

1: CINEMATICA

Tabella 1

Fattore di moltiplicazione	Prefisso		Fattore di moltiplicazione	Prefisso	
	Nome	Simbolo		Nome	Simbolo
10^{12}	tera	T	10^{-2}	centi	c
10^9	giga	G	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-9}	nano	n
10^2	etto	h	10^{-12}	pico	p
10^1	deca	da	10^{-15}	femto	f
10^{-1}	deci	d	10^{-18}	atto	a

- ✓ **Cinematica:** studio del moto dei corpi, come variazione di posizione rispetto ad altri, tra loro fermi, assunti come riferimento.
- ✓ **Sistemi di riferimento:** definizione di coordinate spaziali $O(xyz)$ e temporali t .
- ✓ **Vettore spostamento** di un punto: $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$
Equazione del moto di un punto

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

con moti componenti: $i x(t) , j y(t) , k z(t)$.

- Per eliminazione di t dai moti componenti si ottiene l'equazione della linea **traiettoria**, su cui si definisce un'ascissa curvilinea s . L'**equazione oraria** è $s = s(t)$.

Grandezze tipiche

spostamento, $\mathbf{r}(t)$

velocità, $\mathbf{v}(t) = d(\mathbf{r})/dt$

accelerazione, $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

\mathbf{v} è sempre tangente alla traiettoria; \mathbf{a} ha componente tangenziale $\mathbf{a}_t = \tau dv/dt$ ($\neq 0$ solo se v varia) e componente normale $\mathbf{a}_n = \mathbf{n} v^2/R$ ($\neq 0$ solo se varia la direzione di \mathbf{v}).

Tipi di moti

m. **rettilineo uniforme**: $\mathbf{v} = \text{cost}$; equazione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$

m. **uniformemente accelerato**: $\mathbf{a} = \text{cost}$; equazione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

m. **circolare uniforme**: traiettoria circolare, $v = \text{cost}$, accelerazione centripeta. Velocità angolare $\omega = v/R$

m. **centrale**: accelerazione diretta sempre verso un punto; si conserva la velocità areolare $\dot{\mathbf{S}} = d\mathbf{S}/dt = \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

- **Moti relativi.** Descrizione del moto di un punto da due sistemi di riferimento in moto reciproco, detti *assoluto* e *relativo*, equivalenti nella descrizione cinematica.

Dato il moto di un punto nel sistema relativo (r) e il moto di trascinamento (t) di questo rispetto al sistema assoluto (a), si ha

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_t$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$$

Per le accelerazioni è, in generale, $d\mathbf{v}_r/dt \neq \mathbf{a}_r$ e $d\mathbf{v}_t/dt \neq \mathbf{a}_t$ e si ha

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

con \mathbf{a}_c (*accelerazione complementare* o di Coriolis) $= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$.

EQUAZIONI DEL MOTO. MOTI COMPONENTI

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$$

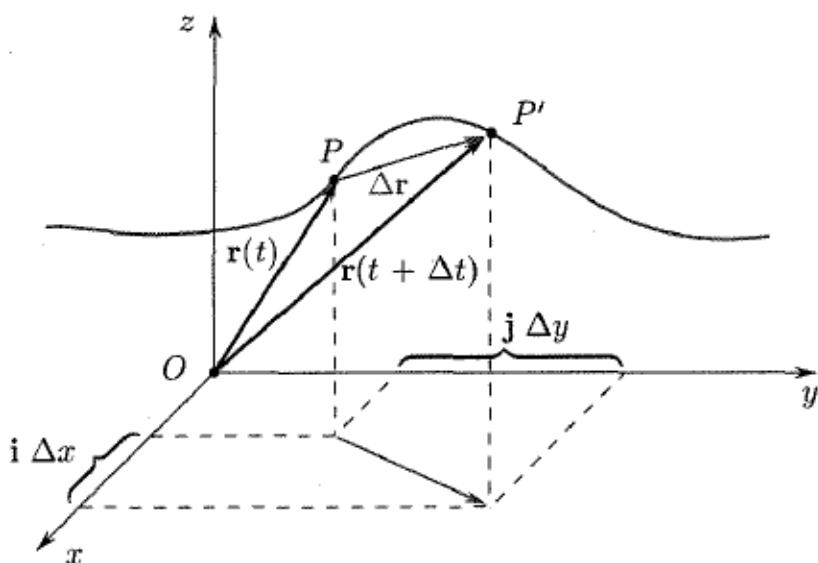
Traiettoria e Equazione Oraria

durante il moto di un punto in un intervallo di tempo,
tale punto descrive una linea nello spazio che si chiama **traiettoria**.

$$s = s(t)$$

Equazione oraria e rappresenta lo spostamento nel tempo

Spostamenti



$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$$

Gradi di Libertà

Il numero minimo di coordinate necessario a determinare in maniera univoca nello spazio di riferimento la configurazione spaziale di un sistema si chiama **numero dei gradi di libertà**. Si dirà quindi che un punto materiale in moto nello spazio, su una superficie fissata o lungo una linea fissata ha un numero di gradi di libertà pari rispettivamente a 3, 2, 1.

Moto Rettilineo Uniforme

m. rettilineo uniforme: $\mathbf{v} = \text{cost}$; equazione $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$

$$v_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$y = \int_0^t v \, dt = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2.$$

Moto armonico

Spostamento è la funzione periodica (sen o cos) nel tempo che varia da -A ad A
Equazione oraria

$$x = A \sin \omega t$$

A corrisponde all'ampiezza del moto armonico, ovvero alla distanza massima da O raggiunta dal punto,

ωt è l'angolo di fase

$\sin \omega t$ che varia da -1 a 1

Pulsazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

Nel moto armonico l'accelerazione è proporzionale allo spostamento attraverso una costante negativa

Possiamo vedere che x ed at sono in opposizione di fase:
sappiamo che l'accelerazione, è diretta lungo l'asse x , la sua intensità è
proporzionale a ogni istante a x ma vediamo che il suo verso è sempre contrario a
quello di x . Da ciò capiamo che il vettore accelerazione è sempre diretto verso O.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

m. circolare uniforme: traiettoria circolare, $v = \text{cost}$, accelerazione centripeta. Velocità angolare $\omega = v/R$

Il moto circolare è così detto perché avviene su traiettoria circolare

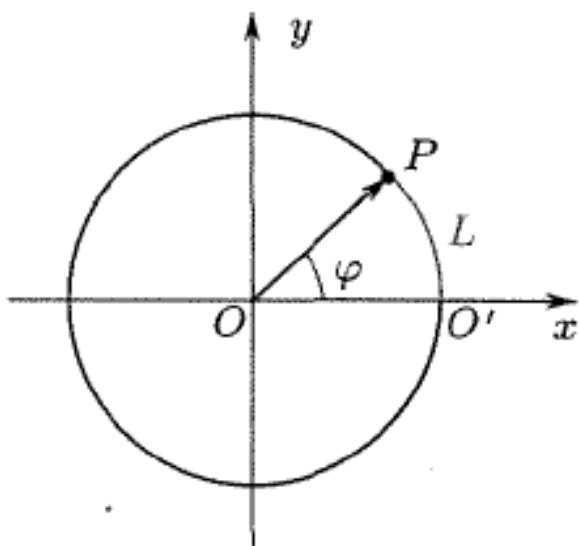


Fig. 1.14

OP vettore spostamento

L'angolo phi, è l'angolo di fase all'istante t

Velocità scalare

$$v(t) = \dot{s}(t) = \dot{L}(t).$$

con L la lunghezza dell'arco

$$\dot{L}(t) = R\dot{\varphi}(t).$$

velocità angolare scalare e si misura in radianti al secondo

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega$$

La velocità angolare vettoriale w invece ha

1. direzione normale al piano della traiettoria (come l'asse z);
2. il verso dal quale si vede il punto muoversi sulla traiettoria in verso antiorario

cioè il verso di \mathbf{k}

3. Intensità $w = \text{modulo}(\phi(t))$. Evidentemente la velocità angolare scalare, $\phi(t)$, è la componente di w sull'asse orientato \mathbf{z} cioè

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{k}.$$

moto circolare uniforme, archi percorsi dal punto materiale sono proporzionali ai tempi quindi ha un equazione oraria di primo grado quindi:

$$L(t) = v t$$

$$\varphi(t) = \frac{v}{R} t.$$

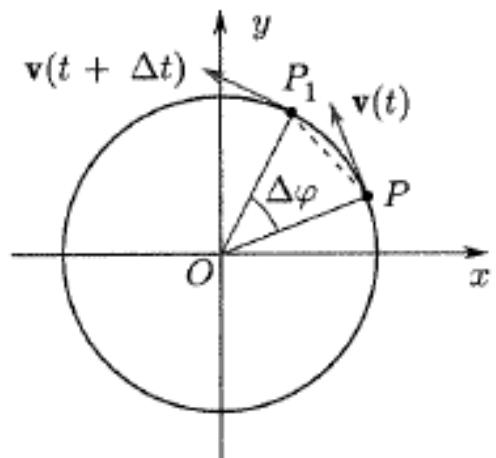
ho come velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Se il moto è periodico indico con T il periodo

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



L'accelerazione nel moto circolare uniforme è quindi solo normale, è diretta verso il centro (centripeta) e ha intensità v^2 / R .

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Moto circolare uniforme e moto armonico

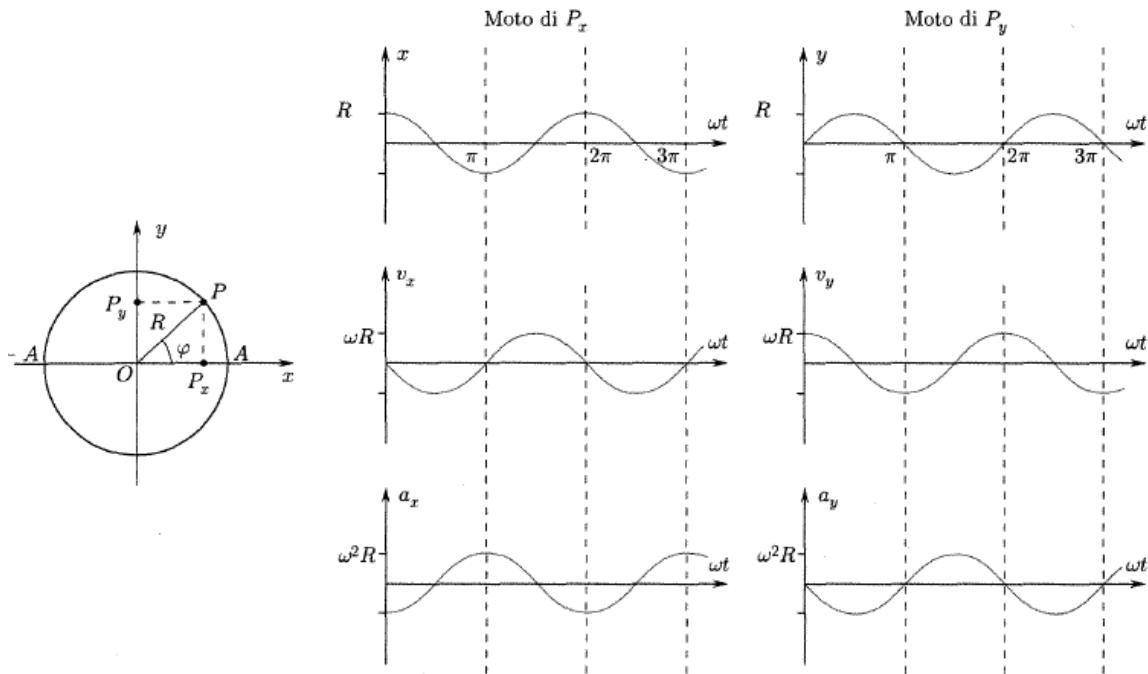


Fig. 1.17

le equazioni orarie per i moti di P_x e P_y sono rispettivamente

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t = R \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ y = R \sin \omega t. \end{cases}$$

e con la derivata mi trovo le velocità scalari

$$v_x = -R\omega \sin \omega t$$

$$v_y = +R\omega \cos \omega t$$

e da qui mi posso trovare la velocità del moto composto che ha intensità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

Faccio la stessa cosa che ho fatto prima nel caso abbiamo delle accelerazioni

$$a_x = \omega^2 x$$

$$a_y = \omega^2 y.$$

e quindi l'accelerazione composta ha intensità:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}.$$

MOTI CENTRALI VELOCITÀ AREOLARE

m. centrale: accelerazione diretta sempre verso un punto; si conserva la velocità areolare $\dot{S} = d\mathbf{S}/dt = \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

I moti centrali sono necessariamente piani
Abbiamo definito velocità areolare scalare

$$\dot{S} = \frac{1}{2}rv \sin \theta.$$

e corrisponde alla derivata temporale dell'area spazzata dal vettore posizione

MOTI RELATIVI

Moti relativi. Descrizione del moto di un punto da due sistemi di riferimento in moto reciproco, detti *assoluto* e *relativo*, equivalenti nella descrizione cinematica.

Dato il moto di un punto nel sistema relativo (r) e il moto di trascinamento (t) di questo rispetto al sistema assoluto (a), si ha

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_r + \mathbf{r}_t$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$$

Per le accelerazioni è, in generale, $d\mathbf{v}_r/dt \neq \mathbf{a}_r$ e $d\mathbf{v}_t/dt \neq \mathbf{a}_t$ e si ha

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c$$

con \mathbf{a}_c (*accelerazione complementare* o di Coriolis) $= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$.

Tale accelerazione scompare quando $V_r = 0$, cioè il punto è fermo nel sistema mobile, oppure quando w e v_r risultino paralleli.

2: DINAMICA

- ✓ **Dinamica:** studio del moto dei corpi, riferito alle cause che lo determinano.
- ✓ **Punto materiale:** modello di corpo, privo di dimensioni spaziali (punto), ma che mantiene la caratteristica inerziale (massa, materia).
- ✓ **Leggi di Newton** per un punto materiale (corpo):
 - I. Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, fintanto che non interviene una causa esterna (forza) a determinarne una variazione.
 - II. L'accelerazione di un corpo è pari al rapporto tra la forza complessiva agente su di esso e la sua massa.
 - III., Se su un corpo A agisce una forza \mathbf{F} da parte di un corpo B , su B agisce una forza $-\mathbf{F}$ da parte di A , eguale, contraria, sulla medesima retta di applicazione (*principio di azione e reazione*).
- La prima legge definisce implicitamente i *sistemi inerziali*, dove non ci sono *forze apparenti*. Esempi di forze apparenti: forze centrifughe ($m\omega^2 r$) in sistemi di riferimento ruotanti con ω ; forze inerziali in sistemi accelerati (auto, vagone); forze di Coriolis ($-2m\omega \times \mathbf{v}_r$) su un punto in moto in un sistema in rotazione. La seconda legge fornisce il moto, per integrazione dell'equazione differenziale

$$md^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t \dots)$$

cui si aggiungono le *condizioni iniziali*: $\mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0$.

- Per integrazione, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$, con $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, *quantità di moto* (teorema dell'impulso).
Interazioni fondamentali. Tutte le forze sono riconducibili a quattro tipi, esercitandosi mutuamente tra particelle:
 1. forze *gravitazionali* (tra masse);
 2. forze *elettromagnetiche* (tra cariche e tra correnti elettriche);
 3. forze *nucleari forti* (tra particelle elementari, adroni);
 4. forze *nucleari deboli* (tra particelle elementari).

Tipi di forze, macroscopicamente distinte:

peso, mg . Forza agente su ogni corpo sulla superficie terrestre, somma della forza gravitazionale e della forza centrifuga;

forze elastiche, $-kr$. Si devono alla deformabilità dei corpi;

reazioni vincolari, \mathbf{R}_N . Normali alla superficie di contatto tra due corpi;

attrito, $A \leq \mu_s R_N$. Tangenti alla superficie di contatto. In movimento è $A = \mu_d R_N$ ($\mu_d < \mu_s$);

resistenze passive, $-bv$. Sempre dissipative.

Moti dovuti a vari tipi di forze:

Pendolo semplice (piccole oscillazioni isocrone $T = 2\pi\sqrt{l/g}$).

Oscillatore libero, $\omega = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$, in assenza di resistenza $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Oscillatore forzato, curva di risposta dell'ampiezza $x(\omega, t)$; risonanza per $\omega \simeq \omega_0$ (se $b^2 \ll 4km$).

Grandezze tipiche

Quantità di moto, \mathbf{p}

Momento polare di una forza, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}$.

Momento assiale di una forza, M_a , proiezione di \mathbf{M}_0 su a , con O qualsiasi sulla retta.

Momento polare della quantità di moto, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}$.

Momento assiale della quantità di moto, b_a , proiezione di \mathbf{b} su a , con O qualsiasi sulla retta.

Dalla $\mathbf{F} = ma$: $\mathbf{M}_0 = d\mathbf{b}/dt + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}$ ($= d\mathbf{b}/dt$, se: $\mathbf{v}_0 = 0$, o $\mathbf{p} = 0$, o $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{p}$)

- Per integrazione: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \Delta \mathbf{b}$ (teorema dell'impulso e del momento della quantità di moto)

Legge d'inerzia e terne inerziali

Un osservatore che egli stesso è un corpo e che non è soggetto ad azioni esterne si dirà inerziale, il sistema (terna) di riferimento a esso solidale si dirà sistema inerziale, inoltre ogni terna in moto di traslazione uniforme rispetto a una terna inerziale è anch'essa inerziale.

A differenza di quindi che una proprietà fondamentale dei corpi materiali è quella di mantenere inalterate la velocità vettoriale in assenza di azioni esterne.

Forza e massa inerziale

Una forza è una possibile condizione che fa alterare la velocità di un corpo in un sistema inerziale, ad esempio preso un corpo in un sistema di riferimento inerziale che non subisce perturbazioni, sappiamo che il corpo avrà velocità costante, se ad un determinato punto questo corpo viene perturbato da un altro oggetto, esso subirà un cambiamento di velocità. Da ciò possiamo dedurre che una forza applicata su un oggetto ha un verso e una direzione ed un'intensità (caratteristiche di un vettore).

Una forza si definisce uguale ad un'altra forza se contemporaneamente soddisfa l'uguaglianza delle 3 caratteristiche vettoriali (intensità, verso e direzione). Per misurare l'intensità di una forza si utilizzano particolari strumenti, come ad esempio il dinamometro, che attraverso l'allungamento di una molla, riesce a calcolare l'intensità della forza che la causa.

La massa inerziale è una proprietà intrinseca del corpo, perché dipende dalla sua composizione atomica e lega la forza applicata al corpo alla variazione di velocità subita. La massa inerziale è una grandezza fisica scalare,

Primo principio della dinamica (== Principio di inerzia)

Ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne (punto materiale libero) persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Secondo principio della dinamica

In un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un corpo puntiforme (punto materiale) prodotta da forze applicate è direttamente proporzionale alla somma delle forze stesse ed è inversamente proporzionale alla massa del corpo.

$$F = ma$$

Questo principio è valido solo nei sistemi inerziali in cui F è la somma di tutte le forze reali che agiscono sul corpo, ovvero anche quelle forze dovute all'azione di altri corpi.

Nei sistemi non inerziali possiamo applicare questa formula, ma dobbiamo prendere in considerazione anche le forze fintizie dovute dalle accelerazioni del sistema stesso. Scomponendo il vettore forza sulla terna si ottiene che:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right.$$

Nel caso in cui la forza applicata ad un corpo è dovuta alla somma di n forze, si può scomporre l'accelerazione che subisce, come la somma di quelle dovute alle singole forze:

$$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i = m \sum_1^n \mathbf{a}_i = m\mathbf{a} .$$

Infine possiamo definire un corpo in equilibrio, se la risultante delle forze è uguale a 0, e in questo caso la velocità è costante.

Quantità di moto e impulso

Definiamo quantità di moto una grandezza vettoriale la cui intensità è data dal prodotto tra massa inerziale e velocità

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

in un sistema di riferimento inerziale la forza totale applicata a un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del vettore quantità di moto.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Teorema di conservazione della quantità di moto

Dal primo principio della dinamica in un sistema inerziale, un punto materiale non sottoposto a Forze mantiene inalterata la sua quantità di moto

Dal secondo principio della dinamica possiamo dire che in un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto di un punto materiale sottoposto a forze la cui somma è nulla ($\mathbf{F} = 0$), resta costante.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Quindi dalla formula sopra indicata posso ottenere

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

$\mathbf{F} dt$ è chiamato impulso elementare e da questo ottengo che:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

L'integrale a primo membro prende il nome di impulso della forza durante l'intervallo di tempo considerato.

Terzo principio della dinamica

A ogni azione esercitata da un corpo puntiforme A su un corpo puntiforme B corrisponde una reazione uguale e contraria diretta lungo la congiungente dei due punti materiali.

Forza peso

Ogni punto materiale avente massa m_1 attrae un altro punto materiale di massa m_2 , con una forza diretta lungo la congiungente dei due punti.

Ogni corpo sulla terra subisce un'attrazione verso il centro di essa a causa della gravità, questa attrazione viene chiamata Forza peso.

Oltre alla forza di gravità, il corpo subisce una forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra, ma poiché la prima è molto minore rispetto alla seconda, allora si ignora.

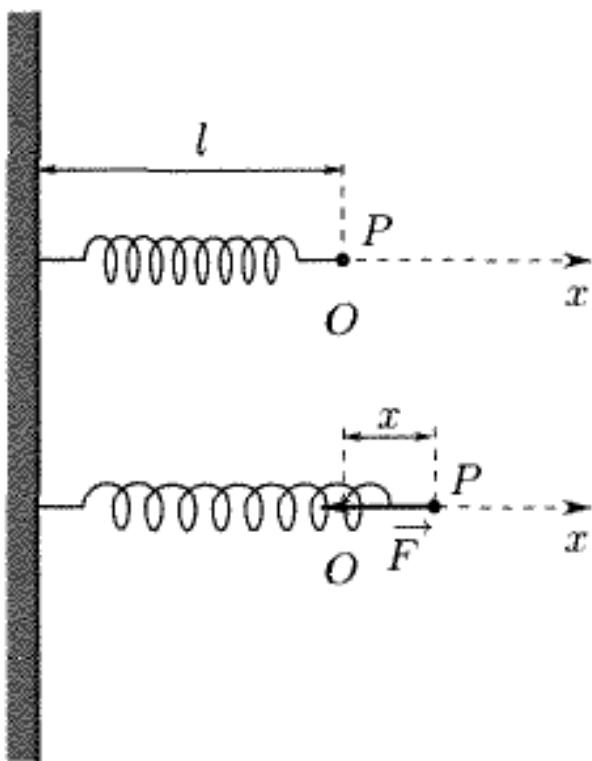
$$\mathbf{P} = mg$$

con m la massa del corpo e g accelerazione di gravità (costante = 9.81 m/s^2)

Forze elastiche

Tutti i corpi se soggetti a sollecitazioni si deformano e si oppongo con forza uguale e opposta a quella esterna, per tornare poi nella posizione di partenza.

Prendiamo in considerazione una molla



La forza di richiamo sarà sempre opposta al verso della deformazione, ed è proporzionale ad essa per spostamenti piccoli.

Nel nostro caso se consideriamo una retta, la forza è data dal prodotto di

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

dove k è la costante elastica ($k > 0$) e i è il versore dell'asse x.

Nel caso più generale indicando la posizione del punto tramite il vettore di posizione r, si ha che

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

Reazioni vincolari

Nel 2° principio siamo andati a considerare la somma di tutte le forze agenti sul corpo, nel caso di moto in un sistema inerziale si considerano solo le forze reali.

Esse si dividono in FORZE ATTIVE o esterne e REAZIONI VINCOLANTI.

Le forze attive sono quelle imposte al corpo dall'esterno, le reazioni vincolanti sono invece causate dalle limitazioni di movimento imposte al corpo (piano di appoggio, rotaie di un treno).

La reazione vincolante si manifesta al momento in cui il corpo tende a superare un vincolo, tale reazione è sempre normale ad esso ed è opposto alla forza e avente modulo pari a F.

Questa reazione è giustificata dal 3° principio della dinamica.

Forze di attrito

Prendiamo in considerazione una forza applicata su un oggetto, esso percorrerà una distanza X prima di fermarsi, questo è dovuto alla forza di attrito.

La forza di attrito è una forza che ha verso opposto allo spostamento e modulo proporzionale ad un vettore reazione normale R
 Preso un corpo in movimento sull'asse x il vettore reazione R è definito come sommatoria di tutte le forze agenti sull'asse y , con verso positivo concorde all'asse y .
 Notiamo che mettendo un oggetto di massa m su un piano orizzontale e applicandogli una forza crescente, esso inizialmente non si sposterà questo è dovuto alla forza di attrito, infatti possiamo dire che il corpo non si sposterà fino a quando

$$F \leq \mu_s R_N$$

indichiamo con μ_s il coefficiente di attrito statico (che dipende dai tipi di materiale che sono a contatto), e con R_N la reazione normale del corpo definita pocoanzi.

Indichiamo la forza di attrito con

$$A_{\max} = \mu_s R_N$$

Una volta che F supera il prodotto tra μ_s ed R , il corpo inizierà a muoversi, a questo punto dobbiamo definire una nuova variabile, ovvero quella del coefficiente di attrito dinamico μ_d , e possiamo dire che per mantenere il corpo in un moto rettilineo uniforme dobbiamo avere che

$$F = \mu_d R_N$$

Resistenze passive

Le resistenze passive sono delle forze che agiscono negativamente su una determinata forza F , oltre alla forza di attrito, possiamo avere anche una resistenza dovuta alla viscosità di un fluido (acqua, olio).

Diciamo che nel caso di basse velocità si ha che

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$$

dove con b indichiamo il coefficiente calcola in base alla viscosità del fluido e alla forma del corpo.

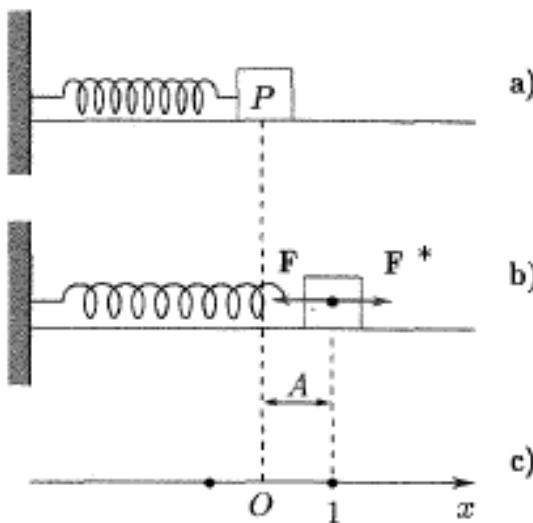
Ad esempio per un corpo sferico si a che

$$b = 6\pi r\eta$$

dove indichiamo con r il raggio della sfera e η indica il coefficiente di viscosità

Oscillazioni libere

Prendiamo in considerazione una molla poggiata su di un piano orizzontale privo di attrito e applichiamoci una forza, in modo tale da allungare la molla e poi togliendo la forza applicata si genererà un moto armonico.



Sapendo che la forza elastica è:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

Applicando il 2° principio della dinamica otteniamo che

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

L'equazione che rappresenta al meglio il nostro moto armonico è

$$x = A \cos \omega_0 t.$$

Sappiamo che A è l'ampiezza massima e ω_0 è la pulsazione propria, ovvero la velocità con cui avvengono le oscillazioni e ora ci calcoleremo rispettivamente la pulsazione, l'ampiezza e la fase iniziale

- prima di tutto ci calcoliamo la pulsazione propria, mi trovo l'accelerazione come derivata seconda di x :

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x} &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ \ddot{x} &= -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

e sostituendo i risultati appena ottenuti all'equazione derivante dal secondo principio della dinamica otteniamo che

$$-A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{k}{m} A \cos(\omega_0 t) = 0$$

Inoltre ponendo $t=0$ abbiamo:

$$-\omega_0^2 + \frac{K}{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Dà ω_i , essendo $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Ora ci troviamo l'ampiezza massima, prendendo in considerazioni l'istante iniziale $t=0$ e la fase iniziale diversa da 0 si ha

$$x(0) = A \cos(\varphi) = A \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (x(t) = A \cos(\omega t + \varphi))$$

derivando ottengo che la velocità iniziale sarà

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A \omega_0 \sin(\varphi)$$

Ora abbiamo che

$$\begin{cases} x_0 = A \cos(\varphi) \\ v_0 = -A \omega_0 \sin(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_0}{\omega_0} = -A \sin(\varphi) \end{cases}$$

Elevando entrambe al quadrato e sommandole membro a membro ottengo che

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \quad \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

- Fase iniziale, la ricavo partendo dalle due equazioni di prima

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = A \cos(\varphi) \\ v_0 = -A \omega_0 \sin(\varphi) \end{array} \right.$$

e dividendo membro a membro ottengo

$$\frac{v_0}{x_0} = - \frac{\omega_0 \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\boxed{\tan(\varphi) = - \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0}}$$

Oscillazioni smorzate

Prendiamo il caso di una molla che subisce una resistenza passiva come ad esempio quello di un fluido.

La forza di tale resistenza è:

$$F = -bv$$

Il corpo collegato alla molla è quindi soggetto a due forze, quella elastica e quella causata dalla resistenza del fluido.

Applicando il 2° principio della dinamica abbiamo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

Ottengo la seguente equazione differenziale

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = 0$$

Equivalentemente

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \mid \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

L'equazione caratteristica associata è data da

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \omega_0^2 = 0$$

E usando la formula ridotta delle equazioni di secondo grado, trovo lamda (quindi considero b/m pari)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Da questo posso vedere che avremmo 3 casi diversi a seconda del Delta

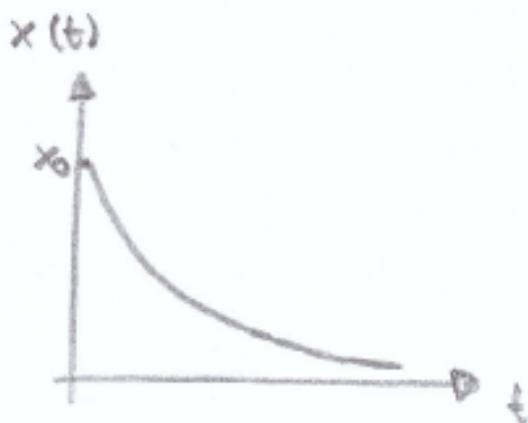
- Smorzamento forte ($\Delta > 0$)

In questo caso abbiamo che

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{b}{2m} t} \left(e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m} t} \left(A_1 e^{\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

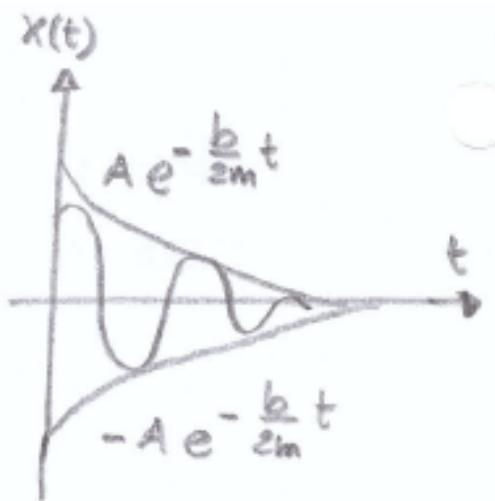


- Smorzamento debole ($\Delta < 0$)

Questa volta avremo una soluzione del tipo

$$x(t) = A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + A_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (\alpha \pm i\beta)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m} t} \left[A_1 \cos\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t\right) \right]$$



- Smorzamento critico (Delta = 0)

In questo caso infine si ha che

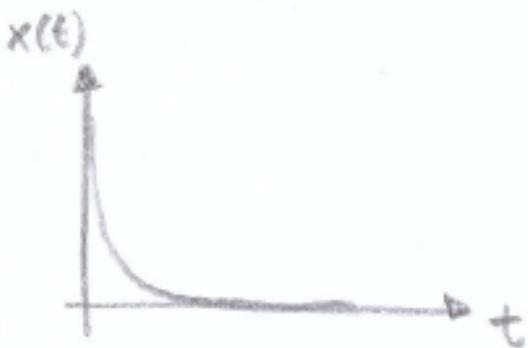
$$\lambda = -\frac{b}{2m}$$

questa è una soluzione del sistema, e l'altra sarà data da

$$x(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (A_1 + A_2 t)$$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m} t} (A_1 + A_2 t)$$

In questa situazione il punto torna all'origine producendo minime oscillazioni



Oscillazioni forzate

In questo caso il punto è soggetto anche ad una forza esterna che varia nel tempo:

$$F = \cos(\omega t)$$

L'equazione sarà quindi:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

Tale equazione differenziale avrà come soluzione quella del caso dell'oscillazione smorzata sommata alla soluzione non omogenea.

La soluzione omogenea è presente negli istanti iniziali (il transitorio), successivamente si attenua fino ad essere trascurabile

La soluzione non omogenea invece rappresenta lo stato di moto (a regime) essa ha la seguente forma

$$x(t) = B F \cos(\omega t - \varphi)$$

con:

$$B = \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{bw}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

L'ampiezza massima BF dipende dal rapporto

$$\frac{\omega}{\omega_0}$$

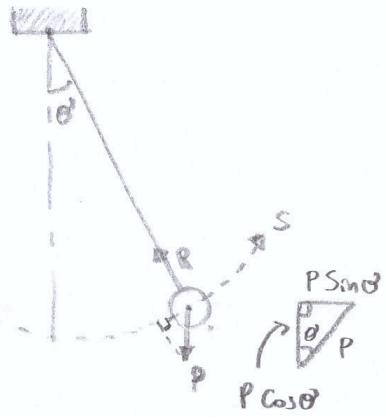
ovvero tra la pulsazione imposta e quella libera.

Pendolo semplice

Il pendolo semplice è formato da una corda inestensibile avente all'estremità una massa m .

Il punto percorre una traiettoria circolare, l'equazione oraria si ottiene applicando il 2° principio della dinamica nella situazione in cui il punto si trovi in un angolo θ rispetto alla verticale.

Prendiamo in considerazione l'ascissa curvilinea S , positiva nella rotazione verso destra (antiorario)



La forza totale è data:

$$F = P + R$$

Proiettata sulla traiettoria curvilinea (R essendo perpendicolare non da alcun contributo)

$$\begin{aligned} ma &= -mg \sin \theta \\ m \frac{d^2S}{dt^2} &= -mg \sin\left(\frac{S}{l}\right) \end{aligned} \quad | S = l\theta$$

Per semplificare la risoluzione di tale equazione consideriamo angoli ridotti ($\sin(\theta)$ tendente a θ)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2S}{dt^2} &= -mg\left(\frac{S}{l}\right) \\ \frac{d^2S}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \cdot S \end{aligned}$$

La soluzione è la medesima del moto armonico $S(t)=A \cos(\omega t)$

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -Aw \sin(\omega t) \\ \ddot{S}(t) = -Aw^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad -Aw^2 \cos(\omega t) = -\frac{g}{l} A \cos(\omega t)$$

Considerando l'istante $t=0$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Il periodo T è dato

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Non essendo un moto rettilineo si ha anche un'accelerazione centripeta ricavata proiettando le forze sulla corda:

$$ma_c = R - mg \cos \theta$$

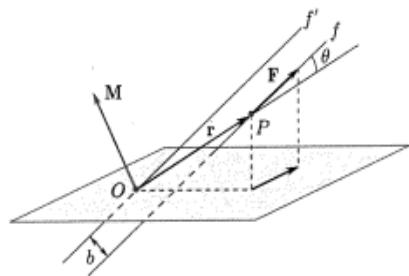
Momento di una forza rispetto a un punto e un asse:

-RISPETTO AD UN POLO:

Per polo intendiamo un punto.

Individuiamo il punto P tramite il vettore posizione r , avente origine in O. Applicando una forza F in P si genera il MOMENTO DI UNA FORZA, dato da:

$$M = r \times F$$



Tale vettore M è normale al piano formato da r ed F ed ha modulo:

$$|M| = |r| \cdot |F| \cdot \sin \theta$$

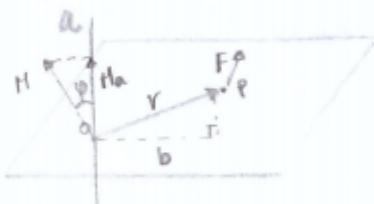
Poichè $r \cdot \sin \theta = b$ (braccio) allora il modulo si può anche scrivere come:

$$|M| = |F| \cdot b \quad [M] = [N \cdot L^2 \cdot T^{-2}] \quad \text{d.o.} \\ (N \cdot m)$$

Se un corpo è soggetto a n forze, il momento risultante sarà dato dalla somma dei momenti delle singole forze:

$$M = r \times F = r \times \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n M_i$$

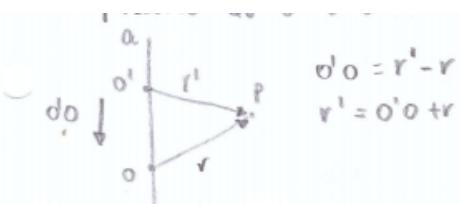
-RISPETTO AD UN ASSE:



$$M_a = M_0 \cdot a = (r \times F) \cdot a$$

$$|M_a| = |M_0| |a| \cos \varphi$$

Il momento assiale non dipende dal punto scelto, poiché esso è la proiezione del momento di una forza rispetto ad un polo allora la posizione da O a O' varia in questo modo:



$$M_{O'} = r' \times F = (O'P + r) \times F = \underbrace{O'P \times F}_{\text{Poiché } \frac{1}{2} \text{ a } O'P \text{ è quindi}} + r \times F$$

ad a non dà nessun contributo

$$M_{O'} = r \times F$$

MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO:

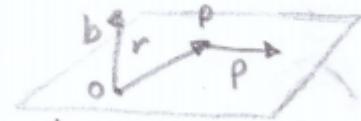
-RISPETTO AD UN POLO:

La quantità di moto di un punto materiale P all'istante t è rappresentato dal vettore $p=mv$ applicato nella posizione assunta dal punto materiale. Preso un punto O (polo) il momento

della quantità di moto rispetto a O è il vettore:

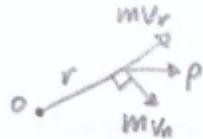
$$[b] = [L^2 \text{MT}^{-1}]$$

$$b = r \times p$$



Il vettore della quantità di moto p può essere decomposto nei vettori:

$$p = mV_n + mV_r$$



Si ha quindi:

$$\begin{aligned} b &= r \times (mV_n + mV_r) = r \times mV_n + \underbrace{r \times mV_r}_{\perp r} = r \times mV_n \\ |b| &= rmV_n \cdot \sin(90^\circ) = rmV_n \quad \rightarrow r \parallel V_r \Rightarrow r \times V_r = 0 \end{aligned}$$

Momento d'inerzia:

Nel caso particolare in cui è presente solo la componente normale della velocità V_n , si ha un moto circolare. In questo caso il vettore $w(\omega)$ (ovvero la velocità angolare) e b saranno paralleli e i moduli avranno la seguente relazione:

$$|b| = rmV_n = mr^2\omega$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

In questo caso ci ha una notevole somiglianza tra il momento della quantità di moto e la quantità di moto ($p=mv$). La velocità V è sostituita dalla velocità angolare ω e la massa m dal MOMENTO D'INERZIA. (mr^2) rispetto ad un punto.

-RISPETTO AD UN ASSE:

Il momento della quantità di moto rispetto ad un asse è dato dalla proiezione del momento della quantità di moto rispetto ad un polo O, su di un asse passante per O (come nel caso del momento di una forza).

TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO:

Consideriamo ora la relazione tra il momento della quantità di moto e una forza.
Iniziamo dal 2 principio della dinamica (sistema di riferimento inerziale):

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Facendo il prodotto vettoriale ad entrambi i membri con il vettore posizione r otteniamo:

$$r \times F = r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = r \times F$$

Derivando la definizione di momento ottengo:

$$\frac{db}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} \quad | b = r \times p$$

e quindi unendo i risultati:

$$\frac{db}{dt} = \frac{dr}{dt} \times p + M$$

OSS

In ogni caso si ha:

$$\frac{dr}{dt} = V_r \quad (\text{Velocità relativa nel sistema inerziale})$$

-POLO FISSO:

Poiché il sistema mobile (ovvero anche il punto O) non si muove rispetto a quello assoluto, nell'equazione dei momenti si ha: $V_r = V_a = V$

$$\frac{db}{dt} = \underbrace{V_r \times mv}_{(V_r = V)} + r \times \frac{dp}{dt} \quad (V \text{ indica la velocità assoluta } V_a)$$

RISPESSO AD UN ASSE

$$\frac{db}{dt} = r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = \boxed{\frac{db}{dt}}$$

$$Ma = \frac{d ba}{dt}$$

-POLO MOBILE:

Poiché in questo caso è un moto traslatorio uniforme del sistema mobile la velocità relativa è data da:

$$V = V_a = V_r + V_t \quad V = V_r + V_o \quad V_r = V - V_o \quad V_o = \text{Velocità del polo}$$

Quindi si ha:

$$\frac{db}{dt} = \underbrace{V \times mv}_{=0} - V_o \times mv + r \times \frac{dp}{dt}$$

$$M = \boxed{\frac{db}{dt} + V_o \times p}$$

FORZE APPARENTI: LA FORZA CENTRIFUGA:

La forza centrifuga è la forza apparente che l'osservatore di un sistema non inerziale in rotazione vede applicata su ogni punto solidale in quiete nel sistema.

La forza centrifuga deve tener conto del moto di rotazione del sistema che l'osservatore potrebbe non rilevare.

Se $a(t) = -\omega^2 r$ è l'accelerazione di trascinamento relativa al punto P nel moto di rotazione rispetto al sistema inerziale allora la forza centrifuga risulta essere $-ma(t)$.

FORZE APPARENTI: LA FORZA DI CORIOLIS:

Nel caso generale in cui il punto materiale si muove in un sistema non inerziale e che il moto di trascinamento implica una rotazione, si presenza la forza di coriolis, ovvero una forza inerziale apparente.

Se indichiamo con V_r la velocità che il punto ha nel sistema di riferimento non inerziale e con w (omega) il vettore velocità angolare del moto di trascinamento del sistema di riferimento non inerziale, allora la FORZA DI CORIOLIS è data:

$$\mathbf{F}_c = -2m\omega \times \mathbf{v}_r .$$

TEOREMA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE (QUANTITA' DI MOTO):

Dal teorema del momento della quantità di moto abbiamo che:

$$M = \frac{db}{dt}$$

$$M dt = db$$

Integrando otteniamo:

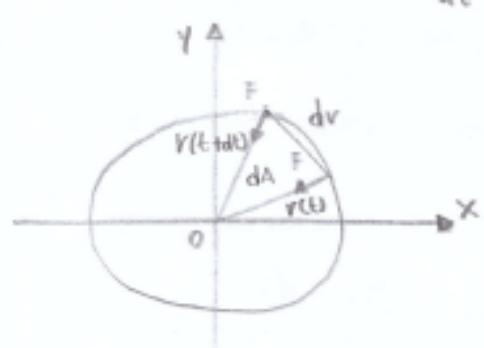
$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{b_1}^{b_2} db = \Delta b$$

Nel caso particolare in cui il momento della forza totale agente su di un corpo è nullo, rimane inalterato il momento della quantità di moto (teorema conservazione del momento angolare) (b costante)

● Applicazione (moto centrale)

Il precedente teorema può essere usato per dimostrare che nel moto centrale la velocità aereolare si conserva

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (\text{Velocità aereolare})$$



In tale moto la forza su cui è soggetto il punto è sempre rivolto verso il centro O, rispetto a tale polo il momento di una forza M è uguale a zero, poiché il braccio è nullo ($M = 0 \Rightarrow b$ costante)

Si ha quindi che: $b = \mathbf{r} \times \rho = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \text{costante}$

Prendendo un istante dt

$$b dt = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} dt = m (\mathbf{r} \times ds)$$

$$\left| \mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \right.$$

Poiché siamo in infinitesimi abbiamo che:

$$b dt = m (\mathbf{r} \times dr) = 2m dA$$

$$\left| dA \approx \frac{1}{2} \mathbf{r} \times dr \right.$$

$$\boxed{b = 2m \frac{dA}{dt} = \text{Costante}}$$

3. LAVORO ED ENERGIA PER IL PUNTO MATERIALE

- ✓ **Teorema del lavoro e dell'energia cinetica** (forze vive): per integrazione nello spazio di $\mathbf{F} = m\mathbf{d}\mathbf{v}/dt$:

$$L = \Delta T$$

- ✓ **Campi di forze**: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Alcune forze, non dipendenti da t , dipendono da \mathbf{r} in modo tale che $\oint \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$ per qualunque percorso d'integrazione entro una certa regione spaziale. Esse si dicono **conservative**. È anche $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}$ indipendente dal percorso da \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 .

Per le forze conservative si introduce un **potenziale**, funzione $U(\mathbf{r})$, la cui variazione è definita da

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Condizione perché \mathbf{F} sia conservativa:

$$\partial F_x / \partial y = \partial F_y / \partial x$$

e le altre equazioni, ottenute per rotazione degli indici.

Campi di forze conservative

forze gravitazionali: $U = -GMm/r$ $(U(\infty) = 0)$

forza peso: $U = mgz$ $(U(0) = 0)$

forze elastiche: $U = \frac{1}{2}kx^2$ $(U(0) = 0)$

Forze non conservative: attrito, resistenze passive.

- Nei campi conservativi:

$$L = -\Delta U = \Delta T \implies \Delta(U + T) = 0$$

(conservazione dell'energia meccanica).

Nei campi non conservativi:

$$L = L_{\text{cons}} + L_{\text{n.c.}} = -\Delta U + L_{\text{n.c.}} = \Delta t \implies L_{\text{n.c.}} = \Delta(U + T).$$

Grandezze tipiche

lavoro, di una forza che sposta il punto di applicazione lungo una linea

$$L = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

potenza, $W = dL/dt$

energia cinetica, $T = \frac{1}{2}mv^2$.

- **Limiti della meccanica newtoniana**: le trasformazioni galileiane, da un sistema di riferimento a un altro, sono approssimate e valide solo per $v \ll c$.

- **Postulato della relatività ristretta**: c è uguale in tutti i sistemi di riferimento (inerziali). Seguono le trasformazioni relativistiche:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - x/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Lavoro ed energia cinetica

Introduciamo il concetto di lavoro per distinguere situazioni in cui una forza, applicata ad un punto, esegue uno spostamento è quando il punto rimane fermo. Per un moto rettilineo con F costante, si definisce lavoro

$$L = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F \Delta s \cos \theta = F_x \Delta s_x + F_y \Delta s_y + F_z \Delta s_z$$

Possiamo generalizzare tale definizione considerando una traiettoria qualsiasi come la somma di tratti di moto rettilineo, in cui la forza F resta costante

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Il lavoro totale sarà dato dalla somma dei lavori infinitesimi nella traiettoria

$$[L] = [H L^2 T^{-2}] [\text{Joule}] \quad L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

I vettori \mathbf{F} e $d\mathbf{s}$ possono essere decomposti nei loro componenti

$$L_{12} = \int_1^2 [(F_x dx) + (F_y dy) + (F_z dz)]$$

Il lavoro può anche essere espresso in funzione del tempo impiegato dal punto materiale a compiere il tratto 1-2, dato che:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$$

Allora il lavoro compiuto dell'intervallo t_0 t è

$$L = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^t (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt .$$

Oss(Lavoro negativo)

Nel caso in cui l'angolo formato dalla forza e dallo spostamento è ottuso il lavoro è negativo, ciò sta a significare che l'ente che esercita la forza subisce il lavoro eseguito dalla reazione del punto materiale

Potenza

Dato L , lavoro compiuto da una forza in un certo intervallo di tempo ($t_2 - t_1$), si definisce potenza il rapporto differenziale tra il lavoro compiuto e il tempo corrispondentemente impiegato, inoltre si definisce potenza media

$$\bar{W} = \frac{L}{t_2 - t_1}.$$

Restringendo l'intervallo considerato e prendendo gli infinitesimi arriviamo a calcolare la potenza instantanea

$$W = \frac{dL}{dt}$$

$$[W] = [L^2 MT^{-3}].$$

Energia Cinetica

Un corpo dotato di velocità e massa ha un'energia chiamata CINETICA che gli consente di eseguire un lavoro

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Tale equazione si ricava applicando il secondo principio della dinamica alla definizione di lavoro

$$dL = F \cdot ds = ma \cdot ds = m \frac{dv}{dt} \cdot ds = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt$$

OSS

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(v \cdot v)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} \cdot v$$
$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

PRODOTTO SCALARE

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \quad (v \cdot v)$$
$$\Leftrightarrow |v|^2 = v \cdot v$$

Si ha quindi

$$dL = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2} m dv^2 = dT$$

Teorema del lavoro o Teorema delle forze vive

Se consideriamo le precedenti equazioni infinitesima, eseguendo l'integrazione per due posizioni (o stati) 1 e 2, ricaviamo il lavoro totale:

$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = \Delta T \text{ (Variazione energia cinetica)}$$

Teo energia cinetica

Il Lavoro compiuto da una qualsiasi forza su un punto materiale è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo

OSS (Forza che contrasta il moto di un corpo)

Consideriamo il caso in cui l'energia cinetica del corpo finale sia nulla ($v=0$) si ha:

$$L_{12} = -T_1 \quad T_1 = -L_{12}$$

In questo caso il lavoro compiuto da una forza esterna sul corpo è negativo, quindi l'ente che esercita tale forza, che contrasta il moto del punto, subisce tale lavoro (L_{12})

In generale un corpo dotato di velocità e massa ha la capacità di compiere lavoro sull'ente che si oppone al suo moto

Se prendiamo in caso un moto circolare l'energia cinetica può essere espressa come

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

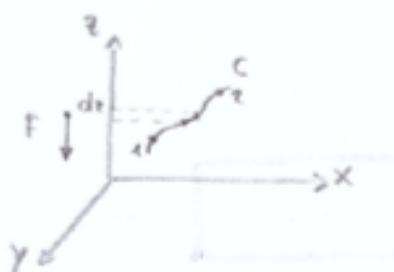
$$\omega = \frac{v}{R}$$

dove mR^2 è il momento d'inerzia del corpo rispetto al centro di rotazione

Campi di forza conservativo

I campi forza conservativi godono della proprietà che il lavoro compiuto dalla forza per spostare un punto da una posizione P1, qualsiasi del campo, a un'altra P2, non dipende dal percorso seguito ma esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale.

• Campo di forze uniformi (Es forza di gravità)



Nel caso in cui la forza è uniforme in verso, direzione e modulo.

Il nostro sistema di riferimento F è diretta in verticale verso il basso, quindi ha solo componente z:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F dz \xrightarrow{\text{proiezione}}$$

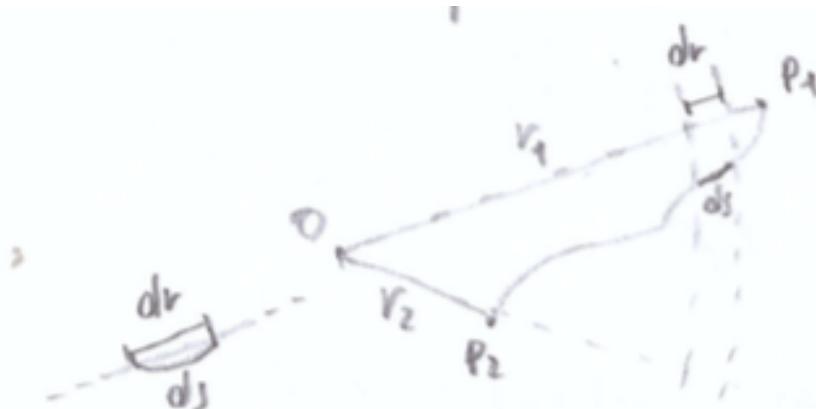
Poiché rivolto verso l'alto

Per ottenere il lavoro totale integriamo

$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_1^2 -F dz = -F(z_2 - z_1) = mg h \quad \left| \begin{array}{l} F = P = mg \\ h = \Delta z \end{array} \right.$$

• Campo di forze centrali

In questo tipo di campo vi è una forza diretta verso un punto O, la cui intensità dipende dalla distanza da O.



Dipendendo solo da r (distanza) la forza si può scrivere come

$$\mathbf{F} = \pm |F(r)| \hat{r} \quad \left| \hat{r} \cdot ds = alr \right.$$

Il lavoro elementare:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm |F(r)| \hat{r} \cdot ds \\ = \pm |F(r)| dr$$

Il lavoro totale

$$L_{12} = \int_1^2 dL = \int_{r_1}^{r_2} \pm |F(r)| dr \xrightarrow{\text{Non si ha più alcun riferimento al percorso, ma solo alla distanza tra } r_1 \text{ e } r_2.}$$

• Percorso chiuso

Poiché il lavoro non dipende dal percorso, si ha che il lavoro totale eseguito su una linea chiusa, in un campo conservativo è sempre nullo

$$L_{TOT} = L_{12} + L_{21} = \int_1^2 dL + \int_2^1 dL = \int_1^2 dL - \int_1^2 dL = 0$$



ENERGIA POTENZIALE:

Sfruttando la proprietà dei campi conservativi definiamo una nuova funzione, che data la differenza tra due posizioni restituiscia il lavoro per spostare un punto materiale. Consideriamo il caso di uno spostamento da un punto di riferimento O ad uno generico P.

$$U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z) = L_{OP}$$

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - L_{OP} = \text{Cost} - \int_0^P dL$$

O (x_0, y_0, z_0)



P (x, y, z)

Per uno spostamento generico $P_1 \rightarrow P_2$ si sfrutta O (Punto di riferimento) come punto di passaggio:

$$L_{12} = L_{10} + L_{02} = \int_1^0 dL + \int_0^2 dL = - \int_0^1 dL + \int_0^2 dL$$

$$L = -\Delta U$$

$$= U(x_1, y_1, z_1) - \text{Cost} + \text{Cost} - U(x_2, y_2, z_2) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2)$$

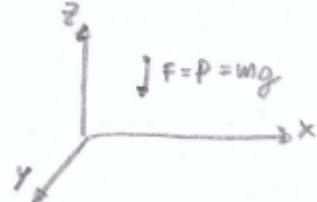
$$= -\Delta U_{12}$$

L'energia potenziale quindi esprime la capacità di compiere lavoro delle forze del campo conservativo.

-CAMPO DELLA FORZA DI GRAVITÀ:

In questo caso si considera solo la componente verticale (z):

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U(z) = \text{Cost} - L_{OP} = \text{Cost} - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \text{Cost} - \int_{z_0}^z -mg dz = \text{Cost} + mgz - mgz_0 \end{aligned}$$



Ponendo l'energia potenziale uguale a zero nel punto di riferimento ($\text{Cost}=0$) e $z_0=0$

$$U(z) = mgz$$

-CAMPO DI FORZE CENTRALI:

Prendiamo come esempio le forze gravitazionali ed elettrostatiche, esse sono del tipo:

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}(r)| \hat{\mathbf{r}} = \pm \frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Ricaviamo quindi l'energia potenziale in questo caso:

$$U(x, y, z) = -L_{OP} = - \int_0^P \pm \frac{k}{r^2} \hat{v} \cdot ds + cost$$

$$= - \left(\int_{r_0}^r \pm \frac{k}{r^2} dr \right) + cost$$

$$= \pm k \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + cost$$

Imponendo $r_0 = +\infty$ e in tale punto pongo l'energia potenziale nulla ($cost = 0$)

$$U(x, y, z) = \pm \frac{k}{r}$$

-CAMPO DI FORZE ELASTICHE:

$$F = -kx \hat{i}$$

$$U(x) = -L_{OP} = - \int_0^P F \cdot ds + cost = \int_0^P kx \hat{x} \cdot ds + cost$$

$$= \int_{x_0}^x kx dx + cost = k \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) + cost$$

Ponendo $x_0 = 0$ e $cost = 0$

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Il teorema delle forze vive nel caso in cui tutte le forze che agiscono sul punto sono conservative assume la seguente forma:

$$L_{12} = \Delta T_{12} = -\Delta U_{12} \Leftrightarrow T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

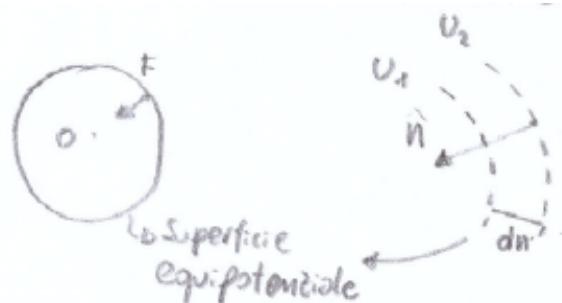
quindi,

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \quad E_2 = E_1 \quad \boxed{E \text{ costante}}$$

La somma tra energia cinetica e potenziale è detta ENERGIA MECCANICA e tale energia si conserva durante il moto.

Descrizione campo di forze conservative mediante energia potenziale

Dalla conoscenza dell'energia potenziale punto per punto di un campo di forze conservative è possibile descrivere completamente il campo di forze. Possiamo quindi definire la direzione, modulo e verso delle forze:



- Direzione

I punti in cui l'energia potenziale non varia descrivono le superficie equipotenziali, le forze del campo sono sempre normali ad esse.

Ad esempio nel caso della forza di gravità le superfici equipotenziali sono quelle orizzontali. Quindi le linee di forza sono perpendicolari alle superfici equipotenziali

- Modulo

Per ricavare il modulo consideriamo un campo di forza centrale

Consideriamo la normale alla superficie, tale forza avrà quindi la medesima direzione

$$\begin{aligned} du &= -dl = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} \\ &= -F_n d\mathbf{n} \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$F_n = -\frac{du}{dn}$$

scomponendo il vettore n nelle sue componenti e descrivendo du mediante il differenziale

$$\left. \begin{aligned} (*) \\ f(x) - f(x_0 + h) &= \frac{df}{dx}(x - x_0) \\ du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned} \right\}$$

ottengo

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \left[\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right] = -[F_x dx + F_y dy + F_z dz]$$
$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right) = -\nabla U$$

Conservazione energia meccanica

Il teorema delle forze vive (o dell'energia cinetica) nel caso in cui tutte le forze che agiscono sul punto sono conservative assume la seguente forma:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \quad E_2 = E_1$$

E costante

Quindi

$$L_{12} = \Delta T_2 = -\Delta U_{12} \iff T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

La somma tra energia cinetica e potenziale è detta Energia MECCANICA e tale energia, in questo caso, si conserva (E costante) durante il moto

Energia meccanica nell'oscillatore armonico

Prendiamo sempre il caso di una molla, una volta distesa, e rilasciata, si mette in moto armonico (consideriamo ce non c'è attrito)

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

In questo caso la forza è sempre diretta verso il centro O

$$F = -K \times \hat{i}$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'energia cinetica è data

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \left| \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega^2 m = k \right.$$
$$= \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

In ogni istante l'energia meccanica è data

$$E = T + U = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2} K A^2 (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2} K A^2$$

Variazione energia meccanica con forze non conservative

Nel caso siano presenti forze non conservative che agiscono su di un corpo l'energia meccanica durante il moto varia.

Per la risoluzione dei problemi occorre quindi utilizzare il teorema dell'energia cinetica valido con tutti i tipi di forze

$$L_{TOT} = \Delta T$$

Possiamo quindi dividere il lavoro totale in due parti quello eseguito da forze conservative e quello eseguito da forze non conservative

$$L_{TOT} = L_{NC} + L_C = L_{NC} - \Delta U = \Delta T \quad \left| L_C = -\Delta U \right.$$

$$L_{NC} + U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

$$L_{NC} = T_2 + U_2 - T_1 - U_1 = T_2 + U_2 - (T_1 + U_1)$$
$$= E_2 - E_1 = \Delta E$$

Ricaviamo quindi che il lavoro fatto dalle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica

$$\boxed{L_{NC} = \Delta E}$$

Gravitazione

✓ Legge di forza tra due masse:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{gravitazione universale, Newton})$$

► **Esperienza di Cavendish per la determinazione di G .** Massa gravitazionale e massa inerziale sono proporzionali; eguali per opportuna scelta della costante di proporzionalità. Peso e massa di uno stesso corpo sono proporzionali, attraverso la *costante g di gravità*, leggermente variabile da punto a punto.

► Moto dei pianeti attorno al Sole

✓ Leggi di Keplero:

I. L'orbita di un pianeta è ellittica, con il Sole che occupa uno dei fuochi.

II. L'orbita è percorsa con velocità areolare costante (*moto centrale*: $\mathbf{b} = \text{cost}$, quindi anche $\dot{\mathbf{S}} = m\mathbf{b}/2$).

III. Costanza del rapporto R^3/T^2 , con R semiasse dell'orbita, T periodo di rivoluzione (per orbite circolari: $mv^2/R = GMm/R^2$).

► **Energia potenziale in un campo gravitazionale:** funzione $U(r) = -GM/r$ con $U(\infty) = 0$; energia potenziale di una massa m : $mU(r)$.

✓ **Velocità di fuga:** velocità necessaria per sfuggire dalla superficie di un corpo gravitazionale di massa M e raggio R :

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Leggi di Keplero

1. Ogni pianeta descrive un'orbita ellittica avente uno dei fuochi occupato dal Sole;

I. L'orbita di un pianeta è ellittica, con il Sole che occupa uno dei fuochi.

2. La velocità areolare di ciascun pianeta è costante, cioè le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole al pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle;

II. L'orbita è percorsa con velocità areolare costante (*moto centrale*: $\mathbf{b} = \text{cost}$, quindi anche $\dot{\mathbf{S}} = m\mathbf{b}/2$).

3 i quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti, cioè dei tempi impiegati da ciascun pianeta a descrivere la propria orbita, sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite stesse.

III. Costanza del rapporto R^3/T^2 , con R semiasse dell'orbita, T periodo di rivoluzione (per orbite circolari: $mv^2/R = GMm/R^2$).

Legge della gravitazione universale

Due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 , si attirano reciprocamente con una forza diretta secondo la congiungente, direttamente proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (r)

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

G è una costante universale che ha lo stesso valore per qualsiasi coppia di corpi

$$G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2.$$

Massa inerziale e massa gravitazionale

Dalla seconda legge della dinamica ($F = ma$) abbiamo detto che una forza è uguale al prodotto della massa del corpo soggetto a quella forza per l'accelerazione che esso subisce.

Inoltre sappiamo anche che la massa è quella grandezza che misura l'inerzia, ovvero la capacità che i corpi hanno di opporsi alle variazioni del loro stato di moto, quindi possiamo chiamare la massa del secondo principio della dinamica massa inerziale

Per fare un esempio di massa inerziale si possono prendere due carrelli di masse differenti e spingerli con la stessa forza su dei binari privi di attrito, sappiamo che il carrello che subirà una minore accelerazione sarà anche quello con massa maggiore

Con l'introduzione della legge di gravitazione universale è stato introdotto che due corpi dotati di massa si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle masse dei due corpi e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Questa legge si chiama per l'appunto universale perché tale forza si esercita tra qualunque coppia di corpi che hanno una massa, tale massa viene chiamata massa gravitazionale

Facciamo un esempio anche del secondo caso, ad esempio... possiamo prendere in considerazione una bilancia e poggiarvi sopra prima un corpo e poi un altro e così sapremo quale sarà il corpo con massa maggiore.

Si può quindi notare che la differenza tra i due metodi usati è che il primo è indipendente dalla gravità, mentre il secondo è basato proprio sull'esistenza di essa.

MECCANICA DEI CORPI RIGIDI:

- ✓ **Corpo rigido:** modello di corpo reale scarsamente deformabile: è invariante la distanza tra due punti qualunque. La posizione di un corpo rigido è definita da 6 parametri; 6 equazioni definiscono il moto di un corpo rigido.
- **Cinematica del corpo rigido:** una posizione di un corpo rigido si riporta a sovrapporre su un'altra operando: 1. una traslazione, che porti a coincidere la posizione di un punto, 2. una rotazione per il punto, che porti a sovrapporre l'intero corpo. Lo spostamento della traslazione e l'asse della rotazione (angolo invariante) possono essere scelti paralleli.
Nell'intorno di un punto, l'atto di moto è *rototraslatorio*.
- **Dinamica del corpo rigido:** descrizione completa (6 equazioni in 6 parametri), suddivisa per la **traslazione:** $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$
con \mathbf{F} risultante forza esterna, \mathbf{p} quantità di moto del corpo, e per la **rotazione:** $\mathbf{M} = db/dt$
con \mathbf{M} risultante momenti delle forze esterne, \mathbf{b} momento della quantità di moto.
- ✓ **Sistemi di forze equivalenti:** risultante eguale e momento risultante rispetto a qualunque polo eguale.
Sistemi di forze equivalenti applicati al medesimo corpo rigido producono il medesimo moto.
- Operazioni elementari per mutare un sistema di forze in uno equivalente: 1. sostituzione di due o più forze applicate in un punto con il risultante della poligonale; 2. aggiunta o soppressione di una coppia di forze a braccio nullo.
- ✓ **Coppia di forze:** due forze uguali applicate su rette parallele in verso opposto; una coppia ha **momento intrinseco**, indipendente dal polo.
- **Riduzione sistema di forze:** ogni sistema è riducibile a una forza e una coppia: forza e coppia determinano il moto traslatorio e rotatorio del sistema di punti, completamente il moto di un corpo rigido.
- ✓ **Corpo con asse fisso:** Moto descritto da una sola equazione scalare: $M_a = db_a/dt$, con $b_a = I_a \omega$ e $I_a = \int_V \rho r^2 dV$, momento d'inerzia assiale.
- ✓ **Energia cinetica di rotazione:** $T = \frac{1}{2} I_a \omega^2$.
- **Moto di precessione:** prodotto su corpo in rapida rotazione (**b** grande) da una coppia (momento τ): variazione Δb (non **b**) proporzionale a (e nella direzione di) τ (*giroscopio*, trottola, precessione asse della Terra ecc.).

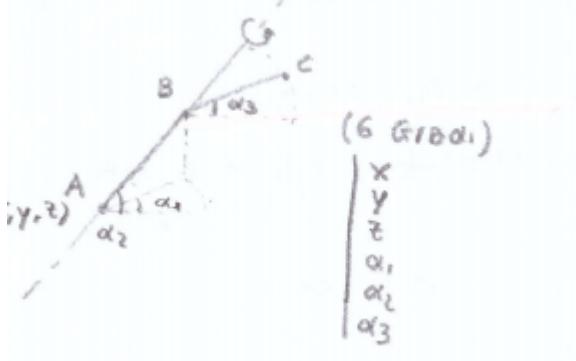
CORPO RIGIDO:

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali in cui le distanze fra i punti non variano mai nel tempo anche se soggetti a forze esterne. Tali corpi sono modelli astratti che approssimano oggetti poco deformabili dalla realtà.

INDIVIDUAZIONE NELLO SPAZIO:

Una volta fissata la distanza tra i punti, il corpo rigido ha 6 gradi di libertà (3 coordinate e 3 angoli).

Tramite le 3 coordinate individuiamo un punto A(x,y,z) di conseguenza un punto B mediante gli angoli alpha₁ e alpha₂, i punti A e B, fissano l'asse di rotazione e tramite alpha₃ fissano la posizione.



DENSITA':

Per descrivere la distribuzione della massa nello spazio, e quindi indicare la distanza tra i punti si usa il concetto di densità.

La densità media è data:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V}$$

in un intorno di un punto si ha:

$$\rho = \frac{dM}{dv}$$

Tale misura È utile nel caso di distribuzione non uniforme, ad esempio quando un corpo è formato da materiali diversi.

CINEMATICA:

Il modo di un corpo rigido può essere decomposto in 2 modi semplici.

Traslazione:

L'intero corpo come se fosse un sistema di riferimento mobile, si muove di moto traslatorio e quindi è necessario conoscere il moto di un singolo punto (come il centro di massa) per determinare quello dell'intero corpo.

ROTAZIONE RISPETTO AD UN ASSE:

Prendendo un qualsiasi asse, esso è formato da i punti A e B , tutti i punti ruotano intorno ad esso, descrivendo un moto circolare, con velocità w (omega) nei piani perpendicolari all'asse preso in esame.

MOTO ROTOTRASLATORIO:

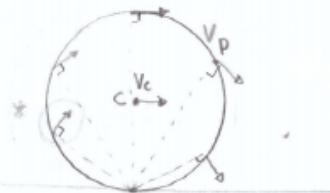
Combinando questi due moti semplici si ottiene un moto rototraslatorio se si ha una rotazione costante, unita a una traslazione lungo l'asse, costante, si ottiene il moto di una vite.

CONCLUSIONE:

Per la descrizione di un moto di un corpo rigido si può quindi scomporre il suo moto in due componenti semplici: ROTAZIONE E TRASLAZIONE

- ESEMPIO

Scomponiamo il moto di rotolamento di una ruota:

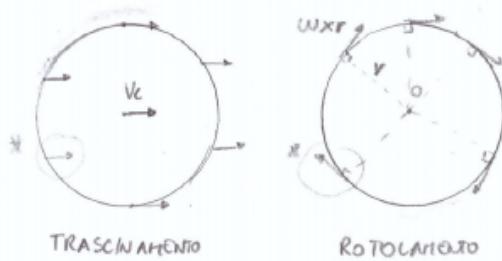


OSS

Ad ogni istante:

$$V_p = V_c + \omega \times r$$

Si può notare che tale moto può essere decomposto:



DINAMICA:

Un corpo rigido soggetto a sollecitazione subisce uno spostamento, tale moto può essere decomposto nella traslazione del centro di massa, sommata ad una rotazione rispetto ad un asse passante per C.

Si necessitano quindi di 3 coordinate per il punto C, due parametri per definire l'asse (passante per C) e 1 parametro che specifica la velocità angolare w .

Si hanno quindi sei incognite.

Date quindi le equazioni cardinali:

$$F_e = \frac{dp}{dt} \quad (p = mV_c)$$

$$M_e = \frac{db}{dt}$$

Esse se proiettate sugli assi x,y,z producono sei equazioni, sufficienti per determinare il moto del corpo. Nel caso in cui il corpo è vincolato ad un tale punto, conviene calcolare il momento della quantità di moto rispetto a tale punto, solitamente lo si calcola rispetto a c.

SISTEMI DI FORZE EQUIVALENTI:

Dalle equazioni cardinali, poiché si riferiscono alla somma delle forze esterne, non tengono conto del punto di applicazione. Quindi ad ogni configurazione di sollecitazione si può ricavare una più semplice dalle infinite combinazioni che dia come risultante F_e ed M_e .

Tali sistemi di forze si dicono EQUIVALENTI

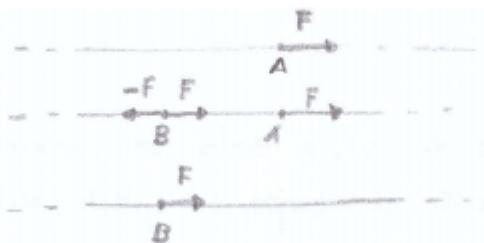
Di seguito le operazioni per semplificare i sistemi di forza

OPERAZIONI ELEMENTARI:

Un insieme di forze applicate in un punto possono essere sommate, è

possibile eseguire anche l'operazione inversa.

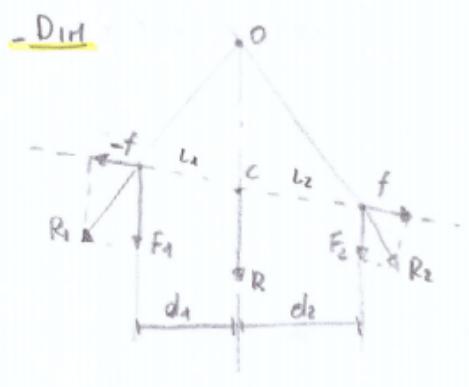
Sfruttando tali operazioni si ricava che una forza può essere spostata sulla retta di azione



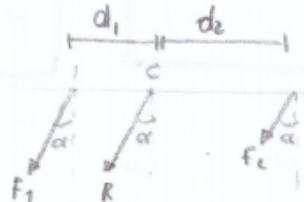
FORZE PARALLELE NELLO STESSO VERSO:

In tale caso si può ricavare una forza risultante R posizionata lungo la congiungente delle due forze del punto C detto CENTRO DELLE DUE FORZE PARALLELE. Tale punto si ricava in relazione all'intensità delle forze (più vicino alla forza maggiore).

DIMOSTRAZIONE:



Applica una forza f sulla congiungente e di conseguenza $-f$, sommo f con F_1 ; così da ricavare R_1 . Spostando R_1 e R_2 in O e sommandole ricavo R la cui traslazione porta all'individuazione di c .

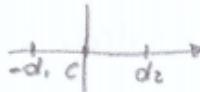


Con tale riduzione non si deve variare il momento totale, calcolando tutti i momenti rispetto a C si ha:

$$M_R = M_{F_1} + M_{F_2} \quad O = F_1 \cdot (-d_1) + F_2 \cdot d_2$$

Da tale relazione si può quindi ricavare la posizione di c :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$



ESEMPIO (BARICENTRO)

In tal caso le forze parallele sono date dalla forza di gravità ed il centro delle forze è detto BARICENTRO.

Come fatto prima cerchiamo di determinare la posizione del baricentro.

Ricordiamo che $R = \sum F_i$ e $H_R = \sum H_{F_i}$

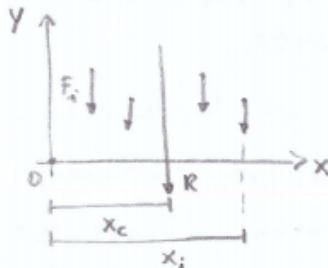
Si ha quindi

$$R \cdot x_c = \sum F_i \cdot x_i \quad x_c = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{R} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}$$

Per ricavare le altre coordinate (y_c, z_c) è necessario ruotare tutte le forze di 90°

OSS:

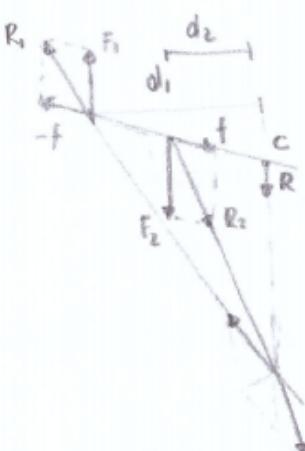
Il baricentro coincide con il centro di massa solo se l'accelerazione di gravità è costante nello spazio occupato dal corpo, in questo modo c'è proporzionalità costante tra massa e peso



FORZE PARALLELE DISCORDI CON DIVERSE INTENSITA':

Nel caso di due forze parallele opposte di diverse intensità F_1 DIVERSO F_2 esse si possono ridurre ad un'unica forza data dalla differenza delle due con direzione concorde con la maggiore.

Il punto C si trova sulla congiungente, ma esterno al segmento che unisce le due forze.



Come nei casi precedenti il momento di R deve essere uguale alla somma dei momenti di F_1, F_2 (calcolati rispetto a C)

$$H_R = H_{F_1} + H_{F_2}$$

$$0 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Da cui

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}}$$

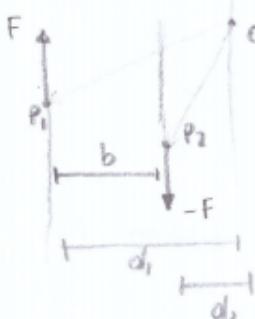
FORZE PARALLELE DISCORDI DI UGUALE INTENSITA'(COPPIA):

Nel caso in cui le due forze F_1 e F_2 sono di uguale intensità, il punto C si considera posto a distanza infinita.

Un tale sistema di forze è irriducibile poiché esse hanno un momento proprio indipendente dal polo con cui si calcola, ma può essere quindi ridotto ad una singola forza poiché essa avrebbe momento nullo se calcolato con polo giacente alla sua linea di azione.

Dimostrazione momento proprio di una coppia

Prendendo in considerazione un polo "o" qualsiasi: calcoliamo il momento totale:



$$M = M_1 + M_2 = OP_1 \times F + OP_2 \times (-F) = OP_1 \times F - OP_2 \times F$$

$$M = (OP_1 - OP_2) \times F = \overline{P_2 P_1} \times F$$

Notiamo quindi che il momento non dipende dal polo scelto, ma solo dalla distanza tra le due forze.

Proiettando i vettori che individuano le distanze riceviamo il modulo del momento:

$$|M| = Fd_1 - Fd_2 = F(d_1 - d_2)$$

$$|M| = Fb$$

SOLLECITAZIONI DI UN CORPO RIGIDO:

Dallo studio dei sistemi di forze equivalenti deduciamo che una qualsiasi sollecitazione può essere decomposta in una coppia e una forza applicata in un punto a piacere.

Se ad esempio si volesse spostare la forza F da P a P' occorre aggiungere in tale punto F e $-F$ in modo da non variare la somma delle forze totali.

Si ha quindi una forza applicata in P' e una coppia con braccio PP' .

N.B.

Se un corpo ha forza totale nulla allora la sollecitazione a cui è sottoposto equivale ad una coppia.

Se rispetto ad un polo il sistema ha momento nullo allora la sollecitazione equivale ad una forza applicata in tale polo.

Le precedenti riduzioni non sono sempre possibili, si potrebbe ad esempio non trovare alcun polo per cui il momento totale è nullo.

CORPO RIGIDO VINCOLATO AD UN ASSE:

Nel caso sia vincolato ad un asse fisso determinato la posizione del corpo nello spazio passa da 6 a 1 grado di libertà (angolo di rotazione rispetto un asse).

SPOSTAMENTO DI UN CORPO:

Per conoscere il moto del corpo è quindi necessario conoscere solamente come varia l'angolo φ nel tempo, per farlo usiamo la seconda equazione cardinale rispetto all'asse fisso a:

$$\dot{\varphi}_a = \frac{d\varphi_a}{dt}$$

Il momento M_a è dato dalle sole forze attive, le reazioni del vincolo poiché perpendicolari ad a danno contributo nullo.

In tal caso il momento della quantità di moto si può scrivere usando il momento di inerzia assiale:

$$|ba| = \sum r_i m_i v_i = \sum r_i^2 m_i w_i = (\sum m_i r_i^2) w \quad | p = \frac{dm}{dv} \\ = \int_V r^2 p w dv = w \int_V r^2 p dv = I_a w$$

Avendo posto:

Avendo posto

$$I_a = \int_V p r^2 dv (= \int_M r^2 dm) \rightarrow \begin{array}{l} \text{ogni massa } dm \text{ si trova} \\ \text{ad una distanza } r \text{ rispetto} \\ \text{all'asse } a. \end{array}$$

Riprendendo la 2^o equazione cordinale:

$$M_a = \frac{d ba}{dt} = \frac{d I_a w}{dt} = I_a \frac{dw}{dt} = I_a \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$I_a = \int_M r^2 dm$$

$$M_a = I_a \frac{dw}{dt}$$

In questa forma si nota una somiglianza con la seconda legge della dinamica

$$F = m a = m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Lo spostamento } s \text{ è sostituito} \\ \text{dell'angolo } \varphi \end{array} \right)$$

Con tale equazione si può quindi determinare la posizione del corpo rigido (vincolato ad un asse)

ENERGIA CINETICA DEL CORPO:

Mediante il momento di inerzia assiale si può esprimere anche l'energia cinetica.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \int_M dm v^2 = \frac{1}{2} \int_V p v^2 dv$$

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{dm}{dv} \\ v^2 = \frac{r^2}{\dot{\varphi}^2} \end{array} \right.$$

$$T = \frac{1}{2} w^2 \int_V p r^2 dv = \frac{1}{2} I_a w^2 = \frac{1}{2} I_a \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_a w^2$$

LAVORO:

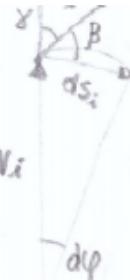
Nel caso di un corpo rigido il lavoro delle forze interne è nullo poiché ad ogni azione corrispondente una reazione, entrambe producono il medesimo spostamento, ma il lavoro è opposto (F , $-F$).

Il lavoro delle forze esterne, invece non è identicamente nullo, nel caso di un corpo vincolato ad un asse le uniche componenti di una forza che eseguono lavoro giacciono sul piano normale all'asse A, le forze parallele ad A non eseguono lavoro.

$$dL_i = F_i \cdot ds_i = F_i \cos\beta \, ds_i = F_i \cos\beta \, v_i \, d\varphi = F_i \sin\alpha \, v_i \, w \, dt$$

Poiché α è l'angolo tra v_i e F_i

$$dL_i = M_i \times w \, dt$$



La somma di tutti i lavori infinitesimi delle singole forze:

$$dL = \sum dL_i = \sum M_i \times w \, dt$$

proiettando sull'asse a

$$dL = M_a w_a \, dt = M_a \, d\varphi \quad | \quad M_a = \sum M_i a$$

Il lavoro totale sarà:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dL = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_a(\varphi) \, d\varphi \quad (\cong L = F \cdot ds) \quad (F \rightarrow M_a; s \rightarrow \varphi)$$

TEOREMA DEL LAVORO ED ENERGIA CINETICA:

$$L = T_2 - T_1 = \Delta T \quad M_a d\varphi = d\left(\frac{1}{2} I_a \dot{\varphi}^2\right) \quad (\text{Per infinitesimi})$$

QUANTITA' DI MOTO:

Per un corpo rigido vincolato ad un asse la quantità di moto è data:

$$P = I_a w$$

se il corpo è isolato si può usare la conservazione della quantità di moto (1 eq cardinale)

$$F_{est} = \frac{dp}{dt} = 0 \quad p \text{ costante}$$

MOMENTO DI INERZIA:

Teorema di Huygens

Il momento di inerzia di un corpo, rispetto ad un asse A, è dato dalla somma

del momento di inerzia del corpo rispetto all'asse parallelo ad A e passante poi per C, e del momento di inerzia dal centro di massa (avente la massa totale) rispetto all'asse A.

$$I_a = I_{ac} + m d^2 \quad | d = \text{"distanza di c da a"}$$

INERZIA BARRA VINCOLATA AD UN ESTREMO:

In generale si ha $I_a = \int r^2 dm$

$$I_a = \int_V p r^2 dv = \int_0^l p x^2 h dx$$

$$I_a = \rho h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \rho h \frac{l^3}{3} = \frac{m}{ek} \cdot h \frac{l^3}{3}$$

$$I_a = m \frac{l^2}{3}$$

$P = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{h \cdot dx}$

$| \ln questo caso \quad r = x$

INERZIA BARRA VINCOLATA NEL CENTRO DI MASSA:

- Inerzia barra vincolata nel centro di massa

$$I_c = \int_V p x^2 dv = \rho h \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx$$

$$I_c = \rho h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho h 2 \frac{l^3}{24} = \rho h \frac{l^3}{12}$$

$$I_c = m \frac{l^2}{12}$$

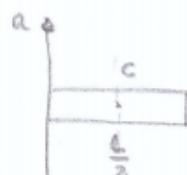
$P = \frac{dm}{dv} = \frac{dm}{dx \cdot h}$

$| m = \rho L h$

OSS (Teorema Huygens: barra)

Dai due casi precedenti: possono verificare il teorema di Huygens:

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ac} + m d^2 = m \frac{l^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \\ &= m \frac{l^2}{3} \end{aligned}$$

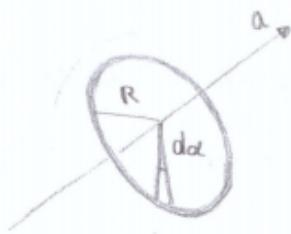


Equivalent al risultato precedente (barra vincolata ad un estremo)

$$I_a = m \frac{l^2}{3}$$

INERZIA ANELLO SOTTILE:

- Inerzia anello sottile



Individuiamo la massa infinitesima dm mediante l'angolo α

$$I_a = \int_M r^2 dm = \int_M R^2 dm = \int_M R^2 \lambda dl \quad | \lambda = \frac{dm}{dl}$$

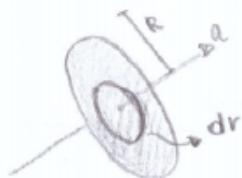
$$= \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\alpha \quad | dl = R d\alpha$$

$$I_a = R^2 \lambda R 2\pi \quad | I_a = MR^2 \quad | \lambda = \frac{dm}{dl}$$

INERZIA DISCO SOTTILE:

- Inerzia disco sottile

In tal caso possiamo usare il risultato precedente considerando il disco formato da anelli:



$$I_a = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr$$

$$= 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_a = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \lambda \cdot L \\ = \lambda \cdot 2\pi R \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{2\pi R dr} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \int_0^R \sigma 2\pi R dr \\ = \sigma 2\pi R \frac{R^2}{2} \end{array} \right.$$

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO LIBERO: (TEOREMA DI KONIG)

Nel caso dei sistemi di punti materiali avevamo ricavato il Teorema di Konig in cui si calcolava l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ci}^2$$

Nel caso di corpi rigidi si ha:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{I_c} \omega_c^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

v_c = distanza della massa m_i dal centro di massa

ω_c = Velocità angolare rispetto al centro di massa

$$\left\{ \begin{array}{l} I_c = \int_M r^2 dm \\ I_c = \sum m_i r_i^2 \end{array} \right.$$

1.B

Nota bene:

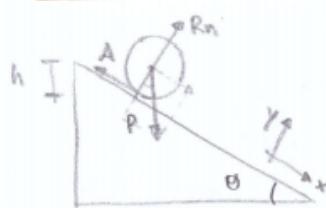
Anche in questo caso sono validi tutti i teoremi riguardo energia e lavoro.

CILINDRO CHE ROTOLA SU UN PIANO INCLINATO:

Tale problema può essere affrontato mediante le equazioni fondamentali oppure dal punto di vista energetico.

-USO EQUAZIONI FONDAMENTALI:

• USO EQUAZIONI FONDAMENTALI



$$\begin{cases} mg \sin \theta - A = m a_c \\ R_n = mg \cos \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Accelerazione} \\ \text{centro di massa} \end{array}$$

$$F_f = m a_c = mg \sin \theta - A$$

Calcoliamo quindi il momento delle forze rispetto all'asse di rotazione, le uniche forze che generano momento è la forza di attrito.

$$|M_a| = r A = I_a \frac{d\omega_c}{dt} \quad (2^{\circ} \text{ eq cardinale})$$

Sostituendo l'inerzia (disco)

$$r A = \frac{1}{2} m r^2 \frac{1}{r} \frac{d\omega_c}{dt} = \frac{1}{2} m r a_c$$

$$I_a = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{Disco})$$

$$\omega_c = \frac{v_c}{r}$$

Ricavando A e sostituendo nell'equazione delle forze:

$$m a_c = mg \sin \theta - \frac{1}{2} m a_c$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

Usando le equazioni del moto uniformemente accelerato :

$$\begin{cases} v_c(t) = a_c t \\ s(t) = \frac{1}{2} a_c t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_c(t) = a_c \sqrt{\frac{2s(t)}{a_c}} \\ t = \sqrt{\frac{2s(t)}{a_c}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + a t \\ s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$v_c = \sqrt{2s a_c} = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin \theta} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

-Condizioni di puro rotolamento:

Abbiamo ricavato dalla seconda equazione cardinale l'espressione della forza di attrito.

$$A = \frac{1}{2} m a_c = \frac{1}{2} m \frac{2}{3} g \sin \theta = \frac{1}{3} m g \sin \theta$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

come nel caso del punto materiale si ricava che per non slittare si deve avere:

$$A < \mu_s R_n$$

L'attito infatti può assumere il massimo valore pari a $\mu_s R_n$ ($A = \mu_s R_n$ MOTO INCIPIENTE)

per avere moto di puro rotolamento:

$$\frac{1}{3} mg \sin \theta < \mu_s R_n = \mu_s mg \cos \theta$$

$$R_n = mg \cos \theta$$

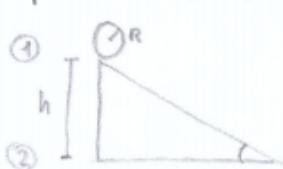
Da cui:

$$\frac{1}{3} mg \sin \theta < \mu_s mg \cos \theta$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \tan \theta < \mu_s}$$

STUDIO DAL PUNTO DI VISTA ENERGETICO:

Poiché in questo caso l'unica forza che compie lavoro è la forza peso possiamo usare il teorema della conservazione di energia meccanica:



VERO CONSERVAZIONE DI ENERGIA MECCANICA

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$mgh = T_2$$

L'energia cinetica T_2 si ricava dal teorema di König

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c w_c^2$$

Da cui:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{4} m v_c^2 = \frac{3}{4} m v_c^2$$

$$\begin{cases} I_c = \frac{1}{2} m r^2 \\ w^2 = \frac{v^2}{r^2} \end{cases}$$

Si ha quindi:

$$mgh = \frac{3}{4} m v_c^2$$

$$\boxed{v_c = \sqrt{\frac{4}{3} gh}}$$

MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI:

- Limiti dell'approssimazione del punto materiale: casi di corpi estesi, rotazioni, corpi elasticci, fluidi ecc.
- **Approccio ai sistemi:** suddivisione del sistema in N parti (particelle), approssimabili a punti materiali, e applicazione a ognuna dell'equazione del moto: N equazioni vettoriali accoppiate. Si sommano membro a membro:

$$\sum_j^N \mathbf{F}_j = \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(est)} + \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(int)} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum_j^N m_j \mathbf{v}_j = \frac{d}{dt} m \mathbf{v}_c$$
 con $m = \sum_j^N m_j$, $\mathbf{F} = \sum_j^N \mathbf{F}_j^{(est)}$, poiché $\sum_j^N \mathbf{F}_j^{(int)} = 0$ per la terza legge di Newton.
- ✓ **Centro di massa:** posizione: $\mathbf{r}_c = \frac{\sum_j^N m_j \mathbf{r}_j}{m}$
- ✓ **Equazione moto traslatorio per sistemi di punti:**

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \quad , \quad \text{con } \mathbf{p} = m\mathbf{v}_c = \sum_j^N m_j \mathbf{v}_j$$

- **conservazione quantità di moto:** $\mathbf{p} = \text{cost}$ se $\mathbf{F} = 0$.
- Per il **momento** delle forze: sommando membro a membro l'equazione dei momenti si ha:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (\text{se } \mathbf{v}_0 = 0, \text{ o } \mathbf{p} = 0, \text{ o } \mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{p})$$

In particolare, se $O \equiv C$: $\mathbf{M} = d\mathbf{b}/dt$ con $\mathbf{M} = \sum_j^N \mathbf{M}_j^{(est)}$, per la terza legge di Newton.

Componenti su un asse a : $M_a = db_a/dt = d(I_a \omega)/dt$ con $I_a = \sum_j m_j r_j^2$ ($= \int_m dm r^2$) momento d'inerzia assiale.

- **conservazione momento della quantità di moto:** $\mathbf{b} = \text{cost}$ se $\mathbf{M} = 0$ (per es. forze centrali con polo nel centro delle forze).
- **Processi di urto tra due corpi:** interazione breve con forze molto intense.

Urto centrale: velocità e forze d'interazione coassiali.
Urto elastico: conservazione energia meccanica (oltre a quantità di moto, conservata in ogni tipo di urto, insieme al momento della quantità di moto). Due equazioni: una vettoriale (per \mathbf{p} , scalare per urto centrale), e una scalare, con soluzione (nel sistema del bersaglio):

$$v_1 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad , \quad v_2 = \frac{2}{1+\gamma} .$$

Per determinare il moto di un corpo composto da punti materiali non è necessario conoscere la posizione degli infiniti punti del sistema ma si possono approssimare studiando un singolo punto astratto detto CENTRO DI MASSA.

FORZA APPLICATA AD UN SISTEMA (CENTRO DI MASSA):

Quando il sistema è soggetto ad una forza, ogni punto che lo compone ne subisce gli effetti. La forza esercitata F si divide in tutti i punti ($F = \text{sommatoria } F_j$).

Ogni punto è quindi soggetto ad una forza F_j , tale forza la si può decomporre in due tipi: quella esercitata da altri punti del sistema e quella esercitata da punti esterni.

$$F_j = F_j^{(est)} + F_{jk}^{(int)} = m_j \frac{d^2 r_j}{dt^2} \quad (k=1\dots n)$$

↗
Forza esercitata
dal punto k sul punto
 j preso in esame.

Per determinare la forza agente sul sistema occorre sommare tutte le forze applicate ai singoli punti:

$$F = \sum_{j=1}^n F_j = \sum F_j^{(est)} + \sum F_{jk}^{(int)} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d^2 r_j}{dt^2}$$

Nella sommatoria le forze interne si annullano dato che ad ogni forza Jk corrisponde una ks di segno opposto.

Individuando un punto C (centro di massa), tale equazione si può scrivere come:

$$r_C = \frac{\sum m_j r_j}{m}$$

$$m = \sum m_j \quad F = m \frac{d^2 r_C}{dt^2}$$

*N.B.
Tale relazione si riferisce alle sole forze esterne*

Nel caso continuo; il punto C si individua nel seguente modo

$$r_C = \int r \frac{dm}{m} = \frac{1}{m} \int_V p r dv \quad p = \frac{dm}{dv} \text{ (densità)}$$

Quindi il sistema di punti materiali può essere approssimato mediante il centro di massa, in cui si considera presente l'intera massa del sistema e applicata la somma delle forze esterne.

ADDITIVITÀ DEL CENTRO DI MASSA:

A volte per ricavare il centro di massa è utile scomporre il sistema in sottosistemi, ricavare i rispettivi centri di massa e poi ricavare il centro di massa dei centri di massa dei singoli sottosistemi:

$$r_C = \frac{1}{m} \int_V p r dv = \frac{\int_{V_1} p r dv + \int_{V_2} p r dv}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r_{C1} + m_2 r_{C2}}{m_1 + m_2}$$

QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI:

La quantità di moto di un sistema si calcola:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{dr_i}{dt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Il sistema è costituito da } n \text{ punti} \\ i=1 \dots n \end{array} \right)$$

Se utilizzo il centro di massa:

$$P = m \frac{dr_C}{dt} = m v_C$$

$$\left| \begin{array}{l} r_C = \frac{\sum m_i r_i}{m} \\ m r_C = \sum m_i r_i \end{array} \right.$$

Si ha quindi che la quantità di moto di un sistema è data dalla massa del sistema e dalla velocità del centro di massa.

PRIMA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI:

Utilizzando l'equazione ricavata per le forze esterne applicate al sistema si ricava la prima equazione cardinale:

$$F_{est} = m \frac{d^2 r_c}{dt^2} = m \frac{d v_c}{dt} = \underline{\cancel{m}} \underline{\cancel{(m v_c)}} = \frac{dp}{dt} \quad | p = m v_c$$

Questa equazione esprime un concetto fondamentale, se un sistema non è soggetto a forze esterne, mantiene la propria quantità di moto. Ad esempio, se nel moto parabolico di un proiettile, nel caso di esplosione in aria, il sistema non varia quantità di moto in seguito all'esplosione dato che si tratta di una forza interna. La quantità di moto varia a causa della forza di gravità, quindi durante il moto il centro di massa descrive la traiettoria parabolica come se nulla fosse accaduto.

TEOREMA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO:

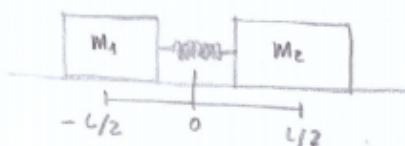
Data la seguente espressione:

$$F_{est} = \frac{dp}{dt}$$

possiamo notare che se la somma delle forze esterne applicate al sistema è pari a zero, si mantiene la quantità di moto.

Quindi un sistema isolato di punti materiali, durante il moto, mantiene costante la propria quantità di moto.

ESEMPIO



Consideriamo due masse poggiate su un piano privo di attrito e collegate mediante una molla tenuta compresa da un filo.

Bruciando il filo, le due masse subiscono una forza che accelererà i due corpi.

Poiché la forza (potenziale) della molla è interna, la quantità di moto si conserva; inizialmente i corpi erano fermi, quindi:

$$0 = M_1 V_1 + M_2 V_2$$

Da cui possiamo ricavare le velocità in relazione alla massa:

$$V_1 = -\frac{M_2}{M_1} V_2$$

Un'altra caratteristica è che il centro di massa in questo caso rimane fermo, dato che la quantità di moto inizialmente è zero e necessariamente anche durante il moto delle masse, la velocità V_C del centro di massa rimane zero:

$$P = m V_C = 0 \Leftrightarrow V_C = 0$$

$$X_C = \frac{M_1(-L/2) + M_2(L/2)}{M_1 + M_2} = \frac{L/2(M_2 - M_1)}{M_1 + M_2} = \frac{L(M_2 - M_1)}{2(M_1 + M_2)} = \text{Costante nel tempo.}$$

MOMENTO DI UNA FORZA:

Definiamo il momento di una forza agente su un sistema di punti

$$M = \sum_i^n M_i = \sum_i^n (r_i \times F_i)$$

materiali come:

Ogni M_i si riferisce al momento della forza F_i applicata al punto, tutti calcolati con il medesimo polo.

MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO:

Analogo al caso precedente:

$$b = \sum_i^n b_i = \sum_i^n (r_i \times p_i)$$

TEOREMA DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO:

Nel caso di un singolo punto materiale abbiamo ricavato che il momento di una forza è in relazione a quello della quantità di moto,

$$H = \frac{db}{dt}$$

$$H = \frac{db}{dt} + v_0 \times p$$

tramite:

Quindi vediamo il caso di un sistema di singoli punti materiali:

Per ogni singolo punto abbiamo:

$$H_i = H_i^{\text{int}} + H_i^{\text{est}} = \frac{db_i}{dt} + v_0 \times p_i \quad | \quad p_i = m_i v_i$$

Andando a sommare il primo membro, in modo da ricavare il momento totale, deduciamo che il momento delle forze interne. Si annulla dato che ad ogni forza corrisponde una reazione:

$$\therefore H = \sum H_i^{\text{int}} + \sum H_i^{\text{est}} = \sum \left(\frac{db_i}{dt} + v_0 \times p_i \right)$$

Si ha quindi:

$$H^{\text{est}} = \frac{db}{dt} + v_0 \times p$$

$$\begin{cases} b = \sum b_i \\ p = \sum p_i \\ H^{\text{est}} = \sum H_i^{\text{est}} \end{cases}$$

Tale equazione si riduce a $M^{\text{est}} = db/dt$ se il polo è fisso ($v_0=0$), $p=0$ oppure se il polo coincide con il centro di massa:

$$H^{\text{est}} : \frac{db}{dt} + v_c \times m v_c = \frac{db}{dt} \quad | \quad p = m v$$

Come nel caso di un singolo punto materiale si introducono i momenti rispetto ad un asse, ovvero la proiezione su di un asse passante per il polo del momento rispetto a tale polo. Si ha quindi:

$$M_a^{\text{est}} = \frac{db_a}{dt}$$

SECONDA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI:

L'equazione ricavata nel teorema precedente è :

$$M^{\text{est}} = \frac{db}{dt} + v_0 \times p$$

MOMENTO DI INERZIA ASSIALE:

Nel caso in cui si ha un moto rotatorio rispetto ad un medesimo asse, il momento della quantità di moto è dato, per un singolo punto:

$$|b_{a,i}| = v_i p_i = r_i m_i v_i = \underbrace{m_i r_i^2}_\text{momento di} w_i$$

$$\begin{cases} b = r \times p \\ w = \frac{v}{r} \end{cases}$$

Considerando un sistema in cui ogni punto ha la medesima velocità w (omega):

$$|b_a| = \sum (m_i r_i^2 w) = (\sum m_i r_i^2) \cdot w = I_a \cdot w$$

momento di
inerzia assiale

Il teorema della quantità di moto rispetto ad un asse si può scrivere:

$$|H_a| = \frac{d}{dt} I_a w = \frac{d}{dt} I_a \cdot \dot{\psi}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} = w$$

PRINCIPIO CONSERVAZIONE MOMENTO QUANTITA' DI MOTO:
Nel caso in cui un sistema è isolato $F_{est}=0$ e quindi $M_{est}=0$ si ha:

$$M_{est} = \frac{d}{dt} \cdot b = 0 \Rightarrow b \text{ costante}$$

TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA:

Il lavoro fatto da ogni singolo punto del sistema:

$$L_i = \int_A^B (F_i^{est} + F_i^{int}) ds_i = \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2$$

2 pos. 1 pos.

Per l'intero sistema si ha che il lavoro è dato dalla somma di tutti i-esimi lavori eseguiti da tutte le forze (interne e esterne):

$$L = \sum_i L_i$$

L'energia cinetica è data dalla somma delle energie di ciascun punto:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

Il teorema si può quindi indicare:

$$L = \sum_i L_i = T_2 - T_1$$

TEOREMA DI KONIG:

L'energia cinetica di un sistema può essere espressa anche in un altro modo introducendo, oltre al sistema fisso, un sistema mobile solidale con il centro di massa. Le velocità saranno legate nel seguente modo:

$$V_{\text{tot}} = V_r + V_t \quad V_i = V_{ci} + V_c$$

L'energia cinetica è data: (come ricavato prima)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (V_i - V_c)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (V_{ci} + V_c) \cdot (V_{ci} + V_c) \end{aligned}$$

Sviluppando il "quadrato":

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i V_{ci}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i V_c^2 + \sum m_i V_{ci} \cdot V_c$$

L'ultimo membro è poi a zero poiché la quantità di moto di un sistema è data da:

$$P = \sum m_i V_i = M V_c \quad \sum m_i \cdot V_{ci} = M \cdot V_{cc} \quad V_{cc} = \text{Velocità del centro di massa rispetto a se stesso}$$

Quindi si ha:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i V_{ci}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i V_c^2 = \frac{1}{2} \sum m_i V_{ci}^2 + \frac{1}{2} M V_c^2 \quad | M = \sum m_i$$

L'energia cinetica di un sistema è quindi data dalla somma delle energie cinetiche del centro di massa, avente l'intera massa del sistema, e dell'energia cinetica totale di tutti i punti rispetto al centro di massa.

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i V_{ci}^2$$

PROCESSI D'URTO:

Diremo che due corpi si urtano quando la distanza fra essi è tale da influenzare il moto dei singoli corpi per un brevissimo lasso di tempo. Durante l'urto la forza interna che si scambiano i corpi coinvolti è molto maggiore, in un breve istante, di tutte le forze esterne (attrito e gravità) quindi il sistema può considerarsi isolato ($F_{\text{est}} = 0$), valgono quindi i principi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

$$F_{\text{est}} = \frac{dp}{dt} = 0 \quad (p \text{ costante}) \quad H_{\text{est}} = \frac{db}{dt} = 0 \quad (b \text{ costante})$$

URTI NORMALI CENTRALI:

Per semplicità consideriamo il caso di urti normali centrali; ovvero i corpi non ruotano, si muovono di moto rettilineo uniforme e l'urto è diretto lungo la congiungente (caso unidimensionale).

Vi sono tre diversi tipi di urti (in tutti i tipi si può usare la conservazione della quantità di moto)

-URTO ELASTICO:

In questo caso durante l'urto l'energia cinetica di due corpi non varia

V_i = velocità assoluta

V_{ci} = velocità rispetto a C

V_c = velocità centro di massa

i = simbolo punto del sistema

NORMA DI UN VETTORE

$$|V| = v$$

$$|V| = \sqrt{V \cdot V}$$

$$|V|^2 = V^2 = V \cdot V$$

quindi:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

v = Velocità prima (scabre)
 V = Velocità dopo (scabre)

In aggiunta la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

Dividendo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{\frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 - v_1^2)}{m_1 (v_1 - V_1)} = \frac{\frac{1}{2} m_2 (V_2'^2 - V_2^2)}{m_2 (V_2 - v_2)}$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$v_1 + V_1 = V_2 - v_2$$

Equivalentemente:

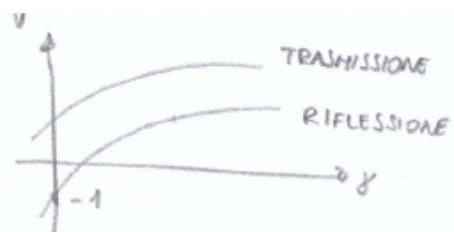
$$v_1 - v_2 = V_2 - V_1$$

Tale equazione indica che la velocità dopo l'urto si inverte.
Dalle seguenti due equazioni:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 ; \quad v_1 + V_1 = V_2 - v_2$$

possiamo ricavare la velocità finale in relazione a quelle iniziali.
Considerando la seconda massa come un bersaglio fisso inizialmente $V_2=0$ si ha:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \quad \begin{cases} \frac{V_1}{v_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} & (\text{Coefficiente di riflessione}) \\ \frac{V_2}{v_2} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} & (\text{Coefficiente di trasmissione}) \end{cases}$$



-URTO ANAELASTICO:

In questo caso durante l'urto, vi è variazione di energia cinetica. Si può solo usare la conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

-URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO:

Durante l'urto i due corpi coinvolti si fondono insieme e procedono

come un unico corpo con velocità V.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

Soltamente nei problemi con urti anaelastici si specifica la variazione di energia cinetica (alpha)

$$(1-\alpha) \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2$$

7. Meccanica dei corpi deformabili elasticità

- ▶ I corpi reali sottoposti a sistemi di forze (con risultante e momento risultante nulli) si deformano: internamente si stabilisce un campo di sforzi e di deformazioni.

Grandezze tipiche

sforzo, F_x/S_y (componente xy , così per le altre);

deformazione, $\Delta l_z/l_y$ (componente xy , così per le altre).

- ▶ Curva tipica di deformazione in un materiale omogeneo, sottoposto a sforzi: zona elastica (con recupero della forma originaria, al venir meno dello sforzo, con regime iniziale lineare [legge di Hooke], poi non lineare), zona plastica (con deformazione permanente, snervamento) e rottura.

Sollecitazioni tipiche e costanti di elasticità

Compressione di volume: $\delta V/V = p/K$;

Trazione: $\Delta l/l = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$ (\mathbf{F} normale)

Scorrimento: $\Delta h/l \simeq \Delta\theta = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$ (\mathbf{F} tangenziale)

Modulo di Poisson: $\Delta b/b = -\frac{\mu}{E} \frac{F}{S}$ (\mathbf{F} normale)

- ▶ Nei solidi all'equilibrio gli atomi occupano posizioni reticolari fisse (i solidi possiedono volume e forma propri), nella buca di potenziale determinata dagli atomi circostanti: le forze di richiamo dovute a piccole deformazioni sono elastiche (linearità nei solidi reali).
- ▶ Nei liquidi gli atomi (o molecole) si muovono gli uni rispetto agli altri: sorgono forze intense (come per i solidi) se si avvicinano oltre il raggio di equilibrio (i liquidi possiedono volume proprio, ma non forma propria). Si creano vacanze reticolari con possibilità di scorrimento: tempi propri di rilassamento (*liquidi reali*).
- ▶ Nei gas le particelle sono libere di muoversi le une rispetto alle altre (i gas perfetti assumono volume e forma del recipiente che li contiene; nei gas reali si instaurano deboli forze di interazione e le particelle posseggono un volume proprio).
- ▶ Viscosità:

$$\eta = \frac{F}{A} \Big/ \frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

Meccanica dei corpi deformabili

In meccanica abbiamo studiato i corpi rigidi, tuttavia sono dei modelli ideali, perché nella realtà qualsiasi corpo è deformabile se soggetto a forze, in alcuni casi però la deformazione è talmente ridotta da poter essere trascurata

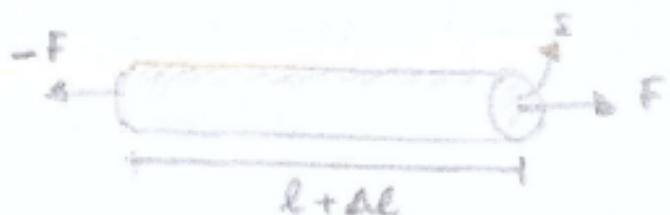
I corpi possono essere distinti in tre diverse tipologie:

- solido, è un corpo dotato di un volume e di forma propria
- liquido, è dotato di volume proprio ma assume forma del contenitore
- gassoso, assume forma e volume del recipiente

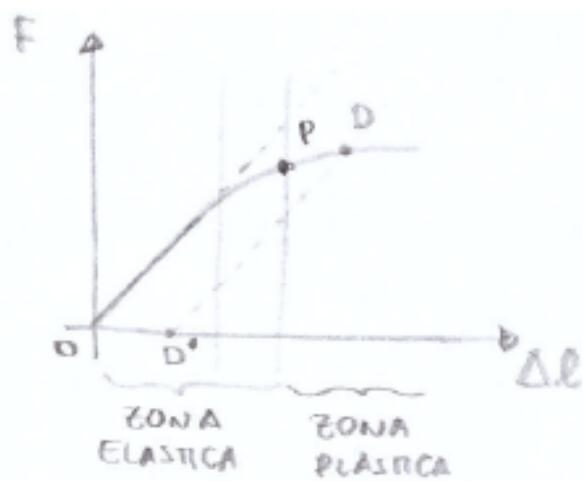
Zona Elastica e Zona Plastica

Consideriamo un corpo solido, se soggetto ad una forza esso subisce una deformazione.

Prendiamo come esempio una barra di sezione S e lunghezza l , con applicazione di due forze uguali ed opposte (messe orizzontalmente) subisce un allungamento Δl e una riduzione uniforme della sezione S



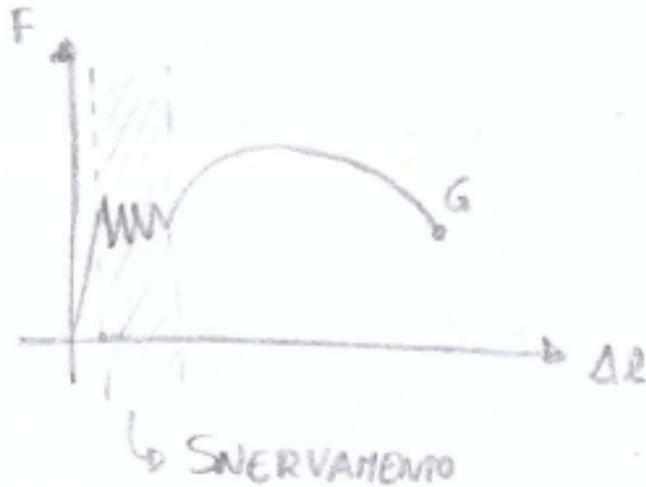
Possiamo raffigurare con un grafico la relazione tra F e Δl e individuiamo due zone



- Zona elastica: in cui alla rimozione delle forze, la barra torna alle dimensioni iniziali. In tale zona inizialmente c'è una relazione lineare, poi all'aumentare di F , la relazione diventa non lineare
- Zona plastica: Se F supera un certo punto P detto limite di elasticità, le deformazioni alla rimozione delle forze non scompare completamente. Se

ad esempio ci si trova sul punto D alla rimozione di F il corpo segue la linea tratteggiata mantenendo un allungamento Δl pari a OD', detta deformazione residua

Il comportamento generale fino al punto di rottura G è dato dal grafico di lato. Nel tratto evidenziato avviene lo snervamento, in cui anche alla riduzione di F vi è un allungamento di Δl



L'analisi e quindi il grafico precedente era riferito ad una barra con una forma geometrica ben definita composta da un determinato materiale

Deformazioni a prescindere dalla forma

Se vogliamo generalizzare le conclusioni fatte sulle deformazioni

indipendentemente dalla forma del solido facciamo le seguenti modifiche nell'analisi:

- sostituisco l'allungamento Δl con il rapporto $\Delta l/l$ che elimina la dipendenza dalla lunghezza iniziale
- Considero che F si ripartisce uniformemente sulla superficie e considero al posto di F, il rapporto F/s

In tal modo il grafico si riferisce solamente alle proprietà del material

Deformazione

Una deformazione qualsiasi può essere scomposta in diverse deformazioni omogenee, ognuna delle quali la si può considerare come somma di due tipi di deformazioni:

- Deformazione di volume, avviene una variazione di volume ($\Delta v/v$) ma la forma rimane invariata
- Deformazione di scorrimento, che altera la forma lasciando inalterato il volume

Forze esterne e sforzi

Se un corpo è soggetto ad una forza esterna, all'interzo si crea uno stato di tensione costituito dagli sforzi

Forze esterne

Un corpo può essere soggetto a due tipi di forze esterne

- Forza di volume (o di massa), tale forza agisce su ogni elemento di massa del corpo
- Forza di superficie, tale forza agisce solo sulla superficie

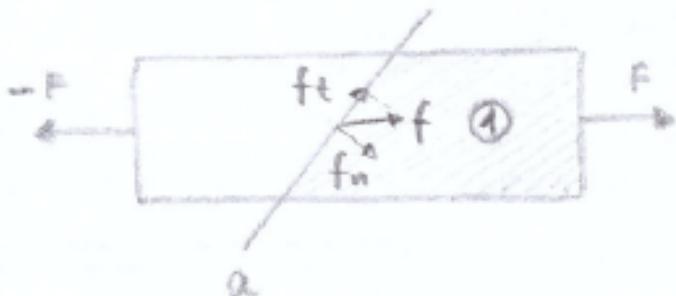
Nella nostra analisi trascuriamo le forze di volume poiché solitamente sono molto piccole e, in relazione a quelle superficiali, possono essere ignorate.
Considero il rapporto per una forza dF_{ext} su una superficie ds come:

$$\frac{d\vec{F}_{ext}}{ds} = \vec{\psi}$$

$\vec{\psi}$ = Rapporto forza esterna
su superficie

Sforzi

Considero una barra con due forze uguali ed opposte applicate.



Divido la barra in due attraverso un piano a , e ne studio una parte.

In tale parte per mantenerla in equilibrio occorre introdurre una forza f pari a $(-F)$, che rappresenta le forze interne a cui è soggetto il corpo durante una sollecitazione esterna.

Come si fa solitamente con le forze esterne si ha il seguente rapporto:

$$\frac{d\vec{f}}{ds} = \vec{\phi}$$

$\vec{\phi}$ = Rapporto forza interna su superficie
(SFORZO)

La forza interna f può essere decomposta in forza normale f_n e forza tangenziale f_t .

Posso definire quindi gli sforzi per entrambe le componenti come:

$$\sigma = \frac{df_n}{ds}$$

SFORZO
NORMALE

$$\tau = \frac{df_t}{ds}$$

SFORZO
TANGENZIALE

Se gli sforzi sono uguali su tutti i punti del piano a, si dice che la sollecitazione è omogenea

Dato che la forza interna è uguale a quella esterna si equivalgono i rapporti e quindi:

$$d\vec{F}_{ext} = d\vec{f}$$

$$\sigma = -\psi_n$$

$$\tau = -\psi_t$$

Legge di Hooke

Entro certi limiti detti di linearità elastica si ha che la deformazione è proporzionale alle sollecitazioni esterne e quindi agli sforzi

$$\vec{F}_e = -k\vec{x}$$

dove \vec{x} è l'elongazione definita in precedenza (si misura in metri) mentre k è detta **costante elastica della molla** e si misura in newton su metro (N/m).

Applicazione Legge di Hooke

Consideriamo alcuni tipi di deformazione applicando la legge di Hooke

Trazione barra (modulo Young e modulo di Poisson)

Consideriamo una barra soggetta a due forze opposte avverrà una deformazione che andrà ad allungare la barra e ridurre la sezione

-Variazione di lunghezza

Applicando Hooke si ha

$$\boxed{\epsilon_e = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma = \text{Sforzo} \\ \epsilon = \text{Modulo Young} \end{array} \right. \quad \left| \sigma = \frac{F}{s} \right.$$

- Variazione sezione

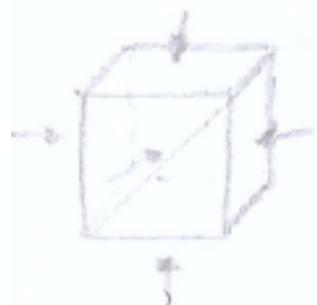
In questo caso i segni sono opposti poiché all'aumentare dello sforzo diminuisce la sezione D

$$\boxed{\epsilon_d = \frac{\Delta D}{D} = -\frac{\mu}{E} \sigma = -\mu \epsilon_e} \quad \left| \begin{array}{l} \mu = \text{Modulo Poisson} \\ \epsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ \sigma = \frac{F}{s} \end{array} \right.$$

L'ONE

Compressione di volume

Consideriamo un cubo soggetto ad una pressione costante (pressione idrostatica) F/s in tutti i lati considera la diagonale del cubo applicando Hooke si ha



$$\epsilon_c = \frac{\Delta l_d}{l_d} = -\frac{1}{3K} P \quad | P = \frac{F}{s}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che aumentando la pressione P la diagonale l_d diminuisce

la costante di proporzionalità è stata posta a $1/3k$ per la seguente considerazione che ci consente di scrivere la variazione di volume

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(l^3)}{l^3} = \frac{3l^2}{l^3} \Delta l = 3 \frac{\Delta l}{l} = 3 \epsilon_c \quad | \epsilon_c = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{3K} P$$

derato ΔV come un differenziale

$$| P = \frac{F}{s}$$

Abbiamo considerato ΔV come un differenziale

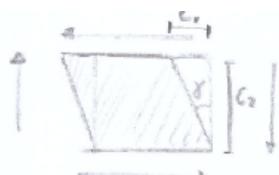
La variazione di volume sarà

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \epsilon_c = 3 \frac{1}{3K} P$$

$$| \boxed{\epsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{P}{K}}$$

K = Modulo compressione
di volume

Consideriamo un prisma e deformiamolo nel seguente modo:



$$\frac{c_1}{c_2} = \tan \gamma \approx \gamma$$

$$| \boxed{\epsilon_s = \gamma = \frac{1}{G} \tau}$$

$$| \boxed{\tau = \frac{F}{s}}$$

G = Modulo di scompenso

Legami fra le costanti

Le diverse costanti incontrate nei precedenti casi sono legate alle seguenti equazioni

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

attraverso tali relazioni è possibile ricavare le altre

E = Modulo di Young
 μ = Modulo di Poisson
 K = Modulo compressione volumetrica
 G = Modulo di snellimento

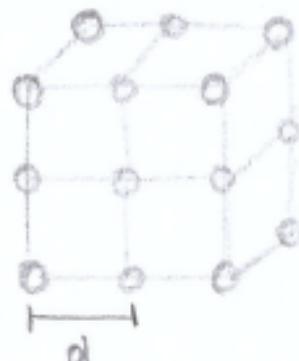
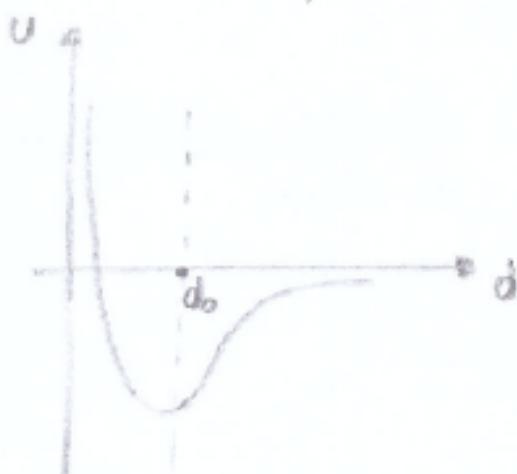
Attraverso tali relazioni è possibile ricavare le altre costanti del materiale così da poter descrivere completamente le sue proprietà elastiche

Origine proprietà elastiche nei solidi

I corpi solidi sono costituiti da reticolati di atomi, in condizioni di equilibrio sono posti ad una distanza d_0 , tale distanza è inferiore rispetto alla normale distanza tra due atomi poiché il singolo atomo del reticolo sente, oltre alla forza repulsiva di quelli accanto, anche quella atrattiva di quelli più lontani.

Il grafico rappresenta l'energia potenziale di un atomo rispetto al reticolo. Quando una forza esterna avvicina o allontana gli atomi, in un intorno di d_0 ,

l'energia potenziale che acquisisce si oppone alla deformazione cercando di riportare la distanza a d_0 (energia potenziale minore).



8. Meccanica dei fluidi

✓ **Fluidi:** permettono lo scorrimento continuo e reciproco tra parti: liquidi e gas.

Liquidi perfetti: viscosità nulla e incompressibili.

Gas perfetti: seguono l'equazione di stato $pV = nRT$.

Nei fluidi perfetti non ci possono essere sforzi di taglio, ma solamente forze di compressione (in quiete, questa condizione è soddisfatta).

La pressione $p = dF/dS$ in un punto di un fluido non dipende dalla giacitura della superficie considerata.

Tipi di forze

Forze di volume: in ogni punto, proporzionali al volumetto (masserella) su cui agiscono (gravitazionali, peso, inerziali ecc.);

Forze di superficie: in ogni punto, proporzionali all'area su cui agiscono ($dF = pdS$).

► Condizioni di equilibrio

a. In assenza di forze di volume: p è la stessa, ovunque nel fluido.

b. In presenza di forze di volume, con densità dF/dV :

$$\text{grad } p = dF/dV \quad (\text{equazione della statica dei fluidi}).$$

✓ **Teorema di Pascal:** una variazione Δp prodotta in un punto si risente inalterata in ogni altro punto di un fluido in quiete.

✓ **Pressione idrostatica:** per forze di volume dovute alla gravità, è $dF/dV = \rho g$ e si ha

$$p = p_0 + \rho g z \quad (\text{legge di Stevino}).$$

Le superfici equipotenziali sono anche isobariche.

✓ **Pressione atmosferica,** dovuta alla forza peso dell'atmosfera sulla superficie terrestre, è pari alla pressione idrostatica di 76 mm di Hg (esperienza e barometro di Torricelli).

✓ **Teorema di Archimede:** la risultante delle forze di pressione sulla superficie di un corpo immerso in un fluido pesante è verticale, diretta verso l'alto e pari al peso del fluido spostato.

Dinamica dei fluidi

Linea di flusso: linea avente tangenti in ogni punto le velocità delle particelle.

Linea di corrente: traiettoria di una particella.

Fluido stazionario: campo delle velocità costante nel tempo (le linee di flusso coincidono con le linee di corrente).

Tubo di flusso: l'insieme delle linee di flusso passanti per una linea chiusa.

✓ **Teorema di Bernoulli** (per fluidi incompressibili, non vischiosi): nel moto stazionario, su ogni sezione di un tubo di flusso è:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost}$$

(la somma delle altezze di *arresto*, *piezometrica* e *geometrica* è costante).

Applicazioni: tubo di Venturi, Tubo di Pitot, ala ecc.

Tipi di moto: **laminare e turbolento**.

LIQUIDI IDEALI

In questa parte si studia la statica dei liquidi, per farlo si considera un liquido ideale che ha le seguenti caratteristiche:

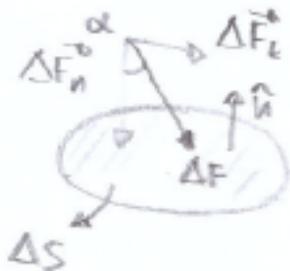
- Incopressibilità, quindi la densità ρ non varia in relazione ad una sollecitazione esterna
- Assenza viscosità, il liquido cambia forma senza spesa, quindi gli sforzi di taglio sono nulli

Nella realtà molto spesso si può considerare un liquido come ideale, soprattutto nei casi statici.

Le conclusioni successive si riferiscono in generale a fluidi ideali i quali comprendono liquidi e gas, tuttavia le approssimazioni fatte sono più idonee nei fluidi

Pressione in un fluido

Consideriamo una superficie ΔS e la sua normale n , di un fluido. Tale superficie è soggetta ad una forza ΔF



La forza può essere decomposta nella parte normale ΔF_n e nella parte tangenziale ΔF_t , quest'ultima può essere ignorata dato che un fluido ideale non ha sforzi di taglio (tangenziali)

Definiamo quindi la pressione su una superficie come

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta F_n|}{\Delta S}$$

$|\Delta F_n|$ = Modulo componente normale della forza esterna

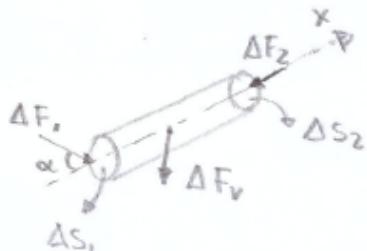
La pressione P è una grandezza scalare con unità di misura

$$[P] = [N/m^2] = [Pascal (Pa)]$$

Indipendenza della pressione

Vogliamo ora dimostrare che la pressione su una superficie ΔS è indipendente dalla sua orientazione

Consideriamo un fluido:



La forza esterna ΔF_v è detta forza di volume, in questo caso causata dalla forza di gravità

$$\Delta F_v = \Delta m g = \Delta V \rho g$$

$$P = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Poiché il corpo è in quiete tutte le forze si annullano, in particolare quella sull'asse x

$$\begin{aligned} \Delta F_1 \cdot \cos \alpha - [\Delta F_v]_x - \Delta F_2 &= 0 \quad P_1 \cos \alpha \Delta S_1 - \Delta V \rho g_x - P_2 \Delta S_2 = 0 \\ P_1 \cos \alpha \Delta S_1 - (\Delta S \cdot \Delta x) \rho g_x - P_2 \Delta S_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left| P = \frac{\Delta F}{\Delta S} \right.$$

Se facciamo tendere a zero ΔS e Δx , la forza di volume F_v può essere trascurata poiché è il prodotto di due termini tendenti a zero ($\Delta s \Delta x$ ro g_x)
Si ha quindi

$$P_1 \cos \alpha \Delta S_1 = P_2 \cos \alpha \Delta S_2$$

Ma poiché nel tendere a zero le due superfici tendono a passare per uno stesso punto si ha (in tal punto)

Quindi

$$\boxed{P_1 = P_2} \quad \left| \text{Per } \Delta S \cdot \Delta x \rightarrow 0 \text{ e quindi } F_v = 0 \right.$$

Si può definire la pressione in un punto indipendente dall'orientazione della superficie che lo contiene

N.B.

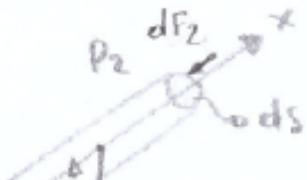
Nel caso in cui la forza di volume non sia presente, la pressione è uguale in tutti i punti del fluido.

Equazione statica dei fluidi

Consideriamo un cilindro di fluido soggetto ad una forza di volume qualsiasi dF_v .

Indichiamo con g_F la forza di volume totale su unità di massa a

$$g_F = \frac{dF_v}{dm}$$



OSS:

Se la forza di volume è solo quella di gravità g_F corrisponde all'accelerazione di gravità g

Oltre alla forza di volume vi sono due forze opposte, poiché il fluido è in equilibrio si deve avere lungo l'asse x

$$dF_1 - dF_2 - dF_{vx} = 0$$

Da cui:

$$p_1 ds - p_2 ds - g_{Fx} p dv = 0$$

essere scritta mediante differenziale

$$\begin{cases} dF_{vx} = g_{Fx} dm \\ dF_{vx} = g_{Fx} p dv \\ p = \frac{dm}{dv} \end{cases}$$

La pressione p_2 può essere scritta mediante differenziale come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g_{Fx} p$$

DIFERENZIALE

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Si ha quindi: $p_1 ds - (p_1 + \frac{\partial p}{\partial x} dx) ds - g_{Fx} p dv = 0$ $p_1 ds - p_1 ds - \frac{\partial p}{\partial x} dv - g_{Fx} p dv = 0$

Da cui:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = g_{Fx} P$$

Se si svolge lo stesso calcolo per gli altri assi si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = g_{Fx} P \\ \frac{\partial P}{\partial y} = g_{Fy} P \\ \frac{\partial P}{\partial z} = g_{Fz} P \end{array} \right.$$

$\vec{\nabla} P = \vec{g}_F P$
Gradiente

$\vec{g}_F = \frac{d\vec{F}_v}{dm} \rightarrow$ FORZA DI VOLUME

Statica dei corpi pesanti

Consideriamo il caso in cui la sola forza di volume F_v a cui è soggetto il corpo sia quello di gravità, poiché quest'ultima è conservativa, possiamo quindi scrivere l'equazione della statica dei fluidi in questo modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} P \\ \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial y} P \\ \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial z} P \end{array} \right. \quad \text{grad } p = -\rho \text{ grad } U.$$

$\vec{g}_{Fx} = - \frac{\partial U}{\partial x}$
(VEDI DINANCA)

Si ha quindi

$$dp = -du \cdot P$$

Globalmente, considerando ρ costante

$$\int_{P_0}^P dp = \int -du \cdot P$$

$$P = P_0 - uP$$

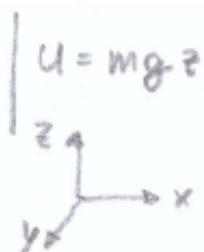
Legge di Stevino

Nel caso della forza di gravità l'energia potenziale dipende dalla quota z , considerando una massa unitaria si ha:

$$U = g z$$

l riferimento z_0 in cui è presente

pressione p_0 è il livello zero del liquido



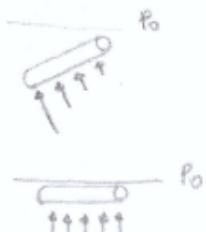
Prendendo una quota di riferimento z_0 in cui è presente una pressione p_0 , l'equazione per i fluidi pesanti diventa

$$P - P_0 = -[g(z - z_0)] p \quad P - P_0 = g(z_0 - z) p \quad | P = P_0 + \rho g p$$

Ponendo il dislivello tra z e z_0 uguale ad h si ottiene la Legge di stevino

$$P = P_0 + \rho g h$$

OSS:
Poiché l'energia potenziale dipende unicamente dalla quota si ha che le superfici orizzontali hanno la medesima pressione (ISOBARICHE). Dalla legge di Stevino si ha che la pressione aumenta con la "distanza" da P_0 , si deduce quindi che un fluido è in equilibrio in posizione orizzontale quando pressione è uguale in ogni punto



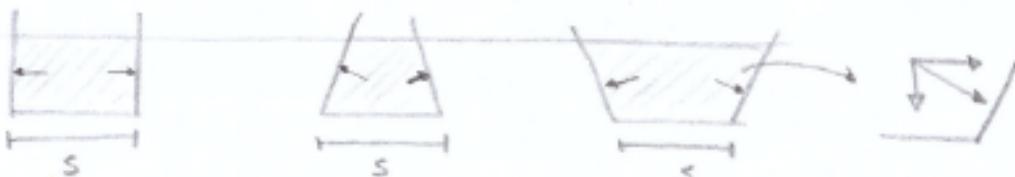
Paradosso dell'idrostatica

LEGGI DI STEVINO

$$P = P_0 + \rho g h$$

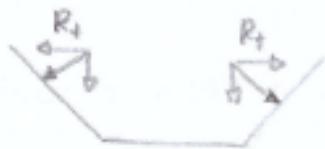
Dalla legge di Stevino si ha che la pressione è relazionata solo alla colonna di liquidi, indipendentemente dal volume.

Si ha quindi che nei tre casi seguenti sul fondo si ha la medesima pressione



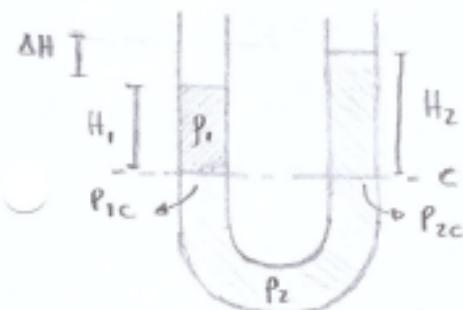
Si osserva che la base dei tre contenitori sono le medesimi, ma la massa dei tre liquidi è differente, poiché di diversa forma e riempiti allo stesso livello
Tale fenomeno può essere giustificato considerando la reazione normale del

fluido rispetto al contenitore se tale reazione è decomposta si nota che le componenti orizzontali si annullano, al contrario di quelle normali che si sommano



Vasi comunicanti

Consideriamo un contenitore a forma di U che contiene due fluidi miscellabili aventi densità diverse.



Per la legge di Stevino si ha che le superfici orizzontali sono isobariche (stessa pressione), quindi al livello C si deve avere la medesima pressione (La pressione esterna P_0 la consideriamo costante per il piccolo dislivello Δh)

$$P_{1C} = P_{2C}$$

Si ha quindi

$$P_0 + \rho_1 g H_1 = P_0 + \rho_2 g H_2$$

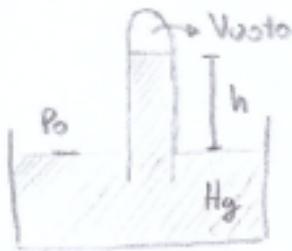
$$\left| \begin{array}{l} P_{1C} = P_0 + \rho_1 g H_1 \\ P_{2C} = P_0 + \rho_2 g H_2 \end{array} \right.$$

Da cui il rapporto

$$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{H_2}{H_1}}$$

Misura pressione atmosferica

Mediante il principio dei vasi comunicanti, Torricelli misurò la pressione atmosferica



Per tale misurazione occorre prendere una canna di vetro riempito di mercurio (Hg) e capovolgerla in un contenitore pieno di mercurio in modo che nella canna non vi sia aria.

Si ha che per Stevino la pressione atmosferica sul livello del contenitore (P0) paria:

$$P_0 = \rho_{Hg} h g$$

OSS

In questo caso non vi è la seconda pressione di riferimento, poiché nella canna, sopra Hg c'è l'vuoto

L'altezza h varia a seconda dell'altitudine e con essa varia anche l'accelerazione g

Si definisce quindi una nuova unità di misura per la pressione chiamata atmosfera.

1 atmosfera è la pressione che esercita una colonna di mercurio di 76cm a 0°C posta al livello del mare ($g=9,806 \text{ m/s}^2$)

$$1 \text{ atm} = (13,595 \cdot 10^3) \cdot 0,76 \cdot 9,806 = 101,32 \text{ kPa}$$

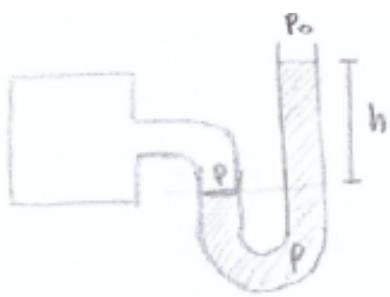
$$1 \text{ atm} = 101,32 \text{ kPa} = 1,013 \text{ bar}$$

$$\rho_{Hg} = 13,595 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

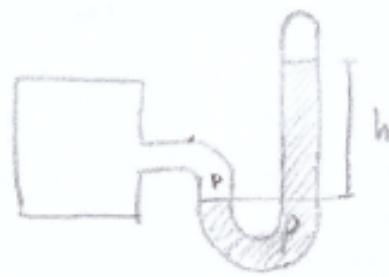
$$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Misura pressione fluido

Un metodo di misura della pressione di un fluido in contenitore è dato dai seguenti strumenti (In un caso estremità aperta nell'altro chiusa)



$$(P = P_0 + \rho g h)$$



$$(P = \rho g h)$$

OSS:

Ovviamente in entrambi i casi il fluido da misurare non deve miscelarsi con il fluido usato per la misurazione.

Principio di Pascal

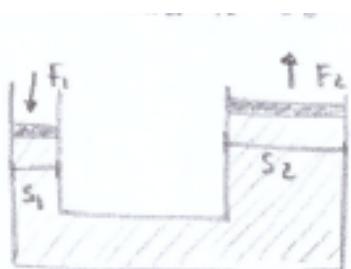
Abbiamo visto nella statica dei liquidi che nel caso in cui il fluido è soggetto solo alla forza di gravità, la pressione è proporzionale all'energia potenziale in quel punto.

Quindi la differenza di pressione tra due punti dipende dalla quota e dalle densità.

Se applichiamo una pressione esterna ΔP in un punto, anche nell'altro punto ci sarà il medesimo aumento di pressione (considerano un fluido ideale e quindi non compressibile), mantenendo così la differenza di pressione che c'era precedentemente, tale fenomeno è detto principio di Pascal

Pressa idraulica

Un'applicazione è la seguente, consideriamo il seguente contenitore, in cui ad un'estremità c'è un pistone



Se applico una forza F_1 , sull'estremità stretta, si avrà una forza F_2 uscente sull'altra estremità, legate dal fatto che la variazione di pressione ΔP è uguale per entrambi i punti.

La variazione di pressione sarà

$$\Delta P = \frac{F_1}{S_1}$$

$$P = \frac{F}{S}$$

La forza F_2 sarà

$$F_2 = \Delta P \cdot S_2 = \frac{F_1}{S_1} \cdot S_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \Delta P = \frac{F_1}{S_1} \\ \Delta P = \frac{F_2}{S_2} \\ \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \end{array} \right.$$

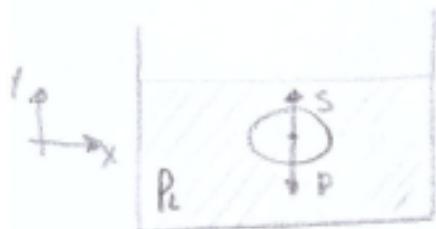
l'aumento di forza è proporzionale alle superfici

Si ha quindi un aumento di forza nel secondo punto, relazionata ai rapporto tra le superfici

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

Principio di Archimede

Se un corpo è immerso in un fluido, esso subisce una forza verticale diretta dal basso verso l'alto, uguale per intensità alla forza peso del volume del fluido spostato, tale forza è detta spinta di Archimede



La forza F totale a cui è soggetto il corpo è data dalla differenza tra la Spinta di Archimede e il peso del corpo

$$F = S - P = P_L V \cdot g - P_C V g$$

$$F = (P_L - P_C) V g = m a$$

$P_L \rightarrow$ Densità
Liquido

 $P_C \rightarrow$ Densità
corpo

 $V \rightarrow$ Volume
corpo

Il corpo, avendo massa m subisce un'accelerazione pari a:

$$m a = (P_L - P_C) V g \quad a = \frac{(P_L - P_C)}{m} V g = \frac{(P_L - P_C)}{P_C \cdot V} V g$$

$$P_C = \frac{m}{V}$$

Quindi:

$$\alpha = \left(\frac{\rho_l}{\rho_c} - 1 \right) g$$

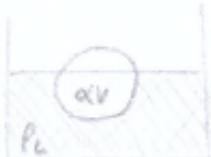
Corpo immerso

Se vogliamo imporre che un corpo è immerso di un coefficiente alpha, si deve porre l'equazione delle forze a zero

$$F = \rho_l (\alpha V) g - \rho_c V g = 0 \quad (\rho_l \alpha - \rho_c) Vg = 0$$

In questo caso il volume di liquido spostato è αV (V = Volume corpo)

Il coefficiente alpha è quindi dato da:



$$\alpha = \frac{\rho_c}{\rho_l}$$

• ρ_c = Densità corpo
 ρ_l = Densità fluido

OSS

[Se le densità ρ_l e ρ_c sono uguali, il coefficiente $\alpha = 1$ e quindi il corpo è completamente immerso]

TERMOLOGIA:

- **Sensazione fisiologica di oggetti termicamente diversi:**
principio zero dell'equilibrio termico tra tre corpi A , B , C (se A e B sono in equilibrio con C , sono in equilibrio tra loro) e possibilità di un termoscopio (e *termometro*) per definire la temperatura.
Proprietà di corpi dipendenti dallo stato termico e definizione di temperatura (t):
dalla lunghezza $l = l_0(1 + \alpha t)$ (e simili per aree, volumi, pressioni ecc.)
con $l_0 = l(t = 0)$ e $t = 0$ da stabilire indipendentemente.
Gas come sostanze termometriche, con α eguale per tutti (se molto rarefatti) e eguale per variazioni di volume e di pressione
- $$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (\text{Gay-Lussac})$$
- $$p = p_0(1 + \alpha t);$$
- con $t = 0$ per ghiaccio fondente e $t = 100$ per acqua bollente a pressione atmosferica (scala centigrada, $\alpha = \frac{1}{273,15} [{}^\circ\text{C}]^{-1}$).
- ✓ **Temperatura assoluta:** $T = t + T_0$, $T_0 = 273,15$.
- ✓ **Equazione dei gas:** $V/V_0 = T/T_0$ (isobare); $p/p_0 = T/T_0$ (isocore).
- ✓ **Calorimetria;** equilibrio termico tra quantità diverse di una medesima sostanza (equazione):
- $$m_1(T_1 - T_e) = m_2(T_e - T_2),$$
- e per sostanze diverse
- $$c_1 m_1(T_1 - T_e) = c_2 m_2(T_e - T_2);$$
- c , calore specifico; cm , capacità termica; $cm\Delta T$, quantità di calore scambiata.
- ✓ **Equilibrio tra più corpi:**
- $$\sum_i Q_i = 0.$$
- ✓ **Calorimetri** per la misura di quantità di calore scambiate (ad acqua o delle mescolanze, e a ghiaccio o *Bunsen*).
Trasmissione del calore (modalità diverse):
conduzione, a contatto ($dQ/dt = -KA\Delta T/\Delta l$);
convezione, nei fluidi (per moto reciproco delle parti, dovuto alle spinte di galleggiamento);
irraggiamento, a distanza (per emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica).

PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA:

Se due corpi A e B sono in equilibrio termico con un corpo C allora sono in equilibrio anche fra loro.

SCALE TERMOMETRICHE:

Per misurare la temperatura di un corpo si può pensare di usare le proprietà di alcuni materiali come ad esempio la variazione di resistenza oppure l'espansione di un fluido come il mercurio all'interno di un bulbo.

Tuttavia le relazioni che intercorrono tra le variazioni di grandezza e la temperatura sono diverse a seconda delle proprietà esaminate e dal materiale.

Ad esempio una scala termometrica definita linearmente per la resistenza di un conduttore può non essere lineare per un'altra caratteristica di un altro materiale.

SCALA CENTIGRADA:

Si è trovato tuttavia che i gas molto rarefatti si comportano tutti allo stesso modo in ambito scientifico si considera quindi una scala che mette in relazione lineare il volume di un gas mantenendo la pressione costante con la

temperatura.

Si può fare anche l'inverso (Variazione di pressione a volume costante)
Considerando la temperatura di un grado centigrado si ha:

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

$$P = P_0 (1 + \alpha t)$$

$$t = \text{Temperatura in } [^{\circ}\text{C}]$$

$$\alpha = \frac{1}{273,15}$$

La scala centigrada [$^{\circ}\text{C}$] è definita mediante i due punti di cambiamento dell'acqua a pressione atmosferica (760 mm Hg) (-1 Atm)

$0^{\circ}\text{C} \rightarrow$ Fusione acqua

$100^{\circ}\text{C} \rightarrow$ Ebollizione

N.B.

I valori V_0 e P_0 si riferiscono a valori assunti allo zero centigrado $T_0 = 273,15 \text{ K}$

SCALA KELVIN:

Le equazioni precedenti si possono riscrivere non usando scale scelte a piacere come quella centigrada, ma che siano legate alla proprietà intrinseca dei gas perfetti, ovvero al coefficiente alpha.

Ponendo la nuova temperatura di riferimento T_0 come:

$$T_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{273,15}$$

Le precedenti equazioni si scrivono:

Le precedenti equazioni si scrivono:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t}{T_0}\right) = V_0 \left(\frac{T_0 + t}{T_0}\right) = V_0 \frac{T}{T_0} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Tempo in} \\ \text{gradi kelvin} \end{array}$$

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

Stessa cosa vale per la pressione.

Si hanno quindi le seguenti relazioni, che legano la temperatura in gradi kelvin direttamente alle variazioni fissate dei gas:

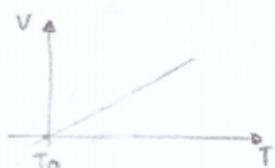
$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0}$$

$$T = [\text{kelvin}]$$

$$\text{kelvin} = {}^{\circ}\text{C} + 273,15$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K}$$



Dal punto di vista ideale
la temperatura T_0 (detta zero assoluto)
è quella in cui il volume del gas è nullo.

QUANTITA' DI CALORE:

Un corpo varia la sua temperatura in relazione alla quantità di calore ceduta o acquistata.

Essa dipenderà dalla variazione di temperatura, dalla massa del corpo e dal tipo di materiale.

La quantità di calore Q ha quindi la seguente relazione con la variazione della temperatura.

$$Q = cm(t_2 - t_1)$$

c → Calore specifico del materiale

cm → Capacità termica

m → Massa del corpo

La quantità di calore è misurata in Kilocaria,

1 Kilocaloria equivale alla quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 kg di acqua da 14,5 gradi centigradi a 15,5 gradi centigradi.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

- ✓ **Sistema termodinamico:** più generale sistema che scambia energia con l'esterno attraverso lavoro e calore.
- ✓ **Stato (termodinamico):** condizione del sistema definita da valori dei parametri macroscopici (**stato di equilibrio**: valori uniformi e costanti delle grandezze intensive).
- ✓ **Equazione di stato:** legame funzionale tra i valori dei parametri di un sistema che definiscono lo stato.
- ✓ **Trasformazione:** cambiamento di stato di un sistema termodinamico; **reversibile**, passante per tutti stati di equilibrio (ottenibile con differenze infinitesime tra i parametri intensivi del sistema e quelli esterni) e **irreversibile**.
Lavoro elementare per trasformazione **quasistatica** (reversibile): $dL = YdX$ (Y variabile intensiva, X estensiva); per X volume, $dL = pdV$.
- ✓ **Primo principio termodinamica:** in una qualunque trasformazione ciclica di un sistema è
$$JQ = L \quad (\text{Joule}),$$
con J costante = 4,18 joule/caloria; in una qualunque trasformazione è
$$Q = L + \Delta U$$
$$dQ = dL + dU,$$
con U , *energia interna* (funzione di stato), somma di tutti i tipi di energia contenuti nel sistema. Q e L non sono funzioni di stato, le variazioni dipendono dalla trasformazione compiuta.
 - **Calori specifici** e legame generale con parametri di stato; calori specifici in trasformazioni isocore e isobare.
 - **Trasformazioni isobare:** $dQ = dU + pdV = dH$, con $H = U + pV$, *entalpia*, funzione di stato.

In termologia abbiamo considerato il calore come se fosse una sostanza che possiamo far scambiare tra due corpi. Tale considerazione viene meno se consideriamo processi d'attrito in cui c'è aumento di temperatura senza scambi di calore.

Successivamente ricaveremo la vera natura del calore.

Prima di tutto introduciamo i concetti alla base della termodinamica.

SISTEMA TERMODINAMICO:

Un sistema è formato da un numero elevato di particelle che prende il nome di sistema termodinamico se può essere descritto globalmente tramite poche grandezze tra cui la temperatura.

EQUILIBRIO TERMODINAMICO:

Un sistema termodinamico se isolato, raggiunge dopo un certo tempo uno stato di equilibrio termodinamico. In tale stato non ci sono moti macroscopici tra le parti, e le grandezze globali, come la temperatura, sono uniformi in ogni punto.

VARIABILI DI STATO:

Lo stato di equilibrio di un sistema è descritto tramite diverse grandezze dette variabili di stato.

Un particolare stato di equilibrio è definito unicamente dai valori che assumono le variabili di stato, indipendentemente dal moto in cui si raggiunge tale stato.

Le variabili di stato sono di due tipo:

- Intensive: non dipendono dalla dimensione del sistema
- Extensive: dipendono dalla quantità di materia che costituisce il sistema

Nel caso di un gas omogeneo:

- Intensive(Temperatura e pressione)
- Extensive(Volume)

EQUAZIONE DI STATO:

Le variabili di stato di un sistema termodinamico non sono indipendenti ma legate ad equazioni di stato che dipendono dalla natura del sistema stesso.

TRASFORMAZIONI:

Un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio ad un altro mediante trasformazioni. Vi sono due tipi di trasformazioni:

- Trasformazione reversibile: il processo avviene molto lentamente(quasi statico) in modo che si possa considerare in equilibrio termodinamico ad ogni istante.

In tal caso non devono essere presenti processi dissipatori come l'attrito. Tale trasformazione può anche essere invertita.

- Trasformazione Irreversibile: un esempio è quella di far espandere rapidamente un gas, in tal caso non è possibile definire equilibri termodinamici intermedi ma solo iniziali e finali. Tali processi non possono essere invertiti.

LAVORO IN TRASFORMAZIONI REVERSIBILI:

Un sistema termodinamico durante una qualsiasi trasformazione può compiere lavoro, nel caso di trasformazioni reversibili tale lavoro può essere calcolato tra i sistemi ideali da noi considerati l'unico che può compiere lavoro è il gas ideale poiché a differenza dei solidi e liquidi ideali non possiede un volume proprio, ma assume quello del contenitore.

Consideriamo quindi un gas molto raro in modo da potersi considerare ideale, lo mettiamo in un contenitore avente come tappo un pistone che è libero di muoversi (senza attrito) con l'espansione spontanea del gas, che immaginiamo avvenire molto lentamente in modo da avere una trasformazione reversibile.

Il lavoro sarà dato

$$\Delta L = F \cdot \Delta l = P \cdot A \Delta l = P \Delta V$$

e' tale trasformazione di esempio la trasformazione

$$\left| \begin{array}{l} \Delta V = A \Delta l \\ P = \frac{F}{A} \end{array} \right.$$

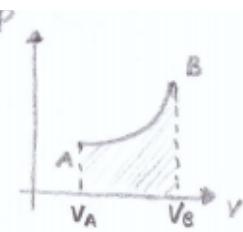
Poiché tale trasformazione è reversibile possiamo rappresentarla graficamente mettendo in relazione p e v.

Il lavoro totale sarà (Dal volume Va a Vb)

Il lavoro totale sarà (Dal volume V_A a V_B)

$$L_{AB} = \int_A^B P \, dv$$

Come da definizione di integrale il lavoro è dato dall'area sottostante la curva descritta dalla trasformazione.



N.B.

S: deduce quindi che il lavoro eseguito da un sistema termodinamico nel passare da uno stato di equilibrio all'altro **DIPENDE** dal **TIPO DI TRASFORMAZIONE** seguita

Il lavoro eseguito per una variazione elementare di volume non è un differenziale esatto, poiché dipende dalla trasformazione

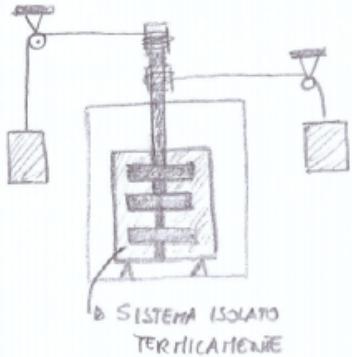
$$dL = P \, dv$$

| Lavoro elementare espansione gas
| d → Differenziale non esatto.

EQUIVALENTE MECCANICO DELLA CALORIA:

Nello studio della meccanica si è notato che in processo dissipatorio (es. attrito) l'energia meccanica non si conserva. Essa viene convertita in altri tipi di energia, come ad esempio il calore.

Vediamo quindi tramite l'esperimento di JOULE come è legato il lavoro meccanico alla caloria (quantità di calore).



Consideriamo un contenitore pieno di acqua isolato termicamente, facendo cadere i due pesi: le pale immerse nel fluido ruotano e per attinto scaldano il sistema (H_2O), fanno quindi lavoro sul sistema ($L_{SUL} = -L$)
Successivamente si riporta il sistema alla temperatura iniziale, sottraendo calore ($Q_{SOR} = -Q$)

Si ottiene che il rapporto tra lavoro e calore è sempre costante, in tutti i processi come quello di Joule.
Tale rapporto è:

$$\frac{L}{Q} = J$$

$$J = 4,18 \text{ Joule/cal}$$

$$= 4,18 \cdot 10^3 \text{ Joule/Kcal}$$

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

Abbiamo ricavato che il lavoro eseguito da un sistema termodinamico dipende dal tipo di trasformazione eseguita. Tale dipendenza è valida anche per la quantità di calore, infatti lavoro e calore sono in relazione ($L=JQ$).
IL primo principio definisce una nuova grandezza detta ENERGIA INTERNA (v), la cui variazione non dipende dal tipo di trasformazione, ma solo dagli stati iniziali e finali.

In questi stati vi può essere scambio di calore e il sistema può eseguire o subire lavoro.

'U' è quindi una funzione di stato.

Tale variazione è data dalla somma del calore scambiato e lavoro fatto.

$$\Delta U = Q + L$$

Tuttavia per convenzione si definisce:

-QUANTITA' DI CALORE POSITIVO: se assorbito dal sistema

-LAVORO NEGATIVO: se eseguito sul sistema

Riferendosi al sistema si scrive il primo principio nel seguente modo:

$$\Delta U = Q - L$$

ΔU = Variazione energia interna del sistema

Q = Calore assorbito dal sistema

L = Lavoro fatto sul sistema

Poiché U è una funzione di stato, il suo differenziale è esatto e si può scrivere il 1° principio come

$$dU = dQ - dL$$

Campo magnetico (caso stazionario)

Vogliamo vedere come varia il campo magnetico in un mezzo materiale rispetto a quello visto nel vuoto.

Il campo totale sarà aumentato poiché oltre alle densità di corrente J ci sarà una densità J_m dovuta al movimento delle cariche all'interno del materiale (Ovviamente J_m è un valore medio considerando in spazi relativamente piccoli, come fatto con il campo elettrico) si avrà quindi (caso stazionario)

Rotore

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \quad (4^{\text{o}} \text{ eq Maxwell}) \quad \text{NEL VUOTO}$$

stazionario

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

Cerchiamo quindi di ricavare J_m , attraverso lo studio di B in un solenoide B in un solenoide infinito

Vediamo come varia il campo B in un solenoide se all'interno è vuoto o se è presente un materiale

- Nel vuoto

In tal caso si ha:

$$B_0 = \mu_0 N_e I$$

$N_e \rightarrow$ Spire per unità di lunghezza

- Nella materia

Se il solenoide è riempito di un mezzo isotropo omogeneo si ottiene al suo interno un nuovo campo, tuttavia la corrente che lo percorre è la medesima

$$B = \mu N_e I = (\mu_0 \mu_r) N_e I$$

~ membro a membro

$\mu \rightarrow$ Permeabilità assoluta
 $\mu_r \rightarrow$ Permeabilità relativa

Sottraendo membro a membro vediamo la differenza

$$B - B_0 = \mu_0 \mu_r N_e I - \mu_0 N_e I = \mu_0 [(\mu_r - 1) N_e I]$$

Da tale risultato si deduce che è come se il materiale presentasse un insieme di spire percorse da una nuova corrente

$$I_m \cdot N_{em} = (\mu_r - 1) N_e I$$



- Corrente di magnetizzazione

Se si considerano le spire per unità di lunghezza presenti sul materiale (n_m) uguali a quelle del solenoide (n_e) si ottiene

$$I_m = (\mu_r - 1) I$$

$I_m \rightarrow$ Corrente di magnetizzazione
 $I \rightarrow$ Corrente solenoide
 $\mu_r \rightarrow$ Permeabilità magnetica relativa

Vettore intensità di magnetizzazione

Nella trattazione di B_0 abbiamo considerato una spira percorso da corrente come un dipolo magnetico, avente un momento magnetico \vec{m} .

Calcoliamo il momento magnetico per unità di lunghezza del solenoide percorso da I_m :

$$\vec{m}_e = \mu_e I_m \cdot \vec{s} = \mu_e I_m S \cdot \hat{n}$$

Introduciamo quindi il VETTORE INTENSITÀ DI MAGNETIZZAZIONE che rappresenta la densità volumetrica del momento magnetico considerando un volume ($S \cdot l$)

MOMENTO MAGNETICO

$$\vec{m} = I \cdot \vec{s}$$

$\vec{s} \rightarrow$ Superficie spira (orientata)

$$\vec{M} = \frac{\mu_e I_m \cdot S}{S \cdot l} \hat{n} = \mu_e I_m \hat{n}$$

Quindi poiché

$$B - B_0 = \mu_0 [(\mu_r - 1) \mu_e I] = \mu_0 (I_m \cdot \mu_e) = \mu_0 |\vec{H}|$$

Si ha

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H}$$

Tale risultato, ricavato per un solenoide, ha validità generale

Vettore campo magnetico H

Ricordando che il vettore B è denominato impropriamente, vettore di induzione magnetica, andiamo ora a definire un nuovo vettore H chiamato vettore campo magnetico

- Rotore di H

Prendiamo in considerazione la 4° equazione di Maxwell per i casi stazionari nei materiali

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m)$$

il primo membro è dato

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \vec{\nabla} \times \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H} \end{array} \right.$$

Quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \mu_0 (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_m$$

Introduciamo quindi H

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\mu_0 (\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{H}) = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) = \vec{J}$$

Imponendo:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}$$

es: solenoides
 $\vec{H} = \mu_0 I$? $[H] = [A/m]$

La 4° equazione di Maxwell stazionario è data

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \left| \vec{J} \rightarrow \text{Densità di corrente esterna} \right.$$

OSS

Tale forma e' valida anche nel vuoto, in tal caso $\vec{H} = 0$ e quindi \vec{H} e' dato:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \quad \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{J} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

Campo magnetico in materiali isotropo omogenei

Nel caso di materiali isotropo e omogenei il vettore intensità di magnetizzazione \vec{M} è proporzionale ad \vec{H}

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m \rightarrow$ Suscettività magnetica

La definizione di H diventa

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \quad \vec{H}(1 + \chi_m) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad \mu_r = (1 + \chi_m)$$

La legge di Ampere diventa in un materiale isotropo ed omogeneo

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \right) = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J}$$

Si deduce che in questo caso qualsiasi risultato ottenuto nel vuoto, può essere espresso in un materiale isotropo ed omogeneo sostituendo μ_0 con il prodotto $\mu_0 * \mu_r$

- Es filo infinito

INFINITO)

$$\vec{B} = \frac{(\mu_r \mu_0) I}{2\pi R} \quad R \rightarrow \text{Distanza del filo.}$$

NEL VUOTO

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Deviazione linee di forza campo magnetico

Come fatto per il campo elettrico vediamo come variano le linee di forza nell'interfacciarsi tra due materiali con μ diverse

In analogia al campo E , considerando che non vi siano correnti libere si hanno le seguenti relazioni:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad | I_{LB} = 0$$

LEGGE DI AMPERE

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{LB}$$

Applicando Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J}_{LB} \cdot d\vec{s} = I_{LB}$$

Come fatto con E e D si ricava

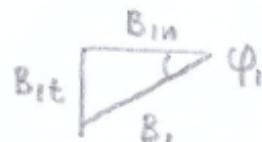
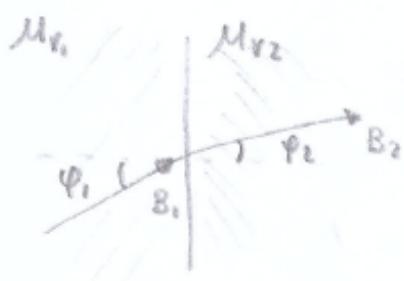
$$B_{1t} = B_{2t}$$

Componenti tangenziali:

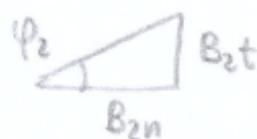
$$H_{1n} = H_{2n}$$

Componenti normali:

Quindi la componente tangenziale di H si conserva e anche quella normale di B
Le linee di B tra l'interfaccia forma due angoli



$$\tan \varphi_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}}$$



$$\tan \varphi_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}}$$

Il rapporto tra le tangenti è dato

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{B_{1t}}{B_{1n}} \cdot \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}}$$

$$| B_{1n} = B_{2n}$$

Poiché \vec{B} è relazionato ad \vec{H}

$$B_{1t} = \mu_0 \mu_r H_{1t} ; B_{2t} = \mu_0 \mu_r H_{2t}$$

$$| \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Si ha:

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\mu_r}{\mu_{r2}}$$

$$| H_{1t} = H_{2t}$$

Vari tipi di materiali

A seconda del comportamento in presenza di un campo magnetico esterno, si distinguono due tipi di materiali:

- **Diamagnetici**, in questo caso χ_m (suscettività magnetica) è negativa ovvero gli atomi creano un momento magnetico opposto a B esterno.
Le molecole di questo materiale non presentano un momento magnetico proprio

- **Paramagnetici:** In questo caso X_m è positivo, quindi la magnetizzazione è concorde a B . La suscettività è inversamente proporzionale alla temperatura. Le molecole di questo materiale presentano un momento magnetico proprio
- **Ferromagnetici:** Questo tipo di materiale è paramagnetico, ma se posto ad una temperatura inferiore a quella di Curie (T_c) presenta una X_m molto elevata

Effetto Diamagnetico

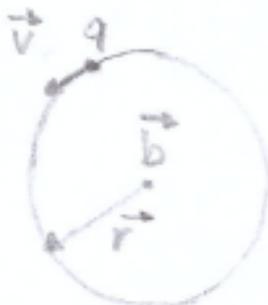
L'effetto diamagnetico, ovvero la creazione di un movimento magnetico opposto a B è dovuto alla rotazione degli elettroni intorno al nucleo, in ogni atomo.

Tale effetto si manifesta in tutti i tipi di materiali, ma in quelli paramagnetici viene sovrastato dall'orientamento dei dipoli magnetici propri delle molecole

Situazione atomica normalmente

-Momento angola

Consideriamo il momento meccanico che ha una carica q in rotazione



In tal caso, se q si muove in senso antiorario, b è rivolto verso l'altro e il medio è dato:

$$b = m_q r v$$

$$b = m (\vec{r} \times \vec{v})$$

Considerando la velocità aereolare, che nei moti centrali si conserva, ottengo:

$$b = m_q 2 \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{b}{2m_q}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

- Momento magnetico

Il momento della carica intorno al nucleo può essere considerato come una corrente elettrica

$$I_e = \frac{q}{T}$$

$T \rightarrow$ Periodo di rotazione

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Tale corrente genera un momento magnetico, considerando la superficie dell'orbita

$$\vec{m} = I_e \cdot \vec{s} = q \cdot \frac{\vec{s}}{T} = q \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Se la velocità aerolare è costante lo rebusco

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\vec{s}}{T} = \text{Velocità aerolare media} \\ \frac{d\vec{A}}{dt} = \text{Vel. aerolare istantanea} \end{array} \right\}$$

Perché la velocità aerolare è costante la velocità media è uguale a quella istantanea.

Il momento magnetico è quindi:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{b}}$$

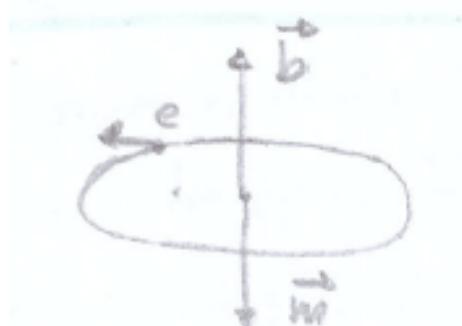
$$\frac{q}{2m} \rightarrow \text{Rapporto Giromagnetica}$$

Nel caso in cui la carica in rotazione è un elettrone si ha

Quindi i due momenti sono opposti e si annullano

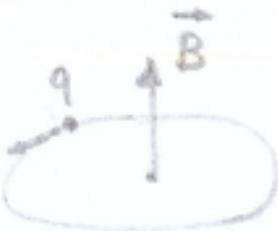
$$\vec{m} = -\frac{e}{2m} \vec{b}$$

$$| q = -e$$



● Situazione atomica in presenza di un campo B

Consideriamo un campo esterno B perpendicolare all'orbita.



Tale campo porta all'accelerazione della carica q , di conseguenza ad una variazione del momento angolare e magnetico.

Per il calcolo di tali variazioni usiamo la legge di Faraday ed il teorema dell'impulso di una forza

La carica q sarà esposta ad un campo E , dato dalla variazione del campo B (da O a B in un tempo dt non noto)

Per Faraday la circuitazione di E è data

$$2\pi r \vec{E} = -\pi r^2 \frac{d\vec{B}}{dt} \quad r \rightarrow \begin{array}{l} \text{Raggio} \\ \text{Orbita} \end{array}$$

FARADAY

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

CIRCONFERENZA ORBITA

$$l = 2\pi r$$

AREA ORBITA

$$A = \pi r^2$$

Da cui

$$\vec{E} = -\frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Quindi la carica q subisce una forza data da

$$\vec{F} = q \vec{E} = -q \left(\frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

Applicando il teorema dell'impulso

$$\int F \cdot dt = \int_0^B -q \frac{r}{2} dB = -q \frac{r}{2} B \quad | \text{Poiche' } r \text{ e' costante}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

$$\int F dt = \Delta p = m \Delta v$$

$$| b = m r v \\ \Delta b = m r \Delta v$$

$$| m \Delta v = \frac{\Delta b}{r}$$

Da cui

$$-q \frac{r}{2} B = m \Delta v = \frac{\Delta b}{r}$$

$$\boxed{\Delta b = -q \frac{r^2}{2} B}$$

Per la variazione di momento magnetico

$$\boxed{\Delta m = -q^2 \frac{r^2}{2} B}$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{b}}$$

N.B.

Nella variazione di momento magnetico la carica q è elevata al quadrato, quindi il segno è invariante, il momento magnetico è SEMPRE opposto al campo \vec{B} .

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 r^2}{4 M q} \vec{B}$$

- Invarianza di r

Abbiamo precedentemente visto che la carica q viene accelerata, ma il raggio di orbita r rimane costante, c'è quindi un aumento di forza centripeta data in questo caso dalla Forza di Lorenz, di seguito la dimostrazione

La differenza di forza necessaria a mantenere la distanza è data da

$$\Delta F = m(a_{c_z}) - m(a_{c+}) = mr(\omega + \Delta\omega)^2 - mr(\omega)^2 \quad \left| \begin{array}{l} a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \\ \text{c'è stato un aumento per} \\ \partial \Delta\omega \end{array} \right.$$

$$\Delta F = mr [w^2 + (\Delta\omega^2 + 2\omega\Delta\omega) - w^2] = mr [(\Delta\omega)^2 + 2\omega\Delta\omega]$$

Poiché $\Delta\omega$ è una quantità piccola, $(\Delta\omega)^2$ è trascurabile

Quindi

$$\Delta F = wr 2m \Delta\omega$$

$$b = mr\omega = mr^2\omega \quad \Delta b = mr^2 \Delta\omega$$

$$B = \frac{\Delta b}{(-q)r^2} \cdot 2 = -\frac{2m \Delta\omega}{q} \quad -qB = 2m \Delta\omega$$

$$\left| \Delta b = -q \frac{v^2}{2} B \right.$$

$$\Delta F = q v r (-q) B = -q v B$$

FORZA LORONZ

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$F = q v B$$

Paramagnetismo

Se il materiale è composto da molecole aventi un proprio momento magnetico proprio si ha che la magnetizzazione media M_m è data

$$\vec{M}_m = N \vec{m}_p \cdot L(a)$$

$$\alpha = \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{B}}{kT}$$

$L(a) =$ Funzione Langevin

Dall'esperienza si ricava che la suscettività magnetica χ_m è data

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

$C =$ Costante di Curie

Ferromagnetismo

Alcuni materiali paramagnetici sono dotati di una suscettività magnetica molto alta χ_m e se esposti ad un campo magnetico esterno, e se tenuti al di sotto della temperatura di Curie rimangono magnetizzati anche in assenza di campo esterno

- **Teoria di Weiss**

Le proprietà sopra descritte sono impiegate nella Teoria di Weiss composta da due ipotesi

1. I materiali ferromagnetici sono formati da domini detti domini di Weiss
2. Ogni dominio è composto da dipoli atomici allineati spontaneamente a causa dell'interazione fra i diversi atomi. L'azione di allineamento che subisce il singolo atomo è proporzionale alla magnetizzazione generata dagli altri presenti nel dominio

Dalla seconda ipotesi si ricava che un atomo risente di un campo B_l detto locale dato da:

$$\vec{B}_L = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \lambda \vec{H}_m$$

$\vec{H}_m \rightarrow$ Magnetizzazione del blocco
 $\lambda \rightarrow$ Costante del campo molecolare
 $\vec{H} \rightarrow$ Campo magnetico esterno

Ecco è quindi dovuto ad un campo esterno M e dalla magnetizzazione causata dagli altri atomi

- **Magnetizzazione spontanea**

Funzione Langevin

Consideriamo un singolo dominio. Dalle considerazioni sui paramagnetici, la magnetizzazione media del blocco M_m è data

$$\vec{H}_m = N \vec{m}_p L(a)$$

alla funzione di Langevin: e'

L'argomento della funzione di L

$$a = \frac{\vec{m}_p \vec{B}_L}{kT} = \frac{\vec{m}_p (\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \lambda \vec{H}_m)}{kT}$$

vogliamo considerare la magnetizzazione

$\vec{B}_L \rightarrow$ Campo locale
 $B_L = \mu_0 H + \mu_0 \lambda \vec{H}$

Poiché vogliamo considerare la magnetizzazione spontanea poniamo il campo esterno $H=0$

$$a = \frac{\vec{m}_p \mu_0 \lambda \vec{H}_m}{kT}$$

allo stesso modo

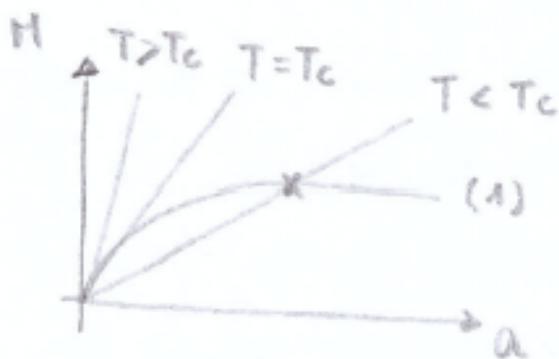
$$\vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a$$

Abbiamo quindi un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \vec{H}_m = N \vec{m}_p L(a) \\ \vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p \mu_0 \lambda} a \end{cases}$$

La soluzione analitica non si può ottenere, si ricavano le soluzioni mediante il

metodo grafico dell'intersezione delle due linee/curve



$T_c \rightarrow$ Temperatura di Curie

La curva (1) è data da

$$\vec{H}_m^D = N \vec{m}_p L(a)$$

Le altre rette da

$$\vec{H}_m^D = \frac{kT}{\vec{m}_p M \lambda} a$$

Per queste ultime si nota che a seconda della temperatura T cambia l'inclinazione, e quindi la presenza o meno della soluzione diversa da zero per cui in assenza del campo esterno H vi è una magnetizzazione stabile spontanea.

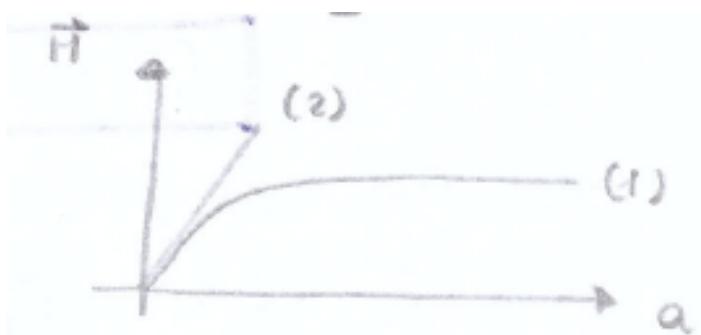
La temperatura limite per godere di tale proprietà è detta temperatura di Curie, al di sopra di questa l'agitazione termica sovrasta l'allineamento

- Temperatura di Curie

Per temperature intorno a quelle ambientali, come si è precedentemente detto la funzione di Langevin è approssimabile ad una retta

$$L(a) \approx \frac{a}{3}$$

Con questa approssimazione ricaviamo T_c :



$$(1) \vec{H}_m = N \vec{m}_p \frac{a}{3}$$

$$(2) \vec{H}_m = \frac{kT}{\vec{m}_p M_b \lambda} \cdot a$$

In tal caso poiché le due curve sono tangenti, nel caso $T=T_c$ esse coincidono

$$\frac{N \vec{m}_p}{3} a = \frac{k T_c}{\vec{m}_p M_b \lambda} a$$

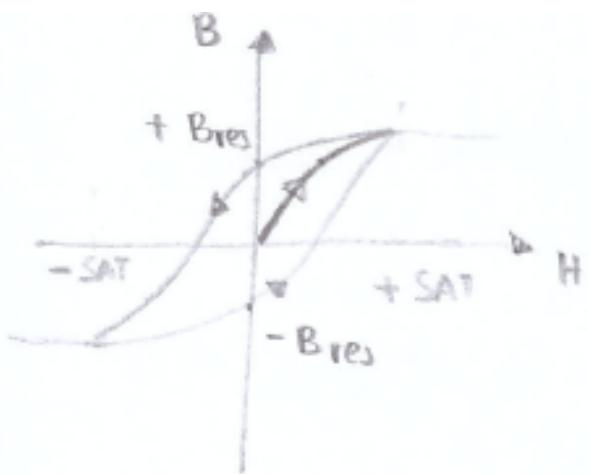
Da cui

$$T_c = \frac{\lambda M_b N (\vec{m}_p)^2}{3k}$$

$\lambda \rightarrow$ Costante del campo magnetico
 $N \rightarrow$ Numero molecole
 $M_p \rightarrow$ Momento magnetico proprio
 $k \rightarrow$ Costante di Boltzmann

● Curva di isteresi

Una caratteristica dei materiali ferromagnetici è data dal ciclo di isteresi, con area diversa da zero.



Si consideri un ferromagnetico smagnetizzato, ($H=0, B=0$) se esposto ad un campo esterno H si magnetizza creando al suo interno un campo B concorde (curva in rilievo).

Se il campo H è rimosso il materiale segue la curva in alto, portandosi ad un campo residuo B_{res} .

Per togliere tale campo residuo occorre esporre il materiale ad un campo H opposto molto forte (oppure portarlo ad una temperatura $T > T_c$).

Una volta portato alla saturazione negativa, se il campo M si inverte, il materiale segue l'altra curva (quella in basso).

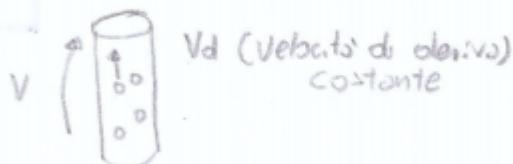
La saturazione è dovuta ad un limite del materiale, ovvero una volta che tutti i domini sono allineati il campo B interno non può più aumentare.

CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE:

- ✓ La corrente elettrica è dovuta al movimento delle cariche libere in un conduttore. Verrà data la definizione di densità e di intensità della corrente elettrica. Si passerà quindi a considerare essenzialmente il caso in cui la corrente è costante nel tempo (caso stazionario o corrente continua) e si introdurranno la legge di Ohm, che definisce una classe di conduttori in cui corrente e differenza di potenziale sono tra loro proporzionali (conduttori ohmici), l'effetto Joule, che riguarda la dissipazione di potenza in un circuito elettrico ed il concetto di *forza elettromotrice* (f.e.m.).
- ✓ Vengono poi date una serie di regole e di teoremi che permettono la soluzione di *reti elettriche*.
- ✓ La parte finale del capitolo riguarda il comportamento e la spiegazione classica della conduzione in vari mezzi:
 - gas
 - liquidi
 - solidi.
- ✓ Si terminerà con un esempio di corrente lentamente variabile: la *carica e la scarica di un condensatore* a cui possono essere applicate le metodologie introdotte per lo studio delle correnti stazionarie.

Per corrente stazionaria si intende che essa non varia di intensità nel tempo.
VELOCITA' DI DERIVA:

Normalmente le cariche presenti in un conduttore (es. filo metallico) si muovono in modo casuale ma mantenendo una velocità complessiva nulla, come se mediamente stessero fermi. Se il filo è posto ad una differenza di potenziale, al moto caotico delle cariche si aggiunge una velocità di scorrimento, per convenzione si considerano le cariche positive che si spostano dal potenziale maggiore a quello minore. Ovviamente tale velocità V_d è dovuta al campo elettrico che esercita sulla carica q la forza $F=qE_0$



INTENSITA' DI CORRENTE:

Rappresenta la quantità di carica che passa in un conduttore nell'unità di tempo

$$I = \frac{dq}{dt} \quad [C/s] \quad [A]$$

la carica totale q che passa nel filo sarà:

$$Q = \int dq = \int_{t_0}^t I dt$$

DENSITA' DI CORRENTE:

Il modulo di tale vettore è dato da:

$$|J| = \frac{dq/dt}{ds}$$

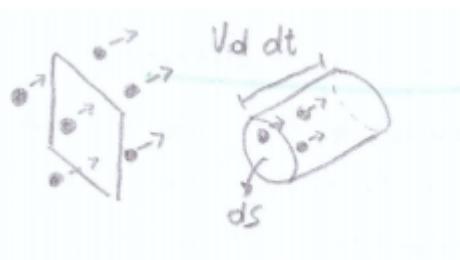
Il verso è concorde con quello della velocità di scorrimento V_d , la superficie ds è perpendicolare a V_d .

Tale grandezza rappresenta il numero di cariche che passa attraverso una superficie unitaria nell'unità di tempo.

Essa può essere considerata come un flusso.

DENSITA' DI CARICA ESPRESSA DALLA VELOCITA' DI DERIVA:

Come fatto con il teoria di Gauss, la carica che attraversa la superficie in dt sarà dato dal numero di cariche che trovo nel cilindro posto dopo la superficie con altezza dipendente da dt . Si ha quindi che la carica totale contenuta dal cilindro infinitesimo:



$$dq = V_d dt ds \cdot n q$$

$n \rightarrow$ numero di cariche per unità di Volume

$$|J| = \frac{dq}{dt} \frac{1}{ds} = \frac{V_d n q dt ds}{dt ds}$$

$$|J| = V_d n q$$

Nel caso si abbiano più tipi di cariche:

$$|J| = \sum V_{di} n_i q_i$$

OSS
I termini saranno sempre positivi: dato che V_d è concorde con q

INTENSITA' DI CORRENTE:

Se si vuole ricavare la corrente attraverso una superficie qualsiasi si ha:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \Phi_s(J)$$

$$\begin{cases} |J| = \frac{dq/dt}{ds} = \frac{I}{ds} \\ I = |J| ds \end{cases}$$

Ovvero l'intensità di corrente è pari al flusso del vettore j attraverso la superficie S .

LEGGE DI OHM:

Alcuni materiali detti ohmici se tenuti ad una temperatura costante, si ricava dall'esperienza che la differenza di potenziale (d.d.p.) a cui sono posti è proporzionale alla corrente che li attraversa.

$$V = RI \quad [R] = [\text{Ohm}] [\Omega]$$

Si deduce quindi che la resistenza è una proprietà intrinseca del conduttore.

RESISTENZA:

La resistenza di un conduttore dipende dal materiale e dalla forma, considerando un filo di sezione S e lunghezza L si ricava

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$$

$R = \rho \frac{l}{S}$

$\rho \rightarrow \text{Resistività}$
 $\sigma \rightarrow \text{Conduttorità}$

ro e sigma sono costanti dipendenti dal materiale impiegato.

La resistenza di un materiale la si può attribuire al moto caotico delle cariche al suo interno che ostacolano il moto dei portatori liberi.

La resistività nei materiali metallici per piccole variazioni di temperatura varia linearmente:

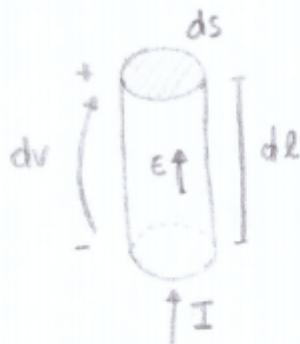
$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$$

$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$

$\rho_0 \rightarrow \text{Resistività a } t_0$
 $t_0 \rightarrow \text{temperatura di riferimento}$

LEGGE MICROSCOPICA DI OHM:

Applichiamo i risultati ottenuti nella legge di Ohm ad un conduttore formato da un cilindro infinitesimo orientato come il verso della corrente.



$$-\frac{dv}{dl} = \rho \frac{dl}{ds} \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$-\frac{dv}{dl} = \rho \frac{dl}{ds} J \, ds$$

$$-\frac{dv}{dl} = \rho J$$

Dato che $-\frac{dv}{dl} = E_0$

$$\vec{E}_0 = \rho \vec{J}$$

O equivalentemente

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{\sigma} \vec{J}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_0$$

N.B.

Il segno (-) in dv
è dovuto al fatto
che la corrente
è positiva nel
verso in cui dv
decresce

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$J = \frac{I}{ds}$$

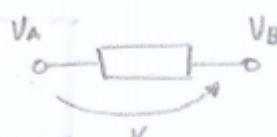
POTENZA DI UN TRATTO DI CIRCUITO:

Considerando un tratto di circuito posto ad una d.d.p. pari a V l'energia necessaria per spostare una carica dq dal potenziale maggiore a quello minore è dato:

$$dE = dq V$$

$$dE = IV dt$$

$$P = \frac{dE}{dt} = IV$$



$$I = \frac{dq}{dt}$$

POTENZA NEI CONDUTTORI OHMICI:

Applicando la legge di Ohm si ha (validità solo per materiali ohmici)

$$P = I^2 R$$

$$V = RI$$

GENERATORE ELETTRICO:

Un generatore è un dispositivo che trasforma reversibilmente un'energia qualsiasi in energia elettrica.

Un importante parametro del generatore è la propria forza elettromotrice

$$f.e.m. = \frac{d\varphi}{dq}$$

[J/c] [volt]

Tale grandezza rappresenta la quantità di energia che viene trasformata in energia elettrica per unità di carica, ha la medesima grandezza del potenziale, ma un significato diverso.

CAMPO ELETTROMOTORE:

Il generatore per produrre energia elettrica sposta le cariche dq da un elettrodo all'altro applicandogli una forza dF , poiché quest'ultima dipende dalla carica all'interno del generatore si ha un campo detto ELETTROMOTORE



$$E_m = \frac{dF}{dq}$$

$$dF = dq E_m$$

Il campo elettromotore è opposto a quello elettrico. Esso sposta le cariche dal potenziale maggiore a quello minore, quello elettromotore fa il contrario. Il campo elettromotore non è conservativo.

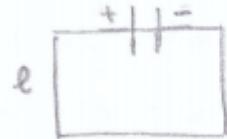
FORZA ELETTROMOTRICE: (DEFINIZIONE TRAMITE CAMPO TOTALE)

Il campo totale E a cui sono sottoposte le cariche è dato dalla somma del campo elettrico e quello elettromotore

$$E_{TOT} = E_s + E_m$$

Se si considera una linea chiusa che attraversa il generatore ed eseguendo l'integrale su tale linea(chiusa):

$$\oint_e E_{TOT} dl = \oint_e E_S dl + \oint_e E_m dl$$



Dato che il campo elettrico è conservativo l'integrale di circuitazione è nullo. Si ottiene quindi che la circuitazione del campo totale è pari all'integrale del campo elettromotore all'interno del generatore dato che esso altrove è nullo. Tale integrale equivale al lavoro necessario per spostare una carica unitaria da un terminale all'altro nella direzione di E_m ; ovvero f.e.m.

$$\oint_e E_{TOT} dl = \oint_e E_m dl = f.e.m.$$

$$f.e.m = \oint_e \vec{E} dl$$

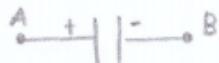
MISURA F.E.M. DI UN GENERATORE A CIRCUITO APERTO:

Se nessun carico è collegato all'interno del generatore i due campi si equivalgono in modulo, il generatore è in equilibrio.

Si ha quindi

$$E_S + E_m = 0$$

$$E_S dl = -E_m dl$$



Integrando entrambi i membri nel tratto AB si ha:

$$\int_A^B E_S dl = \int_B^A E_m dl$$

$$f.e.m = V_A - V_B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A - V_B = \int_A^B E_S dl \\ \oint_e E_m dl = \int_B^A E_m dl \\ f.e.m = \oint_e E_m dl \end{array} \right.$$

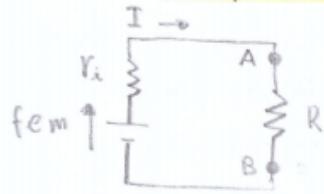
Si ha quindi che a circuito aperto la f.e.m. equivale alla d.d.p tra i due terminali del generatore.

GENERATORI CON CARICO:

Quando si collega un carico (resistore) ad un generatore e quindi scorre corrente la d.d.p che si misura è inferiore alla f.e.m. misurata a circuito aperto, tale perdita si può giustificare considerando il generatore dotato di una propria resistenza interna.

-Calcolo d.d.p ai capi del generatore:

- Calcolo d.d.p ai capi del generatore



Applicando il principio di conservazione dell'energia la potenza fornita dal generatore deve eguagliare quella dissipata dai carichi (r_i "Resistenza interna" e R)

$$f \cdot I = r_i I^2 + R I^2$$

$$P = I R^2 \quad (\text{Resistenza Ohmica})$$

Ricavando quindi la corrente I

$$I = \frac{f}{r_i + R}$$

AI capi del resistore e quindi del generatore si avrà una d.d.p pari a:

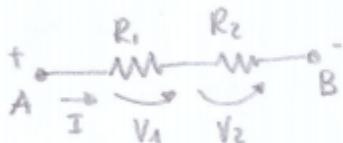
$$V = R \cdot I = R \frac{f}{r_i + R}$$

$$V_{AB} = f \frac{R}{r_i + R}$$

RESISTORE:

-RESISTORE IN SERIE:

• RESISTORI IN SERIE



In tale configurazione i resistori sono attraversati dalla medesima corrente.

Ogni resistore avrà ai suoi capi una tensione diversa.

$$V_1 = R_1 \cdot I \quad ; \quad V_2 = R_2 \cdot I$$

$$V = R \cdot I$$

Poiché $V_{AB} = V_1 + V_2$:

$$R \cdot I = V_{AB} = (R_1 + R_2) I$$

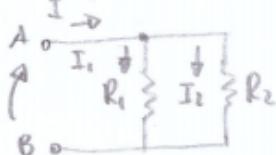
$$R = R_1 + R_2$$

RESISTORI IN PARALLELO:

RESISTORI IN PARALLELO

In questa configurazione i resistori sono collegati alla medesima d.d.p.

Ogni resistore sarà percorso da una corrente:



$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2}$$

La corrente totale sarà:

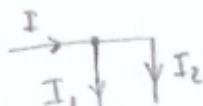
$$\frac{V_{AB}}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

LEGGI DI KIRCHOFF:

-LEGGI DELLE CORRENTI

La somma algebrica delle correnti dei rami di un nodo deve essere sempre nulla

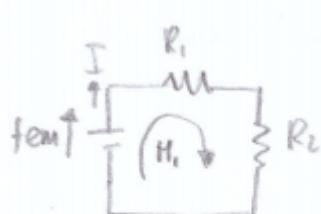


$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$\sum I_x = 0$$

-LEGGE DELLE TENSIONI:

La somma delle f.e.m in una maglia è uguale alla caduta di tensione di ogni resistore



$$\sum f.e.m = \sum R_i I_i$$

$$f.e.m = IR_1 + IR_2$$

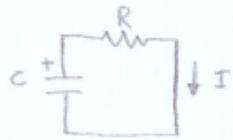
CONDENSATORE IN TRANSITORIO:

Le leggi di Kirchoff e di Ohm sono state stabilite per circuiti in condizioni stazionarie. Vi sono tuttavia processi lenti quali permettono di considerare il circuito in condizioni stazionarie ad ogni istante. Tale approssimazione permette di usare le suddette leggi nei circuiti in condizione quasi stazionarie, considerando i valori istantanei delle grandezze ($i(t)$ $v(t)$). Ad esempio la carica e scarica di un condensatore:

-SCARICA DI UN CONDENSATORE

Consideriamo un condensatore carico e studiamo il processo di scarica tramite il collegamento di un resistore:

Consideriamo un condensatore carico e studiamo il processo di scarica tramite il collegamento di un resistore:



Applicando Kirchoff:

$$\frac{Q}{C} = iR = \frac{dq}{dt} R$$

$$\left. \begin{array}{l} C = \frac{Q}{V} \\ i = \frac{dq}{dt} \end{array} \right\}$$

Al crescere della carica q che passa attraverso R la carica Q immagazzinata nel condensatore diminuisce,
si ha quindi:

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{dQ}{dt}$$

L'equazione della maglia diventa:

$$\boxed{\frac{Q}{C} = - \frac{dQ}{dt} \cdot R}$$

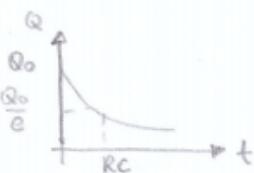
Tale equazione differenziale si può risolvere tramite separazione di variabili

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

$$\ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) = - \frac{1}{RC} t$$

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$



O equivalentemente

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

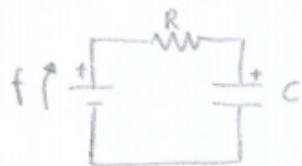
$$RC = T \quad [\text{Tempo}]$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Dopo circa 3-4T si può considerare scarico

-CARICA DI UN CONDENSATORE:

Collegando un condensatore ad un generatore e ad un resistenza questo si carica:



OSS

Una volta chiuso il condensatore si comporta come un interruttore aperto non facendo passare corrente, si avrà che la tensione finale di capi di C sarà uguale a f $Q_0 = 0$ $Q_{\text{finale}} = C \cdot f$ (Regime)

Applicando Kirchoff

$$f = iR + \frac{Q(t)}{C} \quad f = \frac{dq}{dt} R + \frac{Q(t)}{C}$$

In questo caso al crescere della carica passante per R aumenta anche la carica sul condensatore

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Carica sul} \\ \text{Condensatore} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC}}$$

Risolviamo tale equazione tramite sostituzione e poi separando le variabili

$$\begin{aligned} -RC \frac{dx}{dt} &= x(t) \\ \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} &= \int_0^t -\frac{1}{RC} dt \quad x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

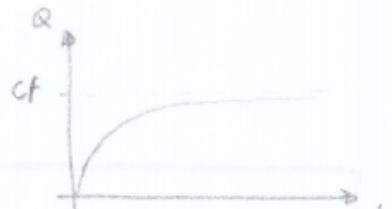
$$\left| \begin{array}{l} x(t) = \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC} \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC} \frac{dQ}{dt} \end{array} \right.$$

Tornando alla variabile iniziale:

$$\frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \left(\frac{f}{R} - \frac{Q_0}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \frac{f}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \left| Q_0 = 0 \right.$$

$$\boxed{Q(t) = Cf \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}$$

$$V(t) = f \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



CORRENTE DURANTE IL TRANSITORIO:

-SCARICA DEL CONDENSATORE:

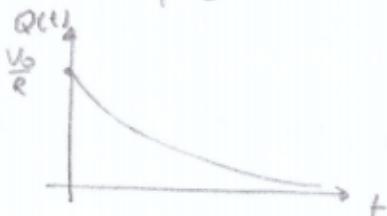
Derivando l'equazione della scarica otteniamo come varia la corrente

$$\frac{dQ}{dt} = Q_0 \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \\ \frac{dQ}{dt} = -\frac{dq}{dt} \\ \frac{Q_0}{C} = V_0 \end{cases}$$



Carica del condensatore

-CARICA DEL CONDENSATORE:

Procediamo come nel caso precedente

procediamo come nel caso precedente:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{cf}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} Q(t) = cf(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

VARIAZIONE DI CARICA DI UN CONDENSATORE (CASO GENERALE)

Può capitare che un condensatore vari la propria carica in base alla variazione di tensione ai suoi capi quindi si può caricare o scaricare in modo da raggiungere la nuova tensione.

L'equazione che esprime tale variazione avrà la seguente forma (vedi casi precedenti)

$$Q(t) = a + b e^{-\frac{t}{RC}}$$

$R = R_{eq} \rightarrow$ Resistenza vista dal condensatore

Dalle situazioni iniziali e finali ricaviamo i coefficienti

$$\begin{cases} Q_{iniziale} = Q(t=0) = a + b \\ Q_{finale} = Q(t=+\infty) = a \end{cases} \quad \begin{cases} a = Q_{finale} \\ b = Q_{iniziale} - Q_{finale} \end{cases}$$

Quindi:

$$Q(t) = Q_f + (Q_i - Q_f) e^{-\frac{t}{RC}}$$

ESEMPIO

$$\text{CARICA: } Q(t) = cf - cf e^{-\frac{t}{RC}} = cf(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

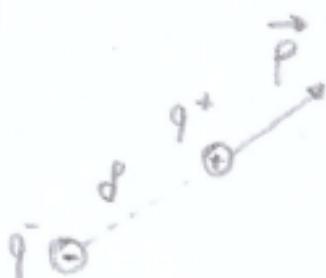
$$\text{SCARICA: } Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dipolo elettrico

Un dipolo è costituito da un sistema formato da due cariche uguali di segno opposto poste ad una distanza sigma infinitesima

- **Momento di dipolo**

Un dipolo è completamente descritto dal vettore momento di dipolo



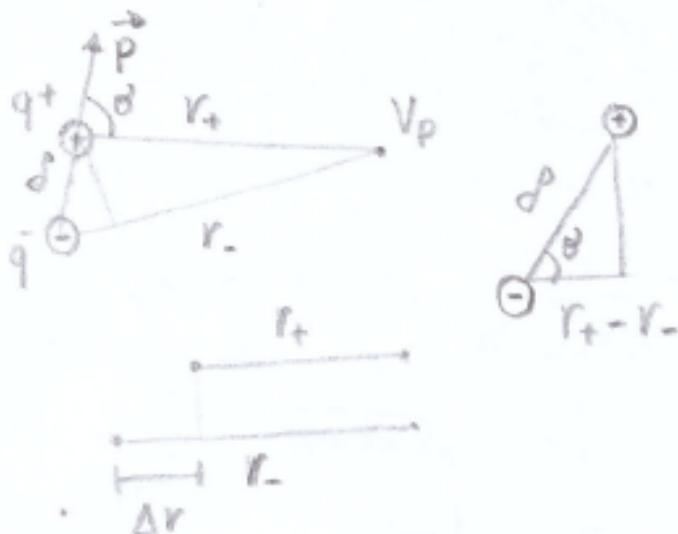
$$\vec{P} = q \vec{d}$$

Orientando la distanza
da q^- a q^+

$$|P| = q d$$

- **Potenziale elettrico generale del dipolo**

Calcoliamo il potenziale elettrico di un punto P distante R_i dalle cariche. In questo caso considero distanze R_i molto maggiori rispetto alle mutue distanze ($R >> \sigma$)



$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \geq \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_+ - r_-}{r_+ \cdot r_-}$$

$$\begin{cases} r_+ \approx r_- \approx r \\ r_+ \cdot r_- = r^2 \\ r_+ - r_- = d \cos\theta \end{cases}$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |\vec{p}| \frac{\cos\theta}{r^2}$$

PRODOTTO SCALARE

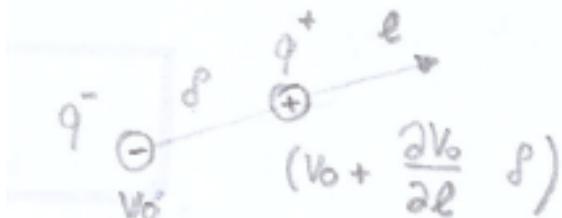
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos\theta$$

Poiché theta è l'angolo tra il momento di dipolo e vettore R, ho che:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

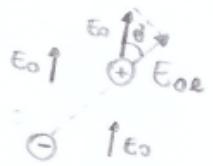
● Energia potenziale di un dipolo immerso in un campo

Nell'~~elettrico~~ campo cui un dipolo è immerso in un campo E_0 esso ha un'energia potenziale U



$$U = \sum U_i = -qV_0 + q \left(V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \cdot \delta \right)$$

$$U = q \left(-V_0 + V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \cdot \delta \right) = q \frac{\partial V_0}{\partial \ell} \cdot \delta = |P| \cdot (-E_{oe})$$



N.B.

E_{oe} è la proiezione del campo E_0 sul vettore \hat{e} che ha la medesima direzione di \vec{P} ($\hat{P} = \hat{e}$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

$$U = q V_0$$

$$|P| = qd$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial \ell} = E_{oe}$$

Quindi:

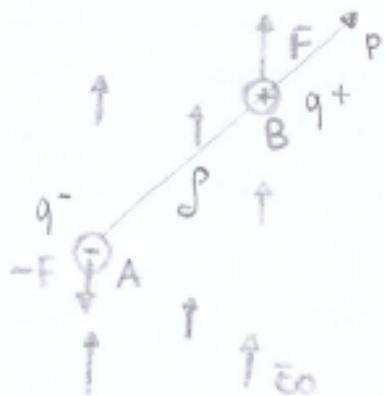
$$U = -|P| E_{oe} = -|P| \vec{E}_0 \cdot \hat{e} = -|P| \hat{P} \cdot \vec{E}_0$$

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}_0$$

$E_0 \rightarrow$ Campo in cui si trova il dipolo

● Momento di una coppia su un dipolo

Se il dipolo si trova in un campo uniforme E_0 (lo si può approssimare come uniforme date le piccole mutue distanze tra le cariche), esso è soggetto ad una coppia di forze (poiché $F = q E_0$)



Dalla dinamica si ha che il momento di una coppia indipendente dal polo è dato:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$

$\vec{d} \rightarrow$ distanza orientata delle due forze

In questo caso

$$\vec{H} = \vec{AB} \times \vec{F} = \vec{P} \times q \vec{E}_0 = \vec{P} q \times \vec{E}_0 \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F} = q \vec{E}_0 \\ \vec{P} = q \vec{d} \end{array} \right.$$

Capacità elettrica

Per capacità elettrica di un conduttore si intende la quantità di carica che è in grado di immagazzinare in relazione al proprio potenziale (rispetto al potenziale nullo)

$$C = \frac{q}{V}$$

$$[C] = [C/V] = [F]$$

- **Capacità di una sfera**

Considero un conduttore carico isolato di forma sferica avente raggio R e calcolo quindi la sua capacità



$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Condensatore

Il condensatore è un sistema formato da due conduttori aventi la medesima carica ma di segno opposto (Q_+ , Q_-). In questo caso si dice che vi è un'induzione completa dato che le linee di forza escono da una superficie ed entrano nell'altra.

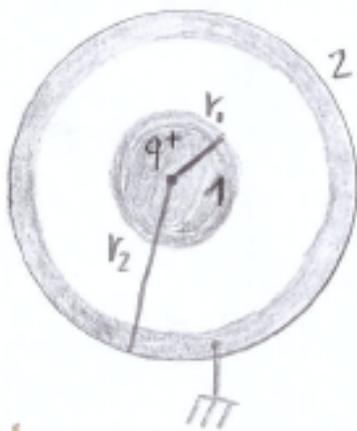
Il nome condensatore deriva dal fatto che aggiungendo il secondo conduttore aumenta l'energia immagazzinata a parità di potenziale.

Nel caso di un condensatore la sua capacità è data

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{\Delta V}$$

$\Delta V \rightarrow$ Differenza di potenziale tra le due superfici

- Condensatore sferico



La sfera interna è carica positivamente, quella esterna è posta a terra, per ricavare la capacità occorre calcolare la differenza tra le due superfici, data dal potenziale nello spazio vuoto

Per una sfera ho che ($r > R$) (R raggio della sfera)

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Sapendo che il campo E_0 è relazionato al potenziale, posso scrivere:

$$E_0 = - \frac{dv}{dr}$$

Si ha quindi

$$dv = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Per ricavare il potenziale tra lo spazio vuoto occorre sommare i potenziali infinitesimi dv da V_1 a V_2

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dv = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

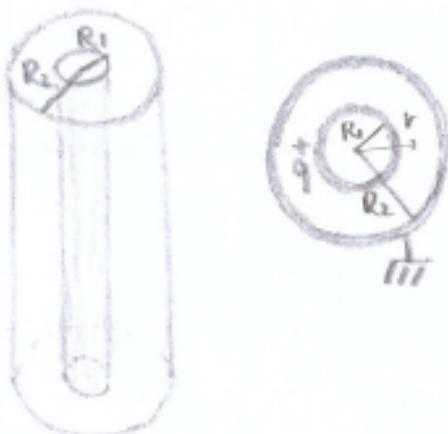
La capacità è quindi:

$$C = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

• Condensatore con cilindro coassiale

Considero il caso di due cilindri coassiali, quello interno caricato positivamente, quello esterno posto a massa.



Se i raggi sono molto più piccoli rispetto alla lunghezza, le armature si possono reputare infinite e quindi il campo E0 uniforme e perpendicolare alla superficie. Considero il cilindro diviso per strati contenenti sulla superficie una carica:

$$dv = -E_0 dr$$

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dv = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr = - \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r}$$

$$\left| E_0 = -\frac{dv}{dr} \right.$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = - \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln r_1 - \ln r_2 \right] = \frac{q_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$q_e \quad (\alpha = q_e l)$$

$$E_0 2\pi r = \frac{q_e}{\epsilon_0} \quad E_0 = \frac{q_e}{2\pi \epsilon_0 r}$$



$q_e \rightarrow$ Carica per unità di lunghezza
 $Q = q_e l$

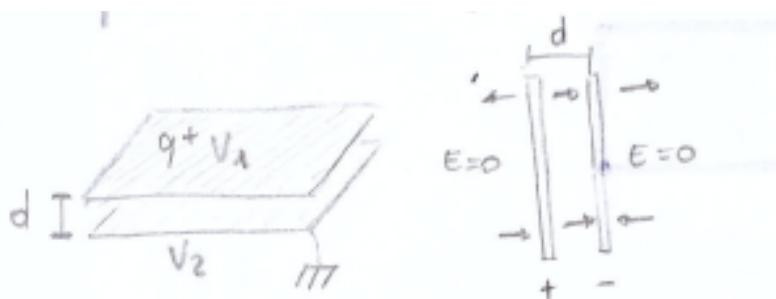
La capacità sarà

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{q_e}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{q_e \cdot l}{2\pi \epsilon_0 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

• Condensatore piano

Tale sistema è costituito da due piani posti ad una distanza molto minore rispetto alla loro superficie, così da poter considerare il campo E_0 interno uniforme



All'interno avrà che

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left| \sigma = \frac{q}{S} \right.$$

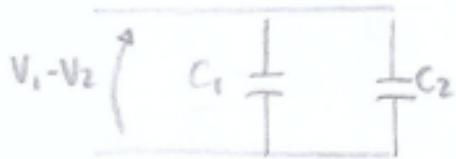
$$dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dr \quad \left| E_0 = -\frac{dV}{dr} \right.$$

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_2 - r_1) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad \left| r_2 - r_1 = d \right.$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{Q}{\frac{q}{S} \frac{d}{\epsilon_0}} \quad \left| C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \right. \quad \left| \sigma = \frac{q}{S} \right.$$

Condensatori in parallelo

Collegando due condensatori in parallelo (armature in comune) si aumenta la capacità. Se li metto alla stessa differenza di potenziale avrò le seguenti singole cariche:



$$q_1 = C_1(V_1 - V_2) \quad q_2 = C_2(V_1 - V_2)$$

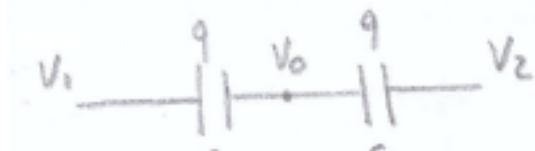
La capacità complessiva sarà quindi:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q_1 + q_2}{V_1 - V_2} = C_1 + C_2$$

$$C = C_1 + C_2$$

Condensatori in serie

Nel caso in cui si volesse ridurre la differenza di potenziale sulle armature di un



singolo condensatore, vi si può collegare in serie in modo da ripartire la tensione.

Le armature essendo collegate avranno la medesima carica, ma saranno poste ad una differenza di potenziale diversa

Le ddp saranno

$$V_1 - V_0 = \frac{q}{C_1} \quad V_0 - V_2 = \frac{q}{C_2} \quad | \quad C = \frac{q}{V}$$

Il condensatore risultante avrà

$$\frac{1}{C} = \frac{V_1 - V_2}{q} = \frac{V_1 - V_0}{q} + \frac{V_0 - V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Energia immagazzinata in condensatore

Parlando di condensatore scarico si considera l'energia immagazzinata in un condensatore pari al lavoro necessario per portare le cariche dal potenziale

più basso a quello più alto, contro la forza del campo elettrostatico

Consideriamo tale processo scomposto in lavoro infinitesimo, necessario a spostare una carica dQ .

Poiché il potenziale V rappresenta il lavoro necessario per spostare una carica unitaria positiva allora si ha che:

$$dU = V(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

$$\left| \begin{array}{l} V(q) \rightarrow \text{Potenziale del condensatore} \\ \text{dipendente da } q \\ V = \frac{Q}{C} \end{array} \right.$$

Quindi

$$U = L = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

OSS

Vi è analogia nell'energia potenziale di una molla.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 \quad k \rightarrow \frac{1}{C}$$
$$x \rightarrow Q$$

Densità di energia del campo elettrico

Nel caso precedente abbiamo ricavato l'energia potenziale immagazzinata di un condensatore in relazione alla sua carica Q e ddp V .

Ora vediamo l'energia potenziale del campo E_0 presente tra le armature, per ricavare la densità userò il condensatore piano, il risultato ha comunque validità generale.

Esprimo l'energia potenziale U in termini del tempo E_0 :

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \cdot \frac{d}{\epsilon_0 \cdot S} = \frac{1}{2} \sigma^2 S d \frac{1}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 S d$$

$$\left| \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} C V^2 \\ C = \frac{Q}{V} \end{array} \right.$$

CONDENSATORE PIANO

CONDENSATORE PIANO

$$C = \epsilon_0 \frac{s}{d}$$

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_s} \quad \left| \sigma = \frac{Q}{s} \right.$$

Ricaviamo quindi la densità di energia:

$$U = \frac{U}{sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 sd$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Energia immagazzinata da un sfera

Calcolo l'energia che immagazzina una sfera conduttrice isolata, per farlo userò l'energia elettrostatica e poi equivalentemente la densità di carica

• Energia elettrostatica



$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot Q^2 \quad \left| C = 4\pi\epsilon_0 R \right.$$

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} Q^2$$

• Densità di carica

In questo caso devo sommare tutte l'energie del singolo volume infinitesimo, dividendo il volume in gusci, semplifico il calcolo

$$U = \int_{\epsilon_0} U d\tau = \int_{\epsilon_0} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 d\tau = \int_{R}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 4\pi r^2 dr \quad \left| \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \\ d\tau = 4\pi r^2 dr \end{array} \right.$$

OSS

Gli estremi, rispetto ad r , vanno da R a ∞ poiché il campo è nullo all'interno della sfera ($0 < r < R$ $E_0 = 0$)

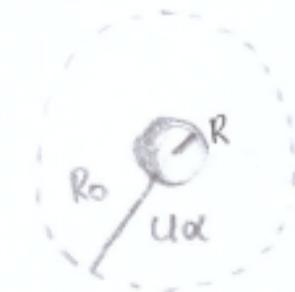
$$U = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2 \cdot 4\pi r^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 r^4} dr \quad \left| \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right.$$

$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

I risultati sono del tutto equivalenti

• **Esercizio**



Si vuole calcolare il volume, circondante la sfera è presente una certa percentuale alpha dell'energia totale immagazzinata

Prendo l'integrale

: prendiamo l'integrale di prima:

$$U = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} Q^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr$$

valore è alpha U e cambiando

$$U_{TOT} = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

$U_\alpha \Rightarrow$ Percentuale alpha di energia totale

$R_0 \rightarrow$ Distanza dalla superficie

Imponendo il valore a alpha U e cambiando l'estremo superiore con R_0

$$\frac{1}{8\pi \epsilon_0} Q^2 \int_R^{R_0} \frac{1}{r^2} dr = \alpha \left(\frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \right)$$

$$\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{\alpha}{R} \left(\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \right) \quad . \quad \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{R}$$

Da cui

$$R_0 = \frac{R}{(1-\alpha)}$$

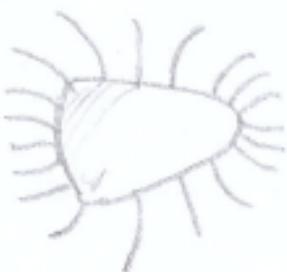
es

$$\alpha = 90\%$$

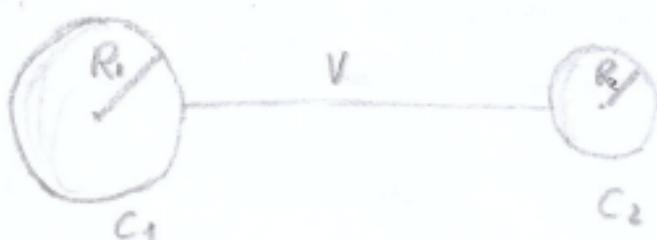
$$R_0 = \frac{R}{0,1} = 10R$$

Densità di carica su conduttori non simmetrici

Nel caso di una sfera si è notato che le cariche si distribuiscono uniformemente sulla sua superficie, tuttavia nel caso di corpi irregolari vi sarà una densità di energia superficiale maggiore nei punti aventi curvatura minore.



Tale caratteristica la si può dimostrare collegando, con un filo metallico molto lungo (con capacità zero), due sfere di raggio diverso. Caricando il filo esso si porterà ad una tensione V comune.



Dato che sono collegate esse avranno la medesima tensione, ma capacità diverse e quindi cariche diverse

$$\left. \begin{array}{l} C = 4\pi\epsilon_0 R \\ C = \frac{Q}{V} \end{array} \right\}$$

$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \cdot V \quad q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 \cdot V$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Le densità saranno

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2} \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad \left| \sigma = \frac{Q}{S} \right.$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

La densità di carica superficiale è quindi inversamente proporzionale al raggio

Elettrostatica

Legge di Coulomb

Dall'esperienza si ricava che una carica 2 subisce una forza da un'altra carica 1 relazionata nel seguente modo

$$K_0 \approx 8,99 \cdot 10^9 \quad F_2 = K_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$


Le proprietà fondamentali della legge di coulomb sono:

- La forza elettrostatica è di tipo centrale e quindi conservativa
- L'intensità dipende inversamente dal quadrato della distanza
- Vi è la sovrapposizione degli effetti, ovvero la forza che subisce una carica è data dalla somma delle singole forze esercitate dalle altre cariche

• Unità di misura di una carica

L'unità di misura è chiamata Coulomb ed è definita:

$$q = i t$$

| $i \rightarrow$ corrente elettrica [A]

1 Coulumb è pari alla quantità di cariche che passano in un secondo in un filo filiforme percorso da una corrente di 1 Ampere

• Forma alternativa della Legge di Coulomb

Per semplificare i calcoli nella pratica (applicazione Th Gauss) si pone la legge di Coulomb nella seguente forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Dove:

$$\epsilon_0 \rightarrow \text{Costante omelettrica del vuoto} \quad \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$$

Proprietà di un sistema di cariche

• Quantizzazione

Si ricava dall'esperienza che qualsiasi particella carica ha una carica

proporzionale (in valore assoluto) a quella dell'elettrone

$$q = ne \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$

Quindi una particella carica ha una carica sempre quantizzata e che quindi non può assumere qualsiasi valore

- **Conservazione della carica totale**

Un sistema isolato formato da particelle cariche, mantiene invariata la carica totale

- **Particella antiparticella**

La precedente proprietà è legata al fatto che ad ogni particella carica corrisponde un'altra antiparticella di segno opposto

- **Relativisticamente invariante**

Osservatori posti in diversi sistemi di riferimento (inerziali e no) misurano la medesima carica

Energia potenziale di un sistema di cariche

Poiché la forza tra due cariche è conservativa (forza di tipo centrale) si può introdurre la funzione potenziale fissando una carica q_1 e calcolare l'energia potenziale che ha un'altra carica q_2 rispetto ad essa

$$U(x, y, z) = - \int_{P_0}^R \vec{F} \cdot d\vec{l} + \text{costante}$$

Ponendo il punto di riferimento P_0 ad $R = \infty$ e quindi la costante è nulla e si ricava

$$U(x, y, z) = - \int_{P_0}^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} + \text{cost} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \quad \left| \begin{array}{l} d\vec{r} = \hat{r} \cdot d\vec{l} \end{array} \right.$$

Quindi

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Stesso ragionamento lo si fa con un sistema di n cariche:

- Esempio 3 cariche (q_1, q_2, q_3)

Devo quindi portare la carica q_1 vicino la carica q_2

- N cariche

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Il fattore 1/2 è dovuto al fatto che nella sommatoria conto due volte

$$\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \text{ e } \frac{q_2 q_1}{r_{21}}$$

che sono equivalenti

Campo elettrico

Un sistema di cariche genera intorno a se un campo elettrico il quale esercita un'azione su di una carica esterna proporzionale ad essa

$$F = q E_0$$

$E_0 \rightarrow$ Campo elettrico generato dal sistema di cariche

Per misurare il campo elettrico E_0 si deve utilizzare una carica q molto piccola in modo da non influenzare il campo

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}$$

[N/C]

OSS

Nello reale q non potra' mai andare a zero per la proprietà della quantizzazione di una carica.

Per determinare le azioni che un sistema di cariche esercita su una nuova carica posta nel campo elettrico, è necessario conoscere quest'ultimo che sarà dipendente dalla struttura del sistema

- Campo elettrico di una carica Q

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Q → Carico che genera
 il campo
 q → Carico di prova

- Campo elettrico di un sistema di cariche

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i q}{r_i^2} \hat{r}_i \right) \cdot \frac{1}{q}$$

$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \right)$

- Campo elettrico in sistemi aventi distribuzioni continue

In questo caso si può introdurre la densità di carica

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad dV \rightarrow Volume infinitesimo$$

Il campo è quindi dato

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dV$

Stesso ragionamento può essere fatto per distribuzione lineiche o superficiali

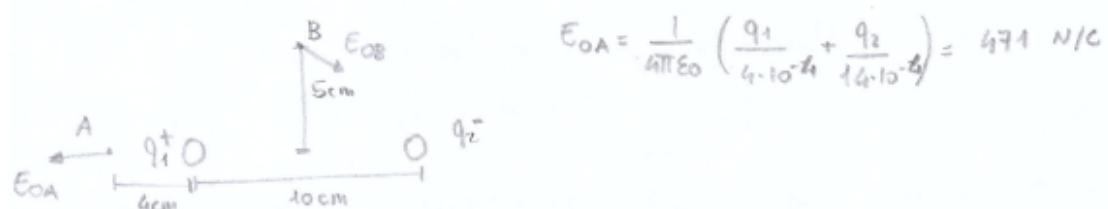
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \sigma = \frac{dq}{ds}$$

Campo elettrico in diverse distribuzioni

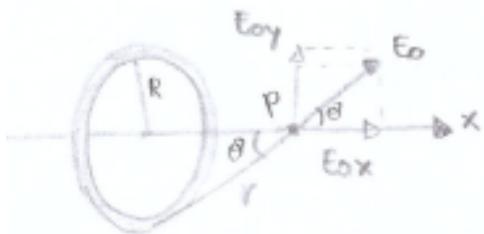
- Distribuzione discreta di due cariche

In tale esempio si vuole sottolineare la difficoltà nei calcoli vettoriali anche nei casi più semplici per il calcolo di

$$(q_1 = 10^{-10} C; q_2 = -2 \cdot 10^{-10} C)$$



● Anello uniforme



In tal caso il campo E_0 nel punto P è dato solo dalla componente E_{0x} , dato che le componenti E_{0y} complessivamente si annullano

Consideriamo l'anello avente una carica totale uniforme Q

$$|E_0| = |E_{0x}| = \int dE_x = \int dE_0 \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{\cos \theta}{r^2} dq \quad \left| E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r^2} \right.$$

In tal caso

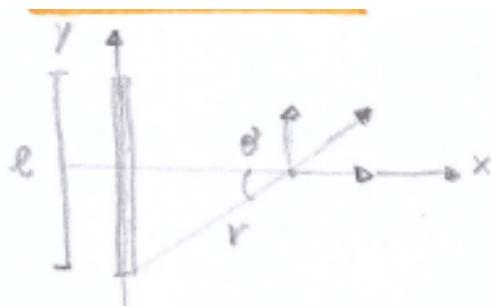
$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad \boxed{E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}}$$

Poiché

$$x = \cos \theta \cdot r \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$|E_{0x}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int_0^Q dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} Q$$

● Asta uniforme



Come nel caso precedente le componenti E_{0y} nella somma si annullano, quindi si ha

$$|E_0| = E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{\cos\theta}{r^2} dQ$$

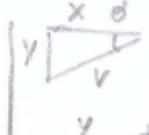
Usando la distribuzione lineica:

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\cos\theta}{r^2} \lambda dy \quad | \lambda = \frac{dQ}{dy}$$

In questo caso theta e R non sono costanti, per risolvere l'integrale conviene portare tutto in relazione a theta

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\cos\theta}{r^2} \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$$

$\text{uso } r : (x = \cos\theta \cdot r)$



$\begin{cases} y = \sin\theta \cdot r \\ x = \cos\theta \cdot r \end{cases}$

 $\frac{y}{x} = \tan\theta \quad \frac{dy}{x} = \left(\frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta$

Sostituisco

$$r : (x = \cos\theta \cdot r)$$

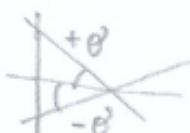
$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\cos\theta}{\left(\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)} \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \cos\theta d\theta$$

Quindi

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left[\sin\theta \right]_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left(\sin(\theta_{max}) - \sin(\theta_{min}) \right)$$

Poiché

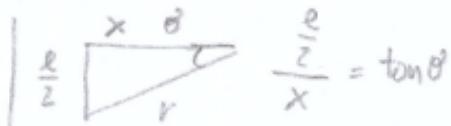
$$\theta_{max} = -\theta_{min}$$



$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \left(\sin(\theta) - \sin(-\theta) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} 2 \sin\theta$$

Tagliando l'angolo:

$$\frac{l}{2x} = \tan \theta \quad \theta = \arctan\left(\frac{l}{2x}\right)$$



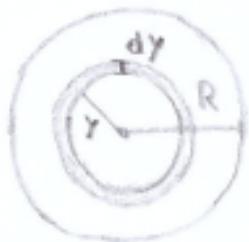
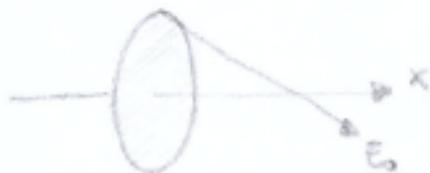
$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{x} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{l}{2x}\right)\right)$$

Se l'asta è infinito

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

● Disco uniforme



In tal caso per calcolare E_0 consideriamo il disco come formato da infinitesimi anelli

Ogni anello avrà la seguente carica infinitesima dQ :

$$dQ = \sigma 2\pi y \cdot dy$$

$$\sigma = \frac{dQ}{ds} = \frac{dQ}{2\pi y \cdot dy}$$

Spessore
disco

Il campo E_0 è quindi dato:

e' quindi dato:

$$E_{0x} = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dQ$$

ANELLO

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sigma 2\pi y dy = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} y dy$$

Risolviamo l'integrale per sostituzione

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{x}{t^{3/2}} \frac{1}{2} dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left[-\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t \\ 2y dy = dt \\ y=0 \Rightarrow t=x^2 \\ y=R \Rightarrow t=x^2+R^2 \end{cases}$$

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right)$$

$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)$$

- se $R \gg x$ (piano infinito)

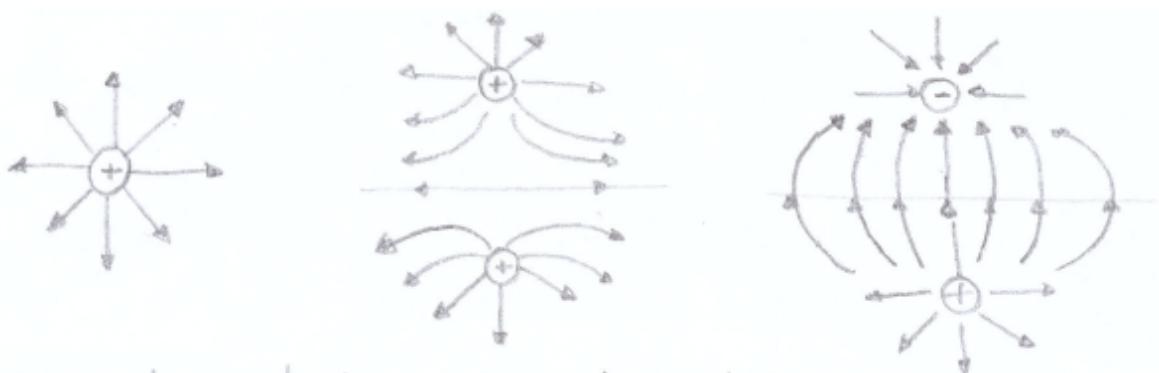
$$E_{0x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

- se $x \gg R$

$$E_{0x} = 0$$

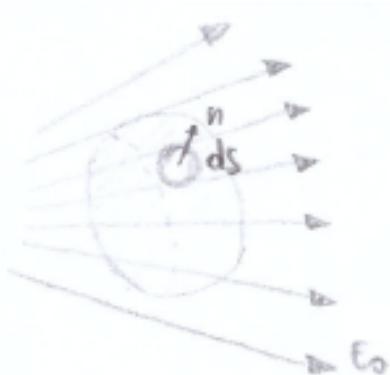
Rappresentazione del campo elettrico

Un utile rappresentazione del campo elettrico è data dall'uso di linee di forza



In tale rappresentazione le linee di forza indicano l'intensità del campo in una superficie perpendicolare alle linee, le linee di forza sono uscenti dalle cariche positive ed entranti in quelle negative

Flusso di un vettore



Si definisce il flusso elementare di un vettore attraverso una superficie infinitesima dS

$$d\phi_s(E_0) = E_0 \cdot \hat{n} dS \quad | \quad \hat{n} \rightarrow \text{Versore normale alla Superficie}$$

Per l'intera superficie si ha

$$\phi_s(E_0) = \int_S E_0 \cdot \hat{n} dS$$

- **Teorema della divergenza (Teorema di Gauss)**

Nel caso che nel calcolo del flusso di un vettore la superficie è chiusa si ha il seguente risultato:

$$\phi_s(E_0) = \oint_S E_0 \cdot \hat{n} dS = \int_V \operatorname{div}(E_0) dV \quad | \quad V \rightarrow \text{Volume racchiuso dalla superficie}$$

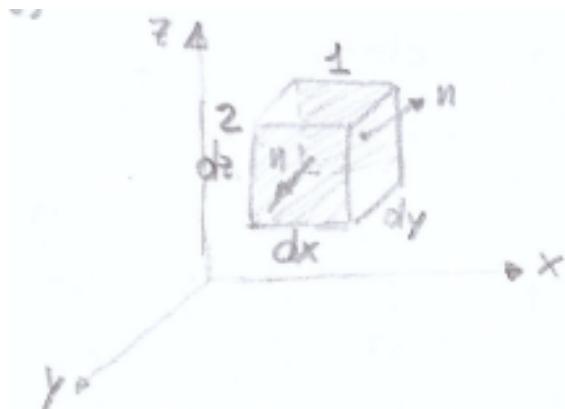
Dove $\operatorname{div}(E_0)$ è la divergenza del vettore del campo E_0

$$\operatorname{div}(E_0) = \nabla \cdot E_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k})$$

$$\operatorname{div}(E_0) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Dimostrazione Th Gauss

Immaginiamo la superficie chiusa formata da cubi infinitesimi di volume ($d\tau = dx dy dz$) e ricaviamo il flusso infinitesimo:



Il flusso totale sarà dato dalla somma dei flussi uscenti dalle 6 facce

Prendiamo in esame due facce, quelle perpendicolari all'esame y (1 e 2) con i relativi versori normali al versore n

$$d\phi_1 = -Ey ds = -Ey dx dz$$

$$d\phi_2 = Ey ds = \left(Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz$$

Per le 1 e 2 le facce 1 e 2 è anche

Il flusso tramite le due facce 1 e 2 è quindi

DIFERENZIALE

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} (x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

$$\begin{aligned} d\phi_{12} &= -Ey dx dz + \left(Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz \\ &= \left(-Ey + Ey + \frac{\partial Ey}{\partial y} dy\right) dx dz = \frac{\partial Ey}{\partial y} dz \end{aligned}$$

Sommiamo tutte le 6 facce:

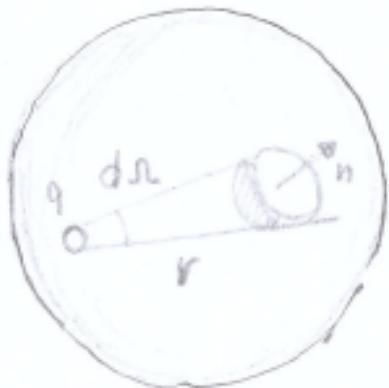
$$d\phi_s(E_0) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dz = \text{div}(E_0)$$

OSS

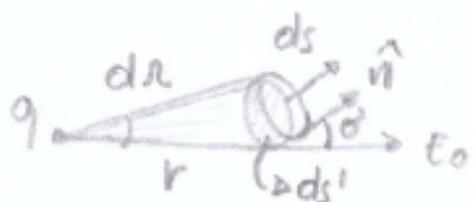
Nella somma di tutti gli infinitesimi flussi uscenti dai cubi si nota che i cubi interni hanno flusso totale nullo e quindi si ottiene solo il flusso uscente dalla superficie s.

Legge di Gauss

Vogliamo ora ricavare il flusso uscente da una superficie chiusa contenente una carica elettrica



Individuiamo la carica q mediante un cono infinitesimo avente un angolo solido con q pari a $d\Omega$, ricaviamo quindi il flusso infinitesimo passante per la superficie prima del cono, pari a



Il proiezione della superficie della sfera

$$d\phi_s(E_0) = E_0 \cdot \hat{n} \, ds = E_0 \, ds \cos\theta = E_0 \, ds' = E_0 \, r^2 \, dr \quad | \quad ds' = r^2 \, dr$$

$$d\phi_s(E_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \, r^2 \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \, dr$$

Per l'intera superficie

$$\Phi_s(E_0) = \int_S E_0 \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^{4\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} dr$$

$\Phi_s(E_0) = \frac{q}{\epsilon_0}$

Si ricava quindi che la distanza o la dimensione della superficie, contenete una carica, non influenzano il flusso totale.

OSS

Nel caso in cui la carica sia ESTERNA alla superficie il flusso totale su di essa è nullo

- Sistemi di cariche
 - caso discreto

$$\Phi_s(\epsilon_0) = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

- caso continuo

$$\Phi_s(\epsilon_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^Q dQ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} p d\tau \quad | \quad p = \frac{dQ}{d\tau}$$

- Legge di Gauss (in infinitesimi 1° Equazione di Maxwell)

$$\Phi_s(\epsilon_0) = \oint_S E_0 \cdot \hat{n} ds = \int_{\tau} \operatorname{div}(E_0) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} p d\tau$$

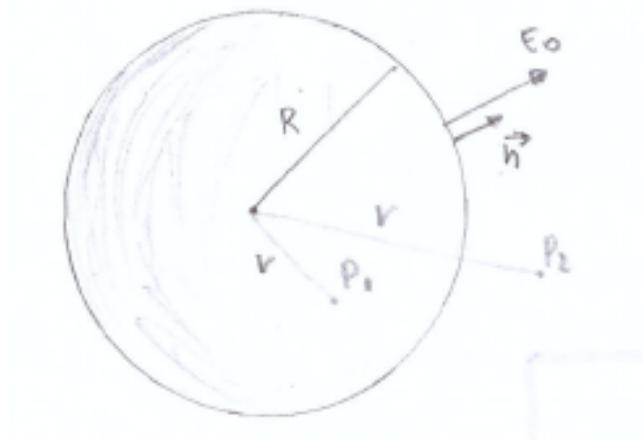
Da cui:

$$\operatorname{div}(E_0) = \nabla \cdot E_0 = \frac{p}{\epsilon_0}$$

Applicazione Teorema di Gauss

- Campo elettrico distribuzione di cariche a simmetria sferica

Per il teorema di Gauss possiamo considerare una qualsiasi superficie contenente la medesima carica, per semplicità usiamo una sfera



Per il calcolo del campo elettrico si distinguono due casi:

- $r \leq R$

$$E_0 // s \quad E_0 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_C p \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r p \, 4\pi r^2 \, dr$$

Se p costante:

$$E_0 = \frac{p}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{TOT} \cdot \frac{r}{R^3} \quad (r \leq R)$$

- $r > R$

- $r > R$

$$E_0 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R p \, 4\pi r^2 \, dr$$

$$\int_S E_0 \vec{n} \, ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_C p \, d\tau$$

$$\text{Superficie sfiora} = 4\pi r^2$$

$$d\tau = 4\pi r^2 \, dr$$

Considero la sfera divisa in gusci di volumi dV

$$p = \frac{Q_{TOT}}{V} = \frac{Q_{TOT}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \underset{\text{Volume sfera}}{\sim}$$

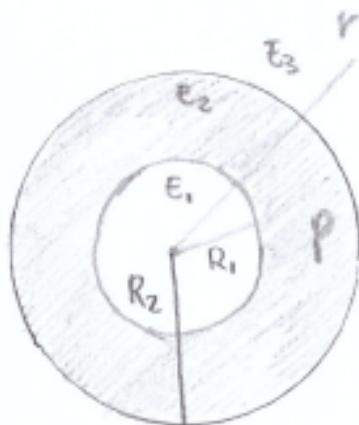
$$\int_0^R p \, r^2 \, dr \underset{\text{Poiché dopo di esso non vi è alcun contributo}}{\sim}$$

Se p costante

$$E_0 = \frac{p}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r^2} \quad (r > R)$$

Guscio sferico con interno vuoto

Consideriamo un guscio vuoto avente una distribuzione di carica ρ .



Calcoliamo i tre campi E_1 , E_2 e E_3 facendo variare r .

- $0 \leq r \leq R_1$

$$E_1 4\pi r^2 = \int_C \frac{\rho}{\epsilon_0} \, d\tau \quad | E_1 = 0$$

$D_1 \propto r \propto D_2$

- $R_1 < r \leq R_2$

$$\int_S E_0 \, d\vec{s} = \int_C \frac{\rho}{\epsilon_0} \, d\tau$$

$$S_{sfiora} = 4\pi r^2$$

$$E_2 4\pi r^2 = \int_{R_1}^r \frac{P}{\epsilon_0} dr = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^r P 4\pi r^2 dr$$

Se P costante:

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{P}{\epsilon_0} 4\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right]$$

$$E_2 = \frac{P}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

- $r > R_2$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} P 4\pi r^2 dr$$

Se P costante:

$$P = \frac{Q_{TOT}}{V}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_3 = \frac{P}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^3}{r^2} - \frac{R_1^3}{r^2} \right) = \frac{Q_{TOT}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{TOT}}{r^2}$$

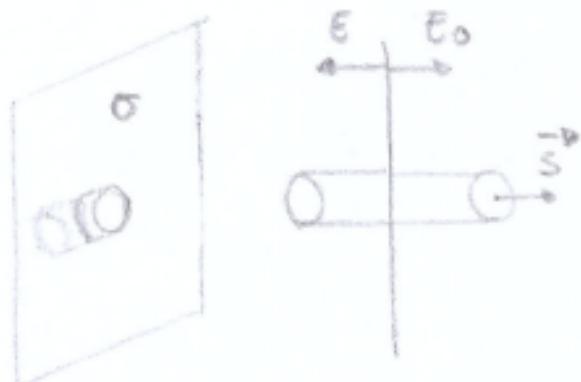
OSS

Nel punti del confine i campi si equivalgono:

$$E_1(R_1) = E_2(R_1) \quad E_2(R_2) = E_3(R_2)$$

● Piano carico

Per sfruttare il teorema di Gauss nel caso di una superficie piana carica, considero il flusso passante per un cilindro posto in mezzo al piano



Poiché le superfici laterali del cilindro sono perpendicolari al campo, esse non vanno considerate, prenderemo in considerazione solo le basi

Devo considerare i flussi entrambi uscenti dalle due facce

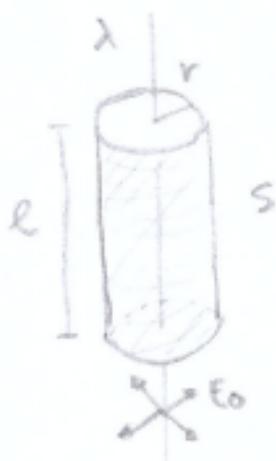
$$E_0 \cdot 2s = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot s}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q_{INT}}{s}$$

● Asta infinita

Per considerare il campo uniforme esamino il caso di un'asta infinita. Applico Gauss mettendo l'asta in un cilindro in modo da sfruttare la sua simmetria



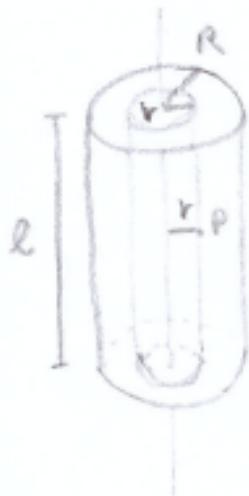
In questo caso considero la superficie laterale, perpendicolare ad E_0

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q_{INT}}{l}$$

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{r}$$

● Bacchetta con spessore



Vediamo come varia il campo E_0 con r , nei due casi R interno e esterno.

La bacchetta ha una carica ρ

Anche in questo caso considero la superficie laterale

$$- r \leq R$$

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi r^2 l$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r}$$

$$\left| \begin{array}{l} P = \frac{Q_{int}}{V} \\ V = \pi r^2 l \end{array} \right.$$

$$- r > R$$

$$E_0 \cdot 2\pi r l = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 l$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r}}$$

OSS

Nel caso $r > R$ si può considerare la bacchetta carica come se la carica fosse concentrata in un'asta interna con densità lineare λ

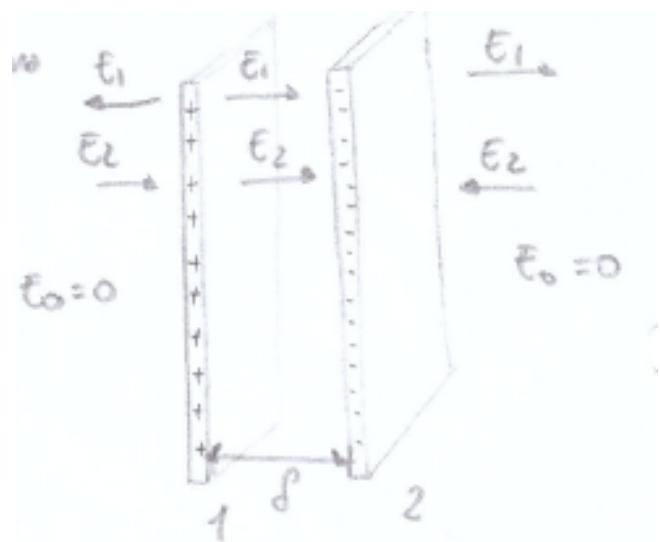
$$\boxed{E_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{Q}{l} ; P = \frac{Q}{V} \\ \lambda l = PV = P\pi R^2 l \\ P = \frac{\lambda}{\pi R^2} \end{array} \right.$$

• Doppio strato piano

Considero due piano paralleli posti ad una distanza δ .

I due piani hanno cariche opposte, ma hanno la medesima densità σ .



Si ricava che all'esterno il campo totale E_0 è nullo, all'interno invece

$$E_0 = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

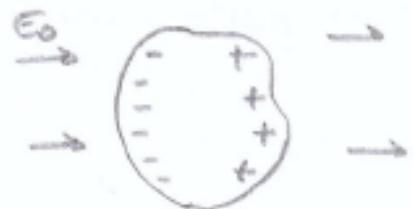
$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

• Conduttori all'equilibrio statico

Considero un corpo di materiale conduttivo posto in un campo elettrico uniforme, esempio tra due piani



Poiché il conduttore ha all'interno elettroni liberi le cariche si posizioneranno lungo la superficie



Si avrà quindi che il campo elettrico al suo interno sarà nullo, a conferma di ciò vi è il teorema di Gauss

$$E_0 \vec{S} = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_0 (\text{INTERNO}) = 0$$

- **Teorema di Coulomb**

Se in altri nodi carichiamo un conduttore, ad esempio per contatto, ricaviamo che il campo sulla sua superficie (o nelle immediate vicinanze) è pari:

$$E_0 ds = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q_{INT}}{ds}$$

Potenziale elettrostatico

• **Singolo carica**

Come ricavato nella definizione di Volt:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}$$

• **Sistemi di cariche**

In tal caso il potenziale nel punto V sarà dato dalla somma dei potenziali delle singole cariche:

- Caso discreto

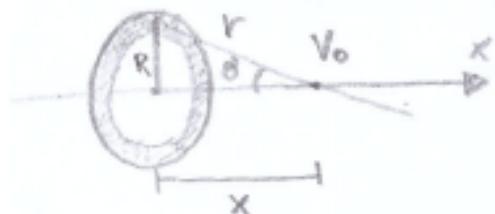
$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{r_i} \right)$$

- Caso continuo

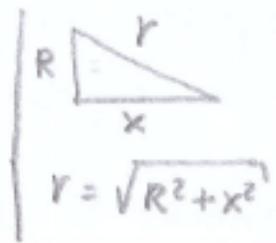
$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{1}{r} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau$$

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

• **Anello carico**



$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Poiché il campo E_0 è relazionato al potenziale

$$E_{0x} = - \frac{dV_0}{dx} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d(R^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} (R^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \right)$$

$$E_{0x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Stesso risultato ottenuto} \\ \text{con la legge di Coulomb} \end{array} \right.$$

● Disco carico



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^Q \frac{dq}{r} \quad \left| \sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{\sigma dy}{2\pi y} \right.$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi y \sigma}{r} dy = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi y \sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\sqrt{x^2}}^{\sqrt{x^2 + R^2}} 2\pi \sigma dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x^2 + y^2} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y dy \\ y \quad x \\ r = \sqrt{y^2 + x^2} \end{array} \right.$$

Poiché

$$\sqrt{x^2} = \pm x$$

si hanno questi risultati

$$\begin{cases} V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - y \right) & y > 0 \\ V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} + y \right) & y < 0 \end{cases}$$

Derivando il potenziale, secondo x, si ricava il campo elettrico E_{0x} ricava con la legge di Coulomb

Il campo magnetico di correnti stazionarie

- ✓ Cariche in moto esercitano fra loro azioni che possono essere descritte tramite un vettore, *induzione magnetica **B***, da considerarsi accanto al campo elettrico e che con questo è intimamente legato, come mostrato dalla teoria della relatività.
- ✓ Nel presente capitolo viene considerato il **campo magnetico** nel vuoto creato da cariche in moto a velocità costante, quali quelle che costituiscono una corrente stazionaria.
Il campo creato da una corrente e l'azione che questo campo esercita su cariche in moto costituenti una corrente sono sintetizzate dalla *prima e seconda formula di Laplace*, rispettivamente. La forza che il campo esercita su una singola carica in moto prende il nome di **forza di Lorentz**.
- L'azione di tipo magnetico che si esercita fra correnti ha permesso di introdurre una definizione particolarmente conveniente dell'**ampere**, l'unità di corrente.
Si riconosce poi che non esistono sorgenti puntiformi di campo magnetico. La sorgente più semplice può essere descritta in analogia al dipolo elettrico e prende il nome di **dipolo magnetico**.
- ✓ Le proprietà fondamentali dell'induzione magnetica nel vuoto creata da correnti stazionarie, e cioè il fatto che il campo ha sempre **linee di flusso chiuse** e il **teorema di Ampere della circuitazione** sono descritte dalla *terza e quarta equazione di Maxwell*.
- È possibile infine fare delle considerazioni che permettono l'introduzione di un **vettore potenziale magnetico** che torna utile in molte considerazioni fra cui quelle legate all'espressione dell'energia magnetica e ai coefficienti di auto e mutua induzione.

Forza di Lorentz

Dall'esperienza si ricava che se una carica q , avente una velocità v , si trova in una zona dello spazio in cui è presente un campo magnetico, subisce una forza detta **FORZA DI LORENTZ**

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

$$[B_0] = [V/s/m^2] = [Wb/m^2] = [T]$$

Dove B_0 rappresenta l'intensità del campo magnetico ma che per convenzione è chiamato induzione magnetica

B_0 ha le seguenti dimensioni

$$[B_0] = [V/s/m^2] = [Weber (wb)/m^2] = [Tesla (T)]$$

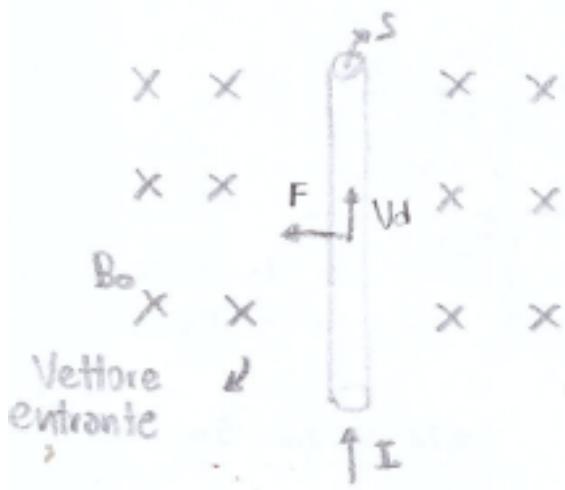
Nello spazio in cui si trova la carica q è presente anche un campo elettrico E_0 , il complesso delle forze a cui è soggetto è pari a

$$F = q\vec{E}_0 + q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

Seconda legge di LaPlace

Tale legge esprime la forza a cui è soggetto un filo, percorso da corrente immerso in un campo magnetico uniforme.

Tale forza sarà data dalla somma delle forze a cui sono soggette le singole cariche che si muovono nel filo.

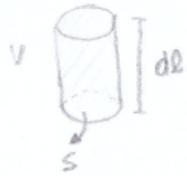


Consideriamo il caso specifico in cui la corrente I è normale al vettore B_0 .

Ogni carica presente in un tratto unitario del filo (dl) sarà soggetta alla forza di Lorenz (vd la velocità media di scorrimento nella direzione della corrente)

$$dF_i = q V_d l B_0$$

Per ricavare la forza sul tratto dl , dobbiamo sapere il numero di cariche presenti. Consideriamo un tratto infinitesimo di filo con sezione S



$$q = n V \quad V = d\ell \cdot S$$

$$q = n S d\ell \quad \left| \begin{array}{l} \text{Numero di cariche} \\ \text{presenti} \end{array} \right.$$

$n \rightarrow$ Numero di cariche per unità di volume
 $V \rightarrow$ Volume

La forza nel tratto di sarà

$$dF = (n S d\ell) q V d\vec{B}_0$$

Ricordando che:

$$J = n V d\ell q \quad I = J \cdot S \quad I = n S q V d\ell$$

$$J = \frac{dq/dt}{ds} = \frac{I}{ds}$$

Quindi

$$dF = i d\ell B_0$$

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}_0 \quad (\text{in generale})$$

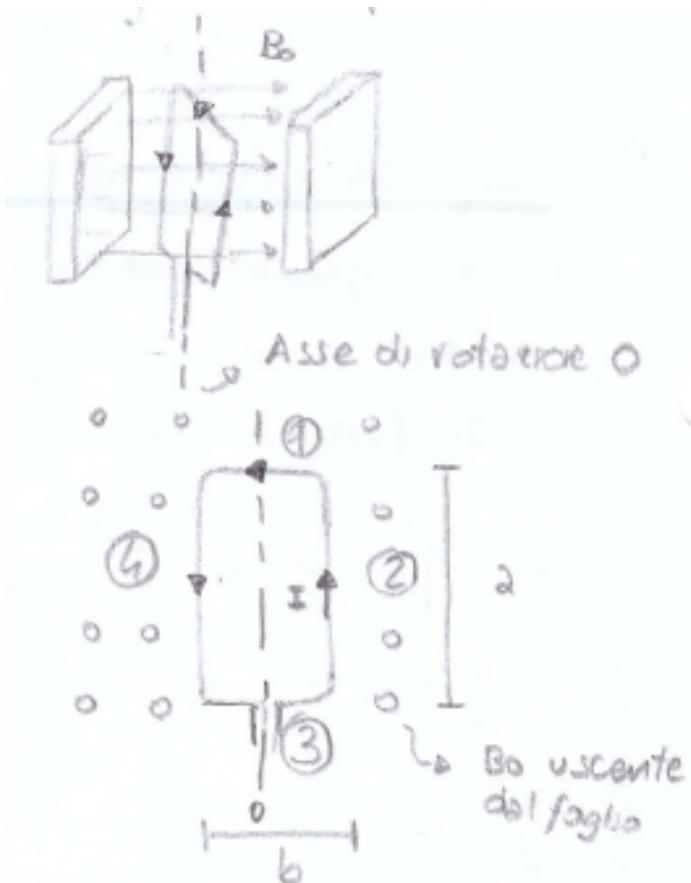
Sull'intero filo

$$F = \int_{\ell} i d\vec{\ell} \times \vec{B}_0$$

$$F = i \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (\text{Filo rettilineo})$$

Dipolo magnetico

In analogia al dipolo elettrico, nel magnetico indichiamo come dipolo una spira percorsa da corrente, ed immersa in un campo magnetico uniforme creato ad esempio da due magneti permanenti.



Analizziamo quindi il suo comportamento

- Lati 1 e 3



In tal caso le forze agenti sul filo hanno linea di azione lungo l'asse O, tali forze sono opposte ed uguali e si annullano

Lati 1 e 3 si annullano.

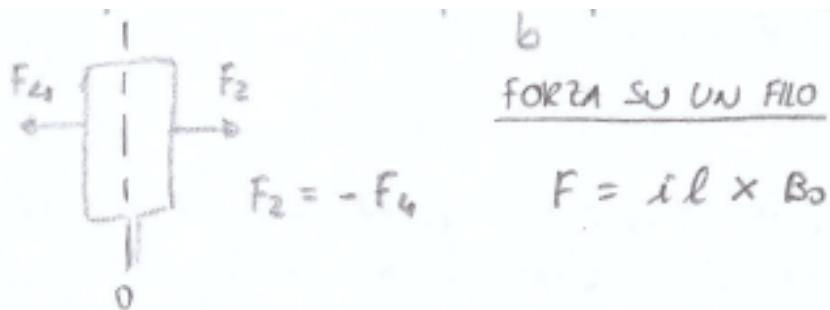
$$F_1 = i b B_0 \sin(\theta)$$

$$F_3 = -F_1$$



- Lati 2 e 4

In tal caso le forze sono uguali ed opposte, ma formano una coppia che tenderà a far allineare la spira in modo che la corrente I , passante nei lati 1 e 3, sia perpendicolare al campo B_0



$$F_2 = i \alpha B_0 \sin(90)$$

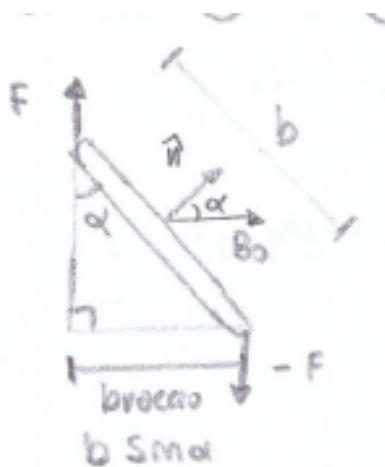
(α sul lato verticale)

$$F_2 = -F_4$$

I è sempre perpendicolare
a B_0

● Momento di una spira

Sui lati 2 e 4 vi è quindi una coppia con braccio $b \sin(\alpha)$



Momento di una coppia

$$|H| = b S \sin i \cdot a B_0$$

$$|H| = i S B_0 S \sin i$$

Vettorialmente:

$$\vec{M} = i S (\hat{n} \times \vec{B}_0)$$

$$M = r \times F$$

$$|M| = \text{braccio} \cdot F$$

$$F = i a B_0$$

$$\text{braccio} = b S \sin i$$

$$a b = S \text{ (Superficie Spira)}$$

● Momento magnetico

Si definisce magnetico, in riferimento ad una spira immersa in un campo magnetico e percorsa da corrente, il vettore

$$\vec{M} = i S \hat{n}$$

$i \rightarrow$ Corrente

$S \rightarrow$ Superficie Spira

$\hat{n} \rightarrow$ Versore Superficie

Il momento fisica che subisce una spira può essere espresso mediante tale vettore

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

Momento Dipolo Elettrico

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$\vec{p} = \vec{J} q$$

LaPlace

Prima legge di LaPlace

Dall'esperienza si ricava che una carica q che si muove con velocità v crea intorno a se un campo magnetico

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2}$$

In il campo magnetico

$\mu_0 \rightarrow$ Permeabilità magnetica
nel vuoto

$$\mu_0 \approx 12,6 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A m}}$$

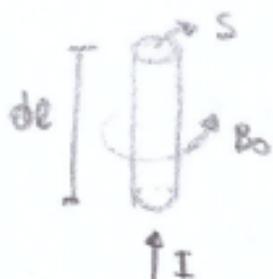
$r \rightarrow$ Distanza ; $\hat{r} \rightarrow$ Versore r

Come nel caso elettrico, il campo magnetico presente in un punto è dato dalla somma di quelli prodotti dalle singole cariche

- **Prima legge di LaPlace per un filo percorso da corrente**

Una forma molto utile nella pratica è quella che si riferisce ad un filo percorso da corrente.

Iniziamo per un tratto infinitesimo dl



Dato che B_0 è dato dalla somma dei contributi delle singole cariche devo ricavare il numero di cariche q nel filo dl

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2}$$

Se n è la densità di carico per volume; il numero di cariche sarà:

$$N = n s d l$$

$$\begin{cases} n = \frac{q}{V} \\ V = d l \cdot S \end{cases}$$

Il prodotto qv si può porre:

$$q\vec{v} = Nq\vec{v} = (Nsq\vec{v})d\ell = i \vec{d}\ell$$

o: una curva

$$\left| \begin{array}{l} i = Nsq\vec{v} \\ \vec{d}\ell \text{ (Orientato come } \vec{v} \text{)} \end{array} \right.$$

Sul filo infinitesimo si avrà quindi

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(\vec{d}\ell \times \hat{r})}{r^2}$$

N.B.

Tale formula vale solo nel caso che la distanza r sia molto maggiore della sezione del filo

Sull'intero filo

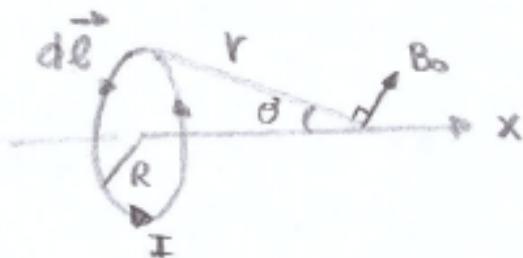
$$B_0 = \int d\ell dB_0 = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{(\vec{d}\ell \times \hat{r})}{r^2}$$

Campo magnetico per alcune distribuzioni di cariche

Come fatto per il campo elettrico formato da conduttori carichi, vediamo il campo magnetico generato da diverse distribuzioni di cariche in movimento, applicando la prima legge di Laplace (considerando la corrente I costante)

- **Filo circolare**

Consideriamo un filo percorso da corrente e studiamo come varia il campo magnetico sull'asse x in relazione alle distanze



Prendiamo un tratto $d\ell$ in modo da considerarlo rettilineo, si avrà per quel tratto un contributo

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell}{r^2} \sin(90^\circ)$$

$\hookrightarrow r \perp d\ell$
sempre

$$\left| dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \times \hat{r}}{r^2} \right.$$

Poiché rispetto all'asse x , nella sommatoria i contributi dB_y si annullano (ognuno ha il proprio opposto) consideriamo solo dB_x

$$dB_x = dB_0 \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta$$

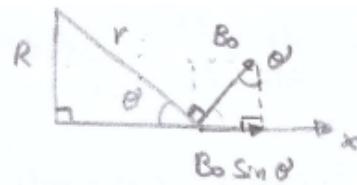
ora si intona l.h.

Sommando per l'intero filo

$$B_x = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \theta}{r^2} 2\pi R$$

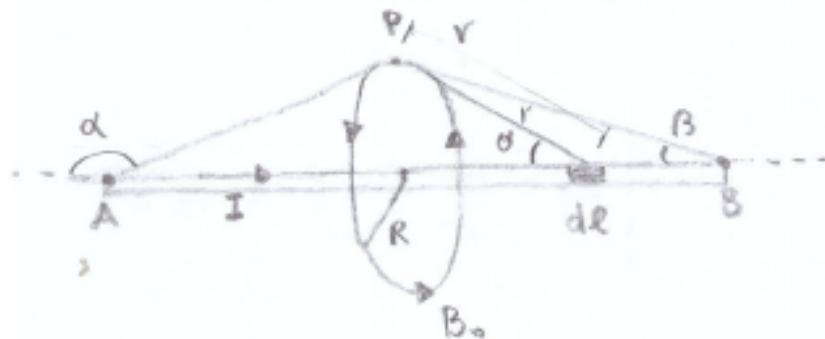
$$= \frac{\mu_0}{2} I \sin \theta \frac{R}{r^2} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{r^3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



• Filo rettilineo

Vediamo ora il campo magnetico generato da un filo rettilineo, la posizione in cui vorremo calcolare B_0 verrà individuato mediante un raggio R e due angoli alpha e beta che fissano gli estremi del filo con R (punto P)



Per calcolare B_0 nel punto P consideriamo il filo (AB), composto da tratti infinitesimi dl individuato mediante un angolo theta e collegato a P mediante r

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin \theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_A^B \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl \sin \theta$$

Data la rappresentazione mediante gli angoli alpha e beta e l'individuazione del tratto dl con l'angolo theta, occorre cambiare variabile

$$dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

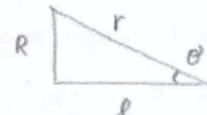
$$\left| \begin{array}{l} l = R \tan^{-1} \theta \\ \frac{d \tan^{-1} \theta}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \theta}{r^2} \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \cdot \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} -\frac{\sin \theta}{R} d\theta$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \beta - \cos \alpha)$$



$$\left| \begin{array}{l} R = \sin \theta \cdot r \\ l = \cos \theta \cdot r \end{array} \right. \quad \frac{R}{l} = \tan \theta$$

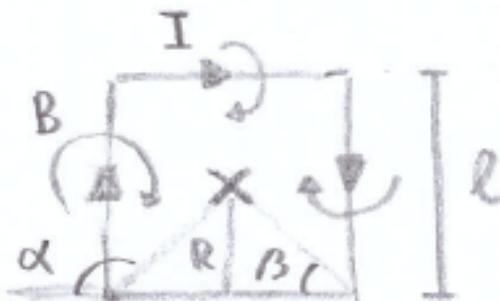
$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

$$r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$\left| \begin{array}{l} \int -\sin \theta dl = \cos \theta + C \end{array} \right.$$

- Esempio (spira quadrata)

Prendiamo in considerazione una spira quadrata con lati da considerarsi tratti di filo rettilineo



Vogliamo calcolare B_0 totale al centro della spira, ogni lato I sarà un contributo

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{l} [\cos 45^\circ - \cos 135^\circ] = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\sqrt{2}}{l}$$

Essendoci quattro lati

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = 135^\circ \\ \beta = 45^\circ \\ R = \frac{l}{2} \end{array} \right.$$

Essendoci quattro lati

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{l}$$

- Filo rettilineo infinito (Legge di Biot e Savart)

Un caso particolare è quello di un filo con lunghezza infinita oppure approssimabile ad essa data la piccola distanza R in relazione alla lunghezza l . In tal caso gli angoli saranno ($\alpha 180^\circ$ e $\beta 0^\circ$)

$$\alpha \approx 180^\circ$$

$$\beta \approx 0^\circ$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (1 - (-1))$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} [\cos \beta - \cos \alpha]$$

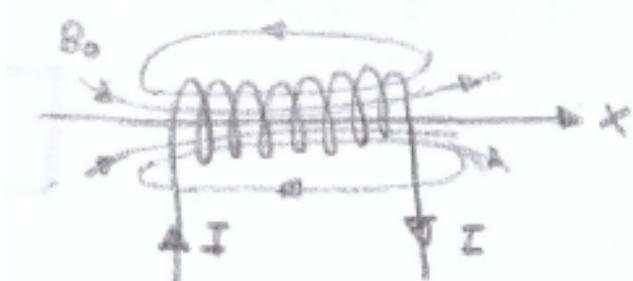
$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART

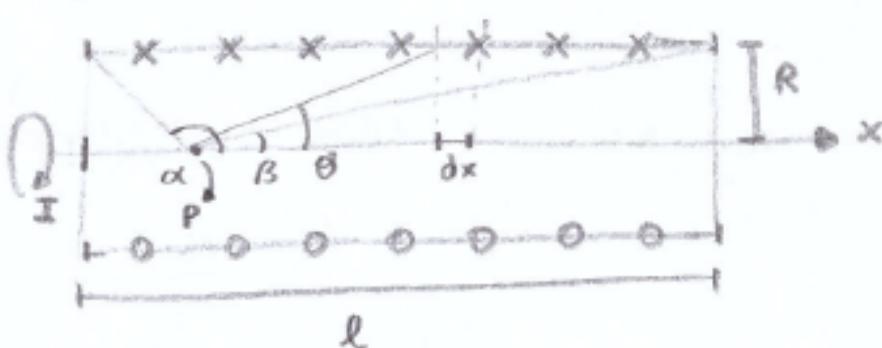
● Solenoide

Il solenoide è un dispositivo formato da numerosi avvolgimenti di un filo lungo un asse, ogni avvolgimento può essere considerato come una spira data la loro vicinanza.

Naturalmente ogni filo è isolato



In questo caso siamo interessanti al campo magnetico interno lungo l'asse x
Individuiamo gli estremi del solenoide mediante due angoli alpha e beta (come si fa anche per il filo rettilineo)



Individuiamo il punto P sull'asse x mediante alpha e beta e consideriamo poi il campo in tale punto come quello dato dalla somma dei tratti dx individuati tramite l'angolo theta

Ogni tratto dx darà un contributo dB dato dal campo prodotto da un singolo sopra, moltiplicato per il numero di spire presenti nel tratto dx

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot (n_e \cdot dx)$$

$$\left| \begin{array}{l} n_e = \frac{N}{l} \quad (\text{Numero di spire per unità di lunghezza}) \\ N = n_e \cdot l \end{array} \right.$$

Poiché troviamo P mediante gli angoli alpha e beta occorre cambiare variabile da dx a dtheta

B_{0x} SPIRA CIRCOLARE

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} N_e \cdot \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta}\right) d\theta$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 \cdot \frac{\sin^3 \theta}{R^3} N_e \left(-\frac{R}{\sin^2 \theta}\right) d\theta$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{2} N_e (-\sin \theta) d\theta$$

$$B_{0x} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{R}{x} = \tan \theta$$

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$r^3 = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

$$R = \sin \theta \cdot r$$

$$r^3 = \frac{R^3}{\sin^3 \theta} = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

Sommando tutti i contributi dB_x da alpha a beta:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2} N_e \int_{\alpha}^{\beta} (-\sin \theta) d\theta = \frac{\mu_0 I}{2} N_e [\cos \theta]_{\alpha}^{\beta}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2} N_e (\cos \beta - \cos \alpha)$$

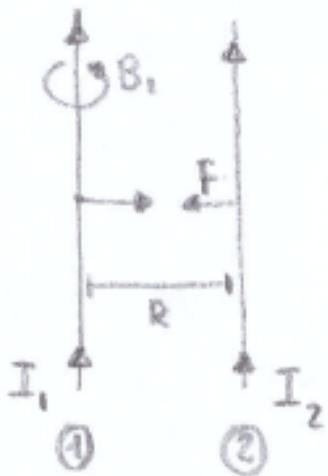
- Solenoide infinito

Nel caso in cui la sezione del solenoide è molto piccola in relazione alla lunghezza l, e quindi R<<l, si può considerare il solenoide infinito (alpha 180°, beta 0°)

$$B_x = \mu_0 I N_e$$

Definizione di Ampere

Vediamo come si definisce 1 Ampere mediante la forza di attrazione tra due fili percorsi da corrente



Il primo filo crea un campo magnetico intorno a sé dato da

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

LEGGE BIOT-SAVART

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

2° LEGGE LAPLACE

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

Sul secondo filo agirà una forza F dovuta al campo B_1

$$F = I_2 l B_1 \sin 90^\circ = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

Considerando $I_1 = I_2 = I$ si ricava la forza per unità di lunghezza

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I^2$$

Si definisce infine 1 Ampere la corrente che passando per due fili, esercita tra loro una forza per unità di lunghezza pari a:

$$\frac{F}{l} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$$

$$I = 1 \text{ A}$$

$$R = 1 \text{ m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

Proprietà fondamentali del campo magnetico

Come nel caso del campo elettrico, descriviamo le proprietà del vettore induzione magnetica (B_0), mediante il flusso attraverso una superficie chiusa e la circuitazione (integrale di linea lungo una curva chiusa)

FLUSSO Φ_0

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

CIRCUITAZIONE \oint_L

(CASO STAZIONARIO)

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 0$$

● Flusso B_0 (3° Equazione di Maxwell)

Nello studio del campo magnetico generato da diverse cariche in movimento abbiamo notato che le linee di campo si chiudono sempre, di conseguenza il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

$$\Phi_S(B_0) = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = 0$$

Non esistono quindi sorgenti del campo magnetico, ma solo dipoli

Applicando il Teorema della divergenza

(3° EQ MAXWELL)

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0$$

Tale legge è valida sempre anche se B_0 varia nel tempo

In divergenza

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = \int_C \nabla \cdot \vec{B}_0 dz$$

● Circuitazione B_0

Consideriamo la circuitazione di B_0 generata da un filo infinito percorso da corrente I stazionaria (costante) (Legge di biot-savart)

In tal caso si distinguono due casi in base al fatto se la linea chiusa sia concatenata o meno con la corrente I

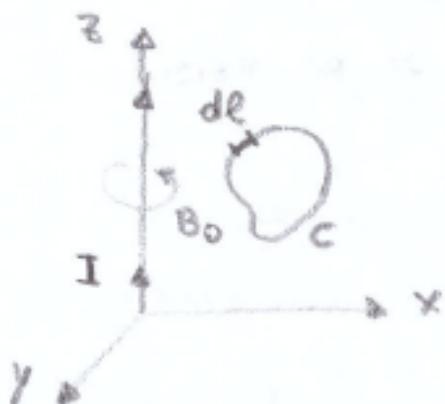
Si dice che una linea (corrente I) è concatenata con una curva chiusa C se tutte le superficie, aventi come contorno C, sono attraversate da I.

Una definizione intuitiva è data pensando ad un palloncino gonfio in cui c'è il collo e la superficie è data dal "corpo"



- Caso non concatenato

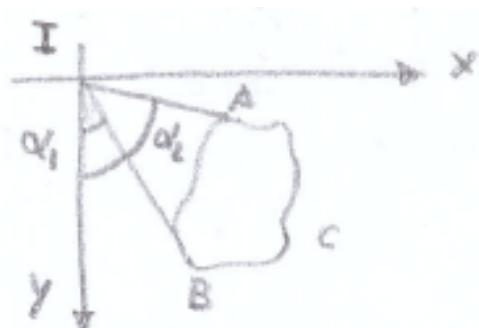
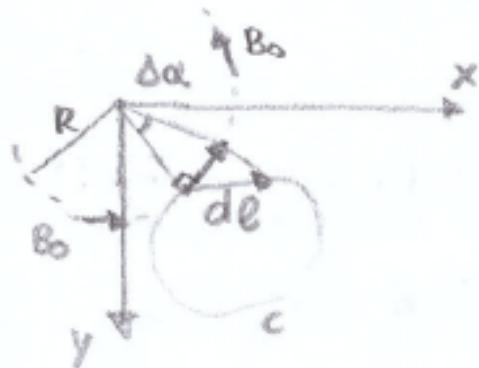
La linea chiusa è esterna al filo percorso dalla corrente I costante



Consideriamo il filo posto sull'asse z, dobbiamo fare l'integrale di circuitazione lungo C

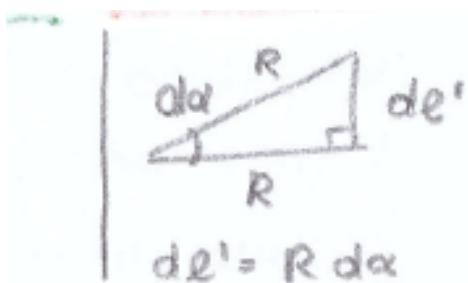
$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}$$

Dividiamo C in tratti dl infinitesimi e li proiettiamo sul piano xy, dove giacciono le linee di forza di B_0



Si ha quindi

$$\vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = B_0 R d\alpha \text{ (Proiezione)} \\ d\vec{\ell} \text{ su } B$$



$$d\ell' = R d\alpha$$

Con Biot-Savart

$$B_0 R d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi R} I R d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha$$

BIOT-SAVART

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

ma la distanza R è scomparsa,

Poiché la distanza R è scomparsa l'unico riferimento è l'angolo $d(\alpha)$ che per un tratto AB va da α_1 a α_2 , ma per una linea chiusa va da α_1 a α_1 annullando quindi l'integrale

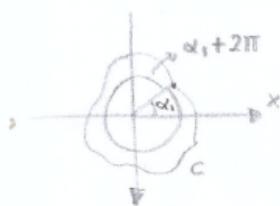
$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} d\alpha = 0$$

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} d\alpha = 0$$

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{CASO STAZIONARIO})$$

- Caso concatenato (Legge di Ampere)

I ragionamenti fatti nel caso precedente sono validi anche in questo, cambiano però gli estremi di integrazione dato che questa volta I è interno alla linea chiusa da α_1 a $\alpha_1 + 2\pi$



$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + 2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\alpha_1 + 2\pi - \alpha_1)$$

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

Se la linea chiusa è attraversata da più correnti, la circuitazione è data dalla somma algebrica delle correnti considerando il segno (+ o -) in base al verso di percorrenza

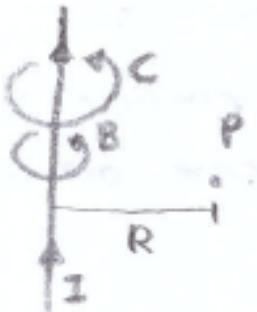
$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 Z I_i \quad (\text{CONC})$$

LEGGE DI AMPERE
(I COSTANTE)

Applicazione legge di Ampere

Come nel caso del campo elettrico (legge di Gauss) anche con il campo magnetico possiamo ricavare B_0 creato da diverse distribuzioni aventi simmetria

- Filo rettilineo infinito



In questo caso la linea chiusa è una circonferenza avente centro in I

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi R} B_0 dl = B_0 \cdot 2\pi R$$

$$B_0 \cdot 2\pi R = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

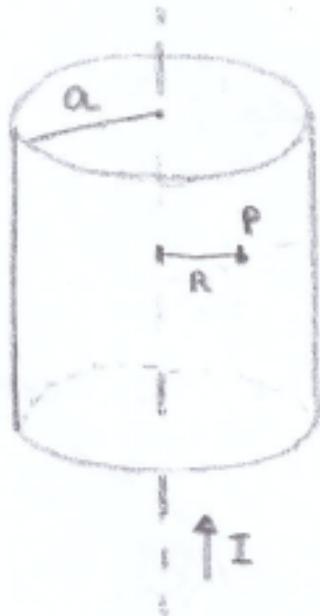
$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{B}_0 \parallel d\vec{l} \\ \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = B_0 dl \end{array} \right.$$

Ampere

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

• Filo rettilineo infinito con spessore



In questo caso consideriamo un filo avente uno spessore e vogliamo calcolare B_0 all'interno di esso (fuori è equivalente al caso precedente)

$$- R \leq a$$

Applicando Ampere come fatto sopra

$$B_0 \cdot 2\pi R = \mu_0 I_R$$

In questo caso I non è totale ma dipende da R , sfruttiamo quindi il versore j considerandolo costante

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$I_R = J \int_S ds = J \pi R^2$$

Si ha quindi

$$B_0 2\pi R = \mu_0 J \pi R^2$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 J}{2} R$$

Poiché la corrente I del filo è data da

$$I = J \pi a^2$$

$a \rightarrow$ Raggio conduttore

Si ha

$$B_0 = \frac{\mu_0 R}{2} \frac{I}{\pi a^2}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{R}{a^2}$$

$R \leq a$

Teorema di Stokes

Un teorema molto importante per il calcolo vettoriale è quello di Stokes che mette in relazione la circuitazione C di un vettore A con il flusso attraverso una superficie (avente C come contorno) di un altro vettore

$$\text{rot}(A) \quad (\nabla \times A)$$

Tale teorema è dato dalla seguente uguaglianza

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

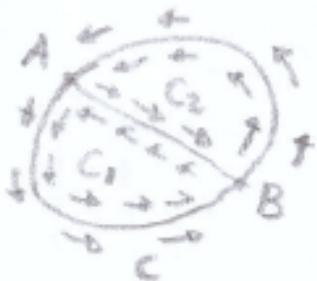
$C \rightarrow$ Linea chiusa
 $S_C \rightarrow$ Superficie avente C come contorno.

- Operatore Rotore ($\underline{(\nabla \times \vec{A})}$)

Si definisce il vettore $\text{rot}(A) \quad (\nabla \times A)$ nel seguente modo

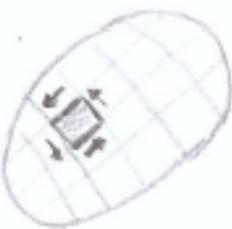
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

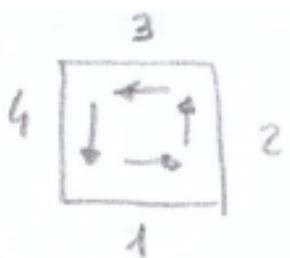
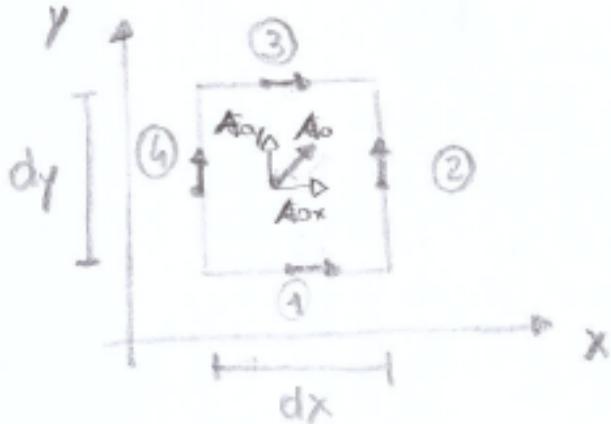
● Dimostrazione di Teorema di Stokes



Prendiamo una qualsiasi linea chiusa C e poi disegniamo una curva fra due punti A e B , abbiamo quindi due percorsi chiusi C_1 e C_2 , la somma delle circuitazioni su C_1 e C_2 da come risultato quella di C (tra A e B la risultante è nulla)

Facendo ripetutamente questa operazione otteniamo superfici quadrate di forma infinitesima, prendiamo come esempio una superficie dS normale all'asse C , parallela al piano XY





Al centro di dA consideriamo presente un vettore A_0 , lungo i lati l'intensità sarà data da quella di A_0 +- il differenziale

$$\textcircled{1} \quad A_{0x} = \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad A_{0y} + \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad A_{0x} + \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad A_{0y} - \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Sommando i singoli contributi scegliendo il segno in base alla direzione si ha

$$\oint \vec{A}_0 \cdot d\vec{l} = \left(A_{0x} - \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) + \left(A_{0y} + \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left(A_{0x} + \frac{\partial A_{0x}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left(A_{0y} - \frac{\partial A_{0y}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$$

Si ottiene quindi la componente z di $\text{rot}(A_0)$ e se si fa il procedimento analogo con le superfici perpendicolari a z e y si trova

$$\oint_L \vec{A}_0 \cdot d\vec{l} = \oint_{S_L} (\vec{V} \times \vec{A}_0) \cdot d\vec{s}$$

Legge di Ampere per infinitesimi (Rotore di B_0)

Come nel caso della legge di Gauss, anche per la legge di Ampere ne esiste una forma infinitesima

Dalla legge di Ampere globale si ha

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}} = \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Teorema di Stokes:

$$I = \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Supoficie che ha L
come contorno

Applicando il teorema di Stokes

$$\mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_L} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

TEOREMA STOKES

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_L} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Infine portando μ_0 dentro l'integrale e dato che si hanno i medesimi estremi di integrazione ottengo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot}(B)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

(4° EQUAZIONE DI MAXWELL)
PER CASI STAZIONARI

Induzione elettromagnetica

- ✓ L'**induzione elettromagnetica** conclude il quadro dei fenomeni elettromagnetici e perfeziona in modo definitivo la *seconda equazione di Maxwell*. Il fenomeno è sintetizzato nella **legge di Faraday-Neumann-Lenz** e sta alla base di tutta una serie di importanti conseguenze e applicazioni.

Abbiamo quindi appreso che una corrente elettrica I produce un campo magnetico, ora esaminiamo il processo opposto, ovvero se un circuito, immerso in un campo magnetico, presenta una corrente al suo interno Tramite esperienza si è scoperto che si genera corrente nel circuito se:

- Si sposta il circuito in un campo B_0 non uniforme (B_0 varia)
- Si sposta la sorgente del campo B_0 e rimane fisso il circuito
- Si fa variare il campo B_0 tenendo circuito e fonte fermi

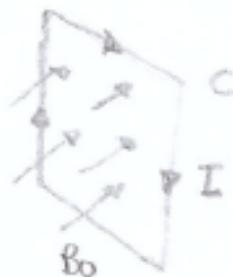
Legge di Faraday-Neumann-Lenz

si riferisce però alla f.e.m. nel circuito, invece che direttamente all'a corrente di induzione I .

Si abbia in circuito elettrico C , la f.e.m che si genera è pari a meno la variazione del flusso di B_0 attraverso la superficie che ha come contorno C

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\phi_{sc}(B_0)}{dt}$$

sione e' necessario per



● Legge di Lenz

Il segno (-) nell'espressione è necessario per rispettare la conservazione dell'energia. (oppure il principio di azione-reazione)

La f.e.m. nel circuito infatti cerca di opporsi alla variazione di flusso.

Ad esempio se il flusso di B cala, la densità è negativa e quindi f.e.m. è positivo, la corrente indotta genera lei stessa un campo B_0 che compensa la variazione, al contrario se il flusso aumenta la f.e.m è negativa e la corrente si muove nel verso opposto andando a contrastare l'aumento del flusso del campo magneti B_0

OSS

[La variazione di Φ_B può essere fatta anche variando le dimensioni del circuito e quindi S_c .]

● Corrente indotta

Usando la legge di Ohm si deduce che la corrente I che circola è data da

$$I = \frac{f.e.m.}{R}$$

| $R \rightarrow$ Resistenza circuito

● Legge di Faraday-Neumann-Lenz Differenziale (2° Equazione di Maxwell)

Nella definizione di f.e.m (non conservativa) per un circuito si hanno
la seguente espressione

ora

$$\oint_C \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_S \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

(Poiché conservativo) \hookrightarrow Campo elettromotore (non conservativo)

Si aveva quindi

$$f.e.m. = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} (= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l})$$

Dal teorema di Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{S_c} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$$

La legge di Faraday diventa

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d(\oint_{S_c} \vec{B}_0 \cdot d\vec{s})}{dt} = - \oint_{S_c} \frac{d\vec{B}_0}{dt} \cdot d\vec{s}$$

Quindi

$$\oint_{Sc} (\vec{V} \times \vec{E}) d\vec{s} = - \oint_{Sc} \frac{d\vec{B}_0}{dt} \cdot d\vec{s} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Poiché hanno i} \\ \text{medesimi estremi} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{V} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}}$$

(Derivata parziale)

(2° EQUAZIONE DI MAXWELL)
(Valido per i mezzi in quiete)

OSS

[La presenza o meno del circuito fisico reale non varia tale legge, anche senza mezzo fisico in quello spazio si ha una circolazione di E (non conservativo)]

Circolazione per i mezzi in quiete

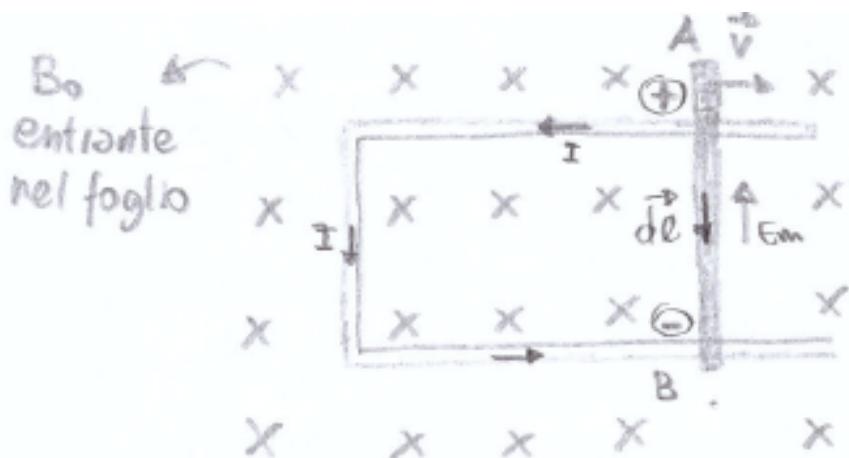
Dimostrazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz

Cerchiamo ora di giustificare la legge di Faraday mediante leggi alternative, per i casi in cui vi è movimento usiamo la forza di Lorenz, altrimenti la relatività in relazione ai campi

Prenderò in considerazione

- Aumento superficie circuito in relazione al movimento di un lato (Forza di Lorenz)
- Circuito in movimento in un campo non uniforme (Forza di Lorenz)
- Bacchetta in movimento in un sistema di riferimento inerziale con l'asta (Relatività)
- **Variazione superficie**
- **Forza di Lorenz**

Consideriamo un circuito immerso in campo B_0 uniforme, tale circuito ha un lato mobile che scorre su una guida conduttriva priva di attrito



FORZA DI LORENZ

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

CAMPIONE ELETTRICO

$$E = \frac{F}{q}$$

(In questo è nuovo cons)

$$E_M = \frac{F_e}{q} \rightarrow \text{Forza di Lorenz}$$

Se si muove la barra verso destra si applica la forza di Lorenz alle cariche libere del conduttore verso l'altro, si avrà quindi segno positivo su A, di conseguenza I in senso antiorario.

Se orientiamo la barra dl come la corrente positive verso negative
Il campo elettromotore E_M indotto sarà

$$\vec{E}_M = (\vec{v} \times \vec{B}_0) \quad |E_M| = v B$$

In questo caso
 $v + B$

Tornando alla definizione di f.e.m.

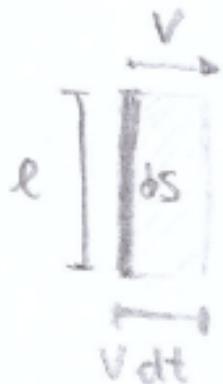
da alla definizione di f.e.m:

$$\text{f.e.m.} = \oint_A^B \vec{E}_M \cdot d\vec{l} = \oint_A^B (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} = -v B_0 l$$

$$\boxed{\text{f.e.m.} = -v B_0 l}$$

Poiché \vec{E}_M (\uparrow) è opposto a $d\vec{l}$ (\downarrow)
v: è di segno uero nel prodotto scalare

- Faraday



FARADAY

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$d\phi_B = \vec{B}_0 \cdot \vec{dS}$$

$$dS = v dt l$$

La bacchetta in un tempo infinitesimo spazza una superficie dS data da ($dS = v dt l$), si ricava quindi un flusso infinitesimo:

$$d\phi_B = B_0 dS = B_0 v dt l$$

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{B_0 v dt l}{dt}$$

$$\boxed{\text{f.e.m.} = -v B_0 l}$$

OSS. 1

In questo caso quindi, all'aumentare del flusso ϕ_B (dato che aumenta S) si instaura una f.e.m. negativa che genera una corrente opposta che crea un campo B_i che si oppone a quello uniforme B_0 .

OSS

Per muovere la bacchetta AB a velocità costante, è necessario applicare una forza che contrasti quella che subisce l'asta (2° LEGGE DI LAPLACE).

Per avere quindi una potenza elettrica P_e si dovrà applicare una meccanica P_m

$$f.e.m \cdot I = (I l B) V$$

Tale ugualanza è confermata dal risultato precedente

$$f.e.m = V B l$$

2° LAPLACE

$$F = i \vec{l} \times \vec{B}_0$$

POT ELETTRICA

$$P = V \cdot I$$

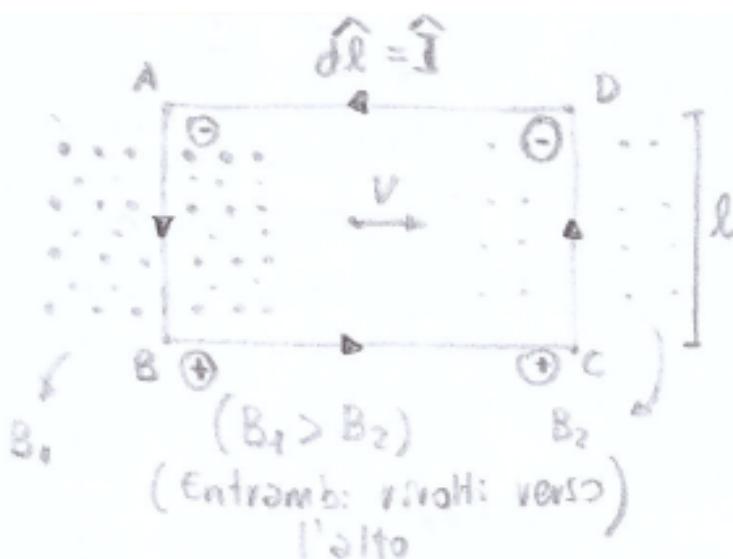
POT MECCANICA

$$P = F \cdot V_{\text{Velocità}}$$

CIRCUITO RIGIDO CON VELOCITÀ COSTANTE

Prendiamo in considerazione un circuito rigido che si muove a velocità costante in un campo magnetico non uniforme

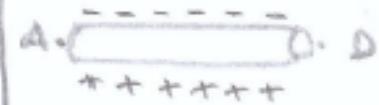
- Uso Lorenz



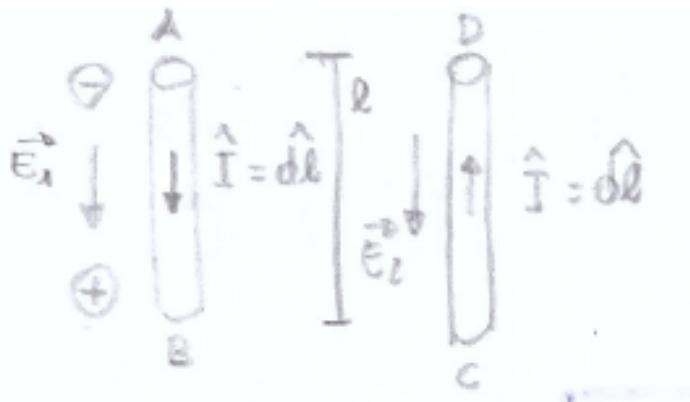
Orientando la circuitazione dl (in accordo ad F) calcoliamo la f.e.m totale, essa sarà data dalla somma di quello ai lati AB e DC.

Nei lati AD e BC non c'è alcuna f.e.m. poiché le cariche si spostano lateralmente

$$f.e.m = \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \oint_L E \cdot dl$$



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



Poiché nel tratto DC, E2 e dl sono discordi, **allora** avrò:

$$f.e.m = VB_1 l - VB_2 l$$

lunghezza ✓

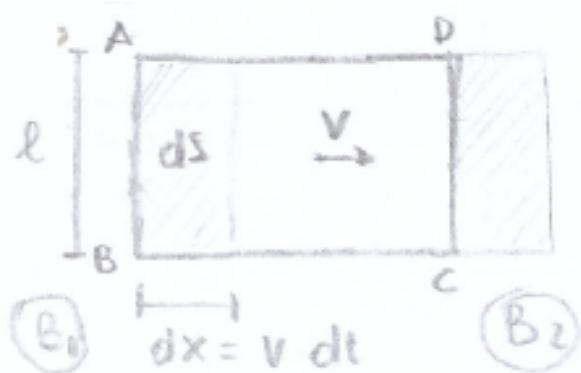
AB = DC

$$f.e.m = VL(B_1 - B_2)$$

$$\vec{E} = (\vec{V} \times \vec{B}_0)$$

- Uso Faraday

Come fatto precedentemente ottengo il flusso infinitesimo mediante la superficie dS spazzata nel tempo dt



$$d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B_2 - B_1) \cdot l v dt$$

Il flusso $d\phi_B$ è dato dalla somma dei flussi, in tal caso sono opposti.

$$\text{f.e.m.} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - [(B_2 - B_1) \cdot l v]$$

$\text{f.e.m.} = v l (B_1 - B_2)$

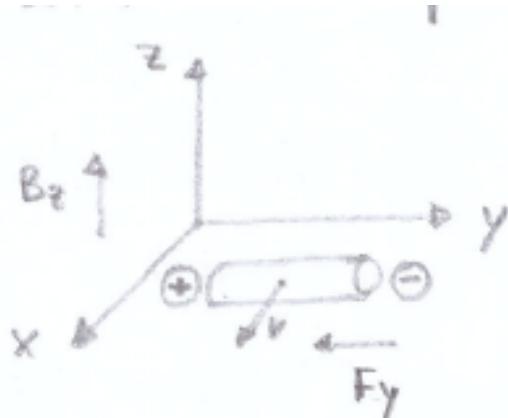
• Bacchetta ferma in un sistema di riferimento solidale

Consideriamo una bacchetta che si muove a velocità costante in un sistema di riferimento xyz fisso, in tal caso posso utilizzare la Forza di Lorenz come nei casi precedenti, trovano una f.e.m ai capi dell'asta.

Successivamente però se mi sposto in un sistema di riferimento mobile x'y'z' solidale con la bacchetta, ho comunque una f.e.m ma non posso giustificiarla con Lorenz (velocità=0), quindi devo usare la Relatività valida per i campi elettrici e magnetici.

- Sistema fisso xyz

Considero il campo B_0 come avente solo componente lungo l'asse z



La bacchetta trasla sull'asse x con velocità costante v.

Avrò quindi una forza F_y data da

$$|F_y| = -qvB_z$$

$|E_y| = -vB_z$

(Diritto verso le y)
(decrescenti)

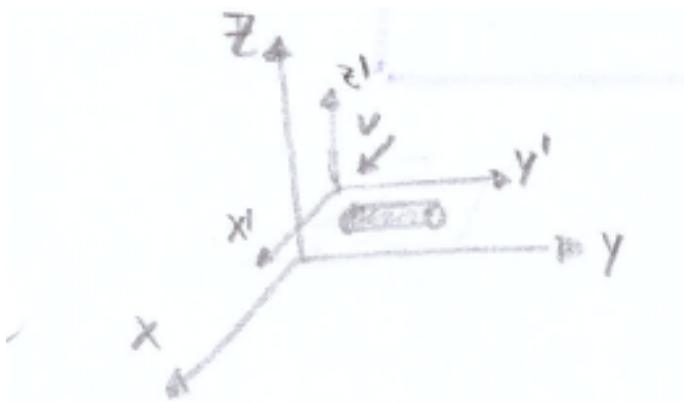
LORENZ

$$F = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$|E_m| = \frac{|F|}{q}$$

- Sistema mobile solidale con la bacchetta

Nel sistema x'y'z' la bacchetta non si muove quindi non posso applicare Lorenz



Tuttavia dalla Relatività ottengo le seguenti relazioni

$$\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \gamma(E_y - vB_z) \\ E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B_x' = B_x \\ B_y' = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \\ B_z' = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{cases}$$

Nel nostro caso nel sistema fisso vi è solo B_z

$$(E_y = E_x = E_z = 0) \quad (B_x = B_y = 0)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si ha quindi

$$B_z' = \gamma B_z$$

$$E_y' = \gamma(-vB_z) = -v\gamma B_z$$

$$E_y' = -vB_z'$$

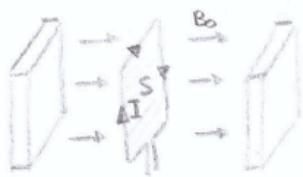
Velocità di trascinamento
del sistema mobile

Dinamo

Abbiamo visto che una spira percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico è soggetta ad una coppia di forze che la fa ruotare.

Vediamo ora il concetto alla base della dinamo, alternatore ecc..

Se facciamo ruotare una spira in un campo B_0 durante il moto l'angolo tra la superficie (avente la spira come contorno) e B_0 varia nel tempo, variandone il flusso e quindi per Faraday ci sarà una f.e.m all'interno del circuito



$$\Phi_s(B_0) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = B_0 S \cos(\theta(t))$$

Poche' ruota
l'angolo varia

FLUSSO

$$\Phi_s(B_0) = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$$

FARADAY

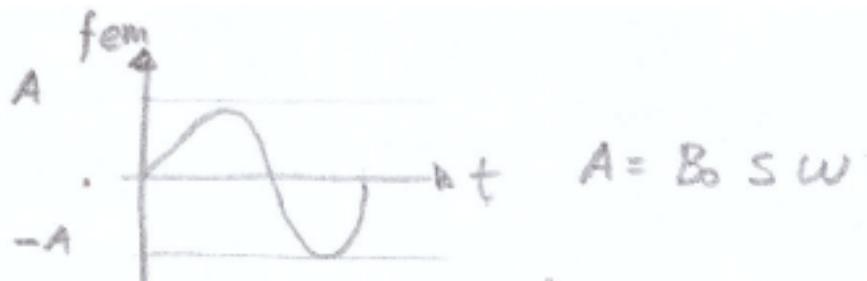
$$f.e.m. = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Se ruotiamo la spira a velocità costante ($\theta(t) = wt$) si ha quindi:

$$f.e.m. = - \frac{d[B_0 S \cos(wt)]}{dt}$$

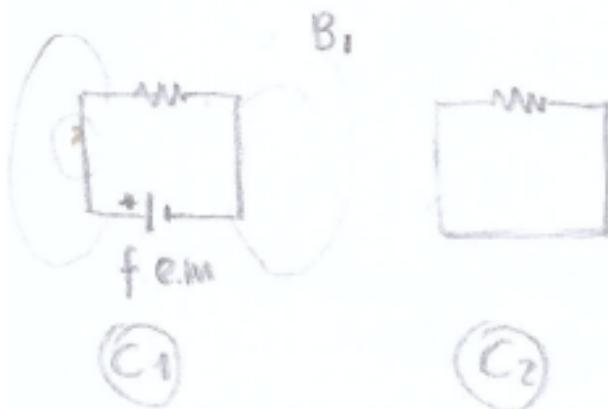
$$f.e.m. = B_0 S w \sin(wt)$$

Si avrà quindi una corrente sinusoidale



Forza elettromotrice indotta

- **Mutua induzione**



Prendiamo due circuiti C_1 e C_2 , nel primo vi è un generatore che fa scorrere una corrente I_1 che genera un campo B_1 , in C_1 vi sarà un flusso concatenato (flusso2) proporzionale alla corrente I_1 .

Il coefficiente di proporzionalità M_{21} è detto di mutua induzione e dipende dalle forme geometriche dei circuiti e la loro mutua posizione

intiore.

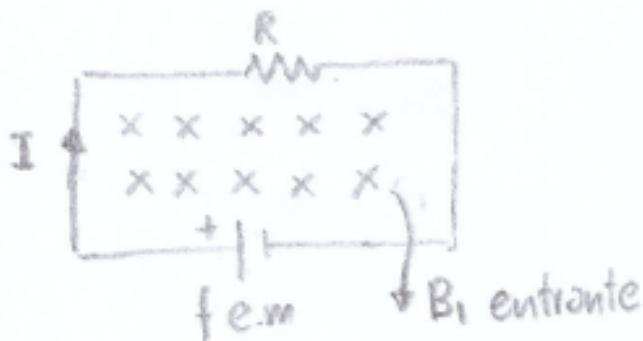
$$\phi_2 = \phi_{sc}(B_1) = H_{12} I_1$$

$$\phi_2 = H_{12} I_1$$

Applicando Faraday, al variare della corrente I_1 , ho su C2 una f.e.m.(f2)

$$f_2 = - \frac{d\phi_2}{dt} = - H_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

- **Auto induzione**



Il circuito C1, subisce un flusso, causato dal campo B da lui stesso generato proporzionale alla corrente I

$$\phi_1 = H_{11} I_1 = L I_1 \quad [\phi] = [\text{Volt/sec}] = \text{Weber}$$

Il coefficiente L prende il nome di Induttanza

$$[L] = \left[\frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} \right] = [H] (\text{Henry})$$

Se il flusso varia e quindi la corrente, si instaura una forza elettromotrice opposta a quella del generatore data da:

$$f_o = - \frac{d(L I_1)}{dt}$$

$$f_o = - L \frac{dI_1}{dt}$$

FARADAY
 $f_{em} = - \frac{d\phi_2}{dt}$

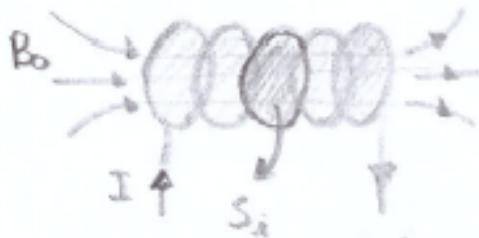
Il segno meno è giustificato dalla conservazione dell'energia dato che se F_0 fosse a favore di f.e.m il circuito aumenterebbe la corrente all'infinito

● Esempi

Vediamo ora un esempio di autoinduzione e uno di mutua induzione

- Induttanza solenoide

Ricaviamo il coefficiente di autoinduzione L per un solenoide



SOLENOIDE INFINITO

$$B_0 = \mu_0 N_e I$$

$$N_e = \frac{N}{l}$$

$$\phi_s = L I$$

Il flusso totale attraverso il solenoide sarà dato dalla somma dei flussi delle singole S_i (superficie avente la spira i -esima come contorno)

Considerando il solenoide molto lungo in relazione alla sezione possiamo usare la formula del solenoide infinito. Il flusso è quindi dato da

si dato:

$$\phi_s = \sum \phi_{S,i} = \sum (B \cdot S_i) = N \left(\mu_0 N_e I S \right) = \mu_0 \frac{N^2}{l} I S = \mu_0 N_e^2 l I S$$

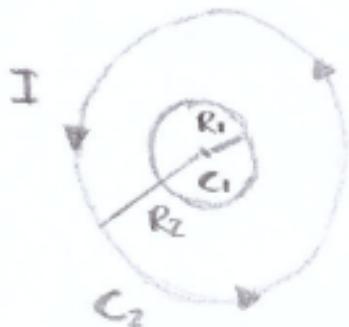
Numero spire
Superficie
spira

Quindi

$$L = \mu_0 N^2 l S = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

$N \rightarrow$ Numero spire
 $l \rightarrow$ Lunghezza solenoide
 $S \rightarrow$ Superficie spira

- Mutua induzione tra due spire



Consideriamo due spire complanari concentriche, la spira esterna C2 è percorsa da una corrente I, vogliamo vedere il flusso di B2 nel circuito C1, da considerarsi un punto, in modo che 2 in quella zona sia costante ($R_1 \ll R_2$)

$$\Phi_1 = B_2 \cdot S_1 = \frac{\mu_0 I}{2R_2} \cdot \pi R_1^2$$

Il coefficiente di mutua induzione è

Il coefficiente di mutua induzione è quindi

B0 SPIRA

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$H_{21} = H_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_1^2}{R_2} \quad (R_1 \ll R_2)$$

Nel nostro caso $x=0$

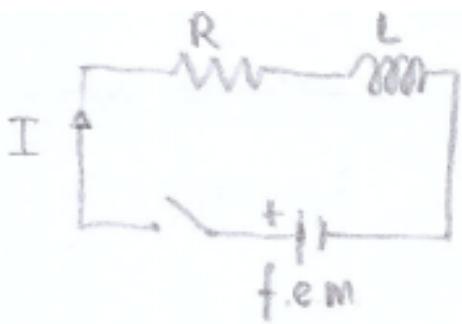
$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} I \frac{1}{R}$$

$$\Phi = H I$$

Circuito RL

Se in un circuito è presente una bobina (induttanza) essa si oppone alla variazione di corrente come precedentemente dedotto, vogliamo quindi studiare il processo di carica e scarica del circuito (transitorio) dopo l'azionamento di un interruttore.

- Carica



In questo caso chiudendo l'interruttore si collega la bobina che si carica

Usando Kirchoff

$$f.e.m + V_L = IR$$

$$f - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\left| \begin{array}{l} V_L = f_0 = -L \frac{dI}{dt} \\ f.e.m = f \end{array} \right.$$

Per sostituzione

$$-L \frac{dI}{dt} = IR - f \quad -\frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = x(t)$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \quad \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad IR - f = (-f)e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = IR - f \\ dx = R dI \\ (dI = \frac{dx}{R}) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = I_0 R - f \\ I_0 = 0 \end{array} \right.$$

Quindi

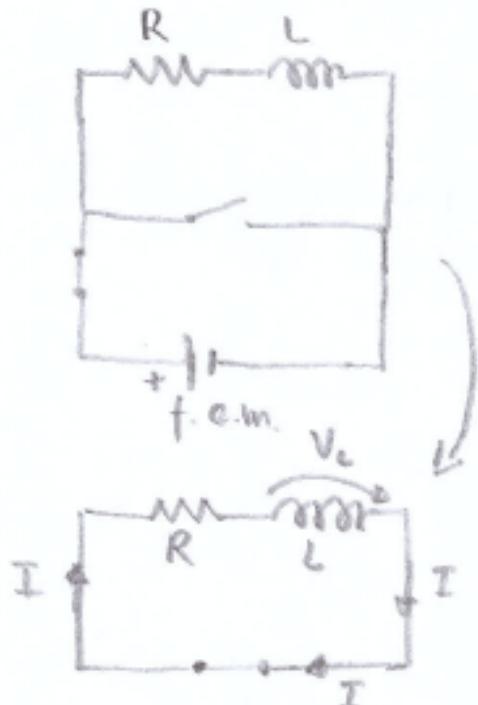
$$I(t) = \frac{f}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

Se imponiamo $\frac{L}{R} = \tau$
è molto simile a quella
della carica del
condensatore



• Scarica

Consideriamo ora un circuito, in cui è presente una bobina, inizialmente vi è collegata un generatore, quindi mediante due interruttori si scollega il generatore e si cortocircuita la bobina che di conseguenza si scarica, analizziamo la corrente in quest'ultima fase



Applico Kirchoff durante la scarica

$$V_L = IR \quad -L \frac{dI}{dt} = IR \quad \left| V_L = -L \frac{dI}{dt} \right.$$

Quindi

$$\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \quad \ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (I_0 = \text{f.e.m.})$$



OSS

Ricaviamo un'altra analogia in meccanica

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} \quad F = m a = m \frac{dv}{dt}$$

$$\begin{aligned} \text{Volt} &\rightarrow F \\ -L &\rightarrow m \\ I &\rightarrow v \end{aligned}$$

Energia immagazzinata in un'induttanza

Per ricavare l'energia che immagazzina un'induttanza in un circuito si può usare la potenza dissipata della resistenza durante la scarica oppure in generale applicando Kirchoff

● Calcolo mediante potenza dissipata

Durante la scarica la resistenza dissipa energia sotto forma di calore, tale energia è data dall'induttanza essendo l'unica fonte di energia

$$U = \int du = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty R I^2 dt = \int_0^\infty R \frac{t^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$\left| \begin{array}{l} \tau = \frac{L}{R} \\ du = P dt \\ P = I^2 R \end{array} \right|$$

$$U = \frac{f^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{f^2}{R} \frac{\tau}{2} \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

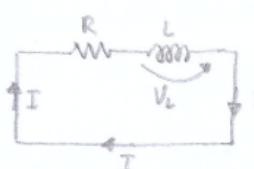
$$U = -\frac{f^2}{R} \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{2} [0-1] = +\frac{f^2}{R^2} L \cdot \frac{1}{2}$$

$U = \frac{1}{2} L I_{max}^2$

SCARICA INDUCTANZA
 $I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$
 $I_0 = \frac{f}{R} = I_{max}$

● Usando Kirchoff

Sempre considerando il circuito carica ma usando Kirchoff ricaviamo l'energia immagazzinata dall'induttanza



$$V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$V_C = IR$$

$$-L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\left| \begin{array}{l} V_L = -L \frac{dI}{dt} \\ du = P dt \\ P = I^2 R \end{array} \right.$$

Come nel caso precedente otteniamo U dalla somma dei du , riconviemo quindi il contributo infinitesimo:

$$du = P dt = I^2 R dt$$

Moltiplicando Kirchoff ad entrambi i membri per I ricava:

$$I \left(-L \frac{dI}{dt} \right) = I^2 R = \frac{du}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad du = -L I dI$$

Quindi

$$U = \int du = \int_{I_{max}}^0 -L I dI = -L \left[\frac{I^2}{2} \right]_{I_{max}}^0 = -L \left[-\frac{I_{max}^2}{2} \right] = \frac{L}{2} I_{max}^2$$

$$\left| I_{max} = I_0 = \frac{f}{R} \right.$$

$U = \frac{1}{2} L I_{max}^2$

Densità di energia nel campo magnetico

Come fatto con il campo elettrico, ricaviamo la densità di energia del campo

magnetico, come nell'altro caso ricaviamo l'energia immagazzinata in un volume conosciuto (in relazione a B_0) e dividendo tale risultato per il volume ricaviamo la densità.

L'energia in un solenoide è

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 N_e^2 l S I^2$$

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{B_0^2}{\mu_0^2 I^2} l S I^2 = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} l S$$

Da B_0 nel Solenoide:

$$N_e^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 I^2}$$

Solenoido infinito

$$l = \mu_0 N_e^2 l S$$

$$B_0 = \mu_0 I N_e$$

Quindi ricavo la densità di energia di B_0

$$\mu = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} l S \cdot \frac{1}{l S}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L I^2}$$

LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LE ONDE ELETTRONAGNETICHE

✓ Questo capitolo chiude la trattazione generale dell'elettromagnetismo con una discussione delle **equazioni di Maxwell** che sintetizzano i fenomeni e mostrano l'esistenza di un nuovo processo: le onde elettromagnetiche, previste da Maxwell e scoperte circa venti anni più tardi da Hertz. Onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda opportuna costituiscono la **luce**. L'**ottica**, che fino ad allora era stata considerata un capitolo staccato della fisica, viene a far parte naturalmente dell'elettromagnetismo.

Le equazioni di Maxwell descrivono le proprietà del campo elettrico e magnetico e come interagiscono tra di loro. Abbiamo già ricavato tutte e quattro le equazioni, tuttavia la 4 (legge di Ampere) è incompleta dato che si riferisce solo ai casi stazionari (corrente costante nel tempo) andremo quindi ad analizzare i casi non stazionari.

La legge di Ampere lega la circuitazione di B_0 alla corrente concatenata alla superficie avente la linea di circuitazione come contorno

$$\oint_e \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma (I_{\text{conc}})$$

Tale equazione non è valida se si prende in considerazione un caso di corrente non stazionaria come ad esempio la carica di un condensatore. Il circuito è percorso da corrente e produce un campo B_0 , tuttavia all'interno del condensatore non è alcuna corrente concatenata (se ci fosse il condensatore si brucerebbe). Dobbiamo quindi comprendere da dove provenga il campo B_0 , tale fenomeno è spiegato dalla legge di Ampere-Maxwell (quarta equazione di Maxwell)

EQUAZIONE CONTINUITÀ DELLA CORRENTE:

Consideriamo una superficie chiusa ad esempio la superficie esterna (cilindro).

In tale conduttore sono presenti delle cariche, il flusso totale sulla superficie chiusa di j (vettore) deve necessariamente essere legato alla variazione di cariche all'interno del volume racchiuso, poiché le cariche non possono essere create né distrutte (nelle pareti esterne non c'è flusso)

$$\Phi_{\text{tot}}(\vec{r}) = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ_{\text{int}}}{dt}$$

$Q_{\text{int}} \rightarrow$ carica interna al conduttore

Il segno (meno) è dovuto al fatto che se il flusso è positivo (escono più cariche di quando ne entrano) allora le cariche interne Q_{int} diminuiscono e d Q/dt negativa, ma con il segno meno diventa positiva in accordo al flusso. Nota Bene: Il flusso totale è dato da quello uscente meno quello entrante

FORMA LOCALE:

Ricaviamo la forma "divergente" dall'equazione di continuità applicando il teorema della divergenza ed esprimendo la carica Qint mediante la densità p.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{J} dV ; \quad \frac{dQ_{int}}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Quindi:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J} dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

GLOBALE

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ_{int}}{dt}$$

Th Divergenza

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{J} dV$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{\text{Carica}}{\text{Volume}}$$

LEGGE DI AMPERE-MAXWELL (QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL)

Tale legge è generalizzazione della legge di Ampere, questa è valida per casi stazionari e non stazionari. Se applichiamo l'operatore divergenza (Triangolo) ad entrambi i membri della legge di Ampere ricaviamo che il primo membro è identicamente nullo, il secondo lo è solo se l'è Costante (caso stazionario)

LEGGE DI AMPERE

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

$$\left| \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) := 0 \right.$$

EQ CONTINUITÀ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

1° EQ MAXWELL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J})$$

Occorre quindi sostituire il secondo membro con una grandezza relazionata al vettore \vec{J} ma identicamente nulla, dalla equazione di continuità ricaviamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

applicando la prima equazione di maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) = \mu_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]$$

togliendo l'operatore (trinagolo):

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)} \quad (4^{\circ} \text{ EQ MAXWELL})$$

FORMA GLOBALE:

Per ricavare la forma globale useremo il teorema di Stokes.
Applichiamo l'integrale di flusso ad entrambi i membri

$$\oint_{S_e} (\vec{V} \times \vec{B}_0) d\vec{s} = \mu_0 \left[\int_{S_p} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \frac{\partial \phi_{se}(t)}{\partial t} \right]$$

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_{se}(t)}{\partial t}$$

↓ ↓

CORRENTE DI CONDUZIONE CORRENTE DI SPOSTAMENTO

TH STOKES

$$\oint_{S_e} (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{s} = \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{V} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\phi_{se}(E_0) = \oint_{S_e} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s}$$

$$I = \oint_{S_p} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE:

Tornando al caso del condensatore in cui è un campo magnetico ma non vi è corrente concatenata tra le armature, vediamo da cosa è dato B_0 applicando la quarta equazione in forma globale.

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot 0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}_0 \cdot \vec{s})}{\partial t}$$

$$\phi(E) = \vec{E}_0 \cdot \vec{s}$$

sostituisco i valori nel caso di un condensatore piano:

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\partial (\epsilon_0 S \vec{E}_0)}{\partial t} = \mu_0 \frac{d\phi}{dt}$$

troviamo quindi che la circuitazione di B_0 intorno ad un condensatore è data dalla corrente di spostamento.

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

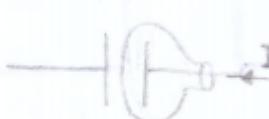
$$(1) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \vec{E}_0 \cdot S \cdot \vec{E}_0 = Q$$

J.R

nota bene: il problema nel caso del condensatore è che la superficie passante tra le armature, e avente come base un anello sul circuito, non è percorsa da corrente quindi non è concatenato.

N.B.

In questo caso
 $\sigma(t)$ varia nel
tempo



EQUAZIONE DI MAXWELL:

Ora abbiamo tutte le quattro equazioni di Maxwell complete:

PRIMA EQUAZIONE (Legge di Gauss)

Tale legge descrive la proprietà delle linee di campo di E_0 , tali linee divergono da una carica elettrica.

FORMA GLOBALE $\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$	FORMA LOCALE $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{P}{\epsilon_0}$
--	--

SECONDA EQUAZIONE: (Inesistenza monopoli magnetici)

Tale equazione descrive la proprietà del campo B_0 per cui non esistono cariche magnetiche (monopoli magnetici)

FORMA GLOBALE $\oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{s} = 0$	FORMA LOCALE $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$
--	---

TERZA EQUAZIONE (LEGGE DI FARADAY-NEWMANN LENZ)

Questa equazione ci dice che il campo elettrico può essere generato anche dalla variazione del flusso del campo magnetico.

Tuttavia il campo elettrico in questo caso non è conservativo (circuitazione diversa da zero).

FORMA GLOBALE

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_{se}(B_0)}{dt}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt}$$

QUARTA EQUAZIONE(LEGGE DI AMPERE-MAXWELL)

Questa descrive come si può generare il campo magnetico ovvero mediante corrente di conduzione oppure mediante corrente di spostamento

FORMA GLOBALE

$$\oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{con} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_{se}(E_0)}{dt}$$

FORMA LOCALE

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_0}{dt}$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE:

Attraverso le equazioni di Maxwell si ricava l'EQUAZIONE DELLE ONDE

La sua soluzione descrive matematicamente un'onda elettromagnetica.

In generale un'onda è una perturbazione nello spazio, che però dopo il suo passaggio lascia invariate le proprietà presenti, essa trasporta energia.

EQUAZIONE DELLE ONDE:

Applichiamo l'equazione di Maxwell in forma locale, considerando che non ci siano cariche ($p=0$) e neanche correnti (j vettore =0)

Si ha quindi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 ; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt} ; \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_0}{dt}$$

prendiamo la terza equazione e applichiamo l'operatore ad entrambi i membri:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0)}{dt}$$

Il primo membro è un'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \text{ (Scalare)}$$

le componenti del secondo membro hanno le seguenti componenti x:

$$[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})]_x = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right]_x \quad [\nabla^2 \vec{E}]_x = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x \right]_x$$

Abbiamo quindi:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0)}{dt}$$

Sostituendo:

$$-\nabla^2 \vec{E} = - \frac{d(\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt})}{dt}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{cases}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

PRODOTTO $\mu_0 \epsilon_0$

Il prodotto tra le due costanti nel moto ha un notevole significato, ricaviamo le dimensioni e di conseguenza il suo valore numerico.

Dall'equazione d'onda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Il primo membro ha dimensioni $[L^{-2}]$ dato che ci sono le derivate seconde di grandezza spaziale, moltiplicata per quella del campo elettrico.

Il secondo ha le dimensioni di $\mu_0 \epsilon_0$ moltiplicate per quelle del campo diviso il tempo al quadrato

$$[L^{-2}] \cancel{\mathcal{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \mathcal{E} \cdot [T^{-2}] \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \left(\frac{L}{T} \right)^2$$

la radice di $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$ ha le dimensioni di una velocità, sostituendo i valori si

ricava che equivale a circa la velocità della luce (c)

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \\ \mu_0 \approx 12,6 \cdot 10^{-6} \\ | c \approx 3 \cdot 10^8 \end{array} \right.$$

l'equazione d'onda si puo quindi porre:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Tale risutato ha portato alla conclusione che la luce è un onda elettromagnetica

OSS

Per comprendere che $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ ha dimensione $[L^{-2}]$ si considera l'accelerazione

$$a = \frac{d^2 x}{d t^2} = [L \cdot T^{-2}]$$

RISULTATI DELLE EQUAZIONI DELLE ONDE:

Dall'equazione delle onde possiamo ricavare le caratteristiche delle onde elettromagnetiche.

In generale occorre ricavare le sei equazioni che descrivono E vettore e B vettore

, ognuno delle quali dipende dagli assi spaziali e dal tempo.

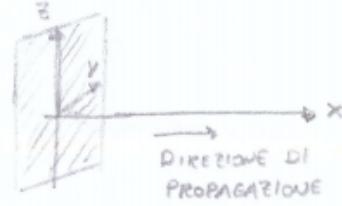
$$E_x(x, y, z, t); E_y(x, y, z, t); E_z(x, y, z, t) \quad | \quad B_x(x, y, z, t); B_y(x, y, z, t); B_z(x, y, z, t)$$

Per semplificare noi consideriamo il caso di onde piane.

ONDE PIANE

La caratteristica è data dal fatto che l'onda è composta da un susseguirsi di piani infatti, in cui i campi sono costanti.

Se ad esempio si prende l'asse x come direzione di propagazione, le componenti dei campi non variano lungo gli assi z e y sul piano considerato preso al tempo t .



abbiamo quindi

$$E_x(x, t), E_y(x, t); E_z(x, t) \quad | \quad B_x(x, t); B_y(x, t), B_z(x, t)$$

l'EQUAZIONE DELLE Onde si riduce a

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad . \quad - \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right. ,$$

-Struttura della soluzione

Un equazione di questo tipo ha una soluzione del genere

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad f = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

$$\text{Infatti sostituendo si ottiene: } f'' = \frac{1}{c^2} f'' c^2$$

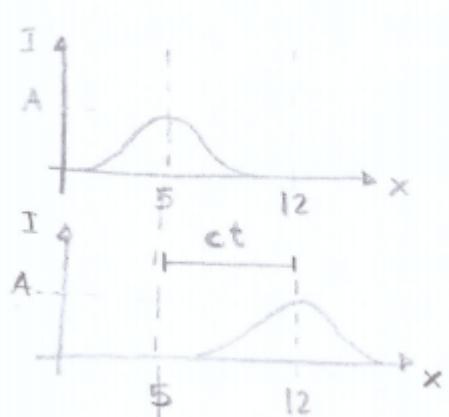
es

$$\begin{cases} f = x^2 + ct \\ f = \ln|x+ct| \end{cases}$$

Tale struttura è giustificata dal tipo di onda detta ONDA PROGRESSIVA. Si immagina una funzione $f(x)$ che dato un valore x restituisca l'intensità dell'onda

AD ESEMPIO:

$$f(5) = A$$



Tuttavia essendo un onda che si propaga verso le x crescenti, dopo un tempo T , essa avrà percorso uno spazio ct , sottraendo lo spazio attuale a quello percorso ottengo il valore desiderato.

$$f(12 - \tau) = A \quad \begin{cases} x = 12 \\ ct = \tau \end{cases}$$

la funzione dovrà quindi essere del tipo

$$f(x - ct)$$

STUDIO COMPONENTI DI E e B:

Applicando l'equazione di Maxwell nel nostro caso ricaviamo le equazioni per le sei componenti (3 di E; 3 DI Bo)

OSS

[Le equazioni di Maxwell danno in totale 8 equazioni, due dalla 1° e 2° (scalar) e sei delle 3° e 4° (vettori)]

EQUAZIONI DI MAXWELL ($\rho=0$; $\vec{J}=0$)

1. $\vec{D} \cdot \vec{E} = 0$
2. $\vec{D} \cdot \vec{B} = 0$
3. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}_0}{dt}$
4. $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_0}{dt}$

COMPONENTI Ex e Bx

Uso la prima equazione

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0$$

Poiché consideriamo il caso di onde plane il campo \vec{E} non varia lungo y e z

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Quindi la componente E_x non dipende da x .

Vediamo ora se E_x dipende dal tempo:

Vediamo ora se E_x dipende dal tempo:

Uso la componente x della 4° eq (4x)

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Anche il campo \vec{B} non varia lungo y e z quindi:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

Quindi la componente x del campo \vec{E} non dipende ne' da x ne' da t , dunque \vec{E} NON ha componente x nell'onda.

COMPONENTE x (ROTARE)

$$[\vec{v} \times \vec{B}]_x = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)$$

4° eq

$$\vec{v} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{c^2} \frac{d \vec{E}}{dt}$$

Usando la seconda equazione e la componente x della terza, si ricavano i medesimi risultati per B_0

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Quindi neanche la componente x di B_0 fa parte dell'onda

Abbiamo quindi una nuova caratteristica dell'onda elettromagnetica, ovvero non c'è componente del campo lungo la direzione di propagazione, un tipo di onda del genere è detta onda Trasversale

Rimangono le seguenti componenti

$$E_y(x,t) ; E_z(x,t) \quad | \quad B_y(x,t) ; B_z(x,t)$$

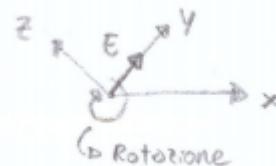
mento E_z

COMPONENTE E_z

Le componenti di un vettore dipendono dalla posizione (rotazione) del piano di riferimento yz . Per semplicità consideriamo il campo E_0 tutto diretto lungo l'asse y e quindi con componente z nulla ($E_z=0$)

Dunque nel nostro sistema di riferimento abbiamo solo le seguenti componenti

$$E_y(x,t) \quad | \quad B_y(x,t) ; B_z(x,t)$$



COMPONENTE B_y :

-Uso la componente y della terza equazione (3y)

• Componente B_y

-Uso la componente y della 3° eq. (3y)

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

E_x non dipende
da z o y

$E_z = 0$ (Nel nostro
sistema di rif.)

COMPONENTE y (ROTORE)

$$[\vec{v} \times \vec{E}]_y = \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]_y$$

$$\frac{3^{\circ} EO}{\vec{v} \times \vec{E}} = - \frac{d \vec{B}_0}{dt}$$

quindi B_y non dipende dal tempo

-Uso la componente z della quarta equazione (4z)

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Quindi:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

$E_z = 0$
 B_x costante in y

COMPONENTE z (ROTORE)

$$[\vec{v} \times \vec{B}_0]_z = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)_z$$

4° EO

$$\vec{v} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{c^2} \frac{d \vec{E}_0}{dt}$$

dunque neanche la componente y di B (B_y fa parte dell'onda).
Rimangono solo:

$$E_y(x,t) \quad | \quad B_z(x,t)$$

Poiché y perpendicolare z deduciamo che anche nell'onda elettromagnetica il

campo E è perpendicolare B , entrambi diretti trasversalmente alla direzione di propagazione.

Ricaviamo quindi le equazioni di queste componenti

- $E_y(x,t)$ e $B_z(x,t)$

- Uso la componente z della 3° eq (37)

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

- Uso la componente y della 4° eq (44)

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Dato che la scelta degli assi y e z è del tutto invariante possiamo rimuovere dalle soluzioni i riferimenti assoluti, però annotando che i campi sono perpendicolari fra di loro (B perpendicolare E)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

Le equazioni di \vec{E} e \vec{B} dovranno essere:

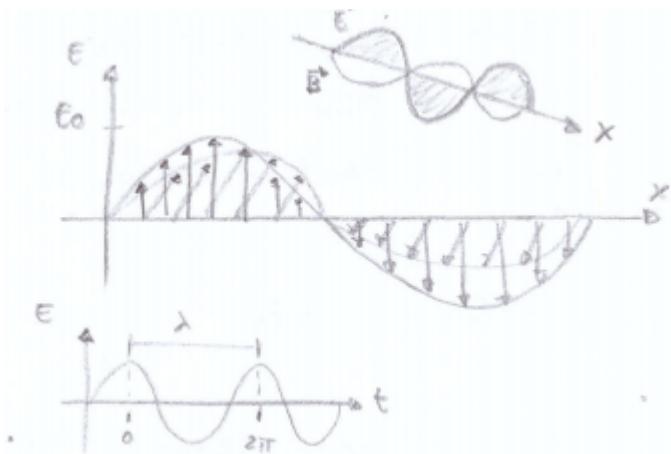
$$E = E_0(x \pm ct) \quad B = B_0(x \pm ct)$$

RISULTATO EQUAZIONE DELLE ONDE NEL CASO SINUSOIDALE

Tramite lo sviluppo di Fourier si ricava che un qualsiasi segnale può essere scomposto in onde sinusoidale . Vediamo quindi la soluzione sinusoidale poichè qualsiasi altro tipo, può essere formato dalla sovrapposizione di onde sinusoidali.

Poiché $\sin()$ deve avere un numero puro come argomento si ha:

$$\begin{cases} E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{\lambda} ct\right) \\ B = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \pm \frac{2\pi}{\lambda} ct\right) \end{cases}$$



le onde di questo tipo avente un'unica frequenza sono dette monocromatiche.
Imponendo per definizione

$$T = \frac{\lambda}{c} \text{ (Periodo)} ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ (Numero di onde)} ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E = E_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

$$B = B_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

Il segno \pm dipende dalla direzione.
Se diretto verso le x crescenti (-),
altrimenti (+)

-Energia trasportata (Densità di energia del campo elettromagnetico)

Ricaviamo la percentuale di energia che ciascun campo trasporta calcolando la densità di energia del campo elettromagnetico.

Applicando la soluzione generica a quella sinusoidale otteniamo il rapporto tra i due campi.

Consideriamo il caso di un'onda diretta verso le x crescenti.

SOLUZIONE GENERICA

$$E_0 \cos(kx - \omega t) \cdot k = -B_0 \cos(kx - \omega t) (-\omega)$$

$$E_0 \cdot k = B_0 \omega \quad \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) = \frac{\lambda}{T} = C$$

In questo caso si ha:

$$\frac{E_0}{B_0} = C = \approx 3 \cdot 10^2$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad E \perp B$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

CASO SINUSOIDALE

$$E = E_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

$$B = B_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

Tuttavia tale risultato è dovuto all'unità di misura adottate, in un altro sistema di misura C poteva essere uguale a 1.
Tramite la densità di energia si ricava il vero rapporto

$$\underline{\mu(E_0)}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\underline{\mu(B_0)}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$\mu = \mu_e + \mu_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\epsilon_0}{B_0} = c \\ B^2 = \frac{E^2}{c^2} \end{array} \right.$$

esprimiamo il secondo termine del secondo membro tramite E usando il rapporto precedentemente ricavato.

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0 \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

si ha quindi che l'energia trasportata dal campo B è pari a quella trasportata da E

In un'onda elettromagnetica l'energia totale è suddivisa a metà tra E e B . ($E = 50\% \mu$; $B = 50\% \mu$)

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

VETTORE DI POYNTING:

Per indicare l'energia ad esempio di un onda elettromagnetica si definisce il vettore di Poynting

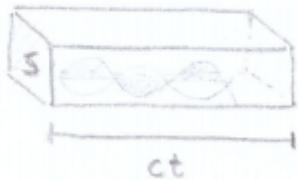
$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$[P] = [W/m^2]$$

Tale grandezza indica l'energia che passa attraverso una superficie unitaria nell'unità di tempo ($s=1, t=1$)

Vediamo come ricavare questo risultato nel caso di un'onda elettromagnetica come fatto altre volte calcoliamo il flusso attraverso una superficie considerando un volume:

ENERGIA DI UNA Onda



L'energia interna sarà data dal volume per la densità di energia (consideriamo il modulo dato che E perpendicolare B)

$$P = \text{Vol} \cdot \mu = S \cdot c \cdot t \cdot \mu = c \mu$$

$$\mu = C \left(\frac{1}{2} E_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2 \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} S=1 \\ t=1 \end{array} \right.$$

$$12 \text{ --- } \frac{1}{2} \mu_0$$

$$P = C \left(\frac{1}{2} E_0 E B c + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{B E}{c} \right) = \frac{1}{2} E_0 E B c^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B E$$

$$P = \frac{1}{2} \mu_0 E B + \frac{1}{2} \mu_0 B E = \frac{1}{\mu_0} B E \quad P = \frac{1}{\mu_0} E B$$

DENSITÀ ENERGIA ONDA

$$\mu = \frac{1}{2} E_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

$$\left| \frac{E_0}{B_0} = C \right.$$

INTENSITÀ ISTANTANEA ONDA SINUSOIDALE:

L'intensità istantanea è definita come il valore medio del vettore di Poynting. Nel caso di un onda sinusoidale si ha

$$I = \frac{1}{\mu_0} E B \int_0^t S_m^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{\mu_0} E B \cdot \frac{1}{2}$$

$I = \frac{1}{2} E B$

$$\left| \begin{array}{l} E = E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B = B_0 \sin(kx - \omega t) \\ B_0 = E_0 = 0 \end{array} \right.$$

Secondo principio della termodinamica

- **Limi**t sperimentali alle trasformazioni permesse dal primo principio.
- ✓ **Enunciati del secondo principio della termodinamica:** impossibilità di ottenere, unicamente, lavoro da una sola sorgente (Kelvin) e impossibilità di trasferire, unicamente, calore da una sorgente a un'altra a temperatura superiore (equivalenza degli enunciati).
- **Conseguenza del secondo principio:** egualanza del rendimento di macchine (cicli) reversibili, lavoranti tra due temperature e disegualanza con macchine irreversibili (*teorema di Carnot*).
- ✓ **Rendimento macchina di Carnot** (e di ogni altro ciclo reversibile tra due temperature):

$$\eta = \left(\frac{L}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \right) = 1 - \frac{T_2}{T_1} \longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Anche: $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0$ e $\oint \frac{dQ}{T} = 0$ (≤ 0 per cicli qualsiasi).

Da cui possibilità di definire:

1. temperatura termodinamica (coincidente con assoluta),
2. funzione di stato (su trasformazioni reversibili) $\int_A^B dQ/T$.

- ✓ **Entropia:** $\Delta S_{12} = \int_1^2 dQ/T$, su trasformazioni reversibili e $S = \int_0^T dQ/T$ ($S(T = 0) \rightarrow 0$) → 0, *terzo principio termodinamico*)
- Per trasformazioni reali $I_{12} = \int_1^2 dQ/T$ (*integrale di Clausius*) con T temperatura della sorgente con cui c'è scambio termico; dal teorema di Carnot:

$$\Delta S_{12} \geq I_{12}$$

e crescita dell'entropia di sistemi isolati (adiabatici, Universo), $\Delta S \geq 0$ ($dQ = 0$).

- **Interpretazione del secondo principio:** evoluzione spontanea di sistemi termodinamici verso stati di equilibrio più probabili (realizzabili con maggior numero di stati microscopicamente diversi).

Entropia:

probabilità $\Delta S_{12} = k \ln P_2/P_1$ (*Boltzmann*), con $P_{1,2}$ probabilità di (numero microstati che realizzano uno stesso) macrostato; aumento di probabilità = riduzione di informazione I :

$$I_2 - I_1 = k \ln P_2/P_1;$$

gas perfetti (per mole):

$$\Delta S_{12} = \bar{c}_v \ln T_2/T_1 + R \ln V_2/V_1;$$

gas reali (di Van der Waals):

$$\Delta S_{12} \simeq R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - \frac{a}{T_1} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right);$$

trasformazioni di stato:

$$\Delta S = \lambda/T \quad (\text{per mole}),$$

trasformazione isoterma con T , temperatura della trasformazione e λ , calore latente (per mole) della trasformazione.

Il 2° principio della termodinamica nasce con l'obiettivo di limitare il 1° principio, infatti quest'ultimo consente di passare calore da una sorgente fredda ad una calda naturalmente, oppure creare lavoro illimitatamente da un

corpo al elevata capacità termina (es: oceano).

Tali fenomeni non sono realizzabili nella realtà.

Prima di enunciare il 2* principio ragioniamo sulla trasformazione di calore in lavoro

Macchine termiche

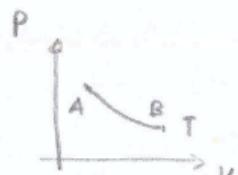
In generale una macchina termica è un dispositivo che scambia calore (assorbe o cede) e lavoro (fa o subisce) con l'esterno

Il nostro obiettivo è quelo di ideare una macchina che prendendo calore da una SORGENTE TERMICA (cioè un corpo che cedendo calore non varia la propria temperatura) lo trasformi con continuità in lavoro

Si potrebbe pensare di utilizzare un gas ideale con trasformazione ISOTERMICA in modo da trasformare tuttò il calore in lavoro, tuttavia nella realtà il lavoro prodotto avrebbe diminuito a causa della riduzione del pressore.

$$\left. \begin{array}{l} U(T) = \text{costante} \\ \Delta U = Q - L \\ Q = L \end{array} \right\}$$

Si deduce che occorre ripetere ciclicamente il processo, ma in tal modo si avrebbe lavoro totale nulo, poiché nel ripotere il gas da B ad A, faccio lavoro opposto a quello fatto precedentemente

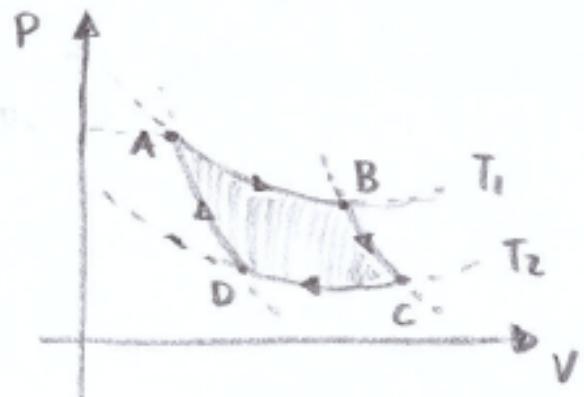


Una macchina termica quindi per produrre lavoro con continuità deve utilizzare due diverse sorgenti in modo che nella trasformazione ciclica il lavoro totale sia diverso da zero

Macchina termica di Carnot (ciclo di Carnot)

Dalle precedenti conclusioni abbiamo ottenuto che una macchina per produrre lavoro con continuità deve operare ciclicamente e usare due sorgenti a temperature diverse

Il ciclo su cui si basano tali macchine prende il nome di ciclo di Carnot ed è il seguente (considerando un gas ideale)



$$T_1 > T_2$$

1. (A->B) Isoterma, in tale trasformazione si fa espandere il gas mantenendolo alla temperatura della sorgente T_1 , prendendo quindi una quantità di calore Q_1 da essa
2. (B-> C) Adiabatica, si rimuove la sorgente T_1 e si isola il gas il modo che non vi siano scambi di calore con l'esterno. In tale trasformazione il gas si espande raffreddandosi fino alla temperatura T_2 (Uguale alla 2° sorgente)
3. (C->D) Isoterma, si ponga il gas a contatto con la seconda sorgente avente la sua stessa temperatura (T_2). Lo si comprime in modo da ridurne il volume, per farlo rimanere a temperatura costante, la sorgente T_2 assorbe una quantità di calore Q_2
4. (D->A) Adiabatica, si isola nuovamente il gas e lo si comprime in modo da riportarlo alle condizioni iniziali

Lavoro

Si osserva che non tutto il calore preso da $T_1(Q_1)$ è stato trasformato in lavoro, poiché una parte (Q_2) è stata ceduta alla seconda sorgente T_2 .

Il lavoro totale è rappresentato nel ciclo dalla area racchiusa tra le linee. Dato che è una trasformazione ciclica, l'energia interna U non cambia complessivamente, dal 1° principio si ha

$$0 = (Q_1 - Q_2) - L$$

↓ ↓
 Calore Calore
 preso ceduto

$$L = Q_1 - Q_2$$

$$\Delta U = Q - L$$

Rendimento ciclo di Carnot

- Caso generale

Si definisce rendimento di una macchina termica

$$\eta = \frac{L}{Q}$$

Ovvero è il rapporto tra il lavoro eseguito e il calore Q assorbito

Nel caso di Carnot ho che:

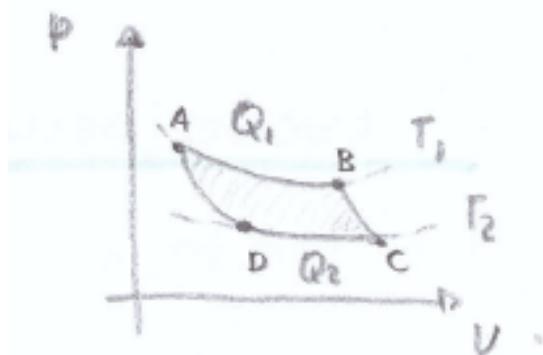
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Il rendimento non può mai essere uguale ad 1, poiché Q_2 deve necessariamente essere maggiore di zero

- Caso di un gas ideale

Calcoliamo il rendimento della macchina di Carnot nel caso si usi un gas ideale.



Dato che nei tratti AB (assorbe Q_1) e CD (cede Q_2), si ha una trasformazione isoterma, l'energia interna del gas non varia ($\Delta U = 0$) dal 1° principio nei due casi si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = L_1 = nRT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_2 = L_2 = nRT_2 \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right) \end{array} \right.$$

Considero da
D → C in modo
che Q_2 sia (+)

$$\Delta U = Q - L$$

$$L = \int P dV$$

$$PV = nRT$$

$$L_{\text{isot}} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Consideriamo le relazioni tra PV iniziale e finale in ogni trasformazione (2 ISOTERME + 2 ADIABATICHE)

$$A \rightarrow B \quad P_A V_A = P_B V_B$$

$$C \rightarrow D \quad P_C V_C = P_D V_D$$

$$B \rightarrow C \quad P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$$

$$D \rightarrow A \quad P_D V_D^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

GAS IDEALE

• ISOTERME

$$P V = C_{\text{const}}$$

• ADIABATICHE

$$P V^\gamma = C_{\text{const}}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Moltiplicando membro a membro, e semplificando si ottiene:

$$V_A V_C V_B^\gamma V_D^\gamma = V_B V_D V_C^\gamma V_A^\gamma$$

$$\frac{V_A V_C}{(V_A V_C)^\gamma} = \frac{V_B V_D}{(V_B V_D)^\gamma}$$

Quindi:

$$V_A V_C = V_B V_D$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Di conseguenza

$$\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

Dividendo membro a membro le equazioni precedenti

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \begin{cases} Q_1 = N R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ Q_2 = N R T_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) \end{cases}$$

Il rendimento è allora

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \\ (T_1 > T_2)$$

$$\begin{cases} \eta = \frac{L}{Q} \\ \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \end{cases}$$

2° Principio della termodinamica

Il 2° principio è costituito da due enunciati che sono del tutto equivalente
Per Kelvin

Non è possibile realizzare una trasformazione in cui si trasformi una quantità di calore, estratto da una sorgente, in lavoro, come unico risultato finale

OSS

[Infatti nel ciclo di Carnot, oltre ad estrarre calore, lo si cede alla seconda sorgente.

Per Clausius

Non è possibile realizzare una trasformazione in cui si trasferisce una quantità di calore da un corpo T_1 ad uno a temperatura maggiore T_2 ($T_2 > T_1$) come unico risultato finale

OSS

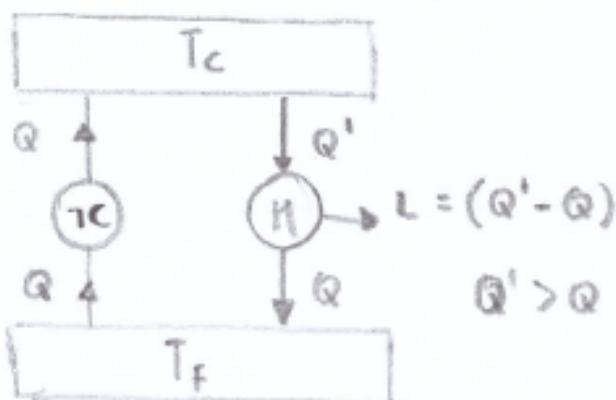
[Tale processo è possibile se contemporaneamente viene speso lavoro

Dimostrazione uguaglianza enunciati

Possiamo dimostrare la loro uguaglianza, negando una o vedendo che viene negato anche l'altro

- Negazione Clausius

Neghiamo Clausius considerando una macchina termica $\neg C$ (not Clausius) che trasferisce calore da una sorgente "fredda" T_f ad una più "calda" T_c



($\neg C$ = Negazione Clausius)

$$T_c > T_f$$

La quantità di calore trasferita è Q

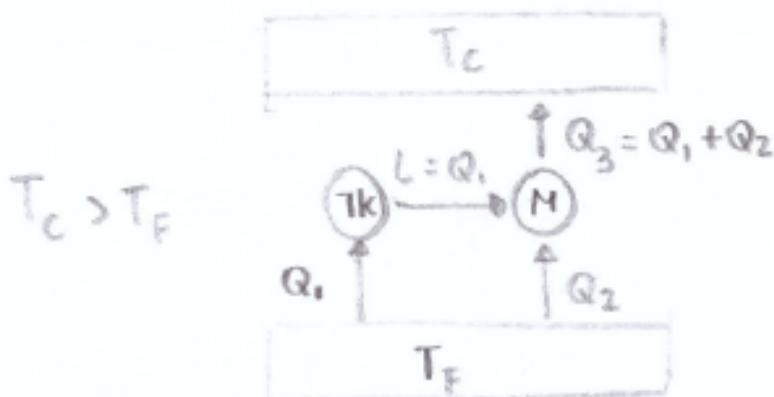
Ora prendiamo una seconda macchina M che prende calore $Q' > Q$ dalla sorgente T_c , una parte ($=Q$) la cede a T_f , l'altra ($Q'-Q$) la usa per eseguire lavoro L

Poiché T_f complessivamente non scambia calore, si ha come unico risultato finale la trasformazione di una quantità di calore presa dalla sorgente T_c in lavoro andando a negare Kelvin

$\neg \text{Clausius} \Leftrightarrow \neg \text{kelvin}$

- Negazione Kelvin

Si prende in considerazione una macchina $\neg K$ (not Kelvin) che converte una quantità di calore Q_1 estratta da T_f completamente in lavoro $L=Q_1$ andando quindi contro Kelvin



Una seconda macchina M subisce il lavoro L e quindi riceve una quantità di calore Q , da $\neg K$, inoltre preleva Q_2 e T_f e cede $Q_3=Q_1+Q_2$ a T_c

Si ha quindi come unico risultato finale il passaggio di calore da T_f a T_c negando Clausius dato che $T_f < T_c$

$\neg \text{kelvin} \Leftrightarrow \neg \text{Clausius}$

Si ha quindi l'uguaglianza

$\text{kelvin} \Leftrightarrow \text{Clausius}$

Teorema di Carnot

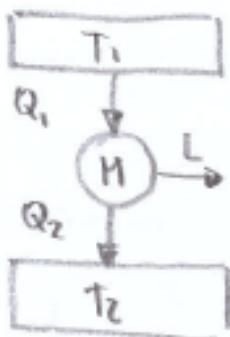
Il teorema di Carnot dice che fissate due sorgenti termiche, tutte le macchine termiche reversibili hanno il medesimo rendimento, inoltre le macchine irreversibili non hanno rendimento maggiore di quelle reversibili

Dimostrazione

Si dimostrano entrambe le affermazioni

- **Uguaglianza rendimento**

Si prendono in considerazione due macchine reversibili, ognuna lavora in questo modo



$$T_1 > T_2$$

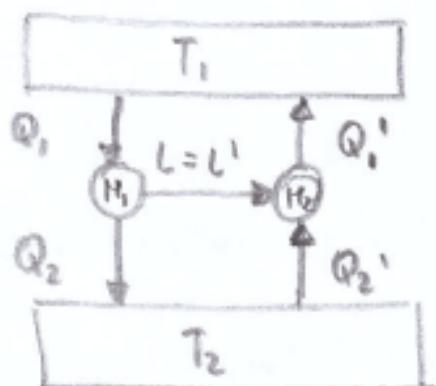
I rendimenti saranno:

$$\eta_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta_2 = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} \quad \left| \eta = \frac{L}{Q} \right.$$

Suppongo per assurdo che;

$$\eta_1 > \eta_2$$

Per dimostrare che è un assurdo si fa lavorare la prima macchina direttamente e la seconda inversamente



$$T_1 > T_2$$

le facciano lavorare in modo tale che $L = L'$
e quindi

$$Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$$

Dall'assurdo si ha che:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} \quad (Q_1' > Q_1)$$

Sostituendo Q_1' e Q_1 si ha (in $Q_1' > Q_1$)

$$(Q_1 - Q_2) + Q_2' > (Q_1' - Q_2') + Q_2 \quad (Q_2' > Q_2)$$

Da tale diseguaglianza risulta come unico risultato finale il trasporto di calore da una sorgente più fredda T_2 a una più calda T_1 , in contrasto con il 2° principio

$$\begin{cases} Q_1' > Q_1 \\ Q_2' > Q_2 \end{cases}$$

Così quindi sono riuscito a dimostrare che il rendimento 1 non può essere maggiore del rendimento 2, per dimostrare che sono uguali, occorre negare che il rendimento 2 sia maggiore del primo, per farlo basta invertire i ruoli delle macchine e ottengo:

$$\boxed{\eta_1 = \eta_2}$$

- Rendimento macchine irreversibili

Ora prendo il caso in cui la prima macchina che lavora direttamente sia irreversibile e la seconda sia reversibile.

Come fatto precedentemente ricavo che rendimento1 = rendimento irreversibile

non è maggiore di rendimento₂ = rendimento reversibile. Poiché la prima macchina non può lavorare inversamente allora non è possibile dimostrare l'altra diseguaglianza, si ha quindi

$$\eta_{IRR} \leq \eta_{REV}$$

Entropia

In natura qualsiasi sistema fisico se lasciato a se stesso subisce spontaneamente delle variazioni che lo portano ad uno stato di equilibrio, man mano che si avvicina all'equilibrio esso perde la capacità di compiere lavoro. Si prenda come esempio l'espansione spontanea di un gas, quest'ultimo una volta "diffuso" nell'ambiente perde la propria capacità di compiere lavoro, nessun processo spontaneo lo riporterà in un contenitore.

Vogliamo quindi introdurre una nuova funzione di stato l'Entropia che data la sua differenza tra i due stati (iniziale e finale) di un sistema ci dia indicazioni riguardo la perdita della capacità di compiere lavoro.

L'entropia poiché è una funzione di stato dipende solo dagli stati iniziali e finali e non dalla particolare trasformazione, tuttavia siamo in grado di calcolare tale variazione solo per trasformazioni reversibili.

Prendiamo il caso del ciclo di Carnot basato su un gas ideale si era ricavato che:

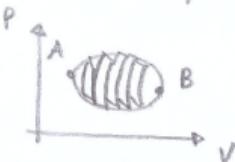
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\left| \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \right.$$

Poiché Q₁ è il calore assorbito dal sistema dalla sorgente T₁(+Q₁) e Q₂ è il calore ceduto alla sorgente T₂(-Q₂), considerando i segni si ha

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

Qualsiasi trasformazione reversibile ciclica può essere considerata come data dalla somma di cicli o Carnot infinitesimari ognuno dei quali dà un contributo:



$\frac{dQ}{T} \rightarrow$ Calore scambiato

$T \rightarrow$ Temperatura sorgente con cui si scambia calore

Si può quindi porre in generale per una trasformazione reversibile che (l'integrale di Clausius)

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$\oint \frac{dQ}{T} \rightarrow$ Integrale di Clausius

Con tale espressione si è espresso il concetto che la macchina di Carnot non ha variato la propria capacità di compiere lavoro

Circuitazione nel caso generale (integrale di Clausius)

In generale la circuitazione è data da

$T =$ Temperatura della sorgente

$$\oint \frac{dQ}{T}$$

≤ 0 TRASR REVERSIBILE
 < 0 TRASR IRREVERSIBILE

La circuitazione dell'entropia è nulla se avvengono trasformazioni reversibili, altrimenti è minore di zero

Definizione Entropia

L'entropia di un sistema in un determinato stato è:

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

$dQ =$ Calore scambiato
 $T =$ Temperatura del sistema

La sua variazione per una trasformazione reversibile è data

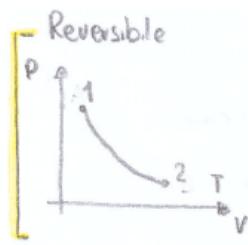
$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (\text{REV})$$

Passaggio da 1 → 2
reversibile

Entropia indipendente della trasformazione

Vediamo ora il fatto che la variazione dell'entropia del sistema non dipende dalla trasformazione.

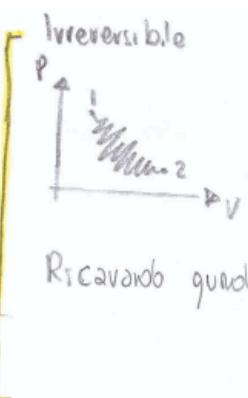
Calcolo ΔS per un isoterma reversibile e irreversibile



$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{1}{T} Q_{12}$$

$$\Delta S = \frac{L_{12}}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\begin{cases} dQ = Q - L \\ Q = L \\ L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{cases}$$



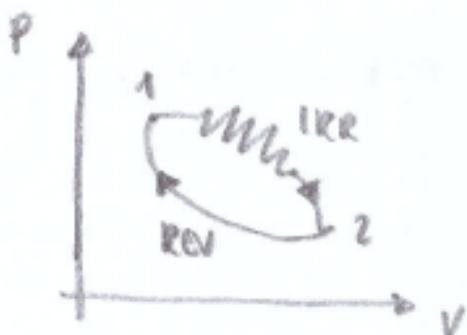
Poiché nel calcolo di ΔS contano solo gli stati 1 e 2
possiamo pensare tale trasformazione come se fosse
reversibile

Ricavando quindi il medesimo valore

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Disegualanza di Clausius

Consideriamo una trasformazione ciclica in cui si passa irreversibilmente da 1 a 2 e poi reversibilmente da 2 a 1



Posso scomporre l'integrale di Clausius in due parti

$$\int_{1 \text{ IRR}}^{2 \text{ IRR}} \frac{dQ}{T} + \int_{2 \text{ REV}}^{1 \text{ REV}} \frac{dQ}{T} \leq 0$$

INT CLAUSIUS

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Nel caso della trasformazione reversibile posso sostituire l'integrale con la variazione di entropia

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + (S_2 - S_1) \leq 0$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{dQ}{T} \leq S_2 - S_1}$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Caso trasformazione adiabatica

Consideriamo il nostro sistema isolato e che quindi non scambi calore con l'esterno, la diseguaglianza di Clausius è quindi

$$0 \leq S_2 - S_1$$

$$\boxed{S_2 \geq S_1}$$

Ciò significa che in generale l'entropia di un sistema isolato nella realtà aumenta sempre, non ci è variazione solo nel caso in cui la trasformazione è completamente reversibile

Variazione totale di Entropia (sistema + universo)

Trasformazione reversibile

Se si esegue una trasformazione reversibile passando dallo stato 1 allo stato 2, il sistema si appoggia all'universo circostante.

Quindi mentre il sistema varia la propria entropia, l'universo fra lo stesso ma la sua variazione è uguale ed opposta a quella del sistema:

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{SIST} - \Delta S_{UN} = 0$$

Si ha quindi una variazione totale di entropia nulla considerando (sistema + universo)

$$\Delta S_{\text{TOT}} = 0$$

Trasformazione irreversibile

In tal caso il sistema varia naturalmente il proprio stato, senza il supporto dell'universo.

Il sistema quindi varia la propria entropia al contrario dell'universo che non subisce variazioni.

Quindi si ha una variazione totale di entropia maggiore di zero

$$\Delta S_{\text{TOT}} = \Delta S_{\text{SIST}}$$

$$\Delta S_{\text{TOT}} > 0$$

Variazione di entropia di un gas ideale

Vediamo come calcolare la variazione di entropia nelle diverse trasformazioni studiate (Tali risultati sono validi anche per trasformazioni irreversibili)

In generale per un gas ideale si ha:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{du + dl}{T} = \int_1^2 \frac{n C_V dT + P dv}{T} \\ &= \int_1^2 \frac{n C_V dT}{T} + \frac{n R dv}{v} \quad | \quad PV = nRT \end{aligned}$$

$$\Delta S = n C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$du = dQ - dl$$

$$C_V = \frac{du}{dT}$$

Se C_V è il calore molare, per ricavare l'intera variazione di du per il gas, occorre moltiplicare per n (numero di mol).

Trasformazione isoterma

In tal caso non c'è variazione di temperatura e quindi $T_2 = T_1$

$$\Delta S = n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

ISOTERMA

Trasformazione isoterma

Il volume è costante $V_2 = V_1$

$$\Delta S_v = n C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

ISOCORA

Trasformazione isobara

In questa trasformazione si ha questa relazione

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\left| \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \right.$$

Quindi:

$$\Delta S_p = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \cdot [n(C_V + R)]$$

$$\boxed{\Delta S_p = n C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

$$C_p = C_V + R$$

ISO BARA

Trasformazione adiabatica

In questo caso

$$\delta Q = 0$$

Quindi

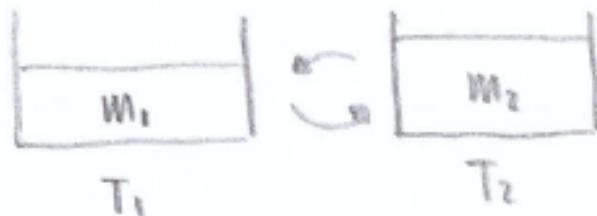
$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\boxed{\Delta S = 0}$$

ADIABATICA

Variazione di entropia nel mescolamento di due liquidi

Consideriamo due liquidi a temperature diverse T_1, T_2 con ($T_1 > T_2$) mescolandoli insieme raggiungono una temperatura T intermedia



Vogliamo calcolare la variazione di entropia, naturalmente essendo lo scambio di calore in questo spontaneo e quindi irreversibile mi aspetto che la variazione totale sia maggiore di zero

- 1° Bacinella ($T_1 \rightarrow T$)

$$\Delta S_{B_1} = \int_{T_1}^T \frac{dQ}{T} = C_1 m_1 \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} \quad \Delta S_{B_1} = C_1 m_1 \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad \left| \begin{array}{l} dQ = cm dT \\ \text{Calore Specifico} \end{array} \right.$$

- 2° Bacinella ($T_2 \rightarrow T$)

$$\Delta S_{B_2} = C_2 m_2 \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} \quad \Delta S_{B_2} = C_2 m_2 \ln\left(\frac{T}{T_2}\right)$$

Esempio ($c_1 m_1 = c_2 m_2$) $T_1 = 100$; $T_2 = 50$

Ricavo T :

$$T: \quad -Q_1 = +Q_2 \quad -C_1 m_1 (T - T_1) = C_2 m_2 (T - T_2)$$

Calore Ceduto

$$T_1 - T = T - T_2 \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 75 \text{ K}$$

La variazione totale sarà

$$\Delta S_{\text{TOT}} = \Delta S_{B_1} + \Delta S_{B_2} = CM \left[\ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T}{T_2}\right) \right] = CM \cdot 0,118 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Poiché $CM > 0$ la variazione totale di entropia è positiva come ci aspettiamo

Verifica diseguaglianza di Clausius

Troverò verificata anche la diseguaglianza di Clausius prendiamo come esempio la bacinella fredda T_2 : B2 assorbe calore

$$\left| \begin{array}{l} T = 75 \text{ K} \\ T_1 = 100 \text{ K} \\ T_2 = 50 \text{ K} \end{array} \right.$$

$$+Q = CM(T - T_2) = CM 25$$

Se consideriamo $CM = 1$

$$+Q = 25 \text{ J}$$

Quindi l'integrale di Clausius è pari a

$$\oint \frac{dQ}{T_{SORG}} = \frac{Q}{T_1} = 0,25 \text{ J/K} \quad \left| \begin{array}{l} \text{In questo caso la} \\ \text{sorgente e' } T_1 \end{array} \right.$$

La variazione di entropia per la 2° bacinella è

$$\Delta S_{B2} = C_2 m_2 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 0,406 \text{ J/K} \quad \left| \begin{array}{l} C_2 m_2 = C_1 m_1 = Cm = 1 \end{array} \right.$$

Inoltre

E' quindi verificata la diseguaglianza di Clausius

$$0,25 < 0,406$$

DISEGUAGLIANZA DI CLAUSIUS

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq \Delta S$$

Stati gassoso e liquidi della materia

- ✓ **Gas perfetto** modello di gas reale ad alte rarefazioni e temperature, di equazione:

$$pV = nRT.$$

Atomi come sfere infinitesime, non interagenti, se non nell'urto (elastico). Pressione, come variazione per unità d'area e di tempo della quantità di moto sulle pareti:

$$p = \frac{2}{3}n\frac{1}{2}mv^2.$$

Energia media e interna per grado di libertà (prima di traslazione, poi qualunque: equipartizione):

$$\bar{E} = \frac{1}{2}kT \quad , \quad U = (nN_A)\frac{1}{2}kT \cdot f.$$

- ✓ **Energia interna:** $U = U(T)$ (esperienza di Joule: espansione libera) e $dU = cvdT$.

- ✓ **Calori molari:** $\bar{C}_p - \bar{C}_v = R$

- ✓ **Trasformazioni adiabatiche reversibili:** $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$; $pV^\gamma \approx \text{cost}$.

- ✓ **Gas monoatomico:** $f = 3$; $U = \frac{3}{2}RT$ (per mole); $cv = \frac{3}{2}R$; $c_p = \frac{5}{2}R$; $\gamma = 1,67$.

- ✓ **Gas biatomico:** $f = 7$; $U = \frac{7}{2}RT$ (per mole); $cv = \frac{7}{2}R$; $c_p = \frac{9}{2}R$; a temperature ordinarie: $cv = \frac{5}{2}R$; $c_p = \frac{7}{2}R$; $\gamma = 1,4$.

- **Interpretazione quantistica:** ogni grado di libertà possiede energia su livelli discreti, distanziati di ΔE . Se $\frac{1}{2}kT < \Delta E$, il grado di libertà corrispondente è *congelato*, non contribuisce a scambi energetici.

Quantizzazione dei gradi di libertà:

vibrazione: $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\nu, \quad \Delta E = \hbar\nu;$

rotazione: $E = \frac{\hbar^2}{I}j(j+1), \quad \Delta E \approx 2\frac{\hbar^2}{I}j$

traslazione: $\Delta E \rightarrow 0$ in dipendenza delle dimensioni del recipiente.

- **Distribuzione velocità ed energia a T fissa:**

$$N(v) \propto \frac{N}{T^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} v^2 \quad (\text{Maxwell});$$

$$n(\epsilon) \propto g(\epsilon) \frac{N}{T^{3/2}} e^{-\epsilon/2kT} \quad (\text{Maxwell-Boltzmann}), \text{ con } g(\epsilon), \text{ densità degli stati.}$$

- **Calori specifici quantistici:** la distribuzione statistica per insiemi di oscillatori (o vibratori) quantistici si ottiene per sistemi quantistici (basse o bassissime temperature):

$$(C_v)_{\text{vibr.}} = R \left(\frac{\theta_{\text{vibr.}}}{T} \right)^2 e^{-\theta_{\text{vibr.}}/T}.$$

Interpretazioni della teoria cinetica

Diffusione (di particelle in un fluido), proporzionalità tra quadrato della distanza e tempo di diffusione. **Evaporazione**, passaggio allo stato di vapore, attraverso la superficie libera del liquido, delle molecole più energetiche, con raffreddamento del liquido. **Ebolizione**, evaporazione violenta, per egualianza tra tensione di vapor saturo e pressione esterna.

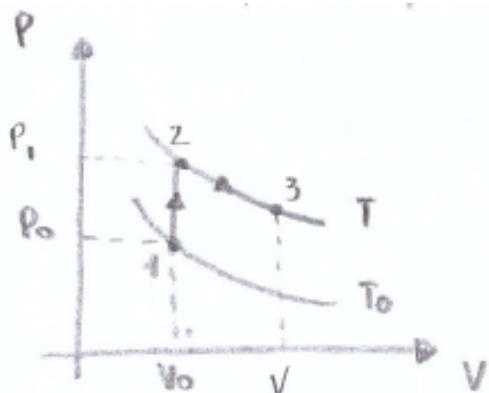
- ✓ **Gas reali:** particelle interagenti, dotate di volume proprio, seguono l'equazione di stato

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (\text{Van der Waals})$$

con b , volume proprio occupato da una mole (a disposizione: $V - b$); a/V^2 , termine di proporzionalità col quadrato della densità di molecole.

- ✓ **Tensione superficiale**, per interazione ridotta delle molecole sulla superficie $\sigma = F/2l = L/2S$. Fluido a contatto con parete e capillarità (menisco, concavo e convesso).

Le nozioni precedenti erano più o meno generali, ora vediamo il caso particolare dei sistemi termodinamici costituiti da gas perfetti, nella realtà essi si possono considerare tali se molto rarefatti



1. ISOCORA (Passo da 1 a 2)

$$P_1 = P_0 \frac{T}{T_0}$$

2. ISOTERMA (Da 2 a 3)

$$P_1 V_0 = P V$$

Eliminando P_1 si ottiene:

$$P_0 \frac{T}{T_0} = \frac{P V}{V_0}$$

$$\frac{P V}{T} = P_0 \frac{V_0}{T_0}$$

Il secondo membro è una costante, essa può essere posta:

$$P_0 \frac{V_0}{T_0} = n R$$

L'equazione si pone quindi:

n = numero di moli

R = Costante universale per i gas

$$R \approx 8,31$$

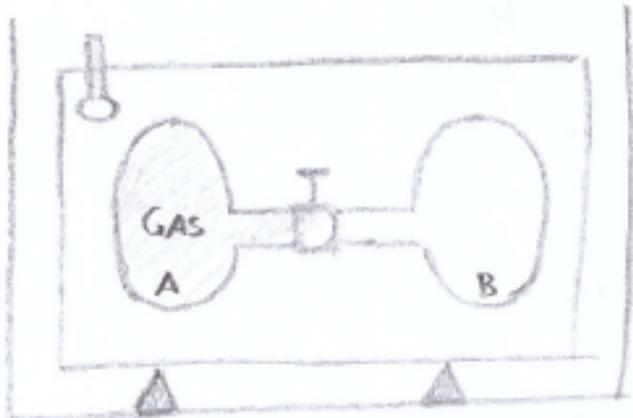
$$P V = n R T$$

1 mole è la quantità di sostanza che contiene un numero molecolare pari alla costante di Avogadro (N_A)

$$N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$$

Energia interna di un gas perfetto

Tramite la seguente esperienza detta esperienza di joule si deduce che l'energia cinetica di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura



Consideriamo un sistema isolato termicamente costituito da due contenitori A e B immersi in un fluido conduttore (es acqua)

I due contenitori sono divisi da una valvola, nel contenitore A è presente un gas molto rarefatto (ideale), quello B è vuoto.

All'apertura della valvola si nota che la temperatura del sistema non varia in relazione all'espansione del gas

Applicando il 1° principio si ha:

$$\Delta U = Q - L = 0$$

1° PRINCIPIO

$$\Delta U = Q - L$$

La quantità di calore Q è nulla poiché non c'è variazione di temperatura, il lavoro è nullo dato che nel contenitore B vi è il vuoto.

Quindi l'energia interna del sistema è rimasta invariata.

Nel caso di un gas l'energia interna è funzione di pressione, volume e temperatura $[U(P,V,T)]$ se la pressione la si mette in funzione al volume e temperatura si ha $U(P,V,T) = U[P(V,T),V,T] = U(V,T)$

Poiché $U(V,T)$ è una funzione di stato si può quindi differenziarla

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad \left| \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \right. = \begin{array}{l} \text{Derivato di } U \text{ rispetto} \\ \text{a } T, \text{ mantenendo } V \text{ costante} \end{array}$$

DIFERENZIALE

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Poiché $dU = 0$; e $dT = 0$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 0$$

Dato che $dV \neq 0$, poiché il gas ha cambiato volume si ricava che U non varia in relazione alla variazione di volume

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$$

Si ricava quindi che l'energia interna di un gas ideale è funzione unicamente della temperatura

$$U(T)$$

Trasformazioni gas perfetti

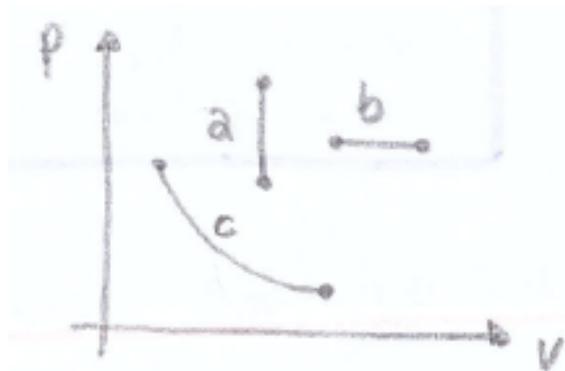
In termologia abbiamo ricavato

$$Q = cm(t_2 - t_1) = C_T(t_2 - t_1)$$

Il prodotto cm lo abbiamo chiamato Capacità termica (C_T).

Successivamente attraverso Joule abbiamo dedotto che il lavoro e di conseguenza la quantità di calore Q , dipendono dal tipo di trasformazione eseguita.

Data la precedente relazione si intuisce che anche C_T , dipende dal tipo di trasformazione.



Nel grafico accanto (Piano di Clapeyron) sono raffigurate tre diverse trasformazioni:

- Isocora (Volume costante)
- Isobara (Pressione costante)
- Isoterma (Temperatura costante)

Vediamo ora queste tre trasformazioni per un gas ideale e come in base ad esse variano i lavori eseguiti e la capacità termica

OSS

La capacità termica se calcolata per $m=1\text{ kg}$ restituisce il CALORE SPECIFICO, se calcolata per una mole $m=M$ restituisce il CALORE MOLARE

Trasformazione isocora

In tal caso il gas è mantenuto a volume costante e di conseguenza il lavoro è nullo, la capacità termina la indichiamo con C_V .

Dall'espressione ricavata in termologia e dal 1° principio si ha

$$dQ = C_V dT$$

$$dQ = dL + du$$

1° PRINCIPIO

$$du = dQ - dL$$

Da cui

$$C_V dT = dL + du \quad | \quad dL = P dv$$

Poiché non c'è variazione di volume il lavoro è nullo

Quindi in questo caso tutte le relazioni valide sono

$$C_V = \left(\frac{du}{dT} \right)_V$$

$$L = 0$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0}$$

Trasformazione isobara

In tale trasformazione la pressione è costante

L'equazione di stato di un gas ideale per 1 mole è:

$$PV = RT$$

Derivandola si ottiene:

$$d(PV) = d(RT) \quad dp \cdot V + P \cdot dv = R \cdot dt \quad Pdv = Rdt$$

EQ GENERALE

$$PV = nRT$$

$$n = \frac{m}{M} \rightarrow \text{kg} \rightarrow \text{mole}$$

$$n = \frac{1000}{1000} = 1$$

$$dp = 0$$

Come fatto nel caso precedente

$$C_p dT = P dv + du \quad C_p dT = R dT + C_v dT$$

Lavoro

In questo caso si ha:

$$L = \int_1^2 \delta L = \int_1^2 P dv = P(v_2 - v_1)$$

$$\begin{cases} \delta Q = C_p dT \\ \delta Q = \delta L + du \\ C_v = \frac{du}{dT} \end{cases}$$

$$\delta L = P dv$$

Riassumendo abbiamo che

$$C_p = R + C_v$$

$$L = P(v_2 - v_1)$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

Trasformazione isotermica

In tal caso non si ha variazione di temperatura, in tal caso la capacità termica tende a $+\infty$ infatti si ha

$$\frac{Q}{\delta Q} = C_T \quad (C_T \rightarrow +\infty)$$

$$Q = C_T \Delta T$$

Lavoro

Il lavoro in questa trasformazione e' dato da:
(usando l'equazione dei gas)

EQ GAS

$$PV = nRT$$

$$L = \int_1^2 \delta L = \int_1^2 P dv = \int_1^2 \frac{nRT}{v} dv \quad | P = \frac{nRT}{v} \quad | \delta L = P dv$$

Da cui:

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Quindi

$$C_T \rightarrow +\infty$$

$$L = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$PV = P_0 V_0$$

Trasformazione Adiabatica

Un ulteriore tipo di trasformazione è quella adiabatica in cui il sistema non scambia calore con l'esterno ($Q = 0$)

Ricaviamo qui l'espressione per tale trasformazione (Ovviamente in tal caso la capacità termica è nulla)

Dal 1° principio si ha

$$dU + dL = 0 \quad C_V dT + P dv = 0$$

1° PRINCIPIO

$$dU = dQ - dL$$

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

$$dL = P dv$$

EQ GAS

$$PV = nRT$$

1 R kilomole

$$PV = RT$$

Riprendendo l'equazione dei gas (per 1 mole) si ha:

$$d(PV) = d(RT) \quad dP \cdot V + P dv = R dT$$

$$dT = \frac{dP \cdot V}{R} + \frac{P dv}{R}$$

Sostituendo dT nella precedente equazione

$$C_V \left(\frac{dP \cdot V + P dv}{R} \right) + P dv = 0$$

$$\begin{cases} C_V dT + P dv = 0 \\ dT = \frac{dP \cdot V + P dv}{R} \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{C_V dP \cdot V}{R} + P dv \left(\frac{C_V + R}{R} \right) = 0 \quad C_V dP \cdot V + P dv \cdot C_P = 0$$

$$C_P = C_V + R$$

Globalmente

$$\int C_V \frac{dP}{P} + \int C_P \frac{dv}{V} = \text{Costante} ; \quad C_V \ln(P) + C_P \ln(V) = \text{Costante}$$

$$\ln(P) + \frac{C_P}{C_V} \ln(V) = \text{Costante} ; \quad PV^{\frac{C_P}{C_V}} = e^{\text{Costante}} = \text{Costante} \quad \begin{cases} a \ln(b) = \ln(b^a) \\ \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b) \end{cases}$$

Lavoro

Anche se non lo abbiamo ricavato, il lavoro in tal caso è:

$$L = \int_1^2 dL = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Quindi

$$C_{aa} = 0$$

$$L = -\Delta U$$

$$P V^{\frac{C_p}{C_v}} = \text{cost}$$

Trasformazione Politropica

Tutte le precedenti trasformazioni possono essere riassunte nelle seguenti equazioni

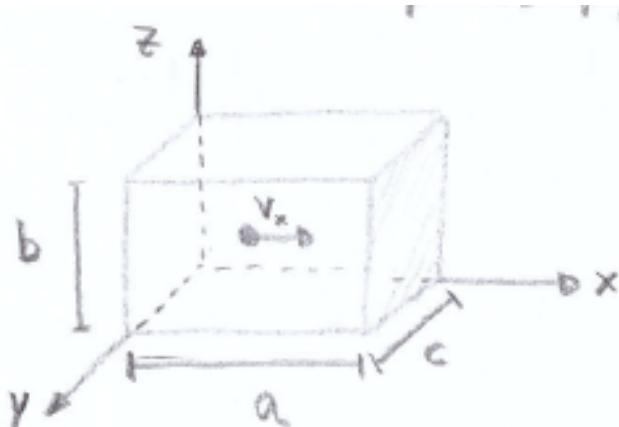
$$P V^K = \text{cost}$$

$$C_K = C_V + \frac{R}{1-K}$$

K	TRASFORMAZIONE
0	P cost (ISOBARA)
1	T cost (ISOTERMA)
$\frac{C_p}{C_v}$	$dQ=0$ (ADIABATICA)
∞	V cost (ISOCORA)

Teorica cinetica dei gas ideali

Consideriamo un gas costituito da N molecole, ognuna delle quali da approssimarsi puntiformi, non vi sono quindi urti tra una molecola ed un'altra. Tramite la teoria cinetica riusciamo a mettere in relazione l'energia cinetica media di una molecola di un gas con la temperatura T del gas (espressa in gradi Kelvin)



Consideriamo un parallelepipedo contenente gas, studiamo il moto di una singola molecola e la sola componente x della sua velocità (V_x)

Durante un singolo urto elastico con la parete del contenitore, una singola molecola ha una variazione della quantità di moto pari a:

$$(\Delta P_m)_{\substack{1 \text{ molecola} \\ 1 \text{ urto}}} = m_i v_{xi} - (-m_i v_{xi}) = 2 m_i v_{xi}$$

QUANTITÀ DI MOMO
 $\vec{P}_m = m \vec{v}$

Dal Teorema dell'impulso si ha:

$$\Delta P_i = \int F_i dt$$

Quindi la forza totale applicata da una singola molecola in un'unità di tempo è data:

$$F_i = \Delta P_i \cdot f \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{Numero di urti} \\ \text{nell'unità di tempo} \end{matrix}$$

La frequenza può essere ricavata considerando il tempo impiegato da una molecola per attraversare il contenitore (lungo l'asse x) e tornare ($T = \text{Periodo}$)

$$\tau = \frac{2a}{v_{xi}}$$

$$v = \frac{s}{\tau}$$

La frequenza è quindi:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v_{xi}}{2a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{1}{\tau} \\ \tau = \frac{2a}{v_{xi}} \end{array} \right.$$

La forza totale applicata sulla parete dalle N molecole è quindi:

$$F = \sum_i^N F_i = \sum_i^N \Delta P_i \cdot f = \sum_i^N \left(m_i \frac{v_{xi}^2}{a} \right)$$

$$\Delta P_i = 2 m_i v_{xi}$$

La pressione esercitata sul lato A(b c) sarà

$$P = \sum_i^N \left(m_i \frac{v_{xi}^2}{a} \cdot \frac{1}{b \cdot c} \right) = \sum_i^N \left(\frac{m_i v_{xi}^2}{V} \right)$$

$$\left\{ P = \frac{F}{S} \right.$$

Considerando una velocità media

$$\bar{v}_x^2 = \frac{\sum v_{xi}^2}{\sum N_i}$$

E poiché le molecole hanno tutte la medesima massa m

Si ha:

$$P = N \left(\frac{m \bar{v}_x^2}{V} \right)$$

$$PV = N m \bar{v}_x^2$$

Dato che ogni molecola ha la medesima probabilità di muoversi lungo un asse (x, y, z):

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{\bar{v}^2}{3}$$

$$PV = N m \frac{\bar{v}^2}{3}$$

$$PV = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right)$$

ENERGIA CINETICA

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

$PV = \frac{2}{3} N \bar{E}$

\bar{E} = Energia cinetica media
di una molecola

Per esprimere tale equazione mediante la temperatura del gas usiamo l'equazione dei gas

$$nRT = \frac{2}{3} N \bar{E}$$

$$nRT = \frac{2}{3} n N^P \bar{E}$$

$$N = n N^P$$

EQ GAS

$$PV = nRT$$

$$N^P = 6 \cdot 10^{23}$$

n = numero mol
 R = costante Gas

Quindi

$$\bar{E} = \frac{3}{2} \frac{R}{N^{\circ}} T$$

Energia cinetica
media di una molecola

$$\bar{E} = \frac{3}{2} k T$$

k = Costante di Boltzmann	N = Numero Molecole
$k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$	n = Numero mol,
T = Temperatura GAS (kelvin)	N° = Costante Avogadro
	N° = Numero molecole Contenute in 1 mole

Energia Gas reali

Nel calcolo dell'energia cinetica, il numero 3 si riferisce alle 3 direzioni possibili e quindi ai gradi di libertà della molecola puntiforme (x,y,z)

In generale si ha:

$$\bar{E} = f \frac{1}{2} k T$$

| f = Gradi di libertà

L'energia interna del gas (U) può quindi essere scritta come la somma delle energie cinematiche medie di ognuna delle N molecole

$$U = N \bar{E} = N f \frac{1}{2} k T$$

| N molecole

Per 1 mole di sostanza si ha:

$$U = n N^{\circ} f \frac{1}{2} k T$$

$$U = f \frac{1}{2} R T$$

| 1 mole

$N = n N^{\circ}$
n = Numero mol
$n = 1$
$\frac{R}{N^{\circ}} = k$

Calore molare per Gas reali

Dai risultati della capacità termica dei gas ideali per ogni trasformazione, se per tale capacità viene considerata per 1 kg, riesco a ricavarmi il calore specifico;

Se considero per 1 mole, il calore molare

Si può vedere come variano i calori molare in relazione ai gradi di libertà

So che l'energia interna U per 1 mole è data da:

$$U = f \frac{1}{2} R T$$

Trasformazione Isocora

Il calore molare C_V , poiché legato ad U è dato da:

$$C_V = \frac{du}{dT} = \frac{d(f \frac{1}{2} RT)}{dT}$$

$$C_V = f \frac{R}{2}$$

Calore molare
ISOCORA

Trasformazione Isobara

Poiché il calore molare C_P è legato a C_V , si ha:

$$C_P = f \frac{R}{2} + R$$

$$C_P = \frac{(f+2)}{2} R$$

Calore molare
ISOBARA

$$C_P = C_V + R$$

Ora vediamo come variano tali valori per due tipi di gas reali

- Gas con molecole monoatomiche

In questo caso le molecole possono considerarsi puntiformi e quindi come se fossero gas ideali (es: elio He, o vapori di mercurio Hg)

Si ha allora ($f = 3$)

$$U = \frac{3}{2} R T$$

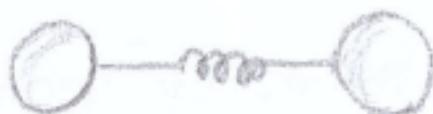
$$C_V = \frac{3}{2} R$$

$$C_P = \frac{5}{2} R$$

CALORI MOLARI - MONOATOMICI

- Gas con molecole biatomiche

Considero un gas reale avente le molecole costituite da due atomi



In tal caso i gradi di libertà f aumentano

Il legame tra i due atomi lo raffigurano tramite una molla, poiché si possono avvicinare, ma poi si respingono.

I modi in cui la molecola può distribuire energia sono:

(+3) - Traslazione: In tal caso i gradi di libertà sono 3

$$\left[\text{Energia} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) \right]$$

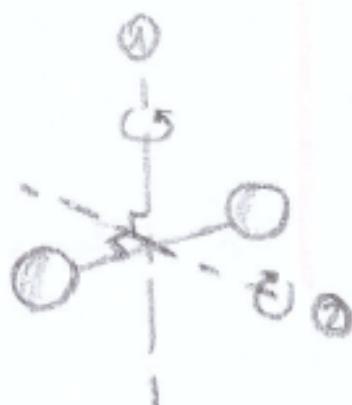
(+2) - Rotazione: Gli atomi possono ruotare rispetto a due assi, i gradi di libertà sono quindi 2

$$[\text{Energia} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} I_x \omega_x^2 \right)]$$

(+2) - Vibrazione: In tal caso vi è un unico "modo di vibrare" ma ad esso corrispondono l'energia cinetica e potenziale rispetto al legame (nullo), quindi si hanno 2 gradi di libertà:

$$[\text{Energia} = 1 \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} C s^2 \right)]$$

ENERGIA POT. NELLA
 $\frac{1}{2} C s^2$
 Gestione
elastica \rightarrow Spostamento



Dal TEOREMA DI MAXWELL di equipartizione di energia
 Ognuno dei precedenti termini che esprimono l'energia sono uguali.
 Sono tutti: $\frac{1}{2} kT$

Quindi poiché vi sono in totale 7 gradi di libertà

$$U = \frac{7}{2} RT$$

$$C_V = \frac{7}{2} R$$

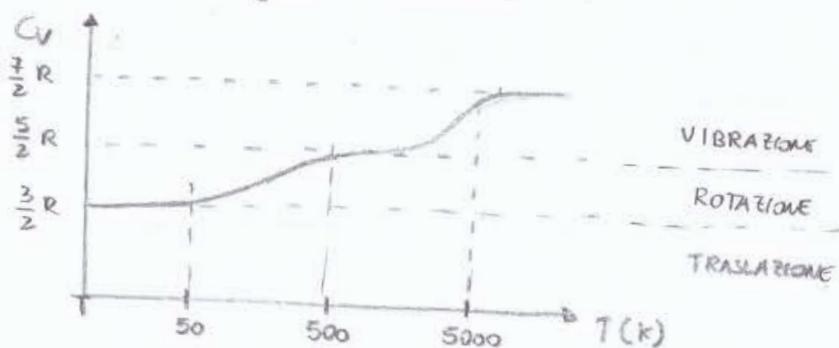
$$C_P = \frac{9}{2} R$$

GAS BIATOMICO AD ALTE TEMPERATURE

N.B.

I valori ricavati precedentemente sono verificati sperimentalmente
Sop ad alte temperature, in altri casi sono minori, e' come se alle
basse temperature alcuni modi per distribuire energia non siano possibili

Il calore molare C_V segue il seguente andamento



La motivazione c' è data dalla teoria quantistica