivelatore non è la stessa nei due casi.

### Esempio 12.5

Una sirena emette un suono di frequenza  $v_0 = 500$  Hz. Calcolare la frequenza misurata da un rivelatore che si muove verso la sorgente ferma con  $v_R = 124$  km/ora, da un rivelatore fermo se la sorgente si muove verso il rivelatore con velocità  $v_s = 124$  km/ora, da un rivelatore che si muove con velocità  $v_R = 62$  km/ora verso la sorgente che a sua volta si muove verso il rivelatore con velocità  $v_s = 62$  km/ora.

#### Soluzione

Applichiamo (12.64) nei tre casi enunciati; la velocità del suono è 343 m/s e i due valori dati nel testo sono 124 km/ora = 34.4 m/s, 62 km/ora = 17.2 m/s.

a)  $v_s = 0 \quad v_R = -34.4$  m/s

$$v_R = \frac{343 + 34.4}{343} 500 = 1.100 \cdot 500 = 550 \text{ Hz}$$

b)  $v_s = 34.4$  m/s  $v_R = 0$

$$v_R = \frac{343}{343 - 34.4} 500 = 1.111 \cdot 500 = 556 \text{ Hz}$$

c)  $v_s = 17.2$  m/s  $v_R = -17.2$  m/s

$$v_R = \frac{343 - 17.2}{343 + 17.2} 500 = 1.106 \cdot 500 = 553 \text{ Hz}.$$

L'effetto è notevole, circa del 10%, anche se le differenze tra i tre casi sono piuttosto piccole, dell'ordine dell'1% e per metterle in evidenza occorre un rivelatore con una precisione migliore dell'1%. Si noti che la velocità relativa di  $S$  rispetto a  $R$ ,  $v_s - v_R$ , è la stessa nei tre casi.

La condizione di parallelismo tra le velocità  $v_s$  e  $v_r$  può essere naturalmente rilasciata. Se  $v_s$  forma l'angolo  $\alpha$  con la retta congiungente  $S$  e  $R$ , a  $v_s$  si sostituisce  $v_s \cos \alpha$  e se  $v_r$  forma con la medesima retta l'angolo  $\beta$  a  $v_r$  si sostituisce  $v_r \cos \beta$ . Infine, se il mezzo in cui si propaga l'onda ha velocità  $v_m$ , alla velocità  $v$  dell'onda va sostituita la velocità  $v + v_m$ , poi opportunamente proiettata lungo la direzione di interesse.

### Onda d'urto

Esaminiamo ora cosa succede quando la velocità  $v_s$  con cui si muove la sorgente è maggiore della velocità di propagazione  $v$  dell'onda del mezzo.

Nella figura 12.33 sono rappresentati alcuni fronti d'onda  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  emessi dalla sorgente negli istanti  $t_1, t_2, \dots$  quando essa si trova nelle posizioni  $S_1, S_2, \dots$ . Questi fronti d'onda ammettono un inviluppo, che è rappresentato dalle due semirette convergenti in  $S_n$ . In due dimensioni la figura 12.33 si riferisce a onde circolari sulla superficie di un liquido; nel caso tridimensionale (ad esempio onde sferiche sonore in un gas) essa rappresenta la sezione di un cono. L'inviluppo è il luogo dei punti di egual fase per le onde emesse dalla sorgente durante il moto e costituisce esso stesso il fronte d'onda.

Per trovare i valori degli angoli  $\theta$  e  $\theta'$  di figura 12.34 consideriamo due posizioni  $S_1$  e  $S_2$  della sorgente e i corrispondenti punti  $P$  e  $Q$  sul fronte d'onda: l'onda emessa in  $S_1$  ha nel punto  $P$  la stessa fase che ha nel punto  $Q$  l'onda emessa in  $S_2$ . Se  $P$  e  $Q$  sono punti di egual fase tali sono  $S'_1$  e  $S'_2$ , in quanto equidistanti da  $P$  e  $Q$ . Ora  $S'_1$  e  $S'_2$  possono avere la stessa fase solo se il tempo che impiega l'onda a percorrere il segmento  $S_1 S'_1$  è eguale al tempo che impiega la sorgente a percorrere il segmento  $S_1 S_2$ : infatti a tempi eguali corrispondono eguali differenze di fase (non dimentichiamo che l'oscillazione dell'onda che si propaga è eguale a quella della sorgente che la produce). Detta  $a$  la distanza  $S_1 S_2$  abbiamo  $S_1 S'_1 = a \cos \theta$  e l'eguaglianza dei tempi si traduce nell'eguaglianza

$$\frac{a}{v_s} = \frac{a \cos \theta}{v} \Rightarrow \cos \theta = \frac{v}{v_s}$$

Essendo il triangolo  $S_1 P S_n$  rettangolo segue

$$\sin \theta' = \cos \theta = \frac{v}{v_s} \quad . \quad (12.65)$$

Si vede che la costruzione si può fare solo se  $v < v_s$ , come ipotizzato. Quindi la superficie conica di egual fase esiste solo se la sorgente si muove più rapidamente dell'onda e l'angolo di apertura  $\theta'$  dipende dal rapporto  $v/v_s$ , diminuendo al crescere di  $v_s$ . Questo fronte d'onda si chiama *onda d'urto* o *onda balistica* e accompagna la sorgente nel suo moto conservando la propria forma: la sorgente occupa il vertice del cono. Il rapporto  $v_s/v$  è detto *numero di Mach* e a volte è usato per esprimere la velocità della sorgente: per esempio nell'aria mach 1 = 343 m/s = 1235 km/ora, mach 2 = 2470 km/ora.

Nel caso delle onde meccaniche non occorre che l'oggetto in movimento sia effettivamente una sorgente di onde: è il moto stesso con velocità superiore a  $v$  a causare perturbazioni lungo la traiettoria che hanno la superficie conica come superficie d'onda. Se pure con un meccanismo diverso il fenomeno esiste anche per le onde elettromagnetiche (paragrafo 13.11).

L'onda d'urto si osserva facilmente quando un motoscafo solca la superficie di un lago: le scie di prua e di poppa sono proprio le onde in questione, che risultano tanto più strette quanto maggiore è la velocità del motoscafo. Anche il moto di un aereo supersonico è accompagnato da due onde balistiche: nel caso del Concorde, che viaggia a velocità circa doppia di quella del suono nell'aria (mach 2),  $\sin \theta' = v/v_s = 0.5$ ,  $\theta' = 30^\circ$ . Quando l'onda di prua raggiunge l'osservatore la pressione atmosferica varia di  $\Delta p$  in un tempo  $\tau \sim 3$  ms; la pressione poi diminuisce fino a  $-\Delta p$  durante il tempo  $t_f = l/v_s$  in cui il velivolo si è spostato di una distanza pari alla sua lunghezza  $l$  e ritorna al valore di equilibrio quando arriva l'onda di coda. A causa della sua forma il diagramma della pressione in funzione del tempo è detto diagramma a *N*. Nel Concorde  $t_f$  è dell'ordine del decimo di secondo. L'arrivo delle due onde è percepito come un forte rumore (*boom sonoro*).

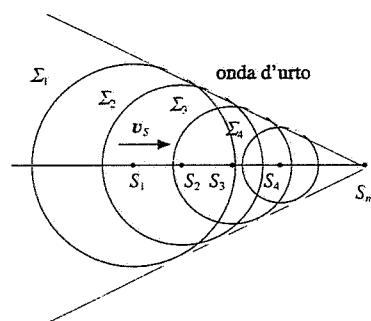


Figura 12.33

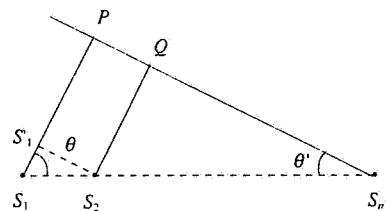


Figura 12.34

### Onda d'urto

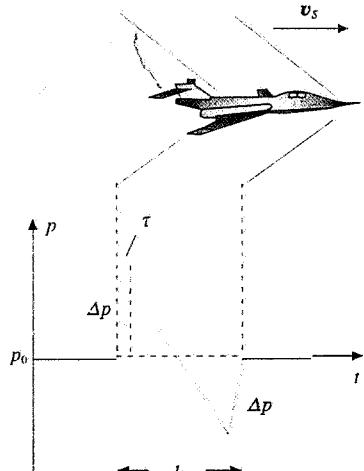


Figura 12.35

# Onde elettromagnetiche

## 13.1 Onde elettromagnetiche piane

Nel capitolo 12 sono state trattate alcune proprietà generali delle onde che non dipendono dal tipo di onda; gli esempi d'altra parte sono stati tratti soprattutto dalle onde meccaniche, che hanno origine da una perturbazione locale di un mezzo materiale e si propagano in virtù delle proprietà elastiche del mezzo o, come per le onde sulla superficie di un liquido, di proprietà meccaniche tipiche del mezzo.

Abbiamo già menzionato l'esistenza delle *onde elettromagnetiche* (e non solo nel capitolo 12) e alcune loro caratteristiche: la proprietà di propagarsi nel vuoto, in assenza di materia, di essere *trasversali* in tali condizioni e di essere prodotte da cariche elettriche in moto con accelerazione molto grande; aggiungiamo che possono essere rivelate a grande distanza dalla sorgente ad esempio sfruttando l'interazione del campo elettrico e del campo magnetico di cui sono composte con le cariche elettriche libere presenti in un conduttore.

Vogliamo adesso dimostrare come nelle equazioni di Maxwell siano in effetti contenuti fenomeni ondulatori e definire le onde elettromagnetiche nel caso più semplice, che è quello di *onda piana*.

Consideriamo un mezzo indefinito e omogeneo di costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$ , nel quale non ci siano cariche libere e correnti di conduzione per cui  $\rho = 0$  e  $\mathbf{j} = 0$ . In queste ipotesi le equazioni di Maxwell hanno la forma (10.65) con  $\epsilon$  al posto di  $\epsilon_0$  e  $\mu$  al posto di  $\mu_0$ :

$$\begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{(a)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(c)} & \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad \text{(13.1)}$$

Invece di cercare la soluzione più generale, limitiamoci a cercare una soluzione particolare in cui il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  dipendano, in un determinato sistema di riferimento cartesiano, solo dal tempo e dalla coordinata  $x$ , assumendo quindi lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse  $x$  (soluzione di *onda piana*). Tenendo presente che nelle nostre ipotesi sono nulle tutte le derivate parziali rispetto a  $y$  e  $z$ , otteniamo dalle (13.1):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E_y}{\partial t} & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Le relazioni  $\partial E_x / \partial x = 0$ ,  $\partial E_x / \partial t = 0$  permettono di dedurre che la componente  $E_x(x, t)$  del campo elettrico è costante. Un tale campo potrebbe essere prodotto da una distribuzione di cariche stazionarie; siccome però escludiamo l'esistenza di sorgenti di questo tipo in quanto interessati a campi variabili nel tempo, concludiamo che  $E_x(x, t) = 0$ . Allo stesso modo, da  $\partial B_x / \partial x = 0$ ,  $\partial B_x / \partial t = 0$  e dall'esclusione di correnti stazionarie concludiamo che  $B_x(x, t) = 0$ .

Questo è un primo risultato molto importante: se dimostreremo che le altre componenti soddisfano all'equazione delle onde in  $x, y$ , queste onde saranno necessariamente trasversali, in quanto i campi stanno nel piano  $y, z$ .

Allo scopo riassumiamo le precedenti relazioni sulle derivate:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} & (a) & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} & (c) \\
 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x} & (b) & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} & (d)
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Queste mostrano una correlazione tra  $E_y$  e  $B_z$  e tra  $E_z$  e  $B_y$ , cioè tra componenti mutuamente ortogonali. Deriviamo (13.2a) rispetto a  $x$  e (13.2b) rispetto a  $t$ :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}.$$

Le due derivate miste di  $B_y$  sono eguali e quindi si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Allo stesso modo, se deriviamo (13.2a) rispetto a  $t$  e (13.2b) rispetto a  $x$  si arriva a

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}.$$

Per la coppia di equazioni (13.2c) e (13.2d) si ha

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Ognuna delle componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e del campo magnetico  $\mathbf{B}$  soddisfa all'equazione differenziale delle onde piane (12.1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z) \quad (13.3)$$

I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si propagano pertanto lungo l'asse  $x$  sotto forma di onde piane con velocità

Velocità delle onde elettromagnetiche

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_e \kappa_m}} \quad , \quad (13.4)$$

dove

Velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (13.5)$$

è la velocità della perturbazione elettromagnetica nello spazio vuoto ( $\kappa_e = \kappa_m = 1$ ).

Dunque le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano con le caratteristiche di onde piane trasversali e con velocità che assume nel vuoto un preciso valore e che in un dielettrico dipende dalle caratteristiche elettriche e magnetiche del mezzo, risultando sempre minore che nel vuoto. Poiché  $c$  coincide con il valore misurato della velocità della luce nel vuoto, Maxwell fu portato a ipotizzare che la *luce* sia essa stessa un'*onda composta da un campo elettrico e da un campo magnetico*.

Deduciamo ora le relazioni che sussistono in ogni istante e in ogni punto tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Ricordiamo che nell'ipotesi di propagazione lungo il verso positivo dell'asse  $x$  le soluzioni delle (13.3) sono del tipo

$$E_y = E_y(x - vt), \quad E_z = E_z(x - vt), \quad B_y = B_y(x - vt), \quad B_z = B_z(x - vt),$$

ovvero, in forma vettoriale

$$\mathbf{E} = E_y(x - vt) \mathbf{u}_y + E_z(x - vt) \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{B} = B_y(x - vt) \mathbf{u}_y + B_z(x - vt) \mathbf{u}_z.$$

Detto  $u = x - vt$  l'argomento delle funzioni, per cui  $\partial u / \partial x = 1$  e  $\partial u / \partial t = -v$ , da (13.2a) abbiamo

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u},$$

$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v} \int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + \text{costante}.$$

Poniamo eguale a zero la costante di integrazione, che descrive una situazione stazionaria a cui non siamo interessati; in definitiva

$$B_y(x-vt) = -\frac{1}{v} E_z(x-vt)$$

Procedendo analogamente a partire da (13.2) si ottiene

$$B_z(x-vt) = \frac{1}{v} E_y(x-vt)$$

Le componenti del campo **B** risultano pertanto dipendenti da quelle del campo **E** e i due vettori si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y(x-vt) \mathbf{u}_y + E_z(x-vt) \mathbf{u}_z, \\ v \mathbf{B} &= -E_z(x-vt) \mathbf{u}_y + E_y(x-vt) \mathbf{u}_z, \end{aligned} \quad (13.6)$$

da cui deduciamo tutte le relazioni tra **E** e **B** in un'onda elettromagnetica piana.

Dalla seconda si ricava la relazione tra i moduli dei campi, valida in ogni istante e in ogni punto:

$$\begin{aligned} B^2 &= B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2} (E_y^2 + E_z^2) = \frac{E^2}{v^2} \\ \Rightarrow B &= \frac{E}{v}, \quad E = v B, \quad \frac{E}{B} = v. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Dal prodotto scalare si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v} (-E_y E_z + E_z E_y) \\ \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= 0 : \end{aligned} \quad (13.8)$$

i due vettori sono sempre perpendicolari tra loro. Invece il prodotto vettoriale vale

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & -\frac{E_z}{v} & \frac{E_y}{v} \end{vmatrix} = \frac{1}{v} (E_y^2 + E_z^2) \mathbf{u}_x \\ \Rightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \frac{E^2}{v} \mathbf{u}_x = v B^2 \mathbf{u}_x = E B \mathbf{u}_x ; \end{aligned} \quad (13.9)$$

esso dà la direzione e il verso di propagazione, essendo parallelo e concorde all'asse *x*.

Riassumiamo le proprietà appena trovate per la propagazione di un'onda elettromagnetica piana, cioè di un campo elettrico e di un campo magnetico, in un mezzo omogeneo e isotropo privo di correnti e cariche libere (al limite nel vuoto):  
a) **E** e **B** si propagano con la stessa velocità *v*, che nel vuoto vale  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} =$

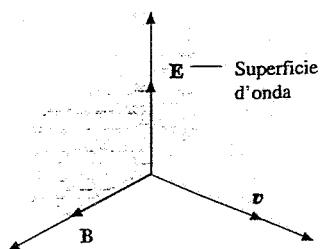


Figura 13.1

## Campo elettromagnetico

- $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;
- i moduli dei campi sono legati dalla relazione di proporzionalità  $B = E/v$ , nel vuoto  $B = E/c$ ;
  - $E$  e  $B$  sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione: nel caso specifico le onde elettromagnetiche sono onde *trasversali* e per esse è significativo il concetto di *polarizzazione*;
  - il verso del prodotto vettoriale  $E \times B$  definisce il verso di propagazione, mentre il modulo è proporzionale al quadrato del modulo di  $E$  o di  $B$ .

Queste proprietà dei campi, sebbene siano state dedotte operando in coordinate cartesiane, hanno validità in qualsiasi altro sistema di coordinate, in quanto proprietà di vettori.

Notiamo, come del resto è evidente nelle (13.1 c, d), che in un fenomeno variabile quale la propagazione i campi  $E$  e  $B$  sono inscindibili: la presenza di uno comporta la presenza dell'altro; è per questo che non si parla di un'onda di campo elettrico e di un'onda di campo magnetico, bensì di un'onda elettromagnetica. Nella teoria di Maxwell i due campi sono unificati in un solo campo, il *campo elettromagnetico*, a cui sono dovuti i fenomeni osservati in regime variabile, in particolare quelli in cui sono implicate le onde elettromagnetiche.

Le linee di  $E$  e  $B$  sono mostrate nella figura 13.2 per un'onda armonica; i massimi e i minimi cadono negli stessi punti, come deriva da (13.6).

Nella maggior parte dei mezzi ordinari la suscettività magnetica è tale che  $|\kappa_m - 1| < 10^{-5}$ , per cui possiamo porre  $\kappa_m = 1$  nella (13.4) e definire il rapporto

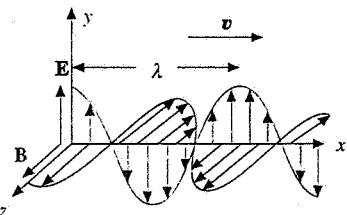


Figura 13.2

## Impedenza caratteristica del mezzo

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa_e} \quad , \quad (13.10)$$

tra la velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto e in un mezzo in cui le onde possano propagarsi, cioè trasparente alle onde elettromagnetiche. Nello studio della propagazione della luce  $n$  prende il nome di *indice di rifrazione assoluto del mezzo*; esso può essere misurato indipendentemente dalla relazione che lo lega a  $\kappa_e$ .

Quando si può scrivere  $B = \mu H$  la (13.7) assume la forma

$$\frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z \quad . \quad (13.11)$$

La quantità  $Z$ , che ha le dimensioni di un'impedenza, è detta *impedenza caratteristica del mezzo*. Nel vuoto l'*impedenza caratteristica* è

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad . \quad (13.12)$$

Nei mezzi trasparenti alle onde con  $\kappa_m = 1$  sussiste la relazione

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{\kappa_e}} = \frac{Z_0}{n} \quad , \quad (13.13)$$

che tornerà utile quando tratteremo l'energia associata al campo elettromagnetico.

Prima di continuare lo studio delle onde elettromagnetiche è importante ripetere che, nel procedimento finora seguito, un mezzo dielettrico omogeneo è stato trat-

tato come il vuoto, a parte la sostituzione di  $\epsilon_0, \mu_0$  con  $\epsilon, \mu$ . In realtà sarebbe necessario esaminare il comportamento del mezzo, esprimibile attraverso il vettore polarizzazione  $P$ , stabilire la relazione tra  $P$  ed  $E$  e dimostrare l'esistenza di una soluzione ondulatoria delle equazioni di Maxwell nel mezzo, con velocità (13.4). Ciò in effetti è verificato, purché la pulsazione  $\omega$  delle onde obbedisca ad una specifica condizione; dato che nella maggior parte dei casi di interesse la condizione è soddisfatta, assumeremo nel seguito la validità generale delle formule (13.4) e (13.10), rimandando al paragrafo 13.9 per una discussione più completa di tutto questo argomento.

### Nota. Il legame tra $c, \mu_0, \epsilon_0$

Dimostriamo quanto affermato nella nota alla fine del paragrafo 8.3. Consideriamo lo spazio vuoto e non esplicitiamo i coefficienti che compaiono nella forza di Coulomb e nella forza tra due correnti, conservando le espressioni generiche  $k_e$  e  $k_m$ ; allora la (13.1d) ha la forma  $\nabla \times B = (k_m / k_e) \partial E / \partial t$ . D'altra parte abbiamo dimostrato che il coefficiente nella (13.1d) è eguale al coefficiente  $1/v^2$  nell'equazione delle onde piane (13.3) e quindi nel vuoto si ha la relazione

$$c = \sqrt{k_e / k_m}$$

che si trasforma nella (13.5) ponendo  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0$  e  $k_m = \mu_0 / 4\pi$ .

La (13.5) è l'unico legame che esiste tra  $c, \mu_0, \epsilon_0$  (ovvero tra  $c, k_m, k_e$ ): in essa  $c$  è una costante universale, mentre  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  possono essere scelte arbitrariamente, con l'unica condizione di obbedire a (13.5). Come sappiamo, la scelta è stata di assumere  $k_m = 10^{-7} \text{ H/m}$  ( $\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ) con il che resta determinata  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ .

## 13.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche piane

Le sorgenti elettromagnetiche di maggiore interesse emettono *pacchetti d'onde armonici* di durata definita, del tipo considerato nel paragrafo 12.10. Se la durata  $\Delta t$  del pacchetto è tale che la banda delle frequenze  $\Delta\nu = 1/\Delta t$  che lo costituiscono è molto piccola rispetto alla frequenza media  $\nu$ , possiamo trattare per molti aspetti il pacchetto d'onde come un'onda armonica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e frequenza  $\nu$  definite.

Per un'onda elettromagnetica piana, come quelle descritte nel paragrafo 13.1, si definisce la *polarizzazione* seguendo esattamente quanto visto nel paragrafo 12.5; allo scopo è sufficiente specificare il comportamento del campo elettrico  $E$  dal momento che il campo magnetico  $B$  è sempre ortogonale a  $E$ . Descriviamo pertanto un'onda armonica piana tramite le equazioni (12.19):

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t), \quad E_z(x, t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta). \quad (13.14)$$

Valgono le solite relazioni

$$\omega = kv = 2\pi\nu, \quad \lambda\nu = v, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (13.15)$$

Riscriviamo, nei casi già visti nel paragrafo 12.5, le formule significative.

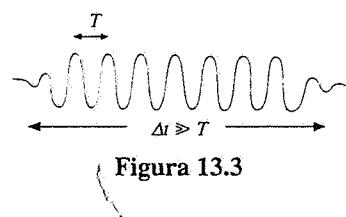


Figura 13.3

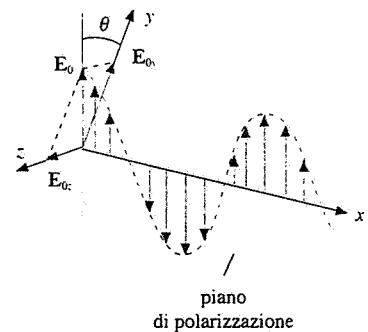


Figura 13.4

A. Polarizzazione rettilinea,  $\delta = 0, \delta = \pi$ .

Le componenti del campo elettrico hanno le espressioni (12.20):

$$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_{0z} \sin(kx - \omega t) \quad (13.16)$$

e il loro rapporto è costante

$$\frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \tan \theta$$

Il campo  $\mathbf{E}$  giace sempre nel piano di polarizzazione passante per l'asse  $x$  e formante l'angolo  $\theta$  con il piano  $x, y$ . In questo piano esso oscilla con ampiezza

$$E_0 = \sqrt{E_{0y}^2 + E_{0z}^2} \Rightarrow E_{0y} = E_0 \cos \theta, E_{0z} = E_0 \sin \theta \quad (13.17)$$

B. Polarizzazione ellittica,  $\delta = \pi/2, \delta = 3\pi/2$ .

In accordo con (12.21) scriviamo

$$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_{0z} \cos(kx - \omega t); \quad (13.18)$$

il modulo del campo vale  $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$  e varia tra i valori  $E_{0y}$  e  $E_{0z}$ ; la direzione di  $\mathbf{E}$  cambia lungo l'asse  $x$ , descrivendo un giro completo su una distanza  $\lambda$ . Nel piano  $y, z$  al passare del tempo la punta di  $\mathbf{E}$  descrive l'ellisse (12.22) di semiassi  $E_{0y}, E_{0z}$ . Se  $\delta$  è costante, ma con valore qualsiasi, l'ellisse ha gli assi inclinati rispetto agli assi coordinati.

C. Polarizzazione circolare.

Le equazioni dell'onda sono

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), E_z = \pm E_0 \cos(kx - \omega t). \quad (13.19)$$

Il campo elettrico ha ampiezza costante  $E_0$ ; in funzione di  $x$  e  $t$  la sua variabilità è analoga a quella descritta per la polarizzazione ellittica, con l'ellisse che degenera in una circonferenza.

D. Onda elettromagnetica piana non polarizzata

Se la differenza di fase  $\delta$  varia in maniera *casuale* non si può stabilire una legge di variazione per la direzione di  $\mathbf{E}$ : lo stato di polarizzazione, pur essendo definibile in ogni istante e in ogni posizione, non lo è più *in media* nel tempo. Poiché in generale la misura dello stato di polarizzazione dell'onda in una certa posizione è fatta in un intervallo di tempo che, per quanto breve, è sempre molto maggiore dei tempi in cui avvengono le variazioni di  $\delta$ , il risultato è che mediamente l'onda appare non polarizzata. Onde elettromagnetiche non polarizzate sono quelle che costituiscono la luce solare e la luce emessa da una normale lampadina a incandescenza. In questi casi la causalità della direzione di  $\mathbf{E}$  è dovuta ai meccanismi di emissione delle onde da parte della sorgente, come vedremo in seguito.

In conclusione possiamo dire che la polarizzazione di un'onda elettromagnetica nasce dalla sovrapposizione di due onde *coerenti* che si propagano giacendo in due piani ortogonali, se definiamo *coerenti due onde per le quali la differenza di fase rimane costante nel tempo*.

### Esempio 13.1

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza  $v = 7.5 \cdot 10^{14}$  Hz si propaga nel vuoto lungo l'asse  $x$ . Essa è polarizzata rettilineamente con il campo elettrico  $\mathbf{E}$  che forma

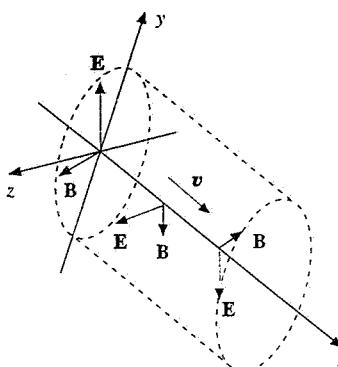


Figura 13.5

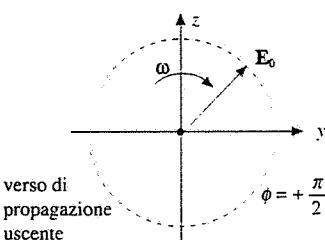


Figura 13.6

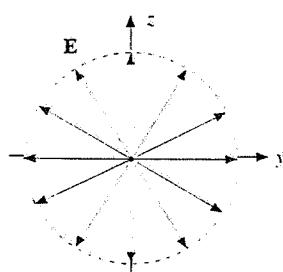


Figura 13.7

l'angolo  $\theta = 30^\circ$  con il piano  $x, y$  ed ha ampiezza  $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ . Scrivere l'equazione di quest'onda e calcolare l'ampiezza del campo magnetico.

### Soluzione

I parametri caratteristici dell'onda si ricavano da (13.15):

$$\lambda = \frac{c}{v} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m} , \quad \omega = 2\pi v = 4.71 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} .$$

Si tratta di una radiazione visibile che corrisponde al colore violetto (estremo inferiore delle lunghezze d'onda visibili). Le ampiezze delle componenti del campo elettrico sono

$$E_{0y} = E_0 \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \text{ V/m} ,$$

$$E_{0z} = E_0 \sin \theta = \frac{1}{2} 10^3 \text{ V/m}$$

e quindi

$$E_y = \frac{\sqrt{3}}{2} 10^3 \sin (1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}$$

$$E_z = \frac{1}{2} 10^3 \sin (1.57 \cdot 10^7 x - 4.71 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}.$$

Da (13.6) le ampiezze delle componenti del campo magnetico sono

$$B_{0y} = \frac{E_{0y}}{c} = 1.67 \cdot 10^{-6} \text{ T} , \quad B_{0z} = \frac{E_{0z}}{c} = 2.89 \cdot 10^{-6} \text{ T} \Rightarrow B_0 = 3.34 \cdot 10^{-6} \text{ T} .$$

### Esempio 13.2

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata ellitticamente, che si propaga nel vuoto lungo l'asse  $x$ , ha i due semiassi di valore  $E_{0y} = \sqrt{3} E_0$ ,  $E_{0z} = \sqrt{2} E_0$ , con  $E_0 = 10^3 \text{ V/m}$ . La frequenza è  $v = 4.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ . Scrivere l'equazione di quest'onda.

### Soluzione

I parametri sono  $\lambda = 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  (luce di colore rosso),  $k = 0.9 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $\omega = 2.7 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ . Da (13.8), lasciando impreciso se  $\delta = \pi/2$  o  $\delta = 3\pi/2$ ,

$$E_y = \sqrt{3} E_0 \sin (kx - \omega t) = 1.73 \cdot 10^3 \sin (0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m} ,$$

$$E_z = \pm \sqrt{2} E_0 \cos (kx - \omega t) = \pm 1.41 \cdot 10^3 \cos (0.9 \cdot 10^7 x - 2.7 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m} .$$

Con il segno positivo l'ellisse è descritta in senso orario, guardando lungo la direzione di propagazione. L'equazione dell'ellisse è

$$\left( \frac{E_y}{1.73 \cdot 10^3} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{1.41 \cdot 10^3} \right)^2 = 1 .$$

Il campo magnetico associato all'onda vale, secondo (13.6),

$$B_y = \mp \frac{\sqrt{2} E_0}{c} \cos (kx - \omega t) = \mp 4.71 \cdot 10^{-6} \cos (kx - \omega t) \text{ T} ,$$

$$B_z = \frac{\sqrt{3} E_0}{c} \sin (kx - \omega t) = 5.77 \cdot 10^{-6} \sin (kx - \omega t) \text{ T} .$$

### 13.3 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting

La presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  in una regione comporta la presenza di un certa quantità di energia distribuita nello spazio con densità  $u$ .

In un mezzo omogeneo le densità sono date da (5.48) e (10.36),

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad , \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

e la densità istantanea di energia elettromagnetica è

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$$

Per un'onda elettromagnetica piana, tenuto conto di (13.7) e (13.4), abbiamo

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = u_e$$

per cui

$$u = 2u_e = \epsilon E^2 \quad . \quad (13.20)$$

L'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà al campo magnetico. Il risultato è vero in generale, anche per onde non piane.

Consideriamo adesso un elemento di superficie  $d\Sigma$  il cui versore normale  $\mathbf{u}_n$  forma l'angolo  $\alpha$  con la direzione di propagazione definita da  $\mathbf{v}$  ovvero dal vettore  $\mathbf{k}$ . Nel tempo  $dt$  passa attraverso  $d\Sigma$  tutta l'energia contenuta nel volume del prisma elementare di base  $d\Sigma$  e altezza  $vdt$ , ossia

$$dU = u d\tau = u d\Sigma \cos\alpha v dt = \epsilon E^2 v \cos\alpha d\Sigma dt \quad .$$

La potenza che attraversa  $d\Sigma$  è pertanto

$$dP = \epsilon E^2 v \cos\alpha d\Sigma \quad .$$

Questa relazione permette di definire il vettore

$$\mathbf{S} = \epsilon E^2 \mathbf{v} \quad , \quad (13.21)$$

avente la proprietà che il suo flusso attraverso la superficie  $d\Sigma$  dà la potenza istantanea attraverso  $d\Sigma$ :

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon E^2 v \cos\alpha d\Sigma = \epsilon E^2 v d\Sigma_0 = S d\Sigma_0 \quad ,$$

dove  $d\Sigma_0$  è la superficie infinitesima ortogonale a  $\mathbf{v}$ , pari a  $d\Sigma \cos\alpha$ .

La definizione (13.21) si può anche scrivere, in base a (13.9).

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (13.22)$$

e quindi

$$dP = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Integrando su una superficie finita  $\Sigma$ , la potenza istantanea che la attraversa è data dal flusso di  $\mathbf{S}$ :

$$P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (13.23)$$

Il vettore  $\mathbf{S}$  così definito è chiamato *vettore di Poynting*. Esso ha dunque direzione e verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Vediamo che  $S$  si misura nelle stesse unità  $\text{W/m}^2$  dell'intensità di un'onda, definita nel paragrafo 12.7.

Applichiamo questi risultati validi per una qualsiasi onda elettromagnetica piana ad un'onda piana armonica polarizzata rettilineamente, rappresentata nel piano di polarizzazione da

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) .$$

Il modulo del vettore di Poynting è

$$S = \epsilon E^2 v = \epsilon v E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) .$$

Nella pratica, fissata una certa superficie ortogonale a  $x$ , è importante calcolare non tanto il flusso istantaneo di energia quanto il flusso medio. Il motivo è che la pulsazione delle onde elettromagnetiche è in generale molto elevata (in particolare nella luce visibile  $\omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$ ) e gli strumenti di misura riescono a determinare soltanto il valor medio dell'energia che li colpisce, non potendo essere sensibili a variazioni così rapide.

Il valore medio del vettore di Poynting è

$$S_m = \epsilon v (E^2)_m = \epsilon v \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 ,$$

dove il tempo  $t$  corrisponde a moltissimi periodi dell'onda; il risultato non dipende dal valore di una eventuale fase iniziale  $\delta_0$  che si somma a  $kx - \omega t$ . Ricordando la definizione di valore efficace di una grandezza sinusoidale (paragrafo 11.6) e la definizione di intensità (paragrafo 12.7), concludiamo che l'*intensità trasportata da un'onda elettromagnetica piana armonica polarizzata rettilineamente* vale

$$I = S_m = \epsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 = \epsilon v E_{\text{eff}}^2 . \quad (13.24)$$

Poiché il campo elettrico di un'onda piana polarizzata può essere pensato, secondo (13.14), come la somma vettoriale di due campi elettrici sfasati, ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione, appliciamo (13.24) a ciascuna componente:

$$I_y = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0y}^2 , \quad I_z = \frac{1}{2} \epsilon v E_{0z}^2 .$$

L'intensità totale, pari alla somma delle intensità trasportate dalle componenti,

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \epsilon v (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) , \quad (13.25)$$

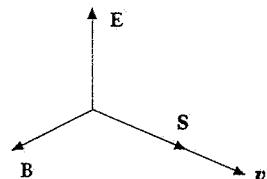


Figura 13.9

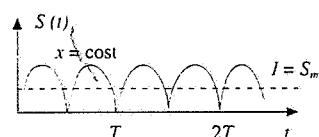


Figura 13.10

risulta *indipendente dallo sfasamento tra le componenti* e quindi dallo stato di polarizzazione (rettilegna, ellittica o circolare).

Se l'onda non è polarizzata, se cioè il campo elettrico ha direzione che varia casualmente, in media le componenti  $E_y$  e  $E_z$  sono eguali tra loro; la (13.25) resta ancora valida purché si considerino i valori medi dei quadrati delle ampiezze.

Da (13.11), (13.10), (13.13) ricaviamo

$$\varepsilon v = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z} = \frac{n}{Z_0}$$

per cui possiamo porre (13.24) nella forma

$$I = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 = \frac{n}{Z_0} E_{\text{eff}}^2 \quad . \quad (13.26)$$

### Esempio 13.3

Dedurre l'espressione dell'intensità delle onde elettromagnetiche piane considerate negli esempi 13.1 e 13.2. Trovare inoltre un'espressione per l'intensità di un'onda elettromagnetica piana polarizzata circolarmente e non polarizzata. Si consideri  $n = 1$ .

#### Soluzione

Applichiamo ai casi da esaminare la definizione  $I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m$ .

A. *Onda piana polarizzata rettilineamente* (esempio 13.1).

Sappiamo già, da (13.24) o (13.26) che

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.27)$$

Da (13.17) abbiamo

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v [(E_0 \cos \theta)^2 + (E_0 \sin \theta)^2] = I \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta$$

e quindi le componenti dell'intensità che compaiono in (13.25) sono

$$I_y = I \cos^2 \theta, \quad I_z = I \sin^2 \theta \quad . \quad (13.28)$$

B. *Onda piana polarizzata ellitticamente* (esempio 13.2).

Ricorriamo in questo caso a (13.18):

$$I = S_m = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v (E_y^2 + E_z^2)_m = \varepsilon v [E_{0y}^2 \sin^2(kx - \omega t) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t)]_m \quad .$$

L'intensità dell'onda è dunque

$$I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0y}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon v E_{0z}^2 = \frac{E_{0y}^2}{2 Z_0} + \frac{E_{0z}^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.29)$$

C. *Onda piana polarizzata circolarmente*.

Il risultato si ottiene direttamente da (13.29) ponendo  $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ :

$$I = \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{Z_0}, \quad I_y = I_z = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \frac{E_0^2}{2 Z_0} \quad . \quad (13.30)$$

D. *Onda piana non polarizzata*.

Abbiamo detto prima che in media le componenti  $E_y$  e  $E_z$  devono essere eguali tra loro e quindi eguali a  $E/\sqrt{2}$ , ovvero deve valere l'eguaglianza

$$(E_y^2)_m = (E_z^2)_m = \frac{1}{2} (E^2)_m ,$$

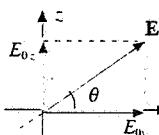
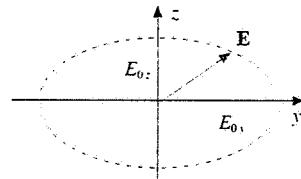
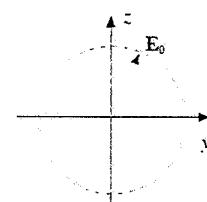
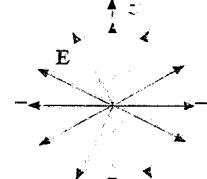
e pertanto

$$I_y = I_z = \frac{I}{2} , \quad I = \epsilon v (E^2)_m = \frac{1}{2} \epsilon v (E_0^2)_m = \frac{(E_0^2)_m}{2 Z_0} \quad (13.31)$$

È stata così verificata la validità di (13.25) nei vari casi possibili e sono state trovate le espressioni esplicite di  $I_y$  e  $I_z$ .

I risultati ottenuti nel paragrafo 13.2 e in questo paragrafo forniscono una descrizione completa degli stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana armonica. Essi verranno usati spesso in seguito e perciò li abbiamo riassunti nella tabella 13.1.

**Tabella 13.1 Stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana**

Stato di polarizzazione	Equazione dell'onda	Intensità dell'onda
onda rettilinea	$E_y = E_0 \cos \theta \sin (kx - \omega t)$ $E_z = E_0 \sin \theta \sin (kx - \omega t)$ 	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 \cos^2 \theta$ $I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2 \sin^2 \theta$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2$
onda ellittica	$E_y = E_{0y} \sin (kx - \omega t)$ $E_z = E_{0z} \cos (kx - \omega t)$ 	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0y}^2$ $I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0z}^2$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$
onda circolare	$E_y = E_0 \sin (kx - \omega t)$ $E_z = E_0 \cos (kx - \omega t)$ 	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_0^2$ $I_z = I_y$ $I = I_y + I_z = \frac{n}{Z_0} E_0^2$
onda non polarizzata	$E_y = (E_{0y})_m \sin (kx - \omega t)$ $E_z = (E_{0z})_m \sin [(kx - \omega t) + \delta(t)]$ 	$I_y = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_{0y}^2)_m$ $I_z = I_y$ $I = I_y + I_z = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} (E_0^2)_m$

L'intensità dell'onda armonica è sempre proporzionale al quadrato del valore medio dell'ampiezza del campo elettrico.

### 13.4 Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione

Per dimostrare che le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto oltre che energia, consideriamo una superficie piana  $\Sigma$  ortogonale alla direzione di propagazione (asse  $x$ ) di un'onda piana nel vuoto. Questa volta però facciamo l'ipotesi che si tratti di una superficie materiale su cui è distribuita una carica elettrica con densità superficiale  $\sigma$ . La forza di Lorentz per unità di superficie, esercitata dai campi che costituiscono l'onda, è

$$\mathbf{F}_\sigma = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B}) ,$$

dove  $\mathbf{v}_\sigma$  è la velocità comunicata alle cariche dalla forza elettrica. L'unità di superficie assorbe perciò la potenza

$$\mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\sigma + \sigma \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_\sigma = \sigma v_\sigma E .$$

Il termine contenente  $\mathbf{B}$  si annulla perché nel prodotto misto due vettori sono eguali e dunque  $\mathbf{B}$  non contribuisce alla potenza assorbita. Questa risulta sempre positiva perché  $\sigma \mathbf{E}$  e  $\mathbf{v}_\sigma$  sono in ogni istante paralleli e concordi. In media l'energia assorbita per unità di tempo e per unità di superficie, cioè l'intensità ceduta dall'onda, vale

$$I = \sigma(v_\sigma E)_m . \quad (13.32)$$

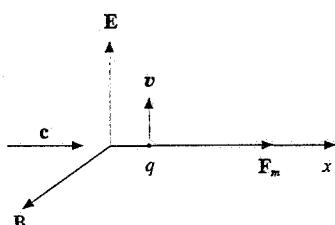


Figura 13.11

A questo assorbimento non corrisponde un effetto meccanico globale sulla superficie perché il campo  $\mathbf{E}$  è parallelo alla superficie e tale è la forza elettrica.

Invece la forza magnetica dà origine ad un effetto meccanico, pur non assorbendo energia in quanto sempre ortogonale a  $\mathbf{v}_\sigma$ . Essa è normale alla superficie  $\Sigma$  su cui stanno  $\mathbf{v}_\sigma$  e  $\mathbf{B}$  ed è concorde a  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , cioè al versore  $\mathbf{u}_x$ , qualunque sia il segno di  $\sigma$ . Passando direttamente ai valori medi abbiamo, per unità di superficie,

$$\mathbf{F}_m = \sigma(\mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B})_m = \sigma(v_\sigma B)_m \mathbf{u}_x = \frac{\sigma}{c} (v_\sigma E)_m \mathbf{u}_x = \frac{I}{c} \mathbf{u}_x ,$$

dove abbiamo usato (13.7) e (13.32). Questa forza media per unità di superficie corrisponde a una pressione media, detta *pressione di radiazione*, che viene esercitata dall'onda sulla superficie  $\Sigma$ :

$$P_{rad} = \frac{I}{c} . \quad (13.33)$$

D'altra parte  $\mathbf{F}_m \Delta t$  è l'impulso per unità di superficie dovuto all'onda e siamo portati ad ammettere che l'onda ceda per unità di tempo e per unità di superficie la quantità di moto  $\mathbf{F}_m$ : in conclusione, con riferimento alle unità di tempo e superficie, se l'onda cede a  $\Sigma$  l'energia  $I$ , essa cede anche la quantità di moto  $I/c$ .

I risultati trovati sono validi nel caso in cui la superficie colpita sia *completamente assorbente*, cioè assorba tutta l'energia che la colpisce. Come discuteremo in seguito, una superficie in generale in parte assorbe e in parte riflette l'energia elettromagnetica incidente. L'assorbimento completo è un caso limite; l'altro caso limite è la *superficie perfettamente riflettente*, che non assorbe energia. In questa situazione l'onda che incide normalmente su  $\Sigma$  dopo la riflessione si propaga lungo  $-\mathbf{u}_x$ , la quantità di moto cambia di verso e l'impulso comunicato a  $\Sigma$  è doppio rispetto al caso dell'assorbimento completo. La pressione di radiazione risulta

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} . \quad (13.34)$$

Infine supponiamo che la direzione di propagazione dell'onda piana incidente formi l'angolo  $\theta$  con la normale alla superficie  $\Sigma$ . Rispetto ai casi precedenti abbiamo due differenze: la componente della quantità di moto dell'onda che partecipa all'interazione con la

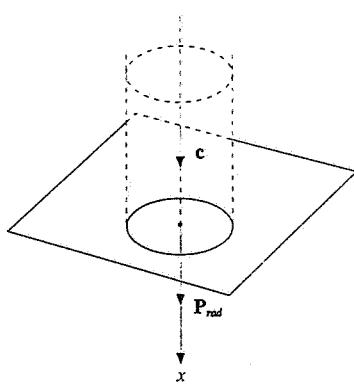


Figura 13.12

superficie è la componente normale e ciò comporta un fattore moltiplicativo  $\cos\theta$ ; in secondo luogo, a parità di sezione dell'onda incidente, l'area colpita è maggiore e quindi la pressione minore, ancora di un fattore  $\cos\theta$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \text{assorbimento completo} \quad P_{\text{rad}} &= \frac{I}{c} \cos^2\theta, \\ \text{riflessione completa} \quad P_{\text{rad}} &= \frac{2I}{c} \cos^2\theta. \end{aligned} \quad (13.35)$$

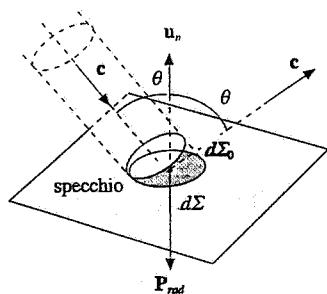


Figura 13.13

#### Esempio 13.4

Su una superficie piana incidono più onde, distribuite isotropicamente nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , essendo  $\theta$  l'angolo tra direzione di incidenza e normale alla superficie. Calcolare la pressione di radiazione nei due casi di superficie completamente assorbente e completamente riflettente.

#### Soluzione

Calcoliamo il valore medio della pressione nell'angolo solido visto dalla superficie piana, che è metà dell'angolo totale:

$$(P_{\text{rad}})_m = \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega k \cos^2\theta d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} k \cos^2\theta 2\pi \sin\theta d\theta = -k \int_1^0 \cos^2\theta d\cos\theta = \frac{k}{3}.$$

Quindi, valendo  $k$  o  $I/c$  o  $2I/c$ ,

$$\begin{aligned} \text{assorbimento completo} \quad (P_{\text{rad}})_m &= \frac{I}{3c}, \\ \text{riflessione completa} \quad (P_{\text{rad}})_m &= \frac{2I}{3c}. \end{aligned} \quad (13.36)$$

L'azione della pressione di radiazione si mette in evidenza con il dispositivo mostrato nella figura 13.14. In una bilancia di torsione (paragrafo 9.4 del primo volume) agli estremi dell'asta sono fissati un disco riflettente, ad esempio costituito da uno specchio, e uno assorbente, che si può realizzare con una lamina metallica ricoperta di nerofumo. Illuminando il sistema con un'onda luminosa di sufficiente intensità si osserva una rotazione della bilancia nel verso indicato, segno che la pressione sullo specchio è maggiore che sul disco nero, come dicono (13.33) e (13.34).

Nel contenitore di vetro che contiene lo strumento è praticato un vuoto spinto. Se ci fosse aria o un altro gas, si osserverebbe una rotazione in senso contrario. Infatti il disco nero, che assorbe energia, si riscalda e cede calore al gas che lo circonda facendo aumentare localmente la velocità quadratica media delle molecole: queste tramite urti esercitano sul disco nero una pressione che è maggiore di quella esercitata sul disco speculare, in cui l'assorbimento di energia dall'onda è quasi trascurabile. Questo effetto maschera completamente l'effetto contrario dovuto alla pressione di radiazione.

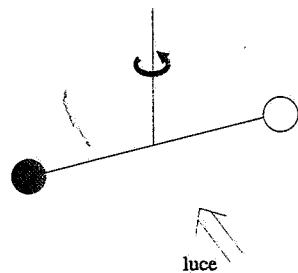


Figura 13.14

#### Riepilogo su energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica

Riassumiamo e ampliamo i risultati raggiunti in questo paragrafo e nel precedente, considerando per semplicità la propagazione nel vuoto.

Un'onda elettromagnetica piana trasporta una certa quantità di energia  $U$ , che è distribuita con la densità istantanea  $u$  data da (13.20). Agli effetti pratici è più utile calcolare un valore medio e si ricorre all'intensità  $I$ , energia dell'onda che passa attraverso una superficie ortogonale alla direzione di propagazione per unità di tempo e per unità di superficie.

All'energia trasportata dall'onda è insindibilmente legato un trasporto di quantità di moto e, con un'estensione di (13.33), possiamo scrivere:

$$\text{quantità di moto di un'onda di energia } U \quad \mathbf{p} = \frac{U}{c} \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\text{quantità di moto per unità di volume (istantanea)} \quad \mathbf{p}_v = \frac{u}{c} \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\text{quantità di moto media per unità di superficie e di tempo} \quad \mathbf{p}_I = \frac{I}{c} \mathbf{u}_x \quad .$$

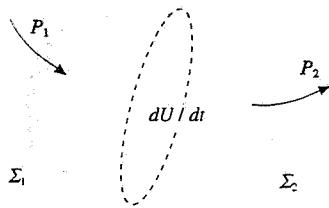


Figura 13.15

L'espressione (13.23) che dà la potenza trasportata da un'onda come flusso del vettore di Poynting, si presta a un'estensione notevole. Consideriamo che la superficie  $\Sigma$  sia chiusa e supponiamo che attraverso  $\Sigma_1$  entri nel volume  $\tau$  delimitato da  $\Sigma$  la potenza  $P_1$  e che attraverso  $\Sigma_2$  esca la potenza  $P_2$ , con  $P_1$  in generale diversa da  $P_2$ . La differenza  $P_1 - P_2$  corrisponde a potenza ceduta al volume  $\tau$ :

$$P_1 - P_2 = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u \, d\tau \quad .$$

I singoli termini, applicando (13.23) a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , con  $\mathbf{u}_n$  diretto sempre verso l'esterno, valgono

$$P_1 = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \quad , \quad P_2 = \int_{\Sigma_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \Rightarrow P_1 - P_2 = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \quad .$$

Applichiamo il teorema della divergenza (3.22) e otteniamo

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{S} \, d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u \, d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau \quad .$$

Questa eguaglianza comporta che localmente sia

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad :$$

la divergenza del vettore di Poynting è eguale all'opposto della variazione temporale della densità di energia. Un flusso netto di energia elettromagnetica attraverso una superficie chiusa deve corrispondere a una diminuzione o ad un aumento dell'energia distribuita entro la superficie.

Si dimostra che quando sono presenti anche cariche elettriche, le quali sotto l'azione del campo elettrico danno luogo a una corrente di densità  $\mathbf{j}$ , il bilancio energetico completo si scrive

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad : \quad (13.37)$$

da una parte c'è la variazione di energia, dall'altra l'energia scambiata tramite onde e l'energia spesa per mantenere le cariche in movimento. Infatti, per unità di volume, la potenza spesa è  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ , tenuto conto che  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  (paragrafo 6.2).

La (13.37) è la relazione con struttura analoga che si può scrivere per la quantità di moto: sono molto importanti concettualmente: esse mostrano che nei problemi in cui sono coinvolte onde elettromagnetiche occorre mettere nel bilancio l'energia e la quantità di moto trasportate dalle onde.

Aggiungiamo solo per conoscenza che le onde elettromagnetiche trasportano anche momento angolare e che questo fatto va considerato in eventuali applicazioni della relativa legge di conservazione.

Queste proprietà, ricavate dalle leggi generali della meccanica e dell'elettromagnetismo classico, sono confermate, anche se in un quadro molto diverso, dalla trattazione quantistica.

### 13.5 Onde elettromagnetiche piane, sferiche, cilindriche

Riprendendo i risultati del paragrafo 12.9, un'onda elettromagnetica piana armonica che si propaga in una qualunque direzione si può rappresentare come

$$E = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) ;$$

$\mathbf{r}$  è il raggio vettore che unisce il punto  $O$  con un punto  $P$  del fronte d'onda e  $\mathbf{k}$  è il vettore di propagazione, di modulo  $k = 2\pi/\lambda$  e direzione e verso coincidenti con quelli di propagazione dell'onda.

In un sistema di coordinate cartesiane abbiamo

$$E(x, y, z, t) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) , \quad (13.38)$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} . \quad (13.39)$$

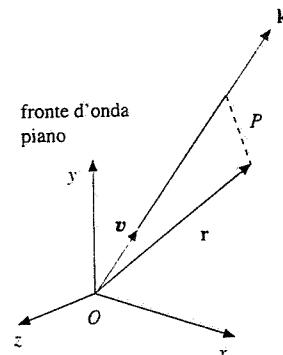


Figura 13.16

In un mezzo indefinito omogeneo e isotropo le equazioni di Maxwell prevedono anche onde sferiche, con funzione d'onda

$$E = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t) , \quad (13.40)$$

dove  $E_0$  numericamente è eguale all'ampiezza del campo elettrico per  $r = 1$  m.

Il campo elettrico e il campo magnetico si propagano con velocità  $v$  lungo i raggi vettori  $\mathbf{r}$  uscenti dal punto  $O$  in cui è posta la sorgente, idealmente puntiforme. Considerato un piano perpendicolare ad un certo raggio  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  appartengono a questo piano (l'onda è trasversale) e in ogni istante continuano a valere le relazioni

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} v , \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{E^2}{v} \mathbf{u}_r .$$

Il vettore di Poynting è sempre definito da

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

e l'intensità risulta

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E_0^2}{r^2} = \frac{n}{2 Z_0} \frac{E_0^2}{r^2} , \quad (13.41) \quad \text{Intensità di un'onda sferica}$$

inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $r$  dalla sorgente.

Una sorgente rettilinea lunga e sottile può dare origine a un'onda cilindrica per la quale valgono le relazioni

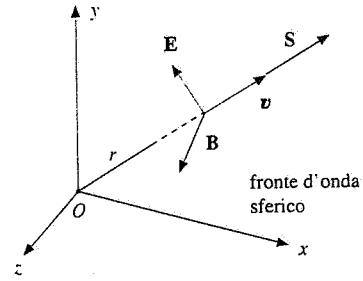


Figura 13.17

Intensità di un'onda cilindrica

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{r}} \operatorname{sen}(kr - \omega t), \quad I = \frac{1}{2} \epsilon v \frac{E_0^2}{r} = \frac{n}{2 Z_0} \frac{E_0^2}{r} \quad (13.42)$$

con  $E_0$  ampiezza del campo elettrico per  $r = 1$  m e  $r$  distanza dall'asse su cui giace la sorgente.

Limitando il fronte d'onda sferico o cilindrico e ponendosi a grande distanza dalla sorgente si ottiene un fronte d'onda piano e l'ampiezza dell'onda è approssimativamente costante su tratti non troppo lunghi.

Ricordiamo che le direzioni lungo cui si propagano le onde individuano una serie di *raggi, ortogonali* in ogni punto ai fronti d'onda; si rivedano le figure 12.21, 12.23 e 12.24.

### Nota. Radiazione solare. Origine dell'energia solare

Il sole è una sorgente molto intensa di onde elettromagnetiche. Discuteremo più avanti l'origine di questa emissione; diciamo intanto che sulla superficie terrestre l'intensità della radiazione solare vale circa  $I = 1.4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ . Dato il grande valore della distanza sole-terra ( $r \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ) consideriamo localmente piane le onde emesse dal sole e da (13.26), (13.7) calcoliamo le ampiezze dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sulla superficie terrestre:

$$E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = \sqrt{2 \cdot 377 \cdot 1.4 \cdot 10^3} = 1.03 \cdot 10^3 \text{ V/m},$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.43 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

La pressione della radiazione solare su un oggetto, in base a (13.33) e (13.34), vale

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}, \quad P_{\text{rad}} = \frac{2 I}{c} = 9.34 \cdot 10^{-6} \text{ Pa},$$

rispettivamente per un corpo assorbente e per un corpo riflettente. Si tratta di valori inferiori di circa 11 ordini di grandezza rispetto alla pressione atmosferica, ma che possono essere facilmente messi in evidenza come descritto nel paragrafo 13.4.

Se immaginiamo che l'intensità misurata sulla superficie terrestre sia distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio  $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , abbiamo una stima della potenza della sorgente solare, detta anche luminosità del sole:

$$P_{\text{sole}} = I 4 \pi r^2 = 3.96 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

Sorgente dell'energia solare sono i processi di *fusione nucleare* che avvengono all'interno del sole. Si ritiene che il processo principale sia la *fusione di quattro nuclei di idrogeno in un nucleo di elio* attraverso una catena di reazioni successive. La differenza di massa tra stato iniziale e stato finale è

$$\Delta m = 4 m_{\text{H}} - m_{\text{He}} = 4 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} - 6.6420 \cdot 10^{-27} = 0.0484 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

e a questa corrisponde l'energia liberata

$$\Delta U = \Delta m c^2 = 4.356 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 27.3 \text{ MeV}.$$

La temperatura all'interno del sole, costituito principalmente da idrogeno, è di circa  $1.5 \cdot 10^7 \text{ K}$ : l'energia del moto di agitazione termica dei nuclei di idrogeno è tale da permettere a questi di superare la repulsione elettrica e di avvicinarsi talmente tra loro da risentire della forza nucleare attrattiva, causa della fusione di due nuclei. L'energia liberata dalle fusioni compare sotto forma di energia cinetica delle particelle

che vengono emesse durante le reazioni (tra cui neutrini) e di energia elettromagnetica; essa è in massima parte riassorbita dal mezzo circostante. L'insieme di tutti i processi consente una situazione di equilibrio dinamico, con un flusso di energia dall'interno verso la superficie del sole, che si trova a circa  $6 \cdot 10^3$  K, temperatura troppo bassa perché avvengano processi di fusione. La radiazione che noi riceviamo è emessa dagli atomi degli strati superficiali, eccitati tramite urti termici.

Una stima dal numero di fusioni al secondo necessarie per generare la potenza emessa è

$$n_f = \frac{P_{\text{sole}}}{\Delta U} = \frac{3.96 \cdot 10^{26}}{4.36 \cdot 10^{-12}} = 9.1 \cdot 10^{37} \text{ fusioni/s}$$

e in un secondo viene consumata una massa di idrogeno pari a

$$M_H = 4 m_H n_f = 6.1 \cdot 10^{11} \text{ Kg/s}$$

ovvero in un anno  $1.9 \cdot 10^{19}$  Kg. La massa del sole è  $2 \cdot 10^{30}$  Kg: per consumarne metà, cioè per consumarne  $1 \cdot 10^{30}$  Kg, occorrono  $\approx 5 \cdot 10^{10}$  anni.

Abbiamo menzionato l'emissione di neutrini. Questi riescono ad attraversare la massa solare e la misura del loro flusso sulla terra, attraverso esperimenti molto raffinati, permette di verificare le ipotesi del *modello solare* attualmente accettato. Si è già accennato a questi argomenti nella nota del paragrafo 7.1.

Terminiamo qui l'esposizione di alcune delle proprietà generali delle onde elettromagnetiche nel vuoto o in un mezzo dielettrico indefinito omogeneo e isotropo, per iniziare ad occuparci di come esse vengono generate. Nei prossimi paragrafi studieremo alcuni *meccanismi di emissione di radiazioni elettromagnetiche* (termine correntemente usato per indicare le onde elettromagnetiche). Una parte degli argomenti richiederebbe nozioni di meccanica quantistica e di relatività. Come abbiamo già fatto altre volte useremo invece, quando è possibile e non è fuorviante, un modello classico per ottenere almeno una comprensione limitata dei fenomeni; altrimenti ci limiteremo a esporre i risultati senza spiegazioni.

### 13.6 Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante

La prima sorgente di radiazione che prendiamo in esame è il *dipolo elettrico con momento variabile sinusoidalmente nel tempo*. Lo studio della radiazione di dipolo elettrico è particolarmente importante in quanto su di essa è basato il funzionamento delle *antenne* utilizzate per la trasmissione di onde elettromagnetiche. Dall'espressione della potenza irradiata da un dipolo elettrico oscillante è possibile dedurre (paragrafo 13.7) una relazione per la potenza irradiata da una *carica elettrica in moto accelerato*, che da un punto di vista classico si può considerare la *vera sorgente elementare di onde elettromagnetiche*. L'altra classe di sorgenti fondamentali di radiazione elettromagnetica è costituita dagli *atomi* e dalle *molecole*: di questo argomento ci occuperemo in parte nel paragrafo 13.8 e più estesamente nel capitolo 18.

Il dipolo elettrico oscillante viene schematizzato come un segmento di lunghezza  $a$ , che poniamo parallelo all'asse  $z$ . La carica è concentrata agli estremi (le due sferette della figura 13.18) e un opportuno generatore la fa variare sinusoidalmente:

$$q = q_0 \sin \omega t, \quad i = \frac{dq}{dt} = \omega q_0 \cos \omega t = i_0 \cos \omega t.$$

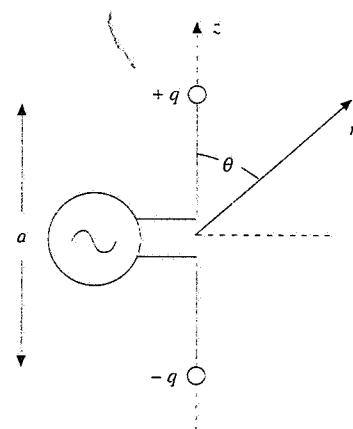


Figura 13.18

La corrente varia nel tempo, ma viene ritenuta costante in un certo istante su tutta la lunghezza  $a$ , se questa è molto minore della lunghezza d'onda  $\lambda = cT = 2\pi c / \omega$  della perturbazione generata dal dipolo.

Riprendendo (2.58) definiamo il valore istantaneo del momento di dipolo elettrico:

$$\mathbf{p} = q a \mathbf{u}_z = q_0 a \sin \omega t \mathbf{u}_z = p_0 \sin \omega t \mathbf{u}_z , \quad p_0 = q_0 a = \frac{i_0 a}{\omega} .$$

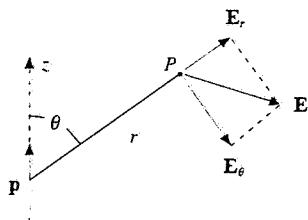


Figura 13.19

Tale momento, secondo i risultati del paragrafo 2.7, produrrebbe un campo elettrico con componenti radiale e trasversa date da (2.60):

$$E_r = \frac{2 p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{2 p_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t , \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sin \omega t .$$

Queste espressioni si possono ritenere valide in vicinanza del dipolo, per distanze grandi rispetto alla dimensione  $a$  del dipolo, ma piccole rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ : infatti in tale regione le variazioni temporali del campo elettrico dovute alle variazioni del momento di dipolo si manifestano senza apprezzabile ritardo.

A distanza  $r \gg \lambda$  il fatto che la propagazione della perturbazione elettromagnetica prodotta dal dipolo avvenga con velocità finita, anche se molto grande, comporta una soluzione delle equazioni di Maxwell molto diversa. Precisamente, nell'ipotesi  $r \gg \lambda \gg a$  si trova che, fissata una direzione orientata  $\mathbf{r}$  che parte dal centro del dipolo e forma l'angolo  $\theta$  con  $\mathbf{p}$ , lungo questa si propaga un'onda sferica trasversale:  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  hanno direzione e verso come indicato in figura 13.20,  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  dà direzione e verso della propagazione. I moduli dei campi sono:

$$E = E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t) = \frac{\pi p_0 \sin \theta}{\epsilon_0} \frac{1}{\lambda^2 r} \sin(kr - \omega t) ,$$

$$B = B_\theta = E/c . \quad (13.43)$$

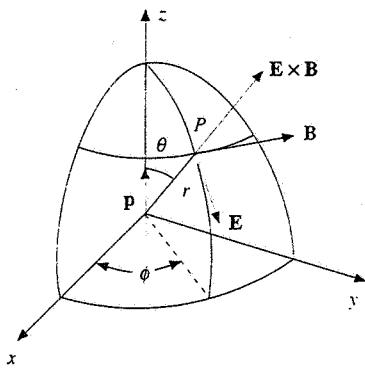


Figura 13.20

La dipendenza  $1/r^3$  dalla distanza è sostituita dalla dipendenza  $1/r$ , tipica dell'onda sferica, la componente  $E_\theta$  è nulla; la velocità di propagazione nel vuoto è  $c = \omega/k$ . I valori dei campi dipendono, oltre che dalla distanza  $r$ , dall'angolo  $\theta$  e sono nulli in particolare per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , cioè lungo l'asse del dipolo. Non c'è dipendenza dall'angolo  $\phi$ , cioè la simmetria è cilindrica (il simbolo  $B_\theta$  indica solo che  $\mathbf{B}$  è diretto trasversalmente a  $\mathbf{E}$ , non che dipende da  $\phi$ ).

Per discutere almeno qualitativamente la formazione delle onde elettromagnetiche abbiamo riportato nella figura 13.21 la configurazione delle linee del campo elettrico prodotto dal dipolo, assumendo come istante iniziale  $t$  quello in cui il momento di dipolo vale  $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_z$  e le linee di  $\mathbf{E}$  hanno l'andamento tipico della situazione statica descritta nel paragrafo 2.7, figura 2.44. All'istante  $t + T/4$  il momento di dipolo è nullo per cui non esistono linee di campo che hanno gli estremi sul dipolo. Fisicamente è successo che le linee create nell'intervallo  $T/4$  si sono allontanate dal dipolo, si sono chiuse su se stesse e continuano ad allontanarsi. Intanto si formano nuove linee di campo con il verso opposto (nell'istante  $t + T/2$  il momento di dipolo vale  $-p_0 \mathbf{u}_z$ ) e all'istante  $t + 3T/4$ , quando il momento di dipolo è di nuovo nullo, anche questo sistema di linee si chiude e si allontana, deformando le linee di campo formate in precedenza. Si potrebbe dimostrare che la chiusura delle linee di campo nell'intorno del dipolo è dovuta alla presenza di una componente radiale  $E_r$ , che diminuisce con la distanza come  $1/r^2$ .

Se si considera una porzione limitata del fronte d'onda sferico a grande distanza

dal dipolo, dove può essere ritenuto piano, risulta che le direzioni di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono fissate, ovvero che l'onda elettromagnetica è polarizzata rettilineamente, con il campo  $\mathbf{E}$  contenuto nel piano meridiano, come in figura 13.20.

L'intensità dell'onda emessa dal dipolo si calcola da (13.26) con  $E_0$  dato da (13.43),  $E_0(r, \theta) = p_0 \sin \theta \omega^2 / 4\pi \epsilon_0 c^2 r$ :

$$I(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \sin^2 \theta , \quad (13.44)$$

$$I_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 \pi^2 v^4}{2 \epsilon_0 c^3} . \quad (13.45)$$

Essa dipende da  $1/r^2$ , come richiesto per un'onda sferica, e da  $\sin^2 \theta$ : l'intensità irradiata da un dipolo elettrico oscillante è nulla lungo l'asse ed è massima nel piano equatoriale, dove vale

$$I_{\max} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{I_0}{r^2} .$$

Il termine costante  $I_0$  dipende soltanto da caratteristiche della sorgente; si noti la forte dipendenza da  $\omega$ .

In figura 13.22 è rappresentato un *diagramma polare* della funzione  $I(\theta)$ : con  $r$  costante, per ogni valore di  $\theta$  si riporta dal centro del dipolo un segmento di lunghezza proporzionale a  $I(\theta)$ . Le punte dei segmenti stanno sulla curva disegnata, avente simmetria cilindrica rispetto all'asse del dipolo. Si dice che il dipolo elettrico oscillante presenta un diagramma di intensità con due *lobi*. È questo un esempio di fronte d'*onda sferica con intensità non uniforme sul fronte*.

Calcoliamo ora la potenza complessiva emessa dal dipolo:

$$P = \int I(\theta) d\Sigma .$$

L'integrale è esteso a una superficie sferica di raggio  $r$  con centro nel dipolo; l'elemento di superficie sferica in coordinate polari è  $d\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  per cui

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{16 \pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta .$$

Tenuto conto che

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4}{3} ,$$

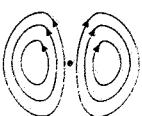
risulta in conclusione

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{4 \pi^3 p_0^2 v^4}{3 \epsilon_0 c^3} = \frac{8 \pi}{3} I_0 . \quad (13.46)$$

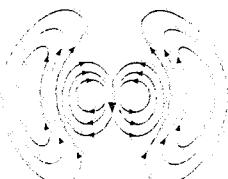
Fissato il valore di  $p_0$ , anche la *potenza irradiata dipende dalla quarta potenza della pulsazione*, ovvero della frequenza.



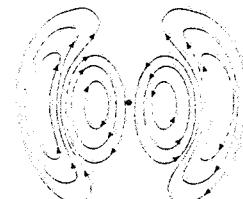
$t, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$



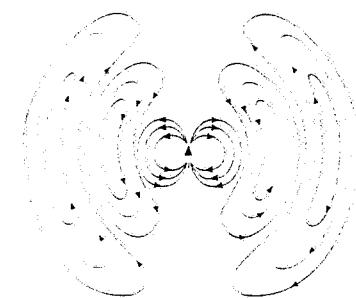
$t + \frac{T}{4}, \mathbf{p} = 0$



$t + \frac{T}{2}, \mathbf{p} = -\mathbf{p}_0$



$t + \frac{3T}{4}, \mathbf{p} = 0$



$t + T, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$

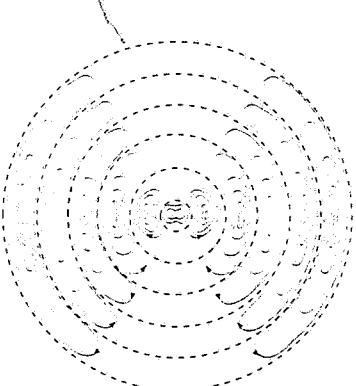


Figura 13.21

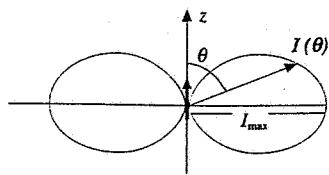


Figura 13.22

La (13.46) viene scritta anche in modo differente. Detto  $i_0$  il valore massimo della corrente circolante nel dipolo oscillante, che possiamo chiamare *antenna dipolare*, abbiamo visto all'inizio del paragrafo che  $p_0 = a i_0 / \omega$ . Sostituendo nella (13.45) ottenendo

$$I_0 = \frac{a^2 i_0^2 \omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3}$$

e quindi, da (13.46),

$$P = \frac{8\pi}{3} I_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \right) i_0^2 = \frac{1}{2} R_{\text{ant}} i_0^2 = R_{\text{ant}} i_{\text{eff}}^2 .$$

La potenza irradiata dall'antenna è espressa in funzione dell'intensità massima della corrente (o dell'intensità efficace) e di una grandezza  $R_{\text{ant}}$ , chiamata *resistenza d'antenna* e definita come

$$R_{\text{ant}} = \frac{a^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \frac{a^2}{\lambda^2} = 789.5 \frac{a^2}{\lambda^2} \Omega .$$

Dimensionalmente  $R_{\text{ant}}$  è una resistenza e la formula della potenza in funzione della corrente efficace è eguale alla formula della potenza dissipata in una resistenza ohmica. Si tratta però di una egualianza formale, in quanto  $R_{\text{ant}}$  caratterizza il processo di emissione di potenza sotto forma di radiazioni elettromagnetiche e non ha nulla a che vedere con la resistenza ohmica dell'antenna, così come  $P$  non è la potenza dissipata nell'antenna per effetto Joule.

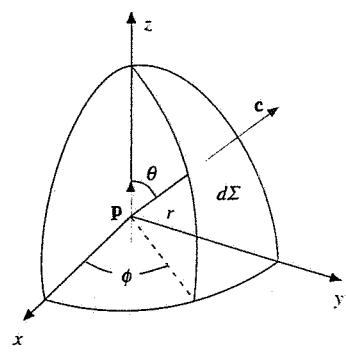


Figura 13.23

### Esempio 13.5

Un'antenna radio lunga  $a = 20$  m trasmette su una frequenza  $v = 8 \cdot 10^5$  Hz e invia ad un apparecchio radio posto a distanza  $r = 10$  km in direzione ortogonale rispetto all'antenna un segnale di ampiezza  $E_0 = 0.1$  V/m. Calcolare la potenza irradiata dall'antenna, trattata come un dipolo elettrico oscillante, e la resistenza d'antenna.

#### Soluzione

Osserviamo subito che è soddisfatta la condizione  $r \gg \lambda \gg a$  essendo

$$r = 10^4 \text{ m} , \lambda = \frac{c}{v} = 375 \text{ m} , a = 20 \text{ m} .$$

L'intensità che arriva alla radio, con  $E_0 = 0.1$  V/m, è

$$I = \frac{1}{2 Z_0} E_0^2 = 1.33 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2 .$$

Quindi, con  $\theta = \pi/2$  e  $r = 10^4$  m, da (13.44) e (13.46)

$$I_0 = r^2 I = 1.33 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 , P = 11.1 \cdot 10^3 \text{ W} .$$

La resistenza d'antenna risulta

$$R_{\text{ant}} = 789.5 \frac{a^2}{\lambda^2} = 2.25 \Omega$$

e dal suo valore deduciamo che il valore massimo della corrente è

$$i_0 = \sqrt{\frac{2 P}{R_{\text{ant}}}} = 99.3 \text{ A} \quad (i_{\text{eff}} = i_0 / \sqrt{2} = 70.2 \text{ A}) .$$

In modo analogo viene trattata la radiazione di un dipolo magnetico, costituito da una spira di area  $\Sigma$ , percorsa dalla corrente  $i = i_0 \sin \omega t$  e avente momento magnetico  $m = m_0 \sin \omega t$  con  $m_0 = i_0 \Sigma$ . A grande distanza dal dipolo si ha una situazione simile a quella descritta, in cui però le posizioni dei campi sono quelle mostrate nella figura 13.24. I campi valgono

$$E = E_\phi = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t), \quad B = B_\theta = E/c.$$

L'intensità e la potenza sono

$$I = \frac{m_0^2 \omega^4}{32\pi \epsilon_0 c^5} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \quad P = \frac{m_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^5}$$

e la resistenza di antenna si scrive

$$R_{\text{ant}} = \frac{\Sigma^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^5} = \frac{8\pi^3}{3} Z_0 \frac{\Sigma^2}{\lambda^4} = 3.12 \cdot 10^4 \frac{\Sigma^2}{\lambda^4} \Omega.$$

Se immaginassimo di far percorrere alla stessa corrente dell'esempio 13.5 lo stesso percorso, ma lungo una circonferenza, se cioè avessimo un dipolo magnetico di circonferenza  $a = 20$  m, e quindi con resistenza di antenna  $R_{\text{ant}} = 1.6 \cdot 10^{-3} \Omega$  alla data lunghezza d'onda, la potenza emessa sarebbe 7.9 W, circa 1400 volte inferiore a quella emessa dal dipolo elettrico di lunghezza  $a$ . E infatti in generale

$$\frac{P_{\text{el}}}{P_{\text{mag}}} = \left( \frac{cp_0}{m_0} \right)^2 = \left( \frac{ca}{\omega \Sigma} \right)^2 = \left( \frac{\lambda a}{2\pi \Sigma} \right)^2.$$

A parità di dimensioni  $\Sigma \sim a^2$  e il rapporto vale  $(\lambda / 2\pi a)^2$ ; siccome  $\lambda \gg a$  esso è molto grande, a favore del dipolo elettrico.

### 13.7 Radiazione emessa da una carica elettrica in moto accelerato

Un dipolo elettrico oscillante può essere rappresentato anche con una carica  $-q$  fissa nell'origine e una carica  $+q$  che si muove lungo l'asse  $z$  con legge  $z = z_0 \sin \omega t$ , che oscilla cioè con moto armonico tra  $+z_0$  e  $-z_0$ . L'accelerazione della carica  $+q$  e il valor medio del suo quadrato sono

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t, \quad a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \omega^2 z_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega^4 z_0^2}{2}.$$

Il valore massimo del momento di dipolo è

$$p_0 = q z_0 \Rightarrow p_0^2 \omega^4 = q^2 z_0^2 \omega^4 = 2 q^2 a^2;$$

ricorrendo alla (13.46) abbiamo la potenza irradiata da una particella carica in moto accelerato:

$$P_{\text{Larm}} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad . \quad (13.47) \quad \text{Formula di Larmor}$$

La (13.47) è nota come *formula di Larmor* e non è relativistica: la velocità della carica deve essere sempre molto minore di  $c$ . L'emissione è nulla lungo la direzione del moto e avviene preferibilmente in direzione perpendicolare al moto.

La formula relativisticamente corretta per la potenza irradiata da una particella carica in moto con velocità e accelerazione qualsiasi è stata ricavata da Liénard; se  $v$  e  $a$  sono velocità

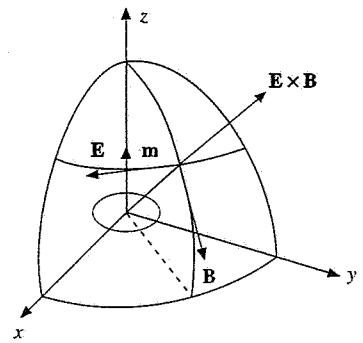
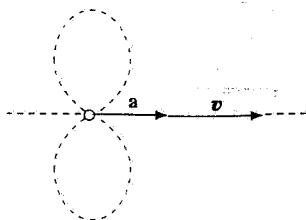


Figura 13.24



e accelerazione della particella avente carica  $q$ , la potenza emessa vale

$$P_{\text{Lien}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\frac{a^2 - (v \times a)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (13.48)$$

Quando  $v$  è trascurabile rispetto a  $c$  la formula di Liénard si riduce a quella di Larmor.

Figura 13.25

### Esempio 13.6

Nel modello di Bohr, descritto nel paragrafo 2.3, esempio 2.5, l'elettrone dell'atomo di idrogeno compie un'orbita circolare di raggio  $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare la perdita di energia per irraggiamento e il tempo che impiegherebbe l'elettrone per emettere un'energia pari a metà dell'energia di legame.

#### Soluzione

Riprendiamo i risultati dell'esempio 2.5: l'elettrone percorre l'orbita con velocità e accelerazione

$$v = 2.19 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \quad a = \frac{v^2}{r} = 9.02 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2.$$

Si vede che si possono usare formule non relativistiche dato che  $v^2 / c^2 \ll 1$ . Allora, dalla formula di Larmor (13.47) si ha

$$P_{\text{Larm}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = 5.68 \cdot 10^{-54} a^2 \text{ W} = 3.55 \cdot 10^{-35} a^2 \text{ eV/s},$$

passando all'unità eV/s per la potenza. Inserendo il valore calcolato di  $a$ ,

$$P_{\text{Larm}} = 2.88 \cdot 10^{-11} \text{ eV/s}.$$

Se ammettiamo una perdita di energia costante nel tempo, l'energia  $\Delta U = U / 2 = 13.6 / 2 = 6.8$  eV verrebbe persa nel tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta U}{P_{\text{Larm}}} = 2.36 \cdot 10^{-11} \text{ s}.$$

Un calcolo dettagliato mostrerebbe che questa perdita di energia, accompagnata da una diminuzione di velocità, porterebbe l'elettrone a spiraleggiare intorno al protone fino ad urtarlo sempre in un tempo dell'ordine di  $10^{-11}$  s.

*Secondo la fisica classica dunque un atomo non potrebbe essere stabile*, contrariamente all'evidenza sperimentale. La difficoltà è rimossa dalla meccanica quantistica: nel modello quantistico non ha senso parlare di orbite circolari o ellittiche con relative accelerazioni, l'elettrone occupa stati stazionari di energia nei quali non irradia.

A parte il caso dei moti all'interno degli atomi e delle molecole, in cui non sono applicabili, le formule (13.47) e (13.48) mostrano che ci può essere un irraggiamento notevole quando una particella carica subisce una grande accelerazione. In effetti fenomeni di questo tipo avvengono comunemente quando si impiegano fasci di elettroni, come vedremo tra breve; invece è praticamente impossibile osservare emissione da parte dei protoni: questo perché a parità di forza l'accelerazione è tanto minore quanto maggiore è la massa della particella e noi sappiamo che  $m_p = 1836 m_e$ .

### Raggi X di frenamento. Radiazione di frenamento

Uno dei meccanismi responsabili della produzione di *raggi X*, detti anche *raggi Roentgen* dal nome del loro scopritore, è appunto la radiazione elettromagnetica emessa da elettroni decelerati.

Il dispositivo per la produzione di raggi X, detto *tubo di Coolidge*, è schematizzato in figura 13.26. Un fascio di elettroni, emessi da un filamento incandescente per effetto termoelettronico (paragrafo 6.5), viene accelerato da una d.d.p. tipicamente compresa tra 10 e 100 kV e colpisce un bersaglio di materiale pesante (rame, piombo). Gli elettroni, penetrando nei primi strati del bersaglio, risentono dei fortissimi campi elettrici locali presenti all'interno del materiale e subiscono notevoli decelerazioni. Ciò porta all'emissione di una radiazione elettromagnetica, secondo la figura 13.25 e in accordo con la formula di Larmor, che è valida in quanto elettroni con energia cinetica inferiore a 100 keV non sono ancora relativistici.

Le frequenze emesse hanno uno *spettro continuo* fino ad un valore massimo  $v_{\max}$  proporzionale alla d.d.p. utilizzata per accelerare gli elettroni. Alla frequenza massima corrisponde la lunghezza d'onda minima  $\lambda_{\min} = c / v_{\max}$ , molto inferiore rispetto alle lunghezze d'onda della luce visibile. Ad esempio, con  $V = 50$  kV si ha  $v_{\max} = 1.2 \cdot 10^{19}$  Hz e  $\lambda_{\min} = 2.5 \cdot 10^{-11}$  m.

Un altro meccanismo di produzione di raggi X con frequenze analoghe, ma caratteristiche diverse, verrà discusso nei paragrafi 13.12 e 18.6.

La radiazione emessa dagli elettroni frenati nell'attraversamento di un mezzo materiale è detta in generale *radiazione di frenamento*, traduzione del termine originale tedesco *bremsstrahlung*, comunemente usato in tutte le lingue per indicare il fenomeno. Nel caso di elettroni relativistici (energie superiori a qualche centinaio di keV) l'emissione segue la legge (13.48) con  $a$  parallelo e discorde a  $v$  ed avviene nell'emisfero anteriore, in modo tanto più pronunciato quanto maggiore è l'energia. Con elettroni di energia  $U$  molto superiore all'energia a riposo  $m c^2$  ( $\sim 0.5$  MeV), le direzioni di emissione stanno su una superficie conica avente  $v$  come asse e semiapertura  $\theta \approx m c^2 / U$ : con  $U = 1$  GeV  $\theta \approx 0.03^\circ = 5 \cdot 10^{-4}$  rad. Lo spettro delle frequenze emesse nel processo di frenamento è *continuo*, con valore massimo che dipende dall'energia dell'elettrone.

### Radiazione di sincrotrone

Consideriamo adesso un elettrone relativistico che si muove con velocità angolare  $\omega$  costante lungo un'orbita circolare di raggio  $r$ ; l'accelerazione è centripeta e vale  $\omega^2 r$ . Ricordiamo la definizione delle due grandezze

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega r}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

La potenza emessa è data da (13.48) con  $\sin \theta = 1$  essendo l'accelerazione ortogonale alla velocità:

$$P_{\text{Lien}} = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c} \beta^2 \gamma^4 = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c} \gamma^4$$

L'ultima eguaglianza è valida con ottima approssimazione per elettroni con energia superiore a 10 MeV (a tale energia  $\beta = 0.999$ ).

L'energia emessa in un giro completo, percorso nel tempo  $T = 2\pi/\omega$ , è  $P_{\text{Lien}} T = P_{\text{Lien}} 2\pi/\omega$  e risulta

$$\Delta U = \frac{e^2}{3\epsilon_0 r} \beta^3 \gamma^4 = \frac{e^2}{3\epsilon_0 r} \gamma^4 = \frac{6.03 \cdot 10^{-9}}{r} \gamma^4 \text{ eV}$$

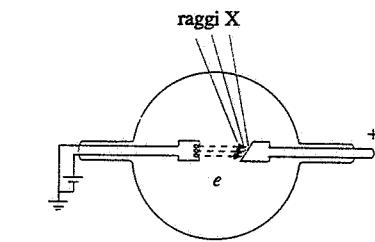


Figura 13.26

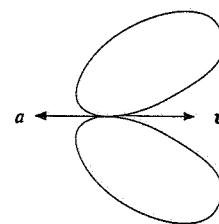
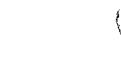


Figura 13.27



Radiazione di sincrotrone

La radiazione emessa è detta *radiazione di sincrotrone*, dal nome dell'acceleratore circolare di particelle (paragrafo 9.9) in cui viene più facilmente osservata. Essa è molto colli-

mata, essendo compresa, in ogni punto della traiettoria, dentro un cono con asse tangente alla traiettoria e semiapertura  $\theta \approx 1/\gamma$ . Lo spettro delle frequenze è continuo fino al valore massimo che è dell'ordine di  $\pi\omega\gamma^3 \approx \pi c\gamma^3/r$ .

Come esempio, consideriamo un sincrotrone avente raggio  $r = 20$  m e in cui circolano elettroni con energia massima  $U = 1.5$  GeV; il fattore  $\gamma$ , oltre che essere eguale a  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ , è anche pari a  $U/mc^2$ , cioè al rapporto tra l'energia della particella e l'energia a riposo della particella stessa: nel nostro caso vale  $1500 \text{ MeV}/0.5 \text{ MeV} = 3 \cdot 10^3$ . In un giro completo l'energia emessa per radiazione di sincrotrone è

$$\Delta U = \frac{6.03 \cdot 10^{-9}}{20} (3 \cdot 10^3)^4 = 2.44 \cdot 10^4 \text{ eV}$$

Lo spettro in frequenza della radiazione termina al valore massimo

$$\nu_{\max} = \pi \frac{c}{r} \gamma^3 = 1.27 \cdot 10^{18} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = 2.36 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Negli ultimi anni sono stati costruiti vari sincrotroni, con parametri simili a quelli dell'esempio, in cui la radiazione prodotta in una piccola porzione dell'anello da un fascio di  $\sim 10^{11}$  elettroni viene utilizzata per illuminare campioni di oggetti di cui si vuole conoscere la struttura microscopica. Le indagini spaziano dalla fisica dello stato solido alla biofisica e alla biochimica (studi di macromolecole) e recentemente alla diagnostica medica precoce di noduli tumorali. Si sfrutta in tutto ciò la piccolezza della lunghezza d'onda, se confrontata con quella della luce visibile ( $\sim 0.5 \cdot 10^{-6}$  m); ma per la discussione sul potere risolutivo di una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$  rimandiamo al capitolo 16. È da notare che in questo campo di lunghezze d'onda non esistono in pratica sorgenti naturali con prestazioni paragonabili.

La radiazione di sincrotrone d'altra parte pone serie limitazioni alla costruzione di sincrotroni per elettroni di energia molto grande, fondamentali per lo studio delle proprietà dei costituenti elementari della materia. Durante il moto circolare gli elettroni irradiano energia e dunque, per mantenerli su un'orbita stabile, occorre fornire ad essi una quantità di energia eguale a quella persa. Siccome esistono limiti tecnologici sull'energia che può essere fornita per giro, la perdita  $\Delta U$  non può superare tali limiti. Abbiamo visto che  $\Delta U$  è proporzionale a  $\gamma^4$ , cioè a  $(U/mc^2)^4$ , e quindi, essendo  $\Delta U$  fissato dalle considerazioni appena fatte, resta fissata  $U$ . In altre parole, anche potendo fornire una certa quantità di energia agli elettroni in ogni giro, l'energia stessa non può crescere oltre un certo limite perché si raggiunge una situazione di equilibrio in cui l'energia fornita viene persa per radiazione di sincrotrone. Si trova che l'energia limite è molto inferiore a quella teoricamente raggiungibile con il dato raggio di curvatura e con i valori di campo magnetico normalmente disponibili.

L'unico modo per fare aumentare il valore dell'energia è quello di diminuire la perdita  $\Delta U$  aumentando il raggio di curvatura. Il sincrotrone per elettroni più grande esistente al mondo è il LEP del CERN di Ginevra, che ha un anello di 26.7 km di lunghezza e in cui gli elettroni raggiungono l'energia di 50 GeV ( $\gamma = 10^5$ ). Il raggio di curvatura nei magneti è  $3.3 \cdot 10^3$  m e l'energia persa per giro è  $\sim 190$  MeV.

Come abbiamo anticipato, questi fenomeni sono trascurabili per i protoni. L'energia a riposo di un protone è 0.938 GeV e, pur nel sincrotrone per protoni più grande in cui questi raggiungono l'energia di 1000 GeV (Tevatron del Laboratorio Fermi presso Chicago),  $\gamma$  vale  $\sim 10^3$ ; il raggio di curvatura è  $\sim 10^3$  m e la perdita di energia vale  $\sim 6$  eV/giro, assolutamente trascurabile. Questa differenza di prestazioni (1000 GeV con raggio  $10^3$  m contro 50 GeV con raggio  $3 \cdot 10^3$  m) è unicamente dovuta alla differenza di massa che rende così diversa l'importanza della radiazione di sincrotrone. È in progetto la costruzione al CERN, lungo l'anello di LEP, di un sincrotrone per protoni che dovrebbe raggiungere l'energia di 8000 GeV; la perdita  $\Delta U$  sarebbe soltanto  $7.5 \cdot 10^3$  eV/giro.

### 13.8 Radiazione emessa dagli atomi. Diffusione della luce

Oltre che dalle sorgenti per così dire macroscopiche, come le antenne o altri circuiti oscillanti, e dalle sorgenti costituite da singole cariche accelerate, le onde elettromagnetiche hanno origine da fenomeni a livello atomico e nucleare.

Gli elettroni legati di singoli atomi liberi o di atomi aggregati in molecole possono esse-

re eccitati, cioè ricevere energia: i meccanismi di eccitazione sono svariati, andando dagli urti dovuti al moto di agitazione termica agli urti con particelle cariche che attraversano il mezzo o con altri elettroni (come avviene in una scarica elettrica in un gas) e all'assorbimento di radiazione elettromagnetica. Successivamente l'elettrone eccitato si dissecchia emettendo energia sotto forma di radiazione elettromagnetica con frequenza

$$\nu = \frac{\Delta U}{h} , \quad (13.49)$$

dove  $\Delta U$  è la differenza di energia tra i livelli energetici iniziale e finale dell'elettrone che si dissecchia e  $h$  la costante di Planck. I valori di  $\Delta U$  sono caratteristici dei sistemi atomici e dei meccanismi di eccitazione e si possono avere emissioni con frequenze discrete e ben distinte oppure con frequenze molto ravvicinate.

Il modello atomico di Bohr è stato il primo che ha spiegato in modo preciso gli spettri di frequenze emessi dagli atomi e misurati sperimentalmente. In esso venne introdotta la struttura energetica discontinua, caratterizzata dai livelli energetici  $U_n$  (vedi paragrafo 2.3), e ipotizzato l'assorbimento o l'emissione di radiazioni in accordo con (13.49) ogni qual volta un elettrone veniva eccitato o si dissecchava. Come sappiamo il modello di Bohr è stato poi superato dalla meccanica quantistica, che fornisce l'unica spiegazione soddisfacente di tutti i fenomeni osservati nell'emissione di onde elettromagnetiche da sorgenti atomiche e molecolari. Torneremo sull'argomento nel capitolo 18.

Altre sorgenti elementari di radiazione elettromagnetica sono fenomeni nucleari e interazioni tra particelle subatomiche; anche in questi casi non esiste una interpretazione classica.

La luce visibile, cui è sensibile la retina dell'occhio, è una particolare radiazione elettromagnetica emessa da atomi nel seguente campo di frequenze e di lunghezze d'onda (nel vuoto):

$$3.85 \cdot 10^{14} \leq \nu \leq 7.89 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$0.78 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$2.42 \cdot 10^{15} \leq \omega \leq 4.96 \cdot 10^{15} \text{ rad/s} .$$

L'estremo superiore delle lunghezze d'onda (inferiore delle frequenze) corrisponde alla luce rossa, l'estremo inferiore delle lunghezze d'onda (superiore delle frequenze) alla luce violetta.

Malgrado l'impossibilità di fornire una spiegazione completa della radiazione di origine atomica, accenniamo lo stesso al *modello classico dell'atomo* come sorgente di radiazione perché certi risultati siano utilizzabili per la comprensione almeno parziale di alcuni fenomeni.

Riprendiamo pertanto il modello sviluppato nel paragrafo 5.10 per spiegare la polarizzabilità elettronica. Con riferimento all'atomo di idrogeno, il protone, di carica  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , si trova al centro di una nube elettronica sferica di raggio  $R = 10^{-10} \text{ m}$  in cui è distribuita uniformemente la carica  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . In seguito ad assorbimento di energia dall'esterno i centri delle due cariche, prima coincidenti, si spostano l'uno rispetto all'altro di  $z$ . Il campo elettrico della carica negativa e la forza sul protone, entrambi concordi all'asse  $z$ , sono

$$E = \frac{\rho z}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4\pi R^3} \frac{z}{3\epsilon_0} = \frac{ez}{4\pi \epsilon_0 R^3} , \quad F = \frac{e^2 z}{4\pi \epsilon_0 R^3} ,$$

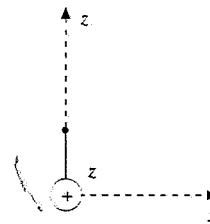


Figura 13.28

dove per il campo abbiamo usato il risultato (3.12). La forza di richiamo del protone sulla carica negativa è  $-F$  e pertanto l'equazione del moto della nube elettronica è

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e^2 z}{4\pi \epsilon_0 R^3} \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3} z = 0 .$$

Si tratta di un'oscillazione armonica di ampiezza  $z_0$  e pulsazione e frequenza date da

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}} , \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m_e R^3}} . \quad (13.50)$$

Sostituendo i valori delle diverse costanti si trova

$$\omega = 1.59 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}, \nu = 2.53 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Questa frequenza in effetti non è molto diversa da qualcuna delle frequenze emesse dall'idrogeno gassoso per cui come valore medio il modello non è lontano dalla realtà (che però si spiega in modo ben diverso).

La situazione descritta è assimilabile a quella di un dipolo elettrico oscillante con frequenza  $\nu$  e momento di dipolo elettrico massimo  $p_0 = e z_0$ . La potenza irradiata, secondo (13.46) è

$$P = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} U$$

dove l'ultima eguaglianza tiene conto del fatto che l'energia totale del nostro oscillatore armonico è  $U = 1/2 m_e \omega^2 z_0^2$ . Ma l'emissione di energia elettromagnetica deve comportare una diminuzione di  $U$ , cioè deve valere la relazione  $P = -dU/dt$ . Ricaviamo pertanto

$$\begin{aligned} \frac{dU}{U} &= -\frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} dt, \quad U = U_0 e^{-t/\tau}, \\ \tau &= \frac{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}{e^2 \omega^2} = \frac{3\epsilon_0 m_e c^3}{2\pi e^2 \nu^2} = \frac{4.04 \cdot 10^{21}}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Il fenomeno è dunque schematizzato nel modo seguente: a seguito dell'eccitazione, avvenuta nell'istante  $t = 0$ , l'oscillatore acquista l'energia  $U_0$  e successivamente, per effetto dell'irraggiamento, l'energia diminuisce con andamento esponenziale avente costante di tempo  $\tau$ . Inserendo il valore  $\nu = 2.53 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  trovato prima, si ha  $\tau = 0.63 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ .

Anche la potenza emessa diminuisce esponenzialmente e ciò comporta una diminuzione dell'ampiezza del campo elettrico della radiazione. Possiamo allora dire che l'*atomo emette un pacchetto d'onda* con frequenza centrale  $\nu$  e durata dell'ordine di  $5\tau$ ; lo spettro di frequenze ha un'ampiezza  $\Delta\nu = 1/5\tau \approx 3.2 \cdot 10^8 \text{ Hz}$  e la larghezza relativa è  $\Delta\nu/\nu \approx 1.3 \cdot 10^{-7}$  (vedi paragrafo 12.10). Tutti questi risultati numerici sono abbastanza prossimi a quelli misurati sperimentalmente.

Il meccanismo di emissione da dipolo oscillante spiega in maniera semplice perché una piccola sorgente emetta un fronte d'onda sferico con intensità uniforme sul fronte. Una sorgente costituita da un gas, per quanto di piccole dimensioni, contiene sempre un numero di atomi molto grande: ricordiamo che a pressione atmosferica ci sono in  $1 \text{ mm}^3$  dell'ordine di  $10^{16}$  atomi. Nell'emissione i momenti di dipolo dei singoli atomi hanno direzioni completamente casuali e le distribuzioni non simmetriche dell'intensità si compensano; il fronte d'onda, risultante dei fronti d'onda dei singoli dipoli, sarà quindi una superficie sferica con centro nella sorgente e intensità uniforme. È anche chiaro che un'onda di questo tipo non è in generale polarizzata.

### Diffusione della luce

Secondo il modello classico dell'atomo come oscillatore quando un campo elettrico  $\mathbf{E}$  variabile sinusoidalmente nel tempo, qual è quello associato ad un'onda elettromagnetica armonica, agisce sull'atomo questo assume il momento di dipolo elettrico dato dalla (5.53),

$$\mathbf{p}_a = \epsilon_0 \alpha_e \mathbf{E}_0 \sin \omega t = \mathbf{p}_0 \sin \omega t.$$

Il dipolo elettrico formatosi parallelamente al campo incidente  $\mathbf{E}$  irradia onde elettromagnetiche con la stessa pulsazione di  $\mathbf{E}$  e con intensità data da (13.44); la potenza è espressa da (13.46) e sostituendo in questa  $p_0 = \epsilon_0 \alpha_e E_0$ ,  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , otteniamo

$$P = \frac{4\pi^3 \epsilon_0 \alpha_e^2 c E_0^2}{3\lambda^4} \quad . \quad (13.51)$$

Se l'onda elettromagnetica che colpisce l'atomo non è polarizzata la direzione di  $\mathbf{p}_e$  varia casualmente nel tempo per cui alla dipendenza da  $\sin^2 \theta$ , presentata dalla (13.44), si sostituisce una distribuzione sferica. Ad esempio, se un'onda piana non polarizzata incide su un piccolo volume di gas, composto da  $N$  atomi, da esso viene emessa un'onda elettromagnetica, detta *onda diffusa*, che è un'onda sferica con la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente, intensità uniformemente distribuita e potenza data dalla (13.51) moltiplicata per  $N$ . L'argomento sulla formazione dell'onda sferica è lo stesso presentato prima: solo che là ci si riferiva a un meccanismo di eccitazione casuale qualsiasi, anche impulsivo, mentre ora la causa dell'eccitazione è un'onda piana armonica non polarizzata.

Nella (13.51) la polarizzabilità elettronica  $\alpha_e$  non è costante, ma funzione di  $\omega$ , come vedremo nel paragrafo 13.9. Tuttavia, se ci riferiamo all'intervallo abbastanza ristretto di frequenze della luce visibile, possiamo ritenere  $\alpha_e$  costante. In questo caso la potenza diffusa dipende semplicemente da  $\lambda^{-4}$ . Se la radiazione incidente contiene tutte le lunghezze d'onda comprese tra il rosso e il violetto, come avviene per la luce bianca solare, la (13.51) mette in evidenza che la luce viola-azzurra viene diffusa maggiormente rispetto alla luce rossa:

$$\frac{P_V}{P_R} = \left( \frac{\lambda_R}{\lambda_V} \right)^4 = \left( \frac{0.70}{0.44} \right)^4 = 6.4$$

La predominanza delle lunghezze d'onda nell'intervallo viola-azzurro nella luce diffusa dalle molecole dell'aria e di altre particelle sospese nell'atmosfera determina il *colore azzurro del cielo sereno*. Se nell'aria sono presenti goccioline d'acqua avvengono fenomeni d'interferenza della luce diffusa dalle goccioline e si riduce questa prerogativa; un cielo nuvoloso appare bianco-grigio.

Supponiamo ora di osservare la luce diffusa a vari angoli rispetto alla direzione di un'onda piana incidente sul gas, non polarizzata. La luce diffusa lungo la stessa direzione certamente non è polarizzata; se invece si osserva la luce diffusa a  $90^\circ$  questa è polarizzata rettilineamente. Infatti i dipoli, pur avendo orientazione casuale, sono ad ogni modo contenuti in un piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda incidente, cioè in un fronte d'onda di questa; il campo elettrico dell'onda diffusa è in ogni istante contenuto in questo piano e quindi l'onda emessa a  $90^\circ$  è polarizzata rettilineamente.

Il fenomeno potrebbe essere visto osservando la luce solare diffusa in direzione perpendicolare ai raggi con uno strumento in grado di rivelare uno stato di polarizzazione; non si può avere nessun risultato con l'osservazione diretta in quanto l'occhio umano non è sensibile allo stato di polarizzazione della luce.

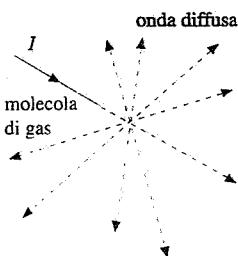


Figura 13.29

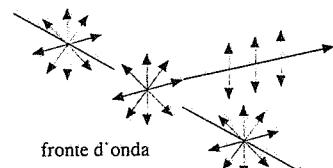


Figura 13.30

### Nota. Diffusione Thomson

Un'interessante estensione della formula di Larmor (13.47) si ha quando si considera un'onda elettromagnetica piana armonica che investe un elettrone libero, provocandone l'oscillazione con pulsazione  $\omega$ . I valori dell'accelerazione e della media del quadrato dell'accelerazione sono

$$a = \frac{e E}{m_e}, \quad a_m^2 = \frac{e^2}{m_e^2} (E^2)_m = \frac{e^2 E_0^2}{2 m_e^2}.$$

La potenza emessa vale quindi

$$P_{\text{Lam}} = \frac{e^2 a_m^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 m_e^2 c^5}.$$

L'intensità dell'onda incidente, secondo (13.24), è  $I_0^i = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ ; se definiamo

$$r_e = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

troviamo che  $P_{\text{Lam}}$  si scrive anche

$$P_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 I_0^i = \sigma_T I_0^i .$$

Questa è la potenza diffusa dall'elettrone e quindi sottratta all'onda incidente; il fenomeno si chiama *diffusione Thomson*.

$P_T$  è proporzionale all'intensità incidente secondo il coefficiente

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 ,$$

detto *sezione d'urto Thomson*. Il nome deriva dal fatto che  $\sigma_T$ , grandezza misurata in  $\text{m}^2$ , può essere pensata come un'area avente la proprietà di assorbire dall'onda incidente la potenza  $P_T$  e di diffonderla. Dato che la dimensione lineare di tale area è all'incirca definita da  $r_e$ , dipendente soltanto da caratteristiche dell'elettrone, a quest'ultima grandezza è stato dato il nome di *raggio classico dell'elettrone*. Il significato è soltanto quello di misura dell'area diffondente creata dall'oscillazione dell'elettrone e non è in alcun modo legato alle dimensioni reali dell'elettrone che in tutti i fenomeni finora studiati appare essere *puntiforme*.

La misura dell'assorbimento subito da un'onda elettromagnetica che attraversa un *plasma* (gas rarefatto ionizzato) è un utile strumento diagnostico: essa permette di calcolare la densità degli elettroni liberi nel plasma, parametro importante per caratterizzare lo stato del plasma.

Il fenomeno descritto avviene fino a frequenze non molto maggiori di quelle della luce; per frequenze molto superiori (oltre  $10^{17} \div 10^{18}$  Hz) le modalità di diffusione sono totalmente differenti. Esse vennero spiegate da Compton come vedremo nel capitolo 18.

### 13.9 Propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Dispersione

Nel paragrafo 13.8 abbiamo visto alcune applicazioni della radiazione di dipolo a livello atomico. Nell'atomo eccitato impulsivamente l'oscillazione risulta smorzata dall'irraggiamento, mentre se l'eccitazione è continua, in quanto dovuta ad un'onda armonica incidente, si ha un'oscillazione forzata; in particolare questo caso è stato trattato anche per un elettrone libero.

Vogliamo adesso considerare formalmente il caso generale, in cui l'oscillatore atomico ha una pulsazione propria  $\omega_0$ , data da (13.50), ed è sottoposto ad una forza di attrito viscoso  $-m_e \gamma dz/dt$ , che riassume l'effetto dell'irraggiamento e di una eventuale interazione con gli atomi circostanti. Inoltre al sistema, che sarebbe un oscillatore libero smorzato, è applicato un campo elettrico parallelo all'asse  $z$  e variabile sinusoidalmente, come quello di un'onda elettromagnetica piana armonica, polarizzata rettilineamente lungo  $z$ . L'elettrone oscillante è soggetto all'accelerazione  $-eE/m_e$  e l'equazione del moto è quella dell'oscillatore forzato

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m_e} E .$$

Utilizziamo per il campo elettrico sinusoidale la notazione complessa già introdotta nel capitolo 11 e riscriviamo l'equazione dell'oscillatore come

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{e E_0}{m_e} e^{-i\omega t} .$$

La soluzione di questa equazione, oscillante con la stessa pulsazione del campo elettrico, è

$$z(t) = -\frac{e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} . \quad (13.52)$$

come si verifica facilmente per sostituzione. L'ampiezza complessa di  $z(t)$  contiene l'informazione sull'ampiezza reale e sullo sfasamento.

Il momento di dipolo elettrico indotto  $p_a = -ez$  è eguale per (5.53) a  $\epsilon_0 \alpha E$  e quindi la polarizzabilità elettronica vale

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} ;$$

essa risulta funzione della pulsazione del campo elettrico, come si era anticipato nel paragrafo 13.8.

In un materiale dielettrico gassoso, contenente  $N$  atomi per unità di volume, la relazione (5.55) tra la polarizzazione  $P$  e il campo elettrico  $E$  è data da

$$P(\omega) = \epsilon_0 N \alpha(\omega) E = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

La presenza del coefficiente immaginario implica che tra  $P$  ed  $E$  ci sia una differenza di fase  $\delta$ :

$$P(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} E_0 e^{-i(\omega t - \delta)} = P_0(\omega) e^{-i(\omega t - \delta)}$$

con  $\operatorname{tg} \delta = \gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ . La polarizzazione segue le variazioni di  $E$  con un ritardo di fase, che è trascurabile se  $\omega \ll \omega_0$  ed è massimo ( $\delta = \pi/2$ ) se  $\omega_0 = \omega$ .

Le equazioni di Maxwell nel dielettrico gassoso, con il comportamento appena descritto per  $P(\omega)$  e in assenza di sorgenti ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ), prevedono l'esistenza di onde elettromagnetiche piane del tipo

$$E_z = E_0 e^{i(kz - \omega t)} .$$

Poiché la velocità di fase (12.59) è data da  $v(\omega) = \omega/k$ , l'indice di rifrazione risulta  $n(\omega) = c/v(\omega) = kc/\omega$  e l'onda piana si può scrivere

$$E_z = E_0 e^{i\omega(nk - \omega t)} . \quad (13.53)$$

La sostituzione di (13.53) nelle equazioni di Maxwell con  $P_z = \epsilon_0 N \alpha(\omega) E_z$  porta all'equazione

$$n^2(\omega) = 1 + N\alpha(\omega)$$

e, dal confronto con (5.56), si stabilisce la seguente relazione fondamentale

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_e(\omega)} = \sqrt{\kappa_e(\omega)} , \quad (13.54)$$

che ha validità generale.

L'assunzione fatta nel paragrafo 13.1, di trattare il dielettrico come il vuoto con  $\epsilon, \mu$  al posto di  $\epsilon_0, \mu_0$ , e che aveva portato alla (13.10) formalmente eguale alla (13.54), è valida nell'ipotesi  $\omega \ll \omega_0, \delta = 0$ , quando  $P$  e anche  $D$  oscillano in fase con  $E$ .

La (13.54) è verificata sperimentalmente fino alle massime frequenze (microonde) alle quali  $n(\omega)$  e  $\kappa_e(\omega)$  sono misurabili indipendentemente. Alle frequenze della luce non sono possibili misure di  $\kappa_e(\omega)$ , ma la (13.54) rimane pur sempre valida.

Formalmente, vista l'espressione di  $\alpha(\omega)$ , l'indice di rifrazione e la costante dielettrica relativa sono numeri complessi:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (13.55)$$

D'altra parte in un mezzo gassoso l'indice di rifrazione è poco diverso dall'unità, cioè il termine correttivo è poco diverso da zero, e vale l'approssimazione

$$n = \sqrt{1 + N\alpha} = 1 + \frac{N\alpha}{2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (13.56)$$

Prima di esaminare a fondo il significato di (13.56) calcoliamo il limite per  $\omega$  tendente a zero (*caso statico*); ricordando (13.50) si trova

$$\alpha(0) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 4\pi R^3 , \quad \sqrt{\kappa_e(0)} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 1 + 2\pi R^3 N$$

Vediamo che  $\alpha$  ha il valore (5.54) già trovato nel paragrafo 5.10 e che  $\kappa_e(0)$  coincide con la costante dielettrica calcolata nello stesso paragrafo.

Per  $\omega$  qualsiasi riscriviamo (13.56) nella forma generale

$$n = n_r + i n_i , \quad (13.57)$$

dove la parte reale e la parte immaginaria sono date da

$$n_r = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} , \quad n_i = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (13.58)$$

Sostituiamo ora (13.57) nella (13.53):

$$E_z = E_0 e^{i\omega[(n_r + i n_i)x/c - t]} = E_0 e^{-\omega n_i x/c} e^{i(\omega n_r x/c - \omega t)}$$

L'equazione di un'onda piana che si propaga nel dielettrico gassoso è dunque caratterizzata dal termine

$$e^{i(\omega n_r x/c - \omega t)} = e^{i(k_r x - \omega t)} ,$$

che rappresenta la propagazione con velocità di fase  $v = \omega / k_r = c / n_r$ , e dal termine

$$E_0 e^{-\omega n_i x/c} = E_0 e^{-\beta x/2}$$

che rappresenta l'ampiezza dell'onda: si vede che questa *diminuisce esponenzialmente con la distanza*, indicando un *assorbimento di energia* da parte del dielettrico. Anche l'intensità, proporzionale al quadrato dell'ampiezza, diminuisce progressivamente con legge esponenziale:

$$I = I_0 e^{-\beta x} = I_0 e^{-x/l_{ass}} .$$

Il coefficiente

Coefficiente d'assorbimento

$$\beta = \frac{2\omega n_i}{c} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (13.59)$$

si chiama *coefficiente di assorbimento*. Il suo inverso  $l_{ass} = 1 / \beta$  è la *lunghezza di assorbimento* e ha il solito significato: dopo una distanza  $l_{ass}$  nel dielettrico l'intensità si è ridotta al valore  $I_0 / e \approx 0.37 I_0$  e in corrispondenza l'ampiezza è ridotta a  $E_0 / \sqrt{e} \approx 0.61 E_0$ . Da (13.59) e (13.58) si vede poi che

$$\beta = (n_r - 1) \frac{\gamma\omega^2}{c (\omega_0^2 - \omega^2)} .$$

In conclusione, la propagazione dell'onda nel mezzo è descritta completamente dalla parte reale  $n_r$  dell'indice di rifrazione complesso, che d'ora in poi chiameremo semplicemente  $n$ , mentre la parte immaginaria  $n_i$  determina il coefficiente di assorbimento tramite (13.59).

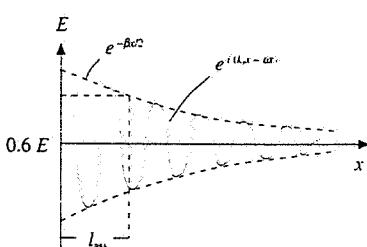


Figura 13.31

Questo è il significato fisico del procedimento seguito. La notazione complessa, che non è strettamente necessaria, è utile sia per la facilità di trattazione delle grandezze sinusoidali che per il fatto di compendiare in un'unica grandezza tutte le caratteristiche del fenomeno. L'ipotesi che nella (13.53)  $k$  e quindi  $n$  possano essere complessi permette di rendere conto con semplicità dell'attenuazione dell'onda e di mostrare che il coefficiente di assorbimento dipende dalle stesse grandezze da cui dipende l'indice di rifrazione.

L'energia che il dielettrico sottrae all'onda viene impiegata per mantenere in oscillazione l'elettrone, la cui accelerazione è, da (13.52),

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\omega^2 e E_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t}$$

Se si prende il quadrato del modulo e si media nel tempo il quadrato della parte oscillante si trova

$$a_m^2 = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} ;$$

si sostituisce questa espressione nella (13.47) e si ha la potenza diffusa dall'oscillatore:

$$P = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi \epsilon_0 m_e c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} I_0^i \quad , \quad (13.60)$$

essendosi usata la sezione d'urto Thomson  $\sigma_T$ , ricavata nella nota alla fine del paragrafo 13.8, e l'intensità dell'onda piana incidente  $I_0^i$ .

Osserviamo che se  $\gamma = \omega_0 = 0$ , cioè se l'elettrone è libero, si ha  $P = \sigma_T I_0^i$ , che è la formula di Thomson; se invece  $\omega^2 \ll \omega_0^2$  e  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ , come avviene nelle molecole di un gas alle frequenze luminose, si trova  $P = \sigma_T I_0^i \omega^4 / \omega_0^4$ , che fatte le opportune sostituzioni risulta eguale alla (13.51).

L'espressione (13.58) trovata per  $n$  indica una dipendenza dalla pulsazione  $\omega$  dell'onda incidente. Se  $n$  varia con  $\omega$  anche la velocità di propagazione dell'onda  $v(\omega) = c/n(\omega)$  risulta funzione di  $\omega$  e il mezzo è dunque *dispersivo* (vedi paragrafo 12.11). In figura 13.32 sono riportate la curva di dispersione, che rappresenta  $n$  in funzione di  $\omega$ , e la curva che dà il coefficiente di assorbimento sempre in funzione di  $\omega$ ; tali curve sono state calcolate tramite le formule previste dal modello classico fin qui sviluppato, e cioè la prima delle (13.58) e la (13.59), avendo posto  $\gamma = 0.5 \omega_0$ . Nella curva di dispersione, eccetto che per l'intervallo  $\Delta\omega$  (definito tra breve) nell'intorno di  $\omega_0$ , il termine  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$  predomina rispetto a  $\gamma^2 \omega^2$  e la curva si confonde con quella prevista per  $\gamma = 0$ , segnata in nero nella figura. La curva del coefficiente di assorbimento mostra un massimo per  $\omega = \omega_0$ , con valore  $\beta_{\max} = Ne^2/\epsilon_0 m_e c \gamma$ . Si tratta di un tipico *andamento risonante*: al diminuire di  $\gamma$  la curva diventa più stretta ( $\Delta\omega$  diminuisce) e l'assorbimento aumenta: al limite, per  $\gamma = 0$ , ci sarebbe un assorbimento infinito.

L'intervallo  $\Delta\omega$  è definito come  $\omega_2 - \omega_1$  ( $\omega_2 > \omega_0 > \omega_1$ ) con  $\omega_1$  e  $\omega_2$  tali che  $\beta(\omega_1) = \beta(\omega_2) = \beta_{\max}/2$ . Si trova

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \gamma$$

È la stessa definizione data nel paragrafo 9.8 del primo volume, con riferimento alla potenza meccanica, e nel paragrafo 11.2 di questo volume, con riferimento alla potenza elettrica, che hanno eguale andamento in  $\omega$  della funzione  $\beta$  ora definita. La larghezza relativa della risonanza  $\Delta\omega/\omega_0$  risulta eguale a  $\gamma/\omega_0$ .

Possiamo riassumere i risultati del modello classico, che considera l'atomo come oscillatore caratterizzato da una pulsazione propria  $\omega_0$  e da un coefficiente  $\gamma$ , dicendo che al di fuori di un certo intervallo  $\Delta\omega$  intorno a  $\omega_0$  l'indice di rifrazione  $n$  è una funzione crescente di  $\omega$  (maggiore di 1 per  $\omega < \omega_0$ , minore di 1 per  $\omega > \omega_0$ ) e l'assorbimento è trascurabile. In queste regioni di  $\omega$  la dispersione è detta *normale* e il mezzo è praticamente trasparente all'onda elettromagnetica che in esso si propaga. Nell'intervallo  $\Delta\omega$ , che in genere è molto

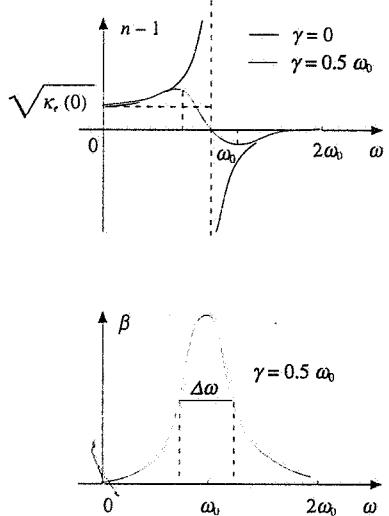


Figura 13.32

piccolo rispetto al valore di  $\omega_0$ , c'è assorbimento tanto maggiore quanto minore è il rapporto  $\gamma/\omega_0$ . In questo intervallo di *dispersione anomala* l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare di  $\omega$  e l'onda viene attenuata, anche notevolmente.

La teoria corretta per la descrizione dei fenomeni atomici, e quindi anche dell'indice di rifrazione, è la meccanica quantistica. Accenniamo brevemente ai risultati. Un atomo ha più pulsazioni proprie caratteristiche  $\omega_k$ ; ogni  $\omega_k$  è accompagnata da una costante  $\gamma_k$  e da un coefficiente  $f_k$ , minore di 1, detto impropriamente forza dell'oscillazione k-esima. Inoltre, se un atomo si trova all'interno di una molecola può descrivere oscillazioni e la molecola stessa può compiere rotazioni (ad esempio se è dotata di un momento di dipolo intrinseco); tutti questi moti hanno le loro pulsazioni caratteristiche. Infine altri parametri importanti sono la massa  $m_k$  e la carica  $q_k$  effettive del sistema che oscilla. Si trova in definitiva per la polarizzabilità, l'indice di rifrazione e il coefficiente di assorbimento:

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2}{m_k (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)} \\ n(\omega) &= 1 + \frac{N}{2\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2 (\omega_k^2 - \omega^2)}{m_k [(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2]} \\ \beta(\omega) &= \frac{N}{\epsilon_0 c} \sum_k \frac{f_k q_k^2 \gamma_k \omega^2}{m_k [(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2]}\end{aligned}\quad (13.61)$$

$N$  è il numero di elettroni per unità di volume. Le  $f_k$ , che soddisfano alla condizione  $\sum_k f_k = 1$ , rappresentano dunque i pesi delle singole componenti oscillatorie, ovvero l'intensità relativa dell'accoppiamento tra il campo elettrico incidente e la pulsazione k-esima.

In figura 13.33 è data una rappresentazione della *curva di dispersione*  $n(\omega)$ : essa è puramente qualitativa, sia per quanto riguarda i valori delle ordinate che quelli delle ascisse: basti pensare che la scala delle  $\omega$  mostrate va da  $\omega = 0$  a  $\omega \approx 10^{18}$  rad/s. In corrispondenza di ciascuna pulsazione propria  $\omega_k$  si hanno le caratteristiche già viste per  $\omega_0$  e cioè due tratti della curva  $n(\omega)$  a dispersione normale e un tratto a dispersione anomala; in corrispondenza di quest'ultimo l'assorbimento ha un massimo. Nelle regioni in cui la sostanza è trasparente  $n(\omega)$  è crescente. Per pulsazioni molto grandi, in alcuni tratti a dispersione anomala e per  $\omega > \omega_0$  anche in tratti a dispersione normale l'indice di rifrazione risulta minore di 1, cosicché la velocità  $v = c/n$  è maggiore di  $c$ , in apparente contrasto con la teoria della relatività ristretta. Torneremo su questo punto in seguito, quando discuteremo la velocità di gruppo.

Rispetto all'intervallo della luce visibile, che è indicato nella figura 13.33 in modo esageratamente largo tra  $\omega_1$  e  $\omega_3$ , le pulsazioni proprie  $\omega_1$  e  $\omega_2$  corrispondono a moti rotazionali e vibrazionali; queste pulsazioni hanno valori relativamente modesti perché al moto partecipano la molecola o l'atomo, che hanno massa molto maggiore dell'elettrone e sappiamo che in un oscillatore  $\omega_0^2$  è inversamente proporzionale alla massa. La pulsazione propria  $\omega_3$  si trova nella regione dell'ultravioletto ed è legata all'eccitazione degli elettroni più esterni dell'atomo; le successive pulsazioni  $\omega_4, \dots, \omega_l$  corrispondono all'eccitazione di elettroni più interni. Oltre  $\omega_l$  non c'è più assorbimento e il mezzo è trasparente. Intervengono però altri fenomeni quantistici che comportano sempre un'interazione tra radiazione e materia.

Se il *mezzo* in cui si propaga l'onda elettromagnetica è *denso*, tra la polarizzazione  $P$  e il campo elettrico  $E$  sussiste la (5.67)

$$P = \epsilon_0 N \alpha E / \left( 1 - \frac{N \alpha}{3} \right)$$

che si traduce nell'equazione di Clausius-Mossotti per la costante dielettrica relativa (paragrafo 5.11). Estendendo la trattazione a pulsazioni non nulle e ponendo  $n^2 = \kappa_e$ , si trova che l'indice di rifrazione complesso obbedisce a

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N \alpha}{3} = \frac{N}{3 \epsilon_0} \sum_k \frac{f_k q_k^2}{m_k (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)} .$$

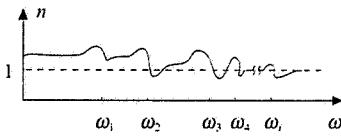


Figura 13.33

### Dispersione della luce

Consideriamo adesso in particolare il comportamento di un dielettrico gassoso nell'intervallo di pulsazioni che caratterizzano la luce visibile:

$$2.42 \cdot 10^{15} \leq \omega \leq 4.96 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

La dispersione del mezzo è normale, si è in un tratto della curva di dispersione in cui  $\omega_k^2 - \omega^2 \gg \gamma_k \omega$  e l'indice di rifrazione (13.61) è dato da

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_3)^2}$$

In sostanza si ha contributo soltanto dal termine della sommatoria legato alla pulsazione propria più vicina, che è  $\omega_3$ : si ritrova la (13.58) con  $\omega_0 = \omega_3$ . Dato che  $\omega_3$  è dell'ordine di  $10^{16}$  rad/s,  $(\omega/\omega_3)^2$  è molto minore di 1 e si può scrivere

$$\frac{1}{1 - (\omega/\omega_3)^2} \approx 1 + (\omega/\omega_3)^2$$

Con questa approssimazione l'indice di rifrazione diventa

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2} \omega^2$$

Esprimiamo  $\omega$  in funzione della lunghezza d'onda nel vuoto,  $\omega = 2\pi c / \lambda$ , e otteniamo la cosiddetta *formula di Cauchy*:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad (13.62) \quad \text{Formula di Cauchy}$$

$$A = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2}, \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega_3^2}$$

La (13.62) è verificata sperimentalmente per tutte le sostanze trasparenti alla luce, anche dense come i vetri. In figura 13.34 è rappresentata  $n(\lambda)$  per il quarzo (fuso e solidificato): dal grafico si possono ricavare i valori delle costanti,  $A = 1.446$ ,  $B = 3.5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^2$ .

Per quanto riguarda l'assorbimento della luce nei mezzi trasparenti abbiamo che un valore tipico per l'aria è  $\beta = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$  da cui  $l_{\text{ass}} = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}$ : su questa distanza viene assorbito il 63% dell'energia. Nei vetri ottici ordinari  $l_{\text{ass}}$  è dell'ordine delle decine di metri.

### Velocità di gruppo

Abbiamo definito nel paragrafo 12.11 la velocità di gruppo come la velocità con cui si propaga un pacchetto d'onde in un mezzo dispersivo; invece la velocità di fase è quella di una singola onda di pulsazione fissata. Le relative formule sono (12.61) e (13.10):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}, \quad v_f = v = \frac{c}{n}$$

Sappiamo che

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v_g \frac{dv}{d\omega}, \quad \frac{dv}{d\omega} = c \frac{d(1/n)}{d\omega} = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega}$$

$$\Rightarrow v_g = v + k v_g \frac{dv}{d\omega} = v - \frac{ck}{n^2} v_g \frac{dn}{d\omega} = v - \frac{\omega}{n} v_g \frac{dn}{d\omega}$$

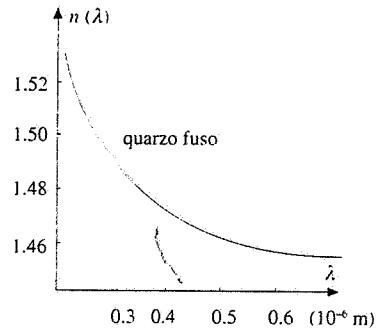


Figura 13.34

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che  $k$  deve essere calcolato nel mezzo di indice di rifrazione  $n$ . Detto  $k_0$  il valore nel vuoto è

$$\omega = k_0 c = k v = k \frac{c}{n} \Rightarrow k = n k_0 = n \frac{\omega}{c}$$

Risolvendo rispetto a  $v_g$  otteniamo infine

$$v_g = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad . \quad (13.63)$$

La velocità di fase e di gruppo coincidono quando  $dn/d\omega = 0$ , cioè quando l'indice di rifrazione non dipende da  $\omega$  o quando passa per un massimo o minimo.

Da (13.63) si vede che:

$$\text{dispersione normale } \frac{dn}{d\omega} > 0, \quad v_g < v,$$

$$\text{dispersione anomala } \frac{dn}{d\omega} < 0, \quad v_g > v.$$

Nelle zone di dispersione normale dunque la velocità di gruppo è minore della velocità di fase ed è sempre minore di  $c$ , anche quando  $n < 1$  e  $v > c$ , come avviene a pulsazioni molto elevate; dimostreremo ciò tra poco. Però in presenza di dispersione anomala, cioè in vicinanza di una pulsazione caratteristica,  $n < 1$ ,  $v > c$  e quindi anche  $v_g$ , che è maggiore di  $v$ , risulta maggiore di  $c$ . Per quel che riguarda la velocità di fase non desta preoccupazione trovarla in qualche situazione maggiore di  $c$ , in quanto essa è la velocità di un'onda armonica indefinita, che non ha realtà fisica effettiva. Invece il fatto che possa essere  $v_g > c$  contrasta con l'idea che la velocità di gruppo sia la velocità con cui si propaga l'energia, ovvero la velocità con cui si propaga un segnale fisico, e di conseguenza non debba essere superiore a  $c$ .

Un'analisi accurata di cosa avviene in un pacchetto d'onde quando le pulsazioni sono vicine ad una  $\omega_k$  mostra che in queste condizioni il pacchetto d'onde è molto distorto e il concetto stesso di velocità di gruppo perde significato; si trova che per  $\omega \approx \omega_k$ , mentre sia  $v$  che  $v_g$  definite nella solita maniera sono superiori a  $c$ , la *velocità effettiva del segnale fisico costituito dal pacchetto è sempre minore di  $c$* . Quando invece  $\omega$  è molto diverso da  $\omega_k$  e l'indice di rifrazione è una funzione lentamente variabile e crescente di  $\omega$ , la stessa analisi restituisce a  $v_g$  il suo noto significato fisico e dimostra che è sempre  $v_g < c$ .

Esaminiamo, come anticipato, il caso  $\omega \gg \omega_i$ , dove  $\omega_i$  è l'ultima pulsazione caratteristica di un mezzo dielettrico. In questa zona la (13.61) dà, trascurando tutti i contributi dovuti a  $\omega_k$  lontane,

$$n(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \gamma_i^2 \omega^2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \left( \frac{-\omega_i^2}{\omega^4} \right) = 1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2}$$

L'indice di rifrazione è minore di 1 e pertanto la velocità di fase è maggiore di  $c$ :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}} = c \left( 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2} \right),$$

dove abbiamo sfruttato la circostanza che  $Ne^2 / 2\epsilon_0 m_e \omega^2 \ll 1$ . Dall'espressione calcolata per  $n(\omega)$  ricaviamo

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^3} \Rightarrow n + \omega \frac{dn}{d\omega} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m_e \omega^2}$$

e da (13.63)

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e \omega^2}}}$$

La velocità di gruppo alle altissime pulsazioni, dove la dispersione è normale e l'indice di rifrazione è minore di 1, è minore di  $c$ . Si trova pure che  $v_g v = c^2$ .

### 13.10 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Il modello sviluppato nel paragrafo 13.9 per i dielettrici può essere modificato per i materiali conduttori, considerando le proprietà degli elettroni di conduzione discusse nel paragrafo 6.4 e ammettendo che soltanto questi siano importanti nell'interazione con l'onda elettromagnetica incidente.

In un conduttore gli elettroni di conduzione sono liberi, però nel loro moto interagiscono con il reticolo cristallino: pertanto possiamo porre  $\omega_0 = 0$ , ma  $\gamma$  è diversa da zero e l'equazione del moto dell'elettrone sottoposto al campo elettrico dell'onda incidente è

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} = -\frac{e}{m_e} E .$$

Procedendo come per i dielettrici si arriva a definire l'indice di rifrazione complesso, posto  $\omega_0 = 0$  nella (13.55):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e \omega} \frac{1}{\omega + i\gamma} . \quad (13.64)$$

Riprendiamo ora alcune nozioni del paragrafo 6.4. Nella deriva sotto l'azione di un campo elettrico la velocità di deriva è legata al tempo medio  $\tau$  che intercorre tra due urti consecutivi dell'elettrone con il reticolo dalla (6.14):

$$v_d = -\frac{eE}{m_e} \tau .$$

D'altra parte l'equazione del moto, che è reso uniforme dall'attrito ( $d^2z/dt^2 = 0$ ), è

$$\gamma \frac{dz}{dt} = \gamma v_d = -\frac{e}{m_e} E .$$

Dal confronto tra le due relazioni si ricava

$$\gamma = \frac{1}{\tau} .$$

Inoltre abbiamo anche visto la relazione (6.16) tra  $\tau$  e la conduttività  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m_e} \tau .$$

Utilizzando questi risultati la (13.64) assume la forma

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \frac{1}{\omega \tau + i} = 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\omega \tau - i}{1 + \omega^2 \tau^2} . \quad (13.65)$$

Per una discussione quantitativa facciamo riferimento al rame, con i dati numerici dell'esempio 6.4:

$$\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1} \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.78 \cdot 10^{18} s^{-1}, N = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ elettroni/m}^3,$$

$$\tau = 2.51 \cdot 10^{-14} s \Rightarrow \gamma = 1/\tau = 4 \cdot 10^{13} s^{-1}.$$

Consideriamo innanzitutto due casi estremi, le basse frequenze e le alte frequenze.

1) Approssimazione delle basse frequenze  $\omega \tau \ll 1$

Supponiamo che la pulsazione dell'onda elettromagnetica incidente soddisfi alla condizione

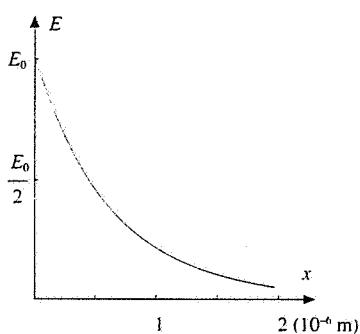
$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = 4 \cdot 10^{13} s^{-1}.$$

Di conseguenza è anche vero che  $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$ . Vediamo che si tratta di pulsazioni che sono almeno tre ordini di grandezza inferiori a quelle della luce visibile; in particolare siamo nel campo delle onde emesse dalle antenne.

In questa ipotesi nella (13.65) trascuriamo  $\omega^2 \tau^2$  rispetto a 1, per cui

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma \tau}{\epsilon_0 \omega} + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}.$$

La parte reale vale  $-1.7 \cdot 10^5$  mentre  $\sigma/\epsilon_0 \omega$  vale almeno  $1.7 \cdot 10^6$  e cresce al diminuire di  $\omega$ . Possiamo quindi scrivere



$$n^2 = \frac{i \sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad \omega \tau \ll 1.$$

Facciamo uso dell'identità  $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$  e otteniamo

$$n = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} + i \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} = n_r + i n_i.$$

Ricordiamo dal paragrafo 13.9 che la parte immaginaria dell'indice di rifrazione determina l'assorbimento dell'onda: l'ampiezza diminuisce secondo la legge

$$E_0 e^{-\omega n_r x / c} = E_0 e^{-\beta x / 2} = E_0 e^{-x / 2 l_{\text{ass}}}.$$

Nel rame la lunghezza di assorbimento risulta

$$l_{\text{ass}} = \frac{c}{2\omega n_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c^2}{2\sigma \omega}} = \frac{8.14 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\omega}} = \frac{3.25 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\nu}} \text{ m}.$$

Questa  $l_{\text{ass}}$  è riferita all'intensità; per l'ampiezza del campo elettrico l'analogia lunghezza è 2  $l_{\text{ass}}$ .

In figura 13.35 è mostrata la decrescita di  $E_0$  nel rame a una frequenza  $\nu = 10^{10} \text{ Hz}$ , mentre nella figura 13.36 abbiamo l'andamento di  $l_{\text{ass}}$  nel rame in funzione della frequenza fino a  $\nu = 10^{12} \text{ Hz}$ , in scala doppio-logaritmica.

Si conclude che nel campo delle basse frequenze le onde elettromagnetiche penetrano nel conduttore per uno spessore molto piccolo: *il conduttore non è trasparente*.

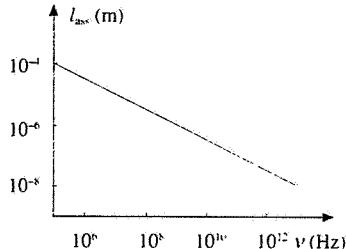


Figura 13.36

2) Approssimazione delle alte frequenze  $\omega \tau \gg 1$

Supponiamo che sia ora  $\omega \gg 1/\tau = 4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , per cui nella (13.65)  $\omega \tau + i \approx \omega \tau$  e

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

avendo definito la quantità  $\omega_p$ , chiamata *pulsazione di plasma*, come

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$$

Pulsazione di plasma

Per  $\omega < \omega_p$  risulta  $n^2 < 1$  e l'indice di rifrazione è immaginario, il che comporta l'assorbimento delle onde elettromagnetiche. Quando  $\omega$  supera  $\omega_p$  l'indice di rifrazione è reale, non c'è assorbimento e il metallo diventa trasparente alle onde; il comportamento è dispersivo in quanto  $n$  dipende da  $\omega$ .

Nel rame

$$\omega_p = 1.64 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}, \quad v_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2.62 \cdot 10^{15} \text{ Hz}, \quad \lambda_p = \frac{c}{v_p} = 0.115 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Per lunghezze d'onda minori di  $\lambda_p$  (che corrisponde alla regione dell'ultravioletto, come vedremo nel paragrafo 13.12) il rame è trasparente.

A frequenze molto maggiori di quella di plasma intervengono altri fenomeni di interazione tra la radiazione elettromagnetica e le cariche del mezzo, come abbiamo già fatto presente nel caso dei dielettrici; accenneremo all'argomento nel capitolo 18.

Dalla discussione precedente, e sempre con riferimento numerico al rame, ricaviamo che se la pulsazione è inferiore a  $\sim 5 \cdot 10^{12}$  rad/s si ha soltanto assorbimento, mentre oltre  $\sim 10^{16}$  rad/s il mezzo è trasparente. Nella regione intermedia, che comprende anche la luce, bisogna tener conto di entrambi i fenomeni, assorbimento e propagazione, ed è importante lo spessore che si considera per valutare quanta parte dell'energia dell'onda viene assorbita.

I risultati ottenuti possono essere estesi ad altri sistemi di particelle cariche libere; un caso molto interessante è quello della *ionosfera*. Si chiama così quella parte dell'atmosfera situata all'incirca tra 100 e 400 km dalla superficie terrestre, in cui l'aria è parzialmente ionizzata per l'azione della radiazione ultravioletta proveniente dal sole (è questo uno dei fenomeni non previsti nel nostro modello). Il gas è complessivamente neutro, anche se una qualsiasi perturbazione può causare una *separazione locale* delle cariche (elettroni e ioni positivi): non appena questa separazione avviene, agisce una forza elettrica di richiamo sulle cariche. Con buona approssimazione possiamo considerare solo il moto degli elettroni (gli ioni essendo molto più pesanti) e immaginare la situazione descritta nella figura 13.37: da una zona neutra si è avuto uno spostamento di elettroni che dà origine a uno strato carico negativamente e lascia dall'altra parte uno strato carico positivamente. Se  $N$  è il numero di cariche libere per unità di volume e  $x$  lo spessore dello strato carico, questo equivale a una distribuzione superficiale di carica con densità  $Nex$ , per cui il campo elettrico nello spazio intermedio è  $E = Nex / \epsilon_0$ . La forza sugli elettroni è  $-eE$  e la loro equazione del moto risulta

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -e E = -\frac{N e^2}{\epsilon_0} x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} x = 0.$$

Una volta causata la perturbazione ha luogo un moto armonico con pulsazione  $\omega = \sqrt{N e^2 / \epsilon_0 m_e} = \omega_p$ . I valori di  $N$  sono compresi tra  $10^{12}$  e  $10^{13}$  elettroni/m<sup>3</sup>; ponendo  $N \approx 3 \cdot 10^{12}$  si trova  $\omega_p \approx 10^8$  rad/s,  $v_p \approx 1.6 \cdot 10^7$  Hz,  $\lambda_p \approx 18.7$  m.

La frequenza di plasma  $v_p$  è una cosiddetta *frequenza di taglio*: onde con frequenze inferiori non riescono a penetrare la ionosfera e si dimostra che l'energia viene in realtà riflessa, mentre onde con frequenze superiori passano quasi indisturbate attraverso la ionosfera. È proprio questo fatto a rendere possibile la trasmissione a grande distanza di onde con frequenze intorno a 10<sup>6</sup> Hz, tipiche delle trasmissioni radiofoniche in modulazione di ampiezza; un'antenna da un punto della terra riesce ad inviare un segnale ad un ricevitore ben oltre l'orizzonte proprio perché le onde emesse vengono riflesse dalla ionosfera. Invece le onde con frequenze intorno a 10<sup>8</sup> Hz, tipiche delle trasmissioni in modulazione di frequenza (radio e televisione) passano attraverso la ionosfera e quindi un'antenna deve vedere il ricevitore perché ci sia trasmissione del segnale; d'altra parte ciò rende possibili le comunicazioni

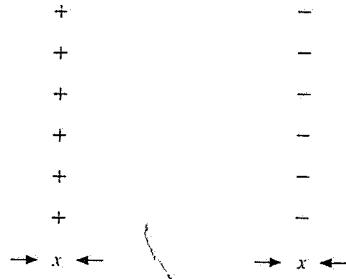


Figura 13.37

ni con i satelliti artificiali inviati oltre la ionosfera. La luce solare ( $v \approx 10^{14} \div 10^{15}$  Hz) passa la ionosfera, come ovviamente constatiamo ogni giorno; invece la componente ultravioletta della radiazione solare, pur avendo frequenze ben superiori a  $\nu_p$ , è parzialmente assorbita per un effetto quantistico di cui nel modello descritto non si tiene conto.

La ragione fisica dell'esistenza di una frequenza di taglio in questi sistemi come un plasma o un conduttore metallico sta nella capacità degli elettroni di reagire al campo elettrico incidente. Estrapolando quanto avviene in un conduttore in equilibrio elettrostatico, dove un campo applicato causa una ridistribuzione della carica fino a che il campo interno è nullo, una situazione simile di campo nullo nel mezzo (e quindi di non propagazione) avviene finché gli elettroni riescono a seguire le variazioni del campo e a ridistribuirsi nel mezzo; ma se la frequenza dell'onda è troppo elevata ciò non è possibile e il mezzo diventa trasparente. La frequenza di separazione tra i due regimi è la frequenza di plasma, che è una sorta di frequenza propria degli elettroni; il tempo di riaggiustamento è  $\sim 1/\nu_p$ .

Quando è trasparente la ionosfera è un mezzo dispersivo. La relazione di dispersione è la  $n^2 = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2)$  che si riscrive come

$$\omega^2 n^2 = \omega^2 \frac{c^2}{v^2} = k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 .$$

La velocità di fase è

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c ,$$

mentre la velocità di gruppo è

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}}} < c .$$

Come nei dielettrici a frequenze molto elevate si trova  $v_g v = c^2$ . A parte i valori numerici, le stesse relazioni valgono per un conduttore quando  $\omega > \omega_p$ .

### 13.11 Effetto Doppler. Effetto Cerenkov

Nel paragrafo 12.12 abbiamo studiato l'effetto Doppler per le onde sonore: esso si osserva quando una sorgente di onde e un rivelatore si muovono l'una rispetto all'altro. Abbiamo anche mostrato nell'esempio 12.5 che, disponendo di uno strumento abbastanza sensibile, è possibile distinguere se è la sorgente che si muove rispetto al mezzo o il rivelatore. Il fatto sostanziale è che la velocità di propagazione si compone con le varie velocità in gioco ovvero, detto diversamente, che la velocità di propagazione dipende dal sistema di riferimento.

Nel caso delle onde elettromagnetiche il concetto di velocità rispetto al mezzo perde significato, potendosi le onde elettromagnetiche propagare anche nel vuoto; inoltre, secondo la teoria della relatività ristretta, la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è sempre  $c$ , in qualsiasi sistema di riferimento e indipendentemente dal moto della sorgente e del rivelatore. Allora l'unico parametro può essere solo la velocità relativa tra sorgente e rivelatore e l'effetto Doppler deve essere simmetrico.

Per dimostrare questa affermazione seguiamo, con le necessarie modifiche, i ragionamenti del paragrafo 12.12. Quando la sorgente  $S$  di onde elettromagnetiche si muove verso il rivelatore  $R$  con velocità  $v_s$ , non è sufficiente prendere la (12.62) e sostituire alla velocità di propagazione  $v$  la velocità della luce  $c$ , scrivendo  $v = v_0 c / (c - v_s) = v_0 / (1 - v_s/c)$ . Dato che sono possibili velocità della sorgente non del tutto trascurabili rispetto a  $c$ , bisogna tener presente che si sta osservando un fenomeno che avviene in un sistema di riferimento in moto con velocità  $v_s$  e che, secondo la teoria della relatività ristretta, i tempi nei due sistemi non sono eguali. Come descritto nel paragrafo 3.8 del primo volume, i fenomeni nel sistema della sorgente appaiono, nel sistema del rivelatore, dilatati nel tempo: al periodo  $T$  bisogna sostituire  $T / \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$  e alla frequenza  $v_0$ , che è il reciproco del periodo, la frequenza

$v_0\sqrt{1-v_s^2/c^2}$ . La (12.62) diventa quindi

$$v_R = \frac{v_0 \sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_s}{c}}$$

Oltre alla correzione dovuta al moto relativo c'è la correzione derivante dalla *trasformazione di Lorentz del tempo*.

Se è invece il rivelatore  $R$  ad andare verso la sorgente  $S$  con velocità  $-v_s$ , il periodo misurato nel sistema di  $S$  appare nel sistema di  $R$  più breve,  $T\sqrt{1-v_s^2/c^2}$  invece di  $T$ , e quindi  $v_0$  diventa  $v_0/\sqrt{1-v_s^2/c^2}$ . La (12.63), scritta  $v_R = v_0(c+v_s)/c = v_0(1+v_s/c)$ , si trasforma nella

$$v_R = \frac{v_0 \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}}$$

Dal confronto si vede subito che le due frequenze sono uguali: non c'è modo di decidere se si muove  $S$  rispetto a  $R$  o viceversa.

Quando la velocità relativa è piccola rispetto a  $c$ , così che  $v_s^2/c^2 \ll 1$ , si riottengono le formule trovate nel paragrafo 12.12; esse danno ancora lo stesso risultato perché, se  $v_s^2/c^2$  è trascurabile rispetto a 1, con la stessa approssimazione  $1+v_s/c = 1/(1-v_s/c)$ . Quando si considerano onde elettromagnetiche le due misure di frequenza coincidono sempre, qualunque sia il valore di  $v_s$ . Invece, nel caso delle onde sonore (12.62) e (12.63) coincidono solo se  $v_s \ll v$ , ma danno risultati diversi nelle altre situazioni.

Riassumendo, detta  $v$  la velocità con cui una sorgente di onde elettromagnetiche si muove rispetto ad un osservatore e  $v_0$  la frequenza quando  $v = 0$ , la frequenza misurata dall'osservatore è

$$v = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_0 \quad (13.66)$$

Il segno positivo è valido quando la sorgente si avvicina all'osservatore e il segno negativo quando si allontana. La corrispondente variazione di lunghezza d'onda si ricava da

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 \pm \frac{v}{c}} \lambda_0 \quad (13.67)$$

Quindi la frequenza aumenta e la lunghezza d'onda diminuisce se sorgente e osservatore si avvicinano, mentre succede il contrario se si allontanano.

Supponiamo che la sorgente si allontani, per cui  $\lambda > \lambda_0$ , e indichiamo con

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

l'aumento percentuale di lunghezza d'onda osservato. Inserendo la (13.67), risolvendo in  $v/c$  e scartando una soluzione che dà  $v/c = 1$ , si ottiene

$$\frac{v}{c} = \frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} + 1\right)^2 + 1} \quad (13.68)$$

Dalla misura di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  è possibile pertanto ricavare la velocità con cui la sorgente si allontana.

Un esempio classico di questo effetto è costituito dalla misura della *velocità con cui si allontanano le galassie*. Come abbiamo già detto nel paragrafo 13.8, gli atomi di un elemento in fase gassosa opportunamente eccitati emettono radiazioni luminose e le lunghezze d'onda di queste radiazioni sono caratteristiche dell'elemento. Nella radiazione proveniente dalle galassie si riconoscono le serie di lunghezze d'onda tipiche di determinati elementi, però tutte con valori di lunghezza d'onda *maggiori* di quelli misurati in laboratorio: si osserva cioè un generale *spostamento verso il rosso*. Si deduce quindi, essendo  $\Delta\lambda / \lambda_0 > 0$ , che le galassie si allontanano dalla terra e dalla misura di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  si può risalire alla velocità  $v$  della galassia (vedi esempio 13.7).

Hubble effettuò misure sistematiche di questo tipo dimostrando che la velocità di allontanamento aumenta con la distanza della galassia e che la relazione tra velocità e distanza della galassia è la stessa in qualsiasi direzione di osservazione. I dati si possono interpretare con l'ipotesi che l'*universo sia in espansione* e che la velocità di espansione sia la stessa in tutte le direzioni (espansione isotropa). Secondo questo modello cosmologico inizialmente tutta la materia era concentrata in un unico punto e ad un certo istante, che si può far risalire a circa  $15 \cdot 10^9$  anni fa, si è verificato il *big-bang*. Da allora l'universo ha continuato ad espandersi raggiungendo una dimensione dell'ordine di  $3 \cdot 10^{24}$  m  $\approx 3 \cdot 10^8$  anni-luce (1 anno-luce  $= 9.45 \cdot 10^{15}$  m, spazio percorso dalla luce in un anno).

### Esempio 13.7

Alcune lunghezze d'onda provenienti da una galassia della costellazione della Vergine hanno un valore superiore di circa il 4% rispetto a quello osservato in laboratorio. Calcolare la velocità di allontanamento.

#### Soluzione

Direttamente da (13.68), essendo  $\Delta\lambda / \lambda_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ ,

$$\frac{v}{c} = \frac{(1.004)^2 - 1}{(1.004)^2 + 1} \approx 4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^{-3} c = 1.2 \cdot 10^6 \text{ m/s} .$$

Osserviamo che con valori così piccoli di  $\Delta\lambda / \lambda_0$  la (13.68) si può correttamente approssimare con la  $v/c = \Delta\lambda / \lambda_0$ .

### *Effetto Cerenkov*

Anche con le onde elettromagnetiche si ha un fenomeno analogo a quello dell'onda d'urto, descritto nel paragrafo 12.12. Quando una particella carica, ad esempio un elettrone, si muove con velocità  $v$  in un mezzo dielettrico, il campo elettrico della particella eccita gli atomi del mezzo disposti lungo la traiettoria: questi acquistano un momento di dipolo elettrico che scompare subito dopo il passaggio della particella, diventando così *sorgenti impulsive di onde elettromagnetiche*. In pratica possiamo considerare ogni punto della traiettoria come sorgente di onde sferiche e, con la stessa costruzione della figura 12.33, si dimostra che queste onde possono ammettere un fronte d'onda comune di forma conica avente come asse la traiettoria della particella.

Detta  $c/n$  la velocità delle onde nel mezzo, l'angolo al vertice  $\theta$  della figura 13.39 è tale che

$$\sin \theta = \frac{c}{n v} = \frac{1}{n \beta} .$$

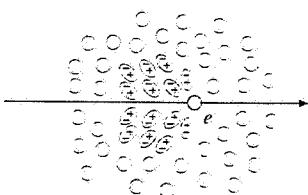


Figura 13.38

dove  $\beta = v/c$  è il rapporto tra la velocità della particella e la velocità della luce nel vuoto. I raggi ortogonali al fronte d'onda formano con la traiettoria della particella l'angolo  $\theta_c$  complementare di  $\theta$  per cui

$$\cos \theta_c = \frac{1}{n \beta}, \quad (13.69)$$

espressione nota come *relazione di Cerenkov*.

La condizione perché esista il fronte d'onda è dunque  $\cos \theta_c \leq 1$  ovvero  $n \beta \geq 1$ . Siccome  $\beta$  è sempre minore di 1, l'emissione avviene solo se l'indice di rifrazione è maggiore di 1. Quindi

$$\beta > \beta_{\min} = \frac{1}{n} \Rightarrow v > \frac{c}{n} :$$

la velocità della particella deve essere maggiore di un valore minimo che corrisponde alla velocità della luce nel mezzo o, in termini di  $\beta$ , questa deve superare un valore minimo che è fissato dal reciproco dell'indice di rifrazione.

Osserviamo che per un dato  $n$  al crescere di  $\beta$  diminuisce  $\cos \theta_c$  e pertanto aumenta l'angolo di emissione  $\theta_c$ : il valore limite si ha per  $\beta = 1$  ed è  $\theta_{c,\max} = \arccos(1/n)$ .

Le frequenze emesse dal mezzo sotto forma di radiazione Cerenkov hanno uno spettro molto ampio; in particolare viene emessa luce visibile. L'intensità è piuttosto ridotta e occorrono strumenti molto sensibili per rivelare l'impulso di luce. Nell'acqua, che alle frequenze ottiche ha  $n = 4/3$ , il valore minimo di  $\beta$  è  $1/n = 0.75$ : la particella incidente deve avere almeno la velocità  $v = 0.75 c = 2.25 \cdot 10^8$  m/s. L'angolo  $\theta_c$  varia da zero a  $\theta_{c,\max} = 41.4^\circ$  quando  $\beta$  varia da 0.75 a 1.

La misura dell'angolo  $\theta_c$  permette dunque di determinare la velocità della particella. Su questo principio sono costruiti i cosiddetti *contatori a effetto Cerenkov*, costituiti da un mezzo, liquido o gassoso, in cui la particella incidente può provocare l'emissione di radiazione, da un sistema ottico adatto a focalizzare la luce emessa su un rivelatore e appunto da un rivelatore sensibile all'impulso di luce (tipicamente un *fotomoltiplicatore*, strumento basato sull'effetto fotoelettrico che vedremo nel capitolo 18). Tali contatori, molto usati nella fisica subnucleare, permettono innanzitutto di rivelare il passaggio di una particella carica, se questa ha  $\beta > \beta_{\min}$ : se non hanno altre funzioni sono detti contatori a soglia, se invece sono dotati di sofisticati sistemi ottici capaci di misurare  $\theta_c$  sono detti contatori differenziali.

### 13.12 Spettro delle onde elettromagnetiche

L'intervallo delle frequenze delle onde elettromagnetiche è molto ampio e si estende dalle onde hertziane (limite inferiore  $\sim 10^2$  Hz) ai raggi  $\gamma$ , che hanno frequenze superiori a  $10^{18}$  Hz.

Nella figura 13.40 è riportata una rappresentazione schematica dello spettro: la frequenza  $v$  è nella scala di sinistra, mentre a destra c'è la corrispondente lunghezza d'onda  $\lambda$  nel vuoto, calcolata con la formula  $\lambda = c/v$ .

Lo spettro è suddiviso convenzionalmente in una successione di bande: *onde hertziane*, *microonde*, *infrarosso*, *visibile*, *ultravioletto*, *raggi X*, *raggi  $\gamma$* . Le separazioni non sono nette e gli intervalli delle singole bande hanno zone di sovrapposizione, come avviene ad esempio alle altissime frequenze tra raggi  $X$  e raggi  $\gamma$ . Le differenti denominazioni hanno origine storica e sono talvolta legate al modo di produzione o di rilevazione delle onde (è il caso delle onde hertziane e del visibile). Nella zona inferiore dello spettro la produzione delle onde avviene con circuiti elettronici (almeno sulla terra), il limite massimo essendo intorno a  $10^{12}$  Hz; le onde di frequenza superiore derivano da fenomeni a livello atomico e nucleare, spontanei o provocati.

In ogni caso è sempre la frequenza che determina le proprietà fisiche; anche quando l'onda attraversa un mezzo materiale e la sua velocità varia, è la lunghezza

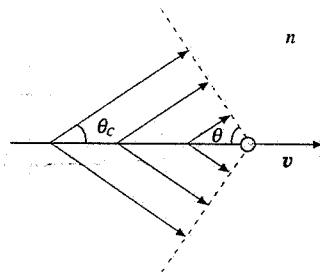


Figura 13.39

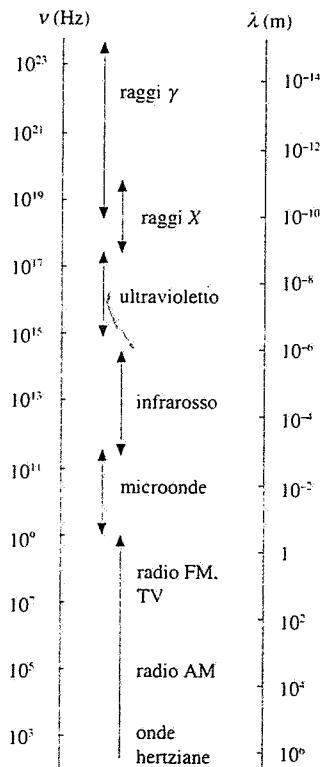


Figura 13.40

d'onda che cambia, ma il numero di oscillazioni al secondo resta invariato.

Per avere una comprensione completa dello spettro delle onde elettromagnetiche è opportuno introdurre la *descrizione quantistica*, che riprenderemo nel capitolo 18; essa è essenziale per spiegare alcune proprietà non riconducibili alle proprietà ondulatorie.

Secondo la meccanica quantistica l'energia elettromagnetica ha una struttura discreta come la materia e non continua come previsto dalla teoria ondulatoria di Maxwell. Essa è costituita da *quanti di energia* detti *foton*, ognuno dei quali ha l'energia

Fotoni

$$U = h \nu , \quad (13.70)$$

dove  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js è la costante di Planck, già richiamata nei paragrafi 2.3 e 9.10, e  $\nu$  la frequenza dell'onda. I fotoni si muovono in qualsiasi sistema di riferimento con velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s e hanno massa a riposo nulla. La loro quantità di moto è

$$p = \frac{U}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} . \quad (13.71)$$

Un'onda elettromagnetica piana di intensità  $I$  è composta da un flusso di  $N$  fotoni per metro quadro e per secondo, con

$$N = \frac{I}{h \nu} . \quad (13.72)$$

Senza approfondire per il momento questo argomento, diremo che la teoria di Maxwell delle onde elettromagnetiche dà una descrizione *media* dei fenomeni tanto più appropriata quanto minore è l'energia dei fotoni e maggiore il loro numero. Nelle onde hertziane e nelle microonde l'energia dei quanti è così piccola e il numero così grande che non è possibile rivelare sperimentalmente il singolo quanto. Nel campo del visibile si presentano fenomeni interpretabili solamente con la descrizione quantistica, ma l'aspetto ondulatorio è più evidente. Nei raggi X e nei raggi  $\gamma$  l'effetto quantistico è predominante e le proprietà ondulatorie possono essere messe in evidenza solo in qualche caso e con raffinati esperimenti.

Avendo in mente questi aspetti diamo una descrizione delle diverse bande che compongono lo spettro elettromagnetico.

Onde hertziane  $3 \cdot 10^6 \geq \lambda \geq 0.3$  m,  $10^2 \leq \nu \leq 10^9$  Hz,  $\sim 0 \leq U \leq 4 \cdot 10^{-6}$  eV

L'energia dei quanti è molto piccola e non può dare origine a processi singoli osservabili, per cui la descrizione classica dell'onda è appropriata. Queste onde sono prodotte con dispositivi elettronici, principalmente circuiti oscillanti, e sono utilizzate nelle trasmissioni radiofoniche e televisive. Per questa ragione si parla anche di onde radio o di radiofrequenze.

Microonde  $0.3 \geq \lambda \geq 10^{-3}$  m,  $10^9 \leq \nu \leq 3 \cdot 10^{11}$  Hz,  $4 \cdot 10^{-6} \leq U \leq 1.2 \cdot 10^{-3}$  eV

Vengono prodotte con dispositivi elettronici o da fenomeni atomici (*maser*): sono utilizzate principalmente per comunicazioni e sistemi radar. Prevale la descri-

zione classica, ma alle frequenze più elevate l'energia dei fotoni è sufficiente per alcuni studi di strutture molecolari, in quanto è dello stesso ordine di grandezza delle differenze di energia tra livelli molecolari. Il *maser* ad ammoniaca emette una frequenza  $\nu = 2.4 \cdot 10^{10}$  Hz ( $\lambda = 1.25$  cm) e la corrispondente energia dei fotoni è  $U = 10^{-4}$  eV.

Infrarosso  $10^{-3} \geq \lambda \geq 0.78 \cdot 10^{-6}$  m,  $3 \cdot 10^{11} \leq \nu \leq 3.8 \cdot 10^{14}$  Hz,  $1.2 \cdot 10^{-3} \leq U \leq 1.5$  eV

Questa regione viene suddivisa in tre parti: l'estremo infrarosso da  $10^{-3}$  a  $3 \cdot 10^{-5}$  m, il medio infrarosso da  $3 \cdot 10^{-5}$  a  $3 \cdot 10^{-6}$  m e il vicino infrarosso da  $3 \cdot 10^{-6}$  a  $0.78 \cdot 10^{-6}$  m, soglia del visibile. La radiazione infrarossa è prodotta da corpi caldi, in cui gli atomi vengono eccitati tramite gli urti causati dall'agitazione termica, e contiene in modo praticamente continuo moltissime frequenze (si veda la figura 13.41 e la relativa spiegazione). Con sorgenti *laser* si ottengono invece frequenze molto precise, in un campo che va da  $10^{-4}$  m fino al visibile. Se assorbiti da una molecola, i quanti hanno energia sufficiente a provocare un moto vibrazionale, che si traduce in aumento di temperatura. L'emissione infrarossa provocata è utilizzata in medicina in terapie fisiche; quella spontanea è sfruttata ad esempio nella fotografia infrarossa. Nella ricerca ci si serve dei raggi infrarossi nella spettroscopia vibrazionale, cioè nello studio dei livelli energetici vibrazionali delle molecole.

Luce visibile  $0.78 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 0.38 \cdot 10^{-6}$  m,  $3.8 \cdot 10^{14} \leq \nu \leq 7.9 \cdot 10^{14}$  Hz,  
 $1.6 \leq U \leq 3.3$  eV

È la banda di frequenze cui è sensibile l'occhio della maggior parte degli esseri viventi. La luce visibile è prodotta nei moti di agitazione termica ad alta temperatura, da scariche in un gas (ad esempio in lampade a incandescenza e in lampade a scarica rispettivamente), in generale da processi in cui vengono eccitati gli elettroni più esterni degli atomi. Si ha anche emissione di radiazione di sincrotrone visibile con elettroni di energia dell'ordine di 100 MeV (paragrafo 13.7).

Il sole è la più importante sorgente di luce visibile vicina a noi; l'energia elettromagnetica ha origine dall'agitazione termica degli atomi che si trovano sulla superficie ad una temperatura di circa 6000 K. Lo spettro  $F(\lambda)$  della radiazione solare è mostrato in figura 13.41. Vediamo che esso inizia nel vicino ultravioletto, ha un massimo nel visibile per  $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$  m e si estende abbastanza nell'infrarosso. Per ogni intervallo  $d\lambda$  la quantità  $dI(\lambda) = F(\lambda) d\lambda$ , area sotto la curva, rappresenta l'intensità riferita a quell'intervallo  $d\lambda$ . La curva di  $F(\lambda)$  è tipica dell'*emissione termica di un corpo caldo*; a temperature più basse la curva si sposta verso destra, nell'infrarosso, a temperature più alte verso sinistra, nell'ultravioletto. Lo spettro delle frequenze è continuo, ma non tutte sono emesse con la stessa intensità, come mostra  $F(\lambda)$  che dà l'energia per unità di superficie, unità di tempo e intervallo unitorio di lunghezza d'onda ( $\text{W/m}^3$ ).

Quando il meccanismo di emissione è diverso da quello termico si hanno spettri formati da una o più frequenze ben distinte (luce emessa da una lampada a gas o da un laser).

Le diverse sensazioni che la luce produce nell'occhio dipendono dalla lunghezza d'onda e vengono classificate come colori; i relativi intervalli di  $\lambda$ ,  $\nu$  e il valore centrale di  $U$  sono riportati nella tabella 13.2. La curva della sensibilità relativa dell'occhio è mostrata in figura 13.42; il massimo si ha per la luce giallo-verde con  $\lambda = 0.56 \cdot 10^{-6}$  m.

Le caratteristiche ondulatorie della luce sono alla base dei fenomeni che costituiscono il campo di studio dell'*ottica* (interferenza, diffrazione, riflessione e rifrazione, ecc.); ad essi sono dedicati i capitoli 14, 15, 16 e 17. È bene osservare che

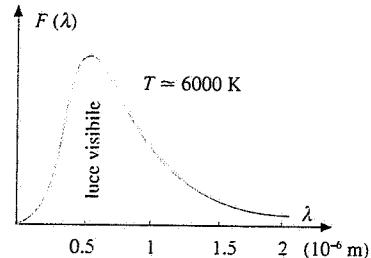


Figura 13.41

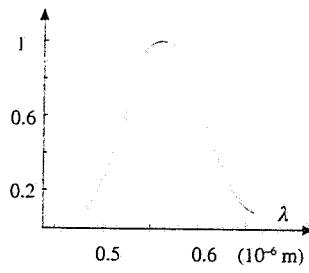


Figura 13.42

con strumenti opportuni gli stessi fenomeni si possono osservare per tutte le onde elettromagnetiche, almeno fino alle frequenze dei raggi X, e in generale per tutti i tipi di onde. Invece per la spiegazione di altri fenomeni che sono provocati dalla luce visibile, come l'effetto fotoelettrico (capitolo 18), la descrizione quantistica è essenziale.

**Tabella 13.2 Colori della luce visibile**

colore	$\lambda (10^{-9} \text{ m})$	$\nu (10^{14} \text{ Hz})$	$U (\text{eV})$
rosso	0.780 – 0.622	3.85 – 4.82	1.79
arancione	0.622 – 0.597	4.82 – 5.03	2.04
giallo	0.597 – 0.577	5.03 – 5.20	2.12
verde	0.577 – 0.492	5.20 – 6.10	2.34
azzurro	0.492 – 0.455	6.10 – 6.59	2.62
violetto	0.455 – 0.380	6.59 – 7.89	2.99

Ultravioletto  $0.38 \cdot 10^{-6} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $7.9 \cdot 10^{14} \leq \nu \leq 5 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$ ,  $3.3 \leq U \leq 2 \cdot 10^3 \text{ eV}$

La radiazione ultravioletta è emessa da atomi eccitati con i mezzi già detti, in particolare anche con il meccanismo del laser, e da particelle cariche accelerate (*radiazione di sincrotrone*). L'applicazione scientifica principale si ha nello studio di strutture atomiche; questa dell'utilizzazione negli studi strutturali è una caratteristica comune alle varie bande e si basa sull'egualanza dell'energia dei fotoni con le differenze in energia tra livelli atomici o molecolari, che possono essere eccitati solo da fotoni incidenti con quella data energia; come già notato questo uso si ha a partire dalle microonde. I raggi ultravioletti hanno anche svariate applicazioni tecnologiche.

Il sole è una sorgente di radiazioni ultraviolette (vedi figura 13.41); una parte notevole di essa viene assorbita nell'atmosfera, oltre i 100 km di altezza, attraverso fenomeni di ionizzazione e dà luogo alla formazione della ionosfera (paragrafo 13.10). Un ulteriore assorbimento si ha soprattutto tra 20 e 30 km di altezza, dove si realizzano le condizioni ottimali per la reazione di formazione dell'*ozono*,  $3 \text{ O}_2 \rightarrow 2 \text{ O}_3$ , fortemente endotermica e resa possibile appunto dall'apporto energetico della radiazione ultravioletta. L'*ozono* prodotto successivamente si scinde riformando ossigeno e diffonde anche verso gli strati più bassi dove ad ogni modo reagisce con altre sostanze (l'*ozono* è un ossidante molto forte); tra formazione e scomparsa si ha un equilibrio dinamico che mantiene una determinata concentrazione di ozono, massima intorno ai 25 km di altezza.

L'assorbimento atmosferico dei raggi ultravioletti solari è fondamentale per la vita sulla terra in quanto questa radiazione in grandi quantità risulta letale. È noto il dibattito scientifico iniziato negli anni ottanta sull'assottigliamento dello strato di ozono e sulla sua scomparsa sopra l'Antartide; una possibile causa è l'immissione nell'atmosfera di clorofluorocarburi (CFC), contenuti negli impianti frigoriferi, in molti tipi di plastica e nelle bombolette spray, che reagiscono con l'*ozono* distruggendolo.

Uno dei risultati dell'esposizione alla piccola parte della radiazione ultravioletta solare che raggiunge la superficie terrestre è l'abbronzatura della pelle: i fotoni infatti hanno un'energia sufficiente per formare, nell'interazione con le molecole dei primi strati della pelle, la melanina, cioè la sostanza che dà la colorazione scura alla pelle.

Raggi X  $6 \cdot 10^{-10} \geq \lambda \geq 6 \cdot 10^{-12}$  m,  $5 \cdot 10^{17} \leq \nu \leq 5 \cdot 10^{19}$  Hz,  $2 \cdot 10^3 \leq U \leq 2 \cdot 10^5$  eV

Le onde elettromagnetiche denominate raggi X vengono prodotte con due meccanismi differenti. Il primo è già stato discusso nel paragrafo 13.7 e consiste nel frenamento di elettroni accelerati da d.d.p. al massimo dell'ordine di 100 kV. In un fascio di raggi X così prodotti sono presenti fotoni con energie da un minimo di circa  $10^3$  eV fino ad un massimo corrispondente all'energia massima degli elettroni, cioè circa  $10^5$  eV.

Raggi X di questo tipo sono utilizzabili per indagini radiografiche. L'assorbimento dei raggi X è diverso nei vari tessuti che costituiscono il corpo umano e soprattutto nelle ossa; il flusso di raggi X che emerge dal corpo sottoposto a irraggiamento X è pertanto diverso a seconda del tessuto attraversato e una lastra fotografica viene più o meno impressionata in corrispondenza. Avendo la possibilità di interagire con le molecole depositando una grande quantità di energia, i fotoni X possono distruggere i tessuti viventi: fasci ben focalizzati e molto intensi sono usati nella terapia contro i tumori.

Anche per mezzo della radiazione di sincrotrone si ha emissione nella banda dei raggi X di frenamento.

I raggi X caratteristici (vedi paragrafo 18.6) sono invece emessi da atomi eccitati in corrispondenza a transizioni di elettroni dei livelli più interni; di conseguenza le frequenze, ovvero le energie dei fotoni, sono ben definite e caratteristiche dell'elemento; esse hanno una dipendenza quadratica dal numero atomico dell'elemento. Le lunghezze d'onda sono confrontabili con le distanze interatomiche ( $\sim 10^{-10}$  m) e questi raggi vengono pertanto usati per studi di strutture cristalline. Proprio l'interazione con strutture cristalline ha dimostrato che i raggi X hanno proprietà ondulatorie, in quanto subiscono il fenomeno della diffrazione (vedi paragrafo 16.10); la natura corpuscolare è però predominante.

Raggi  $\gamma$   $\lambda \leq 10^{-10}$  m ,  $\nu \geq 3 \cdot 10^{18}$  Hz ,  $U \geq 1.2 \cdot 10^4$  eV

I raggi  $\gamma$  sono prodotti in processi nucleari, quali decadimenti radioattivi e reazioni tra nuclei, e nelle reazioni e nei decadimenti di particelle subnucleari; vengono però chiamati  $\gamma$  anche i fotoni emessi per bremsstrahlung da elettroni di alta energia e in generale tutti i fotoni la cui energia è superiore a qualche centinaio di keV, comunque emessi. I raggi  $\gamma$  prodotti nei processi nucleari hanno energie che al massimo valgono qualche MeV mentre quelli originati in fenomeni subnucleari possono assumere in pratica qualsiasi energia, i limiti essendo posti naturalmente dalla legge di conservazione dell'energia nelle reazioni di produzione. La massima energia per raggi  $\gamma$  prodotti in laboratorio è dell'ordine di  $10^{11}$  eV =  $10^2$  GeV, a cui corrisponde  $\nu = 2.4 \cdot 10^{25}$  Hz ovvero  $\lambda = 1.25 \cdot 10^{-17}$  m. In reazioni causate dalla radiazione cosmica sono stati trovati fotoni con energie ancora superiori (oltre  $10^{12}$  eV).

L'intensità di raggi  $\gamma$  emessa da una sorgente nucleare (*radioattività  $\gamma$* ) può essere molto elevata e tali sorgenti vanno utilizzate con cautela, poiché l'assorbimento di questi  $\gamma$  può causare seri danni in un organismo vivente. D'altra parte, come i raggi X, i raggi  $\gamma$  nucleari trovano applicazioni in terapie antitumorali: è diffuso l'uso dei raggi  $\gamma$  emessi dall'isotopo del cobalto  $^{60}\text{Co}$ , aventi energia intorno a MeV.

Nella loro interazione con la materia i raggi  $\gamma$  manifestano soltanto la natura corpuscolare, non essendo possibile per ora misurare lunghezze d'onda così corte.

**Esempio 13.8**

Dare una descrizione quantistica della radiazione solare nell'ipotesi semplificativa che essa abbia una lunghezza d'onda definita, data dal valore medio  $\lambda_m = 0.5 \cdot 10^{-6}$  m a cui l'emissione è massima.

**Soluzione**

La frequenza dell'onda è  $v_m = c/\lambda_m = 6 \cdot 10^{14}$  Hz per cui il singolo fotone ha energia (13.70) e quantità di moto (13.71):

$$U = h v_m = 3.98 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.49 \text{ eV} ,$$

$$p = \frac{h}{\lambda_m} = 1.33 \cdot 10^{-27} \text{ Ns} = 0.83 \cdot 10^{-8} \text{ eV/c} .$$

Il flusso di fotoni incidenti sulla superficie terrestre, da (13.72) e dal valore  $I = 1.4 \cdot 10^3$  W/m<sup>2</sup> dato nella nota del paragrafo 13.5, risulta

$$N = \frac{I}{U} = 3.52 \cdot 10^{21} \text{ fotoni/m}^2 \text{ s} .$$

La quantità di moto complessiva portata dai fotoni per metro quadro e per secondo è

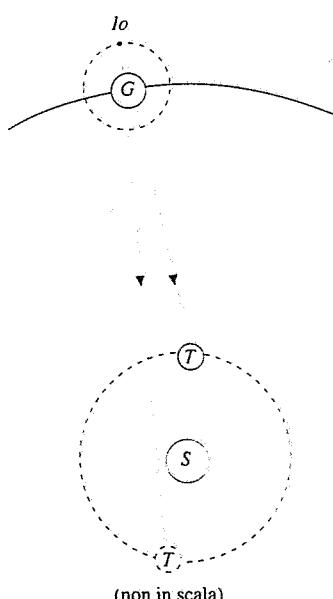
$$N_p = \frac{I}{U} p = \frac{I}{c} = 4.67 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} ,$$

ovviamente in accordo col risultato del paragrafo 13.5. La pressione di radiazione ha origine dall'urto di questi fotoni contro la superficie del materiale. L'urto è anelastico con  $p_{fin} = 0$  se il materiale è assorbente ed è elastico ( $p_{fin} = -p$  con incidenza normale) se il materiale è perfettamente riflettente.

**13.13 La velocità della luce**

La velocità della luce nel vuoto è una costante fondamentale della fisica. Ricordiamo che il suo valore è

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (13.5)$$



**Figura 13.43**

È provato sperimentalmente che *il vuoto non è dispersivo*, cioè che tutte le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con velocità  $c$ , indipendentemente dalla loro frequenza.

La velocità  $c$ , che non dipende dal sistema di riferimento, è la massima velocità con cui può propagarsi un segnale fisico di qualsiasi natura; nessun corpo materiale raggiunge la velocità  $c$ .

Le prime misure di  $c$  furono dedotte da osservazioni astronomiche. Nel 1676 Roemer osservando le eclissi di una luna (*Io*) di Giove, causate dal cono d'ombra di Giove stesso, trovò che il periodo di tali eclissi, cioè l'intervallo di tempo tra un'eclisse e la successiva, variava durante l'anno e precisamente aumentava quando la terra si allontanava da Giove e diminuiva quando i due pianeti si avvicinavano. Il valore medio del periodo era di circa 42 ore e la massima variazione di circa 20 minuti. Roemer capì che l'aumento apparente di periodo dipendeva dal fatto che la luce doveva percorrere un cammino più lungo per arrivare sulla terra quando questa si allontanava da Giove. La differenza tra i valori massimo e minimo del periodo di *Io* era principalmente legata al diametro dell'orbita terrestre e con i dati allora disponibili Roemer calcolò  $c = 2.143 \cdot 10^8$  m/s. Il valore corretto, con i dati odierini, risulta  $c = 2.998 \cdot 10^8$  m/s, praticamente eguale a (13.5), ma non così preciso.

Nel 1728 Bradley riuscì a spiegare un apparente piccolo movimento (aberrazione) delle stelle nel corso di un anno riconducendolo giustamente al fatto che il fenomeno è osservato da un riferimento mobile, la terra. Nel ragionamento, che non riportiamo, è importante la spiegazione del perché per osservare una stella allo zenith è necessario inclinare il tubo di un telescopio di un angolo  $\alpha$  (figura 13.44). La luce della stella arriva verticalmente nel punto *A*, estremo del telescopio, ma questo si muove, ad esempio da sinistra verso destra, con la

velocità  $v_t$  della terra; la luce non raggiungerebbe direttamente l'occhio dell'osservatore in  $B$  e sarebbe assorbita dalle pareti, se il tubo non fosse inclinato di un angolo  $\alpha$  tale che

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{v_t}{c}$$

Dai valori  $\alpha \approx 10^{-4}$  rad e  $v_t \approx 3 \cdot 10^4$  m/s si ricava  $c$ , che risulta del corretto ordine di grandezza. Pur non essendo precisa la misura mette in evidenza che la luce ha una velocità finita (circa  $10^4 v_t$ ) e che la terra si muove rispetto alle stelle fisse.

Durante il 1800 vennero sviluppati metodi di misura terrestri che, oltre ad essere più precisi, permisero di calcolare il valore della velocità di propagazione della luce anche in mezzi materiali. Il primo metodo è dovuto a Fizeau (1849). Molto schematicamente, un raggio luminoso percorre un cammino  $2h$  tramite la riflessione su uno specchio piano: sul cammino della luce è interposta una ruota dentata, che ruota con velocità angolare  $\omega$ . La luce può superare la ruota, essere riflessa dallo specchio e superare di nuovo la ruota solo se sia all'andata che al ritorno passa nello spazio tra due denti della ruota. Detto  $\Delta\phi$  l'intervallo angolare tra due posizioni di passaggio della luce, deve essere soddisfatta la condizione  $\Delta\phi / \omega = 2h / c$ : se la ruota ha  $n$  denti (e  $n$  spazi),  $\Delta\phi$  al minimo vale  $\pi/n$  quando gli spazi di passaggio sono consecutivi per cui  $c = 2n h \omega / \pi$ . La misura è fattibile con  $h$  dell'ordine della decina di chilometri e  $\omega = 10^3 \div 10^4$  rad/s.

Quasi contemporaneamente Foucault (1850) mise a punto un metodo simile di osservazione intermittente basato su uno specchio rotante: il sistema fu perfezionato da Michelson nel 1927, che ottenne il valore  $c = 2.99796 \cdot 10^8$  m/s con un errore relativo di  $\sim 10^{-5}$  (4000 m/s). Descriveremo l'esperimento nel capitolo 17, per non dover anticipare nozioni spiegate in quel capitolo.

Le misure più precise sono ormai ottenute dalla relazione  $c = \lambda v$ , misurando con estrema precisione sia la lunghezza d'onda che la frequenza; l'errore attuale è inferiore a 1 m/s e per questo il valore (13.5) viene assunto come esatto. Tra l'altro è con questo sistema che viene provata l'indipendenza di  $c$  dalla frequenza.

Un ultimo argomento di carattere fondamentale riguardante la velocità della luce consiste nella spiegazione fisica delle variazioni della velocità di fase rispetto a  $c$  quando l'onda si propaga in un mezzo materiale. Un aspetto del problema è che non c'è nessuna ragione per ritenere che un atomo isolato nel vuoto emetta una radiazione che si propaga con velocità  $c$  mentre un atomo circondato da altri atomi in un mezzo materiale emetta una radiazione che si propaga con velocità  $v$  diversa da  $c$ : in ogni caso la velocità dell'onda è sempre  $c$ , qualunque sia il mezzo. Però tra la situazione di un'onda nel vuoto e quella di un'onda in un mezzo materiale c'è una differenza sostanziale: in un mezzo l'onda incidente eccita l'emissione degli atomi e pertanto il campo effettivo agente sul singolo atomo non è soltanto quello incidente, bensì la sovrapposizione di tutti i campi emessi dagli atomi eccitati e del campo incidente. Dobbiamo quindi aspettarci che l'emissione del generico atomo non sia in fase con l'onda incidente e che l'onda risultante sia la sovrapposizione di un gran numero di onde tutte sfasate tra loro.

In base a queste ipotesi, che la velocità sia sempre  $c$  e che ci sia sfasamento tra onda incidente e onde diffuse, si dimostra che l'effetto è una modifica della fase dell'onda nel mezzo: in un qualsiasi punto in cui ci attenderemmo una data fase  $\phi$  se la velocità dell'onda fosse  $c$ , troviamo invece la fase  $\phi \pm \delta$  e formalmente ciò coincide con il dire che la velocità dell'onda nel mezzo è minore o maggiore di  $c$  (macroscopicamente l'effetto è riassunto dall'indice di rifrazione  $n = c/v$ ).

Quanto detto vale per la velocità di fase di un'onda armonica, cioè infinita e quindi non fisica. In un segnale fisico reale a tutto ciò bisogna aggiungere le considerazioni già fatte che portano a stabilire che la velocità del segnale non supera mai  $c$ .

### Esempio 13.9

Un'onda luminosa piana armonica si propaga lungo l'asse  $x$ : la sua equazione è  $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$ . Interponiamo sul cammino dell'onda una lastra di vetro, avente spessore  $\Delta x$  e indice di rifrazione  $n$ , e supponiamo che la velocità di fase dell'onda nel vetro sia  $v = c/n$ , minore di  $c$ . Scrivere l'equazione dell'onda in un punto a valle della lastra ed

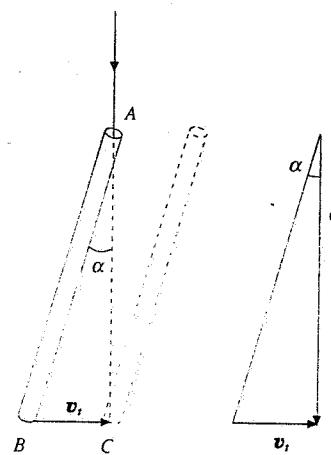


Figura 13.44

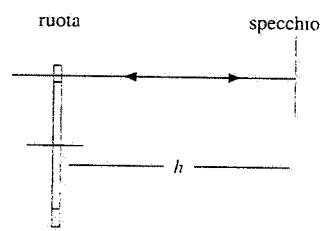


Figura 13.45

esaminare come si può esprimere il risultato se l'effetto della lastra è piccolo.

### Soluzione

Il tempo impiegato dall'onda ad attraversare lo spessore  $\Delta x$  della lastra è  $t_2 = \Delta x / v$  mentre nel vuoto il tempo sarebbe stato  $t_1 = \Delta x / c$ . Dall'uscita della lastra l'onda è in ritardo di

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta x \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\Delta x}{c} (n - 1)$$

rispetto alla situazione senza la lastra. Nel generico punto a valle l'equazione dell'onda, adottando la stessa origine del tempo che utilizzeremmo in assenza di lastra, risulta

$$E = E_0 \cos [kx - \omega(t + \Delta t)] = E_0 \cos \left[ kx - \omega t - \frac{\omega}{c} (n - 1) \Delta x \right];$$

l'onda appare sfasata in ritardo di

$$\delta = \frac{\omega}{c} (n - 1) \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \Delta x \quad (13.73)$$

rispetto al caso in cui fosse  $\Delta x = 0$ .

Se  $\delta$  è piccolo, perché  $n$  è poco diverso da 1 o perché la lastra è molto sottile, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(kx - \omega t - \delta) = E_0 \cos(kx - \omega t) \cos \delta + E_0 \sin(kx - \omega t) \sin \delta \\ &= E_0 \cos(kx - \omega t) + E_0 \delta \sin(kx - \omega t) = E_0 \cos(kx - \omega t) + E_0 \delta \cos \left( kx - \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Al limite l'onda incidente viene modificata da un contributo infinitesimo, sfasato di  $\pi/2$ . In sostanza questi calcoli mostrano come lo sfasamento misurato, che è in perfetto accordo con (13.73), possa essere formalmente attribuito a una variazione della velocità di fase; però l'effetto è dovuto al sovrapporsi di piccoli contributi, aventi la stessa velocità dell'onda incidente, ma in quadratura di fase con questa, così che l'onda risultante ha una fase che varia gradualmente avanzando nel mezzo.

# Riflessione e rifrazione delle onde



## 14.1 Introduzione

Le velocità di propagazione dei vari tipi di onde che abbiamo finora considerato dipende da proprietà fisiche del mezzo in cui avviene la propagazione. Dobbiamo pertanto aspettarci che nel passaggio di un'onda da un mezzo ad un altro la velocità di propagazione cambi; si osserva che in corrispondenza cambia di norma la direzione di propagazione (fenomeno della *rifrazione*) e che insieme alla rifrazione si verifica la *riflessione* dell'onda.

La situazione generale è dunque la seguente: l'incidenza di un'onda sulla superficie di separazione tra due mezzi dà origine a un'*onda riflessa* che si propaga all'indietro nello stesso mezzo in cui si propaga l'onda incidente e ad un'*onda rifratta* che si propaga nel secondo mezzo. Quest'onda è detta anche *trasmessa*, dal primo al secondo mezzo, e noi utilizzeremo indifferentemente i due termini.

Le relazioni che legano la direzione dell'onda riflessa e quella dell'onda trasmessa alla direzione dell'onda incidente saranno ricavate nel paragrafo 14.3 e risulteranno *indipendenti* dalla natura dell'onda. Invece le relazioni che legano l'ampiezza dell'onda incidente  $\xi$ , all'ampiezza dell'onda riflessa  $\xi_r$ , e all'ampiezza dell'onda trasmessa  $\xi_t$ , dipendono dalla natura dell'onda; esse saranno dedotte nel paragrafo 14.4.

Sebbene riflessione e rifrazione si verifichino con tutti i tipi di onde, noi ci occuperemo soprattutto del caso delle onde elettromagnetiche luminose in quanto la riflessione e la rifrazione della luce sono alla base dell'*ottica geometrica* (trattata nel capitolo 17). È questo il ramo della fisica che si occupa della propagazione della luce in uno o più mezzi trasparenti e delle proprietà degli strumenti ottici.

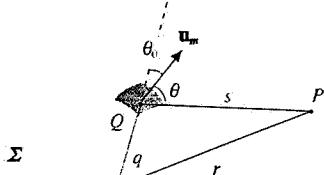
Nel paragrafo 14.2 enunceremo senza dimostrazione il *teorema di Kirchhoff*, che fornisce la formulazione matematica di un *postulato* introdotto originariamente da *Huygens* e modificato da *Fresnel*. Questo teorema può essere assunto come base di tutti i fenomeni che si incontrano nella propagazione delle onde, fenomeni che comprendono non solo la riflessione e la rifrazione, ma anche l'interferenza e la diffrazione, trattate nei capitoli 15 e 16.

## 14.2 Teorema di Kirchhoff. Principio di Huygens-Fresnel

Il *teorema di Kirchhoff* afferma che la perturbazione  $\xi_P(t)$  prodotta da un insieme di sorgenti in un punto  $P$  si può calcolare, pur ignorando la distribuzione spaziale delle sorgenti, quando, data una superficie chiusa  $\Sigma$  arbitraria che racchiude le sorgenti, si conoscano i valori di  $\xi$  e della sua derivata normale  $\partial\xi / \partial n$  in tutti i punti di  $\Sigma$ ; per derivata normale si intende la variazione di  $\xi$  per uno spostamento normale alla superficie.

Più precisamente, consideriamo la situazione mostrata in figura 14.1. In  $O$  è posta una sorgente puntiforme che produce in un punto qualsiasi  $Q$  della superficie  $\Sigma$  contenente  $O$  la perturbazione (12.50):

$$\xi(q, t) = \frac{\xi_0}{q} \cos(kq - \omega t) = \frac{\xi_0}{q} \cos \omega \left( \frac{q}{v} - t \right) ;$$



$q$  è la distanza di  $Q$  da  $O$ . Nel punto  $P$ , distante  $r$  da  $O$  e  $s$  da  $Q$ , il teorema di Kirchhoff fornisce la seguente espressione della perturbazione:

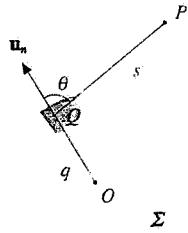
$$\xi_P(r, t) = \frac{\xi_0}{2\lambda} \oint \frac{1}{qs} (\cos \theta_0 + \cos \theta) \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] d\Sigma . \quad (14.1)$$

Figura 14.1

Nella (14.1)  $d\Sigma$  è l'elemento di superficie situato nell'intorno di  $Q$ .  $\theta_0$  e  $\theta$  gli angoli che  $OQ$  e  $QP$  formano con il versore  $u_n$  normale a  $d\Sigma$  e orientato verso l'esterno.  $\lambda$  è la lunghezza d'onda.

Nel caso specifico l'integrale a secondo membro della (14.1) deve portare al risultato

$$\xi_P(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t)$$



e possono nascere dubbi sull'effettiva utilità di (14.1). In realtà questa formula ha conseguenze molto importanti, come ora discutiamo in un caso di grande interesse.

Supponiamo che  $\Sigma$  coincida con una superficie d'onda sferica di raggio  $q$  emessa dalla sorgente  $O$ , posta quindi nel centro di  $\Sigma$  (figura 14.2); in questa ipotesi  $\theta_0 = 0$  e ponendo

Figura 14.2

$$A = \frac{\xi_0}{\lambda q} , \quad f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} ,$$

la (14.1) si scrive

Teorema di Kirchhoff

$$\xi_P(r, t) = \oint \frac{A}{s} f(\theta) \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] d\Sigma .$$

La quantità

$$d\xi_P = \frac{A}{s} f(\theta) d\Sigma \cos \left[ k(q+s) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] \quad (14.2)$$

rappresenta un'onda sferica infinitesima, dove con questo termine intendiamo un'onda emessa dall'elemento infinitesimo di superficie  $d\Sigma$  e avente ampiezza infinitesima

$$dA^* = \frac{A}{s} f(\theta) d\Sigma = \xi_0 \frac{f(\theta) d\Sigma}{\lambda q s} , \quad (14.3)$$

con la dipendenza  $1/s$  tipica delle onde sferiche.

Nella fase dell'onda infinitesima, che ha la struttura generale (12.11), il termine spaziale  $k(q+s)$  corrisponde alla schematizzazione di una propagazione da  $O$  a  $Q$  e da  $Q$  a  $P$ ; inoltre è presente uno sfasamento fisso di  $\pi/2$  in *anticipo* rispetto all'onda primaria emessa dalla sorgente.

La funzione  $f(\theta)$ , detta *fattore di obliquità* o di *inclinazione*, implica una dipendenza dell'ampiezza dell'onda infinitesima dalla direzione di emissione: l'ampiezza assume il valore massimo  $A d\Sigma / s$  per  $\theta = 0$  e diminuisce monotonicamente al crescere dell'angolo  $\theta$  fino ad annullarsi per  $\theta = \pi$ , come mostrato in figura 14.3. In ciascun punto di  $\Sigma$  non si ha cioè un'onda infinitesima che si propaga verso la sorgente  $O$ .

L'insieme dei risultati si riassume nel modo seguente: *ogni elemento  $d\Sigma$  di una superficie d'onda  $\Sigma$  si può considerare formalmente come una sorgente di onde secondarie sferiche la cui ampiezza, proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria e all'area  $d\Sigma$ , varia con l'angolo secondo la funzione  $f(\theta)$ . La perturbazione prodotta in un punto  $P$  si può sempre ottenere come sovrapposizione di tutte le onde sferiche elementari che raggiungono  $P$ .*

Tale enunciato costituisce la formulazione moderna del *principio di Huygens-Fresnel*, introdotto empiricamente per interpretare i fenomeni osservati nella propagazione delle onde elastiche; la giustificazione formale e l'aspetto analitico vengono appunto dal teorema di Kirchhoff (14.1).

Il principio di Huygens-Fresnel è uno *strumento di calcolo* molto utile: esso consente di determinare un nuovo fronte d'onda ad un certo istante a partire da un fronte d'onda precedente, sia quando l'onda si propaga liberamente, sia quando essa viene limitata da un ostacolo impenetrabile.

Nel caso che l'onda si muova attraverso lo spazio libero, noto all'istante  $t$  il fronte d'onda  $\Sigma$ , piano o sferico come nelle figure 14.4 e 14.5, per costruire il fronte d'onda  $\Sigma'$  in un istante successivo  $t' > t$  si considerano i punti di  $\Sigma$  come sorgenti di onde sferiche secondarie, emesse tutte nello stesso istante. Per ogni punto si traccia una semicirconferenza di raggio  $v(t' - t) = v \Delta t$  e il nuovo fronte d'onda  $\Sigma'$ , luogo dei punti di egual fase ovvero di eguale differenza di fase rispetto ai punti di  $\Sigma$ , risulta essere l'involucro di tutte queste onde. Con tale costruzione si ritrova un risultato del paragrafo 12.9, quello secondo cui la perturbazione si propaga per raggi rettilinei, normali ai fronti d'onda.

Nel caso che l'onda incontri uno *schermo impenetrabile* all'onda stessa e nel quale sia stata praticata un'apertura si può calcolare il fronte d'onda al di là dell'apertura eliminando le sorgenti che stanno su quella parte del fronte d'onda che non coincide con l'apertura, come mostrato nella figura 14.6. Se l'*apertura* ha una *larghezza d* grande rispetto alla *lunghezza d'onda*  $\lambda$ , l'onda che emerge dall'apertura conserva la forma del fronte d'onda incidente e possiamo dire che la *propagazione è rettilinea*. Se invece  $d$  è dell'ordine di  $\lambda$  o *inferiore* a  $\lambda$ , la considerazione delle singole onde elementari porta anche qualitativamente a far vedere che l'onda uscente tende a propagarsi in tutte le direzioni. Si dice che l'onda è stata *diffratta* dall'apertura e si comprende come in tal caso non abbia senso parlare di propagazione rettilinea (questa c'è prima e dopo l'apertura, ma non nel passaggio attraverso l'apertura). Tratteremo il fenomeno della diffrazione nel capitolo 16 e vedremo come il teorema di Kirchhoff sia fondamentale, in quanto permette sempre di calcolare l'ampiezza dell'onda diffratta in funzione della direzione di propagazione al di là dell'apertura e del rapporto  $\lambda / d$ .

Concludiamo questo paragrafo osservando che se lungo la direzione di propagazione di un'onda poniamo uno schermo che coincide con un fronte d'onda e su questo schermo pratichiamo  $n$  aperture aventi tutte la stessa area  $\Delta\Sigma$ , otteniamo in base al teorema di Kirchhoff un *sistema di n sorgenti*  $S_1, \dots, S_n$  di onde sferiche, ciascuna di ampiezza (14.3). Preso un punto  $P$  oltre lo schermo che dista  $s_i$  da  $S_i$  e  $s_j$  da  $S_j$ , la differenza di fase in  $P$  delle due onde emesse da  $S_i$  e  $S_j$  risulta

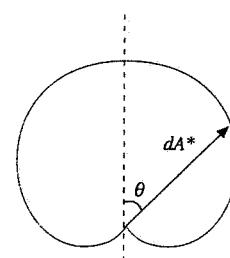


Figura 14.3

Principio di Huygens-Fresnel

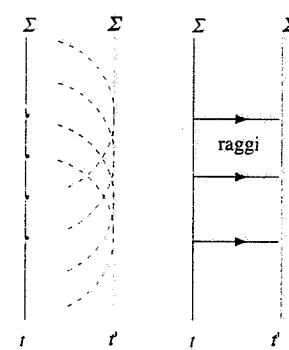


Figura 14.4

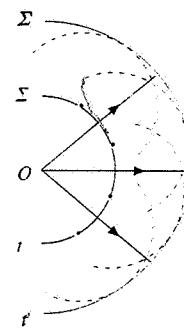


Figura 14.5

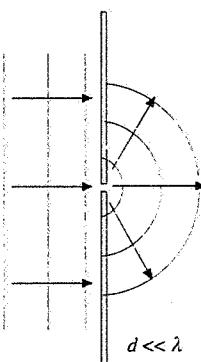
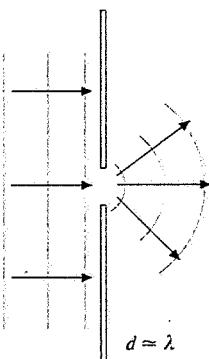
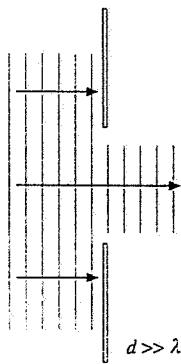


Figura 14.6

$$\phi_{i,j} = \left[ k(q + s_i) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] - \left[ k(q + s_j) - \omega t - \frac{\pi}{2} \right] = k(s_i - s_j)$$

e quindi è *costante nel tempo*; il ragionamento è valido per qualsiasi coppia di sorgenti. Dato che due onde la cui differenza di fase in un punto  $P$  risulti costante nel tempo si dicono *coerenti*, le  $n$  aperture costituiscono un *sistema di sorgenti coerenti*.

### 14.3 Le leggi della riflessione e della rifrazione

Quando un'onda attraversa una superficie di separazione tra due mezzi la sua velocità di propagazione varia. Se l'onda è un'onda armonica, caratterizzata da frequenza  $v$ , pulsazione  $\omega$ , lunghezza d'onda  $\lambda$  e numero d'onde  $k$ , nell'attraversamento della superficie pulsazione e frequenza non variano, in quanto determinate dalla sorgente che ha prodotto l'onda, e di conseguenza variano  $\lambda$  e  $k$ .

Dette  $v_1$  e  $v_2$  le velocità di propagazione dell'onda nei due mezzi, dal paragrafo 12.2 abbiamo

$$\omega = 2\pi v, \quad \lambda_1 v = v_1, \quad \lambda_2 v = v_2, \quad ,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \quad (14.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (14.5)$$

Se ad esempio  $v_1$  è maggiore di  $v_2$  allora  $\lambda_1 > \lambda_2$ : la lunghezza d'onda diminuisce nel passaggio da un mezzo in cui la velocità è maggiore ad uno in cui la velocità è minore.

In particolare, per un'onda elettromagnetica armonica che passi dal vuoto ( $v_1 = c$ ,  $\lambda_1 = \lambda_0$ ,  $k_1 = k_0$ ) ad un mezzo trasparente ( $v_2 = c/n$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ ,  $k_2 = k$ ) valgono le relazioni

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = k_0 n, \quad (14.6)$$

se  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo, che supponiamo maggiore di 1, come avviene per la luce visibile; se è così la *lunghezza d'onda in un mezzo è sempre minore della lunghezza d'onda nel vuoto*.

Consideriamo ora un'onda piana, rappresentata dalla (12.45),

$$\xi_i = \xi_0 \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

che incida lungo la direzione individuata dal vettore  $\mathbf{k}_i$  sulla superficie di separazione tra due mezzi in cui le velocità di propagazione siano  $v_1$  e  $v_2$ . Dall'onda incidente ha origine un'onda riflessa

$$\xi_r = \xi_{0r} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

che si muove nella direzione di  $\mathbf{k}_r$  con velocità  $v_1$  nel primo mezzo, e un'onda rifratta

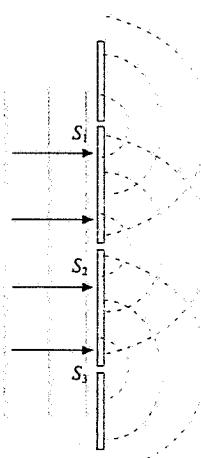


Figura 14.7

$$\xi_r = \xi_{0r} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

che si muove nel secondo mezzo con velocità  $v_2$  lungo la direzione di  $\mathbf{k}_r$ .

Sulla superficie di separazione le *fasi* delle *tre onde* devono risultare in *ogni istante eguali*,  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t$ , e quindi

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} . \quad (14.7)$$

Questa condizione assicura in ogni istante il necessario raccordo tra l'onda incidente, l'onda riflessa e l'onda rifratta.

Supponiamo che la superficie di separazione coincida con il piano  $xy$ , di equazione  $z = 0$ , su cui pertanto si trovano sia l'origine  $O$  che il punto  $P(x, y)$  di incidenza, e che il vettore  $\mathbf{k}_i$  giaccia nel piano  $yz$ . Si tratta di ipotesi che non influenzano i risultati ricavabili da (14.7) in quanto questa, come relazione vettoriale, non dipende dal sistema di riferimento. Scriviamo allora

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y , \quad \mathbf{k}_i = k_{iy} \mathbf{u}_y + k_{iz} \mathbf{u}_z ,$$

$$\mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{u}_x + k_{ry} \mathbf{u}_y + k_{rz} \mathbf{u}_z , \quad \mathbf{k}_t = k_{tx} \mathbf{u}_x + k_{ty} \mathbf{u}_y + k_{tz} \mathbf{u}_z ,$$

e da (14.7) ricaviamo

$$k_{iy} y = k_{rx} x + k_{ry} y = k_{tx} x + k_{ty} y .$$

Queste egualanze devono valere per *qualsiasi valore* di  $x$  e  $y$ , cioè per qualsiasi posizione di  $P$  sul piano, e quindi deve essere:

$$k_{rx} = k_{tx} = 0 , \quad (14.8)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} . \quad (14.9)$$

Definito come *piano di incidenza* il piano ortogonale alla superficie di separazione individuato da  $\mathbf{k}_i$  e da  $\mathbf{u}_z$ , nel nostro caso parallelo al piano  $yz$ , da (14.8) si deduce che anche  $\mathbf{k}_r$  e  $\mathbf{k}_t$  devono stare sul piano di incidenza e si enuncia pertanto la *prima legge della riflessione e della rifrazione*:

1) le direzioni di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda rifratta giacciono nel piano di incidenza, individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie di separazione nel punto di incidenza.

Nella figura 14.10 sono indicati gli angoli  $\theta_i$  di incidenza,  $\theta_r$  di riflessione e  $\theta_t$  di rifrazione, formati dai vettori di propagazione con la normale alla superficie di separazione; osserviamo che tali angoli sono sempre minori di  $\pi/2$ . Da (14.4)

$$k_{iy} = k_i \sin \theta_i = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_i , \quad k_{ry} = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_r , \quad k_{ty} = \frac{\omega}{v_2} \sin \theta_t ,$$

e inserendo in (14.9) troviamo

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r , \quad \frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_t .$$

Poiché gli angoli sono minori di  $\pi/2$  in conclusione troviamo

$$\theta_i = \theta_r , \quad (14.10) \quad \text{Riflessione}$$

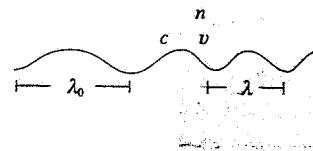


Figura 14.8

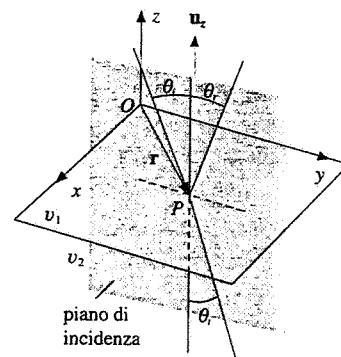


Figura 14.9

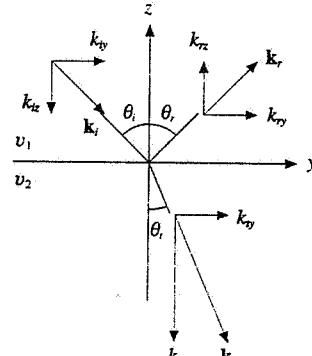


Figura 14.10

## Rifrazione

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (14.11)$$

relazioni che costituiscono la *seconda legge della riflessione e della rifrazione*:

- 2) l'angolo di riflessione è eguale all'angolo di incidenza;
- 3) il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed eguale al rapporto tra le velocità di propagazione.

Queste tre leggi, dedotte da considerazioni sulla continuità della fase dell'onda incidente, riflessa e rifratta, sono valide per tutti i tipi di onde. Se la superficie è curva la costruzione geometrica è la stessa, prendendo come piano  $xy$  il piano tangente alla superficie nel punto di incidenza.

## Esempio 14.1

Dedurre dalle relazioni trovate il legame tra i moduli dei vettori  $\mathbf{k}$  e tra le componenti lungo l'asse  $z$ .

## Soluzione

Sappiamo che  $k_i = \omega / v_1$ ,  $k_r = \omega / v_2$  e  $k_s = \omega / v_2$ : quindi i moduli di  $\mathbf{k}_i$  e  $\mathbf{k}_s$  sono eguali e per le componenti  $z$  si ha  $k_{iz} = -k_{sz}$ . Vediamo poi che

$$k_i v_1 = k_s v_2 \Rightarrow \frac{k_i}{k_s} = \frac{v_2}{v_1},$$

che è la (14.5). Per le componenti  $z$  troviamo

$$k_{iz} = -k_i \cos \theta_i, \quad k_{sz} = k_s \cos \theta_r,$$

$$\Rightarrow \frac{k_{iz}}{k_{sz}} = -\frac{v_2 \cos \theta_i}{v_1 \cos \theta_r} = -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_r \cos \theta_r} = -\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r}.$$

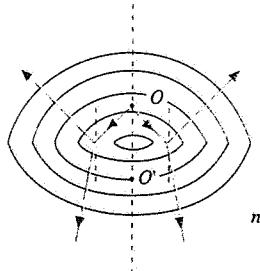


Figura 14.11

Considerando una superficie di separazione piana e un'onda incidente piana che rappresentiamo tramite raggi paralleli, i raggi riflessi sono tra loro paralleli e lo stesso avviene per i raggi rifratti, secondo (14.10) e (14.11): concludiamo così che i *fronti d'onda riflessi e rifratti sono piani*. Il mantenimento della forma del fronte d'onda non si verifica per un'onda sferica incidente sulla superficie piana. Ragionando soltanto per via grafica, come mostrato nella figura 14.11, i raggi riflessi ammettono un centro comune (come se provenissero dal punto  $O'$ ) per cui l'onda riflessa è sferica, anche se ciò non accade per i raggi rifratti: l'onda rifratta non è sferica. Se la superficie di separazione non è piana, la forma d'onda incidente viene in generale alterata, sia in riflessione che in rifrazione.

## Riflessione e rifrazione della luce

Per un'onda luminosa piana che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi trasparenti aventi indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  la (14.11) si può scrivere

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} \frac{n_2}{c} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Uniformando la simbologia scriviamo  $\theta_1 = \theta_i$ ,  $\theta_2 = \theta_r$  con il che

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \quad \text{ovvero} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (14.12) \quad \text{Legge di Snell}$$

Il rapporto  $n_{2,1} = n_2 / n_1$  si chiama *indice di rifrazione relativo del secondo mezzo rispetto al primo*. Nella forma (14.12) la legge di rifrazione della luce è nota come *legge di Snell* e viene enunciata dicendo che il *rappporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed eguale all'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi*.

È bene precisare che la costanza del rapporto (14.12), come del rapporto (14.11), è verificata per un'onda di ben determinata lunghezza d'onda; se cambia la lunghezza d'onda può cambiare il rapporto  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$ , nel caso che il secondo mezzo sia dispersivo. Ritorneremo tra breve sull'argomento.

Osserviamo che la (14.12) può essere assunta come *definizione operativa* dell'indice di rifrazione di una sostanza trasparente relativo ad un mezzo campione, ovvero dell'indice assoluto rispetto al vuoto; per eseguire la misura, che è ricondotta alla misura dei due angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , effettuabile con buona precisione, deve essere possibile definire una superficie di separazione tra il mezzo in esame e il mezzo esterno con indice di rifrazione noto. Il metodo quindi non si applica ai gas, per i quali la misura dell'indice di rifrazione si effettua con grande precisione tramite un dispositivo che vedremo nel paragrafo 15.4. Rimandiamo alla tabella 17.1 del capitolo 17 per i valori numerici dell'indice di rifrazione di alcune sostanze trasparenti alla luce visibile.

Nella legge della riflessione (14.10) non compare alcuna caratteristica del mezzo in cui si propaga l'onda incidente e l'onda riflessa, in particolare non compare l'indice di rifrazione; l'angolo di riflessione è sempre lo stesso, eguale all'angolo di incidenza, qualunque sia la lunghezza d'onda della luce incidente e non c'è dispersione.

Per completezza menzioniamo che le leggi (14.10) e (14.12) sono ricordate anche come *leggi di Cartesio* (Descartes).

### Riflessione totale

Quando un'onda luminosa piana si propaga da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione  $n_2 > n_1$ , da (14.12) si ha

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 < \theta_1 \quad \text{se} \quad n_2 > n_1 .$$

Nell'attraversamento della superficie di separazione la direzione di propagazione dell'onda piana trasmessa si *avvicina* alla normale alla superficie. Ciò si verifica ad esempio quando un fascio di luce che si propaga nel vuoto (o nell'aria che ha anch'essa praticamente  $n = 1$ ) incontra la superficie di una sostanza trasparente con indice di rifrazione  $n$ , come mostrato nella figura 14.12; essendo  $n_1 = 1$  e  $n_2 = n$  la legge della rifrazione si scrive  $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n$ .

Nel caso in cui l'onda passi da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione  $n_2 < n_1$ ,

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \Rightarrow \theta_2 > \theta_1 \quad \text{se} \quad n_2 < n_1 .$$

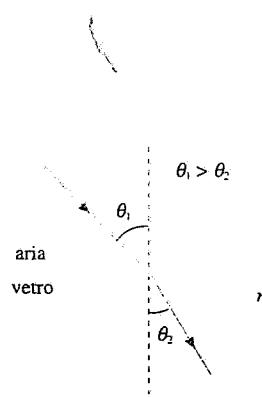


Figura 14.12

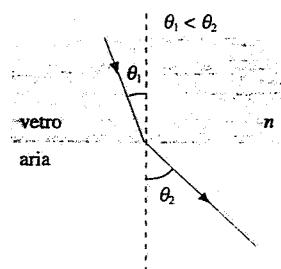


Figura 14.13

La direzione di propagazione dell'onda piana trasmessa si *allontana* dalla normale alla superficie di separazione. Seguendo lo stesso esempio di prima ciò si verifica nel passaggio della luce da un mezzo trasparente ( $n_1 = n$ ) al vuoto o all'aria ( $n_2 = 1$ ) e si ha  $\sin \theta_2 = n \sin \theta_1$ .

La seconda situazione ( $\theta_2 > \theta_1$ ) presenta un *caso limite*, illustrato nella figura 14.14; al crescere dell'angolo di incidenza  $\theta_1$ , l'angolo di trasmissione  $\theta_2$ , che cresce più rapidamente, raggiunge ad un certo punto il valore  $\pi/2$ , precisamente in corrispondenza al valore  $\theta_0$  dell'angolo di incidenza tale che

$$\sin \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} \quad (14.13)$$

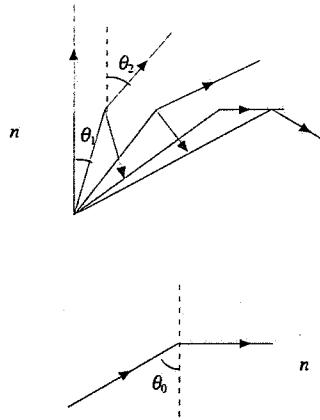


Figura 14.14

Per valori di  $\theta_1$  maggiori di  $\theta_0$  non esistono valori reali di  $\theta_2$  e ciò significa che l'*onda rifratta non si forma* più, ovvero che l'onda incidente è *totalmente riflessa* all'interno del primo mezzo. Il fenomeno si chiama riflessione totale e l'angolo  $\theta_0$  è detto *angolo limite*.

In un vetro con indice di rifrazione  $n_1 = 1.5$  l'angolo limite se il mezzo esterno è l'aria ( $n_2 = 1$ ) è  $\theta_0 = \arcsen(1/1.5) = 41.8^\circ$ , se invece il mezzo esterno è l'acqua ( $n_2 = 1.33$ )  $\theta_0 = \arcsen(1.33/1.5) = 62.7^\circ$ ; per la coppia acqua-aria infine si ha  $\theta_0 = \arcsen(1/1.33) = 48.6^\circ$ .

Un'utilizzazione interessante del fenomeno della riflessione totale si ha nel trasporto di un fascio luminoso lungo un determinato percorso tramite una *guida di luce* costituita ad esempio da un cilindro pieno di vetro o di materiale plastico trasparente immerso in un mezzo con indice di rifrazione inferiore. La luce che penetra nel cilindro attraverso una base incide sulle pareti laterali formando un angolo superiore all'angolo limite e viene riflessa totalmente molte volte, senza apprezzabili perdite, fino ad uscire dall'altra base. La struttura può essere anche curva e, se si usano sottili *fibre di vetro* che sono molto flessibili, in pratica può essere compiuto qualsiasi percorso. Questa tecnica è usata in medicina per l'osservazione di organi interni (*endoscopia*): con un fascio di fibre si convoglia la luce di una sorgente esterna sulla parte da osservare e con un altro fascio si riceve la luce diffusa dalla parte illuminata. Un'altra applicazione importante e in rapido sviluppo si ha nel campo delle *telecomunicazioni*.

#### *Dispersione della luce in un mezzo trasparente*

Nell'enunciare la legge (14.12) della rifrazione abbiamo detto che il rapporto  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  è costante: ciò è rigorosamente vero se la luce incidente ha una sola lunghezza d'onda ovvero, come si dice, se è *monocromatica*. Qualora nel fascio incidente siano contenute più lunghezze d'onda, il secondo membro della (14.12) assume valori diversi per ogni lunghezza d'onda: ad un dato angolo di incidenza corrispondono più angoli di rifrazione.

Se ad esempio un sottile fascio di luce bianca, che contiene tutte le lunghezze d'onda visibili, incide su una lastra di vetro, la luce riflessa è ancora bianca mentre il fascio trasmesso nel vetro è composto da una serie di raggi di colore diverso, ognuno con un diverso angolo di rifrazione (figura 14.16). Nel paragrafo 13.9 abbiamo determinato la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, espressa dalla *legge di Cauchy* (13.62). L'indice diminuisce al crescere della lunghezza d'onda per cui, a parità di  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  è più piccolo per il violetto che per il rosso: il raggio rifratto violetto è più vicino alla normale e quindi è più deviato di quanto lo sia il raggio rosso. È proprio questo aspetto del fenomeno che ha dato origine al termine *dispersione della luce*.

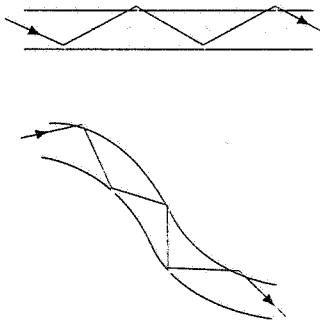


Figura 14.15

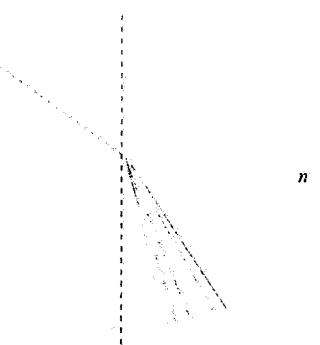


Figura 14.16

**Esempio 14.2**

Un sottile fascio luminoso monocromatico di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.589 \mu\text{m}$  incide con un angolo  $\theta_i = 30^\circ$  su una lastra di vetro flint spessa  $h = 2 \text{ cm}$  e con indice di rifrazione  $n = 1.66$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_0$ . Determinare la posizione del fascio di luce all'uscita dalla lastra. Discutere qualitativamente il caso della luce bianca.

**Soluzione**

La legge di Snell (14.12) applicata alle due superficie della lastra con i simboli della figura 14.17 dà

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin \theta_1, \quad \sin \theta_3 = n \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_3 = \theta_1.$$

La lastra non altera la direzione di propagazione del fascio incidente, ma provoca uno spostamento laterale  $d$  pari a

$$d = \frac{h \sin (\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2},$$

come si verifica facilmente. Tenuto conto che  $\sin (\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$  e che  $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 / n$ , si arriva all'espressione

$$d = h \sin \theta_1 \left( 1 - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right).$$

Numericamente  $d = 4.53 \text{ mm}$ .

Se la luce non è monocromatica, avviene il fenomeno della dispersione e lo spostamento è funzione di  $\lambda$ ,  $d(\lambda)$ : si hanno in uscita vari raggi paralleli di diverso colore. Misurando la funzione  $d(\lambda)$  è possibile ricavare  $n(\lambda)$  e verificare la formula di Cauchy con buona precisione.

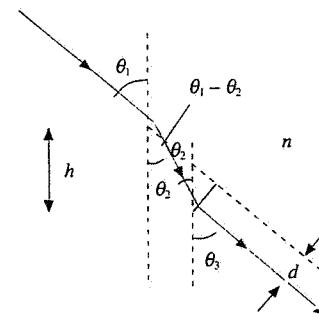


Figura 14.17

**Nota. Deduzione delle leggi della riflessione e della rifrazione dal principio di Huygens-Fresnel**

In figura 14.18  $AB$  è la traccia del fronte d'onda di un'onda piana che incide con angolo di incidenza  $\theta_i$  su una superficie piana di separazione tra due mezzi in cui le velocità di propagazione sono  $v_1$  e  $v_2$ . Poniamo  $t = 0$  nell'istante in cui il punto  $A$  del fronte d'onda incidente si trova sulla superficie di separazione; il punto  $B$  dello stesso fronte d'onda raggiunge la posizione  $C$  sulla superficie di separazione nell'istante  $t = BC/v_1$ . Nello stesso intervallo di tempo l'onda elementare emessa in  $A$  verso il primo mezzo, secondo il principio di Huygens-Fresnel, compie il percorso  $AD = v_1 t = v_1 BC/v_1 = BC$ , mentre l'onda elementare emessa verso il secondo mezzo compie il percorso  $AE = v_2 t = v_2 BC/v_1$ . Pertanto  $D$  e  $C$  da una parte,  $E$  e  $A$  dall'altra sono punti di egual fase, cioè stanno sullo stesso fronte d'onda. Siamo certi che questi fronti d'onda (riflesso e rifratto) sono piani in quanto, pur non conoscendo a priori le leggi che legano tra loro gli angoli di incidenza  $\theta_i$ , riflessione  $\theta_r$  e rifrazione  $\theta_t$ , assumiamo che raggi incidenti paralleli vengano riflessi e rifratti allo stesso modo e cioè restino paralleli dopo la riflessione e dopo la rifrazione. Tali piani sono gli inviluppi delle onde sferiche elementari emesse dai vari punti compresi tra  $A$  e  $C$  raggiunti in istanti successivi dal fronte d'onda  $AB$ .

Consideriamo ora i triangoli  $ABC$  e  $ACD$  della figura 14.19. Essi sono eguali in quanto sono rettangoli e hanno due cateti eguali: ne segue che sono eguali agli angoli al vertice e quindi in particolare  $\theta_r = \theta_t$ . Dai triangoli  $ABC$  e  $ACE$  si ricava

$$\sin \theta_i = \frac{BC}{AC}, \quad \sin \theta_r = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{BC}{AE} = \frac{t v_1}{t v_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Abbiamo così ritrovato le relazioni (14.10) e (14.11).

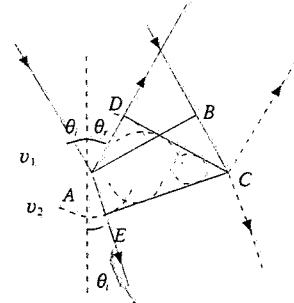


Figura 14.18

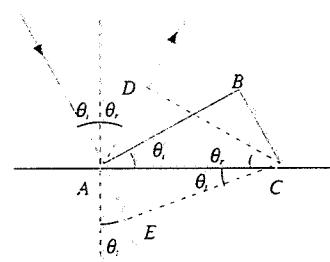


Figura 14.19

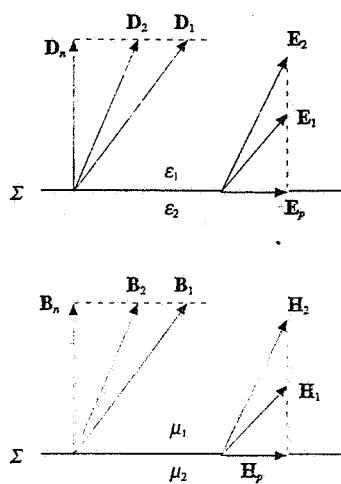


Figura 14.20

#### 14.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte. Formule di Fresnel

Nel paragrafo 14.3 abbiamo visto le relazioni geometriche tra le direzioni di propagazione dell'onda elettromagnetica incidente, riflessa e rifratta, indipendenti dall'ampiezza dell'onda incidente:

$$\theta_i = \theta_r , \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2(\omega)}{n_1(\omega)} = \sqrt{\frac{\kappa_2(\omega)}{\kappa_1(\omega)}} . \quad (14.14)$$

L'ultima eguaglianza sfrutta la relazione (13.10), ovvero (13.54), tra indice di rifrazione  $n(\omega)$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_e(\omega)$ .

Le relazioni tra le ampiezze si ricavano dalle equazioni di Maxwell, precisamente dalle condizioni di continuità dei campi, già derivate a partire dalle suddette equazioni. Ricordiamo che dati due dielettrici omogenei e isotropi, di costanti dielettriche  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \kappa_1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \kappa_2$  e permeabilità magnetiche  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , è possibile stabilire relazioni tra le componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , dell'induzione dielettrica  $\mathbf{D}$ , del campo magnetico  $\mathbf{B}$  e del campo  $\mathbf{H}$  in un mezzo e nell'altro, in punti molto vicini alla superficie di separazione  $\Sigma$  tra i mezzi. Individuando col simbolo  $p$  le componenti parallele a  $\Sigma$  e col simbolo  $n$  le componenti normali, si ha

$$\frac{D_{1,p}}{\epsilon_0 \kappa_1} = E_{1,p} = E_{2,p} = \frac{D_{2,p}}{\epsilon_0 \kappa_2} , \quad H_{1,n} = \frac{B_{1,p}}{\mu_1} = \frac{B_{2,p}}{\mu_2} = H_{2,p} , \quad (14.15)$$

$$D_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_1 E_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_2 E_{2,n} = D_{2,n} , \quad B_{1,n} = \mu_1 H_{1,n} = \mu_2 H_{2,n} = B_{2,n} ;$$

sono cioè continue le componenti parallele di  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e le componenti normali di  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , discontinue le altre. Le relazioni (14.15) sono state ricavate nei paragrafi 5.7, 9.5 e valgono sia nei casi statici che nei casi *dinamici*, cioè quando i campi dipendono dal tempo.

Se sulla superficie  $\Sigma$  incide un'onda elettromagnetica piana

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0,i} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

essa dà origine ad un'onda riflessa e un'onda trasmessa,

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0,r} \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) , \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0,t} \sin(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t) .$$

Su  $\Sigma$  l'onda riflessa si somma all'onda incidente dando il campo elettrico risultante nel primo mezzo,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ ; nel secondo mezzo il campo elettrico vale  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$ . Analoghe relazioni valgono per i campi magnetici,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t$ . A questi campi, e ai campi ausiliari  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$ , si applicano le relazioni (14.15).

Dal momento che sulla superficie  $\Sigma$  la fase di tutte le onde implicate è la stessa, le (14.15) si trasformano in relazioni tra le ampiezze dei campi incidenti, riflessi e rifratti.

#### Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate nel piano di incidenza

Nella figura 14.21 è indicata la situazione particolare in cui il campo elettrico incidente è *polarizzato rettilineamente nel piano  $\pi$  di incidenza*; dimostriamo innanzitutto che, come mostrato in figura, il *campo elettrico riflesso* e quello *rifratto* sono anch'essi *polarizzati nel piano  $\pi$* . Per ipotesi il campo magnetico  $\mathbf{B}_i$  è

ortogonale al disegno e rivolto verso il lettore; inoltre il campo  $\mathbf{B}$  è continuo nel passaggio attraverso  $\Sigma$  in quanto assumiamo trascurabili le proprietà magnetiche dei dielettrici ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ). Dunque  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_r$ . Allora se  $\mathbf{B}_r$ , pur restando ortogonale alla direzione di propagazione del raggio riflesso, non fosse ortogonale al piano  $\pi$  acquistando ad esempio una componente  $B^*$  nel piano  $\pi$ , anche  $\mathbf{B}_r$  per continuità dovrebbe acquistare la stessa componente e non risulterebbe più ortogonale alla direzione di propagazione del raggio rifratto (figura 14.22). Quindi  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{B}_i$  devono essere ortogonali a  $\pi$  come  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{E}_r$  ed  $\mathbf{E}_i$  devono stare su  $\pi$ .

Chiamiamo  $E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^r, E_{0,\pi}^t$  le ampiezze dei campi e applichiamo le (14.15):

$$E_{0,\pi}^i \cos \theta_i - E_{0,\pi}^r \cos \theta_i = E_{0,\pi}^t \cos \theta_i .$$

$$\kappa_1 E_{0,\pi}^i \sin \theta_i + \kappa_1 E_{0,\pi}^r \sin \theta_i = \kappa_2 E_{0,\pi}^t \sin \theta_i .$$

Tenuto conto della (14.14)  $\kappa_2 / \kappa_1 = (n_2 / n_1)^2 = (\sin \theta_i / \sin \theta_r)^2$ , si ricava per le ampiezze incognite  $E_{0,\pi}^r = r_\pi E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^t = t_\pi E_{0,\pi}^i$ , con

$$r_\pi = \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_r \cos \theta_r}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_r)}{\tan(\theta_i + \theta_r)} , \quad (14.16)$$

$$t_\pi = \frac{E_{0,\pi}^t}{E_{0,\pi}^i} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r) \cos(\theta_i - \theta_r)} .$$

Le (14.16), dette *formule di Fresnel nel piano  $\pi$* , definiscono i coefficienti  $r_\pi$  e  $t_\pi$  che permettono di calcolare a partire dall'ampiezza incidente le ampiezze riflesse e rifratte: essi dipendono soltanto dall'angolo di incidenza e dall'angolo di rifrazione, ovvero dall'angolo di incidenza e dall'indice di rifrazione relativo.

Ciascuna delle onde considerate ha un'intensità data da (13.26),

$$I_\pi^i = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^i)^2 , \quad I_\pi^r = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^r)^2 , \quad I_\pi^t = \frac{n_2}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^t)^2 ,$$

e una corrispondente potenza che scriviamo

$$W_\pi^i = \Sigma_i I_\pi^i , \quad W_\pi^r = \Sigma_r I_\pi^r = , \quad W_\pi^t = \Sigma_t I_\pi^t .$$

$\Sigma_i$  è la sezione del fascio incidente: la sezione del fascio riflesso è eguale,  $\Sigma_r = \Sigma_i$ , come si deduce dalla figura 14.23. mentre per la sezione del fascio trasmesso si ha:

$$\Sigma_t = \Sigma_0 \cos \theta_i , \quad \Sigma_i = \Sigma_0 \cos \theta_r \Rightarrow \frac{\Sigma_i}{\cos \theta_i} = \frac{\Sigma_i}{\cos \theta_r} \Rightarrow \frac{\Sigma_i}{\Sigma_r} = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} .$$

La percentuale di potenza riflessa è

$$\frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = \frac{\Sigma_r I_\pi^r}{\Sigma_i I_\pi^i} = \left( \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} \right)^2 = r_\pi^2$$

e questo rapporto si chiama *coefficiente di riflessione* nel piano  $\pi$ :

$$R_\pi = \frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = r_\pi^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)} \quad (14.17)$$

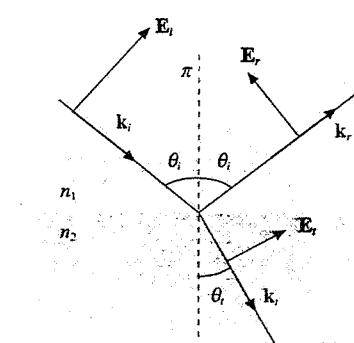


Figura 14.21

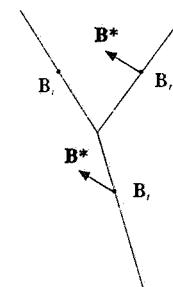


Figura 14.22

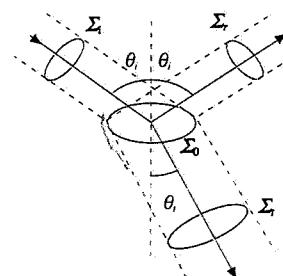


Figura 14.23

Coefficiente di riflessione  
nel piano  $\pi$

In modo analogo si procede per la percentuale di potenza trasmessa, facendo attenzione al fatto che  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_i$  non sono eguali:

$$\frac{W_\pi^t}{W_\pi^i} = \frac{\Sigma_t I_\pi^t}{\Sigma_i I_\pi^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} \left( \frac{E_{0,\pi}^t}{E_{0,\pi}^i} \right)^2 = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 ;$$

il coefficiente di trasmissione nel piano  $\pi$  è quindi

Coefficiente di trasmissione  
nel piano  $\pi$

$$T_\pi = \frac{W_\pi^t}{W_\pi^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_i) \cos^2(\theta_i - \theta_i)} \quad (14.18)$$

Si verifica che

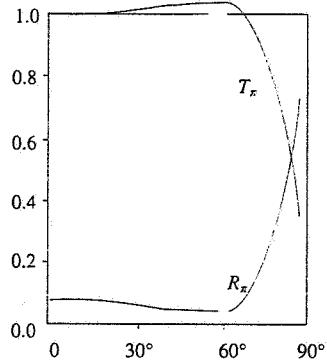


Figura 14.24

in accordo con il principio di conservazione dell'energia. Nella pratica si approfitta di (14.19) per calcolare solo  $R_\pi$  e ottenerne  $T_\pi$  come  $1 - R_\pi$ , o viceversa.

La figura 14.24 mostra  $R_\pi$  e  $T_\pi$  in funzione di  $\theta_i$  nel caso aria-vetro ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$ ). La maggior parte della luce viene trasmessa, salvo che per angoli di incidenza vicini a  $90^\circ$ . Si nota che per un particolare valore di  $\theta_i$  non c'è luce riflessa; e infatti analizzando le (14.16) si trova che  $r_\pi$  può essere nullo, mentre  $t_\pi$  non si annulla mai. Torneremo per esteso su questo punto nel seguito del paragrafo. Vedremo anche cosa succede se  $\theta_i = \theta_r = 0$ .

#### Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate ortogonalmente al piano di incidenza

Supponiamo ora che il campo elettrico incidente sia polarizzato rettilineamente ortogonalmente al piano di incidenza  $\pi$ . Nella figura 14.25 il campo elettrico è rivolto verso il lettore e il campo magnetico è orientato di conseguenza, in accordo con (13.9). Anche in questo caso si dimostra che i campi elettrici riflesso e rifratto mantengono la polarizzazione del campo elettrico incidente, per cui i campi magnetici stanno tutti su  $\pi$ . Dalle (14.15) si ha, per le componenti parallele e normali di  $\mathbf{B}$ ,

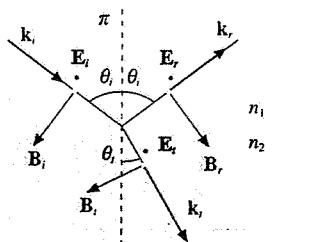


Figura 14.25

$$-\frac{B_{0,\pi}^i}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{B_{0,\pi}^r}{\mu_1} \cos \theta_i = -\frac{B_{0,\pi}^i}{\mu_2} \cos \theta_i , \\ B_{0,\pi}^i \sin \theta_i + B_{0,\pi}^r \sin \theta_i = B_{0,\pi}^i \sin \theta_i .$$

Dato che in modulo  $B = E / v$  e che con ottima approssimazione  $\mu_1 = \mu_2$ , ricaviamo per i campi elettrici

$$-E_{0,\sigma}^i \cos \theta_i + E_{0,\sigma}^r \cos \theta_i = -v_1/v_2 E_{0,\sigma}^i \sin \theta_i .$$

$$E_{0,\sigma}^i \sin \theta_i + E_{0,\sigma}^r \sin \theta_i = v_1/v_2 E_{0,\sigma}^i \sin \theta_i ;$$

col simbolo  $\sigma$  indichiamo che il campo elettrico è parallelo ad un piano  $\sigma$  ortogonale al piano di incidenza  $\pi$ . Tenuto conto di (14.11) e (14.12) si ottiene  $E_{0,\sigma}^r = r_\sigma E_{0,\sigma}^i$ ,  $E_{0,\sigma}^r = t_\sigma E_{0,\sigma}^i$ , con i coefficienti dati dalle formule di Fresnel nel piano  $\sigma$ :

$$r_\sigma = \frac{E_{0,\sigma}'}{E_{0,\sigma}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_r}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} = -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_r \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_i} = -\frac{\sin (\theta_i - \theta_r)}{\sin (\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.20)$$

$$t_\sigma = \frac{E_{0,\sigma}'}{E_{0,\sigma}} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_r} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_r \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin (\theta_i + \theta_r)}.$$

Procedendo esattamente come nel caso precedente si trovano le espressioni per i coefficienti di riflessione e di trasmissione nel piano  $\sigma$ :

$$R_\sigma = \frac{W_\sigma'}{W_\sigma^i} = \frac{I_\sigma'}{I_\sigma^i} = r_\sigma^2 = \frac{\sin^2 (\theta_i - \theta_r)}{\sin^2 (\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.21)$$

Coefficienti di riflessione  
e trasmissione nel piano  $\sigma$

$$T_\sigma = \frac{W_\sigma'}{W_\sigma^i} = \frac{\Sigma_i I_\sigma'}{\Sigma_i I_\sigma^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\sigma^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_r}{\sin^2 (\theta_i + \theta_r)}, \quad (14.22)$$

$$R_\sigma + T_\sigma = 1 \Rightarrow r_\sigma^2 + \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} t_\sigma^2 = 1. \quad (14.23)$$

Il coefficiente di riflessione  $R_\sigma$  è maggiore di  $R_\pi$ , come si vede confrontando le figure 14.26 e 14.24, ma anche in questo caso la trasmissione è predominante. Inoltre entrambi i coefficienti  $r_\sigma$  e  $t_\sigma$  sono sempre diversi da zero.

Discussiamo brevemente il segno dei coefficienti  $r_\pi$ ,  $t_\pi$ ,  $r_\sigma$ ,  $t_\sigma$  definiti dalle formule di Fresnel (14.16) e (14.20). I coefficienti  $t_\pi$  e  $t_\sigma$  sono sempre positivi, indicando che i campi elettrici trasmessi hanno proprio il verso disegnato nelle figure 14.21 e 14.25. Il coefficiente  $r_\sigma$  ha sempre lo stesso segno, che è negativo se  $n_1 < n_2$  e positivo se  $n_1 > n_2$ . Infine il coefficiente  $r_\pi$  al crescere di  $\theta_i$  è dapprima positivo, poi si annulla e diventa negativo, se  $n_1 < n_2$ , e ha un comportamento esattamente contrario come segno se  $n_1 > n_2$ . Un segno negativo significa che il campo elettrico in questione ( $E_\pi'$  o  $E_\sigma'$ ) ha verso opposto a quello fissato nelle figure.

Nel caso  $n_1 > n_2$  bisogna ricordare che superato l'angolo limite si ha solo riflessione, nel caso  $n_1 < n_2$  tutto l'intervallo da zero a  $\pi/2$  è disponibile per trasmissione e riflessione, escluso il valore estremo  $\theta_i = \pi/2$  in cui l'onda prosegue indisturbata e la nostra trattazione non si applica.

Per concludere citiamo una proprietà generale dei coefficienti di Fresnel. Supponiamo di avere il passaggio di un'onda piana luminosa dal mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  al mezzo con indice di rifrazione  $n_2$ :  $\theta_i$  è l'angolo di incidenza,  $\theta_r$  l'angolo di rifrazione,  $r_1$  e  $t_1$  i coefficienti di Fresnel (nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$ ). Se invece l'onda si propaga dal mezzo con  $n_2$  al mezzo con  $n_1$  e l'angolo di incidenza è  $\theta_r$ , l'angolo di trasmissione vale  $\theta_i$ , come si è già notato. In tal caso è immediato provare che i coefficienti  $r_2$  e  $t_2$  sono legati ai precedenti dalle relazioni

$$r_2 = -r_1, \quad t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - r_2^2,$$

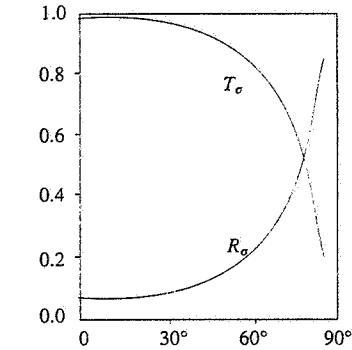


Figura 14.26

Relazioni di Stokes

dette *relazioni di Stokes*, valide sia nel piano  $\pi$  che nel piano  $\sigma$ . Un'utile applicazione si ha nell'attraversamento di una lastra a facce piane e parallele (esempio 14.4).

È bene sottolineare che le relazioni di Stokes non sono valide se l'angolo di incidenza nei due casi è lo stesso, a meno che non si tratti di incidenza normale,  $\theta_i = \theta_r = 0$ .

Passando ai coefficienti di riflessione e trasmissione si ha

$$R_1 = R_2, \quad T_1 = 1 - R_1 = T_2 = 1 - R_2.$$

**Nota. Intensità trasmessa nella riflessione totale**

Nel paragrafo 14.3 abbiamo trattato la riflessione totale soltanto da un punto di vista geometrico; riprendiamo adesso l'argomento considerando i campi e l'intensità. Secondo (14.8)  $k_n = 0$  e perciò il valore del vettore di propagazione dell'onda trasmessa obbedisce alla relazione

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{v_i^2} = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = k_n^2 + k_{\perp}^2 .$$

Sappiamo poi da (14.9) che

$$k_n = k_i = \frac{\omega}{v_i} \sin \theta_i = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i ,$$

per cui

$$k_{\perp}^2 = k_i^2 - k_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) .$$

L'angolo limite della riflessione totale è definito dalla (14.13).  $n_2 = n_1 \sin \theta_0$ ; per valori  $\theta_i > \theta_0$  è  $n_2 < n_1 \sin \theta_i$ , di conseguenza  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i$  è minore di zero e  $k_{\perp}$  risulta immaginario puro.

Poniamo pertanto  $k_{\perp} = i |k_{\perp}|$  e scriviamo il campo elettrico trasmesso nella notazione simbolica:

$$E_t = E_{0,t} e^{i(k_i \cdot r - \omega t)} = E_{0,t} e^{i(k_n y + k_{\perp} z - \omega t)} = E_{0,t} e^{-i k_{\perp} z} e^{i(k_n y - \omega t)} .$$

L'ampiezza del campo è smorzata esponenzialmente, con una lunghezza di smorzamento pari a  $1/|k_{\perp}|$ . Dato che  $|k_{\perp}|$  non è molto diverso da  $2\pi/\lambda$ , a distanza  $z = \lambda$  dalla superficie di separazione il campo trasmesso è praticamente nullo.

Ad esempio, nel passaggio vetro-aria ( $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$ ) con  $\theta_i = 45^\circ$  si ha

$$\frac{1}{|k_{\perp}|} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} = 0.45 \lambda .$$

Con  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ , a distanza  $z = 5 (0.45 \lambda) = 2.25 \lambda = 1.35 \mu\text{m}$  l'ampiezza è ridotta a  $6.7 \cdot 10^{-3} E_{0,t}$ .

Per l'intensità la lunghezza di assorbimento è  $\frac{1}{2} |k_{\perp}|$ , pari a  $\sim 0.2 \lambda$  nel caso numerico appena visto.

La verifica sperimentale dell'esistenza dell'onda trasmessa in una regione di profondità circa eguale alla lunghezza d'onda è stata fatta accostando parallelamente ad una interfaccia piana vetro-aria un'altra interfaccia piana aria-vetro. Si illumina la prima interfaccia in condizioni di riflessione totale e si osserva trasmissione di luce attraverso il sottile strato d'aria, con la prevista decrescita esponenziale in funzione dello spessore d'aria. Le due superficie di vetro affacciate devono essere accuratamente lavorate, con una deviazione dal piano ideale ben al di sotto di  $\lambda$ , cioè di  $0.5 \mu\text{m}$ . Chiaramente l'esperimento è più facile operando con microonde ( $\lambda \approx 1 \text{ cm}$ ), le quali presentano anch'esse il fenomeno della riflessione totale, ad esempio nel passaggio paraffina-aria.

**Incidenza normale alla superficie di separazione**

Quando l'angolo di incidenza è nullo la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde significato. I campi elettrici dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa sono paralleli tra loro e alla superficie e le (14.15) si riducono all'unica condizione

$$E_1 = E_i + E_r = E_2 = E_t .$$

Inoltre, per la conservazione dell'energia,

$$I_i = I_r + I_t \Rightarrow n_1 E_i^2 = n_1 E_r^2 + n_2 E_t^2 .$$

Questo sistema di due equazioni in due incognite ammette la soluzione

$$E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i , \quad E_t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} E_i$$

e le formule di Fresnel sono

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} , \quad t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} \quad (14.24)$$

Mentre  $t$  è sempre positivo ( $E_t$  concorde a  $E_i$ ),  $r$  è negativo se  $n_1 < n_2$  e positivo se  $n_1 > n_2$ . Nel primo caso, che si verifica ad esempio nel passaggio aria-vetro, aria-acqua, acqua-vetro, il campo elettrico riflesso è opposto al campo elettrico incidente, nel secondo caso (passaggio inverso) il campo riflesso è concorde al campo incidente. Le due situazioni sono mostrate nella figura 14.27. Il segno negativo di  $E_r$  si elimina aggiungendo  $\pi$  alla fase (geometricamente si rende conto così della rotazione di  $\pi$  di  $E_r$  rispetto a  $E_i$ ) e il risultato si enuncia in questo modo: in condizioni di incidenza normale il campo elettrico riflesso alla superficie di separazione tra un mezzo meno rifrangente e un mezzo più rifrangente è sfasato di  $\pi$  rispetto al campo elettrico incidente, mentre se la riflessione avviene da un mezzo più rifrangente ad uno meno rifrangente il campo riflesso è in fase col campo incidente. In base a (13.9) il campo magnetico segue un comportamento opposto a quello del campo elettrico. Vedremo una conseguenza interessante di questi risultati nei fenomeni di interferenza trattati nel paragrafo 15.7.

I coefficienti di riflessione e di trasmissione in condizioni di incidenza normale sono:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 ,$$

$$T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (14.25)$$

Si verifica subito che

$$\left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = R + T = 1 .$$

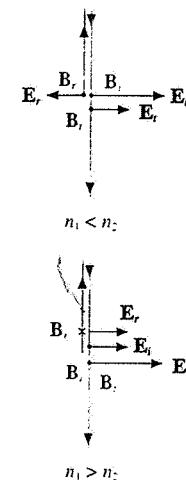


Figura 14.27

Notiamo che le formule (14.25) danno lo stesso risultato per il passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e per il passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ : le percentuali di energia riflessa e trasmessa sono le stesse nei due casi, non dipendendo il risultato dalla fase dei campi. Questa simmetria non esiste più se  $\theta_i \neq 0$ ; il risultato è in accordo con le relazioni di Stokes prima discusse.

Per renderci conto dei valori in gioco esaminiamo due casi comuni:

$$\begin{array}{lllllll} \text{aria-vetro} & n_1 = 1 & n_2 = 1.5 & r = -0.2 & t = 0.8 & R = 0.04 & T = 0.96 \\ \text{aria-acqua} & n_1 = 1 & n_2 = 1.33 & r = -0.143 & t = 0.857 & R = 0.02 & T = 0.98 \end{array}$$

Solo una piccola parte percentuale di energia viene riflessa, la maggior parte è trasmessa.

I risultati trovati continuano a valere approssimativamente per piccoli angoli di incidenza e si possono ottenere anche dalle formule già ricavate nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$  ponendo  $\cos\theta \approx 1$  e  $\sin\theta \approx \theta$ .

### Intensità riflessa e rifratta. Caso generale

Le situazioni di riflessione e rifrazione finora discusse hanno una caratteristica in comune: negli stati finali la luce conserva la polarizzazione che aveva nello stato iniziale. Un'onda incidente polarizzata rettilineamente nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$  dà luogo a due onde, riflessa e rifratta, polarizzate entrambe rettilineamente nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$ . Nel caso di incidenza normale il risultato non dipende in alcun modo dal piano di vibrazione istantaneo del campo elettrico incidente e quindi le onde, riflessa e rifratta, hanno la stessa polarizzazione dell'onda incidente o non sono polarizzate se questa non è polarizzata.

In generale, data un'onda incidente con  $\theta_i \neq 0$  e non polarizzata in  $\pi$  o in  $\sigma$ , il calcolo della polarizzazione e dell'intensità per l'onda riflessa e per l'onda rifratta si può eseguire ricorrendo a quanto abbiamo discusso nei paragrafi 13.2, 13.3 e sintetizzato nella tabella 13.1. Si considera la scomposizione dell'onda incidente in due componenti nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$ ,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\pi^i + \mathbf{E}_\sigma^i, \quad I_i = I_\pi + I_\sigma,$$

con relazione di fase definita se l'onda è polarizzata e casuale se l'onda non è polarizzata. A ciascuna componente incidente si applicano le formule appena ricavate di modo che si calcolano le componenti riflesse e le componenti rifratte sia nel piano  $\pi$  che nel piano  $\sigma$ ; queste vengono ricomposte per dare l'onda riflessa e l'onda rifratta. Siccome il comportamento in  $\pi$  e in  $\sigma$  è diverso, non possiamo attenderci a priori che nella ricomposizione si riproducano le caratteristiche dell'onda incidente.

Seguendo la procedura già adottata nei piani  $\pi$  e  $\sigma$  possiamo scrivere subito i coefficienti di riflessione e di trasmissione, che sono definiti allo stesso modo anche nel caso generale:

$$R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2, \quad T = \frac{W_t}{W_i} = \frac{\cos\theta_i I_i}{\cos\theta_i I_i} = \frac{n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i} \left( \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} \right)^2. \quad (14.26)$$

I moduli e le componenti dei campi elettrici incidente, riflesso e rifratto sono:

$$E_{0,i}(E_{0,\pi}^i, E_{0,\sigma}^i), \quad E_{0,r}(E_{0,\pi}^r, E_{0,\sigma}^r), \quad E_{0,t}(E_{0,\pi}^t, E_{0,\sigma}^t).$$

Ricorriamo ai coefficienti  $r_\pi$ ,  $r_\sigma$ ,  $t_\pi$ ,  $t_\sigma$  definiti dalle (14.16) e (14.20). Nella riflessione  $E_{0,\pi}^r = r_\pi E_{0,\pi}$ ,  $E_{0,\sigma}^r = r_\sigma E_{0,\sigma}$  e la prima delle (14.26) diventa

$$R = \left( \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}} \right)^2 = \frac{(E_{0,\pi}^r)^2 + (E_{0,\sigma}^r)^2}{(E_{0,i})^2} = r_\pi^2 \left( \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,i}} \right)^2 + r_\sigma^2 \left( \frac{E_{0,\sigma}^r}{E_{0,i}} \right)^2.$$

I rapporti nell'ultimo membro sono eguali a  $I_\pi^r / I_i$  e  $I_\sigma^r / I_i$ , cioè alle percentuali di energia incidente nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$ . Il coefficiente di riflessione vale dunque, ricorrendo anche a (14.17) e (14.21),

$$\text{Coefficiente di riflessione} \quad R = \frac{W_r}{W_i} = \frac{I_r}{I_i} = R_\pi \frac{I_\pi^r}{I_i} + R_\sigma \frac{I_\sigma^r}{I_i}. \quad (14.27)$$

Analogamente, utilizzando (14.18) e (14.22), si trova per il *coefficiente di trasmissione*

$$\frac{W_r}{W_i} = \frac{\cos\theta_i I_i}{\cos\theta_i I_i} = \frac{n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i} \left( T_\pi^2 \frac{I_\pi^i}{I_i} + T_\sigma^2 \frac{I_\sigma^i}{I_i} \right) = T_\pi^2 \frac{I_\pi^i}{I_i} + T_\sigma^2 \frac{I_\sigma^i}{I_i} \quad (14.28)$$

Coefficiente di trasmissione

Possiamo dire che i *coefficienti di riflessione e di trasmissione sono la somma pesata dei coefficienti nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$ , il peso essendo determinato dalla percentuale di energia associata alla componente incidente che giace su quel piano.*

Noti l'intensità incidente e i coefficienti  $R$  e  $T$ , che dipendono da  $\theta_i$  e  $\beta$ , le (14.27) e (14.28) permettono di calcolare  $I_i$  e  $I_r$ ; se è data la sezione del fascio incidente si ha  $W_i$  e si calcolano anche  $W_r$  e  $W_t$ . Conviene sempre servirsi nella pratica delle relazioni  $R + T = 1$ ,  $W_r + W_t = W_i$  o per ridurre i calcoli o per verificarli.

Passiamo adesso in rassegna le varie possibilità che si presentano.

#### A. Onda incidente polarizzata rettilineamente

Supponiamo che il campo elettrico incidente formi l'angolo  $\beta$  con il piano di incidenza  $\pi$  (figura 14.28); nel piano  $\pi$  c'è l'intensità  $I_i \cos^2 \beta$  e nel piano  $\sigma$  l'intensità  $I_i \sin^2 \beta$  (vedi tabella 13.1). Otteniamo subito da (14.27) e (14.28)

$$R = R_\pi \cos^2 \beta + R_\sigma \sin^2 \beta, \quad T = T_\pi \cos^2 \beta + T_\sigma \sin^2 \beta.$$

L'onda riflessa è polarizzata rettilineamente, però il campo elettrico  $E_r$  forma col piano  $\pi$  un angolo  $\beta_r$  diverso da  $\beta$ . Infatti, detti  $\mathbf{u}_\pi$  e  $\mathbf{u}_\sigma$  due opportuni versori giacenti su  $\pi$  e  $\sigma$  e ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione dell'onda riflessa, si ha:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_\pi + \mathbf{E}'_\sigma = E_{0,r} \cos\beta, \mathbf{u}_\pi + E_{0,r} \sin\beta, \mathbf{u}_\sigma = E'_{0,\pi} \mathbf{u}_\pi + E'_{0,\sigma} \mathbf{u}_\sigma = r_\pi E'_{0,\pi} \mathbf{u}_\pi + r_\sigma E'_{0,\sigma} \mathbf{u}_\sigma$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\beta_r = \frac{E'_{0,\sigma}}{E'_{0,\pi}} = \frac{r_\sigma E'_{0,\sigma}}{r_\pi E'_{0,\pi}} = \frac{r_\sigma}{r_\pi} \operatorname{tg}\beta = - \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos(\theta_i + \theta_r)} \operatorname{tg}\beta.$$

Allo stesso modo l'onda trasmessa è polarizzata rettilineamente, ma con il campo  $E_t$ , ad angolo  $\beta_t \neq \beta$  col piano  $\pi$ :

$$\operatorname{tg}\beta_t = \frac{t_\sigma}{t_\pi} \operatorname{tg}\beta = \cos(\theta_i - \theta_t) \operatorname{tg}\beta.$$

Il tipo di polarizzazione è lo stesso, anche se nella riflessione e nella rifrazione si ha una (diversa) *rotazione del piano di polarizzazione*.

#### B. Onda incidente polarizzata ellitticamente

Trattiamo questo caso solo qualitativamente. Le onde riflessa e rifratta sono anch'esse polarizzate ellitticamente, ma l'*eccentricità* delle relative ellissi è diversa da quella dell'onda incidente perché i semiassi cambiano in modo diverso e il rapporto non si conserva. In particolare si può ottenere un'onda riflessa o un'onda rifratta polarizzate circolarmente.

#### C. Onda incidente polarizzata circolarmente

Il problema è trattato per esteso nell'esempio 14.3. Anticipiamo che l'onda riflessa e l'onda trasmessa *non* sono in generale circolari, sempre perché le due componenti dell'onda incidente nel piano  $\pi$  e nel piano  $\sigma$  non si comportano allo stesso modo sia nella riflessione che nella trasmissione. Per le intensità si ha  $I_\pi^i / I_i = I_\sigma^i / I_i = 1/2$  e quindi

$$R = \frac{1}{2} (R_\pi + R_\sigma), \quad T = \frac{1}{2} (T_\pi + T_\sigma).$$

#### D. Onda incidente non polarizzata

L'onda incidente è descritta in termini di due *onde incoerenti* che vibrano in  $\pi$  e in  $\sigma$  e

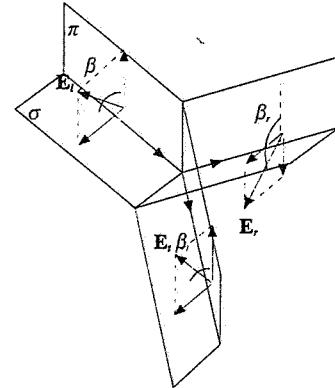


Figura 14.28

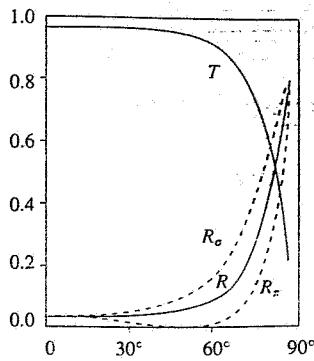


Figura 14.29

Grado di polarizzazione

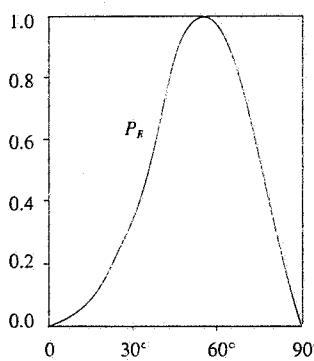
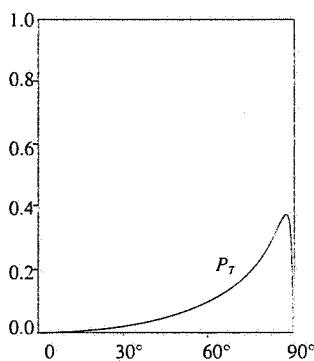


Figura 14.30



Angolo di Brewster

trasportano ciascuna metà dell'intensità dell'onda. Le (14.27) e (14.28) diventano

$$R = \frac{1}{2} (R_\pi + R_\sigma) = \frac{1}{2} (r_\pi^2 + r_\sigma^2), \quad T = \frac{1}{2} (T_\pi + T_\sigma) = \frac{1}{2} \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i} (r_\pi^2 + r_\sigma^2) \quad (14.29)$$

L'andamento di  $R$  in funzione di  $\theta_i$  per la riflessione aria-vetro è riportato nella figura 14.29, insieme a  $R_\pi$  e  $R_\sigma$  presi dalle figure 14.24 e 14.26. I valori sono apprezzabilmente diversi da zero solo per grandi angoli di incidenza.

L'onda riflessa non è polarizzata anche se, come risulta dalla figura, essendo  $R_\sigma$  maggiore di  $R_\pi$ , predomina la componente associata alla vibrazione ortogonale al piano di incidenza. Si dice in tal caso che l'onda riflessa è *parzialmente polarizzata* e si definisce il *grado di polarizzazione* come

$$P_R = \frac{W'_\sigma - W'_\pi}{W'_\sigma + W'_\pi} = \frac{R_\sigma - R_\pi}{R_\sigma + R_\pi} = \frac{r_\sigma^2 - r_\pi^2}{r_\sigma^2 + r_\pi^2} \quad (14.30)$$

Nella figura 14.30 è mostrato, sempre per il caso aria-vetro, il grado di polarizzazione  $P_R$  in funzione dell'angolo di incidenza: esso ha un massimo pari a 1 quando  $\theta_i$  è uguale all'*angolo di Brewster*  $\theta_B$  che definiremo tra poco. Per  $\theta_i = 0$  e  $\theta_i = \pi/2$   $r_\sigma^2 = r_\pi^2$  e  $P_R = 0$ .

Anche la luce trasmessa è *parzialmente polarizzata* con grado di polarizzazione

$$P_T = \frac{W'_\pi - W'_\sigma}{W'_\pi + W'_\sigma} = \frac{t_\pi^2 - t_\sigma^2}{t_\pi^2 + t_\sigma^2} \quad (14.31)$$

Nella figura 14.31 è riportato, per l'aria-vetro,  $P_T$ ; si vede che la luce trasmessa *non* è mai completamente polarizzata, anzi il suo grado di polarizzazione è piuttosto basso.

Qualora, seguendo (14.30) e (14.31), il risultato fosse negativo, come grado di polarizzazione si prende il modulo del valore ottenuto.

### Angolo di Brewster. Polarizzazione per riflessione

Abbiamo segnalato in precedenza che dei quattro coefficienti espressi da (14.16) e (14.20) solo  $r_\pi$  si annulla all'interno dell'intervallo di definizione di  $\theta_i$ , che va da zero a  $\pi/2$ . Ciò avviene quando è soddisfatta la condizione  $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ ; infatti

$$r_\pi = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_r)} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = 0$$

L'angolo di incidenza  $\theta_B$  per il quale si verifica  $r_\pi = 0$  si ricava dalla legge di Snell (14.12):

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\operatorname{sen} \theta_{i,B}} = \frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta_B}{\cos \theta_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad \theta_B = \operatorname{arctg} \frac{n_2}{n_1} \quad (14.32)$$

L'angolo  $\theta_B$  è detto *angolo di Brewster* e la (14.32) legge di Brewster.

Elichiamo schematicamente alcune proprietà caratteristiche.

1) Essendo definito da  $\operatorname{tg} \theta_B = n_2 / n_1$  l'angolo di Brewster *esiste per qualsiasi*

coppia di valori di indici di rifrazione, cioè per qualsiasi coppia di mezzi trasparenti.

2)  $\theta_B$  è sempre maggiore di  $45^\circ$  se  $n_1 < n_2$  e sempre minore di  $45^\circ$  se  $n_1 > n_2$ .

3) Dato che  $\theta_B + \theta_{i,B} = \pi/2$ , l'angolo tra il raggio riflesso e il raggio rifratto vale  $\pi/2$  (figura 14.32). Questa proprietà permette di trovare sperimentalmente  $\theta_B$  anche se non si conoscono  $n_1$  e  $n_2$  e anzi può fornire un metodo di misura di  $n_2/n_1$ .

4) Se  $\theta_B$  è l'angolo di Brewster nel passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e  $\theta'_B$  quello nel passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ , si ha  $\tan \theta_B = n_2/n_1$  e  $\tan \theta'_B = n_1/n_2$ , dalle quali si ricava  $\theta_B + \theta'_B = \pi/2$  e quindi  $\theta'_B = \theta_{i,B}$ . Pertanto, determinati  $\theta_B$  e il corrispondente angolo di rifrazione  $\theta_{i,B}$  nel passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$ ,  $\theta_{i,B}$  e  $\theta_B$  sono rispettivamente l'angolo di Brewster e l'angolo di rifrazione nel passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$  (i ruoli si scambiano). La proprietà si dimostra subito anche per via grafica. Per il passaggio  $n_2 \rightarrow n_1$  non c'è bisogno di una nuova figura, basta riconsiderare la figura 14.32 e guardarla dal basso verso l'alto (figura 14.33, frecce nere). Si vede che, se  $\theta_{i,B}$  è l'angolo di Brewster, viene soddisfatta la condizione che l'angolo tra raggio riflesso e raggio rifratto sia pari a  $\pi/2$ ; siccome il problema ha una sola soluzione, questa che abbiamo trovato è la soluzione.

L'insieme delle proprietà discusse costituisce l'*aspetto geometrico* della condizione  $r_\pi = 0$ . Per quanto riguarda i campi e le intensità, abbiamo che in condizioni di Brewster la componente dell'onda incidente che vibra nel piano di incidenza  $\pi$  non viene riflessa, ma totalmente trasmessa, la componente che vibra nel piano  $\sigma$  ortogonale al piano  $\pi$  viene sia riflessa che trasmessa. Di conseguenza nella luce riflessa troviamo solo quest'ultima componente: per  $\theta_i = \theta_B$  la luce riflessa è polarizzata rettilineamente nel piano  $\sigma$ . Il risultato è vero *qualunque sia lo stato di polarizzazione dell'onda incidente*; ovviamente non si ha luce riflessa solo se l'onda incidente è polarizzata rettilineamente in  $\pi$ .

I coefficienti di riflessione e trasmissione in  $\pi$  e  $\sigma$  sono:

$$r_\pi = 0, \quad t_\pi = 1/\tan \theta_B, \quad r_\sigma = \cos 2\theta_B, \quad t_\sigma = 2 \cos^2 \theta_B,$$

$$R_\pi = 0, \quad R_\sigma = r_\sigma^2 = \cos^2 2\theta_B = (1 - 2 \sin^2 \theta_B)^2 = \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2,$$

$$T_\pi = 1 - R_\pi = 1, \quad T_\sigma = 1 - R_\sigma = 4 \sin^2 \theta_B \cos^2 \theta_B = \left( \frac{2 n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2.$$

Inserendoli nelle (14.27) e (14.28) si hanno i *coefficienti di riflessione e di trasmissione* per qualsiasi tipo di onda incidente. Osserviamo che le formule danno lo stesso risultato per il passaggio  $n_1 \rightarrow n_2$  e per il passaggio inverso  $n_2 \rightarrow n_1$ .

In particolare, con un fascio incidente non polarizzato di potenza  $W_i$ , suddivisa per metà su  $\pi$  e per metà su  $\sigma$ , e applicando (14.29) in cui  $R_\pi = 0$ , si ha

$$W_r = R W_i = \frac{1}{2} R_\sigma W_i, \quad W_t = T W_i = (1 - R) W_i = \left( 1 - \frac{1}{2} R_\sigma \right) W_i.$$

Il *grado di polarizzazione* della luce trasmessa si calcola con (14.31): il numeratore  $W_r^2 - W_\sigma^2$  è pari a  $W_r$ , il denominatore  $W_\pi^2 + W_\sigma^2$  a  $W_t$ , e quindi

$$P_T = \frac{W_r}{W_t} = \frac{R_\sigma}{2 - R_\sigma}.$$

Numericamente, nel caso aria-vetro,  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ , otteniamo

$$\tan \theta_B = 1.5, \quad \theta_B = 56.3^\circ, \quad \theta_{i,B} = 33.7^\circ, \quad R_\sigma = 0.148.$$

$$R = 0.074, \quad T = 0.926, \quad P_T = 0.08.$$

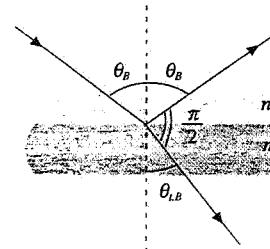


Figura 14.32

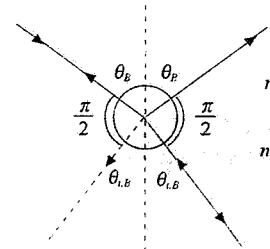


Figura 14.33

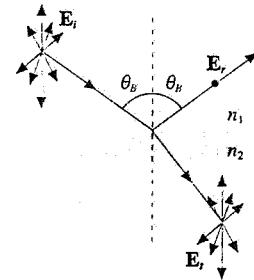


Figura 14.34

Concludiamo che, operando in *condizioni di Brewster*, da un fascio di luce ordinaria derivano un *fascio riflesso poco intenso polarizzato rettilineamente* e un *fascio trasmesso più intenso con basso grado di polarizzazione*.

Come commento finale agli argomenti trattati in questo paragrafo diciamo che le leggi di Cartesio e le formule di Fresnel permettono di calcolare le percentuali di energia e gli stati di polarizzazione delle onde riflesse e trasmesse, in funzione di  $\theta_i$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  e dello stato di polarizzazione dell'onda incidente. Le caratteristiche previste per l'onda riflessa e l'onda trasmessa possono essere misurate con grande precisione e sono in realtà verificate molto bene. Abbiamo così una dimostrazione convincente che le proprietà di riflessione e rifrazione delle onde luminose sono completamente spiegate dalle equazioni di Maxwell.

### Esempio 14.3

Un fascio di luce polarizzata circolarmente di intensità  $I = 1 \text{ W/cm}^2$  e sezione  $\Sigma_0 = 5 \text{ cm}^2$  incide con un angolo  $\theta_i = 80^\circ$  su una lastra piana di vetro ( $n = 1.5$ ). Determinare lo stato di polarizzazione del fascio riflesso e del fascio trasmesso e le relative potenze.

#### Soluzione

In accordo con la tabella 13.1 l'onda incidente si rappresenta come

$$E_\pi^i = E_{0,\pi}^i \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad E_\sigma^i = E_{0,\sigma}^i \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

con  $E_{0,\pi}^i = E_{0,\sigma}^i = E_0$ . Dato che  $E_{0,\pi}^i = r_\pi E_{0,\pi}$ ,  $E_{0,\sigma}^i = r_\sigma E_{0,\sigma}$ , l'onda riflessa ha le componenti

$$E'_\pi = r_\pi E_0 \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad E'_\sigma = r_\sigma E_0 \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

e risulta quindi *polarizzata ellitticamente*: la differenza tra i coefficienti  $r_\pi$  e  $r_\sigma$  distrugge la simmetria circolare iniziale.

Il rapporto tra i *semiasse* dell'ellisse, cioè l'*eccentricità*, è eguale al modulo del rapporto delle ampiezze dei campi:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{r_\sigma}{r_\pi} \right| = \left| \frac{\cos(\theta_i - \theta_r)}{\cos(\theta_i + \theta_r)} \right|.$$

Anche l'onda trasmessa risulta *polarizzata ellitticamente* con *eccentricità*

$$\varepsilon_t = \left| \frac{t_\sigma}{t_\pi} \right| = \left| \cos(\theta_i - \theta_t) \right|.$$

In numeri  $\sin \theta_i = \sin 80^\circ / 1.5 = 0.657$ ,  $\theta_i = 41.0^\circ$ ,  $\varepsilon_r = 1.51$ ,  $\varepsilon_t = 0.78$ .

La potenza dell'onda incidente è  $W_i = I \Sigma_0 = 5 \text{ W}$  ed è suddivisa in parti eguali tra le due componenti. Possiamo quindi usare la relazione (14.29) valida per la luce ordinaria. Essendo  $R_\pi = 0.237$ ,  $R_\sigma = 0.539$ , si trova  $R = 0.388$  (e  $T = 0.612$ ); pertanto  $W_r = 1.94 \text{ W}$ ,  $W_t = W_i - W_r = 3.06 \text{ W}$ .

Osserviamo che per  $\theta_i = \theta_g$  l'eccentricità  $\varepsilon$  dell'onda riflessa va all'infinito, l'ellisse cioè degenera in un segmento: e infatti l'onda riflessa è *polarizzata rettilineamente* nel piano  $\sigma$ . Osserviamo infine che per  $\theta_i = 0$   $\varepsilon_r = \varepsilon_t = 1$ : le onde riflessa e rifratta sono entrambe polarizzate circolarmente, come avevamo detto discutendo l'incidenza normale.

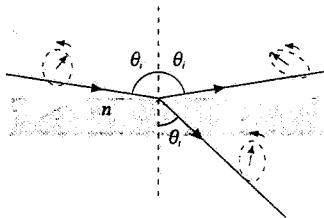


Figura 14.35

**Esempio 14.4**

Un sottile fascio di luce ordinaria di potenza  $W_i$  incide con angolo  $\theta_i = 30^\circ$  su una lastra di vetro a facce piane e parallele, avente indice di rifrazione  $n = 1.66$ ; il mezzo esterno è l'aria. Calcolare la potenza dei vari raggi riflessi e trasmessi ed estendere il risultato al caso in cui la lastra presenta assorbimento.

**Soluzione**

Da un raggio incidente hanno origine numerosi raggi riflessi e trasmessi, come mostrato in figura 14.36. Questi sono tutti paralleli tra loro e formano l'angolo  $\theta_r$  con la normale alla lastra; l'angolo  $\theta_r$  vale  $17.5^\circ$ .

Il coefficiente di riflessione aria-vetro, secondo (14.29), è

$$R = \frac{1}{2} (R_n + R_\sigma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_r)} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_r)} \right] = 0.064$$

Il coefficiente di riflessione vetro-aria, con  $\theta'_i = \theta_i = 30^\circ$  e  $\theta'_r = \theta_r = 17.5^\circ$ , è lo stesso, in quanto si scambiano  $\theta_i$  e  $\theta_r$ , ma l'espressione è invariante rispetto allo scambio (si ricordino le relazioni di Stokes).

Nella prima riflessione e trasmissione la frazione  $R$  di  $W_i$  viene riflessa in aria e forma il raggio  $r_1$ , la frazione  $1 - R$  viene trasmessa nel vetro. Di questa, la frazione  $1 - R$  viene trasmessa in aria, formando il raggio  $t_1$ , che porta con sé  $(1 - R)^2 W_i$ , e la frazione  $R$  viene riflessa nel vetro, con potenza  $R(1 - R) W_i$ . Così proseguendo si trovano le seguenti frazioni di  $W_i$  nei vari raggi:

$r_1$	$R$	$6.4 \cdot 10^{-2}$ ,	$t_1$	$(1 - R)^2$	$0.876$
$r_2$	$R(1 - R)^2$	$5.6 \cdot 10^{-2}$ ,	$t_2$	$R^2(1 - R)^2$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
$r_3$	$R^3(1 - R)^2$	$2.3 \cdot 10^{-4}$ ,	$t_3$	$R^4(1 - R)^2$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$r_4$	$R^5(1 - R)^2$	$9.4 \cdot 10^{-7}$ ,	$t_4$	$R^6(1 - R)^2$	$6.0 \cdot 10^{-8}$
...	...	...	...	...	...

In pratica, oltre al primo raggio trasmesso, solo i primi due raggi riflessi hanno potenza non trascurabile.

La frazione totale di potenza riflessa è

$$R_{\text{tot}} = R + (1 - R)^2 (R + R^3 + R^5 + \dots) = R + R(1 - R)^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots) = \\ R + R(1 - R)^2 \frac{1}{1 - R^2} = \frac{2R(1 - R)}{1 - R^2}$$

mentre quella trasmessa vale

$$T_{\text{tot}} = (1 - R)^2 (1 + R^2 + R^4 + \dots) = \frac{(1 - R)^2}{1 - R^2}$$

I valori sono  $R_{\text{tot}} = 0.120$ ,  $T_{\text{tot}} = 0.880$ .

Se teniamo conto dell'assorbimento nella lastra, ad ogni attraversamento va conteggiato nell'intensità un fattore  $e^{-(h'/\cos\theta_r)/l_{\text{ass}}}$ , essendo  $h'$  lo spessore e  $l_{\text{ass}}$  la lunghezza di assorbimento. Si trova

$$R'_{\text{tot}} = R + \frac{R(1 - R)^2 e^{-2h'/l_{\text{ass}}}}{1 - R^2 e^{-2h'/l_{\text{ass}}}}, \quad T'_{\text{tot}} = \frac{(1 - R)^2 e^{-h'/l_{\text{ass}}}}{1 - R^2 e^{-2h'/l_{\text{ass}}}},$$

dove  $h' = h / \cos\theta_r$ . Con gli stessi dati numerici precedenti, per una lastra spessa  $h = 10$  cm fatta di un materiale trasparente con  $l_{\text{ass}} = 1$  m, risulta  $R'_{\text{tot}} = 0.110$  e  $T'_{\text{tot}} = 0.792$ . La frazione  $1 - (R'_{\text{tot}} + T'_{\text{tot}})$  = 0.098 dell'intensità incidente è assorbita.

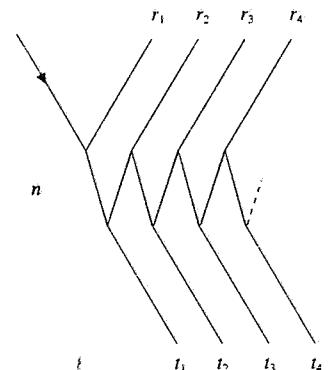


Figura 14.36

### 14.5 Riflessione e rifrazione di onde elastiche

I fenomeni di riflessione e di rifrazione (trasmissione) si verificano con qualsiasi tipo di onda, in particolare con le onde elastiche, quando si ha una superficie di discontinuità per le grandezze che caratterizzano la velocità di propagazione.

Consideriamo una corda tesa costituita da due parti con caratteristiche fisiche diverse unite nel punto  $O$  in cui poniamo l'origine dell'asse  $x$ ; coincidente con la corda in condizioni statiche. Le velocità  $v_1$  e  $v_2$  di propagazione nei due mezzi sono diverse mentre la frequenza  $\nu$  e la pulsazione  $\omega$  sono le stesse, come ricordato nel paragrafo 14.3. Dette  $\rho_1$  e  $\rho_2$  le masse per unità di lunghezza delle due parti e  $T$  la tensione della corda, le velocità sono date da (12.29) e abbiamo

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{T}} \quad , \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{T}}$$

L'onda che si propaga dalla prima alla seconda parte,

$$\xi_i = \xi_{0,i} \sin(k_1 x - \omega t)$$

quando giunge nel punto di discontinuità dà origine ad un'onda riflessa che si propaga nella prima parte e ad un'onda trasmessa che si propaga nella seconda parte:

$$\xi_r = \xi_{0,r} \sin(k_1 x + \omega t) \quad , \quad \xi_t = \xi_{0,t} \sin(k_2 x - \omega t)$$

Nel punto di contatto  $x = 0$  deve risultare in ogni istante

$$\xi_i + \xi_r = -\xi_{0,i} \sin \omega t + \xi_{0,r} \sin \omega t = \xi_r = -\xi_{0,i} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \xi_{0,i} - \xi_{0,r} = \xi_{0,i}$$

Inoltre nel punto di contatto la forza  $F_y$  deve avere lo stesso valore: la sua espressione è  $T \partial \xi / \partial x$  (vedi paragrafo 12.2) per cui

$$T \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\xi_i + \xi_r) \right]_{x=0} = T \left[ \frac{\partial \xi_r}{\partial x} \right]_{x=0}$$

$$\Rightarrow k_1 \xi_{0,i} \cos(-\omega t) + k_1 \xi_{0,r} \cos \omega t = k_2 \xi_{0,r} \cos(-\omega t) \quad , \quad k_1 (\xi_{0,i} + \xi_{0,r}) = k_2 \xi_{0,r}$$

Risolvendo il sistema delle due relazioni tra le ampiezze delle onde si ottiene

$$\xi_{0,r} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \xi_{0,i} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0,i} \quad , \quad \xi_{0,i} = \frac{2 k_1}{k_2 + k_1} \xi_{0,r} = \frac{2 v_2}{v_1 + v_2} \xi_{0,r}$$

Utilizziamo le espressioni delle velocità e calcoliamo i coefficienti  $r$  e  $t$ :

$$r = \frac{\xi_{0,r}}{\xi_{0,i}} = \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \quad , \quad t = \frac{\xi_{0,r}}{\xi_{0,i}} = \frac{2 \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}$$

Osserviamo che  $t$  è sempre positivo per cui l'onda trasmessa è in fase con l'onda incidente; invece  $r$  è positivo o negativo a seconda che sia  $\rho_2 > \rho_1$  o  $\rho_2 < \rho_1$ . Per  $x = 0$  abbiamo  $\xi_r = -\xi_{0,i} \sin \omega t$ ,  $\xi_r = r \xi_{0,i} \sin \omega t$  e quindi se

$\rho_2 < \rho_1 \quad , \quad r < 0 \quad , \quad$  l'onda riflessa è in fase con l'onda incidente.

$\rho_2 > \rho_1 \quad , \quad r > 0 \quad , \quad$  l'onda riflessa è in opposizione di fase con l'onda incidente.

Nel caso limite  $\rho_2 \rightarrow \infty$ , cioè corda fissata ad un estremo, troviamo  $t = 0$ ,  $r = 1$ : non c'è onda trasmessa e l'onda riflessa è in opposizione di fase con l'onda incidente: l'onda torna indietro capovolta con la stessa ampiezza.

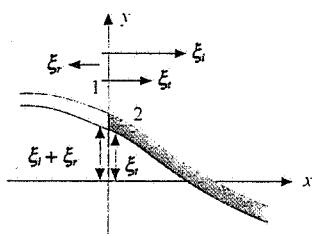


Figura 14.37

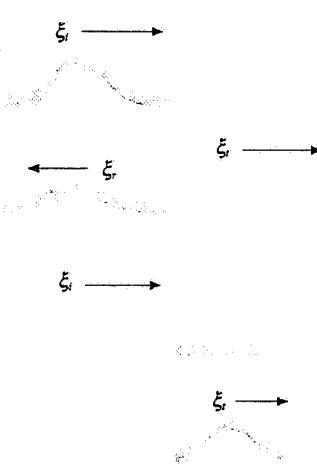


Figura 14.38

Le intensità delle varie onde sono date da (12.36):

$$I_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,i}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_1} \omega^2 \xi_{0,i}^2 ,$$

$$I_r = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 \xi_{0,r}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_1} \omega^2 r^2 \xi_{0,i}^2 ,$$

$$I_t = \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 v_2 \xi_{0,t}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{T\rho_2} \omega^2 t^2 \xi_{0,i}^2 .$$

Definiamo anche ora i *coefficienti di riflessione e di trasmissione*:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\xi_{0,r}^2}{\xi_{0,i}^2} = r^2 = \left( \frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}} \right)^2 ,$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\rho_2 v_2 \xi_{0,t}^2}{\rho_1 v_1 \xi_{0,i}^2} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} t^2 = \frac{2 \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2}}{(\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1})^2}$$

Coefficiente di riflessione  
e trasmissione

È sempre verificata la condizione  $R + T = 1$ .

A titolo di esempio consideriamo due corde dello stesso materiale avente densità  $\rho$ , con raggi  $R_1$  e  $R_2$ , diversi, tali che  $R_1 / R_2 = 5$ . Su una lunghezza  $d$  la massa è  $m = \rho \pi R^2 d$  e quindi le densità lineari sono  $\rho_1 = m_1 / d = \rho \pi R_1^2$ ,  $\rho_2 = \rho \pi R_2^2$ . Il coefficiente di riflessione vale

$$R = \left( \frac{\sqrt{\rho \pi R_2^2} - \sqrt{\rho \pi R_1^2}}{\sqrt{\rho \pi R_2^2} + \sqrt{\rho \pi R_1^2}} \right)^2 = \left( \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 = \left( \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \right)^2 = \frac{4}{9} = 0.444$$

Pertanto il 44.4% dell'energia viene riflesso e il 55.6% trasmesso. Al diminuire del rapporto  $R_1 / R_2$  aumenta l'energia trasmessa e al limite per  $R_1 = R_2$  (corda omogenea)  $R = 0$ , non c'è riflessione.

Gli stessi risultati si ottengono con due sbarre di materiali diversi: nelle formule bisogna sostituire  $\sqrt{Y\rho}$  a  $\sqrt{\rho}$ :  $Y$  è il *modulo di elasticità* e  $\rho$  la *densità* (vedi paragrafo 12.2). Ritornando alle onde elettromagnetiche, onde riflesse e onde trasmesse si hanno anche quando si connettono due cavi coassiali con impedanze caratteristiche diverse (paragrafo 11.5).

I coefficienti  $r$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $T$ , hanno la stessa struttura degli analoghi coefficienti ricavati nel paragrafo 14.4 per un'onda luminosa che incide normalmente alla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti: nel caso della corda  $\sqrt{\rho}$  gioca il ruolo dell'indice di rifrazione  $n$  ( $\sqrt{\rho} \leftrightarrow n$ , ovvero  $\rho \leftrightarrow n^2 = K_e$ ).

Storicamente, anche le formule di Fresnel per  $\theta_i \neq 0$  del paragrafo 14.4 furono ricavate con un procedimento simile a quello appena illustrato e, data la buona verifica sperimentale, rafforzarono l'ipotesi che la luce fosse la vibrazione di un vettore, la cui natura fisica restava ignota: secondo la visione meccanica allora dominante (siamo nella prima metà del 1800) la propagazione doveva avvenire in un mezzo elastico, chiamato *etero*, che riempiva tutto lo spazio come un fluido, ma le cui proprietà erano peculiari, visto che era capace di propagare una vibrazione trasversale. Le equazioni di Maxwell chiarirono la natura fisica della luce, ma non quella dell'etero, anche se lo ridussero ad un sistema di riferimento privilegiato in cui la velocità della luce era  $c$ . L'idea di un sistema privilegiato fu messa in crisi dagli esperimenti di Michelson e Morley (1887), dai quali si deduce che la *velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento*, e la nozione di etero scomparve definitivamente con la pubblicazione nel 1905 della *teoria della relatività ristretta* da parte di Einstein.

#### 14.6 Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo. Birifrangenza

Come abbiamo detto nel paragrafo 5.6, i dielettrici lineari, per i quali esiste una relazione di proporzionalità tra vettore polarizzazione e campo elettrico data dalla (5.11), sono dotati di simmetria spaziale, sono cioè *isotropi*: qualunque sia la direzione del campo elettrico applicato le proprietà elettriche non cambiano.

Esistono anche sostanze le cui proprietà elettriche dipendono dalla direzione di  $\mathbf{E}$ : tra queste citiamo la maggior parte dei *cristalli* e alcune *materie plastiche artificiali*, costituite da molecole lunghe e orientate preferibilmente in una certa direzione. Per quanto riguarda quei cristalli che sono dielettrici anisotropi naturali ricordiamo dal paragrafo 5.6 che in essi i vettori  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  non sono paralleli e che la suscettività elettrica  $\chi$  non è un numero, bensì un *tensores simmetrico* con sei componenti; lo stesso vale per la costante dielettrica relativa  $\kappa = 1 + \chi$ . Queste costanti caratterizzano completamente le proprietà elettriche dei cristalli anisotropi che per il resto supporremo non conduttori ( $\sigma = 0$ ) e privi di proprietà magnetiche ( $\kappa_m = 1$ ).

Ricordiamo inoltre che in ogni cristallo esistono tre direzioni, ortogonali tra loro, note come *assi cristallografici* o *assi ottici del cristallo*. Se si scelgono questi assi come assi coordinati ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) i tensori  $\chi$  e  $\kappa$  sono *diagonalni* e la relazione tra  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  si scrive secondo (5.34)

$$D_x = \epsilon_0 \kappa_1 E_x , \quad D_y = \epsilon_0 \kappa_2 E_y , \quad D_z = \epsilon_0 \kappa_3 E_z .$$

I vettori  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$  non sono paralleli in quanto generalmente  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  sono diverse; solo quando  $\mathbf{E}$  è parallelo a uno degli assi ottici, e ha quindi una sola componente non nulla,  $\mathbf{D}$  risulta parallelo a  $\mathbf{E}$ . Le tre costanti dielettriche relative caratteristiche degli assi ottici si chiamano *costanti dielettriche relative principali*.

Definiamo ora, nel sistema di riferimento degli assi ottici, l'*ellissoide degli indici di rifrazione del materiale*: i tre semiassi sono  $n_1 = \sqrt{\kappa_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{\kappa_2}$ ,  $n_3 = \sqrt{\kappa_3}$  e l'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 . \quad (14.33)$$

Ellissoide degli indici di rifrazione

Precisiamo che gli assi ottici non sono assi particolari localizzati in qualche parte del cristallo, sono direzioni: fissato un qualsiasi punto del cristallo, esso si può pensare come centro dell'ellissoide degli indici di rifrazione.

Fresnel riuscì a dimostrare, molto prima della formulazione delle equazioni di Maxwell e della teoria elettromagnetica della luce, che le proprietà ottiche dei cristalli anisotropi potevano essere descritte servendosi dell'ellissoide degli indici di rifrazione, come ora mostreremo; naturalmente noi aggiungeremo alcune nozioni sul comportamento dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  delle onde.

Con riferimento all'ellissoide degli indici di rifrazione i cristalli esistenti in natura si possono dividere in tre categorie.

a) Sostanze con  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ : l'ellissoide (14.33) è una *sfera* di raggio pari a  $n$ . Non si possono definire assi ottici, poiché l'intersezione del fronte d'onda con la sfera è sempre una circonferenza di raggio  $n$ , su cui non è possibile individuare assi particolari. La velocità di propagazione nel cristallo è  $v = c/n$ , non c'è birifrangenza. Appartengono a questa categoria i cristalli del sistema cubico, come cloruro di sodio e diamante, che si comportano pertanto come sostanze isotrope.

b) Sostanze con  $n_1 \neq n_2 = n_3$ : l'ellissoide degli indici di rifrazione è un *ellissoide di rotazione* intorno all'asse principale caratterizzato dall'indice di rifrazione  $n_1$ . Questo asse è detto *asse ottico* del cristallo ed è un *asse di simmetria del cristallo*. I cristalli con tale proprietà, detti *monoassici*, sono quelli dei sistemi romboedrico, esagonale, tetragonale, tra i quali si trovano la *calcite*  $\text{CaCO}_3$  (detta anche spato d'Islanda) e il quarzo.

c) Sostanze con  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ : l'ellissoide (14.33) non ha particolari simmetrie. Troviamo in questa categoria i cristalli del sistema rombico, monoclinico, triclinico (ad esempio mica e topazio).

Noi ci occuperemo soltanto dei *cristalli monoassici* che presentano le applicazioni più interessanti. Per essi si usa indicare col nome *indice di rifrazione straordinario* e col simbolo  $n_s$  l'indice di rifrazione  $n_1$  relativo all'asse ottico, mentre si indica col nome di *indice di rifrazione ordinario* e col simbolo  $n_o$  l'indice di rifrazione  $n_2$  relativo ad un qualsiasi asse

Cristalli monoassici

ortogonale all'asse ottico.

L'equazione (14.33) dell'ellissoide degli indici di rifrazione diventa

$$\frac{x^2}{n_s^2} + \frac{y^2 + z^2}{n_o^2} = 1 \quad (14.34)$$

essendo  $x$  la direzione dell'asse ottico.

Si distinguono due tipi di cristalli monoassici:

1) cristalli *positivi* per i quali  $n_s > n_o$ ; l'*ellissoide* (14.34) è *allungato* nella direzione dell'asse ottico;

2) cristalli *negativi* per i quali  $n_s < n_o$ ; l'*ellissoide* è *schiacciato* nella direzione dell'asse ottico.

Come esempio diamo i valori per due cristalli, uno positivo e uno negativo, alla lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$ :

quarzo (positivo)	$n_s = 1.5533$	$n_o = 1.5442$ ,
calcite (negativa)	$n_s = 1.4864$	$n_o = 1.6585$ ;

nella calcite si ha uno dei  $\Delta n$  maggiori e per questo essa è tra i materiali birifrangenti più usati.

Vediamo ora l'utilità dell'impiego dell'ellissoide (14.34). Tracciamo il fronte d'onda piano di un'onda che si propaga nel cristallo monoassico e facciamolo passare per il centro dell'ellissoide; l'intersezione con questo è un'ellisse, di assi  $AA$  e  $BB$  (figura 14.39); i corrispondenti valori dei semiassi sono  $n_e$  e  $n_o$ . Essendo l'ellissoide (14.34) di rotazione (*ellissoide rotondo*), un semiasse dell'ellisse è sempre eguale a  $n_o$ , indipendentemente dall'orientazione del fronte d'onda, mentre la lunghezza  $n_e$  dell'altro semiasse è variabile con la direzione del versore  $\mathbf{u}_n$  normale al fronte d'onda ed è compresa tra  $n_o$  e  $n_s$ .

Si dimostra che possono avere tale fronte d'onda due onde polarizzate rettilineamente con il vettore  $\mathbf{D}$  vibrante lungo la direzione  $AA$  ( $\mathbf{D}_s$ ) o lungo la direzione  $BB$  ( $\mathbf{D}_o$ );  $n_e$  e  $n_o$  sono i valori dell'indice di rifrazione per queste due onde, le quali quindi si propagano nel cristallo con velocità di fase  $v_s = c/n_e$  e  $v_o = c/n_o$ .

L'onda associata all'indice di rifrazione  $n_o$  è detta *onda ordinaria*; per quello che si è detto la velocità di fase nel cristallo è sempre  $v_o = c/n_o$ , qualunque sia l'orientazione di  $\mathbf{u}_n$ . La *polarizzazione* è *ortogonale all'asse ottico*, i campi  $\mathbf{E}_o$  e  $\mathbf{D}_o$  sono *sempre paralleli e stanno sul fronte d'onda*, che è perpendicolare alla direzione di propagazione.

L'onda associata all'indice di rifrazione  $n_e$  è detta *straordinaria* e la velocità di fase  $v_s = c/n_e$  dipende dall'orientazione di  $\mathbf{u}_n$ , variando tra  $v_s$  e  $v_o = c/n_o$ . Il campo elettrico  $\mathbf{E}_s$  non è parallelo a  $\mathbf{D}_s$  e non sta come questo sul fronte d'onda;  $\mathbf{E}_s$  però è sempre ortogonale alla direzione di propagazione e pertanto *fronte d'onda e direzione di propagazione non sono ortogonali tra loro*. In particolare, quando  $\mathbf{u}_n$  è parallelo all'asse ottico l'intersezione ellittica degenera in una circonferenza di raggio  $n_o$  ( $n_e$  è eguale a  $n_o$ ) e si ha una sola velocità  $v_o$ . Quando  $\mathbf{u}_n$  è perpendicolare all'asse ottico l'intersezione del fronte d'onda con l'ellissoide è un'ellisse coincidente con la sezione massima (semiassi  $n_o$  e  $n_s$ ) e l'onda straordinaria ha velocità  $v_s = c/n_s$ .

Per un angolo  $\theta$  generico tra  $\mathbf{u}_n$  e l'asse ottico (asse  $x$ ) il punto  $P$  dell'ellissoide distante  $n_e$  dal centro ha coordinate tali che  $x^2 = (n_e \sin \theta)^2$  e  $y^2 + z^2 = (n_e \cos \theta)^2$ , per cui da (14.34)

$$\frac{n_e^2 \sin^2 \theta}{n_s^2} + \frac{n_e^2 \cos^2 \theta}{n_o^2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta}{n_s^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n_e^2} ,$$

relazione che permette di calcolare  $n_e$  in funzione di  $\theta$ . Introducendo  $v_s$ ,  $v_o$  e  $v_e$  si ottiene l'espressione equivalente

$$v_e^2 = v_s^2 \sin^2 \theta + v_o^2 \cos^2 \theta .$$

Riassumendo, per qualsiasi orientazione del fronte d'onda rispetto all'asse ottico di un cristallo monoassico, siamo in grado di determinare l'indice di rifrazione e la velocità di propagazione per un'onda polarizzata ortogonalmente all'asse ottico (onda ordinaria, indice fisso  $n_o$ ) e per l'onda a questa ortogonale, cioè polarizzata in un piano contenente l'asse ottico (onda straordinaria, indice variabile).

Dopo questa lunga, ma necessaria premessa, descriviamo in cosa consiste il fenomeno della *birifrangenza*. Consideriamo un cristallo monoassico, che per semplicità supponiamo

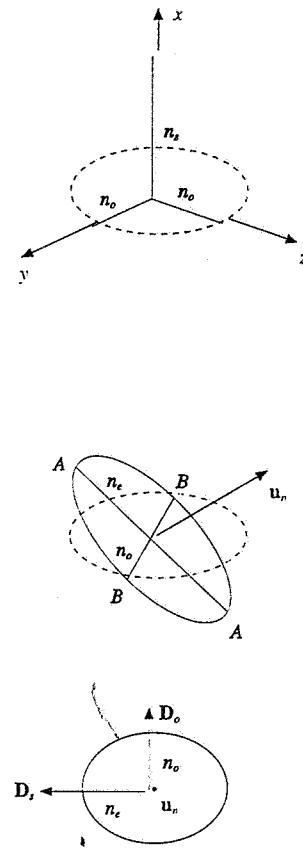


Figura 14.39

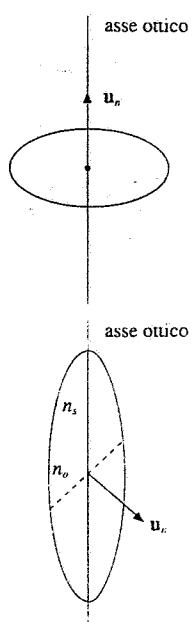


Figura 14.40

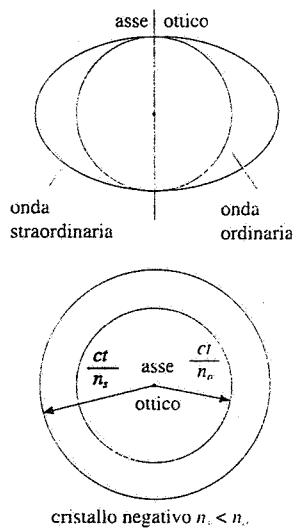


Figura 14.41

tagliato in modo da formare una lastra a facce piane e parallele, e un'onda luminosa piana non polarizzata che incide su una faccia del cristallo. Si trova che in generale dal cristallo escono due onde separate, polarizzate rettilineamente lungo due direzioni tra loro perpendicolari, e l'insieme dei fatti osservati si spiega coerentemente ammettendo che all'interno del cristallo l'onda incidente si *scinda* nelle due onde sudette, le quali si propagano nel cristallo con velocità diverse e in direzioni diverse. Risulta che un'onda obbedisce in ogni situazione alla legge di Snell (14.12) con valore  $n_o$  dell'indice di rifrazione e per tale ragione viene chiamata *onda ordinaria*; essa è polarizzata ortogonalmente all'asse ottico del cristallo. L'altra onda invece *non obbedisce* alla legge di Snell ed è come se vedesse il cristallo con indice di rifrazione variabile con la direzione di propagazione tra due valori estremi  $n_o$  e  $n_s$ ; quest'onda, che è polarizzata perpendicolarmente all'onda ordinaria, è detta *straordinaria*.

Sia questa fenomenologia che quella più complicata dei cristalli brossici suggerirono a Fresnel il metodo di calcolo degli indici di rifrazione e delle velocità nel cristallo dei due fronti d'onda, ordinario e straordinario, che abbiamo descritto solo nel caso dei cristalli monoassici.

Determiniamo ora le *direzioni di propagazione* all'interno del cristallo dell'onda ordinaria e dell'onda straordinaria. Allo scopo ci serviamo del *principio di Huygens-Fresnel* considerando ogni punto della superficie del cristallo colpito dall'onda piana incidente come sorgente di due onde elementari, una ordinaria e una straordinaria. L'onda ordinaria elementare emessa dal punto  $O$  ha fronte d'onda sferico in quanto la velocità è la stessa in tutte le direzioni (per l'onda ordinaria il cristallo è isotropo); preso come istante  $t = 0$  l'istante di incidenza, al tempo  $t$  i punti di egual fase stanno su una superficie sferica diraggio  $OP = v_o t = ct / n_o$ , la cui equazione è

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_o^2 t^2 .$$

Lo stesso ragionamento non si può fare per l'onda straordinaria elementare emessa da  $O$ : al tempo  $t$  lo spazio percorso è  $OQ$  ed è diverso a seconda della direzione considerata in quanto la velocità non è isotropa. Si dimostra che i punti  $Q$  stanno su una superficie la cui equazione è

$$\frac{x^2}{v_o^2} + \frac{y^2 + z^2}{v_s^2} = t^2 ; \quad (14.36)$$

si tratta di un'*ellissoide di rotazione attorno all'asse ottico* (infatti lungo qualsiasi direzione ortogonale all'asse ottico la velocità dell'onda straordinaria è sempre  $v_s = c / n_s$ ). Il *fronte d'onda straordinario* è dunque un *ellissoide*; siccome nella direzione corrispondente all'asse ottico l'onda straordinaria ha la stessa velocità dell'onda ordinaria, la superficie d'onda sferica e quella ellissoidale sono tangenti nei punti che stanno sull'asse ottico. I casi corrispondenti a  $n_s > n_o$  e  $n_s < n_o$  sono mostrati nella figura 14.41. Sulla sezione massima contenente l'asse ottico si vedono la traccia circolare dell'onda ordinaria e quella ellittica dell'onda straordinaria; nella sezione equatoriale ortogonale all'asse ottico le tracce delle due onde sono entrambe circolari.

Esaminiamo le varie situazioni che si possono presentare a seconda della direzione dell'asse ottico e dell'onda incidente rispetto alla normale alla superficie del cristallo. Avendo in mente la calcite supponiamo  $n_s < n_o$ .

#### A. Asse ottico obliquo rispetto alla superficie del cristallo

##### 1) Incidenza normale alla superficie (figura 14.42)

La direzione di incidenza e l'asse ottico stanno nel piano del disegno. Per due punti del fronte d'onda incidente, coincidente con la superficie del cristallo, disegniamo esplicitamente l'onda sferica ordinaria e l'onda ellissoidale straordinaria, anche se la costruzione è estesa a tutti i punti interessati. L'involucro delle onde sferiche, ovvero il piano di traccia  $PP$ , individua il *fronte d'onda ordinario* e l'involucro delle onde ellissoidali, che è il piano di traccia  $QQ$ , individua il *fronte d'onda straordinario*; entrambi i fronti d'onda risultano paralleli al fronte d'onda incidente.

L'intersezione del fronte d'onda con la singola onda elementare determina la direzione

del raggio corrispondente: si vede che i raggi  $OP$  ordinari conservano la direzione incidente e sono ortogonali al fronte d'onda ordinario, mentre i raggi  $OQ$  straordinari non sono ortogonali al fronte d'onda straordinario. Il raggio ordinario segue cioè la legge di Snell, ma non fa così il raggio straordinario.

Per quanto riguarda i campi,  $D_o$  ed  $E_o$  sono paralleli tra loro e ortogonali al piano del disegno,  $D_s$  sta nel piano del disegno ed è parallelo al fronte d'onda straordinario,  $E_s$  è ortogonale alla direzione di propagazione  $OQ$  e non è parallelo a  $D_s$ .

L'angolo  $\alpha$  che il raggio  $OQ$  forma con la normale e con il raggio  $OP$  dipende dall'angolo  $\psi$  tra l'asse ottico e la normale. Esso è nullo solo se  $\psi = 0$  (asse ottico parallelo alla normale, vedi successivo caso B.1) oppure se  $\psi = \pi/2$  (asse ottico ortogonale alla normale ovvero parallelo alla superficie del cristallo, vedi successivo caso C.1). Il valore massimo è di circa  $4^\circ$  (nella calcite).

La velocità di fase dell'onda straordinaria si calcola da (14.35), in cui l'angolo  $\theta$  tra normale al fronte d'onda e asse ottico vale nel nostro caso  $\psi$ . Notiamo che secondo la definizione  $v_e$  è la velocità con cui avanza il fronte d'onda, cioè con cui la fase si sposta ortogonalmente al fronte d'onda, e non è la velocità lungo la direzione di propagazione (lungo il vettore di Poynting), che viene chiamata *velocità di raggio*  $v_r$ . La differenza tra le due velocità è mostrata in figura 14.43; dato che  $OQ = v_r t$  è facile ricavare da (14.36), così come da (14.34) si ricava (14.35), l'espressione

$$\frac{1}{v_r^2} = \frac{\cos^2(\psi + \alpha)}{v_o^2} + \frac{\sin^2(\psi + \alpha)}{v_s^2},$$

essendo  $\psi + \alpha$  l'angolo tra raggio straordinario e asse ottico. Tra  $v_r$  e  $v_e$  sussiste la relazione  $v_e = v_r \cos \alpha$ .

## 2) Incidenza obliqua nel piano individuato dalla normale e dall'asse ottico (figura 14.44)

Assumendo come istante  $t = 0$  quello in cui il raggio  $SO$  raggiunge la superficie del cristallo, nel tempo  $t = O'M/c$  in cui il raggio  $S'O'$  raggiunge  $M$  i due fronti d'onda emessi da  $O$  hanno compiuto i cammini  $OP = v_o t$  e  $OQ$ , che è maggiore di  $OP$  perché la velocità dell'onda straordinaria è maggiore di quella dell'onda ordinaria ( $n_e < n_o$ ). L'angolo di rifrazione ordinaria  $\theta_o$  che  $OP$  forma con la normale obbedisce alla legge di Snell  $\sin \theta_o / \sin \theta_s = n_e$ ; la direzione del raggio  $OP$  si può quindi disegnare subito e il punto  $P$  si trova tracciando la perpendicolare da  $M$  al raggio ordinario. Noto  $P$  si disegna la circonferenza ordinaria e la corrispondente ellisse straordinaria; il punto  $Q$  è individuato tracciando la tangente da  $M$  all'ellisse e così è nota anche la direzione del raggio straordinario. Le tracce dei fronti d'onda sono dunque  $MP$  e  $MQ$ ; il fronte d'onda straordinario non è ortogonale alla direzione di propagazione. I campi  $E$  e  $D$  hanno le direzioni mostrate in figura 14.44.

## 3) Asse ottico non contenuto nel piano di incidenza

La ricerca delle direzioni dei raggi ordinario e straordinario si fa come descritto in precedenza. A differenza del caso A.2 il piano di incidenza taglia l'ellissoide (14.36) secondo una sezione generica e si trova che la costruzione dell'involucro delle onde straordinarie elementari porta ad una normale al fronte d'onda e ad una direzione di propagazione che sono diverse tra loro e non stanno sul piano di incidenza. Il raggio ordinario invece segue le leggi usuali.

## B. Asse ottico ortogonale alla superficie del cristallo

### 1) Incidenza normale

L'onda ordinaria e l'onda straordinaria si propagano nella stessa direzione e con la stessa velocità e all'uscita del cristallo si ricompongono dando un'onda eguale a quella incidente, senza produrre birifrangenza. La costruzione sarebbe la stessa della figura 14.42, ma con l'asse ottico normale al cristallo ( $\psi = 0$ ), come indicato nella figura 14.45; l'indice di rifrazione è  $n_o$ .

Questa proprietà indica il modo con cui si può ricercare la direzione dell'asse ottico, definita operativamente come l'unica direzione lungo cui non si ha birifrangenza.

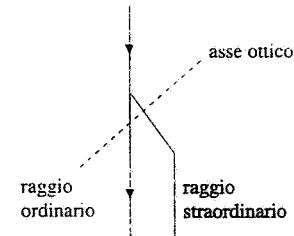
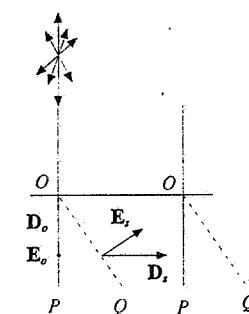
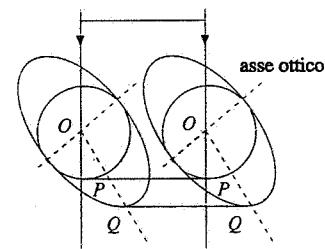


Figura 14.42

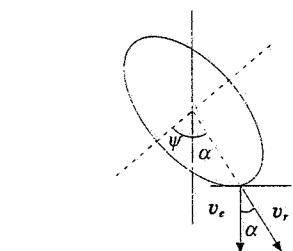


Figura 14.43

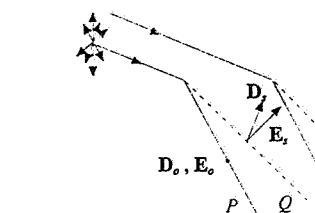
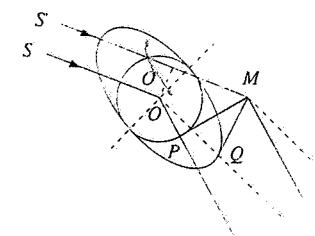


Figura 14.44

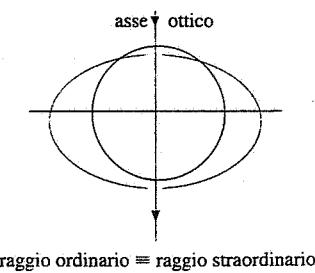


Figura 14.45

## 2) Incidenza obliqua

L'asse ottico sta nel piano di incidenza, per ogni raggio incidente si hanno due raggi rifratti, entrambi nel piano di incidenza, determinabili analogamente al caso A.2, figura 14.44.

## C. Asse ottico parallelo alla superficie del cristallo

La normale alla superficie e l'asse ottico individuano un piano ortogonale alla superficie del cristallo che viene chiamato *sezione principale*.

## 1) Incidenza normale

I raggi ordinario e straordinario hanno la stessa direzione, eguale a quella incidente, però si propagano nel cristallo con le velocità  $v_o = c / n_o$  e  $v_s = c / n_s$ . I fronti d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione. L'onda ordinaria è polarizzata ortogonalmente all'asse ottico, quella straordinaria parallelamente all'asse ottico, i campi  $E$  e  $D$  sono paralleli.

Nella figura 14.46 sono mostrate due viste, a  $90^\circ$  tra loro, della situazione che è la stessa comunque la si guardi (ricordiamo che con incidenza normale non è definibile il piano di incidenza e c'è simmetria cilндrica).

## 2) Piano di incidenza parallelo alla sezione principale

Il caso, mostrato in figura 14.47, è analogo ai casi A.2 e B.2.

## 3) Piano di incidenza ortogonale alla sezione principale

Le sezioni delle superficie d'onda elementari con il piano di incidenza sono due circonferenze, una di raggio proporzionale a  $1/n_o$ , l'altra di raggio proporzionale a  $1/n_s$  (figura 14.48). Con B.1 e C.1 è l'unico caso in cui per il raggio straordinario valgono le stesse regole che per il raggio ordinario e quindi abbiamo

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_o} = n_o, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_s} = n_s,$$

relazioni utili per la determinazione sperimentale di  $n_o$  e  $n_s$ . I fronti d'onda sono piani ortogonali alla direzione di propagazione, le polarizzazioni sono le stesse del caso C.1.

## 4) Piano di incidenza ad angolo qualsiasi con la sezione principale

È un caso analogo ad A.3, con il raggio straordinario che esce dal piano di incidenza.

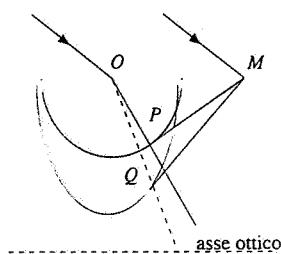


Figura 14.47

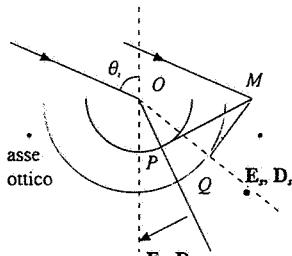


Figura 14.48

## Esempio 14.5

Un'onda luminosa piana non polarizzata di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$  incide con un angolo  $\theta_i = 45^\circ$  su una lastra di calcite spessa  $h = 2 \text{ cm}$ , tagliata con le due facce parallele all'asse ottico. Il piano di incidenza è ortogonale all'asse ottico. Calcolare la separazione tra il raggio ordinario e il raggio straordinario all'uscita dalla lastra.

## Soluzione

Siamo nel caso C.3; prendiamo i valori dati in precedenza degli indici di rifrazione  $n_o$  e  $n_s$  e utilizziamo il risultato dell'esempio 14.2:

$$d_o = h \sin \theta_i \left( 1 - \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_i}} \right) = 0.75 \text{ cm},$$

$$d_s = h \operatorname{sen} \theta_i \left( 1 - \frac{\cos \theta_i}{\sqrt{n_s^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_i}} \right) = 0.65 \text{ cm} ,$$

$$\Delta d = d_o - d_s = 0.10 \text{ cm} = 1 \text{ mm} .$$

Le polarizzazioni dei due raggi sono indicate nella figura 14.49.

## 14.7 Applicazioni della birifrangenza

Vi sono numerose e interessanti applicazioni della birifrangenza riguardanti la polarizzazione della luce: esse vanno dalla produzione di luce polarizzata all'analisi dello stato di polarizzazione di un'onda luminosa.

### Prisma di Nicol

Il prisma di Nicol è composto da due lastre eguali di calcite tagliate come in figura 14.50 e incollate tra loro con una resina chiamata *balsamo del Canada*, avente indice di rifrazione  $n = 1.55$  intermedio tra i due indici  $n_o$  e  $n_s$  della calcite. La direzione dell'asse ottico è indicata dalla linea tratteggiata e siamo nella situazione del caso A.2 del paragrafo 14.6: l'asse ottico sta nel piano di incidenza e non coincide con la normale alla faccia *AB* del cristallo, con cui forma un angolo di  $45^\circ$ . Il raggio incidente non polarizzato si scinde in un raggio ordinario e in un raggio straordinario che si propagano in direzioni diverse, il raggio ordinario essendo deviato di più di quello straordinario. Il raggio ordinario, quando incontra la superficie di separazione tra calcite e balsamo del Canada, passa da un mezzo più rifrangente ( $n_o = 1.66$ ) ad un mezzo meno rifrangente ( $n = 1.55$ ), per i quali l'angolo limite di riflessione totale (14.13) è  $\theta = \operatorname{arcsen}(n/n_o) = 69^\circ$ . Nelle condizioni geometriche della figura 14.50  $\theta_i = 22^\circ$ ,  $\theta_o = 13^\circ$  e l'angolo di incidenza del raggio ordinario sul balsamo è  $90^\circ - 13^\circ = 77^\circ$ , maggiore dell'angolo limite; esso viene pertanto *totalmente riflesso* e poi assorbito da una superficie annerita. Il raggio straordinario passa invece da un mezzo meno rifrangente a uno più rifrangente e *non subisce riflessione totale*; esso attraversa il secondo prisma ed infine esce dal sistema con direzione parallela a quella di incidenza, senza subire un assorbimento apprezzabile.

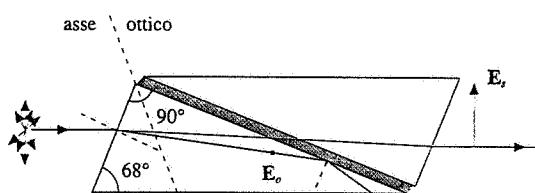


Figura 14.50

L'onda uscente è *polarizzata rettilineamente* nel piano di incidenza, per cui il prisma di Nicol, detto comunemente *nicol*, costituisce un *polarizzatore*. Pur dipendendo gli indici di rifrazione dalla lunghezza d'onda le condizioni descritte sono verificate in tutto l'intervallo di lunghezze d'onda visibili e il *nicol* non altera la composizione spettrale dell'onda piana incidente. Se questa è costituita da luce bianca in uscita dal *nicol* si ha luce bianca polarizzata rettilineamente. L'intensità trasmessa, trascurando le riflessioni, è la metà di quella incidente, l'altra metà essendo associata all'onda ordinaria.

### Cristalli dicroici. Polarizzatori e analizzatori

Consideriamo una lamina di una sostanza monoassica tagliata parallelamente all'asse ottico, cioè a forma di lastra a facce piane e parallele tra loro e all'asse ottico, e un'onda

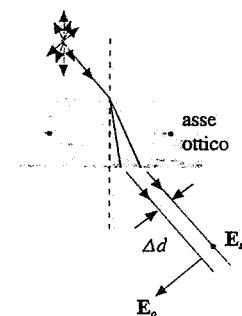


Figura 14.49

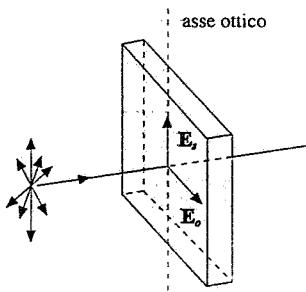


Figura 14.51

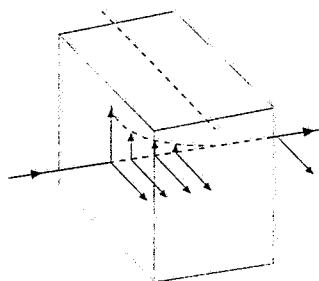


Figura 14.52

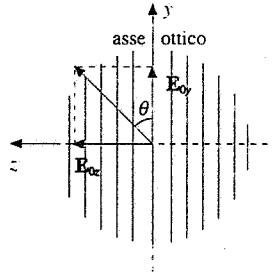


Figura 14.53

piana luminosa non polarizzata che incide normalmente ad una faccia della lastra (caso C.1 del paragrafo 14.6). Nella lamina hanno origine un'onda ordinaria polarizzata ortogonalmente all'asse ottico e un'onda straordinaria polarizzata parallelamente all'asse ottico (figura 14.51). Entrambe le onde si propagano nella direzione  $\mathbf{u}_n$  dell'onda incidente, con velocità diverse; ciascuna trasporta metà dell'intensità incidente.

Nella maggior parte dei cristalli monoassici si ha attenuazione trascurabile, almeno per piccoli spessori; esistono però in natura sostanze che assorbono in proporzioni molto diverse l'onda ordinaria e l'onda straordinaria, nelle quali cioè l'assorbimento dipende dall'angolo che la direzione di oscillazione del campo elettrico forma con una particolare direzione tipica della sostanza. Dai risultati del paragrafo 13.8 possiamo avere la spiegazione del fenomeno: se le molecole che costituiscono la sostanza sono allungate avremo un grande assorbimento quando il campo elettrico  $\mathbf{E}$  dell'onda è parallelo all'asse della molecola e un assorbimento molto minore quando  $\mathbf{E}$  è perpendicolare all'asse. Una delle due onde viene pertanto progressivamente assorbita e diffusa e se lo spessore è sufficiente praticamente scompare, mentre l'altra prosegue. Il fenomeno è detto *dicroismo* e le sostanze che lo presentano si chiamano *dicroiche*.

Tra queste ricordiamo la *formalina* (borosilicato di alluminio che cristallizza nel sistema romboedrico) e l'*erapatite* (cristalli di iodosolfato di chinino, materiale organico artificiale). La prima assorbe l'onda ordinaria, il che significa che le molecole sono allungate ortogonalmente all'asse ottico, la seconda assorbe l'onda straordinaria, avendo l'asse delle molecole parallelo all'asse ottico. Cristalli di erapatite orientati parallelamente e impaccati tra due fogli di materiale trasparente, vetro e nitrocellulosa, costituiscono una lamina di materiale dicroico, detta *polaroid*; con lo stesso nome sono chiamate anche lamine dicroiche formate da molecole molto lunghe di *alcool polivinilico* inserite in una pellicola che viene sottoposta a tensione meccanica per ottenere l'allineamento delle molecole.

Le lame di polaroid assorbono in modo praticamente completo una componente e trasmettono oltre il 70% dell'intensità dell'altra, nell'intervallo di lunghezze d'onda da 0.5 a 0.7 μm. Nell'uso pratico sono più comode dei nicol, che però sono più trasparenti.

In ogni caso una lamina dicroica è un dispositivo che fornisce un'onda polarizzata rettilineamente lungo una direzione che chiamiamo *asse ottico della lamina*, anche se in qualche caso non coincide con l'asse ottico definito nel paragrafo 14.6; infatti non è possibile fare confusione tra i due concetti. Il nome generale con cui si indica un sistema che produce un'onda polarizzata rettilineamente è *polarizzatore*. Nel seguito supporremo che in un polarizzatore non ci sia attenuazione per l'onda che emerge.

Immaginiamo ora che l'onda incidente normalmente sul polarizzatore sia polarizzata rettilineamente e che il campo elettrico  $E_0$  formi l'angolo  $\theta$  con l'asse ottico del polarizzatore, come indicato in figura 14.53 dove l'onda che si sta propagando lungo l'asse  $x$  esce dal foglio. Scomponendo l'onda incidente secondo  $y$  e  $z$ , l'onda di ampiezza  $E_{0y} = E_0 \cos\theta$  avente campo elettrico parallelo all'asse ottico del polarizzatore passa inalterata e l'onda di ampiezza  $E_{0z} = E_0 \sin\theta$  avente campo elettrico ortogonale all'asse ottico viene completamente assorbita.

Detta  $I_0$  l'intensità dell'onda polarizzata incidente, proporzionale a  $E_0^2$ , l'intensità  $I_1$  dell'onda uscente, polarizzata lungo l'asse ottico del polarizzatore, è proporzionale a  $E_{0z}^2 = E_0^2 \cos^2\theta$  e possiamo scrivere la relazione

$$I_1 = I_0 \cos^2\theta \quad , \quad (14.37)$$

nota come *legge di Malus*. L'intensità uscente da un polarizzatore colpito da luce rettilineamente polarizzata varia proporzionalmente al quadrato del coseno dell'angolo tra la direzione di polarizzazione incidente e l'asse ottico del polarizzatore.

Se prendiamo in considerazione il seguente sistema (figura 14.54), onda non polarizzata incidente normalmente su un polarizzatore  $P_1$ , onda polarizzata uscente da  $P_1$  che incide a sua volta normalmente su un secondo polarizzatore  $P_2$ , detto *analizzatore*, troviamo una proprietà caratteristica: ruotando l'asse dell'analizzatore così che l'angolo  $\alpha$  tra gli assi ottici di  $P_1$  e  $P_2$  passi da zero a  $2\pi$ , l'intensità trasmessa è massima per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi$  ed è nulla per  $\alpha = \pi/2$  e  $\alpha = 3\pi/2$ . Con gli assi ottici paralleli si ha il massimo di trasmissione, con gli assi ottici incrociati la trasmissione è nulla. Questo comportamento, la cui spiegazione è ovvia sulla base della descrizione data e della legge di Malus (14.37), è esclusivo di un'onda polarizzata rettilineamente, come si vedrà dopo la successiva tabella 14.1: se si interpone un analizzatore su un fascio luminoso e ruotandolo si osserva che ci sono due posizioni di estinzione a  $180^\circ$  tra loro, si può senz'altro concludere che la luce incidente è polarizzata rettilineamente.

### Legge di Malus

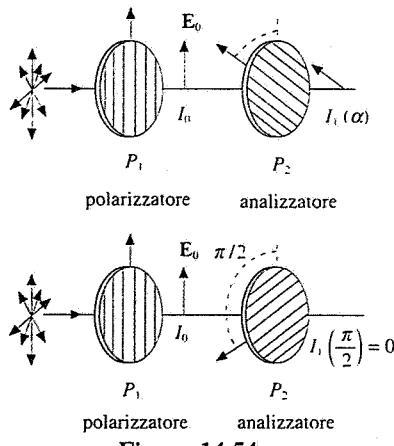


Figura 14.54

Nella tabella 14.1 sono ripresi i risultati della tabella 13.1, che descrivono dal punto di vista dell'intensità i diversi stati di polarizzazione di un'onda piana elettromagnetica, e vengono riportati gli andamenti dell'intensità trasmessa da un analizzatore.  $I$  è l'intensità incidente, la propagazione avviene lungo l'asse  $x$ ,  $\alpha$  è l'angolo tra l'asse ottico dell'analizzatore e l'asse  $y$ .

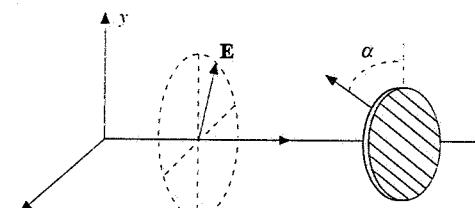
Nel caso che la luce incidente sia polarizzata rettilineamente, con il campo elettrico ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse  $y$ , l'intensità indicata nella tabella 14.1 è ottenuta direttamente dalla legge di Malus (14.37). Per la polarizzazione ellittica si è ripreso, come detto, il contenuto della tabella 13.1, immaginando l'onda scomposta in due componenti  $y$  e  $z$ , sfasate di  $\pi/2$ ; gli altri casi discendono da questo ponendo  $I_y = I_z = I/2$ .

È possibile ottenere gli stessi risultati direttamente, ragionando nel modo seguente. Consideriamo le componenti del campo elettrico di un'onda ellittica incidente,  $E_y = E \cos\theta$ ,

**Tabella 14.1 Intensità  $I_p(\alpha)$  trasmessa dall'analizzatore**

Polarizzazione	Intensità incidente	Intensità trasmessa
----------------	---------------------	---------------------

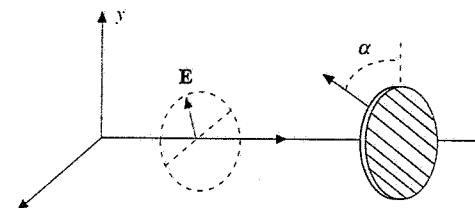
ellittica



$$I = I_y + I_z$$

$$I_p(\alpha) = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha$$

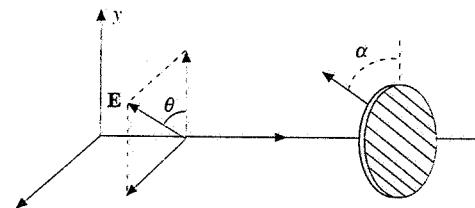
circolare



$$I_y = I_z = \frac{I}{2}$$

$$I_p(\alpha) = \frac{I}{2} \text{ costante al variare di } \alpha$$

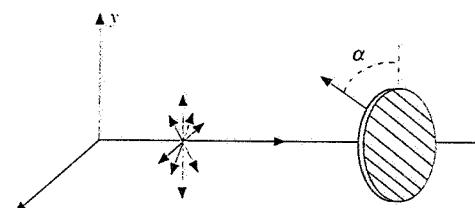
rettilinea



$$I_y = I \cos^2 \theta, I_z = I \sin^2 \theta$$

$$I_p(\alpha) = I \cos^2 (\theta - \alpha)$$

luce ordinaria



$$I_y = I_z = \frac{I}{2}$$

$$I_p(\alpha) = \frac{I}{2} \text{ costante al variare di } \alpha$$

$E_z = E \sin \theta$ , dove  $\theta$  è variabile nel tempo. La proiezione sull'asse dell'analizzatore è

$$E_\alpha = E_y \cos \alpha + E_z \sin \alpha = E \cos \theta \cos \alpha + E \sin \theta \sin \alpha = E \cos(\theta - \alpha)$$

e il quadrato di questa ampiezza vale

$$E_\alpha^2 = E^2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha + E^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + 2 E^2 \sin \theta \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha .$$

D'altra parte è anche vero che  $E_y = E \cos \theta = E_{0y} \cos \omega t$ ,  $E_z = E \sin \theta = E_{0z} \sin \omega t$ , per cui

$$E_\alpha^2 = E_{0y}^2 \cos^2 \omega t \cos^2 \alpha + E_{0z}^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \alpha + 2 E_{0y} E_{0z} \sin \omega t \cos \omega t \sin \alpha \cos \alpha .$$

Di qui segue

$$I_\alpha = \frac{n}{Z_0} (E_\alpha^2)_m = \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0y}^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{n}{Z_0} E_{0z}^2 \sin^2 \alpha = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha ,$$

in quanto il valor medio del terzo membro è evidentemente nullo, essendo la parte variabile  $2 \sin \omega t \cos \omega t$  eguale a  $\sin 2\omega t$ .

Se l'onda incidente è polarizzata rettilineamente  $\theta$  è costante e conviene rifarsi all'espressione  $E_\alpha = E \cos(\theta - \alpha)$  da cui ricaviamo

$$I_\alpha = \frac{n}{Z_0} (E_\alpha^2)_m = \frac{n}{Z_0} \cos^2(\theta - \alpha) (E^2)_m = I \cos^2(\theta - \alpha) .$$

Dall'esame delle espressioni dell'intensità trasmessa è confermato che solo se la luce è polarizzata rettilineamente si può avere intensità nulla; per la luce ellittica si ha soltanto una variazione dell'intensità, che non si annulla mai, e negli altri due casi non si ha nessuna variazione. Occorrono quindi altri metodi per analizzare gli stati di polarizzazione non rettilinei, come vedremo tra poco.

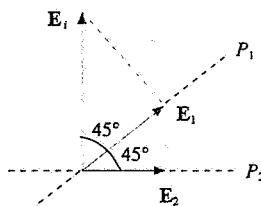


Figura 14.55

#### Esempio 14.6

Un'onda luminosa piana di intensità  $I_0$  polarizzata rettilineamente incide normalmente su un sistema formato da due polarizzatori  $P_1$  e  $P_2$  i cui assi ottici formano un angolo  $\theta = \pi/4$ . L'angolo tra il campo elettrico  $E_i$  dell'onda incidente e l'asse ottico di  $P_1$  è ancora  $\theta = \pi/4$ . Determinare la percentuale di energia trasmessa dal sistema  $P_1 P_2$ .

#### Soluzione

Si applica in successione la legge di Malus (14.37): da  $P_1$  esce un'onda di intensità  $I_1 = I_0 \cos^2 \theta = I_0 / 2$  e da  $P_2$  un'onda di intensità  $I_2 = I_1 \cos^2 \theta = I_0 / 4$ , per cui l'energia trasmessa è il 25% di quella incidente; il resto è stato assorbito e diffuso.

Il sistema permette di ruotare la direzione di polarizzazione dell'onda di  $90^\circ$ ; al variare degli angoli si possono ovviamente realizzare situazioni differenti. Vedremo tra poco un diverso dispositivo, la lamina a mezz'onda, con cui si può ruotare la direzione di polarizzazione di un'onda piana senza perdite significative; però il funzionamento dipende dalla lunghezza d'onda.

#### Esempio 14.7

Un'onda luminosa piana non polarizzata di intensità  $I = 10 \text{ W/cm}^2$  incide con un angolo  $\theta_i = 70^\circ$  sulla superficie di una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Un analizzatore è posto ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda riflessa. Detto  $\alpha$  l'angolo che l'asse ottico dell'analizzatore forma col piano di incidenza, calcolare l'intensità trasmessa dall'analizzatore in funzione di  $\alpha$ .

**Soluzione**

L'angolo di rifrazione si ricava da  $\sin \theta_r / \sin \theta_i = n$  e risulta  $\theta_r = 38.8^\circ$ . L'onda riflessa è la sovrapposizione di due onde incoerenti, le cui intensità si calcolano con (14.29). La prima onda, con il campo elettrico contenuto nel piano di incidenza, ha intensità

$$I'_\pi = \frac{1}{2} r_\pi^2 I = \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan^2(70^\circ - 38.8^\circ)}{\tan^2(70^\circ + 38.8^\circ)} \right] 10 = 0.21 \text{ W/cm}^2,$$

l'intensità della seconda onda, con il campo elettrico contenuto in un piano ortogonale al piano di incidenza, è

$$I'_\sigma = \frac{1}{2} r_\sigma^2 I = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(70^\circ - 38.8^\circ)}{\sin^2(70^\circ + 38.8^\circ)} \right] 10 = 1.50 \text{ W/cm}^2.$$

L'onda riflessa ha intensità  $I_r = I'_\pi + I'_\sigma = 1.71 \text{ W/cm}^2$  ed è parzialmente polarizzata, con grado di polarizzazione (14.30)

$$P_R = \frac{I'_\sigma - I'_\pi}{I'_\sigma + I'_\pi} = 0.754.$$

L'intensità trasmessa dall'analizzatore, ottenuta applicando (14.37), è

$$I_P(\alpha) = I'_\pi \cos^2 \alpha + I'_\sigma \sin^2 \alpha = 0.21 \cos^2 \alpha + 1.50 \sin^2 \alpha$$

e l'onda uscente è polarizzata parallelamente all'asse ottico dell'analizzatore. L'intensità trasmessa è massima per  $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$  e vale  $I_{\max} = 1.50 \text{ W/cm}^2$ , è minima per  $\alpha = 0, \pi$  e vale  $I_{\min} = 0.21 \text{ W/cm}^2$ .

Osserviamo che l'intensità trasmessa avrebbe lo stesso andamento del caso in cui l'onda riflessa fosse polarizzata ellitticamente: con un cristallo dicroico *non* si può distinguere la luce parzialmente polarizzata dalla luce polarizzata ellitticamente.

L'esempio giustifica l'uso degli *occhiali da sole Polaroid* per minimizzare la quantità di luce, riflessa da superficie come quella del mare, che raggiunge gli occhi. Le lenti sono montate con l'asse ottico verticale, in modo che sia contenuto nel piano di incidenza. Così, indipendentemente dall'angolo di incidenza, non viene trasmessa all'occhio la componente perpendicolare al piano di incidenza, quantitativamente sempre di intensità maggiore rispetto alla componente che giace nel piano di incidenza essendo  $r_\sigma^2 > r_\pi^2$  nei casi come quello descritto (vedi paragrafo 14.3). È bene osservare che si tratta solamente di una diminuzione dell'intensità della luce riflessa che arriva all'occhio e non di un effetto di polarizzazione. I *coni* e i *bastoncelli* che costituiscono gli elementi sensori della retina sono *amorfi* e pertanto non sono in grado di distinguere lo stato di polarizzazione della luce che li colpisce.

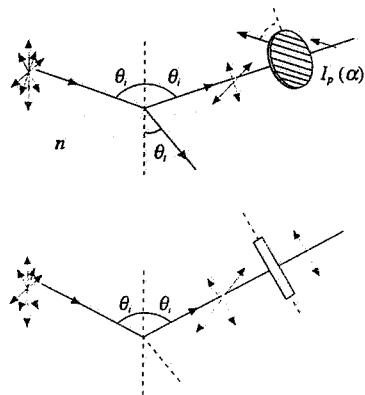


Figura 14.56

**Lamine di ritardo**

Consideriamo una lamina  $L$  di cristallo monoassico non dicroico, caratterizzata dagli indici di rifrazione  $n_o$  e  $n_s$ , tagliata con le superficie parallele all'asse ottico. Assumiamo che la lamina stia nel piano  $y, z$  e che il suo asse ottico sia parallelo all'asse  $y$  (figura 14.57). Un'onda piana elettromagnetica polarizzata rettilineamente, quale quella che si ottiene facendo passare un'onda piana elettromagnetica non polarizzata attraverso un polarizzatore  $P$ , si propaga lungo l'asse  $x$  e incide normalmente sulla lamina (caso C.1, paragrafo 14.6). Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo formato dal campo elettrico  $E$  con l'asse ottico e utilizziamo i risultati della tabella 13.1, possiamo scrivere l'onda incidente come

$$E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx - \omega t).$$

In queste espressioni  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\lambda$  è la lunghezza d'onda nel vuoto (o nell'aria).

Dopo aver attraversato la lamina, di spessore  $d$ , l'onda è rappresentata da

$$E_{\text{str}} = E_y = E_0 \cos \theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_{\text{ord}} = E_z = E_0 \sin \theta \cos(kx + k_o d - \omega t),$$

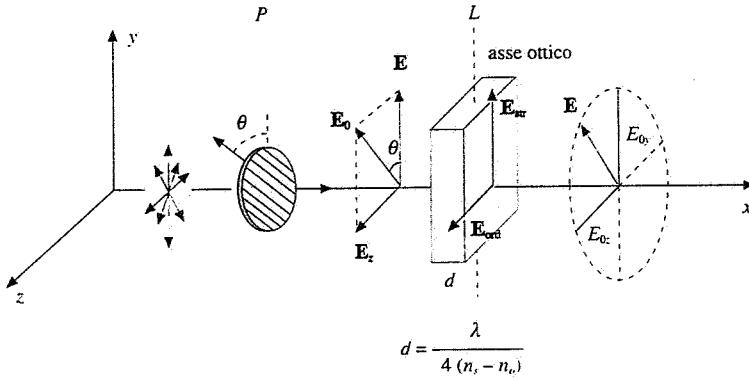


Figura 14.57

dove  $k_s$  e  $k_o$  sono i numeri d'onda dell'onda straordinaria e dell'onda ordinaria. In base a (14.6)  $k_s = kn_s$ ,  $k_o = kn_o$ : vediamo che, mentre le componenti dell'onda entrante sono in fase, la componente straordinaria e la componente ordinaria dell'onda uscente sono sfasate. Il fenomeno è dovuto alla differente velocità delle due onde che impiegano un tempo diverso a percorrere lo spessore  $d$ .

Dette  $\phi_s$  e  $\phi_o$  le rispettive fasi, lo sfasamento è

$$\Delta\phi = \phi_s - \phi_o = (k_s - k_o) d = k (n_s - n_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_o) d \quad : \quad (14.38)$$

l'onda straordinaria è in *anticipo* su quella ordinaria nei cristalli positivi, in ritardo in quelli negativi. Di conseguenza riscriviamo l'onda uscente come

$$E_y = E_0 \cos\theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin\theta \cos(kx + k_s d - \omega t - \Delta\phi). \quad (14.39)$$

In base a quanto visto nei paragrafi 12.5 e 13.2 l'onda emergente dalla lamina risulta in generale *polarizzata ellitticamente*, se l'onda entrante è polarizzata rettilineamente. Sono interessanti alcuni particolari che adesso studiamo.

#### a) Lamina quarto d'onda

Supponiamo che lo sfasamento  $\Delta\phi$  introdotto dalla lamina sia un multiplo intero dispari di  $\pi/2$  ed esprimiamo lo spessore  $d$  a ciò necessario tramite (14.38):

Lamina quarto d'onda

$$\Delta\phi = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{4(n_s - n_o)} (2m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14.40)$$

L'equazione dell'onda uscente dalla lamina è

$$E_y = E_0 \cos\theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = E_0 \sin\theta \sin(kx + k_s d - \omega t).$$

cioè l'onda è *polarizzata ellitticamente* con gli assi dell'ellisse paralleli agli assi coordinati  $y$  e  $z$ : i semiassi valgono  $E_{0y} = E_0 \cos\theta$ ,  $E_{0z} = E_0 \sin\theta$ . Se  $\theta = \pi/4$

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kx + k_s d - \omega t)$$

e l'onda risulta polarizzata circolarmente con il campo elettrico costantemente eguale a  $E_0/\sqrt{2}$ .

Queste lame, dette *quarto d'onda* perché lo spessore è proporzionale a  $\lambda/4$ , trasformano quindi un'onda piana polarizzata rettilineamente in una polarizzata ellitticamente in generale e in una polarizzata circolarmente quando l'angolo tra il campo elettrico  $\mathbf{E}$

dell'onda incidente e l'asse ottico della lamina è  $\theta = \pi/4$ . È vero anche il viceversa: un'onda incidente polarizzata circolarmente esce dalla lamina polarizzata rettilineamente a  $45^\circ$  rispetto all'asse ottico della lamina, se invece la polarizzazione è ellittica l'onda esce polarizzata ad un angolo  $\theta$  tale che  $\tan \theta = E_{0x} / E_{0y}$ .

Nei calcoli precedenti abbiamo assunto  $\Delta\phi = \pi/2$ ; se fosse  $\Delta\phi = 3\pi/2$   $E_z$  cambierebbe di segno. Sia da questo fatto che dal segno di  $\Delta\phi$ , derivante dal segno di  $\Delta n = n_s - n_o$ , dipendono i versi di rotazione sull'ellisse o sulla circonferenza, fissato il segno di  $\theta$ , ovvero viceversa, fissato il verso di rotazione, dipende il segno di  $\theta$ . Per quanto riguarda lo spessore, la (14.40) come scritta vale per cristalli positivi e, prendendo il modulo di  $\Delta n$ , per qualsiasi cristallo.

### b) Lamina mezz'onda

Consideriamo adesso uno sfasamento multiplo dispari di  $\pi$ :

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \quad d = \frac{\lambda}{2(n_s - n_o)} (2m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (14.41)$$

La lamina si chiama *mezz'onda* in quanto lo spessore è proporzionale a  $\lambda/2$ ; essa trasforma l'onda polarizzata rettilineamente nell'onda

$$E_x = E_0 \cos \theta \cos(kx + k_s d - \omega t), \quad E_z = -E_0 \sin \theta \cos(kx + k_s d - \omega t),$$

polarizzata rettilineamente ad angolo  $-\theta$  con l'asse ottico della lamina. La direzione di vibrazione è *ruotata* quindi di un angolo  $\beta = 2\theta$ ; se  $\theta = 45^\circ$  la rotazione è di  $90^\circ$ .

Dato che l'effetto della lamina mezz'onda è quello di cambiare il segno di una delle due componenti dell'onda, quando la luce incidente è polarizzata ellitticamente o circolarmen- te si ha semplicemente un'inversione del senso di rotazione.

Si noti che se lo sfasamento introdotto dalla lamina fosse un *multiplo pari di  $\pi$*  ( $2\pi, 4\pi, \dots$ ), la lamina sarebbe ininfluente.

Sull'argomento lame di ritardo facciamo alcune considerazioni conclusive. L'assorbimento è molto piccolo e in pratica trascurabile; possiamo assumere che le lame non attenuino né l'onda ordinaria né l'onda straordinaria e che l'intensità in uscita sia eguale all'intensità  $I_s + I_o$  dell'onda incidente. Come sottolineato nel paragrafo 13.3 in relazione alla (13.25) una differenza di fase  $\Delta\phi$  non influisce sui valori medi dell'energia, come sono quelli di cui parliamo. *L'effetto della lamina si ha solo sullo stato di polarizzazione di un'onda piana polarizzata.*

Lo spessore per avere un dato effetto dipende da  $\lambda$  e quindi una lamina è quarto d'onda o mezz'onda per una data lunghezza d'onda, cioè per un fascio monocromatico. Gli spessori minimi sono abbastanza piccoli: nella calcite si tratta di  $0.86 \mu\text{m}$  ( $\lambda/4$ ) e di  $1.71 \mu\text{m}$  ( $\lambda/2$ ) se  $\lambda = 0.59 \mu\text{m}$ , nel quarzo i corrispondenti valori sono  $16.18 \mu\text{m}$  e  $32.36 \mu\text{m}$ .

Se la luce incidente non è polarizzata la lamina non ha nessun effetto: l'introduzione di uno sfasamento tra due componenti che sono incoerenti non altera l'incoerenza intrinseca. In definitiva una lamina agisce solamente se c'è un rapporto di fase determinato tra le due componenti, situazione che costituisce la definizione di onda polarizzata.

### Lamina mezz'onda

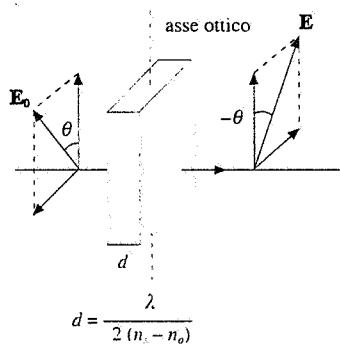


Figura 14.58

### Esempio 14.8

Un'onda piana luminosa di intensità  $I$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  incide su un analizzatore: si osserva che ruotando l'analizzatore l'intensità  $I_p$  trasmessa non varia. Mostrare come l'aggiunta di una lamina quarto d'onda per la luce in esame, ad esempio di calcite, permetta di determinare lo stato di polarizzazione della luce.

### Soluzione

Seguendo la tabella 14.1 stabiliamo che la luce incidente può essere polarizzata circolarmente o non polarizzata. Se non è polarizzata la lamina quarto d'onda non ha effetto e l'intensità trasmessa dall'analizzatore non varia ruotandolo. Se invece la luce è polarizzata circolarmente, all'uscita della lamina quarto d'onda abbiamo un'onda polarizzata rettilineamente con il campo elettrico a  $\pm 45^\circ$  rispetto all'asse ottico della lamina.

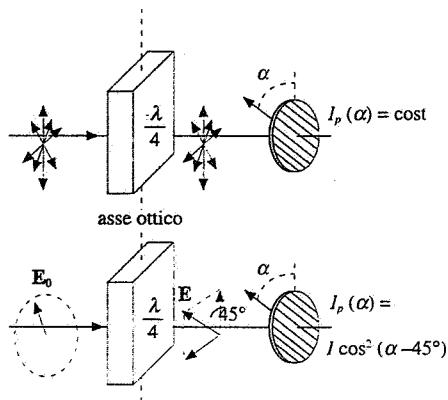


Figura 14.59

come si è appena visto. Ruotando l'analizzatore e detto  $\alpha$  l'angolo tra l'asse ottico dell'analizzatore e l'asse ottico della lamina, l'intensità trasmessa dall'analizzatore è, secondo (14.37),

$$I_p(\alpha) = I \cos^2\left(\alpha \mp \frac{\pi}{4}\right).$$

Con il segno meno essa è nulla per  $\alpha = 3\pi/4, 7\pi/4$ , con il segno più per  $\alpha = \pi/4, 5\pi/4$ , ed è massima nelle rispettive porzioni intermedie.

Con lo stesso sistema si può distinguere se un fascio luminoso è parzialmente polarizzato o ellitticamente polarizzato.

Lo spessore minimo richiesto per la lamina, se è di calcite, vale

$$d = \frac{\lambda}{4(n_s - n_o)} = 0.73 \mu\text{m}.$$

Nella sostanza il funzionamento non cambia aggiungendo uno spessore  $2d, 4d, \dots$  per cui gli spessori utili sono  $0.73 \mu\text{m}, 2.19 \mu\text{m}, 3.65 \mu\text{m}$ , ecc.

## 14.8 Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica

Quasi tutte le sostanze trasparenti isotrope diventano birifrangenti quando sono sottoposte ad un campo elettrico: il comportamento è quello di un cristallo monoassico con asse ottico parallelo al campo elettrico; il fenomeno si chiama *effetto Kerr*.

Sperimentalmente si trova che la differenza tra gli indici di rifrazione straordinario e ordinario è dato da

Effetto Kerr

$$n_s - n_o = K \lambda E^2 ; \quad (14.42)$$

$E^2$  è il quadrato del modulo del campo elettrico applicato,  $\lambda$  la lunghezza d'onda incidente e  $K$  una costante, detta costante di Kerr, che dipende dalla temperatura, decrescendo al crescere di questa.

I valori di  $K$  sono dell'ordine di  $10^{-14} \text{ mV}^{-2}$ : ad esempio nell'acqua  $K = 5.22 \cdot 10^{-14} \text{ mV}^{-2}$ . Uno dei valori maggiori si ha nel nitrobenzolo molto puro, in cui  $K = 2.5 \cdot 10^{-12} \text{ mV}^{-2}$ . Con  $E = 10^6 \text{ V/m}$  e  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ ,  $n_s - n_o = 1.5 \cdot 10^{-6}$ ; per confronto nel quarzo birifrangente naturale  $n_s - n_o = 9.1 \cdot 10^{-3}$ .

Una *cella di Kerr* è schematizzata nella figura 14.60. Un condensatore piano ha come dielettrico nitrobenzolo e il sistema è posto tra due *polarizzatori incrociati*: in assenza di campo elettrico tra le armature l'intensità trasmessa dal secondo polarizzatore è nulla. Quando tramite l'applicazione di una tensione si genera un campo elettrico  $E$  tra le armature, viene introdotto lo sfasamento (14.38) che, utilizzando (14.42), si scrive

$$\Delta\phi = 2\pi d K E^2 ;$$

$d$  è la lunghezza delle armature nel verso della propagazione.

In generale all'uscita della cella l'onda luminosa è *polarizzata ellitticamente* e il secondo polarizzatore trasmette solamente la componente parallela al suo asse ottico.

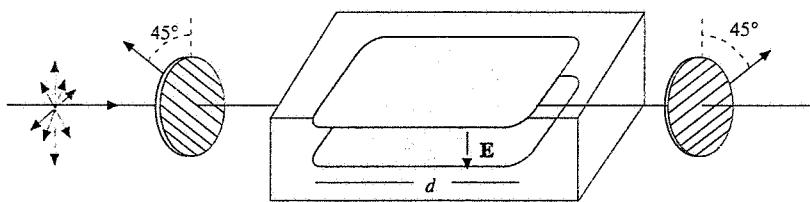


Figura 14.60

La tensione applicata può essere alternata per cui ad esempio  $E = E_0 \cos \omega t$ ; con  $E_0 = 10^6$  V/m e  $d = 0.2$  m si ha

$$\Delta\phi = 2\pi \cdot 0.2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{12} \cos^2 \omega t = \pi \cos^2 \omega t .$$

Lo sfasamento assume nel tempo tutti i valori compresi tra 0 e  $\pi$  e all'uscita della cella la polarizzazione presenta tutte le possibili configurazioni corrispondenti; il secondo polarizzatore trasmette un'intensità *modulata* dalla tensione applicata.

Se  $d$  è tale per cui  $\Delta\phi = \pi$  l'onda resta polarizzata rettilineamente e soltanto ruotata. Scegliendo pari a  $\pi/4$  l'angolo tra l'asse ottico del primo polarizzatore e il campo elettrico, la direzione di polarizzazione viene ruotata di  $\pi/2$  e l'onda è integralmente trasmessa dal secondo polarizzatore. Spegnendo il campo la trasmissione è bloccata e si può realizzare così un *interruttore rapido* per un fascio luminoso.

Alcune sostanze presentano un effetto analogo che però dipende *linearmente* dal campo elettrico e si verifica sia con una disposizione eguale a quella della cella di Kerr sia con il campo elettrico parallelo alla direzione di propagazione. Si parla di *effetto Pockels, trasversale o longitudinale*; come l'effetto Kerr, l'effetto Pockels è usato per modulare o interrompere fasci luminosi e trova notevoli applicazioni nel campo dei laser.

In vari liquidi si ha anche una *birifrangenza magnetica* (*effetto Cotton-Mouton*), che è massima quando  $B$  è ortogonale alla direzione di propagazione e segue una legge analoga alla (14.42),  $n_s - n_o = C \lambda B^2$ ; nel nitrobenzolo  $C = 25 \cdot 10^{-3}$  m<sup>-1</sup> T<sup>-2</sup>, per cui, con  $\lambda = 0.6 \cdot 10^{-6}$  m e  $B = 1$  T,  $n_s - n_o = 1.5 \cdot 10^{-8}$ .

Infine, materiali isotropi come il vetro e il plexiglas diventano birifrangenti se sottoposti a *sollecitazioni meccaniche*. Una sostanza sottoposta a compressione o a trazione si comporta come un cristallo monoassiso con asse ottico parallelo alla forza: la differenza  $n_s - n_o$  è proporzionale alla pressione. La proprietà viene usata per studiare la distribuzione degli sforzi interni in un corpo, realizzandone un modello in materiale trasparente. Ad esempio, didatticamente è molto interessante l'esame di strutture come gli archi delle cattedrali gotiche.

## 14.9 Attività ottica

Alcune sostanze hanno la proprietà di *ruotare* la direzione di polarizzazione di un'onda luminosa piana polarizzata rettilineamente che le attraversi. Osservando lungo il verso di propagazione la luce trasmessa, queste sostanze sono dette *destrogire* o *levogire* a seconda che la *rotazione* avvenga in senso *orario* o *antiorario*.

Tale proprietà, nota come *attività ottica*, è posseduta da soluzioni di sostanze come lo zucchero, la canfora, la trementina e da cristalli come il quarzo, che in natura esiste in due forme, una destrogira e una levogira (nel quarzo è conveniente osservare il fenomeno con luce che si propaga nella direzione dell'asse ottico, così da non avere effetti di birifrangenza). L'attività ottica è ricondotta a particolari forme di simmetria delle molecole, ma non alla loro disposizione all'interno della sostanza per quanto riguarda soluzioni e liquidi puri, e a specifiche strutture cristalline nei cristalli.

L'angolo di rotazione  $\alpha$  della direzione di polarizzazione e lo spessore  $h$  attraversato sono legati dalla legge

$$\alpha = K h ,$$

in cui la costante  $K$ , detta *potere rotatorio*, viene di norma espressa in gradi/cm (invece che in rad/m); si trova che  $K$  dipende notevolmente dalla lunghezza d'onda. Nelle soluzioni vale la *legge di Biot*

$$\alpha = k c h \quad \text{ovvero} \quad K = k c ,$$

dove  $c$  è la *concentrazione*; la costante  $k$ , chiamata *potere rotatorio specifico della soluzione*, rappresenta l'angolo di rotazione per unità di percorso e unità di concentrazione. Dalla misura di  $\alpha$ , noto  $k$ , si determina la concentrazione di sostanze otticamente attive. Lo strumento (*polarimetro*) è in sostanza una cella contenente la soluzione posta tra due polarizzatori incrociati; dalla rotazione del secondo polarizzatore necessaria per ottenere l'estinzione si determina  $\alpha$ .

Alla lunghezza d'onda  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$   $K = 217$  gradi/cm nel quarzo e  $6.65$  gradi/cm in una soluzione di  $1 \text{ g/cm}^3$  di saccarosio in acqua.

Effetto Cotton-Mouton

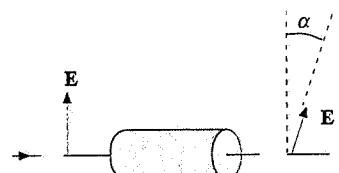


Figura 14.61

Potere rotatorio

Fresnel ipotizzò che il fenomeno fosse dovuto a una *birifrangenza circolare*, nel senso che ora precisiamo. Un'onda polarizzata rettilineamente si può sempre pensare come sovrapposizione di due onde polarizzate circolarmente di eguale ampiezza, una destrogiro e una levogiro. Supponendo che la propagazione avvenga lungo l'asse  $x$  e che la polarizzazione dell'onda incidente sia lungo l'asse  $z$ , abbiamo

$$\mathbf{E} = 2 E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z = \begin{aligned} & E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z \\ & -E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

A secondo membro i primi due termini rappresentano un'onda circolare levogiro, gli altri due un'onda circolare destrogiro, la somma totale è l'onda incidente rettilineo.

Seguendo Fresnel, ammettiamo che le due componenti circolari si propaghino nel mezzo otticamente attivo con velocità diversa (dove il nome di *birifrangenza circolare*) date da  $v_l = c / n_l$  e  $v_d = c / n_d$ . All'uscita tra di esse c'è la differenza di fase (14.38).

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_l - n_d) h ,$$

e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & E_0 \sin(kx - \omega t + \Delta\phi) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\phi) \mathbf{u}_z & \text{onda levogiro} \\ & -E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z & \text{onda destrogiro} \end{aligned}$$

Sommando le componenti si ottiene

$$E_y = 2 E_0 \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right), \quad E_z = 2 E_0 \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cos \left( kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right)$$

che è un'onda polarizzata rettilineamente ad angolo  $\alpha$  rispetto all'onda incidente tale che

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0z}} = \tan \frac{\Delta\phi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} (n_l - n_d) h = K h .$$

Si spiega così la legge trovata sperimentalmente e si dà un'espressione esplicativa per il potere rotatorio.

Dai dati numerici precedenti risulta:

$$\text{quarzo } n_l - n_d = 4.07 \cdot 10^{-3} , \text{ soluzione di saccarosio } n_l - n_d = 1.25 \cdot 10^{-4} .$$

### Effetto Faraday

Alcune sostanze che non presentano attività ottica diventano otticamente attive quando sono sottoposte ad un campo magnetico. Il fenomeno è detto *effetto Faraday* e per esso vale la *legge di Verdet*:

Legge di Verdet

$$\alpha = V B h \cos \theta_B ;$$

$\theta_B$  è l'angolo tra  $\mathbf{B}$  e la direzione di propagazione dell'onda piana incidente polarizzata rettilineamente,  $V$  la *costante di Verdet*. L'effetto è massimo se la luce si propaga parallelamente a  $\mathbf{B}$ .

Nell'acqua  $V = 2.18 \cdot 10^2$  gradi/mT, nel solfuro di carbonio  $V = 7.24 \cdot 10^2$  gradi/mT. In quest'ultima sostanza, con  $h = 12.4$  cm,  $B = 1$  T e  $\theta_B = 0$  si ottiene  $\alpha \approx 90^\circ$ .

Tra attività ottica naturale e magnetica c'è una differenza importante. Nel primo caso, se la direzione di polarizzazione ruota di  $\alpha$  per un certo verso di percorrenza, la rotazione è di  $-\alpha$  per propagazione in verso opposto e un'onda che ripercorre il campione nei due versi, ad esempio perché riflessa da uno specchio, non subisce nessuna rotazione. In altre parole, se la rotazione è destrogiro andando nel verso di  $x$ , è ancora destrogiro andando nel verso di  $-x$ : nello stesso sistema di riferimento, prima è  $\alpha$ , dopo è  $-\alpha$ . Nell'attività magnetica invece la rotazione è sempre dello stesso segno e risulta di  $2\alpha$  per un'onda che ripercorre il campione nei due versi.

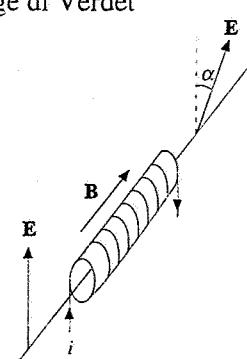


Figura 14.62

### 14.10 Riflessione su una superficie metallica

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto le proprietà di riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche, essenzialmente nel campo visibile, quando esse incontrano un mezzo dielettrico. Vogliamo adesso discutere brevemente la riflessione da parte di una superficie metallica, fenomeno su cui si basa tra l'altro il funzionamento degli *specchi*.

Abbiamo trattato nel paragrafo 13.10 il comportamento di un'onda elettromagnetica in un mezzo conduttore. In particolare riprendiamo la parte che riguarda le alte frequenze, quando per l'indice di rifrazione si trova l'espressione approssimata

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Le pulsazioni di plasma hanno valori dell'ordine di  $10^{16}$  rad/s per cui le pulsazioni visibili obbediscono alla  $\omega^2 < \omega_p^2$  e in corrispondenza  $n^2$  risulta minore di 1. Ricaviamo quindi il valore immaginario puro

$$n = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = i n_i \quad , \quad n_i = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}}$$

Sappiamo già che in questa situazione non può esserci propagazione nel metallo. Per semplicità mettiamoci in condizioni di incidenza normale dal vuoto al metallo, così che per i campi elettrici vale la (14.24):

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - i n_i}{1 + i n_i} = \frac{\sqrt{1 + n_i^2}}{\sqrt{1 + n_i^2}} \frac{e^{-i\phi}}{e^{i\phi}} = e^{-2i\phi} \quad ,$$

dove abbiamo usato la notazione polare  $\rho e^{i\phi}$  per un numero complesso (vedi nota alla fine del paragrafo 11.4). Il rapporto  $I_r / I_i$  delle intensità riflesse e incidente è eguale al rapporto dei quadrati dei moduli e vale 1, in quanto il modulo di un esponenziale complesso è sempre unitario: l'intensità riflessa è eguale a quella incidente, non c'è trasmissione.

In effetti, scriviamo il campo trasmesso come  $E_t = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , essendo  $z$  l'asse di incidenza, normale alla superficie del metallo. Però

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = i \frac{\omega}{c} n_i$$

e nel metallo si ha un campo che decresce esponenzialmente.

$$E_t = E_0 e^{-z/z_0} e^{i\omega t} \quad , \quad z_0 = \frac{c}{\omega n_i} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

Con luce visibile ( $\omega = 4 \cdot 10^{15}$  rad/s) su rame ( $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{16}$  rad/s),  $z_0 \approx 2 \cdot 10^{-8}$  m; dopo uno spessore di circa  $10^{-7}$  m il campo è praticamente nullo.

La situazione reale è leggermente diversa: il coefficiente di riflessione è vicino a 1, ma non esattamente 1: l'approssimazione adottata non è evidentemente sufficiente. Ad ogni modo il risultato vale anche per incidenza obliqua e indica che una superficie metallica riflette quasi tutta l'energia luminosa che la colpisce.

I metalli che hanno il maggior coefficiente di riflessione nel visibile, pari a circa 0.95, sono l'argento e l'alluminio. Andando verso l'ultravioletto il coefficiente diminuisce: si ricordi che per  $\omega > \omega_p$  i metalli sono trasparenti (paragrafo 13.10); invece nell'infrarosso la riflessione è praticamente totale.

Dato che l'alluminio, se esposto all'aria per tempi molto lunghi, resta sostanzialmente inalterato a differenza dell'argento, gli specchi vengono fatti preferibilmente con una sottile pellicola di alluminio, depositata per evaporazione sotto vuoto su un supporto della forma voluta, ad esempio piana, sferica, cilindrica, parabolica. Negli specchi di uso comune non scientifico l'alluminio è depositato sul retro di una lastra di vetro per non esporre la superficie speculare a danneggiamenti.

# Interferenza

## 15.1 Somma di onde. Fenomeni di interferenza. Sorgenti coerenti e incoerenti

Nell'esposizione delle proprietà delle onde abbiamo incontrato varie situazioni in cui due o più onde della stessa natura si sovrapponevano in una certa regione di spazio e in particolare in un punto. Secondo il *principio di sovrapposizione*, basato sulla linearità dell'equazione differenziale delle onde, la perturbazione complessiva prodotta in un dato istante in un determinato punto da un insieme di sorgenti di onde è la somma delle singole perturbazioni che ciascuna sorgente produrrebbe da sola, agendo in assenza delle altre sorgenti; perché il risultato sia vero è necessario che la presenza contemporanea di più sorgenti non modifichi il comportamento della singola sorgente.

Un esempio di sovrapposizione è quello descritto col nome di *battimento* (paragrafi 12.8 e 12.11): due onde piane armoniche di frequenza diversa, entrambe propagantis lungo l'asse  $x$ , danno luogo in un punto fisso a una particolare oscillazione non armonica ovvero a una certa struttura che si propaga lungo l'asse  $x$  con velocità diversa da quella delle onde componenti. Più in generale la somma di molte onde può costituire un *pacchetto d'onde* (paragrafo 12.10). In questi casi la differenza di fase tra le varie onde, pur non essendo costante, obbedisce a una legge precisa, cioè non è casuale.

Anche il fenomeno dell'*onda d'urto* (paragrafo 12.12) si spiega con la somma di numerose onde emesse lungo la traiettoria dell'oggetto che causa la perturbazione, il quale si muove nel mezzo con velocità superiore a quella delle onde meccaniche tipiche del mezzo. Classicamente la stessa spiegazione è valida per l'analogo effetto che si presenta con le onde elettromagnetiche (*effetto Cerenkov*, paragrafo 13.11). Con riferimento a quest'ultimo, possiamo dire che la radiazione emessa dai dipoli indotti dal passaggio della particella carica non ammette una superficie d'onda se la velocità  $v$  della particella è inferiore alla velocità  $c/n$  della luce nel mezzo, mentre se  $v > c/n$  esiste una superficie su cui le singole onde sono tutte in fase: in una situazione la somma delle onde dà risultato nullo, nell'altra la somma si propaga nel mezzo causando un effetto (impulsivo) osservabile.

In questo capitolo vogliamo sviluppare la descrizione dei fenomeni che avvengono quando un certo numero di onde della stessa natura si sovrappongono in un punto  $P$  dello spazio. Assumeremo che le onde siano armoniche e abbiano tutte la stessa frequenza e vedremo che le caratteristiche della sovrapposizione in  $P$  dipendono dalla direzione di propagazione, dalla direzione di vibrazione e dalla differenza di fase tra le varie onde.

La differenza di fase tra due onde che interessano il punto  $P$  in generale contiene due contributi: una *differenza di fase intrinseca* tra le due sorgenti che inviano onde in  $P$  e una differenza di fase dovuta all'eventuale *differenza nel percorso* compiuto da ciascuna onda per andare dalla sorgente al punto  $P$ , differenza che può

essere soltanto geometrica o dipendere anche dalla natura fisica dei mezzi attraversati, come risulterà chiaro in seguito.

Quando la differenza di fase tra due onde in un qualsiasi punto è costante nel tempo le sorgenti delle due onde si dicono *coerenti*. Quando invece questa circostanza non si verifica ovvero si verifica per tempi molto brevi rispetto all'intervallo di osservazione, le sorgenti sono dette *incoerenti*.

Il termine *interferenza* è riferito propriamente a quei fenomeni di sovrapposizione ottenuti con onde emesse da due o più sorgenti coerenti. La possibilità di produrre interferenza è una caratteristica generale delle grandezze che si propagano per onde; ne è conferma il fatto che l'interferenza si verifica con ogni tipo di onda e che la trattazione analitica è indipendente dalla natura delle onde in esame. Anzi l'interferenza è considerata una proprietà così caratteristica delle onde che la sua osservazione viene presa come prova definitiva della natura ondulatoria di una grandezza. Che la luce si propagasse per onde venne accettato solo dopo gli esperimenti di interferenza compiuti da Young nel 1801; anche l'esistenza delle onde elettromagnetiche previste dalla teoria di Maxwell venne provata per la prima volta da Hertz nel 1888 con un esperimento di interferenza.

I metodi per individuare o realizzare sorgenti coerenti atte a produrre interferenza sono invece dipendenti dal tipo di onda e addirittura per uno stesso tipo di onde, quelle elettromagnetiche, variano a seconda della frequenza, come vedremo nel paragrafo 15.2 per le onde sonore e le onde hertziane e nel paragrafo 15.3 per le onde luminose. In questi paragrafi e in quelli successivi esporremo numerose e interessanti applicazioni dell'interferenza; soltanto per citare alcuni casi, ci occuperemo della determinazione delle lunghezze d'onda e degli indici di rifrazione, della misura precisa delle lunghezze, dell'emissione di antenne, della produzione dei suoni di uno strumento musicale, della formazione dei colori su una sottile pellicola (bolla di sapone, velo d'olio sull'acqua) illuminata dalla luce del sole.

Nella trattazione analitica è essenziale l'operazione di somma di due grandezze variabili sinusoidalmente lungo lo stesso asse, aventi la stessa pulsazione e differenza di fase costante, cioè coerenti. Richiamiamo perciò i metodi che abbiamo introdotto nel primo volume e in questo.

Il primo *metodo*, chiamato *vettoriale* o dei *vettori rotanti* o dei *fasori*, è stato descritto nel paragrafo 9.4 del primo volume a proposito della somma di moti armonici e ripreso nel paragrafo 11.3 per l'analisi di circuiti lineari in regime alternato. Lo applichiamo adesso per calcolare la somma di due onde in un punto  $P$ . Supponiamo che le onde si propaghino entrambe lungo l'asse  $x$ , che vibrino lungo la stessa direzione e che il punto  $P$  disti  $x_1$  dalla sorgente della prima onda e  $x_2$  dalla sorgente delle seconde; le espressioni delle due onde in  $P$  sono

$$\xi_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Le costanti  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dipendono solo dalle sorgenti, invece le costanti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  contengono anche la fase dovuta al percorso. Ciascuna oscillazione in  $P$  è rappresentata come la proiezione sull'asse orizzontale di un vettore rotante con velocità angolare  $\omega$  e la somma si calcola come proiezione della risultante dei vettori (figura 15.1). Essa ha l'espressione

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \alpha)$$

dove modulo  $A$  e fase  $\alpha$  sono dati da

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta}, \quad \delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \phi_2 - \phi_1 + k(x_2 - x_1) \quad (15.1)$$

Sorgenti coerenti

Interferenza

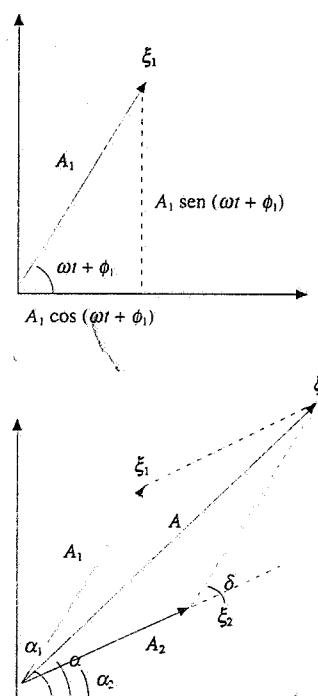


Figura 15.1

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} . \quad (15.2)$$

Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, l'intensità misurata nel punto  $P$  è

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta , \quad (15.3)$$

indicando con  $I_1$  e  $I_2$  rispettivamente l'intensità misurata in  $P$  dovuta all'onda  $\xi_1$  e all'onda  $\xi_2$ . Notiamo esplicitamente che  $A$  e  $I$  non dipendono dal segno di  $\delta$ .

Nel caso particolare di uguali ampiezze  $A_1 = A_2 = A_0$  si ha

$$A = \sqrt{2 A_0^2 (1 + \cos \delta)} = 2 A_0 \cos \frac{\delta}{2} \quad (15.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}{\frac{\cos \alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} . \quad (15.5)$$

L'onda risultante, servendosi di (15.4), (15.5), (15.1) e delle espressioni di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos (\omega t + \alpha) = 2 A_0 \cos \frac{\delta}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) = \\ &= 2 A_0 \cos \left[ \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} + \frac{k(x_2 - x_1)}{2} \right] \cos \left[ \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t \right] . \end{aligned} \quad (15.6)$$

Per l'intensità abbiamo, con  $I_1 = I_2 = I_0$ ,

$$I = 2 I_0 (1 + \cos \delta) = 4 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} . \quad (15.7)$$

Il risultato più importante è che l'ampiezza della somma dipende dalla differenza di fase: il valore *massimo* della somma si ha quando le onde sono *in fase*, il *minimo* quando le onde sono in *opposizione di fase*. I vari casi sono riassunti nella tabella 15.1.

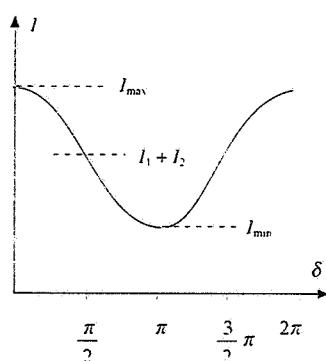


Figura 15.2

Tabella 15.1. Somma di due oscillazioni armoniche sullo stesso asse		sfasamento	ampiezze diverse	ampiezze eguali
max	$\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$	$A = A_1 + A_2$	$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2}$	$A = 2A_0$
min	$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$	$A =  A_1 - A_2 $	$I = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2}$	$A = 0$

L'altro metodo di somma è il *metodo simbolico*, che utilizza i numeri complessi, ma che nella sostanza è simile al metodo vettoriale (paragrafo 11.4). Usando gli stessi simboli abbiamo:

$$\xi_1 = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + i A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),$$

$$\xi_2 = A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)} = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + i A_2 \sin(\omega t + \alpha_2),$$

$$\begin{aligned} \xi = \xi_1 + \xi_2 &= (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} = [A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + i(A_1 \sin \alpha_1 + \\ &+ A_2 \sin \alpha_2)] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Il quadrato del modulo di  $\xi$  si ottiene moltiplicando  $\xi$  per il suo complesso coniugato  $\xi^*$ :

$$\begin{aligned} \xi \xi^* &= (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} (A_1 e^{-i\alpha_1} + A_2 e^{-i\alpha_2}) e^{-i\omega t} = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}] = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Abbiamo ritrovato (15.1); anche per la fase di  $\xi$  si arriva a (15.2).

Sia il metodo vettoriale che il metodo simbolico possono essere iterati per ottenere la somma di un numero qualsiasi di onde emesse da sorgenti coerenti.

Ripetiamo che entrambi i metodi si applicano a oscillazioni con fasi diverse, ma che avvengono sullo stesso asse: quindi se le oscillazioni sono dovute a onde longitudinali le direzioni di propagazione devono coincidere, se le onde sono trasversali esse devono oscillare nella stessa direzione.

Osserviamo infine che la condizione di massimo o di minimo o di qualsiasi altro valore intermedio realizzata in un punto si mantiene nel tempo fintanto che la differenza di fase rimane costante: l'oscillazione risultante ha sempre la stessa ampiezza e la stessa fase e l'intensità, risultato di una media su molti periodi, è costante. L'interferenza cioè è un *fenomeno stazionario*, funzione della posizione del punto, ma non del tempo.

## 15.2 Interferenza prodotta da due sorgenti.

### Caso delle onde hertziane e delle onde sonore

Consideriamo due sorgenti coerenti  $S_1$  e  $S_2$  di onde armoniche sferiche: queste hanno la stessa pulsazione  $\omega$  e si propagano in un mezzo indefinito isotropo con velocità  $v$ , per cui la loro lunghezza d'onda è  $\lambda = v/\omega = 2\pi v/\omega$  e il loro numero d'onde è  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ .

Se le sorgenti hanno la stessa potenza  $P$ , le onde in un punto  $Q$  distante  $r_1$  da  $S_1$  e  $r_2$  da  $S_2$  sono rappresentate da

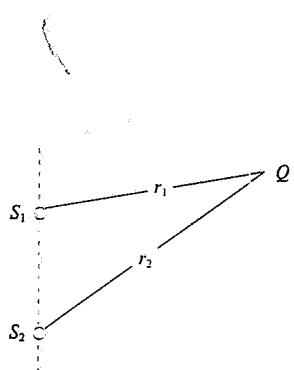
$$\xi_1 = \xi_{01} \cos(kr_1 - \omega t) = \frac{\xi_0}{r_1} \cos(kr_1 - \omega t),$$

$$\xi_2 = \xi_{02} \cos(kr_2 - \omega t) = \frac{\xi_0}{r_2} \cos(kr_2 - \omega t),$$

in accordo con (12.50) che dà la dipendenza dalla distanza dell'ampiezza dell'onda; abbiamo anche sottinteso che la differenza di fase intrinseca sia nulla ( $\phi_1 = \phi_2$ ).

### Metodo simbolico

**Figura 15.3**



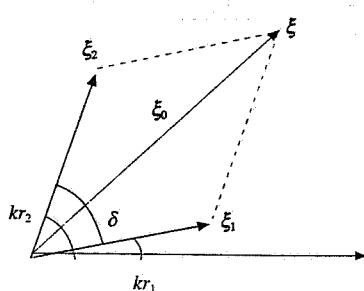


Figura 15.4

Supponiamo per il momento che le onde siano trasversali e che nel punto  $Q$  abbiano la stessa direzione di vibrazione (ortogonale al piano della figura 15.3), così da poterle trattare nella somma come quantità scalari. Secondo la (15.1) l'ampiezza dell'onda risultante nel punto  $Q$  è

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2 \xi_{01} \xi_{02} \cos \delta} \quad (15.8)$$

e la differenza di fase costante, dovuta soltanto alla differenza di cammino, è

$$\delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \quad . \quad (15.9)$$

L'intensità (15.3) nel punto  $Q$  risulta

Intensità

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \quad , \quad (15.10)$$

essendo  $I_1 = P / 4\pi r_1^2$  e  $I_2 = P / 4\pi r_2^2$  le intensità nel punto  $Q$  dovute rispettivamente alle sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ .

La differenza di fase tra le due onde che interferiscono, l'ampiezza e l'intensità dell'onda risultante hanno un valore costante nel tempo in qualsiasi punto  $Q$ , ma variano da punto a punto, essendo funzioni di  $r_2 - r_1$ .

Si dice che l'*interferenza* è *costruttiva* nei punti in cui le onde sono in fase; secondo la tabella 15.1 e la (15.9) ciò si verifica se

Interferenza costruttiva

$$\delta = 2m\pi \quad , \quad \Delta r = r_2 - r_1 = m \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.11)$$

cioè quando la differenza di cammino è un multiplo intero della lunghezza d'onda. In questa situazione l'intensità assume il valore massimo

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \quad .$$

L'*interferenza* è *distruttiva* nei punti in cui le onde sono in opposizione di fase e ciò comporta che la differenza di cammino sia un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda:

Interferenza distruttiva

$$\delta = (2m' + 1)\pi \quad , \quad \Delta r = r_2 - r_1 = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.12)$$

Il valore minimo dell'intensità è

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2} \quad .$$

In un qualsiasi piano contenente le due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  la condizione  $r_2 - r_1 =$  costante individua una coppia di iperboli aventi  $S_1$  e  $S_2$  come fuochi; siccome il problema è simmetrico rispetto all'asse passante per  $S_1$  e  $S_2$ , il luogo dei punti  $r_2 - r_1 =$  costante è costituito da due iperbolidi di rotazione rispetto a tale asse. Le superficie di massima intensità  $r_2 - r_1 = m\lambda$  si dicono *superficie ventrali*, quelle di minima intensità  $r_2 - r_1 = (2m' + 1)\lambda/2$  *superficie nodali*.

Supponiamo ora che, detta  $d$  la distanza tra le due sorgenti, il punto  $Q$  si trovi a distanza  $r$  dal punto medio tra  $S_1$  e  $S_2$  molto maggiore di  $d$  (figura 15.6). Abbiamo  $r_1 \approx r_2 \approx r$ , le due direzioni di propagazione si possono ritenere parallele e quindi

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (15.13)$$

In questa approssimazione, detta delle grandi distanze, le ampiezze e le intensità delle due onde sono eguali; da (15.4), (15.7) e (15.13) si ricava

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{2 \xi_{01} (1 + \cos \delta)} = 2 \xi_{01} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \xi_{01} \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}, \\ I(r, \theta) &= 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4 I_1 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}, \quad I_1 = \frac{P}{4\pi r^2}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Le condizioni (15.11) e (15.12) di massima e minima intensità diventano

$$\begin{aligned} \max \quad \sin \theta &= m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, I_{\max} = 4 I_1 \\ \min \quad \sin \theta &= (2m' + 1) \frac{\lambda}{2d} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, I_{\min} = 0. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Nella figura 15.7 è riportata  $I(\theta)$  per una distanza  $r$  fissata. Si vede che esistono direzioni in cui l'intensità massima è pari a quattro volte l'intensità prodotta da una singola sorgente intervallate da direzioni in cui l'intensità è nulla.

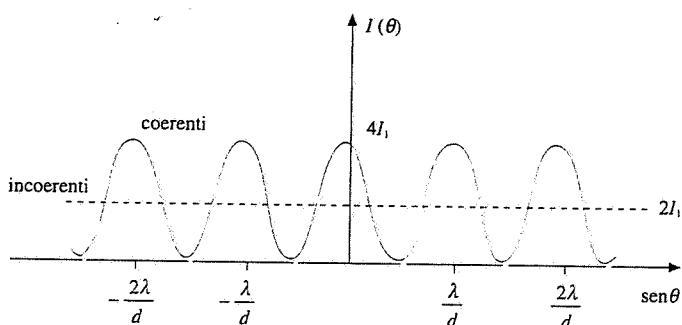


Figura 15.7

I valori di  $m$  e  $m'$  nelle (15.15) non possono crescere indefinitamente: infatti deve essere soddisfatta la condizione  $\sin \theta \leq 1$  ovvero  $\theta \leq \pi/2$  se  $m$  e  $m'$  sono positivi e le equivalenti diseguaglianze se  $m$  e  $m'$  sono negativi (il problema è simmetrico rispetto a  $\theta = 0$ ). Se la lunghezza d'onda è minore o eguale alla separazione tra le sorgenti,  $\lambda/d \leq 1$ ,  $m$  può assumere, oltre al valore zero che è sempre possibile, almeno un altro valore, ci sono cioè almeno due direzioni di massima intensità; se invece  $\lambda > d$  c'è solo il massimo a  $\theta = 0$  ( $m = 0$ ). Analogamente, se  $\lambda > 2d$  non c'è nessun minimo mentre se  $\lambda \leq 2d$  c'è almeno un minimo. Vedremo due casi numerici negli esempi 15.1 e 15.2.

Se le sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  hanno una differenza di fase intrinseca  $\phi_2 - \phi_1$  costante nel tempo le conclusioni non cambiano salvo che  $\delta$  è data dalla somma di  $\phi_2 - \phi_1$  e di

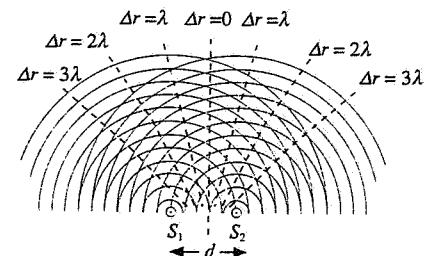


Figura 15.5

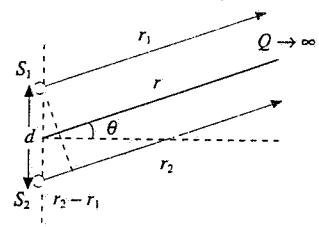


Figura 15.6

$k(r_2 - r_1)$  e di conseguenza cambiano le (15.11) e (15.12): ad esempio il massimo di intensità per  $\delta = 0$  non implica più  $r_1 = r_2$ , bensì  $r_2 - r_1 = (\phi_1 - \phi_2) \lambda / 2\pi$ . Una situazione di questo tipo verrà descritta nell'esempio 15.8.

Invece il fenomeno è molto diverso se la differenza di fase intrinseca varia *casualmente* nel tempo, cioè se le due sorgenti sono *incoerenti*. A  $\delta$  costante bisogna sostituire una  $\delta'(t) = \delta + \Delta\phi(t)$  e l'intensità in una certa direzione, nel caso di grande distanza, si ottiene da (15.14) mediando sul termine variabile:

$$I(r, \theta) = 4 I_1 \left[ \cos^2 \frac{\delta'(t)}{2} \right]_m = 2 I_1 \quad ;$$

essa non dipende più da  $\theta$  e risulta in ogni punto eguale alla somma delle intensità prodotte indipendentemente dalle singole sorgenti (vedi figura 15.7). *Con le sorgenti incoerenti non c'è più interferenza*. Lo stesso risultato si ottiene da (15.10) essendo la media del coseno eguale a zero. È implicito che le variazioni della fase avvengono in tempi molto brevi rispetto al tempo medio di osservazione del fenomeno.

Dal confronto tra i diversi comportamenti con sorgenti coerenti e incoerenti si conclude che la *coerenza* tra le due onde *opera una ridistribuzione della potenza complessiva*  $P_R = 2P$  emessa dalle due sorgenti, che viene concentrata in certe direzioni e rarefatta in altre, nel rispetto però della conservazione dell'energia. Infatti integrando l'intensità su una superficie sferica di raggio  $r$  si ha nei due casi:

$$(P_R)_{\text{incoer}} = 2 I_1 4 \pi r^2 = 2 \frac{P}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = 2 P \quad ,$$

$$\begin{aligned} (P_R)_{\text{coer}} &= \oint I(r, \theta) d\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 4 \frac{P}{4\pi r^2} \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= 2 P \int_0^\pi \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \sin \theta d\theta = 2 P \quad ; \end{aligned}$$

l'ultimo integrale è eguale a 1 in quanto

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) = 2 \quad , \\ \int_0^\pi \cos^2 x \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin^2 x \sin \theta d\theta = \frac{F}{2} = 1 \quad . \end{aligned}$$

Il risultato si estende ad un numero qualunque di sorgenti a due a due incoerenti per cui l'intensità complessiva in un dato punto prodotta da  $N$  sorgenti incoerenti, ciascuna di intensità  $I_i$ , è rispettivamente nel caso di sorgenti diverse e di sorgenti eguali

Intensità per  $N$  sorgenti incoerenti

$$I_R = \sum_i^N I_i \quad , \quad I_R = N I_1 \quad . \quad (15.16)$$

Nel paragrafo 15.5 esamineremo il problema dell'interferenza di  $N$  sorgenti coerenti.

### Onde hertziane

Le antenne dipolari che abbiamo studiato nel paragrafo 13.6 sono un esempio di sorgenti di onde elettromagnetiche con frequenze inferiori a  $10^9$  Hz (onde hertziane). Due sorgenti di questo tipo possono essere fatte oscillare in fase, o con una differenza di fase costante, pilotandole con un unico generatore di tensione alternata; le lunghezze dei cavi che portano la corrente alternata dal generatore alle antenne vengono regolate così da produrre la differenza di fase intrinseca voluta. Di norma il punto  $Q$  in cui misuriamo l'intensità è molto lontano dalle antenne e possiamo applicare l'approssimazione delle grandi distanze. Un caso pratico è trattato nell'esempio che segue, dove per semplicità sono considerate antenne con emissione isotropa.

#### Esempio 15.1

Due antenne poste a distanza  $d = 10$  m emettono in fase alla frequenza  $v = 3 \cdot 10^7$  Hz. La potenza irradiata isotropicamente da ciascuna antenna vale  $P_1 = 100$  kW. Calcolare come varia l'intensità a 10 km dalle sorgenti e i valori massimi dei campi elettrico e magnetico a tale distanza.

#### Soluzione

La lunghezza d'onda è  $\lambda = c/v = 10$  m, eguale a  $d$ . Da (15.15) segue:

$$\begin{array}{lll} \text{max} & \sin\theta = m & \text{due direzioni} \\ & m = 0, \theta = 0 & m = 1, \theta = 90^\circ, \\ \text{min} & \sin\theta = m' + 0.5 & \text{una direzione} \\ & m' = 0, \theta = 30^\circ & . \end{array}$$

A 10 km di distanza l'intensità di ciascuna sorgente è  $I_1 = P_1 / 4\pi r^2 = 7.96 \cdot 10^{-5}$  W/m<sup>2</sup> e quindi  $I_{\max} = 4I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>,  $I_{\min} = 0$ . Nella figura 15.8 è riportato il diagramma dell'intensità, secondo la stessa rappresentazione della figura 13.22: la curva tratteggiata dà l'intensità  $2I_1 = 1.59 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup> che si otterrebbe se le sorgenti fossero incoerenti. La figura è stata completata tenendo conto della simmetria rispetto a  $\theta = 0$  e della simmetria rispetto all'asse contenente le sorgenti; rispetto a questo asse c'è anche simmetria di rotazione nello spazio.

L'espressione analitica (15.14) in funzione di  $\theta$  a  $r$  fisso dà  $I(\theta) = 4I_1 \cos^2(\pi \sin\theta) = 3.18 \cdot 10^{-4} \cos^2(3.14 \sin\theta)$  W/m<sup>2</sup>.

L'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico di ciascuna sorgente è, da (13.26) e (13.7),

$$E_1 = E_2 = \sqrt{2 Z_0 I_1} = 0.245 \text{ V/m} , \quad B_1 = B_2 = \frac{E_1}{c} = 8.17 \cdot 10^{-10} \text{ T} .$$

Nelle direzioni  $\theta = 0$  e  $\theta = 90^\circ$  lungo cui l'interferenza è costruttiva risulta:

$$E = 2 E_1 = 0.490 \text{ V/m} , \quad B = 2 B_1 = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ T} .$$

### Onde sonore

L'approssimazione delle grandi distanze ci consente di utilizzare l'espressione semplice (15.13) per la differenza  $r_2 - r_1$  in funzione della distanza tra le sorgenti e dell'angolo di osservazione e di assumere eguali le ampiezze delle sorgenti, se queste hanno eguale potenza. Nel caso delle onde sonore, che sono longitudinali, c'è un ulteriore vantaggio: le direzioni di propagazione e quindi quelle di vibrazione si possono ritenere parallele e ciò permette di applicare direttamente i risultati del paragrafo 15.1, come abbiamo fatto per le onde sferiche trasversali; nelle vicinanze delle sorgenti la trattazione analitica sarebbe più complicata.

Fatta questa premessa, alle onde sonore si estendono tutte le considerazioni fatte finora, come si vede nell'esempio 15.2, che ricalca il caso esposto nell'esempio 15.1.

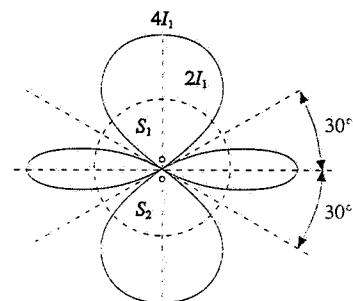


Figura 15.8

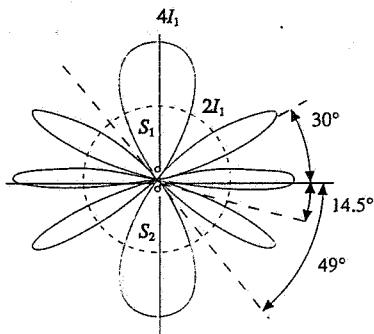


Figura 15.9

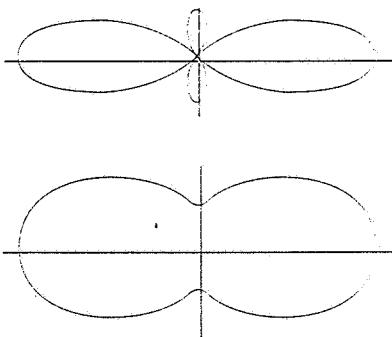


Figura 15.10

**Esempio 15.2**

Due altoparlanti distanti  $d = 1$  m sono eccitati in fase da un amplificatore alla frequenza  $v = 688$  Hz. Le onde emesse dagli altoparlanti sono sferiche e si propagano con velocità  $v = 344$  m/s; la potenza di ciascun altoparlante è  $P_1 = 5$  W, emessa isotropicamente. Calcolare come varia l'intensità  $I(\theta)$  con la direzione di ascolto ad una distanza  $r = 100$  m dagli altoparlanti.

**Soluzione**

La lunghezza d'onda del suono è  $\lambda = v/v = 0.5$  m per cui  $\lambda/d = 0.5$ . Abbiamo da (15.15):

$$\max \quad \sin\theta = 0.5 \text{ m} \quad m = 0, \theta = 0 \quad m = 1, \theta = 30^\circ \quad m = 2, \theta = 90^\circ ,$$

$$\min \quad \sin\theta = 0.5 \text{ m} + 0.25 \quad m' = 0, \theta = 14.48^\circ \quad m' = 1, \theta = 48.59^\circ ,$$

con  $I_{\max} = 4 P_1 / 4\pi r^2 = 1.59 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>,  $I_{\min} = 0$ .

All'intensità massima corrisponde il livello sonoro (12.42)

$$B = 10 \log \frac{I_{\max}}{I_0} = 82 \text{ dB} .$$

L'intensità varia con  $\theta$  secondo la (15.14):

$$I(\theta) = 4 I_1 \cos^2(2\pi \sin\theta) = 1.59 \cdot 10^{-4} \cos^2(6.28 \sin\theta) \text{ W/m}^2 .$$

Il diagramma è riportato in figura 15.9; come in figura 15.8 la linea tratteggiata si riferisce a due sorgenti incoerenti. Rispetto al caso dell'esempio 15.1 il diagramma dell'intensità presenta più lobi, cioè più direzioni di massimo (e di minimo) perché il rapporto  $\lambda/d$  è minore. Nella figura 15.10 sono riportati i casi  $\lambda = 1.5 d$  e  $\lambda = 3 d$ .

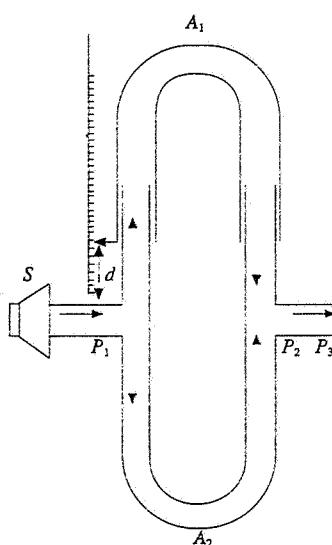
**Tubo di Quincke**

Figura 15.11

Un dispositivo completamente diverso con cui si produce l'interferenza di due onde sonore è il *tubo di Quincke*, riportato in figura 15.11. Un suono di determinata frequenza, prodotto da un altoparlante  $S$ , viene inviato tramite un tubo in un punto  $P_1$  dove c'è un giunto a forma di  $T$ . Se i diametri dei due tubi sono eguali l'onda in  $T$  si divide in due onde di eguale ampiezza, necessariamente coerenti, che si propagano nei due rami  $A_1$  e  $A_2$  per ricongiungersi nel punto  $P_2$ . Lungo il tubo  $P_2 P_3$  si hanno due onde sovrapposte la cui differenza di fase, che determina l'ampiezza dell'onda risultante, dipende dalla differenza dei cammini  $r_1$  e  $r_2$  nei due rami  $A_1$  e  $A_2$ .

La lunghezza del cammino  $r_2$  è mantenuta fissa e si varia  $r_1$  facendo scorrere il tubo  $A$  che è telescopico. Quando la differenza  $\Delta r = r_1 - r_2$  è zero o un multiplo intero della lunghezza d'onda  $\lambda$  si percepisce in  $P_3$  un massimo dell'intensità sonora; se invece  $\Delta r$  è un multiplo intero dispari di  $\lambda/2$  in  $P_3$  non si percepisce alcun suono.

La differenza tra i valori di  $r_1$  che danno luogo a due massimi consecutivi o a due minimi consecutivi è eguale alla lunghezza d'onda dell'onda sonora. Nota la frequenza  $v$  del suono emesso dalla sorgente si deduce la velocità di propagazione  $v = \lambda v$  dell'onda nel gas contenuto nel tubo. Variando la pressione e calcolando la densità del gas nel tubo è possibile verificare la (9.39) del paragrafo 12.2; in un determinato stato termodinamico dalla misura di  $v$  si può ricavare  $\gamma$ , rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante.

Ad esempio, supponiamo che sia  $v = 1715$  Hz; con  $v = 343$  m/s (tubo pieno d'aria a 20°C) risulta  $\lambda = 0.2$  m = 20 cm. Posto lo zero della scala indicata in figura 15.11 nella posizione per cui  $r_1 = r_2$ , per uno spostamento  $d = 5$  cm si ha  $\Delta r = 10$  cm =  $\lambda/2$  e in  $P_3$  non si percepisce nulla; nella posizione  $d = 10$  cm invece  $\Delta r = 20$  cm =  $\lambda$  e in  $P_3$  c'è un massimo di intensità, come con  $d = 0$ ; e così via, per ogni successivo spostamento di 5 cm si ha un'alternanza di massimi e minimi. La valutazione di queste posizioni può essere fatta direttamente con l'orecchio con un'incertezza di qualche millimetro; siccome  $\Delta\lambda/\lambda = \Delta d/d \approx 2 \text{ mm}/50 \text{ mm} = 0.04$ , la misura della lunghezza d'onda, e quindi della velocità nota la frequenza, avviene con una precisione dell'ordine di qualche per cento.

### 15.3 Interferenza di due onde luminose. Esperimento di Young

Nel caso delle onde luminose per produrre due o più sorgenti coerenti bisogna procedere in modo diverso da quello indicato per le antenne e gli altoparlanti, a causa della natura stessa delle comuni sorgenti di questo tipo di onde.

Le sorgenti di luce ordinaria, quali il sole e le lampade a incandescenza, sono composte da un numero enorme di atomi che oscillano a frequenze dell'ordine di  $v_0 = 5 \cdot 10^{14}$  Hz emettono onde luminose; l'emissione di un singolo atomo avviene in un tempo dell'ordine di  $\Delta t = 10^{-8}$  s (paragrafi 12.10 e 13.8) e non può quindi essere monocromatica. Si tratta piuttosto di un *pacchetto d'onde*, lungo  $c\Delta t \approx 3$  m. Però il rapporto tra l'intervallo  $\Delta v = (\Delta t)^{-1}$  di frequenze che costituiscono il pacchetto e la frequenza centrale  $v_0$  è  $\Delta v / v_0 \approx 10^{-7}$ , per cui l'effetto non è percepibile con strumentazione normale. Scriviamo pertanto l'onda come  $E = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ ; durante il tempo  $\Delta t$  la direzione di  $\mathbf{E}$  e la fase  $\phi$  restano costanti. Un altro atomo si disegnita in modo *scorrelato* rispetto al primo, emettendo un pacchetto d'onde con gli stessi  $E_0$  e  $\omega_0$ , ma con il piano di polarizzazione e la fase  $\phi$  diversi dai precedenti; questo è vero per qualsiasi coppia di atomi presa in considerazione.

L'onda emessa da una *sorgente ordinaria* è dunque la risultante dei pacchetti d'onda elementari emessi dai singoli atomi: le rispettive fasi sono distribuite in maniera completamente casuale così che la fase dell'onda varia con frequenza molto elevata; inoltre l'onda non è polarizzata.

In conclusione, sia le onde provenienti da due punti di una sorgente estesa che le onde provenienti da due sorgenti diverse risultano essere incoerenti e non danno luogo a fenomeni di interferenza. L'intensità totale prodotta in un punto  $Q$  da un insieme di  $N$  sorgenti di luce ordinaria, come  $N$  lampadine, si calcola tramite (15.16) sommando semplicemente le intensità prodotte in  $Q$  dalle singole sorgenti.

Osserviamo che in un tempo dell'ordine di  $10^{-8}$  s, durante il quale l'onda emessa dalla sorgente elementare compie circa  $10^6$  oscillazioni, due onde emesse da due atomi diversi sono coerenti, con una differenza di fase intrinseca  $\phi_2 - \phi_1$  che è costante. Esse possono quindi interferire e le corrispondenti variazioni spaziali di intensità, simili a quelle calcolate nel paragrafo 15.2, possono essere rivelate se si dispone di strumenti con le caratteristiche adatte, capaci cioè di misurare un'intensità luminosa in un tempo così breve. In effetti questo esperimento è stato compiuto nel 1956 da Hanbury Brown e Twiss dando il risultato atteso. Se invece lo strumento con cui si misura l'intensità, non avendo una risoluzione temporale così elevata, deve attendere un tempo notevolmente maggiore di  $\Delta t$  per dare il risultato, avviene che si sovrappone l'interferenza di due pacchetti con una certa  $\Delta\phi$  con quella di due altri pacchetti con un'altra  $\Delta\phi$  e così via: le posizioni che sono di massimo in un caso possono essere di minimo in un altro e alla fine si osserva solo un'intensità costante. È come avere un grandissimo numero di figure tipo 15.7, spostate una rispetto all'altra: il risultato che si ottiene è la media, cioè l'intensità indicata dalla linea tratteggiata, e le sorgenti appaiono incoerenti.

Un metodo per ottenere due o più sorgenti coerenti di luce ordinaria è quello esposto alla fine del paragrafo 14.2, consistente nell'introdurre lungo il cammino di un'onda sferica uno schermo opaco in cui sono praticati  $N$  fori: le onde emesse da tali fori hanno differenza di fase costante. In sostanza con questo artificio da un singolo pacchetto d'onda hanno origine  $N$  pacchetti tutti con le stesse caratteristiche: si tratta sempre della stessa onda che viene suddivisa e per questa ragione il metodo si chiama *divisione del fronte d'onda*. Le singole sorgenti secondarie hanno la stessa fase e la stessa polarizzazione: una variazione di fase della sorgente primaria si trasmette allo stesso modo alle sorgenti secondarie e altrettanto fa una variazione del piano di polarizzazione. Concludiamo che gli  $N$  fori sono  $N$  sorgenti coerenti di luce ordinaria.

Il principio di Huygens-Fresnel nella formulazione di Kirchhoff fornisce una

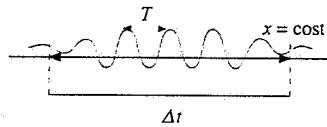


Figura 15.12

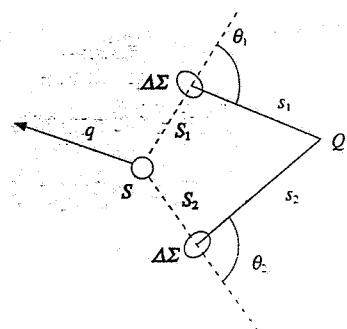


Figura 15.13

descrizione quantitativa completa delle onde emesse dalle sorgenti secondarie; in particolare l'ampiezza è data dalla (14.3), riassunta nella figura 15.13.

### L'esperimento di Young

Il primo a produrre in laboratorio l'interferenza di due onde luminose fu Young nel 1801, con il dispositivo mostrato schematicamente nella figura 15.14. Un fascio di luce ordinaria monocromatica incide su uno schermo in cui è praticata una fessura  $S_0$  lunga e sottile, che funge da sorgente primaria dell'esperimento. Le

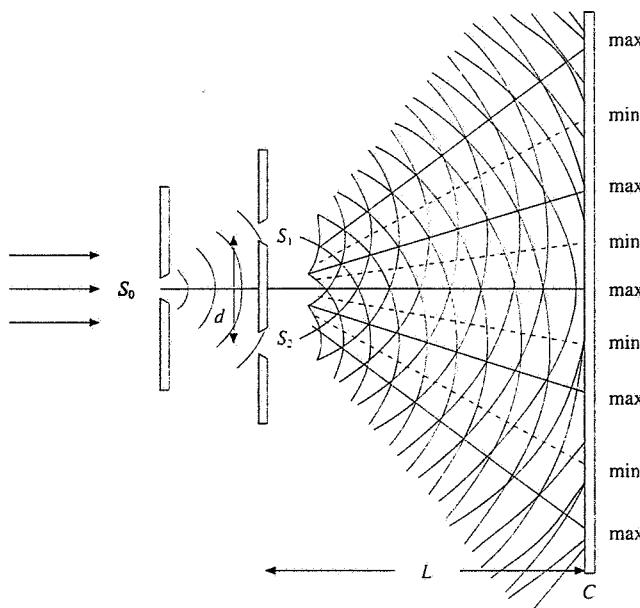


Figura 15.14

### Frange di interferenza

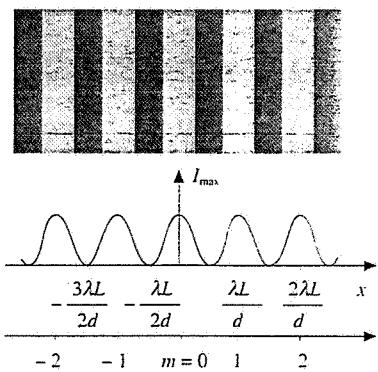


Figura 15.15

onde uscenti da questa fessura arrivano su un secondo schermo in cui sono praticate due fessure sottili  $S_1$  e  $S_2$ , parallele alla precedente ed equidistanti dall'asse del dispositivo (asse  $z$ ); le due fessure agiscono come una coppia di sorgenti coerenti. La luce emessa da  $S_1$  e  $S_2$  produce su uno schermo  $C$ , posto a distanza  $L$  dalle sorgenti grande rispetto alla loro separazione  $d$ , una figura visibile, detta figura di interferenza, che consiste in una serie di strisce chiare e scure, parallele alle fessure, chiamate *frange di interferenza*. Le *frange chiare* corrispondono a *massimi di intensità* (interferenza costruttiva), ottenuti nei punti in cui le onde arrivano in fase, mentre le *frange scure* segnalano i *minimi di intensità* (interferenza distruttiva), ottenuti nei punti in cui le onde arrivano in opposizione di fase. Sull'intersezione dell'asse del dispositivo con lo schermo si osserva una frangia chiara. La figura 15.15 mostra l'aspetto delle frange con luce rossa ordinaria.

Applichiamo ora i risultati del paragrafo 15.2 per calcolare le posizioni dei massimi e minimi e le variazioni dell'intensità luminosa sullo schermo in funzione della distanza  $x$  dal centro  $O$  (figura 15.16). Nell'ipotesi  $L \gg d$  si può scrivere  $\sin\theta = \tan\theta \approx \theta = x/L$  e quindi, dalle (15.14) e (15.15),

$$I(x) = 4 I_0 \cos^2 \frac{\pi d n x}{\lambda_0 L} \quad (15.17)$$

$$\max \quad \theta = m \frac{\lambda_0}{nd} \quad , \quad x = m \frac{\lambda_0 L}{nd} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15.18)$$

$$\min \quad \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda_0}{2nd} \quad , \quad x = (2m' + 1) \frac{\lambda_0 L}{2nd} \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In queste formule  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda nel vuoto e  $\lambda = \lambda_0 / n$  è la lunghezza d'onda nel mezzo di indice di rifrazione  $n$  in cui si esegue l'esperimento.

Nei dispositivi interferenziali si dà il nome di *frangia centrale* a quella corrispondente a una *differenza di fase nulla*; le altre frange chiare sono numerate partendo da quella centrale:  $m = \pm 1$  individua le due frange adiacenti a quella centrale,  $m = \pm 2$  le due immediatamente successive e così via. Nel dispositivo di Young la frangia centrale sta sull'asse del sistema.

Essendo certamente  $d \gg \lambda$  (tipicamente  $d$  è dell'ordine del millimetro mentre  $\lambda$  è dell'ordine di  $10^{-3}$  mm), la successione di massimi e minimi è molto più frequente di quanto visto negli esempi del paragrafo 15.2. Il passo dei massimi è  $\Delta x = \lambda_0 L / nd$  e la sua misura in aria, noti  $L$  e  $d$ , fornisce  $\lambda_0$ : fu così che Young determinò per la prima volta la lunghezza d'onda di una radiazione luminosa.

L'intensità massima  $I_{\max} = 4 I_1$  è costante nelle diverse frange chiare se l'intensità  $I_1$  di ciascuna sorgente non dipende da  $\theta$ . In realtà sappiamo che nell'intensità  $I_1$  compare il quadrato del *fattore di inclinazione* (paragrafo 14.2),

$$f^2(\theta) = \left( \frac{1 + \cos\theta}{2} \right)^2$$

L'effetto però non è molto grande: con  $\theta = 30^\circ$   $f^2(\theta) = 0.87$ . Un effetto quantitativamente più rilevante, che discuteremo nel paragrafo 16.2, proviene dalla larghezza finita delle fenditure  $S_1$  e  $S_2$ , che provoca una diminuzione ben più marcata dell'intensità all'aumentare di  $\theta$ . Per tali motivi la figura di interferenza effettivamente osservata consiste in un numero limitato di frange nell'intorno dell'asse del sistema ( $\theta = 0$ ).

Due ulteriori considerazioni sono necessarie, a causa della natura delle onde elettromagnetiche che interferiscono.

La prima riguarda la condizione  $d \ll L$ , essenziale per l'osservazione delle frange di interferenza quando l'esperimento viene eseguito con luce ordinaria non polarizzata. Ricordiamo che un'onda non polarizzata, come quelle emesse da  $S_1$  e da  $S_2$ , si può sempre scomporre in due onde di eguale intensità, polarizzate secondo direzioni ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione: prendiamo queste due direzioni una ortogonale al piano del disegno (figura 15.17) e l'altra nel piano del disegno. Affinché si formi la figura di interferenza occorre che i campi elettrici  $E_1$  e  $E_2$  delle due onde siano polarizzati secondo la medesima direzione; questo è sempre vero per le componenti di  $E_1$  e  $E_2$  ortogonali al piano del disegno, ma lo è per le componenti nel piano del disegno solo se  $d \ll L$ , come mostrato nella figura.

La seconda considerazione deriva dal fatto che le onde emesse da  $S_1$  e  $S_2$  non sono onde armoniche e come tali di durata e lunghezza infinita. Supponendo che la sorgente sia costituita da un singolo atomo, questo è un emettitore di impulsi di durata  $\Delta t \approx 10^{-8}$  s e di lunghezza  $\Delta x \approx 3$  m. Per poter osservare interferenza in un certo punto dello schermo è necessario che in quel punto si sovrappongano quasi totalmente i due pacchetti d'onde provenienti da  $S_1$  e  $S_2$ , originati dallo stesso pacchetto proveniente da  $S_0$ : solo così la differenza di fase e il piano di polarizzazione dei due campi elettrici rimangono costanti durante tutto il tempo in cui si sovrappongono. Questa condizione è verificata finché la differenza di cammino che i due

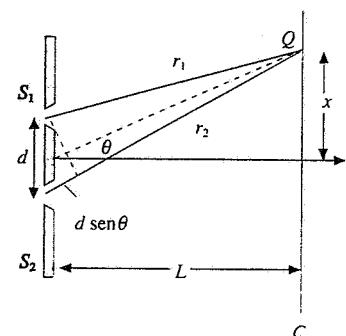
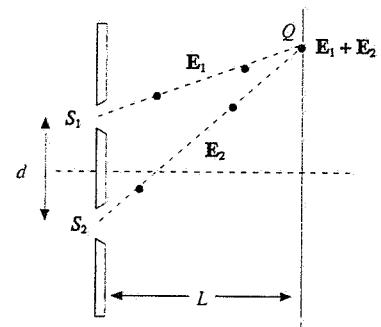


Figura 15.16



Fattore di inclinazione

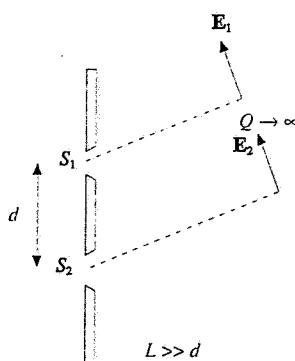
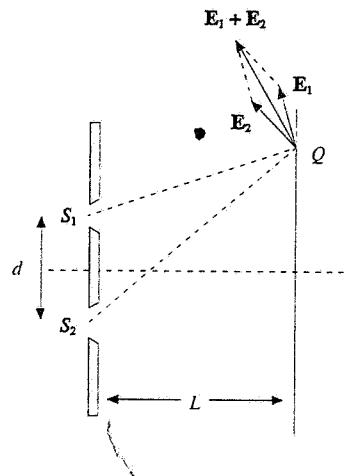


Figura 15.17

pacchetti devono percorrere per raggiungere lo stesso punto dello schermo è molto minore della loro lunghezza  $\Delta x$ .

Il ragionamento rimane valido a maggior ragione per una sorgente composta da un grandissimo numero di atomi dal momento che la figura di interferenza è il risultato di numerosissimi processi elementari, in ognuno dei quali interferiscono i due pacchetti d'onde ricavati da un singolo processo di emissione atomica. Per questa ragione  $\Delta t$  e  $\Delta x$  sono chiamati *tempo e lunghezza di coerenza*.

Nell'esperimento di Young le differenze di cammino sono pari al massimo a qualche decina di lunghezza d'onda e la suddetta considerazione non è essenziale; essa lo diventa in quei dispositivi in cui le differenze di cammino possono arrivare al metro. Esperimenti di interferenza con grandissime differenze di cammino si realizzano con la luce *laser* che ha tempi di coerenza dell'ordine di  $10^{-3}$  s e lunghezze di coerenza dell'ordine di centinaia di chilometri (paragrafo 12.10).

### Esempio 15.3

In un dispositivo di Young la distanza tra le fenditure è  $d = 0.5$  mm e lo schermo dista  $L = 80$  cm dal piano delle fenditure. Se la lunghezza d'onda incidente è  $\lambda_0 = 400$  nm calcolare la posizione dei massimi di interferenza quando l'esperimento è eseguito in aria ( $n = 1$ ) e in acqua ( $n = 1.33$ ).

#### Soluzione

Da (15.18) calcoliamo le posizioni dei massimi di interferenza nei due casi:

$$\text{aria} \quad x = \frac{\lambda_0 L}{d} m = 0.64 \text{ m in millimetri} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{acqua} \quad x = \frac{\lambda_0 L}{nd} m = 0.48 \text{ m in millimetri} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

I massimi di intensità distano 0.64 mm in un caso e 0.48 mm nell'altro. L'effetto dell'aumento dell'indice di rifrazione è quello di addensare maggiormente le frange: si passa da 1.56 frange / mm a 2.08 frange / mm. Su questo fatto si basa un metodo di misura dell'indice di rifrazione.

### Esempio 15.4

In un dispositivo di Young con  $n = 1$  si osserva che la distanza tra le due frange di ordine  $m = 5$  e  $m = -5$  è  $\Delta x_1 = 12$  mm quando la lunghezza d'onda è  $\lambda_1 = 600$  nm, mentre è  $\Delta x_2 = 8$  mm quando la lunghezza d'onda è  $\lambda_2$ . Calcolare  $\lambda_2$ .

#### Soluzione

Dato che  $x(m=5) = 5 \lambda_1 L / d$  e  $x(m=-5) = -5 \lambda_1 L / d$  si ha:

$$\Delta x_1 = \frac{10 \lambda_1 L}{d} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{10 \lambda_2 L}{d}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{2}{3} \lambda_1 = 400 \text{ nm}.$$

L'esempio fornisce un metodo per misure relative di lunghezze d'onda. Non si tratta di un metodo molto preciso ( $\Delta \lambda / \lambda \approx 1\%$ ) principalmente perché le frange non sono sottili e quindi la distanza tra i massimi non è ben definibile. Vedremo in seguito altri dispositivi interferenziali che permettono di eseguire misure più accurate.

**Esempio 15.5**

Un dispositivo di Young ( $d = 0.2 \text{ mm}$ ,  $L = 40 \text{ cm}$ ,  $n = 1$ ) è illuminato da una sorgente di luce naturale nella quale sono contenute, approssimativamente con la stessa intensità, tutte le lunghezze d'onda da  $\lambda_R = 700 \text{ nm}$  (rosso) a  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  (violetto). Sullo schermo in corrispondenza dell'asse del dispositivo si osserva una frangia chiara, ai lati della quale c'è una successione di frange colorate. Descrivere la formazione di queste frange.

**Soluzione**

La *frangia centrale* è *bianca* in quanto la posizione del massimo di ordine  $m = 0$  non dipende dalla lunghezza d'onda; invece ne dipendono le posizioni degli altri massimi, secondo (15.18). Precisamente si trova prima il massimo di ordine  $m = 1$  per la luce di lunghezza d'onda minore (violetto) e via via tutti gli altri massimi fino al rosso. Per tre specifiche lunghezze d'onda abbiamo, utilizzando anche (15.17),

$$\begin{array}{lll} \lambda_V = 400 \text{ nm} & x_{\max} = 0.8, 1.6, 2.4, \dots & I_V / 4 I_1 = \cos^2(3.93x) \\ \lambda_G = 550 \text{ nm} & x_{\max} = 1.1, 2.2, 3.3, \dots & I_G / 4 I_1 = \cos^2(2.86x) \\ \lambda_R = 700 \text{ nm} & x_{\max} = 1.4, 2.8, 4.2, \dots & I_R / 4 I_1 = \cos^2(2.24x) \end{array} \text{ } x \text{ in millimetri.}$$

Nella figura 15.18 sono mostrate le intensità relative per le lunghezze d'onda  $\lambda_V$  e  $\lambda_R$ , che stanno agli estremi della banda visibile.

La *colorazione* dopo la frangia bianca centrale è ottenuta per *sottrazione*: appena fuori dal centro le lunghezze d'onda più brevi sono le prime a passare dall'interferenza costruttiva a quella distruttiva e il relativo colore diminuisce fino a scomparire dallo spettro, per poi ricomparire mentre lo stesso fenomeno si ripete per altre lunghezze d'onda; quindi in ogni punto vengono a mancare dalla luce bianca alcune lunghezze d'onda che interferiscono in modo più distruttivo di altre. La successione dei colori, detta *successione di Newton*, è caratteristica di tutti i dispositivi a frangia centrale bianca: dal bianco si passa al marrone chiaro, rosso, blu, verde, arancione, rosso, violetto, verde, violetto.

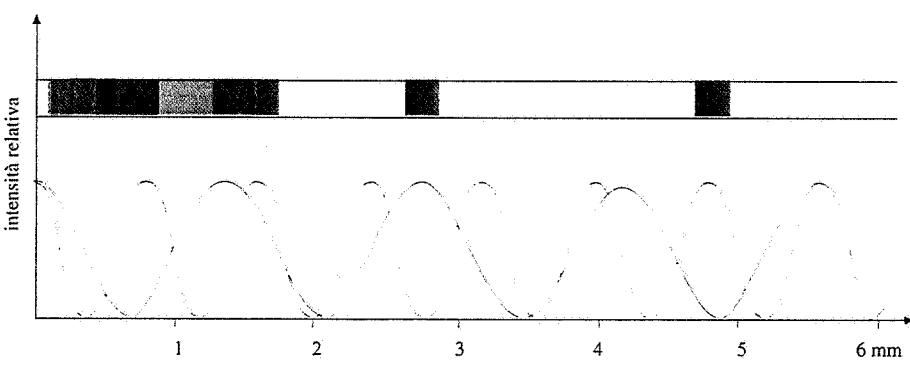


Figura 15.18

**Esempio 15.6**

In un esperimento di Young con luce ordinaria monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$  si pone davanti a ciascuna fenditura un polarizzatore. Detto  $\alpha$  l'angolo tra gli assi del polarizzatore e  $I_1$  l'intensità trasmessa da una singola fenditura, calcolare come varia l'intensità sullo schermo in funzione di  $\alpha$ . In particolare per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  trovare i valori di  $I_{\max}$  e  $I_{\min}$ .

**Soluzione**

Indichiamo con  $E_1 = E_0 \cos \omega t$  e  $E_2 = E_0 \cos(\omega t + \delta)$  i valori dei campi elettrici in un punto dello schermo; i vettori  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  formano un angolo  $\alpha$  tra loro per cui il quadrato del valore del campo elettrico risultante è

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \omega t + E_0^2 \cos^2 (\omega t + \delta) + 2 E_0^2 \cos \omega t \cos (\omega t + \delta) \cos \alpha .$$

Il terzo termine si scrive

$$2 E_0^2 \cos \omega t \cos \alpha (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) = 2 E_0^2 (\cos^2 \omega t \cos \alpha \cos \delta - \sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha \sin \delta) .$$

Nell'operazione di media che porta all'intensità contribuisce solo la parte quadratica in  $\cos \omega t$ . Pertanto

$$(E^2)_m = E_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos \alpha \cos \delta \right) = E_0^2 (1 + \cos \alpha \cos \delta) ,$$

$$I = \varepsilon v (E^2)_m = \varepsilon v E_0^2 (1 + \cos \alpha \cos \delta) = 2 I_1 (1 + \cos \alpha \cos \delta) ,$$

$$\text{essendo } I_1 = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 .$$

Con  $\alpha = 0$ , assi dei polarizzatori paralleli.

$$I = 2 I_1 (1 + \cos \delta) = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad , \quad I_{\max} = 4 I_1 \quad , \quad I_{\min} = 0 \quad ,$$

che è il risultato (15.14): l'*interferenza è completa*.

Quando gli assi dei polarizzatori sono ortogonali,  $\alpha = \pi/2$ , si ottiene

$$I = 2 I_1$$

e l'intensità è costante, qualunque sia il valore di  $\delta$ : *non c'è interferenza*.

Per qualsiasi altro valore di  $\alpha$  l'intensità  $I = 2 I_1 (1 + \cos \alpha \cos \delta)$  dipende dalla differenza di fase  $\delta$  in modo meno netto che per  $\alpha = 0$ . A seconda del punto dello schermo che si considera  $I$  varia tra i valori

$$I_{\max} = 2 I_1 (1 + \cos \alpha) \quad , \quad I_{\min} = 2 I_1 (1 - \cos \alpha) \quad ,$$

non si ha mai  $I = 0$  e possiamo dire che l'*interferenza è parziale*.

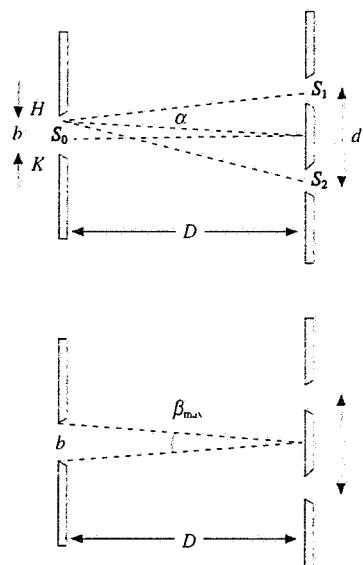


Figura 15.19

#### Nota. Limite sulla larghezza della sorgente $S_0$ nell'esperimento di Young

Supponiamo che la fenditura  $S_0$ , la quale funge da sorgente primaria, sia larga  $b$  e disti  $D$  dal piano delle fenditure  $S_1$  e  $S_2$ .  $S_0$  equivale a una serie di sorgenti rettilinee di larghezza infinitesima. Se consideriamo la sorgente vicina all'estremo  $H$  di  $S_0$ , questa dà origine in  $S_1$  e  $S_2$  a due onde aventi una differenza di fase (intrinseca)

$$\phi_H = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{2D} d = \frac{\pi b d}{\lambda D}$$

dato che la differenza di cammino è  $\alpha d$  e che  $\alpha D = b/2$  (vedi figura 15.19). La sorgente vicina all'estremo  $K$  dà origine a due onde con la differenza di fase

$$\phi_K = -\phi_H = -\frac{\pi b d}{\lambda D}$$

Sullo schermo queste due coppie di sorgenti provocano ciascuna un sistema di frange.

Quando

$$\phi = \phi_H - \phi_K = \frac{2\pi b d}{\lambda D}$$

vale  $\pi$ , le frange chiare di un sistema coincidono con quelle scure dell'altro. Chiaramente, si vuole restare lontano da questa situazione così che, a maggiore ragione, ne resti lontana qualsiasi altra coppia di sorgenti elementari compresa tra  $H$  e  $K$ . Pertanto vogliamo

$$\frac{2\pi b d}{\lambda D} < \pi \Rightarrow \frac{b}{D} < \frac{\lambda}{2d} = 2\alpha = \beta_{\max}$$

L'angolo  $\beta$  sotto cui la sorgente è vista dal centro del sistema  $S_1, S_2$  deve essere inferiore a  $\beta_{\max}$ . Con i dati numerici dell'esempio 15.3  $\beta_{\max} = 0.4 \cdot 10^{-3}$  rad: se  $D = 1$  m,  $b$  deve essere inferiore a 0.4 mm.

### Cammino ottico

Prima di esaminare alcune applicazioni del metodo interferenziale sviluppato da Young, chiamiamo un concetto già introdotto implicitamente nel capitolo 14 e utilizzato in particolare nella (14.38).

La differenza di fase dovuta a una *differenza di cammino geometrico* è in generale

$$\delta = k_2 r_2 - k_1 r_1 ,$$

dove gli indici di  $k$  tengono conto della possibilità che i cammini avvengano in mezzi diversi. Rispetto al vuoto  $k_1 = n_1 k_0$ ,  $k_2 = n_2 k_0$  e quindi

$$\delta = k_0 (n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1) . \quad (15.19)$$

Il prodotto  $nr$  si definisce *cammino ottico* e la differenza di fase risulta proporzionale alla differenza dei cammini ottici. Infatti sullo sfasamento non influisce soltanto il cammino geometrico, ma anche la velocità con cui tale cammino viene percorso. Nel vuoto  $n_1 = n_2 = 1$  e (15.19) diventa (15.9).

### Cammino ottico

### Lenti e specchi

Nel seguito compariranno, descrivendo alcuni strumenti, lenti e specchi. La descrizione del funzionamento di questi elementi ottici è fatta nel capitolo 17. Per ora basta ricordare una proprietà delle *lenti sottili convergenti*: un fascio di raggi paralleli all'asse della lente viene fatto convergere da questa in un punto  $F$  detto *fuoco*, distante  $f$  dalla lente, mentre un fascio di raggi formanti un angolo  $\theta$  piccolo con l'asse della lente converge in un punto  $Q$  del piano focale, che è il piano ortogonale all'asse passante per il fuoco. Siccome in particolare il raggio passante per il centro della lente non viene deviato, si vede che il punto  $Q$  nel piano focale è individuato dalla  $f \operatorname{tg} \theta = f \theta = x$ . La distanza  $f$  è detta *distanza focale* della lente. Altra caratteristica fondamentale di una lente è di non introdurre sfasamenti tra i vari raggi.

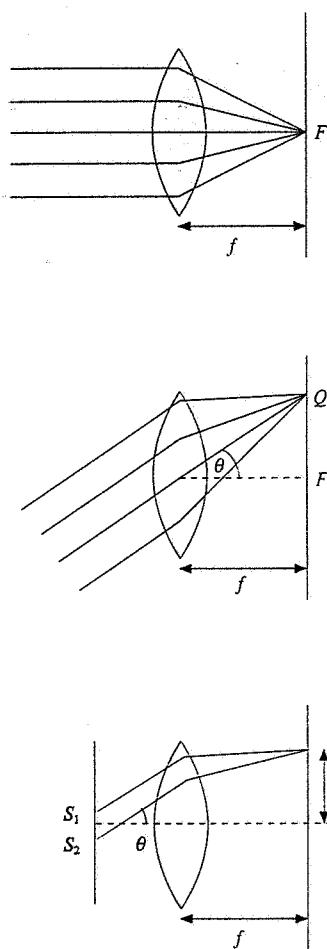


Figura 15.20

L'uso di una lente convergente nel dispositivo di Young permette di soddisfare alla condizione di considerare paralleli i raggi emergenti dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  senza dover mettere lo schermo molto distante. I raggi uscenti all'angolo  $\theta$ , aventi perciò differenza di cammino  $d \sin \theta$ , sono fatti convergere dalla lente, senza alterare la differenza di fase, nel punto  $Q$  del piano focale dove interferiscono. Per osservare la figura di interferenza basta che lo schermo coincida col piano focale. Valgono ancora le espressioni (15.18) per le posizioni dei massimi e dei minimi, con  $f$  al posto di  $L$ . Con valori di  $f$  dell'ordine di 10 cm e ponendo la lente accostata alle fenditure le dimensioni dell'apparato vengono considerevolmente ridotte.

Per quanto riguarda gli specchi, si tratta per ora soltanto di *specchi piani*, ai quali si applica la legge della riflessione (14.10). Dato un punto  $S$  che invia raggi allo specchio, i raggi riflessi sembrano provenire da un punto  $S'$  che è il simmetrico di  $S$  rispetto al piano dello specchio (si veda la figura 15.21 del paragrafo 15.4).  $S'$  si chiama *immagine virtuale* del punto  $S$  fornita dallo specchio piano.

#### 15.4 Applicazioni del metodo di Young

Il metodo sviluppato da Young per realizzare due sorgenti coerenti di onde luminose, consistente nell'utilizzazione di una sola sorgente primaria e nella divisione dei fronti d'onda, venne ripreso sotto varie forme. Citiamo come esempi tre dispositivi, dovuti a *Fresnel* e a *Lloyd*, senza entrare in dettagli analitici, per altro facilmente immaginabili. Le sorgenti secondarie sono ottenute per riflessione e per rifrazione, non per diffrazione come nelle fenditure di Young; in ogni caso si ottiene la figura di interferenza e questo prova che il fenomeno dipende dalla coerenza delle sorgenti e non dalle modalità con cui queste vengono realizzate.

#### Specchi di Fresnel (figura 15.21)

La luce emessa da una sorgente puntiforme  $S_0$  incide su due specchi piani  $M_1$  e  $M_2$ , che formano tra loro un angolo  $\alpha$  molto piccolo. Una situazione particolare con due raggi che arrivano nel punto  $Q$  mostra come si genera la differenza di cammino e quindi la differenza di fase. È come se la luce provenisse dalle due immagini virtuali di  $S_0$  date dagli specchi, le quali fungono da sorgenti coerenti di onde di eguale intensità che interferiscono nella regione comune in cui si propagano le onde riflesse.

Ad esempio, la figura di interferenza a frange chiare e scure, se la luce è monocromatica, si osserva su uno schermo  $C$  posto a distanza  $L$  dal piano su cui stanno  $S_1$  e  $S_2$  grande rispetto alla separazione  $d$  tra le sorgenti. Naturalmente bisogna impedire che la luce emessa da  $S_0$  giunga direttamente sullo schermo.

#### Specchio di Lloyd (figura 15.22)

La luce monocromatica proveniente da una fenditura illuminata  $S_1$ , posta a distanza  $d/2$  sopra il piano di una lastra di vetro, raggiunge lo schermo  $C$  sia direttamente che per riflessione sulla lastra con grande angolo di incidenza (coefficiente di riflessione vicino all'unità). Le sorgenti coerenti sono  $S_1$  e la sua immagine virtuale  $S_2$ , che si trova dall'altra parte della superficie riflettente, a distanza  $d/2$ . La distanza  $L$  dello schermo dalle sorgenti è grande rispetto alla loro separazione  $d$ . La frangia centrale che si forma in  $O$  è scura: infatti, pur essendo nulla la differenza di cammino, nella riflessione sulla lastra c'è uno sfasamento di  $\pi$  (vedi paragrafo 14.4) e quindi  $\delta = k(r_2 - r_1) + \pi$ ; di conseguenza le posizioni dei *massimi* e dei *minimi* sono *invertite*. In luce bianca è diversa la successione dei colori di sottrazione: dal nero si passa al grigio-blu, bianco verdastro, giallo, porpora, blu, verde, giallo-verde, rosso, verde.

#### Biprisma di Fresnel (figura 15.23)

Due lastre di vetro a sezione triangolare (*prismi*) sono accostate lungo le basi. La sorgente  $S_0$  invia luce verso lo schermo  $C$  e, a causa della rifrazione sui prismi, la luce sembra pro-

venire dai due punti  $S_1$  e  $S_2$ , che sono le sorgenti virtuali del sistema. Sia l'angolo al vertice dei prismi che l'apertura del fascio luminoso emesso da  $S_0$  sono piccoli. Al solito lo schermo è posto a distanza grande rispetto alla separazione tra le sorgenti. Le frange osservate sono simili a quelle ottenute con gli specchi di Fresnel.

Oltre agli sviluppi appena descritti dal metodo di Young sono derivate varie applicazioni pratiche; ne descriviamo due, nelle quali si può apprezzare l'elevata sensibilità delle misure interferometriche.

### Interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas

Lo strumento mostrato nella figura 15.24 consta di questi elementi: una lente  $L_1$  che trasforma il fascio di luce divergente da una sottile fenditura  $S_0$  illuminata, posta nel fuoco della lente, in un fascio parallelo, due tubi  $T_1$  e  $T_2$  paralleli eguali, di lunghezza  $h$ , con finestre trasparenti, due fenditure  $S_1$  e  $S_2$  parallele a  $S_0$  e infine una lente  $L_2$  che permette la formazione su uno schermo  $C$  posto nel suo piano focale della figura di interferenza prodotta da  $S_1$  e  $S_2$ .

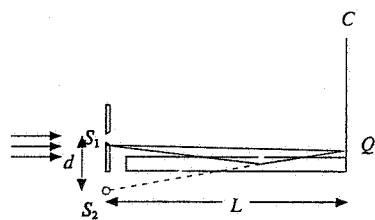


Figura 15.22

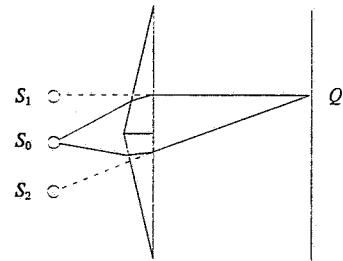


Figura 15.23

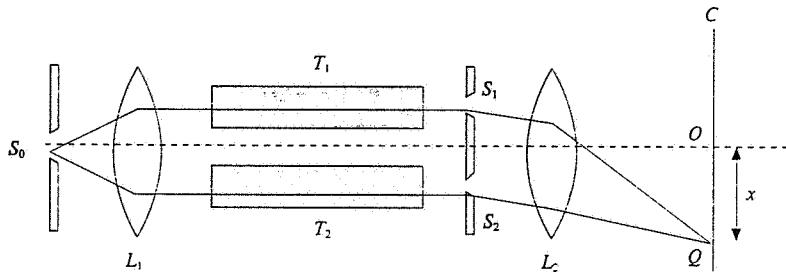


Figura 15.24

Supponiamo che inizialmente nei tubi ci sia il vuoto; nel centro  $O$  dello schermo si forma la frangia chiara di ordine zero e la frangia di ordine  $m$  si forma nel punto  $Q$  dello schermo tale che  $r_1 - r_2 = m \lambda_0$ ; la differenza di fase deriva unicamente dalla differenza di cammino geometrico dopo le fenditure. Se  $T_1$  è riempito con un gas a pressione tale che l'indice di rifrazione sia  $n$ , i cammini ottici nei tubi non sono eguali e viene introdotta la differenza di fase

$$k_1 h - k_0 h = n k_0 h - k_0 h = k_0 (n - 1) h .$$

Nel punto  $Q$  c'è ancora una frangia chiara di ordine  $m'$  se

$$(n - 1) h + (r_1 - r_2) = m' \lambda_0 .$$

Si vede che  $m'$  è maggiore di  $m$ : al massimo di ordine  $m$  nel punto  $Q$  si è sostituito il massimo di ordine  $m'$  che nella situazione con entrambi i tubi vuoti cade nel punto  $Q'$  tale che  $r_1 - r_2 = m' \lambda_0$ . Tutto il *sistema di frange* si è cioè spostato rigidamente verso l'alto di una quantità

$$N = m' - m = \frac{(n - 1) h}{\lambda_0} .$$

In particolare anche la frangia centrale di ordine zero si è spostata verso l'alto e sta nella posizione corrispondente a

$$(n - 1) h + (r_1 - r_2) = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 = -(n - 1) h :$$

$r_1$  è minore di  $r_2$  per compensare il cammino ottico di  $T_1$ , maggiore di quello in  $T_2$ . L'effetto è equivalente all'introduzione di una differenza di fase intrinseca tra  $S_1$  e  $S_2$ .

Misurando  $N$ , come si fa ad esempio contando le frange che passano attraverso  $Q$  man mano che il gas entra nel tubo e raggiunge la pressione alla quale ha l'indice di rifrazione  $n$ , si deduce

$$n = 1 + \frac{N}{h} \lambda_0$$

Ad esempio, con  $h = 50$  cm,  $\lambda_0 = 600$  nm e  $N = 10$ ,  $n = 1.000012$ . Se siamo capaci di apprezzare lo spostamento di una frangia ( $N = 1$ ),  $n - 1 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ : con questo strumento è possibile misurare valori di  $n$  che differiscono da quello nel vuoto per una parte su un milione. La sensibilità è dunque buona: l'errore, che al minimo è dato da  $\Delta N = 1$  nel conteggio delle frange, è piccolo solo se  $N$  è grande: un indice  $n = 1.0001$  è misurabile con un errore dell'1%.

Lo stesso metodo è utilizzabile per misurare l'indice di rifrazione di un foglio sottile di materiale trasparente: basta coprire con esso una delle due fenditure e valutare lo spostamento del sistema di frange.

### Interferometro di Fizeau

Questo interferometro venne concepito per misurare la separazione angolare tra due fasci di luce provenienti da sorgenti molto lontane, ad esempio due stelle. Dopo le due fenditure  $S_1$  e  $S_2$  di un dispositivo di Young è posta una lente convergente e uno schermo, coincidente col piano focale della lente (figura 15.25).

Ciascuna sorgente lontana produce una figura di interferenza sullo schermo: quella dovuta alla luce che proviene dalla direzione formante angolo  $\theta$  con l'asse del sistema corrisponde all'interferenza di due sorgenti aventi uno sfasamento intrinseco causato dalla differenza di cammino  $\theta d$ . È quindi possibile che i massimi di una figura coincidano con i minimi dell'altra, dando uno *schermo uniformemente illuminato* se l'intensità delle sorgenti è la stessa o, se non è così, facendo apparire zone più chiare e zone meno chiare.

La condizione di scomparsa della figura di interferenza si verifica, supponendo che le due sorgenti lontane emettano luce della stessa lunghezza d'onda, quando la differenza di cammino lungo la direzione inclinata è multipla, secondo un numero intero dispari, di  $\lambda/2$  ovvero quando

$$\theta = \frac{\lambda}{2d} (2m+1)$$

L'angolo minimo misurabile si ha per  $m = 0$  e vale  $\theta_{\min} = \lambda/2d$ .

La misura della separazione angolare tra due stelle si fa nel modo seguente. Si aumenta la distanza  $d$  tra le due fenditure fino a raggiungere il valore  $d_1$  tale che lo schermo sia uniformemente illuminato, per cui vale la

$$\theta = \frac{\lambda}{2d_1} (2m+1)$$

Si aumenta di nuovo  $d$  fino al nuovo valore  $d_2$  per il quale lo schermo è di nuovo uniformemente illuminato: vuol dire che

$$\theta = \frac{\lambda}{2d_2} [2(m+1)+1]$$

Combinando le due equazioni si trova

$$m = \frac{3d_1 - d_2}{2(d_2 - d_1)} , \quad \theta = \frac{\lambda}{d_2 - d_1}$$

La migliore sensibilità si ha quando  $d_2 - d_1$  è massima: per questo  $d_2$  deve coincidere col diametro  $D$  della lente e  $d_1$  deve essere minima, cioè corrispondere al valore  $m = 0$ . Ne segue  $d_1 = d_2/3 = D/3$  e

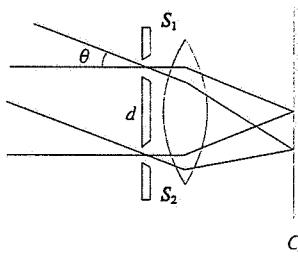


Figura 15.25

$$\theta = \frac{3\lambda}{2D}$$

Il metodo fu applicato da Michelson al telescopio di Monte Wilson, che ha  $D = 2.5$  m; con luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 570$  nm risulta  $\theta = 3.42 \cdot 10^{-7}$  rad =  $1.96 \cdot 10^{-5}$  gradi = 0.070 secondi d'arco. Questa sensibilità fu ulteriormente migliorata con un artificio ottico che aumentava il valore di  $D$  e nel 1920 Michelson riuscì a misurare un diametro stellare, neutralizzando la figura di interferenza prodotta da mezzo disco stellare con quella prodotta dall'altro mezzo disco.

Si faccia attenzione al fatto che le due sorgenti lontane sono incoerenti e che le due figure di interferenza sono indipendenti tra loro: l'illuminazione uniforme è ottenuta sovrapponendo due figure sfalsate.

## 15.5 Interferenza prodotta da $N$ sorgenti coerenti

Consideriamo  $N$  sorgenti eguali di onde sferiche, coerenti, disposte lungo una retta ed equipziate di una distanza  $d$ . Supponiamo di osservare la loro interferenza ad una distanza molto grande rispetto alla dimensione lineare  $(N-1)d$  del sistema, così da poter utilizzare le stesse approssimazioni introdotte nel paragrafo 15.2. Detto  $\theta$  l'angolo formato tra la direzione di osservazione e la normale alla linea contenente le sorgenti, tra due onde emesse da due sorgenti consecutive esiste la differenza di fase (15.13)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta ,$$

nell'ipotesi che la differenza di fase intrinseca tra le sorgenti sia nulla.

In un punto  $Q$  le ampiezze  $\xi_i$  delle singole onde sferiche sono eguali, data la lontananza di  $Q$  dal sistema di sorgenti; non sono invece eguali le fasi, a causa delle differenze di cammino. Per calcolare l'ampiezza risultante  $\xi_R$  utilizziamo il metodo dei vettori rotanti. Con riferimento alla figura 15.26, le singole ampiezze si dispongono lungo una poligonale regolare di  $N$  lati, che è circoscivibile con una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho$ ; l'angolo al centro che sottende il singolo vettore è  $\delta$ , quello che sottende la poligonale è  $N\delta$ . Pertanto

$$\xi_i = 2\rho \sin \frac{\delta}{2} , \quad \xi_R = 2\rho \sin \frac{N\delta}{2}$$

e combinando queste relazioni si ha il valore dell'ampiezza risultante in funzione dell'ampiezza  $\xi_i$  di ciascuna sorgente e dello sfasamento  $\delta$  tra due onde emesse da sorgenti consecutive:

$$\xi_R = \xi_i \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} . \quad (15.20)$$

L'intensità dell'onda risultante nel punto  $Q$  è proporzionale al quadrato di  $\xi_R$ :

$$I_R(\theta) = I_i \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = I_i \left( \frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right)^2 ; \quad (15.21)$$

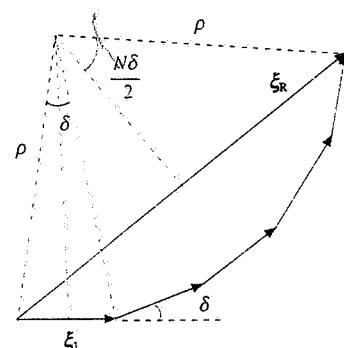
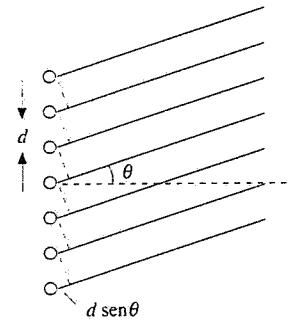


Figura 15.26

Intensità risultante

$I_1$  è l'intensità che la singola sorgente produce nel punto  $Q$ . Ponendo  $N = 2$  si ritrova la (15.14):

$$I_R(\theta) = I_1 \left( \frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

L'intensità (15.21) varia con l'angolo di osservazione. Per prima cosa consideriamo  $\theta = 0$ , direzione lungo la quale le onde sono tutte in fase: l'intensità in queste condizioni è massima e vale  $I_{\max} = N^2 I_1$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{N \cos Nx}{\cos x} = N \Rightarrow \xi_R = N \xi_1, \quad I_R = N^2 I_1.$$

La stessa situazione si ripete tutte le volte che  $\pi d \sin \theta / \lambda$  egualia  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  per cui concludiamo che l'intensità  $I_R$  presenta nell'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  un certo numero di *massimi principali*, caratterizzati dalle proprietà

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = m \pi \Rightarrow d \sin \theta = m \lambda, \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Massimi principali

$$I_{\max} = N^2 I_1, \quad \xi_{\max} = N \xi_1.$$
(15.22)

Al di fuori dei valori di  $\sin \theta$  dati da (15.22) il denominatore di (15.21) non si annulla mai. Invece il numeratore si annulla anche quando sono soddisfatte le condizioni

$$\frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda} = m' \pi \Rightarrow d \sin \theta = m' \frac{\lambda}{N} \lambda, \quad \sin \theta = m' \frac{\lambda}{Nd}$$

Minimi

$$m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$$
(15.23)

dovendosi escludere i valori  $0, N, 2N, \dots$  per i quali si hanno i massimi principali. Tra due massimi principali si hanno dunque  $N-1$  minimi nei quali  $I=0$ .

Essendo l'intensità una funzione di  $\theta$  sempre positiva, tra due minimi deve esistere un massimo, detto secondario, e di conseguenza tra due massimi principali ci sono  $N-2$  massimi secondari. Le posizioni dei massimi secondari si ottengono quando il numeratore di (15.21) vale 1 ovvero in corrispondenza a

$$\frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda} = (2m'' + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow d \sin \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2N},$$
(15.24)

Massimi secondari

$$\sin \theta = (2m'' + 1) \frac{\lambda}{2Nd} \quad m'' = 1, 2, \dots, N-2, N+1, \dots, 2N-2, 2N+1, \dots$$

Il valore dell'intensità dei massimi secondari è

$$I_m = \frac{I_1}{\left[ \sin \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2} = \frac{I_{\max}}{N^2 \left[ \sin \frac{(2m'' + 1)\pi}{2N} \right]^2}$$
(15.25)

Nella figura 15.27 è rappresentata l'intensità nell'interferenza di 2, 4, 8 e molte sorgenti; la distanza  $d$  tra due sorgenti consecutive e la lunghezza d'onda sono sempre le stesse. Ricordiamo che la figura è simmetrica rispetto a  $\theta = 0$ : accanto ai valori di  $m, m', m''$  dati sopra vanno considerati anche i valori opposti.

Vedremo nei successivi esempi alcuni casi numerici; riassumiamo ora le principali caratteristiche del fenomeno appena descritto.

1) La posizione dei massimi principali, nei quali è concentrata la maggior parte della potenza emessa, è determinata dal rapporto  $\lambda/d$  e non dipende dal numero  $N$  delle sorgenti. Il numero di massimi si ricava da (15.22): esso è dato dal più grande tra i valori di  $m$  per il quale  $\sin\theta = m\lambda/d$  non supera l'unità e non dipende da  $N$ .

2) L'intensità dei massimi principali dipende dal numero  $N$  delle sorgenti e cresce con questo secondo  $I_{\max} = N^2 I_1$ .

3) L'ampiezza angolare dei massimi principali diminuisce all'aumentare di  $N$ , proprietà nettamente evidenziata dalla figura 15.27. L'ampiezza o *larghezza angolare di un massimo principale* si può definire come distanza tra i due minimi adiacenti al massimo: da (15.23) si vede che questa definizione corrisponde ad un incremento di 2 nel numero  $m'$  e pertanto

$$\Delta(\sin\theta) = \frac{2\lambda}{Nd} \quad (15.26) \quad \text{Larghezza angolare}$$

4) Gli  $N - 1$  minimi e gli  $N - 2$  massimi secondari compresi tra due massimi principali sono equispaziati nella variabile  $\sin\theta$ : l'intervallo tra un minimo e un massimo secondario è  $\lambda/2Nd$ , l'intervallo tra due estremi consecutivi dello stesso tipo è  $\lambda/Nd$  (figura 15.28). L'intensità dei massimi secondari decresce come  $1/N^2$

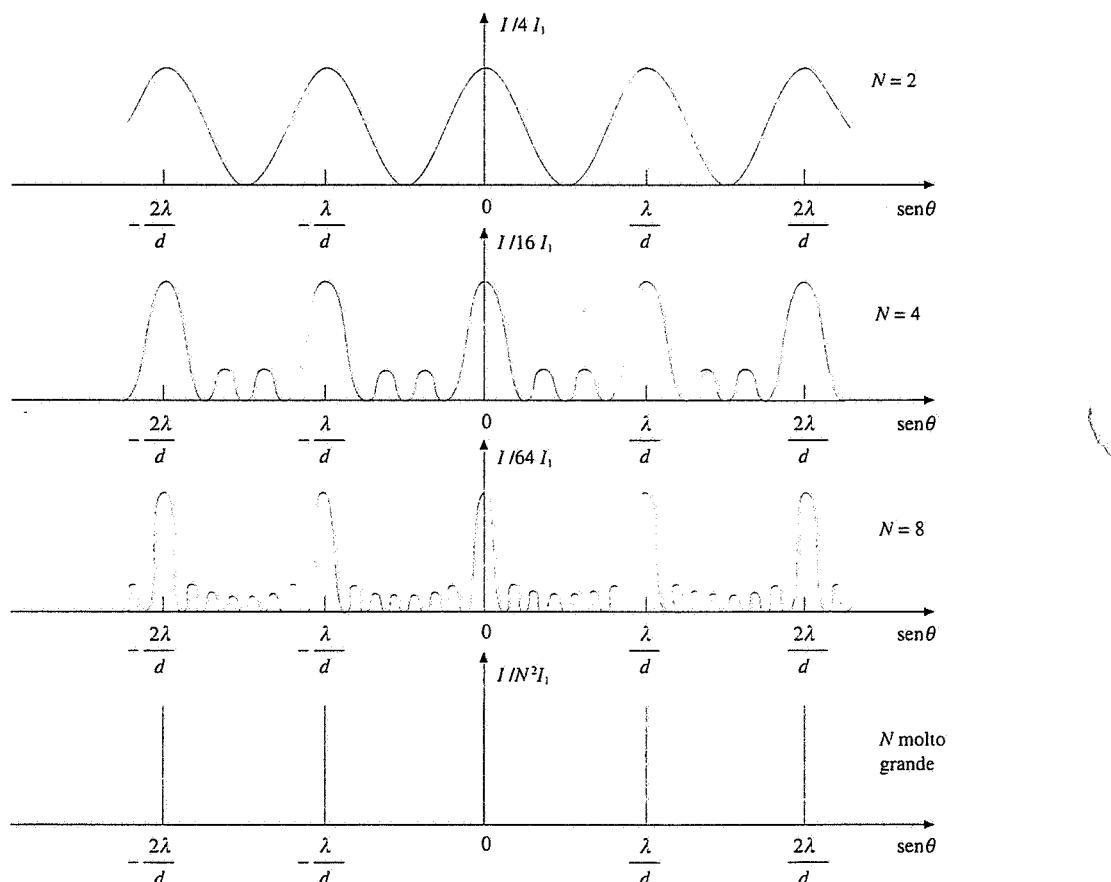


Figura 15.27

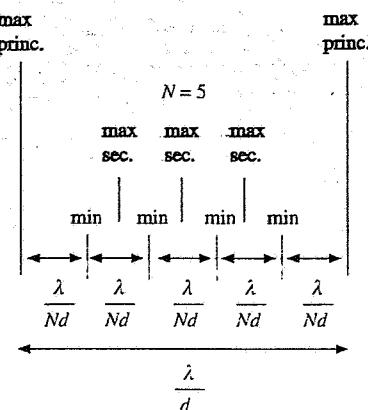


Figura 15.28

all'aumentare di  $N$ : in pratica per  $N$  abbastanza grande si ha intensità solo nei massimi principali. Inoltre, come appare da (15.25), l'intensità dei massimi secondari varia col numero d'ordine  $m''$  del massimo.

Sfruttando l'interferenza è dunque possibile, in maniera tanto più efficace quanto maggiore è  $N$ , inviare l'intensità soltanto in certe direzioni regolando la distanza  $d$  tra le sorgenti: si parla in tal senso di *emissione direzionale*. Ricordiamo, dalla (15.16), che  $N$  sorgenti incoerenti produrrebbero un'intensità  $N I_1$  costante in tutte le direzioni. L'*interferenza* tra le onde prodotte da sorgenti coerenti opera, come si è già rilevato, una *ridistribuzione dell'energia* che viene soprattutto concentrata nelle regioni corrispondenti ai massimi principali; la potenza è sempre  $N P_1$ , sia che le sorgenti siano coerenti sia che esse siano incoerenti.

Possiamo capire fin da ora che la proprietà (15.26), cioè il restringersi dei massimi principali al crescere del numero delle sorgenti, sia fondamentale per aumentare la sensibilità delle misure effettuate con metodi interferenziali. Vedremo alcuni esempi nei prossimi paragrafi e nel capitolo 16; anche se le situazioni saranno diverse, il metodo di base sarà quello di fare interferire molte onde. Vogliamo riprendere in modo diverso e intuitivo questa proprietà della somma (15.20), che è una proprietà generale della somma di  $N$  sinusoidi eguali sfasate, con  $N$  grande. A meno che non siano esattamente in fase,  $N$  funzioni  $\sin x$  danno sempre una somma praticamente nulla: infatti, in qualsiasi punto dell'asse  $x$  ci si metta, si fa la somma di  $N$  valori diversi della funzione  $\sin x$ , cioè se ne fa la media che sappiamo essere nulla. Alternativamente, considerando il metodo dei vettori rotanti, o gli  $N$  vettori eguali sono esattamente in fase, nel qual caso la somma è  $N \xi$ , oppure essi, considerati applicati nello stesso punto, si aprono a ventaglio e danno somma chiaramente nulla. Tutto ciò è vero per qualsiasi valore di  $\delta$  che non sia proprio  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ .

### Esempio 15.7

Quattro antenne in fase poste a distanza  $d = 10$  m sono eccitate da un oscillatore alla frequenza  $v = 30$  MHz. Ciascuna antenna irradia isotropicamente la potenza  $P_1 = 100$  kW. Calcolare come varia l'intensità a 10 km dalle sorgenti e i valori massimi dei campi elettrico e magnetico a tale distanza.

#### Soluzione

Si tratta dell'esempio 15.1 ripetuto per 4 sorgenti. Ricordiamo che  $\lambda = d = 10$  m e che alla distanza di 10 km  $I_1 = 7.96 \cdot 10^{-5}$  W/m<sup>2</sup>,  $I_{\max} = 4 I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>; oltre al massimo centrale c'era un altro massimo a  $90^\circ$  e un solo minimo intermedio (figura 15.8). Con quattro sorgenti si hanno ancora gli stessi massimi a  $\theta = 0$  e  $\theta = 90^\circ$ , però con intensità  $I_{\max} = 16 I_1 = 1.27 \cdot 10^{-3}$  W/m<sup>2</sup>. Tra i massimi principali ci sono tre minimi; da (15.23)

$$\sin \theta = -\frac{m' \lambda}{Nd} = \frac{m'}{4} \quad , \quad m' = 1 \quad \theta = 14.5^\circ \quad , \quad m' = 2 \quad \theta = 30.0^\circ \quad , \quad m' = 3 \quad \theta = 48.6^\circ \quad .$$

I massimi secondari sono due, nelle direzioni indicate da (15.24):

$$\sin \theta = (2 m'' + 1) \frac{\lambda}{2Nd} = \frac{2m'' + 1}{8}$$

$$m'' = 1 \quad \theta = 22.0^\circ \quad , \quad m'' = 2 \quad \theta = 38.7^\circ \quad .$$

Le intensità relative (15.25) dei massimi secondari sono:

$$\frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{16 \sin^2 \frac{3\pi}{8}} = 0.073 \quad , \quad \frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{16 \sin^2 \frac{5\pi}{8}} = 0.073 \quad .$$

Nel caso di due massimi essi sono eguali, ma nei casi con più di due massimi ( $N > 4$ ), si ha variazione. Ad esempio, per  $N = 5$  le intensità relative in funzione di  $m''$  sarebbero 0.061, 0.040, 0.061 e con  $N = 8$ , che è uno dei casi indicati nella figura 15.27, si avrebbe 0.051, 0.023, 0.016, 0.016, 0.023, 0.051.

La legge di variazione dell'intensità con  $\theta$  è

$$I(\theta) = I_1 \left[ \frac{\sin(4\pi \sin\theta)}{\sin(\pi \sin\theta)} \right]^2 ;$$

il diagramma è riportato in figura 15.29. Nella variabile  $\sin\theta$  la larghezza è la stessa per entrambi i massimi e vale 0.5, in accordo con (15.26). Nell'angolo  $\theta$ , dato che il primo minimo è a  $\pm 14.5^\circ$ , la larghezza del massimo principale di ordine zero è  $\Delta\theta = 29^\circ$ ; per il massimo di ordine 1  $\Delta\theta = 82.8^\circ$ . Gli stessi dati con  $N = 2$  sono  $\Delta(\sin\theta) = 1$ ,  $\Delta\theta = 60^\circ$  e  $\Delta\theta = 120^\circ$ : già passando da  $N = 2$  a  $N = 4$  si ha un notevole restringimento dei massimi principali.

I campi nelle direzioni dei massimi sono  $E_{\max} = 4 E_1 = 0.98 \text{ V/m}$ .

$B_{\max} = 4 B_1 = 3.27 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ .

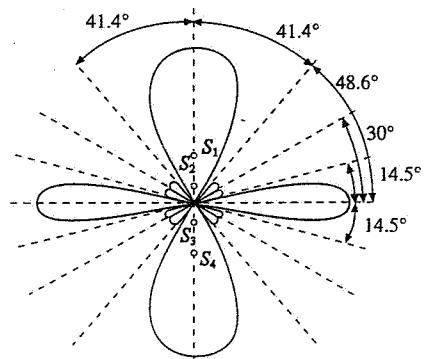


Figura 15.29

### Esempio 15.8

Quattro antenne in fase sono poste a distanza  $d = \lambda/4$ . Calcolare come varia l'intensità a grande distanza dal sistema. Ripetere il calcolo nel caso in cui le antenne siano eccitate dall'oscillatore in modo tale da essere sfasate di  $\pi/2$  l'una rispetto alla successiva.

#### Soluzione

Essendo  $\lambda > d$  si può formare solo il massimo principale di ordine zero; con  $m = 1 \sin\theta$  risulterebbe maggiore di 1; da (15.23) si vede poi che c'è un solo minimo a  $\theta = 90^\circ$ , se fosse  $\lambda > Nd$  non ci sarebbe nemmeno il minimo nullo (si riveda la figura 15.10). Non ci sono ovviamente massimi secondari; il diagramma dell'intensità è mostrato in figura 15.30.

Si noti che con la condizione  $\lambda > d$  si riesce a convogliare la potenza in una sola direzione.

Se tra una sorgente e la successiva c'è lo sfasamento  $\phi = \phi_2 - \phi_1$  lo sfasamento complesso  $\delta$  è composto da due termini:

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi .$$

La trattazione prosegue come nei casi precedenti, fatta questa sostituzione. In particolare il massimo di ordine zero, che si ha per  $\delta = 0$ , non corrisponde più a  $\theta = 0$ , ma all'angolo  $\theta$  tale che

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda \phi}{2\pi d} .$$

Scegliendo opportunamente  $\phi$  si può variare tale direzione. Nel nostro caso  $\phi = \pi/2$ ,  $d = \lambda/4$  per cui  $\sin\theta = 1$ ,  $\theta = 90^\circ$ . L'espressione dell'intensità è

$$I_R(\theta) = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta - \phi \right)} \right]^2 = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2} (\sin\theta - 1)}{\sin \frac{\pi}{4} (\sin\theta - 1)} \right]^2 .$$

Oltre all'unico massimo principale per  $\sin\theta = 1$ , c'è un minimo per  $\theta = 0$  e per  $\theta = 3/2 \pi (= -\pi/2)$ ; tra questi minimi c'è un massimo secondario per  $\theta = 11/6 \pi$  (e simmetricamente per  $\theta = 7/6 \pi$ ). La situazione è mostrata nel diagramma della figura 15.31. C'è sempre simmetria rispetto all'asse delle sorgenti, ma non più rispetto a  $\theta = 0$ .

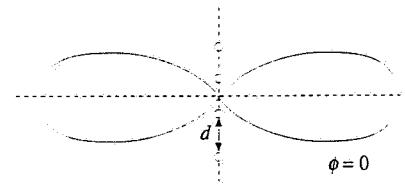


Figura 15.30

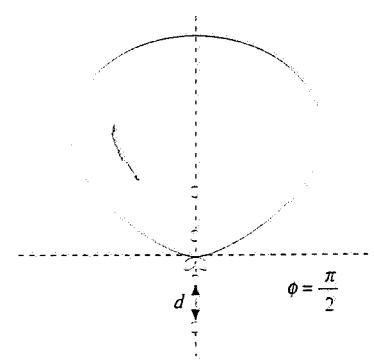


Figura 15.31

## 15.6 Interferenza delle onde luminose su lamine sottili

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce sulle due superficie di una *lamina sottile* di una sostanza trasparente è forse il caso di interferenza più facilmente osservabile nella vita comune. Storicamente, la prima osservazione documentata di frange d'interferenza avvenne in questo modo ad opera di Boyle (1663) e, pochi anni dopo, di Newton.

Supponiamo di osservare a piccoli angoli rispetto alla normale una lamina sottile spessa  $d$ , formata da una sostanza trasparente con indice di rifrazione  $n_2$  e immersa in un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ . Una parte della luce incidente sulla lamina è riflessa dalla superficie superiore; l'onda trasmessa si propaga nella lamina ed è parzialmente riflessa dalla superficie inferiore; la parte riflessa riattraversa la lamina ed emerge nel primo mezzo con direzione parallela a quella del primo raggio riflesso. Le due onde giungono all'occhio sfasate sia per la differenza di cammino ottico che per lo sfasamento di  $\pi$  subito alla prima o alla seconda riflessione (a seconda che sia  $n_1 < n_2$  o  $n_1 > n_2$ ) e interferiscono sulla retina.

Per un calcolo quantitativo riferiamoci all'incidenza normale (figura 15.33). L'interferenza è prodotta da due onde sfasate complessivamente di  $\delta = k(r_1 - r_2) + \pi$ ; la differenza di cammino ottico è  $2n_2d$  e quindi

$$\delta = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda_0} + \pi$$

L'interferenza è costruttiva o distruttiva se

$$\begin{aligned} \delta &= 2m\pi & d &= (2m-1)\frac{\lambda_0}{4n_2} & m &= 1, 2, \dots \\ \delta &= (2m'+1)\pi & d &= m'\frac{\lambda_0}{2n_2} & m' &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15.27)$$

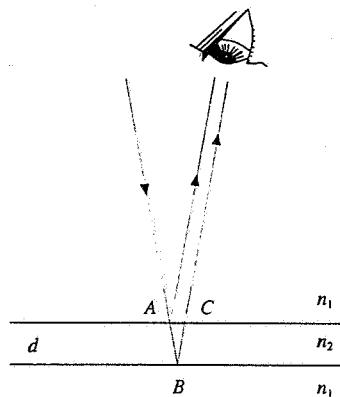


Figura 15.32

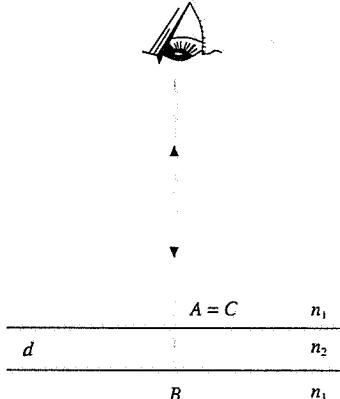


Figura 15.33

Lo spessore minimo per osservare interferenza costruttiva è  $\lambda_0/4n_2 = \lambda/4$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda nella lamina; infatti così  $2d = \lambda/2$ , cammino a cui corrisponde uno sfasamento di  $\pi$ , e aggiungendo lo sfasamento  $\pi$  dovuto alla riflessione si ha  $\delta = 2\pi$ . La condizione si ripete per multipli dispari di  $\lambda/4$  mentre per spessori eguali a  $\lambda/2$  o a multipli interi di  $\lambda/2$  si ha interferenza distruttiva. Se avessimo considerato uno sfasamento  $-\pi$ , ci sarebbe al posto di  $2m-1$  il termine  $2m+1$  con  $m = 0, 1, 2, \dots$ : il fatto è irrilevante.

In questo caso le sorgenti coerenti non sono separate lateralmente, come nell'esperimento di Young, ma sono *separate in profondità*: è come se i due raggi che interferiscono provenissero da due sorgenti poste oltre la lamina lungo la retta normale alla lamina coincidente con la direzione di osservazione; le due sorgenti sono distanti  $2n_2d$  e hanno uno sfasamento intrinseco di  $\pi$ . Il processo che genera due sorgenti virtuali è la suddivisione di un raggio incidente in due raggi riflessi e si parla di interferenza ottenuta per *divisione di ampiezza* (invece che divisione del fronte d'onda). Ci si limita normalmente a considerare soltanto due raggi perché gli altri raggi riflessi all'interno della lamina hanno intensità molto piccole rispetto ai primi due (vedi esempio 14.4). Vedremo nel paragrafo 15.7 un sistema per avere l'interferenza di molte onde, sempre col metodo della divisione di ampiezza.

Calcoliamo adesso il rapporto tra l'intensità riflessa dalla lamina e l'intensità incidente. I coefficienti che descrivono i rapporti tra i valori dei campi elettrici nella riflessione e nella trasmissione sulle due superficie sono dati da (14.24):

$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad r_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad t_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2};$$

ricordiamo che valgono le *relazioni di Stokes* (paragrafo 14.4)  $r_1^2 = r_2^2$ ,  $1 - r_1^2 = 1 - r_2^2 = t_1 t_2$ .

Schematizziamo il comportamento del campo elettrico, ricorrendo alla rappresentazione simbolica:

campo incidente  $E = E_0 e^{i\omega t}$

campo riflesso dalla prima superficie  $E_1 = r_1 E$

campo trasmesso dalla prima superficie  $t_1 E$ , che dopo lo spessore  $d$  diventa  $t_1 e^{i\phi} E$

avendo acquistato uno sfasamento dato da  $\phi = 2\pi n_2 d / \lambda$

campo riflesso dalla seconda superficie  $r_2 t_1 e^{i\phi} E$ , che a sua volta riatraversando la

lamina acquista lo sfasamento  $\phi$  diventando  $r_2 t_1 e^{2i\phi} E$

campo trasmesso dalla prima superficie  $E_2 = r_2 t_1 t_2 e^{2i\phi} E = -r_1 (1 - r_1^2) e^{2i\phi} E$ .

Il campo riflesso è

$$E_r = E_1 + E_2 = r_1 [1 - r_1 (1 - r_1^2) e^{2i\phi}] E \approx r_1 (1 - r_1 e^{2i\phi}) E;$$

abbiamo trascurato  $r_1^3$  rispetto a  $r_1$ , coerentemente col fatto di trascurare altri raggi riflessi. Il quadrato del modulo di  $E_r$  è

$$E_r E_r^* = r_1^2 (1 - r_1 e^{2i\phi}) (1 - r_1 e^{-2i\phi}) E E^* = 4 r_1^2 E_0^2 \sin^2 \phi.$$

Infine il rapporto tra intensità riflessa e intensità incidente, ricorrendo anche al coefficiente di riflessione (14.25), è

$$r^2 = \frac{E_r E_r^*}{E E^*} = 4 r_1^2 \sin^2 \phi = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda_0}. \quad (15.28)$$

L'intensità riflessa varia con lo spessore e cercando le condizioni di massimo e di minimo si ritrovano le (15.27). Il procedimento tiene conto automaticamente dello sfasamento di  $\pi$  che si ritrova nella differenza di segno tra  $r_1$  e  $r_2$ .

Con lamina di vetro immersa in aria,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $R = 0.04$  e la percentuale di intensità riflessa varia tra il 16% e zero. Se  $\lambda = 600$  nm si ha

$$\max \quad d = 0.1, 0.3, 0.5, \dots \quad \min \quad d = 0.2, 0.4, 0.6, \dots \text{ in } \mu\text{m}.$$

Si tratta di spessori molto piccoli, più facilmente realizzabili con *pellicole di materiale plastico o di liquido* (bolle di sapone, veli d'olio). D'altra parte gli spessori non possono essere grandi perché in tal caso, a meno che la luce non sia perfettamente monocromatica, si riesce ad avere interferenza costruttiva per una lunghezza d'onda e distruttiva per una lunghezza d'onda poco diversa così che il fenomeno scompare.

### Esempio 15.9

Un fascio di luce ordinaria di intensità  $I$  incide normalmente su una sottile lamina di materiale trasparente ( $n_2 = 1.5$ ), spessa  $d = 1.25 \mu\text{m}$  e immersa in aria. Nel fascio incidente sono presenti con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda compresa tra  $\lambda_1 = 400$  nm e  $\lambda_2 = 700$  nm. Calcolare la percentuale di luce riflessa.

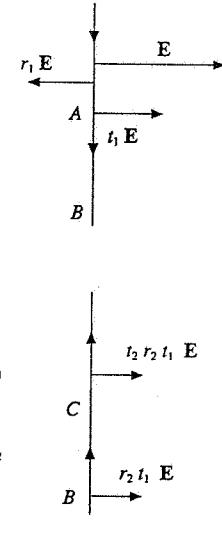


Figura 15.34

**Soluzione**

Il fascio incidente si può immaginare composto da infiniti fasci infinitesimi monocromatici con intensità  $dI$  distribuita nell'intervallo di lunghezza d'onda  $d\lambda$ . A ciascuno applichiamo la (15.28):

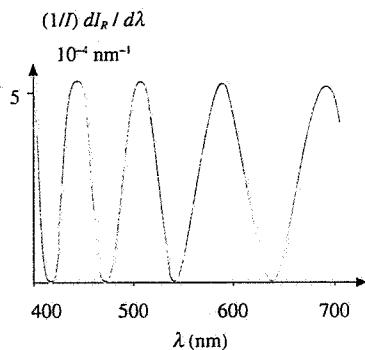
$$dI_R = r^2 dI = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} dI .$$

Essendo  $I$  distribuita uniformemente, è vero che

$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \text{costante} \Rightarrow dI = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda ,$$

$$\frac{dI_R}{d\lambda} = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} .$$

L'intensità della luce riflessa non è più distribuita uniformemente in funzione di  $\lambda$ , in quanto per certe lunghezze d'onda si ha interferenza costruttiva tra le onde riflesse sulle due facce della lamina e per certe altre interferenza distruttiva. Ciò avviene quando



**Figura 15.35**

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad , \quad \lambda = \frac{4n_2 d}{2m+1} = \frac{7500}{2m+1} \text{ nm} \\ \min \quad & \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = m' \pi \quad , \quad \lambda = \frac{2n_2 d}{m'} = \frac{3750}{m'} \text{ nm} . \end{aligned}$$

Nell'intervallo tra  $\lambda_1 = 400$  nm e  $\lambda_2 = 700$  nm si hanno questi valori:

$$\begin{array}{llll} \max & m=5 & \lambda=681.8 \text{ nm} & , \quad m=6 \quad \lambda=576.9 \text{ nm} , \\ & m=7 & \lambda=500.0 \text{ nm} & , \quad m=8 \quad \lambda=441.2 \text{ nm} \\ \min & m'=6 & \lambda=625.0 \text{ nm} & , \quad m'=7 \quad \lambda=535.7 \text{ nm} , \\ & m'=8 & \lambda=468.8 \text{ nm} & , \quad m'=9 \quad \lambda=416.7 \text{ nm} . \end{array}$$

In figura 15.35 è rappresentata la funzione

$$\frac{1}{I} \frac{dI_R}{d\lambda} = 5.33 \cdot 10^{-4} \sin^2 \frac{11781}{\lambda} \text{ nm}^{-1} ;$$

per  $R$ , trascurando la dispersione, si è assunto il valore 0.04. Si vede che a causa dell'interferenza lo spettro continuo incidente dà origine a uno spettro riflesso con quattro bande: la luce riflessa ha cioè quattro colori dominanti (colori di sottrazione).

L'intensità riflessa in totale vale

$$I_R = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dI_R = \frac{4R I}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} d\lambda \simeq \frac{1}{2} 4 R I \Rightarrow \frac{I_R}{I} = 2 R = 0.08 :$$

all'incirca l'8% dell'energia incidente viene riflessa.

### Strati antiriflettenti

Supponiamo che la superficie superiore di una lastra di vetro ( $n_2$ ), immersa in aria ( $n_1$ ), sia ricoperta da una sottile pellicola di spessore  $d$  trasparente, il cui indice di rifrazione  $n_3$  è tale che  $n_1 < n_3 < n_2$ . Sulle due superficie della pellicola abbiamo

$$r_1 = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}, \quad r_2 = \frac{n_3 - n_2}{n_2 + n_3};$$

data la condizione sugli indici di rifrazione  $r_1$  e  $r_2$  hanno lo stesso segno e gli sfasamenti di  $\pi$  si compensano. La percentuale di intensità riflessa si calcola come abbiamo appena visto e si ottiene

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0}; \quad (15.29)$$

i coefficienti di riflessione questa volta sono diversi. Si vede che lo sfasamento è dovuto solo alla differenza di cammino ottico  $2n_3d$ . L'interferenza è *costruttiva* se

$$\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = 2m\pi \quad d = m \frac{\lambda_0}{2n_3} \quad m = 1, 2, \dots$$

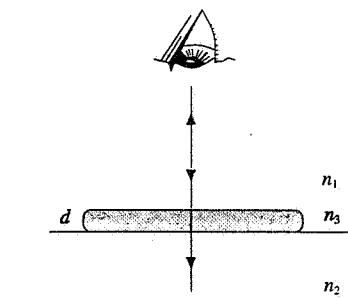


Figura 15.36

Interferenza costruttiva

ed è *distruttiva* se

$$\frac{4\pi n_3 d}{\lambda_0} = (2m' + 1)\pi \quad d = (2m' + 1) \frac{\lambda_0}{4n_3} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Interferenza distruttiva

Il minimo di intensità non è nullo perché in generale  $r_1 \neq r_2$  e quindi  $I_{\min} = r^2 I = (r_1 - r_2)^2 I > 0$ . Soltanto se  $r_1 = r_2$  ovvero se

$$n_3 = \sqrt{n_1 n_2}$$

si può avere intensità riflessa nulla in corrispondenza a uno spessore che sia di minimo per una data lunghezza d'onda.

Su questo principio sono basati gli *strati antiriflettenti* di cui vediamo un calcolo esplicito nell'esempio 15.10. Con una opportuna scelta del valore di  $n_3$  è anche possibile aumentare la percentuale di energia riflessa invece che ridurla a zero.

Strati antiriflettenti

### Esempio 15.10

Sulla lastra dell'esempio 15.9 è depositato uno strato di fluoruro di magnesio  $MgF_2$  ( $n_3 = 1.38$ ) con lo scopo di minimizzare l'energia riflessa alla lunghezza d'onda  $\lambda_G = 550$  nm. Calcolare lo spessore minimo  $h$  dello strato e la percentuale di intensità riflessa, nelle stesse condizioni di illuminazione.

#### Soluzione

Applichiamo allo strato di fluoruro di magnesio la procedura dell'esempio 15.9, utilizzando (15.29):

$$\frac{dI_R}{d\lambda} = \left( r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \frac{4\pi n_3 h}{\lambda} \right) \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Lo spessore minimo  $h$  che annulla la riflessione della luce di lunghezza d'onda  $\lambda_G$  è

$$h = \frac{\lambda_G}{4n_3} \approx 100 \text{ nm} = 0.1 \mu\text{m}$$

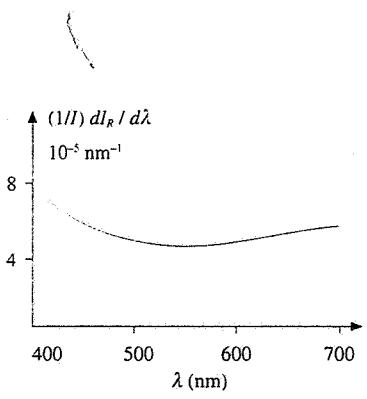


Figura 15.37

e la funzione che dà la distribuzione relativa dell'intensità riflessa ha il valore numerico

$$\frac{1}{I} \frac{dI_R}{d\lambda} = \left( 9.07 + 4.43 \cos \frac{1734.2}{\lambda} \right) \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1}.$$

Essa è rappresentata in figura 15.37; la presenza della pellicola altera profondamente la figura 15.35: ora si ha un minimo largo nell'intorno di  $\lambda_G$ . La colorazione in riflessione appare bluastra per la predominanza di lunghezze d'onda inferiori a 500 nm. Se  $n_3$  soddisfasse alla condizione di essere eguale a  $\sqrt{n_1 n_2} = 1.225$  il minimo sarebbe nullo. Integrando per via grafica la funzione della figura 15.37 si ottiene  $\sim 0.016$ : questa è la percentuale di intensità riflessa, da confrontare con il valore 0.08 ottenuto senza strato antiriflettente.

Una delle utilizzazioni più comuni degli strati antiriflettenti si ha nelle lenti degli obiettivi di macchine fotografiche e telecamere.

### Esempio 15.11

Le celle solari di silicio hanno indice di rifrazione  $n_2 = 3.5$  e vengono normalmente ricoperte con una pellicola sottile di SiO, avente indice di rifrazione  $n_3 = 1.45$ . Calcolare lo spessore minimo  $h$  dell'ossido in grado di produrre riflessione minima alla lunghezza d'onda  $\lambda_G = 550$  nm, cioè nel massimo dello spettro solare, e il guadagno ottenuto nella luce trasmessa all'interno della cella.

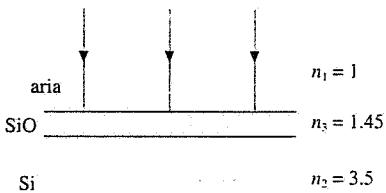


Figura 15.38

### Soluzione

In assenza dell'ossido il coefficiente di riflessione per incidenza normale sulla faccia superiore della cella è

$$R = r^2 = \left( \frac{1 - 3.5}{1 + 3.5} \right)^2 = 0.309$$

e la percentuale di luce che entra nella cella è il 69.1%.

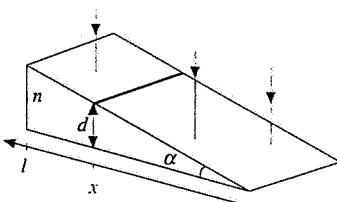
Lo spessore minimo per eliminare in riflessione la lunghezza d'onda  $\lambda_G$  è

$$h = \frac{\lambda_G}{4 n_3} = 94.8 \text{ nm}$$

e la percentuale di luce riflessa per  $\lambda = \lambda_G$  si calcola da (15.29):

$$r_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2 = \left( \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} - \frac{n_3 - n_2}{n_2 + n_3} \right)^2 = 0.053.$$

Nella zona centrale dello spettro solare entra nella cella il 94.7% della luce incidente invece del 69.1%: il rivestimento permette di sfruttare quasi tutta l'energia incidente. Sull'intero spettro il guadagno sarà un po' minore.



### Cuneo sottile

Si chiama *cuneo* una lamina trasparente a facce piane, ma non parallele, bensì formanti un certo angolo  $\alpha$ , che supponiamo piccolo (tipicamente inferiore a  $10^{-3}$  rad). Ad ogni punto del cuneo distante  $x$  dall'estremo dove lo spessore è nullo è associato uno spessore  $d = \alpha x$ , per cui il cuneo si può considerare come una lamina con spessore variabile con continuità da zero a  $\alpha l$  (figura 15.39).

Illuminiamo il cuneo con una sorgente estesa in incidenza quasi normale e osserviamo la luce riflessa. Data la piccolezza della pupilla dell'occhio, quando si fissa un punto del cuneo si è in sostanza nella situazione della figura 15.33 e si possono utilizzare le (15.27), che scriviamo con  $2m + 1$  al posto di  $2m - 1$ :

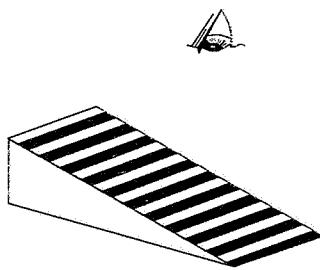


Figura 15.39

$$\max \quad d = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4n_2} \quad x = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4n_2 \alpha} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\min \quad d = m' \frac{\lambda_0}{2n_2} \quad x = m' \frac{\lambda_0}{2n_2 \alpha} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

I luoghi dei punti  $d = \text{costante}$ , nei quali l'intensità è costante, sono segmenti paralleli ai bordi del cuneo. Si vede quindi sulla superficie del cuneo una successione di *frange chiare e scure*, dette *frange localizzate di eguale spessore*, in quanto ogni frangia è caratterizzata da un valore di  $d$ . Il *bordo del cuneo* dove  $d = 0$  è *nero*, cioè la prima frangia è scura, a conferma del fatto che nella riflessione ad una delle due superficie c'è uno sfasamento di  $\pi$ : se  $d = 0$  questo è l'unico sfasamento e l'interferenza è distruttiva. Se si illumina il cuneo con luce bianca si formano frange colorate (colori di sottrazione) secondo quanto visto nell'esempio 15.9.

Un dispositivo analogo, che dà frange circolari, è costituito da una lente di vetro piano-convessa posata su una lastra piana di vetro, illuminata dall'alto. La regione compresa tra la lastra e la lente è una lamina d'aria ( $n_2 = 1$ ) a simmetria circolare, con spessore variabile. A distanza  $r$  dal centro lo spessore d'aria è

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = R - R \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{r^2}{2R},$$

dove abbiamo supposto che fosse  $(r/R)^2 \ll 1$ ;  $R$  è il raggio di curvatura della superficie sferica (figura 15.40). Si osservano anelli chiari e anelli scuri rispettivamente per

$$d = (2m+1) \frac{\lambda_0}{4} \quad , \quad r = \sqrt{(2m+1) \frac{R \lambda_0}{2}} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d = m' \frac{\lambda_0}{2} \quad , \quad r = \sqrt{m' R \lambda_0} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Siccome il raggio dipende dal numero d'ordine secondo una radice quadrata, le frange si addensano verso il bordo della lente.

Il centro della figura di interferenza è un dischetto nero, per la stessa ragione per cui è nera la prima frangia nel cuneo. In luce bianca si osserva una colorazione di sottrazione con il centro nero.

Queste frange di eguale spessore sono note come *anelli di Newton*; pur avendole studiate in termini quantitativi Newton non riuscì a darne una spiegazione soddisfacente, essendo convinto che la luce non fosse un fenomeno ondulatorio.

### Esempio 15.12

In un dispositivo adatto per osservare gli anelli di Newton il raggio di curvatura della lente è  $R = 5\text{m}$ , il diametro della lente  $D = 20\text{ mm}$ , la lunghezza d'onda incidente è  $\lambda_0 = 689\text{ nm}$ . Calcolare il raggio delle frange chiare e scure e il loro numero. Discutere quali modifiche si hanno se l'intercapedine è riempita d'acqua ( $n_2 = 1.33$ ).

### Soluzione

Dalle formule precedenti otteniamo:

$$\text{anelli chiari} \quad r = 1.31 \sqrt{2m+1} \text{ mm} = 1.31, 2.27, 2.93, 3.47, \dots \text{ mm}$$

$$\text{anelli scuri} \quad r = 1.86 \sqrt{m'} \text{ mm} = 0, 1.86, 2.63, 3.22, 3.72, \dots \text{ mm}.$$

Per calcolare il numero di anelli si scrive

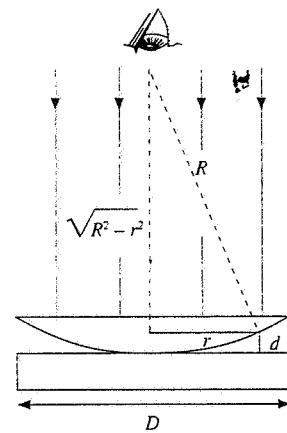


Figura 15.40

$$\frac{D}{2} = 1.31\sqrt{2m+1} \Rightarrow m = 28.6 \text{ ovvero 29 anelli chiari}$$

$$\frac{D}{2} = 1.86\sqrt{m'} \Rightarrow m' = 28.9 \text{ ovvero 28 anelli scuri oltre il centro.}$$

Quando la lamina è d'acqua nelle formule che danno i raggi compare  $n_2$  a denominatore sotto radice: i raggi diminuiscono e il numero di frange aumenta. Si ha

anelli chiari  $r = 1.14\sqrt{2m+1}$  mm numero totale 39

anelli scuri  $r = 1.61\sqrt{m'}$  mm numero totale 38 oltre il centro.

Su questo fenomeno si può basare una misura dell'indice di rifrazione di un liquido.

La formazione degli anelli di Newton fornisce un semplice ed efficace mezzo di verifica dell'accuratezza di lavorazione di una lente sferica. Gli anelli chiari e scuri hanno un aspetto regolare solo se  $R$  è costante (purché il piano di appoggio sia lavorato con precisione almeno dell'ordine di un decimo di lunghezza d'onda,  $\sim 50$  nm). Piccole irregolarità della superficie sferica producono una deviazione dalla forma circolare degli anelli: addirittura una zona chiara può diventare scura se localmente lo spessore della lamina varia di  $\lambda_0 / 4$  ( $\sim 140$  nm per la luce gialla). Questo valore, se pari a qualche percento dello spessore della lamina, deriverebbe da un errore di qualche percento su  $R$ .

Vogliamo fare una precisazione sulle *frange di eguale spessore* (note anche come frange di Fizeau) relativamente al fatto che siano denominate *frange localizzate sulla lamina*. Fissiamo l'attenzione sul cuneo, illuminato da una sorgente estesa con incidenza non troppo obliqua; su di esso l'occhio vede effettivamente una serie di frange chiare e scure. Come abbiamo già accennato, la piccolezza della pupilla dell'occhio fa sì che in un dato punto della retina arrivino raggi provenienti da una sola zona del cuneo, caratterizzata da un certo spessore e perciò da una precisa differenza di fase; ci sono così punti della retina su cui arrivano raggi in fase e altri su cui arrivano raggi in opposizione di fase e sulla retina si forma la figura di interferenza, pensata come immagine di un oggetto posto sulla lamina. Se al posto dell'occhio mettessimo un semplice schermo, dato che la sorgente è estesa in un dato punto dello schermo, arriverebbero svariate coppie di raggi provenienti da diverse zone del cuneo e quindi con diverse differenze di fase: di conseguenza non si avrebbe sullo schermo nessuna figura di interferenza. Il ruolo dell'occhio è dunque essenziale nell'osservazione delle frange; al posto dell'occhio si può mettere un obiettivo e osservare le frange nel piano focale, sempre come immagine della superficie della lamina.

Esempio di frange non localizzate sono invece quelle prodotte col metodo di Young, osservabili nella zona di propagazione comune alle due onde.

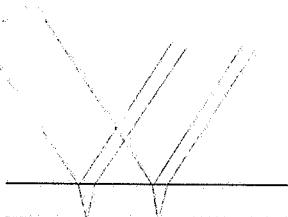


Figura 15.41

#### *Frange di eguale inclinazione*

Riprendiamo in esame una lamina trasparente a facce piane e parallele, con indice di rifrazione  $n_2$ , spessa  $d$ , immersa in aria. Se la illuminiamo con una sorgente estesa e la osserviamo in riflessione, vediamo che ogni raggio proveniente dalla sorgente dà origine a due raggi riflessi paralleli di intensità paragonabile (trascuriamo gli altri raggi riflessi di intensità molto minore). Dato che dalla sorgente arrivano molti raggi secondo una certa direzione e che queste direzioni sono tante, abbiamo in pratica per ogni direzione di osservazione della luce riflessa molte coppie di raggi, tutte con la stessa differenza di fase. Si noti che in una coppia i raggi ovviamente possono interferire, ma che i raggi di coppie diverse sono incoerenti e non interferiscono.

L'interferenza si osserva all'*infinito*, ovvero nel piano focale di una lente, e le frange sono dette *frange di eguale inclinazione* (o di Haidinger) *localizzate all'infinito*: il termine eguale inclinazione deriva dal fatto che in una frangia interferiscono due raggi paralleli originati da un raggio con un determinato angolo di incidenza. Questo è il parametro che conta e che varia da frangia a frangia, mentre lo spessore è costante: invece nelle frange di eguale spessore l'inclinazione è costante ( $\sim 0^\circ$ ) e il parametro importante è lo spessore della lamina.

La differenza di fase tra due raggi paralleli comprende un termine  $\pi$ , dovuto alla diversità delle condizioni di riflessione, e un termine proveniente dalla differenza di cammino ottico che ora calcoliamo. Nella figura 15.42 tracciamo la linea  $CE$  ortogonale alla direzione dei raggi riflessi: un raggio compie il cammino da  $A$  a  $C$  nel mezzo, l'altro da  $A$  a  $E$  nell'aria ( $n_1 = 1$ ), quindi

$$\Delta r = 2 n_2 AB - AE.$$

Siccome

$$AB = \frac{d}{\cos \theta_i}, \quad AE = AC \sin \theta_i = 2 AB \sin \theta_i, \quad \text{sen} \theta_i = 2 n_2 AB \sin^2 \theta_i,$$

otteniamo

$$\Delta r = 2 n_2 d \cos \theta_i. \quad (15.30)$$

La differenza di cammino ottico è massima per incidenza normale e decresce all'aumentare dell'angolo di incidenza e quindi dell'angolo  $\theta_i$  di trasmissione.

Al variare dell'inclinazione si hanno massimi e minimi di intensità riflessa; tenuto conto dello sfasamento di  $\pi$  si trova

$$\max \quad 2 n_2 d \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{4 n_2 d} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\min \quad 2 n_2 d \cos \theta_i = m' \lambda, \quad \cos \theta_i = m' \frac{\lambda}{2 n_2 d} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Valori piccoli di  $m$  e  $m'$  corrispondono a grandi valori di  $\theta_i$  e viceversa per piccoli valori di  $\theta_i$  si hanno grandi valori di  $m$  e  $m'$ .

Per angoli di incidenza non troppo grandi, così che il coefficiente di riflessione si mantenga piccolo, dell'ordine di qualche per cento, il calcolo dell'intensità riflessa si fa secondo le linee che portano alla (15.28). Posto  $\phi = 2\pi \Delta r / \lambda$  e utilizzando, per luce incidente naturale, il valore di  $R$  dato da (14.29), si ha

$$\frac{I_R}{I} = 4 R \sin^2 \frac{\phi}{2} = 4 R \sin^2 \frac{2\pi n_2 d \cos \theta_i}{\lambda}.$$

Questa formula non è più valida quando, al crescere dell'angolo di incidenza, il coefficiente di riflessione aumenta tendendo a 1. Bisogna considerare in questo caso anche i successivi raggi riflessi e, con lo stesso metodo simbolico applicato in precedenza, effettuare la somma di una serie infinita di campi sfasati.

Ponendo una lente con asse ortogonale alla lamina, nel suo piano focale si osserva un sistema di *frange circolari chiare e scure*; il *centro è scuro*. Come si è detto, ad ogni frangia corrisponde un particolare valore di  $\theta_i$ . Le frange sono equispaziate nella variabile  $\cos \theta_i$ ; dato che eguali intervalli di  $\cos \theta_i$  comportano, al crescere di  $\theta_i$ , intervalli sempre più piccoli di  $\theta_i$ , le frange si addensano al crescere di  $\theta_i$ . Sotto questo aspetto esse sono simili agli anelli di Newton.

Notiamo infine che anche in questo caso, se la lamina non è sottile, occorre luce ben monocromatica per osservare le frange; altrimenti, a parità di inclinazione, per una lunghezza d'onda si può avere un massimo e per una vicina un minimo.

### Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson è costituito da due specchi  $M_2$  e  $M_1$ , il primo fisso e il secondo mobile, da una lastra di vetro  $M$  avente una faccia semiriflettente e da una seconda lastra di vetro  $G$ , dello stesso spessore di  $M$ . Un fascio di luce proveniente dalla sorgente estesa lontana  $S$  attraversa la lastra  $M$  e incide sulla faccia semiriflettente: una parte è riflessa verso lo specchio  $M_1$ , una parte eguale è trasmessa verso lo specchio  $M_2$ , che raggiunge passando attraverso la lastra  $G$ . I fasci riflessi dagli specchi tornano verso la faccia semiriflettente di  $M$ : quello proveniente da  $M_1$ , parzialmente trasmesso, e quello proveniente da  $M_2$ , parzialmente riflesso, arrivano attraverso un telescopio sulla retina dell'osservatore, dove interferiscono;

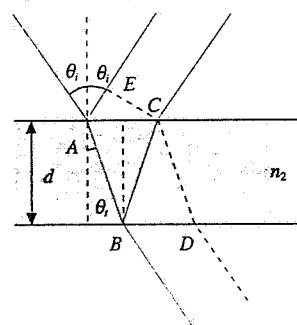


Figura 15.42

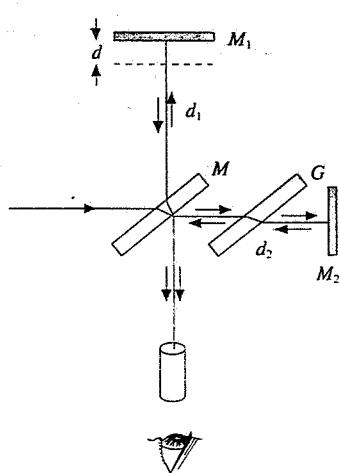


Figura 15.43

essi sono coerenti in quanto ottenuti da un'unica sorgente per divisione di ampiezza.

La lastra  $G$ , detta *lastra di compensazione*, fa sì che entrambi i raggi che interferiscono attraversino lo stesso spessore di vetro, eliminando effetti di dispersione: infatti se non ci fosse  $G$  la differenza di fase tra un raggio e l'altro dovuta al diverso spessore di vetro attraversato dipenderebbe dalla lunghezza d'onda, perché l'indice di rifrazione dipende da  $\lambda$ . La lastra  $G$  è dunque necessaria se si illumina con luce bianca; in luce monocromatica non sarebbe indispensabile, però è utile mantenerla in quanto così la differenza di cammino ottico tra i raggi dipende, con qualsiasi illuminazione, soltanto da  $d_1 - d_2$ , eguale alla differenza tra i cosiddetti *bracci* dell'interferometro.

Se i due specchi sono esattamente perpendicolari tra loro, l'effetto osservato è equivalente a quello di una lamina d'aria di spessore  $d = d_1 - d_2$ : la luce proveniente da  $M_2$  gioca il ruolo di luce riflessa sulla superficie inferiore della lamina, quella proveniente da  $M_1$  di luce riflessa sulla faccia superiore della lamina. Nella figura 15.43 la lamina d'aria equivalente è quella sotto lo specchio  $M_1$ , e la linea tratteggiata, bordo inferiore della lamina, è l'immagine di  $M_2$  data dallo specchio semiriflettente.

In questa situazione si osservano *frange di eguale inclinazione circolari* con il centro chiaro perché non ci sono cause aggiuntive di sfasamento tra i due raggi. La differenza di cammino  $\Delta r$  causata dalla lamina d'aria è data da (15.30) con  $n_2 = 1$  e  $\theta_i = \theta_r$ , angolo di incidenza dei raggi provenienti dalla sorgente:

$$\Delta r = 2d \cos\theta_i = 2(d_1 - d_2) \cos\theta_i$$

$$\max \quad 2d \cos\theta_i = m\lambda, \quad \cos\theta_i = m \frac{\lambda}{2d}$$

$$\min \quad 2d \cos\theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \cos\theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{4d}.$$

Per un dato valore di  $d$  osserviamo la posizione di una certa frangia chiara  $F_m$ , caratterizzata da un valore di  $\theta_i$  e dal numero d'ordine  $m$ ; se allontaniamo  $M_1$ , mantenendolo parallelo alla posizione iniziale,  $d$  aumenta e nella posizione della frangia  $F_m$  subentra un'altra frangia  $F_{m'}$ , con  $m'$  maggiore di  $m$ , mentre la frangia  $F_m$  si porta verso l'esterno in una posizione caratterizzata da un valore minore di  $\cos\theta_i$ . Man mano che la distanza  $d$  viene aumentata si possono contare le frange chiare che passano nella posizione prefissata: il conteggio delle frange si traduce così in una misura di lunghezza, in quanto al passaggio di una frangia corrisponde una variazione di  $d$  quasi eguale a  $\lambda/2$ , essendo  $\lambda$  la lunghezza d'onda della luce monocromatica utilizzata. L'errore assoluto che si commette è dell'ordine di metà della distanza che dà luogo allo spostamento di una frangia, cioè dell'ordine di  $\lambda/4$ .

Anche se molto più elaborato nella pratica, fu questo il metodo seguito da Michelson per confrontare la lunghezza del metro campione con la lunghezza d'onda di una riga rossa emessa da atomi di cadmio ( $\lambda = 643.8$  nm); egli trovò che il metro era pari a  $1.5531635 \cdot 10^6$  di tali lunghezze d'onda, con un errore relativo stimato di  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ . In tal modo Michelson pose le basi per la *definizione ottica dell'unità di lunghezza*, adottata definitivamente nel 1960 (vedi paragrafo 15.7).

Nella sua misura Michelson non effettuò il confronto direttamente col metro campione: a parte il problema di contare oltre tre milioni di frange, la distanza  $d = 1$  m è vicina alla *lunghezza di coerenza* della luce normale emessa dagli atomi e non si può conservare la figura di interferenza su una tale lunghezza. Invece Michelson misurò uno spessore molto più piccolo che poi riportò con grande abilità, senza peggiorare l'errore, alla lunghezza del metro campione. Per contro, la limitazione sugli spessori derivante da scarsa monocromaticità della sorgente non sussisteva, avendo Michelson scelto una riga estremamente stretta, quasi perfettamente monocromatica.

Un risultato concettualmente fondamentale ottenuto con l'interferometro di Michelson fu la prova che la *velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento* (esperimenti di Michelson e Morley, conclusi nel 1887). Supponiamo che il percorso  $MM_2$  sia parallelo alla velocità della terra (e quindi il percorso  $MM_1$  ortogonale a questa velocità). Per una data lunghezza geometrica dei percorsi si calcola quale deve essere la figura di interferenza tenendo conto del fatto che la velocità  $c$  della luce dovrebbe comporsi con la velocità  $v$  della terra risultando ad esempio  $c - v$  nel tratto  $MM_2$  e  $c + v$  nel tratto  $M_2M$ : lo sfasamento tra le onde che interferiscono deve cioè essere determinato inserendo gli appropriati valori di velocità di propagazione della luce in accordo con la composizione galileiana delle velocità, in entrambi i bracci. Una rotazione di  $90^\circ$  dell'interferometro, che giace in un piano orizzontale, scam-

### Definizione ottica dell'unità di lunghezza

bria il ruolo dei due percorsi  $MM_2$  e  $MM_1$ , e si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange, essendo variato lo sfasamento tra le onde che interferiscono. Lo spostamento atteso era di circa mezza frangia, ma gli autori non riuscirono ad osservare nessuno spostamento. L'esperimento fu ripetuto nelle più diverse condizioni, sempre con lo stesso risultato, e portò alla conclusione, posta da Einstein come una delle basi della teoria della relatività ristretta, che *la velocità della luce è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale*.

### 15.7 Interferenza con riflessioni e trasmissioni multiple

Abbiamo accennato più volte nel corso del paragrafo 15.6 alla proprietà della riflessione e della trasmissione della luce da parte di una lastra a facce piane e parallele per cui da un raggio incidente hanno sì origine in teoria infiniti raggi riflessi e trasmessi, ma nella pratica l'intensità si ritrova principalmente nel primo raggio trasmesso e, in misura molto minore, nei primi due raggi riflessi. Il calcolo quantitativo dell'intensità dei singoli raggi è stato fatto nell'esempio 14.4. Abbiamo anche detto che la situazione si modifica se l'angolo di incidenza è grande, nel senso che si può avere interferenza di più raggi con intensità paragonabile.

Una modifica radicale si ha se le facce della lastra sono ricoperte con un deposito semiriflettente o se si considera il dispositivo illustrato in figura 15.44: due lastre piane di vetro parallele tra loro, con le superficie affacciate ricoperte da un deposito *semiriflettente*. Un raggio che entri nella lastra d'aria compresa tra le due lastre di vetro viene riflesso moltissime volte, qualunque sia l'angolo di incidenza; ad ogni riflessione una piccola parte dell'intensità, tipicamente qualche per cento, passa attraverso lo strato semiriflettente e si genera così un gran numero di raggi paralleli con intensità poco diverse, uscenti attraverso l'una o l'altra lastra di vetro. La figura d'interferenza di tali raggi è caratterizzata da *righe luminose sottili separate da larghe zone di buio*, secondo la proprietà, già messa in evidenza nel paragrafo 15.5, di diminuzione della larghezza dei massimi all'aumentare del numero di onde che interferiscono.

Una possibile configurazione sperimentale è illustrata in figura 15.45. Una sorgente estesa illumina le lastre: un generico raggio che incide sulla prima lastra con angolo  $\theta_i$  entra, per quanto attenuato, nella lastra d'aria con angolo  $\theta_i$  e subisce le riflessioni, dando in particolare origine a moltissimi raggi trasmessi oltre la seconda lastra di vetro, dalla quale escono sempre formando l'angolo  $\theta_i$  con la normale. Questi raggi sono portati a interferire nel piano focale di una lente dove formano frange di eguale inclinazione molto nette e ben separate; le frange sono circolari e il centro è chiaro. Lo strumento si chiama *interferometro di Fabry-Perot*.

Le condizioni di massimo e minimo si ricavano da (15.30) con  $n_2 = 1$ :

$$\max \quad 2d \cos \theta_i = m\lambda \quad , \quad \min \quad 2d \cos \theta_i = (2m+1) \frac{\lambda}{2} ;$$

$d$  è lo spessore della lamina d'aria.

La precisione delle misure di lunghezza effettuate con metodi interferometrici portò nel 1960 ad adottare ufficialmente per il metro una definizione basata su una particolare lunghezza d'onda, quella rosso-arancione emessa dagli atomi dell'isotopo  $^{86}\text{Kr}$  del gas nobile krypton nella *transizione tra due* ben determinati *livelli energetici*, con il gas alla temperatura del punto triplo dell'azoto (63K). Secondo questa nuova definizione il *metro è pari a 1650763.73 volte la suddetta lunghezza d'onda*, il cui valore è quindi 605.780211 nm. La precisione relativa è di circa  $2 \cdot 10^{-8}$  (20 nm su un metro). Con la luce emessa da un laser a elio-neon ( $\lambda = 632.8$  nm) è stata successivamente raggiunta una precisione di 10 nm sulla lunghezza di un metro.

Notiamo che il campione ottico delle lunghezze ha requisiti di precisione, riproducibilità, accessibilità nettamente superiori a quelli del regolo di platino-iridio. Ricordiamo d'altra parte che un ulteriore miglioramento nella precisione relativa ( $10^{-9}$ ) è stato ottenuto legando la definizione del metro alla velocità della luce.

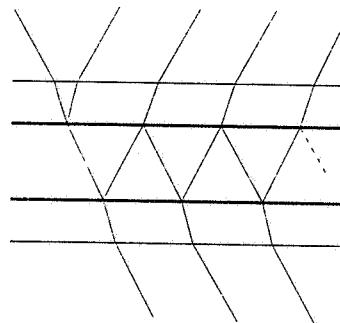


Figura 15.44

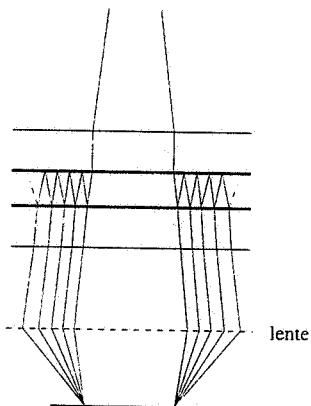


Figura 15.45

Definizione ottica di metro  
campione

**Esempio 15.13**

Un interferometro di Fabry-Perot con  $d = 1$  cm è illuminato da una sorgente estesa monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 632.8$  nm. Calcolare per quale angolo rispetto alla normale si forma la 14<sup>a</sup> frangia chiara e di quanto cambia il numero d'ordine della frangia ottenuta a quel dato angolo se  $d$  viene portato a 21 cm.

**Soluzione**

La frangia centrale chiara si ha per  $\theta_i = 0$ , cioè  $\cos \theta_i = 1$ : la differenza di cammino corrispondente è  $2d = 2$  cm e il numero d'ordine è  $m = 2d / \lambda = 31606$ . Gli altri massimi si formano per differenze di cammino minori; per la 14<sup>a</sup> frangia, oltre il centro, si ha

$$m_{14} = m - 14 = 31592 \Rightarrow \theta_i = \arcsin \frac{m_{14} \lambda}{2d} = 1.68^\circ.$$

A parità di angolo se cambia  $d$  abbiamo

$$2\Delta d \cos \theta_i = \lambda \Delta m \Rightarrow \Delta m = \frac{2 \cos \theta_i}{\lambda} \Delta d = 3.1592 \cdot 10^6 \Delta d$$

Con  $\Delta d = 0.2$  m si conta il passaggio di 631840 frange. Già apprezzando lo spostamento di mezza frangia si avrebbe

$$\Delta d = \frac{0.5\lambda}{2 \cos \theta_i} = \frac{\lambda}{4 \cos \theta_i} \approx \frac{\lambda}{4} = 158.2 \text{ nm} :$$

la distanza di 20 cm sarebbe nota con un errore di 158 nm, cioè con un errore relativo di  $8 \cdot 10^{-7}$  ( $= 0.5/631840$ ). In realtà, dato che le frange sono nette e ben separate, si riesce ad apprezzare uno spostamento del sistema di frange pari a una piccola parte della separazione tra due frange, a cui corrisponde un  $\Delta d$  eguale a qualche centesimo di  $\lambda$ . La miglior precisione raggiungibile è dell'ordine di  $10^{-8}$ .

## 15.8 Onde stazionarie in una corda tesa

La sovrapposizione di onde che si propagano nella stessa direzione in versi opposti può portare ad una situazione stazionaria che descriviamo in questo paragrafo e in quelli successivi, considerando anche casi bidimensionali e tridimensionali. La caratteristica saliente è l'instaurarsi di una *oscillazione collettiva* del sistema, con le modalità che vedremo, senza che avvenga un fenomeno di propagazione.

Prendiamo una corda tesa di lunghezza  $L$  fissata nell'estremo  $O$ , in cui poniamo l'origine dell'asse  $x$ ; se l'estremo libero è legato ad un *diapason* che vibra con frequenza  $v$  e con ampiezza piccola, lungo la corda si propagano onde in entrambi i versi.

Un diapason è una bacchetta di acciaio di sezione rettangolare piegata ad  $U$ , con gli estremi liberi. Esso ha la proprietà di entrare in oscillazione, se colpito ad esempio con un martelletto di gomma, e di vibrare per un tempo abbastanza lungo: l'oscillazione è con buona approssimazione sinusoidale con frequenza fissa. Il diapason funge quindi da sorgente di onde sonore nell'aria o, come nel caso in esame, in una corda tesa fissata ad un suo estremo; riprenderemo brevemente il funzionamento del diapason alla fine del paragrafo.

Indichiamo con

$$s_1(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

la perturbazione trasversale prodotta dal diapason che si propaga lungo la corda verso l'estremo  $O$ ; in questo la perturbazione è  $s_1(0, t) = a \sin \omega t$ . Il punto  $O$  deve

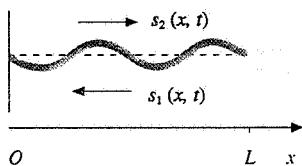


Figura 15.46

restare fisso e dunque la reazione del vincolo genera un'onda riflessa  $s_2$  tale che

$$s_1(0, t) + s_2(0, t) = 0 \Rightarrow s_2(0, t) = -a \sin \omega t ;$$

abbiamo già trovato questa situazione fisica nel paragrafo 14.5.

L'onda riflessa si propaga nel verso positivo dell'asse  $x$  con equazione

$$s_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t) ,$$

per cui la perturbazione complessiva lungo l'asse  $x$  è

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = a [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] = 2a \sin kx \cos \omega t . \quad (15.31)$$

Onda stazionaria

In questa espressione non compare l'argomento  $kx \pm \omega t$ , tipico di un fenomeno di propagazione. E in effetti (15.31) rappresenta un'oscillazione armonica semplice, di pulsazione  $\omega$  eguale in ogni punto della corda e con ampiezza che invece è funzione della posizione,

$$A(x) = 2a \sin kx = 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x . \quad (15.32)$$

Ogni punto della corda compie cioè un'oscillazione armonica, con la pulsazione tipica delle onde originarie e ampiezza che a seconda della coordinata del punto varia tra il massimo  $2a$  e il minimo zero. I massimi di oscillazione si hanno nei punti, chiamati *ventri*, tali che  $\sin kx = 1$ , ovvero dove

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = (2m+1) \frac{\pi}{2} , \quad x = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad m = 0, 1, 2, \dots . \quad (15.33) \quad \text{Venti}$$

L'ampiezza dell'oscillazione è nulla nei punti, chiamati *nodi*, tali che  $\sin kx = 0$ :

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = m' \pi , \quad x = m' \frac{\lambda}{2} \quad m' = 0, 1, 2, \dots ; \quad (15.34) \quad \text{Nodi}$$

nei nodi la corda resta ferma, in qualsiasi istante.

La distanza tra due nodi o due ventri consecutivi è  $\lambda/2$  mentre la distanza tra un nodo e un ventre contigui è  $\lambda/4$ . Tutti i punti compresi tra  $x=0$  e  $x=\lambda/2$  oscillano in fase tra loro; quelli compresi tra  $x=\lambda/2$  e  $x=\lambda$  oscillano in fase tra loro, ma in opposizione di fase rispetto ai precedenti, e così via.

Come si vede, tale movimento della corda, che è chiamato *onda stazionaria*, è ben diverso dalla situazione in cui una singola onda armonica si propaga lungo la corda: in questo caso ogni punto descrive un'oscillazione completa di ampiezza  $a$ , tutti i punti compiono la stessa oscillazione, anche se in istanti diversi, non c'è nessun punto sempre fermo.

L'effettiva formazione delle onde stazionarie è disturbata dalle riflessioni multiple che hanno origine ogni volta l'onda giunge ad uno dei due estremi della corda. Soltanto se la lunghezza  $L$  della corda soddisfa alle condizioni che tra poco esamineremo il fenomeno viene esaltato.

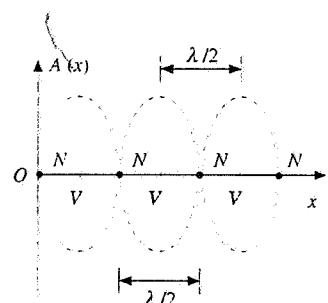


Figura 15.47

*Corda tesa con entrambi gli estremi fissi*

È questa la configurazione più interessante, realizzata ad esempio in tutti gli *strumenti musicali a corde*, nei quali la corda vibrante è sorgente di onde sonore che si propagano nell'aria. Sia il punto fisso coincidente con l'origine che il punto di coordinata  $x = L$  sono nodi e in base a (15.34) deve essere

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi \quad , \quad L = m \frac{\lambda}{2} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{2L}{m} \quad m = 1, 2, \dots$$

Fissata la lunghezza  $L$  della corda, in questa possono aver luogo soltanto le onde stazionarie di lunghezza d'onda e frequenza

Serie armonica

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} \quad , \quad v_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{v}{\frac{2L}{m}} = \frac{v}{2L} m = v_1 m \quad , \quad (15.35)$$

avendo indicato con

Frequenza fondamentale

$$v_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad (15.36)$$

la minima frequenza possibile; per la velocità di propagazione abbiamo utilizzato la (12.29).

In una corda tesa esiste dunque una serie discreta di lunghezze d'onda  $\lambda_m$  e di frequenze  $v_m$ , detta *serie armonica*, in cui la frequenza più bassa  $v_1$  è detta *frequenza fondamentale* o *prima armonica* della corda e le altre, multiple intere di  $v_1$ , sono dette *armoniche superiori*; il valore di  $v_1$  dipende dalla lunghezza  $L$ , dalla massa per unità di lunghezza  $\rho_l$  e dalla tensione applicata alla corda.

Nella figura 15.48 è rappresentata la corda quando vibra nelle prime quattro

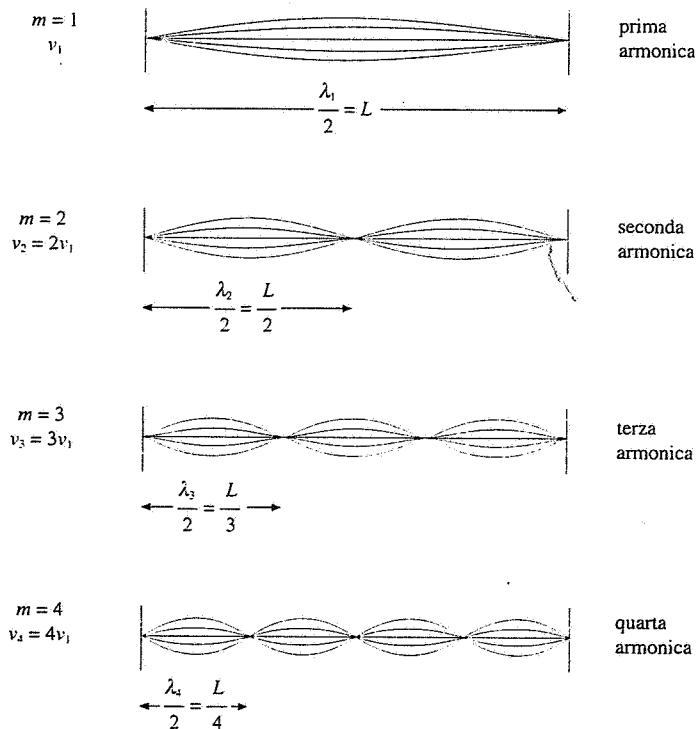


Figura 15.48

configurazioni date da (15.35). Visivamente si capisce bene la condizione che la lunghezza sia un multiplo intero di  $\lambda/2$ , in quanto  $\lambda/2$  è la distanza minima tra due nodi e i nodi, con due estremi fissi, possono essere due, tre, quattro, ecc. Ciascuna linea continua rappresenta la corda ad un dato istante: in ogni figura sono mostrati cinque istanti, quello di massima oscillazione per tutti i punti della corda, un istante intermedio, l'istante in cui la corda è nella posizione coincidente con la posizione di equilibrio statico, un altro istante intermedio e infine l'istante di massima oscillazione di segno opposto alla precedente (tra la prima e l'ultima configurazione c'è una differenza in tempo di mezzo periodo). Si vede anche chiaramente il fatto che le oscillazioni contenute in  $\lambda/2$  (tra due nodi) sono sfasate di  $\pi$  rispetto a quelle contenute nella  $\lambda/2$  successiva.

Una determinata onda stazionaria, con due, tre, quattro o più nodi è detta anche *modo* della corda: una corda tesa ha pertanto  $\infty^1$  modi discreti. Un particolare modo può essere eccitato pizzicando opportunamente la corda oppure con un diapason, come già mostrato nella figura 15.46. Se consideriamo una particolare cresta d'onda generata nell'istante  $t$  dal diapason, quando essa arriva all'altro estremo viene riflessa e quando torna indietro viene di nuovo riflessa dal diapason, che funge da nodo se la sua ampiezza di vibrazione è piccola. Siccome ad ogni riflessione l'onda si capovolge, dopo due riflessioni essa ha lo stesso segno di partenza; se è soddisfatta la (15.35) il tempo impiegato dalla cresta per ritornare al diapason è  $2L/v = m\lambda/v = mT$ , multiplo intero del periodo dell'onda. Pertanto questa cresta è *in fase* con la cresta d'onda che il diapason emette all'istante  $t + mT$  e l'ampiezza risultante è doppia di quella emessa dal diapason. Questa situazione si ripete ad intervalli  $mT$  e l'ampiezza di oscillazione continua ad aumentare; il limite è posto da vari effetti di smorzamento, quali vincoli non ideali e attriti. Se la (15.35) non è soddisfatta nella corda si stabilisce un'onda, risultante di tutte le onde che hanno origine nelle varie riflessioni, la cui ampiezza praticamente coincide con quella del diapason.

Nel caso di coincidenza tra la frequenza del diapason e una delle frequenze (15.35) si ha quindi un *fenomeno di risonanza*: il diapason è in risonanza con la corda. Il fenomeno è analogo a quello trattato nel paragrafo 9.8 del volume primo e anche ora in condizioni di risonanza si ha il massimo trasferimento di potenza dal diapason alla corda.

Risonanza

#### Esempio 15.14

La lunghezza di una corda di chitarra è  $L = 60$  cm e la massa è  $m = 0.6$  g; essa vibra alla frequenza fondamentale  $v_{si} = 246.94$  Hz (si tratta di un *si*). Calcolare la tensione della corda. Calcolare inoltre a quale distanza dal capocorda bisogna premere per fare vibrare la corda con  $v_{mi} = 329.63$  Hz e con  $v_{fa} = 349.23$  Hz.

#### Soluzione

La massa per unità di lunghezza è  $\rho_i = m/L = 10^{-3}$  kg/m; dato che la frequenza fondamentale è  $v_{si}$ , la tensione della corda, secondo (15.36), è

$$T = 4L^2 v_{si}^2 \rho_i = 87.81 \text{ N} .$$

Se si vogliono produrre vibrazioni di frequenza diversa occorre variare la lunghezza della corda. Da (15.35) ricaviamo che, a parità di tensione e quindi di velocità,

$$\frac{L_{mi}}{L_{si}} = \frac{v_{si}}{v_{mi}} \Rightarrow L_{mi} = L_{si} \frac{v_{si}}{v_{mi}} = 44.9 \text{ cm} , \quad L_{fa} = L_{si} \frac{v_{si}}{v_{fa}} = 42.4 \text{ cm} .$$

Nei due casi bisogna premere la corda rispettivamente a 15.1 cm e a 17.6 cm dal capocorda.

Valutiamo quanto influisce una variazione di tensione della corda sulla frequenza. Dato che la relazione tra tensione e frequenza è quadratica, si ha

$$\frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} .$$

Una variazione del 2% nella tensione (nel nostro caso 1.76 N) comporta una variazione dell'1% nella frequenza, cioè di circa 3 Hz per le note considerate. Notiamo che, essendo  $\Delta v / v = \Delta L / L$ , un errore dell'1% sulla frequenza si ha premendo la corda con un errore  $\Delta L = 10^{-2} L \simeq 4.5$  mm: si tratta di circa un quarto della distanza tra le posizioni del *mi* e del *fa* considerati.

I valori delle frequenze indicate per le suddette note corrispondono ad assumere il valore 440 Hz per la nota *la*<sub>3</sub>, che è scelta come campione; con questa scelta il *do*<sub>3</sub>, che è il *do* centrale del pianoforte, ha la frequenza 261.63 Hz. Per completezza diamo le frequenze delle note da *la*<sub>2</sub> a *la*<sub>3</sub>, in Hz:

$$\begin{aligned} la_2 & 220.00 , si_2 246.94 , do_3 261.63 , re_3 293.66 , mi_3 329.63 , \\ fa_3 & 349.23 , sol_3 392.00 , la_3 440.00 . \end{aligned}$$

Un intervallo di frequenza che comporta un raddoppio di frequenza si chiama *ottava*. Tra una nota e una successiva c'è un rapporto  $2^{1/6}$  (*tono*), salvo che tra *si* e *do* e tra *mi* e *fa* nel qual caso il rapporto è  $2^{1/12}$  (*semitono*): un'ottava corrisponde a 12 semitonni.

### Corda tesa con una estremità libera

Una corda tesa con un estremo libero si realizza come mostrato nella figura 15.49: l'estremo libero è fissato ad un filo sottile tramite il quale la corda è mantenuta in tensione; maggiore è il rapporto tra le densità lineari della corda e del filo e più l'estremo si può considerare libero.

Già dalla figura 15.48 si può intuire quale sarà la condizione per avere onde stazionarie stabili in questo sistema: dato che un estremo deve essere un nodo e l'altro un ventre, la lunghezza minima è  $\lambda/4$  e le altre lunghezze possibili sono  $3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ , cioè multipli dispari di  $\lambda/4$ , se  $\lambda = v/T$  è la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza della vibrazione che si vuole ottenere.

Il risultato si ricava analiticamente da (15.32) imponendo che per  $x = L$  ci sia un ventre:

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = (2m+1) \frac{\pi}{2} ,$$

$$L = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \frac{4L}{2m+1} \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Pertanto, fissata la lunghezza  $L$ , nella corda si hanno onde stazionarie con lunghezze d'onda e frequenze date da

Serie armonica

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m+1} , \quad v_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{v}{4L} (2m+1) = v_1 (2m+1) . \quad (15.37)$$

La frequenza fondamentale è

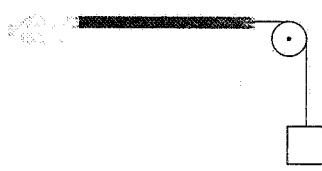


Figura 15.49

$$\nu_1 = \frac{v}{4L} = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{T}{\rho_i}} \quad (15.38) \quad \text{Frequenza fondamentale}$$

La serie armonica è costituita da  $\nu_1, 3\nu_1, 5\nu_1, \dots$ , cioè dalla *frequenza fondamentale*, pari a metà di quella di una corda eguale con estremi fissi, e dai suoi *multipli dispari*. Alcune configurazioni sono mostrate nella figura 15.50, che va confrontata con la figura 15.48.

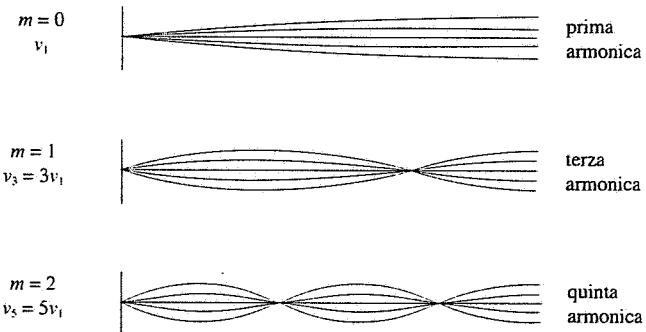


Figura 15.50

Come si è visto nel paragrafo 14.5 l’onda che arriva all’estremità libera viene riflessa senza capovolgersi; è invece capovolta dal diapason quando torna indietro e pertanto una cresta emessa dal diapason risulta capovolta dopo aver subito due riflessioni. D’altra parte il tempo necessario per percorrere due volte la corda è

$$\frac{2L}{v} = (2m+1) \frac{\lambda}{2v} = (2m+1) \frac{T}{2} = mT + \frac{T}{2}$$

e quindi la cresta che ritorna è in fase con la cresta emessa dal diapason in quell’istante. Si realizza anche ora la condizione di risonanza e si possono ripetere le stesse considerazioni fatte per la corda con gli estremi fissi.

Dopo aver discusso la formazione delle onde stazionarie in una corda tesa si può capire il funzionamento del *diapason*. Se  $L$  è la lunghezza della bacchetta, fissa al centro e libera agli estremi, la frequenza minima di vibrazione è determinata da  $L = \lambda/2$  e quindi  $v = \nu/\lambda = \nu/2L$ , essendo  $v$  la velocità delle onde elastiche nel metallo di cui è fatta la bacchetta; caratteristica del diapason è di emettere un suono che sostanzialmente è composto solo dalla frequenza  $\nu$ , il che significa che in esso si realizza soltanto la prima configurazione, con due ventri e un nodo.

Invece le corde tese dei vari strumenti musicali emettono un suono che contiene molti termini della serie armonica, in dipendenza della struttura dello strumento. Il numero di armoniche superiori e l’intensità di ciascun termine armonico caratterizzano il *timbro* di uno strumento musicale: è questa proprietà che rende così diversa all’udito la stessa nota suonata ad esempio da un violino, da un violoncello o da un pianoforte. L’argomento verrà ripreso nella nota alla fine del paragrafo 15.9.

Diapason

Concludiamo questo primo paragrafo sulle onde stazionarie con alcune note di

carattere matematico. La funzione (15.31), in quanto somma di soluzioni dell'equazione delle onde piane (12.1), è ancora soluzione di (12.1). Ciò non è in contrasto con quanto affermato in precedenza, e cioè che la soluzione più generale è del tipo  $f(x-vt) + g(x+vt)$ , mostra soltanto che la sovrapposizione di due onde può dar luogo in certi casi ad un'onda che si propaga e in altri ad un fenomeno stazionario. Questo però non è una soluzione semplice, cioè non si ottiene con un'onda sola, ma necessariamente con la somma di due o più onde.

Supponiamo ora di imporre che una funzione del tipo  $s(x, t) = A(x) \cos \omega t$  sia soluzione dell'equazione (12.1) delle onde piane; deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cos \omega t = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos \omega t ,$$

ovvero in ogni istante deve essere

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} A(x) = 0 \Rightarrow A(x) = a_1 \operatorname{sen} kx + a_2 \operatorname{cos} kx .$$

Si conclude che l'ampiezza di una soluzione tipo onda stazionaria deve essere una funzione sinusoidale di  $x$ ; dipende poi dalle condizioni al contorno che la forma effettiva sia  $a_1 \operatorname{sen} kx$  o  $a_2 \operatorname{cos} kx$  o più in generale  $a \operatorname{sen}(kx + \alpha)$ .

### 15.9 Onde stazionarie in una colonna di gas

Si può produrre il regime di onda stazionaria anche in una colonna di gas, come quella contenuta in una canna d'organo o più in generale in uno strumento a fiato.

Prendiamo come esempio una *canna d'organo*; l'onda longitudinale nell'aria è prodotta ad un estremo inviando una corrente d'aria contro lo spigolo tagliente dell'apertura  $O$ : il moto vorticoso dell'aria in prossimità di  $O$  genera una perturbazione e a tale estremo c'è un massimo dell'ampiezza di spostamento (ventre). L'onda di pressione, sfasata di  $90^\circ$  rispetto all'onda di spostamento come abbiamo visto nel paragrafo 12.8, ha nello stesso estremo un nodo. Se l'altra estremità della canna è aperta possiamo assumere che si tratti ancora di un nodo per la pressione, coincidente quindi nei due estremi con la pressione atmosferica  $p_0$ : per l'onda di spostamento l'estremo aperto coincide invece con un ventre.

In sostanza, con la *canna d'organo aperta* si realizzano agli estremi le stesse condizioni per la *pressione (due nodi)* e per lo *spostamento (due ventri)*; la situazione pertanto è la stessa già vista per la corda con entrambi gli estremi fissi e concludiamo che nella colonna d'aria contenuta nella canna di lunghezza  $L$  si possono avere onde stazionarie con lunghezze d'onda e frequenze date da (15.35):

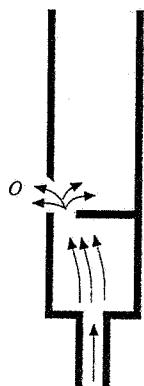


Figura 15.51

Canna aperta

$$\lambda_m = \frac{2L}{m} , \quad v_m = \frac{v}{2L} m \quad m = 1, 2, \dots ;$$

$v$  è la velocità di propagazione dell'onda sonora nel gas, data dalla (11.46) riportata nel paragrafo 12.2, cioè  $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ . La serie armonica è composta dalla frequenza fondamentale  $v_1 = v / 2L$  e dai suoi multipli interi.

Se la *canna è chiusa* all'altra estremità (canna d'organo chiusa), là si ha un ventre di pressione e un nodo di spostamento e siamo nelle stesse condizioni della corda tesa con un estremo fisso e uno libero; valgono quindi le (15.37) per lunghezza d'onda e frequenza dell'onda stazionaria:

Canna chiusa

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m+1} , \quad v_m = \frac{v}{4L} (2m+1) \quad m = 0, 1, 2, \dots .$$

La serie armonica è composta da  $v_1 = v / 4L$  e dai suoi multipli dispari; a parità di lunghezza la fondamentale è la metà della fondamentale con estremità aperta. Regolando le lunghezze in modo che una canna aperta e una chiusa abbiano la stessa fondamentale, il *timbro* sarà ad ogni modo diverso vista la diversità delle serie armoniche.

Le condizioni di funzionamento descritte sono ideali; in una canna aperta nella realtà il nodo di pressione si forma un po' oltre l'apertura finale, ad una distanza  $\Delta L$  che vale circa  $0.6 R$ , se  $R$  è il raggio della canna. Si definisce una *lunghezza efficace della canna*,

$$L_{\text{eff}} = L + \Delta L ,$$

e  $\Delta L$  si chiama *correzione di bocca*.

Correzione di bocca

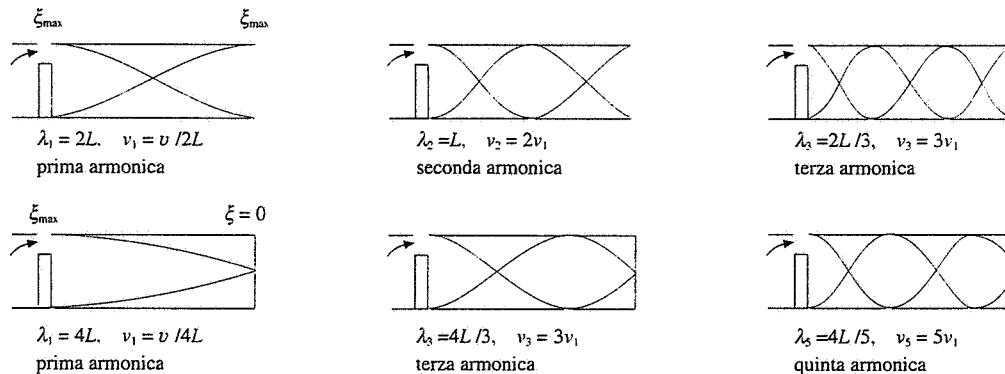


Figura 15.52

### Esempio 15.15

Nel dispositivo schematizzato in figura 15.53 l'altezza della colonna d'aria  $L$  può essere variata regolando il livello del liquido che riempie parzialmente il tubo. Un diapason di frequenza  $v_0 = 880$  Hz vibra in prossimità della bocca. Variando  $L$  varia l'intensità sonora percepita e in particolare si percepiscono dei massimi di intensità sonora per tre valori successivi di  $L$ ,  $L_1 = 28.5$  cm,  $L_2 = 47.5$  cm,  $L_3 = 66.5$  cm. Calcolare la velocità del suono nella colonna d'aria.

#### Soluzione

La colonna d'aria ha un estremo chiuso e uno aperto e quindi la sua condizione di risonanza è  $L = (2m+1)\lambda_0/4$ . Tenendo conto della correzione di bocca scriviamo:

$$L_1 + \Delta L = (2m+1)\lambda_0/4 ,$$

$$L_2 + \Delta L = [2(m+1)+1]\lambda_0/4 = (2m+3)\lambda_0/4 ,$$

$$L_3 + \Delta L = [2(m+2)+1]\lambda_0/4 = (2m+5)\lambda_0/4 .$$

La differenza tra due lunghezze corrispondenti ai massimi è  $2(\lambda_0/4) = \lambda_0/2$ , indipendente da  $\Delta L$ . Secondo i dati del problema questa distanza è pari a 19 cm per cui  $\lambda_0 = 38$  cm e

$$v = \lambda_0 v_0 = 334.4 \text{ m/s} ;$$

evidentemente l'esperimento è condotto ad una temperatura di circa 10°C (283 K). Essendo  $\lambda_0/4 = 9.5$  cm, notiamo che  $L_1 = 3\lambda_0/4$ ,  $L_2 = 5\lambda_0/4$ ,  $L_3 = 7\lambda_0/4$ :  $v_0$  dunque è la terza armonica per il tubo lungo  $L_1$ , la quinta per il tubo lungo  $L_2$  e la settima per il tubo lungo  $L_3$ . Solo se la colonna fosse lunga  $L_0 = 9.5$  cm essa avrebbe come frequenza fondamentale  $v_0$ .

Lo strumento descritto è stato effettivamente usato per misurare la velocità del suono nell'aria.

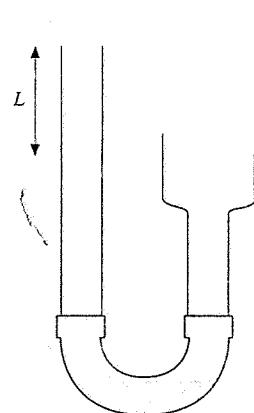


Figura 15.53

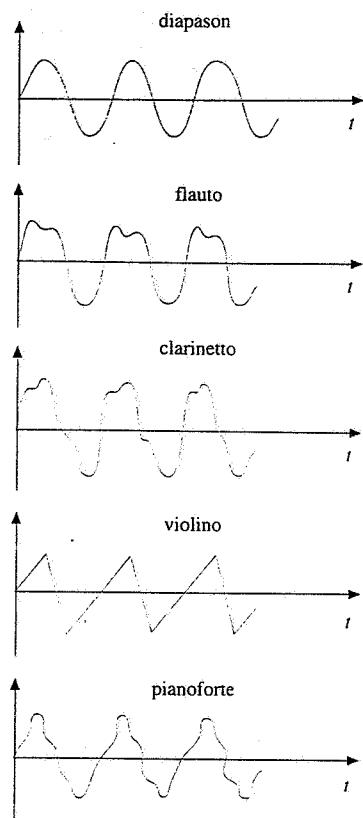


Figura 15.54

**Nota. Sintesi del suono**

Dallo studio effettuato sulle onde stazionarie ricaviamo che uno strumento a corda o a fiato fornisce un massimo di potenza quando la frequenza di eccitazione, che genera l'onda stazionaria, coincide con una delle frequenze della serie armonica. Se il sistema è caratterizzato dalla frequenza fondamentale  $v = \omega/2\pi$ , mediante il meccanismo delle riflessioni multiple vengono esaltate le pulsazioni  $2\omega, 3\omega, 4\omega \dots$  (o  $3\omega, 5\omega, 7\omega, \dots$ ) mentre le altre vengono smorzate e risultano praticamente assenti. La funzione che esprime il suono emesso dallo strumento si può esprimere tramite la (12.13) con  $a_0 = 0$ ,

$$f(t) = \sum_m (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t) ;$$

la funzione  $f(t)$ , avente periodo  $T = 2\pi/\omega$ , presenta una forma dipendente dal numero di armoniche superiori che la compongono; i pesi di queste sono dati dai coefficienti  $a_m$  e  $b_m$  o meglio da  $a_m^2 + b_m^2$ , che è proporzionale all'intensità dell' $m$ -esima componente. La stessa nota, di frequenza fondamentale  $v = \omega/2\pi = 1/T$ , emessa da diversi strumenti, ha una diversa composizione di armoniche e provoca una sensazione sonora diversa: questa proprietà, come abbiamo già ricordato, si chiama *timbro*. Nella figura 15.54 sono riportate per una stessa nota le forme d'onda di un diapason (suono puro, privo di armoniche superiori) e di alcuni strumenti musicali.

I moderni sintetizzatori elettronici possono riprodurre qualsiasi timbro, generando e miscelando opportunamente le varie armoniche; l'operazione si chiama *sintesi del suono*.

**15.10 Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz**

Il primo esperimento di formazione di onde elettromagnetiche stazionarie fu realizzato nel 1888 da Hertz operando con lunghezze d'onda nella regione delle radiofrequenze ( dette appunto onde hertziane). Tale esperimento fornì la prova dell'esistenza delle onde elettromagnetiche previste da Maxwell oltre vent'anni prima e ne diede la velocità di propagazione, che risultò  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, coincidente con la velocità della luce dedotta da misure astronomiche e da più precise misure terrestri (vedi paragrafo 13.13). Veniva così alla fine risolto il problema dell'identificazione della grandezza fisica responsabile dei fenomeni di interferenza e di diffrazione della luce, la cui osservazione era iniziata verso il 1650 con Grimaldi ed era stata portata a livello quantitativo da Young nel 1800 con la prima determinazione della lunghezza d'onda: i fenomeni luminosi dovevano essere attribuiti a onde elettromagnetiche con frequenza compresa in una determinata banda.

Il dispositivo di Hertz è schematizzato nella figura 15.55. Le due sfere  $S_1$  e  $S_2$

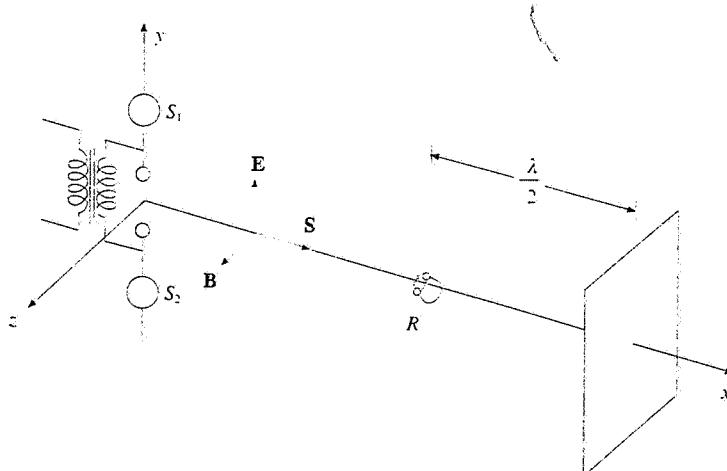


Figura 15.55

vengono caricate dal secondario di un trasformatore sino al valore della tensione di innesto della scintilla nello spinterogeno costituito dalle due sfere più piccole. Il sistema si può assimilare ad un *dipolo elettrico oscillante*: infatti con lo scoccare della scintilla ha origine una scarica oscillante di frequenza  $\nu$  e pulsazione  $\omega = 2\pi\nu$ , caratteristiche del circuito elettrico e quindi note (precisamente  $\nu = 4 \cdot 10^7$  Hz). Dal dipolo oscillante vengono emessi un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e un campo magnetico  $\mathbf{B}$  che si propagano nello spazio, con le proprietà già viste nel paragrafo 13.6. Lungo una direzione di propagazione  $x$ , che giace nel piano equatoriale del dipolo, è posta una lastra di materiale conduttore, ortogonale a  $x$  e al vettore di Poynting  $\mathbf{S}$ , distante circa 13 m dalla sorgente.

Quando il campo  $\mathbf{E}$  incide sul conduttore, ha origine un campo elettrico  $\mathbf{E}'$ , tale che in ogni istante  $\mathbf{E} + \mathbf{E}' = 0$  sulla superficie del conduttore, in quanto su questa non può sussistere un campo elettrico ad essa parallelo. La *lastra di conduttore* funge quindi da *superficie nodale per il campo elettrico*; il campo riflesso  $\mathbf{E}'$  si propaga in verso opposto ad  $\mathbf{E}$  e, in analogia con quanto visto nel paragrafo 15.8, si ha la formazione di un'onda stazionaria espressa da

$$\mathbf{E}' = 2 E_0 \sin kx \cos \omega t \mathbf{u}_y .$$

Sulla superficie del conduttore si invertono contemporaneamente il verso di  $\mathbf{E}'$  e il verso di propagazione dell'onda, cioè del vettore di Poynting; il *campo magnetico*  $\mathbf{B}' = (E/c) \mathbf{u}_z$  quindi non si inverte (figura 15.56), ovvero la superficie del conduttore è una superficie ventrale per il campo magnetico. Pertanto la corrispondente onda stazionaria si scrive

$$\mathbf{B}' = 2 \frac{E_0}{c} \cos kx \cos \omega t \mathbf{u}_z .$$

Abbiamo dunque lungo l'asse  $x$  un'onda stazionaria elettromagnetica; dove il campo elettrico ha un ventre il campo magnetico ha un nodo e viceversa dove il campo elettrico ha un nodo il campo magnetico ha un ventre.

Per trovare le posizioni dei ventri e dei nodi del campo magnetico Hertz utilizzò, nel modo che ora descriveremo, una piccola spira  $R$  di area  $\Sigma$ , interrotta in un punto. Si pone la spira in un piano ortogonale all'asse  $z$  e la si sposta lungo l'asse  $x$ ; in una data posizione il flusso attraverso la spira è

$$\Phi(\mathbf{B}) = \frac{2E_0 \Sigma}{c} \cos kx \cos \omega t$$

e nella spira ha origine la f.e.m. indotta

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2E_0 \Sigma \omega}{c} \cos kx \sin \omega t .$$

Il modulo di  $\varepsilon$  varia da un massimo  $\varepsilon_0 = 2 E_0 \Sigma \omega / c$  nei ventri ad un minimo nullo nei nodi del campo magnetico. Se si regola la distanza tra gli estremi del filo di modo che scocchi una scintilla quando la tensione nella spira ha il valore  $\varepsilon_0$ , cioè quando la spira si trova nei pressi di un ventre, si può misurare la distanza tra due ventri, che sappiamo essere pari a  $\lambda/2$ ; in particolare un ventre deve trovarsi a distanza  $\lambda/2$  dalla lastra. Alternativamente, se nella spira è inserito un misuratore di tensione, si deve verificare che la variazione del modulo della f.e.m. con la posizione è data da  $\varepsilon_0 \cos kx$  (figura 15.57).

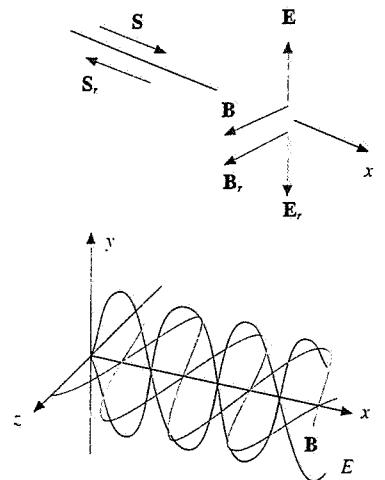


Figura 15.56

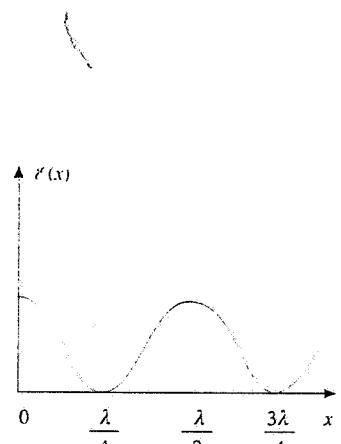


Figura 15.57

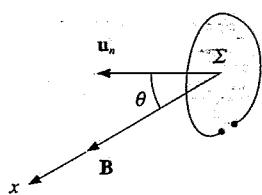


Figura 15.58

Operando secondo queste linee Hertz trovò effettivamente i ventri e misurò  $\lambda$ ; da questa nota la frequenza del generatore di onde, calcolò la velocità di propagazione  $c = \lambda v$  delle onde che davano origine all'onda stazionaria.

Se si pone la spira in corrispondenza ad un ventre e la si ruota in modo che la normale formi un angolo  $\theta$  con l'asse  $z$  (figura 15.58), la f.e.m. indotta deve variare con la legge  $\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{E}_0 \cos \theta$ ; anche questo andamento venne verificato, determinando la direzione di  $\mathbf{B}$  e provando che il campo magnetico è trasversale rispetto alla direzione di propagazione.

Le stesse misure si possono compiere con un rivelatore sensibile ad un campo elettrico e si trovano le proprietà previste.

È importante sottolineare come un fenomeno stazionario consenta di ricavare la velocità di propagazione delle onde che concorrono a generarlo; abbiamo trovato lo stesso risultato anche in una situazione diversa, dovuta a sovrapposizione di onde progressive, e cioè nel tubo di Quincke (paragrafo 15.2). Alla base ci sono la ripetizione spaziale di particolari condizioni di interferenza, che permettono di misurare la lunghezza d'onda, e la relazione fondamentale  $\lambda v = c$ .

### 15.11 Onde stazionarie bidimensionali e tridimensionali. Radiazione di cavità

Onde che si propagano in un piano o nello spazio possono dare origine a sistemi di onde stazionarie di grande interesse sia concettuale che pratico. In questo paragrafo considereremo alcune situazioni semplici e ci soffermeremo in particolare sulle onde elettromagnetiche stazionarie all'interno di una *cavità*, problema concettuale che è stato di importanza fondamentale per compiere il passaggio dall'elettromagnetismo classico alla teoria quantistica della radiazione.

#### Onde stazionarie in una membrana rettangolare tesa

Abbiamo mostrato nel paragrafo 12.9 che in una membrana tesa si propaga un'onda trasversale piana di spostamento del tipo

$$s = s_0 \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) ,$$

in cui il vettore  $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{u}_x + k_2 \mathbf{u}_y$  dà la direzione di propagazione; la lunghezza d'onda e la frequenza sono

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad , \quad v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{kv}{2\pi} \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad ;$$

$v$  è la velocità di propagazione,  $\sigma$  la massa per unità di superficie e  $T$  la tensione cui è sottoposta la membrana (forza per unità di lunghezza).

Supponiamo che la membrana rettangolare di lati  $a_1$  e  $a_2$  sia tesa su un telaio in maniera tale che i suoi bordi siano fissi (figura 15.59). L'onda che si muove da  $A$  verso  $B$  viene riflessa in  $B$  lungo la direzione  $BC$ , viene successivamente riflessa in  $C$  lungo la direzione  $CD$  e nuovamente riflessa in  $D$ : ad ogni riflessione l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono eguali e nella figura è indicato come cambiano in ciascuna riflessione le componenti del vettore  $\mathbf{k}$ . Si hanno le quattro onde

$$s_1 = s_{01} \sin(k_1 x + k_2 y - \omega t) , \quad s_2 = s_{02} \sin(k_1 x - k_2 y - \omega t) ,$$

$$s_3 = s_{03} \sin(-k_1 x - k_2 y - \omega t) , \quad s_4 = s_{04} \sin(-k_1 x + k_2 y - \omega t) .$$

L'onda risultante  $s_R$  è la somma di queste quattro onde; imponendo la condizione che in ogni istante i punti dell'asse  $x$  ( $y = 0$ ) e i punti dell'asse  $y$  ( $x = 0$ ) siano fissi, cioè che gli assi siano linee nodali, si ottiene

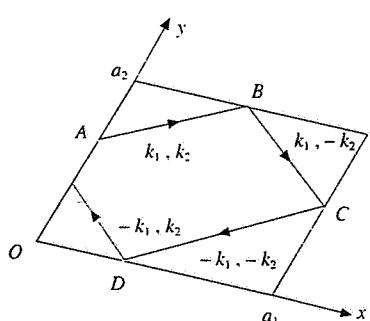


Figura 15.59

$$\xi_0 = A \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(\omega t) \quad (15.39)$$

generalizzazione bidimensionale di (15.31).

Dovendosi imporre la condizione che anche gli altri due lati,  $x = a_1$  e  $y = a_2$ , siano linee nodali, bisogna scrivere

$$k_1 a_1 = n_1 \pi, \quad k_1 = n_1 \frac{\pi}{a_1} \quad n_1 = 1, 2, \dots$$

$$k_2 a_2 = n_2 \pi, \quad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a_2} \quad n_2 = 1, 2, \dots$$

La membrana può diventare sede di onde stazionarie nelle quali il numero d'onde, la lunghezza d'onda e la frequenza sono dati dalle relazioni

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}}, \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \\ v &= \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2}}. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Ogni frequenza possibile è caratterizzata da una *coppia di numeri* interi  $n_1, n_2$  e ad ogni frequenza corrisponde una differente configurazione della membrana; i singoli punti della membrana oscillano con frequenza  $v$  e ampiezza variabile da punto a punto secondo (15.39). Al crescere di  $n_1$  e  $n_2$  si hanno *linee nodali* anche all'interno della membrana e non solo sui bordi.

In figura 15.60 sono riportate, per una *membrana quadrata* di lato  $a$ , alcune configurazioni corrispondenti alle prime frequenze possibili

$$v_{n_1, n_2} = \frac{\nu}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (v_{n_1, n_2} = v_{n_2, n_1})$$

La frequenza più bassa  $v_{1,1}$  è detta *fondamentale* o *prima armonica*; le altre *armoniche*  $v_{1,2}, v_{2,2}, \dots$ , dette *superiori*, non sono multipli interi di  $v_{1,1}$  per cui questo insieme di frequenze non forma una serie armonica.

Anche nel caso bidimensionale ogni onda stazionaria è chiamata *modo del sistema*; una membrana tesa ha  $\infty^2$  modi.

Il problema di una *membrana circolare*, come quella di un tamburo o di un altro strumento a percussione, è più complicato da trattare, ma i risultati sono simili: soltanto certe frequenze sono possibili e il loro insieme non forma una serie armonica. Il timbro risulta sempre dalla sovrapposizione delle varie armoniche che vengono eccitate e dai rispettivi pesi.

I valori delle frequenze dipendono dalla tensione e dalla massa per unità di superficie; a parità di tensione sono più elevate le frequenze di un tamburello rispetto a quelle di un timpano.

### Onde stazionarie tridimensionali

Un'onda piana  $\xi = \xi_0 \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t)$  che si propaghi in una cavità a forma di parallelepipedo di lati  $a_1, a_2, a_3$ , le cui facce siano piani nodali, dà origine a sei onde piane che interferiscono formando un sistema di onde stazionarie se

$$k_1 a_1 = n_1 \pi, \quad k_2 a_2 = n_2 \pi, \quad k_3 a_3 = n_3 \pi \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

generalizzazione delle corrispondenti relazioni bidimensionali. Queste onde stazionarie hanno numero d'onde, lunghezza d'onda e frequenza dati da

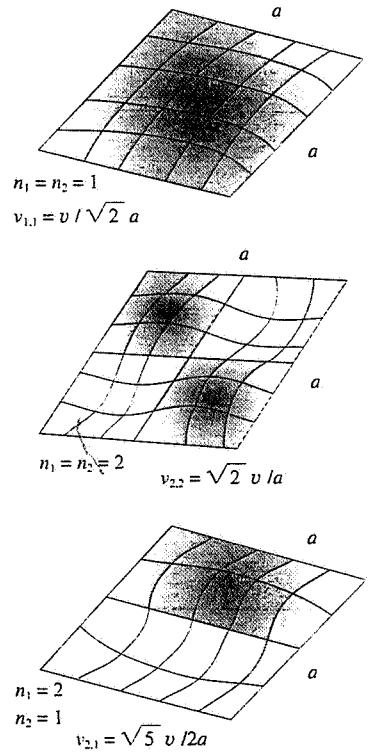


Figura 15.60

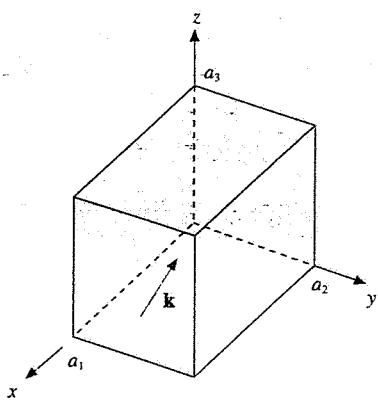


Figura 15.61

Seguendo la terminologia già adottata, i modi della cavità sono  $\infty^3$ .

Esempi pratici possono essere onde sonore in una cavità rigida e onde elettromagnetiche in una cavità conduttrice; di quest'ultimo caso, molto importante per le applicazioni pratiche, ci occuperemo nel paragrafo 15.12.

### Radiazione di cavità

Consideriamo una *cavità cubica* con pareti perfettamente riflettenti, mantenuta alla temperatura uniforme  $T$ . Gli atomi che costituiscono le pareti interne della cavità si comportano come *oscillatori elementari* che emettono e assorbono radiazioni elettromagnetiche, isotropicamente, per cui in condizioni di equilibrio nella cavità è distribuita energia elettromagnetica con densità media costante  $u$ . La *densità di energia elettromagnetica relativa all'intervallo di lunghezze d'onda* comprese tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  si scrive

$$u_\lambda d\lambda = \frac{du}{d\lambda} d\lambda \quad (15.42)$$

e ovviamente

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda \quad (15.43)$$

Pratichiamo nella cavità un foro  $F$  di area  $d\Sigma$  molto piccola, così da non alterare l'equilibrio esistente nella cavità. La radiazione che esce dal foro ha le caratteristiche di quella nella cavità e viene detta *radiazione di cavità* o anche *radiazione di corpo nero*. Il foro  $F$ , che si può assumere come sorgente di questa radiazione verso l'esterno, prende il nome di *corpo nero*; vedremo nel capitolo 18 il perché di questa terminologia.

Si definisce *potere emissivo specifico*  $\varepsilon_\lambda$  del corpo nero la grandezza tale che  $\varepsilon_\lambda d\lambda$  rappresenti l'energia emessa dal corpo nero per unità di tempo e per unità di superficie nell'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ . Il *potere emissivo*  $\varepsilon$ , energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è l'integrale del potere emissivo specifico su tutte le lunghezze d'onda:

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda d\lambda \quad , \quad \varepsilon_\lambda = \frac{d\varepsilon}{d\lambda} \quad . \quad (15.44)$$

Il potere emissivo ha la stessa unità di misura dell'intensità,  $\text{W/m}^2$ , mentre  $\varepsilon_\lambda$  si misura in  $\text{W/m}^3$ .

L'energia emessa per unità di tempo dal corpo nero è eguale all'energia che arriva nell'unità di tempo sul foro dai diversi punti della cavità. Come adesso dimostreremo, la relazione tra potere emissivo e densità di energia all'interno della cavità è

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda d\lambda \quad , \quad \varepsilon = \frac{c}{4} u \quad . \quad (15.45)$$

Il fattore  $c$ , velocità della luce, deriva dalla relazione che esiste tra intensità e densità di energia (paragrafo 13.3), il fattore  $1/4$  è dovuto al fatto che la radiazione raggiunge il foro provenendo da direzioni diverse.

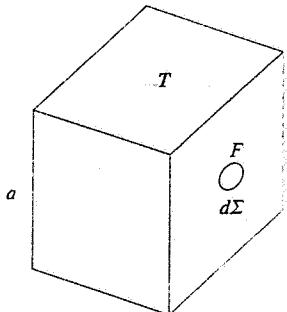


Figura 15.62

Potere emissivo  
Potere emissivo specifico

Allo scopo supponiamo che la cavità sia sferica (ipotesi irrilevante, come vedremo, ma utile per il calcolo). Diciamo  $d\Sigma'$  un elemento della superficie interna della cavità e  $d\Omega'$  l'angolo solido sotto cui è visto  $d\Sigma'$  dal foro  $F$ . Nella regione delimitata da  $d\Omega'$  la densità di energia è  $u d\Omega' / 4\pi$ , dato che l'energia nella cavità è distribuita isotropicamente su tutto l'angolo solido  $4\pi$  ( $d\Omega' / 4\pi$  è la frazione di angolo solido che stiamo considerando). Il vettore di Poynting relativo all'energia emessa da  $d\Sigma'$  che si propaga verso il foro  $F$  è  $cud\Omega' / 4\pi = dS$ , per cui l'energia emessa da  $d\Sigma'$  che nell'unità di tempo attraversa il foro  $F$  di area  $d\Sigma$  è

$$dS \cdot u_n d\Sigma = cu \frac{d\Omega'}{4\pi} d\Sigma \cos\theta ,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione che congiunge  $F$  a  $d\Sigma'$  e il diametro passante per  $F$ . Infine, per unità di superficie ed esprimendo  $d\Omega'$  in coordinate polari,

$$d\varepsilon = \frac{cu}{4\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi .$$

Si integra su  $\phi$  da zero a  $2\pi$  e su  $\theta$  da zero a  $\pi/2$  e si ha tutta l'energia che arriva nell'unità di tempo sull'unità di area del foro, cioè il potere emissivo del foro,

$$\varepsilon = \frac{cu}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{cu}{4} .$$

che è la seconda delle (15.45); la prima si ottiene differenziando in  $\lambda$ .

Queste relazioni, pur essendo state dedotte per una cavità sferica, valgono per cavità di qualsiasi forma, in quanto si è ragionato soltanto sull'angolo solido sotto cui sono visti i punti della cavità dal foro  $F$ .

Per ricavare la forma analitica di  $\varepsilon_\lambda$  supponiamo che le onde elettromagnetiche nella cavità cubica di lato  $a$  formino un sistema di onde stazionarie. Le frequenze possibili si ricavano da (15.41) adattata alla forma cubica ( $a_1 = a_2 = a_3 = a$ ):

$$\nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4a^2\nu^2}{c^2} .$$

Il numero di modi che hanno frequenza compresa tra la fondamentale  $\nu_1 = \sqrt{3} c / 2a$  e una generica frequenza  $\nu$  si ottiene contando tutte le combinazioni possibili di numeri interi  $n_1, n_2, n_3$  tali che

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \frac{4a^2\nu^2}{c^2} = \frac{4a^2}{\lambda^2} .$$

Con il segno di egualianza questa è l'equazione di una superficie sferica di raggio  $R = 2a / \lambda = 2a\nu / c$  in uno spazio tridimensionale di coordinate  $n_1, n_2, n_3$ . Assumiamo che  $R$  sia molto grande, ovvero che sia molto grande il numero di combinazioni dei numeri  $n_1, n_2, n_3$  che soddisfano alla diseguaglianza: questa ipotesi equivale a supporre  $\lambda \ll a$ , il che è plausibile trattandosi di radiazioni emesse e assorbite da atomi. Le tre variabili discrete  $n_1, n_2, n_3$  possono allora essere trattate come continue: fissato un raggio  $r$  minore di  $R$ , il numero di combinazioni rappresentate da punti compresi nella corteccia sferica tra  $r$  e  $r + dr$  è semplicemente eguale al volume della corteccia sferica e pertanto il numero totale di combinazioni è dato da un ottavo del volume della sfera di raggio  $R$  (un ottavo perché  $n_1, n_2, n_3$  assumono solo valori positivi). In conclusione il numero di modi con frequenza minore o eguale a  $\nu$  è

$$N_\nu = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4\pi\nu^3}{3c^3} a^3$$

e, per unità di volume,

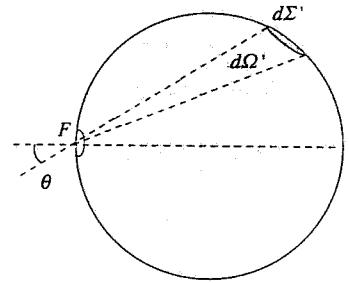


Figura 15.63

$$n_v = \frac{N_v}{a^3} = \frac{4 \pi v^3}{3 c^3}$$

Questo numero va moltiplicato per due in quanto, per ogni modo, sono possibili due stati indipendenti di *polarizzazione*; siamo così arrivati al risultato che, in condizioni di equilibrio, il campo elettromagnetico all'interno della cavità può essere rappresentato come un insieme di oscillatori la cui densità di volume, in funzione della frequenza o della lunghezza d'onda, è

$$n_v = \frac{8\pi v^3}{3c^3} = n_\lambda = \frac{8\pi}{3\lambda^3}$$

Nell'intervallo di frequenze tra  $v$  e  $v + dv$ , ovvero di lunghezze d'onda tra  $\lambda$  e  $\lambda - d\lambda$ , gli oscillatori per unità di volume sono

$$dn_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv = dn_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

e hanno l'energia

$$u_\lambda d\lambda = dn_\lambda w_m = \frac{8\pi}{\lambda^4} w_m d\lambda$$

dove con  $w_m$  è indicata l'*energia media* di ogni oscillatore. Da (15.45) il potere emissivo specifico si esprime come

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} w_m d\lambda \quad . \quad (15.47)$$

Classicamente, dato un insieme di oscillatori in equilibrio alla temperatura  $T$ , la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $w$  e  $w + dw$  è data dall'*espressione di Boltzmann*

$$e^{-w/k_B T} dw \quad ,$$

che abbiamo già utilizzato nel paragrafo 5.10. Se l'energia dell'oscillatore può assumere con continuità tutti i valori tra zero e infinito, il *valore medio* è

$$w_m = \frac{\int_0^\infty w e^{-w/k_B T} dw}{\int_0^\infty e^{-w/k_B T} dw} = k_B T$$

dato che  $\int x e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} (\alpha x - 1)$ ,  $\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ . Sostituendo nella (15.47) otteniamo

Formula di Rayleigh-Jeans

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T d\lambda \quad . \quad (15.48)$$

nota come *formula di Rayleigh-Jeans*.

Il potere emissivo specifico di un corpo nero ad una data temperatura può essere determinato con notevole precisione e i risultati possono essere confrontati con la (15.48). Nella figura 15.64 è mostrata una misura effettuata a  $T = 2000$  K e la corrispondente previsione della formula di Rayleigh-Jeans. Soltanto per grandi valori di  $\lambda$  gli andamenti tendono a

coincidere, ma in complesso il disaccordo è completo: il potere emissivo specifico misurato ha un massimo ad una certa lunghezza d'onda e poi tende a zero al diminuire di  $\lambda$  ovvero all'aumentare della frequenza, mentre la formula di Rayleigh-Jeans non prevede massimi e addirittura diverge per  $\lambda$  tendente a zero. Il potere emissivo, dato dall'area sotto la curva, è ovviamente finito, ma secondo (15.48) esso sarebbe infinito, in contrasto con la conservazione dell'energia:

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} d\lambda = 2\pi c k_B T \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \frac{2}{3} \pi c k_B T \left[ \frac{1}{\lambda^3} \right]_0^{\infty} = \infty$$

D'altra parte, il procedimento con cui è ricavata la (15.48) è ineccepibile dal punto di vista classico. La soluzione venne trovata da Planck nel 1901: non è corretto assumere che l'energia degli oscillatori rappresentativi della radiazione elettromagnetica all'interno della cavità possa assumere con continuità qualsiasi valore tra zero e infinito; l'*energia di un oscillatore di frequenza  $v$  può assumere invece un insieme discreto di valori che sono zero o  $hv$  o un multiplo intero di  $hv$* . Questa ipotesi, che introduce per la prima volta l'idea di una energia quantizzata, permette di calcolare in modo diverso  $\varepsilon_{\lambda}$  che compare nella (15.47) e fornisce un risultato in perfetto accordo con i dati sperimentali, come discuteremo per esteso nel capitolo 18.

## 15.12 Cavità risonanti. Guide d'onda

Nel paragrafo 15.11 abbiamo considerato le onde stazionarie tridimensionali e le condizioni (15.41). Vogliamo adesso descrivere solo qualitativamente un caso di onde elettromagnetiche stazionarie all'interno di una *cavità* perfettamente conduttrice di forma *cilindrica*, con lunghezze d'onda al limite tra onde hertziane e microonde.

Una possibile configurazione dei campi elettrico e magnetico ad un dato istante è mostrata nella figura 15.65: le linee di  $E$  sono rette parallele all'asse del cilindro e sono tutte equivevere, il modulo di  $E$  decresce monotonicamente dall'asse alla parete, su cui è nullo (l'andamento è approssimativamente sinusoidale). Le linee di  $B$  sono circonferenze in piani ortogonali all'asse, con verso legato al verso di  $\partial E / \partial t$  dalla solita convenzione della vite destrogiro; il modulo di  $B$ , che è nullo sull'asse, varia come mostrato nella figura 15.66. Al passare del tempo la configurazione delle linee di campo resta la stessa, anche se i moduli dei campi variano come  $\sin \omega t$  o  $\cos \omega t$  e quindi i versi cambiano; ad esempio, con riferimento alla figura 15.65, i vettori  $E$  diminuiscono in lunghezza riducendosi a zero, poi cambiano verso e crescono fino ad un massimo per poi diminuire e invertirsi di nuovo.

Il modo mostrato è quello a frequenza più bassa appartenente alla classe dei modi *TM* (dall'inglese *transverse magnetic*), così chiamati perché  $B$  giace nel piano ortogonale all'asse. Si dimostra che la frequenza di questo modo è legata al raggio della cavità dalla relazione

$$\nu = 0.383 \frac{c}{r} \approx \frac{1.15 \cdot 10^8}{r} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \approx 2.61 r \text{ m}$$

Ad esempio, con  $r = 0.5 \text{ m}$   $\lambda = 1.31 \text{ m}$ ,  $\nu = 2.3 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 230 \text{ MHz}$  e il periodo di oscillazione vale  $T = 1/\nu = 4.35 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 4.35 \text{ ns}$ .

Nel modo descritto il campo elettrico è nullo sulle pareti cilindriche, rispettando il fatto che non può esserci un campo elettrico diverso da zero parallelo ad una superficie conduttrice; rispetto alle basi  $E$  è ortogonale (in accordo con la stessa regola) e pertanto sulle basi devono esserci cariche di segno opposto, positive sulla base inferiore e negative su quella superiore nell'istante rappresentato in figura 15.65. Dato che il campo elettrico varia e si inverte queste cariche variano nel tempo e di conseguenza devono esserci correnti verticali variabili sulle pareti cilindriche, il che tra l'altro è in accordo con la discontinuità del campo magnetico sulle pareti laterali. Da tali considerazioni si capisce che per eccitare nella cavità questa risonanza con frequenza  $\nu$  occorre mantenere opportune correnti sulle pareti; per un funzionamento stabile è necessario fornire potenza con continuità, a causa dell'assorbimento ohmico dei conduttori. Di norma il *fattore di merito*  $Q = \omega / \Delta\omega = \nu / \Delta\nu$  (vedi paragrafo 11.2) della *risonanza* è molto grande, con valori superiori a  $10^4$ .

Naturalmente sono possibili altri modi di oscillazione con configurazioni dei campi diverse, modi *TM* con frequenze superiori e modi *TE* (*transverse electric*) con una frequenza

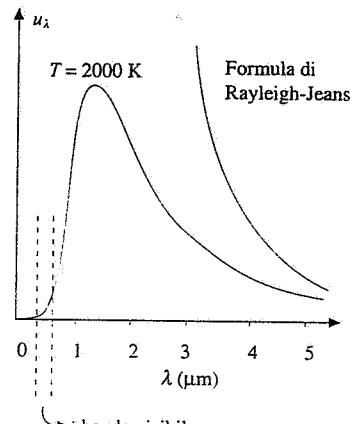


Figura 15.64

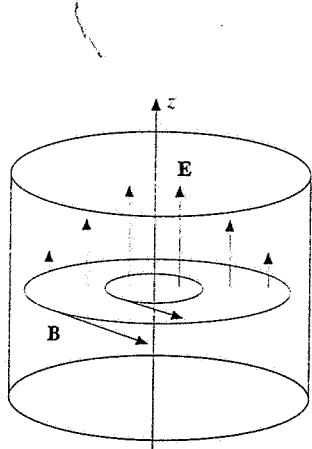


Figura 15.65

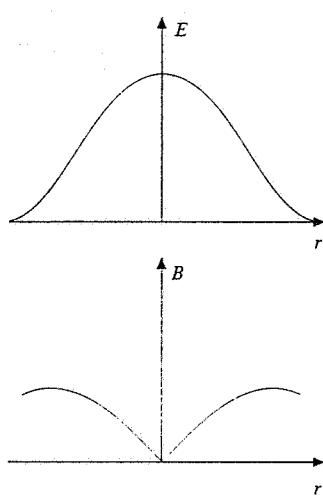


Figura 15.66

fondamentale poco diversa dalla  $v$  sopra citata e con le varie armoniche superiori; non si hanno mai serie armoniche.

Le cavità risonanti nel modo  $TM$  sono utilizzate negli *acceleratori di particelle* per comunicare energia alle particelle stesse (vedi paragrafo 9.9). Si sincronizza il moto delle particelle, ad esempio protoni, in modo che esse passino lungo l'asse della cavità, alta  $z$ , con velocità parallela e concorde all'asse proprio in quella frazione del periodo di oscillazione in cui il campo elettrico è anch'esso concorde all'asse: in tale caso il campo elettrico compie il lavoro  $qEz$  sulla particella e l'energia cinetica di questa aumenta; se le particelle da accelerare sono elettroni, bisogna che il verso di  $E$  sia opposto a quello del moto, dato che gli elettroni sono negativi. Il problema è più complicato di quanto tali semplici cenni possano mostrare, però il principio è questo ed è in sostanza l'unico utilizzato finora nelle grandi macchine acceleratrici moderne.

### Guide d'onda

Le onde stazionarie in una cavità derivano dalla sovrapposizione di onde che vengono riflesse dalle pareti; è quindi concepibile che si possa trovare una soluzione in cui le onde sovrapponendosi diano luogo ad un'onda progressiva invece che stazionaria. La cavità diventa in tal caso una guida d'onda e si parla di onde guidate lungo una cavità.

Abbiamo già trattato un problema di questo tipo parlando del *cavo coassiale* come linea di trasmissione nel paragrafo 11.5. Lungo il cavo si hanno onde di potenziale e di corrente con velocità eguale a  $c$  se il dielettrico è il vuoto e inferiore a  $c$  se il dielettrico ha costante dielettrica  $\kappa$  ( $v = c / \sqrt{\kappa}$ ). La differenza di potenziale tra i conduttori implica la presenza di un campo elettrico trasversale e le correnti nei conduttori di un campo magnetico, anch'esso trasversale: il cavo coassiale è sede di un'onda elettromagnetica trasversale che si propaga in un dielettrico omogeneo delimitato da due cilindri conduttori coassiali; la velocità di propagazione non dipende dalla frequenza. Nella pratica i cavi coassiali sono utilizzati fino a frequenze dell'ordine di  $10^9$  Hz.

Rispetto al cavo coassiale un *tubo conduttore* a sezione circolare o *rettangolare* avrà presumibilmente un comportamento diverso, se non altro perché non c'è il conduttore centrale; d'altra parte, per quanto visto nelle cavità risonanti, è presumibile che ci sia un fenomeno di propagazione.

Il caso più semplice si presenta con una guida a sezione rettangolare (figura 15.67). Se ammettiamo che esista un'onda progressiva, la forma più immediata è del tipo

$$E(z, x) = E_0 \sin k_z z \cos(k_x x - \omega t), \quad (15.49)$$

con  $E$  parallelo all'asse  $y$ . Il termine  $\sin k_z z$  assicura che il campo sia nullo sulle pareti verticali, purché sia almeno  $k_z a = \pi$ ; il termine  $\cos(k_x x - \omega t)$  dà la propagazione lungo  $x$ .

Questo campo deve soddisfare all'equazione tridimensionale delle onde (12.48) e per sostituzione diretta otteniamo

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Per  $k_z$  abbiamo il vincolo  $k_z = \pi/a$  e quindi

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (15.50)$$

Questa relazione comporta che si abbia propagazione solo se  $\omega^2/c^2 > \pi^2/a^2$ , ovvero se

$$\omega > \frac{\pi c}{a} \Rightarrow v > \frac{c}{2a}.$$

La frequenza  $v_t = c/2a$ , legata alla dimensione trasversale (rispetto a  $E$ ) della guida, è detta *frequenza di taglio*: l'onda descritta si propaga nella guida solo se la frequenza è maggiore di  $v_t$ ; se invece  $v$  è minore di  $v_t$ ,  $k_x$  diventa immaginario puro e abbiamo già visto qual è il significato (paragrafo 14.4): l'onda non è più sinusoidale, diventa esponenziale decrescente e si

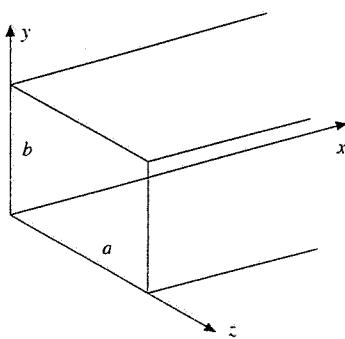


Figura 15.67

annulla dopo una certa distanza, così che non si può più parlare di propagazione.

La *velocità di fase* dell'onda guidata è

$$v_f = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_i^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2}} ;$$

Velocità di fase

essa dipende da  $\omega$ , cioè la *guida* è *dispersiva*, e per  $\omega > \omega_i$ , quando c'è propagazione, risulta  $v_f > c$ . La *velocità di gruppo* (12.61) è

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{d}{dk_x} \sqrt{c^2 k_x^2 + \omega_i^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2} ,$$

Velocità di gruppo

minore di  $c$ ; il prodotto  $v_f v_g$  è eguale a  $c^2$ .

Una proprietà che rende la propagazione dell'onda guidata completamente differente dagli altri casi visti finora è relativa al campo magnetico. L'andamento di  $\mathbf{E}$ , la presenza delle pareti e la legge  $\nabla \times \mathbf{B} = (1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$  fanno sì che le linee di  $\mathbf{B}$  siano disposte come mostrato nella figura 15.68: quando il campo elettrico è trasversale rispetto a  $x$  il campo magnetico ha una componente lungo la direzione di propagazione, cosa che non avviene in un mezzo indefinito.

Quello descritto è un particolare modo di propagazione di tipo *TE*; è possibile anche avere modi *TM*, con il campo magnetico ortogonale all'asse  $x$ : in questo caso il campo elettrico ha una componente longitudinale.

Risolviamo ora un caso classico, in modo da dimostrare come si arriva a un'espressione tipo (15.49). Consideriamo due piani conduttori paralleli tra loro e all'asse  $x$ , separati da una distanza  $a$ ; l'asse  $z$  è ortogonale ai piani, l'asse  $y$  è entrante nel foglio (figura 15.69). Un'onda piana di equazione

$$E_y = E_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t) ,$$

con il campo elettrico polarizzato lungo l'asse  $y$ , si propaga nello spazio tra i piani ad un certo angolo con l'asse  $x$  che dipende dai valori delle componenti  $k_x$  e  $k_z$  del vettore di propagazione  $\mathbf{k}$ . In  $A$  l'onda viene riflessa e ha equazione

$$E_1 = E_{0,1} \sin(k_x x - k_z z - \omega t) .$$

In  $B$  succede lo stesso e la nuova onda riflessa ha lo stesso vettore  $\mathbf{k}$  dell'onda incidente  $E_y$ . Nello spazio tra i piani abbiamo quindi le due onde tipo  $E$  ed  $E_1$  e l'onda risultante si scrive

$$E_R = E_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t) + E_{0,1} \sin(k_x x - k_z z - \omega t) .$$

Nei punti  $z = 0$  il campo  $E_R$  deve essere nullo, per cui  $E_{0,1} = -E_0$  e in definitiva

$$E_R = E_0 [\sin(k_x x + k_z z - \omega t) - \sin(k_x x - k_z z - \omega t)] = 2 E_0 \sin k_z z \cos(k_x x - \omega t) ,$$

che è la (15.49). Imponendo che anche il piano  $z = a$  sia un piano nodale ( $E_R = 0$ ) si ha  $k_z a = n \pi$ , cioè  $k_z = n \pi / a$  con  $n = 1, 2, \dots$ , e l'espressione finale dell'onda è

$$E_R = 2 E_0 \sin \frac{n \pi z}{a} \cos(k_x x - \omega t) .$$

L'andamento del modulo del campo elettrico per i due modi con  $n = 1$  e  $n = 2$  è mostrato in figura 15.70. Per  $n = 2$  si ha un piano nodale anche in coincidenza col piano mediano tra i due conduttori: la frequenza di taglio è  $\nu' = 2 \nu_i = c/a$ . I modi di ordine superiore hanno frequenze di taglio maggiori.

*Guide d'onda metalliche* sono usate nel campo delle onde elettromagnetiche centimetriche e millimetriche (microonde) per trasmettere energia da un generatore ad un utilizzatore; anche le *fibre ottiche* si comportano come guide d'onda per le onde elettromagnetiche visibili. Una guida d'onda naturale per le onde radio (frequenze intorno a  $10^6$  Hz) è fornita dalla

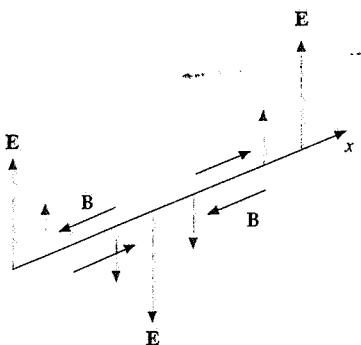


Figura 15.68

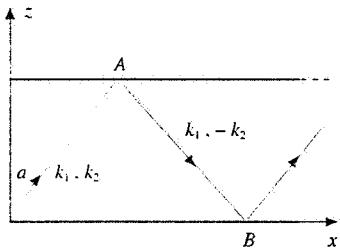


Figura 15.69

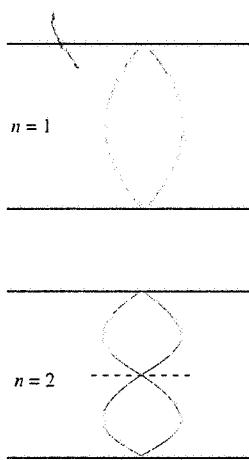
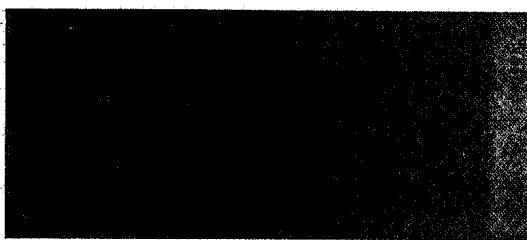


Figura 15.70

superficie terrestre e dalla ionosfera: onde radio emesse per esempio in Europa, riflettendosi alternativamente sulla zona inferiore della ionosfera e sulla superficie terrestre, possono raggiungere l'Australia.

Concetti analoghi si sviluppano anche nel caso delle onde sonore.

# Diffrazione



## 16.1 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel

La *diffrazione* è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo o un'apertura. Ad esempio l'apertura può essere costituita da un foro circolare o rettangolare, praticato in uno schermo assorbente per le onde in esame, un ostacolo da un filo, un disco assorbente o più in generale da un qualsiasi oggetto. Qualitativamente, nello spazio oltre l'ostacolo o l'apertura le onde si propagano anche lungo direzioni *diverse* da quella di incidenza e hanno origini differenti di cammino tra onde che si sovrappongono in un dato punto; possono quindi avvenire fenomeni di interferenza con conseguente ridistribuzione dell'energia nei punti dello spazio, da cui risultano le caratteristiche *figure di diffrazione*. Gli effetti della diffrazione sono di norma tanto più vistosi quanto più le dimensioni dell'apertura o dell'ostacolo sono vicine al valore della lunghezza d'onda delle onde incidenti.

I fenomeni di diffrazione si verificano con tutti i tipi di onde; essi si osservano facilmente nel caso delle onde sulla superficie di un liquido e delle onde sonore, aventi lunghezze d'onda prossime alle dimensioni di molti oggetti comuni. Più difficile è l'osservazione nel caso delle onde luminose, proprio a causa della piccola lunghezza d'onda ( $\lambda = 0.4 \div 0.7 \mu\text{m}$ ); però la fenomenologia e le applicazioni sono molto interessanti e per questa ragione ci occuperemo soprattutto della diffrazione della luce. Le argomentazioni generali tuttavia restano valide per qualsiasi tipo di onda.

Storicamente la diffrazione venne osservata per la prima volta da Grimaldi nella seconda metà del diciassettesimo secolo, in un'epoca che sarebbe stata dominata dalla teoria di Newton, la quale attribuiva alla luce una natura corpuscolare, in contrasto con la teoria ondulatoria di Huygens. L'ipotesi ondulatoria si affermò solamente dopo oltre cent'anni, a seguito degli esperimenti di Young e Fresnel.

Nella figura 16.1 è illustrato un caso comune in cui si osserva diffrazione: un'onda arriva su uno schermo opaco nel quale è praticato un foro di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce incidente; uno schermo  $C$ , o una pellicola fotografica, riceve la luce che ha attraversato il foro.

Per il calcolo dell'ampiezza luminosa in un punto  $P$  dello schermo si ricorre al *principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff*, enunciato nel paragrafo 14.2. La superficie dell'apertura viene suddivisa in infiniti elementi di area  $d\Sigma$ , ciascuno dei quali rappresenta una sorgente elementare di onde, avente l'ampiezza di campo elettrico

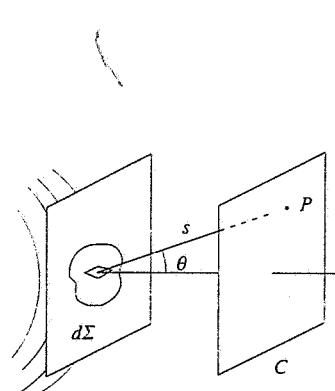


Figura 16.1

$$dE = \frac{Af(\theta) d\Sigma}{s} \quad , \quad f(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \quad (16.1)$$

L'ampiezza risultante in  $P$  si ottiene sommando vettorialmente i contributi  $dE$  provenienti da tutte le sorgenti che costituiscono il foro illuminato, sorgenti che sono intrinsecamente coerenti, esattamente in fase se la superficie del foro coincide con una parte del fronte d'onda incidente e con differenza di fase costante negli altri casi.

Se l'onda incide su un ostacolo opaco, ad esempio un disco, per il calcolo dell'ampiezza dell'onda in un punto  $P$  oltre l'ostacolo si procede nello stesso modo, considerando le parti del fronte d'onda non interessate dall'ostacolo.

Tra i possibili modi con cui si realizza e si osserva la diffrazione prodotta da aperture e ostacoli illuminati se ne considerano essenzialmente due, legati ai nomi di Fraunhofer e di Fresnel.

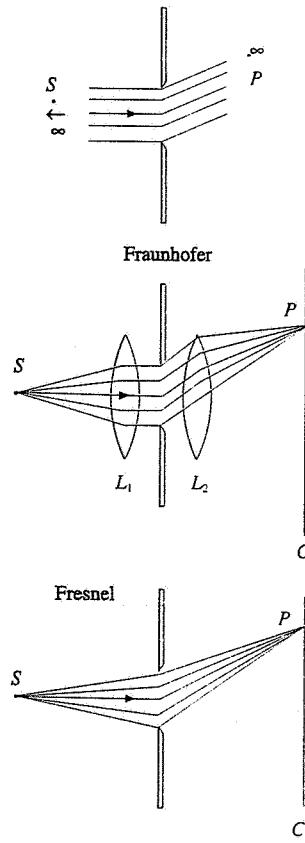


Figura 16.2

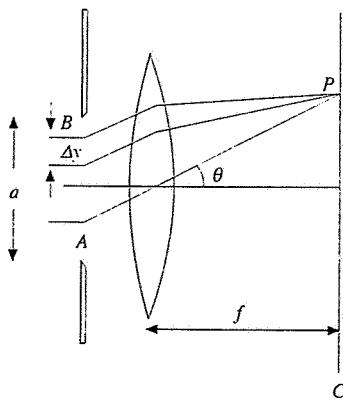


Figura 16.3

## 16.2 Diffrazione ad una fenditura rettilinea

Cominciamo a discutere la diffrazione di Fraunhofer considerando un foro rettangolare praticato in uno schermo opaco, di larghezza  $a = AB$  e lunghezza  $L \gg a$ , foro che viene chiamato fenditura rettilinea (indefinita); nella figura 16.3 la fenditura si sviluppa ortogonalmente al disegno.

Supponiamo che sulla fenditura incida un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$ , con il fronte d'onda parallelo al piano contenente la fenditura, e suddividiamo questa in  $N$  strisce parallele di larghezza  $\Delta y$ . Ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con l'ampiezza  $\Delta E$  al campo elettrico risultante  $E_R$  in un punto  $P$  dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo  $\theta$  rispetto alla normale al piano della fenditura. I contributi  $\Delta E$  relativi a due strisce adiacenti hanno nel punto  $P$  la differenza di fase

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta ,$$

derivante dalla differenza di cammino  $\Delta y \sin\theta$ .

Per il calcolo di  $E_R$  si procede come nel caso di  $N$  sorgenti coerenti (paragrafo

15.5), attraverso la costruzione della poligonale degli *N vettori rotanti* rappresentanti le onde che si sovrappongono. Adesso però bisogna far tendere  $N$  all'infinito ovvero  $\Delta\theta$  a zero, per cui la poligonale diventa un arco di circonferenza di raggio  $\rho$  con angolo al centro

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta , \quad (16.2)$$

eguale alla differenza di fase tra le onde emesse nei punti estremi  $A$  e  $B$  della fenditura. Dalla figura 16.4 risulta

$$E_R = 2\rho \sin \frac{\alpha}{2}$$

La lunghezza dell'arco di circonferenza è  $E_{\max} = \rho\alpha$  e corrisponde all'ampiezza massima che si osserva al centro dello schermo, quando  $\theta = 0$  e tutte le onde emesse dalle singole strisce sono in fase. In definitiva

$$E_R = f(\theta) E_{\max} \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} ,$$

espressione nella quale abbiamo evidenziato il fattore di inclinazione  $f(\theta)$  in quanto tutte le ampiezze emesse ad angolo  $\theta \neq 0$  vanno moltiplicate per  $f(\theta)$ .

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza; ricorriamo a (16.2) e abbiamo

$$I(\theta) = I_{\max} f^2(\theta) \left[ \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right]^2 = I_{\max} f^2(\theta) \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 . \quad (16.3) \quad \text{Intensità}$$

La funzione  $I(\theta)$  è mostrata in figura 16.5 per i valori  $a = 10\lambda$ ,  $a = 5\lambda$ ,  $a = \lambda$ .

L'intensità trasmessa dalla fenditura si annulla nei cosiddetti *minimi di diffrazione*, quando

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = m\pi \quad , \quad \sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.4)$$

I primi minimi, a destra e a sinistra del massimo centrale, si hanno per  $\sin \theta = \pm \lambda/a$  e la quantità

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{2\lambda}{a}$$

si chiama *larghezza angolare del massimo centrale di diffrazione*. Si vede che per  $a \gg \lambda$  il massimo è molto stretto e l'effetto della diffrazione è quasi trascurabile, ma che il massimo si allarga se  $a$  diminuisce tendendo a  $\lambda$ . Se fosse  $a = \lambda$  il primo ed unico minimo si formerebbe a  $\theta = 90^\circ$  e con  $a < \lambda$  l'intensità non si annullerebbe mai: cioè con  $a \leq \lambda$  tutto lo spazio al di là della fenditura è illuminato.

Nella figura 16.6 è ripreso l'andamento di  $I(\theta)$  in un caso  $a > \lambda$ , insieme ad una

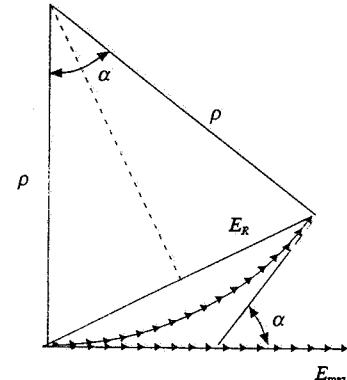


Figura 16.4

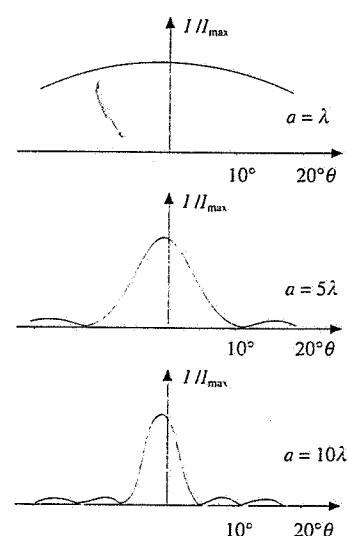


Figura 16.5

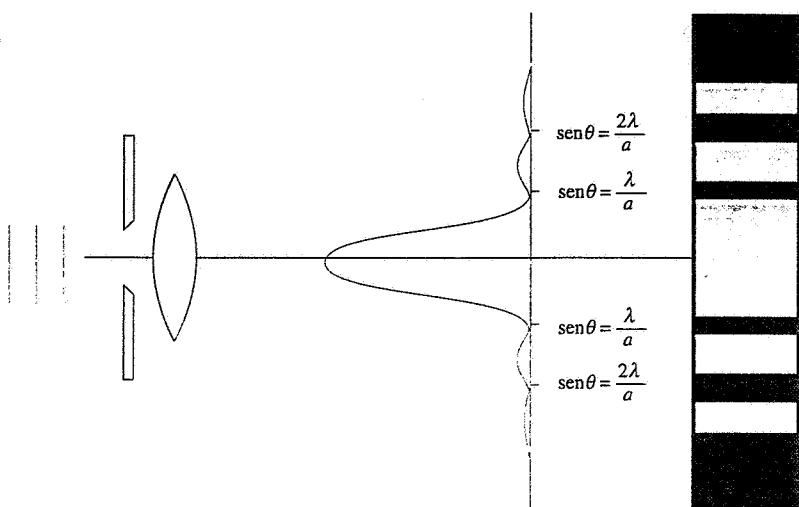


Figura 16.6

fotografia che mostra l'effetto visivo su uno schermo. Dato che la maggior parte della potenza (~ 80%) è concentrata nella frangia centrale, si usa dire che questa rappresenta l'*immagine della fenditura*.

Tra due minimi d'intensità esiste un *massimo secondario*, la cui posizione si calcola cercando i massimi della funzione  $(\sin^2 \beta) / \beta^2$ , che sintetizza l'andamento dell'intensità. Si trova la condizione  $\operatorname{tg} \beta = \beta$ , equazione trascendente risolvibile con un metodo grafico (a parte il caso ovvio  $\beta = 0$ ). Risulta però molto buona l'approssimazione di considerare massima l'intensità quando è massimo  $\sin^2(\pi a \operatorname{sen} \theta / \lambda)$ , ovvero quando

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} = (2m' + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = (2m' + 1) \frac{\lambda}{2a} \quad m' = 1, 2, 3, \dots$$

L'*intensità dei massimi secondari* risulta pertanto, trascurando il fattore di inclinazione,

$$\frac{I_m}{I_{\max}} = \frac{1}{\left[ (2m' + 1) \frac{\pi}{2} \right]^2} \approx \frac{0.4}{(2m' + 1)^2}$$

Già nel primo massimo,  $m' = 1$ , si ha  $I_1 / I_{\max} = 0.045$ , ovvero l'intensità è molto minore rispetto al massimo centrale; per  $m' = 2$  il rapporto vale 0.016, per  $m' = 3$  vale 0.008 e così via. I rapporti sono ulteriormente depressi se si introduce il fattore  $f^2(\theta)$ . I massimi secondari non sono quindi ben visibili: se  $\lambda$  non è molto diversa da  $a$  essi sono abbastanza separati dal massimo centrale e i primi sono percepibili, se invece  $\lambda \ll a$  essi cadono molto vicino alla direzione  $\theta = 0$  e anche per tale ragione sono praticamente invisibili.

#### Esempio 16.1

Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.59 \cdot 10^{-6}$  m attraversa una fenditura di larghezza  $a$ . La larghezza dell'immagine della fenditura, osservata nel piano focale di una lente di distanza focale  $f = 60$  cm, è  $\Delta x = 7.5$  mm. Calcolare il valore di  $a$ .

**Soluzione**

Semilarghezza dell'immagine, distanza focale e angolo  $\theta$  a cui si ha il primo minimo sono legati dalla relazione

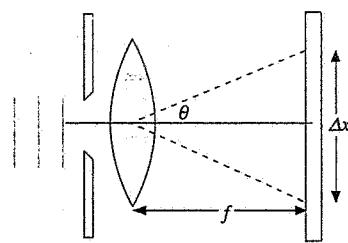
$$f \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 6.25 \cdot 10^{-3}$$

Pertanto  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen} \theta \approx \theta = 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.36^\circ$  e da (16.4) con  $m = 1$

$$\frac{\lambda}{a} = 6.25 \cdot 10^{-3}, \quad a = 0.094 \text{ mm} = 159 \lambda$$

È come se, per effetto della diffrazione, la fenditura fosse stata ingrandita del fattore  $7.5/0.094 \approx 79$ .

Se volessimo  $a = \Delta x$  si troverebbe  $a^2 = 2f\lambda$ ; con i dati del problema  $a = 0.84 \text{ mm}$ : per tale valore di  $a$  l'immagine sarebbe larga quanto la fenditura.



**Figura 16.7**

**Esempio 16.2**

Un piccolo porto è completamente chiuso eccetto che per un'apertura larga  $a = 20 \text{ m}$ . Dall'esterno arrivano in direzione perpendicolare all'apertura onde con lunghezza d'onda  $\lambda = 1.4 \text{ m}$ . Determinare i luoghi dei punti all'interno del porto nei quali il moto ondoso è minimo.

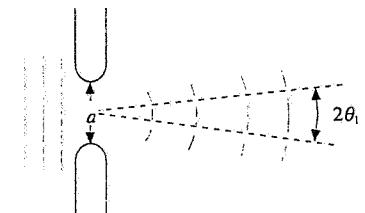
**Soluzione**

Applichiamo alle onde marine la trattazione precedente, valida se sono rispettate le stesse condizioni geometriche. I minimi di intensità si osservano nelle direzioni date da (16.4):

$$\operatorname{sen} \theta = m \frac{\lambda}{a} = 0.07 \text{ m}, \quad \theta_1 = \pm 4.0^\circ, \quad \theta_2 = \pm 8.0^\circ, \quad \theta_3 = \pm 12.1^\circ, \dots$$

il massimo centrale è compreso tra  $+4.0^\circ$  e  $-4.0^\circ$ .

All'interno del porto l'intensità del moto ondoso diminuisce con la distanza dell'apertura in quanto le onde secondarie sono circolari; inoltre l'intensità diminuisce fortemente con l'angolo, come si è visto.



**Figura 16.8**

**Esempio 16.3**

Una fenditura rettilinea larga  $a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$  è illuminata con luce bianca nella quale sono presenti con la stessa intensità tutte le lunghezze d'onda dal rosso  $\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$  al violetto  $\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ . La figura di diffrazione si forma su uno schermo posto nel piano focale di una lente con  $f = 50 \text{ cm}$ . Descrivere l'immagine della fenditura.

**Soluzione**

Il centro dell'immagine è bianco in quanto in esso si realizza la condizione di massimo di interferenza indipendentemente dalla lunghezza d'onda. Invece la variazione di intensità sullo schermo e le posizioni dei minimi e dei massimi secondari dipendono dalla lunghezza d'onda. Dato che in ogni caso  $\lambda \ll a$ , si può fare l'approssimazione  $\operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$  e scrivere  $f\theta = x$ , essendo  $x$  la posizione sullo schermo in corrispondenza all'angolo  $\theta$ . Pertanto

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \approx \frac{\pi a \theta}{\lambda} = \frac{\pi a x}{f \lambda} = 10^{-4} \frac{\pi x}{\lambda}$$

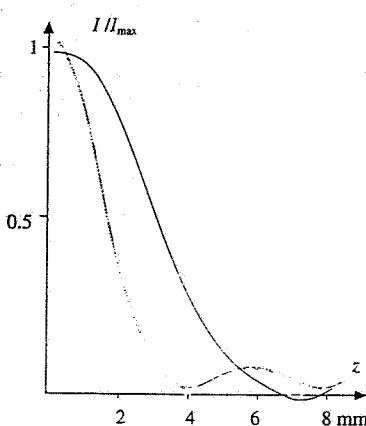


Figura 16.9

e la (16.3) si scrive

$$\frac{I}{I_{\max}} = \left[ \frac{\sin \frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}}{\frac{10^{-4} \pi x}{\lambda}} \right]^2$$

Alle tre lunghezze d'onda

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad \lambda_G = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ mm}, \quad \lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ mm},$$

il primo minimo si ha per

$$x_V = 4.0 \text{ mm}, \quad x_G = 5.5 \text{ mm}, \quad x_R = 7.0 \text{ mm}.$$

Nella figura 16.9 sono rappresentate le intensità relative per le due lunghezze d'onda  $\lambda_V$  e  $\lambda_R$ . Spostandosi dal centro si osserva una colorazione di sottrazione, che va dal rossastro al violaceo, tipica dei fenomeni di interferenza e determinata in ogni punto dalla mancanza di alcune lunghezze d'onda e dalla presenza più marcata di altre.

### 16.3 Diffrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco

Quando l'*apertura* attraverso cui facciamo passare l'onda piana incidente è *circolare* la figura di diffrazione, per ragioni di simmetria, consta di un *disco luminoso centrale* circondato da una serie di corone circolari alternativamente scure e chiare. Queste frange, osservate in condizioni di Fraunhofer, presentano molte analogie con quanto visto nel caso dell'apertura rettilinea; lo studio analitico è però più complicato e non lo sviluppiamo.

Si trova in particolare che l'angolo a cui cade il primo minimo di intensità, corrispondente al bordo del disco centrale della figura di diffrazione, è dato da

Primo minimo di diffrazione

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R}, \quad (16.6)$$

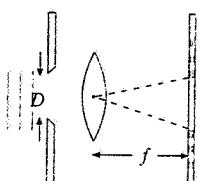
se  $D$  e  $R$  sono rispettivamente il diametro e il raggio del foro circolare. Questa formula va confrontata con la (16.4) che dà, per una fenditura rettilinea larga  $a$ ,  $\sin \theta = \lambda / a$  come direzione lungo cui si ha il primo minimo.

Il fattore 1.22 deriva appunto dal calcolo eseguito secondo il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, che integra su tutte le sorgenti secondarie infinitesime anulari in cui viene suddiviso il foro circolare. Il fattore numerico per il secondo minimo è 2.23, per il terzo 3.24: non si ha una successione regolare come in (16.4).

In molte applicazioni  $\lambda \ll D$  e si può scrivere

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{R}; \quad (16.7)$$

Figura 16.10



$2\theta$  è la *larghezza angolare del massimo centrale*.

L'andamento dell'intensità è mostrato in figura 16.11; anche ora si verifica che oltre l'80% dell'energia trasmessa dall'apertura è concentrata nel disco centrale luminoso, per cui gli anelli chiari concentrici al massimo centrale non sono ben visibili. Si può dire che il disco centrale, il cui bordo è visto dal centro del foro sotto l'angolo  $2\theta$ , rappresenta l'immagine del foro stesso.

Questi risultati si applicano chiaramente ad una *lente di apertura*  $D$  (ovvero di raggio  $R$ ), per cui l'immagine di una sorgente puntiforme molto lontana è data, nel piano focale di una lente convergente, da un piccolo disco luminoso le cui dimensioni sono determinate dal rapporto  $f/D$  tra distanza focale e apertura della lente.

#### Esempio 16.4

L'obiettivo di una macchina fotografica, di apertura  $D = 2.5$  cm e distanza focale  $f = 5$  cm, è illuminato da una sorgente puntiforme lontana  $S$ , che emette luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ . Calcolare le dimensioni dell'immagine  $S$  nel piano focale dell'obiettivo.

#### Soluzione

Siamo di sicuro nella condizione  $\lambda \ll D$  e utilizziamo (16.7): l'apertura angolare  $2\theta$  dell'immagine vista dal centro della lente è

$$2\theta = 2.44 \frac{\lambda}{D} = 5.37 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

L'immagine di  $S$  è un dischetto di diametro

$$d = 2\theta f = 2.44 \lambda \frac{f}{D} = 2.68 \mu\text{m}$$

A causa della diffrazione il fuoco non è un punto geometrico, bensì acquista una dimensione finita, per quanto piccola e in molte applicazioni trascurabile.

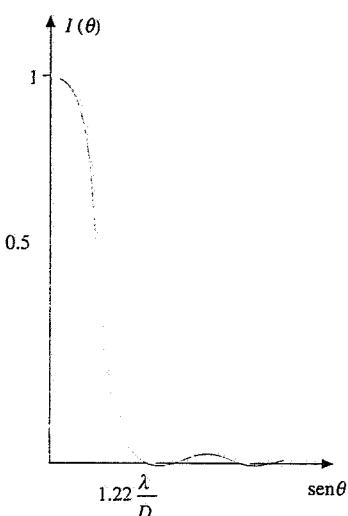


Figura 16.11

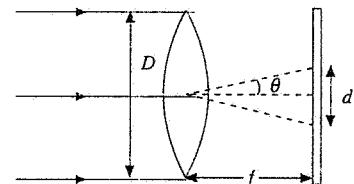


Figura 16.12

#### Diffrazione da parte di un disco opaco

Consideriamo un'onda piana monocromatica che incide su un'apertura circolare  $G$  di diametro  $h$  molto maggiore di  $\lambda$ . A grande distanza, su uno schermo  $C$ , non si osserva diffrazione in quanto  $h \gg \lambda$ : il campo elettrico  $E_G(\theta)$  e l'intensità sono diversi da zero solo lungo la direzione individuata da  $\theta = 0$ , ortogonale al piano di  $G$ .

Poniamo adesso sull'*apertura G* un *disco opaco A* di diametro  $h$  avente al centro un foro circolare di diametro  $D$ . In un punto  $P$  dello schermo, visto sotto l'angolo  $\theta$ , si osserva un campo elettrico di ampiezza  $E_A(\theta)$  e un'intensità  $I_A(\theta)$  proporzionale a  $E_A^2(\theta)$ . Se invece di  $A$  poniamo, nella stessa posizione in cui c'era il foro di  $A$ , un *disco opaco B* di diametro  $D$ , nel punto  $P$  si osservano un campo elettrico di ampiezza  $E_B(\theta)$  e un'intensità  $I_B(\theta)$  proporzionale a  $E_B^2(\theta)$ ; la luce raggiunge lo schermo passando attraverso un'apertura anulare compresa tra il raggio  $D/2$  e il raggio  $h/2$ .

Notiamo che le *aperture* costituite dal foro nel disco  $A$  e dall'anello dovuto alla presenza del disco  $B$  sono *complementari*, ossia non hanno nessuna zona in comune: se sovrapponiamo i loro effetti è come se ci fosse soltanto l'apertura  $G$ . Pertanto

$$E_G(\theta) = E_A(\theta) + E_B(\theta) :$$

d'altra parte  $E_G(\theta) = 0$  per  $\theta \neq 0$  e concludiamo che

$$E_B(\theta) = -E_A(\theta), \quad I_B(\theta) = I_A(\theta) \quad \text{per } \theta \neq 0.$$

Questo risultato, noto come *principio di Babinet*, stabilisce che, con l'esclusio-

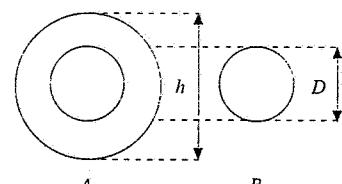
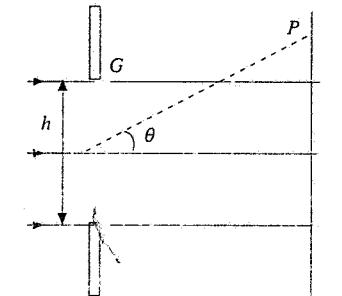


Figura 16.13

Principio di Babinet

ne della direzione  $\theta = 0$ , la figura di diffrazione prodotta da un disco opaco di diametro  $D$  coincide con la figura di diffrazione prodotta da un foro circolare di diametro  $D$  praticato in uno schermo opaco. Discuteremo nel paragrafo 16.8 cosa succede per  $\theta = 0$ .

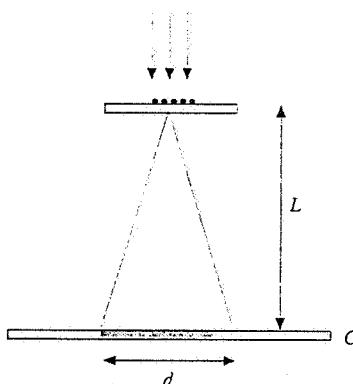


Figura 16.14

### Esempio 16.5

In una ristretta zona di un vetrino è depositato un sottile strato di polvere. Il vetrino è illuminato con luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.633 \mu\text{m}$  (laser elio-neon). Su uno schermo  $C$  posto a distanza  $L = 2 \text{ m}$  dal vetrino si osserva un disco rosso di diametro  $d = 15.4 \text{ cm}$ . Stimare il diametro  $D$  dei granelli di polvere.

#### Soluzione

Ciascun granello può essere schematizzato come un dischetto opaco di diametro  $D$  e sullo schermo si osserva la figura di diffrazione. Applichiamo il principio di Babinet e usiamo le stesse formule dell'esempio 16.4, con  $L$  al posto di  $f$ :

$$d = 2.44 \lambda \frac{L}{D} \Rightarrow D = 2.44 \lambda \frac{L}{d} = 20 \mu\text{m}$$

Si vede come la diffrazione possa essere utilizzata per stimare le dimensioni di oggetti opachi. Perché si possa effettuare la misura deve formarsi il primo minimo, che delimita l'immagine, e quindi deve essere soddisfatta secondo (16.6) la condizione

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq \frac{D}{1.22}$$

Sono dunque misurabili oggetti di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda della luce; se  $D$  è inferiore a  $\sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  bisogna ricorrere a radiazioni elettromagnetiche con lunghezza d'onda inferiore, come la radiazione di sincrotrone e i raggi X. Vedremo alcuni esempi nel capitolo 18.

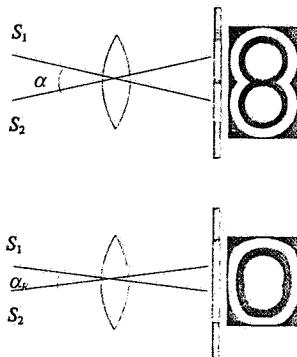


Figura 16.15

### 16.4 Limite di risoluzione delle lenti

Il fatto che l'immagine di un punto data da una lente sia un dischetto è importante quando si vogliono distinguere due oggetti puntiformi, visti dalla lente sotto un piccolo angolo. La figura 16.15 mostra due sorgenti puntiformi incoerenti  $S_1$  e  $S_2$ , molto lontane, viste dalla lente  $L$  sotto un angolo  $\alpha$ . Se  $\alpha \gg \theta = 1.22 \lambda / D$  non c'è sovrapposizione tra i due dischetti che rappresentano le immagini di  $S_1$  e  $S_2$  e quindi le due sorgenti appaiono distinte ovvero, come si dice, risolte. Al diminuire di  $\alpha$  le due figure di diffrazione cominciano a sovrapporsi e ad un certo punto diventa impossibile distinguere.

Quando  $S_1$  e  $S_2$  sono viste dalla lente sotto un angolo

$$\alpha_R = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (16.8)$$

Criterio di Rayleigh

il primo minimo della figura di diffrazione di una sorgente coincide con il centro del massimo dell'altra sorgente e si dice che le due sorgenti sono *appena risolte*. Questo criterio di distinzione è noto come *criterio di Rayleigh* ed è comunemente usato in ottica; esso è applicabile anche alle immagini date da una fenditura parallela, senza il fattore 1.22.

L'angolo  $\alpha_R$  definito da (16.8) si chiama *angolo minimo risolvibile* e il suo inverso

$$\rho = \frac{1}{\alpha_R} = \frac{D}{1.22 \lambda} \quad (16.9)$$

è detto *potere risolutivo o separatore della lente*.

In figura 16.16 sono rappresentate le figure di diffrazione prodotte separatamente dalle due sorgenti in varie situazioni angolari:  $\alpha > \alpha_R$  curve risolte,  $\alpha = \alpha_R$  curve appena risolte,  $\alpha < \alpha_R$  curve non risolte. La linea tratteggiata mostra l'intensità totale, ottenuta come somma dei due contributi.

Nel capitolo 17 descriveremo il funzionamento di alcuni strumenti ottici fondamentali, quali il telescopio, il microscopio e lo stesso occhio umano. Un aspetto qualificante è la capacità di separare, cioè di osservare come distinti, due punti luminosi separati, siano essi due stelle o due parti di una piccola struttura. Una conseguenza della discussione svolta finora è che una delle principali cause che limita la risoluzione di una lente è la diffrazione, fatto intrinseco in quanto legato alla natura ondulatoria della luce e quindi non eliminabile.

Esaminiamo adesso il potere separatore per i tre strumenti suddetti, considerati come semplici lenti di apertura  $D$  e focale  $f$ .

#### Potere separatore di un telescopio

Il potere separatore (16.9) non dipende dalla distanza focale della lente, ma soltanto dalla sua apertura, e migliora al crescere di questa.

La stessa formula è valida quando il fascio luminoso, invece di essere rifratto da una lente, è riflesso da uno specchio sferico di apertura  $D$  e focale  $f$ . Il maggior telescopio ottico a riflessione del mondo, situato sul Monte Palomar negli USA, ha  $D = 5$  m: con  $\lambda = 0.589 \cdot 10^{-6}$  m

$$\alpha_R = 1.44 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \approx 0.03'' , \rho = \frac{1}{\alpha_R} = 6.95 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} .$$

Sia  $\alpha_R$  che  $\rho$  dipendono dalla lunghezza d'onda, essendo peggiori le prestazioni con luce rossa e migliori con luce violetta:

$$\lambda_R = 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \alpha_R = 1.71 \cdot 10^{-7} \text{ rad} , \rho = 5.85 \cdot 10^6 \text{ rad}^{-1} ,$$

$$\lambda_V = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} , \alpha_R = 0.98 \cdot 10^{-7} \text{ rad} , \rho = 1.03 \cdot 10^7 \text{ rad}^{-1} .$$

#### Potere separatore di un microscopio

In un microscopio invece della separazione angolare è più conveniente specificare la distanza minima  $s$  tra due punti distinguibili. Se i due punti sono nel piano focale anteriore dell'obiettivo (vedi paragrafo 17.8), essi sono visti sotto l'angolo  $\theta = s/f$ ; utilizzando per  $\theta$  il valore numerico  $\alpha_R$  otteniamo

$$s = f \alpha_R = 1.22 \lambda \frac{f}{D} = 0.61 \lambda \frac{f}{R} .$$

Questa relazione viene scritta di solito in funzione dell'*angolo  $\phi$  di accettanza* dell'obiettivo, definito da  $\sin \phi = R/f$ , per cui

$$s = \frac{0.61 \lambda}{\sin \phi} = \frac{0.61 \lambda_0}{n \sin \phi} ,$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto della possibilità che l'oggetto e la parte frontale dello strumento siano immersi in un mezzo con indice di rifrazione  $n$ ;  $\lambda$  è la lunghezza d'onda in questo mezzo e  $\lambda_0$  la lunghezza d'onda nel vuoto della luce usata per illuminare l'oggetto. Il

Potere risolutivo

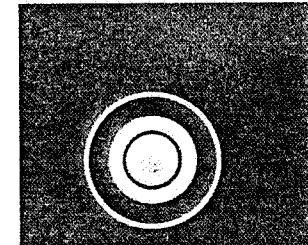
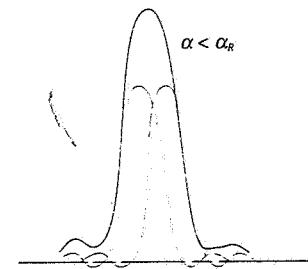
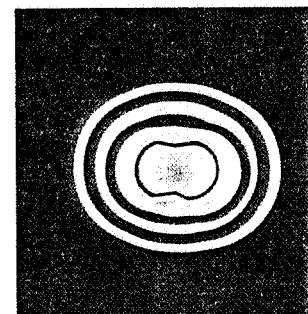
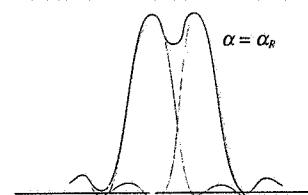
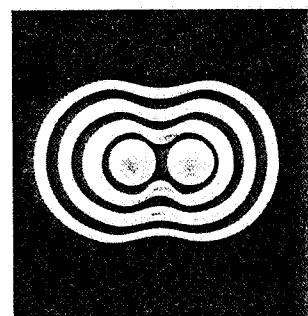
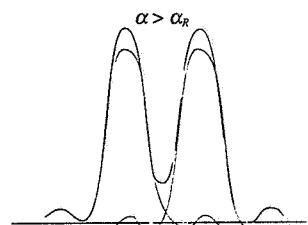


Figura 16.16

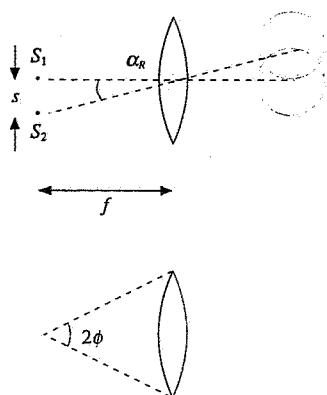


Figura 16.17

prodotto  $n \sin \phi$  si chiama *apertura numerica*  $A_n$  dello strumento e in definitiva abbiamo, per la minima distanza  $s$  risolvibile e per il suo inverso, detto *potere risolutivo lineare*,

$$s = \frac{0.61 \lambda_0}{A_n} \quad , \quad \rho_l = \frac{1}{s} = \frac{A_n}{0.61 \lambda_0}$$

Un valore tipico di  $A_n$  è 1.4 e con  $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$   $s = 0.24 \mu\text{m}$ ,  $\rho_l = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Anche in questo caso le prestazioni dipendono dalla lunghezza d'onda e sono migliori con luce violetta.

#### Potere separatore dell'occhio umano

Il diametro della pupilla dell'occhio umano varia all'incirca tra i limiti  $D = 8 \text{ mm}$  e  $D = 2 \text{ mm}$  (vedi paragrafo 17.8); con luce di lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  si ha da (16.8)

$$0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \leq \alpha_R \leq 3.36 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Nel caso più sfavorevole,  $D = 2 \text{ mm}$ , la minima distanza tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, posti alla distanza  $L = 25 \text{ cm}$  detta di *visione distinta*, è

$$s = L \alpha_R = 250 \cdot 3.36 \cdot 10^{-4} = 84 \mu\text{m}$$

Con  $D = 8 \text{ mm}$  si troverebbe  $s = 21 \mu\text{m}$ .

Sperimentalmente il potere separatore angolare dell'occhio è più vicino a  $4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  e la distanza  $s$  appena calcolata risulta di circa  $100 \mu\text{m}$ ; l'occhio cioè non arriva a  $s = 20 \mu\text{m}$ , come dovrebbe in base alla sola diffrazione. Questo fatto dipende dalla struttura granulare dell'elemento sensibile, la *retina*, posta nella parte posteriore dell'occhio: essa è costituita da piccoli sensori, i *coni* e i *bastoncelli*, che ricevono l'immagine trasmessa dal cristallino e la inviano al cervello tramite il *nervo ottico*; due punti sono visti come distinti quando la luce da essi emessa colpisce due sensori diversi. Non basta quindi che i dischetti di diffrazione siano appena risolvibili, come si è implicitamente ammesso per il telescopio e il microscopio, supponendo di avere nel piano focale un mezzo di rivelazione in grado di distinguere le due immagini. Occorre, nell'occhio, che i dischetti di diffrazione abbiano raggio paragonabile alla distanza  $s$  tra i sensori: questa condizione fissa la risoluzione. Ora è veramente notevole che la distanza tra i coni nella parte più sensibile della retina, la *fovea*, valga circa  $10 \mu\text{m}$  e che il raggio dei dischetti di diffrazione, con  $D = 2 \text{ mm}$ , sia anch'esso di circa  $10 \mu\text{m}$ : la *granularità della retina* è perfettamente corrispondente al potere risolutivo del cristallino, nel senso che due punti risolvibili secondo il criterio di Rayleigh producono dischetti che interessano due sensori distinti. D'altra parte, quando  $D = 8 \text{ mm}$ , i dischetti di diffrazione di due punti risolvibili secondo Rayleigh ( $s = 20 \mu\text{m}$ ) sono sì ridotti, ma sono più vicini e non colpiscono due sensori distinti: la risoluzione del cristallino non trova corrispondenza in quella della retina, che non distingue i due punti.

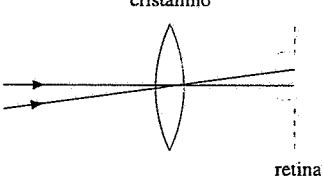


Figura 16.18

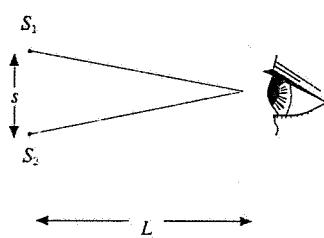


Figura 16.19

#### Esempio 16.6

Determinare qual è la distanza  $L$  dall'occhio umano alla quale di notte appaiono distinti i fari di un'automobile, separati tra loro da  $s = 1.4 \text{ m}$ . Si assuma  $D = 2 \text{ mm}$  e  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ .

#### Soluzione

Per effetto della diffrazione l'angolo minimo di risoluzione è  $\alpha_R = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  come calcolato sopra e quindi

$$L = s / \alpha_R = 4.17 \text{ km}$$

Con il valore medio  $\alpha_R \sim 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  risulta  $L = 3.5 \text{ km}$ ; invece se fosse  $\alpha_R = 0.84 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  si otterebbe  $L = 16.7 \text{ km}$ , certamente non corrispondente all'esperienza.

## 16.5 Reticolo di diffrazione

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato la diffrazione di Fraunhofer prodotta da un'apertura rettangolare o circolare e da un disco opaco. Se disponiamo in modo regolare  $N$  fenditure rettilinee, ciascuna di larghezza  $a$ , e quiespaziate di una distanza  $d$ , realizziamo un sistema di  $N$  sorgenti, la cui interferenza abbiamo già studiato nel paragrafo 15.5 e nel quale dobbiamo però introdurre il fatto che a causa della diffrazione l'intensità emessa da ciascuna sorgente ha l'andamento descritto nel paragrafo 16.2.

Il dispositivo, chiamato *reticolo di diffrazione*, si può realizzare tracciando delle linee parallele molto sottili su una lastra di vetro per mezzo di un opportuno utensile; lo spazio che rimane tra una linea e la successiva costituisce una fenditura. La distanza  $d$  tra due fenditure è detta *passo del reticolo* e la larghezza complessiva è  $Nd$ .

Nella figura 16.20 un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide sul reticolo, che sta in un piano d'onda (l'incidenza cioè è normale); dopo il reticolo si pone una lente convergente e si osserva la figura di interferenza nel piano focale della lente. Fissato un punto  $P$  sullo schermo, individuato dall'angolo  $\theta$ , l'intensità in  $P$  si calcola con (15.21), in cui l'intensità  $I_1(\theta)$  della singola fenditura è data dalla (16.3) che riscriviamo:

$$I_1(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 ;$$

$I_0$  è l'intensità a  $\theta = 0$  ed è stato trascurato il contributo del fattore di inclinazione  $f(\theta)$ , non importante per le considerazioni che vogliamo svolgere. Pertanto l'intensità in  $P$  è

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \left[ \frac{\sin \frac{N \pi d \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 ; \quad (16.10) \quad \text{Intensità}$$

Questa funzione è rappresentata nella figura 16.21 con  $N = 8$ , come nel terzo caso della figura 15.27; usualmente si sintetizza il risultato dicendo che l'*intensità della figura di interferenza è modulata dalla diffrazione*.

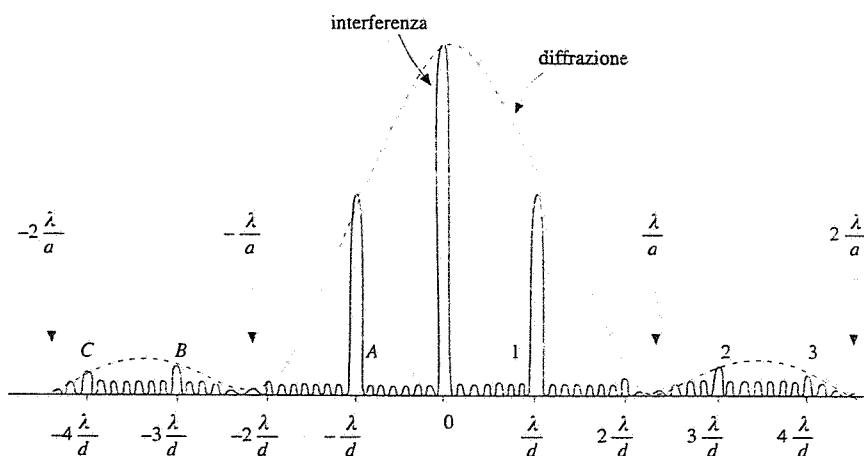


Figura 16.21

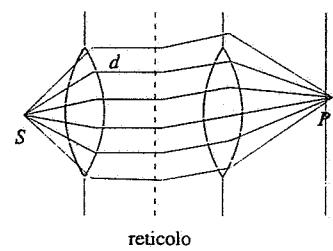


Figura 16.20

Riprendendo i punti salienti già enunciati nel paragrafo 15.5, precisiamo le caratteristiche dell'intensità trasmessa da un reticolo di diffrazione.

a) I *massimi principali* si hanno lungo le direzioni (15.22),

Massimi principali

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16.11)$$

b) La distanza angolare tra un massimo principale e il minimo ad esso adiacente è, secondo (15.26),

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{\lambda}{L} \quad ,$$

detta  $L$  la larghezza del reticolo. Si può porre  $\Delta(\sin \theta) = \cos \theta \Delta \theta$ , dato che  $\lambda \ll L$  e quindi la variazione è piccola; abbiamo allora per la *larghezza angolare di un massimo principale*

Larghezza angolare  
del massimo

$$\Delta \theta_m = 2\Delta \theta = \frac{2\lambda}{L \cos \theta_m} = \frac{2\lambda}{N d \cos \theta_m} \quad ; \quad (16.12)$$

maggior è il numero di fenditure del reticolo, più strette sono le frange prodotte.

c) L'intensità della frangia centrale ( $m = 0$ ) aumenta proporzionalmente a  $N^2$ ; l'intensità degli altri massimi è invece ridotta a causa della diffrazione: sostituendo (16.11) in (16.10) abbiamo in corrispondenza ad un valore  $m \neq 0$  che

Intensità dei massimi principali

$$R_m = \frac{I_{\max}(m)}{I_{\max}(m=0)} = \left[ \frac{\sin m \pi \frac{a}{d}}{m \pi \frac{a}{d}} \right]^2 \quad . \quad (16.13)$$

Il rapporto  $R_m$  dipende dunque dal rapporto tra la larghezza  $a$  delle fenditure e la loro distanza  $d$ . In particolare quando un minimo di diffrazione coincide con un massimo di interferenza, cioè quando per lo stesso valore di  $\theta$  sono soddisfatte le due condizioni

$$d \sin \theta = m \lambda \quad , \quad a \sin \theta = m_a \lambda \quad ,$$

il rapporto  $a/d$  vale  $m_a/m$  e  $R_m$  risulta eguale a zero: non si ha il massimo di ordine  $m = m_a(d/a)$ . Nella figura 16.21 la condizione di scomparsa di una frangia è approssimativamente realizzata per  $m = 4$ ,  $m_a = 2$  e pertanto nel reticolo cui la figura si riferisce  $a \approx d/2$ : la larghezza è circa pari alla metà del passo. Notiamo anche che la figura 16.21, per comodità di spiegazione, non è esattamente in scala: sappiamo infatti che l'intensità del primo massimo secondario di diffrazione è all'incirca il 4% di quella della frangia centrale, mentre nel disegno è  $\sim 10\%$ .

Un valore tipico della densità di linee in un reticolo è 4000 linee/cm: ad esempio con una larghezza  $L = 2.5$  cm si hanno  $N = 10^4$  linee con passo  $d = L/N = 2.5 \mu\text{m}$ ; la larghezza delle singole fenditure è dell'ordine di  $1 \mu\text{m}$ . Il valore massimo di densità raggiunge  $10^4$  linee/cm ( $d = 1 \mu\text{m}$ ,  $a < 1 \mu\text{m}$ ); le linee vengono tracciate con una punta di diamante il cui movimento è comandato da una macchina utensile molto

precisa. Tale metodo di produzione di reticolati di grande precisione è stato sviluppato da Rowland verso il 1880.

### Esempio 16.7

Un reticolo di diffrazione contiene  $N = 4000$  linee su una larghezza  $L = 2$  cm; la larghezza delle fenditure è  $a = 1 \mu\text{m}$ . La luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  trasmessa dal reticolo viene osservata nel piano focale di una lente con  $f = 20$  cm. Calcolare la posizione delle frange osservate, la loro larghezza e la loro intensità relativa all'intensità della frangia centrale.

#### Soluzione

Il passo del reticolo è  $d = L/N = 5 \mu\text{m}$  e  $a/d = 1/5 = 0.2$ . Per effetto della sola interferenza si dovrebbero osservare 20 massimi principali oltre al massimo di ordine zero:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} = 0.1 \text{ m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10.$$

Invece a causa della diffrazione risulta da (16.13)  $R_5 = R_{10} = 0$  e  $R_6, \dots, R_9 \leq 0.04$ ; pertanto in condizioni normali vengono osservati solamente il massimo centrale e gli otto massimi simmetricamente adiacenti.

Nella tabella sono riportati gli angoli  $\theta_m$  ai quali si osservano i massimi, le larghezze angolari (16.12), le posizioni sullo schermo  $z_m = f \tan \theta_m$ , le larghezze  $\Delta z_m = f \Delta \theta$  delle frange e le intensità relative  $R_m$ .

$m$	$\sin \theta_m$	$\theta_m$ (gradi)	$\Delta \theta$ (rad)	$z_m$ (cm)	$\Delta z_m$ ( $\mu\text{m}$ )	$R_m$
0	0	0	$5 \cdot 10^{-4}$	0	10	1
1	0.1	5.74	$5.03 \cdot 10^{-4}$	2.01	10.06	0.88
2	0.2	11.54	$5.10 \cdot 10^{-4}$	4.08	10.20	0.57
3	0.3	17.46	$5.24 \cdot 10^{-4}$	6.29	10.48	0.25
4	0.4	23.58	$5.46 \cdot 10^{-4}$	8.73	10.92	0.05

L'immagine è una serie di 9 righe luminose molto sottili ( $\sim 10 \mu\text{m}$ ), ben distanziate, con intensità decrescente, su uno sfondo nero.

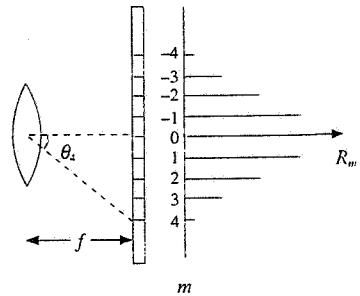
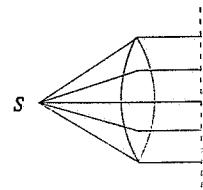


Figura 16.22

### Esempio 16.8

In un esperimento di Young le due fenditure distano  $d = 30 \mu\text{m}$  e sono larghe  $a = 3 \mu\text{m}$ . Determinare il numero di frange effettivamente osservabili nell'ipotesi che si riescano a rivelare solo intensità luminose superiori al 5% dell'intensità della frangia di ordine zero.

#### Soluzione

Ponendo  $n = 2$  nella (16.10) si ottiene

$$I(\theta) = 4 I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda},$$

che differisce dalla (15.14) per il termine tra parentesi dovuto alla diffrazione a ciascuna delle fenditure. Quando  $a$  è molto minore di  $\lambda$  si ha

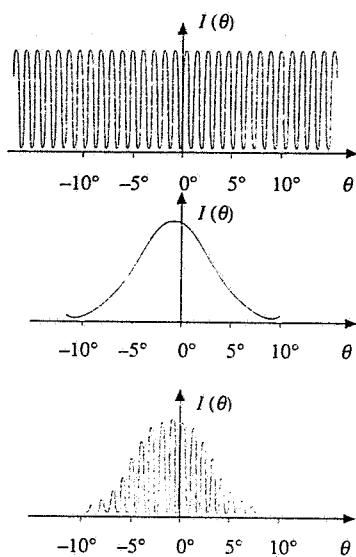


Figura 16.23

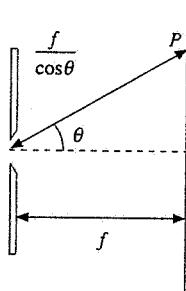


Figura 16.24

$$\lim_{a/\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\pi a \sin \theta}}{\frac{1}{\lambda}} \right]^2 = 1$$

e si ritrova appunto la (15.14), dedotta nell'ipotesi che l'intensità di ciascuna sorgente fosse costante al crescere di  $\theta$ .

Nella figura 16.23, calcolata numericamente per  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ , sono riportati separatamente i vari termini. Poiché  $a/d = 1/10$  la decima frangia è assente; le frange corrispondenti a  $m = 8$  e  $m = 9$  hanno, applicando (16.13),  $R_8 = 0.055$  e  $R_9 = 0.012$ . Sono così osservabili, nell'ipotesi  $R_m > 0.05$ , la frangia centrale e  $8 \times 2 = 16$  frange laterali. È dunque la diffrazione dovuta all'apertura finita delle fenditure la causa fisica principale che limita l'osservazione di un gran numero di frange d'interferenza.

Gli altri fattori correttivi finora trascurati interverrebbero solamente se si potessero osservare frange ad angoli molto grandi. Essi sono dovuti al fattore di inclinazione e alla maggior distanza dalla fenditura dei punti dello schermo lontani dal centro; nell'ipotesi che una fenditura emetta un'onda cilindrica, l'intensità diminuisce come  $1/r$  e rispetto al centro invece che  $1/f$  ci vuole  $1/(f/\cos \theta) = \cos \theta / f$ , come si vede nella figura 16.24. Complessivamente il fattore di riduzione angolare risulta  $f^2(\theta) \cos \theta$ ; alcuni valori sono riportati nella tabella.

$\theta$	$f^2(\theta)$	$\cos \theta$	$f^2(\theta) \cos \theta$
0°	1	1	1
5°	0.996	0.996	0.992
15°	0.966	0.966	0.933
30°	0.871	0.866	0.754
45°	0.729	0.707	0.515
60°	0.563	0.500	0.282

Per valori piccoli di  $\theta$  la correzione è quasi trascurabile (< 1% fino a 5.7°, < 5% fino a 12.9°), c'è solo l'effetto della diffrazione.

Il reticolo descritto finora è detto *reticolo funzionante in trasmissione*; se le incisioni vengono fatte su una superficie riflettente abbiamo un reticolo funzionante in riflessione, per il quale si svolgono considerazioni analoghe.

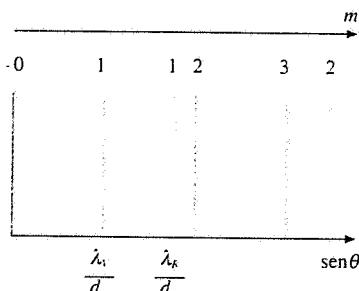


Figura 16.25

## 16.6 Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione

Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce incidente producono massimi principali ad angoli diversi, in quanto la (16.11) dipende dalla lunghezza d'onda; solo il massimo di ordine zero si forma a  $\theta = 0$  per tutte le lunghezze d'onda.

Questa dipendenza dell'angolo di formazione dei massimi dalla lunghezza d'onda si chiama dispersione angolare, in analogia con la dispersione che si verifica nella trasmissione attraverso una superficie di discontinuità dell'indice di rifrazione, anche se si tratta di fenomeni ben diversi.

Fissato un valore dell'ordine  $m$ , l'insieme dei massimi che si formano per le diverse lunghezze d'onda prende il nome di spettro di ordine  $m$ , per cui si ha uno spettro del prim'ordine ( $m = 1$ ), uno del secondo ordine ( $m = 2$ ) e così via.

Quando l'illuminazione è in luce bianca, nella quale si trovano con continuità tutte le lunghezze d'onda comprese tra il viola  $\lambda_v = 0.4 \mu\text{m}$  e il rosso  $\lambda_r = 0.7 \mu\text{m}$ , lo spettro del prim'ordine è l'unico cosiddetto *puro*, dato che ad un certo angolo cor-

risponde un solo colore (questo perché  $\lambda_R < 2\lambda_V$ ). Invece negli spettri di ordine superiore si ha sovrapposizione tra spettri di ordine diverso. Ad esempio, nella direzione  $\theta_2$  alla quale si osserva il massimo del secondo ordine della luce rossa si osserva contemporaneamente il massimo del terz'ordine per la lunghezza d'onda  $\lambda$  tale che

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{2\lambda_R}{d} = \frac{3\lambda}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \lambda_R \approx 0.47 \text{ } \mu\text{m} ,$$

corrispondente al colore blu. Per questo motivo ai lati dei due spettri del prim'ordine, simmetrici rispetto al massimo di ordine zero e caratterizzati da una successione di colori dal violetto al rosso ( $\operatorname{sen}\theta_{1,V} < \operatorname{sen}\theta_{1,R}$ ), non si vede riprodotta la stessa successione di colori.

Da quanto detto risulta evidente la capacità del reticolo di diffrazione di analizzare la composizione della luce che lo colpisce, proprietà sfruttata per studiare le caratteristiche della sorgente luminosa. Allo scopo di discutere tale proprietà introduciamo il potere dispersivo e il potere risolutivo del reticolo.

### Potere dispersivo di un reticolo

Date due onde monocromatiche le cui lunghezze d'onda differiscono di  $d\lambda$ , i due massimi principali dello stesso ordine si formano a due angoli che differiscono di  $d\theta$ . Si definisce come *potere dispersivo* o semplicemente *dispersione* di un reticolo la grandezza

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{d} \frac{m}{\cos\theta_m} , \quad (16.14) \quad \text{Dispersione}$$

dove l'ultima eguaglianza è stata ottenuta ricorrendo a (16.11). La dispersione aumenta al diminuire del passo del reticolo e, per un dato reticolo, all'aumentare dell'ordine dello spettro.

### Potere risolutivo di un reticolo

Per distinguere onde luminose con lunghezze d'onda molto vicine i massimi principali relativi a queste lunghezze d'onda devono avere larghezza angolare più piccola possibile. Il *potere risolutivo* si definisce seguendo il criterio di Rayleigh, utilizzato nel paragrafo 16.3 per definire il potere separatore di una lente.

Consideriamo due lunghezze d'onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , con  $\lambda_2 > \lambda_1$ , e un reticolo di passo  $d$  con  $N$  fenditure; i massimi principali di ordine  $m$  e i minimi ad essi adiacenti si formano agli angoli

$$\operatorname{sen}\theta_{m,1} = m \frac{\lambda_1}{d} , \quad \operatorname{sen}\theta'_{m,1} = m \frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} ,$$

$$\operatorname{sen}\theta_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} , \quad \operatorname{sen}\theta'_{m,2} = m \frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} .$$

I due massimi sono appena risolvibili quando sono soddisfatte le condizioni

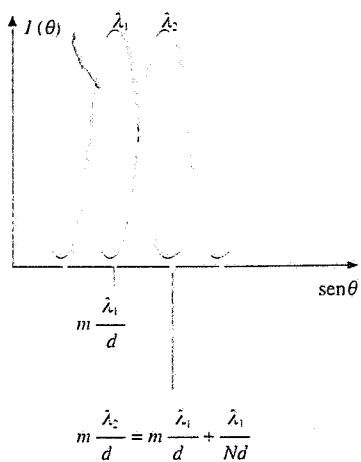


Figura 16.26

$$m \frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} \approx m \frac{\lambda_2}{d} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \frac{\lambda_1}{N} ,$$

$$m \frac{\lambda_1}{d} \approx m \frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} \Rightarrow m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \frac{\lambda_2}{N} .$$

Sommando si ottiene  $m(\lambda_2 - \lambda_1) \approx (\lambda_1 + \lambda_2)/2N$ ; si pone  $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  e si definisce *potere risolutivo* del reticolo all'ordine  $m$  la grandezza

Potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN , \quad (16.15)$$

la quale esprime, per una data  $\lambda$ , la differenza  $\Delta\lambda$  risolvibile. Il *potere risolutivo* risulta *proporzionale al numero totale di fenditure* e aumenta con l'ordine dello spettro, ma non dipende dal passo del reticolo.

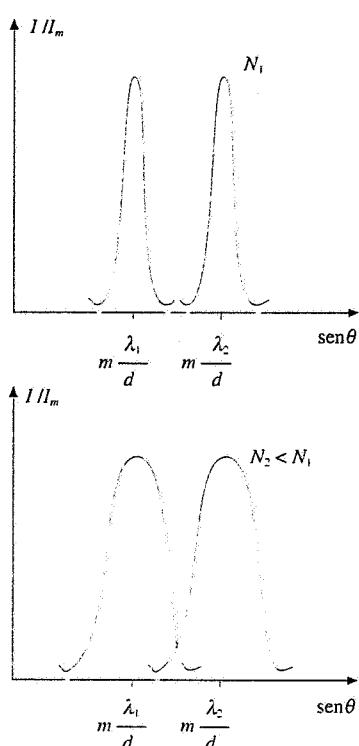


Figura 16.27

Osserviamo che la dispersione e il potere risolutivo si riferiscono a proprietà diverse: un reticolo con passo piccolo ha una buona dispersione, ma se è piccolo anche il numero di fenditure (al limite  $N=2$ ) esso non è adatto a separare lunghezze d'onda molto vicine: i centri dei massimi sono ben distanziati, ma i massimi stessi sono larghi. Invece un reticolo con passo maggiore, ma con un gran numero di fenditure, ha dispersione minore e potere risolutivo superiore, essendo i massimi molto stretti.

Nella figura 16.27 sono riportate le intensità dei massimi di ordine  $m$  di due lunghezze d'onda, generati da due reticolari aventi la stessa dispersione e potere risolutivo diverso; tali reticolari hanno evidentemente passo eguale e differiscono per il numero totale di fenditure ovvero per la larghezza:  $N_1 > N_2$ ,  $L_1 = N_1 d > L_2 = N_2 d$ . È chiaro che con  $d$  piccolo e  $N$  grande si ha il risultato migliore sia per  $D$  che per  $R$ .

C'è da dire infine che malgrado la dispersione e la risoluzione non dipendano esplicitamente dalla larghezza  $a$  delle fenditure, questo parametro fissa in pratica il massimo valore di  $m$  utilizzabile e quindi i massimi valori di  $D$  e  $R$ , come si è visto nella discussione sull'intensità degli spettri di ordine superiore (paragrafo 16.5).

### Esempio 16.9

Una lampada al sodio, contenente sodio gassoso eccitato con una scarica elettrica, emette due lunghezze d'onda molto vicine, di valori  $\lambda_1 = 589.0$  nm e  $\lambda_2 = 589.6$  nm. Quante linee deve avere un reticolo affinché  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  siano appena risolvibili nello spettro del second'ordine?

### Soluzione

Si richiede un potere risolutivo

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589.3}{0.6} = 982 \approx 10^3 .$$

Da (16.15) con  $m = 2$  si ricava  $N = 500$ .

**Esempio 16.10**

Un reticolo di diffrazione lungo  $L = 2.5$  cm ha  $N = 4000$  fenditure. Esso è illuminato con una luce verde di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ , emessa da una lampada a vapori di mercurio. Calcolare il potere dispersivo al second'ordine e la minima differenza  $\Delta\lambda$  nell'intorno di  $\lambda$  che è risolvibile, sempre al second'ordine.

**Soluzione**

Il passo del reticolo è  $d = 6.25 \mu\text{m}$  e il massimo del second'ordine si forma per  $\sin\theta_2 = 2\lambda/d = 0.175$ , per cui  $\theta_2 = 0.176 \text{ rad} = 10.1^\circ$ . La larghezza angolare (16.12) vale

$$\Delta\theta_2 = \frac{2\lambda}{L \cos\theta_2} = 4.4 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$$

Il potere dispersivo e il potere risolutivo al second'ordine sono

$$D = \frac{2}{d \cos\theta_2} = 0.325 \text{ rad}/\mu\text{m} = 18.6 \text{ gradi}/\mu\text{m}, \quad R = 2 \cdot 4000 = 8 \cdot 10^3$$

L'intervallo  $\Delta\lambda$  che si può risolvere vale

$$\Delta\lambda = \lambda/R = 6.83 \cdot 10^{-5} \text{ mm} = 6.83 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$$

$$(\Delta\lambda/\lambda = 1.25 \cdot 10^{-4})$$

Utilizzando i valori trovati di  $\Delta\lambda$  e della dispersione  $D$  si ha, per la separazione angolare corrispondente a  $\Delta\lambda$ ,

$$\Delta\theta = D \Delta\lambda = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

e si verifica che questo valore, essendo pari a metà della larghezza angolare  $\Delta\theta_2$  prima calcolata, è giustamente la separazione angolare che ci sarebbe tra due massimi dovuti alle lunghezze d'onda  $\lambda$  e  $\lambda + \Delta\lambda$  in condizioni di Rayleigh.

## 16.7 Spettroscopia con il reticolo di diffrazione

I reticoli di diffrazione hanno un'utilizzazione molto importante nell'analisi della radiazione elettromagnetica visibile emessa dalle varie sostanze opportunamente eccitate, *analisi* che viene chiamata *spettroscopica*.

L'apparecchio usato per la misura delle lunghezze d'onda emesse da una sorgente è mostrato schematicamente in figura 16.28; esso costituisce un esempio di spettroscopia a reticolo di diffrazione.

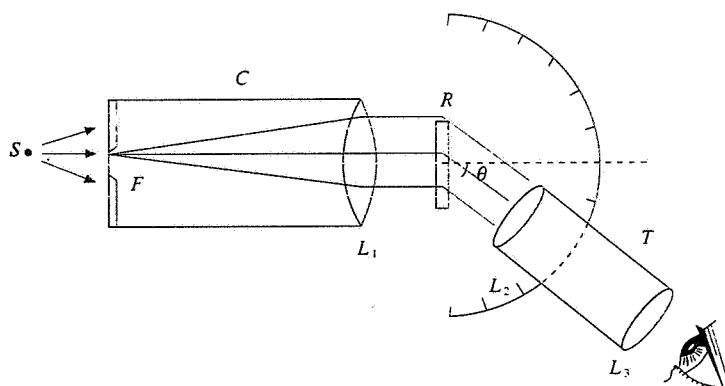


Figura 16.28

La luce emessa dalla sorgente  $S$  passa attraverso una sottile fenditura  $F$  posta nel piano focale della lente  $L_1$ ; l'insieme fenditura-lente costituisce il *collimatore C*. Da  $L_1$  emerge un fascio di raggi paralleli che incide ortogonalmente sul reticolo  $R$ . I raggi trasmessi dal reticolo secondo una certa direzione  $\theta$  sono focalizzati dal sistema di lenti  $L_2$  e  $L_3$  che costituiscono il *telescopio T* e possono essere osservati direttamente con l'occhio. Muovendo il telescopio non si osserva nulla a meno che esso non sia posizionato secondo una direzione  $\theta_\lambda$  che soddisfa alla (16.11):

$$\sin \theta_\lambda = m \frac{\lambda}{d}$$

Noto il passo  $d$  del reticolo, misurato l'angolo  $\theta_\lambda$  con un goniometro di precisione e individuato l'ordine  $m$ , si determina il valore della lunghezza d'onda.

In corrispondenza ad ogni angolo  $\theta_\lambda$  si osserva una *riga colorata*, caratteristica della lunghezza d'onda  $\lambda$ , che è l'*immagine della fenditura F data dallo spettroscopio*; a questa riga si dà il nome di *riga spettrale* (si veda la nota alla fine del paragrafo). L'insieme delle righe spettrali forma lo *spettro di emissione della sostanza* che costituisce la sorgente. Gli spettri di emissione si distinguono in:

1) *spettri a righe* corrispondenti ad una successione discreta di lunghezze d'onda e quindi di righe spettrali;

2) *spettri a bande* nei quali le righe sono addensate con continuità nell'intorno di certe lunghezze d'onda, formando delle bande di lunghezze d'onda tra loro separate;

3) *spettri continui*, consistenti in una successione continua di lunghezze d'onda all'interno di un intervallo relativamente largo.

Gli spettri a righe e gli spettri a bande sono emessi da *gas e vapori a pressione non troppo elevata*; i primi sono dovuti ad atomi isolati, i secondi a molecole biameriche o pluriatomiche. L'eccitazione può essere provocata dall'alta temperatura di una fiamma, come avviene ad esempio bruciando il sodio, oppure dal passaggio di corrente elettrica, come si realizza nelle lampade a scarica contenenti idrogeno, elio, neon, mercurio, sodio. Nella figura 16.29 sono riportati gli spettri a righe per l'idrogeno monoatomico, l'elio, il sodio e il mercurio.

Gli spettri a righe e a bande sono caratteristici degli elementi che li emettono; non vi sono spettri comuni a due elementi e neppure singole righe. Su questo fatto è basata l'analisi spettroscopica per il riconoscimento degli elementi. Come avremo modo di approfondire nel capitolo 18, lo spettro di emissione a righe è una conseguenza diretta della struttura dell'atomo, in cui gli elettroni possono occupare stati di energia quantizzati (vedi paragrafi 2.3 e 13.8). La conoscenza dello spettro di emissione di un atomo permette così di avere una conoscenza diretta dei *livelli energetici*.

### Spettri d'emissione

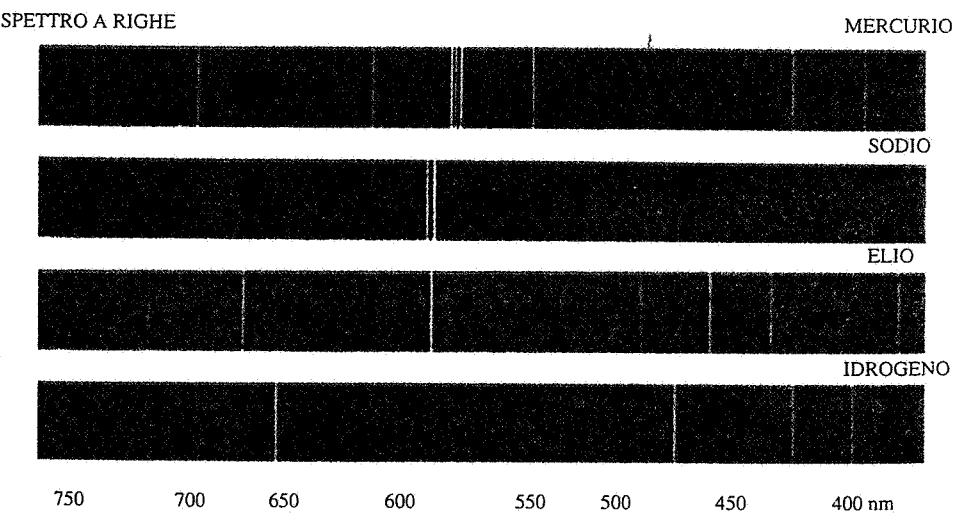


Figura 16.29

Gli spettri continui sono invece emessi da solidi e liquidi portati a temperatura elevata; un esempio sono i filamenti delle comuni lampadine a incandescenza (vedi figura 13.41). Le caratteristiche di questi spettri di emissione dipendono dalla temperatura di equilibrio e anzi si può dire con buona approssimazione che ad una stessa temperatura tutti i corpi hanno lo stesso spettro di emissione.

Il *deuterio*, isotopo dell'idrogeno con il nucleo formato da un protone e da un neutrone invece che da un solo protone, venne scoperto nel 1932 analizzando con uno spettroscopio a reticolo lo spettro di una lampada contenente idrogeno. Accanto alla riga azzurra con  $\lambda = 486.1$  nm, tipica dell'idrogeno, venne osservata per la prima volta una riga molto debole, separata soltanto di  $0.13$  nm, correttamente interpretata come il segnale della presenza, in piccola percentuale, di una diversa specie atomica. Il potere risolutivo necessario per questa misura è dell'ordine di  $4 \cdot 10^3$ .

### *Spettri di assorbimento*

Se esaminiamo con uno spettrometro a reticolo la luce emessa da un filamento incandescente e puntiamo il telescopio nella regione angolare corrispondente alle direzioni dello spettro del prim'ordine, osserviamo una striscia continua di colori dal violetto al rosso. Supponiamo ora di interporre tra la lampada e il reticolo un recipiente di vetro trasparente riempito ad esempio con vapori di sodio: lo spettro

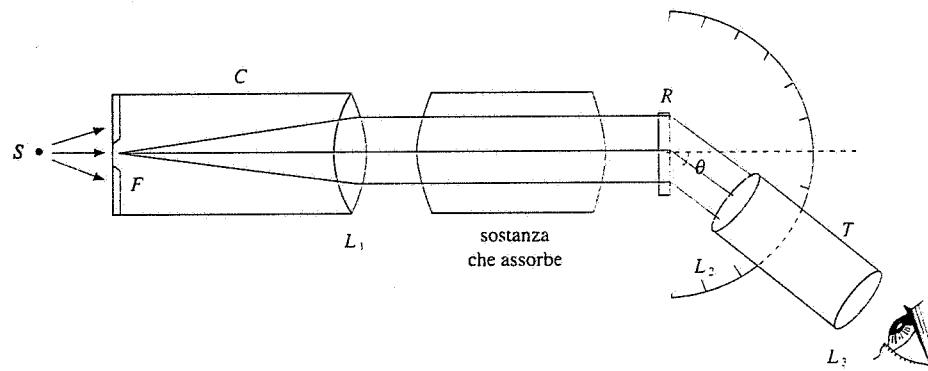


Figura 16.30

continuo colorato appare solcato da due linee nere, in una posizione che corrisponde alle due lunghezze d'onda citate nell'esempio 16.9. Si dice che il sodio ha *assorbito* le due lunghezze d'onda e le due linee nere vengono chiamate *righe di assorbimento*. Interponendo varie sostanze si osserva ogni volta una serie diversa di righe di assorbimento che nel loro complesso costituiscono uno *spettro di assorbimento*.

Spettri di assorbimento

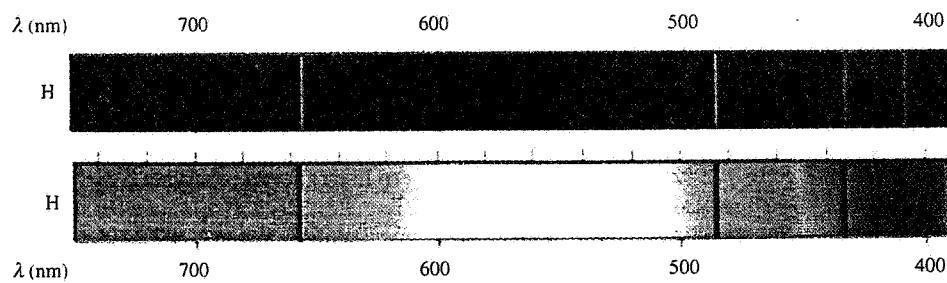
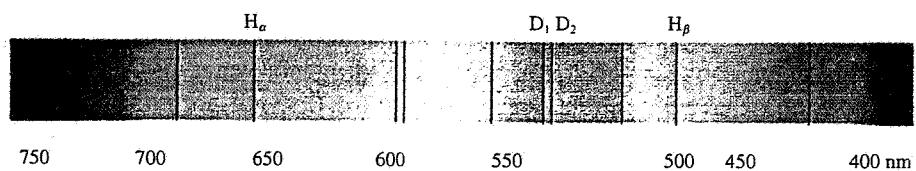


Figura 16.31

## Regola di Kirchhoff

Anche l'assorbimento è dovuto agli atomi e alle molecole della sostanza interposta e di nuovo gli spettri sono rispettivamente a righe e a bande. Nella figura 16.31 si osserva una corrispondenza tra righe di assorbimento e righe di emissione e a questo proposito vale la *regola di Kirchhoff*, giustificata nel capitolo 18, secondo cui ogni sostanza è in grado di assorbire le radiazioni che, nelle stesse condizioni, è capace di emettere.



**Figura 16.32** Tra le righe di Fraunhofer sono indicate in particolare due righe dell'idrogeno e due del sodio.

La figura 16.32 mostra lo spettro solare: in esso si osservano un gran numero di righe nere (*righe di Fraunhofer*) che rappresentano lo spettro di assorbimento dell'insieme degli elementi presenti sulla superficie solare (*cromosfera*) su un fondo continuo che corrisponde all'emissione di un corpo alla temperatura  $T \approx 6000$  K. Anche gli spettri di assorbimento possono quindi essere utilizzati per il riconoscimento degli elementi.

La radiazione assorbita dagli atomi della sostanza interposta viene da questi diffusa in tutte le direzioni, indipendentemente dalla direzione di propagazione della luce incidente (possiamo riferirci al meccanismo descritto nel paragrafo 13.6). Lo si verifica facilmente analizzando ad esempio la luce diffusa dai vapori di sodio prima citati, nella quale si ritrovano principalmente le due lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di assorbimento.

#### Nota. Larghezza delle righe spettrali

Abbiamo già detto nel paragrafo 12.10 che l'emissione luminosa da parte di un atomo può essere rappresentata con un pacchetto d'onde di durata  $\Delta t = 10^{-8}$  s nel quale sono necessariamente presenti molte lunghezze d'onda in un intervallo  $\Delta\lambda$  centrato intorno al valor medio  $\lambda$ , con  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ . L'argomento classico è confermato dalla trattazione quantistica, che porta ai valori suddetti.

Ad un certo intervallo  $\Delta\lambda$  è associata, in base a (16.11), una variazione  $\Delta\theta_\lambda$  dell'angolo  $\theta_\lambda$  al quale si osserva il massimo di ordine  $m$  e in prima approssimazione, se gli angoli sono piccoli, possiamo porre

$$\Delta\theta_\lambda \approx \frac{m}{d} \Delta\lambda .$$

Confrontiamo questa *larghezza*  $\Delta\theta_\lambda$ , che è *intrinseca della riga* e si può chiamare *larghezza naturale* della riga, con la *larghezza strumentale* (16.12) introdotta dal reticolo:

$$\frac{\Delta\theta_\lambda}{\Delta\theta} = \frac{m}{d} \Delta\lambda \frac{Nd}{2\lambda} = m N \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = m N 0.5 \cdot 10^{-7} .$$

In un reticolo con  $N = 10^4$  e all'ordine  $m = 2$   $\Delta\theta_\lambda / \Delta\theta = 10^{-3}$ : la larghezza naturale è trascurabile rispetto alla larghezza strumentale, ovvero la larghezza osservata è esclusivamente quella strumentale.

Osserviamo anche che il suddetto reticolo ha il potere risolutivo  $R = m N = 2 \cdot 10^4$  e che quindi  $\Delta\lambda/\lambda = 1/R = 5 \cdot 10^{-5}$ , molto maggiore di  $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ : il reticolo può risolvere due righe vicine, ma non misurare la larghezza naturale; una riga cioè appare di sicuro monocromatica.

## 16.8 Fenomeni di diffrazione di Fresnel

Abbiamo già osservato nel paragrafo 16.1 che i fenomeni di diffrazione di Fresnel hanno luogo quando o la sorgente delle onde o il punto di osservazione o entrambi sono a distanza finita dall'apertura o dall'ostacolo che perturbano il fronte d'onda.

Dato che la trattazione analitica è abbastanza complicata, ci limitiamo a discutere alcuni casi in cui un'onda piana incide su un'apertura praticata su uno schermo opaco o su un ostacolo e l'osservazione avviene a distanza finita da questi, ma pur sempre grande rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce incidente. Per il calcolo utilizziamo un metodo elaborato dallo stesso Fresnel che consiste nel suddividere il fronte d'onda piano incidente in zone opportunamente definite, ognuna delle quali viene vista dal punto  $P$  in cui calcoliamo gli effetti della diffrazione come sorgente di onde sferiche secondarie. Si tratta cioè di una applicazione particolare del principio di Huygens-Fresnel, adatta al problema che si vuole risolvere.

Con riferimento alla figura 16.33 consideriamo un fronte d'onda piano che si propaga verso  $P$  e indichiamo con  $r_0 = OP$  la distanza di  $P$  dal fronte d'onda. Suddividiamo questo in tante zone anulari concentriche aventi  $O$  come centro, definite dalla condizione che le distanze da  $P$  del bordo interno e del bordo esterno di ciascuna zona differiscano di  $\lambda/2$ . Pertanto il bordo del disco centrale, detto *prima zona di Fresnel*, dista da  $P$   $r_1 = r_0 + \lambda/2$ , il bordo esterno del primo anello, detto *seconda zona di Fresnel*, dista da  $P$   $r_2 = r_1 + \lambda/2 = r_0 + \lambda$  e così via, come indicato nella figura. In generale quindi

$$r_n = r_{n-1} + \frac{\lambda}{2} = r_0 + n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I raggi delle circonferenze che delimitano le *zone di Fresnel* sono dati da

$$R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = \left( r_0 + n \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2 = n r_0 \lambda + n^2 \frac{\lambda^2}{4} \approx n r_0 \lambda, \quad (16.16)$$

dove l'approssimazione è consistente con l'ipotesi  $\lambda \ll r_0$ .

Il campo elettrico in  $P$  si ottiene come somma dei campi elettrici  $E_n$  provenienti dalle singole zone. Osserviamo che le aree delle zone di Fresnel,

$$\Sigma_n = \pi (R_n^2 - R_{n-1}^2) = \pi [n r_0 \lambda - (n-1) r_0 \lambda] = \pi r_0 \lambda,$$

risultano tutte eguali tra loro, non dipendendo da  $n$ . Quindi le ampiezze delle onde emesse dalle varie zone sono diverse in  $P$  soltanto a causa del *fattore di inclinazione* e della distanza, diminuendo al crescere dell'ordine  $n$  della zona.

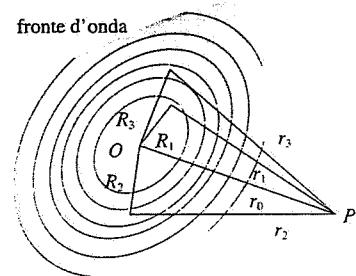
La valutazione del campo elettrico risultante  $E_P$  viene compiuta applicando il metodo dei vettori rotanti. Ciascuna zona finita è considerata a sua volta come formata da un numero infinito di elementi di superficie anulari infinitesime, ognuna delle quali emette un'onda di ampiezza infinitesima. La differenza di fase tra le onde emesse dai bordi interno ed esterno di ciascuna zona è

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_n - r_{n-1}) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi.$$

Ciò significa che disegnando gli infiniti vettori infinitesimi relativi alla prima zona di Fresnel otteniamo una semicirconferenza il cui diametro  $OA$  dà il campo elettrico  $E_1$  dell'onda emessa dalla prima zona (vedi figura 16.34). Per la seconda zona di Fresnel, partendo da  $A$  abbiamo ancora una semicirconferenza il cui diametro  $AB$  rappresenta il campo  $E_2$ ; il punto  $B$  non coincide con  $O$  in quanto il modulo  $E_2 < E_1$ , come si è giustificato sopra. Proseguendo con la stessa costruzione si intuisce che il punto finale è il punto  $O'$ , centro del segmento  $OA$ , per cui  $OO'$ , rappresentazione di  $E_P$ , è la metà di  $OA$ , rappresentazione di  $E_1$ :

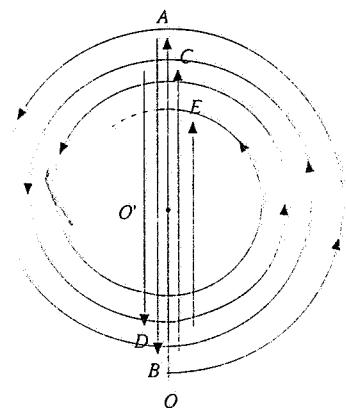
$$E_P = \frac{1}{2} E_1, \quad I_P = \frac{1}{4} I_1.$$

L'intensità luminosa in  $P$  prodotta da un fronte d'onda indefinito è pari ad *un quarto* dell'intensità prodotta dalla prima zona: la diminuzione è dovuta all'interferenza distruttiva tra le varie zone.



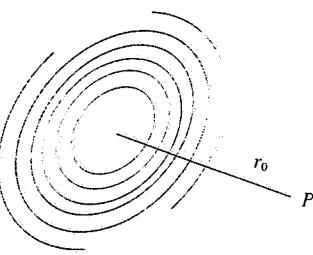
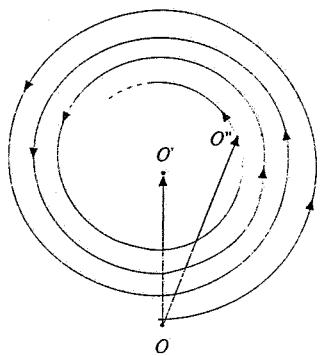
$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}, \quad r_2 = r_0 + \lambda, \\ r_3 = r_0 + 3 \frac{\lambda}{2}, \dots$$

Figura 16.33



$$OA = E_1, \quad AB = E_2, \\ BC = E_3, \dots \\ OO' = E_P$$

Figura 16.34



$$E_P = E_1 - E_2 + E_3$$

Figura 16.35

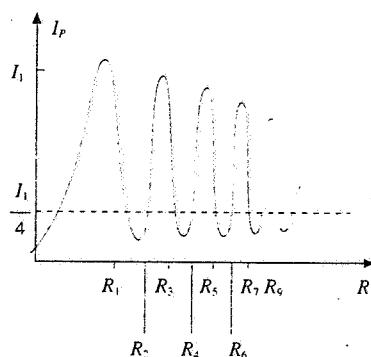


Figura 16.36

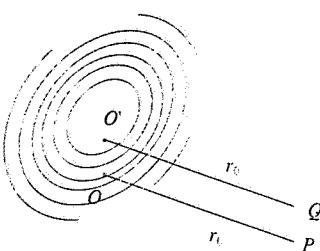


Figura 16.37



Figura 16.38

Lo stesso risultato si ottiene anche scrivendo

$$E_P = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} (E_1 - 2E_2 + E_3) + \frac{1}{2} (E_3 - 2E_4 + E_5) + \dots = \frac{1}{2} E_1 .$$

I segni più e meno alternati sono dovuti alle successive differenze di fase di  $\pi$  e i termini tra parentesi si considerano nulli in quanto si ammette che per effetto dell'interferenza il contributo di ciascuna zona di Fresnel con  $n$  pari sia compensato dai contributi delle due semizone dispari adiacenti.

### Diffrazione di un foro circolare

Per quanto detto è evidente che, fissato un punto  $P$  distante  $r_0$  dal piano d'onda, ad ogni disco di raggio  $R$  ( $0 \leq R < \infty$ ) tracciato sul piano come in figura 16.33 è associato, sulla curva a spirale dei vettori rotanti un punto  $O''$ , ovvero un vettore  $OO''$  la cui ampiezza dà l'ampiezza del campo elettrico  $E_P$  prodotto in  $P$  dalla porzione del fronte d'onda coincidente col disco. Quando  $R$  eguaglia il raggio di una delle zone di Fresnel il punto  $O''$  sta sulla verticale passante per  $O$ .

Il ragionamento svolto finora può apparire puramente formale; se ne scopre però l'utilità non appena si interpone sul fronte d'onda, a distanza  $r_0$  da  $P$ , uno schermo opaco con un foro di raggio  $R$ :  $OO''$  dà l'ampiezza del campo elettrico trasmesso dal foro e l'intensità  $I_P$  è proporzionale a  $(OO'')^2$ . Facendo variare con continuità  $R$  da zero a infinito si ottiene per  $I_P$  l'andamento mostrato in figura 16.36: a causa dell'interferenza tra le varie porzioni del fronte d'onda l'intensità dipende fortemente dal raggio del foro. I punti di *massima intensità* si hanno quando il foro comprende esattamente un *numero dispari di zone di Fresnel*, cioè per raggi  $R$  pari a  $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$ ,  $R_3 = \sqrt{3} R_1$ ,  $R_5 = \sqrt{5} R_1$ , ... secondo (16.16); i punti di *minima intensità* si osservano invece con i raggi  $R_2 = \sqrt{2} R_1$ ,  $R_4 = 2R_1$ ,  $R_6 = \sqrt{6} R_1$ , ..., cioè quando il foro ricopre esattamente un *numero pari di zone di Fresnel*; la linea tratteggiata rappresenta l'intensità in assenza dello schermo col foro. I valori dei massimi sono decrescenti e quelli dei minimi crescenti perché le ampiezze dei campi decrescono all'aumentare di  $R$ :

$$E_1 > E_1 - E_2 + E_3 > E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 > \dots , E_1 - E_2 < E_1 - E_2 + E_3 - E_4 < \dots .$$

Quanto discusso avviene sull'asse del foro. Per determinare l'intensità in un punto  $Q$  che non sta sull'asse  $OP$  occorre tener presente che il sistema di zone di Fresnel è caratteristico del punto di osservazione: spostandosi da  $P$  a  $Q$  parallelamente al piano del foro le zone di Fresnel si spostano rigidamente con  $Q$ . In una generica posizione l'ampiezza  $E_Q$  risulta dalla sovrapposizione dei campi di quelle porzioni di zone intersecate dal foro (figura 16.37). Anche quando il punto  $Q$  è nella zona d'ombra geometrica in esso si osserva un'intensità non nulla.

La figura di diffrazione completa osservata sullo schermo distante  $r_0$  dal foro consta di una serie di corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro se  $R = R_1, R_3, R_5, \dots$ , scuro se  $R = R_2, R_4, R_6, \dots$ . Due esempi sono mostrati in figura 16.38.

Supponiamo ora di cambiare la distanza  $r_0$  mantenendo costanti la lunghezza d'onda  $\lambda$  e il raggio  $R$  del foro. Ad ogni valore di  $r_0$  è associato un sistema d'azione di Fresnel in quanto i raggi delle zone dipendono da  $r_0$  secondo (16.16); ci sono valori di  $r_0$  per i quali nel foro cadono un numero dispari di zone e valori per i quali invece le zone coincidenti col foro sono in numero pari: ai primi valori corrispondono massimi di intensità sull'asse, ai secondi minimi di intensità. Trattiamo numericamente questa situazione nel successivo esempio.

### Esempio 16.11

Un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$  incide su un'apertura circolare di raggio  $R = 2 \text{ mm}$ . Determinare a quali distanze lungo l'asse del foro si osservano massimi di intensità e a quali distanze minimi di intensità.

#### Soluzione

Fissato un punto  $P$  sull'asse del foro a distanza  $r_0$ , costruiamo il corrispondente sistema di zone di Fresnel. Se  $r_0$  è tale che  $R^2 = r_0 \lambda$ , il foro corrisponde alla prima zona di

Fresnel e in  $P$  si ha un massimo di intensità. Nel nostro caso

$$r_0 = \frac{R^2}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{0.685 \cdot 10^{-6}} = 5.84 \text{ m}$$

Al crescere di  $r_0$  i raggi delle zone di Fresnel crescono e quindi se  $r_0$  supera 5.84 m il foro coincide con una parte interna alla prima zona di Fresnel: ciò vuol dire che all'aumentare di  $r_0$  oltre 5.84 m l'intensità decresce monotonicamente senza presentare massimi o minimi.

Osserviamo che per  $r_0 = 5.84 \text{ m}$  i raggi che provengono dal bordo del foro hanno rispetto all'asse un'inclinazione

$$\theta = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5.84} = 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.02 \text{ gradi}$$

e possono essere considerati praticamente paralleli. Guardando la figura di diffrazione su uno schermo posto oltre 5.84 m si nota che essa tende, allontanando lo schermo, alla figura di diffrazione di Fraunhofer, discussa nel paragrafo 16.3.

Avviciniamo ora lo schermo riducendo il valore di  $r_0$  al di sotto di 5.84 m. Troviamo *massimi di intensità* nel punto  $P$  ogni volta  $R^2 = nr_0\lambda$  con  $n$  dispari, ovvero quando

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$r_3 = 1.95 \text{ m}, r_5 = 1.17 \text{ m}, r_7 = 0.83 \text{ m}, \dots$$

Si hanno invece *minimi di intensità* per quelle distanze  $r_0$  che soddisfano alla condizione

$$r_0 = \frac{R^2}{n\lambda} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$r_2 = 2.92 \text{ m}, r_4 = 1.46 \text{ m}, r_6 = 0.97 \text{ m}, \dots$$

Le distanze tra le posizioni di massimi e minimi diminuiscono avvicinandosi al foro e diminuiscono anche le intensità dei massimi perché sono sempre di più le zone di Fresnel che contribuiscono. Le figure di diffrazione sono sempre costituite da corone circolari alternativamente chiare e scure, con il centro chiaro alle distanze  $r_1, r_3, r_5, \dots$  e scuro alle distanze  $r_2, r_4, r_6, \dots$ .

Ponendosi in una posizione di massimo abbastanza vicina al foro, in modo che questo copra molte zone di Fresnel, si trova che la variazione radiale dell'intensità è quella mostrata in figura 16.39: i massimi corrispondono alle corone circolari chiare e i minimi alle corone circolari scure (vedi figura 16.38). Detto  $I_0$  il valor medio dell'intensità si vede che in corrispondenza al bordo del foro l'intensità è  $I_0/4$  e che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica.

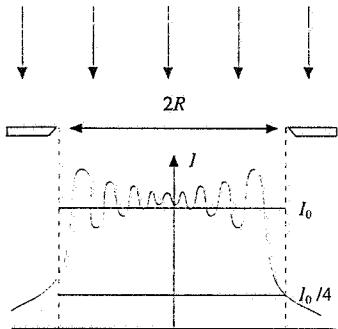


Figura 16.39

### Reticolo zonato di Soret

Nel punto  $P$  si può avere un'intensità notevole se si interpone sul fronte d'onda, a distanza  $r_0$  da  $P$ , una sottile lastra di vetro in cui sono tracciate una serie di corone circolari opache disposte in modo da intercettare, per quel valore di  $r_0$  e  $\lambda$ , le zone dispari di Fresnel lasciando scoperte quelle di ordine pari o viceversa. In tali condizioni si ha solo interferenza costruttiva ( $E_P = E_2 + E_4 + E_6 + \dots$  oppure  $E_P = E_1 + E_3 + E_5 + \dots$ ) e l'intensità in  $P$  risulta molto maggiore che se si lasciassero interferire tutte le porzioni del fronte d'onda.

Il dispositivo è detto *reticolo zonato di Soret*. Se fissiamo la lunghezza d'onda  $\lambda$  e le dimensioni del dischetto centrale, cioè il raggio  $R_1$ , sono automaticamente fissati tutti i raggi delle zone di Fresnel dalla condizione che le aree delle corone circolari siano eguali ed è fis-

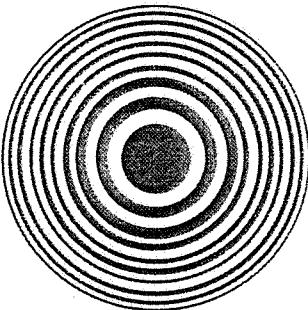


Figura 16.40

sata la distanza  $r_0$  che corrisponde a questo sistema di zone. Un'onda piana monocromatica incidente con quella data  $\lambda$  viene in parte concentrata nel punto  $P$  distante  $r_0$  dal centro del reticolo zonato e quindi possiamo considerare che questo si comporti come una *lente convergente di focale*

$$f = r_0 = \frac{R_1^2}{\lambda} = \frac{R_n^2}{n\lambda} \quad (16.17)$$

Sappiamo che per una distanza  $r < r_0$  i raggi delle zone di Fresnel relative a  $r$  sono inferiori ai raggi delle corrispondenti zone relative a  $r_0$ . Quindi esiste una distanza  $r < r_0$  tale che in una corona circolare trasparente del reticolo zonato cadano tre zone di Fresnel invece che una, oppure cinque o sette o in generale un numero dispari di zone maggiore di uno. Per tutte le distanze che soddisfano a questa condizione abbiamo un massimo secondario di intensità: a differenza della lente che dà una sola immagine il reticolo zonato ne può dare molte.

### Difrazione di un disco opaco

Consideriamo ora la diffrazione subita da un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda$  che incide ortogonalmente su un disco opaco di raggio  $R$ , osservando cosa succede in un punto  $P$  posto a distanza  $r_0$  dal disco.

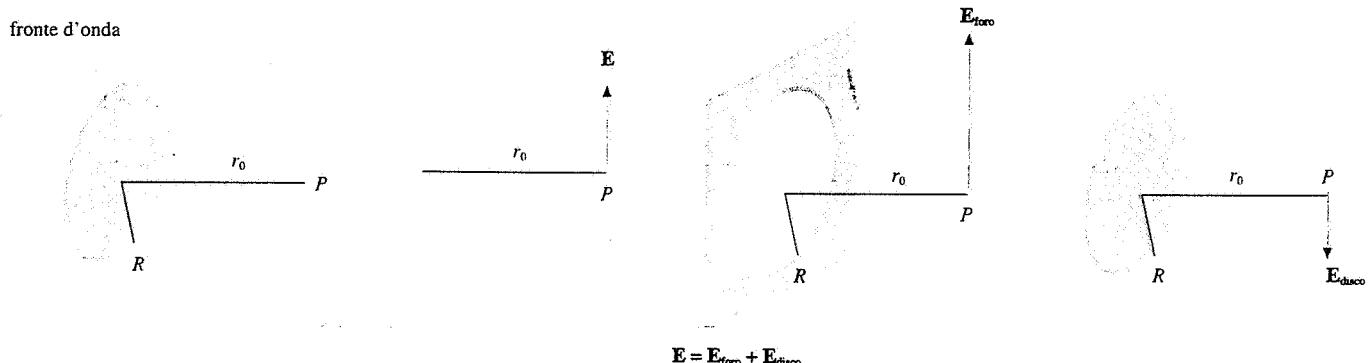


Figura 16.41

Il campo elettrico  $E_{\text{disc}}$  dell'onda difratta si ottiene utilizzando il principio di sovrapposizione schematizzato in figura 16.41. Detto  $E$  il campo elettrico nella situazione senza ostacoli, si può porre

$$E = E_{\text{disc}} + E_{\text{foro}} \Rightarrow E_{\text{disc}} = E - E_{\text{foro}}$$

Ricordiamo che  $E = E_0 / 2$ , rappresentato dal vettore  $OO'$ , e che  $E_{\text{foro}}$  è rappresentato da  $OO''$ ; seguendo la figura 16.42 deduciamo che  $E_{\text{disc}}$  è rappresentato da  $O''O'$ .

All'aumentare del raggio  $R$   $O''$  tende a  $O'$ , l'intensità  $I_{\text{disc}}$ , proporzionale a  $(O''O')^2$ , tende a zero, restando però sempre diversa da zero per dimensioni finite. Quindi in  $P$ , indipendentemente dal raggio del disco, si osserva sempre un punto luminoso.

Tale punto luminoso situato dietro un ostacolo era stato osservato per la prima volta da Maraldi verso il 1700, ma il fatto venne dimenticato. Quando Fresnel nel 1818 presentò la sua teoria della diffrazione, sostenendo quindi la natura ondulatoria della luce, Poisson dedusse matematicamente che, se la teoria era vera, doveva esserci un punto luminoso dietro un ostacolo opaco e concluse che la teoria era inverosimile. Invece Arago eseguì l'esperimento, ritrovò il punto luminoso di Maraldi e confermò la validità delle ipotesi di Fresnel. Per ironia della sorte il punto luminoso in questione è chiamato *punto luminoso di Poisson*.

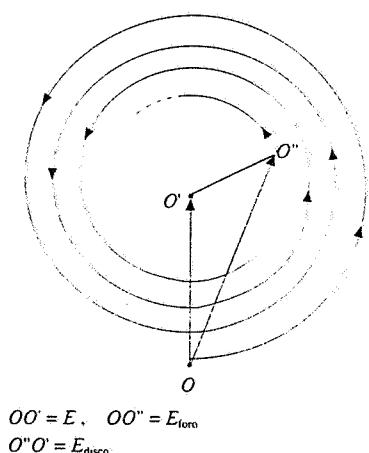


Figura 16.42

### Esempio 16.12

Un'onda piana con  $\lambda = 0.685 \mu\text{m}$  incide perpendicolarmente su un disco opaco di raggio  $R = 2 \text{ mm}$ . Confrontare l'intensità osservata in un punto  $P_1$  sull'asse del disco alla distanza  $r_1 = 5.84 \text{ m}$  con l'intensità  $I_0$  in assenza del disco. Ripetere il calcolo per un punto  $P_2$  distante  $r_2 = 2.92 \text{ m}$ .

#### Soluzione

Nella posizione  $r_1$ , riprendendo i risultati dell'esempio 16.11, il disco opaco copre la prima zona di Fresnel relativa a  $P_1$ , per cui  $E_{\text{foro}} = 2E$  se  $E$  è l'ampiezza che sarebbe prodotta dal fronte d'onda completo. Pertanto

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{foro}} = -E, \quad I_{\text{disco}} = I,$$

l'intensità in  $P_1$  è la stessa di quella in assenza del disco opaco. In  $P_2$ , a distanza  $r_2 = r_1/2$ ,  $E_{\text{foro}} \approx 0$  per cui

$$E_{\text{disco}} = E - E_{\text{foro}} = E, \quad I_{\text{disco}} = I$$

e si ha la stessa intensità che a distanza  $r_1$ .

La figura di diffrazione completa consiste ancora di una serie di anelli scuri e chiari che circondano *in ogni caso* un dischetto centrale chiaro.

### Diffrazione di un ostacolo piano

Prendiamo infine in considerazione un ostacolo piano opaco delimitato da uno spigolo netto, come potrebbe essere il bordo di una fenditura rettilinea indefinita o il filo di una lama. L'onda incidente è piana e monocromatica, con fronte d'onda parallelo al piano contenente l'ostacolo.

Ponendosi in un punto  $P$  a distanza  $r_0$  dal bordo e costruendo il relativo sistema di zone di Fresnel, si osserva che queste sono tutte tagliate a metà dal bordo dell'ostacolo. Se  $E$  è l'ampiezza del campo elettrico prodotto in  $P$  dall'intero fronte d'onda, l'ampiezza in presenza dell'ostacolo è  $E_P = E/2$  e l'intensità  $I_P = I/4$ . In un punto  $P_1$ , posizionato come mostrato in figura 16.43 e distante da  $P$   $R_1 = \sqrt{r_0 \lambda}$ , la prima zona di Fresnel contribuisce completamente all'intensità; per le altre si può dire che ciascuna zona pari è tagliata un po' meno della successiva zona dispari, così che il contributo da sottrarre è minore che in assenza dell'ostacolo e l'intensità in  $P_1$  risulta maggiore dell'intensità  $I$  senza ostacolo. Nella figura 16.44 è mostrato l'andamento dell'intensità trasversalmente all'asse  $OP$ : si vede che c'è intensità nella zona d'ombra geometrica, che le variazioni si hanno in vicinanza della proiezione del bordo e che allontanandosi da questa l'intensità tende al valore costante  $I$ . Analogamente al crescere della distanza  $r_0$  questi effetti di diffrazione tendono a scomparire. Infine nella figura 16.45 è mostrata la figura di diffrazione di una fenditura (due bordi con spigolo netto) in vicinanza della stessa e all'infinito, dove si ritrova il risultato di Fraunhofer.

### 16.9 Olografia

Un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse  $x$  e incide su una lastra fotografica produce su questa un annerimento che dipende localmente dall'intensità che ha colpito la lastra durante il tempo di esposizione e che quindi, per l'onda piana, è uniforme. Supponiamo che in un punto  $P$ , posto a distanza  $x_0$  dalla lastra, ci sia una sferetta molto piccola, la quale diffonde, attraverso un meccanismo del tipo discusso nel paragrafo 13.8, la luce incidente dando origine ad un'onda sferica coerente con l'onda primaria e quindi capace di interferire con essa.

In un punto  $Q$  della lastra  $L$  distante  $r$  da  $P$  e  $z$  dall'asse  $x$  si osserva pertanto l'interferenza tra l'onda primaria  $E_{\text{rif}}$ , che chiamiamo *onda di riferimento*, e l'onda sferica  $E_{\text{ogg}}$  proveniente da  $P$ , che chiamiamo *onda oggetto*:

$$E_{\text{rif}} = E_0 \cos(kx_0 - \omega t), \quad E_{\text{ogg}} = E(r) \cos(kr - \omega t).$$

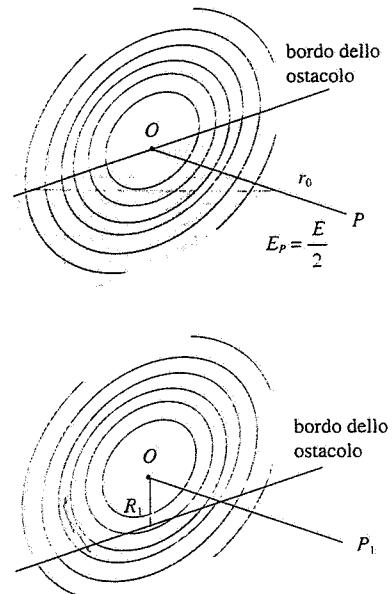


Figura 16.43

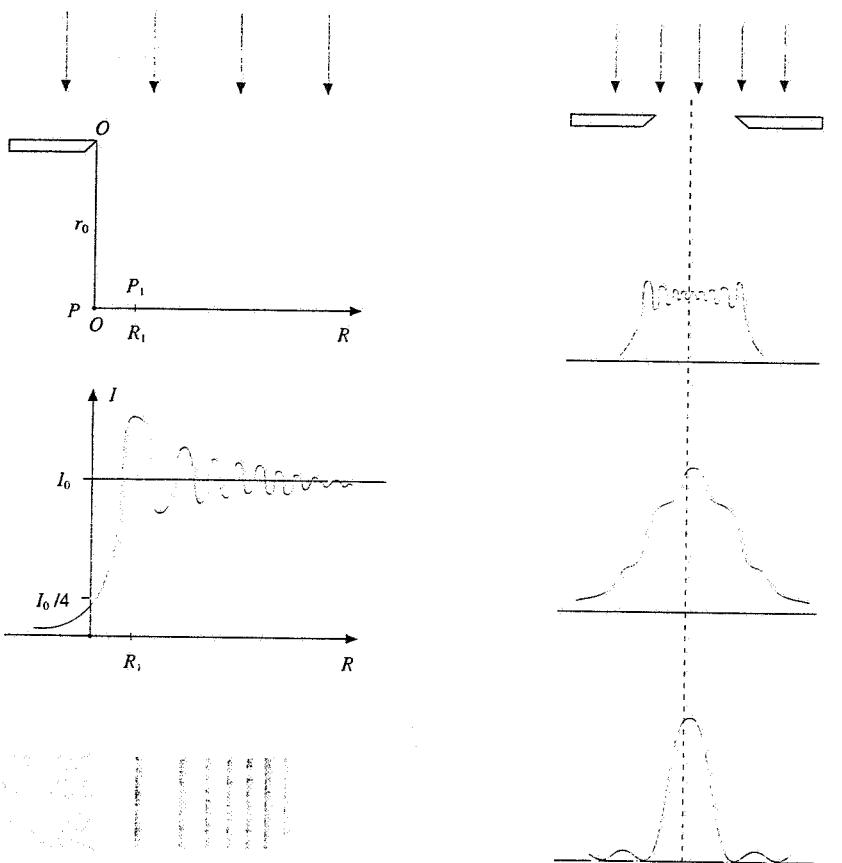


Figura 16.44

Figura 16.45

La differenza di fase tra le onde nel punto  $Q$  è

$$\delta(r) = k(r - x_0) = \frac{k z^2}{2x_0} ,$$

dove si è usata l'approssimazione, valida se  $z \ll x_0$ ,

$$r = \sqrt{x_0^2 + z^2} = x_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{x_0^2}} \approx x_0 \left(1 + \frac{z^2}{2x_0^2}\right) .$$

L'intensità della luce nel punto  $Q$ , ovvero nei punti di una circonferenza di raggio  $z$ , è proporzionale a

$$E_0^2 + E^2(r) + 2E_0 E(r) \cos \delta(r) \approx E_0^2 \left[ 1 + 2 \frac{E(r)}{E_0} \cos \frac{k z^2}{2x_0} \right] ,$$

tralasciando  $E^2(r)$  rispetto a  $E_0^2$ .

La lastra fotografica registra la figura di interferenza in forma di anelli alternativamente scuri e chiari che compaiono su di essa dopo lo sviluppo: le zone scure corrispondono a massimi di interferenza, le zone chiare a minimi. I raggi  $z$  sono:

$$\max \quad \cos \delta = 1 \quad , \quad \frac{k z^2}{2x_0} = 2m\pi \quad , \quad z = \sqrt{2m\lambda x_0} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (16.18)$$

$$\min \quad \cos \delta = -1 \quad , \quad \frac{k z^2}{2x_0} = (2m+1)\pi \quad , \quad z = \sqrt{(2m+1)\lambda x_0} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

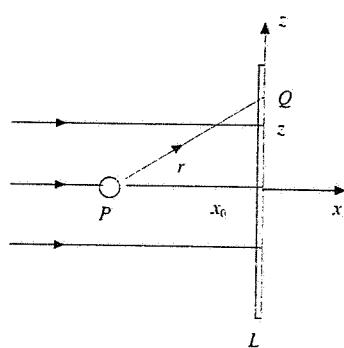


Figura 16.46

Nella figura 16.47 sulla lastra sono colorate le zone in cui si hanno i massimi, mentre sono state lasciate bianche le zone dei minimi (non nulli); gli anelli accanto rappresentano il negativo della lastra.

Osserviamo che nella figura di interruzione sono registrate le informazioni sull'ampiezza e sulla fase dell'onda diffusa che ha contribuito ad impressionare la lastra: l'informazione sull'ampiezza è data dal *grado di annerimento* e quella sulla fase è contenuta nella coordinata  $z$ , legata a  $\delta$ . A questa figura di interruzione si dà il nome di *ologramma* dell'oggetto puntiforme  $P$ .

Supponiamo di illuminare la lastra fotografica sviluppata con lo stesso fascio di luce con cui l'abbiamo prodotta (fascio di riferimento). La struttura degli anelli chiari e scuri che costituiscono l'ologramma è quella caratteristica di un reticolo zonato di Soret (paragrafo 16.7); il raggio del dischetto scuro centrale, eguale al raggio della prima posizione di minimo, vale secondo (16.18)  $z_1 = \sqrt{\lambda x_0}$  ed è quindi anche eguale al raggio  $R$ , della prima zona di Fresnel relativa ad un punto  $P'$  distante  $x_0$  dall'oggetto, secondo (16.16). Pertanto le onde difratte dalle aperture anulari (anelli chiari) vengono focalizzate, in accordo con (16.17), nel punto distante

$$f = \frac{z_1^2}{\lambda} = x_0$$

Si dice che  $P'$ , simmetrico del punto  $P$  in cui era stata posta la sferetta durante la produzione dell'ologramma, è l'*immagine reale* dell'oggetto puntiforme  $P$ . Nella figura 16.48 sono disegnati anche i raggi difrattati allo stesso angolo di quelli convergenti in  $P'$ , ma lungo la direzione simmetrica; tali raggi sembrano provenire dalla posizione in cui era stato posto l'oggetto  $P$  e per questa ragione si dice che l'ologramma fornisce anche un'*immagine virtuale* dell'oggetto, situata nella stessa posizione e completamente indistinguibile da questo. In effetti i raggi che sembrano provenire da  $P$  soddisfano alle stesse condizioni di coerenza valide per i raggi che convergono in  $P'$  e portati a interferire sulla retina danno anch'essi un massimo. In un certo senso ciascun raggio dell'onda di riferimento che arriva su un anello trasparente si comporta come se arrivasse alla fenditura di un reticolo e dà due raggi corrispondenti ai massimi del prim'ordine, uno convergente in  $P'$  e uno che sembra divergere da  $P$ .

Se in luogo di un oggetto puntiforme nell'intorno di  $P$  è posto un oggetto vero e proprio trasparente, ciascun elemento dà origine alla sua figura di interruzione e quindi al suo reticolo di Soret e l'ologramma è la sovrapposizione di un numero grandissimo di tali reticolati. Osservato ad occhio nudo o con un microscopio, l'ologramma si presenta complicato e di difficile interpretazione. Invece se lo si illumina con lo stesso fascio di luce con cui è stato prodotto esso dà origine a due immagini, una virtuale nella posizione in cui era posto l'oggetto e una reale in posizione simmetrica. L'immagine reale, che ha le stesse proprietà rispetto all'oggetto dell'immagine data da uno specchio piano, può essere osservata mettendola a fuoco su uno schermo. L'immagine virtuale è visibile ad occhio nudo guardando attraverso l'ologramma. Si tratta, è bene notarlo, di *immagini veramente tridimensionali*: spostando l'occhio si vede cambiare l'immagine, proprio come avviene con un oggetto reale. Le stesse immagini, anche se con una risoluzione ottica minore, si ottengono illuminando soltanto una parte dell'ologramma, in quanto questa contiene un'informazione, seppure parziale, su tutti i punti dell'oggetto.

L'originalità della procedura olografica consiste nella registrazione dell'informazione completa relativa al fronte d'onda emesso dall'oggetto e successivamente nella possibilità di ricostruire questo fronte d'onda come se fosse emesso dall'oggetto stesso; la normale fotografia è soltanto una registrazione di intensità. Il principio di funzionamento è conseguenza diretta della natura ondulatoria della luce e delle proprietà di coerenza delle onde che interferiscono. Nella produzione di un ologramma le onde interferiscono dopo aver compiuto cammini a volte molto differenti come lunghezza ed è quindi necessario che la sorgente abbia un'elevata lunghezza di coerenza (vedi paragrafi 12.10 e 15.3). Per questa ragione, anche se l'idea dell'olografia risale al 1948 (D. Gabor), essa ha trovato reali applicazioni a partire dal 1963, solo dopo la realizzazione del laser (1960).

Nella pratica per la produzione e l'osservazione susseguente dell'ologramma si adottano configurazioni geometriche differenti da quella cosiddetta in linea trattata prima. Tra l'altro, nell'osservazione dell'immagine virtuale per trasparenza attraverso l'ologramma si ha lo svantaggio di guardare in direzione del laser utilizzato per la ricostruzione.

Un possibile dispositivo che non utilizza lenti è mostrato in figura 16.50. Lungo il cammino di un fascio laser viene posto uno specchio semiriflettente che dà origine al fascio trasmesso di riferimento e al fascio riflesso che colpisce l'oggetto di cui si intende fare l'olo-

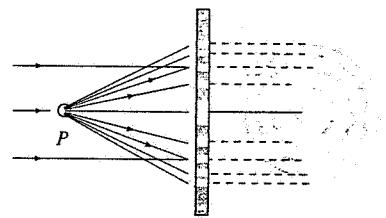


Figura 16.47

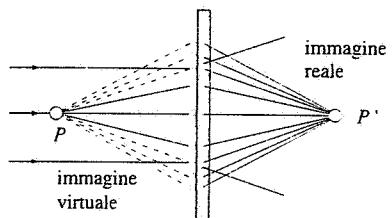


Figura 16.48

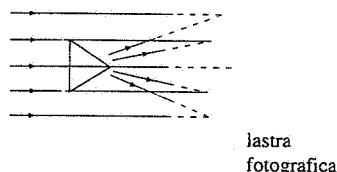


Figura 16.49

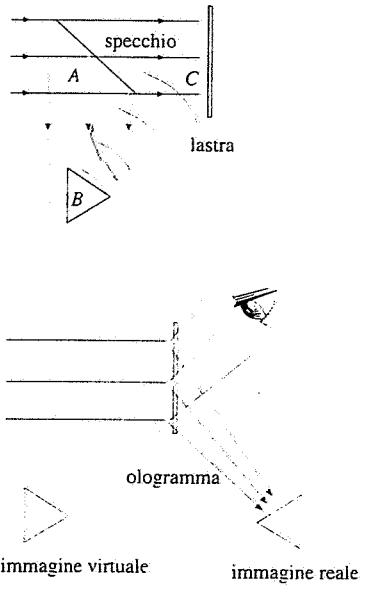


Figura 16.50

gramma. La luce diffusa da ciascun punto dell'oggetto si sovrappone sulla pellicola fotografica all'onda di riferimento formando l'ologramma relativo. La figura di interferenza è un po' più complicata da descrivere analiticamente, anche se la struttura rimane sostanzialmente la stessa. Quando l'ologramma viene illuminato con lo stesso fascio laser si osservano ancora due immagini: una virtuale nella posizione occupata dall'oggetto durante la registrazione e una reale in posizione simmetrica. La differenza di cammino  $AB + BC - AC$  può essere dell'ordine del metro per cui l'utilizzo del laser come sorgente di onde coerenti è essenziale.

Applicazioni dell'ografia si hanno nel campo della microscopia, per osservare conformazioni tridimensionali di piccoli oggetti come le cellule, e nel campo della medicina, dove ad esempio l'ologramma dell'occhio permette di osservare contemporaneamente retina e cristallino. Sono possibili oogrammi anche con gli ultrasuoni, esistendo attualmente sorgenti altamente coerenti e rivelatori adatti; gli oogrammi ultrasonici permettono di osservare parti di organi interni del corpo umano.

### Esempio 16.13

Per il dispositivo schematizzato in figura 16.46 calcolare l'ologramma di un punto materiale distante  $x_0 = 50$  cm dalla lastra; la luce laser di riferimento ha lunghezza d'onda  $\lambda = 0.633$  mm.

#### Soluzione

La differenza di fase, come abbiamo dimostrato, è

$$\delta = k(r - x_0) = \frac{kz^2}{2x_0} = \frac{\pi z^2}{\lambda x_0}$$

e i massimi di interferenza si hanno per

$$\delta = 2m\pi \Rightarrow z_{\max} = \sqrt{2m\lambda x_0} = 0.80\sqrt{m} \text{ mm.}$$

L'ologramma sviluppato è costituito da una serie di corone circolari concentriche annrate di raggi

$$z = 0.80, 1.13, 1.39, 1.60, \dots \text{ mm};$$

il primo minimo si forma per  $z = 0.56$  mm e all'interno di questo si trova il dischetto centrale scuro.

Il massimo con  $m = 100$ , che è l'ordine di grandezza del numero di corone circolari effettivamente realizzabili, dato che esse si infittiscono al crescere di  $m$ , ha  $z = 8$  mm: l'approssimazione  $z \ll x_0$  è ancora ampiamente verificata.

## 16.10 Diffrazione dei raggi X

I raggi X occupano la banda di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda inferiori a  $10^{-9}$  m; essi vengono prodotti dal frenamento in un materiale pesante di elettroni accelerati da d.d.p. superiori a qualche migliaio di volt oppure quando un elettrone compie una transizione verso uno dei livelli energetici più interni di un atomo, come abbiamo accennato nel paragrafo 13.12.

In un normale reticolo di diffrazione ottico i raggi X non vengono praticamente diffusi: ad esempio, con  $\lambda = 10^{-10}$  m e  $d = 10^{-6}$  m il massimo del prim'ordine si forma all'angolo  $\theta = \lambda/d = 10^{-4}$  rad =  $5.7 \cdot 10^{-3}$  gradi, troppo vicino al massimo di ordine zero per essere osservato. Invece un reticolo spaziale naturale adatto a produrre la diffrazione dei raggi X è un reticolo cristallino, in cui gli atomi sono disposti secondo strutture regolari con distanze reciproche molto piccole.

In un cristallo di salgemma gli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  formano un reticolo cubico di lato  $a$ . Ciascuno ione è al centro di una cella cubica di lato  $a$  e il volume di ogni cella elementare è  $a^3$ . Una mole di  $\text{NaCl}$  ha una massa di  $A = 58.45$  kg e contiene  $2N_A = 2 \cdot 6.022 \cdot 10^{26}$  ioni, occupando quindi un volume  $V = 2N_A a^3$ . La densità del salgemma è  $\rho = 2.17 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  per cui

$$A = 2 N_A a^3 \rho , \quad a = \left( \frac{A}{2 N_A \rho} \right)^{1/3} = 2.82 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.282 \text{ nm} .$$

La distanza  $a$  è detta *costante reticolare* e il suo valore è indicativo delle distanze interatomiche nei cristalli.

Quando un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  incide su questa struttura di atomi, gli elettroni che circondano ogni singolo nucleo si comportano come dipoli oscillanti, emettendo radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda  $\lambda$  in tutte le direzioni. Il cristallo si comporta quindi come un sistema tridimensionale di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti.

Consideriamo una serie di piani paralleli passanti per gli atomi; le tracce di questi piani, detti piani reticolari, sono segnate nella figura 16.52. Detta  $d$  la *distanza tra due piani reticolari*, questa risulta in generale minore della costante reticolare  $a$ ; solo per quei piani reticolari che sono orizzontali e verticali nella figura si ha  $d = a$ .

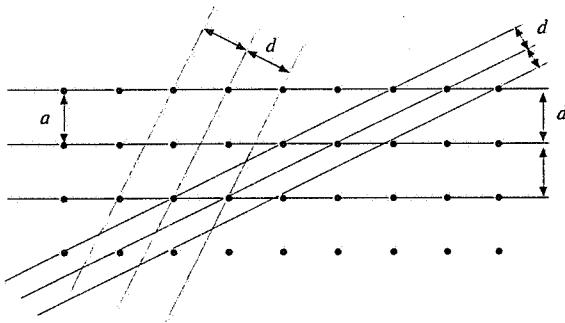


Figura 16.52

Un'onda piana, che incide formando l'angolo  $\theta$  (*angolo di radenza*) con un insieme di piani reticolari distanti  $d$ , vede la serie di atomi, uno per piano reticolare, che appartengono ad una retta ortogonale ai piani reticolari, come un reticolo unidimensionale. Se ci poniamo nella direzione di osservazione che forma l'angolo  $\theta$  rispetto ai piani reticolari, le differenze di cammino

$$B B' B'' , \quad C C' C'' - B B' B'' , \quad D D' D'' - C C' C''$$

tra le onde emesse da due sorgenti contigue come  $A$  e  $B'$ ,  $B'$  e  $C'$ ,  $C'$  e  $D'$  sono eguali a  $2d \sin \theta$ . Secondo (15.11) abbiamo interferenza costruttiva quando

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad \text{ovvero} \quad \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d} \quad m = 1, 2, 3, \dots , \quad (16.19) \quad \text{Legge di Bragg}$$

relazione detta *legge di Bragg*. Per angoli diversi il fascio risulta notevolmente attenuato o addirittura soppresso a causa dell'interferenza distruttiva, proprio come avviene per i reticolli ottici.

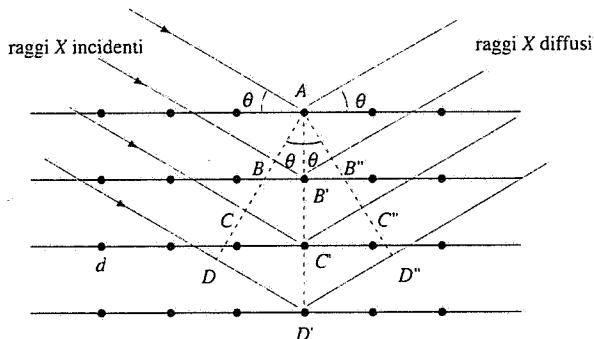


Figura 16.53

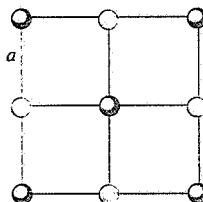
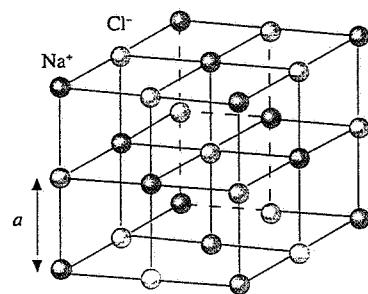


Figura 16.51

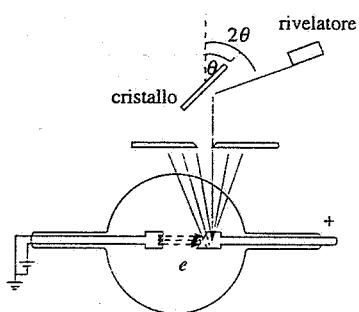


Figura 16.54

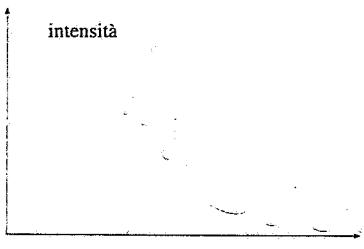


Figura 16.55

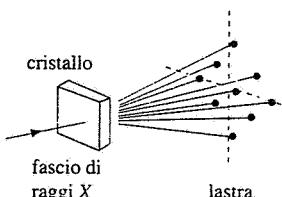


Figura 16.56

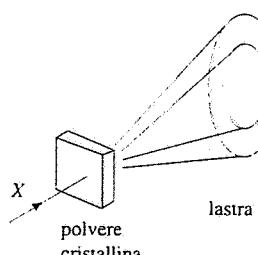


Figura 16.57

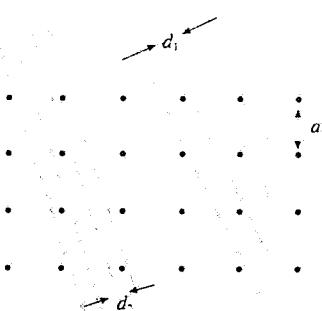


Figura 16.58

Un dispositivo per l'osservazione della diffrazione di raggi X è lo *spettrografo a cristallo* della figura 16.54, ideato da Bragg. In corrispondenza ad una determinata serie di piani reticolari, cioè ad un certo valore di  $d$ , si varia l'angolo  $\theta$  e misurando gli angoli dei massimi si deduce dalla (16.19) lo spettro delle lunghezze d'onda del fascio di raggi X. Si verifica così l'esistenza della componente continua alla radiazione di frenamento, alla quale è sovrapposta la componente a righe caratteristica della struttura atomica del materiale emettitore. In figura 16.55 è mostrato uno dei primi spettri ottenuti da Bragg nel 1913: sono visibili gli spettri del primo e del second'ordine, ciascuno con tre righe. Viceversa, utilizzando un fascio monocromatico di raggi X si possono determinare le varie distanze  $d$ , acquisendo informazioni sulla struttura cristallina del materiale usato come bersaglio nello spettrografo.

Se il fascio incidente può incontrare nel cristallo diverse famiglie di piani reticolari l'aspetto della figura di diffrazione è molto diverso. In effetti la prima evidenza sperimentale sulla natura ondulatoria dei raggi X venne ottenuta da von Laue nel 1912, con l'apparato schematizzato in figura 16.56. Un fascio di raggi X con piccola sezione incide su un sottile cristallo di solfuro di zinco; su una lastra fotografica si osserva la figura di diffrazione. Questa consta di un insieme di punti disposti in modo regolare intorno al fascio centrale trasmesso; ciascun punto è la traccia di una direzione lungo cui si è avuto un massimo. Infatti una lunghezza d'onda  $\lambda$  incidente può trovare una coppia di valori  $d_i$  e  $\theta_i$  per i quali è soddisfatta (16.19) con un certo valore intero positivo  $m_i$ : vuol dire che la direzione di incidenza forma l'angolo di radenza  $\theta_i$  con una famiglia di piani reticolari aventi tra loro distanza  $d_i$  e che  $2 d_i \sin \theta_i = m_i \lambda$ ; il raggio diffratto impressiona la lastra in una zona ristretta, quasi puntiforme. Data  $\lambda$  la (16.19) può essere soddisfatta anche per una terza di valori  $d$ ,  $\theta$ ,  $m$  diversa dalla precedente e il fatto si può ripetere per le altre lunghezze d'onda incidenti. Si forma così lo *spettrogramma a punti di Laue* nel quale ad ogni punto è dunque associata una famiglia di piani reticolari; esso è caratteristico della struttura cristallina illuminata col fascio di raggi X.

Invece che da un cristallo supponiamo che il materiale diffondente sia costituito da una polvere contenente un gran numero di microcristalli, orientati in maniera casuale. Se la condizione (16.19) è soddisfatta per una data famiglia di piani reticolari di un particolare microcristallo, essa viene soddisfatta anche da moltissimi altri microcristalli e al posto di un punto abbiemo sulla lastra fotografica una circonferenza. È come prendere una particolare situazione realizzata col metodo di Laue e ruotare il cristallo attorno all'asse del fascio: infatti nella polvere cristallina si trovano tutte le orientazioni che corrisponderebbero ad una tale rotazione. Lo *spettrogramma*, detto di *Debye-Scherrer*, contiene una serie di circonference, ognuna generata come descritto con una diversa famiglia di piani reticolari.

La diffrazione dei raggi X, oltre che per la spettroscopia dei raggi X stessi e per indagini sui cristalli, è utilizzato anche per lo studio di strutture microscopiche come quelle di molecole biologiche complesse, tipo DNA.

#### Esempio 16.14

Un fascio di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.1$  nm incide su un cristallo di NaCl che funge da bersaglio nello spettrografo a cristallo. Calcolare gli angoli  $\theta$  ai quali si formano i massimi di interferenza per i due sistemi di piani reticolari mostrati in figura.

#### Soluzione

Dalla figura si ricava, essendo  $a = 0.282$  nm,

$$d_1 = a / \sqrt{5} = 0.126 \text{ nm}, \quad d_2 = a / \sqrt{10} = 0.089 \text{ nm}.$$

I massimi si formano per

$$\sin \theta = \frac{m \lambda}{2d_1} = 0.397 m, \quad \theta_1 = 23.4^\circ, \quad \theta_2 = 52.7^\circ, \quad \sin \theta = \frac{m \lambda}{2d_2} = 0.562 m, \quad \theta_1 = 34.2^\circ.$$

**Esempio 16.15**

Un fascio di raggi X, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese nell'intervallo tra 0.01 nm e 1 nm, incide su un cristallo di NaCl come mostrato in figura. Per le due serie di piani reticolari indicati calcolare in quali direzioni si formano i massimi di interfe- renza e per quali lunghezze d'onda.

**Soluzione**

Essendo  $a = 0.282 \text{ nm}$ ,  $d_1 = a / \sqrt{2} = 0.199 \text{ nm}$ ,  $d_2 = a / \sqrt{5} = 0.126 \text{ nm}$ . Inoltre

$$\tan \theta_1 = 1, \quad \theta_1 = 45^\circ, \quad \alpha_1 = 2\theta_1 = 90^\circ, \quad \tan \theta_2 = 0.5, \quad \theta_2 = 26.57^\circ, \quad \alpha_2 = 2\theta_2 = 53.13^\circ.$$

Le lunghezze d'onda che interferiscono costruttivamente per il primo sistema di piani reticolari si ricavano da

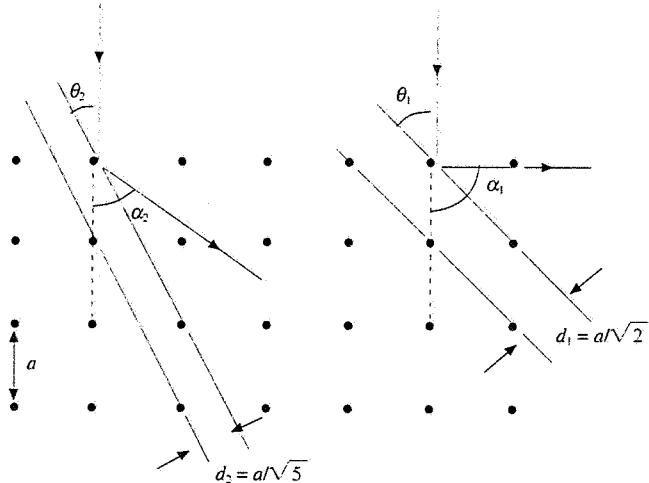
$$2d_1 \sin \theta_1 = 0.282 = m \lambda \text{ in nm};$$

visti i limiti su  $\lambda$   $m$  è un numero intero compreso tra 0.282 e 28.2, quindi

$$\lambda = \frac{0.282}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 28.$$

Per la seconda serie di piani reticolari

$$2d_2 \sin \theta_2 = 0.113 = m \lambda \text{ in nm} \quad \lambda = \frac{0.113}{m} \text{ nm} \quad m = 1, 2, \dots, 11.$$



**Figura 16.59**

Vogliamo notare, per concludere, che il termine *diffrazione dei raggi X*, per quanto comunemente usato, non è appropriato. Si tratta piuttosto di *diffusione*; ciò che si osserva, e che dimostra la natura ondulatoria dei raggi X, è l'*interferenza tra i raggi diffusi lungo date direzioni*.

# Ottica geometrica

## 17.1 Leggi della riflessione e della trasmissione

I fenomeni più interessanti nella propagazione della luce, come l'interferenza, la diffrazione e la polarizzazione, sono manifestazioni dirette del carattere ondulatorio della luce. Anche altre proprietà più semplici, ma non per questo meno importanti, e cioè quelle connesse con la propagazione rettilinea della luce in un mezzo trasparente omogeneo e isotropo e l'attraversamento della superficie di separazione tra due mezzi diversi, si spiegano con la teoria ondulatoria. Però è possibile interpretare la maggior parte delle osservazioni anche basandosi sul concetto di *raggio luminoso* e sulle due semplici leggi della riflessione e della trasmissione. Questo è il campo dell'*Ottica Geometrica*, così chiamata perché tutte le deduzioni si fanno con costruzioni geometriche che obbediscono alle leggi suddette.

Abbiamo già trattato l'argomento della riflessione e della trasmissione nel paragrafo 14.3, sia in generale che con particolare riguardo alla luce. Richiamiamo i risultati ottenuti che sono essenziali per il resto del capitolo.

Partiamo dunque dall'ipotesi che la luce emessa da una sorgente si propaghi in linea retta all'interno di un *mezzo trasparente* omogeneo e isotropo: il termine *omogeneo* indica la costanza della densità mentre *isotropo* significa che il comportamento della luce è lo stesso in tutte le direzioni. L'aria, il vetro, l'acqua soddisfano di norma a queste condizioni.

Il percorso seguito dalla luce viene disegnato tramite *raggi*, cioè semirette uscenti dalla sorgente. Nella figura 17.1 è mostrata una sorgente puntiforme *S* che emette luce in tutte le direzioni e un diaframma *D* che delimita un fascio di raggi divergenti.

La luce emessa dalla sorgente può essere *monocromatica*, cioè con una ben precisa lunghezza d'onda, o *policromatica*: in tal caso può contenere un numero discreto di lunghezze d'onda o bande continue di lunghezze d'onda. In particolare si dice *bianca* la luce che contiene tutte le lunghezze d'onda nel campo visibile. Lo spettro di lunghezze d'onda di un raggio luminoso ha importanza nella trasmissione della luce, a causa del fenomeno della dispersione (vedi paragrafi 13.9 e 14.3).

Il mezzo attraversato dai raggi può essere delimitato da una particolare superficie su cui avviene il fenomeno della *riflessione* dei raggi luminosi, descritto nella figura 17.2 nel caso di superficie riflettente piana. Queste superficie sono in genere costituite da un sottile ( $\sim 10^{-6}$  m) deposito metallico, ad esempio di alluminio o di argento, sopra una superficie di supporto accuratamente levigata, che nei casi più comuni è piana o sferica. Il raggio incidente sulla superficie e la normale alla superficie nel punto *O* di incidenza individuano un *piano* detto *di incidenza*; il *raggio riflesso* sta in questo piano e forma con la normale un angolo  $\theta_i$ , eguale all'angolo  $\theta_r$  formato con la normale dal raggio incidente:

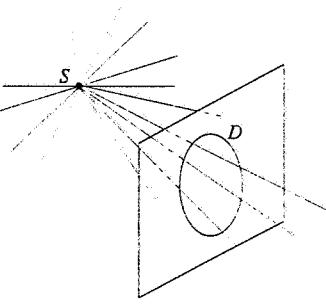


Figura 17.1



Figura 17.2

$$\theta_i = \theta_r \quad . \quad (17.1)$$

La (17.1) si chiama *legge della riflessione*; essa non dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente.

Alla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti diversi la luce viene in parte riflessa e in parte trasmessa: da un raggio luminoso incidente hanno origine un raggio riflesso, che sta nel primo mezzo e segue la legge (17.1), e un *raggio trasmesso* nel secondo mezzo, che giace nel piano di incidenza e forma con la normale l'angolo  $\theta_t$ , dati dalla *legge della trasmissione*

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \quad (17.2)$$

Il fenomeno si chiama anche *rifrazione* e si parla di *raggio rifratto*, angolo di rifrazione e *legge della rifrazione*.

Le grandezze  $n_1$  e  $n_2$ , *indici di rifrazione assoluti* rispettivamente del primo e del secondo mezzo, sono definiti da (13.10) come rapporto tra la velocità  $c$  della luce nel vuoto e la velocità  $v$  della luce nel mezzo:

$$n = \frac{c}{v} \quad (17.3)$$

Per la luce visibile l'indice di rifrazione è sempre maggiore di 1 ed è funzione della lunghezza d'onda, nella maggior parte dei casi debolmente decrescente all'aumentare della lunghezza d'onda. Pertanto la velocità della luce in un mezzo è sempre minore di  $c$  e dipende dalla lunghezza d'onda (*dispersione*). In un mezzo omogeneo l'indice di rifrazione non varia con la posizione.

Si vede da (17.2) che  $\theta_t = \theta_i$  solo per incidenza normale, cioè  $\theta_i = \theta_t = 0$ . Altrimenti ci sono due possibilità:

a) la trasmissione avviene da un mezzo con indice di rifrazione minore a un mezzo con indice di rifrazione maggiore,  $n_1 < n_2$ , e pertanto  $\theta_t < \theta_i$ , il raggio trasmesso si avvicina alla normale, come nella figura 17.4;

b) la trasmissione avviene nelle condizioni opposte,  $n_1 > n_2$  e allora  $\theta_t > \theta_i$ , il raggio trasmesso si allontana dalla normale (Figura 17.5).

Nel caso  $n_1 > n_2$  esiste un particolare angolo di incidenza  $\theta_L$  tale che sia  $\theta_t = 90^\circ$  (ciò non è possibile se  $n_1 < n_2$ ). Tale angolo  $\theta_L$  è detto *angolo limite* e il suo valore si ricava da (17.2) imponendo  $\sin \theta_t = 1$ :

$$\sin \theta_L = \frac{n_2}{n_1} \quad , \quad \theta_L = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \quad (17.4)$$

Per valori di  $\theta_i$  maggiori di  $\theta_L$  non esiste raggio trasmesso e la luce viene tutta riflessa: il fenomeno si chiama *riflessione totale*.

Nella tabella 17.1 sono dati gli indici di rifrazione di alcune sostanze, per luce di

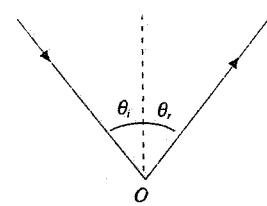


Figura 17.3

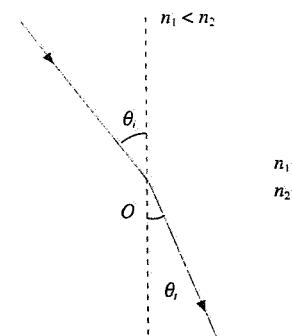


Figura 17.4

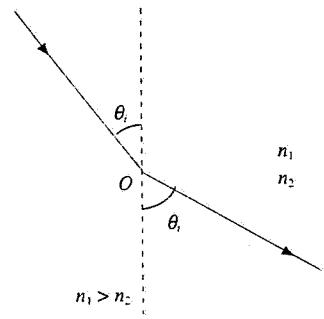


Figura 17.5

Riflessione totale

Tabella 17.1 Indici di rifrazione

fluorite $\text{CaF}_2$	1.434	acqua	1.333
vetro	1.46÷1.96	alcool etilico	1.361
quarzo fuso	1.458	idrogeno liquido (20 K)	1.110
quarzo	1.544	azoto liquido (83 K)	1.205
ioduro di sodio $\text{NaI}$	1.775	vapor d'acqua	1.00025
diamante	2.419	idrogeno	1.00013
pexiglass	1.50	azoto	1.00030
		aria	1.00029

lunghezza d'onda  $\lambda = 589 \text{ nm}$  (giallo). Si intende che i gas siano in condizioni standard (pressione atmosferica,  $T = 273 \text{ K}$ ).

Con riferimento a (17.4), vediamo che alla data  $\lambda$  l'angolo limite nel passaggio acqua–aria è di  $48.6^\circ$ , nel passaggio vetro ( $n = 1.5$ ) – aria è di  $41.8^\circ$ .

Ricordiamo che le leggi (17.1) e (17.2) sono note come *leggi di Cartesio*; la (17.2) è nota pure come *legge di Snell*, che in effetti la stabilì sperimentalmente intorno al 1620.

Reversibilità dei raggi

Una caratteristica molto importante di queste leggi è la cosiddetta *reversibilità*: se nelle figure 17.3, 17.4, 17.5 si inverte il verso di propagazione della luce, si scambiano semplicemente i ruoli di raggio incidente e raggio riflesso o raggio trasmesso. Si osservi in particolare che la figura 17.4 con verso di propagazione invertito dà il caso esaminato nella figura 17.5 e viceversa. Questa proprietà di reversibilità è estremamente utile nella pratica, in quanto riduce il numero di casi da trattare, come si vedrà in numerosi esempi. Essa è già stata utilizzata nel paragrafo 14.4 a proposito dell'angolo di Brewster.

## 17.2 Definizioni e convenzioni

La situazione fisica che vogliamo esaminare è la costruzione di immagini di determinati oggetti effettuata con strumenti ottici in cui la luce emessa dagli oggetti subisce riflessione e rifrazione. Ciò allo scopo, ad esempio, di osservare oggetti lontani tramite cannocchiali o telescopi, oppure di cogliere particolari strutturali di oggetti molto piccoli tramite microscopi o di fissare le immagini su pellicole tramite obiettivi fotografici. L'occhio stesso, non dimentichiamolo, è uno strumento ottico molto sofisticato, che spesso ha bisogno di correzioni esterne tramite lenti.

L'oggetto per uno strumento ottico è un corpo, puntiforme o esteso, che emette luce direttamente o diffonde la luce emessa da un altro corpo. I raggi luminosi vengono seguiti attraverso lo strumento applicando le leggi (17.1) e (17.2) e si esamina se essi convergono in una figura, detta *immagine* dell'oggetto dato. Quando i raggi uscenti da un punto dell'oggetto si incontrano in un solo punto dell'immagine lo strumento è definito *stigmatico* rispetto a quella coppia di punti, che sono chiamati *punti coniugati*. L'*immagine* è *reale* se i raggi si incontrano fisicamente nei suoi punti, mentre è detta *virtuale* se per essa passano i prolungamenti dei raggi, ma non i raggi stessi. Un'immagine, reale o virtuale, può fungere da oggetto (reale o virtuale) per un successivo strumento ottico.

Lo stigmatismo, condizione essenziale per una buona definizione dell'immagine, è difficile da ottenere: l'immagine di un punto è quasi sempre estesa, cioè non puntiforme. Solo se si considerano fasci di *raggi di piccola apertura e parassiali*, cioè vicini all'asse dello strumento ottico e formanti con questo angoli molto piccoli, è possibile raggiungere con buona approssimazione una situazione di stigmatismo. Nei casi pratici che studieremo a partire dal paragrafo 17.3 supporremo sempre valida tale approssimazione.

Le *superficie* che la luce incontra sono dette *catottriche* o *specchi* quando su di esse avviene solo riflessione; poiché la (17.1) non dipende dall'indice di rifrazione, i raggi di qualsiasi lunghezza d'onda propagantesi nella stessa direzione subiscono tutti la stessa deviazione.

Si chiamano invece *superficie diottriche* o *dioptri* le superficie su cui avviene la trasmissione della luce da un mezzo all'altro; data la dipendenza di (17.2) dall'indice di rifrazione raggi propagantis in la stessa direzione e con diversa lunghezza d'onda subiscono deviazioni diverse (è il già citato fenomeno della dispersione). Di un unico oggetto si possono avere più immagini distinte (e colorate) e il sistema non è quindi stigmatico. Questo difetto intrinseco si chiama *cromatismo* e può essere corretto con una opportuna successione di superficie diottriche; se ciò avviene lo

Specchi

Dioptri

strumento complessivo si dice *acromatico*. Il problema non sussiste per gli specchi, che sono per loro natura acromatici, come abbiamo già notato.

Su una superficie diottrica avviene sempre anche riflessione; noi però trascureremo questi raggi riflessi, considerando quindi i due tipi di superficie con un'unica funzione, o riflettente o rifrangente. In condizioni di riflessioni totali naturalmente la superficie diottrica è puramente riflettente. Come giustificazione ricordiamo, dal paragrafo 14.4, che la quantità di energia riflessa su una superficie diottrica è dell'ordine di qualche percento dell'energia incidente, se gli angoli di incidenza non sono grandi, situazione nella quale ci troveremo in effetti ad operare nei prossimi paragrafi.

Nella costruzione delle immagini è conveniente adottare alcune convenzioni sui segni delle distanze e degli angoli che permettono di trattare tutti gli svariati casi che si presentano allo stesso modo e senza ambiguità.

Fissata una superficie di discontinuità, catottrica o diottrica, che nella figura 17.6 è assunta sferica, e detto  $V$  il suo vertice, cioè l'intersezione con l'*asse ottico* che coincide con l'*asse di simmetria*, ci atteniamo a queste regole.

1. La luce incidente proviene da sinistra.

2. La distanza  $p$  di un oggetto  $P$  dal vertice  $V$  è positiva se l'oggetto si trova a sinistra del vertice, negativa se l'oggetto è a destra di  $V$ .

3. La distanza  $q$  dell'immagine  $Q$  dal vertice  $V$  è positiva se l'immagine si trova a destra del vertice, negativa se l'immagine è a sinistra di  $V$ .

4. Il raggio di curvatura  $R$  della superficie sferica è positivo se il centro di curvatura si trova a destra di  $V$  (superficie sferica convessa), negativo se il centro di curvatura è a sinistra di  $V$  (superficie sferica concava).

5. A sinistra di  $V$  gli angoli che i raggi formano con l'asse sono positivi se considerati nel verso antiorario a partire dall'asse; a destra di  $V$  il verso positivo è quello orario.

6. Le distanze dall'asse sono positive per punti al di sopra dell'asse, negative per punti al di sotto, se si tratta di oggetti; per le immagini vale il contrario.

Come per tutte le convenzioni (ricordiamo quella sui segni degli scambi di calore e lavoro in termodinamica) non bisogna assegnare significato fisico alle scelte che si adottano. Ogni scelta ha una sua giustificazione logica e si potrebbe anche ragionare al di fuori di qualsiasi convenzione. Noi però, per chiarezza e uniformità di metodo, seguiremo coerentemente le regole sopra esposte. Notiamo esplicitamente che le strutture delle equazioni relative ai vari strumenti ottici non dipendono dalla convenzione adottata, però ne dipendono i segni davanti ai vari termini; bisogna quindi fare attenzione quando si confrontano testi che possono usare convenzioni diverse.

### 17.3 Specchi

Consideriamo una superficie catottrica sferica concava, ovvero uno specchio sferico concavo. Il termine concavo (o convesso) naturalmente è riferito a quella faccia della superficie sferica che è speculare ed è rivolta alla luce incidente.

Poniamo un oggetto  $P$  puntiforme sull'asse dello specchio a sinistra del centro di curvatura  $O$  e tracciamo un raggio emesso da  $P$  ad angolo  $\theta$  con l'asse. Il raggio incide sullo specchio nel punto  $H$  e il raggio riflesso incontra l'asse nel punto  $Q$ , immagine di  $P$ . In base alla nota proprietà che un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, abbiamo dalla figura 17.9  $\theta + \theta_i = \alpha$  nel triangolo  $PHO$ ,  $\alpha + \theta_i = \theta'$  nel triangolo  $OHQ$ , dalle quali, eliminando  $\theta_i$ ,

$$\theta + \theta' = 2\alpha \quad (17.5)$$

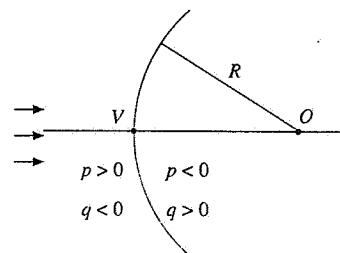


Figura 17.6

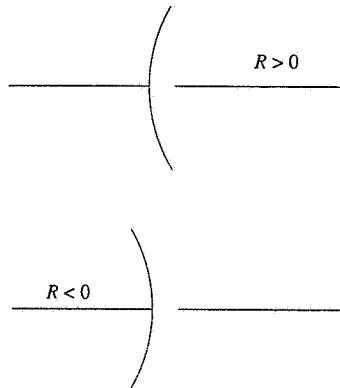


Figura 17.7

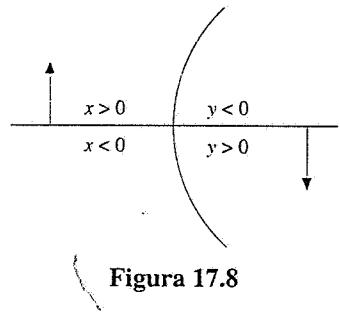


Figura 17.8

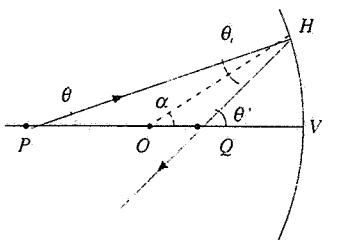


Figura 17.9

Questa relazione è sempre valida. Supponiamo ora che gli angoli siano molto piccoli, così da poter confondere il seno e la tangente dell'angolo con il valore dell'angolo stesso. L'arco  $HV$  può essere confuso con il segmento di perpendicolare da  $H$  all'asse, di lunghezza  $h$ , e pertanto possiamo scrivere

$$h = PV \operatorname{tg} \theta = PV \theta, \quad h = QV \operatorname{tg} \theta' = QV \theta', \quad h = OV \operatorname{tg} \alpha = OV \alpha.$$

Secondo le nostre convenzioni

$$PV = p, \quad QV = -q, \quad OV = -R,$$

mentre gli angoli  $\theta, \theta', \alpha$  sono positivi; quindi

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = -\frac{h}{q}, \quad \alpha = -\frac{h}{R}$$

e la (6.5) diventa

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}, \quad (17.6)$$

Equazione dello specchio sferico concavo

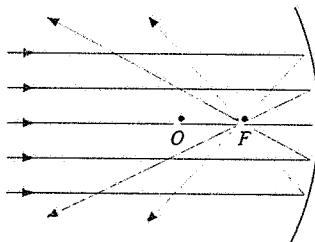


Figura 17.10

che è l'*equazione dello specchio sferico concavo* nell'approssimazione parassiale. Nella (17.6) non compaiono gli angoli e quindi essa è valida per raggi di qualsiasi inclinazione, purché piccola: dato lo specchio, cioè  $R$ , e posto l'oggetto a distanza  $p$  dal vertice, i raggi riflessi si incontrano tutti nel punto  $Q$  la cui distanza  $q$  dal vertice si ricava da (17.6). Nell'approssimazione parassiale lo specchio sferico concavo è dunque stigmatico; per costruire l'immagine di  $P$  basta seguire un solo raggio e vedere dove esso incontra l'asse dopo la riflessione (resta così giustificata a posteriori, purché gli angoli siano piccoli, l'affermazione fatta all'inizio che  $Q$  è l'immagine di  $P$ ).

Studiamo dove si forma l'immagine al variare della posizione dell'oggetto; i risultati si intuiscono subito per via grafica e si hanno facilmente per via analitica tramite (17.6). Iniziamo da  $p = +\infty$ , cioè raggi incidenti paralleli all'asse; da (17.6) risulta

$$q = \frac{R}{2} = f : \quad (17.7)$$

i raggi si incontrano tutti nel punto  $F$  posto a distanza  $R/2$  dal vertice, a metà strada tra  $O$  e  $V$ . Tale punto si chiama *fuoco* dello specchio sferico concavo e la distanza  $f = -FV$  è detta *distanza focale* dello specchio. La (17.6) può essere scritta, utilizzando la distanza focale,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (17.8)$$

Quando  $P$  si avvicina al centro di curvatura  $O$ ,  $Q$  si sposta da  $F$  verso  $O$ . Se  $P$  è posto in  $O$ , anche  $Q$  cade in  $O$ , oggetto e immagine coincidono: il punto  $O$  è l'unico che gode di questa proprietà. Quando  $P$  si sposta da  $O$  a  $F$ ,  $Q$  va da  $O$  a  $-\infty$  (si ricordi che la distanza  $q$  è negativa): rispetto al caso precedente le posizioni di oggetto e immagine sono scambiate (esempio della proprietà di reversibilità dei cammini ottici, citata alla fine del paragrafo 17.1). In particolare, quando  $p = -f$ , cioè l'oggetto è nel fuoco,  $q = -\infty$ , l'immagine si forma all'infinito, i raggi riflessi sono paralleli all'asse.

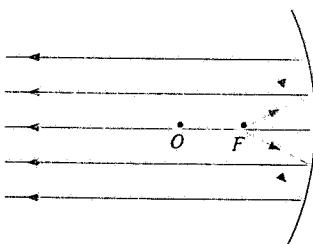


Figura 17.11

Le posizioni finora esaminate hanno tutte in comune il fatto che i raggi riflessi si incontrano fisicamente nel punto  $Q$  che è pertanto un' *immagine reale* dell'oggetto reale  $P$ . Una situazione diversa si ha per l'ultima possibilità rimasta, quando  $P$  si trova tra il fuoco  $F$  e il vertice  $V$ . L'immagine  $Q$  si forma oltre lo specchio: i raggi riflessi sembrano provenire da  $Q$ , che è il punto d'incontro dei prolungamenti dei raggi; ciò vuol dire che per  $P$  compreso tra il fuoco e il vertice l'immagine è *virtuale*. In effetti nella (17.8) se  $p$  è minore di  $-f$ ,  $q$  deve essere positiva, cioè  $Q$  deve stare oltre il vertice; notiamo anche che mentre  $P$  descrive il segmento  $FV$ ,  $Q$  descrive tutta la semiretta oltre lo specchio da  $+\infty$  a  $V$ .

L'applicazione della proprietà di reversibilità a questo caso è molto interessante. Se la luce, invece di uscire da  $P$  e proseguire dopo la riflessione come se provenisse da  $Q$ , percorre il cammino in senso inverso, abbiamo un fascio di raggi convergenti che colpisce lo specchio e si incontra fisicamente in  $P$ , mentre i prolungamenti si incontrano nel punto  $Q$ : ora però  $P$  è l'immagine, che è reale, e  $Q$  è l'oggetto, che è virtuale. Con il semplice scambio oggetto-immagine e l'inversione del verso di propagazione abbiamo risolto il problema del comportamento dello specchio con luce convergente.

Riepilogando i risultati ottenuti, se l'oggetto è reale, cioè se la luce che colpisce lo specchio diverge da un punto posto sull'asse, l'immagine può essere reale, situata tra  $-\infty$  e  $F$ , oppure virtuale, situata tra  $V$  e  $+\infty$ ; se invece la luce che arriva sullo specchio è convergente (oggetto virtuale che può trovarsi ovunque oltre lo specchio) l'immagine è reale e si forma tra il fuoco e il vertice. La situazione complessiva è riassunta nella tabella 17.2 e nella figura 17.13, che rappresenta il grafico della funzione  $q(p)$  come si ricava da (17.6), con  $R < 0$ .

**Tabella 17.2 Relazione tra oggetto e immagine nello specchio sferico concavo**

oggetto			immagine		
$A$	$+\infty \geq p \geq -R$	reale	$R/2 \geq q \geq R$	reale	
$B$	$-R \geq p \geq -R/2$	reale	$R \geq q \geq -\infty$	reale	
$C$	$-R/2 \geq p > 0$	reale	$+\infty \geq q > 0$	virtuale	
$D$	$0 > p \geq -\infty$	virtuale	$0 > q \geq R/2$	reale	

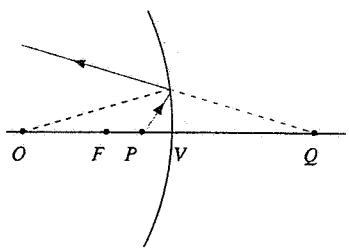


Figura 17.12

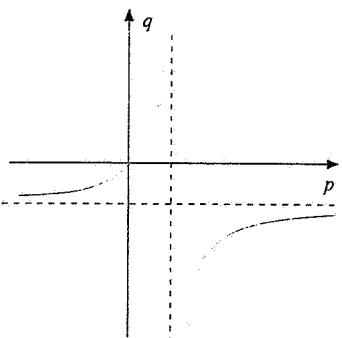


Figura 17.13

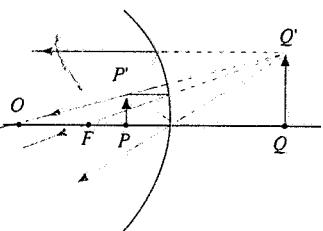
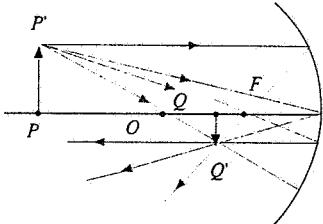


Figura 17.14

Per un punto  $P'$  fuori dall'asse dello specchio, ma molto vicino all'asse stesso, si possono ripetere le deduzioni relative a un punto sull'asse, prendendo come riferimento un nuovo asse passante per il punto  $P'$  e il centro di curvatura. Si ritrova l'equazione (17.6) e si conclude pertanto che un segmento  $PP'$  ortogonale all'asse, purché di piccole dimensioni, ha come immagine il segmento  $QQ'$ , anch'esso ortogonale all'asse, essendo le posizioni dei punti  $P$  e  $Q$  legate dalla (17.6).

Nella pratica, la posizione del segmento  $QQ'$  si ottiene graficamente considerando due raggi emessi da  $P'$  per i quali sia immediatamente tracciabile il percorso dopo la riflessione, ad esempio il raggio passante per il centro di curvatura, che si riflette su se stesso, e il raggio passante per il fuoco, che dopo la riflessione è parallelo all'asse dello specchio, oppure il raggio parallelo all'asse che dopo la riflessione passa per il fuoco o infine il raggio che si riflette nel vertice simmetricamente rispetto alla direzione incidente. Queste quattro possibilità sono indicate nella figura 17.14 (ma basta tracciarne solo due); individuato  $Q'$  è nota anche la posizione di  $Q$  sull'asse.

Quando l'immagine è reale, essa è capovolta rispetto all'oggetto, mentre l'immagine virtuale risulta diritta. Le costruzioni mostrate in figura 17.14 sono valide in qualsiasi piano passante per l'asse dello specchio, esiste cioè simmetria cilindrica.

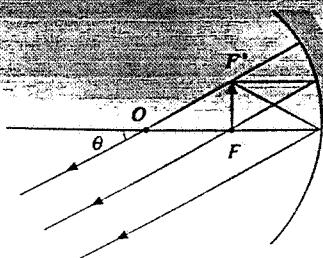


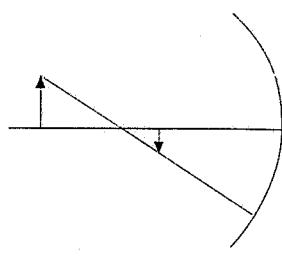
Figura 17.15

drica. Un piccolo disco con centro in  $P$  ha come immagine un piccolo disco con centro in  $Q$ .

La luce emessa da un punto  $F'$  che sta nel piano ortogonale all'asse passante per il fuoco  $F$  dopo la riflessione forma un fascio di raggi paralleli tra loro, ad angolo  $\theta$  rispetto all'asse; se  $d$  è la distanza di  $F'$  da  $F$ , vale la relazione  $d = |f| \operatorname{tg} \theta = |f| \theta$ . Viceversa, un fascio di raggi paralleli provenienti da infinito ad angolo  $\theta$  con l'asse si incontrano dopo la riflessione nel punto  $F'$ . Il luogo dei punti  $F'$  così individuati, che occupa una piccola parte del piano sopra definito, si chiama *piano focale* dello specchio.

Un esame della figura 17.14 mostra che la dimensione dell'immagine è diversa da quella dell'oggetto. Il rapporto tra la lunghezza  $y$  del segmento  $QQ'$  e la lunghezza  $x$  del segmento  $PP'$  si chiama *ingrandimento trasversale* dello specchio sferico:

$$I = \frac{y}{x} \quad (17.9)$$



Alla (17.9) possono essere date varie espressioni, a seconda della costruzione geometrica che si utilizza, basata in ogni caso su triangoli simili. Nella figura 17.16 sono mostrati quattro esempi a partire dai raggi particolari della figura 17.14. Si trova:

$$I = \frac{q-R}{p+R} = -\frac{R}{2p+R} = -\frac{f}{p+f} = \frac{2q-R}{R} = \frac{q-f}{f} = \frac{q}{p} \quad . \quad (17.10)$$

In corrispondenza ai quattro casi della tabella 17.2 abbiamo:

<i>A</i>	$1 \geq I \geq 0$	immagine capovolta e rimpicciolita
<i>B</i>	$I \geq 1$	immagine capovolta e ingrandita
<i>C</i>	$I < -1$	immagine diritta e ingrandita
<i>D</i>	$-1 < I \leq 0$	immagine diritta e rimpicciolita.

Lo specchio sferico concavo dà dunque di figure contenute in un piano un'immagine che è contenuta in un altro piano, con un determinato rapporto di similitudine dipendente dalla posizione, che è l'*ingrandimento trasversale*. Uno strumento ottico che presenta questa proprietà si dice *aplanatico* (rispetto alla data copia di piani).

#### Specchio sferico convesso

Questo specchio non ha bisogno di uno studio specifico in quanto tutte le situazioni geometriche hanno una corrispondenza con situazioni già viste per lo specchio concavo. Ad esempio il caso di oggetto reale corrisponde graficamente al caso *C* prima esaminato in cui si suppone speculare l'altra faccia della superficie sferica, si scambiano i ruoli di oggetto e immagine e il cammino della luce avviene lungo quelli che nella figura 17.12 sono i prolungamenti dei raggi. Ovvero, si ruota la figura 17.12 di  $180^\circ$ , si rende speculare la faccia convessa della superficie che guarda verso sinistra, da dove proviene la luce, si scambia l'oggetto con l'immagine e si ottiene la figura 17.17, relativa allo specchio sferico convesso con oggetto reale (e immagine sempre virtuale).

Il fuoco è virtuale, a distanza  $R/2$  dal vertice: un fascio incidente di raggi paralleli all'asse dopo la riflessione sembra divergere dal punto  $F$  posto dietro lo specchio.

L'equazione dello specchio è sempre (17.6) o (17.8), con l'avvertenza che ora  $R$

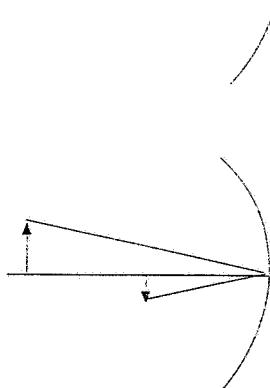


Figura 17.16

e  $f = R/2$  sono positivi. Si provi a verificarlo per esercizio partendo, nella figura 17.17, dai triangoli  $PHQ$  e  $PHO$  e ricordando le convenzioni sui segni degli angoli oltre il vertice  $V$ .

Anche il problema dell'illuminazione convergente si risolve senza sforzo. Quando l'oggetto è tra il vertice e il fuoco vale la figura 17.17 a cui si applica la proprietà di reversibilità; quando l'oggetto va dal fuoco all'infinito, la situazione grafica è quella dei casi *A* e *B* dello specchio sferico concavo, con le dovute sostituzioni che ad esempio trasformano la figura 17.9 nella figura 17.19.

Compiliamo per lo specchio convesso la tabella 17.3, analoga alla tabella 17.2.

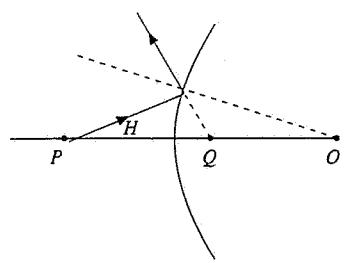


Figura 17.17

**Tabella 17.3 Relazione tra oggetto e immagine nello specchio sferico convesso**

oggetto	immagine
<i>E</i> $+ \infty \geq p > 0$	reale
<i>F</i> $0 > p \geq -R/2$	virtuale
<i>G</i> $-R/2 \geq p \geq -R$	virtuale
<i>H</i> $-R \geq p \geq -\infty$	virtuale
<i>R/2 \geq q &gt; 0</i>	virtuale $\rightarrow C$
<i>0 &gt; q \geq -\infty</i>	reale $\rightarrow D$
$+ \infty \geq q \geq R$	virtuale $\rightarrow A$
$R \geq q \geq R/2$	virtuale $\rightarrow B$

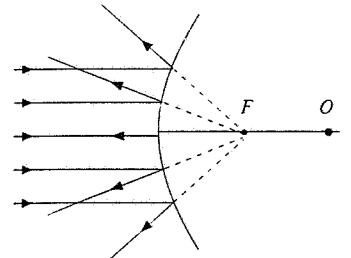


Figura 17.18

Il grafico di  $q(p)$  con  $R > 0$  è dato in figura 17.20, che coincide con la figura 17.13 ruotata rispetto alla retta  $p = q$ .

L'immagine di un segmento si ottiene con una procedura analoga a quella illustrata nella figura 17.14, considerando raggi tracciabili con facilità. Per l'ingrandimento si adattano i risultati dello specchio concavo: basta cercare il caso corrispondente e sostituire l'immagine ingrandita con quella rimpicciolita e viceversa. Ad esempio nel caso *E*, equivalente al caso *C*, l'immagine è diritta e rimpicciolita, nel caso *G* l'immagine è capovolta e ingrandita.

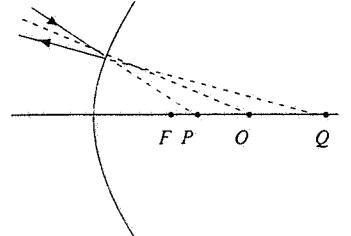


Figura 17.19

### Specchio piano

Lo specchio piano può essere considerato come il caso limite dello specchio sferico concavo per  $R \rightarrow -\infty$ : il fuoco va all'infinito, l'oggetto è sempre tra fuoco e vertice e l'immagine è sempre virtuale. La (17.6) diventa

$$p = q , \quad (17.11)$$

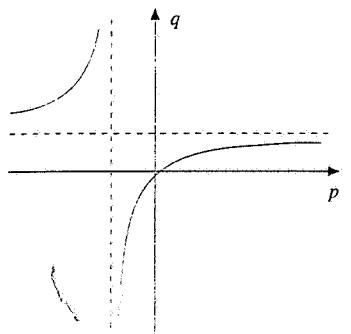


Figura 17.20

equazione dello specchio piano. L'immagine si forma dietro lo specchio in posizione simmetrica a quella dell'oggetto, di cui conserva le dimensioni ( $I = -1$ ).

La (17.11) può essere dedotta direttamente dalla figura 17.22 utilizzando (17.1) e le proprietà di congruenza dei triangoli.

Lo specchio piano è stigmatico e aplanatico senza alcuna limitazione ed è l'unico strumento ad avere queste proprietà unite all'acromaticità. Gli specchi sferici, anch'essi acromatici, sono stigmatici e aplanatici solo in approssimazione parassiale.

L'immagine virtuale diritta data da uno specchio piano, nota come speculare, ha l'importante caratteristica di avere la destra scambiata con la sinistra (come ci si convince subito guardando la propria immagine in uno specchio). In figura 17.23 è mostrata l'immagine speculare di una terna cartesiana normale (dall'asse  $z$  la rotazione che porta  $x$  su  $y$  è vista come antioraria) ovvero destrorsa (se l'indice della mano destra punta lungo l'asse  $x$  e il medio, disposto a 90°, punta lungo l'asse  $y$ , la direzione e il verso dell'asse  $z$  sono indicati dal pollice tenuto dritto). Notiamo che

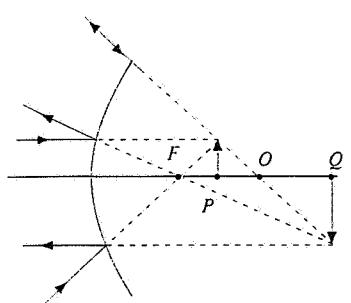


Figura 17.21

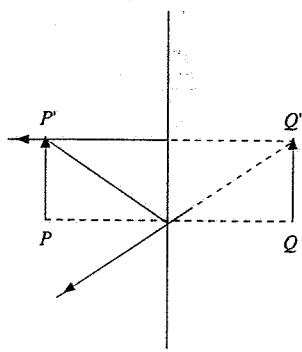


Figura 17.22

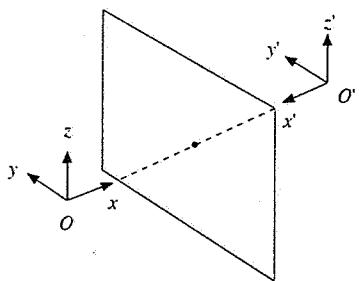


Figura 17.23

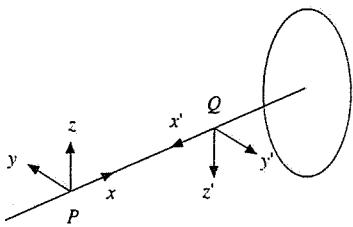


Figura 17.24

l'immagine è sinistrorsa, dall'asse  $z'$  si vede andare l'asse  $x'$  sull'asse  $y'$  con rotazione oraria. Un osservatore, che postosi con le spalle allo specchio osservi l'oggetto, vede l'asse  $z$  puntare vero l'alto, l'asse  $x$  verso di sé e l'asse  $y$  da sinistra a destra; quando si gira e guarda l'immagine, l'asse  $x'$  è ancora rivolto verso di lui e l'asse  $z'$  verso l'alto, ma l'asse  $y'$  va da destra a sinistra.

Lo stesso tipo di immagine si ha con uno specchio concavo nel caso C (è questa la situazione di osservazione negli specchi da toilette, che danno un'immagine ingrandita) e con uno specchio convesso nel caso E (situazione degli specchi stradali posti negli incroci con scarsa visibilità e che danno un'immagine diritta e rimpicciolita).

L'immagine reale di un oggetto reale è sempre capovolta. Se l'oggetto è piano, l'immagine conserva le caratteristiche dell'oggetto, è soltanto ruotata di  $180^\circ$ ; lo stesso non succede per oggetti tridimensionali, come si vede dalla figura 17.24.

#### Esempio 17.1 Ingrandimento longitudinale

Un oggetto esteso lungo l'asse di uno specchio sferico concavo, diciamo un segmento  $P_1P_2$ , ha come immagine il segmento  $Q_1Q_2$  che è in generale di lunghezza diversa. Si definisce *ingrandimento longitudinale* il rapporto

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \quad . \quad (17.12)$$

Risolviamo la (17.6) esplicitando  $q = pR / (2p + R)$  e sostituiamo nella (17.12); utilizziamo la seconda delle espressioni (17.10) ottenendo

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = I_1 I_2 \quad , \quad (17.13)$$

dove  $I_1$  è l'ingrandimento trasversale per  $p = p_1$  e  $I_2$  per  $p = p_2$ . Se l'oggetto è molto corto  $I_1 \approx I_2$  e

$$\frac{dq}{dp} = I^2 \quad , \quad (17.14)$$

essendo  $I$  calcolato in un punto interno all'intervallo  $dp$ . In ogni caso l'ingrandimento longitudinale è diverso dall'ingrandimento trasversale: l'immagine di un oggetto che non sta in un piano ortogonale all'asse è sempre deformata, se lo specchio è sferico. Solo in un intorno del centro di curvatura  $I = 1$  e l'ingrandimento longitudinale è eguale a quello trasversale.

In uno specchio piano l'ingrandimento longitudinale è sempre unitario.

La trattazione delle proprietà degli specchi è stata svolta in questo paragrafo in modo molto discorsivo, più grafico che analitico, per acquisire familiarità con le procedure di costruzione delle immagini e con le varie definizioni e convenzioni. Per i casi dei paragrafi successivi l'esposizione sarà più sintetica essendo i metodi sostanzialmente gli stessi, anche se basati sulla (17.2) invece che sulla (17.1).

## 17.4 Diottri

Esaminiamo, come secondo esempio di strumento ottico semplice, il comportamento di una *superficie diottica sferica convessa* che separa un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$ , posto a sinistra della superficie, da un mezzo con indice di rifrazio-

ne  $n_2$  e supponiamo inoltre che sia  $n_1 < n_2$ . Le relazioni tra gli angoli, seguendo il procedimento visto per la figura 17.9, sono

$$\theta + \alpha = \theta_i, \quad \theta + \theta' = \alpha.$$

A queste va aggiunta la  $n_1\theta_i = n_2\theta$ , che è la (17.2) scritta nell'approssimazione parassiale. Segue

$$n_1\theta + n_2\theta' = (n_2 - n_1)\alpha.$$

Gli angoli considerati sono tutti positivi e anche  $R$  è positivo, come le distanze  $p$  e  $q$ ; pertanto, detta  $h = HV = HK$ ,

$$\theta = \frac{h}{p}, \quad \theta' = \frac{h}{q}, \quad \alpha = \frac{h}{R}$$

e l'*equazione del diottro sferico convesso* si scrive

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (17.15)$$

Nell'*ipotesi parassiale* la relazione tra  $p$  e  $q$  non dipende dagli angoli formati dai raggi con l'asse e si conclude che il *diottro sferico è stigmatico*.

Quando l'oggetto è posto a distanza infinita ( $p = +\infty$ ), l'immagine reale si forma oltre il vertice a distanza

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}, \quad (17.16)$$

nel punto  $F_2$  detto *fuoco posteriore* del diottro. L'immagine si forma all'infinito ( $q = +\infty$ ) quando l'oggetto è nel punto  $F_1$ , detto *fuoco anteriore* del diottro, posto a sinistra del vertice e distante da questo

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}. \quad (17.17)$$

Le quantità positive  $f_1$  e  $f_2$  sono le distanze focali anteriore e posteriore del diottro. Esse sono sempre diverse e il loro rapporto è pari al rapporto degli indici di rifrazione,  $f_1/f_2 = n_1/n_2$ . Utilizzando (17.16) e (17.17) l'*equazione del diottro sferico* diventa

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1. \quad (17.18)$$

Riportiamo nella tabella 17.4 e nella figura 17.27 le varie situazioni possibili. Nella figura 17.28 è mostrata la funzione  $q(p)$  data da (17.15).

**Tabella 17.4 Relazione tra oggetto e immagine del diottro sferico convesso  
con  $n_1 < n_2$**

oggetto	immagine
$+ \infty \geq p \geq f_1$ reale	$f_2 \leq q \leq +\infty$ reale
$f_1 \geq p > 0$ reale	$-\infty \leq q < 0$ virtuale
$0 > p \geq -\infty$ virtuale	$0 < q \leq f_2$ reale

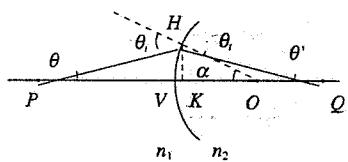


Figura 17.25

Equazione del diottro sferico

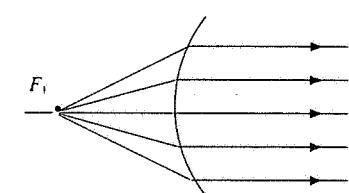
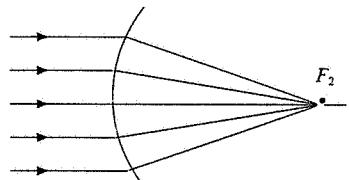


Figura 17.26

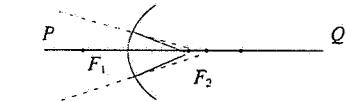
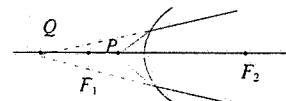
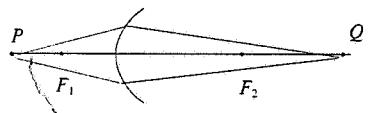


Figura 17.27

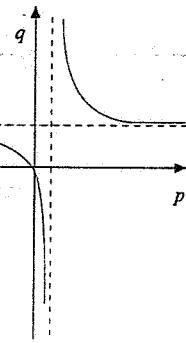


Figura 17.28

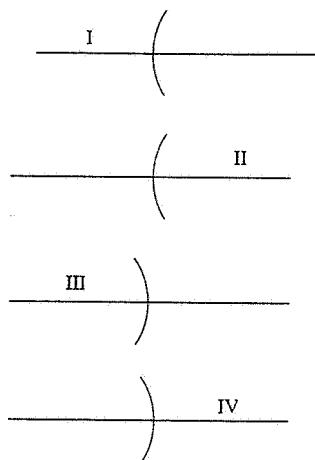


Figura 17.29

Dopo questo caso sono possibili altri tre casi e l'insieme è mostrato nella figura 17.29; non occorre però eseguire altri studi. Infatti il secondo caso si ottiene dal primo in questo modo: operiamo lo scambio  $p \rightarrow -q$  e  $q \rightarrow -p$  per cui (17.15) diventa

$$-\frac{n_1}{q} - \frac{n_2}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R} \rightarrow \frac{n_2}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R},$$

che è appunto l'*equazione di un diottro sferico convesso* in cui la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore a uno con indice di rifrazione minore. Le costruzioni grafiche per il secondo caso si ottengono pertanto da quelle della figura 17.27 scambiando l'oggetto con l'immagine e facendo propagare la luce lungo i prolungamenti dei raggi.

Infine III si ottiene da II e IV da I con la proprietà di reversibilità (scambio oggetto-immagine) e ricordando che  $R$  diventa negativo.

Non compiliamo altre tabelle, ma mostriamo le costruzioni corrispondenti nella figura 17.30 e le funzioni  $q(p)$  nella figura 17.31.

In conclusione, l'equazione (17.15) rende conto di tutti i casi possibili. Il termine noto  $(n_2 - n_1)/R$  si chiama *potere convergente o diottrico*: se esso è positivo (casi I e IV) il diottro si dice convergente, se esso è negativo (casi II e III) il diottro si dice divergente. La terminologia deriva dal fatto che nel primo caso diminuisce, nel passaggio attraverso la superficie diottrica, l'angolo del raggio con l'asse mentre nel secondo caso aumenta.

Nei diottri convergenti i fuochi sono reali mentre in quelli divergenti i fuochi sono virtuali e le loro posizioni sono scambiate:  $F_1$  è a destra del vertice,  $F_2$  è a sinistra. I piani ortogonali all'asse nei punti  $F_1$  e  $F_2$  si chiamano piani focali: i loro punti sono le immagini di punti all'infinito che inviano un fascio di raggi paralleli tra loro e ad un certo angolo con l'asse.

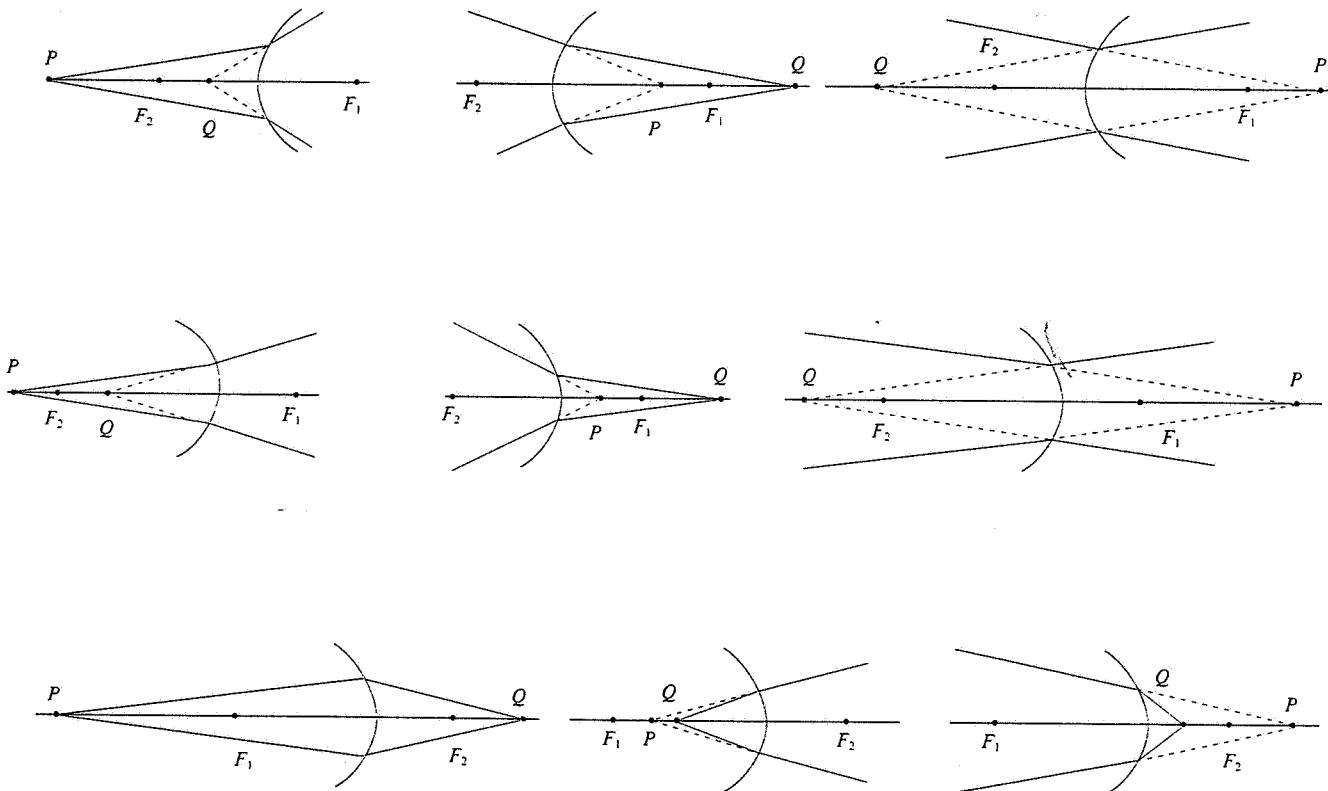


Figura 17.30

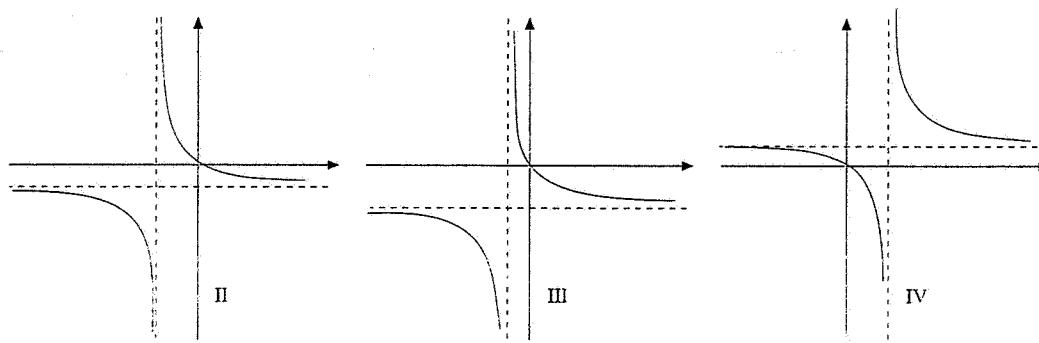


Figura 17.31

L'immagine di un segmento ortogonale all'asse si ottiene con costruzioni grafiche analoghe a quelle delle figure 17.14 e 17.22: si disegnano raggi particolari come quello passante per il centro di curvatura (l'unico non deviato) e quelli passanti per i fuochi. Le immagini reali di oggetti reali e quelli virtuali di oggetti virtuali sono capovolte rispetto all'oggetto mentre negli altri casi sono diritte.

L'*ingrandimento trasversale* ha le espressioni

$$I = \frac{y}{x} = \frac{q - R}{p + R} = \frac{f_1}{p - f_1} = \frac{q - f_2}{f_2} = \frac{n_1 q}{n_2 p} \quad , \quad (17.19)$$

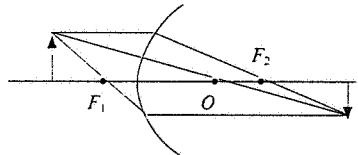


Figura 17.32

che si ricavano dai rapporti tra i lati di triangoli simili in figure come la 17.32.

L'*ingrandimento longitudinale*, seguendo la procedura dell'esempio 17.1, risulta, servendosi di (17.15) e (17.19),

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = -\frac{n_2}{n_1} I_1 I_2 \Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{n_2}{n_1} I^2 \quad . \quad (17.20)$$

### Diotto piano

Se il raggio della superficie diottica tende all'infinito il diotto diventa piano e la sua equazione è

$$q = \frac{n_2}{n_1} p \quad (17.21)$$

Un oggetto reale dà sempre un'immagine virtuale mentre un oggetto virtuale dà sempre un'immagine reale; il potere diottico è nullo, l'ingrandimento trasversale è  $-1$ , quello longitudinale  $-n_2/n_1$ .

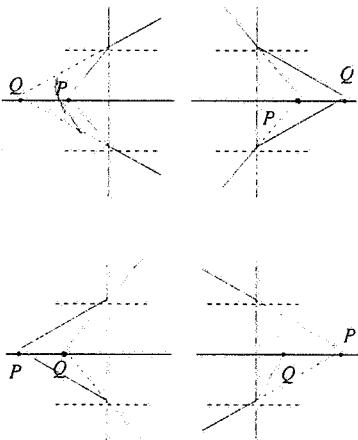


Figura 17.33

### 17.5 Lenti sottili

Due superficie diottriche aventi lo stesso asse individuano tre regioni distinte: la luce proveniente da sinistra si propaga nel primo mezzo avente indice di rifrazione  $n_1$ , viene trasmessa dal primo diotto e attraversa il mezzo con indice di rifrazione  $n_2$  e infine, dopo la trasmissione al secondo diotto, si propaga nel mezzo con indice di rifrazione  $n_3$ . Le superficie diottriche possono essere piane o sferiche, convergenti o divergenti.

Il blocco di materiale trasparente con indice di rifrazione  $n_2$ , delimitato dalle due superficie diottriche, si chiama *lente semplice*. Lo studio del sistema è abbastanza complesso, anche per la grande varietà di situazioni possibili. Noi assumeremo in generale che il primo e il terzo mezzo siano eguali, cioè che sia  $n_3 = n_1$  (questo è il caso di gran lunga più comune), e inizieremo lo studio dalla cosiddetta *lente sottile*, nella quale le superficie diottriche sono molto vicine; nel paragrafo successivo tratteremo il caso della lente semplice spessa e delle lenti composte.

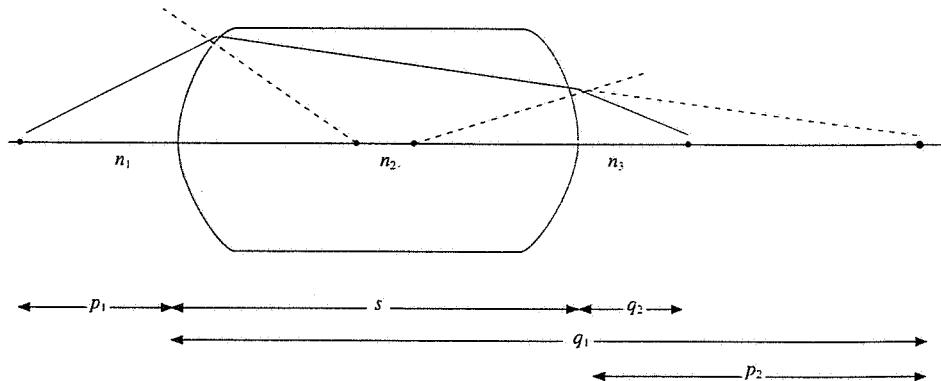


Figura 17.34

Nell'approssimazione parassiale, le equazioni che descrivono il sistema della figura 17.34 sono

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \quad \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}, \quad p_2 = s - q_1 \quad (17.22)$$

Le prime due sono la (17.15) applicata al primo diottro di raggio di curvatura  $R_1$  e al secondo di raggio  $R_2$ , la terza esprime il fatto che l'immagine data dal primo diottro funge da oggetto per il secondo;  $s$  è la distanza tra i vertici dei diottri, cioè lo spessore della lente.

Ponendo  $s = 0$  e  $n_3 = n_1$  otteniamo dalle (17.22)

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Poiché i vertici dei diottri sono praticamente coincidenti tra loro e col centro della lente,  $p_1$  e  $q_2$  sono le distanze dell'oggetto e dell'immagine finale dal centro della lente e li chiamiamo più semplicemente  $p$  e  $q$ . Poniamo inoltre

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (17.23)$$

e otteniamo l'*equazione della lente sottile*

Equazione della lente sottile

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \quad (17.24)$$

Se l'oggetto è posto all'infinito l'immagine si forma nel punto  $F_2$  a distanza  $f$  dal centro, mentre se l'oggetto è posto nel punto  $F_1$  a distanza  $f$  dal centro l'immagine si

forma all'infinito: per questo  $f$  è chiamata *distanza focale* o brevemente *focale* della lente sottile (si veda la successiva figura 17.37).  $F_1$  e  $F_2$  sono equidistanti dal centro della lente.

La quantità  $1/f$  è detta *potere convergente* della lente: a seconda dei segni e dei valori dei raggi di curvatura e dei valori degli indici di rifrazione,  $1/f$  può essere positivo e allora la lente si dice *convergente* oppure negativo e in tal caso la lente si dice *divergente*.

Nella figura 17.35 sono indicate le combinazioni di raggi di curvatura che danno potere convergente positivo o negativo, se  $n_2 > n_1$ . Si osservi che sono convergenti le lenti più spesse al centro che al bordo, divergenti quelle più sottili al centro che al bordo. Se è  $n_2 < n_1$ , i ruoli si scambiano: essendo in generale una lente fatta di vetro e immersa in aria, il caso  $n_2 > n_1$  è quello più comune. A seconda della forma le lenti si denominano *biconvessi*, *biconcavi*, *piano-convesse*, *piano-concave*, *convesso-concave*; quando  $R_2 = -R_1$ , la lente è detta simmetrica e la sua focale vale

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R}{2}$$

La tabella 17.5 riporta la relazione tra posizione dell'oggetto e dell'immagine per i due tipi di lenti, illustrata nella figura 17.36. In particolare le costruzioni relative ai fuochi sono mostrate nella figura 17.37: si vede che i fuochi delle lenti divergenti sono virtuali e sono scambiati, come posizione, rispetto ai fuochi della lente convergente. I piani ortogonali all'asse nei punti  $F_1$  e  $F_2$  si chiamano piani focali della lente.

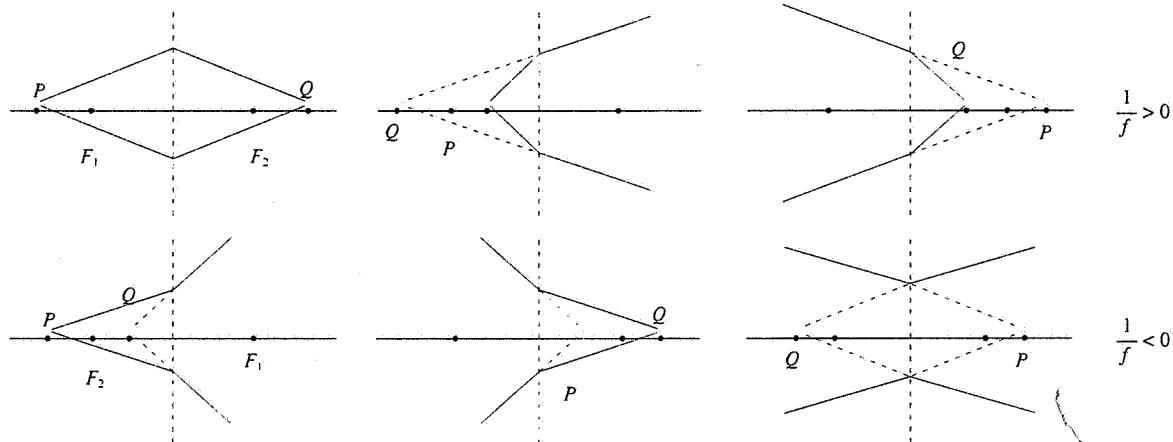


Figura 17.36

Tabella 17.5 Relazione tra oggetto e immagine per una lente sottile

oggetto		immagine	
$+∞$	$\geq p \geq f$	reale	$f \leq q \leq +∞$
$f$	$\geq p > 0$	reale	$-∞ \leq q < 0$
$0$	$> p \geq -∞$	virtuale	$0 < q \leq f$
$+∞$	$\geq p > 0$	reale	$f \leq q < 0$
$0$	$> p \geq f$	virtuale	$0 < q \leq +∞$
$f$	$\geq p \geq -∞$	virtuale	$-∞ \leq q \leq f$

Distanza focale

Potere convergente

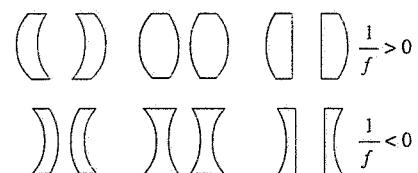


Figura 17.35

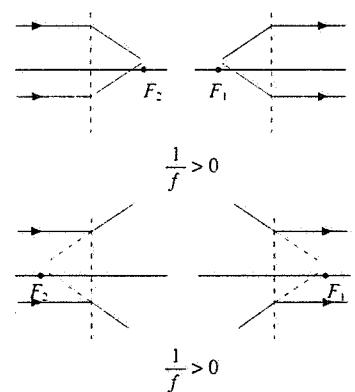


Figura 17.37

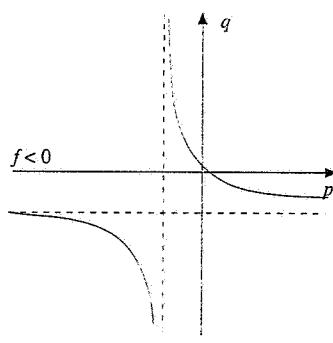
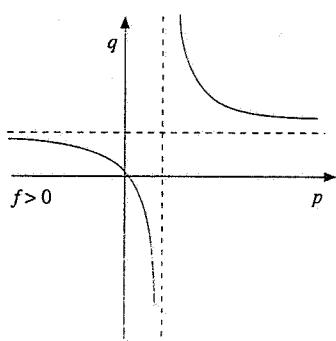


Figura 17.38

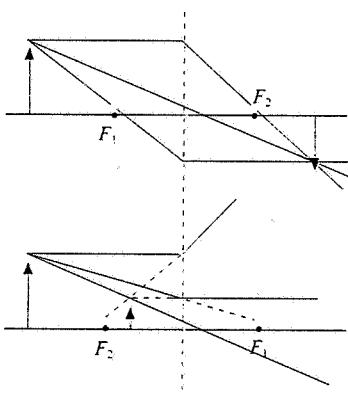


Figura 17.39

La funzione  $q(p)$  data da (17.24) è infine rappresentata in figura 17.38 nei due casi  $f > 0$  e  $f < 0$ .

La costruzione dell'immagine di un segmento ortogonale all'asse si avvale di raggi facilmente tracciabili, come quelli che passano per i fuochi e quello passante per il centro della lente, che non viene deviato (si veda l'esempio 17.4). Da figure come la 17.39 si ricavano le espressioni dell'*ingrandimento trasversale*:

$$I = \frac{y}{x} = \frac{q-f}{f} = \frac{f}{p-f} = \frac{q}{p} . \quad (17.25)$$

L'*ingrandimento longitudinale* vale

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = -I_1 I_2 .$$

### Esempio 17.2

Una lente convergente simmetrica ( $R_1 = 0.3$  m,  $R_2 = -0.3$  m) è fatta di vetro con indice di rifrazione  $n_2 = 1.5$ . Essa è immersa in aria ( $n_1 = 1$ ) o in acqua ( $n_1 = 1.33$ ). Calcolare nei due casi il valore della focale.

#### Soluzione

La (17.23) mostra che la focale, oltre che dal fattore geometrico  $R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$ , dipende dagli indici di rifrazione e aumenta al diminuire della differenza  $n_2 - n_1$ : il potere convergente è minore se è minore la differenza degli indici di rifrazione. Nei due casi proposti:

$$f_1 = \frac{1}{1.5 - 1} \cdot \frac{-0.3 \cdot 0.3}{-0.3 - 0.3} = 2 \cdot 0.15 = 0.30 \text{ m} = 30 \text{ cm} ,$$

$$f_2 = \frac{1.33}{1.5 - 1} \cdot 0.15 = 7.82 \cdot 0.15 = 1.173 \text{ m} = 117.3 \text{ cm} .$$

### Esempio 17.3

La lente dell'esempio 17.2 è posta tra l'aria e l'acqua. Determinare l'equazione della lente e le sue distanze focali.

#### Soluzione

Nelle (17.22) possiamo solo porre  $s = 0$  e ricaviamo l'equazione

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_3}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} .$$

Da questa per  $q = \infty$  e per  $p = \infty$  si hanno le distanze focali

$$f_1 = \frac{n_1 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) R_2 + (n_3 - n_2) R_1} , \quad f_2 = \frac{n_3 R_1 R_2}{(n_2 - n_1) R_2 + (n_3 - n_2) R_1} ,$$

che soddisfano alla relazione  $f_1 / f_2 = n_1 / n_3$ , indipendente da  $n_2$ .  
Nel caso numerico proposto

$$\frac{1}{p} + \frac{1.33}{q} = 2.23 , \quad f_1 = 0.448 \text{ m} , \quad f_2 = 0.596 \text{ m} .$$

**Esempio 17.4**

Una lastra di vetro a facce piane e parallele di spessore  $s$  è immersa in aria. Descrivere il comportamento di un raggio che la attraversa, in particolare se  $s$  è molto piccolo. Ricavare l'equazione della lastra nell'approssimazione parassiale.

**Soluzione**

Un generico raggio che incide sulla lastra con angolo  $\theta_i$  rispetto alla normale esce dalla lastra conservando la direzione incidente, ma spostato lateralmente, come è mostrato nella figura 17.40; la direzione è la stessa in quanto le due deviazioni subite nell'attraversamento delle superficie diottriche si compensano: infatti, essendo il mezzo a destra eguale a quello di sinistra, la (17.2) viene applicata in condizioni opposte nei due casi. Lo spostamento laterale è (vedi anche esempio 14.2):

$$d = AB \sin(\theta_i - \theta_r) = \frac{s}{\cos \theta_i} \sin(\theta_i - \theta_r)$$

Se lo spessore è trascurabile,  $d = 0$  e la lastra in sostanza non ha influenza sul percorso del raggio. Questi risultati sono validi per qualsiasi angolo di incidenza.

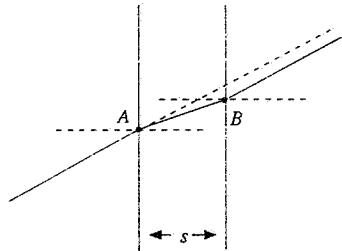
Nella zona vicina al centro una lente può essere approssimata a una lastra a facce piane e parallele, che sarebbero i piani tangententi alle superficie diottriche nel vertice; se la lente è sottile, un raggio passante per il centro non è deviato e ciò è tanto più vero quanto minore è l'angolo che il raggio forma con l'asse della lente.

Se nelle (17.22) poniamo  $R_1 = \infty$  e  $R_2 = \infty$  abbiamo

$$q_1 = -\frac{n_2}{n_1} p_1, \quad q_2 = -\frac{n_1}{n_2} p_2, \quad p_2 = s - q_2 \Rightarrow q = -\frac{n_1}{n_2} s - p$$

$p$  è la distanza dell'oggetto dalla faccia anteriore e  $q$  la distanza dell'immagine da quella posteriore.

Dall'esame dell'equazione della lastra si vede che per oggetti reali ( $p > 0$ ) l'immagine è sempre virtuale ( $q < 0$ ). Per oggetti virtuali, cioè quando la lastra è illuminata con luce convergente, l'immagine è ancora virtuale se  $p$ , che è negativo, è compreso nell'intervallo tra zero e  $-n_1 s / n_2$ ; per  $p$  inferiore a questo limite l'immagine è reale. Lasciamo per esercizio le costruzioni relative. Se  $s = 0$   $q = -p$ , l'immagine coincide con l'oggetto.

**Figura 17.40****17.6 Lenti spesse. Sistemi diottrici centrati**

Quando lo spessore della lente non è trascurabile si parla di *lente spessa*: per trovare la relazione tra posizione dell'oggetto e dell'immagine ci si serve ancora delle (17.22) con  $s > 0$ . Supponendo che il mezzo a sinistra e a destra della lente sia lo stesso ( $n_1 = n_3$ ), troviamo che se si pone l'oggetto all'infinito l'immagine si forma nel punto  $F_2$  distante  $q_0$  dal secondo diottro, mentre se si mette l'oggetto nel punto  $F_1$  distante  $p_0$  dal primo diottro l'immagine si forma all'infinito, le distanze  $p_0$  e  $q_0$  essendo date da

$$p_0 = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} \frac{(n_2 - n_1)s + n_2 R_2}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)}, \quad (17.26)$$

$$q_0 = -\frac{n_1 R_2}{n_2 - n_1} \frac{(n_2 - n_1)s - n_2 R_1}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)}$$

come è facile verificare. I valori di  $p_0$  e  $q_0$  sono in generale diversi, a meno che non sia  $s = 0$ , nel qual caso si ritrova la (17.23), oppure la lente sia simmetrica ( $R_2 = -R_1$ ).

Lo schema dei raggi passanti per i fuochi  $F_1$  e  $F_2$  è mostrato in figura 17.41. Dall'esame dei triangoli simili  $F_1 B_1 V_1$ ,  $F_1 A_1 P_1$  e  $D_1 B_1 V_1$ ,  $D_1 C_2 V_2$  ricaviamo

$$B_1 V_1 / A_1 P_1 = F_1 V_1 / F_1 P_1 = p_0 / f_1,$$

$$B_1 V_1 / C_2 V_2 = D_1 V_1 / D_1 V_2 = -q_0 / p_2,$$

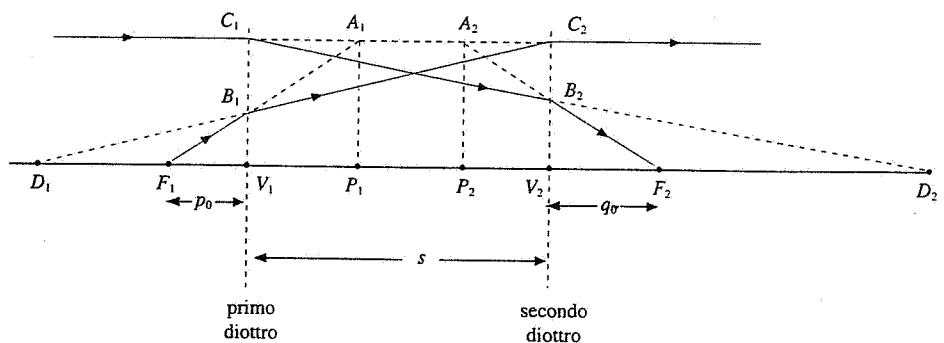


Figura 17.41

avendo definito  $f_1$  la distanza del primo fuoco dal punto  $P_1$  e indicato con  $q_1$  la distanza dell'immagine virtuale di  $F_1$  data dal primo diottro, la quale funge da oggetto per il secondo, da cui dista  $p_2 = s - q_1$ . Siccome  $A_1 P_1 = C_2 V_2$  si trova

$$f_1 = -\frac{p_2}{q_1} p_0 = -\frac{s - q_1}{q_1} p_0 .$$

D'altra parte l'equazione del primo diottro con l'oggetto in  $F_1$  è

$$\frac{n_1}{p_0} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} ;$$

da questa si ricava  $q_1$  e lo si sostituisce nell'espressione di  $f_1$  insieme alla prima delle (17.26), ottenendo

$$f_1 = \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{(n_2 - n_1) s + n_2 (R_2 - R_1)} . \quad (17.27)$$

Se si ripete la procedura riferendosi al secondo fuoco  $F_2$  si trova lo stesso risultato per la distanza  $f_2 = P_2 F_2$ . Si conclude che esistono due punti  $P_1$  e  $P_2$  tali che rispetto ad essi le distanze dei fuochi sono uguali. La quantità  $f = f_1 = f_2 = F_1 P_1 = P_2 F_2$  si chiama *distanza focale della lente spessa*.

I punti  $A_1$  e  $A_2$  hanno la seguente proprietà: se consideriamo  $A_1$  un oggetto e cerchiamo qual è la sua immagine data dalla lente spessa, troviamo che questa si trova in  $A_2$ . Ciò risulta chiaro dalla figura 17.42 che mostra, per una data retta parallela all'asse della lente, come si costruiscono i punti  $A_1$  e  $A_2$ . Fissata la retta,  $A_1$  è il punto di questa retta individuato dalla direzione del raggio che partendo da  $F_1$  esce dalla lente secondo tale retta, mentre  $A_2$  è individuato dalla direzione del raggio che entra in  $F_2$  provenendo da infinito lungo la stessa retta. Anche se il percorso effettivo dei raggi all'interno della lente è diverso, come si vede nella figura 17.41, la costruzione è sempre possibile: essa mostra che alle due deviazioni reali sulle superficie diottriche si può sostituire una sola deviazione equivalente, in  $A_1$  per il raggio uscente e in  $A_2$  per il raggio parallelo entrante.

Poiché nell'approssimazione parassiale i diottri sono aplanatici, tutti i punti del piano passante per  $A_1$  e ortogonale all'asse hanno l'immagine nel piano passante per  $A_2$  e ortogonale all'asse: ovvero, per qualsiasi retta parallela all'asse i punti individuati dalla costruzione in figura 17.42 stanno sempre negli stessi due piani. Tali piani sono detti *piani principali* della lente e i punti  $P_1$  e  $P_2$ , intersezioni con l'asse, *punti principali*. La proprietà più importante è già stata enunciata: *i fuochi della lente, che non hanno in generale la stessa distanza dai vertici della lente, hanno invece la stessa distanza dai piani principali*.

Data una lente qualsiasi, noti cioè i parametri geometrici ( $R_1, R_2, s$ ) e l'indice di rifrazione della lente e del mezzo, le formule trovate per  $p_0, q_0, f$  permettono di determinare le posizioni dei fuochi e dei punti principali, che possono essere interni o esterni alla lente. La costruzione dell'immagine per un dato oggetto si esegue allora come in figura 17.43 e con i metodi visti nei paragrafi precedenti si dimostra che l'equazione della lente è

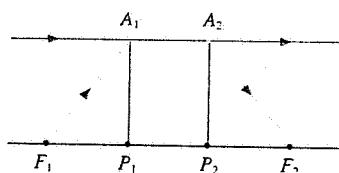


Figura 17.42

Piani principali

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad , \quad (17.28)$$

misurando le distanze degli oggetti rispetto a  $P_1$  e quelle delle immagini rispetto a  $P_2$ ; per l'ingrandimento trasversale valgono le relazioni (17.25).

In una lente sottile i piani principali coincidono tra loro e con il piano in cui si considera localizzata la lente. Confrontando la figura 17.43 con la figura 17.39, si comprende l'utilità dei piani principali per la costruzione delle immagini: il procedimento è lo stesso, anche se l'ingresso e l'uscita dei raggi dal sistema avvengono su due piani distinti, la cui distanza dipende dallo spessore della lente.

Nel caso particolare in cui uno dei due diottri sia piano, l'espressione della distanza focale  $f$  è semplificata rispetto a (17.27): si trova subito passando al limite

$$f(R_1 = \infty) = -\frac{n_1 R_2}{n_2 - n_1} \quad , \quad f(R_2 = \infty) = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} \quad .$$

### Esempio 17.5

Calcolare la distanza  $x$  tra i piani principali di una lente spessa e stabilire quando  $x$  è eguale a zero e quando è eguale allo spessore della lente.

#### Soluzione

La distanza tra i fuochi della lente può essere scritta nelle due maniere equivalenti

$$p_0 + s + q_0 = f + x + f \quad .$$

Sostituendo le espressioni (17.26) e (17.27) si trova

$$x = s \left( \frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1)s + n_2(R_2 - R_1)} \right) \frac{s + R_2 - R_1}{s + R_2 - R_1} \quad . \quad (17.29)$$

La distanza tra i piani principali è quindi nulla per una lente sottile oppure per una lente spessa, se  $s = R_1 - R_2$  con  $R_1 - R_2 > 0$  dovendo essere  $s > 0$ . Questa condizione si può realizzare sempre con una lente biconvessa, a seconda dei valori dei raggi con una lente concavo-convessa e mai con una lente biconcava.

Si verifica facilmente che la distanza  $x$  tra i piani principali risulta eguale allo spessore  $s$  della lente solo se  $R_1 = R_2$  e questo è possibile solo con una lente concavo-convessa. Quando uno dei raggi va all'infinito  $x = s(n_2 - n_1)/n_2$  e non può mai essere eguale a zero o eguale a  $s$ .

### Esempio 17.6

Calcolare la posizione dei piani principali per una lente sferica biconvessa ( $R_1 = R$ ,  $R_2 = -R$ ,  $s = 2R$ ), una lente sferica biconcava ( $R_1 = -R$ ,  $R_2 = R$ ,  $s = 2R$ ) e per una lente sferica concavo-convessa ( $R_1 = R_2 = -R$ ,  $s = 2R$ ). Si ponga  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ . La quantità  $R$  è positiva.

#### Soluzione

Nel primo caso l'applicazione delle (17.26) e (17.27) dà

$$p_0 = q_0 = \frac{R}{2} \quad , \quad f = \frac{3}{2}R$$

e quindi i piani principali devono coincidere tra loro e con la sezione mediana della sfera. Ciò è in accordo con quanto ricavato nell'esempio 17.5; del resto con i nostri dati  $x = 0$ .

Nel secondo caso

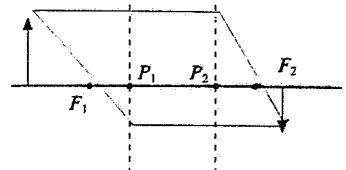


Figura 17.43

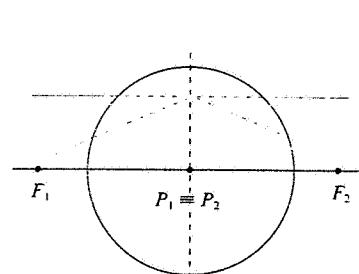


Figura 17.44

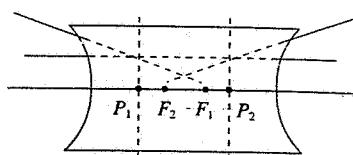


Figura 17.45

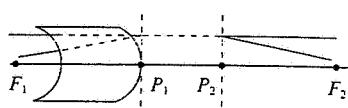


Figura 17.46

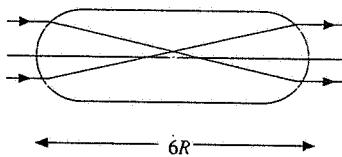


Figura 17.47

Sistema diottico centrato

$$p_0 = q_0 = -1.25 R, \quad f = -0.75 R, \quad x = R.$$

I fuochi sono virtuali e i piani principali sono interni alla lente.  
Infine nel terzo caso

$$p_0 = R, \quad q_0 = 5 R, \quad f = 3 R, \quad x = s.$$

La distanza tra i piani principali è eguale allo spessore della lente, in quanto  $R_1 = R_2$  (vedi esempio 17.5), anche se i piani principali non coincidono con i diottri. In effetti si dimostra subito che questa coincidenza, cioè  $f = p_0 = q_0$ , si realizza solo se  $s = 0$ , lente sottile.

### Esempio 17.7

Determinare in quali casi la distanza focale di una lente spessa ha valore infinito.

#### Soluzione

Escludiamo la lastra piana a facce parallele, trattata nell'esempio 17.4, per la quale è chiaro che se l'oggetto va all'infinito anche l'immagine va all'infinito e viceversa. Dalla (17.27) vediamo che  $f = \infty$  se

$$(n_2 - n_1) s + n_2 (R_2 - R_1) = 0 \Rightarrow s = \frac{n_2}{n_2 - n_1} (R_1 - R_2).$$

Supponendo  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ ,  $s = 3(R_1 - R_2)$  e, per una lente simmetrica biconvessa,  $s = 6R$ . Il percorso effettivo dei raggi paralleli all'asse è mostrato in figura 17.47. Vediamo che il problema può essere impostato diversamente, imponendo che il fuoco posteriore del primo diottro coincida con il fuoco anteriore del secondo diottro.

La definizione di piani e punti principali e le relative costruzioni illustrate nelle figure 17.42 e 17.43 si estendono a un sistema composto da più lenti, sottili o spesse, aventi lo stesso asse, che è indicato col nome di *sistema diottico centrato*. Le posizioni dei fuochi si determinano sperimentalmente, illuminando con luce parallela all'asse, e i piani principali possono essere trovati col metodo della figura 17.42. In realtà quando si acquista una lente, semplice o composta, il costruttore di norma fornisce il valore della distanza focale per cui dalla determinazione della posizione dei fuochi si risale alla posizione dei piani principali. Vale sempre, rispetto a questi, l'equazione (17.28), ma non le formule (17.26) e (17.27); per il calcolo della distanza focale di una successione di superficie diottiche esistono formule più generali.

Quasi tutti gli strumenti ottici sono composti da più lenti e presentano una grande varietà di strutture. Noi ci limitiamo a trattare nell'esempio che segue il caso di una lente composta da due lenti sottili; nel paragrafo 17.8 accenneremo ad alcuni strumenti di uso comune e al funzionamento ottico dell'occhio umano.

### Esempio 17.8

Date due lenti sottili, una di focale  $f_1$  e una di focale  $f_2$ , aventi lo stesso asse e distanti  $h$ , determinare la distanza focale della lente composta dalle due lenti sottili. Discutere in particolare il caso in cui le due lenti siano una convergente e una divergente, di focale rispettivamente  $f_0$  e  $-f_0$ , e vengano illuminate con luce parallela all'asse.

#### Soluzione

Le equazioni del sistema completo sono

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}, \quad p_2 = h - q_1, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}.$$

Ponendo  $q_2 = \infty$  si trova la distanza  $p_0$  dalla prima lente del primo fuoco  $F_1$  (fuoco anteriore), mentre ponendo  $p_1 = \infty$  si ha la distanza  $q_0$  dalla seconda lente del secondo fuoco  $F_2$  (fuoco posteriore):

$$p_0 = \frac{f_1(h - f_2)}{h - f_1 - f_2} , \quad q_0 = \frac{f_2(h - f_1)}{h - f_1 - f_2} .$$

Partendo dalla stessa costruzione della figura 17.41 possiamo scrivere

$$f = -\frac{p_2}{q_1} p_0 = -\frac{h - q_1}{q_1} p_0 ,$$

in cui  $q_1$  si ricava dall'equazione della prima lente:

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow q_1 = \frac{p_0 f_1}{p_0 - f_1} .$$

In conclusione

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - h} , \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{h}{f_1 f_2} . \quad (17.30)$$

Se le lenti sottili sono addossate  $h = 0$  e

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} .$$

Calcolata la focale e noti  $p_0$  e  $q_0$  si possono determinare le posizioni dei piani principali.

Nel caso particolare proposto,  $f_1 = f_0$  e  $f_2 = -f_0$ , abbiamo

$$p_0 = \frac{f_0(h + f_0)}{h} , \quad q_0 = \frac{-f_0(h - f_0)}{h} , \quad f = \frac{f_0^2}{h} .$$

La focale è sempre positiva, come  $p_0$ , mentre  $q_0$  può anche essere nulla ( $h = f_0$ ) o negativa ( $h > f_0$ ). Pertanto i fuochi sono esterni ai piani principali, il fuoco anteriore  $F_1$  è a sinistra della prima lente, ma il fuoco posteriore  $F_2$ , a seconda del valore della distanza tra le lenti, può essere a destra della seconda lente, coincidente con questa o alla sua sinistra: in quest'ultimo caso esso è virtuale.

I risultati si ricavavano facilmente anche dallo studio della tabella 17.5. Il fuoco posteriore  $F$  della lente convergente è l'oggetto per la lente divergente. Se essa è posizionata tra la lente convergente e  $F$ , l'oggetto è virtuale e l'immagine è reale; in caso contrario l'immagine è virtuale perché l'oggetto è reale, come mostrato in figura 17.48.

Se scambiamo la posizione delle lenti, il fuoco posteriore è sempre reale mentre quello anteriore è reale se  $h < f_0$  e virtuale se  $h > f_0$  (per capirlo basta applicare la proprietà di reversibilità alla figura 17.48).

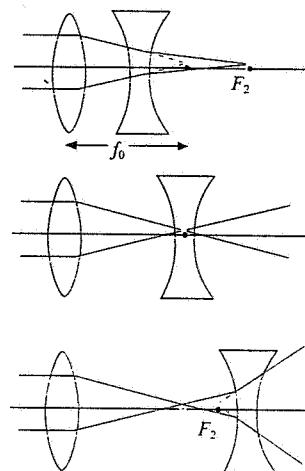


Figura 17.48

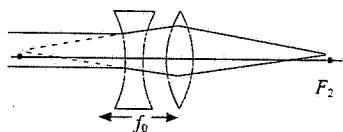


Figura 17.49

## 17.7 Aberrazioni

Le equazioni ricavate per la riflessione su una superficie catottica e la trasmissione su una o più superficie diottriche sono valide solo nell'approssimazione parassiale. Quando consideriamo raggi con angoli grandi rispetto all'asse oppure fasci di luce che contengono raggi lontani dall'asse, anche se a piccolo angolo, o infine utilizziamo luce non monocromatica, anche se parassiale, le immagini ottenute si discostano da quelle calcolate con la teoria parassiale. Il fenomeno si chiama *aberrazione* (dell'immagine vera rispetto a quella calcolata) e ne elenchiamo brevemente i vari aspetti.

### A. Aberrazione cromatica

L'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ , quindi, per una data direzione di

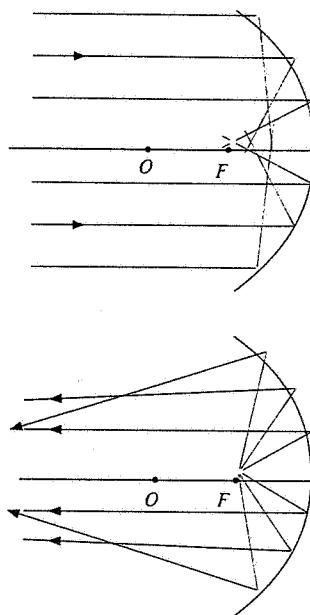


Figura 17.50

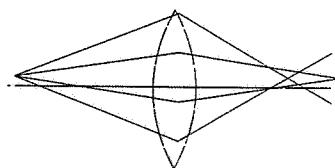


Figura 17.51

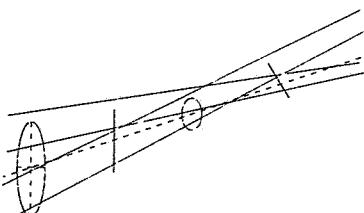


Figura 17.52

incidenza, sono diverse le direzioni di trasmissione ad una superficie diottrica. Un sistema formato da lenti, anche in approssimazione parassiale, dà di un oggetto che emette luce bianca tante immagini colorate, a distanze diverse e con ingrandimenti diversi; la distanza focale di una lente è funzione dell'indice di rifrazione ed è di norma minore per lunghezze d'onda minori, perché per queste è maggiore l'indice di rifrazione.

La correzione del cromatismo si effettua in varie maniere; le più comuni consistono nell'uso dei cosiddetti *doppietti acromatici*. Ad esempio si dimostra che se si utilizzano, al posto di un'unica lente, due lenti sottili poste a contatto, una convergente e una divergente, fatte di vetro diverso, tali da avere la stessa focale complessiva per due lunghezze d'onda diverse; il sistema è rigorosamente acromatico per queste due componenti della luce e lo è approssimativamente per lunghezze d'onda vicine. Lo stesso risultato si ottiene nell'intorno di una data  $\lambda_0$  se si usano due lenti dello stesso vetro, ma con focale diversa, poste a una distanza pari alla semisomma delle focali, calcolate per la data  $\lambda_0$ .

Gli specchi, come abbiamo ricordato, sono esenti dall'aberrazione cromatica in quanto la (17.1) non contiene l'indice di rifrazione.

#### B. Aberrazione di sfericità

Consideriamo prima uno specchio sferico per il quale venga utilizzata una notevole parte della superficie riflettente e non soltanto una piccola zona attorno al vertice. Nella figura 17.50 è mostrato cosa succede ai raggi paralleli all'asse provenienti dall'infinito e ai raggi emessi dal fuoco. È evidente che una superficie catottrica sferica non è stigmatica per fasci di grande apertura. Poiché il problema è di interesse rilevante in astronomia (i telescopi riflettori hanno un grande specchio sferico che raccoglie la luce proveniente da oggetti a distanza infinita), sono stati escogitati efficaci metodi di correzione, che consistono nell'introduzione di una lente opportuna sul cammino dei raggi. Oppure bisogna rinunciare alla superficie sferica e adottare uno specchio a forma di paraboloido di rotazione: in tal caso si dimostra che i raggi paralleli all'asse sono tutti riflessi nello stesso punto dell'asse, fuoco del paraboloido, senza approssimazioni. Viceversa la luce uscente dal fuoco esce parallela da uno specchio parabolico, proprietà usata nei proiettori. Naturalmente gli stessi problemi si presentano anche per oggetti posti a distanza finita; va detto che quando l'immagine è osservata con l'occhio questo limita di molto l'apertura del fascio di raggi e l'immagine sulla retina è in generale nitida.

L'aberrazione di sfericità è presente pure in una lente, anche in luce monocromatica. L'effetto è sia longitudinale che trasversale: i punti di incontro dei raggi emessi da un oggetto puntiforme sull'asse sono distribuiti lungo una certa zona dell'asse e, se consideriamo le intersezioni dei raggi con un piano ortogonale all'asse, esse stanno in una zona circolare che varia di diametro a seconda di dove mettiamo il piano. Esiste una posizione in cui il diametro è minimo e in corrispondenza si ha l'immagine migliore, cioè meno confusa. L'aberrazione di sfericità in una lente si riduce mettendo un diaframma che elimini i raggi più lontani dall'asse; così facendo si riduce però la quantità di luce che raggiunge l'immagine.

#### C. Coma, astigmatismo, curvatura di campo

Quando l'oggetto puntiforme non è sull'asse l'immagine non è più un dischetto circolare, ma assume una forma allungata che ricorda la forma di una cometa (dove il nome coma). Accanto a questo effetto ve ne è un altro longitudinale, detto astigmatismo: spostando lungo l'asse uno schermo ortogonale all'asse della lente si osserva che i raggi emessi da un punto al di fuori dell'asse prima si incontrano nei punti di un segmento verticale, poi stanno su un disco e successivamente si incontrano nei punti di un segmento orizzontale (figura 17.52). L'immagine meglio definita è quella a forma di disco. Se poi l'oggetto è una figura piana ortogonale all'asse, i dischetti immagine dei vari punti stanno su una superficie curva (concava verso la lente) e questa ulteriore aberrazione è detta curvatura di campo.

Gli effetti descritti si presentano di norma tutti insieme e una correzione simultanea è praticamente impossibile per una sola lente e difficile per un sistema: l'uso di diaframmi che limitano i fasci è di aiuto, ma occorre impiegare anche altri metodi più sofisticati.

#### D. Distorsione

L'ultimo effetto che consideriamo è dovuto alla variazione dell'ingrandimento trasversale con la distanza dall'asse, per cui l'immagine di un oggetto esteso piano non gli è simile. Se l'ingrandimento cresce con la distanza si ha la *distorsione a cuscinetto* (figura 17.53a), se

diminuisce la *distorsione a barilotto* (figura 17.53b); l'oggetto di cui mostriamo le immagini distorte è un quadrato. Si trova che la distorsione è introdotta da un uso non appropriato di diaframmi che tagliano una parte dei raggi che concorrono a formare l'immagine e che essa scompare se si sostituisce la lente con due lenti simmetriche rispetto ad un diaframma.

A conclusione di questo paragrafo facciamo alcune osservazioni. I fenomeni descritti che non sono dovuti a difetti di costruzione, come ad esempio superficie che non sono perfettamente sferiche, discendono dal fatto che con superficie sferiche non si possono raggiungere esattamente i requisiti di stigmatismo in una regione estesa di spazio. I risultati sono tanto migliori quanto più numerose sono le superficie diottriche adoperate, anche se ovviamente c'è un limite pratico ed economico al numero di lenti. Si comprende così un aspetto positivo dell'utilizzo di un sistema diottrico centrato al posto di una singola lente, anche quando apparentemente questa potrebbe dare gli stessi risultati: con più lenti è sempre possibile una migliore correzione delle aberrazioni. Poiché però una correzione perfetta è impossibile, nella pratica gli interventi sono mirati agli scopi che si vogliono raggiungere: ad esempio, entro certi limiti, la distorsione si può tollerare in un cannocchiale, ma deve essere eliminata in un obiettivo fotografico.

## 17.8 Strumenti ottici. L'occhio

In questo paragrafo accenniamo soltanto agli strumenti che permettono all'occhio di osservare meglio i particolari di oggetti grandi molto lontani (cannocchiale) e di oggetti piccoli vicini (microscopio). Poiché una parte delle caratteristiche di questi strumenti dipende dal fatto che l'utilizzazione avviene tramite l'occhio, descriviamo innanzitutto il funzionamento ottico dell'occhio.

### L'occhio umano

La luce entra nell'occhio attraverso una superficie diottrica sferica di raggio  $R_1 = 0.8$  cm, la *cornea*, che separa l'aria ( $n_1 = 1$ ) dall'*umore acqueo*, spesso  $s_1 = 0.3$  cm e con indice di rifrazione  $n_2 = 1.34$ . Segue il *cristallino*, che è una lente biconvessa (quasi) simmetrica con raggio di curvatura  $R_2$  e indice di rifrazione  $n_3 = 1.44$ , e l'*umore vitreo*, spesso  $s_2 = 1.9$  cm e con indice di rifrazione  $n_2$ . Alla fine dell'*umore vitreo* c'è la *retina*; il raggio del *cristallino* cambia a seconda della distanza dell'oggetto (processo di accomodamento) in modo che l'immagine si forma sempre sulla retina. Immediatamente prima del *cristallino* si trova l'*iride* al cui centro c'è un'apertura, la *pupilla*, il cui diametro varia tra 8 e 2 mm a seconda della quantità di luce che arriva all'occhio (processo di adattamento).

L'*occhio normale* (*emmetropo*) è in grado di dare immagini nitide di oggetti posti tra l'infinito (punto remoto) e il cosiddetto punto prossimo, che dista dall'occhio circa  $d = 25$  cm; questa distanza in realtà varia con l'età, da  $\sim 10$  cm a  $\sim 60$  cm. Vogliamo calcolare di quanto varia il raggio di curvatura del *cristallino* quando l'occhio è accomodato all'infinito o sta fissando il punto prossimo. Le equazioni da utilizzare sono:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - 1}{R_1} \quad \text{trasmissione sulla cornea ,}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{n_2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{-R_2} \right) \quad \text{effetto del cristallino .}$$

In quest'ultima si tiene conto che il *cristallino*, trattato come una lente sottile, è immerso in un mezzo con indice di rifrazione  $n_2$  (e non in aria). Inoltre  $p_2 = s_1 - q_1$  e  $q_2 = s_2$ , in quanto l'immagine si forma sulla retina. Si trova:

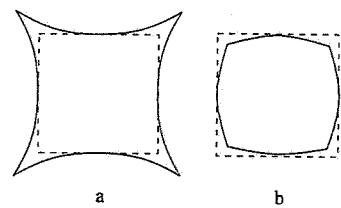


Figura 17.53

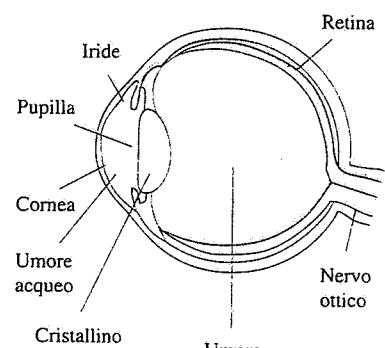


Figura 17.54

$$\begin{array}{ll} p_1 = +\infty & q_1 = 3.15 \text{ cm} \\ p_1 = 25 \text{ cm} & q_1 = 3.48 \text{ cm} \end{array} \quad \begin{array}{ll} p_2 = -2.85 \text{ cm} & R_2 = 0.85 \text{ cm} \\ p_2 = -3.18 \text{ cm} & R_2 = 0.70 \text{ cm} \end{array}$$

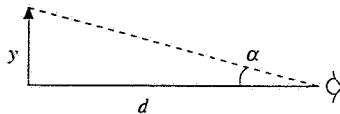


Figura 17.55

Distanza di visione distinta

Ingrandimento visuale

Le immagini date dalla cornea si formerebbero quindi oltre la retina, ma interviene l'azione convergente del cristallino. Nell'esempio numerico proposto, che dà un'idea dei valori in gioco, la variazione relativa del raggio del cristallino è del 18%.

L'occhio ipermetropo ha il punto prossimo più lontano di 25 cm: esso è cioè troppo poco convergente e ha bisogno di una lente convergente; l'occhio miope ha il punto remoto a distanza finita, essendo troppo convergente, e ha bisogno di una lente divergente. È questa la funzione principale degli occhiali da vista che coraggono i due difetti. Un altro possibile difetto dell'occhio è l'astigmatismo (da non confondere con l'aberrazione che porta questo nome), dovuto al fatto che la cornea non è esattamente sferica per cui, ad esempio, è più convergente nel piano orizzontale che nel piano verticale; la correzione avviene per mezzo di lenti cilindriche, che però ci limitiamo a menzionare.

La migliore visione di un oggetto si ha quando questo si trova all'incirca nel punto prossimo, per cui la distanza  $d$  è anche detta *distanza di visione distinta*: in tal caso l'oggetto è osservato sotto un angolo  $\alpha$  per il quale vale la relazione  $\tan \alpha = y/d$  e l'occhio è al massimo dell'accomodamento.

Gli strumenti costruiti con lo scopo di permettere all'occhio di cogliere particolari degli oggetti che altrimenti non gli sarebbe possibile vedere consentono in sostanza un angolo  $\beta$  di osservazione maggiore. Il rapporto

$$V = \tan \beta / \tan \alpha \quad (17.31)$$

è detto *ingrandimento visuale*.

### Lente di ingrandimento. Microscopio

Lo strumento più semplice che realizza la suddetta condizione è la lente di ingrandimento. Si tratta di una lente convergente con focale  $f$  minore della distanza di visione distinta  $d$ : l'oggetto è posizionato nelle vicinanze del fuoco anteriore della lente in modo da ottenere un'immagine virtuale diritta che è vista dall'occhio, situato tra la lente e il fuoco posteriore, come se fosse nel punto remoto (l'occhio lavora così in condizione di minimo accomodamento, ovvero, come si dice, di riposo). Dalla figura 17.56 risulta che l'angolo  $\beta$  sotto cui è vista l'immagine è tale che  $\tan \beta = y/f$  mentre  $\tan \alpha = y/d$  per cui da (17.31), esprimendo  $f$  in centimetri,

$$V = \frac{d}{f} = \frac{25}{f} \quad .$$

Con una lente semplice si arriva a valori di  $V$  dell'ordine di 3 ( $f = 8 \text{ cm}$ ); per ingrandimenti maggiori bisogna usare lenti composte corrette per le aberrazioni e si raggiungono valori di  $V$  compresi tra 10 e 20.

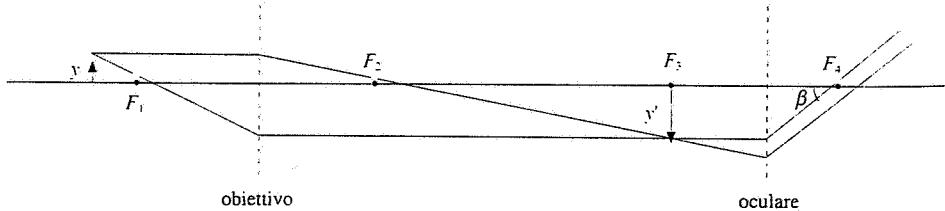


Figura 17.57

Prestazioni migliori si ottengono con il *microscopio*. Lo schema di principio è mostrato in figura 17.57: la prima lente convergente di focale  $f_1$  è detta obiettivo e la seconda lente convergente, di focale  $f_2$ , è detta oculare (entrambe in realtà sono lenti composte, corrette per le aberrazioni). L'oggetto si pone poco oltre il fuoco anteriore dell'obiettivo e la distanza tra le lenti è regolata in modo tale che l'immagine reale data dall'obiettivo cada nel piano focale dell'oculare. Questo funziona quindi come una lente di ingrandimento, mentre l'obiettivo ha il compito di ingrandire trasversalmente l'oggetto: per questa ragione, ricordando (17.25), conviene che sia  $p \approx f_1$  in modo che  $I$  sia molto grande. Dalla figura si vede che  $\tan \beta = -y'/f_2$ ; è sempre  $\tan \alpha = y/d$ , per cui l'*ingrandimento visuale* (17.31) è

$$V = -\frac{y'}{y} \frac{d}{f_2} = -IV_2 \quad ,$$

prodotto dell'ingrandimento trasversale dell'obiettivo e dell'ingrandimento visuale dell'oculare. Il segno meno è dovuto al fatto che  $\alpha$  e  $\beta$  hanno segno opposto. Non è difficile raggiungere valori di  $V$  compresi tra  $10^2$  e  $10^3$ .

### Cannocchiale

Il *cannocchiale* serve per osservare oggetti lontani e pertanto assumiamo che l'immagine si formi nel piano focale posteriore dell'obiettivo, che è una lente convergente. Nel *cannocchiale di Keplero* anche la seconda lente, l'oculare, è convergente e ha il piano focale anteriore coincidente col piano focale posteriore dell'obiettivo: anche in questo caso l'oculare funziona come una lente di ingrandimento. La distanza totale tra le lenti, cioè la lunghezza del cannocchiale, è  $f_1 + f_2$ . Il percorso dei raggi relativi alla punta dell'oggetto è mostrato in figura 17.58.

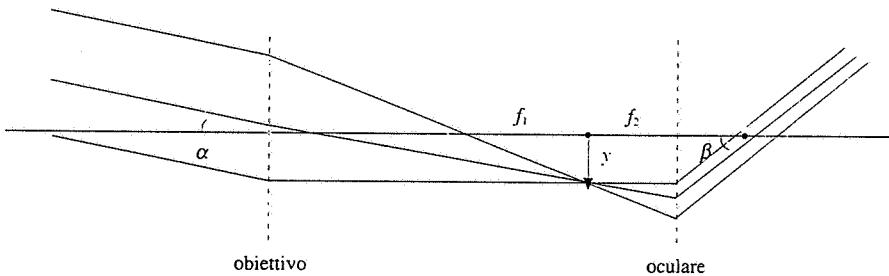


Figura 17.58

L'angolo  $\alpha$  sotto cui arrivano i raggi è tale che  $\tan \alpha = y/f_1$ , mentre  $\tan \beta = -y/f_1$ ; quindi

$$V = -\frac{y}{f_2} \frac{f_1}{y} = -\frac{f_1}{f_2}$$

L'immagine che l'occhio vede è capovolta rispetto all'oggetto, il che non è molto importante nelle osservazioni astronomiche, ma è scomodo in quelle terrestri.

L'immagine è invece diritta nel *cannocchiale di Galileo* (figura 17.59), che ha per oculare una lente divergente. L'ingrandimento visuale è sempre  $-f_1/f_2$ , positivo perché  $f_2$  è negativa.

### Microscopio

### Cannocchiale di Keplero

### Cannocchiale di Galileo

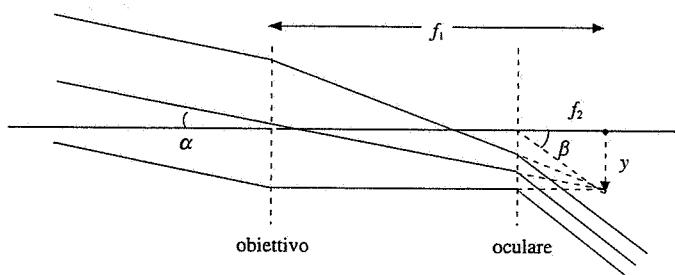


Figura 17.59

Galileo costruì il suo primo cannocchiale nel 1609, dopo aver avuto notizia di sistemi costruiti con due lenti semplici in Olanda; già nel 1610 aveva perfezionato lo strumento arrivando a un ingrandimento dell'ordine di 20. Il cannocchiale di Keplero fu ideato nel 1611.

Gli esempi discussi in questo paragrafo mostrano chiaramente quante possibilità vengono offerte dall'uso di sistemi di lenti rispetto a ciò che può essere ottenuto con una singola lente; è questo il principale aspetto positivo dei sistemi diottrici centrati, oltre a quello già citato di permettere una buona correzione delle aberrazioni.

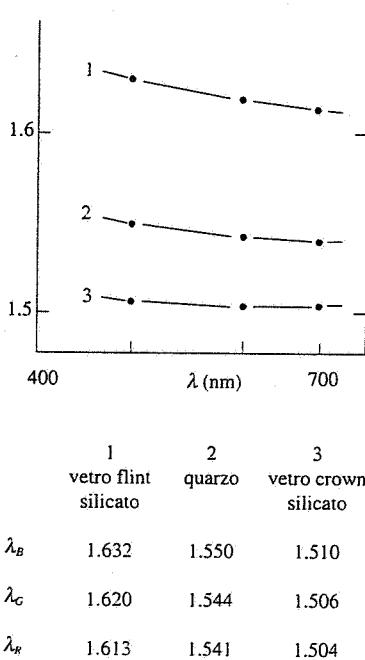


Figura 17.60

#### Unità di misura

Potere convergente o diottrico: si esprime in  $m^{-1}$ , unità che nel campo dell'ottica si chiama *dioptria*.

### 17.9 Dispersione. Prisma

Abbiamo citato più volte la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, fenomeno noto come dispersione. Nella figura 17.60 è mostrata la variazione di  $n$  per alcuni materiali trasparenti: i valori a tre lunghezze d'onda specifiche, una nel blu ( $\lambda_B = 486 \text{ nm}$ ), una nel giallo ( $\lambda_G = 589 \text{ nm}$ ) e una nel rosso ( $\lambda_R = 656 \text{ nm}$ ) sono indicati a fianco. L'andamento di  $n$  con  $\lambda$  segue la *legge di Cauchy* (13.62):

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (17.32)$$

Il dispositivo più importante con cui si mette in evidenza la dispersione è il *prisma*, costituito da una lastra di materiale trasparente a facce piane formanti un angolo  $\alpha$ , detto angolo di apertura del prisma. Nella figura 17.61 è mostrato come avviene la separazione di un raggio in vari raggi colorati, che dopo il prisma hanno direzioni diverse.

Consideriamo un particolare raggio trasmesso che esce dal prisma con angolo  $\theta_e$  rispetto alla normale alla superficie; il corrispondente angolo di incidenza è  $\theta_i$ . L'angolo  $\delta$  tra le direzioni entrante e uscente è detto *angolo di deviazione* dovuto al prisma (figura 17.62). Per la relazione tra angoli interni ed esterni di un triangolo possiamo scrivere

$$\alpha = \theta_i + \theta_e, \quad \delta = \theta_e - \theta_i + \theta_e - \theta_i$$

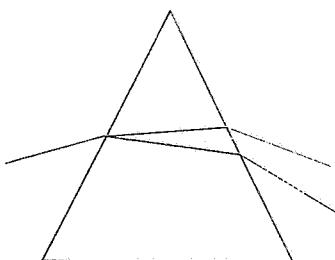


Figura 17.61

e quindi l'angolo di deviazione vale

$$\delta = \theta_i + \theta_e - \alpha .$$

Al variare di  $\theta_e$ ,  $\delta$  cambia e dimostriamo ora che esiste un valore minimo di  $\delta$ . Le leggi della trasmissione sulle due superficie del prisma sono

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_1 , \quad \sin \theta_e = n \sin \theta_2 ,$$

dove con  $n = n_2 / n_1$  è indicato il rapporto tra gli indici di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma e del mezzo in cui il prisma è immerso (se il mezzo è l'aria,  $n$  è l'indice di rifrazione del prisma). Sommando le due equazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \sin \theta_i + \sin \theta_e &= 2 \sin \frac{\theta_i + \theta_e}{2} \cos \frac{\theta_i - \theta_e}{2} = n (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = \\ &= 2 n \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} . \end{aligned}$$

Poiché  $\theta_i + \theta_e = \delta + \alpha$  e  $\alpha = \theta_1 + \theta_2$  concludiamo che

$$\sin \frac{\delta + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cos \frac{\theta_i - \theta_e}{2}} . \quad (17.33)$$

Potendosi esprimere  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_e$  in funzione di  $n$  e  $\theta_i$ , la (17.33) dà la dipendenza di  $\delta$  da  $\theta_i$ . Se  $\theta_i \neq \theta_e$  il rapporto tra i coseni è sempre maggiore di 1. Infatti se  $\theta_i > \theta_e$  la deviazione  $\theta_i - \theta_1$  alla prima superficie diottica è maggiore della deviazione  $\theta_e - \theta_2$  alla seconda superficie diottica in quanto la deviazione è funzione crescente dell'angolo di incidenza, come si può dimostrare dalla (17.2). Da  $\theta_i - \theta_1 > \theta_e - \theta_2$  segue  $\theta_i - \theta_e > \theta_1 - \theta_2$ . Se invece è  $\theta_i < \theta_e$ ,  $\theta_e - \theta_i > \theta_2 - \theta_1$ ; in ogni caso il rapporto dei coseni è maggiore di 1. Soltanto quando  $\theta_i = \theta_e$ , e di conseguenza  $\theta_1 = \theta_2$ , il rapporto vale 1. Pertanto il *valore minimo dell'angolo di deviazione*  $\delta$  si ha quando l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di emissione: è evidente che in tal caso il raggio all'interno del prisma deve essere ortogonale alla bisettrice di  $\alpha$  (la situazione è simmetrica) e quindi parallelo alla base del prisma, se questo è isoscele, come in figura 17.61. Inserendo la condizione  $\theta_i = \theta_e$  nella (17.33) si ha

$$\sin \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2} . \quad (17.34)$$

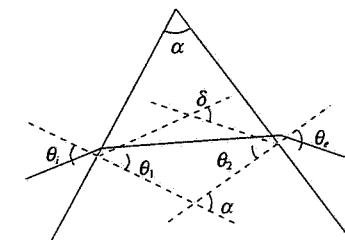


Figura 17.62

Angolo di deviazione minimo

Inoltre  $\delta_{\min} = 2 \theta_i + \alpha$ , per cui quando la deviazione introdotta dal prisma è minima  $\sin \theta_i = n \sin (\alpha / 2)$ .

La proprietà descritta permette una determinazione dell'indice di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma: si misura  $\alpha$ , poi  $\delta_{\min}$  ponendosi in condizioni di minima deviazione e da (17.34) si calcola  $n$  per la particolare lunghezza d'onda impiegata. La misura può essere estesa ai fluidi utilizzando un prisma cavo, riempiendo cioè di fluido lo spazio tra due lastre di vetro a facce piane e parallele, poste ad angolo  $\alpha$  tra loro.

Se l'angolo di apertura del prisma è piccolo (17.33) e (17.34) in pratica coincidono e si scrivono

$$\delta = \delta_{\min} = (n - 1) \alpha \quad . \quad (17.35)$$

Tutte le relazioni ottenute finora dipendono dalla lunghezza d'onda; in particolare la (17.35), scritta per le tre lunghezze d'onda citate in precedenza, dà tre diverse deviazioni  $\delta_B$ ,  $\delta_G$ ,  $\delta_R$ . Si chiama *dispersione del prisma* la differenza  $\delta_B - \delta_R$  mentre la deviazione media è  $\delta_G$ . Il loro rapporto è detto *potere dispersivo* del prisma e vale, in base a (17.35),

$$D = \frac{\delta_B - \delta_R}{\delta_G} = \frac{n_B - n_R}{n_G - 1} \quad . \quad (17.36)$$

Potere dispersivo

Per i materiali della figura 17.60 il potere dispersivo è rispettivamente  $3.06 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.65 \cdot 10^{-2}$ ,  $1.19 \cdot 10^{-2}$ ; esso esprime in sostanza la variazione relativa della deviazione,  $\Delta\delta/\delta$ , nel campo del visibile.

Sfruttando il fenomeno della dispersione è possibile mettere in evidenza la composizione della luce emessa da una sorgente, in quanto le diverse lunghezze d'onda subiscono deviazioni diverse. Su questo principio è costruito lo *spettrometro a prisma*, in cui la luce emessa da una sorgente è resa parallela da una lente (acromatica) e attraversa un prisma: le varie componenti escono formando ciascuna un fascio parallelo e sono focalizzate da una lente in punti diversi del piano focale; nella figura 17.63 è mostrato il caso di due componenti.

Una caratteristica importante di un prisma è la *dispersione angolare*; essa è definita come  $d\delta/d\lambda$ , cioè come la variazione della deviazione minima con la lunghezza d'onda, e si ottiene derivando (17.34):

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta + \alpha}{2}} \frac{dn}{d\lambda} \quad .$$

Dalla figura 17.63 si deduce  $\delta + \alpha = \pi - 2\theta$ ,  $\cos \frac{\delta + \alpha}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \operatorname{sen} \theta = \frac{d}{l}$

e  $l \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$ , indicando con  $L$  la base del prisma, con  $l$  il suo lato e con  $d$  la larghezza del fascio. Pertanto

Dispersione angolare

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{L}{d} \frac{dn}{d\lambda} \quad . \quad (17.37)$$

Un'altra grandezza importante è il *potere risolutivo R*, definito come  $\lambda / \Delta\lambda$ , rapporto tra la lunghezza d'onda  $\lambda$  e la minima differenza tra lunghezze d'onda diverse apprezzabile in un intorno di  $\lambda$ , come già fatto per il reticolo di diffrazione nel paragrafo 16.6. A questo punto entra in gioco una considerazione che finora abbiamo ignorato, ma che riprenderemo nel paragrafo 17.11: il fascio che viene focalizzato dalla seconda lente dello spettrometro ha una larghezza  $d$  e quindi dobbiamo aspettarci nel piano focale della lente un'immagine della sorgente, tipicamente una fenditura, allargata dalla diffrazione. In base al criterio di Rayleigh, illustrato nel paragrafo 16.4, possiamo apprezzare una separazione angolare  $\Delta\delta$ , corrispondente a una differenza  $\Delta\lambda$  dell'ordine di  $\lambda / d$ . Inserendo nella (17.37) otteniamo

Potere risolutivo del prisma

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \quad , \quad (17.38)$$

in cui si è considerato il modulo di  $dn/d\lambda$  in quanto il potere risolutivo è una grandezza essenzialmente positiva.

### Esempio 17.9

Determinare per un prisma fatto di vetro flint silicato il potere risolutivo nell'intorno di  $\lambda = 600 \text{ nm}$ . Si assuma che la base del prisma sia  $L = 2 \text{ cm}$ .

#### Soluzione

Dobbiamo calcolare  $dn/d\lambda$  e pertanto determinare la funzione  $n(\lambda)$ . Applichiamo (17.32) ai dati della figura 17.60 per ricavare le costanti.

Da  $n(\lambda_B) - n(\lambda_R) = B(1/\lambda_B^2 - 1/\lambda_R^2)$  si deduce  $B = 10^4 \text{ nm}^2$  e quindi  $A = 1.59$ , che si ottiene da (17.32) per  $\lambda = \lambda_B$  o  $\lambda = \lambda_G$  o  $\lambda = \lambda_R$ . La funzione  $n(\lambda)$  è data dunque, per il vetro flint silicato, da

$$n = 1.59 + \frac{10^4}{\lambda^2},$$

con  $\lambda$  espressa in nanometri. Segue, alla lunghezza d'onda  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ,

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -9.26 \cdot 10^{-5} \text{ nm}^{-1} = -9.26 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1},$$

e il potere risolutivo vale, secondo (17.38),

$$R = 1.85 \cdot 10^3.$$

Siccome  $R = \lambda / \Delta\lambda$ ,  $\Delta\lambda = 0.32 \text{ nm}$ : nell'intorno di  $\lambda = 600 \text{ nm}$  possono essere separate due lunghezze d'onda diverse di  $0.32 \text{ nm}$ .

Ad esempio le due righe gialle del sodio, citate nell'esempio 16.9 e aventi  $\Delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$ , possono essere separate con questo spettrometro a prisma. Il potere risolutivo richiesto,  $R = 982$ , si otterrebbe già con  $L \approx 1 \text{ cm}$ .

### 17.10 Il principio di Fermat

Le leggi (17.1) e (17.2) si ricavano facilmente nell'ambito della teoria ondulatoria della luce. Esse però si possono dimostrare anche in base a una legge di tipo diverso, il *principio di Fermat*, il quale afferma che *il percorso seguito dalla luce è quello che corrisponde al minimo tempo di percorrenza*.

Nella riflessione, figura 17.64, un raggio che parte da  $A$  e arriva in  $B$ , dopo essere stato riflesso in  $O$ , percorre il cammino

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2}$$

e il tempo impiegato è  $t = s/v$ . Imponiamo  $dt/dx = 0$ , cioè  $ds/dx = 0$  e troviamo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + h^2}} \Rightarrow x^2 = (d-x)^2.$$

L'unica soluzione possibile è  $x = d/2$ ; si verifica che  $d^2/s^2$  è positiva e quindi quello trovato è effettivamente un minimo. Il punto  $O$  deve stare nel punto di mezzo del segmento  $A'B'$  e pertanto l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di riflessione.

Nella trasmissione, figura 17.65, il tempo impiegato da  $A$  a  $B$  passando per  $O$  è

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2},$$

essendo  $v_1$  e  $v_2$  le velocità della luce nei due mezzi diversi. Imponendo anche ora  $dt/dx = 0$

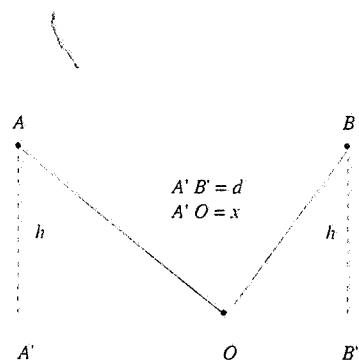


Figura 17.64

si ricava

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2},$$

che è la (17.2), posto  $n_1 = c/v_1$  e  $n_2 = c/v_2$ . La derivata seconda è ancora positiva.

Passiamo ora a considerare una superficie diottrica curva e facciamo riferimento alla figura 17.25 e ai due percorsi luminosi  $PVQ$  e  $PHQ$ : vogliamo dimostrare che il tempo impiegato dalla luce lungo i due percorsi è lo stesso. Stabiliamo innanzitutto la relazione tra  $p = PV$  e  $p' = PH$  e tra  $q = VQ$  e  $q' = HQ$ , nell'approssimazione parassiale. Si ha

$$p' \cos \theta = p + VK, \quad VK = R(1 - \cos \alpha).$$

Essendo gli angoli piccoli,  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ,  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ; inoltre  $p' \sin \theta = p' \theta = HK =$

$R \sin \alpha = R \alpha$  e  $\theta + \alpha = \theta_i$ . In conclusione

$$p = p' - \frac{1}{2} p' \theta \theta_i$$

e procedendo allo stesso modo si trova

$$q = q' + \frac{1}{2} p' \theta \theta_i.$$

I tempi di percorrenza sono

$$t_1 = \frac{p}{v_1} + \frac{q}{v_2} = \frac{p'}{v_1} - \frac{1}{2} p' \theta \frac{\theta_i}{v_1} + \frac{q'}{v_2} + \frac{1}{2} p' \theta \frac{\theta_i}{v_2}$$

$$t_2 = \frac{p'}{v_1} + \frac{q'}{v_2}$$

e la loro differenza vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{2} p' \theta \left( \frac{\theta_i}{v_1} - \frac{\theta_i}{v_2} \right).$$

Pertanto, se vale il principio di Fermat, che nella forma parassiale comporta la condizione  $\theta_i/v_1 = \theta_i/v_2$ ,  $\Delta t = 0$ ; i due raggi che seguono i due percorsi indicati non subiscono sfasamento ed i cammini ottici sono eguali. A conclusioni analoghe si arriva per gli specchi sferici.

### 17.11 Note e commenti

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni argomenti ai quali abbiamo accennato nei capitoli precedenti, riservandoci un approfondimento dopo lo studio dell'ottica geometrica, nonché qualche commento conclusivo.

#### Forma dell'immagine della luce Cerenkov

Una particella carica in moto in un mezzo dielettrico con velocità  $v$  superiore alla velocità  $c/n$  della luce nel mezzo provoca un'emissione di onde elettromagnetiche da parte del mezzo stesso; è l'effetto Cerenkov, menzionato nel paragrafo 13.11. Considerando una traiettoria rettilinea, abbiamo dei raggi luminosi emessi lungo la stessa, tutti paralleli tra loro e formanti con la traiettoria l'angolo  $\theta_C$  dato da (13.69): essi sono mostrati in un piano nella figura 13.39, ma lo stesso disegno vale per qualsiasi piano passante per la traiettoria, essendo simmetria cilindrica.

Uno specchio sferico concavo, avente l'asse coincidente con la traiettoria, focalizza i raggi che stanno nel piano della figura 17.66 nei punti  $F_1$  e  $F_2$  del piano focale, come già

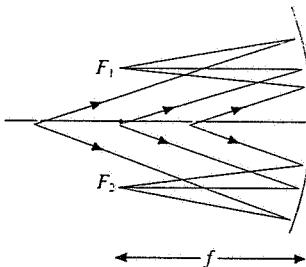


Figura 17.66

mostrato nella figura 17.15; sia  $F_1$  che  $F_2$  distano dall'asse della quantità

$$R_C = f \operatorname{tg} \theta_C = f \sqrt{n^2 \beta^2 - 1}$$

A causa della simmetria cilindrica i punti  $F_1$  e  $F_2$  stanno in realtà su una circonferenza di raggio  $R_C$  e concludiamo che l'immagine data dallo specchio è una circonferenza, il cui raggio dipende dalla velocità della particella e ne permette la misura.

### Esperimento di Michelson per la misura di $c$

L'apparato di Michelson e collaboratori, citato nel paragrafo 13.13, è mostrato nelle sue linee essenziali in figura 17.67. Il fascio luminoso, emesso dalla sorgente  $S$  e reso parallelo con una lente, viene prima riflesso da un prisma ottagonale con le facce speculari, poi dallo specchio piano  $S_1$  e successivamente focalizzato con una lente nel fuoco dello specchio sferico  $S_3$ ; pertanto i raggi, deviati dallo specchio piano  $S_2$  verso  $S_3$ , escono da questo ancora paralleli. Essi vengono infine riflessi dallo specchio piano  $S_4$  e ripercorrendo a ritroso lo stesso cammino ritornano verso la sorgente dove si trova un osservatore (sorgente e osservatore possono essere resi compatibili con l'artificio di uno specchio semiriflettente). Facendo ruotare il prisma con un'elevata velocità angolare l'osservatore non vede l'immagine della sorgente a meno che, nel tempo impiegato dalla luce per andare da  $P$  a  $S_4$  e ritornare in  $P$ , il prisma abbia compiuto un ottavo di giro. In una delle versioni dell'esperimento il percorso era lungo complessivamente  $L = 70.820 \cdot 10^3$  m (in massima parte dovuto al tratto  $S_3 - S_4 - S_3$ ) e il prisma doveva ruotare con frequenza  $v = 529$  Hz per poter osservare l'effetto; un ottavo di periodo era pari a  $t = 2.363 \cdot 10^{-4}$  s e il rapporto  $L / t$  risultava  $2.977 \cdot 10^8$  m/s. Tenuto conto dell'effettiva precisione dei valori misurati, delle possibili cause di errori e della correzione dovuta alla presenza dell'aria, il risultato è  $c = (2.99796 \pm 0.00004) \cdot 10^8$  m/s; il miglior valore di  $c$  attualmente disponibile è dato da (13.5).

### Uso delle lenti negli esperimenti di interferenza e diffrazione

Nei capitoli 15 e 16 abbiamo visto un uso frequente delle lenti, ad esempio negli esperimenti tipo Young, negli esperimenti di diffrazione di Fraunhofer, in strumenti come gli interferometri e lo spettrometro a reticolo. La proprietà che si sfrutta è quella delle lenti convergenti di trasformare in raggi paralleli i raggi divergenti da una sorgente coincidente con un punto del piano focale e viceversa di trasformare raggi paralleli in raggi convergenti verso un punto del piano focale, cioè la proprietà di focalizzazione. Il vantaggio evidente sta nella possibilità di fare interferire a breve distanza dalla sorgente onde per le quali è facile calcolare la differenza di fase, come sono quelle che seguono percorsi paralleli tra loro.

### Influenza della diffrazione

Per calcolare il potere risolutivo del prisma abbiamo dovuto introdurre l'effetto della diffrazione; come abbiamo già rilevato nel capitolo 16, si tratta di un fatto *intrinseco alla natura ondulatoria* della luce. Con opportune correzioni è possibile ridurre di molto le aberrazioni (cioè avviene comunemente negli strumenti ottici). In linea di principio si potrebbe pensare di sviluppare un metodo di calcolo, magari utilizzando superficie non sferiche, in grado di eliminare le aberrazioni senza dover considerare solo raggi parassiali. Eppure lo stigmatismo assoluto non si può raggiungere: l'immagine di un punto non è mai un punto, ma una figura di diffrazione consistente in un *dischetto chiaro* circondato da anelli concentrici alternativamente scuri e chiari; questo a causa della limitazione dei fronti d'onda dovuta a diagrammi e alle stesse lenti.

I poteri risolutivi degli strumenti ottici sono le grandezze che maggiormente risentono dell'effetto della diffrazione, come abbiamo discusso nei paragrafi 16.4, 16.6 e 17.9. In particolare, nel caso del microscopio, il limite posto dalla diffrazione è stato superato solo abbandonando la luce visibile come mezzo di illuminazione e ricorrendo alla microscopia elettronica, la quale sfrutta le proprietà ondulatorie degli elettroni, caratterizzate da valori molto inferiori della lunghezza d'onda (vedi capitolo 18).

Se però usciamo dal campo delle misure da effettuare con telescopi, microscopi e spettrometri, e ci poniamo come scopo la realizzazione di immagini di grande qualità di oggetti comuni, l'imprecisione dovuta alla diffrazione è spesso trascurabile (si veda l'esempio 16.4) e invece bisogna curare la correzione delle aberrazioni.

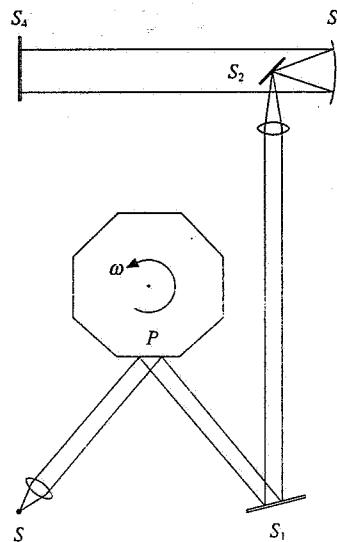


Figura 17.67

# Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia

## 18.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo più volte accennato al fatto che nell'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia avvengono fenomeni non spiegabili con le leggi dell'elettromagnetismo classico. Ad esempio, mentre alle altissime frequenze la previsione classica è che la materia diventi completamente trasparente alla radiazione (paragrafo 13.9), si verifica invece che la radiazione viene assorbita con una legge esponenziale (paragrafo 18.5). Ancora, le radiazioni emesse da un atomo presentano un caratteristico *spettro a righe* (paragrafo 16.7), che non rientra in una serie armonica per le frequenze e non è riconducibile a nessun fenomeno classico. Infine il calcolo classico per la densità di energia elettromagnetica all'interno di una cavità in equilibrio termodinamico porta ad un risultato assurdo, come abbiamo visto nel paragrafo 15.11.

Proprio la soluzione di quest'ultimo problema è stato il punto di partenza per il passaggio dalla fisica classica alla fisica quantistica. Nel seguito esamineremo brevemente i principali fenomeni che hanno fornito l'evidenza per una *visione corpuscolare della radiazione elettromagnetica* e il primo modello quantistico dell'emissione e dell'assorbimento delle radiazioni da parte di un atomo. Vedremo inoltre come sia stata introdotta e verificata l'ipotesi che anche la *materia* presenti in certi fenomeni *proprietà ondulatorie* e come si possa dedurre da queste premesse il principio di indeterminazione di Heisenberg, che è una delle basi concettuali della fisica quantistica.

## 18.2 Radiazione termica. Corpo nero

Qualsiasi corpo solido o liquido che si trovi ad una temperatura  $T$  emette radiazioni elettromagnetiche: lo spettro appare continuo e si osserva che al crescere della temperatura aumenta l'intensità emessa e diminuisce il valor medio delle lunghezze d'onda contenute nello spettro ovvero cresce il valor medio delle frequenze. Quantitativamente l'emissione si caratterizza con il *potere emissivo specifico*, definito nel paragrafo 15.11 come energia emessa per unità di superficie e unità di tempo nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda.

Accanto all'emissione bisogna considerare l'assorbimento, cioè il fatto che un corpo assorbe una certa frazione dell'energia della radiazione termica che lo colpisce; la percentuale di energia assorbita per unità di superficie e di tempo nell'intervallo unitario di lunghezza d'onda definisce il *coefficiente di assorbimento specifico*  $a_\lambda$ .

Per un corpo generico sia l'emissione che l'assorbimento dipendono, oltre che dalla temperatura, dalle caratteristiche chimiche e fisiche della superficie. Si dimostra però che il rapporto tra il potere emissivo specifico e il coefficiente di assorbimento specifico è, per qualsiasi coppia di valori di  $\lambda$  e di  $T$ , una funzione universale.

Coefficiente di assorbimento specifico

le, eguale per tutti i corpi. Questa proprietà è nota come *legge di Kirchhoff* e si scrive

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{a_\lambda} = F(\lambda, T) \quad . \quad (18.1)$$

Allo scopo consideriamo un corpo a temperatura  $T$  all'interno di una cavità a temperatura  $T$ : esso è in equilibrio, nel senso che in ogni intervallo di lunghezza d'onda emette ed assorbe la stessa quantità di energia per unità di superficie e di tempo. D'altra parte l'energia che colpisce il corpo è legata alla densità di energia esistente all'interno della cavità e questa è una funzione universale di  $\lambda$  e  $T$ , come si deduce dal ragionamento del paragrafo 15.11; la forma esplicita corretta verrà ricavata nel successivo paragrafo 18.3. Possiamo quindi scrivere che l'energia specifica assorbita è

$$r_\lambda = a_\lambda F(\lambda, T) \quad .$$

Ma in equilibrio termico l'energia assorbita è eguale a quella emessa, per cui

$$\varepsilon_\lambda = r_\lambda = a_\lambda F(\lambda, T)$$

e si trova la (18.1).

Si definisce *corpo nero* un corpo con coefficiente di assorbimento unitario per qualsiasi valore di  $\lambda$  e  $T$ , cioè *assorbe completamente qualsiasi radiazione che lo colpisca*. Posto  $a_{\lambda, cn} = 1$  segue da (18.1) che per un corpo nero  $\varepsilon_{\lambda, cn} = F(\lambda, T)$ : la funzione universale  $F$  è eguale al potere emissivo specifico del corpo nero e la legge di Kirchhoff si scrive

Corpo nero

Legge di Kirchhoff

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{a_\lambda} = \varepsilon_{\lambda, cn} \quad ; \quad (18.2)$$

il corpo nero risulta essere il migliore assorbitore e il migliore emettitore termico.

Noto il potere emissivo specifico del corpo nero è noto anche il potere emissivo specifico di qualsiasi altro corpo di cui si conosca il coefficiente di assorbimento; è dato che  $a_\lambda < 1$ , è sempre  $\varepsilon_\lambda < \varepsilon_{\lambda, cn}$ . Inoltre, se  $\varepsilon_{\lambda, cn}$  è diverso da zero, deve essere diverso da zero  $a_\lambda$ : pertanto un *corpo è in grado di assorbire tutte le radiazioni che in determinate condizioni è capace di emettere*. Si giustifica così la regola di Kirchhoff, già menzionata nel paragrafo 16.7. Non è vero il contrario, cioè un corpo in generale non è in grado di emettere quelle radiazioni che è capace di assorbire.

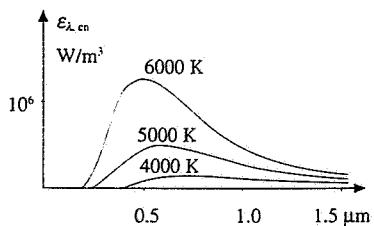
Per capire come si possa realizzare un corpo nero, riprendiamo l'argomento radiazione di cavità, cioè lo stato di equilibrio di un campo elettromagnetico all'interno di una cavità ad una data temperatura, esaminato nel paragrafo 15.11. Abbiamo visto che un piccolo foro praticato nella parete della cavità non altera l'equilibrio esistente all'interno e che il potere emissivo specifico del foro è proporzionale alla densità di energia esistente all'interno secondo (15.45). Se consideriamo ora il coefficiente di assorbimento del foro, siamo portati a pensare che la radiazione che colpisce il foro ed entra nella cavità subisce molteplici interazioni con le pareti e resta essenzialmente all'interno; ne può uscire solo una quantità dipendente dal rapporto tra superficie del foro e superficie delle pareti, che possiamo rendere molto piccola e trascurabile a tutti gli effetti.

Il foro è pertanto con ottima approssimazione un corpo nero e concludiamo che il potere emissivo di un corpo nero è legato alla densità di energia elettromagnetica

all'interno della cavità, indipendente dalla natura delle pareti e dalla forma della cavità.

Sperimentalmente il potere emissivo di un corpo nero venne misurato con notevole precisione verso la fine del 1800; l'andamento di  $\varepsilon_{\lambda, \text{cn}}$  è stato mostrato nella figura 13.41 ed è ripresentato nella figura 18.1. Le misure permisero di stabilire le seguenti proprietà.

### 1) Legge di Stefan-Boltzmann



Il potere emissivo integrale, dato dall'area sotto la curva, è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo nero:

$$\varepsilon_{\text{cn}} = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda, \text{cn}} d\lambda = \sigma T^4 \quad . \quad (18.3)$$

Figura 18.1

La costante  $\sigma$  è detta costante di Stefan e vale

$$\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4 \quad .$$

### 2) Prima legge di Wien

L'ascissa del massimo della curva del potere emissivo specifico è inversamente proporzionale alla temperatura:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK} = 2.8978 \cdot 10^3 \mu\text{m K} \quad . \quad (18.4)$$

Al crescere della temperatura aumenta l'emissione (legge di Stefan-Boltzmann) e il massimo di  $\varepsilon_{\lambda, \text{cn}}$  si sposta verso le lunghezze d'onda minori; ad esempio il massimo è nel visibile ( $\lambda_{\text{max}} = 0.55 \text{ mm}$ ) con  $T = 5267 \text{ K}$ .

### 3) Seconda legge di Wien

L'ordinata del massimo della curva di  $\varepsilon_{\lambda, \text{cn}}$  è proporzionale alla quinta potenza della temperatura:

$$(\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\text{max}} = a T^5 \quad , \quad a = 1.287 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^3 \text{ K}^5 \quad . \quad (18.5)$$

Ritornando alla legge di Stefan-Boltzmann, il potere emissivo di un corpo generico è

$$\varepsilon = \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} a_{\lambda} \varepsilon_{\lambda, \text{cn}} d\lambda \quad ,$$

sempre minore di  $\varepsilon_{\text{cn}}$  essendo  $a_{\lambda} < 1$  per qualsiasi valore di  $\lambda$ . Si può scrivere

$$\varepsilon = e \varepsilon_{\text{cn}} = e \sigma T^4 \quad \text{con} \quad e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{cn}}} < 1 \quad . \quad (18.6)$$

### Emissività

Il coefficiente adimensionale  $e$ , detto *emissività del corpo*, dipende dal materiale che costituisce il corpo e dalla natura della sua superficie; l'emissività inoltre dipende dalla temperatura a cui si trova il corpo che emette (si veda la tabella 18.1).

Seguendo lo stesso ragionamento svolto per arrivare alla (18.1), ma esteso a tutto lo spettro, dall'eguaglianza tra energia emessa  $e \sigma T^4$  ed energia assorbita

$a\sigma T^4$ , dove  $a$  è il coefficiente di assorbimento globale, si trova

$$e = a \text{ ovvero } \varepsilon = a \varepsilon_{\text{cn}} :$$

l'emissività di un corpo ad una certa temperatura  $T$  è eguale al coefficiente di assorbimento del corpo quando viene investito dalla radiazione termica caratteristica della temperatura  $T$ .

Nella Tabella 18.1 sono riportati i coefficienti di assorbimento di alcuni materiali.

**Tabella 18.1 Coefficienti di assorbimento di superficie pulite**

materiale	temperatura (K)	$a$
alluminio	520	0.04
alluminio	900	0.06
amianto	600	0.95
cromo	320	0.08
cromo	830	0.26
ferro	420	0.05
ferro	1300	0.37
ghiaccio secco	270	0.97
nickel	700	0.09
rame	370	0.02
tungsteno	300	0.03
tungsteno	3500	0.35

Quando un corpo ad una certa temperatura non è in equilibrio con l'ambiente che lo circonda, non sussiste l'egualanza tra energia emessa ed energia assorbita. Un corpo più caldo dell'ambiente tenderebbe pertanto a raffreddarsi, se non si provvedesse con altri mezzi (sorgenti di calore o di lavoro) a mantenere costante la sua temperatura. Nel caso limite di una sferetta nera a temperatura  $T$  dentro una cavità a temperatura  $T_0 < T$ , il potere emissivo netto è  $\sigma(T^4 - T_0^4)$ , mentre per un corpo generico si può scrivere  $e\sigma(T^4 - T_0^4)$ , se tra  $T_0$  e  $T$  i valori di  $e$  non sono significativamente diversi.

Al meccanismo dell'emissione termica si riconduce la *trasmissione di calore per irraggiamento*, menzionata nel paragrafo 10.9 del volume primo.

### Esempio 18.1

Una sferetta di tungsteno di raggio  $r = 1$  cm è sospesa al centro di un grande recipiente cavo alla temperatura  $T_0 = 300$  K che la circonda completamente. Determinare la potenza richiesta per mantenere la sferetta a una temperatura  $T = 2000$  K. Si assuma che a questa temperatura il coefficiente di assorbimento del tungsteno sia  $a = 0.35$ .

#### Soluzione

La potenza necessaria è

$$P = a \sum \sigma (T^4 - T_0^4) = 4\pi r^2 a \sigma (T^4 - T_0^4) = 400 \text{ W}.$$

L'assorbimento di energia da parte della sferetta è trascurabile rispetto all'emissione:

$$\frac{a \sum \sigma T_0^4}{a \sum \sigma T^4} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^4 = 5 \cdot 10^{-4}.$$

**Esempio 18.2**

Il raggio del sole è  $R_s = 6.96 \cdot 10^8$  m e la potenza emessa dalla sua superficie è  $P = 3.77 \cdot 10^{26}$  W. Assumendo che la superficie solare emetta come un corpo nero calcolare la sua temperatura, la lunghezza d'onda  $\lambda_{\max}$  alla quale è massimo il potere emissivo specifico e il valore di quest'ultimo.

**Soluzione**

Il potere emissivo della superficie solare è  $\varepsilon_{\text{cn}} = P / \Sigma = P / 4\pi R_s^2 = 6.19 \cdot 10^7$  W/m<sup>2</sup>. Dalle (18.3), (18.4) e (18.5)

$$T_s^4 = \frac{\varepsilon_{\text{cn}}}{\sigma} = 1.09 \cdot 10^{15} \text{ K}^4, \quad T_s = 5748 \text{ K},$$

$$\lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T_s = 0.504 \mu\text{m},$$

$$(\varepsilon_{\text{cn}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T_s^5 = 8.08 \cdot 10^{13} \text{ W/m}^3 = 8.08 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 \text{ mm}.$$

**18.3 Legge di Planck**

Le leggi enunciate nel paragrafo 18.2 riproducono accuratamente i dati sperimentali; esse però non hanno una spiegazione soddisfacente in ambito classico né è possibile giustificare in alcun modo i valori delle costanti.

La spiegazione che cerchiamo per l'andamento della curva misurata di  $\varepsilon_{\lambda, \text{cn}}$  e per le leggi relative deve discendere dalla forma esplicita della densità di energia elettromagnetica all'interno di una cavità. Abbiamo già visto nel paragrafo 15.11 il calcolo classico di Rayleigh-Jeans e il suo completo fallimento alle lunghezze d'onda corte, noto come *catastrofe ultravioletta*.

La soluzione fu trovata da Planck e resa nota nel dicembre del 1900. Riprendiamo la (15.47), scritta anche in funzione della frequenza utilizzando le relazioni

$$\varepsilon(\lambda) d\lambda = -\varepsilon(v) dv, \quad \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}, \quad \varepsilon(\lambda) = -\varepsilon(v) \frac{dv}{d\lambda} = \varepsilon(v) \frac{c}{\lambda^2} :$$

$$\varepsilon_{\lambda, \text{cn}} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} w_m, \quad \varepsilon_{v, \text{cn}} = \frac{2\pi v^2}{c^2} w_m.$$

Seguendo Planck, ammettiamo che l'energia di ciascuno degli infiniti oscillatori che rappresentano i modi di vibrazione del campo elettromagnetico nella cavità possa assumere soltanto valori discreti dati da  $n h v$ , dove  $v$  è la frequenza,  $n$  un numero intero positivo o nullo e  $h$  è una costante (denominata in seguito *costante di Planck*).

L'energia media deve allora essere *calcolata attraverso sommatorie* e non attraverso integrali come fatto nel paragrafo 15.11:

$$w_m = \frac{\sum_0^\infty n h v e^{-n h v / k_B T}}{\sum_0^\infty e^{-n h v / k_B T}}.$$

Sviluppando il calcolo si ottiene

$$w_m = \frac{h v e^{-hv/k_B T}}{1 - e^{-hv/k_B T}} = \frac{h v}{e^{hv/k_B T} - 1},$$

per cui l'espressione calcolata del potere emissivo specifico si scrive

$$\mathcal{E}_{\lambda, \text{cn}} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}, \quad \mathcal{E}_{v, \text{cn}} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{v^3}{e^{hv/k_B T} - 1} \quad (18.7)$$

Legge di Planck

L'accordo di (18.7) con i dati è ottimo; da esso si ricava il valore  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Js. Inoltre da una o dall'altra delle due formule, entrambe note come *legge di Planck*, per derivazione e per integrazione si ottengono le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien e si predicono i valori delle relative costanti, come ora vediamo nell'esempio 18.3.

Notiamo prima che se  $hv / k_B T \ll 1$  (basse frequenze ovvero lunghezze d'onda grandi) l'esponenziale nell'espressione del valor medio  $w_m$  si può approssimare con  $1 + (hv / k_B T)$  e quindi  $w_m = k_B T$ : quando  $hv$ , che è l'intervallo minimo tra due possibili valori dell'energia di un oscillatore, è piccolo rispetto al valor medio di  $w_m$  previsto dalla teoria classica, cioè quando la quantizzazione dell'energia diventa praticamente inapprezzabile, la legge di Planck dà la formula di Rayleigh-Jeans.

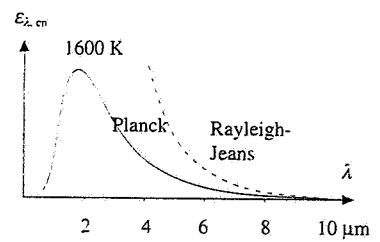


Figura 18.2

### Esempio 18.3

Ricavare dalla legge (18.7) le leggi (18.3), (18.4), (18.5).

#### Soluzione

Il potere emissivo si ottiene integrando l'espressione (18.7) di  $\mathcal{E}_{\lambda, \text{cn}}$ :

$$\mathcal{E}_{\text{cn}} = \int_0^\infty \mathcal{E}_{\lambda, \text{cn}} d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda.$$

$$\text{Poniamo } x = \frac{hc}{k_B \lambda T} \text{ e quindi } dx = -\frac{hc}{k_B \lambda^2 T} d\lambda;$$

sostituendo risulta

$$\mathcal{E}_{\text{cn}} = -2\pi c \int_{\infty}^0 \frac{k_B T}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^5}{e^x - 1} dx.$$

L'integrale vale  $\pi^4/15$  e si ottiene sia la legge di Stefan-Boltzmann che l'espressione esplicita di  $\sigma$  in funzione di costanti universali:

$$\mathcal{E}_{\text{cn}} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5.6705 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4.$$

Per ricavare la prima legge di Wien si deriva (18.7) rispetto a  $\lambda$  e si pone eguale a zero la derivata; si arriva così all'equazione trascendente

$$5 e^{-x} + x = 5,$$

dove  $x = hc / k_B \lambda T$  come prima. La soluzione numerica è  $x_{\max} = 4.9651$  e quindi

$$\lambda_{\max} T = \frac{h c}{4.9651 k_B} = 0.20141 \frac{h c}{k_B} = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK} .$$

Infine, introducendo il valore  $\lambda_{\max} = h c / k_B T x_{\max}$  in (18.7), si ha

$$(\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = \frac{2\pi k_B^5 x_{\max}^5}{h^4 c^3} \frac{1}{e^{x_{\max}} - 1} T^5 = a T^5 , \quad a = 1.287 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^3 \text{ K}^5 .$$

La legge di Planck ha costituito il primo passo fondamentale per il passaggio dalla fisica classica alla fisica quantistica, necessaria per spiegare i fenomeni atomici. Nella trattazione che porta alla (18.7) compare per la prima volta il concetto di *quantizzazione* di una grandezza fisica, cioè l'idea che una grandezza possa assumere solo valori discontinui.

Originariamente l'ipotesi di Planck venne formulata in relazione all'energia degli elettroni degli atomi costituenti le pareti della cavità, considerati come oscillatori, e successivamente estesa al campo elettromagnetico nella cavità, con cui gli oscillatori atomici sono in equilibrio attraverso uno scambio di energia. Bisogna dire che da un punto di vista formale la teoria di Planck della radiazione di corpo nero non è soddisfacente: infatti viene utilizzato un procedimento classico basato sulla statistica di Boltzmann e in questo viene introdotta la quantizzazione dell'energia degli oscillatori. Tuttavia la trattazione quantistica rigorosa, pur se condotta in modo completamente diverso, porta alla stessa legge (18.7).

#### 18.4 Effetto fotoelettrico

Nel corso dei suoi esperimenti relativi alle onde elettromagnetiche (paragrafo 15.10) Hertz scoprì che la scarica tra due elettrodi mantenuti ad una certa differenza di potenziale veniva facilitata se gli elettrodi stessi erano illuminati con luce ultravioletta. Successivamente Hallwachs e Lenard dimostrarono che l'incidenza di luce ultravioletta causava emissione di elettroni da parte di una superficie metallica; il fenomeno venne chiamato *effetto fotoelettrico*.

Un semplice dispositivo sperimentale con cui si mettono in evidenza le caratteristiche dell'effetto fotoelettrico è mostrato in figura 18.3. All'interno di un contenitore in cui è fatto il vuoto si trovano due elettrodi metallici; tra l'anodo *A* e il catodo *C* è applicata la d.d.p. *V* tramite il generatore *G* e la corrente nel circuito è misurata dallo strumento *S*.

Quando il catodo è illuminato con luce di opportuna frequenza, che supponiamo entri nel contenitore attraverso una finestra trasparente, l'andamento della corrente in funzione della d.d.p. applicata è quello della figura 18.4; non si misura corrente in assenza di illuminazione. La corrente nel vuoto è dovuta all'emissione di elettroni dal catodo e alla loro raccolta da parte dell'anodo, che è positivo rispetto al catodo; l'efficienza di raccolta aumenta all'aumentare della d.d.p. e la corrente raggiunge un valore costante quando tutti gli elettroni emessi sono raccolti (saturation). Si trova però che c'è corrente anche con l'anodo negativo rispetto al catodo e ciò si attribuisce al fatto che gli elettroni vengono emessi con una certa energia cinetica e sono in grado di superare la d.d.p.  $-V_0$  che li decelera. Al valore  $-V_0$  per il quale la corrente si annulla si dà il nome di *potenziale d'arresto*.

La distribuzione delle energie cinetiche  $E_k$  degli elettroni emessi si ricava dalla figura 18.4. Ad un intervallo  $dE_k = e dV$  corrisponde un incremento di corrente  $di = d(ne)$ , per cui

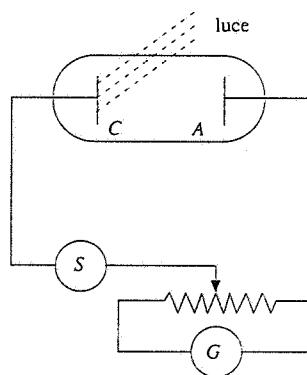


Figura 18.3

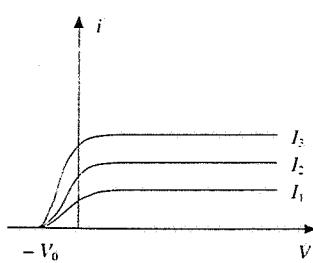


Figura 18.4

$$\frac{dn}{dE_k} = \frac{1}{e^2} \frac{di}{dV} :$$

il numero  $dn$  di elettroni emessi per secondo nell'intervallo  $dE_k$  è dato dalla pendenza  $di/dV$  della curva della corrente in funzione della d.d.p. applicata. Al potenziale d'arresto corrisponde l'energia massima con cui vengono emessi gli elettroni dal catodo:

$$E_{k,\max} = e V_0 \quad (18.8)$$

Potenziale d'arresto

La figura 18.4 mostra, in ogni caso, che all'interno del conduttore gli elettroni hanno una distribuzione di energia che varia tra zero ed un valore massimo noto come energia di Fermi  $E_F$ . Ritorneremo sull'argomento nel Capitolo 19.

Se si aumenta l'intensità del fascio luminoso incidente, a parità di frequenza, si ottiene una maggiore corrente di saturazione, segno che vengono emessi più elettroni, anche se l'origine della curva  $i(V)$  è la stessa, in corrispondenza a  $-V_0$ . Infine si trova che al variare della frequenza varia il valore di  $V_0$  necessario per annullare la corrente: al crescere di  $\nu$  crescono linearmente  $V_0$  e quindi, secondo (18.8), l'energia cinetica massima di emissione. In particolare, se la frequenza  $\nu$  scende sotto un valore  $\nu_0$ , detto di soglia e dipendente dal tipo di materiale catodico, non si ha effetto fotoelettrico, qualunque sia l'intensità della luce incidente. L'andamento del potenziale di arresto con  $\nu$  è mostrato in figura 18.5.

I risultati descritti sono assolutamente incomprensibili sulla base della teoria classica della radiazione elettromagnetica. Se supponiamo che un elettrone venga estratto dal metallo per effetto del campo elettrico della radiazione incidente, un aumento di intensità di questa, producendo un campo elettrico maggiore, dovrebbe facilitare l'emissione: e invece sotto soglia qualunque sia l'intensità non si ha emissione. Altrettanto inspiegabile è la dipendenza del fenomeno dalla frequenza. Inoltre sopra soglia una luce poco intensa dovrebbe provocare un'emissione ritardata nel tempo rispetto ad una luce molto intensa, perché minore è la cessione di energia per unità di tempo; si trova però che l'emissione è praticamente istantanea in entrambi i casi ( $\sim 10^{-9}$  s di ritardo tra arrivo della luce e uscita degli elettroni, vedi esempio 18.6).

Tutte le caratteristiche vennero spiegate da Einstein nel 1905. Estendendo l'ipotesi di Planck egli ipotizzò che la radiazione elettromagnetica fosse composta da quanti di energia  $U = h\nu$ , detti *foton*, e che nell'interazione della radiazione con la materia un elettrone potesse assorbire un solo fotone. Il bilancio energetico più favorevole per l'elettrone nell'assorbimento e nella successiva emissione è

$$E_{k,\max} = h\nu - W_e \quad : \quad (18.9)$$

Relazione di Einstein

$W_e$  rappresenta il *lavoro di estrazione del metallo*, cioè l'energia minima che bisogna comunicare all'elettrone per rompere il suo legame col metallo. Chiaramente  $W_e$  è riferito a quegli elettroni che all'interno del conduttore hanno l'energia cinetica massima e che pertanto escono con  $E_{k,\max}$  data da (18.9). Combinando quest'ultima con (18.8) si ha

$$E_{k,\max} = h\nu - W_e = eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_e}{e} \quad (18.10)$$

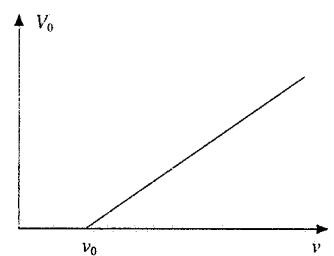


Figura 18.5

Viene così giustificata la linearità di  $V_0$  con  $\nu$  e si trova che la pendenza della retta (18.10) è una costante universale, indipendente dal metallo. Sempre da (18.9) risulta chiaro che il fenomeno avviene solo se  $h\nu \geq W_e$  e che quindi la frequenza di soglia è

Soglia fotoelettrica

$$\nu_0 = \frac{W_e}{h}, \quad (18.11)$$

caratteristica del metallo catodico.

Un aumento di intensità, a parità di frequenza, corrisponde ad un aumento del numero di fotoni incidenti per unità di superficie ed unità di tempo e quindi causa l'emissione di un maggior numero di elettroni; però se  $\nu \leq \nu_0$  l'emissione non può avvenire, qualunque sia il numero di fotoni. Infine, trattandosi di un processo elementare di assorbimento, in cui si assorbe una quantità finita di energia una sola volta e non una successione continua di quantità infinitesime, l'emissione è praticamente istantanea.

La teoria di Einstein venne pienamente confermata da misure molto accurate eseguite da Millikan nel 1914; il rapporto  $h/e$ , cioè la pendenza della retta (18.10), fu determinato e, noto il valore della carica elementare, da poco misurato dallo stesso Millikan (paragrafo 1.8), si ottenne per  $h$  un valore in accordo con quello ricavato da Planck nella trattazione della radiazione di corpo nero.

Nella tabella 18.2 sono riportati per alcuni metalli i valori del lavoro di estrazione (in elettronvolt), della corrispondente soglia fotoelettrica  $\nu_0$  e della lunghezza d'onda  $\lambda_{\max} = c/\nu_0$  al di sopra della quale non si ha emissione.

Tabella 18.2 Lavori di estrazione e soglie fotoelettriche

materiale	$W_e$ (eV)	$\nu_0$ ( $10^{15}$ Hz)	$\lambda_{\max}$ (nm)
argento	4.8	1.16	258
cesio	1.8	0.44	681
cromo	4.6	1.11	270
litio	2.1	0.51	588
nickel	4.6	1.11	270
platino	5.3	1.28	234
potassio	2.2	0.53	566
sodio	1.8	0.44	681
tantalio	4.2	1.02	294
tungsteno	4.5	1.09	275

**Esempio 18.4**

La lunghezza d'onda massima per una data superficie metallica è  $\lambda_{\max} = 480$  nm. Determinare il lavoro di estrazione del metallo. Se viene utilizzata una radiazione con  $\lambda = 300$  nm, qual è il potenziale di arresto  $V_0$ ?

**Soluzione**

Il lavoro di estrazione è dato da (18.11):

$$W_e = h \nu_0 = h \frac{c}{\lambda_{\max}} = 4.14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.6 \text{ eV} .$$

L'energia di un fotone di lunghezza d'onda  $\lambda = 300$  nm è

$$U = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 6.62 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4.1 \text{ eV} ,$$

l'energia cinetica massima (18.9) risulta

$$E_{k,\max} = U - W_e = 2.48 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.5 \text{ eV}$$

e pertanto da (18.8)  $V_0 = 1.5 \text{ V}$ .

**Esempio 18.5**

Un fascio luminoso con  $\lambda = 500 \text{ nm}$  ha intensità  $I = 10^{-6} \text{ W/cm}^2$ ; esso incide su una superficie di cesio avente un'area  $\Sigma = 20 \text{ cm}^2$ . Calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi. Supponendo che l'efficienza del processo di emissione sia 0.12 (efficienza quantica) calcolare la massima corrente ottenibile.

**Soluzione**

L'energia del singolo fotone è

$$U = h \frac{c}{\lambda} = 3.97 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2.5 \text{ eV} :$$

dalla tabella 18.2 si ricava  $W_e = 1.8 \text{ eV}$ , per cui  $E_{k,\max} = 0.7 \text{ eV}$ . Il numero di fotoni che colpiscono la superficie in un secondo è

$$N = \frac{I\Sigma}{U} = 5.04 \cdot 10^{13} ,$$

il numero di elettroni emessi è  $0.12 N$  e a questi corrisponde la corrente di saturazione

$$i = \frac{q}{t} = 0.12 Ne = 0.97 \cdot 10^{-6} \text{ A} .$$

Un'efficienza minore di 1 significa che non tutti i fotoni incidenti danno luogo ad un processo di emissione, cioè che l'effetto fotoelettrico ha una certa *probabilità* di avvenire. L'argomento verrà ripreso alla fine del paragrafo 18.5.

**Esempio 18.6**

Inviando un fascio di luce di intensità  $I = 0.1 \text{ W/m}^2$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 0.396 \mu\text{m}$  su un catodo di potassio ( $W_e = 2.2 \text{ eV}$ ), si osserva che l'anodo inizia a raccogliere elettroni dopo un tempo  $\Delta t = 175 \text{ ns}$ ; la distanza tra catodo e anodo è  $d = 10 \text{ cm}$  (ci si riferisca alla figura 18.3). Verificare che il risultato è in accordo con la teoria di Einstein.

**Soluzione**

Con  $\lambda = 0.396 \mu\text{m}$ ,  $h\nu = hc/\lambda = 5.02 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.13 \text{ eV}$  e quindi

$$E_{k,\max} = 3.13 - 2.2 = 0.93 \text{ eV} = 1.49 \cdot 10^{-19} \text{ J} ,$$

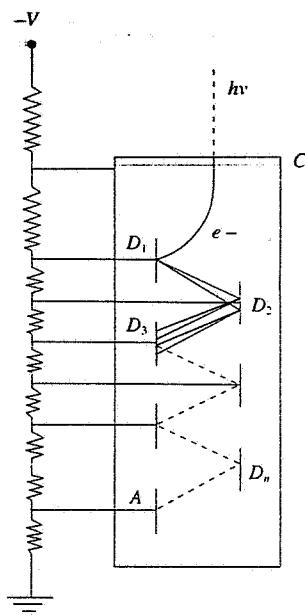
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{k,\max}}{m}} = 5.72 \cdot 10^5 \text{ m/s} , \quad t_{\min} = \frac{d}{v_{\max}} = 175 \cdot 10^{-9} \text{ s} .$$

L'accordo col valore previsto mostra inoltre che la durata  $\Delta t_0$  del fenomeno di emissione è trascurabile; in effetti sappiamo che  $\Delta t_0 \approx 10^{-9} \text{ s}$ .

Si osservi che classicamente l'elettrone sarebbe emesso se assorbisse almeno l'energia

$$W_e = I \pi r^2 \Delta t_0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{W_e}{I \pi \Delta t_0}} = 3.3 \cdot 10^{-5} \text{ m} .$$

L'elettrone cioè dovrebbe avere un raggio dell'ordine di  $10^{-5} \text{ m}$ ,  $10^5$  volte maggiore dei raggi atomici. Il risultato mostra la completa inadeguatezza del modello classico di interazione tra radiazione e materia.

**Nota. Il fotomoltiplicatore****Figura 18.6**

Il dispositivo della figura 18.3 è chiamato cella o *cellula fotoelettrica*; esso è impiegato nella rivelazione in tempi rapidi di flussi luminosi, anche di debole intensità. Un'applicazione particolare è quella di utilizzare una cella fotoelettrica come interruttore rapido in un circuito, che si chiude quando è illuminato da luce di opportuna frequenza. Per aumentare la sensibilità di rivelazione, cioè per essere in grado di vedere un flusso luminoso molto debole nel visibile e nel vicino ultravioletto, si ricorre al **fotomoltiplicatore**, che è schematizzato nella figura 18.6. Sul lato interno di una base di un cilindro di vetro in cui è fatto il vuoto è depositato un photocatodo *C*; esso emette elettroni quando è colpito da fotoni che attraversano il vetro (o il quarzo) di cui è fatta la base e gli elettroni emessi vengono attirati dall'elettrodo *D<sub>1</sub>*, posto a una d.d.p. positiva rispetto al catodo. Questo elettrodo, detto primo dinodo, è costituito da un materiale avente la proprietà di emettere  $\delta$  elettroni quando viene colpito da un elettrone. I  $\delta$  elettroni emessi sono attirati dal secondo dinodo *D<sub>2</sub>* che, colpito, ne emette  $\delta^2$  e così via. Con  $n$  stadi di moltiplicazione si hanno  $\delta^n$  elettroni: se  $\delta = 4$  e  $n = 14$  il fattore di moltiplicazione è  $G = \delta^n = 2.7 \cdot 10^8$ . Gli elettroni emessi dall'ultimo dinodo vengono raccolti dall'anodo *A* che è connesso ad un circuito esterno.

Ad esempio, prendiamo un photocatodo con efficienza quantica del 25% che viene colpito da 10 fotoni in un intervallo di tempo di  $5 \cdot 10^{-9}$  s. La carica che arriva all'anodo, se il fattore di moltiplicazione vale  $G = 10^8$ , è

$$q = 0.25 \cdot 10 \cdot 10^8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 0.4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

e la corrispondente corrente in uscita dall'anodo è

$$i = \frac{q}{\Delta t} = \frac{0.4 \cdot 10^{-10}}{5 \cdot 10^{-9}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ A} .$$

Supponendo che questa corrente attraversi un resistore con  $R = 50 \Omega$ , ai capi di questo si sviluppa durante il tempo  $\Delta t$  la tensione media  $V = Ri = 0.4 \text{ V}$ . Si vede che il fotomoltiplicatore è in grado di rivelare un singolo fotone, seppure con una certa efficienza. Segnali luminosi di pochi fotoni possono essere prodotti da una particella relativistica carica per effetto Cerenkov; il mezzo in cui avviene l'emissione e il fotomoltiplicatore che la amplifica e la rende misurabile costituiscono un contatore Cerenkov (vedi paragrafo 13.11).

**18.5 Effetto Compton. Produzione di coppie**

Il successo della spiegazione data da Einstein per il meccanismo del fenomeno di emissione fotoelettrica porta ad assegnare alla radiazione elettromagnetica incidente proprietà corpuscolari. La radiazione viene rappresentata con un flusso di fotoni, ciascuno dei quali ha energia  $U$  dipendente dalla frequenza, si muove con la velocità  $c$  della luce nel vuoto avendo di conseguenza massa nulla, e possiede una quantità di moto  $p$ :

$$U = h\nu = h \frac{c}{\lambda} , \quad p = \frac{U}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} . \quad (18.12)$$

L'espressione della quantità di moto è in accordo con la relazione generale stabilita nella teoria della relatività ristretta tra energia, quantità di moto e massa di una particella,

$$U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (18.13)$$

applicata ad una particella con massa nulla. Notiamo che l'espressione di  $p$  valida per un fotone coincide con quella che si ricava per la quantità di moto trasportata da un'onda elettromagnetica (paragrafo 13.4).

Queste caratteristiche, che sono tanto più evidenti quanto più elevata è l'energia del singolo fotone, furono definitivamente provate da Compton nel 1923 in un esperimento in cui un fascio di raggi  $X$ , con energia dei singoli fotoni dell'ordine di 20 keV, veniva inviato su un bersaglio di grafite e si misuravano a diversi angoli l'intensità e la lunghezza d'onda dei raggi  $X$  diffusi. Compton scoprì che i raggi  $X$  diffusi ad angolo diverso da zero rispetto alla direzione incidente avevano lunghezza d'onda maggiore, tanto maggiore quanto più grande era l'angolo di diffusione, risultato non spiegabile in modo classico in quanto, se una radiazione elettromagnetica mette in oscillazione un elettrone, questo emette alla stessa frequenza (diffusione Thomson, paragrafo 13.8).

Seguendo la proposta di Einstein, Compton ipotizzò che il fascio di raggi  $X$  fosse formato da fotoni con le proprietà (18.12) e che questi fotoni venissero diffusi dagli elettroni contenuti nella grafite attraverso un processo elementare di urto elastico fotone-elettrone; l'elettrone urtato si poteva considerare libero, essendo l'energia del fotone incidente molto maggiore dell'energia di legame degli elettroni di valenza nel carbonio.

La cinematica di un urto elastico fotone-elettrone si basa sulle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Nello stato iniziale, prima dell'urto, scriviamo, con riferimento alla figura 18.7, parte sinistra,

$$\text{fotone} \quad U_0 = h\nu = h \frac{c}{\lambda_0} , \quad \mathbf{p}_0 = \frac{h}{\lambda_0} \mathbf{u}_x ,$$

$$\text{elettrone} \quad U = m c^2 , \quad p = 0 .$$

Dopo l'urto, in cui si verifica una cessione di energia e quantità di moto dal fotone all'elettrone, avremo la configurazione a destra:

$$\text{fotone} \quad U_1 = h \frac{c}{\lambda} , \quad \mathbf{p}_1 = \frac{h}{\lambda} \quad \text{ad angolo } \theta \quad \text{rispetto a } \mathbf{p}_0$$

$$\text{elettrone} \quad U_2 , \quad \mathbf{p}_2 \quad \text{ad angolo } \phi \quad \text{rispetto a } \mathbf{p}_0 .$$

In accordo con le leggi di conservazione deve essere

$$U_0 + U = U_1 + U_2 , \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 .$$

Riscriviamo la conservazione dell'energia utilizzando (18.13):

$$p_0 c + m c^2 = p_1 c + \sqrt{p_2^2 c^2 + m^2 c^4} \Rightarrow p_2^2 = (p_0 - p_1)^2 + 2(p_0 - p_1)m c .$$

Dalla conservazione della quantità di moto si ha

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 \Rightarrow p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2 p_0 p_1 \cos\theta .$$

Eguagliamo le due espressioni di  $p_2^2$  e otteniamo

$$p_0 - p_1 = \frac{p_0 p_1}{m c} (1 - \cos\theta) .$$

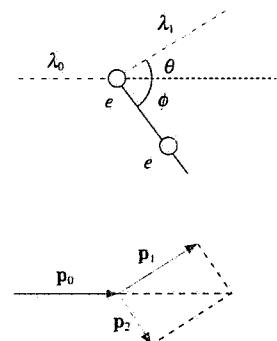


Figura 18.7

Esprimendo infine le quantità di moto dei fotoni in funzione delle lunghezze d'onda tramite (18.12) si arriva alla relazione di Compton

### Relazione di Compton

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (18.14)$$

Il fotone diffuso ha lunghezza d'onda maggiore di quella del fotone incidente e quindi frequenza ovvero energia inferiore, a seguito della cessione di energia all'elettrone. La differenza  $\Delta\lambda$  cresce con l'angolo di diffusione e la legge (18.14) corrisponde perfettamente alle misure sperimentali.

Il coefficiente della (18.14) ha le dimensioni di una lunghezza ed è detto *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone*; il suo valore è

### Larghezza d'onda Compton dell'elettrone

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Si vede che le differenze di lunghezza d'onda dovute all'effetto Compton sono molto piccole, dell'ordine dei picometri. La variazione relativa  $\Delta\lambda / \lambda_0$  è apprezzabile solo se  $\lambda_0$  non è molto diversa da  $\lambda_c$ . Se  $U_0 = 20 \text{ keV} = 3.2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ,  $\lambda_0 = hc / U_0 = 0.62 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda / \lambda_0 = 0.04$  con  $\theta = 90^\circ$ . Notiamo che  $\lambda_c$  dipende da costanti universali e dalla massa dell'elettrone, non da proprietà del materiale diffondente, a conferma del fatto che nella diffusione Compton possiamo considerare gli elettroni come liberi.

Fissato un certo angolo  $\theta$ , oltre ai fotoni con lunghezza d'onda  $\lambda_1 < \lambda_0$  diffusi secondo il meccanismo appena descritto, si trovano anche fotoni diffusi con lunghezza d'onda  $\lambda_0$  invariata (picco di sinistra nella figura 18.8). Questa presenza si spiega attribuendo il processo di diffusione ad un elettrone legato: si suppone cioè che in tali casi il fotone urti un atomo per cui nella (18.14) alla massa dell'elettrone si deve sostituire la massa dell'atomo, che è circa  $10^4$  volte superiore; è allora evidente come  $\lambda_1$  risulti praticamente eguale a  $\lambda_0$ .

Nella diffusione della radiazione elettromagnetica abbiamo così due fenomeni. Uno è la diffusione senza cambiamento di lunghezza d'onda, che avviene nelle condizioni appena descritte (lunghezze d'onda corte, dell'ordine di  $10^{-10} \text{ m}$  o inferiori, urto contro un elettrone fortemente legato) oppure a lunghezze d'onda maggiori, dall'ultravioletto fino al visibile, alle microonde e alle onde radio, per le quali la variazione  $\Delta\lambda$  è completamente trascurabile rispetto a  $\lambda$ , sia con elettroni liberi che con elettroni legati. Vediamo che per  $\lambda$  grandi il risultato quantistico coincide con quello classico, calcolato da Thomson (paragrafo 13.8). L'altro fenomeno è la diffusione Compton che avviene su elettrone libero, con variazione misurabile di lunghezza d'onda; essa è tanto più evidente quanto maggiore è l'energia dei fotoni.

L'interpretazione di Compton venne confermata in esperimenti successivi, nei quali si misurarono anche la direzione di moto e l'energia cinetica dell'elettrone libero colpito dal fotone. Un caso numerico è sviluppato nell'esempio 18.7.

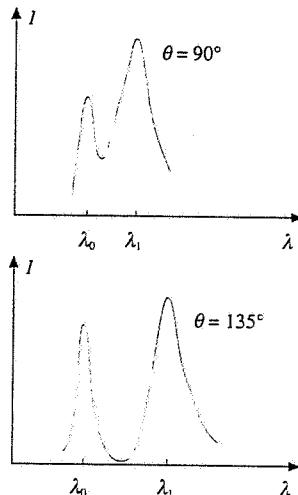


Figura 18.8

### Esempio 18.7

Un fotone con energia  $U_0 = 100 \text{ keV}$  incide su un elettrone libero. Supponendo che l'angolo di diffusione sia  $\theta = 90^\circ$  calcolare la direzione di moto e l'energia cinetica dell'elettrone subito dopo l'urto.

#### Soluzione

Calcoliamo innanzitutto  $\lambda_0$  e, per  $\theta = 90^\circ$ ,  $\lambda_1$  e  $U_1$ :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{U_0} = 12.40 \cdot 10^{-12} \text{ m} , \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \lambda_c = 14.83 \cdot 10^{-12} \text{ m} ,$$

$$U_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 83.6 \text{ keV} .$$

Applichiamo la legge di conservazione della quantità di moto alle componenti lungo la direzione di incidenza e ortogonalmente a questa:

$$p_0 = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\phi , \quad 0 = p_1 \sin\theta - p_2 \sin\phi$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{p_1 \sin\theta}{p_0 - p_1 \cos\theta} = \frac{\lambda_0 \sin\theta}{\lambda_1 - \lambda_0 \cos\theta} .$$

Con  $\theta = 90^\circ$   $\tan\phi = \lambda_0 / \lambda_1$ ,  $\phi = 39.9^\circ$ .

Per l'energia dell'elettrone abbiamo

$$U_2 = U_0 + mc^2 - U_1 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_1} + mc^2 = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \lambda_1} + mc^2 .$$

Questa è l'energia totale dell'elettrone: sottraendo l'energia di massa  $mc^2$  resta l'energia cinetica, chiaramente eguale a  $U_0 - U_1$ :

$$E_k = U_2 - mc^2 = U_0 - U_1 = hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 \lambda_1} .$$

Sempre ponendo  $\theta = 90^\circ$   $E_k = hc \lambda_c / \lambda_0 \lambda_1 = 16.4 \text{ keV}$ .

In sostanza, noti l'energia incidente e l'angolo di diffusione, si possono calcolare l'energia cinetica acquistata dall'elettrone e la sua direzione di moto. La verifica sperimentale conferma le previsioni.

### Produzione di coppie

Un ulteriore fenomeno quantistico di interazione tra radiazione e materia avviene quando un fotone con energia superiore a  $2mc^2 = 1.02 \text{ MeV}$ , cioè al doppio dell'energia a riposo dell'elettrone, urta un nucleo atomico. Si osserva che il fotone scompare e che la sua energia *si materializza in due particelle, un elettrone e un positrone*; quest'ultimo ha massa eguale a quella dell'elettrone e carica opposta (è l'antiparticella dell'elettrone). Il bilancio energetico del processo è

$$hv = 2mc^2 + E_k^- + E_k^+ ,$$

in cui  $hv$  è l'energia del fotone incidente,  $E_k^-$  l'energia cinetica dell'elettrone,  $E_k^+$  l'energia cinetica del positrone. Il nucleo, di massa molto maggiore, non assorbe praticamente energia, anche se la sua presenza è essenziale per il bilancio della quantità di moto; si può infatti dimostrare facilmente che nel vuoto il processo descritto non è possibile in quanto non conserva contemporaneamente energia e quantità di moto.

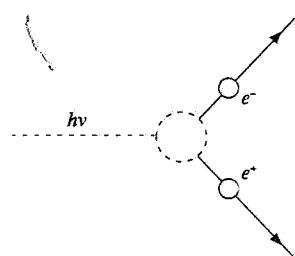


Figura 18.9

### Coefficiente di assorbimento

Nella trattazione classica dei paragrafi 13.9 e 13.10 l'indice di rifrazione tende a uno quando la frequenza della radiazione elettromagnetica assume valori molto superiori a quelli tipici della luce visibile ( $\sim 10^{14} \text{ Hz}$ ), indicando così una sostanziale trasparenza asintotica della materia alla radiazione. Invece nella realtà ciò non avviene: a frequenze elevate accadono nuovi fenomeni non prevedibili e non spiegabili in modo classico, nei quali si manifesta l'aspetto corpuscolare della radiazione.

Si tratta di fenomeni concorrenti, ognuno con una determinata probabilità di avvenire che è funzione dell'energia. Fino a valori dell'ordine di 100 keV l'effetto predominante è quello fotoelettrico, nel senso che quando un fotone interagisce con la materia la probabilità che dia luogo a effetto fotoelettrico è maggiore di quella che subisca effetto Compton. Tra 100 keV e 10 MeV l'effetto fotoelettrico diventa trascurabile e resta praticamente soltanto l'effetto Compton; oltre i 10 MeV anche la probabilità dell'effetto Compton tende a zero e l'interazione radiazione-materia si manifesta attraverso la produzione di coppie, la cui probabilità cresce da zero alla soglia fino ad un valore costante (si veda più avanti la figura 18.11).

L'insieme dei fenomeni descritti porta ad un assorbimento dei fotoni: essi scompaiono in quanto vengono assorbiti da un elettrone o si trasformano in una coppia elettrone-positrone oppure in quanto vengono deviati e quindi rimossi dalla direzione originale di propagazione.

In termini macroscopici medi, cioè considerando un gran numero di fotoni incidenti, si trova che il numero  $N$  di fotoni per unità di superficie e unità di tempo ovvero l'intensità  $I$  del fascio, pari al prodotto di  $N$  per l'energia  $hv$  del singolo fotone, diminuisce con legge esponenziale in funzione dello spessore  $x$  del materiale attraversato:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad . \quad (18.15)$$

$I_0$  è l'intensità incidente e  $\mu$  il *coefficiente di assorbimento*: dopo uno spessore  $x = 1 / \mu = l_{\text{ass}}$  l'intensità è ridotta a  $I_0 / e$ .

Il coefficiente di assorbimento dipende dal materiale assorbitore e per un dato materiale non è costante, bensì dipende dall'energia dei fotoni; esso è mostrato in figura 18.10 nel caso dell'alluminio. Le linee tratteggiate mostrano i contributi calcolati dell'effetto fotoelettrico, dell'effetto Compton e della produzione di coppie, la linea continua il valore globale misurato. L'andamento è tipico anche di altri materiali, con i valori maggiori nella regione dominata dall'effetto fotoelettrico, un minimo nella regione intermedia e una ricrescita che tende ad un valore di saturazione. Possiamo dire che il *coefficiente di assorbimento rappresenta macroscopicamente la probabilità del processo di assorbimento*.

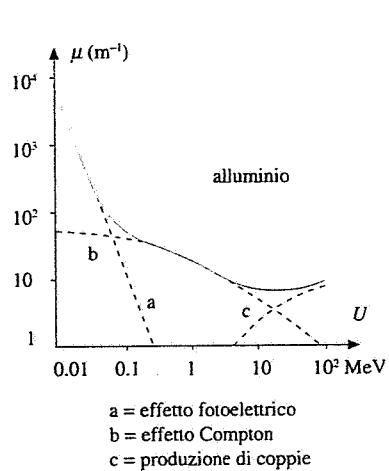


Figura 18.10

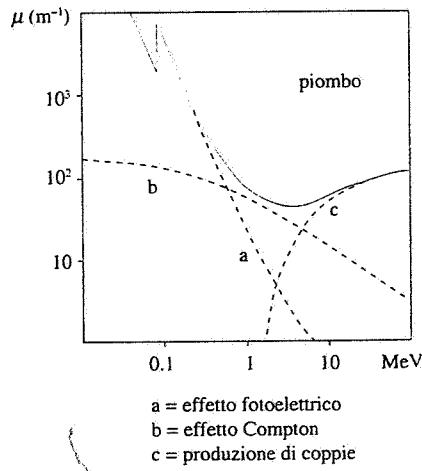


Figura 18.11

#### Esempio 18.8

Determinare lo spessore di uno strato di piombo con cui si vogliono assorbire fotoni con energie 50 keV, 500 keV, 5 MeV, 50 MeV, in modo che l'intensità venga ridotta di un fattore  $10^4$ . La curva del coefficiente di assorbimento del piombo è mostrata in figura 18.11.

#### Soluzione

Lo spessore richiesto deve essere tale che  $e^{-\mu x} = 10^{-4}$ , cioè  $\mu x = 9.21$ .

Dalla figura si ricavano approssimativamente i valori di  $\mu$  alle varie energie (le scale sono logaritmiche in base 10); nella tabella li riportiamo insieme alla lunghezza di assorbimento  $l_{\text{ass}} = 1/\mu$  e allo spessore richiesto  $x = 9.21/\mu$ .

50 keV	$\mu = 7.8 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$x = 0.12 \text{ cm}$
500 keV	$\mu = 1.9 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$x = 4.8 \text{ cm}$
5 MeV	$\mu = 45 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$x = 20.5 \text{ cm}$
50 MeV	$\mu = 1.1 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$	$l_{\text{ass}} = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$x = 8.4 \text{ cm}$

Lo spessore maggiore si ha ovviamente dove il coefficiente di assorbimento è minore: nel piombo i fotoni più difficili da assorbire sono quelli con energia dell'ordine di qualche MeV. Nell'alluminio (figura 18.10) ciò avviene intorno a 10 MeV; essendo però  $\mu$  molto minore gli spessori richiesti di alluminio sono molto maggiori, a parità di assorbimento.

Calcoli di questo tipo sono utilizzati per valutare gli spessori con cui devono essere schermati gli ambienti dove si producono raggi X o contenenti macchine che in generale possono produrre radiazioni elettromagnetiche di alta energia.

### Aspetto ondulatorio e aspetto corpuscolare della radiazione

La caratteristica certamente più sorprendente della radiazione è la diversità di comportamento a seconda delle situazioni. Ad esempio, con un fascio luminoso di lunghezza d'onda nella regione blu-violetta, possiamo eseguire esperimenti di interferenza e diffrazione, sebbene quando lo portiamo a interagire con un materiale opportuno esso provochi l'emissione di elettroni secondo regole che non si possono spiegare con proprietà ondulatorie. Allo stesso modo, un fascio di raggi X subisce diffusione Compton, spiegabile solo con l'ipotesi corpuscolare, anche se la lunghezza d'onda del fotone diffuso viene misurata con uno spettrometro di Bragg, che si basa su proprietà ondulatorie.

Formalmente il legame tra i due aspetti è dato dalle relazioni (18.12),

$$E = hv , \quad p = h / \lambda .$$

Nella sostanza, l'idea che si è affermata con lo sviluppo della meccanica quantistica è che il *dualismo di comportamento sia una proprietà intrinseca della radiazione*; l'argomento è molto generale e si riferisce anche alla materia, come vedremo nel paragrafo 18.7. Lo riprenderemo pertanto in quella occasione, per discuterlo in modo unificato.

L'*aspetto ondulatorio* della radiazione elettromagnetica è quello che storicamente si è affermato per primo con una solida base sperimentale e con la formulazione teorica che discende dalle equazioni di Maxwell. Successivamente, quando è diventato possibile investigare l'interazione tra radiazione e materia, si è manifestato anche l'*aspetto corpuscolare*; esso è più evidente se l'energia dei singoli fotoni è elevata, e si rivela già nelle microonde, nell'infrarosso e nel visibile, come abbiamo ricordato nel paragrafo 13.12 e come discuteremo brevemente tra poco.

Le intuizioni che hanno aperto la strada alla comprensione dell'interazione tra radiazione e materia sono quelle di Planck e di Einstein. Nel paragrafo 18.7 descriveremo gli inizi del cammino che ha portato alla teoria quantistica della materia.

## 18.6 Righe spettrali. Modello di Bohr. Livelli energetici

Nei paragrafi precedenti, dopo la trattazione della radiazione termica, abbiamo illustrato i principali effetti nei quali è essenziale l'ipotesi che la radiazione elettro-

magnetica, nell'interazione con la materia, sia formata da fotoni di energia  $h\nu$ : ciascun effetto è dovuto all'interazione individuale di un fotone con un elettrone o con un nucleo. Riprendiamo ora l'esposizione delle caratteristiche di emissione di radiazione elettromagnetica considerando l'emissione da parte di atomi liberi, quali sono quelli di un gas abbastanza rarefatto.

Come già detto nel paragrafo 16.7 l'aspetto sperimentale più notevole è la scoperta che lo spettro di emissione non è continuo, bensì è formato da righe, cioè da singole frequenze ben definite, e che esistono regolarità nella successione delle frequenze delle righe; in ogni caso non si tratta di serie armoniche.

Uno studio completo effettuato sullo spettro dell'idrogeno atomico portò verso il 1890 alla formula empirica proposta da Rydberg, generalizzazione della prima formula di questo tipo trovata da Balmer nel 1885: le lunghezze d'onda delle righe dello spettro obbediscono alla relazione

Formula di Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) , \quad (18.16)$$

in cui  $n_1$  e  $n_2$  sono numeri interi, con  $n_1 > n_2$ , e  $R_H$  una costante, detta di Rydberg, che vale, se  $\lambda$  è espressa in nanometri,

$$R_H = 1.0967758 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

Assegnando a  $n_2$  i valori 1, 2, 3, 4, 5 si hanno cinque serie di righe che prendono il nome dai loro scopritori; alcune di queste serie furono scoperte molto dopo, ma risultarono in perfetto accordo con (18.16), per le ragioni che adesso vedremo. Nella tabella 18.3 sono indicati i valori delle prime tre lunghezze d'onda di ogni serie e il limite inferiore, cioè il limite di (18.16) per  $n$  tendente all'infinito; si noti che la prima serie è nell'ultravioletto, la seconda nel visibile, le altre nell'infrarosso.

**Tabella 18.3 Serie spettrali dell'idrogeno atomico**

serie di Lyman	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 2, 3, 4, \dots$	121.6	102.6	97.3	→	91.2 nm
Balmer	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 3, 4, 5, \dots$	656.5	486.3	434.2	→	364.7 nm
Paschen	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 4, 5, 6, \dots$	1875.6	1282.2	1094.1	→	820.6 nm
Brackett	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 5, 6, 7, \dots$	4052.3	2625.9	2166.1	→	1458.8 nm
Pfund	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$n = 6, 7, 8, \dots$	7459.9	4653.8	3740.6	→	2279.4 nm

In termini di frequenze, essendo  $v = c / \lambda$ , la (18.16) si scrive come differenza tra  $cR_H / n_2^2$  e  $cR_H / n_1^2$ . Relazioni analoghe si trovano anche per le frequenze delle righe

emesse da altri elementi, che risultano sempre esprimibili come differenza di due termini caratteristici dell'elemento stesso: questa regola generale è detta *principio di combinazione di Rydberg e Ritz*.

La prima spiegazione soddisfacente dello spettro dell'idrogeno atomico venne data da Bohr nel 1913, quando era nota soltanto la serie di Balmer. Notiamo che tra il 1885 e il 1913 erano intervenute varie scoperte. Nel 1897 Thomson aveva identificato l'elettrone come uno dei costituenti fondamentali della materia, nel 1900 e nel 1905 Planck e Einstein avevano ipotizzato la struttura discontinua della radiazione elettromagnetica, come abbiamo discusso nei paragrafi precedenti, e infine nel 1911 Rutherford aveva formulato il modello nucleare dell'atomo, costituito da un nucleo positivo, praticamente puntiforme rispetto alle dimensioni dell'atomo ( $10^{-15}$  m contro  $10^{-10}$  m), e circondato da una nuvola negativa di elettroni, che venivano pensati in moto lungo orbite stazionarie intorno al nucleo (vedi paragrafo 1.7).

Il modello atomico di Rutherford non era però sostenibile in modo classico: un'orbita elettronica, pur potendo essere di equilibrio da un punto di vista puramente meccanico, non lo poteva essere da un punto di vista elettrodinamico, a causa dell'emissione da parte di una carica che si muove con moto accelerato. Gli elettroni dovrebbero perciò compiere orbite spiraleggianti andando a finire sul nucleo in un tempo molto breve, dell'ordine di  $10^{-11}$  s (vedi esempio 13.6), e in questo moto dovrebbero emettere una radiazione con spettro continuo. Tutto ciò è contrario all'evidenza sperimentale di stabilità degli atomi: le loro dimensioni sono certamente costanti e non si riducono rapidamente a quelle del nucleo; inoltre, quando emettono, lo spettro non è continuo.

Nel suo modello dell'atomo di idrogeno Bohr postulò che l'elettrone potesse descrivere orbite circolari attorno al protone e che queste orbite fossero stazionarie, senza emissione di radiazione, ammettendo che a livello atomico le leggi che regolano gli stati stazionari siano diverse da quelle della fisica classica. Inoltre egli impose la *quantizzazione del momento angolare*, da cui deriva la quantizzazione del raggio dell'orbita e dell'energia, come abbiamo descritto nel paragrafo 2.3. In tal modo egli ottenne l'espressione

$$U_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.17) \quad \text{Energia di legame}$$

per l'energia di legame dell'elettrone in funzione del numero quantico  $n$ .

L'energia dell'elettrone risulta pertanto quantizzata: in una situazione normale l'atomo è nello stato fondamentale ( $n = 1$ ) e l'energia di legame dell'elettrone vale  $U_1 = -13.6$  eV; a seguito di un trasferimento di energia, che può ad esempio essere provocato da un urto contro un'altra particella, l'atomo passa in uno stato eccitato, con energia di legame dell'elettrone pari a  $U_2 = -3.4$  eV,  $U_3, \dots$ . Dallo stato eccitato l'atomo torna allo stato fondamentale in un tempo molto breve ( $\sim 10^{-9}$  s) direttamente, mediante un solo salto quantico, o passando attraverso livelli energetici intermedi. L'ulteriore ipotesi fondamentale di Bohr è che in un qualsiasi passaggio da uno stato con  $n = n_1$  ad uno stato con  $n = n_2 < n_1$ , cioè nel processo di diseccitazione, l'atomo emetta un quanto di energia elettromagnetica

$$h\nu = U_{n_1} - U_{n_2} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = 13.6 \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \text{ eV} \quad (18.18)$$

Viene così incorporata nel modello, per spiegare l'emissione, la stessa ipotesi fatta da Einstein per l'assorbimento nell'effetto fotoelettrico: lo scambio di energia avviene per quantità discrete  $h\nu$ .

La struttura della formula di Bohr (18.18) è identica a quella di (18.16): dal confronto si ricava l'espressione esplicita della costante di Rydberg,

$$R_H = \frac{1}{hc} \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2\hbar^3 c} = 1.0973732 \cdot 10^{-2} \text{ nm}^{-1}$$

che è molto simile al valore misurato sperimentalmente. L'accordo diventa perfetto se al posto della massa  $m$  dell'elettrone si sostituisce la massa ridotta del sistema protone-elettrone, pari a  $mm_p / (m + m_p)$ , tenendo così conto che il moto avviene attorno al centro di massa del sistema (vedi paragrafo 5.6 del volume primo).

*Lo spettro a righe dell'idrogeno atomico riflette pertanto la struttura quantizzata dell'energia di legame dell'elettrone.* La serie di Lyman ( $n_2 = 1$ ) si ottiene quando l'elettrone da uno stato eccitato torna direttamente nello stato fondamentale, quella di Balmer quando l'elettrone nella diseccitazione passa attraverso il primo livello eccitato ( $n_2 = 2$ ) e così via. Nella figura 18.12 sono mostrati gli schemi dei livelli e delle rispettive serie di emissione; si riveda l'analogia figura 2.21.

Dato che l'energia del sistema protone-elettrone può assumere solo i valori (18.17), che sono detti *livelli energetici* del sistema stesso, un fotone può essere assorbito solo se ha un'energia  $hv$  che corrisponde ad un salto quantico tra i livelli (18.17). In altre parole la (18.18) vale per l'emissione secondo lo schema  $U_{n_1} \rightarrow U_{n_2} + hv$ , in cui il numero quantico diminuisce, e vale anche per l'assorbimento secondo lo schema contrario in cui il numero quantico aumenta:  $hv + U_{n_1} \rightarrow U_{n_2}$ . È quindi ovvio che lo spettro di assorbimento sia eguale a quello di emissione (si riveda la figura 16.31). Nell'idrogeno atomico in condizioni normali gli atomi sono nello stato fondamentale e in assorbimento si osservano solo le righe della serie di Lyman; se invece una certa percentuale di atomi è in uno stato eccitato si osservano in assorbimento anche righe delle altre serie. Uno stato eccitato può essere popolato ad esempio portando il gas ad alta temperatura (eccitazione per urti termici): allo scopo è necessario che  $k_B T$  sia dell'ordine di  $\Delta U$  e, se prendiamo  $\Delta U = U_2 - U_1 = 10.2 \text{ eV}$ , si trova  $T = 1.18 \cdot 10^5 \text{ K}$ ; in effetti la serie di Balmer in assorbimento è stata osservata nell'atmosfera di certe stelle.

Oltre che all'idrogeno il modello di Bohr fu applicato con successo agli atomi idrogenoidi, cioè aventi un solo elettrone di valenza; esso venne successivamente ampliato e perfezionato da Sommerfeld, secondo le linee descritte nel paragrafo 2.3. Tuttavia la sua estensione ad atomi più complessi non era facile, restava da un punto di vista teorico l'incongruenza di utilizzare alcuni concetti classici come quelli di orbite circolari ed ellittiche di equilibrio e di rifiutarne altri, come l'emissione di radiazione durante il moto degli elettroni lungo tali orbite; in seguito si pose il problema di come inquadrare lo spin nel modello (paragrafo 9.10) ed altri ancora. Una coerente formulazione quantistica venne raggiunta solo nel 1925 da Schrödinger e poi da Heisenberg e Born.

### Livelli energetici

Malgrado i suoi difetti il modello di Bohr ha avuto un'enorme importanza per la comprensione dei fenomeni atomici e rimangono valide le ipotesi che un atomo possa esistere solo in stati quantizzati di energia e che l'emissione e l'assorbimento di energia elettromagnetica avvengano sotto forma di quanti aventi energia pari a quella di un salto quantico tra due livelli. Il concetto è esteso a qualsiasi sistema atomico, anche nella materia condensata. Quando gli atomi non sono liberi la loro interazione porta ad un aumento del numero di livelli e ad un avvicinamento degli stessi: lo spettro dei livelli può essere così fitto che la radiazione emessa può apparire continua, come succede per la radiazione termica, risultato sempre di emissioni atomiche, ma appunto tra livelli distribuiti praticamente con continuità.

Nelle molecole sono quantizzati anche gli stati che corrispondono a configurazioni geometriche diverse da quella fondamentale (stati vibrazionali e stati rotazionali). Si hanno dun-

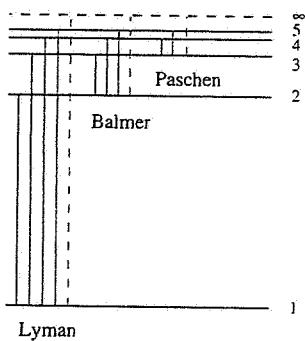


Figura 18.12

que anche per tali stati processi di emissione e assorbimento attraverso salti quantici, ma con valori di  $h\nu$  molto piccoli, che arrivano al campo delle microonde. Nella tabella 18.4 riportiamo gli ordini di grandezza di alcune energie tipiche, con i relativi valori di frequenza e lunghezza d'onda.

Tabella 18.4 Ordini di grandezza di alcune energie atomiche tipiche

$\geq$	1 KeV	$2.42 \cdot 10^{17}$ Hz	$1.24 \cdot 10^{-9}$ m	stato fondamentale di atomi complessi
10	eV	$2.42 \cdot 10^{15}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$	stato fondamentale dell'idrogeno
1	eV	$2.42 \cdot 10^{14}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	energia di legame dell'elettrone di valenza dei metalli alcalini
0.1	eV	$2.42 \cdot 10^{13}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$\Delta U$ tra stati vibrazionali
0.01	eV	$2.42 \cdot 10^{12}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$\Delta U$ tra stati rotazionali

Tutto lo spettro delle onde elettromagnetiche che va dalle microonde ai raggi X è utile per lo studio delle separazioni  $\Delta U$  tra livelli energetici atomici e molecolari attraverso fenomeni di assorbimento; in ogni caso si manifesta l'aspetto quantistico della radiazione.

L'esistenza di livelli energetici anche in atomi diversi dall'idrogeno venne provata nel 1914, subito dopo la pubblicazione del modello di Bohr, da Franck e Hertz (soltanto omonimo dell'Hertz scopritore delle onde elettromagnetiche). Il dispositivo sperimentale, molto semplice, è illustrato in figura 18.13. Dentro un bulbo contenente vapori di mercurio a bassa pressione sono disposti tre elettrodi, il catodo C che emette elettroni per effetto termoelettronico (paragrafo 6.5), una griglia G positiva che attira gli elettroni e un anodo A leggermente negativo rispetto alla griglia (circa  $-0.5$  V di d.d.p.). La corrente che si misura nel galvanometro all'aumentare della d.d.p. tra griglia e catodo mostra dei picchi caratteristici, separati da 4.9 V ovvero, in termini di energia degli elettroni accelerati, da 4.9 eV. Il risultato si spiega così. Un elettrone con energia cinetica  $E_k$  inferiore alla differenza  $U_2 - U_1$ , tra le energie del primo livello eccitato e del livello fondamentale dell'atomo di mercurio non riesce ad eccitare l'atomo, contro cui compie urti elasticamente conservando la propria energia cinetica. All'aumentare di  $V_G - V_C$  si raccolgono sempre più elettroni e questi riescono a superare la d.d.p. decelerante  $V_A - V_G$ : la corrente misurata cresce. Quando l'elettrone, nelle vicinanze di G, ha energia cinetica che eguaglia o supera di poco  $U_2 - U_1$ , l'urto può essere anelastico con perdita totale o quasi totale dell'energia cinetica da parte dell'elettrone e questo, dopo l'urto, non ha energia sufficiente per raggiungere l'anodo: la corrente cala bruscamente. Facendo aumentare ancora  $V_G - V_C$  oltre il valore critico 4.9 V, l'elettrone raggiunge l'energia cinetica  $E_k = 4.9$  eV in un punto intermedio tra catodo e griglia, può compiere lì un urto anelastico perdendo la propria  $E_k$  ed essere ancora accelerato, superare la griglia e raggiungere l'anodo: la corrente cresce di nuovo. Però con  $V_G - V_C = 9.8$  V l'elettrone può compiere due urti anelastici, di cui il secondo in prossimità della griglia e siamo così nelle condizioni precedenti, in cui la corrente subisce un nuovo calo; e così via. Ad ogni urto anelastico l'atomo di mercurio compie una transizione verso uno stato eccitato e poi si disegge: e in effetti si osserva che solo quando la d.d.p.  $V_G - V_C$  raggiunge il valore 4.9 V il mercurio comincia ad emettere una riga la cui lunghezza d'onda è proprio  $\lambda = c/v = ch/\Delta U = 253$  nm. Si tratta di una ben nota riga dello spettro del mercurio e l'esperimento conferma l'esistenza dei livelli energetici atomici.

### Ionizzazione

Il trasferimento di energia ad un atomo può anche causare il distacco di un elettrone e la formazione di una coppia ione positivo-elettrone libero. Il fenomeno si chiama *ionizzazione* e l'energia minima che deve essere ceduta perché ciò avvenga si chiama energia di ionizzazione o anche potenziale di ionizzazione  $I$ . Nell'idrogeno  $I = 13.6$  eV, evidentemente eguale al valore dell'energia di legame dell'elettrone nello stato fondamentale, nell'elio  $I = 24.6$  eV. Se l'energia ceduta è maggiore di  $I$ , la parte eccedente è acquistata dall'elettrone sotto forma di energia cinetica.

In particolare la causa della ionizzazione può essere l'assorbimento di un fotone (*fotoionizzazione*) e il bilancio energetico formalmente è eguale a quello scritto per l'effetto fotoelettrico:  $h\nu = I + E_k$ . Lo spettro di assorbimento è continuo, in quanto l'elettrone non passa ad

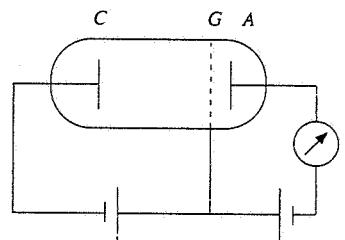


Figura 18.13

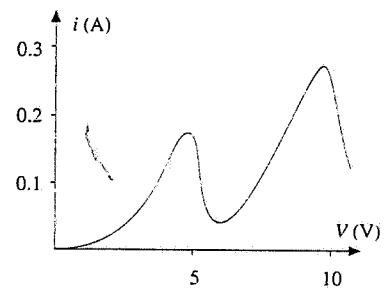


Figura 18.14

un altro livello energetico, ma può assumere un qualsiasi valore di energia, eguale a  $h\nu - I$ . Il processo inverso della fotoionizzazione è la *cattura radiativa*, in cui un elettrone libero viene catturato da uno ione positivo, si forma un atomo neutro ed è emesso un fotone che porta via l'eccesso di energia.

Il passaggio di una particella carica attraverso un gas comporta una serie di urti contro le molecole del gas con conseguenti fenomeni di ionizzazione; mediamente in un gas a pressione atmosferica il numero di coppie ione-elettrone formate in un centimetro di percorso è compreso tra 10 e 100. Con un'opportuna disposizione di campo elettrico si possono raccogliere gli elettroni liberati moltiplicandone il numero e ottenendo un segnale elettrico rivelabile. Su questo principio sono basati svariati rivelatori di particelle ionizzanti, utilizzati sia per mettere in evidenza il passaggio di una singola particella che per misure integrali di flusso (camere a ionizzazioni e contatori di Geiger-Müller per misure di radioattività).

### Raggi X caratteristici

Anche la produzione dei raggi X caratteristici è originata da un fenomeno di ionizzazione. Quando gli elettroni accelerati nel dispositivo della figura 13.26 urtano il bersaglio, che è composto normalmente da un metallo pesante i cui atomi hanno il nucleo circondato da molti elettroni, essi possono causare l'emissione degli elettroni più interni in quanto hanno energie sufficienti per rompere il legame elettrone-nucleo; si tratta di energie di legame che arrivano fino a 100 keV (nell'uranio 117 keV). Un elettrone posto in un livello energetico superiore scende ad occupare il livello inferiore vuoto causando l'emissione di un fotone con energia  $h\nu = \Delta U$ ; a sua volta l'elettrone sceso di livello lascia libero un posto e con lo stesso meccanismo viene emesso un altro fotone. Quando il livello di arrivo è il più basso possibile si hanno le righe della cosiddetta serie K, per livelli di arrivo superiori si hanno le serie L, M, N ... Tali serie sono caratteristiche dell'elemento bersaglio.

La discontinuità a circa 90 keV nella curva del coefficiente di assorbimento del piombo (figura 18.11) segnala una maggior probabilità di assorbimento dei fotoni in corrispondenza dell'energia di legame del livello K del piombo, assorbimento a cui seguono l'emissione di un elettrone e di un fotone X della serie K.

Per quanto riguarda lo spettro continuo di raggi X emesso con il meccanismo del frenamento discusso nel paragrafo 13.7, il fotone di massima energia viene emesso quando l'elettrone perde la sua energia cinetica  $eV$  in un unico processo. Per un tubo di Coolidge a cui è applicata la d.d.p.  $V = 50$  KV,

$$E_{k,\max} = h\nu_{\max} = 50 \text{ KeV} = 8 \cdot 10^{-15} \text{ J} , \\ \nu_{\max} = 1.21 \cdot 10^{19} \text{ Hz} , \lambda_{\min} = c / \nu_{\max} = 2.48 \cdot 10^{-11} \text{ m} .$$

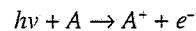
I fotoni di energia inferiore sono emessi in processi in cui l'elettrone perde una parte della propria energia.

La produzione di raggi X caratteristici può essere indotta anche facendo urtare su un bersaglio un fascio di protoni con energia cinetica dell'ordine del MeV. Essendo la massa dei protoni molto maggiore di quella degli elettroni ( $m_p / m_e = 1836$ ), i protoni sono meno accelerati dai campi elettrici presenti all'interno del bersaglio e quindi il rapporto tra energia spesa nel processo di emissione di raggi X caratteristici ed energia spesa nel processo di emissione di raggi X di frenamento è migliore per i protoni che per gli elettroni.

La tecnica PIXE (dalle iniziali in lingua inglese, Proton Induced X rays Emission) è utilizzata ad esempio in misure di inquinamento per riconoscere la presenza di materiali pesanti in campioni prelevati dall'ambiente.

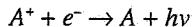
### Nota. Ionosfera. Fascia di ozono

Abbiamo citato nel paragrafo 13.10 l'esistenza della ionosfera e l'assorbimento atmosferico dei raggi ultravioletti. Nella ionosfera il principale meccanismo di formazione di cariche libere è la fotoionizzazione



dove  $A$  è un atomo di azoto o di ossigeno. I rispettivi potenziali di ionizzazione sono  $I_1 = 7.4$  eV e  $I_2 = 5.1$  eV; le lunghezze d'onda per ionizzare azoto e ossigeno sono  $\lambda_1 = c/v = hc/I_1 = 167.5$  nm e  $\lambda_2 = 243$  nm o valori minori; esse si collocano nell'ultravioletto.

Accanto alla ionizzazione c'è la cattura radiativa



e tra i due processi si raggiunge un equilibrio con una certa densità di carica libera. La fascia di ozono tra 20 e 30 km di quota esiste a causa dei seguenti processi chimici, nei quali è fondamentale l'apporto energetico della radiazione ultravioletta:

- a) formazione di ossigeno atomico,  $h\nu + O_2 \rightarrow O + O$ ,  $\lambda \approx 200$  nm;
- b) formazione di ozono,  $O + O_2 \rightarrow O_3$ ;
- c) scissione dell'ozono,  $h\nu + O_3 \rightarrow O + O_2$ ,  $\lambda \approx 300$  nm.

Tra processo di formazione e processo di scissione, che avviene anche con altri meccanismi ricordati nel paragrafo 13.12, c'è un equilibrio delicato.

### Laser e maser

Nel 1917 Einstein analizzò le possibilità di interazione tra un fotone e un atomo. Considerando due livelli energetici  $U_1$  e  $U_2$ , tali che  $U_2 - U_1 = h\nu$ , egli prese in esame tre possibili processi:

- transizione spontanea da  $U_2$  a  $U_1$  con emissione di un fotone  $h\nu$ ;
- assorbimento di un fotone  $h\nu$  e transizione da  $U_1$  a  $U_2$ ;
- emissione stimolata da  $U_2$  a  $U_1$ : in questo caso l'arrivo del fotone, che non viene assorbito, stimola il decadimento con emissione di un fotone identico a quello incidente.

Einstein dimostrò che le probabilità per l'assorbimento e per l'emissione stimolata sono eguali. In un sistema ordinario in cui gli atomi sono tutti nel livello  $U_1$  si osserva solo assorbimento; se però si riesce a popolare anche il livello  $U_2$  si deve osservare con eguale probabilità anche l'emissione stimolata.

Il funzionamento del *laser* si basa proprio su questa proprietà e sull'esistenza in certi atomi di *livelli energetici metastabili*. Con questo termine si indicano livelli eccitati i quali vivono per un tempo molto maggiore di  $10^{-9} \div 10^{-8}$  s, che è la durata tipica di un livello eccitato normale; un livello metastabile può avere una vita di  $10^{-6}$  s, in certi casi anche di  $10^{-3}$  s.

Uno schema di principio (che non è l'unico) è il seguente. Si abbia un sistema atomico a tre livelli, indicati nella figura 18.16: 1 è il livello fondamentale, 2 il livello eccitato normale, 3 il livello eccitato metastabile. L'atomo, a seguito di un processo di assorbimento, passa da 1 a 2, poi rapidamente da 2 a 3 e in 3 resta un tempo lungo; l'arrivo di un fotone con energia  $h\nu = U_3 - U_1$  provoca l'emissione stimolata. Con un'opportuna fornitura di energia (*pompaggio ottico*) si spopola lo stato 1 e si popola lo stato 3 (passando per 2): si realizza così l'inversione di popolazione, nel senso che gli atomi nel livello metastabile sono in numero maggiore di quelli nel livello fondamentale. Se inoltre con un adeguato sistema di specchi si riesce ad intrappolare all'interno del materiale emettitore la maggior parte dei fotoni emessi nella transizione 3-1, questi provocano emissione stimolata e il fenomeno si amplifica, purché appunto il livello metastabile sia continuamente riempito. Rendendo semitransparente uno degli specchi si ha la fuoriuscita della luce laser.

Si osservi che mentre gli atti di emissione spontanea in una sorgente sono incoerenti, cioè casuali e scoordinati, *nel laser le emissioni atomiche sono tutte in fase*, poiché il fotone emesso per emissione stimolata è coerente con il fotone stimolante.

Esempio di laser a tre livelli è il laser a rubino ( $Al_2O_3$ ) in cui alcuni atomi di alluminio sono sostituiti da atomi di cromo, che presentano lo schema di livelli richiesto. Il pompaggio ottico è effettuato con luce gialla di lunghezza d'onda  $\lambda = 550$  nm ( $U_2 - U_1 \approx 2.3$  eV), il livello metastabile vive circa  $10^{-3}$  s. la luce laser è rossa con  $\lambda = 694.3$  nm ( $U_3 - U_1 \approx 1.8$  eV).

Il processo di amplificazione attraverso emissione stimolata di radiazione si ha anche nel campo delle microonde (processo *maser*). Il sistema emettitore è una molecola, il livello 3 è un livello rotazionale e la differenza  $U_3 - U_1$  vale  $10^{-2}$  eV o anche meno.

### 18.7 Onde materiali. Relazione di de Broglie

Nel 1924 de Broglie, di fronte all'evidenza degli aspetti corpuscolari della radiazione elettromagnetica, avanzò l'ipotesi che in natura vi fosse una simmetria

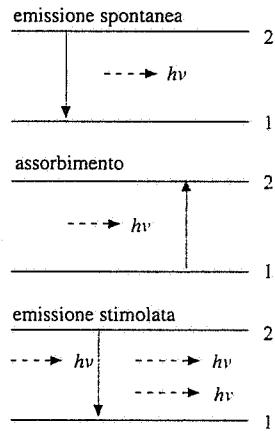


Figura 18.15

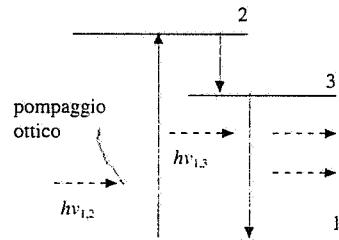


Figura 18.16

di comportamento tra radiazione e materia. Come ad un campo elettromagnetico che si propaga per onde di frequenza  $\nu$  è lunghezza d'onda  $\lambda$  viene associata una particella di massa nulla, il fotone, avente energia e quantità di moto  $U = h\nu$ ,  $p = h\nu/c = h/\lambda$ , così de Broglie propose di associare ad una particella di massa  $m$  e quantità di moto  $p$  un campo di materia che presentasse proprietà ondulatorie, con lunghezza d'onda e frequenza date dalle relazioni

Relazione di de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{U}{h}; \quad (18.19)$$

la prima in particolare è nota come *relazione di de Broglie*.

Calcoliamo subito il valore di  $\lambda$  per un elettrone non relativistico, accelerato da una d.d.p.  $V$ ; abbiamo

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = eV, \quad p = mv = \sqrt{2mE_k} = \sqrt{2meV}$$

e pertanto la lunghezza d'onda espressa in metri vale

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{V}} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k(\text{eV})}};$$

in queste formule la d.d.p.  $V$  è espressa in volt e l'energia cinetica in elettronvolt. Si trova ad esempio

$$\begin{array}{lll} V = 100 \text{ V} & E_k = 100 \text{ eV} & \lambda = 122.6 \text{ pm} \\ V = 10^3 \text{ V} & E_k = 1 \text{ keV} & \lambda = 38.8 \text{ pm} \\ V = 10^4 \text{ V} & E_k = 10 \text{ keV} & \lambda = 12.3 \text{ pm} \end{array}$$

Abbiamo visto nel paragrafo 16.10 che le distanze interatomiche in un cristallo sono dell'ordine di 100 pm; le onde elettroniche dovrebbero pertanto subire gli stessi fenomeni che sono stati descritti per i raggi X. E in effetti Davisson e Germer ritrovarono, facendo incidere un fascio di elettroni di 54 eV su un cristallo, uno spettrogramma analogo a quello di Laue (figura 16.56), mentre G. P. Thomson ritrovò, utilizzando una polvere cristallina, uno spettrogramma analogo a quello di Debye-Scherrer (figura 16.57). Misure di lunghezza d'onda, eseguite secondo il metodo di Bragg, diedero i valori previsti dalla relazione di de Broglie.

La (18.19) vale per qualsiasi tipo di particella e quindi anche per i neutroni. In particolare, se consideriamo neutroni termici, chiamati così perché la loro energia cinetica è dell'ordine di

$$E_k = \frac{3}{2}k_B T = 6.21 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 3.88 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \quad (\text{con } T = 300 \text{ K}),$$

troviamo la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{E_k(\text{eV})}} = 1.45 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 145 \text{ pm},$$

di nuovo dell'ordine di grandezza delle costanti reticolari dei cristalli..

La diffrazione di neutroni termici ( $E_k \sim 10^{-2}$  eV,  $v \sim 10^3$  m/s) è stata uno strumento molto importante per lo studio di strutture di corpi solidi. E le proprietà ondulatorie degli elettroni hanno permesso di superare il limite ottico nel potere

risolutivo lineare di un microscopio (paragrafo 16.4): data la dipendenza diretta da  $\lambda$ , il miglioramento è stato di oltre tre ordini di grandezza.

### Esempio 18.9

Un fascio di neutroni con energia cinetica  $E_k = 50 \text{ MeV}$  incide su un foglio di grafite. Misurando il numero di neutroni diffusi da urti con i nuclei di carbonio in funzione dell'angolo  $\theta$  tra la direzione uscente e la direzione incidente, si trova una tipica figura di diffrazione con il primo minimo a  $\theta = 55.3^\circ$ . Calcolare il raggio del nucleo di carbonio.

#### Soluzione

I neutroni non sono relativistici ( $E_k \ll mc^2 = 939.6 \text{ MeV}$ ) e possiamo usare la formula appena scritta per la lunghezza d'onda dei neutroni:

$$\lambda = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{50 \cdot 10^6}} = 4.045 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Consideriamo un nucleo di carbonio come un disco opaco e, applicando il principio di Babinet, utilizziamo la (16.6):

$$\sin \theta = 0.61 \frac{\lambda}{R} \Rightarrow R = 3.0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Ancora una volta vediamo come, disponendo della lunghezza d'onda adatta, sia possibile avere informazioni strutturali con esperimenti di diffrazione.

Un aspetto interessante di (18.19) è la sua applicazione al modello di Bohr: se pensiamo all'elettrone, che è in uno stato stazionario lungo un'orbita circolare, come ad un'onda, la lunghezza della circonferenza deve essere eguale ad un multiplo intero della lunghezza d'onda, così come in una corda o in una canna d'organo la lunghezza d'onda deve essere in un certo rapporto con la dimensione del sistema se si vuole mantenere un'onda stazionaria. Quindi, affinché l'onda elettronica sia stazionaria, deve essere

$$n\lambda = 2\pi r \Rightarrow n \frac{\hbar}{p} = 2\pi r, \quad pr = L = n \frac{\hbar}{2\pi}$$

il momento angolare risulta quantizzato. La natura ondulatoria dell'elettrone servirebbe in questo modo da giustificazione per una delle ipotesi fondamentali del modello di Bohr.

Un'altra considerazione riguarda la velocità di fase e la velocità di gruppo delle onde di materia. Limitandoci al caso non relativistico abbiamo

$$v = \frac{U}{h} = \frac{E_k}{h} = \frac{p^2}{2mh}, \quad \lambda v = \frac{\hbar}{p} \frac{p^2}{2mh} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

la velocità di fase  $\lambda v$  è eguale a metà della velocità della particella. Questo risultato paradossale in realtà si applica ad un'onda sinusoidale, cioè indefinita, mentre possiamo ritenere più appropriata la descrizione di una particella tramite un pacchetto d'onde, che ha in sé il concetto di localizzazione. Si trova, utilizzando la (12.60) e la (18.19),

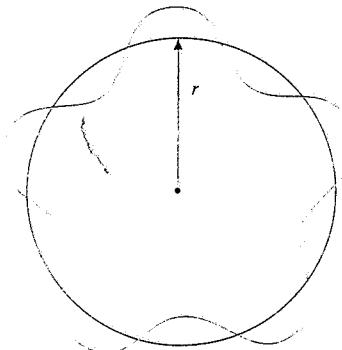


Figura 18.17

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{h} dp, v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{U}{h} \Rightarrow d\omega = \frac{2\pi}{h} dU,$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dU}{dp} = \frac{p}{m} = v :$$

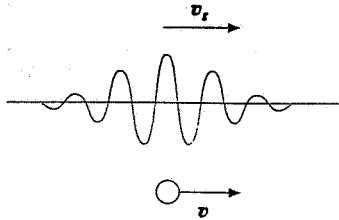


Figura 18.18

la velocità di gruppo, cioè la velocità del pacchetto d'onda, coincide con la velocità della particella. Il risultato resta vero anche se si utilizza la relazione relativistica  $U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  invece di  $U = p^2 / 2m$ .

### Principio di complementarietà

Nel comportamento delle particelle (elettroni, protoni, neutroni, ecc.) si ritrova il dualismo tra aspetto corpuscolare e aspetto ondulatorio che si è presentato per la radiazione. L'aspetto ondulatorio è stato messo in evidenza per la prima volta delimitando il fronte d'onda con ostacoli di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda; dalle formule scritte per elettroni e neutroni si vede che questi effetti si ottengono con piccoli valori dell'energia, cioè con piccole velocità. Al crescere dell'energia le lunghezze d'onda diventano troppo corte perché si possano osservare fenomeni di diffrazione nel modo usuale.

Consideriamo ad esempio un elettrone con energia  $U$  molto maggiore dell'energia a riposo  $U_0 = mc^2 = 0.5 \text{ MeV}$ ; la quantità di moto è  $p = m\gamma v = m\gamma\beta c$ , dove abbiamo scritto la velocità  $v$  come  $\beta c$  e  $\gamma = U/U_0$ . Ricordando la definizione di lunghezza d'onda Compton dell'elettrone data nel paragrafo 18.5, la lunghezza d'onda è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{\lambda_c}{\gamma\beta} \approx \frac{\lambda_c}{\gamma} = \frac{2.43 \cdot 10^{-12}}{\gamma} \text{ m},$$

in quanto se  $U \gg U_0$   $\beta \approx 1$ . Con  $U = 1 \text{ GeV}$   $\gamma = 2 \cdot 10^3$  e  $\lambda = 1.22 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , confrontabile con le dimensioni di un protone; con  $U = 100 \text{ GeV}$ , massima energia oggi raggiungibile (nel LEP del CERN, paragrafo 13.7),  $\gamma = 2 \cdot 10^5$  e  $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-17} \text{ m}$ .

D'altra parte a bassa energia, dove è facile verificare il comportamento ondulatorio, ci sono fenomeni come il moto in campi elettrici e magnetici nei quali la spiegazione avviene in termini corpuscolari.

In conclusione, sia nel caso della radiazione che nel caso di una particella materiale, certi fenomeni possono essere spiegati solo ricorrendo al concetto di onda ed altri solo al concetto di particella. È però essenziale notare che in un particolare fenomeno la spiegazione si ha utilizzando l'uno o l'altro dei due aspetti, ma non entrambi: se in un esperimento si mette in evidenza l'aspetto corpuscolare non si può mettere in evidenza nello stesso esperimento l'aspetto ondulatorio e viceversa.

Un esempio decisivo è il seguente: in un esperimento di Young riduciamo l'intensità della luce incidente ad un punto tale che, in termini corpuscolari, possiamo dire che l'apparato è attraversato da un fotone per volta. Ci si potrebbe aspettare che in queste condizioni il fotone, comportandosi come un punto materiale, passi per una fenditura o per l'altra e che sullo schermo, realizzato con una pellicola fotografica, si formino dopo un certo tempo due macchie. Invece sullo schermo si forma la figura di interferenza, segno che ogni singolo fotone si comporta come un'onda e che l'interferenza si ha tra le due parti del fronte d'onda delimitate dalle fenditure (lo stesso esperimento è stato condotto con elettroni che attraversano un cristallo: anche se passa un elettrone alla volta si osserva diffrazione, che è dovuta all'interferenza tra le varie parti del fronte d'onda del singolo elettrone). Se però in

un qualsiasi modo cerchiamo di rivelare da che parte è passato il fotone troviamo che la figura di interferenza scompare; *non appena si mette in evidenza un aspetto, l'altro non è più osservabile contemporaneamente.*

La situazione è stata riassunta da Bohr in un *principio* detto di complementarietà: gli aspetti corpuscolare e ondulatorio sono complementari e le caratteristiche di radiazione e materia hanno bisogno di entrambi gli aspetti per essere spiegate in modo completo.

### 18.8 Il principio di indeterminazione

La rappresentazione di una particella tramite un pacchetto d'onda porta con sé una dimensione spaziale  $\Delta x$  e una durata temporale  $\Delta t$  all'interno delle quali pensiamo localizzata la particella. Dalla discussione del paragrafo 12.10 sappiamo che i valori di  $\Delta x$  e  $\Delta t$  sono legati alle larghezze delle bande di lunghezza d'onda e di pulsazione significative dalle relazioni (12.57)

$$\Delta x \Delta k \geq 1 \quad , \quad \Delta t \Delta \omega \geq 1$$

Con riferimento alla prima ricordiamo che un pacchetto spazialmente molto stretto contiene numerosissime lunghezze d'onda e che se invece le lunghezze d'onda sono poche il pacchetto è largo; al limite, con una sola lunghezza d'onda il pacchetto è una pura sinusoide che si estende da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Questi risultati classici, applicati alle onde di materia per le quali valgono le relazioni di de Broglie (18.19), acquistano un'importanza fondamentale. Effettuando le sostituzioni

$$\Delta k = \Delta \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) = \Delta \left( \frac{2\pi p}{h} \right) = \frac{2\pi}{h} \Delta p \quad ,$$

$$\Delta \omega = \Delta (2\pi v) = \Delta \left( \frac{2\pi U}{h} \right) = \frac{2\pi}{h} \Delta U \quad ,$$

le (12.57) diventano

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar \quad , \quad \Delta t \Delta U \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar \quad . \quad (18.20)$$

Relazioni di indeterminazione

Dall'aspetto ondulatorio della materia deriva una *indeterminazione* per le grandezze tipiche dell'aspetto corpuscolare come posizione spaziale e temporale, quantità di moto, energia. Le (18.20) hanno infatti questo significato: *l'incertezza  $\Delta x$  con cui si localizza spazialmente una particella e l'incertezza  $\Delta p$  con cui se ne misura simultaneamente la quantità di moto (lungo l'asse  $x$ ) non sono indipendenti, in quanto il loro prodotto non può scendere al di sotto di  $\hbar$ .* Se la misura spaziale è molto precisa, diventa molto imprecisa la misura della quantità di moto e viceversa; lo stesso vale per le incertezze con cui si misurano simultaneamente tempo ed energia.

Le relazioni (18.20) sono l'applicazione alle coppie di variabili  $(x, p_x)$  e  $(t, U)$  del *principio di indeterminazione di Heisenberg*, la cui prima formulazione risale al 1927 e che è uno dei capisaldi della fisica quantistica: relazioni analoghe valgono per le coppie  $(y, p_y)$ ,  $(z, p_z)$  e, più in generale, per opportune coppie di variabili determinate in base al formalismo quantistico.

Il principio di indeterminazione comporta una revisione sostanziale di alcuni concetti che, validi nel mondo macroscopico, non possono essere trasportati nei fenomeni atomici. Per il punto materiale della *meccanica classica* ammettiamo di poter *misurare simultaneamente* posizione e quantità di moto *con la massima precisione possibile* e, nota la legge del moto, di poter dedurre esattamente dallo stato iniziale l'evoluzione successiva. Le verifiche sperimentali sono innumerevoli e non abbiamo dubbi che tale impostazione, detta *deterministica*, sia perfettamente adeguata. L'operazione di misura o non perturba o perturba in modo prevedibile il sistema in esame.

A *livello atomico* tutto ciò non è più sostenibile: il procedimento stesso di misura può

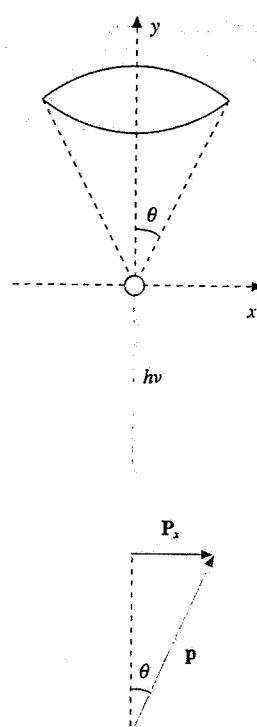


Figura 18.19

provocare una *perturbazione* tale che l'effettuazione di una determinazione precisa di una grandezza ha come risultato l'impossibilità di conoscere simultaneamente con precisione un'altra grandezza. Non si tratta di una limitazione strumentale, ma di un effetto intrinseco alla misura, che deriva dalla natura ondulatoria della materia. Una conseguenza è che lo stato iniziale non può essere completamente determinato: ad esempio si conoscono  $x$  e  $t$ , ma allora sono indeterminate, entro i limiti (18.20),  $p$  e  $U$  o viceversa; l'indeterminazione iniziale si riflette sugli stati successivi e bisogna abbandonare il determinismo adottando invece leggi probabilistiche, cui accenneremo alla fine del paragrafo.

Le due situazioni che abbiamo illustrato non sono in reale contrasto, dato il valore di  $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34}$  Js. Si ammette la validità generale del principio di indeterminazione; esso però comporta effettive limitazioni nella determinazione delle grandezze interessate solo per particelle atomiche e subatomiche e non per oggetti macroscopici, come risulterà più avanti da una serie di esempi numerici. Esaminiamo prima alcune situazioni ideali, ma non impossibili, che chiariscono il significato del principio di indeterminazione.

Un esempio, dovuto a Bohr, riguarda la perturbazione comunicata ad un elettrone di cui si vuole conoscere la posizione. L'elettrone viene illuminato ed è osservato con un microscopio; la situazione limite, al di sotto della quale non c'è la misura stessa, è quella in cui si utilizza un fotone che urta l'elettrone e viene da questo diffuso, come nell'effetto Compton. Rispetto alla direzione incidente (asse  $y$  della figura 18.19) il fotone diffuso può formare al massimo l'angolo  $\theta$ , se deve essere rivelato dal microscopio; detta  $p$  la sua quantità di moto, la componente  $p_x$  lungo l'asse  $x$  può variare tra  $-p \sin \theta$  e  $p \sin \theta$ , per cui assumiamo

$$\Delta p_x = p \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \sin \theta .$$

Prima dell'urto la quantità di moto totale lungo l'asse  $x$  era nulla e tale deve essere l'urto; quindi dopo l'urto l'elettrone possiede una quantità di moto con componente  $-p_x$  e con relativa indeterminazione  $\Delta p_x$ . Sappiamo dal paragrafo 16.4 che, a causa della diffrazione, il microscopio dà un'immagine estesa di un oggetto puntiforme e che la minima distanza tra due punti risolvibili è espressa dal potere risolutivo lineare, che nel nostro caso vale

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \theta} .$$

Interpretiamo  $\Delta x$  come l'incertezza sul luogo di origine dei fotoni e pertanto risulta

$$\Delta x \Delta p_x \approx h ,$$

in accordo col limite (18.20) e indipendentemente da  $\theta$  e da  $\lambda$ ; variando questi parametri si può migliorare uno dei fattori, ma si peggiora allo stesso modo l'altro.

Osserviamo che nella misura bisogna utilizzare l'aspetto corpuscolare della radiazione; non avrebbe senso parlare di intensità incidente piccola a piacere, per non perturbare l'elettrone, perché il limite inferiore è  $hc / \lambda$ . Nella determinazione dell'immagine utilizziamo invece l'aspetto ondulatorio, in base al quale il singolo fotone si comporta nel microscopio come un'onda. Ripetendo l'esperimento più volte l'intensità si distribuirebbe sul piano focale secondo la figura di diffrazione; in sé la misura del punto di arrivo del singolo fotone non dà informazione.

Un secondo esempio considera la diffrazione degli elettroni: si abbia un fascio parallelo di elettroni (figura 18.20) e si interponga una fenditura di larghezza  $a$  confrontabile con la lunghezza d'onda degli elettroni, calcolata dalla loro quantità di moto con (18.19). A valle della fenditura, se si misura con un opportuno rivelatore il numero di elettroni che colpiscono i diversi punti di un piano ortogonale all'asse della fenditura, si osserva una figura di diffrazione il cui primo minimo si forma all'angolo  $\theta$  tale che  $a \sin \theta = \lambda$ . La maggior parte degli elettroni colpisce il piano nella regione tra i due primi minimi e, come nell'esempio precedente, possiamo dire che un elettrone passando attraverso la fenditura acquista una componente  $p_y$  della quantità di moto, la cui incertezza è

$$\Delta p_y = p_y = p \sin \theta = p \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a} .$$

La larghezza  $a$  della fenditura corrisponde all'incertezza  $\Delta y$  di localizzazione lungo l'asse  $y$  e anche in questo caso

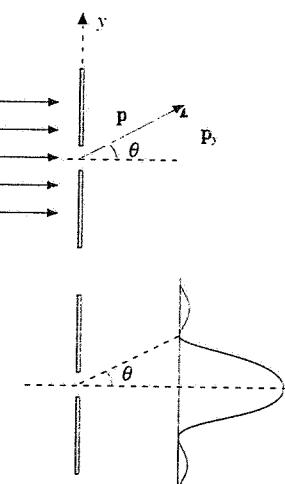


Figura 18.20

$$\Delta y \Delta p_y = h$$

Si tratta evidentemente di esperimenti ideali, sebbene siano significativi nell'indicare come vanno trattati questi problemi; in particolare essi mettono in evidenza il *comportamento probabilistico* del sistema dopo la misura su cui, come già detto, torneremo più avanti.

Con il principio di indeterminazione si completa anche l'affermazione fatta alla fine del paragrafo 18.7 a proposito dell'esperienza di Young in cui nell'apparato passa un solo fotone per volta. Si può infatti dimostrare che il tentativo di rivelare attraverso quale fenditura passi il fotone, senza perturbarlo in modo tale che la figura di interferenza scompaia, comporta la condizione  $\Delta x \Delta p_x \ll \hbar$ , incompatibile con (18.20). C'è quindi *uno stretto legame tra principio di complementarietà e principio di indeterminazione*.

Dopo avere esaminato le implicazioni delle operazioni di misura a livello microscopico, vediamo alcune conseguenze del principio di indeterminazione.

Nel paragrafo 18.6 abbiamo parlato dei livelli energetici eccitati, distinguendo tra quelli a vita corta ( $\sim 10^{-8}$  s) e quelli metastabili, con vita molto più lunga, fino a  $\sim 10^{-3}$  s. La durata dello stato di eccitazione, considerata come un'incertezza sulla localizzazione temporale, comporta un'indeterminazione dell'energia dello stato stesso secondo (18.20):

$$\Delta t = 10^{-8} \text{ s} , \quad \Delta U = \frac{\hbar}{\Delta t} = 10^{-26} \text{ J} = 6.6 \cdot 10^{-8} \text{ eV} ,$$

$$\Delta t = 10^{-3} \text{ s} , \quad \Delta U = 10^{-31} \text{ J} = 6.6 \cdot 10^{-13} \text{ eV} .$$

Questa indeterminazione a sua volta implica un'indeterminazione nella frequenza della riga emessa nel processo di diseccitazione verso lo stato fondamentale:

$$\Delta t = 10^{-8} \text{ s} , \quad \Delta v = \frac{\Delta U}{h} = \frac{1}{2\pi \Delta t} = 1.6 \cdot 10^7 \text{ Hz} ,$$

$$\Delta t = 10^{-3} \text{ s} , \quad \Delta v = 1.6 \cdot 10^2 \text{ Hz} .$$

A tale indeterminazione  $\Delta v$  non contribuisce lo stato fondamentale che, essendo stabile ( $\Delta t = \infty$ ), è ben definito ( $\Delta U = 0$ ).

Ci si riferisce a questo fenomeno con i nomi di larghezza di un livello e *larghezza naturale di una riga spettrale*; la larghezza misurata risulta più grande per l'intervento di altri fenomeni, tra i quali l'effetto Doppler, dovuto al fatto che generalmente l'emissione avviene da parte di atomi in movimento continuo e disordinato. Ad ogni modo si vede il grande vantaggio dell'emissione laser, che sfrutta livelli metastabili, anche per quanto riguarda la monocromaticità di una riga.

Con  $\lambda = 600 \text{ nm}$  ( $v = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ) si avrebbe rispettivamente

$$\Delta \lambda / \lambda = 3.2 \cdot 10^{-8} , \quad \Delta \lambda / \lambda = 3.2 \cdot 10^{-13} ,$$

come larghezze naturali relative (si veda la nota alla fine del paragrafo 16.7).

Un altro risultato interessante è legato alle dimensioni dei sistemi atomici e nucleari. Consideriamo ad esempio un nucleo di deuterio, composto da un protone e da un neutrone legati tra loro dalla forza nucleare. Essi sono localizzati entro una dimensione dell'ordine del raggio nucleare ( $\Delta x \approx 10^{-15} \text{ m}$ ) e da ciò deriva un'indeterminazione nella quantità di moto pari almeno a

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-19} \text{ Ns} \approx 190 \text{ MeV/c} ,$$

dove abbiamo utilizzato per la quantità di moto l'unità

$$1 \frac{\text{MeV}}{\text{c}} = \frac{10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} = 0.53 \cdot 10^{-21} \text{ Ns} .$$

Con esperimenti di diffusione di particelle accelerate, ad esempio protoni, su nuclei di deuterio si trova che la quantità di moto del protone o del neutrone che funge da bersaglio in que-

sto urto ha uno spettro di valori che è in accordo col  $\Delta p$  che abbiamo calcolato. Quando cioè con l'urto localizziamo la particella bersaglio, troviamo dalle leggi di conservazione che la sua quantità di moto ha una certa indeterminazione.

### **La costante di Planck**

In tutti i fenomeni studiati in questo capitolo, che trovano spiegazione soltanto introducendo le condizioni di quantizzazione e il dualismo di comportamento di materia e radiazione, compare la *costante di Planck*  $h$ .

Sostanzialmente  $h$  da una parte costituisce il legame tra l'aspetto corpuscolare e l'aspetto ondulatorio attraverso le relazioni di de Broglie e, con il principio di indeterminazione, fissa l'effetto dell'aspetto ondulatorio sulla precisione con cui sono conoscibili le grandezze relative all'aspetto corpuscolare. Dall'altra  $h$  determina i valori di quantizzazione del momento angolare e correla i salti quantici con le frequenze emesse (paragrafi 9.10 e 18.6).

Il valore di  $h$ , che ricordiamo ancora una volta,

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s} ,$$

fa sì che gli effetti quantistici non siano apprezzabili nel mondo macroscopico e anche, in determinate condizioni, per particelle microscopiche. A questo argomento sono dedicati i prossimi esempi.

### **Esempio 18.10**

Un oscillatore armonico, di massa  $m = 1 \text{ kg}$  e costante elastica  $k = 100 \text{ N/m}$ , oscilla con ampiezza  $A = 10^{-2} \text{ m}$ . Calcolare il numero quantico  $n$  e la variazione relativa di energia per una variazione  $\Delta n = 1$ .

#### **Soluzione**

La frequenza è  $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.59 \text{ Hz}$  per cui  $hv = 1.054 \cdot 10^{-33} \text{ J}$ , l'energia totale  $U = \frac{1}{2} kA^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

Ponendo  $U = nhv$  si ottiene  $n = U/hv = 4.75 \cdot 10^{30}$ . Un salto quantico con  $\Delta n = 1$  comporta  $\Delta U/U = hv/nhv = 1/n = 2.11 \cdot 10^{-31}$ , variazione assolutamente non misurabile. Per numeri quantici così grandi la quantizzazione dell'energia non è osservabile e il comportamento del sistema è puramente classico. Solo quando  $hv$  si avvicina al valore dell'energia del sistema, gli effetti quantistici sono evidenti; dato il valore di  $h$  finora ciò è stato verificato solo in sistemi microscopici. La sensibilità massima che attualmente si raggiunge con oscillatori macroscopici a frequenze di 1 kHz ( $hv = 4.14 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$ ) arriva a  $\Delta n = 10^3$  ( $\Delta n hv = 4.14 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$ ).

### **Esempio 18.11**

Una gocciolina d'olio, come quelle utilizzate nell'esperimento di Millikan (paragrafo 1.8), ha massa  $m = 5 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$  e raggio  $r = 10^{-6} \text{ m}$ . Supponendo che essa scenda con velocità  $v = 10^{-4} \text{ m/s}$  calcolare la sua lunghezza d'onda di de Broglie e l'indeterminazione sulla sua velocità.

#### **Soluzione**

La quantità di moto è  $p = m v = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Ns}$  e quindi

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.33 \cdot 10^{-24} \text{ m} ;$$

con un valore così basso è impossibile mettere in evidenza l'aspetto ondulatorio, ad

esempio con esperimenti che richiedono fenditure di larghezza paragonabile a  $\lambda$ . A maggior ragione l'impossibilità è verificata per oggetti come biglie o proiettili. L'indeterminazione nella posizione della gocciolina si può assumere eguale al raggio ( $\Delta x = 10^{-6}$  m) per cui l'indeterminazione sulla quantità di moto è al minimo

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-28} \text{ Ns} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 0.2 \cdot 10^{-22} \text{ m/s},$$

non misurabile rispetto alla velocità di caduta. Viceversa, se pensiamo di poter misurare  $v$  con una precisione  $\Delta v = 10^{-6}$  m/s, troviamo  $\Delta x = \hbar / m \Delta v = 0.2 \cdot 10^{-22}$  m, non misurabile rispetto a  $r$ .

Concludiamo che non c'è nessun limite reale posto dal principio di indeterminazione nel caso di corpi macroscopici; l'indeterminazione che si calcola è sempre estremamente più piccola di quanto si possa ragionevolmente mettere in evidenza con gli strumenti a nostra disposizione.

### Esempio 18.12

Un elettrone non relativistico ha energia cinetica  $E_k = 1$  keV e la sua velocità è nota all'1%. Calcolare il valore limite per  $\Delta x$ . Se invece la sua posizione è conosciuta entro  $\Delta x = 10^{-6}$  m, calcolare l'incertezza relativa della velocità.

#### Soluzione

Nel primo caso abbiamo

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2, v = 1.88 \cdot 10^7 \text{ m/s}, \Delta v = 1.88 \cdot 10^5 \text{ m/s},$$

$$\Delta p = m \Delta v = 1.71 \cdot 10^{-25} \text{ Ns}, \Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = 6.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Questo limite di precisione è per ora sperimentalmente irraggiungibile, essendo possibile una misura assoluta con  $\Delta x$  dell'ordine di  $10^{-6}$  m. Per tale valore

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 10^{-28} \text{ Ns}, \quad \Delta v = \frac{\Delta p}{m} \approx 116 \text{ m/s}, \quad \frac{\Delta v}{v} \approx 6 \cdot 10^{-6},$$

e anche questa precisione relativa non è ottenibile nella misura di una velocità che vale all'incirca  $10^7$  m/s. Gli elettroni dell'esempio 2.4 (separatore elettrostatico) si trovano nelle condizioni descritte.

I risultati dell'ultimo esempio mostrano che anche con gli elettroni, come del resto con le altre particelle atomiche e subatomiche, non è semplice verificare direttamente i limiti imposti dal principio di indeterminazione. Nel caso della posizione gli strumenti che permettono di misurare la traiettoria di una particella non sono ancora in grado di arrivare al limite quantistico, che diventa sempre più lontano al crescere dell'energia. È più facile la verifica indiretta attraverso l'aspetto ondulatorio (ad esempio con esperimenti di diffrazione), avendoci fornito la natura, tramite i cristalli, un mezzo di localizzazione adatto, quando le energie in gioco sono basse.

Invece gli elettroni legati negli atomi, e quindi confinati in dimensioni lineari dell'ordine di  $10^{-10}$  m, risentono fortemente dell'indeterminazione nella quantità di moto (allo scopo si ragiona come nell'esempio del nucleo di deuterio, discusso in precedenza) e il loro comportamento non può essere descritto in modo deterministico, come adesso illustriamo brevemente.

### Funzione d'onda. Equazione di Schrödinger

La nozione di *comportamento probabilistico* venne introdotta per la prima volta da Einstein a proposito dei fotoni. Riprendiamo in considerazione un esperimento di interferenza o di diffrazione realizzato con intensità molto bassa, al limite con un solo fotone che attraversa l'apparato. Il fotone viene rivelato, con un processo corpuscolare, in un punto dello schermo, la cui posizione non possiamo prevedere a priori. Se però attendiamo abbastanza tempo in modo da accumulare un grande numero di singoli eventi si trova che i punti di arrivo sullo schermo sono distribuiti in accordo con la figura di interferenza o di diffrazione che si otterrebbe immediatamente se l'intensità incidente fosse alta: sullo schermo l'intensità è grande dove sono arrivati tanti fotoni ed è piccola dove ne sono arrivati pochi; nelle zone di minimo non arriva nessun fotone. La relazione  $I = Nhv$  che abbiamo usato più volte va vista in questo senso:  $N$ , numero medio di fotoni che attraversano nell'unità di tempo l'unità di superficie, può essere pensato proporzionale alla probabilità di trovare un fotone in una determinata posizione ad un dato istante e questa interpretazione è trasferita all'intensità, purché il numero di fotoni sia sufficientemente grande da rendere significativa la media. Data l'originaria definizione di intensità, concludiamo che *il valor medio del quadrato del campo elettrico*, cioè della funzione che definisce il comportamento ondulatorio classico, è legato alla probabilità di trovare un fotone nell'intorno di un certo istante.

Questa visuale è di carattere generale, ovvero non è limitata all'esempio trattato; in ogni caso dobbiamo attenderci che con grandi intensità non ci siano scostamenti significativi dalla media (la descrizione classica è soddisfacente), mentre se le intensità sono basse si possa manifestare il comportamento quantistico discontinuo.

L'interpretazione probabilistica è stata estesa alle onde di materia, introducendo per una particella una *funzione d'onda*  $\psi(x, y, z, t)$ , tale che *il valor medio del quadrato dà la densità di probabilità di trovare la particella all'istante t in un intorno del punto di coordinate x, y, z*. La determinazione di  $\psi$  per una particella avente energia potenziale  $E_p$  avviene tramite la soluzione di un'equazione differenziale alla quale  $\psi$  obbedisce, così come il campo elettrico obbedisce all'equazione delle onde. Questa equazione delle onde di materia è *l'equazione di Schrödinger*, valida per particelle non relativistiche. Nel caso unidimensionale l'equazione per la funzione  $\psi(x, t)$  è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_p(x, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} ,$$

in cui  $i$  è l'unità immaginaria e  $m$  la massa della particella.

In generale un problema di fisica atomica si impone scrivendo l'energia potenziale appropriata per il sistema e risolvendo la corrispondente equazione di Schrödinger. Dal valore di  $\psi$  si calcolano le probabilità che il sistema si trovi nei vari stati accessibili dallo stato iniziale. L'equazione di Schrödinger assume perciò il ruolo delle equazioni del moto della meccanica classica, con la grande differenza che la descrizione del moto non è più deterministica. Tutto l'argomento esula però dai limiti di questo libro.

#### Nota. Alcune formule utili

Nel corso del capitolo ci siamo spesso serviti di formule miste dal punto di vista delle unità di misura, nel senso che non tutte le grandezze sono espresse nel sistema internazionale: ad esempio una lunghezza è espressa in metri e un'energia in elettronvolt invece che in joule. Inoltre si usa raggruppare le varie costanti in un unico numero e bisogna quindi fare attenzione ad applicare correttamente le formule al sistema cui si riferiscono. Dato che si tratta di formule molto utili nei problemi, le richiamiamo in questa nota che va impiegata come riferimento.

Legame tra lunghezza d'onda ed energia di un fotone  
La relazione è  $U = hv = hc / \lambda$ ; sappiamo che

$$1 \text{ eV} = e \text{ J} , \quad 1 \text{ J} = \frac{1}{e} \text{ eV} ,$$

(dove  $e$  è la carica elementare) per cui, esprimendo l'energia in elettronvolt,

$$U \text{ (eV)} = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{\lambda \text{ (m)}} = \frac{1.24}{\lambda \text{ (\mu m)}} = \frac{1.24 \cdot 10^3}{\lambda \text{ (nm)}}$$

Queste formule tornano utili ovviamente anche per calcolare la lunghezza d'onda emessa in un salto quantico (o assorbita).

Relazione di de Broglie

Ricordiamo in questo caso il rapporto tra le unità della quantità di moto:

$$1 \frac{\text{eV}}{\text{c}} = 0.53 \cdot 10^{-27} \text{ Ns} \quad , \quad 1 \text{ Ns} = 1.87 \cdot 10^{27} \frac{\text{eV}}{\text{c}}$$

Quindi:

$$p \text{ (Ns)} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{\lambda \text{ (m)}} \quad , \quad p \left( \frac{\text{eV}}{\text{c}} \right) = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{\lambda \text{ (m)}}$$

Lunghezza d'onda di una particella di massa  $m$ , non relativistica

Supponiamo di conoscere l'energia cinetica  $E_k$ ; da  $E_k = p^2 / 2m$  ricaviamo

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2e}} \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} = \frac{1}{\sqrt{m \text{ (kg)}}} \frac{1.17 \cdot 10^{-24}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}}$$

Inserendo i valori delle masse si ritrovano le formule già calcolate:

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{1.226 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} \text{ per elettroni} \quad ,$$

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{2.86 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{E_k \text{ (eV)}}} \text{ per neutroni.}$$

Lunghezza d'onda di una particella di massa  $m$ , relativistica

Scriviamo la relazione generale tra energia totale, quantità di moto ed energia cinetica:

$$U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = E_k + mc^2$$

Sviluppando ricaviamo

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k mc^2}}$$

Se  $E_k \ll mc^2$  si ottiene la precedente formula non relativistica; se invece  $E_k \gg mc^2$  (limite ultrarelativistico)

$$\lambda \text{ (m)} = \frac{hc}{E_k} = \frac{1.24 \cdot 10^{-12}}{E_k \text{ (MeV)}} = \frac{1.24 \cdot 10^{-15}}{E_k \text{ (GeV)}}$$

indipendentemente dalla massa della particella. In tale situazione  $U = E_k = pc$ .

# 19

# Proprietà degli elettroni nei solidi

## 19.1 Introduzione

In questo capitolo conclusivo descriveremo le proprietà degli elettroni nei solidi per arrivare a spiegare i fenomeni connessi con la conduzione elettrica. Allo scopo tratteremo prima la struttura elettronica degli atomi e i diversi tipi di legami tra gli atomi; passeremo poi alla teoria di Fermi per il gas di elettroni liberi e alle sue modifiche, necessarie per tener conto che gli elettroni si trovano all'interno di un reticolo cristallino. Potremo così spiegare la differenza tra isolanti, conduttori e semiconduttori. Infine ci occuperemo di alcuni effetti caratteristici dei conduttori metallici e accenneremo alla supercondutività.

Il primo grande successo della meccanica quantistica è stato proprio l'inquadramento teorico coerente della fenomenologia atomica e molecolare, in cui hanno trovato soluzione i molteplici problemi connessi con gli argomenti elencati. Dovremo quindi di volta in volta impostare l'appropriata equazione di Schrödinger (paragrafo 18.8) e studiarne le soluzioni. Dato che questo tipo di sviluppo esula dagli scopi del libro, ci limiteremo nella maggior parte dei casi a dare i risultati discutendone il significato fisico e le conseguenze.

## 19.2 Struttura elettronica degli atomi

L'interpretazione dello spettro a righe dell'idrogeno con il modello di Bohr (paragrafo 18.6) fornì la prova che nella meccanica atomica erano necessarie regole di quantizzazione. La soluzione completa del problema e la giustificazione delle regole di quantizzazione si hanno applicando al moto dell'elettrone nel campo coulombiano del protone l'equazione di Schrödinger. Si trovano soluzioni finite che corrispondono a stati legati solo se l'energia e il momento angolare dell'elettrone sono quantizzati. Precisamente la funzione d'onda dell'elettrone risulta dipendente da tre numeri interi  $n$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell$  che hanno i seguenti significati.

Il *numero quantico principale*  $n$  è legato alla quantizzazione dell'energia secondo l'espressione (18.7) già trovata da Bohr,

$$U_n = -\frac{m_r e^4}{2(4\pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

in cui  $m_r$  è la massa ridotta del sistema elettrone-protone; i valori possibili di  $n$  sono 1, 2, 3, ... .

Il *numero quantico azimutale*  $\ell$  è legato alla quantizzazione del momento angolare orbitale dell'elettrone, che vale

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$$

dato  $n$ ,  $\ell$  può assumere gli  $n$  valori 0, 1, 2, ...,  $n-1$ .

Il *numero quantico magnetico*  $m_\ell$  è legato alla quantizzazione della componente  $L_z$  del momento angolare orbitale lungo una qualsiasi direzione  $z$ :  $L_z = m_\ell \hbar$  e, data  $\ell$ ,  $m_\ell$  può assumere i  $2\ell+1$  valori  $-\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell$ .

Lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è lo stato  $n=1$ ,  $\ell=0$ ,  $m_\ell=0$ ; in esso l'energia è minima (-13.6 eV) e il momento angolare orbitale è nullo. L'energia di qualsiasi altro stato eccitato accessibile dipende solo da  $n$  secondo la formula data e non dagli altri numeri quantici.

La funzione d'onda  $\psi$  soluzione dell'equazione di Schrödinger in corrispondenza della terna di numeri quantici  $(n, \ell, m_\ell)$  permette di calcolare, attraverso il modulo del suo quadrato, la probabilità di trovare in una data posizione l'elettrone, che è nello stato individuato da  $n, \ell, m_\ell$ . La probabilità infinitesima di trovarlo in un volume infinitesimo  $d\tau$  si può scrivere  $dp = f d\tau$  dove  $f$ , detta densità di probabilità, è una funzione delle coordinate calcolabile a partire da  $\psi$ . Nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno si ha che la densità di probabilità è funzione solo della distanza  $r$  dal nucleo (simmetria sferica) ed è massima per  $r = r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10}$  m, valore eguale al raggio di Bohr, che dunque assume questo nuovo significato nella visione ondulatoria.

Il metodo di Schrödinger, molto soddisfacente in tutti gli altri aspetti, non prevede lo spin dell'elettrone. Formalmente ciò è dovuto al fatto che l'equazione di Schrödinger non è relativistica, mentre lo spin è una proprietà puramente relativistica, come dimostrò Dirac nel 1929. In effetti impostando il problema in modo relativisticamente corretto l'equazione risolutiva contiene anche il numero quantico di spin. Da un punto di vista pratico per noi è sufficiente considerare, nell'identificazione di uno stato dell'elettrone, l'aggiunta ai tre numeri quantici già descritti del *numero quantico di spin*  $m_s$ , il quale può assumere solo i valori  $1/2, -1/2$ ; ciò significa che la componente del momento angolare intrinseco dell'elettrone misurata lungo una qualsiasi direzione presenta soltanto i valori  $\pm \hbar/2$ . Nello stato fondamentale l'unico elettrone dell'atomo di idrogeno può dunque avere i numeri quantici  $1, 0, 0, 1/2$  o  $1, 0, 0, -1/2$ .

L'esistenza dello spin ha anche conseguenze sull'energia degli stati, che però in prima approssimazione sono trascurabili per le considerazioni che ci interessano e che quindi non menzioneremo più nel seguito.

L'approccio di Schrödinger ha il grande vantaggio di poter essere applicato, con le opportune modifiche, a tutti gli atomi e non soltanto all'idrogeno. In generale si trova che lo stato di un elettrone in un atomo contenente molti elettroni è sempre individuato dai quattro numeri quantici  $n, \ell, m_\ell, m_s$ , che hanno lo stesso significato appena illustrato. Però adesso interviene un fatto fondamentale e cioè il *principio di esclusione di Pauli*, già citato nel paragrafo 9.10, secondo cui *in un atomo due elettroni non possono stare nello stesso stato ovvero non possono avere tutti i numeri quantici eguali*. Di conseguenza gli  $Z$  elettroni di un atomo avente nel nucleo  $Z$  protoni non possono coesistere tutti in un unico stato, ma devono disporsi in  $Z$  stati diversi con una precisa distribuzione di numeri quantici che descriveremo tra poco e che giustifica le proprietà periodiche della tavola degli elementi, la cui prima stesura, dovuta a Mendeleev, risale al 1869.

Le dimensioni di un atomo con molti elettroni non sono molto diverse da quelle dell'atomo di idrogeno; si trova una variazione di circa un fattore 3 passando da  $Z = 1$  a  $Z = 90$ . Ciò vuol dire che all'aumentare di  $Z$  gli elettroni interni sono più vicini al nucleo di quanto avviene nell'idrogeno e quindi le loro energie di legame sono, in valore assoluto, più elevate; la conferma si ha dai valori grandi, rispetto a 13.6 eV, delle energie dei raggi X caratteristici (paragrafo 18.6).

L'energia di un elettrone nell'atomo indisturbato risulta dipendere, se  $Z \neq 1$ , sia da  $n$  che da  $\ell$ ; essa è crescente con  $n$  e, fissato  $n$ , aumenta con  $\ell$  (ricordiamo che energia crescente significa energia meno negativa).

Prima di iniziare la descrizione di come siano disposti gli elettroni e le loro energie in un atomo con  $Z \neq 1$ , riassumiamo quanto detto per i numeri quantici e fissiamo la terminologia e i simboli. I valori ammessi per  $n, \ell, m_\ell, m_s$  sono:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, 4, \dots \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ m_\ell &= -\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell \\ m_s &= 1/2, 1/2. \end{aligned}$$

Valori dei numeri quantici

Gli elettroni aventi lo stesso numero quantico principale  $n$  si dicono appartenenti allo stesso guscio e per tali gusci si utilizzano questi simboli:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	...
simbolo	$K$	$L$	$M$	$N$	$O$	$P$	$Q$	...

Alternativamente a guscio e sottoguscio (vedi oltre) sono usati anche i termini strato e sottostrato.

Dentro un guscio ( $n$  fissato) si distinguono  $n$  sottogusci, uno per ciascun valore di  $\ell$ , in ogni sottoguscio ( $n$  e  $\ell$  fissati) ci sono  $2\ell + 1$  valori possibili di  $m_\ell$  e, per ciascuno di questi,

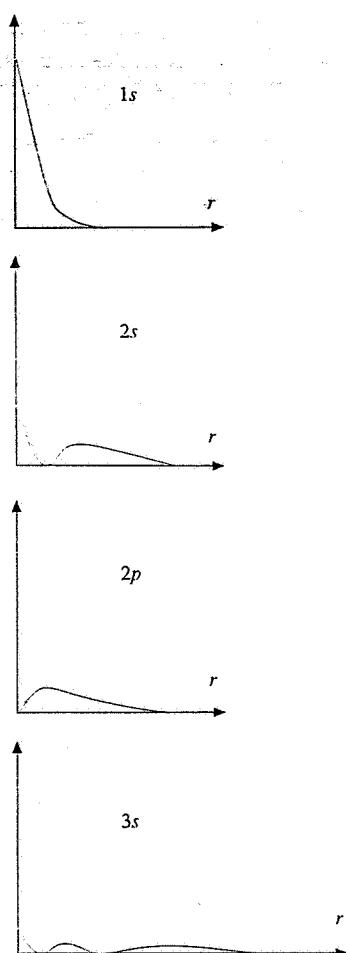


Figura 19.1

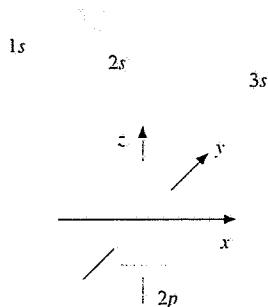


Figura 19.2

due valori possibili di  $m_s$ . Pertanto in un sottoguscio sono contenuti  $2(2\ell + 1)$  stati possibili per gli elettroni. Il valore di  $\ell$  si individua con una lettera secondo la convenzione seguente:

$\ell$	0	1	2	3	4	...
simbolo	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	...

I sottogusci vengono indicati con un numero che dà il valore di  $n$  e una lettera che dà il valore di  $\ell$ ; in ordine di  $n$  crescente abbiamo

simbolo	1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d; 4s, 4p, 4d, 4f, ...
numero degli stati	2 2 6 2 6 10 2 6 10 14 ...

Gli stati contenuti in un guscio sono infine

$$2 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2 n^2 ;$$

infatti la sommatoria corrisponde alla somma dei primi  $n$  numeri dispari, che è eguale a  $n^2$ .

Uno stato energetico permesso, individuato dai tre numeri  $n$ ,  $\ell$ ,  $m_\ell$ , viene chiamato *orbitale*; in base a quanto visto in un guscio ci sono  $n^2$  orbitali e in un sottoguscio  $2\ell + 1$  orbitali. In ciascun orbitale possono trovare posto al massimo due elettroni e in questo caso essi devono avere gli spin antiparalleli. Ad un orbitale corrisponde una funzione d'onda  $\psi$  soluzione dell'equazione di Schrödinger e quindi una densità di probabilità che indica statisticamente le posizioni spaziali occupate dall'elettrone; la forma della funzione  $\psi$  si chiama forma dell'orbitale. Nella figura 19.1 sono mostrate in sezione le densità di probabilità per gli orbitali 1s, 2s, 3s e 2p dell'idrogeno (a parte il primo gli altri sono stati eccitati). Gli orbitali  $s$  sono a simmetria sferica, l'orbitale 2p è a simmetria cilindrica rispetto all'asse  $z$ : in realtà gli orbitali 2p sono tre, però hanno la stessa forma e basta disegnarne uno: gli altri due sono disposti lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $y$ . Si vede come la forma dell'orbitale dipenda da  $\ell$ , mentre da  $m_\ell$  dipende la sua orientazione nello spazio. Invece della distribuzione della densità di probabilità si usa spesso, per dare la forma dell'orbitale, disegnare un contorno che mostra l'andamento della funzione e la contiene, ad esempio, al 90%, in cui gli orbitali  $s$  sono sfere, ed un orbitale 2p appare come in figura 19.2.

Consideriamo adesso un atomo con tanti elettroni; gli orbitali in cui si dispongono gli elettroni, sempre obbedendo al principio di Pauli, sono tali che l'energia totale del sistema risulti minima. Quindi, in linea di principio, prima è occupato il guscio  $K$ , poi il guscio  $L$  e così via. Elenchiamo le prime possibilità, da  $Z = 1$  a  $Z = 14$ , nella tabella 19.1. Con l'occasione abbiamo introdotto un ulteriore simbolo, l'esponente della lettera che individua  $\ell$ : si tratta del numero di elettroni contenuti nel sottoguscio, che va da 1 a 2 ( $2\ell + 1$ ); la somma degli esponenti nello schema completo dà ovviamente  $Z$ .

Al crescere di  $Z$  gli orbitali occupati dagli elettroni si hanno dunque riempiendo progressivamente i vari sottogusci, in ordine di energia crescente come detto. In un sottoguscio non  $s$ , e quindi con più orbitali, si riempiono prima gli orbitali distinti con elettroni aventi gli spin paralleli e poi si completa ciascun orbitale con un secondo elettrone con spin antiparallelo (*regola di Hund*).

Premesso che la distribuzione dei valori delle energie degli orbitali è caratteristica di ogni atomo, ricordiamo che l'energia dipende da  $n$  e da  $\ell$ ; in un sottoguscio essa è, in prima approssimazione, eguale per tutti i  $2\ell + 1$  orbitali. Nell'andamento dell'energia si verificano quelle regolarità che avevamo anticipato: ad esempio, in qualsiasi atomo, l'energia del sottoguscio 1s è inferiore a quella del sottoguscio 2s, questa è inferiore a quella del sottoguscio 3s, ecc.; inoltre dentro un guscio, come il guscio  $M$  ( $n = 3$ ), le energie crescono passando da 3s a 3p e poi a 3d. Però non è detto che l'energia del sottoguscio 3d, ultimo sottoguscio di  $M$ , sia inferiore all'energia del sottoguscio 4s, primo sottoguscio di  $N$ .

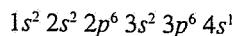
In effetti accade proprio il contrario per cui, una volta riempiti i sottogusci fino al 3p, arrivati cioè all'argon il cui schema completo è

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 ,$$

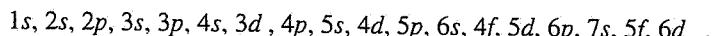
l'elemento successivo, il potassio, non ha il 19° elettrone nel sottoguscio 3d, ma nel sottoguscio 4s e il suo schema è

Tabella 19.1. Configurazione elettronica dei primi quattordici elementi

Z	elemento	sottoguscio più esterno	schema completo degli elettroni	orientazione dello spin
1	idrogeno	1s	1s <sup>1</sup>	
2	elio	1s	1s <sup>2</sup>	↑↓
3	litio	2s	1s <sup>2</sup> 2s <sup>1</sup>	↑↓ ↑
4	berillio	2s	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup>	↑↓ ↑↓
5	boro	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>1</sup>	↑↓ ↑↓ ↑
6	carbonio	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↑
7	azoto	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>3</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↑ ↑
8	ossigeno	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>4</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↑ ↑↑
9	fluoro	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>5</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↑↑ ↓↑
10	neon	2p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↓↑↓↑↓
11	sodio	3s	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>1</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↓↑↓↑↓
12	magnesio	3s	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↓↑↓↑↓
13	alluminio	3p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>1</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↓↑↓↑↓
14	silicio	3p	1s <sup>2</sup> 2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup> 3s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup>	↑↓ ↑↓ ↑↓↑↓↑↓



Simili scavalcamenti si hanno più volte procedendo per Z crescenti e l'ordine effettivo di riempimento dei sottogusci degli elementi è il seguente:



Esso è mostrato nella figura 19.3 che, nella scala delle energie, è puramente qualitativa.

La serie completa degli elementi è riportata nella tabella 19.2. Z cresce lungo le righe, da sinistra a destra; il simbolo del sottoguscio a sinistra dei vari gruppi di caselle (2, 6, 10, 14 a seconda dei casi) mostra qual è il sottoguscio che si va riempiendo all'aumentare di Z, esattamente secondo la successione della figura 19.3. Ciascuna riga si chiama periodo; ogni periodo finisce con un gas nobile. Nella tabella 19.2b sono indicate le configurazioni elettroniche degli elementi, secondo lo schema già utilizzato nella tabella 19.1. Allo scopo di evitare ripetizioni è mostrata la configurazione dei sottogusci esterni a quelli del gas nobile precedente che costituisce il nocciolo di tutto il periodo successivo. In generale gli elettroni esterni a tale nocciola, cioè quelli indicati esplicitamente, sono detti elettroni di valenza.

Nel riempimento si notano alcune anomalie, segnalate con un asterisco, come quelle del cromo e del rame, dovute a particolari situazioni di energia nell'atomo considerato. A questo proposito va anche chiarito che le inversioni energetiche tra i sottogusci 3d e 4s, 4d e 5s e così via si verificano solo quando tali sottogusci sono esterni, come avviene ad esempio per gli elementi potassio, magnesio, scandio, titanio, ecc., ovvero quando essi sono i sottogusci effettivamente in fase di riempimento. Invece in un elemento ad alto Z, come il mercurio o l'uranio, in cui tali sottogusci sono pieni e ben interni alla struttura elettronica, l'ordine è quello atteso: l'energia del sottoguscio 3d è inferiore a quella del 4s, l'energia del 4d è inferiore a quella del 5s.

Gli schemi elettronici della tabella 19.2, la quale altro non è che la tavola di Mendeleev aggiornata, rappresentano per l'atomo del dato elemento lo stato fondamentale; le energie degli orbitali occupati costituiscono l'insieme dei livelli energetici degli elettroni nello stato fondamentale. Gli elettroni più esterni possono essere eccitati andando ad occupare un orbitale permesso, ma vuoto, e nei successivi processi di diseccitazione si ha emissione di fotoni. Con elementi in fase gassosa sono emessi spettri di righe caratteristici dell'elemento (oppure si osservano i corrispondenti spettri di assorbimento).

L'esame della tabella 19.2 permette di spiegare molte proprietà degli elementi; come sappiamo, questo è uno degli argomenti più importanti trattati nei corsi di Chimica. Proprio per questo accenniamo nel seguito soltanto ad alcune caratteristiche salienti.

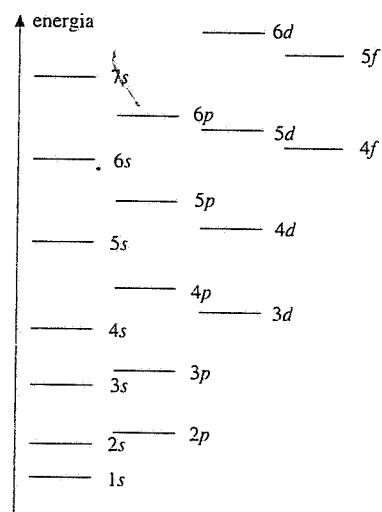


Figura 19.3

### Osservazioni sulla tavola periodica

La struttura a sottogusci, dovuta essenzialmente al principio di esclusione, rende conto della ripetizione di certe proprietà al crescere di  $Z$ . Tra i tanti esempi alcuni sono particolarmente interessanti.

Il primo è quello dei gas nobili (o gas rari) elio, neon, argon, kripton, xenon e radon. Essi si trovano in una posizione della tavola che corrisponde ad un sottoguscio completamente pieno, di tipo  $p$  a parte l'elio, e ad un salto abbastanza alto di energia rispetto al sottoguscio successivo (in tutti i casi  $n$  cambia di una unità). Ciò comporta una struttura elettronica particolarmente stabile, che richiede una notevole energia per rimuovere uno degli elettroni esterni. Inoltre la simmetria della configurazione elettronica fa sì che il campo elettrico e il campo magnetico all'esterno dell'atomo siano mediamente nulli, per cui le interazioni di un atomo di gas nobile con altri atomi sono molto deboli: la conseguenza è che la molecola di gas nobile è monoatomica ed è molto difficile formare composti stabili contenenti gas nobili. Le temperature di liquefazione e di solidificazione sono molto basse, proprio perché il debole legame tra questi atomi è facilmente rotto dall'agitazione termica.

Nella posizione immediatamente successiva ai gas nobili ci sono i metalli alcalini litio, sodio, potassio, rubidio, cesio e francio. In essi si ha un solo elettrone all'esterno della struttura stabile e simmetrica tipica dei gas nobili: sono cioè atomi di tipo idrogenoide in cui l'elettrone esterno risente praticamente dell'attrazione di una carica elementare, pari alla somma della carica positiva  $Ze$  del nucleo e della carica negativa  $-(Z-1)$  degli elettroni interni. Il legame è abbastanza debole (l'energia di ionizzazione è soltanto di pochi eV) e questi elementi hanno la tendenza a formare ioni positivi ( $\text{Li}^+$ ,  $\text{Na}^+$ , ecc.), restando con la configurazione elettronica di un gas nobile. Bisogna dire che le proprietà alcaline del francio sono in parte dedotte dalla sua posizione nella tavola, trattandosi di un elemento rarissimo.

La situazione in un certo senso simmetrica è quella degli alogeni fluoro, cloro, bromo, iodio e astato. Essi si trovano nella posizione immediatamente precedente ai gas nobili e hanno una struttura elettronica quasi completa: di qui la forte affinità elettronica, cioè la tendenza a catturare un elettrone formando uno ione negativo ( $\text{F}^-$ ,  $\text{Cl}^-$ , ecc.) raggiungendo in tal modo la configurazione elettronica di un gas nobile. Per l'astato vale lo stesso commento fatto per il francio.

Un altro esempio, completamente diverso, che rivela ancora maggiore somiglianza di proprietà chimiche si ha negli elementi che vanno dal cerio al lutezio, detti terre rare: in essi è pieno il sottoguscio  $6s$  mentre si va riempiendo il sottoguscio  $4f$  che è spazialmente più interno. Quindi le loro proprietà chimiche, che dipendono soprattutto dal sottoguscio esterno, sono molto simili. Lo stesso succede per i cosiddetti attinidi che vanno dal torio al lawrenzio.

Abbiamo accennato in precedenza alle dimensioni degli atomi con molti elettroni e al significato ondulatorio di raggio di un atomo. Nella figura 19.4 mostriamo l'andamento

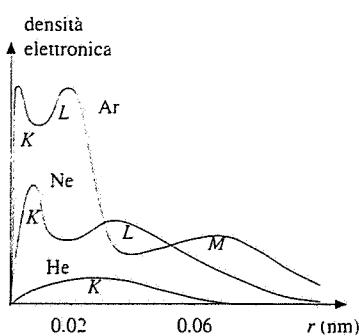


Figura 19.4

Tabella 19.2b - Configurazione elettronica degli elementi.

simbolo	configurazione	simbolo	configurazione	simbolo	configurazione
1 H	$1s^1$	37 Rb	(Kr) $5s^1$	73 Ta	(Xe) $6s^2 4f^{14} 5d^3$
2 He	$1s^2$	38 Sr	$5s^2$	74 W	$6s^2 4f^{14} 5d^4$
3 Li	(He) $2s^1$	39 Y	$5s^2 4d^1$	75 Re	$6s^2 4f^{14} 5d^5$
4 Be	$2s^2$	40 Zr	$5s^2 4d^2$	76 Os	$6s^2 4f^{14} 5d^6$
5 B	$2s^2 2p^1$	41 Nb*	$5s^1 4d^4$	77 Ir	$6s^2 4f^{14} 5d^7$
6 C	$2s^2 2p^2$	42 Mo*	$5s^1 4d^5$	78 Pt*	$6s^1 4f^{14} 5d^9$
7 N	$2s^2 2p^3$	43 Tc	$5s^2 4d^5$	79 Au*	$6s^1 4f^{14} 5d^{10}$
8 O	$2s^2 2p^4$	44 Ru*	$5s^1 4d^7$	80 Hg	$6s^2 4f^{14} 5d^{10}$
9 F	$2s^2 2p^5$	45 Rh*	$5s^1 4d^8$	81 Tl	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^1$
10 Ne	$2s^2 2p^6$	46 Pd*	$4d^{10}$	82 Pb	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^2$
11 Na	(Ne) $3s^1$	47 Ag*	$5s^1 4d^{10}$	83 Bi	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^3$
12 Mg	$3s^2$	48 Cd	$5s^2 4d^{10}$	84 Po	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^4$
13 Al	$3s^2 3p^1$	49 In	$5s^2 4d^{10} 5p^1$	85 At	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^5$
14 Si	$3s^2 3p^2$	50 Sn	$5s^2 4d^{10} 5p^2$	86 Rn	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$
15 P	$3s^2 3p^3$	51 Sb	$5s^2 4d^{10} 5p^3$	87 Fr	(Rn) $7s^1$
16 S	$3s^2 3p^4$	52 Te	$5s^2 4d^{10} 5p^4$	88 Ra	$7s^2$
17 Cl	$3s^2 3p^5$	53 I	$5s^2 4d^{10} 5p^5$	89 Ac	$7s^2 6d^1$
18 Ar	$3s^2 3p^6$	54 Xe	$5s^2 4d^{10} 5p^6$	90 Th	$7s^2 6d^2$
19 K	(Ar) $4s^1$	55 Cs	(Xe) $6s^1$	91 Pa	$7s^2 5f^2 6d^1$
20 Ca	$4s^2$	56 Ba	$6s^2$	92 U	$7s^2 5f^3 6d^1$
21 Sc	$4s^2 3d^1$	57 La	$6s^2 5d^1$	93 Np	$7s^2 5f^4 6d^1$
22 Ti	$4s^2 3d^2$	58 Ce	$6s^2 5f^1 5d^1$	94 Pu	$7s^2 5f^6$
23 V	$4s^2 3d^3$	59 Pr	$6s^2 4f^3$	95 Am	$7s^2 5f^7$
24 Cr*	$4s^1 3d^5$	60 Nd	$6s^2 4f^4$	96 Cm	$7s^2 5f^7 6d^1$
25 Mn	$4s^2 3d^5$	61 Pm	$6s^2 4f^5$	97 Bk	$7s^2 5f^9$
26 Fe	$4s^2 3d^6$	62 Sm	$6s^2 4f^6$	98 Cf	$7s^2 5f^{10}$
27 Co	$4s^2 3d^7$	63 Eu	$6s^2 4f^7$	99 Es	$7s^2 5f^{11}$
28 Ni	$4s^2 3d^8$	64 Gd	$6s^2 4f^7 5d^1$	100 Fm	$7s^2 5f^{12}$
29 Cu*	$4s^1 3d^{10}$	65 Tb	$6s^2 4f^9$	101 Md	$7s^2 5f^{13}$
30 Zn	$4s^2 3d^{10}$	66 Dy	$6s^2 4f^{10}$	102 No	$7s^2 5f^{14}$
31 Ga	$4s^2 3d^{10} 4p^1$	67 Ho	$6s^2 4f^{11}$	103 Lr	$7s^2 5f^{14} 6d^1$ ?
32 Ge	$4s^2 3d^{10} 4p^2$	68 Er	$6s^2 4f^{12}$	104 Rf	$7s^2 5f^{14} 6d^2$ ?
33 As	$4s^2 3d^{10} 4p^3$	69 Tm	$6s^2 4f^{13}$	105 Ha	$7s^2 5f^{14} 6d^3$ ?
34 Se	$4s^2 3d^{10} 4p^4$	70 Yb	$6s^2 4f^{14}$	106 Sg	$7s^2 5f^{14} 6d^4$ ?
35 Br	$4s^2 3d^{10} 4p^5$	71 Lu	$6s^2 4f^{14} 5d^1$	107 Ns	$7s^2 5f^{14} 6d^5$ ?
36 Kr	$4s^2 3d^{10} 4p^6$	72 Hf	$6s^2 4f^{14} 5d^2$	108 Hs	$7s^2 5f^{14} 6d^6$ ?
				109 Mt	$7s^2 5f^{14} 6d^7$ ?

radiale della densità elettronica in elio, neon e argon, ottenuta sovrapponendo gli andamenti per i vari orbitali: essa è legata alla probabilità di trovare un qualsiasi elettrone a distanza  $r$ . I massimi sono attribuiti agli elettroni con lo stesso numero quantico principale e si può dire che visualizzano i gusci  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Al crescere di  $Z$  si ha una notevole contrazione del guscio  $K$ , a causa dell'aumento dell'attrazione da parte del nucleo ( $\sim 0.3 \cdot 10^{-10}$  m nell'elio,  $\sim 0.07 \cdot 10^{-10}$  m nel neon,  $\sim 0.02 \cdot 10^{-10}$  m nell'argon).

La crescita delle dimensioni atomiche non è regolare; essa segue l'andamento disegnato nella figura 19.5, che è realistica per quanto riguarda i metalli alcalini e gli alogenzi e qualitativa per il resto. Lungo un periodo la dimensione addirittura diminuisce, ma cresce passando da un periodo al successivo per gli atomi con le stesse caratteristiche.

Ricordiamo infine che gli elementi dopo l'uranio vengono prodotti artificialmente; l'e-

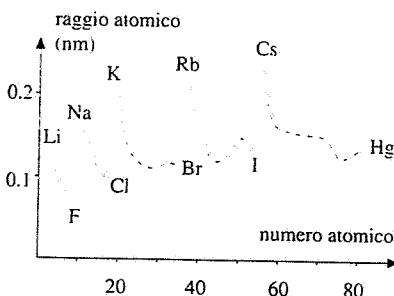


Figura 19.5

lemento più pesante finora evidenziato ha  $Z = 109$ . Complessivamente l'intervallo coperto dal numero quantico principale va da 1 a 7 mentre il numero quantico azimutale va da zero a 3 e il sottoguscio più energetico è il  $6d$ , almeno tra gli elementi conosciuti. I nomi di questi sono riportati nella nota alla fine del capitolo.

### 19.3 Legami nelle molecole e nei solidi. Bande di energia

Nei solidi cristallini le interazioni tra gli atomi sono in grado di mantenere gli atomi stessi in posizioni fisse, rispetto alle quali sono possibili soltanto delle oscillazioni. Poiché si tratta dell'estensione su larga scala delle stesse interazioni che concorrono a legare gli atomi tra loro permettendo la formazione delle molecole, descriviamo innanzitutto i casi più importanti di tali legami; per questo compito torneranno utili le nozioni sulle configurazioni elettroniche degli atomi in quanto le interazioni suddette, che sono di natura elettromagnetica, hanno caratteristiche determinate essenzialmente dagli elettroni degli orbitali più esterni, cioè dagli elettroni di valenza.

Un primo tipo di legame è il *legame ionico* indicato anche come *eteropolare*. L'esempio classico è quello della molecola composta da un metallo alcalino e da un alogeno, come NaCl: in sostanza l'unico elettrone esterno del sodio è ceduto al cloro e abbiamo i due ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$  che sono legati tra loro a causa della presenza di una forza elettrica attrattiva. L'energia potenziale del sistema è minima per  $r = r_0 = 2.5 \cdot 10^{-10}$  m, distanza di equilibrio tra gli ioni alla quale si bilanciano l'attrazione dovuta allo scambio dell'elettrone e la repulsione tra le cariche dello stesso segno che si manifesta quando i due ioni iniziano a competetrarsi (la somma dei raggi dei due ioni è  $\sim 2.8 \cdot 10^{-10}$  m).

Una molecola ionica ha un momento di dipolo elettrico a causa dell'asimmetria della distribuzione di carica: si parla di molecola polare. Nel caso di NaCl si calcolerebbe  $p = er_0 = 4 \cdot 10^{-30}$  C · m, mentre il valore misurato è  $3 \cdot 10^{-30}$  C · m, segno che la cessione dell'elettrone non è completa. La densità di probabilità dell'elettrone ceduto non è concentrata esclusivamente intorno al nucleo di cloro, ma ha valori non nulli anche vicino al sodio. Più che di cessione si dovrebbe parlare di condivisione dell'elettrone con preponderanza del cloro sul sodio, concetto che riprenderemo più avanti.

Altri esempi, oltre a quelli dei composti tra alcalini e alogenii come LiF, KF, RbCl, CsI, si hanno con elementi della seconda colonna come il magnesio ( $\text{MgO}$ ,  $\text{MgCl}_2$ ) che cede i due elettroni  $3s$ , oppure con altri elementi come l'argento ( $\text{AgCl}$ ) che cede l'elettrone  $5s$ , l'oro che cede l'elettrone  $6s$ , lo zinco che cede i due elettroni  $4s$ , l'alluminio che cede i tre elettroni  $3s^2 3p$ .

Un secondo tipo di legame è il *legame covalente* che, nella forma più semplice, ha origine dallo scambio di elettroni tra due atomi: ciascun atomo mette a disposizione un elettrone, i due elettroni si possono considerare come appartenenti ad entrambi gli atomi e questa situazione comporta una forza attrattiva.

L'esempio più immediato si ha nella molecola di idrogeno  $\text{H}_2$ , in cui gli elettroni messi in comune sono quelli  $1s$  dei due atomi. La trattazione quantistica del problema mostra che esiste una soluzione con energia negativa, quindi corrispondente ad uno stato legato, nella quale ciascun elettrone ha una probabilità finita di trovarsi tra i due protoni e non soltanto vicino all'uno o all'altro; in questa configurazione di equilibrio la distanza tra i due protoni è  $r_0 = 0.74 \cdot 10^{-10}$  m ( $\sim 1.4$  volte il raggio di Bohr) e l'energia di legame è  $-4.5$  eV. Esiste anche una seconda soluzione con energia positiva che non porta alla formazione della molecola; in essa la densità di probabilità ha valore nullo nella zona centrale tra i due protoni.

In termini di orbitali si può dire che dall'interazione tra i due atomi che dà origine alla molecola nascono due orbitali molecolari, uno legante e uno non legante, la cui forma è mostrata nella figura 19.6. Lo schema energetico qualitativo (figura 19.7) evidenzia come l'energia dell'orbitale legante sia inferiore rispetto a quella dell'orbitale atomico; i due elettroni messi in comune occupano l'orbitale legante e, per il principio di esclusione, hanno gli spin antiparalleli.

La situazione è tale per cui non si può attribuire un elettrone ad un singolo atomo; più che come insieme di due atomi la molecola va vista come un insieme di due protoni e di due elettroni in uno stato di equilibrio dovuto all'interazione tra le cariche. La localizzazione dei due elettroni nello spazio tra i protoni dà luogo a una forza attrattiva tra elettroni e protoni che bilancia le forze di repulsione tra i due protoni e tra i due elettroni.

Riassumendo, un legame covalente semplice è dovuto a una coppia di elettroni con spin antiparalleli localizzata principalmente tra i due nuclei. Altri esempi sono forniti da molecole come  $\text{Li}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{F}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ; non si tratta però di casi eguali, in quanto nella molecola

Legame ionico

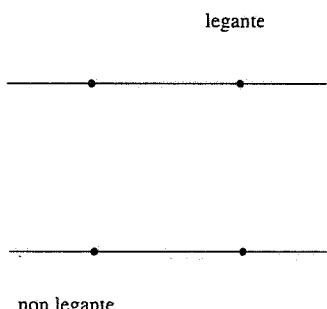


Figura 19.6

$O_2$  il legame è doppio e nella molecola  $N_2$  è triplo (due coppie e tre coppie di elettroni in comune, rispettivamente). La forza del legame è diversa da caso a caso: in termini di energia, il legame semplice dell'idrogeno (4.5 eV) è più forte di quello del litio (1.0 eV), del fluoro (1.6 eV), del cloro (2.5 eV), nei quali le cariche sono mediamente più distanti; ma il legame semplice è più debole in generale di quello doppio (5.1 eV nell'ossigeno) e di quello triplo (9.8 eV nell'azoto).

Oltre ai legami covalenti tra due atomi eguali esistono quelli tra due atomi diversi, come nelle molecole  $CO$ ,  $HF$ ,  $HCl$ . In questi casi si verifica una asimmetria di carica lungo la congiungente i due atomi, appunto perché questi sono diversi, e la molecola è polare, cioè ha un momento di dipolo elettrico permanente, che certamente invece non esiste nei casi simmetrici come  $H_2$ . Nell'ossido di carbonio si ha  $p = 0.4 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ ; con una distanza media  $r_0 = 1.13 \cdot 10^{-10} m$  risulta una carica equivalente  $q = p/r_0 = 0.02 e$ ; nell'acido cloridrico i numeri corrispondenti sono  $p = 3.6 \cdot 10^{-30} C \cdot m$ ,  $r_0 = 1.27 \cdot 10^{-10} m$ ,  $q = 0.18 e$ . La condivisione non simmetrica degli elettroni, che sposta il centro della distribuzione di carica verso uno dei due atomi, fa acquistare al legame covalente un parziale carattere ionico; ricordiamo d'altra parte che in una molecola ionica come  $NaCl$  la carica equivalente è  $q = 0.75 e$ . Anche la struttura energetica degli orbitali non è simmetrica come nella figura 19.7; nella figura 19.8 è mostrato, sempre qualitativamente, lo schema degli orbitali leganti e non leganti dell'acido fluoridrico, insieme agli orbitali atomici dei due elettroni condivisi che non sono eguali.

Infine nelle molecole poliameriche ci sono legami covalenti di un atomo con vari altri atomi, come nell'acqua  $H_2O$ , nell'anidride carbonica  $CO_2$ , nell'ammoniaca  $NH_3$ , nel metano  $CH_4$ , in generale in tutte le molecole organiche. A seconda della forma della molecola, ovvero della distribuzione simmetrica o asimmetrica delle cariche, si hanno molecole polari ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ) e non polari ( $CO_2$ ,  $CH_4$ ). Discuteremo più avanti i fattori che determinano la forma delle molecole poliameriche.

Con la descrizione della molecola  $H_2$  abbiamo visto il prototipo di legame covalente. Un esempio in cui tale legame non esiste si ha con l'elemento successivo, l'elio. Il sistema di due atomi di elio possiede i due orbitali molecolari della figura 19.7 (le energie però sono diverse) e in essi i quattro elettroni si dispongono a coppie: ne derivano due contributi eguali ed opposti all'energia di legame e la molecola biatomica non si forma. Passando al litio abbiamo la stessa situazione dell'elio per quanto riguarda gli elettroni  $1s$ , anche se, analogamente a quanto avviene nell'idrogeno, i due elettroni  $2s$  dei due atomi di litio danno luogo ad altri due orbitali molecolari, uno legante pieno e uno non legante vuoto; si forma così la molecola  $Li_2$  (in fase gassosa).

La sistematica degli orbitali molecolari è abbastanza complessa e pertanto ci limitiamo a descrivere i primi orbitali delle molecole biatomiche formate da atomi eguali. Oltre al valore dell'energia bisogna considerare il momento angolare: si trova che la componente  $L_z$  lungo l'asse che congiunge i due nuclei è conservata in quanto lungo tale asse è sempre nullo il momento delle forze agenti sugli elettroni; il numero quantico  $m_l$  può assumere i valori  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Gli orbitali con  $m_l = 0$  si chiamano  $\sigma$  e ciascuno può contenere al massimo due elettroni ( $m_l = 0, m_s = \pm 1/2$ ); essi sono leganti, con la coppia di elettroni localizzata principalmente tra i due nuclei, o non leganti, nel qual caso si usa il simbolo  $\sigma^*$ . I due orbitali della molecola  $H_2$  rappresentati nella figura 19.7 sono  $\sigma_{1s}$  e  $\sigma_{1s}^*$ , con  $\sigma_{1s}^*$  vuoto; nel simbolo è aggiunta la terminologia dell'orbitale atomico da cui provengono gli elettroni.

Gli orbitali con  $m_l = \pm 1$  si chiamano  $\pi$ ; si tratta di due orbitali con la stessa energia che in totale possono ospitare quattro elettroni ( $m_l = \pm 1, m_s = \pm 1/2$ ); anche ora ci sono orbitali leganti e orbitali non leganti, indicati col simbolo  $\pi^*$ . La forma degli orbitali  $\pi$  leganti mostra che gli elettroni in essi contenuti stanno preferibilmente tra i due atomi, non lungo la congiungente dove ci sono gli orbitali  $\sigma$ , ma intorno ad essa.

Nella figura 19.9 è riportata la struttura energetica degli orbitali molecolari che si formano nell'interazione tra due atomi eguali, dall'idrogeno al neon. A sinistra ci sono gli orbitali atomici di partenza, al centro gli orbitali molecolari il cui riempimento è mostrato nelle caselle di destra insieme al simbolo della molecola corrispondente. La logica è la stessa vista negli atomi con molti elettroni: il riempimento avviene per orbitali di energia crescente, con due elettroni per volta, e a parità di energia nei due orbitali  $\pi$  vale la regola di Hund; arrivati ad un certo livello si intende che gli orbitali più bassi siano tutti pieni. Completato un blocco di orbitali non si ha legame, in quanto non c'è prevalenza di orbitali leganti: ciò avviene per l'elio, il berillio e il neon che infatti non formano molecole biatomiche. Nelle molecole successive ad un blocco completo il legame è dovuto agli elettroni

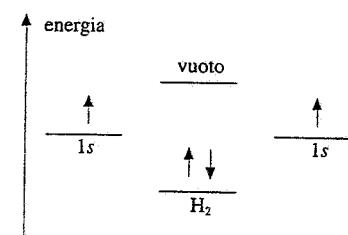


Figura 19.7

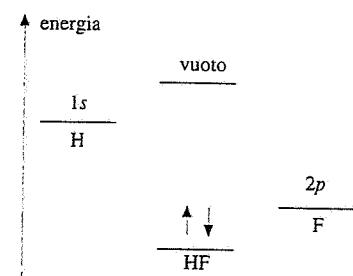


Figura 19.8

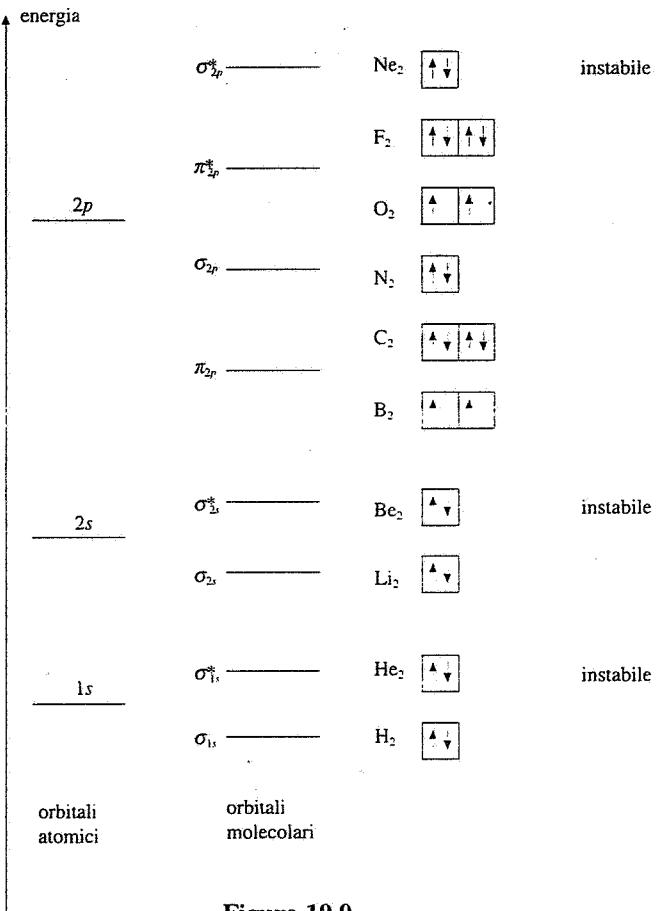
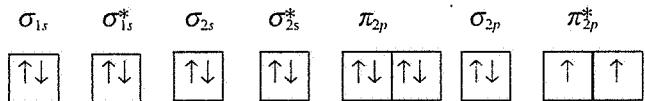


Figura 19.9

esterni: si conferma che sono questi i responsabili delle interazioni.

Citiamo esplicitamente la configurazione elettronica della molecola  $\text{O}_2$ :



Gli ultimi due elettroni hanno gli spin paralleli: questo fatto conferisce alla molecola di ossigeno un momento di dipolo magnetico permanente che rende conto delle notevoli proprietà paramagnetiche dell'ossigeno gassoso. L'idrogeno ( $\sigma_{1s}$ ), l'azoto (che arriva a  $\sigma_{2p}$ ) e il fluor (che ha  $\pi_{2p}^*$  pieno) sono invece diamagnetici; si confrontino le tabelle 9.1 e 9.2 del paragrafo 9.2.

Quando si passa alle molecole poliameriche il legame più diretto tra due atomi ha sempre le caratteristiche di un legame  $\sigma$ , con gli elettroni localizzati tra i nuclei. Esistono anche i legami tipo  $\pi$  e qui può accadere un fatto nuovo, cioè che gli elettroni non siano condivisi tra due soli atomi, ma tra più atomi: gli orbitali molecolari corrispondenti sono estesi su molti atomi e si dice che gli elettroni in essi contenuti siano delocalizzati. Ciò avviene ad esempio in alcune molecole organiche caratterizzate da una struttura esagonale piana con ai vertici atomi di carbonio, come il benzene  $\text{C}_6\text{H}_6$ : ciascun atomo di carbonio è legato ai due atomi di carbonio adiacenti e all'atomo di idrogeno da legami  $\sigma$ , indicati da linee nella figura 19.10, e in più esiste un legame  $\pi$  a cui ciascun atomo di carbonio fornisce un elettrone, che viene indicato con una circonferenza per significare che i suoi elettroni sono delocalizzati e possono muoversi lungo l'anello; in particolare da ciò deriva il forte diamagnetismo del benzene.

Un altro punto fondamentale che riguarda le molecole poliameriche è la comprensione della loro forma ovvero della disposizione spaziale degli atomi che le compongono, questione che ovviamente non si pone per le molecole biatomiche. Nella figura 19.11 sono mostrate le molecole di  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$ : le prime due costituiscono esempi delle sole strutture possibili per le molecole triatomiche, quella lineare e quella non lineare (con un angolo tra i legami caratteristico della molecola). La molecola di ammoniaca ha l'atomo di

azoto al vertice di una piramide e gli atomi di idrogeno ai vertici della base triangolare della piramide, mentre nella molecola di metano l'atomo di carbonio è al centro di un tetraedro regolare ai cui vertici stanno gli atomi di idrogeno.  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$  sono quindi molecole non piane; esistono peraltro molecole con quattro o più atomi che sono piane, come quella dell'etilene  $\text{C}_2\text{H}_4$ .

L'orientazione nello spazio dei legami disegnati nella figura 19.11 è regolata essenzialmente dalla condizione che ci sia equilibrio tra tutte le forze elettriche che si esercitano tra le varie cariche, tenendo presente per quanto riguarda gli elettroni degli orbitali esterni che oltre a quelli localizzati lungo i legami ce ne sono altri che non partecipano al legame. Ad esempio, nell'ammoniaca i tre elettroni  $2p$  dell'azoto formano i legami covalenti con gli atomi di idrogeno mentre due elettroni  $2s$  restano spaiati e ciò contribuisce ad una struttura non trirettangola (legami lungo gli assi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) come sarebbe suggerito dalla forma degli orbitali  $p$  (figura 19.2); analogamente la struttura della molecola d'acqua non ha i legami a  $90^\circ$  a causa della presenza nell'atomo di ossigeno di quattro elettroni di valenza che non partecipano ai legami covalenti con l'idrogeno. L'equilibrio comporta anche determinate simmetrie, evidenziate nelle figure dall'egualanza degli angoli tra i legami in  $\text{NH}_3$  e  $\text{CH}_4$ . L'impostazione quantitativa del problema porta al calcolo della forma degli orbitali nelle molecole e alla spiegazione delle strutture in figura 19.11 e di tutte le varie altre misurate.

A conclusione dell'esame delle principali caratteristiche del legame covalente ritorniamo su un punto cui abbiamo accennato senza spiegazioni, e cioè sul numero di legami che un atomo può formare. Prendendo come riferimento la tabella 19.1, l'esistenza di molecole come  $\text{NH}_3$  (tre legami),  $\text{H}_2\text{O}$  (due legami) e  $\text{HF}$  (un legame) appare riconducibile alla presenza nell'azoto, nell'ossigeno e nel fluoro rispettivamente di tre, due e uno elettroni  $2p$ , che non sono accompagnati da un secondo elettrone con spin antiparallelo. A tale struttura va ricondotta anche la forza del legame delle molecole  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{F}_2$  che abbiamo già ricordato essere decrescente passando dall'azoto al fluoro. Non riusciamo però a capire, da questa semplice osservazione, la formazione di molecole come  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CCl}_4$  e simili; in realtà, a differenza dei casi precedenti, il carbonio ha un orbitale  $2p$  completamente vuoto: nell'interazione con l'idrogeno o con il cloro uno dei due elettroni  $2s$  passa in questo orbitale e l'atomo di carbonio presenta quattro elettroni (uno  $2s$  e tre  $2p$ ) non accoppiati, capaci di partecipare ciascuno ad un legame covalente. In altre parole, nell'interazione si ha una deformazione degli orbitali il cui effetto spaziale è la forma tetraedrica della molecola  $\text{CH}_4$ ; in modo analogo si spiega la formazione dell'etilene  $\text{C}_2\text{H}_4$  (molecola lineare con un legame triplo) e dell'acetilene  $\text{C}_2\text{H}_2$  (molecola lineare con un legame triplo), schematicamente mostrate in figura 19.12. La procedura matematica che corrisponde a questi processi si chiama *ibridizzazione orbitali*.

I legami covalente e ionico, estesi ad un gran numero di atomi, sono responsabili della struttura di molti materiali solidi, come discuteremo tra breve. Vi sono però dei solidi in cui gli elementi costitutivi sono molecole: il ghiaccio ne è un esempio. Passiamo pertanto in rassegna anche i tipi di forze che possono svilupparsi tra molecole e portare in opportune condizioni ad un legame stabile.

Le forze intermolecolari danno origine in generale a legami che sono molto più deboli di quelli esistenti all'interno delle molecole stesse; esse nascono infatti da interazioni tra dipoli elettrici (si riveda allo scopo il paragrafo 2.9).

Un primo caso è quello del legame tra due molecole polari, che hanno cioè un momento di dipolo elettrico permanente, come ad esempio quelle di  $\text{HCl}$ . Vi sono poi molecole come  $\text{CH}_4$  e  $\text{CO}_2$  le quali, pur non possedendo un momento permanente, presentano un momento istantaneo, prodotto dalla configurazione istantanea degli elettroni, che a sua volta induce un momento di dipolo in una molecola vicina: ne risulta una forza attrattiva.

Queste interazioni, chiamate normalmente *forze di van der Waals*, hanno un andamento con la distanza  $r$  tra le molecole tale che l'energia potenziale vari come  $1/r^6$  e quindi si manifestano solo se le molecole sono praticamente a contatto, come avviene in fase liquida e in fase solida. Alla stessa causa sono dovute le deboli forze che si sviluppano tra atomi di un gas nobile.

Un caso differente, che porta a legami relativamente più forti, è il cosiddetto *legame a idrogeno*, che ha somiglianza con il legame ionico tra atomi. In una molecola polare contenente uno o più atomi di idrogeno questi assumono in pratica lo stato di ione, a causa dell'asimmetria della distribuzione della carica nel legame covalente, e possono attirare l'estremo negativo di un'altra molecola: si parla della formazione di un *ponte a idrogeno*. Tipico è il caso dell'acqua, che porta tra l'altro alla struttura del ghiaccio, mostrata in figura

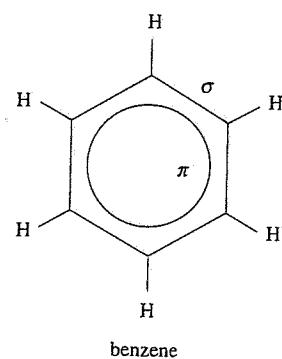


Figura 19.10

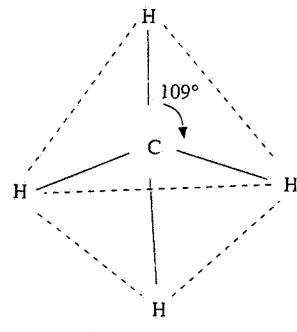
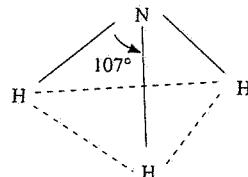
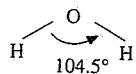
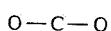


Figura 19.11

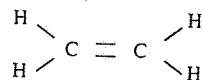
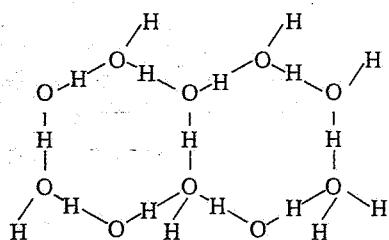


Figura 19.12

Legame a idrogeno



Nella struttura tridimensionale ogni ossigeno ha due ponti a idrogeno

Figura 19.13

19.13 (proiezione piana). Si tratta di una struttura molto aperta che spiega come mai la densità del ghiaccio sia minore di quella dell'acqua (nella fase liquida il legame non è rigido e l'impaccamento delle molecole è maggiore); si comprende pure come aumentando la pressione si faciliti la rottura del legame, con conseguente diminuzione della temperatura di fusione (volume primo, paragrafo 11.9). Un altro esempio di ponte a idrogeno si ha tra molecole di ammoniaca.

Nella tabella 19.3 sono elencate le energie necessarie per rompere i legami di alcuni casi corrispondenti a legami ionici, covalenti e intermolecolari.

Tabella 19.3 Energie di legame

molecole con legame ionico	KF NaCl CsI	5.2 eV 4.2 eV 3.6 eV	molecole con legame covalente	H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	4.5 eV 5.1 eV 9.8 eV
ponti a idrogeno	~ 0.1 eV		legami tra atomi di gas nobili	~ 0.01 eV	

### Solidi ionici

Vediamo adesso l'applicazione delle proprietà di legame, discusse in precedenza, alla formazione di un solido e cominciamo dai cosiddetti *solidi ionici*. Questi sono costituiti da ioni positivi e negativi, ovviamente di atomi diversi, formatisi attraverso la cessione e l'acquisto di elettroni, che sono la caratteristica del legame ionico; gli ioni stanno ai vertici di un reticolo cristallino in una situazione di equilibrio tra le attrazioni e le repulsioni elettriche delle varie cariche ioniche. Il caso del cloruro di sodio è già stato mostrato nella figura 16.51; la distanza minima tra due ioni diversi è  $2.8 \cdot 10^{-10}$  m, leggermente superiore a quella nella molecola semplice, in quanto l'equilibrio avviene in condizioni diverse.

La struttura elettronica degli atomi che partecipano al legame ionico acquista simmetria sferica e questi si impaccano nel cristallo come se fossero sfere; ne derivano forme cristalline cubiche o esagonali.

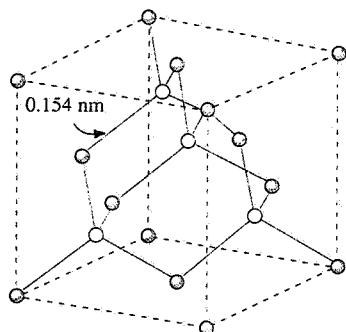
Nei solidi ionici non ci sono elettroni liberi e quindi essi sono cattivi conduttori dell'elettricità e del calore. Essendo il legame ionico piuttosto forte questi composti sono solidi a temperatura ambiente e anzi la loro temperatura di fusione è piuttosto elevata (1073 K per NaCl). Dato che un'eventuale eccitazione degli elettroni a livelli superiori di energia richiederebbe una notevole energia, spesso questi solidi sono trasparenti alla luce visibile: si trova che invece assorbono nell'infrarosso, a energie dei fotoni paragonabili all'energia di eccitazione di stati vibrazionali del cristallo.

### Solidi covalenti

In un *sólido covalente* gli atomi sono tenuti in posizioni fisse da legami covalenti che, a differenza del legame ionico, sono direzionali: basta rivedere ad esempio la struttura della molecola di metano (figura 19.11). Di conseguenza non si ha un impaccamento secondo sfere, poiché la struttura è determinata dalla geometria del legame. Nel diamante, che è una delle due forme in cui il carbonio si trova nella fase solida, i legami covalenti tra gli atomi di carbonio si dispongono come indicato nella figura 19.14 e la stessa struttura vale per il silicio e per il germanio: ogni atomo è legato da legami semplici del tipo  $\sigma$  ad altri quattro atomi.

I solidi covalenti, come del resto quelli ionici, sono difficili da deformare perché il legame è forte; presentano però fragilità, a causa della direzionalità dei legami. Sono anch'essi cattivi conduttori dell'elettricità e del calore per mancanza di elettroni liberi nel reticolo e presentano elevate temperature di fusione. La trasparenza alla luce dipende dagli stati eccitati accessibili agli elettroni; nel diamante sarebbe richiesta un'energia notevole e infatti esso è trasparente anche nel visibile, mentre il silicio è trasparente a grandi lunghezze d'onda ed è opaco nel visibile.

Il carbonio si presenta in un'altra forma di solido, sempre covalente: la grafite. La struttura cristallina è completamente diversa da quella del diamante: gli atomi di carbonio sono



Gli atomi ai vertici e al centro delle facce della cella cubica hanno legami covalenti con atomi al di fuori della cella

Figura 19.14

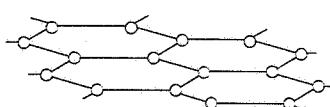


Figura 19.15

disposti ai vertici di esagoni che giacciono sullo stesso piano (figura 19.15) ed ogni atomo ha tre legami di tipo  $\sigma$  con altrettanti atomi e un quarto legame di tipo  $\pi$  che risulta delocalizzato. L'orbitale  $\pi$  cioè è esteso e questo permette agli elettroni in esso contenuti una libertà di movimento lungo il piano: infatti la grafite è conduttrice lungo i piani contenenti gli esagoni; invece gli elettroni non passano da un piano all'altro e ciò è confermato dal fatto che la grafite non è conduttrice ortogonalmente ai suddetti piani. Il legame tra tali piani, del tipo van der Waals, è molto debole ed essi possono scorrere facilmente uno rispetto all'altro: di qui la proprietà della grafite come lubrificante.

### Solidi metallici

I solidi cristallini con proprietà metalliche sono costituiti da atomi caratterizzati dall'avere uno o più elettroni esterni debolmente legati. Il *legame metallico* si può considerare come un caso limite del legame covalente in cui tutti gli atomi del reticolo mettono in comune gli elettroni suddetti e questi riempiono gli spazi interatomici. Tali elettroni non sono legati ad una particolare coppia di atomi, ma appartengono a tutto il cristallo, sono delocalizzati; essi hanno nel metallo una distribuzione uniforme, ma dinamica nel senso che possono muoversi all'interno del metallo pur restando intatto il legame generale.

La forza del legame metallico è compresa in un ampio spettro (vedi tabella 19.4); alla temperatura ambiente i metalli sono solidi, con l'eccezione del mercurio. L'impaccamento nel cristallo avviene di norma per sfere, in quanto dopo la cessione degli elettroni la struttura elettronica resta a simmetria sferica.

I metalli sono buoni conduttori di elettricità e calore, avendo elettroni liberi all'interno del reticolo: essi assorbono la luce visibile in quanto gli elettroni possono facilmente passare in stati eccitati accessibili, come discuteremo nei paragrafi successivi.

### Solidi molecolari

Sono quelli formati da molecole, legate dalle forze di origine dipolare: l'anidride carbonica solida (ghiaccio secco), il metano, l'idrogeno, l'ossigeno, l'azoto solidi costituiscono alcuni esempi. Allo stesso tipo di legame è dovuta l'esistenza della fase solida dei gas nobili. Essendo il legame piuttosto debole tali solidi sono facilmente comprimibili e deformabili e la temperatura di fusione è bassa: per azoto e argon si ha, rispettivamente, 63 K e 83 K.

Tra i solidi molecolari è compreso il ghiaccio; a causa del legame più forte la temperatura di fusione è decisamente più alta.

Data la loro struttura i solidi molecolari non sono conduttori.

Nella tabella 19.4 sono elencate, per alcuni solidi covalenti e metallici, l'energia di dissociazione (cioè l'energia necessaria per ottenere la fase gassosa dalla fase solida), la temperatura di fusione e la resistività.

**Tabella 19.4**

	$W_{\text{diss}}$ (kJ/mole)	$T_F$ (K)	$\rho$ ( $\Omega \cdot m$ )
silicio	456.0	1700	$2.3 \cdot 10^3$
germanio	374.7	1232	0.46
litio	161.6	452	$8.55 \cdot 10^{-8}$
argento	284.3	1234	$1.59 \cdot 10^{-8}$
alluminio	329.5	932	$2.65 \cdot 10^{-8}$
rame	337.9	1356	$1.67 \cdot 10^{-8}$
platino	566.1	2045	$10.6 \cdot 10^{-8}$

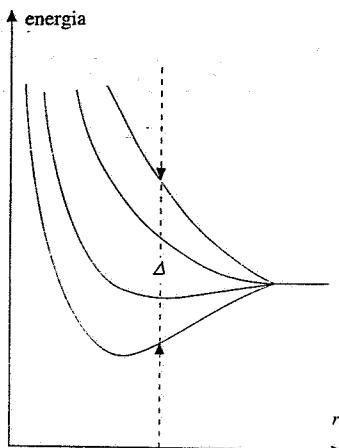


Figura 19.16

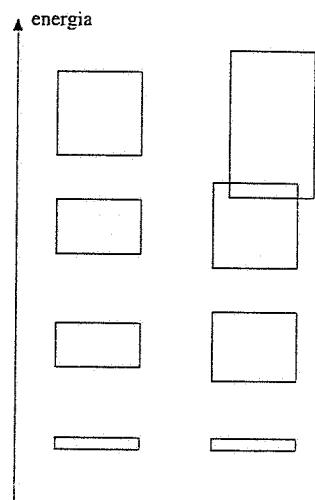


Figura 19.17

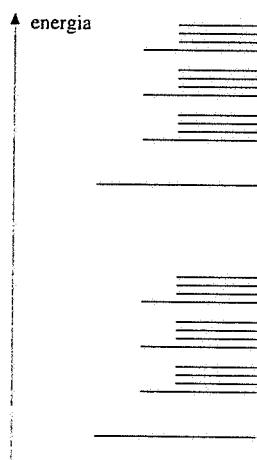


Figura 19.18

### Bande di energia

Quando due atomi formano una molecola i livelli energetici a disposizione degli elettroni si modificano e lo abbiamo visto ad esempio nel caso della molecola di idrogeno: al singolo livello  $1s$  di ciascun atomo corrispondono i due livelli  $\sigma_{1s}$  e  $\sigma_{1s}^*$  della molecola, uno inferiore e uno superiore nel valore dell'energia rispetto al livello  $1s$  (figura 19.7).

Il fatto è di carattere generale e presenta alcune caratteristiche che sono mostrate nella figura 19.16, riferita ad un ipotetico insieme di quattro atomi. Ciascun livello energetico del singolo atomo origina, per l'insieme di  $N$  atomi molto vicini tra loro, una *banda* di  $N$  livelli. La larghezza  $\Delta$  della banda dipende dal grado di sovrapposizione delle funzioni d'onda; con una data distanza interatomica la sovrapposizione è maggiore per gli elettroni dei livelli più esterni e minore per quelli dei livelli più interni, che restano mediamente più vicini al nucleo: corrispondentemente la larghezza  $\Delta_{\text{ext}}$  è maggiore della larghezza  $\Delta_{\text{int}}$ . Nella pratica, il numero  $N$  di atomi è vicino al numero di Avogadro e le larghezze  $\Delta$  sono dell'ordine di qualche elettronvolt, per cui la separazione tra gli  $N$  livelli di una singola banda è molto piccola e l'energia dei livelli si può considerare una variabile continua all'interno della banda.

In figura 19.17 sono evidenziati due possibili casi di disposizione delle bande derivanti dai livelli dei singoli atomi di un cristallo: alcune bande sono separate oppure sovrapposte parzialmente. Si usa anche chiamare *banda proibita* l'intervallo di energia tra una banda e la successiva nel quale non ci sono livelli accessibili per gli elettroni.

Vedremo nel seguito che questa nozione di bande di energia, applicata in particolare agli elettroni di valenza, sarà fondamentale per caratterizzare un solido come conduttore o come isolante.

#### Nota. Vibrazioni e rotazioni molecolari. Vibrazioni di un cristallo

I livelli energetici molecolari di cui abbiamo finora parlato sono i più importanti, ma non sono gli unici all'interno di una molecola. Le posizioni relative dei nuclei possono varia-re nel tempo (*moti vibrazionali*) e la molecola può compiere rotazioni attorno agli assi centrali d'inerzia (*moti rotazionali*). Entrambi i tipi di moto sono quantizzati ed è quantizzata l'energia totale  $U$  di uno stato molecolare, somma dei tre contributi, l'energia potenziale elettronica, l'energia vibrazionale e l'energia rotazionale:  $U = U_{\text{el}} + U_{\text{vib}} + U_{\text{rot}}$ . Nella figura 19.18 viene mostrato uno schema qualitativo dei livelli: al di sopra di un livello elettronico si trovano una serie di livelli vibrazionali, caratterizzati da una separazione  $\Delta U_{\text{vib}} \approx 0.1$  eV, e tra due livelli vibrazionali si situano i livelli rotazionali, caratterizzati da  $\Delta U_{\text{rot}} \approx 10^{-4}$  eV; la situazione si ripete per i vari livelli elettronici, la cui separazione è tipicamente  $\Delta U_{\text{el}} > 1$  eV.

Anche nei cristalli si hanno moti vibratori degli atomi attorno alle loro posizioni di equilibrio. Ad una data temperatura si ha una certa configurazione di oscillazioni, la cui energia è quantizzata: pertanto uno scambio di energia può avvenire solo per quantità discrete e questi quanti di energia si chiamano *fononi*. Lo sviluppo quantitativo di tali concetti ha permesso di spiegare il comportamento del calore specifico dei solidi cristallini in funzione della temperatura e le proprietà della conduzione del calore nei cristalli isolanti, cioè nei casi in cui il fenomeno è dovuto alle vibrazioni del reticollo e non alla presenza di elettroni di conduzione. Anche la propagazione e l'assorbimento di onde elastiche e le interazioni di elettroni, neutroni e fotoni con un reticollo cristallino vengono descritte facendo uso del concetto di fonone.

### 19.4 Il gas di elettroni liberi di Fermi

In un solido conduttore ciascun atomo rilascia uno o più elettroni, detti di conduzione, che pur essendo responsabili del legame metallico sono delocalizzati: essi appartengono a tutto il solido e non ad un particolare atomo. Dallo studio di questo sistema, detto gas di elettroni e assimilato ad un gas ideale, vennero dedotte alcune proprietà dei conduttori.

principalmente la legge di Ohm, come già discusso nel Capitolo 6, ma si incontrano difficoltà insormontabili per spiegare altre proprietà, su cui torneremo più avanti in questo paragrafo.

La prima trattazione quantistica è dovuta a Fermi, che la sviluppò secondo le linee seguenti. Si considera che gli elettroni siano rinchiusi in una scatola cubica di lato  $a$ , grande rispetto alle dimensioni atomiche, all'interno della quale la loro energia potenziale è costante: essi quindi non sono sottoposti a forze, salvo che non possono uscire dalla scatola.

Ciascun elettrone ha quantità di moto ed energia cinetica

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} , \quad E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2 k^2}{8\pi^2 m} , \quad (19.1)$$

dove si è utilizzata la relazione di de Broglie (18.19) con  $\lambda = 2\pi/k$ . Le onde elettroniche hanno un nodo sulle pareti della scatola e ciò fissa i possibili valori delle lunghezze d'onda, come si è visto nella trattazione delle onde stazionarie. Seguendo (15.41) con  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  possiamo scrivere

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

L'energia cinetica è dunque quantizzata secondo l'espressione

$$E_k = \frac{h^2}{8ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{h^2}{8ma^2} R^2 ;$$

$R$  rappresenta il raggio di una sfera in uno spazio tridimensionale di coordinate  $n_1, n_2, n_3$  e in funzione di  $E_k$  si ha

$$R = (8mE_k)^{1/2} \frac{a}{h} , \quad dR = \left( \frac{8m}{E_k} \right)^{1/2} \frac{a}{2h} dE_k .$$

Il numero di valori di  $E_k$  compresi tra  $R$  e  $R + dR$ , cioè il numero di livelli che hanno numeri quantici compresi tra  $n_i$  e  $n_i + dn_i$ ,  $n_2$  e  $n_2 + dn_2$ ,  $n_3$  e  $n_3 + dn_3$ , è eguale al volume della corteccia sferica compresa tra  $R$  e  $R + dR$ :

$$dN = 4\pi R^2 dR = \frac{16\pi a^3}{h^3} (2m)^{3/2} E_k^{1/2} dE_k .$$

Gli stati accessibili sono però quelli con  $n_1, n_2, n_3$  positivi, ovvero il volume da considerare è un ottavo di quello calcolato; inoltre ciascun livello è occupabile da due elettroni soltanto, in accordo col principio di esclusione di Pauli. Quindi il numero di elettroni per unità di volume la cui energia è compresa tra  $E_k$  ed  $E_k + dE_k$  è

$$dn = \frac{2dN}{8a^3} = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} E_k^{1/2} dE_k = 6.812 \cdot 10^{27} E_k^{1/2} dE_k , \quad (19.2)$$

il valore numerico essendo valido se le energie sono espresse in elettronvolt. Notiamo che la distribuzione  $dn/dE_k$  dipende solo dal valore dell'energia e non da caratteristiche del solido.

Nell'unità di volume ci sono  $n_0$  elettroni liberi; se immaginiamo che il solido sia alla temperatura  $T = 0$  K, il valore minimo della loro energia cinetica è zero ed il valore massimo  $E_F$  si ottiene integrando (19.2):

$$n_0 = \int_0^{E_F} dn = \frac{8\pi}{3h^3} (2m)^{3/2} E_F^{3/2} = 4.541 \cdot 10^{27} E_F^{3/2} ,$$

**Energia di Fermi**

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{3n_0}{\pi} \right)^{2/3} = 3.646 \cdot 10^{-19} n_0^{2/3} \text{ eV} . \quad (19.3)$$

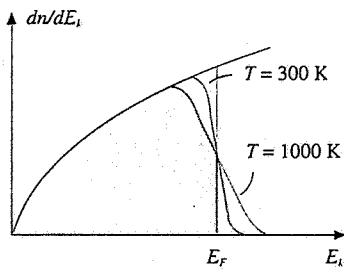
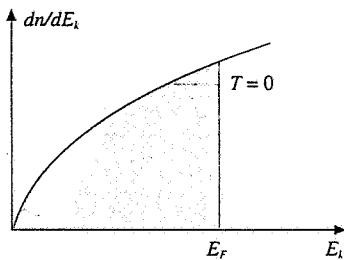
Tale valore massimo si chiama *energia di Fermi* ed è caratteristico del conduttore in quanto dipendente da  $n_0$ .

Se non valesse il principio di Pauli gli elettroni, pur avendo a disposizione moltissimi livelli, starebbero tutti nel livello più basso con energia nulla, se la temperatura fosse  $T = 0$ . Invece, proprio a causa del principio di esclusione gli elettroni non possono avere tutti la stessa energia; anche a  $T = 0$   $n_0$  elettroni occupano  $n_0/2$  livelli diversi, nei quali sono distribuiti secondo (19.2). Chiamando stato fondamentale del sistema questa distribuzione tra  $E_{k,\min} = 0$  ed  $E_{k,\max} = E_F$ , possiamo definire l'energia di Fermi come l'energia cinetica del più alto livello occupato nello stato fondamentale degli  $n_0$  elettroni.

Alcuni valori di  $E_F$ , calcolati tramite (19.3), sono elencati nella tabella 19.5; la densità elettronica  $n_0$  è determinata a partire dalla densità di atomi  $n_a = \rho N_A / A$  con la formula  $n_0 = n_v n_a$ , dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $N_A$  il numero di Avogadro,  $A$  la massa molare e  $n_v$  il numero di elettroni ceduti da ciascun atomo.

**Tabella 19.5 Energia di Fermi**

metallo	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$A$ (kg/mole)	$n_a$	$n_0$ (elettroni/m <sup>3</sup> )	$E_F$ (eV)
Cu	$8.93 \cdot 10^3$	63.54	1	$8.46 \cdot 10^{28}$	7.03
Ag	$10.50 \cdot 10^3$	107.87	1	$5.86 \cdot 10^{28}$	5.50
Zn	$7.13 \cdot 10^3$	65.37	2	$13.14 \cdot 10^{28}$	9.42
Al	$2.70 \cdot 10^3$	26.98	3	$18.08 \cdot 10^{28}$	11.66
Pb	$11.34 \cdot 10^3$	207.19	4	$13.18 \cdot 10^{28}$	9.44

**Figura 19.19**

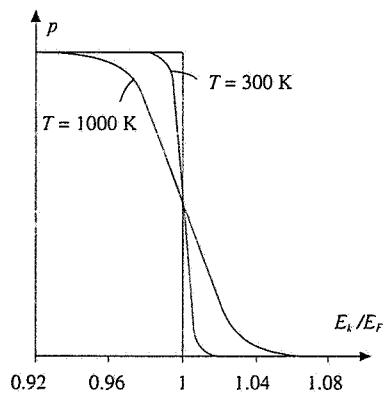
Quando la temperatura è maggiore di zero gli elettroni possono essere eccitati verso un livello superiore, purché questo sia vuoto. L'energia comunicabile per via termica, attraverso urti con gli ioni del reticolo, è dell'ordine di  $k_B T$ , che alla temperatura ambiente  $T = 300$  K vale 0.026 eV, oltre cento volte inferiore ai valori tipici dell'energia di Fermi. Quindi solo gli elettroni con energia molto vicina a  $E_F$  possono, ricevendo  $k_B T$ , superare  $E_F$  e andare ad occupare un livello vuoto, lasciando libero il livello di partenza; gli elettroni nei livelli più profondi invece non hanno tale possibilità in quanto gli stati distanti circa  $k_B T$  dalla loro energia sono già occupati. In sostanza è molto piccola la percentuale di elettroni che possono essere eccitati termicamente (vedi esempio 19.1) e pertanto la distribuzione degli stati occupati a temperatura  $T > 0$  non è molto diversa da quella degli stati occupati a  $T = 0$ . Nella figura 19.19 sono mostrate la funzione  $dn/dE_k$  calcolata tramite (19.2) e, qualitativamente, le modifiche a  $T = 300$  K e  $T = 1000$  K, modifiche appunto localizzate intorno a  $E_F$ .

Il calcolo quantitativo delle curve modificate si esegue partendo dall'espressione delle probabilità che ha un elettrone di occupare un livello con energia  $E_k$ ; questa risulta

$$p(E_k, T) = \frac{1}{e^{(E_k - E_F)/k_B T} + 1} , \quad (19.4)$$

in base al calcolo quantistico effettuato nell'ambito della cosiddetta *statistica di Fermi-Dirac*. La distribuzione effettiva è dunque

$$\frac{dn(T)}{dE_k} = p(E_k, T) \frac{dn(T=0)}{dE_k} .$$

**Figura 19.20**

L'andamento di  $p(E_k, T)$  a  $T = 0$ ,  $T = 300$  K e  $T = 1000$  K è mostrato per il rame in prossimità di  $E_F$  nella figura 19.20; in particolare si noti che per  $T = 0$   $p(E_k, 0) = 1$  se  $E_k < E_F$  e  $p(E_k, 0) = 0$  se  $E_k > E_F$ : la curva  $dn(T=0)/dE_k$ , matematicamente non limitata, è in effetti tagliata a  $E_k = E_F$ .

**Esempio 19.1**

Calcolare, nel rame, quanti elettroni hanno energia compresa tra  $E = E_F - k_B T$  e  $E_F$  con  $T_1 = 300 \text{ K}$  e con  $T_2 = 1000 \text{ K}$ .

**Soluzione**

Dato che  $k_B T_1 = 0.026 \text{ eV}$ ,  $k_B T_2 = 0.086 \text{ eV}$  e, da (19.3),  $E_F = 7.026 \text{ eV}$ ,  $E_1 = E_F - k_B T_1 = 7.0 \text{ eV}$ ,  $E_2 = E_F - k_B T_2 = 6.94 \text{ eV}$ .

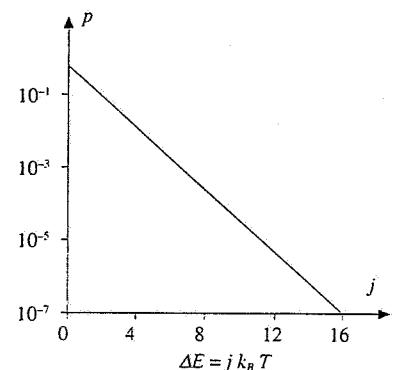
Integriamo la (19.2):

$$n = \int_E^{E_F} dn = \frac{8\pi}{3 h^3} (2 m)^{3/2} (E_F^{3/2} - E^{3/2}) = 4.541 \cdot 10^{27} (E_F^{3/2} - E^{3/2})$$

$$\Rightarrow n_1 = 4.69 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3} = 0.55\% \text{ di } n_0 \quad , \quad n_2 = 1.55 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} = 1.83\% \text{ di } n_0$$

Si vede che la percentuale di elettroni suscettibile di subire eccitazione termica è limitata ( $n_0$  è stato preso dalla tabella 19.5).

Nella figura 19.21 è riportata la probabilità (19.4) per valori positivi di  $\Delta E = E_k - E_F$ , misurata in unità di  $k_B T$ ; per  $\Delta E = 7k_B T$  la probabilità di occupazione è già inferiore a  $10^{-3}$ . Nel nostro caso con  $7k_B T = 0.182 \text{ eV}$  a  $T = 300 \text{ K}$ , meno di un elettrone su mille ha energia cinetica superiore a  $E_F + 7k_B T = 7.208 \text{ eV}$ .

**Figura 19.21****Esempio 19.2**

Calcolare l'energia cinetica complessiva e l'energia cinetica media del gas di elettroni liberi a  $T = 0$ .

**Soluzione**

L'energia cinetica di  $dn$  elettroni aventi energia cinetica  $E_k$  è, da (19.2),

$$E_k dn = \frac{4\pi}{h^3} (2 m)^{3/2} E_k^{3/2} dE_k$$

e quindi in totale

$$E_{k,\text{tot}} = \int_0^{E_F} E_k dn = \frac{4\pi}{h^3} (2 m)^{3/2} \frac{2}{5} E_F^{5/2}$$

D'altra parte il numero totale di elettroni è già stato calcolato,

$$n = \frac{8\pi}{3 h^3} (2 m)^{3/2} E_F^{3/2} \quad ,$$

e si riconosce che

$$E_{k,\text{tot}} = \frac{3}{5} n E_F \quad .$$

Dividendo per  $n$  si ha l'energia media di un elettrone a  $T = 0$ :

$$E_{k,m} = \frac{3}{5} E_F = 0.6 E_F \quad .$$

Da quanto detto in precedenza si deduce inoltre che  $E_{k,\text{tot}}$  e  $E_{k,m}$  sono praticamente indipendenti dalla temperatura. Detta  $v_F$  la velocità corrispondente a  $E_F$  e  $v_m$  la velocità media, si ha

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \quad , \quad v_m = \sqrt{0.6} \quad v_F = 0.77 v_F \quad .$$

Nel rame  $E_F = 7.03 \text{ eV}$ ,  $v_F = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  e  $v_m = 1.21 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  (si riveda l'esempio 6.1).

In conclusione il gas di elettroni liberi si comporta in maniera molto diversa dal gas ideale-classico. Gli elettroni si muovono con energie comprese entro uno spettro determinato e l'energia di ciascuno non cambia a meno che esso non riesca ad assorbire una quantità di energia tale da portarlo in un livello vuoto. Per la maggior parte di essi occorrerebbe un'energia di molti elettronvolt, che non può essere comunicata per via termica, e pertanto essi restano in una situazione per così dire dinamicamente bloccata. L'energia cinetica complessiva non è proporzionale alla temperatura e anzi varia molto poco con questa; a temperatura ambiente l'energia cinetica media è maggiore di  $k_B T$  per almeno due ordini di grandezza.

Il modello di Fermi ha aperto la strada alla soluzione del problema reale degli elettroni nei metalli, in cui occorre considerare anche l'interazione con gli ioni del reticolo, come accenneremo nel paragrafo 19.5. Esso inoltre ha fornito la prima spiegazione di un problema irrisolto nella teoria cinetica classica, quello del calore specifico dei metalli: il valore limite di questo è noto essere  $3R$ , come ci si aspetta da un sistema con 6 gradi di libertà (vedi volume primo, paragrafi 10.7 e 11.10), ma non si capiva come, in aggiunta a tale contributo del reticolo, non ci fosse un contributo degli elettroni liberi di muoversi, pari a quello di un gas monoatomico e cioè  $3R/2$ . La ragione è stata vista prima: essendo molto piccola la percentuale che può assorbire energia possiamo dire che gli elettroni non vengono eccitati termicamente e quindi è come se non ci fossero.

Anche il debole paramagnetismo osservato nella maggior parte dei metalli si spiega facilmente. Gli elettroni hanno un momento angolare intrinseco  $S$  e un momento magnetico  $\mu_e$  opposto a  $S$  (paragrafo 9.10). In un campo magnetico esterno  $B$  essi tendono ad orientarsi con  $\mu_e$  parallelo e concorde a  $B$  (stato di minima energia magnetica) oppure con  $\mu_e$  parallelo e discorde a  $B$  (stato di massima energia magnetica). L'energia viene modificata, diventando rispettivamente  $E_k - \mu_e B$  ed  $E_k + \mu_e B$ ; in corrispondenza la curva di distribuzione della figura 19.19 si sposta verso sinistra o verso destra. Nella figura 19.22 l'effetto è esagerato, in quanto  $\mu_e B$  con  $B = 1$  T vale  $5.8 \cdot 10^{-5}$  eV. Nel complesso si trova che in ogni intervallo di energia ci sono più elettroni con  $\mu_e$  concorde a  $B$  che elettroni con  $\mu_e$  discorde a  $B$ . Questo fatto porta ad un momento magnetico risultante, dovuto agli elettroni liberi, che è concorde a  $B$ , cioè ad un comportamento paramagnetico; gli ioni del reticolo da soli darebbero un effetto diamagnetico. Il calcolo quantitativo dà una suscettività magnetica in accordo, come ordine di grandezza, con i valori misurati.

Infine mettiamo in evidenza il collegamento con il *lavoro di estrazione*: questo risulta eguale all'energia che occorre comunicare all'elettrone che si trova nel livello occupato più alto per uscire dal metallo; a  $T = 0$  tale livello coincide con l'energia di Fermi. Visto che le proprietà del gas di elettroni dipendono poco dalla temperatura, si deduce che ne dipenderà poco anche il lavoro di estrazione, come in effetti si verifica.

Nella figura 19.23 è mostrata l'energia totale minima di un elettrone, pari a  $-eV_0$  rispetto ad un livello zero corrispondente ad un elettrone non chiuso dentro il metallo, ma fermo in un punto immediatamente esterno; l'energia totale massima è  $-eV_0 + E_F$ . Il lavoro di estrazione, secondo la definizione data sopra è

$$W = 0 - (-eV_0 + E_F) = eV_0 - E_F ;$$

dalla misura di  $W$  e dal calcolo di  $E_F$  si può determinare il valore di  $eV_0 = W + E_F$ , modulo dell'energia potenziale degli elettroni chiusi nella scatola. Ad esempio nel rame, con  $W = 4.1$  eV e  $E_F = 7.0$  eV, si trova  $eV_0 = 11.1$  eV. D'altra parte  $eV_0$  può essere ottenuta in modo indipendente, come spiegato nella nota, e quindi noto  $W$ , ad esempio dall'effetto fotoelettrico, si può calcolare  $E_F$  e verificare (19.3).

#### Nota. Determinazione di $eV_0$

In un esperimento di diffrazione di elettroni (paragrafo 18.7) lo studio della figura di diffrazione permette di calcolare la lunghezza d'onda  $\lambda$  degli elettroni incidenti. Questi, accelerati da una d.d.p.  $V$ , hanno quantità di moto  $p$  ed energia cinetica  $E_k = p^2/2m = eV$ ; quindi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

Se il bersaglio è un cristallo metallico l'accordo tra il valore misurato di  $\lambda$  e quello così calcolato risulta ottimizzato scrivendo

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me(V + V_0)}}$$

e ciò si interpreta ammettendo che gli elettroni siano ulteriormente accelerati entrando nel metallo da una d.d.p. interna  $V_0$ ; questa  $V_0$  è la stessa che impedisce agli elettroni di conduzione di uscire dal cristallo.

Osserviamo che nella figura 19.23 sono importanti le differenze e non i valori assoluti; se il conduttore assume un potenziale  $V_c$ , ai valori delle energie va aggiunto il termine costante  $-eV_c$  e il lavoro necessario per estrarre un elettrone non cambia.

Dalle considerazioni precedenti si capisce anche qualitativamente l'esistenza dell'effetto termoelettronico (paragrafo 6.5). Ad alta temperatura il numero di elettroni con energia abbastanza superiore a  $E_F$  diventa significativo; quando l'eccesso di energia  $E_k - E_F$  supera  $W$  gli elettroni possono uscire dal metallo.

## 19.5 Gas di elettroni all'interno di un reticolo cristallino

Dato che la trattazione del gas di elettroni è importante per spiegare il comportamento degli elettroni di conduzione, bisogna rappresentare l'effetto della presenza del reticolo in maniera più realistica, e cioè non semplicemente con la scatola del paragrafo 19.4.

L'energia potenziale di un elettrone non può essere costante, in quanto essa dipende dalla distanza dagli ioni del reticolo. Per rendere l'idea consideriamo un ipotetico reticolo unidimensionale formato da una fila di ioni equispaziati; il grafico dell'energia potenziale è mostrato nella figura 19.24: essa ha un massimo locale nel punto di mezzo tra due ioni, tende a  $-\infty$  nelle immediate vicinanze di uno ione e alla fine del reticolo aumenta, con ciò indicando che per estrarre un elettrone dal cristallo occorre spendere un certo lavoro (nella scatola il dislivello sarebbe infinito). Più concretamente diciamo che all'interno di un reticolo un elettrone è soggetto ad un potenziale che varia con la stessa periodicità del reticolo.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger con un potenziale che gode di questa proprietà mostra che le onde elettroniche possono propagarsi liberamente nel cristallo se il reticolo è perfetto, nel senso che discuteremo più avanti. Il fatto nuovo più importante è che i livelli energetici non sono distribuiti senza interruzione da un valore minimo ad un valore massimo, come avviene per gli elettroni liberi. La relazione tra energia e numero d'onde non è più quella data da (19.1), graficamente rappresentata da una parabola, ma è più complicata. Limitandoci di nuovo al reticolo lineare, si trova la situazione della figura 19.25. L'energia, che ora non è solo cinetica, presenta discontinuità ai valori  $k = \pm \pi/a, \pm 2\pi/a, \pm 3\pi/a, \dots$ , essendo  $a$  il passo del reticolo (il segno di  $k$  significa moto concorde o discorde all'asse  $x$ ). Formalmente, in corrispondenza ai suddetti valori di  $k$  non esistono soluzioni ondulatorie dell'equazione di Schrödinger; in effetti avviene che a quelle particolari lunghezze d'onda le onde elettroniche subiscono riflessioni in modo tale da dar luogo a onde stazionarie, che non possono rappresentare un moto progressivo degli elettroni.

*I valori possibili dell'energia risultano così raggruppati in bande di livelli.* Il risultato era prevedibile, secondo quanto esposto alla fine del paragrafo 19.3, essendo il reticolo formato da un insieme di atomi. In particolare, nel caso di un elemento come litio, sodio, rame, argento, i cui atomi si privano di un elettrone, il livello atomico corrispondente ( $2s, 3s, \dots$ ) dà luogo a una banda di  $N$  livelli, se  $N$  sono gli atomi considerati, in cui possono stare  $2N$  elettroni: siccome gli atomi partecipanti ne hanno ceduti  $N$  la banda è semipiena. Invece i livelli inferiori formano bande piene: in un livello atomico pieno ci sono due elettroni e quindi  $N$  atomi forniscono  $2N$  elettroni che riempiono gli  $N$  livelli disponibili. L'energia di Fermi, sempre intesa come energia del più alto livello pieno, cade a metà dell'ultima banda.

Quando nel conduttore agisce un campo elettrico esterno, gli elettroni che acquistano energia sono solo quelli vicini alla sommità della banda semipiena, in quanto possono portarsi in livelli vuoti; in sostanza si tratta dello stesso ragionamento svolto per l'eccitazione termica (per il calcolo numerico si veda il successivo esempio 19.3).

In un reticolo reale l'aumento di energia è limitato da due fatti che comportano uno scambio di energia tra elettrone e reticolo. Nel reticolo ci sono imperfezioni, costituite da impurezze (atomi di elementi estranei) e da irregolarità geometriche, dovute a come si è formato il reticolo e a quali sollecitazioni è stato sottoposto: inoltre gli ioni possono oscillare.

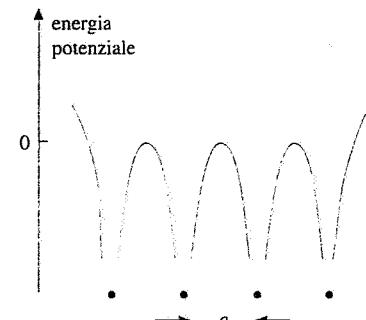


Figura 19.24

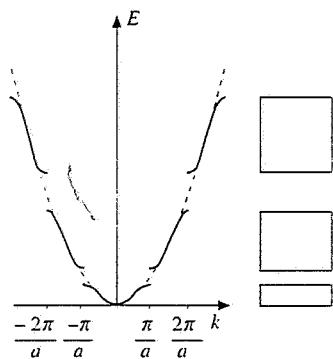


Figura 19.25



Figura 19.26

Le interazioni sia con le impurezze che con i fononi (tramite cui si rappresentano i moti oscillatori) causano una perdita di energia e l'elettrone ritorna in un livello di minore energia, annullando l'effetto del campo elettrico. Tra il processo di cessione di energia all'elettrone da parte del campo elettrico e i processi di perdita di energia si stabilisce un regime di equilibrio dinamico, caratterizzato da un moto di deriva degli elettroni con velocità costante invece che con accelerazione costante ovvero, in termini quantitativi, dalla legge di Ohm che scriviamo nella forma (6.17).

La conduttività ha un'espressione formalmente eguale a (6.16),

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m^*} , \quad (19.5)$$

ma con significato dei simboli un po' diverso;  $n$  è il numero effettivo di elettroni per unità di volume che partecipano al processo di conduzione,  $\tau$  il tempo medio tra due collisioni e  $m^*$  la *massa efficace dell'elettrone*, così definita: posto che sull'elettrone, la cui accelerazione istantanea è  $a$ , agiscono sia una forza elettrica esterna  $F_e$  che una forza  $F_i$  dovuta all'interazione col reticolo, così che  $F_e + F_i = ma$ , la massa efficace è  $m^* = F_e/a$ . All'applicazione della forza esterna l'elettrone reagisce come se avesse massa  $m^*$  e in questa grandezza è contenuto l'effetto del reticolo; solo se l'elettrone fosse libero sarebbe  $m^* = m$ . In generale  $m^*$  dipende dall'energia dell'elettrone, ma di norma viene calcolata all'energia di Fermi, poiché gli elettroni di conduzione hanno all'incirca sempre questa energia. In un buon conduttore come il rame è  $m^* \approx 1.1 m$ ; nel ferro invece l'interazione col reticolo è tale per cui  $m^* \approx 10 m$  e ne deriva una conduttività molto inferiore a quella del rame.

Il tempo medio  $\tau$  è legato alla distanza media  $\ell$  tra due collisioni dalla relazione  $\tau = \ell/v_F$ , dove  $v_F$  è la velocità di Fermi.

### Esempio 19.3

La conduttività del rame a temperatura ambiente è  $\sigma = 5.88 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ; assumendo  $n = 8.46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  e  $m^* = m$ , calcolare  $\tau$  e  $\ell$ . Ripetere il calcolo a  $T = 4 \text{ K}$  dove, se il rame è ultrapuro, si misura una conduttività 10<sup>5</sup> volte maggiore. Calcolare inoltre, a temperatura ambiente, l'energia comunicata ad un elettrone da un campo elettrico  $E = 1 \text{ V/m}$ .

#### Soluzione

Da (19.5) e da  $v_F = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  (esempio 19.2) abbiamo

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} = 2.47 \cdot 10^{-14} \text{ s} , \quad \ell = \tau v_F = 3.88 \cdot 10^{-8} \text{ m} :$$

la distanza media tra due collisioni è oltre 100 volte maggiore della distanza interatomica. A  $T = 4 \text{ K}$ ,  $\ell$ , come  $\sigma$ , aumenta di un fattore 10<sup>5</sup> e vale  $3.88 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 4 \text{ mm}$ : il reticolo ostacola molto poco il moto degli elettroni.

Su una distanza  $\ell$  l'energia comunicata dal campo elettrico è

$$e E \ell = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 3.88 \cdot 10^{-8} \text{ J} = 3.88 \cdot 10^{-27} \text{ eV} .$$

Si tratta di un valore molto inferiore all'energia di Fermi. D'altra parte già un campo elettrico così basso dà luogo ad una densità di corrente molto elevata ( $5.88 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ ), non sopportabile dal rame in condizioni normali.

I due processi che disturbano il moto degli elettroni sono diversamente influenzati dalla temperatura: l'effetto delle imperfezioni in pratica non dipende da  $T$ , mentre ne dipende l'effetto dovuto alle oscillazioni. La resistività  $\rho = 1/\sigma$  si può esprimere, secondo la *formula di Matthiessen*, come somma di due termini,

$$\rho = \rho_i + \rho_f .$$

Confrontando con (19.5), per il tempo di rilassamento si può scrivere

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_f}$$

Sperimentalmente a temperature vicine allo zero assoluto si ha il comportamento della figura 19.27. Da un lato si vede che per  $T \rightarrow 0$  il contributo  $\rho_f$  delle oscillazioni si spegne e resta il contributo costante  $\rho_i$ , detta anche resistività residua; dall'altro  $\rho_f$  risulta crescere linearmente con la temperatura: ne consegue in particolare che  $\tau_f$  va come  $1/T$ .

L'apporto delle impurezze e dei difetti reticolari alla resistività aumenta al crescere della densità nel cristallo di tali imperfezioni e ciò suggerisce la possibilità di ottenere, a prezzo di un aumento di resistività, un conduttore la cui resistività dipenda poco dalla temperatura. Il risultato si raggiunge, ad esempio, con una soluzione solida disordinata di due metalli; la costantana, lega rame-nichel, ha una resistività a temperatura ambiente che è superiore di circa 30 volte a quella del rame e di circa 7 volte a quella del nichel, ma ha un coefficiente di temperatura (vedi paragrafo 6.5) che è oltre un ordine di grandezza inferiore.

## 19.6 Conduttori e isolanti. Semiconduttori

La distribuzione dei livelli energetici degli elettroni in bande separate da intervalli proibiti è la principale caratteristica elettronica dei solidi. Al comportamento metallico, definibile come possibilità per gli elettroni di accedere a livelli vuoti ricevendo energia da un campo elettrico con conseguente formazione di una densità di corrente concorde al campo, corrisponde la struttura a bande già riportata nella figura 19.26: l'ultima banda in cui ci sono elettroni non è completamente riempita e quindi esistono livelli permessi vuoti e accessibili; a questa banda si dà il nome di *banda di conduzione* del metallo. Gli elettroni delle bande inferiori, che sono tutte piene, non possono acquistare energia e non partecipano al processo di conduzione.

Quella descritta non è l'unica possibilità per avere proprietà di conduzione. Può anche avvenire che l'ultima banda contenente elettroni sia completamente piena, ma sia parzialmente sovrapposta alla successiva banda vuota; allora gli elettroni hanno a disposizione i livelli della banda vuota e il solido è un conduttore. A questa categoria, detta dei *semimetallici*, appartengono ad esempio il magnesio, lo zinco, l'antimonio e il bismuto. Nel caso dello zinco sono delocalizzati i due elettroni  $4s$  e la banda corrispondente è piena; però la banda  $4p$ , che è vuota, è sovrapposta alla banda  $4s$ .

Non possono invece essere conduttori i solidi in cui l'ultima banda contenente elettroni è completamente piena e non è sovrapposta alla banda successiva; in effetti questa è la configurazione che caratterizza gli isolanti. L'ampiezza  $E_g$  della zona proibita (detta in inglese *gap*) è sufficientemente grande e non è possibile agli elettroni superarla né per eccitazione termica né per eccitazione elettrica. Nel diamante, che è un ottimo isolante,  $E_g = 5.33$  eV; nel cloruro d'argento, solido ionico,  $E_g = 3.2$  eV. Non possiamo in questo caso parlare di gas di elettroni, almeno nel senso originario di elettroni liberi di muoversi nel reticolo cristallino; gli elettroni di valenza sono tutti bloccati a formare i legami e non possono essere eccitati. L'ultima banda piena si chiama *banda di valenza* e la successiva banda vuota *banda di conduzione*.

### Semiconduttori intrinseci

Il silicio e il germanio, che hanno la stessa struttura reticolare del diamante, presentano un minor valore di  $E_g$ , 1.1 eV nel silicio e 0.66 eV nel germanio. A temperature prossime allo zero assoluto anche questi elementi si comportano come isolanti, anche se al crescere della temperatura non è del tutto trascurabile la probabilità che gli elettroni della parte superiore della banda di valenza possano passare, per eccitazione termica, nella banda di conduzione. I solidi con questa proprietà si chiamano *semiconduttori*.

Gli elettroni che, ad una certa temperatura, popolano la banda di conduzione hanno lo stesso comportamento degli elettroni di conduzione di un metallo: sotto l'azione di un campo elettrico acquistano energia e danno luogo ad una densità di corrente  $j_e$ . D'altra parte ogni elettrone che passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione lascia nella banda di valenza un livello vuoto che viene chiamato *lacuna* (in inglese *hole*); l'esistenza delle lacune rende disponibili livelli che possono essere occupati da altri elettroni della banda di valenza e quindi si può avere un moto ordinato di cariche sotto l'azione di un campo elet-

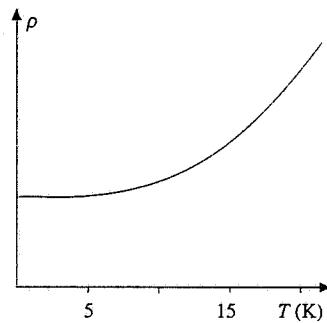


Figura 19.27

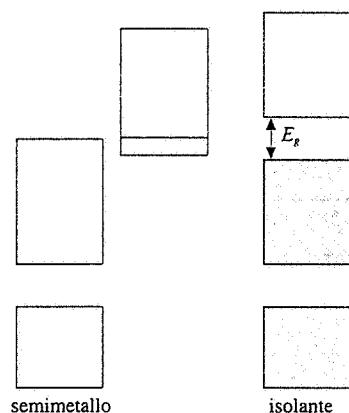


Figura 19.28

trico anche nella banda di valenza. Il passaggio di un tale elettrone da uno stato di energia  $-U_i$  ad uno stato di energia  $-U_j > -U_i$  equivale al passaggio di una carica elementare positiva dal livello  $U_j$  al livello  $U_i > U_j$ : si può dire equivalentemente che una lacuna ha acquistato energia e parlare di una densità di corrente  $j_h$  nella banda di valenza.

Possiamo pertanto così visualizzare il moto delle cariche nel semiconduttore in presenza di un campo elettrico esterno: abbiamo un flusso di carica negativa dovuto agli elettroni nella banda di conduzione  $e$ , rispetto alla nuvola stazionaria degli elettroni di valenza, abbiamo un flusso di carica positiva dovuto alle lacune nella banda di valenza. Chiamando  $n_e$ ,  $n_h$  le concentrazioni degli elettroni e delle lacune e  $v_e$ ,  $v_h$  le rispettive velocità di deriva, una opposta e una concorde al campo elettrico  $E$ , la densità di corrente si scrive secondo (6.7)

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h = (-e) n_e \mathbf{v}_e + e n_h \mathbf{v}_h .$$

I moduli delle velocità di deriva dei portatori di carica sono legati al modulo del campo elettrico dalle relazioni

$$v_e = \mu_e E , \quad v_h = \mu_h E ,$$

in cui le mobilità sono a priori da considerare diverse in quanto i moti dei due tipi di carica avvengono in condizioni fisiche diverse. Pertanto

$$\mathbf{j} = e (n_e \mu_e + n_h \mu_h) \mathbf{E} .$$

Si noti che le formule sono eguali a quelle sviluppate nel paragrafo 6.13 a proposito della conduzione elettrolitica.

Il processo di formazione delle cariche libere che abbiamo descritto comporta  $n_e = n_h = n$ , e questa condizione è la definizione di semiconduttore intrinseco, nel quale cioè le cariche sono quelle fornite esclusivamente dagli atomi del semiconduttore stesso. In conclusione si ha per la densità di corrente e per la conduttività

$$\mathbf{j} = e n_i (\mu_e + \mu_h) \mathbf{E} , \quad \sigma = e n_i (\mu_e + \mu_h) . \quad (19.6)$$

Nella tabella 19.6 riportiamo per il silicio, il germanio e l'arseniuro di gallio i valori delle grandezze appena introdotte e di  $\sigma_0$ , definita più avanti.

**Tabella 19.6 Alcune proprietà di semiconduttori a  $T=300\text{ K}$**

	$E_g$ (eV)	$\mu_e$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	$\mu_h$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	$n_i$ ( $\text{m}^{-3}$ )	$\sigma$ ( $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ )	$\sigma_0$ ( $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ )
Si	1.11	0.135	0.05	$1.5 \cdot 10^{16}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$0.93 \cdot 10^6$
Ge	0.66	0.39	0.19	$2.3 \cdot 10^{19}$	2.13	$0.75 \cdot 10^6$
GaAs	1.43	0.80	0.03	$7.5 \cdot 10^{12}$	$10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^6$

Ricordiamo che nel rame a temperatura ambiente  $\sigma = 5.88 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  e  $n = 8.46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ; confrontando le espressioni della condutività (19.5) e (19.6) in cui poniamo  $\mu_h = 0$  troviamo che la mobilità degli elettroni di conduzione nel rame è  $\mu = e \tau/m^* = e \tau/m = 4.34 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{Vs}$  (il valore di  $\tau$  è preso dall'esempio 19.3).

La concentrazione  $n_i$  dei portatori di carica dipende, come si è già detto, dalla temperatura: risulta che essa cresce con  $T$  secondo la legge

$$n_i = C (k_B T)^{3/2} e^{-E_g / (2k_B T)} , \quad (19.7)$$

dove  $C$  è una costante che dipende dal materiale. La (19.7) è valida se  $E_g \gg k_B T$ , condizione che è sempre verificata in tutto l'intervallo di temperature in cui il materiale è solido. Il peso del termine esponenziale è preponderante nella variazione di  $n_i$ , e, in prima approssimazione, scriviamo queste espressioni per la conduttività e la resistività:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-E_g/2k_B T}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \rho_0 e^{E_g/2k_B T}. \quad (19.8)$$

La misura della resistività in funzione della temperatura fornisce un metodo per la determinazione di  $E_g$ .

#### Esempio 19.4

Ricavando dalla tabella 19.6 i valori della resistività e della concentrazione  $n_i$  nel silicio e nel germanio a  $T_0 = 300$  K, calcolarne i valori a  $T_1 = 200$  K e a  $T_2 = 400$  K.

#### Soluzione

A 300 K  $\rho(\text{Si}) = 1/\sigma = 2.27 \cdot 10^3 \Omega\text{m}$ ,  $\rho(\text{Ge}) = 0.47 \Omega\text{m}$ ,  $n_i(\text{Si}) = 1.5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_i(\text{Ge}) = 2.3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ . Applicando (19.8) si ottiene

$$\begin{aligned} \text{silicio} \quad & \rho(T_1)/\rho(T_0) = 4.6 \cdot 10^4 \Rightarrow \rho(200 \text{ K}) = 1.04 \cdot 10^8 \Omega\text{m} \\ & \rho(T_2)/\rho(T_0) = 4.7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \rho(400 \text{ K}) = 10.7 \Omega\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{germanio} \quad & \rho(T_1)/\rho(T_0) = 5.9 \cdot 10^2 \Rightarrow \rho(200 \text{ K}) = 277 \Omega\text{m} \\ & \rho(T_2)/\rho(T_0) = 4.1 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \rho(400 \text{ K}) = 1.93 \cdot 10^{-2} \Omega\text{m} \end{aligned}$$

Per le concentrazioni il rapporto è l'inverso di quello delle resistività e quindi i calcoli sono immediati; si verifica che le variazioni sono notevoli. Se si usasse la formula completa con il fattore  $(k_B T)^{3/2}$  si troverebbe che i risultati dati sopra sono approssimati entro un fattore 2.

L'esame della formula (19.8) e gli esempi numerici appena visti mostrano come la resistività di un semiconduttore diminuisca al crescere della temperatura. Notiamo che nei metalli si ha l'effetto contrario, cioè un aumento della resistività con la temperatura; dato che nei metalli il numero di elettroni che partecipano alla conduzione è quasi indipendente dalla temperatura, deduciamo da (19.5) che l'aumento è da ricondursi alla decrescita del tempo  $\tau$  al crescere di  $T$  (le collisioni si fanno più frequenti).

Infine menzioniamo soltanto che l'energia di Fermi nei semiconduttori intrinseci si colloca a metà dell'intervallo proibito tra la banda di valenza e la banda di conduzione.

#### Semiconduttori estrinseci

Nel silicio a temperatura ambiente la concentrazione  $n_i$  dei portatori intrinseci di carica è molto inferiore alla concentrazione atomica. Questa vale, essendo la densità del silicio  $\delta = 2.33 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e la massa molare  $A = 28.09 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$ ,  $n_{at} = \delta N_A / A = 5.0 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Il calcolo analogo per il germanio ( $\delta = 5.32 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 72.60 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$ ) dà  $n_{at} = 4.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Si ottiene quindi

$$\frac{n_i}{n_{at}} = \frac{1.5 \cdot 10^{16}}{5.0 \cdot 10^{28}} = 3.0 \cdot 10^{-13} \text{ nel silicio}, \quad \frac{n_i}{n_{at}} = \frac{2.3 \cdot 10^{19}}{4.4 \cdot 10^{28}} = 5.2 \cdot 10^{-10} \text{ nel germanio}.$$

Tali valori mostrano che la conduzione intrinseca può essere evidenziata soltanto in un cristallo molto puro; se esiste una concentrazione di determinate impurezze (atomi estranei) a livelli paragonabili o superiori a  $n_i$ , il loro contributo alla conduzione attraverso cessione di elettroni o di lacune si aggiunge al contributo intrinseco e può mascherarlo completamente.

In effetti è proprio con l'immissione controllata di opportune impurezze che si riesce ad ottenere un notevole aumento della concentrazione di elettroni o di lacune, modificando così le proprietà elettriche del semiconduttore. Su questo processo, chiamato di *doping* (in inglese *doping*), sono basate le importantissime applicazioni dei semiconduttori nel campo dei dispositivi elettronici.

Supponiamo di inserire in un reticolo di silicio un atomo di un elemento *pentavalente*, come il fosforo, l'arsenico, l'antimonio, al posto di un atomo di silicio. Quattro elettroni del-

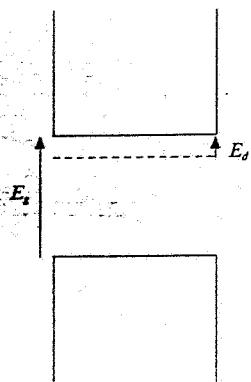


Figura 19.29

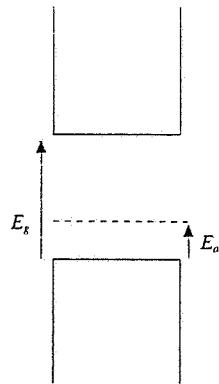


Figura 19.30

l'impurezza vanno a costituire quattro legami covalenti con i circostanti atomi di silicio e restano fortemente legati; invece l'energia di legame del quinto elettrone è molto bassa, 0.045 eV nel caso del fosforo, e quindi è molto probabile che il legame venga rotto. Nell'usuale schema delle bande abbiamo la situazione della figura 19.29: il livello del quinto elettrone si colloca poco al di sotto della banda di conduzione ed è sufficiente l'eccitazione termica per causare il passaggio dell'elettrone nella banda di conduzione. In questo modo la presenza di impurezze pentavalenti permette di popolare la banda di conduzione lasciando inalterata la banda di valenza (la lacuna prodotta dall'elettrone è lontana dalla banda di valenza). Con una concentrazione di un atomo di impurezza su  $10^6$  atomi di silicio si hanno circa  $10^{22}$  elettroni/m<sup>3</sup> in banda di conduzione, rispetto ai  $10^{16}$  intrinseci a  $T = 300$  K: l'effetto dell'impurezza è dominante.

Nel caso ora descritto le impurezze si chiamano *donori* (esse donano elettroni) e il semiconduttore è detto di tipo *n*, per indicare che le cariche donate sono negative. Si dice anche che i portatori maggioritari sono gli elettroni e le (19.6) si scrivono, trascurando la conduzione intrinseca,

$$\mathbf{j} = n_d e \mu_e \mathbf{E}, \quad \sigma = n_d e \mu_e ; \quad (19.9)$$

$n_d$  è la concentrazione dovuta ai donori.

Se invece sostituiamo un atomo di silicio con un'impurezza *trivalente* (boro, gallio, indio) tre elettroni formano legami covalenti, ma resta un legame covalente non saturato che funge da lacuna. Il livello di questo stato vuoto si colloca poco sopra la fine della banda di valenza (0.045 eV per il boro) e per eccitazione termica tali livelli vengono occupati da elettroni della banda di valenza che lasciano dietro di sé altrettante lacune. Questo secondo tipo di drogaggio popola pertanto di lacune la banda di valenza senza agire sulla banda di conduzione. Le impurezze sono dette *accettori* (accettano elettroni), il semiconduttore è di tipo *p*, in quanto i portatori maggioritari sono le lacune positive. Abbiamo

$$\mathbf{j} = n_a e \mu_h \mathbf{E}, \quad \sigma = n_a e \mu_h , \quad (19.10)$$

dove  $n_a$  è la concentrazione dovuta agli accettori.

Le stesse considerazioni valgono per il germanio o per un altro semiconduttore; i materiali così trattati sono chiamati *semiconduttori estrinseci*.

I valori delle differenze di energia  $E_d$ ,  $E_a$  (figure 19.29, 19.30) in silicio e in germanio sono riportati in tabella 19.7.

Tabella 19.7 Dislivelli energetici per donori e accettori

drogante	$E_d$ (Si) eV	$E_d$ (Ge) eV	drogante	$E_d$ (Si) eV	$E_d$ (Ge) eV
As	0.049	0.013	B	0.045	0.010
P	0.045	0.012	Ga	0.065	0.011
Sb	0.039	0.010	In	0.157	0.011

Le espressioni (19.9) e (19.10) della condutività vanno intese come relazioni di saturazione, ovvero valori limite della condutività ottenuti quando tutti gli elettroni o tutte le lacune sono state cedute; siccome la mobilità ha una dipendenza piuttosto debole dalla temperatura, la condutività di saturazione può essere considerata costante. Dai valori della tabella 19.7 si nota che  $E_d$  e  $E_a$  sono paragonabili al valore di  $k_B T$  a temperatura ambiente ( $\approx 0.025$  eV) e quindi si può assumere che già a tale temperatura si abbia saturazione.

A basse temperature, definite da  $k_B T \ll E_d$ , la concentrazione  $n$  di elettroni in un semiconduttore di tipo *n* con una concentrazione  $n_d$  di donori cresce con la temperatura secondo una legge simile a (19.7):

$$n = C_n n_d (k_B T)^{3/2} e^{-E_d/2k_B T} . \quad (19.11)$$

Analogamente in un semiconduttore di tipo *p* con una concentrazione  $n_a$  di accettori la concentrazione  $p$  di lacune è, se  $k_B T \ll E_a$ ,

$$p = C_p n_a (k_B T)^{3/2} e^{-E_a/2k_B T} \quad (19.12)$$

$C_n$  e  $C_p$  sono costanti che dipendono dal materiale. Vogliamo precisare che (19.7), (19.11) e (19.12) sono il risultato di un equilibrio statistico tra un processo di formazione e un processo di ricombinazione, ad esempio tra la creazione di una coppia elettrone-lacuna e la loro riunione oppure tra la ionizzazione di un'impurezza donore e la cattura di un elettrone donatore.

Raggiunta la saturazione della conduttività estrinseca, la conduttività del semiconduttore può aumentare ancora con la temperatura quando la conduttività intrinseca diventa paragonabile a quella estrinseca.

### Esempio 19.5

Calcolare la conduttività di saturazione del silicio quando viene introdotta una quantità di antimonio corrispondente ad una concentrazione relativa di 1 su  $10^6$  e determinare il rapporto con la conduttività intrinseca a  $T = 300$  K. Ripetere i calcoli per una contaminazione di boro di 1 su  $10^{10}$ .

#### Soluzione

Nella (19.9) dobbiamo calcolare  $n_d$ ; dato che nel silicio  $n_{at} = 5.0 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_d = 10^{-6} n_{at} = 5.0 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$  e la conducibilità di saturazione risulta

$$\sigma = n_d e \mu_e = 5.0 \cdot 10^{22} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.135 = 1.08 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Rispetto alla conducibilità intrinseca a  $T = 300$  K,  $\sigma_i = 4.4 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ , l'aumento è di un fattore  $2.5 \cdot 10^6$ .

Nel caso del boro  $n_d = 10^{-10} n_{at} = 5.0 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ,

$$\sigma = n_d e \mu_h = 5.0 \cdot 10^{18} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.05 = 0.04 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$\sigma / \sigma_i = 90.9.$$

Anche in presenza di una bassissima concentrazione di impurezze, la conduttività estrinseca è superiore a quella intrinseca a temperatura ambiente. È necessario quindi un processo di purificazione molto spinto per ottenere un semiconduttore intrinseco.

### Esempio 19.6

Calcolare la concentrazione di gallio in germanio tale che a  $T = 500$  K la conduttività intrinseca egualgi quella estrinseca di saturazione.

#### Soluzione

Impostiamo l'eguaglianza tra (19.10) e (19.8):

$$n_a e \mu_h = \sigma_0 e^{-E_g/2k_B T}$$

con  $\mu_h$ ,  $\sigma_0$  e  $E_g$  presi dalla tabella 19.6. Si ricava

$$n_a = 1.2 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}.$$

Rispetto a  $n_{at} = 4.4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  la concentrazione relativa è  $2.7 \cdot 10^{-7}$ .

Segnaliamo infine che se si esegue una misura di effetto Hall (paragrafo 7.7) in un semiconduttore di tipo  $n$  o di tipo  $p$  si trova che il segno dei portatori di carica risulta rispettivamente negativo o positivo. Attraverso (7.37) è possibile determinare la concentrazione dei portatori maggioritari.

Figura 19.31

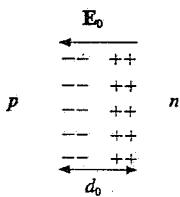


Figura 19.32

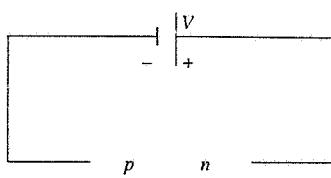


Figura 19.33

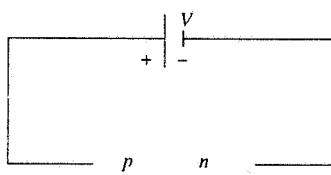


Figura 19.34

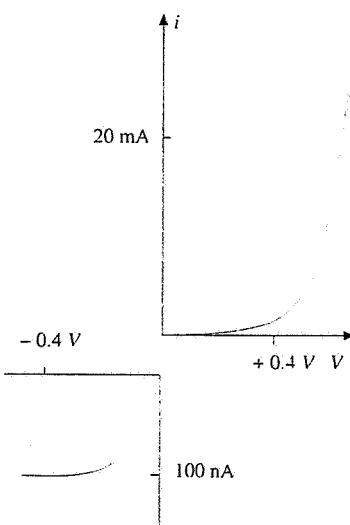
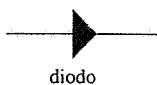


Figura 19.35



Ricordiamo inoltre che l'effetto Hall indica portatori positivi in alcuni conduttori, ad esempio nello zinco. Si tratta in effetti di semimetalli, nei quali il passaggio degli elettroni dalla banda di valenza piena alla banda di conduzione vuota, ma parzialmente sovrapposta alla banda di valenza, lascia lacune nella banda di valenza. La conduzione è dovuta sia agli elettroni che alle lacune, ma queste risultano avere una mobilità maggiore, per cui il loro contributo alla densità di corrente e alla tensione di Hall è preponderante.

### La giunzione p - n

La più semplice applicazione delle proprietà dei semiconduttori alla costruzione di un elemento di circuito è la *giunzione p - n*, consistente in un semiconduttore di tipo *p* a stretto contatto con un semiconduttore di tipo *n*. Nella pratica ciò si realizza con un unico pezzo di semiconduttore drogato in maniere diverse; in tal modo non c'è nessuna discontinuità nel reticolato, ma soltanto nella concentrazione di impurezze. La giunzione propriamente detta è la zona molto stretta in cui si passa dalla concentrazione predominante di lacune alla concentrazione predominante di elettroni.

La differenza di concentrazione dei portatori dalle due parti della giunzione dà luogo a una diffusione; gli elettroni, la cui concentrazione è maggiore dalla parte *n* dove sono portatori estrinseci che dalla parte *p* dove sono portatori intrinseci, diffondono verso la parte *p* e analogamente le lacune diffondono dalla parte *p* alla parte *n*. Questo processo porta ad una separazione di carica nella zona della giunzione (figura 19.32) e alla formazione di una d.d.p.  $V_0$ , detta di contatto, sulla distanza  $d_0$  ovvero di un campo elettrico  $E_0$ , che contrasta la diffusione. Nello stesso tempo le coppie elettrone-lacuna, che per effetto termico si formano nello spessore  $d_0$  (portatori intrinseci), migrano sotto l'azione di  $E_0$ , con gli elettroni che si portano verso la zona *n* e le lacune verso la zona *p*. Nel complesso si ha un equilibrio tra diffusione dei portatori maggioritari e deriva di quelli minoritari, con corrente elettrica globale nulla.

Il valore del potenziale di contatto è

$$V_0 = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_a n_d}{n_i^2} ;$$

ad esempio, con concentrazioni relative di donori e accettori eguali tra loro e pari a  $10^{16}$ , si ha in silicio  $V_0 \approx 0.8$  V e in germanio  $V_0 \approx 0.4$  V, a temperatura ambiente. Lo spessore  $d_0$  è dell'ordine di 1  $\mu\text{m}$  e il valore medio del campo elettrico è  $E_0 = V_0 / d_0 \approx 1 \text{ V}/10^{-6} \text{ m} = 10^6 \text{ V/m}$ .

La zona spessa  $d_0$  nell'intorno della giunzione si chiama anche *zona di svuotamento*: infatti in essa per effetto della presenza del campo elettrico non ci sono praticamente più cariche libere; nel silicio da circa  $10^{16}$  portatori intrinseci per unità di volume si scende a circa  $10^8$ .

Supponiamo ora di applicare alla giunzione la d.d.p. esterna  $V$  con i segni di figura 19.33 (*polarizzazione inversa*). In questo modo si esalta l'effetto di  $V_0$  con le seguenti conseguenze: la diffusione è ridotta in quanto la d.d.p. che elettroni e lacune devono superare è diventata  $V_0 + V$ , la zona di svuotamento si amplia e al crescere di  $V$  può arrivare a coincidere con l'intero semiconduttore (~ 1 mm); invece la corrente di deriva dovuta agli effetti termici non cambia in quanto dipendente solo dalla temperatura. Quindi non si ha più equilibrio tra le correnti di diffusione e di deriva e attraverso la giunzione c'è una corrente non nulla, praticamente coincidente con la corrente di deriva, con valore dell'ordine di 100 nA. Se la d.d.p.  $V$  supera un determinato valore si instaura una notevole corrente, detta di scarica, che può danneggiare irreparabilmente la giunzione.

Se invece si applica la d.d.p.  $V$  con i segni di figura 19.34 (*polarizzazione diretta*) si ha un effetto che contrasta  $V_0$  e la corrente di diffusione aumenterà notevolmente, in modo esponenziale fino a quando  $V$  non supera  $V_0$ ; oltre questo valore la corrente varia linearmente con la d.d.p. applicata (si passa da un comportamento non ohmico ad un comportamento ohmico).

Il grafico  $i(V)$  è mostrato nella figura 19.35, separando i regimi di polarizzazione inversa e diretta, in quanto i valori di corrente sono molto diversi. In sostanza la giunzione *p - n* agisce come un conduttore unidirezionale di corrente; normalmente viene chiamata *diodo a semiconduttore* e indicata con il simbolo a lato. Un altro tipo di diodo, quello ad effetto termoelettronico, storicamente precedente, è stato discusso nel paragrafo 6.5.

Un'ulteriore applicazione consiste nella serie di giunzioni *n - p - n* e *p - n - p*, che costituiscono i *transistor* più semplici; ma questi argomenti esulano dagli scopi del libro.

## 19.7 Superconduttività

Al tendere a zero della temperatura la resistività di un conduttore prima diminuisce linearmente con  $T$  e poi raggiunge un valore costante, come già mostrato nella figura 19.27; questo è il comportamento riscontrato in alcuni elementi che sono tra i migliori conduttori a temperatura ambiente (argento, rame, oro). Vi sono però altri conduttori, sia elementi puri che leghe, i quali hanno un comportamento molto diverso: la resistività diminuisce linearmente con la temperatura, ma subisce una brusca diminuzione intorno al *valore critico*  $T_c$ , al di sotto del quale si annulla. Nella figura 6.20 e nella tabella 6.2 del paragrafo 6.5 abbiamo riportato un esempio di andamento della resistività e alcuni valori di temperature critiche.

Il fenomeno si chiama *superconduttività*; esso venne scoperto da Kamerlingh Onnes nel 1911. La teoria quantistica che ha posto le basi per la comprensione delle caratteristiche più importanti è stata formulata nel 1957 da Bardeen, Cooper e Schrieffer.

Nell'intervallo di temperatura tra  $T = 0$  e  $T = T_c$  la resistività di un superconduttore è inferiore a qualsiasi valore misurabile e si assume eguale a zero; ciò è confermato dal fatto che quando si stabilisce una corrente in un circuito superconduttore questa non provoca effetto Joule e continua a circolare per un tempo estremamente lungo senza diminuire d'intensità. Esperimenti molto accurati hanno evidenziato limiti inferiori del tempo di durata di una supercorrente pari ad oltre  $3 \cdot 10^{12}$  s (oltre 10<sup>5</sup> anni). Essendo nulla la resistività, è nullo il campo elettrico qualunque sia la densità di corrente (si ricordi che  $E = \rho j$ ).

Notevolissimo è anche il comportamento di un superconduttore in presenza di un campo magnetico. Supponiamo di effettuare il raffreddamento del materiale all'interno di un campo magnetico: quando avviene la transizione dallo stato normale allo stato superconduttore si osserva che *il campo magnetico viene espulso dal superconduttore*, nel cui interno  $B = 0$ . Alternativamente, portiamo il materiale nello stato di superconduttività in assenza di campo magnetico e poi immersiamolo in un campo magnetico; di nuovo si osserva che all'interno  $B = 0$ . Il fenomeno si chiama *effetto Meissner*.

Nell'effettuare questi esperimenti si scopre che la temperatura critica dipende dal campo magnetico. In effetti la transizione verso lo stato superconduttore è osservata a  $T = T_c$  solo se non c'è campo magnetico; in presenza di campo la transizione avviene ad una temperatura inferiore e si trova che per ogni temperatura  $T < T_c$  esiste un valore critico  $B_c$  al di sopra del quale la transizione non avviene. La curva della figura 19.37, riferita al mercurio, delimita appunto la zona in cui può esistere uno stato di superconduttività dalla zona in cui il comportamento è normale.

La tabella 19.8 riporta per alcuni elementi superconduttori i valori della temperatura critica (a  $B = 0$ ) e del massimo campo magnetico critico (che si ha per  $T = 0$ ); è riportata anche l'energia  $E_g$  che verrà definita nel seguito.

Tabella 19.8 Parametri di alcuni superconduttori

elemento	$T_c$ (K)	$B_c$ (T)	$E_g$ ( $10^{-3}$ eV)
Al	1.18	0.011	0.34
Zn	0.88	$5.3 \cdot 10^{-3}$	0.24
Nb	9.25	0.198	3.05
Sn	3.72	0.031	1.15
Hg	4.15	0.041	1.65
Pb	7.23	0.080	2.73

Se  $B = 0$  all'interno di un superconduttore immerso in campo magnetico, vuol dire che la magnetizzazione del mezzo è tale da produrre un campo magnetico  $\mu_0 M$  eguale ed opposto al campo esterno. In funzione del campo applicato il modulo di  $\mu_0 M$  ha quindi l'andamento della figura 19.38; per  $B > B_c$  il comportamento è normale e il materiale, che non è ferromagnetico, ha magnetizzazione trascurabile (in modulo  $\chi \ll 1$ ). Notiamo che nello stato di superconduttività dobbiamo assumere  $\chi = -1$ : il superconduttore è un mezzo diamagnetico perfetto.

Il comportamento magnetico che abbiamo finora descritto è seguito da una classe di materiali, detti superconduttori di 1<sup>a</sup> specie (tra questi si trovano gli elementi elencati

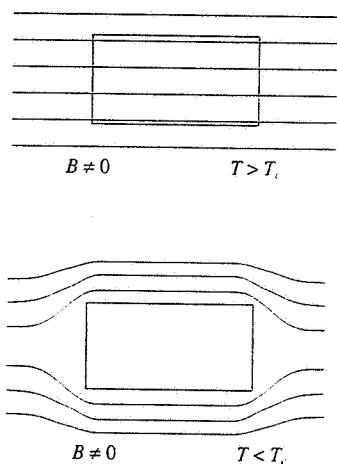


Figura 19.36

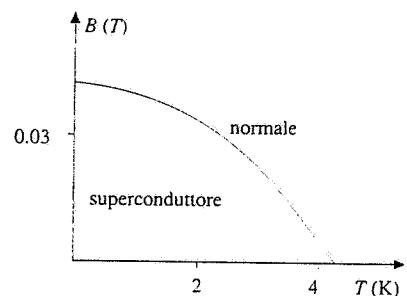


Figura 19.37

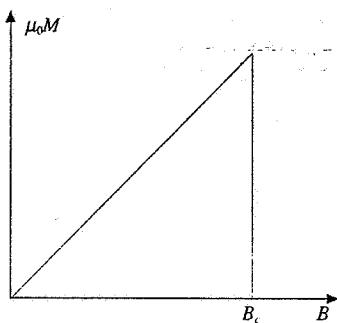


Figura 19.38

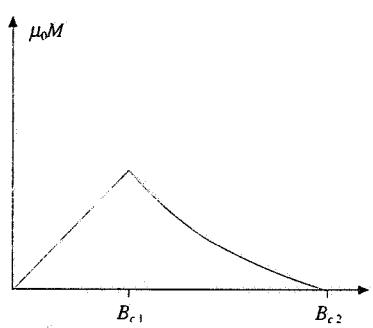


Figura 19.39

nella tabella 19.8). Esiste un'altra classe di superconduttori, detti di 2ª specie, tipicamente leghe metalliche, che hanno proprietà diverse. La temperatura critica in assenza di campo magnetico di norma è maggiore ( $T_c = 18.1$  K in  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ ), ma è soprattutto nella risposta ad un campo magnetico che essi si distinguono dai superconduttori di 1ª specie. La loro magnetizzazione si oppone esattamente al campo applicato fino ad un valore  $B_{c1}$ ; successivamente essa decresce fino ad annullarsi quando il campo applicato vale  $B_{c2}$  (figura 19.39). Nell'intervallo tra  $B_{c1}$  e  $B_{c2}$  il materiale è sempre superconduttore, ma esiste campo magnetico all'interno (si parla di effetto Meissner incompleto), mentre oltre  $B_{c2}$  lo stato di conduzione è normale. I valori di  $B_{c2}$  possono essere molto elevati; ad esempio in  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  al di sotto di 14 K  $B_{c2}$  è superiore a 10 T.

La scoperta dei superconduttori di 2ª specie ha permesso di costruire avvolgimenti superconduttori per magneti (ad esempio solenoidi) raggiungendo, in assenza di ferro, elevati valori di campo magnetico ( $1 \div 10$  T). Infatti in questi avvolgimenti è possibile far circolare correnti molto intense ( $10^3 \div 10^4$  A) senza che il campo magnetico da esse stesse prodotto superi il valore  $B_{c2}$ . Invece nei superconduttori di 1ª specie le correnti sono limitate a causa dei bassi valori di  $B_c$ .

Studi recenti hanno messo in evidenza l'esistenza di materiali con temperature critiche piuttosto alte (intorno a 100 K), cioè superconduttori alla temperatura dell'azoto liquido invece che a quella dell'elio liquido e quindi in teoria di più semplice utilizzazione. Un esempio è il composto  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  che ha  $T_c = 92$  K. Tuttavia le proprietà meccaniche di questi composti pongono serie difficoltà nel loro impiego sotto forma di fili; come si può immaginare si ha in questo campo un'intensa attività di ricerca.

### Esempio 19.7

Un sottile anello superconduttore è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo  $B = 10^{-2}$  T, ortogonale al piano dell'anello. L'area coperta dall'anello è  $\Sigma = 8 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup> e il coefficiente di autoinduzione è  $L = 4 \cdot 10^{-7}$  H. Ad un certo istante il campo magnetico viene spento. Calcolare la corrente indotta nell'anello.

#### Soluzione

Il flusso magnetico attraverso l'anello è  $\Phi = B\Sigma = 8 \cdot 10^{-5}$  Wb. Durante la variazione del campo magnetico esterno si dovrebbe avere nell'anello la f.e.m. indotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

Però la resistenza dell'anello è nulla e quindi il flusso attraverso l'anello non può cambiare ( $d\Phi/dt = 0, \Phi = \text{cost}$ ). Nell'anello deve pertanto circolare una corrente di verso e modulo tali da produrre un autoflusso che rimpiazza  $\Phi$ :

$$Li = \Phi = B\Sigma \quad , \quad i = \frac{B\Sigma}{L} = 200 \text{ A}$$

L'esempio descritto mostra un possibile modo per instaurare una determinata intensità di corrente in un circuito superconduttore.

Menzioniamo un risultato quantistico molto interessante: il flusso magnetico attraverso un circuito superconduttore è quantizzato in unità  $h/2e = 2.07 \cdot 10^{-15}$  Wb, cioè  $\Phi = nh/2e$  con  $n$  intero. La verifica sperimentale è stata eseguita con un circuito di diametro 10 µm, macroscopico anche se piccolo, misurandone il momento magnetico e scoprendolo quantizzato.

Una discussione anche soltanto qualitativa della teoria della superconduttorità è piuttosto complessa e per questa ragione ci limitiamo a pochi cenni. Il fenomeno è dovuto ad una particolare interazione tra gli elettroni di conduzione e le vibrazioni del reticolo, diversa da un insieme di semplici urti elettrone-ione indipendenti uno dall'altro.

Supponiamo che l'interazione attrattiva tra un elettrone e una porzione del reticolo causi una vibrazione che si propaga attraverso il cristallo; ad essa si accompagna una variazione locale della densità di carica elettrica positiva che può alterare il moto di un secondo elet-

trone attirandolo. Con questo meccanismo avviene un'interazione tra due elettroni mediata dal reticolo, interazione che è in grado di superare la repulsione coulombiana ed è quindi attrattiva. Il risultato è la formazione di una coppia legata di elettroni, detta *coppia di Cooper*, avente carica totale  $-2e$ , spin totale nullo in quanto i due elettroni legati risultano avere spin opposto, energia di legame dell'ordine di  $3k_B T_c$  (cioè circa  $10^{-3}$  eV) e lunghezza del legame dell'ordine di  $10^{-6}$  m, molto grande rispetto alle distanze interatomiche ( $= 10^{-10}$  m).

In termini quantistici si dice che un elettrone ha emesso un fonone e che questo è stato assorbito dal secondo elettrone. In tale scambio il bilancio della quantità di moto è complessivamente in parità e quindi la quantità di moto della coppia nel suo moto attraverso il reticolo resta costante.

L'esistenza della superconduttività è dovuta alla possibilità, dimostrata nella teoria, di formazione di un gran numero di coppie di Cooper: anzi la probabilità di uno stato fisico formato da coppie di Cooper è tanto maggiore quanto più alto è il numero di coppie, purché queste abbiano tutte la stessa quantità di moto. La teoria prevede dunque che al di sotto della temperatura critica si formi uno stato molto ordinato formato da coppie di Cooper aventi tutte la stessa  $p$ , eguale a zero in assenza di perturbazioni esterne (è il centro di massa di ciascuna coppia che è fermo) e diversa da zero se c'è stata una perturbazione elettrica che ha comunicato un impulso. La supercorrente si mantiene proprio in quanto nel loro moto di insieme le coppie, pur continuando ad interagire col reticolo, mantengono costante  $p$ . La presenza di tante coppie nello stesso stato quantico non è in contrasto col principio di Pauli che non si applica a particelle con spin intero, in particolare nullo.

È interessante notare come siano superconduttori materiali in cui l'interazione elettrone-reticolo è notevole e che quindi, a temperatura ambiente, non sono ottimi conduttori. Viceversa materiali con una debole interazione elettrone-reticolo, come l'argento e il rame, appunto per questo non diventano superconduttori. L'importanza di questa osservazione è anche provata dalla relazione prevista dalla teoria tra massa atomica del materiale e temperatura critica  $M^a T_c = \text{costante}$ :  $T_c$  varia con la massa del particolare isotopo considerato. Quindi al limite se il reticolo non potesse vibrare, se cioè esso si presentasse agli elettroni come un corpo di massa infinita, non ci sarebbe nemmeno superconduttività perché  $T_c$  sarebbe nulla: la superconduttività è strettamente legata alle vibrazioni reticolari.

Da un punto di vista energetico lo stato di superconduttività a  $T = 0$  è caratterizzato dall'impossibilità di ricevere energia al di sotto di un certo valore  $E_g$ : esiste cioè una banda proibita di ampiezza  $E_g$  che separa lo stato di superconduttività dallo stato di conduttività normale. Il valore di  $E_g$  è in pratica eguale all'energia di legame delle coppie di Cooper ( $\approx 3k_B T_c$ ), come del resto è intuitivo: il sistema viene distrutto solo se si fornisce energia sufficiente per rompere le coppie. Abbiamo riportato  $E_g$  nella tabella 19.8.

Al crescere della temperatura  $E_g$  diminuisce e si annulla per  $T = T_c$ , dove si ha la transizione verso lo stato normale; per  $T \geq T_c$  l'agitazione termica non permette la formazione delle coppie di Cooper.

In presenza di un campo magnetico si ha un'interazione tra campo ed elettroni di conduzione, evidente per il fatto che essi reagiscono in modo tale da originare un campo eguale e contrario. Ciò comporta una cessione di energia allo stato superconduttivo e se il campo supera un valore critico, decrescente al crescere della temperatura, non si ha più superconduttività.

Gli elettroni che effettivamente partecipano al processo di superconduttività sono quelli molto vicini all'energia di Fermi, entro un intervallo dell'ordine di  $k_B T_c$ . Questo perché il processo stesso di scambio di fononi comporta variazioni di livello energetico dei singoli membri delle coppie e tali variazioni possono aver luogo solo se ci sono stati vuoti accessibili. Stati di questo tipo si trovano oltre l'energia di Fermi; viste le energie in gioco, possono accedervi gli elettroni che stanno immediatamente al di sotto di  $E_F$ , entro  $k_B T_c$ . Anche a  $T = 0$  la distribuzione dei livelli occupati dagli elettroni di conduzione in un superconduttore non ha un aspetto come quello della figura 19.18a, ma piuttosto quello della figura 19.18b; infatti la formazione di coppie di Cooper è energeticamente conveniente in quanto la cessione di energia dovuta alla formazione è maggiore dell'energia necessaria per superare il livello di Fermi.

La stima del numero di elettroni in gioco si calcola dal rapporto  $k_B T / E_F \approx 10^{-3} / 10 = 10^{-4}$ ; dato che ci sono  $\sim 10^{28}$  elettroni/m<sup>3</sup>, partecipano alla superconduttività  $\sim 10^{24}$  elettroni/m<sup>3</sup>. Se assegnamo ad una coppia un volume eguale al cubo della sua dimensione lineare,  $(10^{-6})^3 = 10^{-18}$  m<sup>3</sup>, in questo volume ci sono  $\sim 10^6$  altre coppie parzialmente sovrapposte, oltre a  $\sim 10^{10}$  ioni. Anche sotto tale aspetto le coppie di Cooper sono ben diverse dagli altri sistemi legati che abbiamo studiato.

### 19.8 Effetto Volta. Effetti termoelettrici

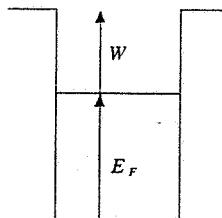


Figura 19.40

Esaminiamo adesso alcuni effetti che si verificano nei conduttori metallici, per la cui spiegazione è sufficiente rifarsi al modello di Fermi del gas elettronico.

Ricordiamo prima la nozione di lavoro di estrazione e la figura 19.23, che ridisegniamo nella forma più usuale, detta buca di potenziale: i livelli elettronici riempiono la banda di energia di ampiezza  $E_F$ , partendo dal livello più basso a cui corrisponde soltanto l'energia potenziale  $-eV_0$  rispetto alla superficie del conduttore, e la differenza rispetto al livello zero di riferimento è il lavoro di estrazione  $W$ .

Se ora consideriamo due metalli isolati tra loro, alla stessa temperatura e allo stesso potenziale, l'aspetto delle rispettive buche di potenziale è diverso a causa dei diversi valori di  $W$ ,  $E_F$ ,  $-eV_0$ . Portando i metalli a contatto si verifica che tra di essi si stabilisce una d.d.p.  $V_1 - V_2$ ; nel caso della figura 19.41 è il metallo 1 che risulta positivo rispetto al metallo 2.

Nella descrizione del gas di Fermi (paragrafo 19.4) abbiamo supposto che gli elettroni di conduzione di un metallo fossero confinati dentro una scatola dalle pareti insormontabili, pur notando come ciò non fosse realistico (esempio dell'emissione termoelettronica o fotoelettrica, concetto stesso di lavoro di estrazione). Più correttamente, e con riferimento diretto alla figura 19.41, si dice che gli elettroni si trovano di fronte ad una *barriera di potenziale*: in questa situazione le onde elettroniche sono in parte riflesse e in parte trasmesse dalla barriera, per cui esiste una probabilità finita se lo spessore  $a$  della barriera è piccolo (metalli a contatto) che un elettrone possa passare da un metallo all'altro. Tale probabilità dipende anche dall'altezza  $W$  della barriera, crescendo al diminuire di questa; quindi nel caso specifico è maggiore la probabilità di passaggio da 1 a 2 che da 2 a 1 e si ha un flusso netto di elettroni da 1 a 2. Per questa ragione il metallo 1, che cede elettroni, diventa positivo rispetto al metallo 2, che li assorbe: i due metalli non sono più allo stesso potenziale. Il processo continua fino a quando resta energeticamente conveniente, con il lavoro  $W_2$  fornito dall'elettrone che entra in 2 maggiore del lavoro  $W_1 + e(V_1 - V_2)$  assorbito dall'elettrone per uscire da 1, e si arresta nel momento in cui  $W_2 = W_1 + e(V_1 - V_2)$ , cioè quando la d.d.p. tra i due metalli raggiunge il valore

$$V_1 - V_2 = \frac{W_2 - W_1}{e} .$$

Poiché  $V_1 > V_2$ ,  $-eV_1 < -eV_2$ : rispetto al livello di riferimento del metallo 1 la buca di potenziale del metallo 2 si è innalzata della quantità  $e(V_1 - V_2)$ . In equilibrio le energie di Fermi si trovano alla stessa quota e l'altezza effettiva della barriera è la stessa da tutte e due le parti; la probabilità di passaggio è la stessa nei due sensi.

È importante precisare la localizzazione della d.d.p.  $V_1 - V_2$ . Dato che il lavoro di estrazione è il lavoro necessario per portare un elettrone con energia prossima al livello di Fermi da un punto interno del metallo ad un punto immediatamente esterno alla superficie, si deve intendere che  $V_1 - V_2$  si stabilisce tra due punti nel vuoto, ciascuno molto vicino alla superficie del metallo.

Il fenomeno descritto si chiama *effetto Volta*; esso venne scoperto nella seconda metà del 1700 da Volta, che ne formulò le leggi fenomenologiche. Innanzitutto egli si rese conto che la d.d.p. dipendeva soltanto dal tipo di conduttore e dalla temperatura, purché si curasse bene lo stato delle superficie a contatto; invece non c'è dipendenza dalla forma, dall'area della zona di contatto, da un'eventuale d.d.p. rispetto alla terra applicata ai conduttori.

Prendendo un particolare elemento come riferimento si costruisce la cosiddetta *serie voltaica*, in cui gli elementi sono disposti a seconda della loro d.d.p. rispetto all'elemento di riferimento, in ordine decrescente. Ciascun elemento è detto elettropositivo rispetto al successivo ed elettronegativo rispetto al precedente. Nella tabella 19.9 ci sono alcuni elementi della serie voltaica riferita al rame; la d.d.p. tra due qualsiasi elementi si ottiene per differenza delle loro d.d.p. rispetto al rame e così si può costruire la serie voltaica riferita a qualsiasi altro elemento (si noti che l'ordine è sempre lo stesso).

Con due pezzi di metalli diversi, ad esempio zinco e rame, mantenuti alla stessa temperatura e posti in contatto in due punti, come mostrato nella figura 19.43, si forma un circuito bimetallico isotermo. In entrambi i punti di contatto A e B si ha lo stesso salto di potenziale passando dallo zinco al rame e quindi è nulla la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa interna che segue il circuito: questo non è sede di una f.e.m. e in esso non circola corrente. Se il circuito è aperto in B, tra due punti immediatamente esterni ai metalli si misura  $V_1 - V_2$ .

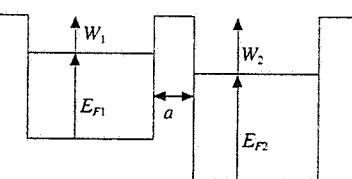


Figura 19.41

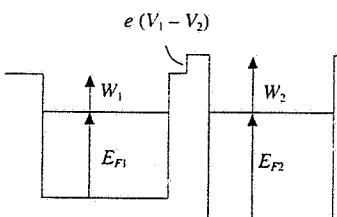


Figura 19.42

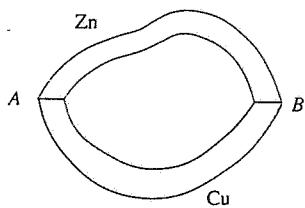


Figura 19.43

Tabella 19.9 Serie voltaica

elemento	d.d.p. (V)	elemento	d.d.p. (V)
sodio	2.37	rame	0.00
magnesio	1.20	argento	- 0.05
zinco	0.78	oro	- 0.16
piombo	0.54	platino	- 0.24
stagno	0.35		
ferro	0.13		
rame	0.00		

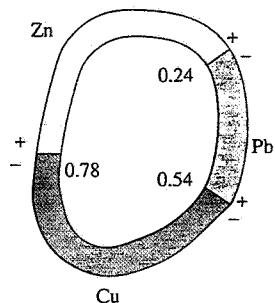


Figura 19.44

Le stesse proprietà continuano a valere per un circuito multimetallico isotermo, formato da più tratti di metalli diversi. In figura 19.44 è indicato l'esempio di tre elementi, ma in ogni caso la f.e.m. è nulla e nel circuito chiuso non circola corrente. Se si apre il circuito in corrispondenza al contatto tra due metalli, tra questi c'è la d.d.p. che ad essi compete, indipendentemente dal resto del circuito; in particolare se i due metalli sono eguali non c'è d.d.p. L'insieme di queste affermazioni costituisce la *legge di Volta*.

Le d.d.p. di Volta sono piuttosto difficili da misurare direttamente; un sistema ingegnoso venne trovato dallo stesso Volta, che mise a punto il cosiddetto *elettroskopio condensatore*. Un piatto di zinco è poggiato sopra un piatto di rame: lo zinco è connesso all'involtura di un elettroskopio a foglie (paragrafo 1.1), il rame è connesso alle foglie; tra i due metalli si stabilisce la d.d.p. di Volta (0.74 V). Allontanando lo zinco la carica resta costante, ma diminuisce la capacità tra i due piatti, per cui aumenta la d.d.p. e si osserva una deviazione delle foglie, dalla quale si deduce una valutazione (piuttosto imprecisa) dell'effetto.

### Effetto Peltier

In un circuito bimetallico inseriamo un generatore che fa circolare corrente. Si osserva che una giunzione si riscalda e l'altra si raffredda; invertendo il verso della corrente si inverte il fenomeno, che quindi risulta indipendente dall'effetto Joule; quest'ultimo, quadratico nella corrente, avviene con le stesse modalità qualunque sia il verso della corrente.

Questo processo termico che avviene ad ogni giunzione tra metalli diversi si chiama *effetto Peltier*; esso venne scoperto nel 1834. Se  $i$  è l'intensità della corrente, la potenza che bisogna scambiare in una giunzione per mantenere costante la temperatura è

$$P = \pi_{1,2} i ,$$

dove  $\pi$  è il *coefficiente di Peltier* relativo alla coppia di metalli; esso dipende dalla temperatura e dai materiali, ma non dalle caratteristiche geometriche del contatto e dall'intensità di corrente. Se si inverte il verso della corrente la potenza resta eguale in modulo e cambia segno, ovvero

$$\pi_{1,2} = -\pi_{2,1} :$$

L'effetto Peltier è reversibile.

Si assume per convenzione che il coefficiente  $\pi_{1,2}$  sia positivo quando la corrente, passando da 1 a 2, produce un assorbimento di potenza, come se nella giunzione 1 - 2 agisse una f.e.m. concorde al verso della corrente. Formalmente  $\pi$ , essendo pari al rapporto  $P/i$ , è in effetti una f.e.m. e si misura in volt. I valori sono piuttosto piccoli,

$$\pi_{\text{Cu-Zn}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ V} , \quad \pi_{\text{Cu-Fe}} = 2.3 \cdot 10^{-3} \text{ V} , \quad \pi_{\text{Bi-Sb}} = 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ V} ,$$

e fanno pensare che si tratti di un fenomeno diverso dall'effetto Volta.

Con i metalli a contatto e in equilibrio non dovrebbe essere necessario uno scambio supplementare di potenza quando avviene un passaggio di corrente, essendo le energie di Fermi allo stesso livello. Però a temperature diverse dallo zero assoluto le distribuzioni delle energie elettroniche nei due metalli superano il livello di Fermi e le piccole differenze esistenti dalle due parti rendono conto dell'effetto Peltier.

Un'applicazione pratica interessante si ha nell'uso come serbatoio freddo di una giun-

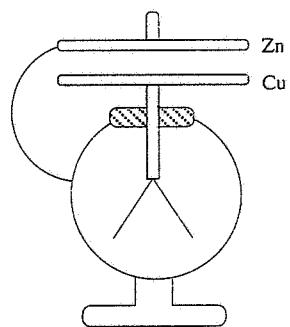


Figura 19.45

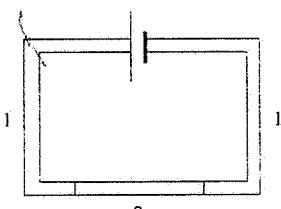


Figura 19.46

zione che si raffredda per effetto Peltier. Con i metalli l'assorbimento di calore dall'ambiente da raffreddare sarebbe troppo piccolo, ma intorno al 1960 si è trovato che certe giunzioni tra due semiconduttori estrinseci presentano coefficienti  $\pi$  elevati: ad esempio con  $\text{Bi}_2\text{Te}_3(p)$  e  $\text{Bi}_2\text{Te}_3(n)$  si ha  $\pi = 7.0 \cdot 10^{-2} \text{ V}$ ; impiegando correnti dell'ordine di 10 A e utilizzando 10 giunzioni si ottengono trasferimenti di potenza termica dell'ordine di 10 W.

### Effetto Thomson

Quando lungo un filo percorso da corrente si mantiene un gradiente di temperatura si osserva uno scambio di calore supplementare non spiegabile con l'effetto Joule: tutto avviene come se nel tratto interessato dal gradiente di temperatura  $dT/ds$  comparisse un gradiente di potenziale  $dV/ds$  proporzionale al gradiente di temperatura:

$$\frac{dV}{ds} = \sigma \frac{dT}{ds} ;$$

il coefficiente  $\sigma$  dipende dalla temperatura e dal materiale. Nel filo vi è un assorbimento di potenza se il gradiente di potenziale favorisce la corrente e una produzione di potenza in caso contrario.

La potenza che bisogna scambiare per mantenere imperturbata la temperatura del tratto  $ds$  è

$$dP = i dV = i \sigma dT ;$$

si assume  $\sigma$  positivo se  $dP$  corrisponde ad una potenza assorbita quando la corrente è in verso opposto rispetto al gradiente di  $T$ .

Consideriamo ad esempio il filo della figura 19.47, in cui  $T_1 > T_2$  e la corrente fluisce in verso contrario al gradiente di temperatura. Se  $\sigma > 0$   $V_1$  è maggiore di  $V_2$  e si ha uno sviluppo di calore che è minore rispetto a quello atteso per effetto Joule; il contrario succede se  $\sigma < 0$ . Invertendo il verso della corrente i calori cambiano di segno (l'effetto è reversibile).

Alcuni valori indicativi dell'entità del fenomeno sono i seguenti:

rame	$\sigma = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ V/K}$	argento	$\sigma = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ V/K}$
piombo	$\sigma = -0.7 \cdot 10^{-6} \text{ V/K}$	platino	$\sigma = -9.0 \cdot 10^{-6} \text{ V/K}$

La piccolezza di  $\sigma$ , e quindi del calore scambiato, rende difficile la misura, nella quale bisogna anche tener conto correttamente del calore prodotto per effetto Joule e del calore che viene scambiato per conduzione lungo il filo. Dopo una lunga serie di tentativi l'effetto venne messo chiaramente in evidenza da Thomson nel 1854: il coefficiente  $\sigma$  è detto *coefficiente di Thomson*.

Notiamo che in un circuito chiuso composto da un unico materiale l'effetto Thomson non produce una f.e.m.: questa proprietà è stata verificata sperimentalmente da Magnus.

Microscopicamente, la variazione di temperatura provoca un'alterazione delle distribuzioni energetiche locali degli elettroni, ma la spiegazione non è immediata.

### Effetto Seebeck

Riprendiamo un circuito bimetallico senza generatore e, invece di mantenerlo isotermo, portiamo alla temperature  $T_A$  e  $T_B$  le due giunzioni  $A$  e  $B$ . In queste condizioni lo strumento rivela un passaggio di corrente, dovuto evidentemente ad una f.e.m. che si è sviluppata nel circuito a causa della differenza di temperatura tra le giunzioni. Il fenomeno si chiama *effetto Seebeck* (1821) e la f.e.m. è detta *f.e.m. termoelettrica*.

La f.e.m. dipende dalla differenza di temperatura secondo il grafico della figura 19.50:  $T_A$  è mantenuta costante e si fa variare  $T_B = T$ . Si osserva un andamento parabolico con un massimo a  $T = T_n = (T_A + T_i)/2$  e un punto di inversione a  $T = T_i$ , così chiamato perché  $\epsilon$  cambia segno. La derivata  $d\epsilon/dT$ , che è funzione di  $T$ , è detta *potere termoelettrico*: nel punto di massimo essa è nulla e per questa ragione  $T_n$  si chiama *temperatura neutra*.

La f.e.m.  $\epsilon$  è data dalla d.d.p. che si misura tra due punti apre il circuito, ad esempio tra i punti  $P$  e  $Q$  della figura 19.49, supponendo di eliminare lo strumento. Da  $P$  ad  $A$

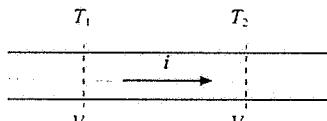


Figura 19.47

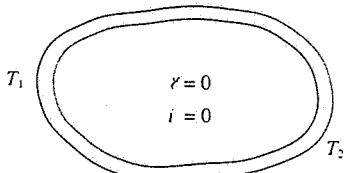


Figura 19.48

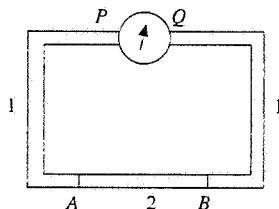


Figura 19.49

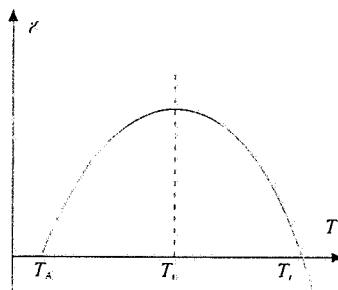


Figura 19.50

abbiamo effetto Thomson, in A effetto Peltier, da A a B effetto Thomson, in B effetto Peltier e infine da B a Q effetto Thomson. Pertanto, detta  $T_0$  la temperatura di P e Q,

$$V_Q = V_P + \int_{T_0}^{T_A} \sigma_1 dT + \pi_{1,2}(T_A) + \int_{T_A}^{T_B} \sigma_2 dT + \pi_{2,1}(T_B) + \int_{T_B}^{T_0} \sigma_1 dT ,$$

in cui mettiamo in evidenza la dipendenza dalla temperatura dei coefficienti di Peltier. Siccome

$$\int_{T_0}^{T_A} \sigma_1 dT + \int_{T_B}^{T_0} \sigma_1 dT = - \int_{T_B}^{T_0} \sigma_1 dT - \int_{T_A}^{T_B} \sigma_1 dT = - \int_{T_A}^{T_B} \sigma_1 dT \quad \text{e} \quad \pi_{2,1}(T_B) = -\pi_{1,2}(T_B)$$

si ottiene

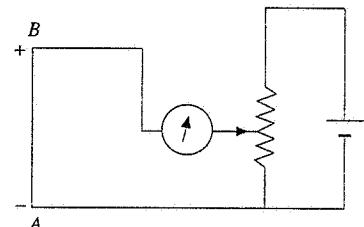
$$\mathcal{E} = V_Q - V_P = \pi_{1,2}(T_A) - \pi_{1,2}(T_B) + \int_{T_A}^{T_B} (\sigma_2 - \sigma_1) dT .$$

La f.e.m. termoelettrica nasce dalla differenza tra le f.e.m. di Peltier alle due giunzioni e dalla differenza tra i coefficienti di Thomson dei due materiali. In un circuito formato da un solo materiale non c'è effetto Peltier, è  $\sigma_1 = \sigma_2$  e risulta  $\mathcal{E} = 0$ , come si è già detto.

Un'applicazione della f.e.m. termoelettrica si ha nei *generatori termoelettrici*: la corrente nel circuito è mantenuta dall'esistenza di una differenza di temperatura tra le giunzioni. Se il circuito è metallico il rapporto tra la potenza elettrica prodotta e la potenza termica che bisogna fornire, cioè il rendimento, è molto basso: infatti, dato che all'elevata condutività elettrica del conduttore posto tra le giunzioni corrisponde un'elevata conducibilità termica secondo la legge (6.31) di Wiedemann e Franz, la potenza termica da impiegare per mantenere la differenza di temperatura è notevole. Un sostanziale miglioramento si ha con coppie metallo-semiconduttore ed è seguendo questa strada che vengono costruiti generatori termoelettrici di piccola e media potenza.

La prima e tuttora più estesa applicazione si è avuta nel campo delle misure di temperatura con il *termometro a termocoppia* (volume primo, paragrafo 10.3); la caratteristica termometrica è la f.e.m. che compare nel circuito quando una giunzione è tenuta in contatto termico con un serbatoio alla temperatura di riferimento e l'altra a contatto termico con il corpo di cui si vuole misurare la temperatura.  $\mathcal{E}$  viene determinata portando a zero la corrente per mezzo di una f.e.m. regolabile di segno contrario; la taratura si effettua tramite alcuni punti fissi. La termocoppia di platino e lega di platino (90%) - rodio (10%) è utilizzata come termometro di riferimento per temperature intorno a 1000 K.

Proprietà importanti delle termocoppe sono la bassa capacità termica, che consente di perturbare minimamente il sistema e di ottenere una risposta pronta, la grande sensibilità (capacità di apprezzare piccole variazioni di temperatura) e l'ampio intervallo di  $T$  esplorabile: con la termocoppia platino-platinorodio si può andare da 400 K a 1900 K. Alcuni valori tipici del potere termoelettrico  $d\mathcal{E}/dT$  a temperature lontane dalla temperatura neutra sono  $\sim 10^{-5}$  V/K per la coppia ferro-rame,  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  V/K per la coppia ferro-costantana e  $\sim 10^{-4}$  V/K per la coppia antimonio-bismuto.



Metodo di Poggendorf  
(vedi paragrafo 6.11)

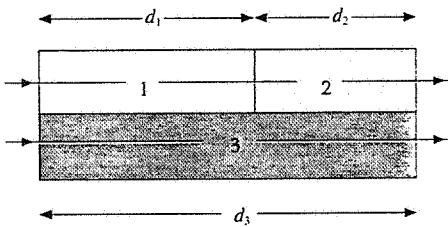
Figura 19.51

**Nota. Numero atomico, simbolo e nome degli elementi conosciuti**

Z	simbolo	nome	Z	simbolo	nome	Z	simbolo	nome
1	H	idrogeno	38	Sr	stronzio	75	Re	renio
2	He	elio	39	Y	ittrio	76	Os	osmio
3	Li	litio	40	Zr	zirconio	77	Ir	iridio
4	Be	berillio	41	Nb	niobio	78	Pt	platino
5	B	boro	42	Mo	molibdeno	79	Au	oro
6	C	carbonio	43	Tc	tecnezio	80	Hg	mercurio
7	N	azoto	44	Ru	rutenio	81	Tl	tallio
8	O	ossigeno	45	Rh	rodio	82	Pb	piombo
9	F	fluoro	46	Pd	palladio	83	Bi	bismuto
10	Ne	neon	47	Ag	argento	84	Po	polonio
11	Na	sodio	48	Cd	cadmio	85	At	astato
12	Mg	magnesio	49	In	indio	86	Rn	radon
13	Al	alluminio	50	Sn	stagno	87	Fr	francio
14	Si	silicio	51	Sb	antimonio	88	Ra	radio
15	P	fosforo	52	Te	tellurio	89	Ac	attinio
16	S	zolfo	53	I	iodio	90	Th	torio
17	Cl	cloro	54	Xe	xenon	91	Pa	protoattinio
18	Ar	argon	55	Cs	cesio	92	U	uranio
19	K	potassio	56	Ba	bario	93	Np	nettunio
20	Ca	calcio	57	La	lantanio	94	Pu	plutonio
21	Sc	scandio	58	Ce	cerio	95	Am	americio
22	Ti	titanio	59	Pr	praseodimio	96	Cm	curio
23	V	vanadio	60	Nd	neodimio	97	Bk	berkelio
24	Cr	cromo	61	Pm	prometeo	98	Cf	californio
25	Mn	manganese	62	Sm	samario	99	Es	einsteinio
26	Fe	ferro	63	Eu	europio	100	Fm	fermio
27	Co	cobalto	64	Gd	gadolino	101	Md	mendelevio
28	Ni	nickel	65	Tb	terbio	102	No	nobelio
29	Cu	rame	66	Dy	disprosio	103	Lr	lawrenzio
30	Zn	zinco	67	Ho	olmio	104	Rf	rutherfordio
31	Ga	gallio	68	Er	erbio	105	Ha	hahnio
32	Ge	germanio	69	Tm	tulio	106	Sg	seaborgio
33	As	arsenico	70	Yb	itterbio	107	Ns	nielsbohrio
34	Se	selenio	71	Lu	lutezio	108	Hs	assio
35	Br	bromo	72	Hf	afnio	109	Mt	meitnerio
36	Kr	kripton	73	Ta	tantalio			
37	Rb	rubidio	74	W	tungsteno			

# Problemi di Onde

- 12.1 Una sbarra d'acciaio ( $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ) di diametro  $d = 4 \text{ mm}$  è utilizzata per trasmettere onde longitudinali generate da un oscillatore; tali onde sono armoniche di frequenza  $v = 10 \text{ Hz}$  e ampiezza  $\xi_0 = 0.2 \text{ mm}$ . Calcolare la velocità massima dei singoli punti della sbarra e confrontarla con la velocità di propagazione dell'onda lungo la sbarra. Calcolare inoltre la densità di energia nella sbarra, l'intensità dell'onda che si propaga lungo la sbarra e la potenza dell'oscillatore necessaria per mantenere l'onda in assenza di assorbimento.
- 12.2 Tre sbarre di alluminio ( $\rho_1 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_1 = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), piombo ( $\rho_2 = 11.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_2 = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), rame ( $\rho_3 = 8.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_3 = 11 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ), sono disposte come in figura; le lunghezze sono  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3 = d_1 + d_2 = 120 \text{ cm}$ . Due onde sonore di eguale frequenza  $v = 10^3 \text{ Hz}$  si propagano lungo il sistema; inizialmente esse sono in fase, ma all'uscita l'onda che si propaga nelle sbarre 1 e 2 risulta sfasata rispetto a quella che si propaga nella sbarra 3 di  $\Delta\phi = 60^\circ$ . Calcolare la differenza tra i tempi di propagazione e le lunghezze  $d_1$  e  $d_2$ .

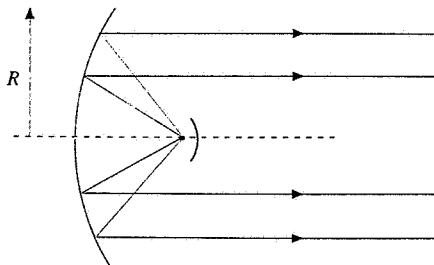


- 12.3 Un'onda sonora piana armonica di pulsazione  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$  e intensità  $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$  si può propagare in tre mezzi, aria, acqua e ferro, per i quali densità e velocità di propagazione sono rispettivamente  $\rho_1 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_1 = 344 \text{ m/s}$ ,  $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_2 = 1493 \text{ m/s}$ ,  $\rho_3 = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_3 = 5130 \text{ m/s}$ . Calcolare nei tre mezzi i valori della lunghezza d'onda  $\lambda$ , dell'ampiezza  $\xi$  dell'onda di spostamento e dell'ampiezza  $\Delta p$  dell'onda di pressione.
- 12.4 Un'onda sonora piana armonica di frequenza  $v = 500 \text{ Hz}$  e ampiezza  $\xi_0 = 10^{-8} \text{ m}$  si propaga in aria a pressione normale e temperatura  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Calcolare l'ampiezza dell'onda di pressione  $\Delta p$ , l'ampiezza dell'onda di densità  $\Delta\rho$ , l'intensità  $I$  dell'onda e il suo livello sonoro  $B$ , la variazione di  $I$  e  $B$  se la temperatura aumenta di  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ .
- 12.5 Un altoparlante produce nell'aria a  $20^\circ\text{C}$  un suono di frequenza  $v = 2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$  e intensità  $I_1 = 5.6 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$  a distanza  $r_1 = 6 \text{ m}$ . Nell'ipotesi di emissione isotropa calcolare l'intensità  $I_2$  alla distanza  $r_2 = 30 \text{ m}$ , l'ampiezza

dell'onda di pressione  $\Delta p$  a  $r_1 = 6 \text{ m}$  e  $r_2 = 30 \text{ m}$ , l'ampiezza di spostamento alle stesse distanze.

- 12.6 Un aereo a reazione vola con velocità  $v_a = 1.5 \text{ Mach}$ . L'onda d'urto raggiunge il suolo nell'istante  $t = 11 \text{ s}$  dopo il passaggio dell'aereo sulla verticale. Calcolare l'angolo  $\theta$  che l'onda d'urto forma con la direzione di volo dell'aereo e l'altezza  $h$  dell'aereo. Si assuma  $v = 330 \text{ m/s}$  come velocità del suono nell'aria.
- 12.7 Una sirena emette nell'aria a  $20^\circ\text{C}$  un suono di frequenza  $v_0 = 1080 \text{ Hz}$  e si muove alla velocità  $v_s = 10.8 \text{ m/s}$ , allontanandosi dall'ascoltatore e dirigendosi verso una collina. Calcolare la frequenza del suono proveniente direttamente dalla sirena e la frequenza del suono riflesso dalla collina. Determinare inoltre la frequenza di battimento dei due suoni specificando se tali battimenti sono rivelabili con l'orecchio.
- 13.1 Un'onda elettromagnetica piana polarizzata ellitticamente, di intensità  $I = 20 \text{ W/m}^2$  e con rapporto tra le ampiezze delle due componenti del campo elettrico  $E_{0x}/E_{0y} = \sqrt{3}$ , si propaga in una lastra di vetro con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Scrivere l'equazione dell'onda nel mezzo sapendo che la lunghezza d'onda nel mezzo è  $\lambda = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Ripetere il problema supponendo che la stessa onda si propaghi nell'aria.
- 13.2 Una lampada da  $500\text{W}$  irradia tale potenza isotropicamente con un'efficienza dell'80%. Calcolare alla distanza  $r = 5 \text{ m}$  l'intensità  $I$ , i valori massimi  $E_0$  del campo elettrico e  $B_0$  del campo magnetico, la forza  $F$  esercitata su un dischetto di raggio  $a = 5 \text{ cm}$ , perfettamente riflettente, ortogonale alla direzione di propagazione delle onde.
- 13.3 Un trasmittitore emette onde elettromagnetiche in un cono che copre un angolo solido  $\Delta\Omega = 2 \cdot 10^{-2} \text{ sr}$ . A distanza  $r_1 = 2 \text{ km}$  dal trasmittitore l'ampiezza massima del campo elettrico è  $E_1 = 20 \text{ V/m}$ . Calcolare l'ampiezza  $B_1$  del campo magnetico, la potenza  $P$  del trasmittitore, le ampiezze  $E_2$  e  $B_2$  alla distanza  $r_2 = 10 \text{ km}$ .
- 
- 13.4 Una sorgente puntiforme di microonde produce impulsi di frequenza  $v = 20 \text{ GHz}$  e di durata  $t = 1 \text{ ns}$ . La sorgente è posta nel fuoco di un paraboloidale conduttore di apertura  $2R = 20 \text{ cm}$ , così che si ottiene in uscita un fascio di

microonde approssimativamente parallelo all'asse del paraboloide. La potenza media di ogni impulso è  $P = 25$  kW. Calcolare la lunghezza d'onda delle microonde, l'energia totale di ciascun impulso, l'intensità del fascio di microonde, la densità media di energia di ciascun impulso, l'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico del fascio, la forza esercitata durante un impulso su una superficie perfettamente riflettente ortogonale al fascio.



- 13.5 Un'antenna parabolica ha un'apertura di 15 m e riceve in direzione normale un segnale radio proveniente da una sorgente molto lontana, di ampiezza  $E_0 = 4 \cdot 10^{-7}$  V/m. Assumendo che l'antenna assorba tutta la radiazione che la colpisce calcolare la forza esercitata dall'onda sull'antenna.
- 13.6 Una stazione trasmittente emette una potenza  $P = 30$  kW alla frequenza  $\nu = 100$  MHz. Calcolare l'energia  $E_y$ , dei fotoni emessi dall'antenna e il loro flusso. Supponendo che la stazione ricevente non possa rivelare ampiezze di campo elettrico inferiori a  $E_0 = 0.05$  V/m, calcolare l'intensità minima dei fotoni rivelabile, il raggio massimo di ricezione nell'ipotesi che l'emissione sia isotropa e nell'ipotesi che essa avvenga entro un cono di semiapertura  $\alpha = 30^\circ$ .
- 13.7 Un laser emette pacchetti d'onda di durata  $\Delta t = 10^{-3}$  s, con valore centrale della lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6936$  μm; l'intensità media è  $I = 2 \cdot 10^5$  W/m<sup>2</sup>. Calcolare l'ampiezza  $E_0$  del campo elettrico, l'intervallo  $\Delta\nu$  delle frequenze e  $\Delta\lambda$  delle lunghezze d'onda che costituiscono il singolo pacchetto, la densità media di energia del fascio laser, l'energia  $E_y$  del singolo fotone, l'intensità media di fotoni del fascio.
- 13.8 Una navicella spaziale di massa  $m = 1.5 \cdot 10^3$  kg viaggia nel vuoto in assenza di campo gravitazionale e utilizza un fascio laser di potenza  $P = 10$  kW, montato in coda, come propulsore. Calcolare di quanto aumenta la velocità della navicella in ogni giorno di navigazione.
- 13.9 Un granello di polvere cosmica nel sistema solare si trova soggetto da parte del sole sia alla forza di attrazione gravitazionale che alla forza dovuta alla pressione di radiazione. Supponendo che la particella sia sferica ed in grado di assorbire tutta la radiazione, calcolare il valore minimo  $a_0$  del raggio al di sotto del quale la particella sarebbe spinta fuori del sistema solare. I valori numerici sono: massa del sole  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg, potenza solare  $P = 3.96 \cdot 10^{26}$  W, densità del granello  $\rho = 2.7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.

13.10 Una sorgente gassosa emette luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \cdot 10^{-6}$  m. Assumendo che ogni molecola si comporti come un dipolo oscillante di momento elettrico massimo  $p_0 = e z_0$  con  $z_0 = 10^{-10}$  m, calcolare la potenza emessa da una singola molecola.

13.11 L'indice di rifrazione dell'idrogeno gassoso in condizioni standard di temperatura e pressione vale  $n_1 = 1 + 1.4 \cdot 10^{-4}$  alla lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 0.546$  μm e  $n_2 = 1 + 1.547 \cdot 10^{-4}$  con  $\lambda_2 = 0.254$  μm. Supponendo che l'atomo di idrogeno abbia, in vicinanza di queste lunghezze d'onda, una sola pulsazione di risonanza  $\omega_3$ , calcolare il valore di  $\omega_3$ , il numero  $N$  di molecole per unità di volume del gas, l'indice di rifrazione  $n'$  per la lunghezza d'onda  $\lambda_3$  alla pressione  $p' = 10$  atm e alla temperatura  $t_1 = 40^\circ\text{C}$ , i coefficienti  $A$  e  $B$  della formula di Cauchy in condizioni standard.

13.12 Una pulsar emette periodicamente un impulso radio che può essere rivelato mediante un radiotelescopio. Quando la sintonia del radiotelescopio viene cambiata da  $\nu_1 = 150$  MHz a  $\nu_2 = 200$  MHz l'impulso arriva  $\Delta t = 1.25$  s prima. Assumendo che l'impulso radio si propaghi in uno spazio interstellare assimilabile ad un plasma in cui vi siano  $N = 5 \cdot 10^4$  elettroni/m<sup>3</sup>, calcolare la distanza  $d$  della pulsar dalla terra. Se invece si conoscesse  $d' = 1500$  anni-luce, calcolare quale densità  $N'$  di elettroni causerebbe la stessa differenza  $\Delta t$ .

13.13 Una lunghezza d'onda nella banda del rosso ha il valore  $\lambda_R = 0.6$  μm e un'altra, nella banda del verde, ha il valore  $\lambda_V = 0.5$  μm. A quale velocità bisogna viaggiare affinché la luce rossa appaia verde?

13.14 Un fascio di microonde ( $\lambda_0 = 0.1$  m) viene riflesso da un aeroplano che si avvicina alla sorgente di onde. I battimenti tra le onde emesse dalla sorgente e quelle riflesse dall'aeroplano hanno la frequenza  $\nu_b = 990$  Hz. Calcolare la velocità dell'aeroplano.

14.1 Un osservatore posto sul fondo di una piscina profonda  $h = 3$  m guarda verso l'alto. Tutti gli oggetti che stanno al di sopra della superficie dell'acqua sono visti entro un cono di semiapertura  $\theta$  con centro nell'occhio dell'osservatore. Anche gli oggetti posti sul fondo della piscina sono visti egualmente bene, per riflessione, purché a distanza maggiore di  $d_{\min}$  dall'osservatore. Calcolare i valori di  $\theta$  e  $d_{\min}$ . L'indice di rifrazione dell'acqua è  $n = 1.33$ .

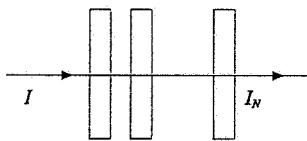
14.2 Un sottile fascio di luce incide come in figura su una faccia di una lastra di plexiglas ( $n = 1.48$ ). Calcolare per quali valori dell'angolo di incidenza  $\theta$  la luce arriva all'altro estremo della lastra dopo essersi riflessa totalmente più volte sulle pareti della stessa. Discutere cosa succede per  $n < \sqrt{2}$ .



- 14.3 L'indice di rifrazione dell'aria è  $n = 1.00028$ . Una stella invia luce secondo una direzione che forma l'angolo  $\theta_0 = 45^\circ$  rispetto allo zenit. In quale direzione  $\theta$  dovrà essere puntato un telescopio per vedere la stella al centro del suo campo?

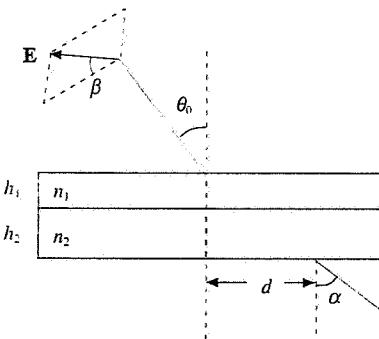
- 14.4 L'angolo limite per lo zaffiro è  $\theta_0 = 34.4^\circ$ . Calcolare l'indice di rifrazione dello zaffiro, l'angolo di Brewster  $\theta_B$  dello zaffiro, la relazione generale tra  $\theta_0$  e  $\theta_B$ .

- 14.5 Un fascio di luce attraversa normalmente una serie di sottili lastre trasparenti a facce piane e parallele, tra loro distanziate, costituite da un materiale con indice di rifrazione  $n = 1.5$ . Trascurando le riflessioni multiple e l'assorbimento, calcolare il numero  $N$  di lastre per cui l'intensità del fascio trasmesso risulta attenuata del 30% oppure del 60%.



- 14.6 Un fascio di luce attraversa una lastra di vetro perfettamente trasparente, di spessore  $d = 2$  cm e indice di rifrazione  $n = 1.73$ . Calcolare la percentuale dell'intensità incidente  $T_1$  trasmessa dalla lastra senza tener conto delle riflessioni multiple all'interno della lastra e l'analogia percentuale  $T_2$  tenuto invece conto delle riflessioni multiple interne. Rispondere alle stesse domande nell'ipotesi che il vetro abbia una lunghezza di assorbimento  $l_{\text{ass}} = 40$  cm.

- 14.7 Un fascio di luce di potenza  $W = 10 \mu\text{W}$ , polarizzato rettilineamente in un piano che forma con il piano di incidenza l'angolo  $\beta = 60^\circ$ , incide con angolo di incidenza  $\theta_0 = 30^\circ$  su un sistema di due lastre addossate perfettamente trasparenti; la prima ha spessore  $h_1 = 0.8$  cm e indice di rifrazione  $n_1 = 1.2$ , la seconda ha  $h_2 = 1.2$  cm,  $n_2 = 1.5$ . Trascurando le riflessioni multiple calcolare in quale direzione e in quale punto il fascio emerge dalla seconda lastra, per quale valore dell'angolo di incidenza il fascio non esce dalla seconda lastra, la potenza del fascio trasmesso.

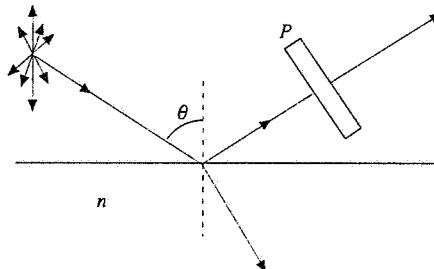


- 14.8 Un fascio di luce non polarizzata incide su una serie di dischi polarizzatori. Calcolare di quanto si riduce l'intensità in ciascuna delle seguenti condizioni: tre

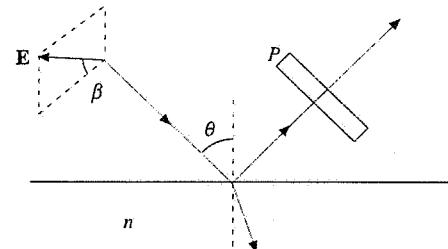
dischi con l'asse ottico di ciascun disco ruotato di  $45^\circ$  rispetto al precedente, quattro dischi con gli assi ruotati di  $30^\circ$ , sette dischi con gli assi ruotati di  $15^\circ$ ; cosa succede, nelle stesse condizioni, se il numero di dischi è molto grande?

- 14.9 Un fascio di luce parzialmente polarizzata, con grado di polarizzazione  $P = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$ , incide su un polarizzatore. Calcolare l'espressione dell'intensità  $I$  trasmessa dal polarizzatore in funzione di  $I_{\max}$ , di  $P$  e dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con la direzione lungo cui si misura  $I_{\max}$ .

- 14.10 Un fascio di luce non polarizzata di intensità  $I = 100 \text{ W/m}^2$  incide con un angolo  $\theta = 60^\circ$  sulla superficie di una lastra piana trasparente di indice di rifrazione  $n$ . Il fascio riflesso viene analizzato con un polarizzatore e si trova che questo trasmette l'intensità  $I_P(\alpha) = I_0 \sin^2 \alpha$ , se  $\alpha$  è l'angolo formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza. Calcolare l'indice di rifrazione della lastra, l'intensità massima  $I_0$  trasmessa dal polarizzatore, l'intensità  $I$  del fascio trasmesso dalla superficie della lastra, le ampiezze dei campi elettrici e magnetici incidenti, riflessi e trasmessi sulla superficie della lastra.

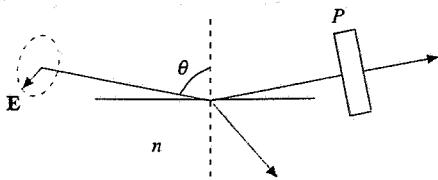


- 14.11 Un fascio di luce di potenza  $W = 20 \text{ W}$ , polarizzato rettilineamente in un piano che forma l'angolo  $\beta = 30^\circ$  rispetto al piano di incidenza, incide con un angolo  $\theta = 45^\circ$  su una lastra di materiale trasparente avente indice di rifrazione  $n = 1.73$ . Calcolare la potenza  $W$  dell'onda riflessa, lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa, la potenza  $W_P(\alpha)$  trasmessa da un polarizzatore posto normalmente sulla direzione del fascio riflesso in funzione dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza. Ripetere il problema con  $\theta = 60^\circ$ .

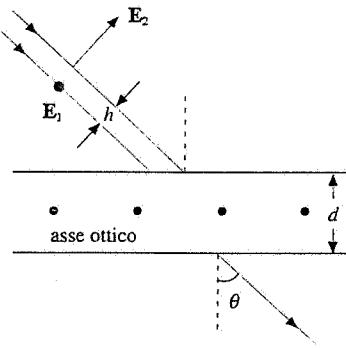


- 14.12 Un fascio di luce polarizzato circolarmente, di potenza  $W = 1 \text{ W}$ , incide con angolo  $\theta = 80^\circ$  sulla superficie di una lastra trasparente con indice di rifrazione  $n = 1.5$ .

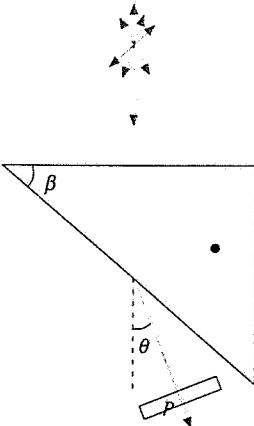
Calcolare le potenze dei fasci riflesso e trasmesso, lo stato di polarizzazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa, la potenza  $W_p(\alpha)$  trasmessa da un polarizzatore posto normalmente alla direzione del fascio riflesso in funzione dell'angolo  $\alpha$  formato dall'asse del polarizzatore con il piano di incidenza.



- 14.13 Una lastra spessa  $d = 0.8$  cm è tagliata da un materiale uniassico ( $n_s = 1.6$ ,  $n_o = 1.4$ ) con le facce parallele all'asse ottico, ortogonale al disegno. Due onde luminose piane, aventi eguale lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$  ed eguale intensità, coerenti, polarizzate la prima nel piano di incidenza e la seconda ortogonalmente a questo, si propagano lungo due raggi paralleli distanti  $h$  ed incidono con un angolo  $\theta = 45^\circ$  sulla lastra. Calcolare il valore di  $h$  affinché all'uscita della lastra le due onde si propaghi sovrapposte lungo la stessa direzione e determinare la polarizzazione dell'onda risultante all'uscita della lastra.

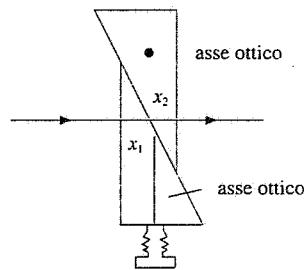


- 14.14 Un prisma di calcite ( $n_s = 1.4864$ ,  $n_o = 1.6585$ ) è tagliato come in figura, con l'asse ottico ortogonale al disegno; l'angolo tra le facce è  $\beta = 40^\circ$ . Un'onda piana non polarizzata di potenza  $W = 8$  W incide normalmente sulla faccia superiore. Calcolare l'angolo  $\theta$  formato dalla

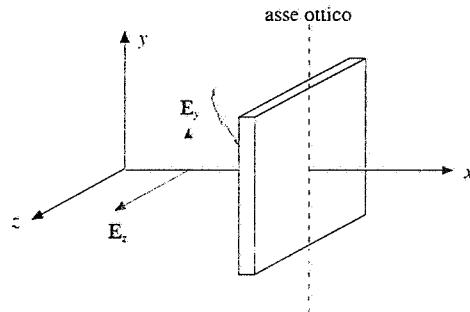


direzione dell'onda uscente rispetto alla direzione di incidenza, la potenza trasmessa  $W_t$ , la potenza  $W_p(\alpha)$  in uscita da un analizzatore posto ortogonalmente alla direzione dell'onda trasmessa in funzione dell'angolo  $\alpha$  tra l'asse dell'analizzatore e il piano di trasmissione (piano del disegno).

- 14.15 Un compensatore di Babinet consiste di due cunei di quarzo ( $n_s = 1.5533$ ,  $n_o = 1.5442$ ) che possono scorrere l'uno sull'altro. I cunei sono tagliati in modo tale che i due assi ottici siano perpendicolari. Un'onda piana non polarizzata incide normalmente sulla prima faccia. Detto  $x_1$  lo spessore attraversato nel primo cuneo e  $x_2$  lo spessore attraversato nel secondo, calcolare la differenza di fase  $\Delta\phi$  tra le onde in uscita in funzione di  $\Delta x = x_1 - x_2$ . Fissato  $x_2 = 2$  mm calcolare inoltre il valore minimo di  $x_1$  per cui il sistema si comporta come una lamina quarto d'onda con  $\lambda_1 = 0.55 \mu\text{m}$  e per cui si comporta invece come una lamina mezz'onda con  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ .

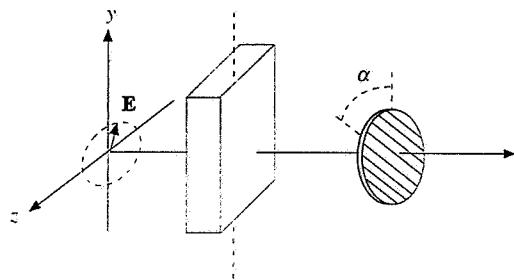


- 14.16 Un'onda piana luminosa, di frequenza  $v = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  e intensità  $I = 50 \text{ W/m}^2$ , è rappresentata dalle espressioni  $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$ ,  $E_z = 2E_0 \sin(kx - \omega t)$ . Essa incide normalmente su una lamina birifrangente ( $n_s = 1.55$ ,  $n_o = 1.50$ ) con l'asse ottico parallelo all'asse  $y$ . Calcolare l'espressione dell'onda e la sua intensità  $I_{l1}$  all'interno della lamina, l'espressione dell'onda e il suo stato di polarizzazione all'uscita della lamina se questa ha uno spessore  $d = 2.5 \mu\text{m}$ , l'intensità  $I_{l2}$  trasmessa dalla lamina, trascurando l'assorbimento.

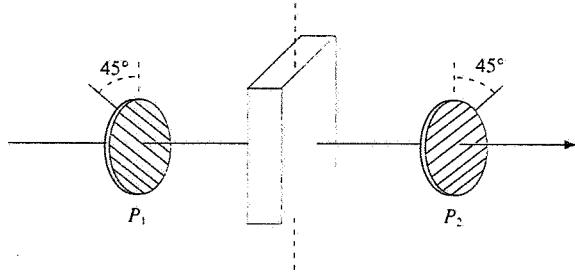


- 14.17 Una lamina di calcite è quarto d'onda per la luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . Un'onda con tale  $\lambda$  e intensità  $I = 400 \text{ W/m}^2$  incide normalmente sulla lamina; essa è espressa da  $E_y = E_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $E_z = \sqrt{3} E_0 \sin(kx - \omega t)$ , l'asse  $y$  essendo parallelo all'asse ottico della lamina. Calcolare lo spessore minimo della lamina e lo stato di polarizzazione dell'onda uscente. Se ortogonalmente alla direzione di questa viene posto un polarizzatore il

cui asse forma l'angolo  $\alpha = 80^\circ$  con l'asse  $y$ , determinare l'intensità trasmessa dal polarizzatore trascurando gli effetti delle riflessioni e dell'assorbimento.

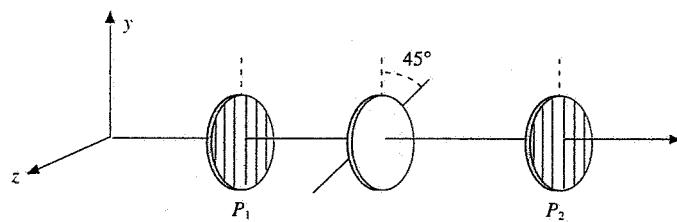


- 14.18** Un fascio di luce contenente tutte le lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda_1 = 0.6 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.7 \mu\text{m}$  incide su un sistema di due polaroidi  $P_1$  e  $P_2$  incrociati, cioè con gli assi ottici a  $90^\circ$  tra loro. Tra i polaroidi è posta una lamina di quarzo, spessa  $d = 600 \mu\text{m}$ , tagliata parallelamente all'asse ottico, con il quale gli assi dei polaroidi formano ciascuno un angolo di  $45^\circ$ . Assumendo che gli indici di rifrazione non dipendano dalla lunghezza d'onda, calcolare per quali lunghezze d'onda nell'intervallo indicato la luce esce dalla lama polarizzata rettilineamente e quali, di tali lunghezze d'onda, vengono trasmesse dal polarizzatore  $P_2$ .

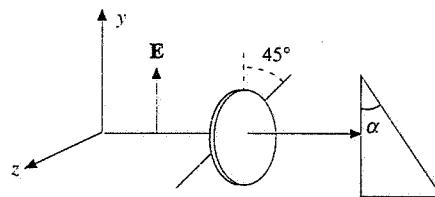


- 14.19** Un fascio di luce polarizzata circolarmente, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.5 \mu\text{m}$ , incide normalmente su una lama di calcite, spessa  $d_1 = 20 \mu\text{m}$ , tagliata parallelamente all'asse ottico. Calcolare per quali lunghezze d'onda la luce uscente dalla lama è ancora polarizzata circolarmente. Si interpone sul fascio uscente una seconda lama di calcite, spessa  $d_2 = 30 \mu\text{m}$ . Quali delle suddette lunghezze d'onda escono dalla seconda lama polarizzate rettilineamente?

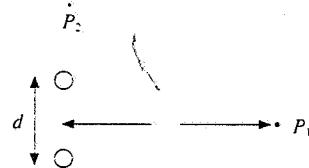
- 14.20** Un fascio di luce polarizzata ellitticamente, comprendente tutte le lunghezze d'onda tra  $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ , è rappresentato per ogni  $\lambda$  dalle espressioni  $E_y = \sqrt{3} E_0 \cos(kx - \omega t)$ ,  $E_z = E_0 \sin(kx - \omega t)$ . Esso incide su un sistema di due polarizzatori  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi con l'asse ottico parallelo all'asse  $y$ . L'intensità trasmessa dai due polarizzatori è  $I_1 = 9 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2$ . Calcolare l'intensità  $I$  incidente. Tra  $P_1$  e  $P_2$  viene inserita una lama di un cristallo uniassico ( $n_s = 1.62$ ,  $n_o = 1.61$ ) di spessore  $d = 80 \mu\text{m}$ , con l'asse ottico che forma l'angolo  $\alpha = 45^\circ$  con l'asse  $y$ . Detta  $I_2$  l'intensità uscente da  $P_2$  in queste condizioni, calcolare le lunghezze d'onda per cui  $I_2 = I_1$ ,  $I_2 = I_1 / 2$ ,  $I_2 = 0$ .



- 14.21** Un fascio di luce polarizzata rettilineamente con il campo elettrico  $E$  parallelo all'asse  $y$  è composto dalle lunghezze d'onda  $\lambda_1 = 0.792 \mu\text{m}$  e  $\lambda_2 = 0.396 \mu\text{m}$ ; le relative potenze sono  $W_1 = 5 \text{ W}$  e  $W_2 = 2.5 \text{ W}$ . La luce incide normalmente su una lama di quarzo, spessa  $d = 21.8 \mu\text{m}$  e con l'asse ottico a  $45^\circ$  con l'asse  $y$ ; all'uscita della lama essa incontra un prisma di vetro con  $n = 1.6$ , disposto come in figura; l'angolo  $\alpha$  vale  $32^\circ$ . Calcolare lo stato di polarizzazione dell'onda uscente dalla lama per  $\lambda_1$  e per  $\lambda_2$ , lo stato di polarizzazione in uscita dal prisma, la potenza trasmessa dal prisma, trascurando l'assorbimento e le riflessioni sulla lama.



- 15.1** Due sorgenti di onde sonore, di eguale frequenza  $v = 680 \text{ Hz}$  ed eguale potenza  $W$ , poste a distanza  $d = 12.5 \text{ cm}$ , emettono in fase onde sferiche che si propagano nell'aria circostante con velocità  $v = 340 \text{ m/s}$ . In un punto  $P_1$  dell'asse, distante  $r = 5 \text{ m}$  dal punto di mezzo tra le sorgenti, l'onda di spostamento ha l'ampiezza  $\xi_{P_1} = 10^{-8} \text{ m}$ . Calcolare l'ampiezza  $\xi_1$  dell'onda di spostamento di ciascuna sorgente in  $P_1$ , la potenza  $W$  di ciascuna sorgente, l'ampiezza  $\Delta p_1$  dell'onda di pressione in  $P_1$ . Considerato il punto  $P_2$  che sta sulla retta congiungente le due sorgenti alla stessa distanza  $r$  dal centro, calcolare in  $P_2$  l'intensità  $I_2$ , l'ampiezza  $\xi_{P_2}$  e l'ampiezza  $\Delta p_2$ .

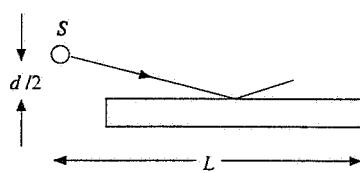


- 15.2** Le onde di una stazione radio di potenza  $W = 50 \text{ kW}$  e frequenza  $v = 10^6 \text{ Hz}$  arrivano ad un ricevitore distante  $D = 20 \text{ km}$  percorrendo due cammini diversi, l'uno diretto e l'altro comprendente anche una riflessione su un ostacolo posto direttamente dietro il ricevitore. Calcolare la distanza minima  $d$  tra ricevitore e ostacolo per la quale si ha la minima percezione del segnale e l'ampiezza  $E$  del segnale in questa situazione nell'ipotesi che il segnale riflesso sia attenuato del 10%.

- 15.3** Due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  coerenti, separate dalla distanza  $a = \lambda$ , emettono isotropicamente onde elettromagnetiche;

ciascuna sorgente ha una potenza  $W_1 = 100 \text{ W}$  e inoltre  $S_2$  è sfasata rispetto a  $S_1$  di  $\pi/2$ . Calcolare le direzioni lungo cui si rivelano i massimi e i minimi di interferenza e tracciare il diagramma polare dell'intensità. Calcolare inoltre l'ampiezza del campo elettrico alla distanza  $D = 1 \text{ km}$  nella direzione dei massimi.

- 15.4** In un esperimento di Young le due fenditure sono illuminate con luce di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 0.55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  e il sistema di frange d'interferenza osservate ha una densità  $N_1 = 12.5 \text{ frange/cm}$ . Calcolare per quale valore  $\lambda_2$  si ha una densità di frange  $N_2 = 15.5 \text{ frange/cm}$  e come variano le densità se il dispositivo è immerso in acqua ( $n = 1.33$ ).
- 15.5** In un dispositivo di Young la distanza tra le fenditure è  $d = 5 \text{ mm}$  e queste distano  $L = 1.2 \text{ m}$  dallo schermo. Si osservano due figure di interferenza, una dovuta a luce con  $\lambda_1 = 0.48 \mu\text{m}$  e l'altra a luce con  $\lambda_2 = 0.6 \mu\text{m}$ . Calcolare quanto distano sullo schermo le frange di interferenza del quinto ordine delle due diverse figure e quali frange delle due figure si sovrappongono. Si copre una delle due fenditure con una sottile lamina di mica ( $n = 1.58$ ) e si osserva che la settima frangia luminosa della figura di  $\lambda_1$  si sposta al centro dello schermo. Calcolare lo spessore  $d$  della lamina e di quante frange si è spostata la figura di  $\lambda_2$ .
- 15.6** Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 5 \text{ cm}$  incide ortogonalmente su un dispositivo di Young, con distanza tra i fori pari a  $d$ . Davanti ai due fori sono posti due opportuni polarizzatori con gli assi paralleli tra loro. Con un rivelatore a distanza  $L \gg d$  si osserva che l'intensità del massimo di ordine zero ( $\theta = 0$ ) vale  $I_0 = 10 \text{ W/m}^2$  e che per  $\theta = 7.18^\circ$  l'intensità vale  $I(\theta) = I_0 / 2$ . Calcolare il minimo valore di  $d$ , le ampiezze dei campi  $E$  e  $B$  di ciascuna sorgente all'angolo  $\theta$ , il valore dell'intensità  $I$  osservata per  $\theta = 0$  e  $\theta = 7.18^\circ$  se uno dei polarizzatori viene ruotato di  $90^\circ$ .
- 15.7** In un dispositivo di Young si utilizza luce polarizzata rettilineamente con  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ . Una lamina di calcite, di spessore  $d$ , tagliata parallelamente all'asse ottico, viene posta davanti a una delle aperture, con l'asse ottico parallelo alla direzione di polarizzazione della luce, e si osserva sullo schermo uno spostamento di  $N_c$  frange; quando si ruota la lamina di  $90^\circ$  si osserva uno spostamento di  $N_a$  frange, con  $N_a - N_c = 5$ . Calcolare lo spessore  $d$  della lamina.
- 15.8** In un sistema a due fenditure una fenditura è larga il doppio dell'altra. Detta  $I_{\max}$  l'intensità massima osservata sullo schermo, calcolare l'espressione dell'intensità  $I(\theta)$  in funzione dell'angolo di emissione.
- 15.9** Nel paragrafo 15.4 è stato illustrato il dispositivo noto come specchio di Lloyd. La sorgente  $S$  si trova a distanza  $d/2 = 2.5 \text{ mm}$  dal piano dello specchio e a distanza  $L = 120 \text{ cm}$  dallo schermo. Se  $\lambda = 0.68 \mu\text{m}$  calcolare la distanza della prima frangia chiara dalla superficie dello specchio e la densità  $N$  delle frange che si formano sullo schermo.



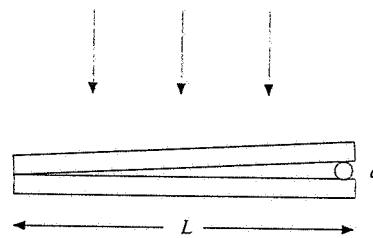
- 15.10** In un interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas, del tipo descritto nel paragrafo 15.4, i tubi sono lunghi  $d = 20 \text{ cm}$  e inizialmente vuoti. Utilizzando luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5893 \mu\text{m}$  si osserva che una variazione isotermica della pressione dell'aria contenuta in uno dei due tubi da  $p_1 = 60.5 \cdot 10^2 \text{ Pa}$  a  $p_2 = 871.5 \cdot 10^2 \text{ Pa}$  causa uno spostamento di  $M = 80$  frange di interferenza. Calcolare come varia l'indice di rifrazione dell'aria in funzione della pressione, l'indice di rifrazione dell'aria in condizioni standard ( $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ). La variazione  $\Delta p$  di pressione che produce lo spostamento di una frangia.
- 15.11** Quattro onde sonore di frequenza  $v = 400 \text{ Hz}$  si propagano lungo l'asse  $x$ : esse sono rappresentate dalle espressioni:
- $$\xi_1 = \xi_0 \cos(kx - \omega t),$$
- $$\xi_2 = \frac{\xi_0}{3} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$
- $$\xi_3 = \frac{\xi_0}{4} \cos\left(kx - \omega t + \pi\right),$$
- $$\xi_4 = \frac{\xi_0}{2} \cos\left(kx - \omega t + \frac{3}{2}\pi\right),$$
- con  $\xi_0 = 10^{-10} \text{ m}$ . Calcolare l'espressione dell'onda risultante, la sua intensità e il suo livello sonoro.
- 15.12**  $N$  sorgenti sincrone di onde sonore sferiche, descritte dall'espressione  $\xi = (\xi_0 / r) \cos(kr - \omega r)$ , sono disposte lungo una linea: la frequenza è  $v = 688 \text{ Hz}$ , la distanza tra le sorgenti è  $d$ , la potenza totale del sistema è  $W = 500 \text{ W}$ ; la propagazione avviene in aria, con  $v = 344 \text{ m/s}$ . Si osservano massimi di intensità di eguale valore agli angoli  $\theta = 0^\circ, 11.53^\circ, 23.58^\circ, 36.86^\circ, \dots$  rispetto alla direzione normale alla linea delle sorgenti: la larghezza angolare del massimo centrale è  $\Delta\theta = 4.58^\circ$ . Calcolare il numero  $N$  di sorgenti, la dimensione complessiva  $L$  del sistema, l'intensità  $I_M$  e il livello sonoro dei massimi alla distanza  $r = 5 \text{ km}$  dal sistema, l'ampiezza  $\xi_0$  che caratterizza ciascuna sorgente e l'ampiezza di pressione  $\Delta p$  sempre alla distanza  $r$ .
- 15.13**  $N$  sorgenti coerenti, equispaziate della distanza  $d$ , sono disposte lungo l'asse  $y$ . Calcolare la relazione tra  $d$  e  $\lambda$  affinché si abbia un solo massimo principale quando le sorgenti sono in fase, quanto deve valere la differenza di fase  $\phi$  tra due sorgenti consecutive per ottenere, con  $d = \lambda/2$ , un massimo di intensità lungo l'asse  $y$ , il numero e la posizione dei massimi principali per  $d = \lambda/2$ ,  $\phi = -\pi/2$ .

- 15.14** *N* trasmettitori sincroni di eguale potenza possono emettere segnali di frequenza  $v_1 = 30 \text{ GHz}$  e  $v_2 = 24 \text{ GHz}$ . Si osserva che il secondo massimo secondario nell'intorno del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $v_1$  cade allo stesso angolo del massimo principale di ordine  $m = 1$  per la frequenza  $v_2$ . Calcolare il numero  $N$  di sorgenti e il rapporto tra l'ampiezza del campo elettrico  $E_2$  del massimo secondario e l'ampiezza  $E_{\max}$  del massimo principale.

- 15.15** Una sottile lamina trasparente, di indice di rifrazione  $n = 1.4$  e spessore  $d$ , è immersa in aria. In incidenza normale si osserva un massimo di intensità nella luce riflessa per  $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$  e un minimo per  $\lambda_2 = 375 \text{ nm}$ , senza che si osservino altri massimi e minimi tra  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Calcolare lo spessore  $d$  della lamina e le percentuali di luce riflessa e trasmessa per  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

- 15.16** Una sottile lamina trasparente, di indice di rifrazione  $n = 1.5$  e spessore  $d = 0.40 \mu\text{m}$ , immersa in aria, è illuminata perpendicolarmente alla sua superficie con luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ). Calcolare le lunghezze d'onda per cui si hanno massimi e minimi di intensità in riflessione e la percentuale  $I/I_0$  di luce riflessa in funzione della lunghezza d'onda.

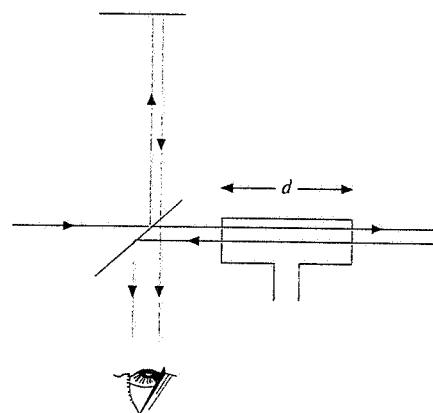
- 15.17** Una sorgente estesa di luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.68 \mu\text{m}$  illumina perpendicolarmente due lastre di vetro lunghe  $L = 120 \text{ mm}$  che si toccano ad un estremo e all'altro sono separate da un filo di diametro  $d = 0.048 \text{ mm}$ . Calcolare le posizioni delle frange chiare e delle frange scure, il loro numero totale e la loro densità.



- 15.18** In un dispositivo per produrre anelli di Newton l'intercapedine tra la lastra piana e la lente, che ha raggio di curvatura  $R = 2 \text{ m}$  e diametro  $D = 20 \text{ mm}$ , è riempita di un liquido il cui indice di rifrazione  $n$  è intermedio tra gli indici di rifrazione  $n_1$  della lente e  $n_2$  della lastra ( $n_1 < n < n_2$ ). Illuminando con luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$  si osserva che due anelli chiari successivi hanno diametri  $d_1 = 4.84 \text{ mm}$  e  $d_2 = 5.23 \text{ mm}$  (con gli errori di misura). Calcolare il valore dell'indice di rifrazione  $n$  del liquido, con una stima dell'errore di misura in base ai dati, e il numero di anelli chiari che si formano.

- 15.19** Una lastra spessa di vetro d'indice di rifrazione  $n_1 = 1.76$  è ricoperta da una sottile pellicola trasparente di spessore  $d$  e indice di rifrazione  $n_2$ . Un fascio di luce bianca incide in aria perpendicolarmente alla superficie della lastra e si osserva che per la lunghezza d'onda  $\lambda_C = 0.55 \mu\text{m}$  la lastra è perfettamente trasparente. Calcolare il valore di  $n_2$  e dello spessore (minimo)  $d$ ; calcolare inoltre la percentuale di luce trasmessa per  $\lambda_R = 0.7 \mu\text{m}$  e  $\lambda_V = 0.4 \mu\text{m}$  e confrontare con i valori che si avrebbero in assenza della pellicola.

- 15.20** Nell'interferometro di Michelson (paragrafo 15.6) spostando lo specchio mobile di  $\Delta x = 0.356 \text{ mm}$  si misura lo spostamento di  $N_1 = 1304$  frange. Calcolare il valore della lunghezza d'onda della luce impiegata. Si supponga che uno dei fasci dell'interferometro attraversi un piccolo contenitore di vetro lungo  $d = 1.4 \text{ cm}$  in cui inizialmente è fatto il vuoto; facendo fluire gas nel contenitore fino ad un certo valore della pressione si misura lo spostamento di  $N_2 = 51$  frange. Calcolare l'indice di rifrazione del gas.



- 15.21** Un filo di rame, lungo  $L = 0.8 \text{ m}$  e di raggio  $r = 1 \text{ mm}$ , è teso con tensione  $T = 10^3 \text{ N}$ . Calcolare la frequenza fondamentale di vibrazione e la corrispondente lunghezza d'onda. Determinare di quanto varia il valore di  $v$  se si raddoppia la forza, si raddoppia la massa per unità di lunghezza, si raddoppia il raggio, si raddoppia la lunghezza.

- 15.22** In una corda tesa esiste un'onda stazionaria rappresentata dall'espressione

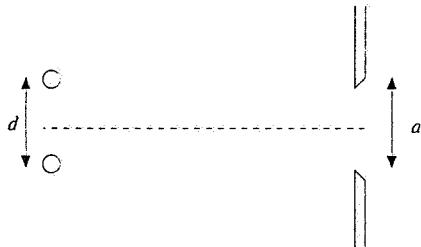
$$y(x, t) = 0.5 \sin 0.2x \cos 300t$$

dove le lunghezze sono date in centimetri e il tempo in secondi. Calcolare la lunghezza d'onda e la frequenza dell'onda, la velocità  $v$  delle onde trasversali sulla corda, la lunghezza  $L$  della corda se essa vibra nella sua quarta armonica.

- 15.23** Due armoniche successive di una canna d'organo hanno lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 36 \text{ cm}$  e  $\lambda_2 = 28 \text{ cm}$ . Determinare se la canna d'organo è chiusa o aperta e calcolare la lunghezza  $L$  della canna e la frequenza fondamentale se la temperatura ambiente è  $t = 27^\circ\text{C}$ .

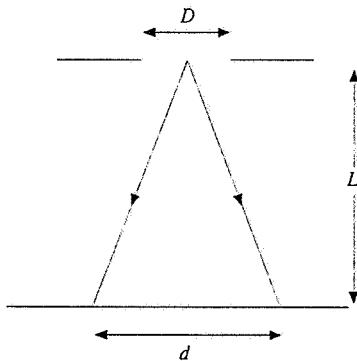
- 15.24** L'orecchio umano può avvertire, se opportunamente allenato, battimenti di intensità che hanno un periodo  $\tau = 2 \text{ s}$ . Calcolare la precisione con cui bisogna accordare due pianoforti, che devono suonare insieme, alle due frequenze  $v_1 = 400 \text{ Hz}$  e  $v_2 = 1000 \text{ Hz}$ .

- 16.1** Una fenditura di larghezza  $a = 6 \text{ cm}$  è praticata su uno schermo di materiale assorbente ed è investita da un'onda elettromagnetica piana di frequenza  $\nu = 7.5 \text{ GHz}$ . Calcolare l'andamento dell'intensità in funzione di  $\theta$  a grandi distanze, l'angolo  $\theta_{\min}$  a cui si ha il primo minimo, il rapporto  $I/I_0$  per  $\theta = \theta_{\min}/2$  se  $I_0$  è l'intensità per  $\theta = 0$ . Due sorgenti di questo tipo, separate dalla distanza  $d = 20 \text{ cm}$ , sono poste dietro il piano contenente la fenditura. Calcolare la distanza massima  $L$  tra il piano delle sorgenti e il piano della fenditura affinché esse possano essere risolte a grande distanza.



- 16.2** Una fenditura di larghezza  $a$  è illuminata con luce monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ . L'immagine della fenditura su uno schermo posto nel piano focale di una lente di focale  $f = 80 \text{ cm}$ , addossata alla fenditura, è una striscia luminosa centrale di larghezza  $\Delta y = 8 \text{ mm}$ . Calcolare la larghezza  $a$  della fenditura. Quando sulla stessa fenditura incide luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) si constata che in una certa zona dello schermo si sovrappongono due bande di lunghezze d'onda: per la prima banda la zona è di minima intensità e per l'altra di primo massimo secondario di intensità. Calcolare le due bande di lunghezze d'onda interessate e la zona  $\Delta y$ , sullo schermo in cui avviene la sovrapposizione.

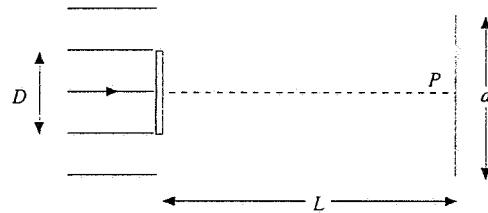
- 16.3** Una sorgente sottomarina di ultrasuoni, usata per la localizzazione dei sottomarini, ha un diaframma circolare di diametro  $D = 50 \text{ cm}$  ed emette segnali di frequenza  $\nu_1 = 25 \text{ kHz}$ . La sorgente è a  $L = 200 \text{ m}$  dal fondo e la velocità di propagazione del suono in acqua è  $v = 1450 \text{ m/s}$ . Calcolare il diametro  $d$  dell'immagine del diaframma sul fondo marino e quale sarebbe l'ampiezza della zona del fondo marino interessata dal segnale se la frequenza fosse  $\nu_2 = 3538 \text{ Hz}$ .



- 16.4** Determinare il diametro dell'immagine di una stella formata da una lente di macchina fotografica, con diametro

$D_1 = 2.5 \text{ cm}$  e focale  $f_1 = 7.5 \text{ cm}$ , e dall'obiettivo di un cannocchiale di diametro  $D_2 = 15 \text{ cm}$  e focale  $f_2 = 150 \text{ cm}$ . Si assuma  $\lambda = 0.57 \mu\text{m}$ .

- 16.5** Un'onda piana elettromagnetica di frequenza  $\nu = 10 \text{ GHz}$  incontra un disco assorbente di diametro  $D = 60 \text{ cm}$ , ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Calcolare nell'intorno di un punto  $P$ , situato sull'asse del disco a distanza  $L = 5 \text{ m}$ , il diametro  $d$  della zona in cui viene percepito il segnale prodotto dall'onda.



- 16.6** Nelle notti di foschia attorno alla luna si osserva un anello rosastro con diametro  $D_R$  dell'ordine di 1.5 volte il diametro della luna, dovuto alla diffrazione della luce sulle goccioline d'acqua presenti nell'atmosfera terrestre. Calcolare la dimensione  $D$  delle goccioline di acqua e il diametro  $D_B$  dell'anello bluastro che si potrebbe osservare attorno alla luna. La distanza terra-luna è  $L = 3.8 \cdot 10^5 \text{ km}$  e il raggio lunare è  $R_L = 1.72 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

- 16.7** In condizioni ideali determinare la distanza  $h$  di due punti sulla superficie della luna che possono essere appena risolti da un osservatore sulla terra usando l'occhio nudo e usando il telescopio di Monte Palomar. Per le aperture nei due casi si prenda  $d_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 5 \text{ m}$ ; la distanza terra-luna è data nel problema 16.6; infine si assuma  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ .

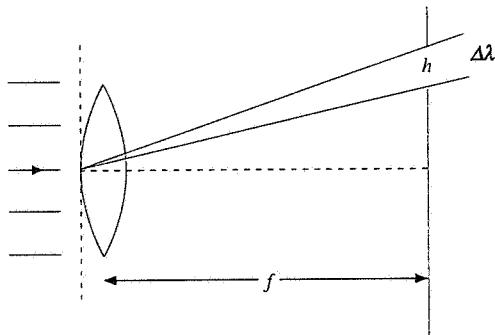
- 16.8** L'obiettivo di una macchina fotografica ha distanza focale  $f = 50 \text{ mm}$ ; la sua apertura varia da un massimo  $D_1 = 25 \text{ mm}$  ( $f/2$ ) ad un minimo  $D_2 = 3 \text{ mm}$  ( $f/16$ ). Calcolare per una luce di lunghezza d'onda  $\lambda_G = 0.55 \mu\text{m}$  il limite di risoluzione angolare imposto dalla diffrazione e il numero di righe/mm che è possibile risolvere sulla pellicola, nei due casi. Ripetere il calcolo per  $\lambda_V = 0.4 \mu\text{m}$  e  $\lambda_R = 0.68 \mu\text{m}$ .

- 16.9** Due fessure di larghezza  $a = 0.030 \text{ mm}$  distanti  $d = 0.15 \text{ mm}$  sono illuminate da luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ . Calcolare il numero  $N$  di frange di interferenza che si formano tra i primi minimi di diffrazione adiacenti al massimo centrale, il rapporto di intensità tra la frangia del terzo ordine e la frangia centrale, la larghezza angolare  $\Delta\theta$  della frangia centrale.

- 16.10** Un reticolto di diffrazione avente una larghezza  $L = 2.4 \text{ cm}$  contiene  $N = 1.6 \cdot 10^3$  linee di larghezza  $a$  minore di  $\lambda = 0.41 \mu\text{m}$ . Calcolare le posizioni angolari dei massimi di interferenza, la larghezza angolare del massimo di interferenza di ordine zero, la dispersione angolare  $D$  al primo e al secondo ordine, il potere risolutivo  $R$  al primo

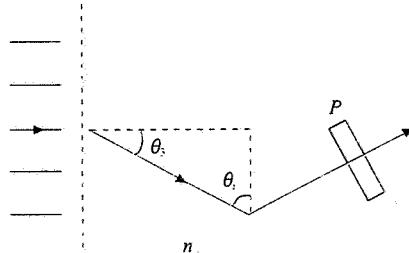
e al secondo ordine, l'intervallo  $\Delta\lambda$  e l'intervallo  $\Delta\nu$  risolvibile agli stessi ordini.

- 16.11** Un reticolo avente  $N$  fenditure larghe  $a$  e distanti  $d$  viene illuminato con un'onda piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . La figura di interferenza si forma nel piano focale di una lente di focale  $f = 50 \text{ cm}$ , addossata al reticolo, e si osserva che la riga corrispondente al massimo principale del secondo ordine è a distanza  $y_2 = 2 \text{ cm}$  dal centro, che la riga corrispondente al massimo del quarto ordine manca e che la riga centrale ha una larghezza  $\Delta y = 20 \mu\text{m}$ . Calcolare i valori di  $d$  e  $a$ , la larghezza  $L$  del reticolo, l'intervallo  $\Delta\lambda$  nell'intorno di  $\lambda$  che si riesce a separare al secondo ordine, il rapporto tra l'intensità della riga del secondo ordine e l'intensità della riga centrale.
- 16.12** Un reticolo di diffrazione avente  $n = 500$  linee/mm viene illuminato con luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ). Su uno schermo posto nel piano focale di una lente di focale  $f = 50 \text{ cm}$  si pratica un foro quadrato di lato  $h = 14 \text{ mm}$ , con un bordo distante  $y_1 = 12.9 \text{ cm}$  dalla riga bianca centrale. Calcolare l'intervallo  $\Delta\lambda$  delle lunghezze d'onda trasmesse dal foro; ripetere il calcolo con un foro di lato  $h = 0.5 \text{ mm}$ .



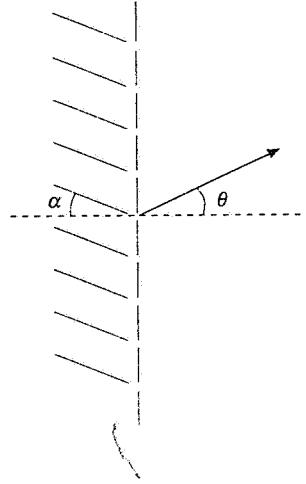
- 16.13** Il potere risolutivo di un reticolo di diffrazione è  $R = \lambda / \Delta\lambda = mN$ . Calcolare il corrispondente intervallo di frequenza  $\Delta\nu$  risolvibile, la differenza  $\Delta t$  di tempo di volo tra i due raggi estremi diffatti dal reticolo in condizioni di massimo di interferenza, la relazione tra  $\Delta\nu$  e  $\Delta t$ .

- 16.14** Un reticolo di diffrazione largo  $L = 1 \text{ cm}$  ha  $N = 2500$  fenditure larghe  $a = 2 \mu\text{m}$ . Esso è illuminato con luce monocromatica non polarizzata. La luce trasmessa dal reticolo nella direzione  $\theta_3$ , corrispondente al massimo principale del terzo ordine, incide con angolo  $\theta$ , su una



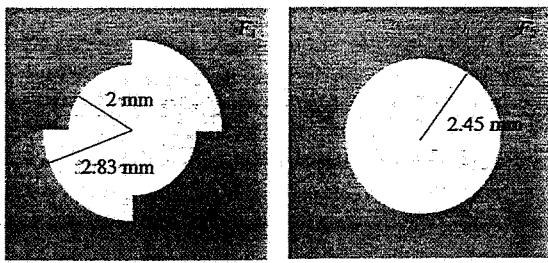
lastra di materiale trasparente di indice di rifrazione  $n = 1.732$  e la parte riflessa viene analizzata da un polarizzatore. L'intensità trasmessa dal polarizzatore segue la legge  $I_p(\alpha) = 0.5 \sin^2 \alpha \text{ W/cm}^2$ , essendo  $\alpha$  l'angolo tra l'asse ottico del polarizzatore e il piano di incidenza. Calcolare l'intensità  $I_3$  del massimo principale del terzo ordine, la lunghezza d'onda  $\lambda$ , l'intensità del massimo principale di ordine zero e la sua larghezza angolare.

- 16.15** Un reticolo ideale, con larghezza delle fenditure  $a \ll \lambda$ , ha passo  $d$  ed è costituito da  $N$  fenditure. Davanti alle fenditure sono posti due polarizzatori che coprono rispettivamente la prima metà e la seconda metà delle fenditure (ciascuno copre cioè  $N/2$  fenditure). Detta  $I_1$  l'intensità prodotta da una fenditura, calcolare, nel caso che i polarizzatori abbiano gli assi paralleli e nel caso in cui li abbiamo incrociati, l'intensità in funzione dell'angolo di osservazione, le posizioni angolari dei massimi principali, le posizioni angolari dei minimi e il loro numero tra due massimi principali consecutivi.
- 16.16** Luce bianca ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) incide su un reticolo di diffrazione largo  $L = 1.5 \text{ cm}$  e avente  $N = 7500$  fenditure secondo un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto alla normale. Calcolare le posizioni angolari dei massimi principali e la larghezza angolare del massimo principale di ordine zero per la lunghezza d'onda  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . Determinare inoltre quali lunghezze d'onda danno un massimo d'intensità per  $\theta = 0$ .

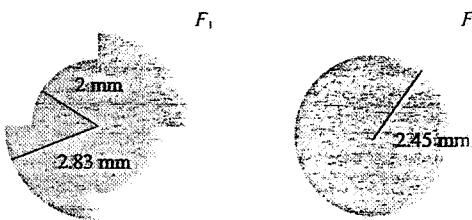


- 16.17** Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  incide su un foro di raggio  $a = 0.1 \text{ mm}$ . Calcolare a quale distanza dal foro bisogna porsi lungo l'asse affinché l'apertura corrisponda a tre o quattro zone di Fresnel e qual è il punto più prossimo allo schermo in cui l'intensità è minima. Ripetere il calcolo con un foro di raggio  $a = 2 \text{ mm}$ .

- 16.18** Un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$  incide su uno schermo opaco in cui è praticata un'apertura della forma  $F_1$  o  $F_2$ , indicata in figura. In un punto distante  $r = 10 \text{ m}$  dal centro del foro lungo l'asse l'ampiezza del campo elettrico vale  $E = \alpha E_0$  e l'intensità  $I = \alpha^2 I_0$ , essendo  $E_0$  e  $I_0$  i valori misurati in assenza dello schermo. Calcolare il coefficiente  $\alpha$  per  $F_1$  e per  $F_2$ .



- 16.19 Si riprenda il problema 16.18 sostituendo alle aperture ostacoli della stessa forma; alla stessa distanza  $r$  l'ampiezza del campo elettrico e l'intensità sono  $E = \beta E_0$ ,  $I = \beta^2 I_0$ , dove  $E_0$  e  $I_0$  sono i valori in assenza dell'ostacolo. Calcolare il coefficiente  $\beta$  per  $F_1$  e  $F_2$ .

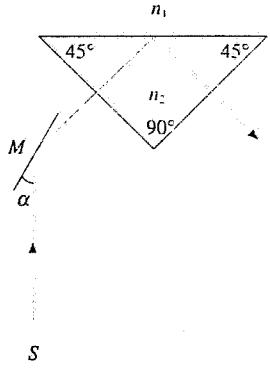


- 16.20 Un fascio di raggi  $X$  monocromatici, con  $\lambda = 0.2\text{nm}$ , incide su un cristallo di KI ( $A = 166$ ,  $\rho = 3.13 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). I piani cristallini interessati nella diffrazione sono quelli principali, la cui distanza è pari alla costante reticolare  $a$ , cioè alla dimensione della cella elementare. Calcolare il valore di  $a$  e per quali valori dell'angolo di radenza si osserva la diffrazione di Bragg.

- 16.21 Confrontando due lunghezze d'onda di raggi  $X$   $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = 97 \text{ pm}$ , si nota che  $\lambda_1$  dà un massimo del primo ordine per un angolo di radenza  $\theta_1 = 30^\circ$  mentre  $\lambda_2$  dà un massimo del terz'ordine per  $\theta_2 = 60^\circ$ . Calcolare la distanza  $d$  tra i piani reticolari interessati e il valore di  $\lambda_1$ .

- 16.22 Un fascio di raggi  $X$ , contenente tutte le lunghezze d'onda tra  $90$  e  $130 \text{ pm}$ , incide con angolo di radenza  $\theta = 45^\circ$  su un cristallo con distanza tra i piani reticolari  $d = 0.275 \text{ nm}$ . Calcolare se ci sono fasci diffratti e per quali lunghezze d'onda.

- 17.1 Nel sistema ottico mostrato in figura il fascio emesso



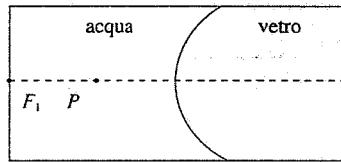
dalla sorgente  $S$  e riflesso dallo specchio piano  $M$  incide ortogonalmente sulla faccia del prisma; si vuole che la riflessione sulla base del prisma sia totale, sapendo che  $n_1 = 1.33$ . Calcolare il valore minimo che deve avere l'indice di rifrazione  $n_2$  del prisma; calcolare inoltre il valore dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione dello specchio.

17.2

Un piccolo oggetto posto sull'asse di uno specchio sferico concavo dista dal vertice  $p = 21 \text{ cm}$ . Si osserva che l'ingrandimento trasversale dell'immagine è  $I = -2.11$ . Calcolare dove si forma l'immagine di un sottile fascio di raggi paralleli che incide sullo specchio formando un angolo  $\theta = 3.5^\circ$  con l'asse.

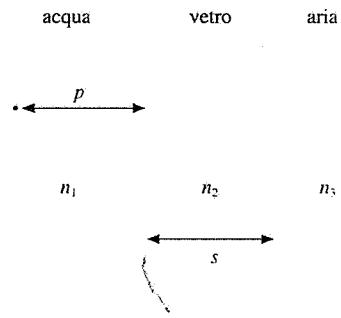
17.3

Una superficie diottrica sferica di raggio  $R = 10 \text{ cm}$  separa acqua ( $n_1 = 1.33$ ) e vetro ( $n_2 = 1.5$ ). La profondità dell'acqua è eguale alla distanza focale anteriore del diottro. Determinare dove si forma l'immagine di un oggetto posto sull'asse a metà del recipiente pieno d'acqua e quanto vale l'ingrandimento trasversale.



17.4

Una lastra piana di vetro, spessa  $s = 3 \text{ cm}$  e con indice di rifrazione  $n_2 = 1.5$ , è a contatto con acqua a sinistra e con aria a destra. Un oggetto in acqua dista  $p = 10 \text{ cm}$  dalla lastra. Determinare dove si forma l'immagine.



17.5

Una lente sottile convergente simmetrica, costituita da un vetro con indice di rifrazione  $n = 1.58$ , ha le superficie con raggio di curvatura che vale in modulo  $R = 46.4 \text{ mm}$ . Si utilizza questa lente per ottenere su uno schermo immagini di oggetti la cui distanza dalla lente varia da  $+\infty$  a  $25 \text{ cm}$ . Calcolare qual è il corrispondente intervallo di distanze tra lente e schermo.

17.6

Un occhio ipermetropo ha il punto prossimo a distanza  $q_p$ , maggiore di  $25 \text{ cm}$ ; un occhio miope ha il punto remoto a distanza finita  $q_r$ , invece che all'infinito. Determinare nei due casi il tipo di lente necessaria per la correzione; numericamente si ponga  $q_p = 100 \text{ cm}$ ,  $q_r = 50 \text{ cm}$ .

- 17.7** Due lenti sottili, di focali  $f_1 = 24 \text{ cm}$  e  $f_2 = -20 \text{ cm}$ , distano  $h = 16 \text{ cm}$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali. Ripetere il calcolo con  $h = 30 \text{ cm}$ .
- 17.8** Due lenti sottili di eguale focale  $f_1 = f_2 = f_0 = 10 \text{ cm}$  distano  $h$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali per  $h = 0, 5, 10, 15, 20, 30 \text{ cm}$ .
- 17.9** Due lenti sottili di focali opposte  $f_1 = f_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $f_2 = -f_0$ , distano  $h$ . Calcolare la focale del sistema e la posizione dei piani principali per  $h = 5, 10, 15 \text{ cm}$ .
- 17.10** Riprendendo la definizione di potere dispersivo  $D$  data nel paragrafo 17.9 si dimostri che tra le distanze focali  $f_R, f_G, f_B$  di una lente, rispettivamente per luce rossa, gialla e blu, sussiste la relazione  $f_B - f_R = f_G D$ ; si ammetta che  $f_B f_R = f_G^2$ . Si calcoli l'effetto per una lente sottile convergente simmetrica con raggio di modulo  $R = 50 \text{ mm}$ , fatta di vetro che ha  $n_B = 1.524$ ,  $n_G = 1.517$ ,  $n_R = 1.514$  alle lunghezze d'onda  $\lambda_B = 486 \text{ nm}$ ,  $\lambda_G = 589 \text{ nm}$ ,  $\lambda_R = 656 \text{ nm}$ .
- 17.11** Date due lenti sottili addossate ( $h = 0$ ) di materiale diverso trovare qual è la condizione per le focali affinché il sistema non abbia aberrazione cromatica; si assuma sempre  $f_B f_R = f_G^2$ .
- 18.1** Una lampada di potenza  $P = 60 \text{ W}$  emette sotto forma di luce visibile di lunghezza d'onda  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$  il 5% dell'energia che assorbe; l'emissione è isotropa. La pupilla di un osservatore, che è posto a distanza  $r = 1 \text{ km}$ , ha diametro  $d = 2 \text{ mm}$ . Calcolare il numero di fotoni che passano attraverso la pupilla.
- 18.2** Su un satellite che orbita intorno alla terra è montato un pannello solare di area  $\Sigma = 2 \text{ m}^2$ , in posizione perpendicolare ai raggi solari. Se l'intensità della radiazione solare sul pannello è  $I = 1.33 \text{ kW/m}^2$ , calcolare il numero di fotoni che colpiscono il pannello nell'unità di tempo e quanto tempo occorre affinché il pannello assorba una mole di fotoni; si assuma  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ .
- 18.3** Nella fotosintesi clorofilliana, in cui l'anidride carbonica si trasforma in carboidrati e ossigeno, vi è un assorbimento di energia solare  $W = 3.68 \cdot 10^4 \text{ J}$  per grammo di  $\text{CO}_2$  che si trasforma. Assumendo che la radiazione abbia lunghezza d'onda  $\lambda = 0.65 \mu\text{m}$  (quella a cui l'assorbimento è massimo), calcolare quanti fotoni sono necessari per dissociare una singola molecola di  $\text{CO}_2$ , la cui massa molecolare è  $A = 44$ .
- 18.4** Un resistore, costituito da un filo annerito di raggio  $R = 1 \text{ mm}$  e lunghezza  $d = 2 \text{ cm}$ , è in equilibrio con l'ambiente a temperatura  $T_0 = 27^\circ\text{C}$  quando viene percorso da una corrente che provoca una dissipazione  $P = 0.5 \text{ W}$ . Supponendo che lo scambio di energia con l'ambiente avvenga solo per irraggiamento calcolare la temperatura  $T$  del filo, la lunghezza d'onda alla quale è massima l'emissione e il valore del potere emissivo specifico massimo.
- 18.5** L'interno di un appartamento è ad una temperatura  $T_i = 20^\circ\text{C}$  mentre la temperatura esterna è  $T_e = 0^\circ\text{C}$ . Calcolare la perdita netta di energia attraverso una finestra di area  $\Sigma = 3 \text{ m}^2$  durante 12 ore e la lunghezza d'onda alla quale la perdita è massima.
- 18.6** L'intensità della radiazione emessa da una stella ha un massimo per  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ; la potenza totale emessa dalla stella è  $P = 5 \cdot 10^{30} \text{ W}$ . Assumendo che la stella irradia come un corpo nero, calcolare la temperatura  $T$  della superficie della stella, il raggio  $R$ , il potere emissivo specifico massimo e il potere emissivo totale.
- 18.7** Quando su una certa superficie metallica incide una radiazione luminosa con  $\lambda = 625 \text{ nm}$  gli elettroni emessi hanno velocità compresa tra zero e il valore massimo  $v_{\max} = 2.17 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo  $W_e$ , la frequenza di soglia  $v_0$  e la corrispondente lunghezza d'onda massima  $\lambda_{\max}$ .
- 18.8** Illuminando una superficie metallica con luce verde di lunghezza d'onda  $\lambda_V = 546.1 \text{ nm}$ , si misura un potenziale di arresto  $V_0 = 0.70 \text{ V}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo e il potenziale di arresto che si misurerrebbe con la luce gialla  $\lambda_G = 587.5 \text{ nm}$ .
- 18.9** Una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda = 450 \text{ nm}$  incide su un metallo. Gli elettroni emessi si muovono in un campo magnetico uniforme di modulo  $B = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ T}$  e il raggio di curvatura massimo vale  $r = 1.98 \text{ cm}$ . Calcolare il lavoro di estrazione del metallo.
- 18.10** Un fascio di luce ultravioletta di intensità  $I = 5.5 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$  incide perpendicolarmente su una superficie metallica. Il lavoro di estrazione del metallo è  $W_e = 3.44 \text{ eV}$  e gli elettroni emessi hanno una velocità massima  $v_{\max} = 4.2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ . Nell'ipotesi che i fotoni incidenti non siano riflessi dalla superficie, calcolare quale potrebbe essere il flusso massimo di elettroni emessi e la pressione di radiazione sulla superficie.
- 18.11** Un fascio di raggi X di energia  $U_0 = 300 \text{ keV}$  subisce diffusione Compton. Calcolare l'energia dei raggi X diffusi all'angolo  $\theta = 35^\circ$  e l'energia cinetica comunicata all'elettrone.
- 18.12** Un fotone avente energia  $U_0 = 10 \text{ keV}$  urta contro un elettrone libero in quiete e viene diffuso ad un angolo  $\theta = 60^\circ$ . Calcolare l'energia cinetica, la quantità di moto e la direzione dell'elettrone dopo l'urto.
- 18.13** In un processo Compton un fotone con energia  $U_0 = 10 \text{ MeV}$  colpisce un elettrone libero e lo mette in moto lungo la direzione incidente ( $\phi = 0$ ); il fotone diffuso rimbalza indietro ( $\theta = 180^\circ$ ). Calcolare l'energia e la lunghezza d'onda del fotone diffuso e l'energia cinetica dell'elettrone.
- 18.14** Un elettrone in un atomo isolato di idrogeno occupa il livello corrispondente a  $n = 30$ . Calcolare il raggio dell'atomo di idrogeno e l'energia di legame in questa configurazione; calcolare inoltre la lunghezza d'onda massima di un fotone per ionizzare l'atomo.

- 18.15** Il *positronio* è un sistema tipo atomo di idrogeno in cui al posto del protone c'è un *positrone* (carica  $+e$ , massa eguale a quella dell'elettrone). Usando il modello di Bohr trovare le espressioni per il raggio e l'energia di legame. Calcolare inoltre l'energia necessaria per far passare il positronio dallo stato fondamentale al primo livello eccitato.
- 18.16** Il *muone* è una particella con carica eguale a quella dell'elettrone e massa  $m_\mu = 206.8 m_e$ ; esso può essere catturato da un protone e si ha la formazione dell'*idrogeno mesico*, con il muone al posto dell'elettrone. Calcolare secondo il modello di Bohr il raggio e l'energia di legame, nonché la differenza di energia tra il livello fondamentale ed il primo livello eccitato.
- 18.17** Il protone ha un raggio medio  $r_p = 0.8 \cdot 10^{-15}$  m. Calcolare l'energia cinetica di un protone e di un elettrone la cui lunghezza d'onda di de Broglie sia  $\lambda = r_p / 10$ .
- 18.18** Un fascio di elettroni di energia cinetica  $E_k = 65$  eV viene diffratto da un cristallo, come nel caso dei raggi X; il massimo del prim'ordine viene osservato per  $\theta = 45^\circ$ . Calcolare la distanza  $d$  tra i piani del cristallo.
- 18.19** Uno spettrografo a neutroni utilizza un cristallo di berillio; la distanza tra i piani reticolari è  $d = 0.732 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare per neutroni incidenti con energia cinetica  $E_k = 4$  eV il valore dell'angolo di Bragg al prim'ordine.
- 18.20** L'indeterminazione nella posizione di un elettrone in un atomo di idrogeno non può essere maggiore del diametro  $2 r_1 = 1.058 \cdot 10^{-10}$  m. Calcolare la minima indeterminazione  $\Delta p$  della quantità di moto dell'elettrone nell'atomo e il valore dell'energia cinetica dell'elettrone se esso avesse quantità di moto  $p$  eguale a  $\Delta p$ .

# Guida alla risoluzione dei problemi di Onde.

## Risultati numerici

12.1  $\omega = 2\pi v = 62.8 \text{ rad/s}$ ,  $v_{\max} = \omega \xi_0 = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ ,  $v = E / \rho = 5189 \text{ m/s}$ ,  
 $v_{\max} / v = 2.4 \cdot 10^{-6}$ ;  
 $w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2 = 0.62 \text{ J/m}^3$  ;  $I = w v = 3.21 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$  ;  
 $P = I \Sigma = I \pi (d/2)^2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$ .

12.2  $\Delta\phi = k_1 d_1 + k_2 d_2 + k_3 d_3 = \omega \left( \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_3}{v_3} \right) = \omega \Delta t = \frac{\pi}{3}$  ,  
 $\Delta t = \pi / 3 \omega = 1/6 v = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  ;  
 $v_1 = 5092 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 1113 \text{ m/s}$ ,  $v_3 = 3536 \text{ m/s}$ ,  $\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_3}{v_3} = \Delta t$  ,  
 $d_1 + d_2 = d_3$ ,  $d_1 = 0.815 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0.385 \text{ m}$ .

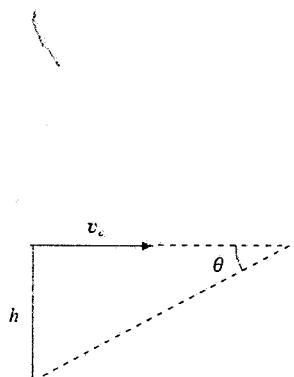
12.3  $\lambda = 2\pi v / \omega$ ,  $\lambda_1 = 1.08 \text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 4.69 \text{ m}$ ,  $\lambda_3 = 16.12 \text{ m}$  ;  
 $I = w v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v$ ,  $\xi_{01} = 3.36 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ,  $\xi_{02} = 5.8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ,  
 $\xi_{03} = 1.1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ;  $\Delta p = \rho v \omega \xi_0$ ,  $\Delta p_1 = 0.03 \text{ Pa}$ ,  $\Delta p_2 = 1.73 \text{ Pa}$  ,  
 $\Delta p_3 = 8.80 \text{ Pa}$ .

12.4  $\omega = 2\pi v = 3.14 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $v_1 = \alpha \sqrt{T_1} = 20.055 \sqrt{293} = 343 \text{ m/s}$  ,  
 $\Delta p = \rho_1 v_1 \omega \xi_0 = 1.39 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$  ,  $\Delta p = \Delta p / v_1^2 = 1.18 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3$  ;  
 $I_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 \xi_0^2 v_1 = 2.18 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$  ,  $B_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 53.4 \text{ dB}$  ;  
 $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} = \frac{T_1 \sqrt{T_2}}{T_2 \sqrt{T_1}} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} = 0.93$  ,  $B_2 = 53.1 \text{ dB}$  .

12.5  $I_2 = I_1 (r_1 / r_2)^2 = 2.24 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$  ;  
 $\Delta p_1 = \sqrt{2 \rho v I_1} = 0.70 \text{ Pa}$  ,  $\Delta p_2 = \Delta p_1 \sqrt{I_2 / I_1} = 0.14 \text{ Pa}$  ;  
 $\xi_{01} = \sqrt{2 I_1 / \rho v \omega^2} = \sqrt{I_1 / 2 \rho v \pi^2 v^2} = 1.27 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  ,  
 $\xi_{02} = \xi_{01} \sqrt{I_2 / I_1} = 2.54 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ .

12.6  $\operatorname{sen}\theta = v / v_a = 1/1.5$  ,  $\theta = 41.8^\circ$  ;  $v_a = 495 \text{ m/s}$  ,  $h = v_a t \operatorname{tg}\theta = 4868 \text{ m}$  .

12.7  $v_R = \frac{v}{v + v_s} v_0 = 1047 \text{ Hz}$  ,  $v'_R = \frac{v}{v - v_s} v_0 = 1115 \text{ Hz}$  ;  
 $v_b = v'_R - v_R = 68 \text{ Hz}$  , non avvertibile perché troppo alta.



Soluzione 12.6

13.1 Nel vetro  $k = 2 \pi / \lambda = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $\omega = k v = k c / n = 3.14 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ;  $I_y / I_z = 3$ ,  $I_y + I_z = 20 \text{ W/m}^2$ ,  $I_y = 15 \text{ W/m}^2$ ,  $I_z = 5 \text{ W/m}^2$ ,

$E_{0y} = \sqrt{2 Z_0 I_y / n} = 86.8 \text{ V/m}$ ,  $E_{0z} = E_{0y} / \sqrt{3} = 50.1 \text{ V/m}$ , pertanto  $E_y = 86.8 \cos(1.57 \cdot 10^7 x - 3.14 \cdot 10^{15} t)$ ,  $E_z = 50.1 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 3.14 \cdot 10^{15} t) \text{ V/m}$ ; nell'aria  $\lambda_0 = n \lambda = 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $k_0 = 2 \pi / \lambda_0 = k / n = \omega / c = 1.05 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$ ,  $E_{0y} = \sqrt{2 Z_0 I_y} = 106.3 \text{ V/m}$ ,  $E_{0z} = 61.4 \text{ V/m}$ .

13.2  $P = 0.8 \cdot 500 = 400 \text{ W}$ ,  $I = P / 4 \pi r^2 = 1.27 \text{ W/m}^2$ ;  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 30.9 \text{ V/m}$ ,

$$B_0 = E_0 / c = 10.3 \cdot 10^{-8} \text{ T}; F = \frac{2 I}{c} \pi a^2 = 6.65 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

13.3  $B_1 = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ ;  $I_1 = E_1^2 / 2 Z_0 = 0.53 \text{ W/m}^2$ ,  $P = I_1 r_1^2 \Delta\Omega = 42.4 \text{ kW}$ ;  $E_2 = E_1 (r_1 / r_2) = 4 \text{ V/m}$ ,  $B_2 = 1.33 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ .

13.4  $\lambda = c / v = 1.5 \text{ cm}$ ;  $\Delta U = P t = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ ;  $I = P / \pi R^2 = 7.96 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$ ;  $u = I / c = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^3$ ;  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 2.45 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ ,  $B_0 = 8.17 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ ;  $F = 2 P / c = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ .

13.5  $I = E_0^2 / 2 Z_0 = 2.1 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$ ,  $P = I \pi R^2 = 3.75 \cdot 10^{-14} \text{ W}$ ,  $F = P / c = 1.25 \cdot 10^{-22} \text{ N}$ .

13.6  $E_\gamma = h\nu = 6.63 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 4.14 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$ ;  $N_\gamma = P / E_\gamma = 4.5 \cdot 10^{29} \text{ fotoni/s}$ ;  $I_{\min} = E_0^2 / 2 Z_0 = 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $n_{\min} = I_{\min} / E_\gamma = 5 \cdot 10^{19} \text{ fotoni/m}^2 \text{ s}$ ;  $P = 4 \pi r^2 I_{\min}$ ,  $r = 26.9 \text{ km}$ ;  $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 0.842 \text{ sr}$ ,  $P = r^2 \Delta\Omega I_{\min}$ ,  $r = 104 \text{ km}$ .

13.7  $E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 12.3 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ ;  $\Delta\nu = 1/\Delta t = 10^3 \text{ Hz}$ , in modulo  $\Delta\lambda / \lambda = \Delta\nu / v$ ,  $\Delta\lambda = \lambda^2 \Delta\nu / c = 1.6 \cdot 10^{-12} \mu\text{m}$ ;  $u = I / c = 6.67 \cdot 10^{-4} \text{ J/m}^3$ ;  $E_\gamma = h c / \lambda = 2.86 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1.79 \text{ eV}$ ;  $N_\gamma = I / E_\gamma = 0.7 \cdot 10^{18} \text{ fotoni/mm}^2 \text{ s}$ .

13.8  $m \Delta v = F \Delta t$ ,  $F = F_{\text{rad}} = P / c$ ,  $\Delta v = P \Delta t / mc = 1.92 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$ .

13.9  $F_{\text{rad}} = p_{\text{rad}} \pi a^2 = (P / 4 \pi r^2 c) \pi a^2$ ,  $F_g = \gamma \frac{M}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi a^3$ , da  $F_{\text{rad}} \geq F_g$   
 $a \leq a_0 = 3 P / 16 \pi \gamma c \rho M = 0.22 \mu\text{m}$ .

13.10  $P = e^2 z_0^2 \omega^4 / 12 \pi \epsilon_0 c^3 = 2.84 \cdot 10^{-74} \omega^4$ ;  $\omega = 2 \pi v = 2 \pi c / \lambda = 3.43 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ,  $P = 3.93 \cdot 10^{-12} \text{ W}$ .

13.11  $n - 1 = C / (\omega_3^2 - \omega_1^2)$  con  $c = N e^2 / 2 \epsilon_0 m_e$ ;  $\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_3^2 - \omega_1^2}$ ,

$\omega_3 = 21.6 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ;  $C = 6.37 \cdot 10^{28} \text{ rad}^2 / \text{s}^2$ ,  $N = 4.0 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$  (dall'equazione di stato dei gas ideali si otterebbe  $N = 2.7 \cdot 10^{25}$ );

$$\frac{n'_1 - 1}{n_1 - 1} = \frac{N}{N} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{p' T}{p T} = 10 \frac{273}{313} = 8.72, \quad n'_1 - 1 = 12.2 \cdot 10^{-4};$$

$$A = 1 + 1.36 \cdot 10^{-4}, \quad B = 1.21 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}^2.$$

13.12  $\omega_1 = 9.43 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 12.57 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_p = \sqrt{N e^2 / \epsilon_0 m_e} = 1.26 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$ .

molto minore di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ : quindi  $v_g = c / \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c / \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$ ;

$$\Delta t = \frac{d}{v_{g1}} - \frac{d}{v_{g2}} = \frac{d}{c} \cdot \frac{\omega_p^2}{2} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = \frac{d}{c} \cdot \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = 1.25 \text{ s},$$

$d/c = 3.196 \cdot 10^{10} \text{ s} \approx 1013 \text{ anni}$ ,  $d = 1013 \text{ anni-luce}$ ;  
 $Nd = N d$ ,  $N = 3.38 \cdot 10^4 \text{ elettroni/m}^3$ .

- 13.13 Si misura una  $\lambda$  minore di quella emessa dalla sorgente e quindi l'osservatore si sta avvicinando alla sorgente; da

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c} \lambda_0 \text{ con } \lambda = \lambda_v \text{ e } \lambda_0 = \lambda_R \text{ si ricava } \frac{v}{c} = \frac{1-(\lambda_v/\lambda_R)^2}{1+(\lambda_v/\lambda_R)^2}.$$

$v/c = 0.18$ ,  $v = 0.54 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

- 13.14 Supponendo che si tratti di battimenti di intensità  $v_b = \left(1 + \frac{v}{c}\right)v_0 - v_0 = \frac{v}{c}v_0$ ;

$v$  è la velocità dell'aereo e si è trascurato  $v^2/c^2$  rispetto a 1;

$v_0 = c/\lambda_0 = 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ ,  $v = 99 \text{ m/s} = 356 \text{ km/ora}$ .

- 14.1  $\theta$  è l'angolo limite,  $\sin\theta = 1/n$ ,  $\theta = 48.6^\circ$ ;  $d_{\min} = 2h \tan\theta = 6.8 \text{ m}$ .

- 14.2  $\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n}$ ,  $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \cos\theta'$  deve essere maggiore di  $\frac{1}{n}$ :

$$\sqrt{1 - \sin^2\theta'} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} > \frac{1}{n}, \quad \sin\theta < \sqrt{n^2 - 1} = 1.09, \text{ relazione}$$

sempre soddisfatta per cui  $\theta$  può essere qualunque; se  $n = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{n^2 - 1} = 1$ , con  $n < \sqrt{2}$  c'è un angolo di incidenza  $\theta_{\max}$  oltre il quale nella lastra non si verifica riflessione totale.

- 14.3  $\sin\theta_0 / \sin\theta = n$ ,  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$  con  $\Delta\theta \ll \theta_0$ ,  $\sin\theta = \sin(\theta_0 + \Delta\theta) =$

$$\sin\theta_0 \cos\Delta\theta + \cos\theta_0 \sin\Delta\theta = \sin\theta_0 + \Delta\theta \cos\theta_0, \quad \Delta\theta = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\cos\theta_0} =$$

$$\frac{1-n}{n} \tan\theta_0 = -2.8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = -0.016 \text{ gradi} \approx -1', \text{ misurabile.}$$

- 14.4  $\sin\theta_0 = 1/n$ ,  $n = 1.77$ ,  $\tan\theta_B = n$ ,  $\theta_B = 60.53^\circ$ :  $\sin\theta_0 = \cot\theta_B$ .

- 14.5  $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 0.04$ ,  $T = 1-R = 0.96$  e per ogni lastra che ha due facce,

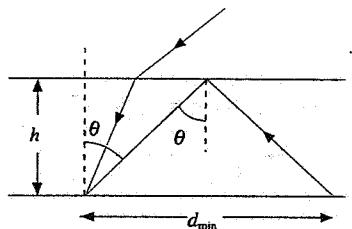
$$I_{i+1}/I_i = 0.96^2 = 0.92 : 0.92^N = 0.7, \quad N \approx 4, \quad 0.92^N = 0.4, \quad N \approx 11.$$

- 14.6  $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 7.15 \cdot 10^{-2}$ ,  $T = 1-R$ ,  $T_1 = T^2 = 0.862$ :

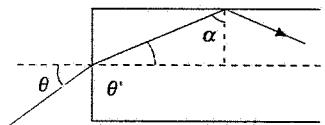
$$T_2 = \frac{T_1}{1-R^2} = 0.866 \text{ (vedi esempio 14.4); } e = e^{-d/l_{\text{las}}} = 0.951,$$

$$T'_1 = \varepsilon T_1 = 0.820, \quad T'_2 = T_1 \varepsilon / (1 - \varepsilon^2 R^2) = 0.824.$$

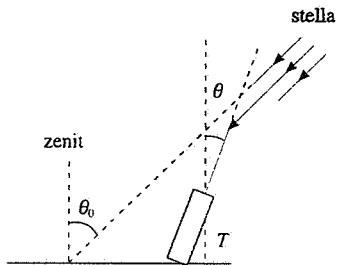
- 14.7  $\sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \sin\alpha$ ,  $\alpha = \theta_0 = 30^\circ$ ;  
 $\theta_1 = 24.62^\circ$ ,  $\theta_2 = 19.47^\circ$ ,  $d = h_1 \tan\theta_1 + h_2 \tan\theta_2 = 0.79 \text{ cm}$ ;



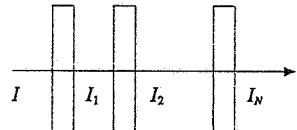
Soluzione 14.1



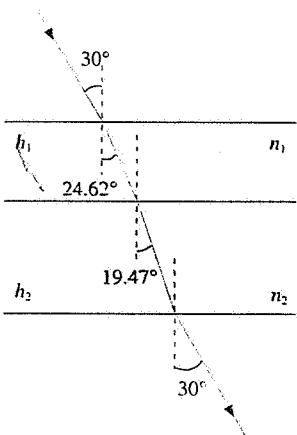
Soluzione 14.2



Soluzione 14.3



Soluzione 14.5



Soluzione 14.7

$\theta_0$  può assumere qualsiasi valore tra zero e  $\pi/2$ , non si ha mai riflessione totale nella seconda lastra;

utilizzando le formule per  $R_\pi$  e  $R_\sigma$  nei tre cambiamenti di mezzo si trova  $R_{\pi 1} = 4.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\pi 2} = 8.7 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\pi 3} = 25.3 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 1} = 13.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 2} = 16.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_{\sigma 3} = 57.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $W_t = [(1 - R_{\pi 1})(1 - R_{\pi 2})(1 - R_{\pi 3}) \cos^2 \beta + (1 - R_{\sigma 1})(1 - R_{\sigma 2})(1 - R_{\sigma 3}) \sin^2 \beta] W = 0.926 W = 9.26 \mu W$ .

$$14.8 \quad I_n = \frac{I}{2} \left[ \cos^2 \left( \frac{90^\circ}{n-1} \right) \right]^{n-1} : n=3 \quad I_3 = 0.125 I, \quad n=4 \quad I_4 = 0.211 I, \quad n=7$$

$I_7 = 0.330 I$ ; per  $n$  grande il coseno tende a 1 e  $I_n$  a  $0.5 I$ .

$$14.9 \quad I = I_{\max} \cos^2 \alpha + I_{\min} \sin^2 \alpha; \text{ dall'espressione di } P \text{ si ricava } I_{\min} \text{ in funzione di } P \text{ e}$$

$$I_{\max}, \text{ si sostituisce e si trova } I = \frac{I_{\max}}{1+P} (1+P \cos 2\alpha).$$

$$14.10 \quad \begin{aligned} &\text{Condizioni di Brewster, } n = \operatorname{tg} \theta = 1.732; \quad \theta_i = 90^\circ - \theta = 30^\circ, \quad r_\pi = 0, \quad r_\sigma = -0.5, \\ &t_\pi = 0.577, \quad t_\sigma = 0.5, \quad I_0 = R_\sigma I_\sigma^i = 0.5 r_\sigma^2 I = 12.5 \text{ W/m}^2; \\ &I_r = 0.5 n I (t_\pi^2 + t_\sigma^2) = 50.5 \text{ W/m}^2; \\ &E_{0i} = \sqrt{2 Z_0 I} = 274.6 \text{ V/m}, \quad E_{0r} = \sqrt{2 Z_0 I_0} = 97.1 \text{ V/m}, \\ &E_{0i} = \sqrt{2 Z_0 I_r / n} = 148.3 \text{ V/m}, \quad B_{0i} = E_{0i} / c = 9.16 \cdot 10^{-7} \text{ T}, \\ &B_{0r} = E_{0r} / c = 3.24 \cdot 10^{-7} \text{ T}, \quad B_{0r} = E_{0r} n / c = 8.57 \cdot 10^{-7} \text{ T}. \end{aligned}$$

$$14.11 \quad \begin{aligned} &\operatorname{sen} \theta_r = \operatorname{sen} \theta / n, \quad \theta_r = 24.1^\circ, \quad r_\pi = 0.146, \quad r_\sigma = -0.382, \quad W_r = (R_\pi \cos^2 \beta + R_\sigma \sin^2 \beta) \\ &W = 1.67 \text{ W}; \quad \operatorname{tg} \beta_r = E'_\sigma / E'_\pi = (r_\sigma / r_\pi) \operatorname{tg} \beta, \quad \beta_r = -56.5^\circ, \text{ polarizzazione rettilinea ad angolo } \beta_r \text{ rispetto al piano di incidenza}; \\ &W_p(\alpha) = W_r \cos^2(\alpha - \beta_r) = 1.67 \cos^2(\alpha + 56.5^\circ) \text{ W}; \quad \theta = 60^\circ \text{ condizioni di Brewster, } r_\pi = 0, r_\sigma = -0.5, W_r = R_\sigma \sin^2 \beta \quad W = 3.75 \text{ W, polarizzazione rettilinea nel piano } \sigma; \\ &W_p(\alpha) = W_r \cos^2 \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = W_r \sin^2 \alpha = 3.75 \sin^2 \alpha \text{ W.} \end{aligned}$$

$$14.12 \quad \begin{aligned} &\operatorname{sen} \theta_r = \operatorname{sen} \theta / n, \quad \theta_r = 41^\circ, \quad r_\pi = -0.487, \quad r_\sigma = -0.734, \quad t_\pi = 0.342, \quad t_\sigma = 0.266, \\ &W_r = 0.5(R_\pi + R_\sigma)W = 0.388 \text{ W}, \quad W_r = 0.612 \text{ W}; \text{ polarizzazione ellittica in entrambi i casi, con rapporto dei semiassi } r_\pi / r_\sigma = 0.633, \quad t_\pi / t_\sigma = 1.286; \\ &W_p(\alpha) = 0.5(R_\pi \cos^2 \alpha + R_\sigma \sin^2 \alpha)W = 0.199 \cos^2 \alpha + 0.269 \sin^2 \alpha \text{ W.} \end{aligned}$$

$$14.13 \quad \begin{aligned} &\operatorname{sen} \theta_s = \operatorname{sen} \theta / n_s, \quad \theta_s = 26.23^\circ, \quad \operatorname{sen} \theta_o = \operatorname{sen} \theta / n_o, \quad \theta_o = 30.34^\circ, \quad h = d (\operatorname{tg} \theta_o - \operatorname{tg} \theta_s) \\ &\cos \theta = 0.52 \cdot 10^{-3} \text{ m; differenza di cammino ottico } x = h \operatorname{tg} \theta + d n_s / \cos \theta_s + d n_o / \cos \theta_o = 1.81 \cdot 10^{-3} \text{ m, } \Delta \phi = 2 \pi x / \lambda = 3016.7 \cdot 2 \pi \text{ equivalente a } 0.7 \cdot 2 \pi = 4.4 \text{ rad, polarizzazione ellittica.} \end{aligned}$$

$$14.14 \quad \begin{aligned} &\text{L'angolo limite nel passaggio della calcite all'aria è } 42.28^\circ \text{ per l'onda straordinaria, } 37.08^\circ \text{ per l'onda ordinaria; essendo l'angolo di incidenza sulla faccia obliqua } \beta = 40^\circ \text{ l'onda ordinaria è totalmente riflessa; } n_s \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \theta_s, \quad \theta_s = 72.83^\circ, \text{ l'onda straordinaria esce a } 32.83^\circ \text{ rispetto alla direzione primaria di incidenza; alla prima superficie } R_{s1} = (1 - n_s)^2 / (1 + n_s)^2 = 0.038, \text{ alla seconda } R_{s2} = \operatorname{sen}^2(\beta - \theta_s) / \operatorname{sen}^2(\beta + \theta_s) = 0.346, \\ &W_r = 0.5 W (1 - R_{s1})(1 - R_{s2}) = 2.52 \text{ W; l'onda straordinaria è polarizzata parallelamente all'asse ottico del prisma. } W_p(\alpha) = W_r \operatorname{sen}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$14.15 \quad \begin{aligned} &\text{Nel passaggio dal primo al secondo cuneo l'onda ordinaria diventa straordinaria e viceversa, per cui } \Delta \phi = (k_s - k_o)x_1 - (k_s - k_o)x_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_o) \Delta x; \\ &\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_o) \Delta x, \quad \Delta x = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0151 \text{ mm, } x_1 = 2.0151 \text{ mm;} \end{aligned}$$

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda_2} (n_s - n_o) \Delta x, \Delta x = 3.30 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.0330 \text{ mm}, x_1 = 2.0330 \text{ mm}.$$

- 14.16  $I_y = 10 \text{ W/m}^2 = I/5, I_z = 40 \text{ W/m}^2, E_0 = \sqrt{2 Z_0 I_y} = 86.8 \text{ V/m}, t_{s1} = 2 / (1 + n_s) = 0.784, t_{o1} = 2 / (1 + n_o) = 0.800, E_y = t_{s1} E_0 \sin(k_s x - \omega t), E_z = 2 t_{o1} E_0 \sin(k_o x - \omega t);$

$$I_{t1} = \frac{n_s}{2Z_0} (t_{s1} E_0)^2 + \frac{n_o}{2Z_0} (2 t_{o1} E_0)^2 = \frac{E_0^2}{2Z_0} (n_s t_{s1}^2 + 4 n_o t_{o1}^2) = I_y (n_s t_{s1}^2 + 4 n_o t_{o1}^2)$$

$$= 47.93 \text{ W/m}^2; t_{s2} = 2 n_s / (1 + n_s) = 1.215, t_{o2} = 1.2, E_y = t_{s2} t_{s1} \sin(kx - \omega t),$$

$$E_z = 2 t_{o2} t_{o1} \sin(kx - \omega t + \phi); \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d = \pi/2, \text{ polarizzazione ellittica con}$$

rapporto dei semiassi  $t_{s1} t_{s2} / t_{o1} t_{o2} = 0.496; I_C = I_y (t_{s1}^2 t_{s2}^2 + 4 t_{o1}^2 t_{o2}^2) = 45.95 \text{ W/m}^2$ ; la differenza rispetto a  $I$  è dovuta esclusivamente alle riflessioni.

- 14.17  $\Delta n = 0.172, d = \lambda/4 \Delta n = 0.87 \mu\text{m}; \text{ polarizzazione rettilinea, tra } \mathbf{E} \text{ e l'asse } y \text{ c'è l'angolo } \beta = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ; I_p = I \cos^2(80^\circ - 60^\circ) = 353 \text{ W/m}^2.$

- 14.18  $\Delta n = 9.1 \cdot 10^{-3}, \text{ la lamina deve essere mezz'onda o onda intera, } \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = m\pi,$

$\lambda = 10.92/m \mu\text{m}, m = 16 \lambda = 0.683 \mu\text{m}, m = 17 \lambda = 0.642 \mu\text{m}, m = 18 \lambda = 0.607 \mu\text{m}; \text{ solo per } m = 17 \text{ il piano di polarizzazione della luce trasmessa da } P_1 \text{ viene ruotato di } 90^\circ, \text{ quindi solo } \lambda = 0.642 \mu\text{m è trasmessa da } P_2.$

- 14.19  $\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = m\pi \text{ con } \Delta n = 0.172, \lambda = 6.884/m \mu\text{m}: m = 14 \lambda = 0.492 \mu\text{m},$

$m = 15 \lambda = 0.459 \mu\text{m}, m = 16 \lambda = 0.430 \mu\text{m}, m = 17 \lambda = 0.405 \mu\text{m}; \text{ la prima e la terza conservano il verso di rotazione, la seconda e la quarta lo invertono;}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_2 \Delta n = (2m+1) \frac{\pi}{2}, \lambda = 20.64/(2m+1) \mu\text{m}. \text{ soddisfatta da } \lambda = 0.459 \mu\text{m} (m = 22), \lambda = 0.405 \mu\text{m} (m = 25).$$

- 14.20  $I_1 = \frac{1}{2Z_0} - 3 E_0^2 = I_y, I_z = I_y / 3, I = I_y + I_z = \frac{4}{3} I_1 = 12 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2;$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n, I_2 = I_1 \text{ se } \Delta\phi = 2m\pi, \text{ soddisfatta per } m = 2, \lambda = 0.4 \mu\text{m}.$$

$I_2 = 0.5 I_1 \text{ se } \Delta\phi = (2m+1)\pi/2, \text{ soddisfatta per } m = 3, \lambda = 0.457 \mu\text{m}, I_2 = 0 \text{ se } \Delta\phi = (2m+1)\pi, \text{ soddisfatta per } m = 1, \lambda = 0.533 \mu\text{m}.$

- 14.21  $\Delta\phi = 2\pi d \Delta n / \lambda \text{ con } \Delta n = 9.1 \cdot 10^{-3}; \text{ per } \lambda_1, \Delta\phi = \pi/2, \text{ la lamina è quarto d'onda e la luce esce polarizzata circolarmente; per } \lambda_2, \Delta\phi = \pi, \text{ la lamina è mezz'onda e la luce esce polarizzata rettilineamente lungo } z; \text{ nel prisma } \lambda_1 \text{ è ancora polarizzata circolarmente dopo l'attraversamento della prima superficie e incide sulla seconda in condizioni di Brewster, in quanto } \tan 32^\circ = 1/n, \text{ per cui certamente dopo la trasmissione la polarizzazione è ellittica; } \lambda_2 \text{ invece conserva la polarizzazione rettilinea lungo } z;$

$$W_{t1} = (1 - R_1)(1 - R_\sigma) \frac{W_1}{2} + (1 - R_1) \frac{W_1}{2} = (1 - R_1)(2 - R_\sigma) \frac{W_1}{2} \text{ con } R_1 = (1 - n)^2$$

$$/ (1+n)^2 = 0.053, R_\sigma = \sin^2(32^\circ - 58^\circ) = 0.192 \text{ in quanto } n \sin\alpha = \sin\theta, \theta_i = 58^\circ, W_{t1} = 4.28 \text{ W; } W_{t2} = (1 - R_1)(1 - R_\sigma) W_2 = 1.91 \text{ W.}$$

15.1  $r_1 = r_2 \approx r$ ,  $I_1 = 4I$ ,  $\xi_1 = \xi_{p1}/2 = 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ;  $I = 1/2 \rho v \omega^2 \xi_1^2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $W = 4\pi r^2 I = 3.14 \cdot 10^{-5} \text{ W}$ ;  $\Delta p_1 = \rho v \omega \xi_{p1} = 1.87 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ ; dato che  $\lambda = 0.5 \text{ m}$ ,  $d = \lambda/4$ ,  $\phi = \pi/2$ ,  $\cos\phi = 0$  e in  $P_2$   $I_2 = 2I_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ,  $\xi_{p2} = \xi_{p1}/\sqrt{2} = 0.707 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ,  $\Delta p_2 = \Delta p_1/\sqrt{2} = 1.32 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ .

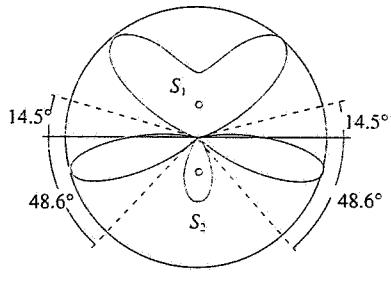
15.2  $k(D+2d) - kD = \pi$ ,  $d = \lambda/4 = c/4v = 75 \text{ m}$ ;  $I_1 = W/4\pi D^2 = 9.95 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $E_1 = \sqrt{2Z_0 I_1} = 8.66 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ ,  $E_r = 0.9 E_1$ ,  $E = E_1 - E_r = 0.1 E_1 = 8.66 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$ .

15.3  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \sin\theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $I = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}$

$$\max \delta = 2m\pi, \sin\theta_{\max} = m - \frac{1}{4}, m=0 \quad \theta_{\max} = -14.5^\circ, m=1 \quad \theta_{\max} = 48.6^\circ;$$

$$\min \delta = (2m+1)\pi, \sin\theta_{\min} = m + \frac{1}{4}, m=0 \quad \theta_{\min} = 14.5^\circ, m=-1$$

$\theta_{\min} = -48.6^\circ$ : il diagramma è mostrato in figura: tracciandolo si trova anche un massimo secondario a  $\theta = -90^\circ$ ;  $I_1 = W/4\pi D^2 = 7.96 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ,  $E_1 = 7.75 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ ,  $E_{\max} = 2E_1 = 0.155 \text{ V/m}$ .



Soluzione 15.3

15.4 Posizioni dei massimi  $y = m \lambda L / d$ , densità  $N = d / \lambda L$ ,  $\lambda_2 / \lambda_1 = N_1 / N_2$ ,  $\lambda_2 = 0.393 \mu\text{m}$ ; nell'acqua la lunghezza d'onda è  $\lambda / n$ ,  $N_1 = n N_1 = 16.6 \text{ frange/cm}$ ,  $N_2 = n N_2 = 23.3 \text{ frange/cm}$ .

15.5  $y = m \lambda L / d$ ,  $\Delta y = 5L(\lambda_2 - \lambda_1) / d = 0.14 \text{ mm}$ ;  $m_1 \lambda_1 = m_2 \lambda_2$ ,  $m_1 / m_2 = 1.25$ ,  $m_1 = 5$ ,  $m_2 = 4$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 8, \dots$ ;  $(n-1)d = 7\lambda_1$ ,  $d = 5.79 \mu\text{m}$ ;  $(n-1)d = N\lambda_2$ ,  $N = 5.6 \text{ frange}$ .

15.6  $I(\theta) = I_0 \cos^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{I_0}{2}$ ,  $\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$ ,  $d = 2\lambda = 10 \text{ cm}$ :

$$I_1 = \frac{I_0}{4} = 2.5 \text{ W/m}^2, E_1 = 43.4 \text{ V/m}, B_1 = 1.45 \cdot 10^{-7} \text{ T}; I = 2I_1 = 5 \text{ W/m}^2 \text{ in tutta la zona centrale dello schermo.}$$

15.7  $(n_s - 1)d = N_s \lambda$ ,  $(n_o - 1)d = N_o \lambda$ ,  $d = (N_o - N_s) \lambda / (n_o - n_s) = 14.5 \mu\text{m}$ .

15.8  $I(\theta) = I_1 + 4I_1 \cos\delta$ ,  $I_{\max} = 9I_1$ ,  $I(\theta) = \frac{I_{\max}}{9} \left( 1 + 8 \cos^2 \frac{\delta}{2} \right) = \frac{I_{\max}}{9} \left( 1 + 8 \cos^2 \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} \right)$ .

15.9  $d \sin\theta = \lambda/2$ ,  $\sin\theta \approx \theta = y/L$ ,  $y = \lambda L / 2d = 81.6 \mu\text{m}$ ;  $N = 1/2y = d/\lambda L = 6.13 \text{ frange/mm}$ .

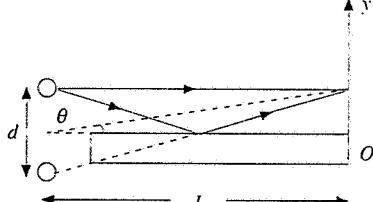


Figura 15.9

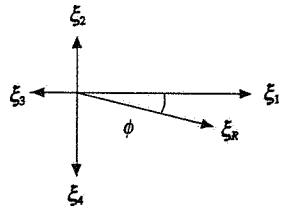
15.10  $n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2}$ , numero di molecole per unità di volume  $N = p/k_B T$ ,

$$n = 1 + ap; [n(p_1) - 1]d = m_1 \lambda, [n(p_2) - 1]d = m_2 \lambda, [n(p_2) - n(p_1)]d = a(p_2 - p_1)d = (m_2 - m_1)\lambda = M\lambda, a = M\lambda / (p_2 - p_1)d = 2.91 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}, n = 1 + 2.91 \cdot 10^{-9} \cdot 1.013 \cdot 10^5 = 1.000295; \Delta p = (p_2 - p_1)/M = 1014 \text{ Pa}$$

**15.11** Col metodo dei vettori rotanti  $\xi_R = \xi_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.768 \xi_0$ .

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1/3 - 1/2}{1 - 1/4} = -0.222, \quad \phi = -0.219 \text{ rad} = -12.5^\circ,$$

$$\xi = 0.768 \xi_0 \cos(kx - \omega t - 0.219); \quad I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 (0.768 \xi_0)^2 = 8.17 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2, \\ B = 9.1 \text{ dB}.$$



**Soluzione 15.11**

**15.12**  $\operatorname{sen} \theta = m \lambda / d, \quad m = 1 \quad \lambda / d = \operatorname{sen} 11.53^\circ = 0.2, \quad \lambda = v / \nu = 0.5 \text{ m}, \quad d = 2.5 \text{ m},$   
 $\operatorname{sen}(\Delta\theta/2) = \lambda / Nd, \quad N = 5; \quad L = (N-1)d = 10 \text{ m}; \quad W_1 = 100 \text{ W},$   
 $I_1 = W_1 / 4\pi r^2 = 3.18 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2, \quad I_M = 25 I_1 = 7.96 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2,$

$$B = 79 \text{ dB}; \quad I_1 = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \frac{\xi_0^2}{r^2}, \quad \xi_0 = 4.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}; \quad \Delta p = \sqrt{2 \rho v I_M} = 0.266 \text{ Pa}.$$

**15.13**  $\operatorname{sen} \theta = \lambda / d > 1, \quad d < \lambda; \quad \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta + \phi = 0 \text{ con } d = \lambda/2 \text{ e } \theta = 90^\circ,$

$$\phi = -\pi; \quad \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta - \frac{\pi}{2} = 2m\pi, \quad \operatorname{sen} \theta = 2m + \frac{1}{2}, \quad m = 0, \quad \theta = 30^\circ,$$

un solo massimo.

**15.14**  $\operatorname{sen} \theta_1 = (2m+1) \frac{\lambda_1}{2Nd} = \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{\lambda_2}{d} \text{ con } m = N+2, \quad \frac{\lambda_1}{d} + \frac{5\lambda_1}{2Nd} = \frac{\lambda_2}{d},$

$$N = \frac{5\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5\nu_2}{2(\nu_1 - \nu_2)} = 10; \quad \frac{I_2}{I_{\max}} = \frac{1}{N^2} \frac{1}{\left[\operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{2N}\right]^2} = 0.02,$$

$$\frac{E_2}{E_{\max}} = \sqrt{0.02} = 0.14.$$

**15.15**  $\frac{m \lambda_2}{2n} = (2m-1) \frac{\lambda_1}{4n}, \quad m = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 2, \quad d = \frac{2\lambda_2}{2n} = 0.27 \mu\text{m} = \frac{3\lambda_1}{4n};$

$R = (1-n)^2 / (1+n)^2 = 0.028$ : per  $\lambda_1$  è riflessa la percentuale  $4R = 0.112$  ed è trasmessa la percentuale 0.888, per  $\lambda_2$  si ha solo trasmissione.

**15.16** min  $\lambda = \frac{2nd}{m} = \frac{1.2}{m} \mu\text{m}, \quad m = 2 \quad \lambda = 0.6 \mu\text{m}, \quad m = 3 \quad \lambda = 0.4 \mu\text{m},$

$$\max \lambda = \frac{4nd}{2m+1} = \frac{2.4}{2m+1} \mu\text{m}, \quad m = 2 \quad \lambda = 0.48 \mu\text{m};$$

$$R = 0.04, \quad \frac{I_r}{I} = 4R \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi n d}{\lambda} = 0.16 \operatorname{sen}^2 \frac{3.77}{\lambda} \text{ con } \lambda \text{ in } \mu\text{m}.$$

**15.17** Cuneo d'aria.  $n = 1, \quad \alpha = d/L, \quad x_{\max} = (2m+1) \lambda L / 4d = (2m+1) 0.425 \text{ mm},$   
 $x_{\min} = m \lambda L / 2d = m 0.850 \text{ mm}; \text{ distanza tra due frange dello stesso tipo } \lambda L / 2d = 0.850 \text{ mm, densità } N = 2d / \lambda L = 1.176 \text{ frange/mm; numero di frange scure } L / 0.850 = 141, \text{ numero di frange chiare } 140.$

**15.18** Le riflessioni avvengono nelle stesse condizioni,  $r_{\max} = \sqrt{m \lambda R / n}, \quad (d_2/d_1)^2 = (m+1)/m, \quad m = 6, \quad n = 6 \lambda R / r_1^2 = 1.332, \quad n = 7 \lambda R / r_2^2 = 1.331,$   
 $\Delta n/n = 7.5 \cdot 10^{-4}; \quad D/2 = \sqrt{N \lambda R / n}, \quad N = 102.4, \quad 102 \text{ anelli chiari.}$

15.19  $n_2 = \sqrt{n_1} = 1.327$ ;  $d = \lambda_G / 4$ ;  $n_2 = 0.104 \mu\text{m}$ ;  $r_1 = r_2 = -0.140$ ,  $R = 0.0197$ ,

$$T = 1 - 4R \cos^2 \frac{2\pi n_2 d}{\lambda} = 1 - 0.079 \cos^2 \frac{0.867}{\lambda} \text{ con } \lambda \text{ in } \mu\text{m}, T_R = 0.992,$$

$$T_V = 0.975; R = (1 - n_1)^2 / (1 + n_1)^2 = 0.076, T = 1 - R = 0.924.$$

15.20  $2\Delta x = N_1 \lambda$ ,  $\lambda = 0.546 \mu\text{m}$ ;  $(n-1)2d = N_2 \lambda$ ,  $n = 1.00154$ .

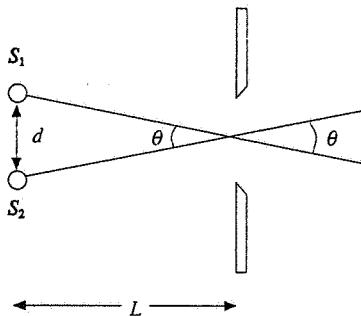
15.21  $\rho_l = \rho \pi r^2 = 2.83 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}$ ,  $v = \sqrt{T/\rho_l} = 188 \text{ m/s}$ ,  $v = v/2L = 117.5 \text{ Hz}$ ,  $\lambda = 2L = 1.6 \text{ m}$ ;  $v' = v\sqrt{2} = 166.2 \text{ Hz}$ ,  $v' = v/\sqrt{2} = 83.1 \text{ Hz}$ ,  $v' = v/2 = 58.8 \text{ Hz}$ ,  $v' = v/2$ .

15.22  $k = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\lambda = 2\pi/k = 31.4 \text{ cm}$ ,  $\omega = 300 \text{ rad/s}$ ,  $v = 47.75 \text{ Hz}$ ,  $v = \omega/k = \lambda v = 15 \text{ m/s}$ ,  $L = 4\lambda/2 = 2\lambda = 62.8 \text{ cm}$ .

15.23 Se la canna è aperta deve essere  $n\lambda_1/2 = (n+1)\lambda_2/2$ ,  $n = 7/2$ , il che non è possibile; se la canna è chiusa deve essere  $(2n+1)\lambda_1 = (2n+3)\lambda_2$ ,  $n = 3$ : la canna è chiusa;  $L = 7\lambda_1/4 = 63 \text{ cm}$ ;  $v = 20.05\sqrt{300} = 347.3 \text{ m/s}$ ,  $v_0 = v/4L = 137.8 \text{ Hz}$ .

15.24  $v_b = \Delta\nu = 1/\tau = 0.5 \text{ Hz}$ ,  $v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ ,  $\frac{\Delta\nu}{v} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T}$ ,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2v_b}{v} = \frac{1}{v}: v_1 = 400 \text{ Hz}, \Delta T/T = 2.5 \cdot 10^{-3}, v_2 = 1000 \text{ Hz}, \Delta T/T = 10^{-3}.$$



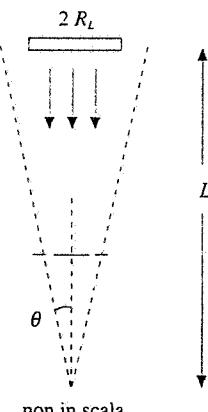
### Soluzione 16.1

16.1  $\lambda = c/v = 4 \text{ cm}$ ,  $\lambda/a = 2/3$ ,  $\frac{l}{I_0} = \left[ \frac{\sin \frac{3}{2}\pi \sin \theta}{\frac{3}{2}\pi \sin \theta} \right]^2$ ;  $\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{a}$ ,

$$\theta_{\min} = 41.8^\circ; \frac{I(\theta_{\min})}{I_0} = 0.35; \text{ per risolvere a grande distanza } \sin \theta = \frac{\lambda}{a}, \text{ inoltre}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d}{2L}, L = 26.2 \text{ cm}.$$

16.2  $f\theta = \Delta y/2$ ,  $\theta = \lambda/a$ ,  $a = 2f\lambda/\Delta y = 0.1 \text{ mm}$ ;  $a \sin \theta = \lambda_1 = 3/2 \lambda_2$ , la banda di minimo ( $0.6 \mu\text{m} \leq \lambda_1 \leq 0.7 \mu\text{m}$ ) è sovrapposta alla banda di primo massimo secondario ( $0.4 \mu\text{m} \leq \lambda_2 \leq 0.467 \mu\text{m}$ );  $\Delta y_s = f\Delta\lambda_1/a = 0.8 \text{ mm}$ .



### Soluzione 16.6

16.3  $\lambda_1 = v/v_1 = 5.8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \ll D$ ,  $\sin \theta \approx \tan \theta = 1.22 \lambda_1/D$ ,  $d = 2L \theta = 56.6 \text{ m}$ ; se non si utilizzasse l'approssimazione si troverebbe  $d = 57.0 \text{ m}$ ;  $\lambda_2 = v/v_2 = 0.41 \text{ m}$ ,  $1.22 \lambda_2/D = 1$ ,  $\sin \theta = 1$ ,  $\theta = \pi/2$ : è interessato tutto il fondo marino, in linea di principio.

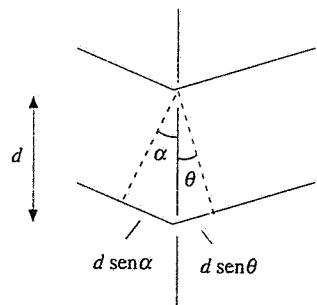
16.4  $d_1 = 2f_1 \cdot 1.22 \lambda_1/D_1 = 4.17 \mu\text{m}$ ,  $d_2 = 13.91 \mu\text{m}$ .

16.5  $\lambda = c/v = 3 \text{ cm}$ ,  $\sin \theta \approx \theta = 1.22 \lambda/D = 0.061$ ,  $d = 2L \theta = 61 \text{ cm}$ .

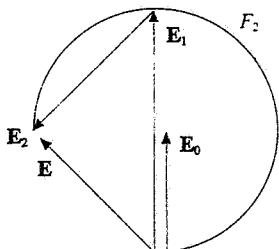
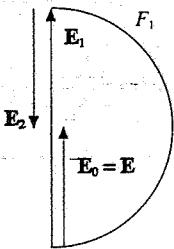
16.6 L'anello rossastro si forma in corrispondenza del minimo di diffrazione per la luce blu-viola con  $\lambda_B = 0.45 \mu\text{m}$ : esso è visto sotto l'angolo  $\theta = 1.22 \lambda_B/D = 1.5 R_L/L = 6.79 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ ,  $D \approx 81 \mu\text{m}$ ; con  $\lambda_R = 0.65 \mu\text{m}$ ,  $D_R = D \lambda_R/\lambda_B = 1.44 D$ , circa due volte il diametro lunare.

16.7  $\alpha_R = 1.22 \lambda/d_1 = h_1/L$ ,  $h_1 = 46.4 \text{ km}$ ; con  $d_2 = 5 \text{ m}$   $h_2 = 46.4 \text{ m}$ .

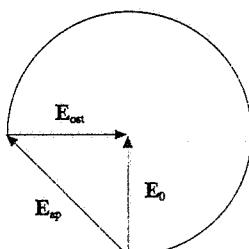
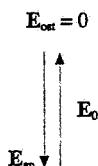
- 16.8**  $\alpha_1 = 1.22 \lambda_c / D_1 = 2.68 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 D_1 / D_2 = 2.24 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ ;  
 $N_1 = 1/f \alpha_1 = 746 \text{ righe/mm}$ ,  $N_2 = 1/f \alpha_2 = 90 \text{ righe/mm}$ ;  
per la luce blu  $\alpha_1 = 1.95 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_2 = 1.63 \cdot 10^{-4}$ ,  $N_1 = 1026$ ,  $N_2 = 124$ ;  
per la luce rossa  $\alpha_1 = 3.31 \cdot 10^{-5}$ ,  $\alpha_2 = 2.77 \cdot 10^{-4}$ ,  $N_1 = 603$ ,  $N_2 = 73$ .
- 16.9**  $a/d = 1/5$ , il quinto massimo coincide col primo minimo di diffrazione, quindi  
 $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ ;  $R_3 = [\sin(3\pi a/d) / (3\pi a/d)]^2 = 0.255$ ;  $\Delta\theta = \lambda/d = 3.7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.21 \text{ gradi}$ .
- 16.10**  $d = L/N = 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\sin\theta = m \lambda/d = 0.273 \text{ m}$ ,  $\theta = 0, 15.84^\circ, 33.09^\circ, 54.98^\circ$ ;  
 $\Delta\theta = 2\lambda/L = 3.42 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ ;  $D_1 = 1/d \cos\theta_1 = 6.93 \cdot 10^3 \text{ rad/cm}$ ,  $D_2 = 2/d \cos\theta_2 = 1.59 \cdot 10^4 \text{ rad/cm}$ ;  $R = mN$ ,  $R_1 = 1.6 \cdot 10^4$ ,  $R_2 = 3.2 \cdot 10^4$ ;  $\Delta\lambda_1 = \lambda/R_1 = 2.56 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda_2 = 1.28 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}$ ;  $v = c/\lambda = 7.31 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda$ ,  $\Delta v = v/R$ ,  $\Delta v_1 = 4.57 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ ,  $\Delta v_2 = 2.28 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ .
- 16.11**  $\theta_2 = y_2/f = 2\lambda/d$ ,  $d = 30 \mu\text{m}$ ;  $a = d/4 = 7.5 \mu\text{m}$ ;  $\Delta\theta = 2\lambda/L = \Delta y/f$ ,  $L = 3 \text{ cm}$ ;  $N = L/d = 10^3$ ,  $\Delta\lambda = \lambda/2N = 3 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}$ ;  $I_2/I_0 = (\sin\pi/2)^2/(\pi/2)^2 = 0.405$ .
- 16.12** Il foro è nella zona in cui si trovano i massimi principali del primo ordine:  $\tan\theta_1 = y_1/f$ ,  $\theta_1 = 14.47^\circ$ ,  $\lambda_1 = d \sin\theta_1 = 1/n \sin\theta_1 = 0.5 \mu\text{m}$ ;  $\tan\theta_2 = (y_1 + h)/f$ ,  $\theta_2 = 15.96^\circ$ ,  $\lambda_2 = 1/n \sin\theta_2 = 0.55 \mu\text{m}$ ;  $\Delta\lambda = 0.05 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda/\lambda = 9.52 \cdot 10^{-2}$ ; con  $h = 0.5 \text{ mm}$   $\tan\theta_2 = 0.259$ ,  $\theta_2 = 14.52^\circ$ ,  $\lambda'_2 = 0.5014 \mu\text{m}$ : dato che  $\lambda_1$  vale esattamente  $0.4996 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda' = 0.0018 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda'/\lambda = 3.6 \cdot 10^{-3}$ . Il metodo descritto è utile per selezionare un fascio di luce con composizione nota.
- 16.13**  $\Delta v/v = \Delta\lambda/\lambda$ ,  $\Delta v = v/R = c/\lambda mN$ ;  $\Delta t = N d \sin\theta/c = N m \lambda/c$ ;  $\Delta v \Delta t = 1$ , indipendentemente dai parametri del reticolo.
- 16.14** La riflessione avviene in condizioni di Brewster,  $\tan\theta_i = n$ ,  $\theta_i = 60^\circ$ ,  $\theta_3 = 30^\circ$ ,  $R_\sigma = \sin^2 30^\circ = 0.25$ ,  $I_\sigma = I_\sigma/R_\sigma = 2 \text{ W/cm}^2$ ,  $I_3 = 4 \text{ W/cm}^2$ ;  $d = L/N = 4 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = d \sin\theta_3/3 = 0.67 \mu\text{m}$ ;  $I_3/I_0 = (\sin 3\pi/2)^2/(3\pi/2)^2 = 0.045$ ,  $I_0 = 88.8 \text{ W/cm}^2$ ;  $\Delta\theta = 2\lambda/L = 1.34 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 7.7 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ .
- 16.15** Assi paralleli  $I = I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$ , assi incrociati  $I = 2I_1 \left[ \frac{\sin \frac{N}{2} \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$ , infatti si sommano gli effetti di due reticolari, ciascuno con  $N/2$  fenditure, e con i campi vibranti a  $90^\circ$  tra loro; massimi principali per  $\sin\theta = m\lambda/d$  in entrambi i casi, però con intensità  $N^2 I_1$  e  $N^2 I_1/2$ ; anche le espressioni delle direzioni dei minimi sono le solite, con  $N$  in un caso e  $N/2$  nell'altro, per cui ci sono  $N-1$  minimi in un caso e  $N/2-1$  nell'altro tra due massimi principali.
- 16.16**  $d = L/N = 2 \mu\text{m}$ ,  $d(\sin\theta + \sin\alpha) = m\lambda$ ,  $\sin\theta = -\sin\alpha + m \frac{\lambda}{d} = -0.5 + 0.3 \text{ m}$ :  
 $m = -1 \quad \theta = -53.13^\circ$ ,  $m = 0 \quad \theta = -30^\circ$ ,  $m = 1 \quad \theta = -11.54^\circ$ ,  $m = 2 \quad \theta = 5.74^\circ$ ,  $m = 3 \quad \theta = 23.58^\circ$ ,  $m = 4 \quad \theta = 41.42^\circ$ ,  $m = 5 \quad \theta = 90^\circ$ ; il massimo di ordine zero si ha dunque per  $\theta = -30^\circ$  ed è largo  $\Delta\theta = 2\lambda/L = 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ gradi}$ ;  $d \sin\alpha = m\lambda = 1 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ .
- 16.17**  $a = 0.1 \text{ mm}$ ,  $a^2 = n\lambda r_n$ ,  $r_n = 20/n \text{ mm}$ :  $r_3 = 6.67 \text{ mm}$ ,  $r_4 = 5 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 10 \text{ mm}$ ;  
 $a = 2 \text{ mm}$ ,  $r_n = 8/n \text{ m}$ ,  $r_3 = 2.67 \text{ m}$ ,  $r_4 = 2 \text{ m}$ ,  $r_2 = 4 \text{ m}$ .



Soluzione 16.16



Soluzione 16.18



Soluzione 16.19

- 16.18**  $\lambda r = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  per cui  $R_1 = 2 \text{ mm}$  e  $R_2 = \sqrt{8} \text{ mm} = 2.83 \text{ mm}$  sono i raggi delle prime due zone di Fresnel relative al punto distante  $r$ ; però la seconda zona è attiva per metà:  $E_1 = 2E_0$ ,  $E_2 = 1/2 E_1$ ,  $E = E_1 - E_2 = E_0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $I = I_0$ ; nel caso di  $F_2$ , l'area è la stessa e di nuovo la seconda zona è attiva per metà, ma radialmente: dalla figura  $E = \sqrt{2} E_0$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $I = 2 I_0$ .

- 16.19** Per  $F_1$ , da  $\mathbf{E}_{\text{ost}} + \mathbf{E}_{\text{ap}} = \mathbf{E}_0$  e dal fatto che  $\mathbf{E}_{\text{ap}} = \mathbf{E}_0$  segue  $\mathbf{E}_{\text{ost}} = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $I = 0$ ; per  $F_2$ , dal disegno si vede che  $\mathbf{E}_{\text{ost}} = \mathbf{E}_0$ ,  $\beta = 1$ ,  $I = I_0$ .

- 16.20**  $a = (A / 2 \rho N_A)^{1/3} = 0.353 \text{ nm}$ ;  $2a \sin \theta = m \lambda$ ,  $\theta = 16.46^\circ, 34.51^\circ, 58.20^\circ$ .

- 16.21**  $2d \sin \theta_2 = 3\lambda_2$ ,  $d = 168 \text{ pm}$ ;  $\lambda_1 = 2d \sin \theta_1 = 168 \text{ pm}$ : si tratta dell'unico massimo possibile escludendo  $\theta_1 = 90^\circ$ .

- 16.22**  $2 \cdot 275 \sin 45^\circ = m\lambda$ ,  $\lambda = \frac{389}{m}$  in pm:  $m = 3\lambda = 129.7 \text{ pm}$ ,  $m = 4\lambda = 97.3 \text{ pm}$ .

- 17.1** L'angolo limite deve valere al massimo  $45^\circ$ :  $\sin 45^\circ = n_1 / n_2$ ,  $n_2 = 1.885$ ; il fascio è deviato di  $2\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 22.5^\circ$ .

- 17.2**  $I = -q/p$ ,  $q = 44.3 \text{ cm}$ , l'immagine è virtuale; da  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$   $R = -79.9 \text{ cm}$ ,  $f = R/2 = -39.9 \text{ cm}$ ; l'immagine richiesta si forma nel piano focale, a distanza dal fuoco in modulo  $d = f \tan \theta = 2.4 \text{ cm}$ .

- 17.3**  $f_1 = n_1 R / (n_2 - n_1) = 78.2 \text{ cm}$ ,  $p = 39.1 \text{ cm}$ ,  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ ,  $q = -88.2 \text{ cm}$ , immagine virtuale, diritta e ingrandita in quanto  $I = n_1 q/n_2 q = -2$ .

- 17.4** Equazioni dei diottri piani:  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q_1} = 0$ ,  $\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q} = 0$ ,  $p_2 = s - q_1$ ; si ricava  $q = -\frac{n_3}{n_2} \left( s + \frac{n_2}{n_1} p \right) = -\frac{1}{1.5} (s + 1.125 p) = -9.5 \text{ cm}$ ; l'immagine virtuale si forma a  $-9.5 \text{ cm}$  dalla faccia destra della lastra, ovvero a  $-6.5 \text{ cm}$  dalla faccia sinistra.

- 17.5**  $R_1 = -R_2 = R$ ,  $f = 40 \text{ mm}$ ; per  $p = +\infty$   $q = f = 40 \text{ mm}$ , per  $p = 25 \text{ cm}$   $q = 47.6 \text{ mm}$ ,  $\Delta q = 7.6 \text{ mm}$ .

- 17.6** Per l'occhio ipermetropo si vuole che un oggetto posto a distanza  $p = 25 \text{ cm}$  dia una immagine virtuale alla distanza  $q_p$ :  $\frac{1}{25} - \frac{1}{q_p} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{f} = \frac{25 q_p}{q_p - 25}$ ,

positiva, quindi lente convergente: con  $q_p = 100 \text{ cm}$   $f = 33.3 \text{ cm} = 0.333 \text{ m}$ ,  $\frac{1}{f} = 3 \text{ diottrie}$ .

Per l'occhio miope si vuole che un oggetto all'infinito dia un'immagine virtuale a distanza  $q_r$ , quindi  $f = -q_r$ , lente divergente; con  $q_r = 50 \text{ cm}$ ,

$f = -50 \text{ cm} = -0.5 \text{ m}$ ,  $\frac{1}{f} = -2 \text{ diottrie}$ .

- 17.7**  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{h}{f_1 f_2}$ ,  $f = 40 \text{ cm}$ ; il fuoco anteriore dista dalla prima lente

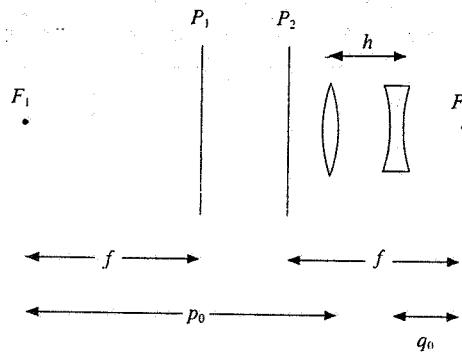


figura a

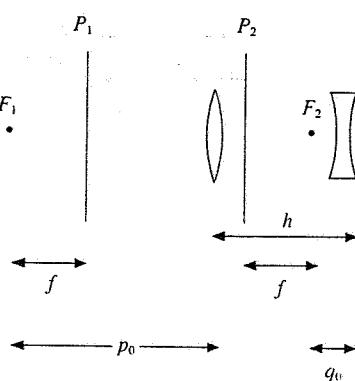


figura b

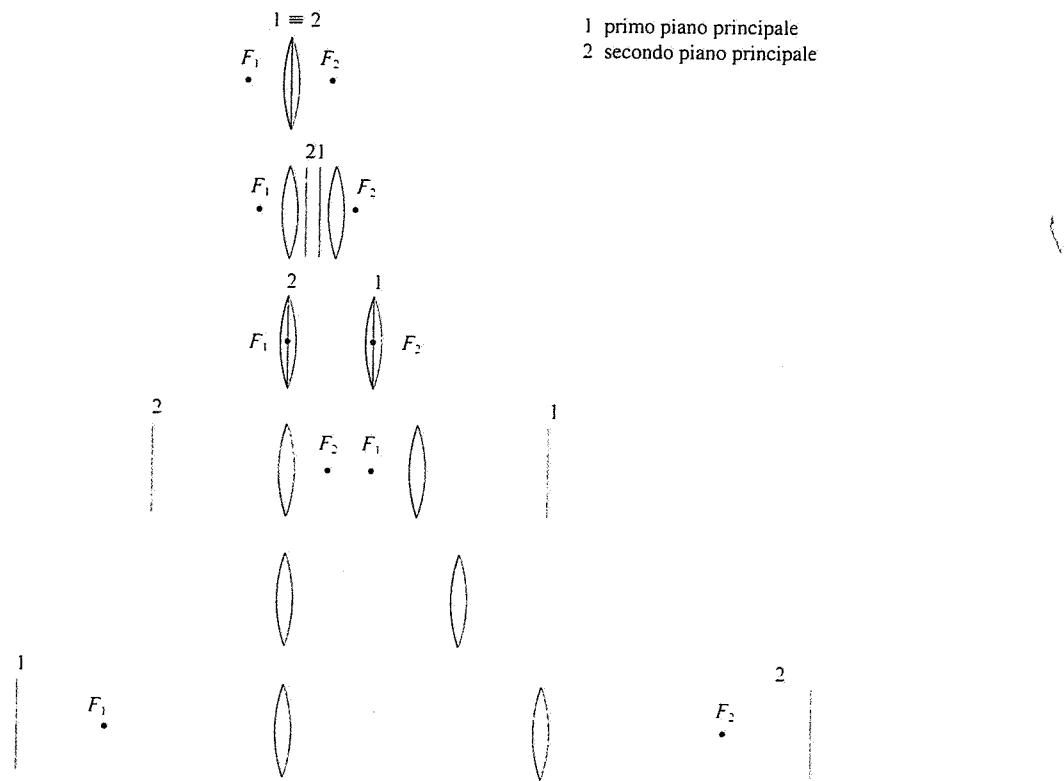
**Soluzione 17.7**

$P_0 = f_1 (h - f_2) / (h - f_1 - f_2) = 72 \text{ cm}$ , il fuoco posteriore dista dalla seconda lente  $q_0 = f_2 (h - f_1) / (h - f_1 - f_2) = 13.3 \text{ cm}$ , i piani principali distano  $f$  dai fuochi e la situazione è mostrata nella figura a, il sistema è convergente: con  $h = 30 \text{ cm}$   $f = 18.5 \text{ cm}$ ,  $p_0 = 46.2 \text{ cm}$ ,  $q_0 = -4.6 \text{ cm}$ , il fuoco posteriore è virtuale (figura b), il sistema è divergente.

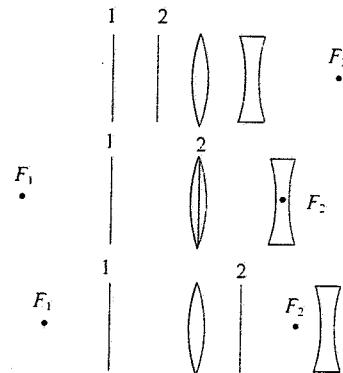
- 17.8  $f = f_0^2 / (2f_0 - h)$ ,  $p_0 = q_0 = f_0 (h - f_0) / (h - 2f_0) = f(f_0 - h) / f_0$ , il sistema è simmetrico; tabuliamo i risultati per i vari valori di  $h$ :

$h = 0 \text{ cm}$	$f = 5 \text{ cm}$	$p_0 = q_0 = 5 \text{ cm}$	come un'unica lente convergente di focale $f_0 / 2$
5	6.7	3.3	convergente
10	10	0	come un'unica lente di focale $f_0$ , però spessa $f_0$
15	20	-10	divergente
20	$\infty$	$\infty$	
30	-10	20	convergente

Per  $h > 2f_0$  il comportamento è simile a quello per  $h = 30 \text{ cm}$ .

**Soluzione 17.8**

<b>17.9</b>	$f = f_0^2 / h$ , $p_0 = f_0(h + f_0) / h$ , $q_0 = -f_0(h - f_0) / h$ , il sistema non è simmetrico;		
$h = 5 \text{ cm}$	$f = 20 \text{ cm}$	$p_0 = 30 \text{ cm}$	$q_0 = 10 \text{ cm}$ convergente
10	10	20	0
15	6.7	16.7	-3.3 divergente

**Soluzione 17.9**

$$17.10 \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad \left( \frac{1}{f_R} - \frac{1}{f_B} \right) / \frac{1}{f_G} = \frac{f_B - f_R}{f_G} = \frac{n_B - n_R}{n_G - 1} = D ;$$

la quantità  $f_B - f_R$  è detta aberrazione cromatica longitudinale, essa non è mai nulla per una singola lente; con  $R_1 = -R_2 = R = 50 \text{ mm}$   $f_B = 47.71 \text{ mm}$ ,  $f_R = 48.64 \text{ mm}$ ,  $f_G = 48.36 \text{ mm}$ ;  $D = 0.0193$  e si verifica la relazione trovata;  $\Delta f = f_B - f_R = 0.93 \text{ mm}$ . A parità degli altri fattori  $\Delta f$  aumenta con  $R$  linearmente.

$$17.11 \quad \frac{1}{f_R} = \frac{1}{f_{R1}} + \frac{1}{f_{R2}}, \quad \frac{1}{f_B} = \frac{1}{f_{B1}} + \frac{1}{f_{B2}}, \quad \frac{1}{f_R} - \frac{1}{f_B} = \frac{f_B - f_R}{f_G} =$$

$$\frac{f_{B1} - f_{R1}}{f_{G1}^2} + \frac{f_{B2} - f_{R2}}{f_{G2}^2} = \frac{D_1}{f_{G1}} + \frac{D_2}{f_{G2}} ;$$

per il sistema composto è possibile  $\Delta f = 0$ , cioè  $f_B = f_R$ , se  $f_{G1}/f_{G2} = -D_1/D_2$ : quindi le due focali hanno segno opposto, una lente è convergente e l'altra è divergente e i materiali devono essere diversi. Il sistema si chiama doppietto acromatico.

$$18.1 \quad I = 5 \cdot 10^{-2} P / 4 \pi r^2 = 2.4 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2, N = I / h\nu = 2.4 \cdot 10^{-7} / 3.6 \cdot 10^{-19} = 6.7 \cdot 10^{11} \text{ fotoni/m}^2\text{s}, \Sigma = \pi d^2 / 4, N_m = N\Sigma = 2.1 \cdot 10^6 \text{ fotoni/s}. Si noti che } h\nu = 1.24/0.55 = 2.25 \text{ eV} = 3.6 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

$$18.2 \quad N = I\Sigma / h\nu = 7.37 \cdot 10^{21} \text{ fotoni/s}, t = N_A / N = 81.7 \text{ s.}$$

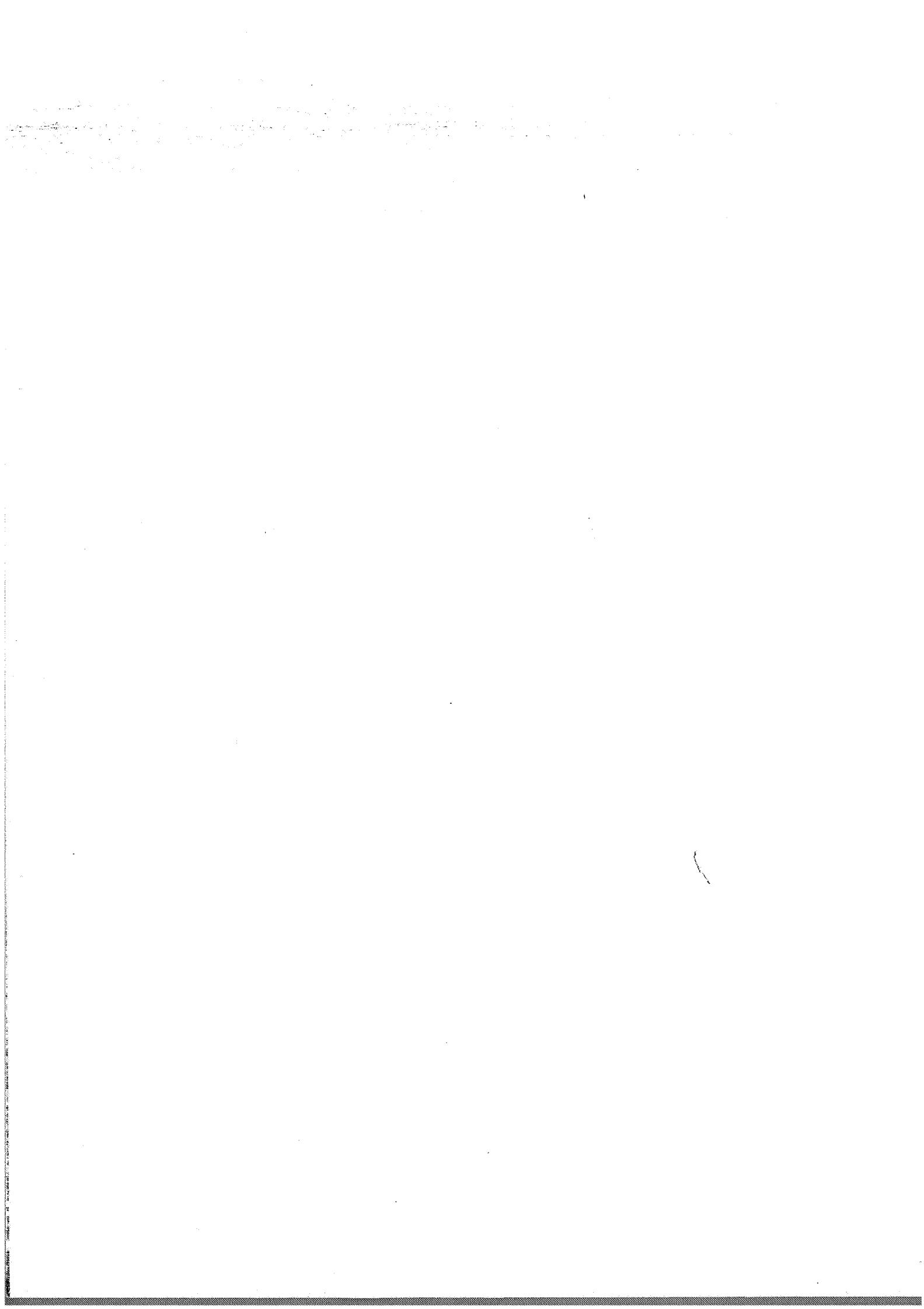
$$18.3 \quad \text{Molecole per grammo } N = N_A / A = 1.37 \cdot 10^{22}, W_1 = W / N = 2.69 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 16.8 \text{ eV}; U = h\nu = 1.24/0.65 = 1.9 \text{ eV}, N_f = W_1 / U = 9 \text{ fotoni.}$$

$$18.4 \quad P = \sigma (T^4 - T_e^4) 2 \pi R d, T = 529 \text{ K}; \lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T = 5.48 \mu\text{m}; (\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T^5 = 5.33 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3 = 5.33 \cdot 10^2 \text{ W/m}^2 \mu\text{m}.$$

$$18.5 \quad W = \sigma (T_i^4 - T_e^4) \Sigma \Delta t = 1.33 \cdot 10^7 \text{ J}; \lambda_{\max} = 2.8978 \cdot 10^{-3} / T_i = 9.9 \mu\text{m}.$$

$$18.6 \quad T = 2.8978 \cdot 10^{-3} / \lambda_{\max} = 4830 \text{ K}; P = \sigma T^4 4 \pi R^2, R = 1.135 \cdot 10^{11} \text{ m}; (\varepsilon_{\lambda, \text{cn}})_{\max} = 1.287 \cdot 10^{-5} T^5 = 3.38 \cdot 10^{13} \text{ W/m}^3 = 3.38 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 \mu\text{m}; \varepsilon_{\text{cn}} = \sigma T^4 = 3.09 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2.$$

- 18.7  $E_{k,\max} = 1/2 mv^2 = 0.134 \text{ eV}$ ;  $U = h\nu = 1.24/0.625 = 1.984 \text{ eV}$ ,  $W_e = U - E_{k,\max} = 1.850 \text{ eV} = 2.96 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ;  $\nu_0 = W_e/h = 4.47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ ,  $\lambda_{\max} = 0.670 \mu\text{m}$ .
- 18.8  $U_V = 1.24/0.5461 = 2.27 \text{ eV}$ ,  $W_e = U_V - eV_0 = 1.57 \text{ eV}$ ;  $U_G = 1.24/0.5875 = 2.11 \text{ eV}$ ,  $eV'_0 = U_G - W_e = 0.54 \text{ eV}$ ,  $V'_0 = 0.54 \text{ V}$ .
- 18.9  $p = eBr = 5.55 \cdot 10^{-25} \text{ Ns}$ ,  $E_k = p^2/2m = 1.056 \text{ eV}$ ,  $U = 1.24/0.450 = 2.756 \text{ eV}$ ,  $W_e = U - E_k = 1.7 \text{ eV}$ .
- 18.10  $E_{k,\max} = 0.50 \text{ eV}$ ,  $U = E_{k,\max} + W_e = 3.94 \text{ eV} = 6.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ,  $N = I/U = 8.71 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/m}^2\text{s}$  =  $8.71 \cdot 10^{16} \text{ elettroni/m}^2\text{s}$  =  $0.014 \text{ A/m}^2$ ;  $p = I/c = 1.83 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}$ .
- 18.11  $\lambda_0 = hc/U_0 = 1.24 \cdot 10^{-6}/3 \cdot 10^5 = 4.13 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 4.39 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ,  $\lambda = 4.57 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $U = 1.24 \cdot 10^{-6}/\lambda = 271.3 \text{ keV}$ ,  $E_k = U_0 - U = 28.7 \text{ keV}$ .
- 18.12  $\lambda_0 = 1.240 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 1.21 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\lambda = 1.252 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $U = 9.9 \text{ keV}$ ,  $p = U/c = 5.29 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $E_{k,el} = U_0 - U = 100 \text{ eV}$ ,  $p_{el} = \sqrt{2mE_{k,el}} = 5.40 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $p \sin\theta = p_{el} \sin\phi$ ,  $\phi = 58^\circ$ .
- 18.13  $\lambda_0 = 1.24 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ,  $\Delta\lambda = 2\lambda_c = 4.85 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $\lambda = 4.97 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ,  $U = 0.25 \text{ MeV}$ ,  $E_k = U_0 - U = 9.75 \text{ MeV}$ .
- 18.14 Detto  $r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  il raggio di Bohr,  $r_{30} = r_1 \cdot 30^2 = 4.76 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ;  $U_{30} = -13.6/30^2 = -15.1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ ;  $\lambda_{\max} = 1.24 \cdot 10^{-6}/15.1 \cdot 10^{-3} = 82.1 \mu\text{m}$ .
- 18.15 Massa ridotta  $m_{el} m_{pos} / (m_{el} + m_{pos}) = 0.5 m_{el} = 0.5 \text{ m}$ ,  $r_n = 2r_1 n^2 = 1.058 \cdot 10^{-10} n^2 \text{ m}$ ,
- $$U_n = 0.5(U_{n,idr}) = -\frac{6.8}{n^2} \text{ eV}, \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{4}U_1 = 5.1 \text{ eV} (\Rightarrow \lambda = 243 \text{ nm}).$$
- 18.16 Massa ridotta  $m_\mu m_p / (m_\mu + m_p) = 185.9 m_{el} = 185.9 \text{ m}$ , valore da sostituire a  $m$  nelle formule dell'atomo di idrogeno:  $r_n = \frac{r_1}{185.9} n^2 = 2.85 \cdot 10^{-13} n^2 \text{ m}$ ,
- $$U_n = -185.9 \frac{13.6}{n^2} \text{ eV} = -\frac{2.53}{n^2} \text{ keV}; \Delta U = U_2 - U_1 = 1.9 \text{ keV}.$$
- 18.17  $p = h/\lambda = 10h/r_p = 8.28 \cdot 10^{-18} \text{ Ns} = 15.48 \text{ GeV/c}$ ; nella formula relativistica  $U = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  il termine contenente  $m$  è trascurabile rispetto al termine contenente  $p$ , per cui  $U = pc = 15.48 \text{ GeV}$ ; l'energia cinetica è  $E_k = U - mc^2$ ,  $E_{k,p} = 14.54 \text{ GeV}$ ,  $E_{k,el} = 15.48 \text{ GeV}$ .
- 18.18  $\lambda = 1.226 \cdot 10^{-9} / \sqrt{65} = 1.52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $d = \lambda/2 \sin\theta = 1.075 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .
- 18.19  $\lambda = 2.86 \cdot 10^{-11} / \sqrt{4} = 1.43 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ,  $\sin\theta = \lambda/2d$ ,  $\theta = 5.62^\circ$ .
- 18.20  $\Delta p = \hbar/2r_1 \approx 10^{-24} \text{ Ns}$ ,  $E_k = (\Delta p)^2/2m = 3.4 \text{ eV}$ .



# Indice analitico

## A

aberrazioni 681  
accumulatore 206  
ago magnetico 208, 226  
alternatore 395  
ammittenza 381  
  complessa 384  
amperometro 196  
ampiezza di un'onda  
  cilindrica 478  
  di pressione 469  
  sferica 476  
analisi di Fourier 459  
analizzatore 568  
anelli di Newton 607  
anello (spira)  
  campo elettrico 17  
  campo magnetico 245  
  potenziale 49  
angolo  
  di Brewster 556  
  di deviazione minima 687  
  limite 546, 663  
  solido 69, 71  
anodo 178, 202  
antenna dipolare 510, 585  
antirisonanza 381  
apertura numerica 640  
armoniche superiori 614, 617, 618  
asse ottico  
  di un cristallo monoassico 562  
  di un polarizzatore 568  
  di un sistema ottico 665  
assorbimento 479, 520, 706  
atomo 3, 23, 130, 211, 304  
  di Bohr 9, 42, 44, 512, 709  
  di Thomson 23  
attività ottica 575  
attrito elettromagnetico 328, 329  
autoflusso 260  
autoinduzione 337, 340, 346

## B

banda/e

di conduzione 743  
di livelli 736, 741  
di valenza 743  
battimenti 472  
betatron 333  
birifrangenza 564  
  circolare 576  
  elettrica 574  
  magnetica 575  
  meccanica 575  
biprisma di Fresnel 594  
bottiglia magnetica 217  
bremsstrahlung 513

C

calamita 208  
cammino ottico 593  
campo 28, 86, 444  
  coercitivo 290  
  di Hall 230  
  di Weiss 314  
  irrotazionale 55, 86  
  solenoidale 82, 87  
campo elettrico 12, 15  
  in un dielettrico polarizzato 128, 134  
  in una cavità 145, 287  
  di un dipolo 58  
  indotto 90, 320, 326  
campo elettromagnetico 341, 363, 493  
campo elettromotore 29, 182, 187, 230, 322  
campo magnetico 212, 213, 216, 220, 241, 271  
  in una cavità 284, 287  
  di un dipolo 245, 246  
  di una carica in moto 242  
  residuo 290  
  rotante 397  
  terrestre 209, 213, 249  
campo **H** 277, 290, 296, 300, 301  
canna d'organo 618  
cannocchiale 685  
capacità 91, 101, 102, 103, 129  
  per unità di lunghezza 103  
carica elettrica 2, 4, 27  
  elementare 3, 8, 25  
  immagine 120

- catodo 178, 202  
 cavità risonante 627  
 cavo coassiale 342, 391  
 cella di Kerr 574  
 cerchio di Palmieri 337  
 ciclo di isteresi 290, 296, 345  
 ciclotrone 236  
 circuitazione del  
   campo elettrico 30, 31, 320  
   campo magnetico 253  
 circuito/i  
   accoppiati 350, 352  
   elettrico 181  
    $LC$  369, 377, 380, 385  
   magnetico 292  
   oscillante 370  
    $RC$  190, 366, 376, 380, 384  
    $RL$  338, 366, 376, 379, 384  
    $RLC$  367, 377, 380, 384  
 coefficiente/i  
   di assorbimento 479, 520, 706  
     specifico 693  
   di autoinduzione 260, 337, 352, 354  
   di capacità 99  
   di induzione 99  
   di mutua induzione 258, 352, 354  
   di Peltier 753  
   di potenziale 99  
   di riflessione 549, 551, 553, 554, 561  
   di smorzamento 367  
   di Thomson 754  
   di trasmissione 550, 551, 553, 555, 561  
   termico 174  
 coerenza 496  
 condensatore/i 101, 375, 383  
   carica di un 188  
   cilindrico 102  
   energia di un 108  
   in parallelo 104  
   in serie 105  
   piano 103  
   scarica di un 189  
   sferico 102, 109  
 condizioni di stazionarietà 167, 168  
 conducibilità termica 174  
 conduttanza 175, 382, 385  
 conduttività 169, 201, 742  
 conduttore/i 1, 89, 161  
   cavo 93, 95  
   in equilibrio 89, 94  
   non ohmico 178  
   sferico 92  
   sistemi di 98  
 conduzione elettrica  
   nei gas 162  
   nei metalli 161, 168  
   nelle soluzioni elettrolitiche 200  
 configurazione elettronica 727, 729  
 conservazione  
   della carica 4, 167, 362  
   dell'energia 37, 189, 550  
 coppia di Cooper 751  
 corda tesa 451, 465, 560, 614, 616  
 corpo nero 624, 627, 693  
 corrente elettrica 161, 164  
   alternata 374  
   complessa 382  
   continua 162  
   di spostamento 192, 359, 361  
   indotta 320  
   piana indefinita 257  
 correnti  
   amperiane 210, 272, 274  
   di Foucault 332  
 costante  
   di Boltzmann 155, 163, 178, 310  
   di Curie 312  
   di Faraday 204  
   di Kerr 574  
   di Planck 44, 303, 515, 532, 696, 699, 709, 720  
   di Rydberg 708, 710  
   di Stefan 694  
   di tempo 188, 338  
   di Verdet 576  
   dielettrica assoluta 129  
     assoluta del vuoto 7  
   dielettrica relativa 128, 153, 157, 519  
   reticolare 659  
 criterio di Rayleigh 636  
 cristalli  
   dicroici 568  
   monoassicci 562  
 cuneo sottile 606

**D**

- decibel 471  
 densità di carica 14, 15  
   di polarizzazione 132, 133  
 densità di corrente 164, 167, 201  
   amperiana 275, 276  
   di spostamento 359, 361  
 densità di energia

- del campo elettrico 109, 148  
 del campo magnetico 341, 344  
 elettromagnetica 362, 498  
 deuterio 649  
 diamagnetismo 270, 272, 274, 304, 308, 334  
 diapason 612, 617  
 dicroismo 568  
 dielettrico 128  
     anisotropo 140, 562  
     lineare 131, 138  
 diffrazione 631, 691  
     degli elettroni 714  
     dei raggi X 658  
     di Fraunhofer 632, 636, 641  
     di Fresnel 651, 654, 655  
 diffusione  
     della luce 516  
     Thomson 517  
 diodo  
     a effetto termoelettronico 178  
     a semiconduttore 748  
 dinamo 396  
 diottri 664, 670  
 dipolo elettrico 57, 130, 228  
     oscillante 507, 516, 621  
 dipolo magnetico 209, 223, 228, 246  
     oscillante 511  
 disco di  
     Barlow 328  
     Rowland 247  
 disco carico  
     campo elettrico 18  
     potenziale 49  
 discontinuità del  
     campo **D** 141, 287, 548  
     campo elettrico 78, 141, 287, 548  
     campo **H** 283, 287, 548  
     campo magnetico 262, 283, 287, 548  
 dispersione 464, 484, 521  
     angolare 688  
     del reticolo 645  
     del prisma 686  
     della luce visibile 523, 546, 663  
 dissociazione 200  
 distanza  
     di visione distinta 640, 684  
     focale 593, 666, 671, 675, 678  
 distribuzione di carica  
     cilindrica 75  
     piana 76  
     sferica 73, 113, 124  
 divergenza 80, 81, 87  
 domini di Weiss 316  
 doppietto acromatico 682  
 doppio prodotto vettore 88  
 dualismo onda-corpuscolo 707
- E**
- effetto  
     Cerenkov 530, 690  
     Compton 702  
     Cotton-Mouton 575  
     Doppler 487, 529  
     Einstein-de Haas 317  
     Faraday 576  
     fotoelettrico 698  
     Hall 230  
     Joule 176  
     Kerr 574  
     Meissner 749  
     Peltier 753  
     Pockels 575  
     Seebeck 754  
     termoelettronico 178  
     Thomson 754  
     Volta 752  
 elettreti 160  
 elettrodinamometro assoluto 251  
 elettroliti 200  
 elettromagneti 295, 349  
 elettrometro a bilancia di Thomson 119  
 elettrone 3, 8, 211, 303, 308, 316, 513, 704, 714  
 elettronvolt 39  
 elettroscopio a foglie 2, 96, 107, 753  
 ellissoide degli indici di rifrazione 562, 563  
 emissività 694  
 energia  
     di accoppiamento 353  
     di Fermi 163, 738  
     di ionizzazione 43  
     di legame 43, 709  
     di un fotone 532  
     elettrostatica 108, 111, 148  
     intrinseca della corrente 340  
     magnetica 342, 344, 352, 354  
     potenziale elettrostatica 31, 33, 37, 63  
     potenziale magnetica 223, 224  
     trasmessa per onde 465, 498  
 equazione/i  
     delle onde piane 444, 448, 474  
     di Clausius-Mossotti 159  
     di continuità 167, 362

di Laplace 83, 124  
 di Maxwell 82, 261, 361, 363, 490  
 di Poisson 83  
 di Schrödinger 722  
 di Van t'Hoff 205  
 equilibrio in un campo elettrico 77  
 equivalente  
   chimico 204  
   elettrochimico 204  
 esperienza, esperimento di  
   Bucherer 236  
   Franck e Hertz 711  
   Hanbury Brown e Twiss 587  
   Hertz 620  
   Michelson 691  
   Michelson e Morley 610  
   Millikan 25  
   Rutherford 23, 29  
   Stern e Gerlach 306  
   Young 588

**F**

fasce di Van Allen 217  
 fase (differenza di fase)  
   di un'oscillazione 371, 377, 378, 381  
   di un'onda 458, 461, 578, 582  
 fattore di  
   depolarizzazione 146  
   inclinazione 540, 589  
   merito 373  
   potenza 393  
   smorzamento 368  
 ferroelettrici 160  
 ferromagnetismo 270, 273, 274, 289, 304, 314  
 filo rettilineo  
   campo elettrico 16  
   campo magnetico 243, 255  
   potenziale 48  
 flusso  
   concatenato 82, 213, 259  
   del campo elettrico 68, 70  
   del campo magnetico 213, 224, 226, 227, 258  
   dell'induzione dielettrica 136  
   tagliato 227, 323  
 flussometro 336  
 fon 471  
 fonometro 472  
 fononi 736  
 formula/e di  
   Cauchy 523, 686

Eulero 382  
 Fresnel 549, 551, 553  
 Galileo Ferraris 393  
 Larmor 511  
 Liénard 512  
 Mathiessen 742  
 Rayleigh-Jeans 626  
 Rydberg 708  
 forza/e  
   di Lorentz 214, 232  
   di Van der Waals 733  
   elettrica 9, 13  
     su un dipolo 64  
     su una lastra di dielettrico 151  
     tra le armature di un condensatore 116, 118  
   magnetica 218, 225, 346, 347, 353  
     su un dipolo 247  
     tra circuiti 250, 251  
     tra i poli di un magnete 349  
 forza elettromotrice 30, 181, 183  
   alternata 374  
   complessa 382  
   di autoinduzione 337  
   dimutua induzione 350  
   indotta 320, 323  
   termoelettrica 754  
 forza magnetomotrice 292  
 fotomoltiplicatore 702  
 fotoni 532, 699, 702, 709  
 frange di interferenza 588, 591, 599  
   di eguale inclinazione 608, 611  
   di eguale spessore 607  
 frequenza  
   di battimento 473  
   di ciclotrone 238  
   di soglia fotoelettrica 700  
   di un'onda 458, 481, 532  
   fondamentale 614, 617, 618  
 fronte d'onda 474, 475  
 funzione/i  
   armoniche 124  
   d'onda 444, 445, 457, 474, 476, 495, 722, 725  
   di distribuzione di Boltzmann 155, 310, 626  
   di Langevin 311  
 fuoco 593, 666, 671, 675, 678

**G**

galvanometro 195, 223  
   balistico 336  
 gas di Fermi 736

generatore di f.e.m. 162, 328, 329

di Van de Graaf 186

termoelettrico 755

giunzione p-n 748

gradiente 46, 57, 51, 86

grado di

dissociazione 201

polarizzazione 556

guida

d'onda 628

di luce 546

## I

immagine

reale 657, 664

virtuale 594, 657, 664

impedenza 378

caratteristica del vuoto 494

di un mezzo 494, 500, 501

di una linea 391

complessa 383

indice di rifrazione 494

di un dielettrico 519, 523, 596, 663

di un metallo 525, 577

ordinario 562

relativo 545

straordinario 562

induttanza 260, 337, 352, 354

per unità di lunghezza 343

induttore 338, 374, 383

induzione

completa 95

dielettrica 136, 141, 145

elettromagnetica 320, 323, 326

elettrostatica 5, 90

infrarosso 533

ingrandimento

longitudinale 670, 673, 676

trasversale 668, 673, 676

visuale 684, 685

intensità

delle onde riflesse e trasmesse 548, 561

di un'onda elastica 467, 469, 476, 478

di un'onda elettromagnetica 501, 505, 506

emessa da un dipolo oscillante 509, 510, 511

nell'interferenza 580, 582, 584, 588, 597

nella diffrazione 633, 641

interazione tra dipoli 66, 247

interferenza 579, 581, 587, 597, 602, 611

interferometro

di Fabry-Perot 611

di Fizeau 596

di Michelson 609

per la misura dell'indice di rifrazione 595

interfero (traferro) 293

invarianza relativistica

della carica 27

delle equazioni di Maxwell 363

ioni 4, 200

ionizzazione 4, 162, 711

ionosfera 527

ipersuoni 472

isolante 1, 127

isotopi 232

## L

lacune 231, 743

lamina/e

di ritardo 571, 572, 573

sottile 602

lunghezza

angolare 599, 633, 636, 642

della sorgente (limite) 592

della risonanza 373

di una riga spettrale 650, 719

laser 481, 713

lavoro

della forza elettrica 29, 32, 176, 183

magnetica 225

di estrazione 178, 699, 740

legame

a idrogeno 733

covalente 730

dipolare 733

ionico 730

metallico 735

legge/i di

Ampère 253, 277

Ampère-Laplace 241, 271

Ampère-Maxwell 359, 361

Biot 575

Biot-Savart 244

Bragg 659

Cartesio 543, 545

Child-Langmuir 178

Coulomb 6, 9, 28, 94, 209, 301

Curie 273 (prima), 291 (seconda)

Faraday (elettrolisi) 204

Faraday (induzione elettromagnetica) 320, 326

Fechner e Weber 471

- Felici 335  
 Gauss 70, 136  
 Hopkinson 292  
 Kirchhoff (circuiti) 192, 384  
 Kirchhoff (radiazione) 693  
 Lenz 321  
 Malus 568  
 Ohm 170, 172, 202  
     complessa 383  
     generalizzata 185  
 Planck 697  
 Richardson 178  
 Snell 545  
 Stefan-Boltzmann 694  
 Verdet 576  
 Volta 753  
 Wiedemann e Franz 174  
 Wien (prima e seconda) 694  
 leggi della riflessione e rifrazione 543, 544, 662, 663  
     elementari di Laplace 241 (prima), 218 (seconda)  
 lente  
     di ingrandimento 684  
     elettrostatica 126  
     magnetica 299  
     sottile 593, 638, 673  
     spessa 677  
 linea di trasmissione 389  
 linee del  
     campo elettrico 20  
     campo magnetico 212, 247, 301  
 livelli energetici 44, 709, 710  
     rotazionali 736  
     vibrazionali 736  
 livello sonoro 471  
 luce visibile 533  
 lunghezza  
     d'assorbimento 479, 520, 706  
     d'onda 458, 542  
         Compton 704  
         di de Broglie 714  
     di coerenza 481, 590
- M**
- maglia 192  
 magnete permanente 290, 300  
 magnetite 208  
 magnetizzazione 270, 274, 277, 278, 310, 312  
     di saturazione 290, 311  
     residua 290  
     spontanea 314
- magnetone  
     di Bohr 303  
     nucleare 303  
 maser 532, 713  
 massa magnetica 209, 301  
 meccanismi di polarizzazione 152, 154, 160  
 membrana tesa 475, 622  
 metodo  
     dei vettori rotanti 376, 579  
     di Poggendorf 198, 755  
     simbolico 382, 581  
 mezzo  
     dispersivo 464, 484, 521  
     non dispersivo 483  
 microonde 532  
 microscopio 639, 685  
 mobilità 201  
 modello  
     atomico di Bohr-Sommerfeld 44, 709  
     classico della conduzione elettrica 168  
 modo di vibrazione 615, 623, 624, 627  
 modulazione d'ampiezza 473  
 moduli elastici 446, 453, 457  
 momento  
     angolare 44, 302, 304  
     di dipolo elettrico 57, 130, 153, 154, 156, 228  
         magnetico 210, 211, 221, 228, 274, 302,  
             304, 309, 311, 316  
     meccanico su un dipolo 63, 247  
         su un circuito 221, 222, 226, 353  
 monopolio magnetico 211, 221  
 moto di una carica in un campo  
     elettrico 21, 37  
     magnetico 215, 216, 237  
 motori elettrici 331, 396, 397
- N**
- neutrini solari 211, 507  
 neutrone 3, 8, 303, 317, 714  
 nodo di  
     un'onda stazionaria 613, 614, 617, 619, 621  
     una rete 192  
 nucleo atomico 3, 4, 23  
 numeri complessi 386  
 numero  
     atomico 3, 154, 161, 756  
     d'onde 457, 542  
     di Lorenz 174  
     di Mach 489  
     di massa 3

quantico azimutale 44, 724  
di spin 725  
magnetico 44, 724  
principale 44, 724

**O**

occhio 640, 683  
oggetto 655, 664  
ohmetro 197  
olografia 655  
onda/e 443  
capillari 464  
cilindriche 478, 506  
d'urto 489  
di gravità 464  
di pressione 469  
emesse da un dipolo oscillante 508, 511  
elettromagnetiche piane 493, 495, 562  
guidate 628  
hertziane 532, 585, 600  
in un cavo coassiale 392  
in una colonna di gas 453, 585  
corda tesa 451  
membrana tesa 475  
molla 465  
sbarra solida 449, 465  
longitudinali 450, 461  
materiali 713  
ordinaria 563  
piana 444  
armonica 457  
polarizzata 461  
sferiche 476, 505, 540  
stazionarie 612, 618, 620, 622, 623, 627  
straordinaria 563  
sulla superficie di un liquido 463  
torsionali 465  
trasversali 452, 461, 494  
operatore  
di Laplace 83  
vettoriale del 46, 47, 87  
orbitale  
atomico 726  
molecolare 730  
oscillazioni  
in un campo elettrico 63  
magnetico 222  
in un circuito RLC  
permanenti 370, 371  
smorzate 366, 368

oscilloscopio 41  
ozono 534, 712

**P**

pacchetto d'onde 480, 495, 516  
paramagnetismo 270, 273, 274, 304, 310  
nei metalli 313, 740  
parete di Bloch 316  
partitore  
capacitivo 105  
resistivo 184  
periodo di un'onda 458  
permeabilità magnetica  
assoluta 271  
assoluta del vuoto 240  
differenziale 290  
relativa 271  
piano/i  
di incidenza 543  
indefinito, campo elettrico 19  
potenziale 50  
principali 678  
piezoelettricità 160  
pila  
di Volta 162, 205  
reversibile 206  
polarimetro 575  
polarizzabilità  
elettronica 153, 519  
ionica 160  
per orientamento 156  
polarizzatore 567, 568  
polarizzazione  
di un dielettrico 130, 131, 138, 140, 153, 156  
elettronica 130, 153  
per orientamento 130, 154  
di un'onda 461  
circolare 462, 496, 501, 572, 576  
ellittica 462, 496, 501, 572  
parziale 556  
per riflessione 557  
rettilinea 461, 496, 501, 557, 571  
elettrolitica 204, 206  
poli magnetici 208, 301  
ponte  
capacitivo 389  
di Wheatstone 199  
potenza di un'onda  
cilindrica 478  
piana 466, 467

sferica 476  
potenza elettrica 170, 176, 340  
apparente 393  
media 330, 392, 393  
reale 393  
reattiva 393  
potenza irradiata

da un dipolo oscillante 509, 510, 511  
da una carica in moto accelerato 511, 512  
per radiazione di sincrotrone 513

potenziale  
d'arresto 698  
elettrico 31, 33, 34, 46, 364  
di dipolo 57  
di un campo uniforme 38  
di un dielettrico polarizzato 133  
di un sistema di cariche 60  
magnetico scalare 266  
vettore 263, 364

potenziometro 198

potere  
convergente 672, 675  
dispersivo 645, 688  
emissivo 624, 693  
risolutivo 639, 640, 646, 688  
rotatorio 575  
termoelettrico 754

precessione di Larmor 308

pressione  
di radiazione 502  
elettrostatica 117  
magnetica 347  
osmotica 201, 205

principio di  
Babinet 637  
combinazione di Rydberg e Ritz 709  
complementarietà 716  
equivalenza di Ampère 223, 246  
esclusione di Pauli 304, 725  
Fermat 689  
Huygens-Fresnel 541, 587, 631  
indeterminazione 717  
sovraposizione 11, 33, 446, 578

prisma 686  
di Nicol 567  
problema di Dirichlet 125  
prodotto misto di tre vettori 88  
produzione di coppie 705  
protone 3, 8, 303  
pulsazione  
di ciclotrone 237  
di plasma 527

di taglio 390  
di un'onda armonica 457  
propria 367, 518, 522

## Q

quadrupolo  
elettrostatico 126  
magnetico 298  
quantità di moto  
di un fotone 532, 702  
di un'onda elettromagnetica 502, 504  
quantizzazione  
del momento angolare 44, 303  
dell'energia 44, 515, 532, 696  
della carica 3  
spaziale 44, 303, 306  
quark 115, 211, 303

## R

radiazione  
degli atomi 515  
di cavità 624  
di frenamento 513  
di sincrotrone 513  
di un'una carica accelerata 511, 512  
di un'antenna dipolare 510, 511  
solare 506, 536  
termica 627, 692  
raggio, raggi  
classico dell'elettrone 115, 517  
del nucleo 4  
di curvatura in campo magnetico 215  
(onde) 475, 506, 662  
parassiali 664  
X caratteristici 535, 712  
di frenamento 513, 535  
 $\gamma$  535  
ramo di una rete 184, 192  
rapporto giromagnetico 304  
reatanza 375, 385  
regola  
della vite 52, 55, 82, 214, 235, 241  
delle maglie 195, 384  
di Hund 726  
di Kirchhoff 650, 693  
relazione/i di  
de Broglie 714  
dispersione 485

- Stokes 551, 603  
 reostato 198  
 resistenza  
     critica 368  
     d'antenna 510, 511  
     di carico 184  
     di conduttori tridimensionali 199  
     di un conduttore metallico 172  
     interna 182  
 resistività 179, 374, 383  
 resistore 179, 374, 383  
 rete elettrica 192, 384  
 reticolo  
     cristallino 658  
     di diffrazione 641  
     zonato di Soret 653  
 riflessione  
     della luce 544, 602, 611  
     di onde elastiche 560, 612  
     metallica 577  
     totale 545, 552, 663  
 rifrazione  
     della luce 545, 611  
     di onde elastiche 560  
 righe spettrali 648, 650, 708  
 rigidità dielettrica 129, 144  
 riluttanza 292  
 risonanza 372, 521, 615  
 rotore 54, 56, 86
- S**
- schermo  
     elettrostatico 95  
     magnetico 284  
 selettori di velocità 234  
 semiconduttori 743  
 sensazione sonora 471  
 separatore elettrostatico 40  
 serie  
     armonica 614, 616, 618  
     di Fourier 459  
         complessa 460  
         spettrali 708  
 sezione principale 566  
 shunt 196  
 sincrociclotrone 238  
 sincrotrone 238, 299  
 sintesi del suono 620  
 sistema diottico centrato 680  
 smagnetizzazione adiabatica 313
- solenoide  
     rettilineo 248, 256, 279  
     toroidale 257, 279  
 solidi  
     covalenti 734  
     ionici 734  
     metallici 735  
     molecolari 735  
 soluzione elettrolitica 200  
 sonda di Hall 231  
 sorgenti coerenti 542, 579, 587, 602, 611  
 specchio, specchi 664  
     di Fresnel 594  
     di Lloyd 594  
     piano 594, 669  
     sferico 665, 668  
 spettro  
     delle onde elettromagnetiche 531  
     di assorbimento 649, 710  
     di emissione 648, 708  
 spettrogramma  
     di Debye-Scherrer 660  
     di Laue 660  
 spettrografo a cristallo 660  
 spettrometro  
     a prisma 688  
     a reticolo 647  
     di massa 232, 233, 235  
 spettroscopia 647  
 spin 211, 303  
 spira (anello)  
     campo elettrico 17  
     campo magnetico 245  
     potenziale 49  
 strato antiriflettente 605  
 strumento universale 197  
 suscettanza 382, 385  
 suscettività  
     elettrica 128, 153, 156, 519  
     magnetica 272, 290, 310, 312, 347  
 superconduttività 174, 297, 749  
 superficie equipotenziale 51, 90
- T**
- tavola periodica 728  
 telescopio 639  
 temperatura  
     di Curie 291, 315  
     critica 174  
 tempo di coerenza 481, 590

sferi  
potenz:  
appa  
med  
real  
reat:  
potenz  
da t  
da t  
per  
potenz  
d'au  
elet  
ma  
vet  
poten:  
potere  
cor  
dis  
em  
ris  
rot  
ter  
prece  
press  
di  
ele  
m  
os  
princ  
B  
cc  
cc  
ed  
e:  
F  
E  
in  
S  
pris  
d  
prol  
proc  
proc  
proc  
pul:  
C  
C

tensione elettrica 29, 182  
di Hall 230  
tensoro suscettività elettrica 140  
teorema  
del gradiente 46  
della divergenza 81, 86, 87  
di Coulomb 90  
di Fourier 459  
di Kirchhoff 540  
di Stokes 55, 87  
termometro a termocoppia 755  
timbro 617, 620  
trasformatore 387, 394  
trasformazioni galileiane di E e B 268  
tubo di  
Coolidge 513  
Quincke 586

**U**

ultrasuoni 472  
ultravioletto 534

**V**

valenza 201  
valore efficace 330, 392, 499  
velocità  
della luce 242, 252, 392, 493, 495, 536, 610,  
di deriva 164, 169, 218  
di fase 484, 629  
di Fermi 163  
di gruppo 486, 523, 629, 716  
di propagazione 392, 444, 450, 452, 455, 463  
465, 476  
ventre di un'onda stazionaria 613, 614, 617, 619  
vettore di  
Poynting 498  
propagazione 474  
voltmetro 201, 204  
voltmetro 196

**Z**

zone di Fresnel 651