

P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

Dipartimento di Fisica Galileo Galilei Padova

FISICA

Vol. II

ELETTROMAGNETISMO – ONDE

SECONDA EDIZIONE

EdiSES

P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci
FISICA – Vol. II Seconda edizione
Copyright © 1991, 1998, EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2002 2001 2000 1999 1998

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

STOP

A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. – Napoli

Fotoincisione: Centro DMS – Napoli

Stampato presso la
Sograte s.r.l. – Zona Ind. Regnano
Città di Castello (PG) – Tel. 075/8518004

per conto della
EdiSES – Napoli Via Nuova San Rocco 62/A – P.co Soleado
Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705

ISBN 88 7959 152 5

Indice generale

Capitolo 1	Forza elettrica.			
	Campo elettrostatico	1	3.6	Riepilogo sulle operazioni di gradiente, rotore, divergenza
1.1	Cariche elettriche. Isolanti e conduttori	1		86
1.2	Struttura elettrica della materia	3		
1.3	Misura delle cariche elettriche. Legge di Coulomb	5		
1.4	Campo elettrostatico	11	4.1	Conduttori in equilibrio
1.5	Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di carica	14	4.2	Capacità di un conduttore isolato
1.6	Linee di forza del campo elettrostatico	20	4.3	Conduttore cavo. Schermo elettrostatico
1.7	Moto di una carica in un campo elettrostatico. Esperienza di Rutherford	21	4.4	Sistemi di conduttori
1.8	Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan	25	4.5	Condensatori
1.9	Commenti conclusivi	27	4.6	Collegamento di condensatori
			4.7	Energia del campo elettrostatico
			4.8	Energia di un sistema di cariche
			4.9	Forza tra le armature di un condensatore.
				Pressione elettrostatica
			4.10	Il metodo delle cariche immagini
			4.11	Funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet
Capitolo 2	Lavoro elettrico.	29		
	Potenziale elettrostatico			
2.1	Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale	29	Capitolo 5	Dielettrici
2.2	Calcolo del potenziale elettrostatico	31	5.1	La costante dielettrica
2.3	Energia potenziale elettrostatica	35	5.2	Polarizzazione dei dielettrici
2.4	Il campo come gradiente del potenziale	45	5.3	Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato
2.5	Superficie equipotenziali	51	5.4	Campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato
2.6	Rotore di un campo vettoriale. Teorema di Stokes. Applicazione al campo elettrostatico	52	5.5	Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Il vettore induzione dielettrica
2.7	Il dipolo elettrico	57	5.6	Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico. Mezzi isotropi e anisotropi
2.8	Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo	59	5.7	Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due dielettrici
2.9	La forza su un dipolo elettrico	62		141
Capitolo 3	La legge di Gauss	68	5.8	Campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico
3.1	Flusso del campo elettrico. Legge di Gauss	68	5.9	L'energia elettrostatica nei dielettrici
3.2	Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss	72	5.10	Meccanismi di polarizzazione nei dielettrici isotropi
3.3	Campo elettrostatico nell'intorno di uno strato superficiale di carica	78	5.11	La costante dielettrica dei liquidi.
3.4	Legge di Gauss in forma differenziale. Divergenza di un campo vettoriale	79	5.12	Equazione di Clausius-Mossotti
3.5	Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace	82		Cenno ai meccanismi di polarizzazione nei solidi
				145
				147
				152
				158
				160

Capitolo 6	Corrente elettrica	161	Capitolo 9	Proprietà magnetiche della materia	269
6.1	Conduzione elettrica	161	9.1	Magnetizzazione della materia	269
6.2	Corrente elettrica	164	9.2	Permeabilità magnetica e suscettività magnetica	271
6.3	Legge di conservazione della carica.	166	9.3	Correnti amperiane e magnetizzazione	274
6.4	Regime di corrente stazionaria	168	9.4	Equazioni generali della magnetostatica.	
	Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm			Il campo H	276
6.5	Legge di Ohm per i conduttori metallici.	171	9.5	Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati.	
	Resistenza elettrica. Effetto Joule	179		Campi all'interno di una cavità	282
6.6	Resistori in serie e in parallelo	181	9.6	Confronto tra le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi omogenei indefiniti	
6.7	Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata	186		Sostanze ferromagnetiche	287
6.8	Il generatore Van der Graaf	188	9.7	Circuiti magnetici	289
6.9	Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore	192	9.8	Elettromagneti, magneti permanenti	292
6.10	Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche	195	9.9	Correnti elettriche e momenti magnetici atomici	295
6.11	Alcuni circuiti particolari in corrente continua	199	9.10	Teoria microscopica classica del diamagnetismo e del paramagnetismo	302
6.12	Calcolo della resistenza di conduttori tridimensionali	200		Cenno alla teoria del ferromagnetismo	307
6.13	Conduzione elettrolitica	205	9.12		313
6.14	Pile e accumulatori				
Capitolo 7	Forza magnetica.		Capitolo 10	Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo	
	Campo magnetico	208			318
7.1	Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica	208	10.1	Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica	319
7.2	Linee di forza del campo magnetico.	212	10.2	Origine fisica della forza elettromotrice indotta	321
	Legge di Gauss per il campo magnetico	214	10.3	Applicazioni delle leggi di Faraday	328
7.3	Forza magnetica su una carica in moto	218	10.4	Legge di Felici. Misure di campo magnetico	335
7.4	Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente	221	10.5	Autoinduzione	337
7.5	Momenti meccanici su circuiti piani.	224	10.6	Energia magnetica	340
	Principio di equivalenza di Ampère	230	10.7	Pressione magnetica. Forze su corpi magnetizzati	346
7.6	Espressioni di forza, momento e lavoro tramite il flusso magnetico	232	10.8	Induzione mutua	350
7.7	Effetto Hall		10.9	Energia magnetica di circuiti accoppiati	351
7.8	Esempi di moti di particelle caricate in campo magnetico uniforme		10.10	Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell	357
			10.11	Equazioni di Maxwell	361
Capitolo 8	Sorgenti del campo magnetico.		Capitolo 11	Oscillazioni elettriche.	
	Legge di Ampère	240		Correnti alternate	
8.1	Campo magnetico prodotto da una corrente	240	11.1	Oscillazioni smorzate in un circuito <i>RLC</i>	366
8.2	Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari	243	11.2	Oscillazioni permanenti in un circuito <i>RLC</i>	371
8.3	Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente	250	11.3	Circuiti in corrente alternata. Impedenza	374
8.4	Legge di Ampère	252	11.4	Metodo simbolico per i circuiti in corrente alternata	382
8.5	Flusso tra circuiti. Autoflusso	258	11.5	Alcune applicazioni	387
8.6	Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto	261	11.6	Potenza in regime alternato	392
8.7	Potenziale vettore	263	11.7	Generatori e motori	395
8.8	Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici	267			

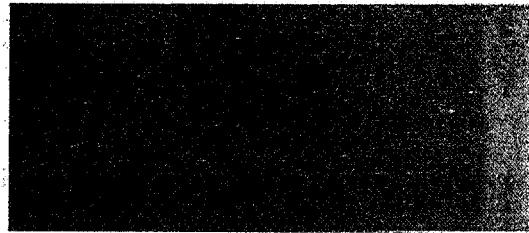
Problemi di Elettromagnetismo	399	14.6	Propagazione di un'onda piana elettromagnetica in un mezzo anisotropo	562
Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo. Risultati numerici	420	14.7	Applicazioni della birifrangenza	567
		14.8	Birifrangenza elettrica, magnetica e meccanica	574
		14.9	Attività ottica	575
		14.10	Riflessione su una superficie metallica	577
Capitolo 12 Fenomeni ondulatori	443	Capitolo 15 Interferenza	578	
12.1 Descrizione di un'onda. Equazione differenziale delle onde piane	443	15.1	Somma di onde. Fenomeni di interferenza. Sorgenti coerenti e incoerenti	578
12.2 Richiamo sulle onde elastiche	446	15.2	Interferenza prodotta da due sorgenti. Caso delle onde hertziane e delle onde sonore	581
12.3 Onde piane armoniche	457	15.3	Interferenza di due onde luminose. Esperimento di Young	587
12.4 Analisi di Fourier	459	15.4	Applicazioni del metodo di Young	594
12.5 Onde longitudinali. Onde trasversali. Polarizzazione	461	15.5	Interferenza prodotta da N sorgenti coerenti	597
12.6 Onde sulla superficie di un liquido	463	15.6	Interferenza delle onde luminose su lame sottili	602
12.7 Propagazione dell'energia. Intensità di un'onda	465	15.7	Interferenza con riflessioni e trasmissioni multiple	611
12.8 Intensità delle onde sonore. Battimenti	469	15.8	Onde stazionarie in una corda tesa	612
12.9 Onde in più dimensioni	474	15.9	Onde stazionarie in una colonna di gas	618
12.10 Pacchetti d'onde	480	15.10	Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz	620
12.11 Velocità di fase e velocità di gruppo	483	15.11	Onde stazionarie bidimensionali e tridimensionali. Radiazione di cavità	622
12.12 Effetto Doppler. Onda d'urto	487	15.12	Cavità risonanti. Guide d'onda	627
Capitolo 13 Onde elettromagnetiche	490	Capitolo 16 Diffrazione	631	
13.1 Onde elettromagnetiche piane	490	16.1	Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel	631
13.2 Polarizzazione delle onde elettromagnetiche piane	495	16.2	Diffrazione ad una fenditura rettilinea	632
13.3 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting	498	16.3	Diffrazione ad un foro circolare e da parte di un disco opaco	636
13.4 Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione	502	16.4	Limite di risoluzione delle lenti	638
13.5 Onde elettromagnetiche piane, sferiche, cilindriche	505	16.5	Reticolo di diffrazione	641
13.6 Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante	507	16.6	Potere dispersivo e potere risolutivo di un reticolo di diffrazione	644
13.7 Radiazione emessa da una carica elettrica in moto accelerato	511	16.7	Spettroscopia con il reticolo di diffrazione	647
13.8 Radiazione emessa dagli atomi. Diffusione della luce	514	16.8	Fenomeni di diffrazione di Fresnel	651
13.9 Propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo dielettrico. Dispersione	518	16.9	Olografia	655
13.10 Onde elettromagnetiche nei conduttori	525	16.10	Diffrazione dei raggi X	658
13.11 Effetto Doppler. Effetto Cerenkov	528			
13.12 Spettro delle onde elettromagnetiche	531			
13.13 La velocità della luce	536			
Capitolo 14 Riflessione e rifrazione delle onde	539	Capitolo 17 Ottica geometrica	662	
14.1 Introduzione	539	17.1	Leggi della riflessione e della trasmissione	662
14.2 Teorema di Kirchhoff. Principio di Huygens-Fresnel	539	17.2	Definizioni e convenzioni	664
14.3 Le leggi della riflessione e della rifrazione	542	17.3	Specchi	665
14.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte. Formule di Fresnel	548	17.4	Diotri	670
14.5 Riflessione e rifrazione di onde elastiche	560	17.5	Lenti sottili	673

17.6 Lenti spesse. Sistemi diottrici centrati	677	Capitolo 19 Proprietà degli elettroni nei solidi	724
17.7 Aberrazioni	681	19.1 Introduzione	724
17.8 Strumenti ottici. L'occhio	683	19.2 Struttura elettronica degli atomi	724
17.9 Dispersione. Prisma	686	19.3 Legami nelle molecole e nei solidi.	
17.10 Il principio di Fermat	689	Bande di energia	730
17.11 Note e commenti	690	19.4 Il gas di elettroni liberi di Fermi	736
		19.5 Gas di elettroni all'interno di un reticolo	
		cristallino	741
		19.6 Conduttori e isolanti. Semiconduttori	743
		19.7 Superconduttività	749
		19.8 Effetto Volta. Effetti termoelettrici	752
Capitolo 18 Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia	692	Problemi di Onde	757
18.1 Introduzione	692	Guida alla risoluzione dei problemi	
18.2 Radiazione termica. Corpo nero	692	di Onde. Risultati numerici	769
18.3 Legge di Planck	696		
18.4 Effetto fotoelettrico	698		
18.5 Effetto Compton. Produzione di coppie	702		
18.6 Righe spettrali. Modello di Bohr.		Indice analitico	783
Livelli energetici	707		
18.7 Onde materiali. Relazione di de Broglie	713		
18.8 Il principio di indeterminazione	717		

ELETTRONAGNETISMO



Forza elettrica. Campo elettrostatico



1.1 Cariche elettriche. Isolanti e conduttori

Tra le interazioni fondamentali esistenti in natura la prima ad essere scoperta e studiata quantitativamente è stata l'interazione gravitazionale, responsabile di gran parte dei fenomeni che si osservano su scala macroscopica nell'universo. Il moto dei pianeti attorno al sole come il moto rispetto alla terra, sia di un corpo qualsiasi che di un satellite artificiale, sono regolati dalla *legge di Newton* che fornisce, per il modulo della forza gravitazionale, l'espressione

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} : \quad (1.1) \quad \text{Legge di Newton}$$

due corpi di masse m_1 e m_2 , posti a distanza r molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, interagiscono con una forza attrattiva la cui intensità è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Le masse dei corpi, da cui dipende l'interazione, possono essere assunte eguali alle masse inerziali, cioè a quelle che compaiono nelle legge del moto $F = ma$. La costante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, che descrive l'intensità dell'interazione, è *universale*: il suo valore è indipendente sia dal valore che da qualsiasi altra caratteristica delle masse interagenti. Alcune conseguenze importanti di (1.1) sono esposte nel capitolo 5 del primo volume.

Un'altra *interazione* fondamentale, che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia, è quella *elettromagnetica*, le cui leggi vennero formulate in modo quantitativo tra la fine del settecento e la metà dell'ottocento. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la *forza elettrica*: le sue proprietà costituiscono l'argomento dei primi capitoli di questo volume.

L'osservazione di fenomeni legati alla forza elettrica, ovvero di natura elettrica, risale al settimo secolo a.C., quando si scoprì che l'ambra, l'ebanite e altri materiali, strofinati con un panno di lana, acquistano la proprietà di attirare corpuscoli leggeri, quali granelli di polvere e pagliuzze. Queste osservazioni, tramandate inalterate per oltre venti secoli, vennero riprese nel sedicesimo secolo da W. Gilbert il quale, attraverso un'analisi sistematica, individuò tutta una serie di sostanze, dal diamante al vetro e allo zolfo, che presentano lo stesso comportamento. Egli chiamò *elettrizzati* i materiali che acquistavano la proprietà di attirare i corpuscoli leggeri e *forza elettrica* la forza che si manifestava (dal termine *electron*, che è il nome greco dell'ambra).

Oggi noi attribuiamo le forze in parola a *cariche elettriche*, che preesistono nei corpi e che passano da un corpo all'altro durante lo strofinio, per cui i *corpi elettrizzati* si chiamano anche *elettricamente carichi*.

Questi corpi che si caricano per strofinio sono detti *isolanti*, in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri, come ad esempio i metalli e il corpo umano stesso, non trattengono la carica e sono detti *conduttori*; in effetti, se proviamo a strofinare con un panno una bacchetta di metallo, constatiamo che esso non si elettrizza.

Il metodo dell'elettrizzazione per strofinio può essere applicato sistematica-

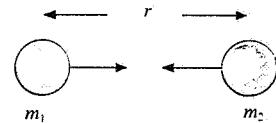


Figura 1.1

Forza elettrica

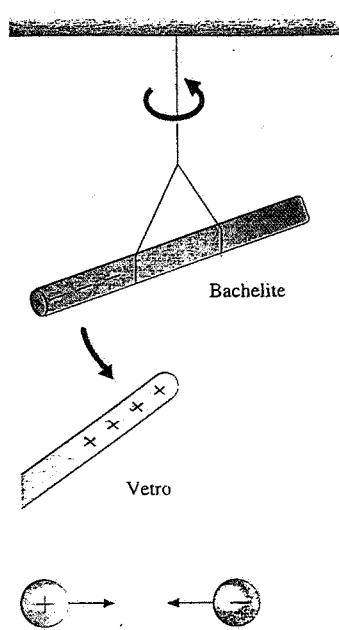


Figura 1.2

mente a un gran numero di materiali isolanti, tra cui anche i materiali sintetici attualmente disponibili (bachelite, plexiglass, materie plastiche in generale), con i seguenti risultati che rivestono carattere generale:

- esistono due specie di materiali isolanti, quelli che si comportano come il vetro e quelli che si comportano come la bachelite;
- tra due bacchette elettrizzate della medesima specie (entrambe tipo vetro o entrambe tipo bachelite) si manifesta sempre una forza repulsiva;
- tra due bacchette elettrizzate di specie diversa (una tipo vetro e l'altra tipo bachelite) si manifesta sempre una forza attrattiva;
- una forza attrattiva si manifesta in ogni caso tra la bacchetta di isolante e il materiale con cui è stata elettrizzata per strofinio.

Da questo insieme di fatti sperimentali si deduce che esistono *due diversi tipi di cariche elettriche*; per convenzione è stata chiamata *positiva* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *vetro* quando vengono elettrizzate, mentre è stata chiamata *negativa* la carica che compare sulla superficie delle sostanze tipo *bachelite*. Possiamo allora sintetizzare così i risultati precedenti:

- due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o entrambi negativamente si respingono;
- un corpo isolante carico positivamente e uno carico negativamente si attraggono;
- nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante e il panno, acquistano sempre una carica di segno opposto.

La carica che si accumula per strofinio sugli isolanti si mantiene per tempi considerevoli, specialmente se l'aria nell'ambiente in cui si opera è secca.

Invece, come abbiamo già rilevato, non è possibile caricare per strofinio una bacchetta di metallo tenendola in mano, come si fa con le bacchette di isolante. Gli effetti di elettrizzazione si osservano però se la bacchetta di metallo è sostenuta da un supporto di materiale isolante e in tal caso il comportamento dei metalli è simile a quello degli isolanti.

L'assenza di elettrizzazione se non si adotta la suddetta precauzione si spiega col fatto, già ricordato, che i metalli e il corpo umano sono conduttori, cioè permettono il movimento della carica elettrica accumulatasi durante lo strofinio, a differenza di quanto avviene negli isolanti. Dal punto di vista di questi esperimenti hanno caratteristiche di conduttori anche il suolo, svariati liquidi tra cui l'acqua e anche l'aria umida. Allora, dalla bacchetta di metallo tenuta in mano e strofinata la carica si disperde (molto rapidamente) nel corpo umano e, se possibile, nel suolo; analogamente, in una giornata umida un corpo isolante carico mantiene meno facilmente la carica, che tende a disperdersi (lentamente) nell'aria conduttrice verso i corpi circostanti.

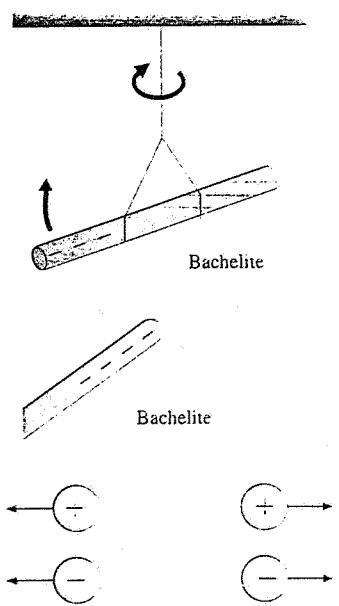


Figura 1.3

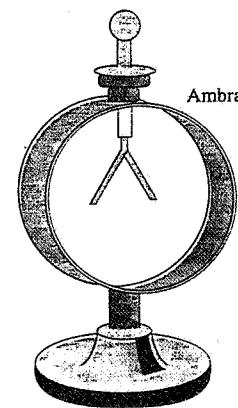
L'elettroscopio a foglie

L'elettroscopio a foglie è il primo strumento costruito per rivelare e riconoscere lo stato (relativo) di carica. Esso è costituito da due foglioline metalliche molto sottili, d'oro o di alluminio, sospese ad una asticciola metallica. Allo scopo di proteggere le foglie da movimenti dell'aria che ne altererebbero la posizione queste sono contenute in un involucro di vetro; l'asticciola esce dall'involucro attraverso un tappo di ottimo materiale isolante, ad esempio ambra.

Se si tocca con una bacchetta carica l'estremità dell'asticciola, le due foglie acquistano dalla bacchetta tramite l'asticciola una data carica, dello stesso segno, per cui tendono a divergere. L'equilibrio statico di ciascuna foglia (Fig. 1.4), caratterizzato da un certo angolo di deflessione α , si raggiunge quando è nulla la risul-

tante delle forze agenti sulla foglia, come discuteremo nell'esempio 1.4. Lo strumento può essere completato da una scala graduata per la misura dell'angolo α .

L'elettroscopio permette di riconoscere il segno relativo della carica dei corpi. Se ad esempio tocchiamo l'elettroscopio precedentemente caricato con una carica di un dato segno con una bacchetta carica con lo stesso segno la deflessione delle foglie aumenta, mentre se la carica della bacchetta è di segno opposto la deflessione diminuisce.



1.2 Struttura elettrica della materia

I fenomeni descritti finora si spiegano in modo coerente con l'ipotesi della preesistenza delle cariche elettriche nei corpi, ovvero con l'ipotesi che i costituenti elementari della materia possiedono carica elettrica.

Per le nostre considerazioni possiamo dire che la materia stabile che ci circonda (corpi terrestri, pianeti, la nostra galassia) è formata da tre costituenti elementari, il *protone p*, il *neutrone n*, l'*elettrone e*.

La massa del protone, entro qualche permille, è eguale alla massa del neutrone e vale $m_p \cong m_n \cong 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg; la massa dell'elettrone è $m_e \cong 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, circa 1840 volte più piccola della massa del protone e del neutrone (i valori precisi sono dati nella tabella 1.1 del paragrafo 1.3).

Sulla base dei dati sperimentali attuali il protone e il neutrone hanno dimensioni dell'ordine di 10^{-15} m, cioè del *femtometro*, unità che in fisica nucleare è anche chiamata *fermi*. Con i mezzi di indagine attualmente disponibili si può affermare che le dimensioni dell'elettrone sono inferiori a 10^{-17} m: esso ci appare puntiforme, cioè privo di struttura interna (su questo argomento ritorneremo nell'esempio 4.19).

La carica elettrica dell'elettrone è la più piccola osservata sperimentalmente: essa è chiamata *carica elementare* ed è indicata con $-e$; il segno evidenzia l'assunzione che la carica dell'elettrone sia negativa. Il protone ha una carica positiva $+e$, eguale in valore assoluto a quella dell'elettrone, il neutrone invece ha carica elettrica nulla (è neutro).

Il carattere elementare della carica dell'elettrone è suffragato, oltre che dall'esperimento di Millikan (paragrafo 1.8), anche dal fatto che tutte le particelle subatomiche osservate hanno una carica che, in valore assoluto, è eguale alla carica elementare e oppure è multipla intera di questa. Questa situazione si esprime dicendo che la carica elettrica è una grandezza *quantizzata*.

I tre costituenti si aggregano in strutture che si chiamano *atomi*. Precisamente, un certo numero di protoni e neutroni, legati dall'*interazione forte* (un altro tipo di interazione fondamentale esistente in natura) costituiscono il nucleo dell'atomo, che risulta quindi carico positivamente; attorno al nucleo si muove un certo numero di elettroni, sotto l'azione elettrica attrattiva esercitata dal nucleo. La configurazione di questi elettroni è determinata dalle leggi della meccanica quantistica ed è caratteristica del tipo di atomo.

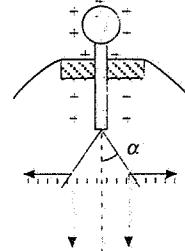
La composizione di un atomo è descritta da due numeri:

- il *numero atomico Z* che dà il numero di protoni ed elettroni esistenti nell'atomo;
- il *numero di massa A = Z + N*, somma del numero Z di protoni e N di neutroni che formano il nucleo dell'atomo.

Poiché il numero di protoni in ogni atomo è eguale al numero di elettroni, la carica elettrica totale, somma delle singole cariche, è nulla e l'*atomo è neutro*.

Le proprietà di massa di un atomo sono rappresentate dal numero di massa A; in effetti oltre il 99.9% della massa di un atomo è concentrato nel nucleo. Le dimensioni dei nuclei variano da 10^{-15} m (nuclei leggeri) fino a 10^{-14} m per i nuclei più

Carica elementare



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_e}{F_x}$$

Figura 1.4

Numero atomico Z

Numero di massa A

pesanti; si è trovato sperimentalmente che il raggio di un nucleo atomico è dato con buona approssimazione dalla formula

$$r = R_0 A^{1/3} \quad \text{con} \quad R_0 = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

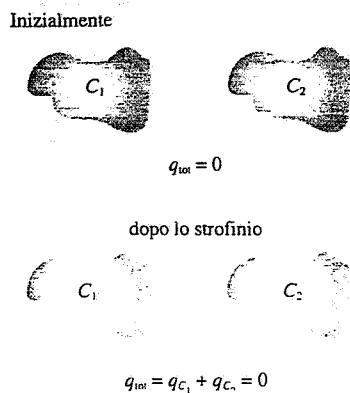


Figura 1.5

La carica elettrica
è quantizzata

Principio di conservazione
della carica

Ione negativo
Ione positivo

La dipendenza da A è proprio quella attesa per una distribuzione uniforme di massa nel nucleo (si veda l'esempio 4.18). Le dimensioni degli atomi sono dell'ordine di 10^{-10} m e coincidono con lo spazio entro cui si muovono gli elettroni.

Le proprietà elettriche di un atomo sono invece descritte dal numero atomico Z ; in particolare dalla configurazione degli Z elettroni attorno al nucleo dipendono la capacità di un atomo di legarsi ad altri atomi e quindi le sue *proprietà chimiche*.

Gli elettroni di un atomo, specialmente quelli periferici, sono più o meno legati al nucleo: da ciò deriva la differenza tra materiali isolanti e conduttori. Negli isolanti gli elettroni sono ben vincolati al nucleo e non possono spostarsi attraverso il corpo: gli isolanti non trasportano facilmente la carica. Mediante una specifica azione locale, quale lo strofinio con un panno, si può far passare, nei punti di contatto, un certo numero n di elettroni e quindi una carica $-q = -ne$ da un corpo C_1 , ad esempio una bacchetta di vetro, ad un corpo C_2 , il panno; C_2 risulta carico negativamente nei punti di contatto con C_1 e tale carica non si muove verso altre zone di C_2 . Invece in C_1 nei punti di contatto è presente un eccesso di carica positiva $q = ne$. Nel caso di isolanti tipo bachelite il processo avviene in senso contrario (C_1 acquista elettroni da C_2).

In conclusione un processo di carica per *strofinio* è un processo in cui vengono separate, attraverso un agente meccanico, delle cariche (elettroni) e trasferite da un corpo ad un altro. Si noti che lo spostamento riguarda un numero intero di elettroni, cioè la carica trasferita può assumere solo valori multipli interi della carica elementare, in accordo al fatto che la *carica elettrica è quantizzata*.

Prima dello strofinio la carica del panno e della bacchetta erano entrambe nulle: tutti i corpi sono neutri, perché ogni atomo costituente della materia è neutro. Dopo lo strofinio il panno e la bacchetta hanno acquistato una carica eguale ed opposta, ma nel suo complesso la carica totale del sistema panno + bacchetta è rimasta nulla.

Questa proprietà fondamentale di tutti i processi in cui compaiono cariche elettriche è nota come *principio di conservazione della carica* ed è verificata senza nessuna eccezione sia su scala macroscopica che su scala atomica e subatomica. L'enunciato è il seguente: *in un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo ovvero si conserva*.

Quando ad un atomo vengono aggiunti o tolti elettroni si forma rispettivamente uno *ione negativo* o uno *ione positivo*; in particolare il fenomeno di sottrazione di elettroni di chiama *ionizzazione*. Gli atomi dei metalli hanno la proprietà di essere facilmente ionizzabili: uno o più elettroni degli strati più esterni della configurazione elettronica si comportano come *elettroni liberi* e le proprietà conduttrici dei metalli sono dovute proprio a questo *gas di elettroni di conduzione* che si possono muovere liberamente nel corpo.

Se ad esempio tocchiamo con una bacchetta di vetro carica positivamente un conduttore isolato, cioè non in contatto con la terra, nel punto di contatto alcuni elettroni del conduttore sotto l'azione della forza attrattiva esercitata dalla carica positiva si trasferiscono sulla bacchetta e il conduttore appare carico positivamente (è così che si carica l'elettroscopio a foglie). Come vedremo in seguito l'*eccesso di carica del conduttore si distribuisce su tutta la superficie del conduttore e non nel suo interno*.

Quando il conduttore non è isolato, essendo per esempio collegato a terra tramite il corpo dello sperimentatore che lo sostiene con una mano, la carica si distribuisce ancora su tutta la superficie di conduttore disponibile, ma essendo la superficie della terra preponderante ne consegue che tutta la carica si disperde sulla terra e il conduttore appare scarico.

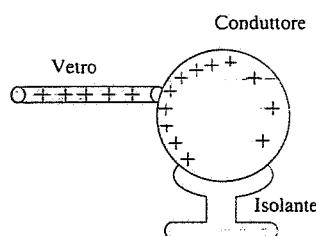


Figura 1.6

Induzione elettrostatica

Supponiamo ora di avvicinare una bacchetta carica positivamente ad un elettroscopio senza toccarlo: osserviamo che le foglie divergono. Sotto l'azione della carica positiva un certo numero di elettroni liberi del conduttore si porta sull'estremità superiore dell'asticciola e sulla parte più lontana, le foglie, resta un eccesso di carica positiva. Se la bacchetta è carica negativamente, gli elettroni si muovono verso le foglie, su cui compare un eccesso di carica negativa. Allontanando la bacchetta si ripristinano le condizioni iniziali, le foglie si richiudono.

Un'analisi più accurata, ovvero una spiegazione che rimandiamo al capitolo 4 sulle proprietà dei conduttori, permetterebbe di verificare che ad una estremità è comparsa globalmente una carica q e all'altra una carica $-q$, cioè che la carica totale del conduttore è nulla come all'inizio dell'esperimento ed è nulla anche la carica all'interno del conduttore.

Questo processo di separazione della carica, caratteristico dei conduttori, è noto come *induzione elettrostatica*. Il processo è statico, cioè comporta una situazione di equilibrio con cariche ferme, come tutti i fenomeni che stiamo descrivendo, in quanto l'accumulo di elettroni su una estremità, che avviene molto rapidamente, impedisce per repulsione elettrica un ulteriore arrivo di elettroni. Si può ottenere per induzione una carica permanente su un conduttore isolato operando nel modo seguente.

Sottoponiamo ad induzione elettrostatica, con una carica inducente per esempio negativa, un conduttore. Collegiamo con un filo metallico il conduttore a *terra*, che in figura è indicata con il simbolo universalmente adottato. Il conduttore e la terra costituiscono un unico conduttore e quindi la carica dello stesso segno di quella inducente compare nei punti più lontani da questa, cioè sulla terra. Se a questo punto si interrompe il collegamento e si allontana la carica inducente, il corpo rimane carico di segno opposto a questa (cioè positivamente nell'esempio considerato) e la carica si distribuisce su tutta la superficie del conduttore.

È chiaro che anche nei processi di carica dei conduttori vale sempre il principio di conservazione della carica del sistema complessivo: se il processo avviene per contatto si ha un trasferimento di n elettroni da un corpo all'altro, se avviene per induzione si ha una separazione di carica (spostamento di elettroni) che può diventare permanente, ma la carica totale finale è sempre eguale a quella iniziale.

1.3 Misura delle cariche elettriche. Legge di Coulomb

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.2 i costituenti dell'atomo hanno carica pari alla carica elementare o sono neutri e l'atomo stesso è neutro. Di conseguenza per un corpo qualsiasi, che è composto di atomi, la carica totale, pari alla somma algebrica di tutte le cariche elementari presenti nel corpo, risulta normalmente nulla: il corpo è neutro. Con metodi opportuni, alcuni dei quali abbiamo descritto in precedenza, è però possibile effettuare trasferimenti di carica tra corpi per cui la carica totale di un corpo può risultare *positiva*, e si dice che il *corpo è carico positivamente*, oppure *negativa*, e si dice che il *corpo è carico negativamente*.

Per misurare operativamente la carica elettrica dei corpi carichi si stabilisce innanzi tutto di considerare eguali in grandezza e segno due cariche se queste, poste alla stessa distanza da una terza, agiscono su di essa con una forza eguale e dello stesso verso: si considerano eguali e di segno opposto quando, nelle stesse condizioni, le forze risultano eguali in modulo, ma di verso opposto. Un possibile metodo di misura è indicato nell'esempio 1.3.

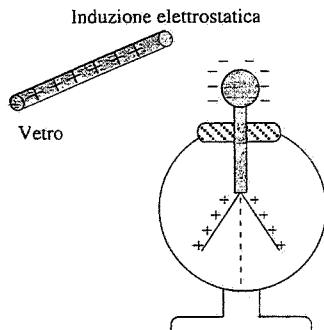


Figura 1.7

Induzione elettrostatica

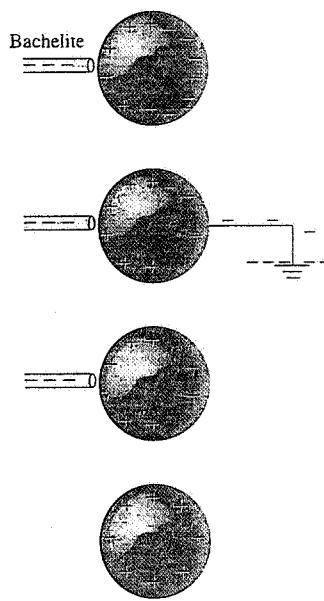


Figura 1.8

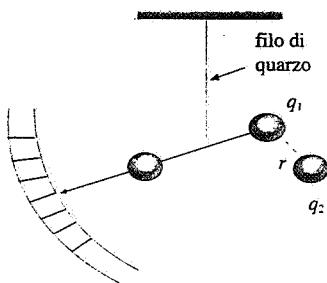


Figura 1.9

Legge di Coulomb

Un confronto tra cariche si può effettuare anche con l'elettroscopio descritto nel paragrafo 1.1. Se ammettiamo, come giustificheremo nell'esempio 4.12, che quando portiamo a contatto un conduttore carico con un elettroscopio questo acquista una carica proporzionale alla carica del corpo, diremo che due corpi hanno la stessa carica quando, posti successivamente a contatto con l'elettroscopio scarico, fanno deviare le foglie dello stesso angolo. Una carica sarà maggiore di un'altra quando farà divergere le foglie di un angolo maggiore dell'altra.

Il confronto tra due cariche diverse in modulo può diventare quantitativo solo se si conosce l'espressione della forza con cui interagiscono le cariche elettriche.

La formulazione precisa della legge della forza elettrica è dovuta a Coulomb, il quale eseguì nel 1785 una serie di misure sistematiche per stabilire la dipendenza della forza tra due cariche dai valori q_1 e q_2 di queste e dalla loro distanza r .

Coulomb utilizzò la bilancia di torsione mostrata schematicamente in figura 1.9 e descritta nel paragrafo 7.4 del primo volume. Una sottile asta isolante orizzontale è appesa al centro ad un filo di quarzo, di cui è nota la costante elastica di torsione k . Ad una estremità dell'asta è fissata una piccola sfera conduttrice che porta una carica q_1 , all'altra estremità è fissato un opportuno contrappeso per garantire l'orizzontalità. Nel piano orizzontale contenente l'asta è posta una seconda sferetta con carica q_2 , a distanza r da q_1 . Per effetto della forza tra q_1 e q_2 l'asta, se si ha cura di neutralizzare altri movimenti, compie solo una rotazione e raggiunge una posizione di equilibrio, individuata da un angolo θ di rotazione, in cui il momento elastico $k\theta$ egualia il momento della forza elettrica. In sostanza il valore di F è dedotto dalla misura di θ .

Variando i parametri in gioco, tra cui i valori delle cariche con un metodo che descriveremo tra breve, Coulomb stabilì che due *cariche puntiformi* q_1 e q_2 , poste a distanza r , interagiscono con una forza F , diretta secondo la loro congiungente, di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad (1.2)$$

la forza cioè è direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Osserviamo subito che la struttura di (1.2) è identica a quella di (1.1): la caratteristica più peculiare è che sia la forza gravitazionale che quella elettrica sono *inversamente proporzionali al quadrato della distanza*. Ricordiamo inoltre che il metodo di Coulomb fu applicato nel 1798 da Cavendish all'interazione gravitazionale tra sfere massicce con lo scopo di determinare il valore della costante γ nella (1.1).

La precisione raggiungibile nell'esperimento di Coulomb è limitata da varie cause. Volendo stabilire una legge per due cariche puntiformi occorre che le dimensioni delle sferette siano piccole rispetto alla loro distanza, per poter approssimare la distanza tra i due corpi estesi con la distanza tra i loro centri. Però non si può diminuire di molto il raggio delle sferette perché in tal caso, come vedremo nel paragrafo 4.1, sulla loro superficie si manifestano scariche che disperdoni la carica nell'aria. D'altra parte se si aumenta la distanza diminuisce rapidamente secondo (1.2) la forza da misurare. Inoltre le cariche dovrebbero rimanere costanti durante l'esperimento, il che è difficoltoso in quanto si ha sempre una certa dispersione della carica nell'aria, soprattutto se questa è umida. Infine bisogna aver cura che il sistema sia *schermato* dalle azioni di altre cariche circostanti, che potrebbero falsare la misura.

In realtà, più che da una verifica sperimentale diretta molto accurata, la validità di (1.2) è confermata dalla verifica delle leggi che da essa si derivano, come vedremo nel seguito. Pertanto noi assumeremo che la (1.2) si possa sempre applicare a una qualsiasi coppia di cariche puntiformi *in quiete*: per sottolineare quest'ultimo fatto si dice anche che (1.2) esprime la *forza elettrostatica tra due cariche*.

Conseguenza immediata di (1.2) è che le forze esercitate (separatamente) da due

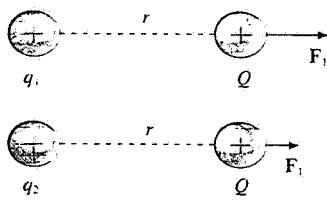


Figura 1.10

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

cariche q_1 e q_2 su una terza carica a parità di distanza stanno tra loro come le cariche stesse:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2} \quad (1.3)$$

La (1.3) fornisce un metodo quantitativo per confrontare tra di loro cariche differenti.

Tecnicamente, una procedura per ottenere cariche di qualsiasi valore è la seguente. Abbiamo visto nel paragrafo 1.2 come sia possibile, tramite l'induzione elettrostatica, ottenere una carica q su una sfera conduttrice sorretta da un supporto isolante. Diciamo C_1 questa sfera, di raggio R_1 ; se la mettiamo a contatto con una sfera conduttrice C_2 di raggio R_2 , isolata, la carica q si ripartisce in due cariche q_1 e q_2 , che si distribuiscono sulle superficie delle due sfere secondo la proporzione

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (1.4)$$

come dimostreremo nell'esempio 4.2. Se in particolare $R_1 = R_2$, $q_1 = q_2 = q/2$: la carica si ripartisce in parti eguali. È chiaro che attraverso successivi contatti con sfere dello stesso raggio è possibile ottenere sottomultipli di una certa carica; oppure si può giocare sui raggi per ottenere un determinato valore. La (1.4) può essere verificata col metodo descritto nell'esempio 1.3.

La costante k che compare nella (1.2) dipende dalla scelta delle unità di misura e dal mezzo in cui le cariche sono immerse, mezzo di norma isolante che per le sue proprietà elettriche viene chiamato *dielettrico*. Prendiamo per ora come dielettrico il vuoto e supponiamo di porre $k = 1$: immediatamente resta definita come carica unitaria quella che porta a distanza unitaria da una carica eguale la respinge con una forza unitaria. Questa definizione fa dipendere l'unità di carica esclusivamente da unità meccaniche (distanza e forza); inoltre, poiché la misura della forza tra cariche non è tra le più precise, c'è lo svantaggio intrinseco che un possibile sostanziale affannamento della misura della forza tra cariche supposte unitarie, con cui si dimostrasse che la forza tra di esse non è esattamente unitaria, comporterebbe una ridefinizione dell'unità di carica.

La via seguita è differente: si è adottata nell'ambito del *sistema internazionale* una unità indipendente per le grandezze elettromagnetiche e la scelta, per ragioni di precisione di misura, è caduta sull'*ampere*, simbolo A, unità di misura dell'intensità di corrente elettrica, che definiremo in seguito ed è stato ad ogni modo introdotto nell'appendice B del primo volume. Come unità di carica si è poi definito il *coulomb*, simbolo C, che è *pari alla carica trasportata da una corrente di 1A in 1 secondo*. Fissata l'unità di misura della carica, ed essendo già definite le unità di forza e di distanza, in linea di principio basta misurare la forza tra due cariche note a distanza nota per determinare nel sistema internazionale il valore di k nel vuoto; risulta

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \quad (1.5)$$

approssimabile a tutti gli effetti con $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

Per ragioni pratiche che appariranno chiare più avanti è conveniente esprimere k come

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

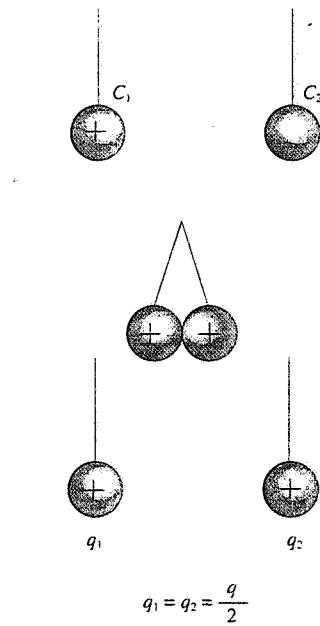


Figura 1.11

Il coulomb

Costante dielettrica
del vuoto

dove la costante ϵ_0 è nota come *costante dielettrica* (o *permittività*) del vuoto e ha il valore

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (1.6)$$

Con questa notazione la (1.2) scritta nel sistema internazionale diventa

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.7)$$

Il valore della *carica elementare* espresso in Coulomb risulta

Carica elementare

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.8)$$

e quindi 1C equivale alla carica di $1/e = 6.24 \cdot 10^{18}$ elettroni.

In tabella 1.1 sono dati i valori più aggiornati delle cariche e delle masse dell'elettrone, del protone e del neutrone; si intende che l'incertezza è sull'ultima cifra indicata.

Tabella 1.1 Carica e massa di elettrone, protone, neutrone

Carica (C)	Massa (kg)
elettrone e	$-1.602177335 \cdot 10^{-19}$
protone p	$+1.602177335 \cdot 10^{-19}$
neutrone n	0

Negli esperimenti di elettrostatica che abbiamo descritto, come l'elettrizzazione per strofinio, la carica della bacchetta può essere dell'ordine di 10^{-7} C e ciò equivale allo spostamento di $6.24 \cdot 10^{11}$ elettroni. Due cariche $q_1 = q_2 = 10^{-7}$ C poste a distanza $r = 10^{-2}$ m interagiscono con una forza

$$F = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} / 10^{-4} = 0.9 \text{ N}$$

che è ben misurabile (due cariche di 1C a 1 metro di distanza interagirebbero con una forza di $9 \cdot 10^9$ N!). In effetti in elettrostatica la carica di 1C è ben oltre le possibilità sperimentali; gli eccessi di carica su isolanti e conduttori sono quasi sempre inferiori a 10^{-6} C; solo con opportuni dispositivi che descriveremo più avanti, i *condensatori*, è possibile in qualche caso avere cariche separate dell'ordine di $0.1 \div 1$ C. La ragione sostanziale che impedisce l'accumulo oltre un certo limite di carica libera è la repulsione tra cariche dello stesso segno.

Bisogna però notare che, pur trattandosi di piccole cariche dal punto di vista macroscopico, le cariche tipiche dell'elettrostatica corrispondono a un numero di cariche elementari talmente grande da far perdere significato, agli effetti pratici, alla quantizzazione: nel senso che è impossibile mettere in evidenza che le cariche in questione sono multiple della carica elementare, in quanto i mezzi di misura non sono sensibili a tal punto.

Forma vettoriale della legge di Coulomb

La legge (1.7) deve essere scritta in termini vettoriali, trattandosi dell'espressione di una forza. Abbiamo già detto che la direzione della forza è quella della retta

congiungente le due cariche puntiformi; cambiando simboli rispetto a (1.7) chiamiamo q la carica q_1 e q_0 la carica q_2 e indichiamo con \mathbf{u} il versore del vettore \mathbf{r} che va da q a q_0 , cioè il versore uscente da q . La forza che la carica q esercita sulla carica q_0 assume la forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \mathbf{u} \quad (1.9)$$

Se q e q_0 hanno lo stesso segno ($q q_0 > 0$), la forza ha lo stesso verso di \mathbf{u} , è cioè *repulsiva*; se invece q e q_0 hanno segno opposto ($q q_0 < 0$) \mathbf{F} ha verso opposto ad \mathbf{u} , è *attrattiva*. In accordo con il principio di azione e reazione la forza che q_0 esercita su q è $-\mathbf{F}$.

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane in cui la carica q si trova nel punto P di coordinate x, y, z e la carica q_0 nel punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. La distanza tra le cariche, cioè il modulo del vettore $\mathbf{r} = \mathbf{PP}_0$, è

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2},$$

mentre le componenti del versore \mathbf{u} , cioè i coseni direttori del vettore \mathbf{r} , sono

$$\frac{x_0 - x}{r}, \quad \frac{y_0 - y}{r}, \quad \frac{z_0 - z}{r}$$

Le componenti della forza \mathbf{F} sono di conseguenza

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{x_0 - x}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0 - x}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \\ F_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{y_0 - y}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_0 - y}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \\ F_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \frac{z_0 - z}{r} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_0 - z}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Accenniamo soltanto al fatto che, vista la simmetria sferica del problema, sarebbe più adatto un sistema di coordinate polari con centro in P , dove si trova la carica q ; la \mathbf{F} ha solo componente radiale, data da (1.7), e manifesta chiaramente il suo carattere di *forza centrale* (per le proprietà generali delle forze centrali rimandiamo al paragrafo 2.23 del primo volume). Naturalmente, sia la struttura di (1.9) che la caratteristica della forza di essere centrale non dipendono dal sistema di riferimento scelto.

Esempio 1.1

L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m, che coincide con le dimensioni dell'atomo.

Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica tra il protone e l'elettrone.

Soluzione

Da (1.1) e dai dati della tabella 1.1 troviamo:

$$F_g = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

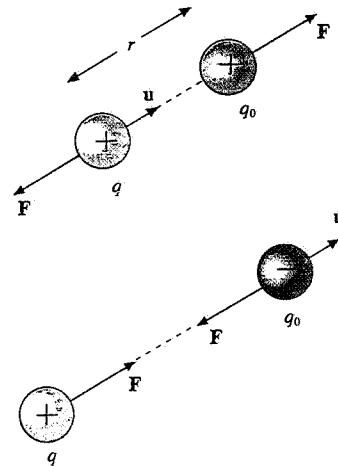


Figura 1.12

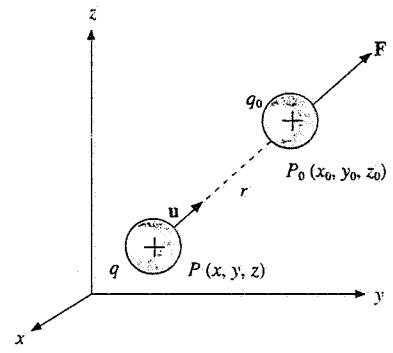


Figura 1.13

Per il calcolo della forza elettrica applichiamo (1.7):

$$F_e = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Il rapporto $F_e/F_g \approx 2.3 \cdot 10^{39}$ evidenzia che a livello atomico la forza gravitazionale è completamente trascurabile rispetto alla forza elettrica. Si deve a quest'ultima la formazione e la stabilità degli atomi e quindi della materia.

Esempio 1.2

Un uomo di massa $m = 70 \text{ kg}$, isolato da terra, possiede una carica $-q$ che, per queste considerazioni, pensiamo concentrata in un punto a distanza $r = 1 \text{ m}$ dal suolo. Sul suolo è posta una carica q , a distanza r da $-q$. Calcolare il valore di q per cui la forza elettrica tra le cariche è pari al peso dell'uomo.

Soluzione

Dobbiamo calcolare q dall'eguaglianza

$$m g = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

per cui $q = \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m g r} = 2.76 \cdot 10^{-4} \text{ C}$. Poiché la carica negativa è portata dagli elettroni, vuol dire che l'uomo ha sul suo corpo un eccesso di elettroni:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15} \text{ elettroni} ;$$

questi hanno la massa $N m_e = 1.58 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$, del tutto trascurabile rispetto alla massa dell'uomo!

L'esempio, che è volutamente paradossale, indica che se i corpi non fossero neutri, ma possedessero cariche anche piuttosto piccole, la forza elettrica maschererebbe completamente la forza gravitazionale.

Del resto la forza gravitazionale, alla quale si deve la formazione delle galassie, delle stelle e dei pianeti, ha potuto manifestarsi nella storia dell'universo solamente dopo che la forza elettrica aveva terminato la sua opera e cioè aveva formato gli atomi neutri partendo dai protoni, neutroni ed elettroni, costituenti elementari della materia stabile.

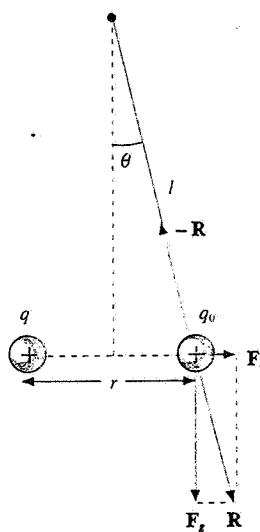


Figura 1.14

Esempio 1.3

Una sferetta conduttrice molto leggera, di massa $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, possiede una carica $q_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ ed è sospesa ad un filo lungo l . Una seconda sferetta conduttrice con una carica $q = 5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ viene avvicinata a q_0 . Quando la distanza tra i centri di q e q_0 vale $r = 5 \text{ cm}$ l'angolo che il filo forma con la verticale vale θ . Calcolare θ .

Soluzione

All'equilibrio abbiamo la situazione indicata in figura 1.14: la risultante R della forza peso e della forza elettrica agenti su q_0 è diretta lungo il filo, bilanciata dalla tensione del filo stesso. Quindi

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^2 mg} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 0.1837$$

e $\theta \approx 10.41^\circ$; con l'approssimazione $\theta \approx \tan \theta$ risulta $\theta \approx 10.53^\circ$. Pertanto, finché l'angolo è piuttosto piccolo, diciamo inferiore a $10^\circ = 0.1745 \text{ rad}$, possiamo scrivere

$$\theta = \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0 m g r^2} ,$$

in cui l'angolo è espresso in radianti. La relazione tra l'angolo di deviazione della carica q_0 e il valore della carica che provoca la deviazione è lineare, a parità di distanza. L'angolo θ può essere dedotto dallo spostamento $d = l\theta$ della carica q_0 . Sulla base di quanto descritto si può costruire uno strumento per confrontare tra loro due cariche e quindi misurare una rispetto all'altra nota; una misura assoluta di carica può essere fatta se è nota q_0 , che potrebbe essere determinata con il medesimo strumento ponendo $q = q_0$.

La sensibilità non è elevata: se si apprezza il decimo di grado ($0.1^\circ = 1.75 \cdot 10^{-3}$ rad) si commette un errore relativo superiore all'1%, che per una carica di 10^{-7} C vuol dire 10^{-9} C. Di questo ordine di grandezza è anche il valore minimo di carica che in pratica si può pensare di misurare.

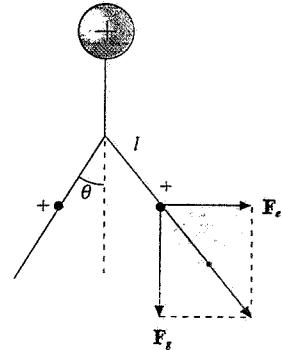


Figura 1.15

Esempio 1.4

Due sferette conduttrici eguali, di massa m e carica q , sono sospese ciascuna ad un filo lungo l ; in equilibrio i fili sono disposti simmetricamente rispetto alla verticale, ciascuno ad angolo θ . Calcolare la relazione esistente tra q e θ ed estendere il risultato all'equilibrio delle foglie di un elettroscopio.

Soluzione

La distanza tra le cariche in equilibrio è $r = 2l \sin \theta$, come abbiamo visto nell'esempio 1.3, ciascuna carica sta in equilibrio all'angolo

$$\tan \theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 m g (2l \sin \theta)^2} \Rightarrow q = 2l \sin \theta \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m g \tan \theta} .$$

La relazione tra q e θ non è lineare, nemmeno nell'approssimazione di angoli piccoli ($q \sim \theta^{3/2}$).

Il risultato può essere esteso, in prima approssimazione, alle foglie di un elettroscopio se si immagina che la carica di ciascuna foglia sia concentrata nel centro, a distanza l dal punto di sospensione (in realtà la carica si distribuisce su tutta la superficie della foglia).

1.4 Campo elettrostatico

Le forze elettriche agenti su una carica q_0 dovute alle cariche circostanti si sommano come vettori: vige cioè il *principio di sovrapposizione*, detto anche *principio di indipendenza delle forze simultanee*, che esemplifichiamo nel caso più semplice.

Consideriamo tre cariche puntiformi, fisse in un sistema di riferimento inerziale, q_1, q_2, q_0 . La carica q_1 esercita separatamente la forza F_1 su q_0 e la carica q_2 esercita la forza F_2 ; quando entrambe le cariche sono presenti, la forza F su q_0 è data dalla somma vettoriale di F_1 e F_2 . Per ciascuna forza vale una formula tipo (1.9); se indichiamo con r_1 e r_2 rispettivamente la distanza da q_1 a q_0 e da q_2 a q_0 e con \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 i relativi versori, uscenti dalle cariche, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_1^2} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_2^2} \mathbf{u}_2 . \quad (1.11)$$

La forza elettrica su una carica puntiforme q_0 , risultante delle forze esercitate da un sistema discreto di cariche puntiformi q_i , si ottiene generalizzando (1.11) con

Principio di sovrapposizione

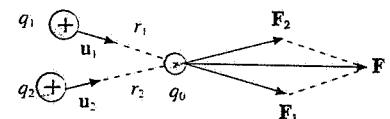


Figura 1.16

ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \mathbf{u}_i = q_0 \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (1.12)$$

Questi risultati sono verificati sperimentalmente e confermano il carattere vettoriale della legge (1.9).

Nella (1.12) abbiamo messo in evidenza che la forza risultante esercitata su q_0 è proporzionale a q_0 . La grandezza vettoriale

Campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1.13)$$

viene chiamata *campo elettrostatico*. Più precisamente: *il campo elettrostatico \mathbf{E} generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrica risultante \mathbf{F} che agisce su una carica di prova q_0 positiva posta in quel punto divisa per la carica q_0 stessa.*

Nei casi concreti la carica di prova q_0 può perturbare la distribuzione originale, non potendo questa essere formata da cariche esattamente puntiformi, cioè prive di struttura. Se ad esempio le cariche q_i sono portate da sferette conduttrici, q_0 può alterare la distribuzione della carica sulla superficie delle sferette tramite il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Se invece le sferette che portano le q_i sono di materiale isolante, q_0 non può spostare le cariche presenti sulle sferette, ma può tuttavia produrre dei microspostamenti locali tramite il fenomeno della polarizzazione dei dielettrici, che studieremo nel capitolo 5.

Da un punto di vista teorico la definizione (1.13) diventerebbe quindi più precisa se si facesse tendere a zero il valore di q_0 , così da far scomparire la perturbazione prodotta da q_0 . Poiché al tendere a zero di q_0 tende a zero anche la forza su q_0 il rapporto

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

rimane finito. In pratica è sufficiente che q_0 sia molto piccola rispetto a ciascuna delle q_i .

In base a (1.13), (1.9), (1.10) il campo prodotto da una carica puntiforme q_1 nel punto $P(x, y, z)$ è dato da

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \mathbf{u}_1 \quad (1.14)$$

e ha le componenti cartesiane

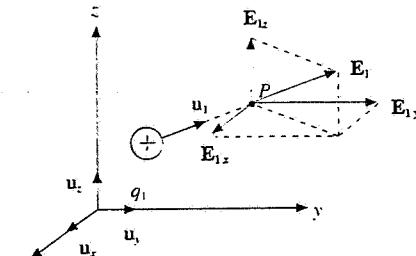


Figura 1.17

$$\begin{aligned} E_{1,x}(x, y, z) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \\ E_{1,y}(x, y, z) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \\ E_{1,z}(x, y, z) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Figura 1.18

Da (1.14) si deduce che se la carica q_1 è positiva il campo è uscente da q_1 , mentre se la carica q_1 è negativa il campo è entrante in q_1 .

Analogamente si ottiene da (1.12) il campo generato da un sistema discreto di cariche puntiformi:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \quad (1.16)$$

Le componenti cartesiane si scrivono, generalizzando (1.15),

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ E_y(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ E_z(x, y, z) &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Queste formule mettono bene in evidenza come, fissato un sistema di cariche, si possa associare ad ogni punto $P(x, y, z)$ un valore del campo elettrostatico $\mathbf{E}(x, y, z)$, indipendentemente dalla presenza di una carica di prova q_0 . Quando q_0 viene posta nel punto P essa risente, secondo (1.13), della forza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = q_0 \mathbf{E}(x, y, z) \quad (1.18)$$

La (1.18) può essere interpretata dicendo che *il sistema di cariche è la sorgente del campo elettrostatico \mathbf{E}* : la carica q_0 interagisce con questo subendo la forza \mathbf{F} ; l'azione elettrica tra cariche, che è una azione a distanza, avviene attraverso il campo. Del resto la stessa interpretazione viene data all'azione gravitazionale attraverso l'introduzione del campo gravitazionale \mathbf{G} , come è discusso nel paragrafo 5.3 del primo volume.

Unità di misura

Nel sistema internazionale di unità di misura il *campo elettrico*, rapporto tra una forza e una carica, si misura in newton/coulomb (N/C). Vedremo in seguito un'unità di misura equivalente più utilizzata nella pratica.

Esempio 1.5

Tre cariche positive eguali $q_1 = q_2 = q_3 = q$ sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato l . Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.

Soluzione

Per calcolare la forza che agisce su una delle cariche, ad esempio su q_3 , calcoliamo i campi \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 prodotti da q_1 e q_2 nel punto P_3 (la carica q_3 funge da carica di prova). Essendo q_3 equidistante da q_1 e q_2 , in modulo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

I due campi sono disposti simmetricamente rispetto all'asse y e quindi le loro compo-

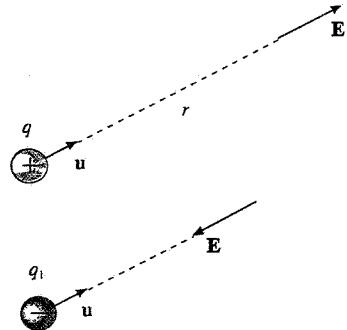


Figura 1.19

Campo elettrostatico di un insieme discreto di cariche

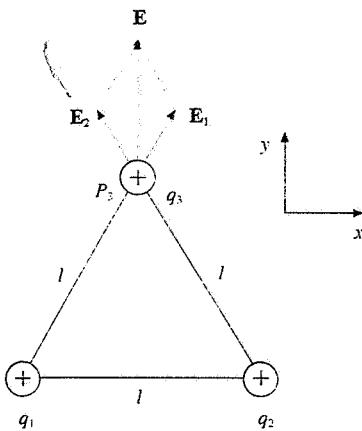


Figura 1.20

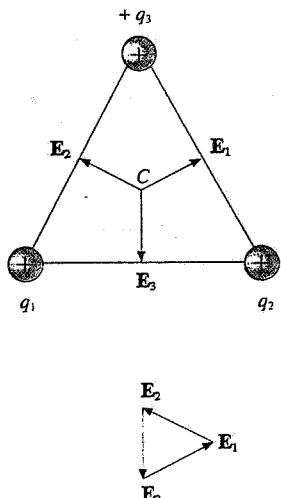


Figura 1.21

nenti lungo l'asse x , eguali ed opposte, si annullano nella somma; invece le componenti lungo l'asse y , eguali e concordi, sommandosi danno il modulo

$$E = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q \cos 30^\circ}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2};$$

lo stesso risultato si può ottenere da

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos 60^\circ.$$

La forza \mathbf{F} che agisce su $q_3 = q$ vale

$$\mathbf{F} = q_3 \mathbf{E} = \frac{q^2 \sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 l^2} \mathbf{u}_y.$$

Il vincolo che tiene ferma ciascuna carica deve esercitare una forza eguale e contraria. Il centro C del triangolo equilatero è equidistante dai vertici, per cui i moduli dei campi E_1 , E_2 , E_3 generati dalle tre cariche uguali nel centro sono uguali. I tre vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero e quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = 0,$$

il campo nel centro è nullo. Se ponessimo in C una carica, essa non risentirebbe di alcuna forza e resterebbe in equilibrio (instabile).

1.5 Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di carica

Abbiamo già rilevato che le cariche di interesse nei problemi elettrostatici corrispondono a un numero molto grande di cariche elementari; inoltre nella maggior parte dei casi pratici queste cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria.

Tali distribuzioni spaziali di carica sono naturalmente sorgenti di un campo elettrostatico: nelle normali applicazioni non si è interessati tanto alla conoscenza del *campo locale* che esiste in prossimità di ciascuna carica, campo che d'altra parte non sarebbe né calcolabile, per l'elevato numero di contributi tipo (1.14), né rilevabile sperimentalmente, quanto piuttosto al *campo medio* nei punti distanti dalle cariche, punti dai quali la distribuzione di carica è vista come una *distribuzione continua*. La distanza in questione, che può essere anche piccola dal punto di vista macroscopico, deve essere molto grande rispetto alla distanza media tra le cariche elementari, che è dell'ordine di 10^{-10} m.

Se la carica è distribuita in un corpo C avente il volume τ ; si definisce la *densità spaziale di carica* $\rho(x', y', z')$ mediante la

$$dq = \rho(x', y', z') d\tau, \quad (1.19)$$

dove $d\tau = dx' dy' dz'$ è il volume elementare, intorno al punto del corpo di coordinate x', y', z' , in cui è contenuta la carica dq . La carica totale posseduta dal corpo è data dall'integrale

$$q = \int_C \rho(x', y', z') d\tau \quad (1.20)$$

esteso a tutto il volume; in generale la densità può essere variabile da punto a punto.

Densità spaziale
di carica

Il campo elettrostatico prodotto dalla carica infinitesima dq in un punto $P(x, y, z)$ distante r da dq si scrive utilizzando (1.14) in quanto dq è approssimabile a una carica puntiforme per questo calcolo:

$$d\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u},$$

con \mathbf{u} versore della direzione orientata che va da dq a P . Il campo risultante nel punto $P(x, y, z)$ si calcola come in (1.16), ricorrendo al principio di sovrapposizione; poiché però la somma è estesa a un numero infinito di contributi infinitesimi, essa si riduce a un integrale vettoriale esteso a tutto il volume τ :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{r^2} \mathbf{u}. \quad (1.21)$$

Le componenti di questo campo sono:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (x - x') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ E_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (y - y') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ E_z(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') (z - z') dx' dy' dz'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

La (1.21) è una formula di carattere generale che, almeno in linea di principio, consente di calcolare il campo in ogni punto $P(x, y, z)$, fissata la distribuzione di carica caratterizzata dalla densità $\rho(x', y', z')$. Notiamo che nell'integrazione il punto P deve essere considerato fisso: le variabili di integrazione sono le coordinate x', y', z' dei punti dove si trova la carica.

Come abbiamo accennato nei paragrafi precedenti e come spiegheremo in seguito, in alcuni corpi la carica tende a portarsi sulla superficie occupando una sottile regione di spessore trascurabile, dell'ordine delle dimensioni atomiche. In questo e in casi analoghi la distribuzione di carica può essere vista, per il calcolo del campo, come una distribuzione superficiale di carica. Le (1.19) e (1.20) sono sostituite da

$$dq = \sigma(x', y', z') d\Sigma, \quad q = \int_{\Sigma} \sigma(x', y', z') d\Sigma, \quad (1.23)$$

dove σ si chiama *densità superficiale di carica* e $d\Sigma$ è l'area della superficie infinitesima, intorno al punto di coordinate x', y', z' , su cui è distribuita la carica dq .

Un'ulteriore possibilità è che la carica sia distribuita lungo una linea, in generale curva, nel qual caso abbiamo

$$dq = \lambda(x', y', z') dl, \quad q = \int_l \lambda(x', y', z') dl, \quad (1.24)$$

λ è la *densità lineare di carica* e dl è la lunghezza del tratto infinitesimo di linea, intorno al punto di coordinate x', y', z' , lungo cui è distribuita la carica dq .

I campi dovuti a distribuzioni superficiali o lineari si scrivono rispettivamente

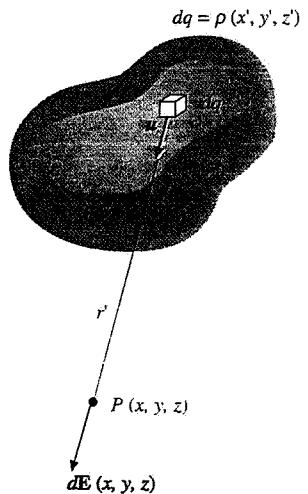


Figura 1.22

Campo elettrostatico
di una distribuzione continua
di cariche

Densità superficiale
di carica

Densità lineare di carica

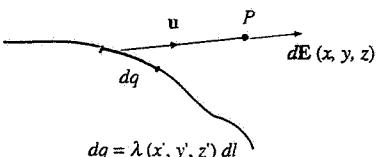
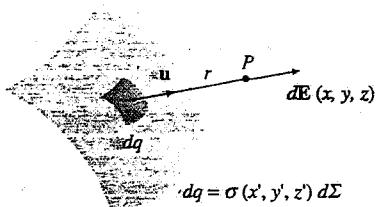


Figura 1.23

Distribuzioni uniformi di carica

Come nel caso tridimensionale il punto $P(x, y, z)$ è fisso nell'integrazione che avviene sulle coordinate delle distribuzioni di carica.

Per chiarire il significato e l'uso delle formule ricavate le applichiamo, negli esempi che seguono, ad alcune distribuzioni di carica caratterizzate da un elevato grado di simmetria, il che corrisponde, come si vedrà, a facilità di integrazione. Facciamo però prima alcune precisazioni.

Il volume, la superficie e la linea infinitesimi $d\tau$, $d\Sigma$, dl vanno intesi molto piccoli rispetto alle dimensioni dei corpi ordinari, ma sempre molto grandi rispetto alle dimensioni atomiche; essi contengono cioè un grandissimo numero di cariche elementari e anche al loro livello la distribuzione si assume continua.

Le densità ρ , σ , λ nel caso più generale sono funzioni del punto, cioè non sono costanti entro il dominio di integrazione. Quando sono costanti si parla di *distribuzioni uniformi* e valgono le formule più semplici

$$q = \rho \tau, \quad q = \sigma \Sigma, \quad q = \lambda l. \quad (1.27)$$

In tal caso nei calcoli dei campi le densità si portano fuori dal segno di integrale.

Unità di misura

$$\rho : \text{C/m}^3, \quad \sigma : \text{C/m}^2, \quad \lambda : \text{C/m}.$$

Esempio 1.6

Un filo di lunghezza $2l$, parallelo all'asse x , possiede una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua lunghezza. Calcolare il campo elettrostatico \mathbf{E} nei punti dell'asse del filo (asse y). Dedurre l'espressione del campo anche per un filo infinitamente lungo e uniformemente carico.

Soluzione

La densità lineare di carica, costante su tutto il filo, è data da (1.27): $\lambda = q/2l$. Ogni elemento di filo dx' ha una carica $dq = \lambda dx'$, secondo (1.24), e produce nel punto $P(0, y)$ dell'asse, distante y dal centro del filo, il campo infinitesimo dato da (1.26):

$$d\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}$$

L'elemento di carica simmetrico a dq rispetto al centro del filo produce in P un campo eguale in modulo e disposto specularmente rispetto al campo prodotto da dq , come mostrato in figura 1.24; siamo nella stessa situazione discussa nell'esempio 1.5, le componenti x si sommano annullandosi e le componenti y si sommano dando il campo in P :

$$d\mathbf{E}(0, y) = dE_y(0, y) \mathbf{u}_y = \frac{2\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \mathbf{u}_y$$

Il campo risultante è la somma di tutti questi contributi infinitesimi, paralleli e concordi; notiamo che valgono le seguenti relazioni:

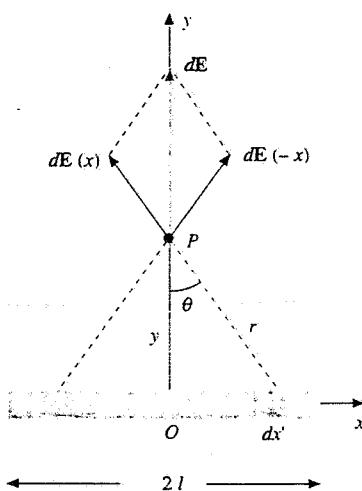


Figura 1.24

$$r \cos \theta = y \quad , \quad x' = y \tan \theta \quad , \quad dx' = \frac{y d\theta}{\cos^2 \theta} \quad ,$$

per cui

$$dE(0, y) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \cos \theta d\theta \mathbf{u}_y \quad .$$

L'integrale si calcola da $\theta = 0$ a $\theta = \theta_1 = \arcsen(l/\sqrt{y^2 + l^2})$, con y costante, e dà il risultato

$$\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda \mathbf{u}_y}{2 \pi \epsilon_0 y} \int_0^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \sin \theta_1 \quad .$$

In definitiva

$$\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda l \mathbf{u}_y}{2 \pi \epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}} = \frac{q \mathbf{u}_y}{4 \pi \epsilon_0 y \sqrt{y^2 + l^2}} \quad . \quad (1.28)$$

Il risultato vale in qualsiasi piano passante per l'asse x , sussiste cioè una simmetria cilindrica.

Si verifica facilmente, a conferma del ragionamento basato sulla simmetria, che la componente dE_x in P dovuta all'elemento di carica dq è $-\lambda \sin \theta d\theta / 4 \pi \epsilon_0 y$ per cui l'integrale esteso a tutto il filo è nullo.

Osserviamo che il campo (1.28) non presenta la dipendenza $1/r^2$ tipica della carica puntiforme, appunto perché è prodotto da una distribuzione estesa. Se però ci allontaniamo molto dal filo ($y \gg l$), la (1.28) diventa

$$\mathbf{E}(0, y \gg l) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 y^2} \mathbf{u}_y$$

e coincide con il campo generato da una carica puntiforme q posta nel centro del filo: all'aumentare della distanza il filo appare sempre più piccolo, fino ad essere confuso con un punto.

Quando il filo è infinitamente lungo risulta $l \gg y$ e da (1.28) si ha

$$\mathbf{E}(0, y \ll l) = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 y} \mathbf{u}_y \quad . \quad (1.29)$$

Il campo elettrostatico generato da un filo indefinito uniformemente carico è perpendicolare al filo e costante in tutti i punti che stanno su una superficie cilindrica di raggio y avente il filo come asse. Questa situazione ideale si realizza in pratica con un filo di lunghezza finita nei punti con distanza dal filo molto minore della lunghezza del filo.

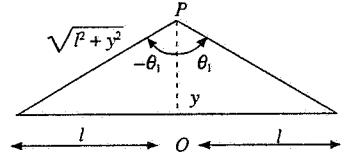


Figura 1.25

Esempio 1.7

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R . Calcolare il campo elettrostatico sull'asse dell'anello.

Soluzione

La densità di carica, costante sull'anello, è $\lambda = q / 2 \pi R$. Considerati due elementi dl di anello, diametralmente opposti, ciascuno con carica $dq = \lambda dl$, nei punti dell'asse si ha la situazione già vista più volte: le componenti lungo l'asse dei campi elementari dovuti alle due cariche sono eguali e concordi, mentre quelle perpendicolari si elidono. Il campo risultante nei punti dell'asse è parallelo all'asse e si calcola integrando la componente x di ciascun elemento dl :

$$dE_x(x) = \frac{\lambda dl}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad .$$

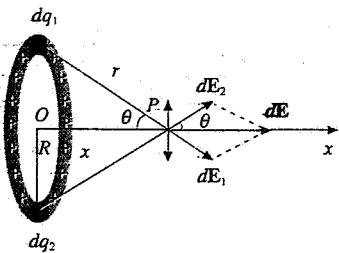


Figura 1.26

Al variare della posizione di dl sull'anello tutti i termini di questa espressione restano costanti e quindi

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda \cos\theta \mathbf{u}_x}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_l dl = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2\pi R \mathbf{u}_x$$

Siccome $r^2 = R^2 + x^2$ e $\cos\theta = x / \sqrt{R^2 + x^2}$,

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (1.30)$$

Il campo è parallelo e concorde all'asse dell'anello, così come orientato in figura, per $x > 0$, è parallelo e discorde per $x < 0$ ed è nullo nel centro dell'anello, dove tutti i contributi elementari si elidono.

Nei punti a grande distanza dal centro ($x \gg R$)

$$\mathbf{E}(x \gg R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \mathbf{u}_x$$

concorde all'asse a destra e discorde a sinistra, come se la carica fosse concentrata nel centro dell'anello; non si distingue più, in questa situazione, la struttura della distribuzione.

Esempio 1.8

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Calcolare il campo \mathbf{E} sull'asse del disco. Estendere il risultato al caso in cui R tende all'infinito (piano uniformemente carico).

Soluzione

La carica è contenuta in uno spessore sottilissimo tra le facce del disco (e non su ciascuna faccia); la densità superficiale di carica, costante su tutto il disco, è $\sigma = q / \pi R^2$. Isoliamo idealmente una corona circolare compresa tra r e $r + dr$, assimilabile a un anello, di superficie $d\Sigma = 2\pi r dr$ e carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$. Questa distribuzione anulare produce sull'asse, a distanza x dal centro, il campo dato da (1.30):

$$d\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x = \frac{q x}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x \quad (1.30)$$

Il campo risultante si ottiene sommando i contributi degli infiniti anelli che compongono il disco, cioè integrando l'espressione precedente per r che varia da 0 a R (e x costante):

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\sigma x \mathbf{u}_x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x$$

Questa è l'espressione del campo per $x > 0$, dove esso è parallelo e concorde all'asse; per $x < 0$ il modulo è lo stesso, cambia solo il verso, per cui scriviamo in generale

$$\mathbf{E}(x) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x = \pm \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{u}_x \quad (1.31)$$

Il segno positivo vale per $x > 0$, quello negativo per $x < 0$. Lasciamo come esercizio la verifica che per grandi distanze ($x \gg R$) il disco è visto come una carica puntiforme q posta nel centro.

Quando x tende a zero i limiti destro e sinistro del campo sono diversi e valgono rispettivamente

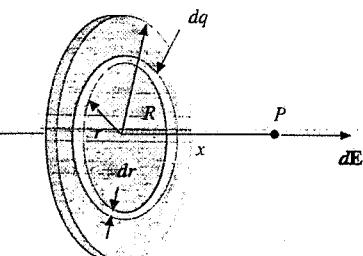


Figura 1.27

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (1.32)$$

Nell'attraversamento della superficie carica con densità σ il campo subisce la discontinuità

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x. \quad (1.33)$$

Se ora facciamo tendere R all'infinito, mantenendo σ costante, otteniamo un *piano indefinito uniformemente carico*; il campo elettrostatico, calcolato passando al limite in (1.31), vale

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_x \quad (1.34)$$

ed è ortogonale al piano, uscente da esso e costante in ogni punto dello spazio ovvero, come si dice, *uniforme*. Esso è discontinuo nel passaggio da una parte all'altra del piano, con discontinuità (1.33).

Nella pratica si ha localmente una situazione tipo piano indefinito quando ci si mette molto vicini ad una superficie carica.

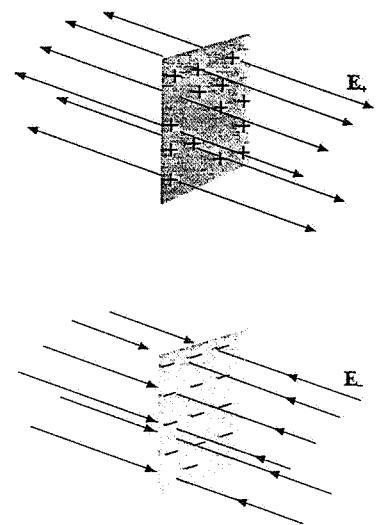


Figura 1.28

Esempio 1.9

Calcolare il campo elettrostatico prodotto da due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'uno $+\sigma$ e l'altro $-\sigma$.

Soluzione

In base alla (1.34) i campi \mathbf{E}_+ e \mathbf{E}_- generati separatamente dai due piani sono in modulo entrambi eguali a $\sigma/2\epsilon_0$. Utilizzando il principio di sovrapposizione per calcolare il campo risultante $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ si vede che i campi si sommano nella regione compresa tra i due piani e si annullano all'esterno. All'interno, per $x_1 < x < x_2$, il campo vale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x, \quad (1.35)$$

mentre è nullo per $x < x_1$ e $x > x_2$. In x_1 e x_2 si hanno le discontinuità $+\sigma/\epsilon_0$ e $-\sigma/\epsilon_0$ rispettivamente.

La disposizione geometrica descritta è utilizzata per ottenere un campo approssimativamente uniforme in una regione limitata tra due superficie piane finite: l'approssimazione è tanto migliore quanto minore è la distanza tra le superficie rispetto alle loro dimensioni; in ogni caso ci si avvicina di più all'uniformità nella zona centrale.

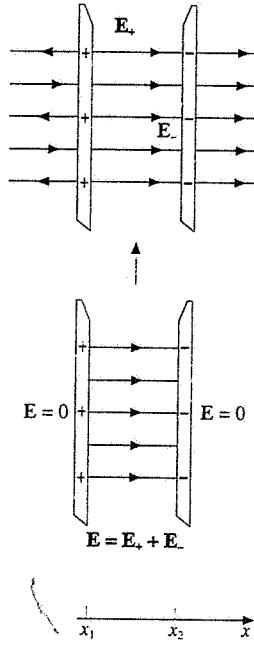


Figura 1.29

Vogliamo concludere questo paragrafo con alcune osservazioni. I risultati ottenuti negli esempi 1.6, 1.7, 1.8 valgono per distribuzioni di carica positiva; se la carica fosse negativa cambierebbe soltanto il verso del campo, che diventerebbe entrante verso le cariche invece che uscente, come si è visto nell'esempio 1.9.

Una caratteristica comune degli esempi mostrati è che le distribuzioni di carica sono uniformi. Questa scelta è stata fatta per ragioni di semplicità analitica, ma nella pratica non è realizzabile facilmente, se non con particolari geometrie.

Sempre per ragioni di semplicità analitica ci siamo limitati a distribuzioni di carica lineari e superficiali e non abbiamo fatto esempi di calcoli di campi generati da distribuzioni volumetriche di carica: infatti, anche in condizioni di simmetria, le integrazioni sono complicate. Vedremo nel paragrafo 3.1 un metodo per

risolvere più semplicemente sia qualche problema di questo tipo che alcuni degli esempi già visti.

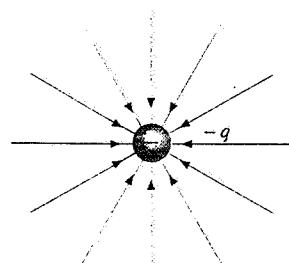
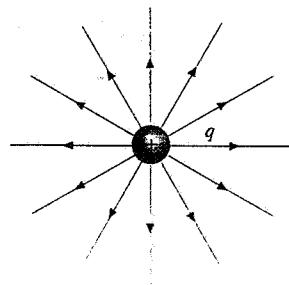


Figura 1.30

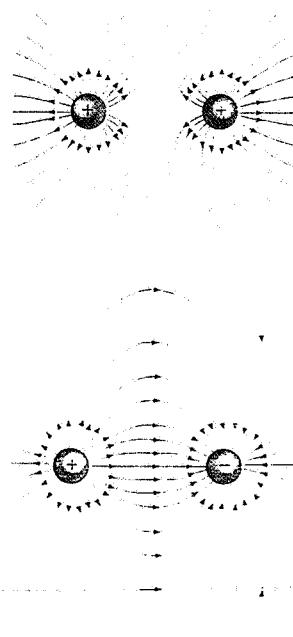


Figura 1.31

1.6 Linee di forza del campo elettrostatico

L'introduzione del concetto di campo elettrostatico mette in evidenza che la presenza di un sistema di cariche, dal caso più semplice della singola carica puntiforme al caso più generale di una distribuzione spaziale, modifica lo spazio circostante nel senso che una carica di prova posta in un qualsiasi punto risente della forza (1.18), attribuita all'interazione con il campo (1.21).

Partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascun parallelo e concorde al campo elettrostatico in quel dato punto, si ottiene una linea che è detta *linea di forza* o *linea di campo*: pertanto in ogni suo punto tale linea per definizione è tangente al campo e il suo verso di percorrenza indica il verso del campo. Se si traccia un certo numero di linee di forza si ha una rappresentazione grafica complessiva del campo in tutto lo spazio, come vedremo negli esempi che seguono.

Nel caso di una carica puntiforme, il cui campo è dato da (1.14), le linee di forza hanno direzione radiale con origine sulla carica e sono uscenti da questa se è positiva, entranti se è negativa. Si vede dalla figura 1.30 che le linee di infittiscono man mano che ci si avvicina alla sorgente del campo e ciò indica che l'intensità del campo è crescente.

Come esempi successivi consideriamo due cariche puntiformi eguali in valore, ma di segno opposto (sistema detto dipolo elettrico che studieremo nel paragrafo 2.7), e due cariche puntiformi eguali in valore e segno (positive nella figura 1.31). Già a questo punto sono evidenti tutte le proprietà delle linee di forza. Oltre alle prime due già enunciate:

- una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo in quel punto;
- le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo è maggiore;

abbiamo che:

- le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito;
- nel caso di cariche di segno opposto, ma eguali in modulo, tutte le linee che partono dalle cariche positive si chiudono su quelle negative, alcune passando eventualmente per l'infinito; se invece le cariche non sono eguali in modulo, alcune linee terminano o provengono dall'infinito, come nella figura 1.32 ($+q, -q/2$).

Un campo uniforme è rappresentato da linee parallele (costanza di direzione e verso) ed equidistanti (costanza del modulo).

Tali sono le linee del campo di un piano indefinito uniformemente carico (esempio 1.8), mentre nel caso dei due piani dell'esempio 1.9 le linee hanno questo andamento solo nell'intercedente.

Nelle figure successive sono mostrate le linee di forza relative alle distribuzioni di carica lineare e superficiale degli esempi 1.6, 1.8.

Dalla proprietà a) che stabilisce il parallelismo tra il tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$ della linea di forza e il campo \mathbf{E} , discende la condizione di proporzionalità tra le componenti di $d\mathbf{l}$ e quelle di \mathbf{E} ,

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z)} = \frac{dz}{E_z(x, y, z)}, \quad (1.36)$$

che può essere assunta come definizione analitica delle linee di forza. Si tratta di un sistema di due equazioni che integrato dà le relazioni tra x, y e z che definiscono una famiglia di curve. Se il problema è bidimensionale le (1.36) si riducono all'unica $dx/E_x = dy/E_y$.

Applicando (1.36) alla situazione tridimensionale più semplice, che è sempre quella della carica puntiforme, e ricordando le (1.15) abbiamo

$$\frac{dx}{x - x_1} = \frac{dy}{y - y_1} = \frac{dz}{z - z_1}$$

Consideriamo l'eguaglianza, per esempio, tra il primo e il secondo membro e tra il primo e il terzo e integriamo da un punto (x_2, y_2, z_2) a un punto (x, y, z) ; otteniamo, passando attraverso i logaritmi,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che sono le equazioni nello spazio di una retta passante per il punto (x_1, y_1, z_1) dove si trova la carica e il punto generico (x_2, y_2, z_2) ; al variare del punto generico si ha una stella di rette passanti per la carica.

Torneremo a utilizzare (1.36) nel capitolo 4 per un caso più interessante (esempio 4.25).

1.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico.

Esperienza di Rutherford

Supponiamo di immettere una carica puntiforme q in una zona di spazio in cui esiste un campo elettrostatico generato da un sistema di cariche ferme, che non vengono perturbate in alcun modo dalla presenza della carica. Questa, di massa m , è sottoposta alla forza (1.18) e la legge della dinamica di Newton, in condizioni non relativistiche, si scrive

$$q\mathbf{E} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\mathbf{E}. \quad (1.37)$$

Integrando la (1.37) si determinano posizione e velocità della carica, note posizione e velocità iniziali.

Il problema non è semplice perché, pur essendo il campo \mathbf{E} costante nel tempo, non lo è in generale nello spazio e la carica, passando in istanti successivi in punti diversi, è sottoposta all'azione di un campo variabile. Naturalmente la soluzione è più accessibile se la dipendenza del campo dalle coordinate permette un'integrazione non difficoltosa. Ad esempio, se il campo ha l'andamento radiale $k\mathbf{r}$ e la carica è negativa, questa sente una forza di richiamo $-kq\mathbf{r}$ e, con opportune condizioni iniziali, descrive un moto armonico semplice. Il caso più facile è certamente quello del campo uniforme, che trattiamo nell'esempio seguente.

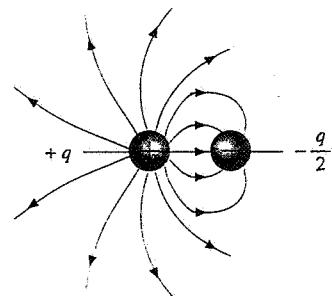


Figura 1.32

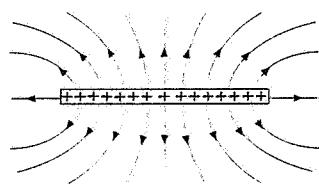


Figura 1.33

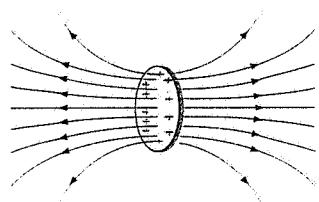


Figura 1.34

Esempio 1.10

Una carica q di massa m è lasciata libera in quiete in una regione in cui esiste un campo elettrostatico uniforme \mathbf{E} parallelo e concorde all'asse x . Descrivere il moto della carica.

Soluzione

In un campo uniforme l'accelerazione è costante; se la velocità iniziale è diretta lungo l'asse x il moto della carica è rettilineo uniformemente accelerato con equazioni per lo spazio e la velocità date da

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v(t) = v_0 + at, \quad v^2(x) = v_0^2 + 2 a(x - x_0)$$

in cui $a = q E / m$ è concorde al campo \mathbf{E} se la carica è positiva, discorde se è negativa. In particolare per $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$

$$x(t) = \frac{q E}{2 m} t^2, \quad v(t) = \frac{q E}{m} t, \quad v^2(x) = \frac{2 q E}{m} x.$$

Se invece la velocità iniziale forma un certo angolo con l'asse x , il moto ha una componente uniformemente accelerata lungo l'asse x e una componente uniforme ortogonalmente all'asse x per cui la traiettoria è una parabola, come vedremo esplicitamente nell'esempio 2.4.

La variazione di energia cinetica della particella è

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2(x) - \frac{1}{2} m v_0^2 = m a (x - x_0) = q E (x - x_0) = F(x - x_0),$$

pari al lavoro della forza (costante), come deve essere; si osservi che ΔE_k non dipende dalla massa della carica (ma la velocità sì).

Nel caso proposto la carica positiva parte dalla posizione $x = 0$ e arriva nella posizione

x dopo un tempo $t = \sqrt{2 m x / q E}$ con velocità $v = \sqrt{2 q E x / m}$ ed energia cinetica $q E x$. Se mettiamo una particella di eguale massa ed eguale carica, ma negativa, con velocità nulla nella posizione x , essa arriva nell'origine nello stesso tempo e con la stessa velocità in modulo; anche l'energia cinetica è la stessa e in effetti il lavoro della forza elettrica è lo stesso nei due casi (se q avesse avuto velocità iniziale v_0 , $-q$ avrebbe dovuto avere $-v_0$).

Si tratta del caso particolare di un fatto generale, che è contenuto in (1.37): un campo accelerante per una data carica q è decelerante per una carica $-q$ con le stesse condizioni iniziali, ma è accelerante per una carica $-q$ che si muova in verso opposto. Una volta che è stata determinata la traiettoria di una particella con carica positiva in un certo campo, quella stessa traiettoria può essere percorsa in verso opposto e con la stessa velocità da una particella con la stessa massa e carica opposta, purché si scelgano opportunamente le condizioni iniziali.

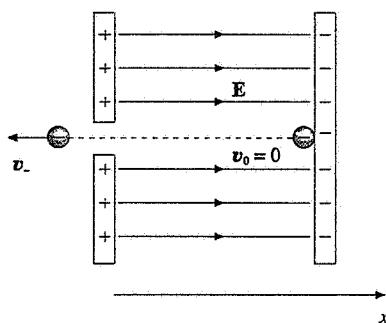
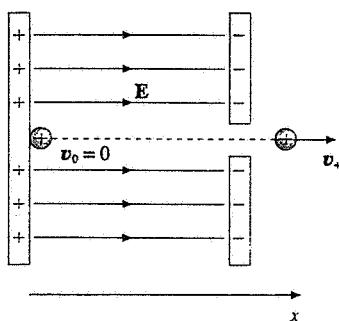


Figura 1.35

L'esempio appena visto dimostra l'utilizzazione dei campi elettrostatici per accelerare particelle cariche; storicamente questo è stato il primo metodo funzionante. Torneremo sull'argomento nei capitoli successivi.

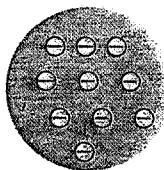
Un caso dinamico molto particolare, ma estremamente importante, è quello del moto relativo di due cariche puntiformi sottoposte alla loro interazione mutua che, per velocità molto minori di quella della luce, è data dalla legge di Coulomb (1.9).

Se le cariche sono di segno opposto la forza è attrattiva e abbiamo una situazione del tutto analoga a quella di due masse soggette all'interazione gravitazionale, che è stata discussa nel capitolo 5 del primo volume e che riprenderemo nel paragrafo 2.3 per descrivere il primo modello atomico, quello di Bohr (1913), e le sue modifiche dovute a Sommerfeld.

Anche il caso di cariche dello stesso segno ha avuto un'applicazione storica fondamentale da parte di Rutherford (1911) che descriviamo brevemente.

Esperienza di Rutherford

Atomo di Thomson



All'epoca non era noto come le cariche elettriche fossero distribuite nell'atomo. Un modello, dovuto a Thomson, suggeriva che le cariche negative, gli elettroni, fossero distribuite all'interno di una sfera carica positivamente di raggio pari a quello dell'atomo.

Una conseguenza di tale struttura, che possiamo intuire qualitativamente, è che una carica lanciata contro l'atomo non dovrebbe essere molto deviata rispetto alla sua direzione di incidenza a causa dell'interazione elettrica con i costituenti atomici. Supponendo che la massa della particella carica proiettile sia molto maggiore di quella dell'elettrone, nelle interazioni con questi ultimi la carica subisce accelerazioni quasi trascurabili, mentre nelle interazioni con i componenti positivi gli effetti di molte interazioni successive in media si compensano con il risultato di causare di norma piccole deviazioni e praticamente mai deviazioni importanti (la deviazione complessiva risultando dal fatto che le accelerazioni dovute alle singole interazioni non sono in generale parallele alla velocità). Nell'attraversamento di uno spessore finito di materiale l'effetto complessivo dovrebbe rimanere piccolo.

Una prima verifica sperimentale venne effettuata bombardando sottili lame metalliche, in oro, argento, rame di spessori di $0.1 \mu\text{m} = 10^{-7} \text{ m}$, con particelle α , dotate di carica $2e$ e massa circa quattro volte quella del protone, emesse con una determinata energia cinetica da una sorgente radioattiva e opportunamente collimate in direzione (oggi sappiamo che la particella α è composta da due protoni e due neutroni ed è identica al nucleo dell'atomo di elio). Si trovò così che le deflessioni valevano in media circa 1° , ma che un certo numero di particelle α , ben superiore alle attese, subiva deviazioni notevoli, anche oltre 90° .

Per spiegare l'evidenza sperimentale contraria al modello di Thomson, Rutherford propose un nuovo modello in cui la carica positiva (*nucleo*), invece di essere distribuita in tutto il volume dell'atomo, era accumulata nel centro, praticamente puntiforme, mentre la carica negativa portata dagli elettroni occupava tutto il volume dell'atomo. Nella maggior parte dei casi le particelle α che attraversano il foglio passano lontane dai nuclei e subiscono piccole deflessioni; se però la traiettoria passa molto vicina ad un nucleo, a causa dell'andamento $1/r^2$ della forza di Coulomb l'interazione può essere molto violenta e causare una grossa deflessione.

Quantitativamente, consideriamo una particella α con energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$ che si muove inizialmente lungo un asse parallelo all'asse x : in figura 1.37 sono mostrati tre

Atomo di Rutherford

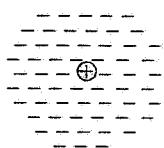


Figura 1.36

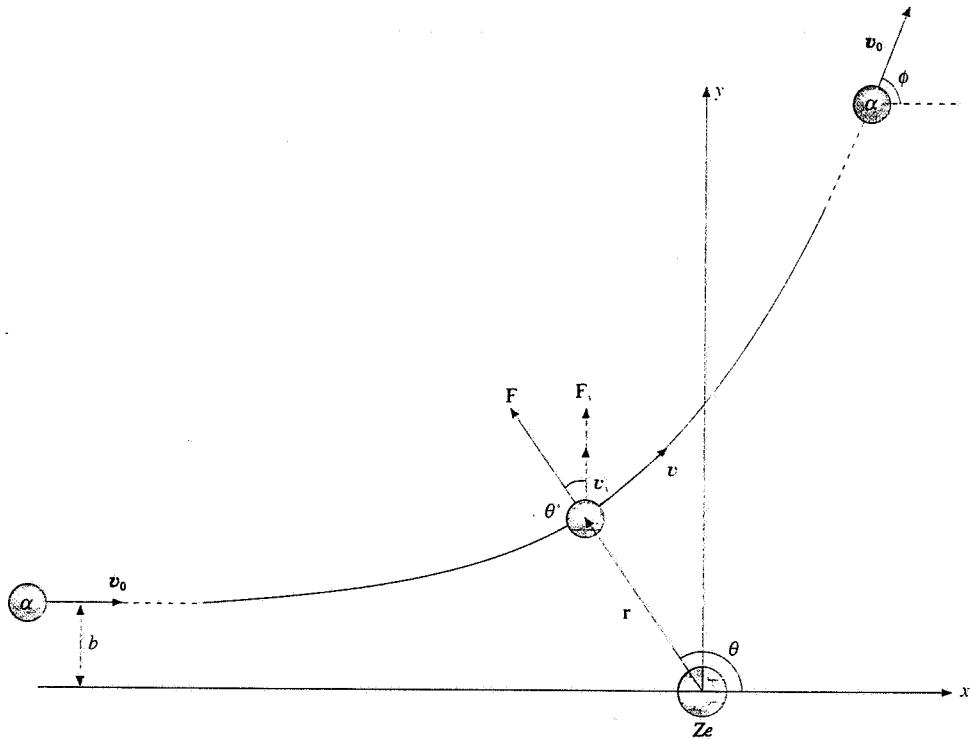


Figura 1.37

istanti particolari, quando la particella è a distanza ∞ , quando è vicina al nucleo, quando è a distanza $+\infty$. La deflessione è causata dalla forza elettrica repulsiva che vale in modulo $F = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, se Ze è la carica positiva del nucleo. Tale forza centrale è conservativa e quindi si conservano durante il moto, che si svolge in un piano, il momento angolare (rispetto al centro della forza) e l'energia meccanica. Nell'istante iniziale questa coincide con E_k ed è positiva: siamo perciò nel caso, già discusso nel capitolo 5 del primo volume, in cui la traiettoria è un'iperbole. Supponiamo inoltre che il nucleo abbia massa molto superiore a quella della particella α e si possa pertanto considerare fermo durante il processo (altrimenti si ricorre al concetto di massa ridotta).

La conservazione del momento angolare comporta l'eguaglianza

$$mv_0 b = m r^2 \frac{d\theta}{dt} ,$$

Parametro d'impatto

dove a secondo membro abbiamo l'espressione generica del modulo del momento angolare di un punto che descrive un moto piano; $mv_0 b$ è il momento angolare iniziale e b è il cosiddetto *parametro d'impatto*.

L'equazione del moto lungo l'asse y è

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_y = F \cos\theta' = F \sin\theta = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

ed esprimendo r^2 dall'equazione di conservazione del momento angolare

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0 b} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Possiamo eliminare dt e integrare:

$$\int_0^{v_0 \sin\phi} dv_y = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0 b} \int_{\pi}^{\phi} \sin\theta d\theta ;$$

infatti lungo l'asse y la velocità iniziale è nulla e quella finale è la componente y di v_0 (possiamo dire questo perché l'energia meccanica finale è tutta cinetica e coincide con quella iniziale: la velocità della particella α è la stessa in modulo): l'angolo polare θ , misurato rispetto al verso positivo dell'asse x varia da π a ϕ passando da $-\infty$ a $+\infty$. Di conseguenza

$$v_0 \sin\phi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0 b} (1 + \cos\phi)$$

e poiché vale l'identità trigonometrica

$$\frac{\sin\phi}{1 + \cos\phi} = \tan \frac{\phi}{2}$$

otteniamo il risultato

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \frac{1}{b}$$

che lega il parametro d'impatto b e l'*angolo di diffusione* ϕ nell'urto di una particella α contro un nucleo puntiforme di carica Ze e massa molto grande. Si vede che se b è molto piccolo sono possibili grandi valori di ϕ ; al limite per $b \rightarrow 0$ ϕ tende a π , la particella α rimbalza indietro.

Il parametro di impatto di ogni singolo urto non è controllabile sperimentalmente, però non è difficile calcolare la probabilità di deflessione che risulta proporzionale: al prodotto ns , se n è il numero di atomi per unità di volume nel foglio di spessore s , alla quantità $(2Ze^2/4\pi\epsilon_0 mv_0^2)^2$ e alla funzione $1/\sin^2(\phi/2)$; ciò vuol dire che la frazione di particelle α deflesse di un angolo ϕ , a parità di caratteristiche del bersaglio e a parità di energia cinetica, è proporzionale a $[\sin^2(\phi/2)]^{-1}$.

Tutte queste previsioni del modello di Rutherford furono verificate con precisione da Geiger e Marsden nel 1913, trovando pieno accordo con i risultati sperimentali.

L'esperimento di Rutherford è di importanza capitale nella storia della fisica moderna, oltre che per la scoperta della struttura nucleare dell'atomo, perché ha dato origine a un metodo di indagine tuttora unico, che consiste nello studiare le strutture nucleari e subnucleari e le interazioni tra i loro costituenti attraverso urti tra un proiettile e un bersaglio: dalle caratteristiche di questi *processi di diffusione* (o di scattering, come si dice in lingua inglese) si sono ricavate praticamente tutte le informazioni in nostro possesso sui fenomeni subatomici.

Sempre utilizzando particelle α come proiettili lo stesso Rutherford nel 1919 provocò le prime reazioni nucleari artificiali. Ci si rese conto in quegli anni, oltre che dell'importanza di poter disporre di diversi tipi di proiettili e bersagli, anche della necessità di operare ad energie variabili e controllabili, dando così impulso allo sviluppo degli acceleratori di particelle i cui primi esemplari, basati sull'utilizzazione di campi elettrostatici, entrarono in funzione intorno al 1930.

1.8 Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan

Nel paragrafo 1.2 abbiamo detto che una delle proprietà della carica elettrica è di essere quantizzata, cioè di essere sempre multipla intera di un certo valore minimo, detto carica elementare, che corrisponde alla carica portata dall'elettrone e dal protone.

Le misure condotte da Millikan tra il 1909 e il 1917 hanno permesso di determinare il valore della carica elementare; da questo, e noto con altri metodi che discuteremo più avanti il rapporto e/m tra carica e massa dell'elettrone, è stato possibile ricavare il valore della massa dell'elettrone.

L'apparato sperimentale è mostrato schematicamente in figura 1.38. Tra due dischi A e B è possibile stabilire un campo elettrico, dell'ordine di 10^5 N/C , diretto ad esempio dall'alto verso il basso e uniforme nella zona centrale (la distanza tra i dischi è circa dieci volte più piccola del diametro). Attraverso un foro in A passano in questa zona goccioline d'olio, nebulizzato con uno spruzzatore, alcune delle quali risultano caricate, in genere negativamente per strofinio contro l'ugello dello spruzzatore. Lo spazio tra i dischi è opportunamente illuminato e il moto verticale delle gocce, che avviene in aria, è osservato con un microscopio M , fornito di oculare micrometrico: si può così misurare lo spazio percorso da una goccia in un dato tempo e quindi la sua velocità di caduta. Il tutto è termostatato per evitare moti convettivi nell'aria dovuti a gradienti di temperatura.

In assenza di campo elettrico l'equazione del moto è

$$m a = m' g - 6 \pi \eta r v$$

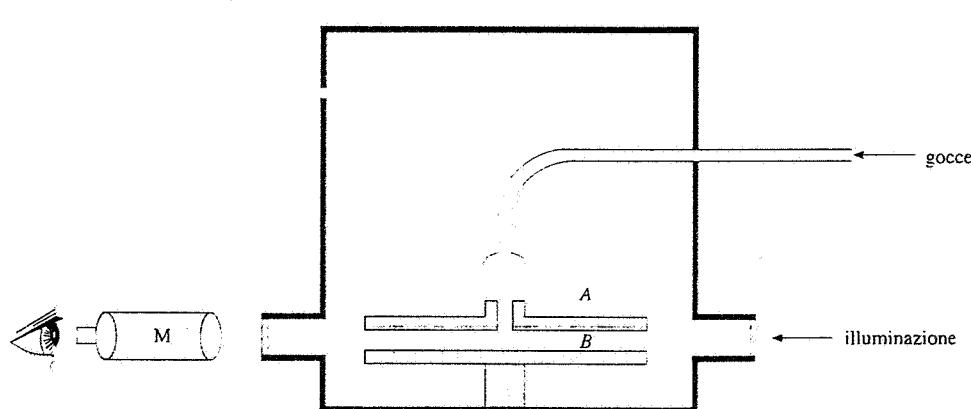


Figura 1.38

m è la massa della goccia, $m'g$ è la forza peso agente sulla goccia corretta per la spinta idrostatica,

$$m'g = (\rho - \rho_a) \frac{4}{3} \pi r^3 g ,$$

con ρ densità dell'olio, ρ_a densità dell'aria nelle condizioni sperimentali, r raggio della goccia. Il termine proporzionale alla velocità rappresenta la resistenza dell'aria, la cui viscosità è η (legge di Stokes, vedi il paragrafo 8.13 del primo volume).

A regime, quando la resistenza eguaglia la forza peso corretta, il moto è rettilineo uniforme con velocità

$$v_0 = \frac{m'g}{6\pi\eta r} = \frac{2(\rho - \rho_a)g r^2}{9\eta} ;$$

dalla misura di v_0 si può pertanto dedurre il raggio della goccia; valori tipici sono $v_0 \sim 1 \text{ mm/s} = 10^{-3} \text{ m/s}$, $r \sim 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.

Quando si applica il campo elettrico la legge del moto diviene

$$ma = m'g - qE - 6\pi\eta rv$$

se la carica è negativa e il campo è diretto come si è detto; a regime la velocità di caduta è

$$v_1 = \frac{m'g - qE}{6\pi\eta r} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r} , \quad (1.39)$$

minore di quella precedente in quanto nella situazione descritta la forza elettrica frena il moto; con il citato valore del campo, $v_1 \sim 0.1 v_0 \sim 10^{-4} \text{ m/s}$.

Si osservi che variando il valore del campo è possibile fare scendere più o meno velocemente la goccia o mantenerla ferma o farla salire; si possono così eseguire con la stessa goccia più misure di velocità e pertanto della carica posseduta dalla goccia, secondo (1.39).

Se si irradia l'aria con la radiazione emessa da una sorgente radioattiva o con raggi X avviene il fenomeno della ionizzazione e nell'aria si formano ioni positivi (atomi che hanno perso elettroni a causa della radiazione), e ioni negativi (atomi che hanno catturato gli elettroni liberati dalla radiazione, tipicamente ioni ossigeno).

Osservando il moto delle gocce si vedono di tanto in tanto variazioni brusche della velocità v_1 , attribuibili a variazioni di carica della goccia che nel suo moto ha catturato qualche ione. Oppure, se la goccia è bilanciata, cioè in equilibrio statico, si vede che talvolta essa si mette all'improvviso in movimento, verso l'alto o verso il basso, sempre a causa della cattura di uno o più ioni. In entrambi i casi da (1.39) si deduce che, in modulo,

$$\Delta v_1 = \frac{E}{6\pi\eta r} \Delta q .$$

In particolare, nel caso delle gocce in equilibrio, la misura della variazione di velocità dà il valore della carica degli ioni catturati, indipendentemente dalla carica preesistente della goccia.

Eseguendo un gran numero di misure su una certa goccia e ripetendo l'esperienza con numerose altre gocce, Millikan trovò che la velocità variava sempre in modo discreto, segno di variazioni discrete della carica, e che le quantità calcolate Δq erano sempre esprimibili come multipli interi piccoli di un valore preciso, cioè

come $\Delta q = n e$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Inoltre anche le cariche delle gocce, misurate in assenza di radiazione, risultarono sempre multiple della stessa quantità e , con n maggiore ($10 \div 100$). Queste misure vennero eseguite anche con gocce di glicerina e di mercurio e tutte diedero lo stesso risultato. In conclusione sia le cariche degli ioni che quelle formate per strofinio in materiali isolanti o conduttori, positive o negative, sono sempre multiple di una carica elementare.

Nel corso delle sue misure Millikan scoprì che la legge di Stokes nella forma usuale non vale se il raggio della goccia è così piccolo da avvicinarsi al cammino libero medio delle molecole, che nell'aria a pressione atmosferica è $\sim 10^{-7}$ m, cioè se il mezzo non appare continuo alla sferetta che cade. Egli ottenne dati consistenti operando la sostituzione

$$v \rightarrow \frac{v}{1 + \frac{k}{rp}} :$$

la velocità di caduta è corretta in termini del raggio della goccia e della pressione dell'aria; k è una costante da determinare sperimentalmente.

Il valore attuale di e , dato da (1.8), è maggiore appena dello 0.6% di quello misurato col metodo descritto. La discrepanza è stata ricondotta al valore della viscosità dell'aria utilizzato da Millikan.

1.9 Commenti conclusivi

Raccogliamo in questo paragrafo alcune puntualizzazioni sugli argomenti discussi.

Il primo concetto nuovo che abbiamo incontrato è quello di *carica elettrica*. Possiamo dire che la carica di un corpo caratterizza l'intensità dell'interazione elettrica subita dal corpo e in questo senso verrebbe spontaneo un paragone con la massa, che caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale: dalla massa e dalla carica dipende il comportamento di un corpo rispetto alle due diverse interazioni. Alla massa però è legata un'altra caratteristica indipendente dal tipo di interazione: essa esprime, in base alla legge della dinamica di Newton, la risposta di un corpo a una qualsiasi forza, cioè l'inerzia del corpo. Solo sperimentalmente si trova che la massa inerziale è eguale a quella gravitazionale. Il ruolo della massa appare pertanto duplice rispetto a quello della carica.

Carica elettrica

Le proprietà specifiche delle due grandezze sono molto differenti. La *carica elettrica* presenta due segni, è *quantizzata*, si conserva ed è *relativisticamente invariante*, cioè ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento. La massa ha un solo segno, non è quantizzata e non si conserva: come la carica essa è relativisticamente invariante (una particella ha la stessa massa in qualsiasi sistema di riferimento).

Bisogna però sottolineare che alcune di queste proprietà si manifestano chiaramente soltanto nei fenomeni microscopici. Se consideriamo ad esempio la quantizzazione della carica, essa è evidente a livello atomico e subatomico, ma diventa inapprezzabile non appena il valore della carica è tale che non si riescono a misurare variazioni dell'ordine della carica elementare (nell'esperienza di Millikan il limite era intorno a $200 e$). Di conseguenza nei normali esperimenti di elettrostatica le cariche in gioco non mostrano la loro natura discreta. Invece la conservazione della carica si manifesta sempre, sia nei processi elementari, dove non sono mai state osservate reazioni in cui variasse la somma delle cariche elementari del sistema anche se ne cambiava la composizione, sia nei fenomeni macroscopici, nei quali entro gli errori di misura la carica complessiva di tutti i corpi partecipanti resta costante.

Nel caso della massa, la non conservazione è evidente solo quando possono avvenire trasformazioni di massa in energia; per esempio, si realizzano facilmente reazioni tra nuclei o tra particelle subnucleari in cui nello stato finale ci sono componenti diversi da quelli presenti nello stato iniziale e la massa totale non è la stessa. Quando però si considerano fenomeni macroscopici ordinari, come nello studio della dinamica dei corpi solidi o delle proprietà dei fluidi, non ci sono le condizioni perché avvengono trasformazioni di massa in energia o viceversa (tipiche dei fenomeni nucleari e subnucleari) e quindi la massa si conserva: questa conservazione si osserva per corpi singoli oppure, se avvengono cambiamenti di fase o reazioni chimiche, per tutto il sistema. Il fatto che la massa non sia quantizzata è invece una caratteri-

Campo

stica che si manifesta in ogni ordine di fenomeni.

Si osservi infine, secondo quanto visto nel paragrafo 1.2, che la massa di un sistema è dovuta ai nuclei degli atomi che lo compongono e quindi di norma non varia, come detto sopra, mentre la carica è dovuta ai nuclei e agli elettroni; essendo possibile il trasferimento di questi ultimi da un sistema ad un altro, si ottengono facilmente variazioni di carica, naturalmente col vincolo che la carica totale resta costante.

Legge di Coulomb

Un concetto fondamentale nello studio dell'elettromagnetismo è quello di *campo*, per ora introdotto come campo statico dovuto a una distribuzione di carica. In questo stadio iniziale il campo appare come una grandezza formale, utile per separare nella formula della forza il contributo della sorgente (appunto il campo) e quindi scrivere la forza come interazione di una carica con un campo. In effetti, nei casi statici o lentamente variabili, il campo è inscindibile dalla sorgente; vedremo più avanti che invece, nel caso di fenomeni rapidamente variabili che comportano l'emissione di onde elettromagnetiche, un campo che si propaga acquista una realtà fisica indipendente dalla sorgente.

La presenza del campo è rivelabile esclusivamente attraverso un'interazione, ad esempio la forza subita da una carica, e questa è una nozione basilare, valida per il campo elettrostatico come per il campo magnetostatico che verrà introdotto successivamente e per i campi elettromagnetici variabili nel tempo.

Azione a distanza

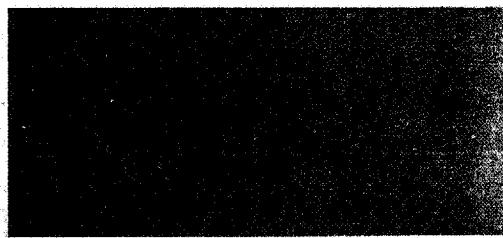
La legge che esprime la forza elettrica tra cariche ferme o in moto con piccola velocità è la *legge di Coulomb*, di cui vogliamo ora mettere in evidenza due aspetti interessanti.

La dipendenza $1/r^2$ comporta che per $r \rightarrow 0$ la forza tenda all'infinito, il che non ha senso fisico: questo vuol dire che la carica veramente puntiforme non è un oggetto reale. Non abbiamo difficoltà ad ammettere ciò per i corpi macroscopici che ovviamente non sono mai puntiformi. Esiste però in natura l'elettrone le cui dimensioni sono inferiori a 10^{-17} m e che porta la carica elementare e : esso per definizione è un oggetto puntiforme carico. Questa difficoltà concettuale, che è insormontabile in fisica classica, è stata risolta soltanto nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica.

Un'altra caratteristica tipica della legge di Coulomb, come della legge della gravitazione di Newton, è la cosiddetta *azione a distanza*: l'interazione avviene senza che ci sia contatto tra i corpi (si pensi ad esempio all'esperimento di Rutherford, ma anche alle forze attrattive o repulsive tra due corpi carichi distanti o all'attrazione tra corpi celesti). Questa proprietà appare molto diversa da quelle di altre forze che si studiano in meccanica, come le forze con cui si spingono o tirano i corpi, direttamente con le mani o tramite una molla o un filo, o le forze di attrito, sia radente che volente o viscoso, forze che non si manifestano a distanza. In realtà ciò avviene perché la materia è neutra; però, quando ad esempio si spinge un corpo, si tende ad avvicinare moltissimo le distribuzioni elettroniche degli atomi dell'oggetto che spinge e del corpo e nascono forze elettriche repulsive che danno luogo alla forza effettivamente osservata. Questo è il significato di contatto a livello macroscopico, che è dunque un'azione a distanza molto breve.

Un'ultima osservazione: negli esperimenti di elettrostatica che sono stati descritti e in quelli dei capitoli successivi si fa in generale riferimento a corpi solidi e in effetti la sperimentazione con questi è più semplice: in particolare i conduttori sono tipicamente metalli nella fase solida. Non è facile sperimentare con i fluidi (a parte il caso molto speciale dell'esperienza di Millikan) e d'altra parte nelle applicazioni pratiche le cariche sono spesso portate dai metalli mentre i fluidi sono utilizzati soprattutto come isolanti. Infatti, dal punto di vista della suddivisione in isolanti e conduttori, i liquidi, con l'eccezione notevole del mercurio, sono isolanti (ottimi come alcuni oli o non molto buoni come l'acqua) e lo stesso vale per i gas. Sia liquidi che gas possono essere resi conduttori rispettivamente con l'elettrolisi e la ionizzazione.

Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico



2.1 Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale

La formula (1.18), che esprime la forza subita da una carica q_0 in un campo elettrostatico, è valida quando le cariche che generano il campo sono fisse e costanti e la carica q_0 è a sua volta fissa oppure si muove senza però perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti. Il termine *elettrostatico* è utilizzato proprio per evidenziare questa situazione di immutabilità.

Come vedremo nel capitolo 7, se la carica q_0 si muove in presenza di altre cariche, sia fisse che in moto, la forza su di essa è sempre proporzionale a q_0 . Più in generale, quando su una carica q_0 agisce una forza \mathbf{F} di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma ad esempio dovuta a processi chimici o ad azioni meccaniche, o ad altre cause ancora, possiamo definire sempre un campo elettrico \mathbf{E} , che si indica anche col nome di *campo elettromotore*, come rapporto tra la forza \mathbf{F} che agisce sulla carica e il valore della carica stessa:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} . \quad (2.1)$$

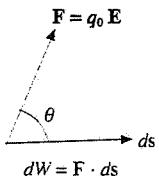


Figura 2.1

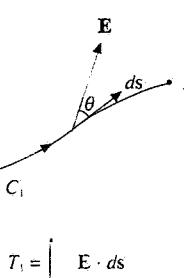
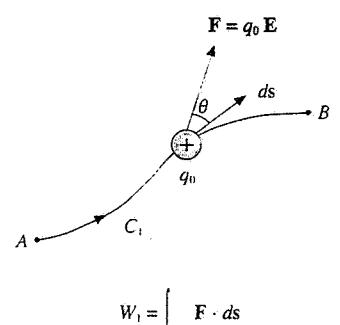


Figura 2.2

Alla (2.1) si dà carattere generale: *la forza che agisce su una carica, e che in quanto tale si chiama forza elettrica, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico.*

Il lavoro della forza \mathbf{F} per uno spostamento elementare ds della carica q_0 è dato da

$$dW_1 = \mathbf{F} \cdot ds = q_0 \mathbf{E} \cdot ds = q_0 E \cos\theta ds \quad (2.2)$$

se θ è l'angolo tra il campo elettrico \mathbf{E} e lo spostamento ds . Per uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B lungo un percorso C_1 il lavoro è dato da

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot ds \quad (2.3)$$

dove l'ultimo integrale è l'*integrale di linea* del campo \mathbf{E} lungo C_1 (si veda l'appendice A del primo volume). Questo integrale, ovvero il rapporto W_1/q_0 tra il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} nello spostamento della carica q_0 da A a B lungo il percorso C_1 e il valore della carica, definisce la *tensione elettrica tra i due punti A e B relativa al percorso C_1 :*

$$T_1 (A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot ds . \quad (2.4) \quad \text{Tensione elettrica}$$

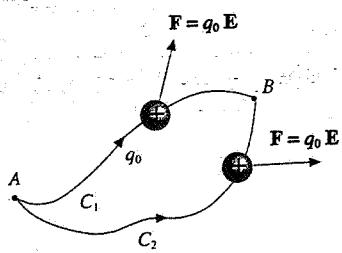


Figura 2.3

Se si considera un altro percorso C_2 si trova in generale un lavoro diverso e quindi un *diverso valore della tensione elettrica*, pur essendo i punti A e B gli stessi:

$$T_1(A \rightarrow B \text{ lungo } C_1) \neq T_2(A \rightarrow B \text{ lungo } C_2)$$

Per un percorso chiuso C , composto ad esempio dal percorso C_1 da A a B e dal percorso $-C_2$ da B ad A , il lavoro risulta

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = W_1 - W_2,$$

in cui abbiamo sfruttato la proprietà dell'integrale di linea di cambiare soltanto di segno se cambia il verso di percorrenza lungo la linea e utilizzato il simbolo \oint per indicare che il percorso è chiuso (ricordiamo che in questo caso l'integrale di linea si chiama anche *circuitazione*). Vediamo che *in generale il lavoro per un percorso chiuso è diverso da zero*. Inseriamo (2.1):

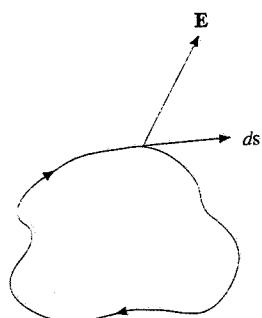


Figura 2.4

Forza elettromotrice
(f.e.m.)

Il lavoro per spostare una carica lungo il percorso chiuso C è dato dal prodotto della carica per la circuitazione del campo elettrico lungo C . L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$
(2.6)

che esprime il rapporto tra lavoro compiuto e carica per lo spostamento C si definisce *forza elettromotrice* (f.e.m.) *relativa al percorso chiuso C*. Essa è in generale diversa da zero e dipende dalle caratteristiche del campo e dal percorso C scelto, ma non dalla carica q_0 ; malgrado il nome improprio, si tenga ben presente che \mathcal{E} non è una forza.

Abbiamo visto in meccanica che esiste una categoria di *forze*, dette *conservative*, per le quali il lavoro compiuto nello spostamento di un punto da A a B è funzione soltanto della posizione di partenza e di quella di arrivo e non del cammino seguito:

$$W(C_1) = \dots = W(C_i) = \dots = W(C_n),$$

qualunque sia C , purché inizi in A e finisca in B . Ne deriva che il *lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo*, ovvero che la circuitazione di una forza conservativa è nulla.

Non si verifica in natura che qualsiasi forza elettrica sia conservativa; questo è però il caso delle forze elettrostatiche, come dimostreremo nel paragrafo 2.2, e il risultato si esprime anche dicendo che il *campo elettrostatico è conservativo*. Non dipendendo dal percorso effettivamente seguito l'integrale che compare nella (2.3) può sempre essere espresso come differenza dei valori di una funzione delle coordinate

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = f(B) - f(A).$$

All'opposto di questa funzione si dà il nome di *potenziale elettrostatico* del campo E , che risulta pertanto definito dalla

$$V_A - V_B = \oint_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

Differenza di potenziale
(d.d.p.)

In realtà è la *differenza di potenziale* (d.d.p.) tra il punto A e il punto B ad essere definita da (2.7) e ciò vuol dire che il potenziale in un punto è determinato a meno di una costante additiva. Inserendo (2.7) in (2.3)

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V \quad (2.8)$$

il *lavoro svolto dalla forza elettrica per portare q_0 da A a B* è dato dal prodotto di q_0 per la d.d.p. tra A e B ovvero dal prodotto di q_0 per l'opposto della d.d.p. tra il punto di arrivo e il punto di partenza.

Ricordiamo che ad ogni forza conservativa è associata una determinata *energia potenziale* e che il *lavoro della forza conservativa è pari all'opposto della variazione della corrispondente energia potenziale*. Nel caso elettrostatico abbiamo pertanto

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) \quad \text{Energia potenziale}$$

e dal confronto con (2.8) seguono le egualanze

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V, \quad U_e = q_0 V \quad (2.9)$$

Una carica q_0 posta in un campo elettrostatico possiede un'energia potenziale proporzionale al potenziale (e anch'essa definita a meno di una costante additiva).

Notiamo esplicitamente l'uso del simbolo U_e per l'*energia potenziale elettrostatica* al posto del simbolo E_p , introdotto nello studio della meccanica. La scelta è motivata dall'opportunità di evitare confusione con il simbolo del campo elettrico.

Dalle (2.5, 2.6, 2.7, 2.8) segue che per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo \mathbf{E} , essendo la d.d.p. nulla in quanto $A \equiv B$, valgono le relazioni

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad W = q_0 \oint = 0 \quad (2.10)$$

In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è sempre eguale a zero e quindi è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica nella posizione iniziale.

2.2 Calcolo del potenziale elettrostatico

Rivediamo brevemente i risultati del paragrafo precedente: il lavoro di una forza elettrica si può sempre esprimere attraverso l'integrale di linea del campo elettrico lungo il percorso seguito dalla carica e in generale dipende dal percorso, come vedremo nei capitoli successivi.

Se però il campo è elettrostatico abbiamo affermato che esso è conservativo e pertanto il lavoro risulta indipendente dal percorso: ciò porta alla definizione del potenziale e dell'energia potenziale.

In questo paragrafo dimostriamo che il campo elettrostatico di una qualsiasi distribuzione di carica è conservativo e ricaviamo le espressioni esplicite di V ed U_e .

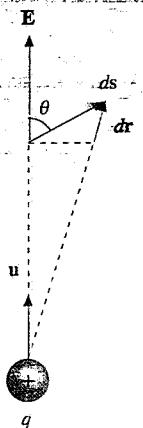


Figura 2.5

Iniziamo dal caso più semplice, che è quello del campo generato da una carica puntiforme. Il lavoro della forza \mathbf{F} per uno spostamento elementare ds della carica q_0 nel campo della carica puntiforme q , fissa in O , è dato in base a (2.2) e (1.14) da

$$dW = q_0 \mathbf{E} \cdot ds = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u} \cdot ds}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

per cui

$$\mathbf{E} \cdot ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

La quantità $dr = \mathbf{u} \cdot ds = ds \cos\theta$, proiezione di ds lungo la direzione \mathbf{u} del campo, rappresenta di quanto è variata la distanza r tra q_0 e q a seguito dello spostamento ds . La funzione integranda risulta così dipendere soltanto dalla variabile r e si ottiene subito, per uno spostamento dal punto A al punto B , caratterizzati rispettivamente dalle distanze r_A e r_B dal punto O ,

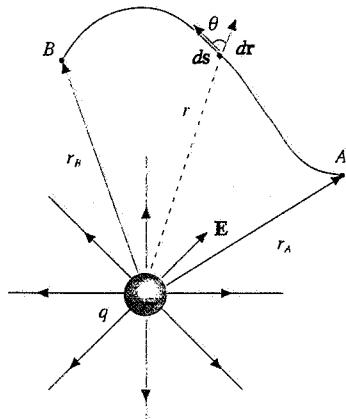


Figura 2.6

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.11)$$

Il lavoro corrispondente è

$$W = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot ds = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.12)$$

Abbiamo così verificato che il *lavoro non dipende dal percorso seguito*. Il risultato era scontato perché la *forza in questione è centrale* e il suo modulo dipende solo dalla distanza r , però il calcolo fornisce le espressioni della differenza di potenziale e della variazione di energia potenziale nel campo di una carica puntiforme; basta confrontare (2.11) con (2.7) e (2.12) con (2.9):

Differenza di potenziale

$$V_A - V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} , \quad (2.13)$$

Variazione dell'energia potenziale

$$U_e(A) - U_e(B) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r_B} . \quad (2.14)$$

Ricordando che il potenziale e l'energia potenziale sono definiti a meno di una costante additiva, (2.13) e (2.14) possono essere considerate le variazioni delle funzioni

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + A , \quad U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} + B ,$$

che danno rispettivamente il *potenziale* in un punto a distanza r dalla carica q e l'*energia potenziale* della carica q_0 distante r da q .

Il fatto che la forza tra due cariche decresca con la distanza suggerisce che per cariche molto lontane tra loro la forza sia trascurabile, cioè non ci sia più interazione. Al limite, a distanza infinita, è lecito supporre che sia

$$E(\infty) = 0 , \quad F(\infty) = 0 , \quad V(\infty) = 0 , \quad U_e(\infty) = 0 .$$

Poiché $V(\infty) = A$ ed $U_e(\infty) = B$ possiamo assumere $A = B = 0$. D'altra parte da (2.7)

$$\int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(r) - V(\infty) = V(r)$$

e in conclusione abbiamo per il potenziale generato da una carica puntiforme q in un punto a distanza r

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.15)$$

e per l'energia potenziale di q_0 nel campo di q

$$U_e(r) = q_0 V(r) = q_0 \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.16)$$

Osserviamo che il potenziale è costante in tutti i punti della superficie sferica di raggio r con centro nella carica q .

I risultati trovati si estendono senza difficoltà, in base al *principio di sovrapposizione*, al caso di un campo elettrostatico generato da un numero qualsiasi di cariche puntiformi fisse q_1, q_2, \dots, q_n .

Il lavoro per uno spostamento finito da A a B della carica q_0 è

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

e nell'integrale di linea del campo si inserisce la (1.16):

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\sum_i \mathbf{E}_{i,i} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Ciascun integrale porta ad un risultato tipo (2.11) e quindi il campo delle n cariche è conservativo. Da (2.7) e (2.8) che definiscono in ogni caso d.d.p. e lavoro abbiamo

$$V_A - V_B = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} \quad (2.17)$$

$$W = q_0(V_A - V_B) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}} - \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}} = -\Delta U_e \quad . \quad (2.18)$$

Ragionando come nel caso di una singola carica puntiforme, il potenziale generato dal sistema di cariche nel punto $P(x, y, z)$, distante r_i dalla carica q_i , è

$$V(x, y, z) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad . \quad (2.19)$$

Questo risultato indica che il potenziale elettrostatico generato da un sistema di cariche puntiformi è uguale alla somma dei potenziali generati singolarmente dalle cariche. Dette x_i, y_i, z_i le coordinate della carica q_i la (2.19) si scrive

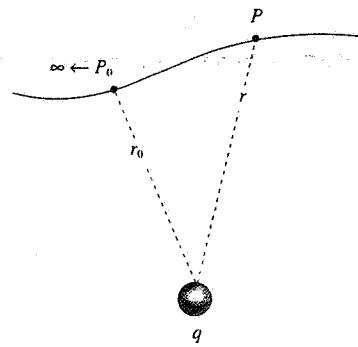


Figura 2.7

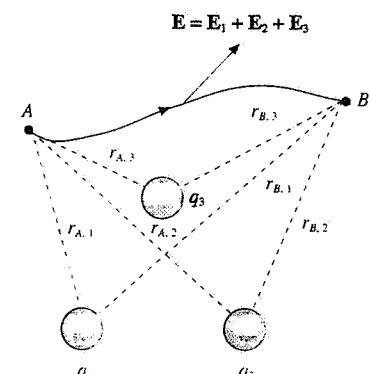
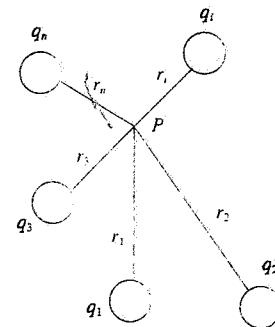


Figura 2.8



$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{r_i}$$

Figura 2.9

Potenziale elettrostatico di un sistema discreto di cariche

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{1/2}} . \quad (2.20)$$

Infine, nel caso che le cariche siano distribuite in modo continuo, come descritto nel paragrafo 1.5 con *densità lineare* λ o *superficiale* σ o *spaziale* ρ , il campo elettrostatico è ancora ovviamente conservativo e per il calcolo del potenziale basta sostituire nella (2.20) alla sommatoria l'integrale di linea, di superficie o di volume:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda ds}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda(x', y', z') ds}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \quad (2.21)$$

Potenziale elettrostatico di distribuzioni continue di carica

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma d\Sigma}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} \quad (2.22)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x', y', z') d\tau}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} . \quad (2.23)$$

Le (2.20, 2.21, 2.22, 2.23) forniscono le regole per il calcolo del potenziale generato da un sistema di cariche comunque distribuite. Nell'eseguire le operazioni di somma o di integrale le coordinate x, y, z sono fisse mentre sono variabili le coordinate delle cariche sorgenti.

Il lavoro si calcola tramite (2.8); l'energia potenziale elettrostatica di una carica q_0 posta nel punto P è data da (2.9):

$$U_e(x, y, z) = q_0 V(x, y, z) . \quad (2.24)$$

Il potenziale elettrostatico, in tutte le situazioni descritte, risulta una *funzione (univoca)* del punto, *continua e derivabile*, che può essere calcolata una volta che sia definita la distribuzione delle cariche sorgenti, indipendentemente dalla presenza della carica q_0 . Come nel caso del campo E si parla di campo vettoriale, così per il *potenziale elettrostatico* si può parlare di *campo scalare*. A differenza però del campo elettrico non è il valore del potenziale ad essere significativo, ma le sue variazioni, come dicono (2.7) e (2.8).

Infine, anche per il potenziale elettrostatico si possono ripetere i commenti fatti nel paragrafo 1.9 a proposito del campo elettrostatico. Da una parte esso è un concetto molto utile per il calcolo del lavoro, nella cui formula evidenzia il contributo delle sorgenti, ma non ha, almeno nei casi statici, un'esistenza indipendente dalle sorgenti. Dall'altra, la presenza di un potenziale variabile con la posizione in una determinata regione di spazio si mette in evidenza solo attraverso la constatazione che lo spostamento di una carica in quella regione richiede un certo lavoro. Osserviamo di nuovo che in realtà è la d.d.p. ad essere messa in evidenza, se il potenziale fosse ovunque costante non si sarebbe alcun effetto, in quanto non ci sarebbero campo e forza elettrica.

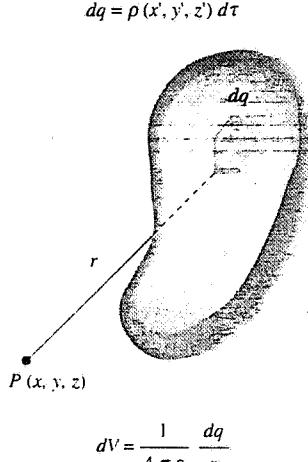


Figura 2.10

Unità di misura

Poiché la differenza di potenziale è un lavoro diviso per una carica l'unità di misura nel SI è joule/coulomb, J/C. Questa unità è molto importante e si chiama *volt*, simbolo V; quindi

$$V = \frac{J}{C}$$

La d.d.p. di 1V è quella che dà luogo al lavoro di 1J per il trasporto di una carica di 1C. Dall'equazione (2.7) si vede che l'unità di misura del campo elettrico, già definita come N/C, è anche eguale a quella del potenziale divisa per quella della lunghezza: in effetti

$$\frac{N}{C} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m}$$

L'unità V/m (volt/metro) è quella più comunemente usata per il campo elettrico. Si noti che il volt è l'unità di misura anche delle tensioni elettriche e delle forze elettromotrici.

Esempio 2.1

Calcolare il potenziale elettrostatico nel centro di un triangolo equilatero di lato l se in ogni vertice c'è una carica q .

Soluzione

Abbiamo un sistema discreto di cariche e quindi utilizziamo la (2.19), in cui i tre contributi sono eguali. La distanza r di ogni carica dal centro è tale che $r \cos 30^\circ = l/2$, cioè $r = l/\sqrt{3}$, e quindi

$$V = 3 \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \pi \epsilon_0 l} q$$

Il segno del potenziale è uguale a quello delle cariche. Si noti che se le cariche fossero diverse, l'espressione del potenziale sarebbe $V = (q_1 + q_2 + q_3)/4 \pi \epsilon_0 r$; in particolare esso sarebbe nullo solo se $q_1 + q_2 + q_3 = 0$.

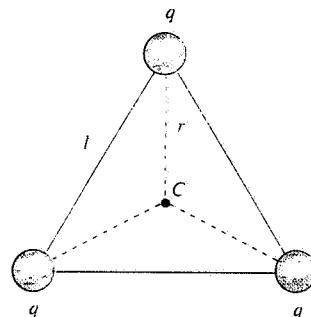


Figura 2.11

Altri esempi di calcoli di potenziale si trovano nel paragrafo 2.4, con riferimento a distribuzioni continue di carica.

2.3 Energia potenziale elettrostatica

Abbiamo verificato che la forza elettrostatica è conservativa e abbiamo determinato l'espressione della corrispondente energia potenziale per una carica q_0 posta nel campo di un sistema qualsiasi di cariche.

Nel caso più semplice di due sole cariche distanti r vale la (2.16), mentre quando le cariche sorgenti sono n da (2.18) vediamo che l'energia potenziale di q_0 è la somma di n termini, ciascuno del tipo (2.16), cioè che l'energia potenziale di q_0 è la somma delle energie potenziali che q_0 avrebbe se fosse in presenza di una sola carica alla volta. Il risultato è valido anche per distribuzioni continue di carica e si ottiene integrando sul termine infinitesimo $q_0 dq / 4 \pi \epsilon_0 r$ che dà l'energia potenziale di q_0 nel campo della carica sorgente dq . In ogni caso questi procedimenti portano all'espressione (2.24).

Analizziamo il significato della formula $U_e(r) = q_0 q / 4 \pi \epsilon_0 r$: essa può essere egualata secondo (2.16) a $U_e(r) - U_e(\infty)$ e quindi al lavoro W della forza elettrica per portare le cariche dalla distanza r alla distanza infinita, in accordo con $W = -\Delta U_e$.

Se le cariche sono dello stesso segno, e quindi si respingono, l'energia potenziale $U_e(r)$ è positiva ed è positivo il lavoro elettrico: infatti la forza repulsiva tende ad allontanare le cariche. Nel processo di allontanamento l'energia potenziale diminuisce e viene fornito lavoro all'esterno. Se si vuole costruire il sistema di due cariche dello stesso segno inizialmente a distanza infinita e alla fine a distanza r bisogna spendere lavoro esterno contro la forza repulsiva e ritroviamo questo lavo-

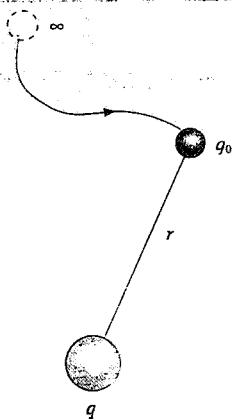


Figura 2.12

ro sotto forma di energia potenziale $U_e(r)$, che aumenta nell'avvicinamento.

Se invece le cariche sono di segno opposto, e quindi si attraggono, l'energia potenziale è il lavoro elettrico per separare le cariche: sono negativi: la forza attrattiva nell'allontanamento compie lavoro negativo. L'allontanamento può avvenire cioè per effetto di una forza esterna che compie lavoro positivo e ritroviamo questo lavoro nell'energia potenziale che aumenta (diviene meno negativa) nel processo. Quando due cariche di segno opposto si avvicinano dall'infinito a distanza r , l'energia potenziale diminuisce e viene fornito lavoro all'esterno.

Pertanto il sistema di due cariche dello stesso segno evolve spontaneamente verso la distanza infinita e per costruirlo bisogna spendere un lavoro pari a $U_e(r)$, il sistema di due cariche di segno opposto evolve verso la situazione di distanza minima e per separarlo occorre spendere il lavoro $-U_e(r)$. Osserviamo che in nessun caso è possibile mantenere due cariche ferme a distanza finita senza l'intervento di altre forze, ad esempio forze vincolari che bilancino la forza elettrica.

Essendo il potenziale pari all'energia potenziale divisa per la carica q_0 , cioè una energia potenziale per unità di carica, possiamo affermare da (2.15) che *il potenziale in un punto è pari al lavoro che la forza elettrica compie per spostare una carica positiva unitaria da quel punto all'infinito*.

La discussione può essere estesa al caso della carica q_0 nel campo di più cariche; l'energia potenziale di q_0 è la somma di vari contributi che possono essere di segno diverso e, a differenza del caso di due cariche, essa può cambiare di segno a seconda della regione considerata; ad ogni modo le conclusioni sono analoghe.

Un esame critico di tutto l'argomento mostra una dissimmetria: la carica q_0 è stata considerata separatamente dal sistema di cariche fisse che generano il campo. Però questo sistema ha una sua energia potenziale in quanto tra le cariche che lo compongono, e che sono a distanza finita tra loro, si esercitano forze elettrostatiche. L'energia potenziale elettrostatica complessiva andrebbe scritta

$$U_e = U_e(q_0) + U_e(\text{sistema}) :$$

il fatto è che $U_e(\text{sistema})$ è costante durante i processi descritti, e cioè spostamenti della carica q_0 da una posizione ad un'altra, e quindi le variazioni dell'energia potenziale totale coincidono con $\Delta U_e(q_0)$.

Comunque sia, risolviamo adesso il problema del calcolo dell'energia potenziale di un sistema di cariche fisse utilizzando i risultati finora ottenuti per q_0 .

Ciascuna carica è nel campo delle altre cariche e ha una determinata energia potenziale, che dipende dalle distanze relative e dai valori delle cariche. L'energia potenziale totale è la somma di tutti questi termini, che scriviamo esplicitamente nella tabella seguente:

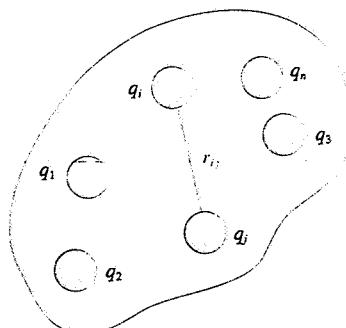


Figura 2.13

	q_1	q_2	q_n
q_1	0	$\frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,2}}$	$\frac{q_1 q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_{1,n}}$
q_2	$\frac{q_2 q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{2,1}}$	0	$\frac{q_2 q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_{2,n}}$
q_n	$\frac{q_n q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{n,1}}$	$\frac{q_n q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{n,2}}$	0

L'elemento i,j è l'energia potenziale della coppia q_i, q_j data da (2.16); scrivendo zero per gli elementi i, i assumiamo che una carica non risenta del proprio campo. Siccome $r_{i,j} = r_{j,i}$ risulta evidente che ogni contributo compare due volte nella tabella e pertanto il risultato è

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}} \quad (2.25)$$

Energia potenziale di un sistema discreto di cariche

Chiamando $V_{j,i}$ il potenziale che la carica q_j genera nel punto in cui si trova la carica q_i , la (2.25) si scrive

$$U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_{j,i} . \quad (2.26)$$

Concettualmente analoghe sono le espressioni per una distribuzione continua.

Moto di una carica. Conservazione dell'energia

Ritorniamo a considerare una carica puntiforme q_0 e supponiamo che sia in moto in un campo elettrostatico \mathbf{E} ; il problema è stato già discusso nel paragrafo 1.7 e ora lo riprendiamo applicando la conservazione dell'energia totale, come è lecito in quanto il moto avviene in presenza di forze conservative.

Quando la particella, con carica q_0 e massa m , passa dalla posizione A alla posizione B la sua energia cinetica cambia in accordo con il *teorema dell'energia*:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W ;$$

d'altra parte il lavoro si esprime tramite (2.8):

$$W = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B) = q_0 V_A - q_0 V_B .$$

Eguagliando e ordinando abbiamo la relazione

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B , \quad (2.27)$$

che esprime la *conservazione dell'energia*

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V . \quad (2.28) \quad \text{Conservazione dell'energia}$$

durante il moto della particella l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rimane costante.

Nella (2.27) è considerato solo il termine elettrostatico; se agiscono anche altre forze conservative, come forza peso e forze elastiche, vanno aggiunti i termini corrispondenti. Durante il moto di norma i vari termini cambiano e avvengono trasformazioni da una forma di energia all'altra, però la somma resta sempre costante.

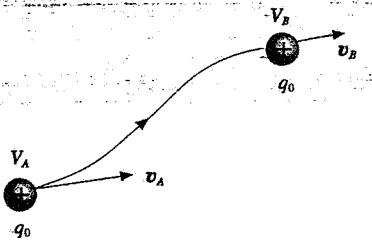


Figura 2.14

La (2.27) mostra che scegliendo opportunamente il segno della differenza di potenziale è possibile *accelerare* la particella, trasformando l'energia potenziale in energia cinetica. Una carica positiva è accelerata se $V_A > V_B$ mentre una carica negativa è accelerata se $V_A < V_B$. Quanto detto è alla base dell'accelerazione di particelle con campi elettrostatici. Se $V_A = V_B$ non c'è alcun effetto complessivo; ciò non vuol dire che tra A e B non c'è campo, ma semplicemente che nel percorso A B ci sono zone in cui l'effetto è accelerante e altre in cui è decelerante. In particolare $V_A = V_B$ se $A \equiv B$: *alla fine di un percorso chiuso l'energia cinetica è la stessa che all'inizio, la velocità può essere cambiata di direzione, ma non di modulo* (si riveda quanto detto alla fine del paragrafo 2.1).

Una situazione particolare, ma che in molti casi è realizzata per la sua semplicità, si ha quando nella regione in cui avviene il moto il campo è uniforme, cioè costante in modulo, direzione e verso; da (2.7) abbiamo

$$V_A - V_B = \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}_{AB} = E(z_B - z_A) , \quad (2.29)$$

da cui deduciamo che

$$V_A = -E z_A + \text{costante}, \quad V_B = -E z_B + \text{costante},$$

cioè che in un campo uniforme, parallelo e concorde all'asse z,

$$V(z) = -E z + \text{costante}. \quad (2.30)$$

Il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un piano ortogonale alla direzione del campo ed è una funzione lineare decrescente della coordinata misurata lungo la direzione e il verso del campo. La d.d.p. tra un punto A e un punto B a valle distante h è Eh , se il punto B è a monte è $-Eh$. Il valore della costante è pari al potenziale nell'origine, che è assunta come riferimento; non è possibile in questo caso fare riferimento all'infinito perché, come diremo in seguito, non è possibile realizzare un campo uniforme all'infinito.

La conservazione dell'energia in un campo uniforme si scrive

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E (z_B - z_A) . \quad (2.31)$$

Se riguardiamo l'esempio 1.10, vediamo che si è ritrovata l'espressione là ricavata per ΔE_k .

Nel caso del campo di una carica puntiforme (2.27) e (2.16) danno

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{q_0 q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \quad (2.32)$$

Abbiamo ricavato (2.31) e (2.32) non solo perché saranno utili in seguito, ma anche per far vedere, nell'ambito generale della (2.27), come la struttura della variazione di U_e dipenda dal modo con cui è distribuita la carica sorgente.

Unità di misura. L'elettronvolt

Quando una carica elementare viene accelerata dalla d.d.p. di 1V essa acquista l'energia cinetica

$$e \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Questa quantità di energia, che è adeguata per descrivere le energie dei fenomeni su scala atomica, definisce l'unità di misura *elettronvolt*, simbolo eV:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ eV}. \quad (2.33)$$

Il valore preciso si ha in corrispondenza al valore di e dato nella tabella 1.1, ma differisce da quello riportato in (2.33) di circa lo 0.1%.

I multipli e i sottomultipli comunemente usati per il volt e per l'elettronvolt sono:

$$\mu\text{V} = 10^{-6} \text{ V} \quad \mu\text{eV} = 10^{-6} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-25} \text{ J}$$

$$\text{mV} = 10^{-3} \text{ V} \quad \text{meV} = 10^{-3} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

$$\text{kV} = 10^3 \text{ V} \quad \text{keV} = 10^3 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$\text{MV} = 10^6 \text{ V} \quad \text{MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\text{GV} = 10^9 \text{ V} \quad \text{GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

Il massimo valore di energia attualmente raggiunto da elettroni accelerati è 50 GeV, mentre per i protoni è 1 TeV. Queste energie non sono raggiunte con mezzi elettrostatici (è impossibile realizzare d.d.p. di $50 \cdot 10^9$ V o di 10^{12} V), ma con altri sistemi elettrici cui accenneremo in seguito.

Esempio 2.2

Nell'esperimento di Rutherford, descritto nel paragrafo 1.7, si assuma che le particelle α abbiano una energia cinetica di 7 MeV. Si calcoli la loro velocità v , in un urto con parametro d'impatto $b = 0$ la minima distanza dal nucleo a cui esse arrivano. La massa delle particelle α è $m = 6.64 \cdot 10^{-27}$ kg.

Soluzione

Secondo (2.33) $E_k = 7 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 11.2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ ed eguagliando a $1/2 m v^2$ si trova $v = 1.84 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ (circa il 6% della velocità della luce). Con parametro d'impatto nullo la velocità iniziale della particella α è diretta verso il punto in cui si trova il nucleo; la particella viene decelerata dalla forza repulsiva, ma non deflessa e si ferma quando la sua energia cinetica iniziale si è tutta tramutata in energia potenziale elettrostatica:

$$\frac{(Z e)(2 e)}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{2 Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = 7 \text{ MeV} = 11.2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Ze è la carica del nucleo, $2e$ la carica della particella α . Si trova

$$r = 4.11 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

Se il nucleo è di rame, $Z = 29$ e $r = 1.2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, se è d'oro $Z = 79$ e $r = 3.2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.

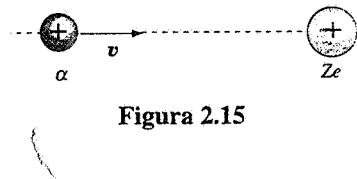


Figura 2.15

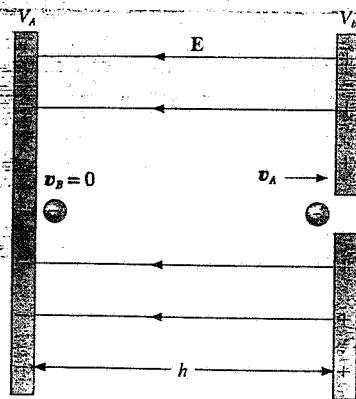


Figura 2.16

Esempio 2.3

Un elettrone è abbandonato in quiete in un campo elettrico uniforme, di modulo $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, che lo accelera per una distanza $h = 0.5 \text{ cm}$. Calcolare l'energia cinetica acquistata dall'elettrone.

Soluzione

La d.d.p. sulla distanza h è data da

$$Eh = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} = 10^4 \text{ V}$$

e quindi l'energia cinetica acquistata dall'elettrone è, secondo (2.31),

$$E_k = e Eh = 10^4 \text{ eV} = 10 \text{ keV} = 1.6 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

A questa energia corrisponderebbe, con la formula classica, la velocità $v = 5.93 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, pari a circa il 20% della velocità della luce. La corretta formula relativistica dà $v = 5.85 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.

Esempio 2.4 Separatore elettrostatico. Oscilloscopio

Un elettrone viene immesso con velocità iniziale v_0 in una regione limitata in cui agisce un campo elettrostatico uniforme perpendicolare a v_0 .

Uscito dalla regione l'elettrone colpisce uno schermo S nel punto C . Calcolare l'angolo di deflessione α , l'energia cinetica e la velocità finali dell'elettrone e la distanza d del punto C dall'asse x .

Soluzione

L'elettrone è soggetto a una accelerazione $a = eE/m$ diretta lungo l'asse y quando attraversa la regione in cui c'è campo elettrico. Il moto lungo x è rettilineo uniforme con velocità v_0 , il moto lungo y è uniformemente accelerato:

$$x = v_0 t \quad , \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

La traiettoria è un arco di parabola di equazione

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

Si tratta dello stesso tipo di moto descritto da un corpo di massa m sotto l'azione della forza peso $m g$.

L'angolo di deflessione si calcola da

$$\tan \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eE l}{m v_0^2}$$

e la distanza h vale

$$h = y(l) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v_0^2}$$

L'energia cinetica nel punto B si ottiene applicando (2.31):

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + eEh = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{2 m v_0^2}$$

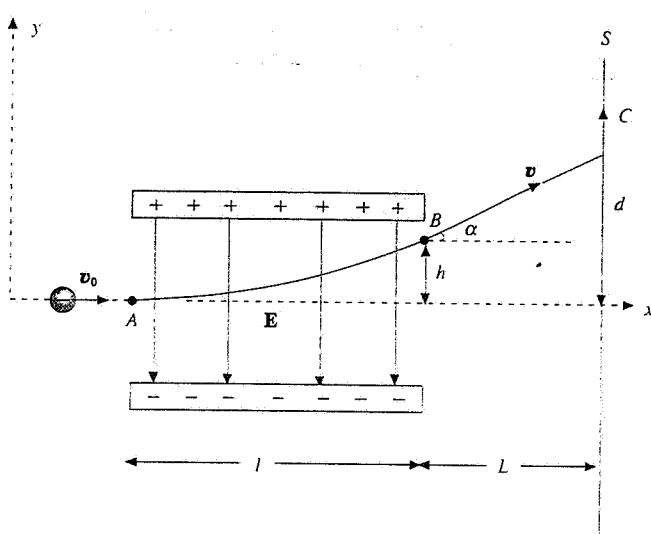


Figura 2.17

$$\text{e quindi } v^2 = v_0^2 + \frac{e^2 E^2 l^2}{m^2 v_0^2} = v_0^2 + 2ah$$

Fuori dal campo l'elettrone descrive una traiettoria rettilinea e quindi

$$d = h + L \tan \alpha = \frac{e E l}{m v_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) \quad (2.34)$$

Noti i parametri geometrici l e L , il valore del campo e la velocità iniziale, si può determinare il rapporto e/m per gli elettroni misurando d . Ritorneremo più avanti su questa misura fondamentale eseguita da Thomson nel 1897. Per avere un'idea quantitativa dell'entità di d , assumiamo il valore conosciuto $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$, una velocità iniziale $v_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, un campo $E = 10^4 \text{ V/m}$ e $l = L = 10 \text{ cm}$: si ottiene $h = 0.98 \text{ cm}$, $d = 2.93 \text{ cm}$.

La (2.34) permette anche, se è noto tutto eccetto il campo, di determinarne il valore misurando d ; siccome il valore del campo è legato alla d.d.p. tra i piani carichi distanti h_0 dalla $\Delta V = E h_0$, la misura di d fornisce in pratica il valore della d.d.p. applicata e anche il segno, dal segno della deflessione.

Vediamo alcune applicazioni del dispositivo descritto. Se lungo l'asse x entrano particelle con la stessa carica e massa diversa esse colpiscono lo schermo in punti diversi; con un opportuno diaframma possono essere lasciate proseguire oltre lo schermo solo quelle con massa compresa entro un intervallo determinato dalla larghezza del diaframma. Il sistema si chiama *separatore elettrostatico*.

Uno strumento di laghissimo uso in cui sono adottate due coppie di placchette di deflessione come quelle descritte è l'*oscilloscopio*, il cui elemento principale, il tubo a raggi catodici, è mostrato in figura 2.18. Si può capirne il funzionamento fin d'ora, anche se viene utilizzato soprattutto per misura di d.d.p. variabili nel tempo.

Dentro un involucro di vetro in cui è fatto il vuoto si trovano una sorgente che emette lungo l'asse x un fascio collimato di elettroni, una coppia di placchette di deflessione verticale, una coppia di placchette di deflessione orizzontale e lo schermo S costituito da materiale fluorescente depositato all'interno della parete terminale; l'emissione di luce dallo schermo nel punto in cui è colpito dal fascio di elettroni permette di visualizzare la posizione del fascio (un tubo a raggi catodici è l'elemento essenziale anche nei televisori e nei terminali dei calcolatori: il nome raggi catodici è quello dato agli elettroni al tempo della scoperta).

Gli elettroni sono sottoposti a due deflessioni a 90° tra loro: la deflessione orizzontale è causata da una d.d.p., applicata alle placchette verticali, che viene fatta variare linear-

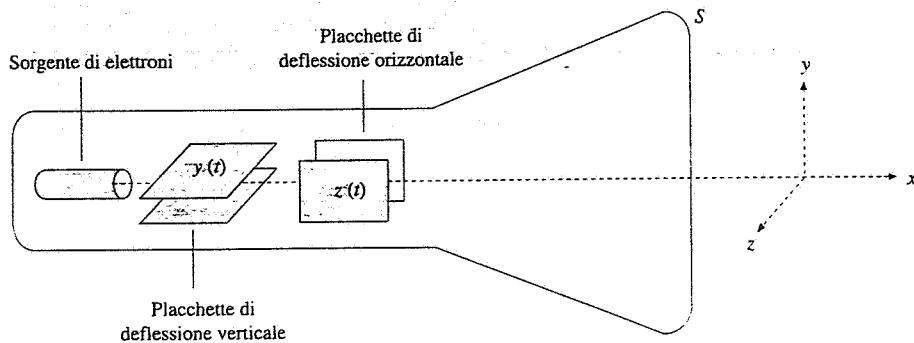


Figura 2.18

mente nel tempo, per cui sullo schermo provoca uno spostamento di equazione $z = v_0 t$; la deflessione verticale è causata da una d.d.p. $V(t)$, applicata alle placchette orizzontali, che provoca sullo schermo uno spostamento di equazione $y = y(t)$, con $y(t)$ proporzionale a $V(t)$ come abbiamo visto in precedenza. Il fascio colpisce lo schermo nel punto di coordinate (z, y) che nel tempo descrive la curva di equazione $y = y(z/v_0)$; questa ha, in funzione di z , lo stesso grafico di y , e quindi di V , in funzione di t . Sullo schermo si vede una traccia continua luminosa corrispondente al grafico e non una successione di punti luminosi lungo il grafico in quanto l'emissione luminosa dura un certo tempo. Per esempio, se la d.d.p. applicata alle placchette di deflessione verticale è sinusoidale con periodo $T = 2\pi/\omega$, allora

$$y(t) = y_0 \sin \omega t \Rightarrow y(z) = y_0 \sin \frac{\omega z}{v_0} = y_0 \sin k z ,$$

che è ancora una sinusoide di periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v_0 = T v_0 .$$

Tarando lo schermo lungo z in unità di λ/v_0 si può leggere direttamente T . L'uso prevalente dell'oscilloscopio in laboratorio consiste nella visualizzazione di qualsiasi $V(t)$ e nella sua misura in ampiezza e nel tempo.

Da un punto di vista dinamico quella che abbiamo descritto è un'applicazione della composizione di moti su assi ortogonali; ad esempio l'oscilloscopio fornisce il modo più comodo per studiare la composizione di oscillazioni armoniche su assi ortogonali (capitolo 9 del primo volume): basta trasformarle in oscillazioni elettriche e applicarle alle placchette z e y .

Un'alternativa recente al tubo a raggi catodici è costituita da dispositivi a cristalli liquidi, molto più compatti.

Esempio 2.5

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno l'elettrone compie un'orbita circolare di raggio $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m attorno al protone. Calcolare l'energia di legame dell'atomo di idrogeno.

Soluzione

Il potenziale elettrico del protone, puntiforme rispetto alle dimensioni atomiche, ha alla distanza r il valore, dato da (2.16),

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ V}$$

e quindi l'energia potenziale dell'elettrone nel campo del protone è

$$U_e = -eV = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -27.2 \text{ eV} = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{ J} .$$

Sull'elettrone agisce la forza data dalla legge di Coulomb e, per la legge di Newton,

$$m a = m \frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

la forza coulombiana è cioè la forza centripeta che mantiene l'elettrone sull'orbita circolare. L'energia cinetica dell'elettrone è

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

(risulta $v = 2.19 \cdot 10^6$ m/s) e la sua energia totale è pari a

$$U = E_k + U_e = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} = -21.8 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

L'energia totale è negativa in quanto l'energia potenziale in modulo è superiore all'energia cinetica; il *sistema* è quindi *legato* con energia di legame pari a -13.6 eV . Se si vuole separare l'elettrone dal protone portandolo a distanza infinita, la minima spesa di energia si ha quando l'elettrone arriva all'infinito con velocità nulla. La sua energia finale è nulla e quindi lo è anche quella iniziale: pertanto all'inizio deve essere

$$U + U' = 0 \Rightarrow -13.6 \text{ eV} + U' = 0 \Rightarrow U' = 13.6 \text{ eV}$$

Questa è la cosiddetta *energia di ionizzazione* dell'atomo di idrogeno. Ricordiamo che si chiama *ionizzazione* il processo di separazione di elettroni da un atomo a seguito del quale si formano uno ione positivo (l'atomo privo di uno o più elettroni) ed elettroni liberi; altri atomi possono catturare questi elettroni diventando ioni negativi (paragrafo 1.2).

Si osservi che l'energia di legame non è l'energia potenziale: ciò sarebbe vero se entrambe le cariche fossero in quiete ($E_k = 0$); abbiamo però notato che questo sistema non è elettricamente stabile, mentre l'atomo è stabile. In effetti la stabilità sotto l'azione di una forza attrattiva si ottiene solo perché l'elettrone ruota. Riprenderemo questo problema della stabilità dell'atomo tra breve parlando del modello atomico di Bohr-Sommerfeld.

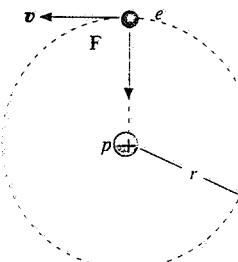


Figura 2.19

Riteniamo necessarie due precisazioni. Negli esempi in cui si descrive il moto di elettroni o di protoni o di ioni è sempre sottinteso che il moto avviene nel vuoto; se così non fosse il moto delle particelle sarebbe completamente diverso, a causa degli urti con le molecole del mezzo.

Un'altra ipotesi, implicita nelle formule che usiamo, è che le velocità siano sempre abbastanza inferiori a quella della luce in modo da poter usare la meccanica classica. Per gli elettroni assumiamo di poter fare ciò fino a energie cinetiche $E_k \leq 5 \text{ KeV}$, che corrispondono a velocità inferiori a $0.14 c = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, per i protoni la stessa situazione si ha fino ad energie cinetiche $E_k \leq 10 \text{ MeV}$ (i limiti sono $\sim 0.01 mc^2$). Naturalmente il passaggio è graduale, oltre i limiti indicati l'approssimazione classica è sempre meno precisa fino a diventare completamente errata. La differenza di comportamento tra elettroni e protoni sta nella differenza di massa, per cui è molto più facile accelerare un elettrone che un protone: a parità di aumento di energia cinetica, cioè a parità del valore assoluto della d.d.p. accelerante, l'elettrone ha una variazione di velocità molto superiore e quindi raggiunge già a piccole energie cinetiche il regime relativistico. Con i massimi valori di d.d.p. elettrostatica, che sono dell'ordine di 10 MV , gli elettroni sono relativistici, i protoni possono ancora essere trattati classicamente.

Il modello atomico di Bohr-Sommerfeld

Il modello atomico di Bohr venne proposto nel 1913; accogliendo l'ipotesi nucleare di Rutherford e applicandola all'atomo di idrogeno, Bohr suppose che l'elettrone potesse descrivere orbite circolari intorno al protone, ubbidendo alla cosiddetta *condizione di quantizzazione del momento angolare*: il momento angolare L dell'elettrone rispetto al nucleo deve essere multiplo intero della quantità $\hbar = h / 2\pi$; la costante h è la *costante di Planck*.

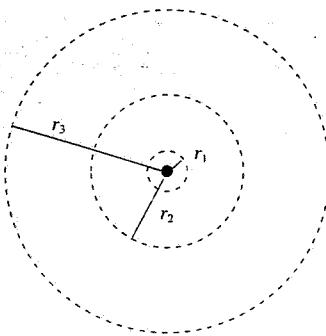


Figura 2.20

$$\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \Rightarrow \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Quindi, per un'orbita circolare di raggio r_n deve essere

$$m v r_n = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La condizione classica di equilibrio è stata scritta nell'esempio 2.5:

$$m \frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \Rightarrow v = e / \sqrt{4 \pi \epsilon_0 m r_n} \Rightarrow r_n = \frac{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m e^2} = n^2 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La quantizzazione del momento angolare impone che i raggi delle orbite debbano valere

$$r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad r_2 = 2.116 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad r_3 = 4.761 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \dots$$

In ciascuno di questi stati, che si chiamano *stati quantici*, l'energia totale dell'elettrone è data, secondo quanto ricavato nell'esempio 2.5, da

$$U_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{m e^4}{(4 \pi \epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

Anche l'*energia* è dunque *quantizzata*: il suo valore minimo si ha per $n=1$ ed è $U_1 = -13.6 \text{ eV}$; al crescere di n l'energia aumenta tendendo a zero per valori discreti. Si parla di *livelli energetici dell'atomo di idrogeno*: quello corrispondente all'energia U_1 si chiama *livello fondamentale*, gli altri livelli eccitati: *in condizioni normali l'elettrone si trova nel livello di energia U_1* .

Sommerfeld estese il modello di Bohr considerando la possibilità per l'elettrone di descrivere orbite ellittiche con il protone in uno dei fuochi: infatti è questa l'orbita più generale per un sistema di due punti legati da una forza centrale attrattiva tipo k/r^2 e con energia totale negativa. Il semiasse maggiore a dipende soltanto dall'energia mentre l'eccentricità $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, con b semiasse minore, dipende, per una data energia, dal momento angolare con cui è percorsa l'orbita (si veda il capitolo 5 del primo volume).

A questa configurazione classica Sommerfeld impose che sia il momento angolare dell'elettrone rispetto al protone che la sua proiezione lungo una determinata direzione fossero quantizzati, cioè multipli interi di \hbar . Le conseguenze di queste ipotesi sono le seguenti.

a) L'energia dell'elettrone dipende dal numero quantico principale n come nel modello originario di Bohr.

b) In ogni livello energetico U_n l'elettrone può percorrere n orbite ellittiche, tutte con lo stesso semiasse maggiore $a_n = -e^2 / 8 \pi \epsilon_0 U_n$ e con semiasse minore, e quindi momento angolare, diversi, quest'ultimo dato da

$$L = (l+1) \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

L'intero l si chiama *numero quantico azimutale*; poiché si dimostra che $b_n/a_n = (l+1)/n$, risulta che l'orbita con $l=n-1$ è una circonferenza.

c) Per ciascuna orbita caratterizzata dal valore l sono possibili $2l+1$ *inclinazioni* del piano dell'orbita; precisamente, l'angolo α tra la normale al piano e una data direzione deve essere tale che

$$\cos \alpha = \frac{m}{l+1} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

L'intero m si chiama *numero quantico magnetico*.

Fissato n sono dunque possibili

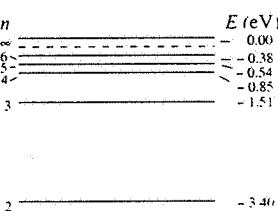


Figura 2.21

$$\sum_0^{n-1} (2l+1) = n^2$$

stati dinamici; nel livello fondamentale ($n=1, l=0, m=0$) c'è un solo stato dinamico accessibile.

Il modello di Bohr-Sommerfeld, sviluppato e ulteriormente raffinato tra il 1913 e il 1925, spiegò molte caratteristiche dei fenomeni atomici allora osservati, soprattutto nel campo dell'emissione e dell'assorbimento di radiazioni elettromagnetiche da parte degli atomi, e stabilì il concetto di energia e momento angolare quantizzati secondo valori discreti nei fenomeni atomici; per queste ragioni la sua importanza storica è fondamentale.

Tuttavia questo modello non era coerente: esso applicava al moto dell'elettrone rispetto al protone i risultati ben noti in meccanica classica relativi al moto in un campo di forze centrali newtoniane (k/r^2), ma introduceva ad hoc le ipotesi di quantizzazione del momento angolare, essenziali per spiegare i dati sperimentali, ma senza giustificazione teorica.

Inoltre, se da una parte si sfruttavano risultati classici, dall'altra si era costretti ad ignorare il fenomeno classico dell'emissione di radiazioni da parte di una carica in moto con accelerazione centripeta, emissione che avrebbe dovuto portare molto rapidamente l'elettrone a perdere la sua energia e a cadere sul protone, mentre invece sperimentalmente è provato che gli atomi sono stabili. Esamineremo questo meccanismo nello studio delle onde elettromagnetiche.

Il modello di Bohr-Sommerfeld venne superato nel 1925 con l'avvento della meccanica quantistica, proposta da Heisenberg e Schrödinger, nel cui ambito sono formulate coerentemente le leggi che regolano i fenomeni atomici e che spiegano con estrema precisione le relative osservazioni sperimentali.

2.4 Il campo come gradiente del potenziale

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato che se si conosce il campo elettrostatico in ogni punto di una curva che unisce due punti A e B possiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due punti tramite la (2.7) e che il risultato non dipende dalla curva prescelta.

Vogliamo ora dimostrare che accanto a questa relazione *integrale* esiste una relazione *locale* che permette dalla conoscenza del potenziale elettrostatico in ogni punto di un certa regione di calcolare il campo elettrostatico in ogni punto della stessa regione.

Abbiamo già rilevato che il potenziale è una funzione scalare continua e derivabile. Per uno spostamento $d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z$, che unisce due punti di coordinate $A(x, y, z)$ e $B(x+dx, y+dy, z+dz)$ la variazione del potenziale è

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

in accordo con (2.7) e con l'espressione del prodotto scalare tramite le componenti. D'altra parte per il teorema del differenziale totale

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

e dal confronto tra le due espressioni di dV ricaviamo che devono sussistere le eguaglianze

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.35)$$

Abbiamo così ritrovato le relazioni che a partire da una funzione scalare definiscono le componenti del vettore gradiente della funzione (si veda l'appendice C del primo volume): la (2.35) può cioè essere scritta sinteticamente

Campo \mathbf{E} come gradiente di V

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

(2.36)

il campo elettrostatico è eguale pertanto al gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno. L'equazione (2.36) è la relazione locale che tramite il calcolo delle derivate parziali del potenziale permette di determinare le componenti del campo elettrico in ogni punto della regione in cui sono definiti campo e potenziale.

La rappresentazione dell'operazione di gradiente può avvenire in modo diverso utilizzando l'*operatore vettoriale del* definito da

L'operatore ∇ in coordinate cartesiane

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (2.37)$$

Formalmente ∇ si comporta come un vettore, che acquista significato quando opera su una funzione scalare o viene moltiplicato per un altro vettore. In particolare l'applicazione dell'operatore *del* a una funzione scalare come il potenziale consiste nel riempire il posto vuoto nell'operazione di derivata con la funzione stessa, cioè

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z = \nabla V : \quad (2.38)$$

l'operatore *del* applicato a una funzione scalare acquista il significato di gradiente della funzione. Vedremo più avanti l'applicazione a vettori. Nel seguito useremo il simbolo ∇V per indicare il gradiente del potenziale.

Secondo (2.36) e (2.38) la (2.7) può essere riscritta a livello infinitesimo e a livello finito come

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \nabla V \cdot d\mathbf{s} , \quad V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s}$$

ovvero

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s} . \quad (2.39)$$

La (2.39) è l'applicazione al potenziale di un teorema generale di calcolo vettoriale, il *teorema del gradiente*, secondo cui *la variazione di una funzione scalare tra due punti A e B è data dall'integrale di linea del gradiente della funzione lungo un qualunque percorso che unisce A e B*.

La (2.36) suggerisce un metodo alternativo per il calcolo di \mathbf{E} . Fino a questo punto, nota la distribuzione delle cariche elettriche sorgenti, abbiamo utilizzato una delle relazioni (1.17) o (1.22) e simili. Poiché il campo elettrico è un vettore questo metodo comporta in generale il calcolo di un integrale per ciascuna delle componenti del campo. Il metodo alternativo consiste nel calcolo del potenziale applicando una delle (2.20, 2.21, 2.22, 2.23), eseguendo quindi un solo integrale; successivamente si calcolano le componenti del campo con (2.35).

Di solito le funzioni del tipo $1/r$ sono più semplici da integrare delle funzioni del tipo x/r^3 e quindi la seconda strada è in generale più semplice. Solo nei casi in cui la distribuzione di carica presenti un elevato grado di simmetria il calcolo diretto di \mathbf{E} è semplice; con un metodo che vedremo nel capitolo 3 esso è a volte addirittura immediato.

In ogni caso la conoscenza del potenziale è il mezzo più semplice per calcolare il lavoro delle forze elettriche su una carica q_0 che si muove nella ragione in cui esiste il campo elettrostatico.

Prima di ripetere con la nuova procedura alcuni calcoli di campi, tra cui quelli degli esempi 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, ricordiamo la proprietà di invarianza dell'operazio-

ne gradiente, legata alla sua natura vettoriale. Modulo, direzione e verso del vettore ∇V non dipendono dal sistema di coordinate: pertanto, fissati due punti infinitamente vicini, la

$$dV = \nabla V \cdot ds \quad (2.40)$$

ha un significato intrinseco, in quanto operazione tra vettori. La (2.40) può essere presa come definizione del gradiente della funzione scalare V : il gradiente di V è quel vettore tale che il suo prodotto scalare per il vettore spostamento infinitesimo ds dà la variazione di V in corrispondenza di quello spostamento.

D'altra parte nella maggior parte dei calcoli pratici è necessario servirsi di un sistema di coordinate e bisogna determinare le componenti del gradiente nel dato sistema. In altre parole, l'espressione esplicita dell'operatore *del* (2.37) e la (2.38), valide in un sistema cartesiano tridimensionale, dipendono dal sistema di coordinate.

Se si utilizza un sistema di coordinate polari nello spazio, che è in particolare adeguato ai casi di simmetria sferica, gli spostamenti infinitesimi che corrispondono alla variazione di una coordinata tenendo costanti le altre due sono $dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi$ come risulta dalla figura 2.22 e pertanto

$$ds = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{u}_\phi ,$$

essendo $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi$ tre versori variabili, a 90° tra loro.

Inseriamo in (2.40) ed egualiamo all'espressione generale di dV :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi = (\nabla V)_r dr + (\nabla V)_\theta r d\theta + (\nabla V)_\phi r \sin\theta d\phi$$

Risulta quindi

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \quad (2.41)$$

ovvero che l'espressione dell'*operatore-del* in coordinate polari è

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi . \quad (2.42)$$

Quanto detto vale per qualsiasi campo scalare; nel caso del potenziale elettrostatico da (2.36) e (2.41) segue

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} , \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.43)$$

per le componenti del campo in coordinate polari.

Un altro sistema di coordinate, utile nei problemi con simmetria rispetto ad un asse, è costituito dalle coordinate cilindriche r, θ, z e si trova facilmente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (2.44)$$

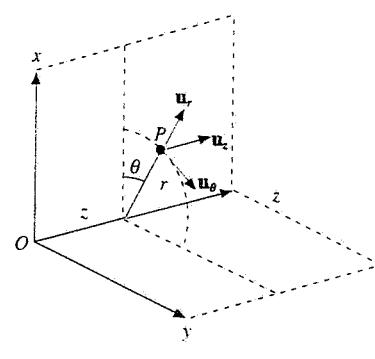
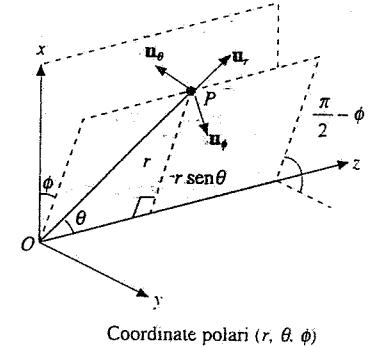


Figura 2.22

L'operatore ∇ in coordinate polari

L'operatore ∇ in coordinate cilindriche

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (2.45)$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} . \quad (2.46)$$

Esempio 2.6

Una carica puntiforme q è posta in un punto di coordinate x_0, y_0, z_0 . Calcolare il campo \mathbf{E} a partire dal potenziale elettrostatico.

Soluzione

Il potenziale in un punto $P(x, y, z)$ è dato da (2.15), $V = q / 4 \pi \epsilon_0 r$ con $r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$.

Per applicare (2.35) calcoliamo le derivate parziali del potenziale: rispetto a x si trova

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = -\frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (x - x_0)$$

e per le altre derivate valgono formule analoghe. Abbiamo quindi

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [(x - x_0) \mathbf{u}_x + (y - y_0) \mathbf{u}_y + (z - z_0) \mathbf{u}_z] = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_r$$

che è la (1.14).

Il calcolo è molto più semplice in coordinate polari. Poiché il potenziale dipende solo da r e non da θ e ϕ (simmetria sferica), è diversa da zero solo $\partial V / \partial r = -q / 4 \pi \epsilon_0 r^2$ e, per la (2.43),

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$$

Simmetria sferica vuol dire che il potenziale assume lo stesso valore in tutti i punti di una superficie sferica avente q come centro; per il campo vuol dire che il suo modulo ha lo stesso valore su una tale superficie e che la sua direzione è radiale.

Esempio 2.7

Una carica q è distribuita uniformemente su un filo lungo $2l$, come nell'esempio 1.6. Calcolare potenziale e campo elettrostatico nei punti dell'asse del filo ed estendere il risultato ad un filo infinitamente lungo.

Soluzione

Il potenziale dovuto alla carica infinitesima λdx in un punto dell'asse è

$$dV = \frac{\lambda dx}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e integrando su tutto il filo

$$V = \int_{-l}^{+l} dV = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} [\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]_{-l}^{+l} \Rightarrow V(y) = \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{l^2 + y^2}}{-l + \sqrt{l^2 + y^2}}$$

Se si calcola $-dV/dy$ si ottiene

$$E(y) = q / 4 \pi \epsilon_0 y \sqrt{l^2 + y^2}$$

che è il risultato dell'esempio 1.6.

Quando l tende all'infinito, $E(y)$ tende a $\lambda / 2 \pi \epsilon_0 y$, ma il potenziale tende all'infinito. Il risultato non deve preoccupare, perché il filo indefinito non è un sistema fisico reale; innanzitutto esso avrebbe una carica infinita, inoltre la presenza di cariche all'infinito non ci permette di assumere $V(\infty) = 0$. In effetti, come già detto, l'espressione limite del campo è valida a distanze y da un filo lungo $2l$ quando $y \ll 2l$; da essa calcoliamo:

$$V(y_1) - V(y_2) = \int_{y_1}^{y_2} E(y) dy = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1}$$

Le d.d.p. sono quindi in pratica determinabili, anche se il valore del potenziale tende all'infinito.

Alternativamente, se nella formula divergente di $V(y)$ scriviamo le radici, quando $l \gg y$,

$$l\sqrt{1+y^2/l^2} = l(1+y^2/2l^2)$$

$$V(y) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln y + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2l$$

e il termine costante, per quanto grande, nelle differenze scompare.
Si ritrova così

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{y_2}{y_1} \quad \text{ovvero} \quad E = -dV/dy$$

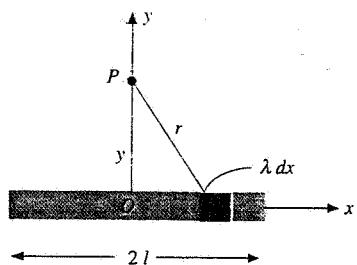


Figura 2.23

Esempio 2.8

Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile anello di raggio R , come nell'esempio 1.7. Calcolare potenziale e campo elettrostatico sull'asse dell'anello.

Soluzione

Utilizziamo (2.21) con $\lambda = q/2\pi R$ e $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, costante in quanto un punto sull'asse è equidistante da tutti i punti dell'anello:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int dl = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

Si noti che per $x \gg R$, cioè a grande distanza dall'anello, il potenziale vale $q/4\pi\epsilon_0 |x|$, come se la carica fosse nel centro.

Per il calcolo del campo come gradiente del potenziale ricorriamo a (2.35):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (R^2 + x^2)^{-1/2} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Abbiamo ritrovato la (1.30).

Una rilettura dell'esempio 1.7 mostra che per evitare il calcolo delle due componenti E_x e E_z , cioè di due integrali, abbiamo dovuto far ricorso esplicitamente alle condizioni di simmetria del sistema. Adesso il fatto che il campo sia diretto lungo l'asse x è risultato direttamente dall'indipendenza del potenziale da y e z .

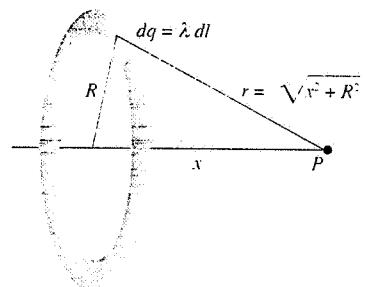


Figura 2.24

Esempio 2.9

Un disco sottile di raggio R ha una carica q distribuita uniformemente su tutta la sua superficie, come nell'esempio 1.8. Calcolare potenziale e campo elettrostatico sull'asse del disco ed estendere il risultato se R tende all'infinito.

Soluzione

Posto $\sigma = q/\pi R^2$, consideriamo un anello concentrico al disco, di raggio r e area $d\Sigma = 2\pi r dr$ sul quale c'è la carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$: il potenziale generato da questo

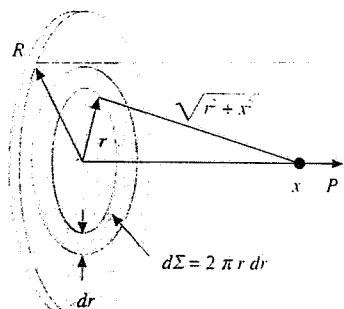


Figura 2.25

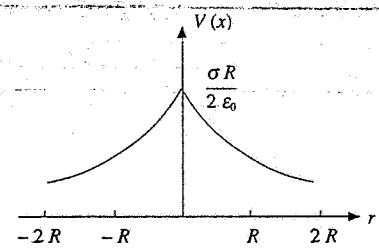


Figura 2.26

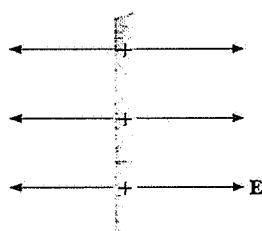
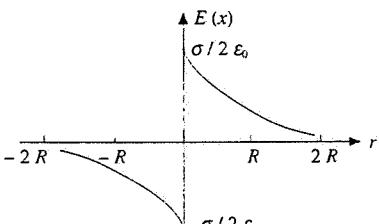


Figura 2.27

anello sull'asse si calcola come nell'esempio 2.8:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}}.$$

Si integra su tutto il disco e si ottiene:

$$V = \int_x dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x).$$

Per $x = 0$ $V = \sigma R / 2 \epsilon_0$. A grandi distanze, scrivendo il termine tra parentesi come

$$x \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right)$$

e approssimando la radice con $1 + \frac{R^2}{2x^2}$ (sviluppo in serie arrestato al primo termine) si trova

$$V(x \gg R) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

come se la carica q fosse posta nel centro del disco.

Anche in questo caso il potenziale dipende solo da x per cui da (2.35) $E_x = E_z = 0$ e

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right),$$

che è la (1.31). Le formule di V e E_x così scritte valgono per $x > 0$; il potenziale per $x < 0$ è identico e quindi basta sostituire x con $|x|$; per il campo, che è discontinuo nell'attraversamento del disco, vale la (1.31).

Quando R tende all'infinito e il disco diventa un piano indefinito uniformemente carico, abbiamo visto nell'esempio 1.8 che il campo diventa ovunque uniforme, con espressione (1.34); invece il potenziale chiaramente diverge in tutto lo spazio ($\sqrt{R^2+x^2} \rightarrow \infty$). Le ragioni di questo comportamento sono le stesse già discusse nell'esempio 2.7.

Esempio 2.10

Calcolare l'andamento del potenziale tra due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale l'una $+\sigma$ e l'altra $-\sigma$, come nell'esempio 1.9.

Soluzione

Sappiamo che per il campo all'interno vale la (1.35); esso è uniforme e siamo nel caso discusso nel paragrafo 2.3, per cui applichiamo (2.30):

$$V(x) = V_1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1),$$

dove V_1 è il potenziale del piano positivo. Rispetto a V_1 quindi

$$V_1 - V(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x - x_1) \quad (2.47)$$

e in particolare, posto $h = x_2 - x_1$.

$$V_1 - V_2 = \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h \quad (2.48)$$

All'esterno $E = 0$ e il potenziale è costante; siccome è continuo nell'attraversare il piano, per $x < x_1$, $V = V_1$, per $x > x_2$, $V = V_2$.

Può sembrare discutibile la procedura di calcolare differenze di potenziale, che sono finite e hanno significato fisico in quanto legate al campo, a partire da valori di potenziale che sappiamo essere infiniti e quindi non fisici. Formalmente ha senso parlare di differenze finite tra quantità infinite, ma è più importante notare che, nella realtà sperimentale, si hanno due superficie piane finite, con dimensioni molto superiori della distanza h ; i valori V_1 e V_2 sono finiti e nella zona centrale sono riprodotte con ottima approssimazione le condizioni di uniformità del campo, per cui valgono (1.35), (2.47) e (2.48).

Vedremo che la realizzazione pratica si effettua con due piastre parallele conduttrici, con struttura tipo foglio o tipo griglia.

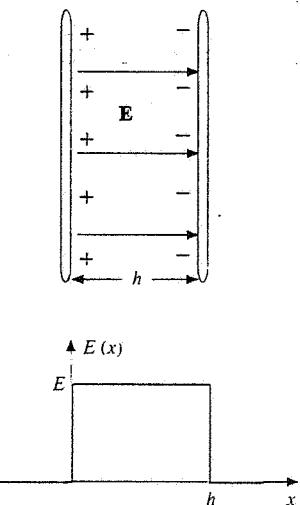
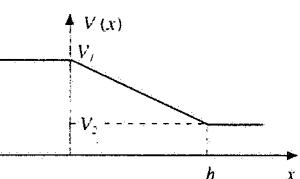


Figura 2.28



2.5 Superficie equipotenziali

Con gli esempi del paragrafo 2.4 si è completata la discussione sulla relazione tra campo e potenziale. In sostanza il potenziale può essere pensato come la primitiva del campo, nel senso che le sue variazioni si calcolano dal campo col procedimento integrale (2.7) e viceversa con l'operazione di derivazione (2.36) dal potenziale si ottiene il campo. Si tratta di una estensione tridimensionale, che riprenderemo nel prossimo paragrafo, di quanto già sappiamo per le funzioni di una variabile.

Diciamo anche che il segno negativo di (2.36) deriva in definitiva da una proprietà ben nota delle forze conservative, e cioè che $\mathbf{F} = -\nabla U_e$, nella quale il segno negativo significa che il lavoro compiuto dalla forza è utilizzabile all'esterno avviene a spese dell'energia potenziale che diminuisce. In elettrostatica più che sulla relazione tra forza ed energia potenziale si mette l'accento su quella tra campo e potenziale, ma il significato fisico è lo stesso.

Nel paragrafo 1.6 abbiamo introdotto la rappresentazione visiva del campo con le *linee di forza*, la cui espressione analitica è data da (1.36). Anche l'andamento del potenziale è visualizzabile ricorrendo alle *superficie equipotenziali*: si definisce così una *superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore*. In coordinate cartesiane l'equazione di una superficie equipotenziale è

$$V(x, y, z) = \text{costante}$$

Superficie equipotenziali

e, al variare del valore della costante, si ha tutta una famiglia di superficie equipotenziali. È chiaro che queste non si intersecano: *in un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale, essendo il potenziale una funzione univoca*.

Ricordando le proprietà di direzione e verso del gradiente, che ad ogni modo si deducono dalla (2.40)

$$dV = \nabla V \cdot ds = -\mathbf{E} \cdot ds$$

abbiamo che per uno spostamento ds tangente a una superficie equipotenziale la variazione dV è ovviamente nulla e quindi il *gradiente è ortogonale in ogni punto alla superficie equipotenziale*. Inoltre, per uno spostamento $ds = dn$ ortogonale alla superficie equipotenziale e diretto nel verso di crescita di V (cioè da una superficie $V = V_1$ a un'altra $V = V_1 + dV$ con $dV > 0$), $dV = |\nabla V| dn$ ovvero

$$|\nabla V| = \frac{dV}{dn} :$$

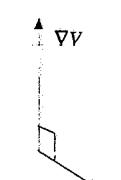


Figura 2.29

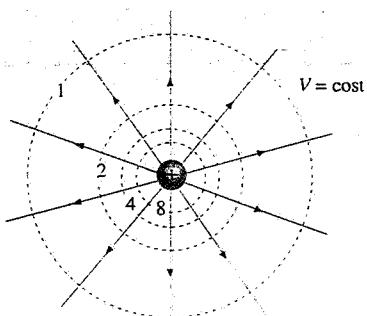


Figura 2.30

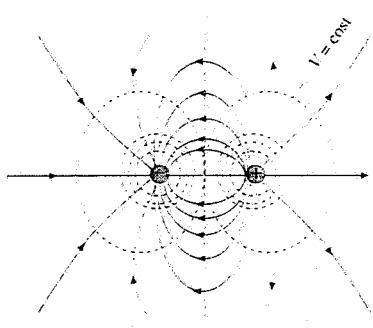


Figura 2.31

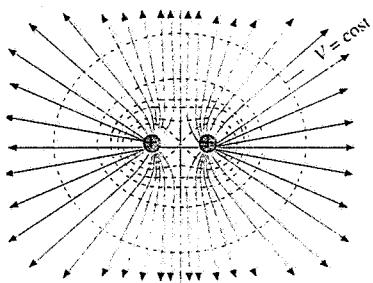


Figura 2.32

il modulo del gradiente è eguale alla derivata del potenziale nella direzione ortogonale alla superficie equipotenziale che indica il verso di crescita del potenziale. Visto il segno negativo, concludiamo che il campo elettrostatico è in ogni punto ortogonale alla superficie equipotenziale che passa per quel punto e il suo verso indica il verso di diminuzione del potenziale. Le superficie equipotenziali risultano dunque ortogonali alle linee di forza.

Queste proprietà generali si riscontrano facilmente negli esempi che abbiamo trattato. Iniziamo dalla carica puntiforme: le superficie equipotenziali hanno l'equazione

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{costante} \Rightarrow r = \text{costante}$$

e sono quindi superficie sferiche concentriche con centro nella carica, figura 2.30; le linee di forza sono semirette uscenti dalla carica, ortogonali alle superficie sferiche. Se q è positiva il campo è uscente e il potenziale è decrescente con la distanza, se q è negativa il campo è entrante e il potenziale è crescente con la distanza. I numeri riportati in figura 2.30 individuano quattro superficie tali che il potenziale su una di esse è doppio di quello sulla superficie immediatamente precedente, muovendosi nel verso del potenziale crescente. Si vede che le superficie si infittiscono avvicinandosi alla carica (andamento $1/r$).

Nel caso di un filo indefinito il campo ha direzione ortogonale al filo e le superficie equipotenziali sono superficie cilindriche aventi il filo come asse; nel caso di un piano indefinito il campo è ortogonale al piano e le superficie equipotenziali sono piani paralleli al piano e la stessa geometria si ha all'interno di due piani carichi con carica opposta. Si verifica sempre che il verso del campo indica il verso di decrescita del potenziale.

Altri esempi, due cariche di segno opposto e due cariche con lo stesso segno, sono mostrati nelle figure 2.31 e 2.32.

Da queste e dalle precedenti si osserva la proprietà seguente: se si conviene di disegnare le superfici equipotenziali con un certo passo ΔV (cioè $V = V_1, V = V_1 + \Delta V, V = V_1 + 2\Delta V$, ecc.) è chiaro che la distanza tra di esse è minore dove il campo è maggiore: localmente, a parità di ΔV , maggiore è il campo minore è Δn . Le superficie equipotenziali cioè si infittiscono nelle zone in cui il campo è maggiore: in un campo uniforme esse sono equispaziate.

2.6 Rotore di un campo vettoriale. Teorema di Stokes. Applicazione al campo elettrostatico

Accanto alla caratterizzazione di un campo conservativo che è data da relazioni tipo (2.7) e (2.36) se ne può porre un'altra basata sulla (2.10). Sappiamo che per un campo conservativo la circuitazione estesa a qualsiasi linea chiusa è nulla e che, viceversa, se la circuitazione di un campo è nulla lungo una qualsiasi linea chiusa allora il campo è conservativo. Vogliamo esprimere la (2.10), che è una condizione integrale, in forma locale.

A questo scopo dobbiamo introdurre il concetto di *rotore di un campo vettoriale*, campo che indichiamo con \mathbf{E} anche se la definizione e le proprietà connesse si applicano a qualsiasi campo vettoriale. Successivamente vedremo l'applicazione dei risultati trovati a un campo conservativo come il campo elettrostatico.

Cominciamo col considerare un percorso rettangolare infinitesimo $d\Gamma_x = ABCD$ che giace nel piano yz e ha i lati, lunghi $AB = dy$ e $BC = dz$, paralleli agli assi; il verso di percorrenza, mostrato in figura 2.33, è tale da apparire antiorario dalla punta dell'asse x (si parla di *regola della vite destrorsa*: come si vede dal disegno, ruotando lungo il verso di percorrenza della vite destrorsa, la punta della vite indi-

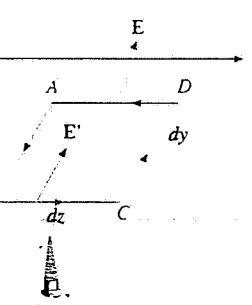


Figura 2.33

ca il verso dell'asse x); l'area vale $d\Sigma = dy dz$.

Calcoliamo l'integrale di linea di \mathbf{E} lungo questo percorso:

$$d\Gamma_x = \mathbf{E}(AB) \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{E}(BC) \cdot \mathbf{BC} + \mathbf{E}(CD) \cdot \mathbf{CD} + \mathbf{E}(DA) \cdot \mathbf{DA},$$

dove con $\mathbf{E}(AB)$ è indicato il valore del campo lungo il segmento infinitesimo \mathbf{AB} e così via; si osservi che $\mathbf{CD} = -\mathbf{AB}$ e $\mathbf{DA} = -\mathbf{BC}$ per cui

$$d\Gamma_x = [\mathbf{E}(AB) - \mathbf{E}(CD)] \cdot dy \mathbf{u}_y + [\mathbf{E}(BC) - \mathbf{E}(DA)] \cdot dz \mathbf{u}_z.$$

Eseguire i prodotti scalari vuol dire proiettare i campi lungo gli assi y e z ; otteniamo

$$\begin{aligned} d\Gamma_x &= [E_y(AB) - E_y(CD)] dy + [E_z(BC) - E_z(DA)] dz = \\ &= [E_y(z) - E_y(z + dz)] dy + [E_z(y + dy) - E_z(y)] dz. \end{aligned}$$

Le differenze tra parentesi si esprimono con uno sviluppo in serie arrestato al primo termine:

$$E_y(z + dz) - E_y(z) = \frac{\partial E_y}{\partial z} dz, \quad E_z(y + dy) - E_z(y) = \frac{\partial E_z}{\partial y} dy.$$

Pertanto

$$d\Gamma_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy dz = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x.$$

Procedendo in modo analogo per un rettangolo infinitesimo nel piano $x z$ di area $d\Sigma_y$ e per un rettangolo infinitesimo nel piano $x y$ di area $d\Sigma_z$ si trova per la circuitazione del campo lungo tali percorsi

$$d\Gamma_y = \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) d\Sigma_y,$$

$$d\Gamma_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z.$$

Ciascuna delle espressioni $d\Gamma_i$ ($i = x, y, z$) è stata ricavata per un rettangolo infinitesimo che racchiude un punto nel quale calcoliamo le derivate delle componenti del campo. Osserviamo che il risultato è diverso a seconda del piano coordinato scelto, ma che in realtà non dipende dalla forma del contorno della superficie $d\Sigma$, sia esso rettangolare o generico.

Consideriamo ora un punto nello spazio e una superficie $d\Sigma$ infinitesima intorno ad esso, alla quale associamo il vettore $d\Sigma \mathbf{u}_n$, con modulo $d\Sigma$, direzione ortogonale a $d\Sigma$ e verso legato al verso di percorrenza del contorno di $d\Sigma$ dalla regola della vite destrorsa. In coordinate cartesiane

$$d\Sigma \mathbf{u}_n = d\Sigma_x \mathbf{u}_x + d\Sigma_y \mathbf{u}_y + d\Sigma_z \mathbf{u}_z,$$

dove $d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z$ sono le proiezioni sui piani coordinati $(y, z), (x, z), (x, y)$ di $d\Sigma$.

La circuitazione $d\Gamma$ del vettore \mathbf{E} lungo il contorno di $d\Sigma$ è eguale alla somma delle circuitazioni $d\Gamma_x, d\Gamma_y, d\Gamma_z$ lungo i contorni delle superficie proiettate. Ciò discende dalla proprietà generale secondo cui, data una linea chiusa e costruita una rete di circuiti chiusi su una qualsiasi superficie che abbia la linea come contorno,

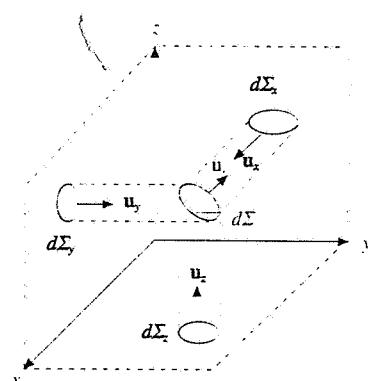


Figura 2.34

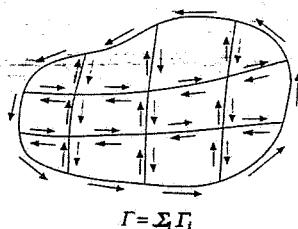


Figura 2.35

la circuitazione Γ lungo questa è la somma delle circuitazioni Γ_i lungo le maglie della rete, tutte orientate secondo la stessa convenzione. Infatti, come si capisce dalla figura 2.35, il contributo di qualsiasi tratto che non stia sulla linea è nullo, perché tale tratto è percorso una volta in un verso e una volta nel verso opposto. Applichiamo il risultato alla superficie $d\Sigma$ e alle sue proiezioni $d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z$ con le quali si può costruire una superficie che ha lo stesso contorno di $d\Sigma$; la costruzione è mostrata in figura 2.36 per un caso particolare semplice, che è generalizzabile.

In conclusione, data una superficie $d\Sigma$ nello spazio, intorno ad un punto in cui il vettore \mathbf{E} ha le componenti E_x, E_y, E_z , la circuitazione di \mathbf{E} lungo il contorno di $d\Sigma$ è

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) d\Sigma_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) d\Sigma_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) d\Sigma_z ;$$

essendo $d\Gamma$ una quantità scalare e $(d\Sigma_x, d\Sigma_y, d\Sigma_z)$ le componenti di un vettore, i termini tra parentesi devono a loro volta essere le componenti di un vettore.

Questo vettore si chiama *rotore* di \mathbf{E} e si definisce formalmente come prodotto vettoriale dell'operatore *del* per il vettore \mathbf{E} :

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} . \quad (2.49)$$

Ricordiamo l'espressione del prodotto vettoriale in coordinate cartesiane (appendice C del primo volume):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z . \quad (2.50)$$

Abbiamo allora l'eguaglianza

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\Sigma \mathbf{u}_n \quad (2.51)$$

ovvero, proiettando il rotore sulla direzione di \mathbf{u}_n ,

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E})_n d\Sigma , \quad \frac{d\Gamma}{d\Sigma} = (\nabla \times \mathbf{E})_n . \quad (2.52)$$

Pertanto, secondo (2.51), la *circuitazione di \mathbf{E} lungo un percorso chiuso infinitesimo su cui si appoggia una superficie $d\Sigma$* è data dal *flusso del rotore di \mathbf{E} attraverso $d\Sigma$* (si chiama così il prodotto scalare indicato, concetto che riprenderemo nel capitolo 3). La successiva (2.52) afferma che la componente del rotore di \mathbf{E} secondo una certa direzione è data dal rapporto tra la circuitazione di \mathbf{E} lungo il contorno di una superficie infinitesima ortogonale alla direzione e la superficie stessa. Questa si può considerare la definizione intrinseca di rotore, invariante rispetto al sistema di riferimento in quanto derivata dall'equazione vettoriale (2.51).

Il passaggio ad una linea chiusa finita C avviene sulla base del processo descritto nella figura 2.38; la circuitazione lungo C è la somma di infiniti contributi infinitesimi (2.51) calcolati lungo percorsi chiusi appoggiati su una qualsiasi superficie Σ avente C come contorno:

Rotore in coordinate cartesiane

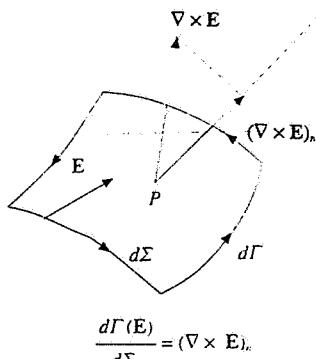


Figura 2.37

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{\Sigma} \mathbf{u}_n \quad (2.53)$$

Teorema di Stokes

Il risultato costituisce il *teorema di Stokes*: la circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa C è eguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C .

Se il campo vettoriale è conservativo la circuitazione è nulla lungo qualsiasi linea chiusa C ; quindi la (2.53), dovendo essere valida per qualsiasi superficie Σ si appoggi su C , comporta

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.54)$$

La (2.54) è la *forma locale* di (2.10): un campo conservativo ha rotore identicamente nullo ovvero, come si dice, è *irrotazionale*. Formalmente il risultato è immediato: $\mathbf{E} = -\nabla V$ implica

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V = 0$$

in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli, come sono ∇ e ∇V , è identicamente nullo; in altre parole l'applicazione successiva delle due operazioni di gradiente e di rotore dà risultato nullo.

Riprendiamo la (2.50) inserendo (2.54) per le componenti del campo vettoriale conservativo \mathbf{E} :

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{u}_z .$$

I termini tra parentesi sono tutti nulli per la proprietà delle derivate seconde miste di essere indipendenti dall'ordine di derivazione e quindi anche così si prova che un campo conservativo è irrotazionale. In coordinate cartesiane la condizione di nullità è

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} . \quad (2.55)$$

Riassumendo, se un campo è conservativo esso può essere espresso come gradiente di una funzione scalare e il suo rotore è ovunque nullo, il che in particolare porta a (2.55). Viceversa, se per un campo valgono le (2.55), cioè se il suo rotore è ovunque nullo, queste sono le condizioni di integrabilità della forma differenziale lineare

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

e vuol dire che esiste una funzione scalare di cui il campo è il gradiente. Abbiamo citato questo teorema nell'appendice A del primo volume, per le forme in due variabili; la situazione è la stessa per le forme in tre variabili e vale sempre la condizione che il dominio sia *semplicemente connesso*, cioè che data una linea chiusa sia sempre possibile trovare almeno una superficie contenuta interamente nel dominio e avente la linea come contorno.

Tutte le proprietà ricavate dal teorema di Stokes per i campi conservativi valgono in particolare per il campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche elettriche fisse e anche per il campo gravitazionale studiato nel capitolo 5 del primo volume.

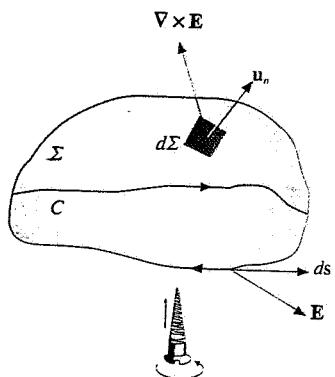


Figura 2.38

Esempio 2.11

All'interno di una superficie sferica di raggio R con centro nell'origine delle coordinate è definito il potenziale elettrostatico $V = A r^2/2$ con r distanza dall'origine e A costante positiva. Verificare direttamente che il campo elettrostatico è irrotazionale.

Se una particella con carica q_0 e massa m è abbandonata con velocità nulla a distanza r_0 dal centro, quale sarà il suo moto?

Soluzione

Scriviamo $V = A (x^2 + y^2 + z^2)/2$ e calcoliamo le componenti di \mathbf{E} :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -A x \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -A y \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -A z \quad .$$

cioè $\mathbf{E} = -A \mathbf{r}$ (campo centrale). Si vede che le derivate $\partial E_x / \partial y$, $\partial E_y / \partial z$, $\partial E_z / \partial x$, $\partial E_x / \partial z$, $\partial E_z / \partial x$, $\partial E_x / \partial y$ sono tutte nulle e quindi le (2.55) sono soddisfatte.

Altrettanto semplice è la verifica, partendo dall'esempio 2.6, che $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ per il campo di una carica puntiforme.

La particella lasciata libera con velocità iniziale nulla a distanza r_0 dal centro viene accelerata lungo una direzione passante per il centro e il moto è rettilineo perché non ci sono forze ortogonali a tale traiettoria. L'equazione del moto nel campo $\mathbf{E} = -Ar$ è

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -q A \mathbf{r} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{q A}{m} r = 0$$

e quindi la particella si muove di moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{q A / m}$: tenendo conto delle condizioni iniziali si ha

$$r = r_0 \cos \omega t \quad , \quad v = -\omega r_0 \sin \omega t \quad .$$

Il rotore in coordinate polari e cilindriche

Diamo senza dimostrazione le espressioni del rotore nei sistemi di coordinate polari e cilindriche già considerati per ricavare le espressioni (2.41) e (2.45) del gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\phi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] \mathbf{u}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Rotore in coordinate polari

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi . \quad (2.57)$$

Rotore in coordinate cilindriche

Osserviamo esplicitamente, utilizzando le coordinate cilindriche, che un campo diretto radialmente rispetto ad un asse, cioè con componenti $E_r(r) \neq 0$, $E_\theta = E_z = 0$, è irrotazionale: invece un campo con $E_\theta(r) \neq 0$, $E_r = E_z = 0$, cioè disposto trasversalmente rispetto all'asse e con modulo dipendente solo dalla distanza, ha rotore non nullo: da (2.57) si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{E_\theta}{r} + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \right) \mathbf{u}_z .$$

Ne deduciamo che non esistono campi elettrostatici di questo tipo. In effetti le linee di forza di questo campo sono circonferenze e tale configurazione non è possibile per un campo elettrostatico, in cui le linee di forza iniziano e terminano su cariche diverse o vanno all'infinito. È anche chiaro che per questo campo la circuitazione lungo una qualsiasi linea è diversa da zero.

2.7 Il dipolo elettrico

Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a costituiscono un *dipolo elettrico*; si chiama *momento del dipolo* il vettore

$$\mathbf{p} = q \mathbf{a} \quad (2.58)$$

con \mathbf{a} orientato dalla carica negativa alla carica positiva.

Il potenziale generato dal dipolo elettrico si calcola utilizzando la relazione (2.19):

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Se il punto P è lontano dal dipolo, cioè se $r \gg a$, si può porre

$$r_2 - r_1 = a \cos\theta, \quad r_1 r_2 = r^2$$

e quindi $V(P) = q a \cos\theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ ovvero

$$V(P) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.59)$$

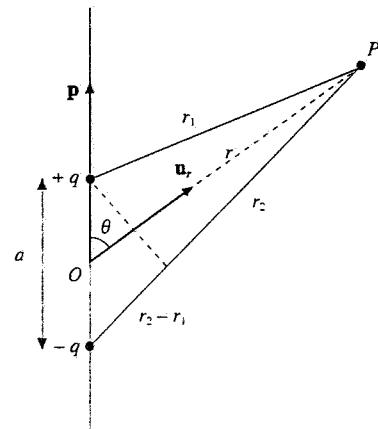


Figura 2.39

Potenziale di dipolo elettrico

essendo \mathbf{u}_r il versore della direzione OP .

Esaminiamo la struttura della formula (2.59). L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento \mathbf{p} e non q e a separatamente: ciò indica che da *misure di potenziale possiamo ricavare informazioni su \mathbf{p} , ma non sulla costituzione del sistema*. Ad esempio due cariche $+2q$ e $-2q$ distanti $a/2$ hanno momento di dipolo $2q a/2 = q a = p$ e generano un potenziale eguale a (2.59).

Il valore del potenziale decresce con il quadrato della distanza dal dipolo, cioè più rapidamente di quello generato da una singola carica puntiforme; qualitativamente, ciò è dovuto al fatto che gli effetti delle due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente (l'effetto sarebbe nullo se le due cariche potessero coincidere). Ritroviamo nel caso più semplice un risultato già incontrato nei vari calcoli di potenziale che abbiamo eseguito: quando si sommano i contributi di più cariche puntiformi si ottiene alla fine una dipendenza funzionale di V da r che è diversa dalla forma $1/r$ caratteristica di ogni singolo contributo. Geometricamente è spontanea la scelta delle coordinate polari: il potenziale dipende dalla distanza e dall'angolo tra \mathbf{u}_r e l'asse del dipolo. Esso ha quindi simmetria cilindrica rispetto a tale asse: \mathbf{p} e \mathbf{u}_r individuano un piano in cui V è dato da (2.59) e il risultato è lo stesso in ogni altro piano contenente l'asse del dipolo, cioè ottenuto dal primo con una rotazione intorno all'asse del dipolo. Analiticamente la proprietà è resa evidente dal fatto che il potenziale non dipende dalla terza coordinata polare ϕ .

Per il calcolo del campo utilizziamo (2.45) e (2.59):

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.60)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

Campo elettrico di un dipolo elettrico

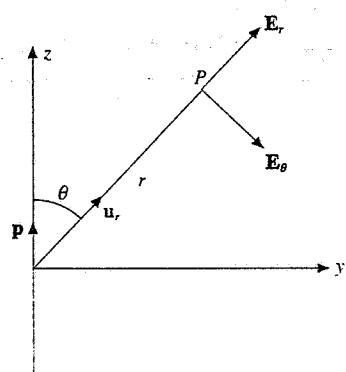


Figura 2.40

il campo sta pertanto nel piano \mathbf{p} , \mathbf{u}_r . Vettorialmente

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \mathbf{u}_r + \sin\theta \mathbf{u}_\theta) \quad (2.61)$$

e il modulo vale

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1} ,$$

mentre l'angolo α rispetto a \mathbf{u}_r è tale che

$$\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan\theta .$$

Vediamo che il campo decresce col cubo della distanza, in accordo con la legge $1/r^2$ del potenziale.

Esprimiamo anche il momento di dipolo in componenti polari,

$$\mathbf{p} = p \cos\theta \mathbf{u}_r - p \sin\theta \mathbf{u}_\theta ,$$

e introduciamolo nella (2.61):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos\theta \mathbf{u}_r - \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{p}] . \quad (2.62)$$

Questa espressione mostra una scomposizione del campo diversa da (2.61): invece che in componenti polari il campo è espresso come somma di due contributi,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

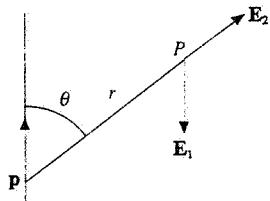


Figura 2.41

sempre antiparallelo a \mathbf{p} e variabile solo con la distanza,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

parallelo a \mathbf{u}_r e quindi dipendente anche dall'angolo polare θ tra \mathbf{p} e \mathbf{u}_r oltre che dalla distanza.

Sia da (2.61) che da (2.62) si vede in particolare che nei punti dell'asse del dipolo il campo è parallelo e concorde a \mathbf{p} e vale

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{sull'asse del dipolo :}$$

ciò si ricava ad esempio dal fatto che per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ $E_\theta = 0$ e $\mathbf{E} = E_r \mathbf{u}_r$. Nel piano mediano, cioè nel piano passante per il centro del dipolo e ortogonale a \mathbf{p} , il campo è parallelo e discorde a \mathbf{p} e vale

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{nello piano mediano .}$$

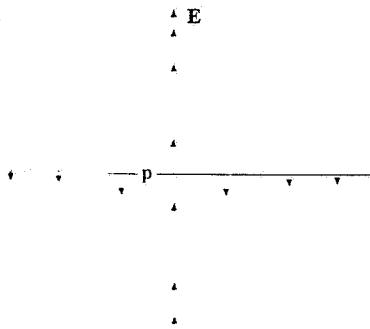


Figura 2.43

in quanto per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ $E_2 = 0$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ (oppure $E_r = 0$, $\mathbf{E} = E_\theta \mathbf{u}_\theta$). In tutte le altre situazioni geometriche il campo non è mai parallelo a \mathbf{p} .

Le linee di forza sono rappresentate in figura 2.44 in un qualsiasi piano passante per l'asse del dipolo; la rappresentazione nello spazio si ottiene ruotando la figura intorno all'asse del dipolo.

L'approssimazione di dipolo ($r \gg a$) in base alla quale abbiamo ricavato potenziale e campo di dipolo è spesso utilizzata in fisica. Su scala macroscopica essa si applica per esempio a un'antenna che emette onde elettromagnetiche, anche se non si tratta di un *sistema statico*, ma *oscillante* in quanto le cariche sono mantenute in movimento lungo l'antenna con moto periodico.

Molto importanti sono i dipoli atomici e molecolari: come vedremo nel capitolo 5, un atomo sottoposto a un campo elettrico esterno si deforma e acquista un momento di dipolo (si *polarizza*); esistono inoltre molecole che hanno una struttura elettrica assimilabile a un dipolo (*molecole polari*) anche in assenza di campi esterni. Nel paragrafo 2.9 tratteremo le interazioni elettriche tra dipoli; per ora diciamo soltanto che l'approssimazione di dipolo è appropriata perché la separazione tra cariche che dà origine ai momenti di dipolo è piccola rispetto alle distanze interatomiche e intermolecolari.

Esempio 2.12

Esprimere il potenziale e il campo di dipolo in coordinate cartesiane.

Soluzione

Prendiamo come asse z l'asse del dipolo, con \mathbf{u}_z concorde a \mathbf{p} ; gli assi x e y stanno nel piano mediano, l'origine coincide col centro del dipolo. In queste ipotesi

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ V &= \frac{p \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Si verifica subito che

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{\frac{3z^2}{r^2} + 1} = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1}$$

come trovato precedentemente. In coordinate cartesiane le proprietà di simmetria sono meno apparenti.

2.8 Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo

L'espressione (2.59) dedotta per il potenziale di due cariche puntiformi eguali ed opposte è suscettibile di una generalizzazione per sistemi di cariche più complessi.

Consideriamo un sistema di cariche q_i distribuite in una regione ristretta di dimensione massima d : potrebbe trattarsi ad esempio delle cariche positive e negative contenute in un atomo o in una molecola. Detto O un qualsiasi punto interno alla regione, calcoliamo il

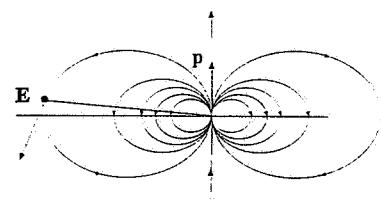


Figura 2.44

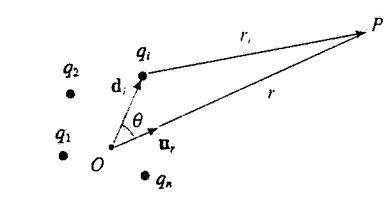


Figura 2.45

potenziale in un punto P a distanza r da O molto grande rispetto a d ($r \gg d$). Se r_i è la distanza da q_i a P , secondo (2.19) in P

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Chiamando \mathbf{d}_i il vettore che unisce O alla carica q_i , abbiamo $\mathbf{d}_i + \mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ e se appunto $r \gg d$, possiamo scrivere $d_i \cos \theta_i + r_i = r$ ovvero

$$r_i = r - d_i \cos \theta_i = r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r ,$$

con \mathbf{u}_r versore della direzione OP . Pertanto

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r} = \frac{r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r}{r^2 - (\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r)^2} = \frac{r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} ,$$

se ammettiamo di poter trascurare d_i^2 rispetto a r^2 . Il potenziale nel punto P risulta quindi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_i q_i (r + \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{u}_r)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} ,$$

avendo posto $Q = \sum_i q_i$, carica totale del sistema. Definiamo il vettore

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i , \quad (2.63)$$

detto *momento di dipolo elettrico del sistema rispetto al punto O* e in conclusione scriviamo il potenziale prodotto dal sistema di cariche nel punto P lontano dal sistema come

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = V_0 + V_{\text{dip}} . \quad (2.64)$$

Il primo termine rappresenta il potenziale generato da una carica, eguale alla carica totale del sistema, posta nel punto O e si chiama termine di *monopolio*; il secondo, formalmente eguale a (2.59), si chiama termine di *dipolo*.

Se la Q è diversa da zero il termine di monopolio è preponderante: infatti, scrivendo

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = Q \mathbf{d}$$

dove il modulo di \mathbf{d} non è molto diverso dai moduli dei vari \mathbf{d}_i , abbiamo

$$\frac{V_{\text{dip}}}{V_0} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{r Q} \sim \frac{Q d}{r Q} = \frac{d}{r} \ll 1 .$$

Il fatto che V_{dip} sia trascurabile rispetto a V_0 rende non influente la proprietà del momento \mathbf{p} di dipendere dalla scelta del punto O .

Considerando un altro punto O' , vale la relazione

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{OP}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{P}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{d}'_i \Rightarrow \mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = \sum_i q_i \mathbf{OO}' + \sum_i q_i \mathbf{d}'_i = Q \mathbf{OO}' + \mathbf{p}' :$$

il momento riferito a O' è diverso da quello riferito a O . Pertanto il termine di dipolo dipende dalla scelta del centro, il che non è appropriato per una quantità che abbia significato fisico.

Se invece il sistema è neutro ($Q = 0$), il termine di monopolio è nullo e il potenziale in P è

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.65)$$

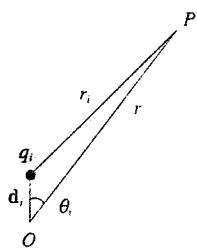


Figura 2.46
 $r = r_i + d_i \cos \theta_i$

Momento di dipolo elettrico
di un sistema di cariche

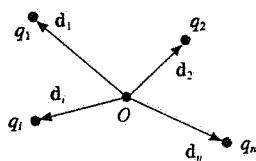


Figura 2.47
 $\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i$

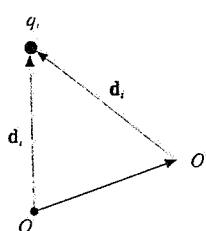


Figura 2.48

con \mathbf{p} proprietà intrinseca, caratteristica del sistema, indipendente da O : un punto va scelto per calcolare \mathbf{p} , ma il risultato è invariante.

Il caso specifico trattato nel paragrafo 2.7 appare adesso come un'applicazione particolare; anche (2.58) si ricava da (2.63):

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i = q \mathbf{d}_1 - q \mathbf{d}_2 = q (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) = q \mathbf{a} .$$

È evidente che da misure di potenziale e di campo non si traggono informazioni sulla effettiva distribuzione di carica del sistema, ma soltanto su \mathbf{p} ; per questo motivo la schematizzazione più semplice di un sistema neutro è quella di rappresentarlo con due cariche $+Q$ e $-Q$ poste a una certa distanza. Per esempio, in un sistema di n cariche di un segno ed n cariche eguali, ma di segno opposto, separando nella (2.63) i contributi delle cariche positive da quelli delle cariche negative, si scrive

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i^{(+)} - \sum_i q_i \mathbf{d}_i^{(-)} = Q \mathbf{d}_1 - Q \mathbf{d}_2 . \quad (2.66)$$

Osserviamo che l'eguaglianza $\sum_i q_i \mathbf{d}_i = Q \mathbf{d}$ ricorda la definizione di centro di massa, per cui si parla di centro delle cariche positive individuato da \mathbf{d}_1 e di centro delle cariche negative individuato da \mathbf{d}_2 e si immaginano le cariche Q e $-Q$ concentrate in tali punti, le cui posizioni non dipendono da O , distanti tra loro $\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$.

L'esistenza di un momento di dipolo intrinseco in una distribuzione di carica è legata all'esistenza di una *asimmetria* tra cariche positive e negative. In effetti si può dimostrare che se esiste un centro di simmetria il momento di dipolo del sistema è nullo. Nella figura 2.50 sono mostrate due distribuzioni con $Q = 0$ e $\mathbf{p} = 0$, dette *quadrupolo lineare* e *quadrupolo bidimensionale*.

Quando $\mathbf{p} = 0$, la (2.64) non è sufficiente per il calcolo del potenziale e occorre introdurre altri termini, che derivano dallo sviluppo in serie della funzione $1/r_i$. I primi due termini sono V_0 e V_{dip} , i successivi si chiamano *termini di multipolo* (*quadrupolo*, *ottupolo*, ... , 2^n -*polo*, ...); la dipendenza dalla distanza è $1/r^{n+1}$ ($n = 0$ monopolo, $n = 1$ dipolo, $n = 2$ quadrupolo, ...). Ogni termine è trascurabile rispetto a quello precedente, però se questo è nullo esso diventa il termine importante. Un sistema neutro pertanto può avere una interazione elettrica, che è tanto minore quanto maggiore è il grado di simmetria.

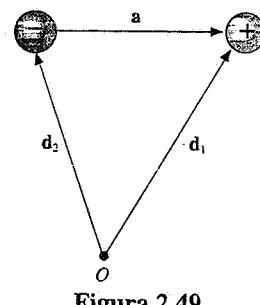


Figura 2.49

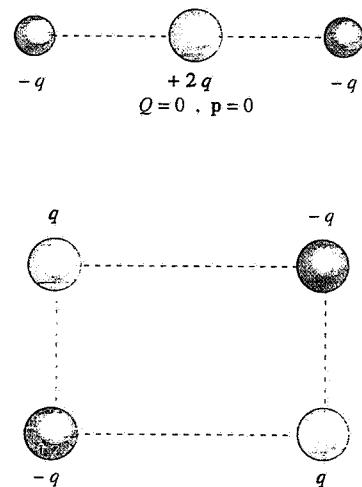


Figura 2.50

Esempio 2.13

Si consideri il quadrupolo lineare della figura 2.51 e si calcoli il potenziale in un punto P distante $r \gg a$ dal quadrupolo.

Soluzione

Utilizziamo le coordinate cartesiane (y nel foglio, x ortogonale al foglio): in generale sarebbe

$$\mathbf{r} = \mathbf{O} \mathbf{P} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z , \quad \mathbf{d}_i = \mathbf{O} \mathbf{P}_i = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z ,$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{P} = (x - x_i) \mathbf{u}_x + (y - y_i) \mathbf{u}_y + (z - z_i) \mathbf{u}_z$$

e lo sviluppo in serie di $1/r_i$ si dovrebbe scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r_i} \right) x_i + \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{r_i} \right) y_i + \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) z_i + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r_i} \right) x_i^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \frac{1}{r_i} \right) y_i^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \frac{1}{r_i} \right) z_i^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} \frac{1}{r_i} \right) x_i y_i + \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) x_i z_i + \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) y_i z_i + \dots \end{aligned}$$

dove tutte le derivate si intendono calcolate per $r_i = r$ e i sei termini con le derivate seconde miste, essendo a due a due uguali, diventano tre. Però il punto P sta nel piano yz , z e i punti P_i , cioè le cariche, sull'asse z , per cui $x = 0$, $x_i = y_i = 0$ e

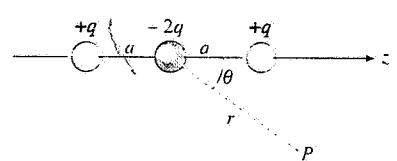


Figura 2.51

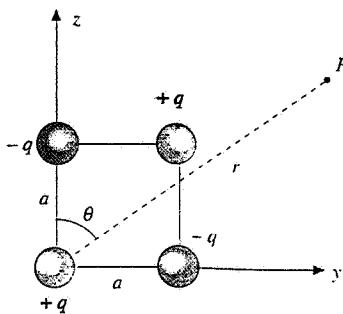


Figura 2.52

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) z_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \frac{1}{r_i} \right) z_i^2 + \dots$$

con $1/r_i = 1/\sqrt{y^2 + (z - z_i)^2}$. Eseguendo le derivate e ricordando che $\cos\theta = z/r$ si trova:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{z z_i}{r} + \frac{1}{2 r^3} \left(3 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) z_i^2 + \dots = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} z_i \cos\theta + \frac{1}{2 r^3} (3 \cos^2\theta - 1) z_i^2 + \dots$$

Il potenziale di un sistema lineare di cariche è pertanto

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + \frac{\cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \sum_i q_i z_i + \frac{3 \cos^2\theta - 1}{8 \pi \epsilon_0 r^3} \sum_i q_i z_i^2 + \dots$$

$$= \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + \frac{p \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} + \frac{p_q (3 \cos^2\theta - 1)}{8 \pi \epsilon_0 r^3} + \dots$$

avendo definito momento di quadrupolo $p_q = \sum_i q_i z_i^2$. Nel nostro caso $Q = 0$ e $p = \sum_i q_i z_i = q a - q a = 0$, mentre $p_q = 2 q a^2$ per cui

$$V = \frac{2 q a^2 (3 \cos^2\theta - 1)}{8 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{q a^2 (3 \cos^2\theta - 1)}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

Osserviamo che in un sistema neutro con momento di dipolo non nullo il termine di quadrupolo, normalmente trascurabile, è l'unico contributo al potenziale nel piano mediano del dipolo equivalente, dove $V_{\text{dip}} = 0$.

Nel caso del quadrupolo bidimensionale eseguendo lo sviluppo di $1/r_i$ con $x = x_i = 0$ si trova che nella formula del potenziale tutti i termini si elidono con l'eccezione di

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z_i} \frac{1}{r_i} \right) y_i z_i$$

relativo alla carica $+q$ di coordinate (a, b) , e si ottiene

$$V = \frac{3 q a b \cos\theta \sin\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3}$$

2.9 La forza su un dipolo elettrico

Consideriamo un dipolo formato da una carica $-q$ posta nel punto $P_1(x, y, z)$ e da una carica $+q$ posta nel punto $P_2(x + a_x, y + a_y, z + a_z)$, il vettore $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$ congiunge P_1 a P_2 e il momento di dipolo è $\mathbf{p} = q \mathbf{a}$. Se il dipolo si trova in una regione in cui c'è un campo elettrico, la sua energia potenziale elettrostatica secondo (2.9) è

$$U_e = q V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) - q V(x, y, z)$$

Supponiamo che la distanza a sia piccola, così da poter scrivere

$$V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z ;$$

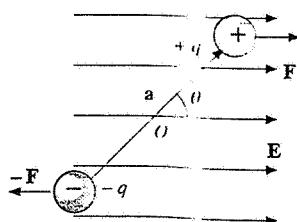


Figura 2.53

in tal caso l'energia elettrostatica del dipolo è

$$U_e = q \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + q \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + q \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p \cos \theta E \quad (2.67)$$

ricordando che il campo è l'opposto del gradiente del potenziale, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Se il campo è uniforme le forze sulle cariche, $\mathbf{F}_1 = -q \mathbf{E}$, $\mathbf{F}_2 = q \mathbf{E}$, costituiscono una *coppia* e quindi hanno risultante nulla, ma momento diverso da zero. Il dipolo pertanto resta fermo nel campo uniforme e la sua posizione di equilibrio stabile, corrispondente al minimo dell'energia potenziale, è col momento di dipolo \mathbf{p} parallelo e concorde al campo \mathbf{E} ($U_{e,\min} = -p E$). Facendo ruotare il dipolo di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio stabile, esso risente di un *momento delle forze* \mathbf{M} che tende a riportarlo nella posizione $\theta = 0$. Tale momento, calcolato per esempio rispetto al centro del dipolo (ma sappiamo che il momento di una coppia non dipende dal polo), è

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times q \mathbf{E} = q \mathbf{a} \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.68)$$

Energia elettrostatica
del dipolo

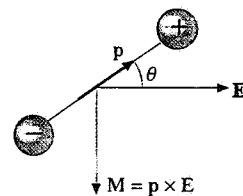


Figura 2.54

Momento agente sul dipolo

Dalla figura 2.54 si vede che $\mathbf{M} = -p \sin \theta \mathbf{E}$, ovvero

$$M = -p \sin \theta E = -\frac{dU_e}{d\theta}$$

in accordo con $dW = M d\theta = -dU_e$; nella derivata dell'energia non si è usato il simbolo di derivata parziale perché l'energia dipende solo dall'angolo quando il campo è uniforme.

Esempio 2.14

Un dipolo, di momento elettrico \mathbf{p} e momento d'inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro e ortogonale a \mathbf{p} , è immerso in un campo \mathbf{E} uniforme. Descrivere il moto del dipolo quando viene spostato di un piccolo angolo dalla posizione di equilibrio.

Soluzione

Ricordiamo dalla dinamica dei corpi rigidi che l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad ;$$

proiettando sull'asse di rotazione, che è l'asse z della figura 2.54

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -p E \sin \theta$$

Nell'ipotesi che l'angolo sia piccolo così da poter confondere il seno con l'angolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{p E}{I} \theta = 0$$

che è l'equazione di un moto armonico con pulsazione e periodo dati da

$$\omega = \sqrt{\frac{p E}{I}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{p E}}$$

La posizione angolare e la velocità angolare sono

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \Omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi).$$

La dinamica è quella del pendolo di torsione: in entrambi i casi agisce un momento di tipo elastico $M = -k\theta$.

Se l'angolo è grande il moto non è più armonico, pur restando periodico, e applicando la conservazione dell'energia si può esprimere la velocità in funzione dell'angolo:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} I \Omega_2^2 - \frac{1}{2} I \Omega_1^2 = -\Delta U_e = p E \cos \theta_2 - p E \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow \Omega_2^2 = \Omega_1^2 + \frac{2 p E}{I} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \Omega_1^2 + 2 \omega^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

Quando il campo elettrico non è uniforme, oltre al momento M che tende a rendere \mathbf{p} parallelo a \mathbf{E} (allineamento del dipolo), agisce anche una forza \mathbf{F} poiché le forze sulle due cariche $-q$ e $+q$ sono ora diverse in quanto diverso è il valore del campo nelle due posizioni occupate dalle cariche. Tali forze si scrivono

$$\mathbf{F}_1 = -q \mathbf{E}, \quad \mathbf{F}_2 = q (\mathbf{E} + \Delta \mathbf{E}) = q \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} a_x + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} a_y + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} a_z \right),$$

dove abbiamo usato il teorema del differenziale totale per una grandezza vettoriale, strutturalmente identico a quello per una grandezza scalare. La forza risultante è

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = q a_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + q a_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + q a_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$$

ovvero

$$\mathbf{F} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \quad (2.69)$$

Le componenti cartesiane della forza subita dal dipolo sono:

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$F_y = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (2.70)$$

In forma compatta (2.69) si scrive

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

intendendo che l'operatore $(\mathbf{p} \cdot \nabla)$ applicato al vettore $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y + E_z \mathbf{u}_z$ dà un vettore la cui componente x è

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla) E_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

e analogamente per le altre componenti.

La (2.69) è l'espressione più generale della forza subita dal dipolo, valida anche in campi elettrici non conservativi. In un campo elettrostatico deve essere vero anche che

$$\mathbf{F} = -\nabla U_e = -\nabla (-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z)$$

e quindi la forza ha le componenti

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Queste componenti sono uguali alle componenti (2.70) in quanto, essendo il campo conservativo, valgono le (2.55).

Non è semplice intuire in generale la direzione della forza agente sul dipolo; nell'esempio successivo studieremo un caso specifico. Si deve notare ad ogni modo che le componenti della forza dipendono dalle derivate delle componenti del campo e quindi nella determinazione della forza sul dipolo sono importanti le variazioni del campo più che il campo stesso.

Esempio 2.15

Un dipolo di momento \mathbf{p} è immerso nel campo generato da una carica puntiforme positiva q_0 . Si consideri il dipolo posizionato nel punto P dell'asse y con il momento parallelo a \mathbf{E} oppure ortogonale a \mathbf{E} .

Soluzione

Il problema è un problema piano: se il dipolo ha il momento \mathbf{p} nel piano y, z le forze stanno in tale piano. Per applicare le (2.71) ricorriamo alle (1.15) che nel nostro caso ($x = 0$) si scrivono

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Le derivate sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q_0(-2y^2 + z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{-3q_0yz}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{-3q_0yz}{4\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q_0(y^2 - 2z^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5} \end{aligned}$$

Se il dipolo nel punto P ($y = r, z = 0$) ha il momento parallelo e concorde al campo, cioè se $p_x = 0, p_y = p, p_z = 0$, si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{-2p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad F_z = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = \frac{-2p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_y;$$

la forza è attrattiva, il dipolo si sposta verso l'origine. Se invece il dipolo è discorda al campo, $p_y = -p$ e la forza, eguale in modulo, è ora repulsiva.

Quando il dipolo è ortogonale a \mathbf{E} e concorde all'asse z , $p_x = 0, p_y = 0, p_z = p$ e si trova

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = \frac{p q_0 y^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \Rightarrow \mathbf{F}_2 = \frac{p q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_z;$$

la forza è parallela e concorde all'asse z , cioè a \mathbf{p} . Se si rovescia \mathbf{p} si rovescia anche la forza, che resta concorde a \mathbf{p} .

Si può scrivere nei due casi

$$\mathbf{F}_1 = \frac{-2q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{p}.$$

Forza su un dipolo in un campo elettrostatico

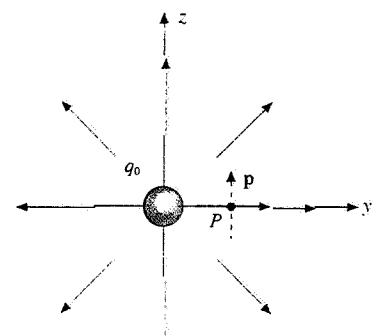


Figura 2.55

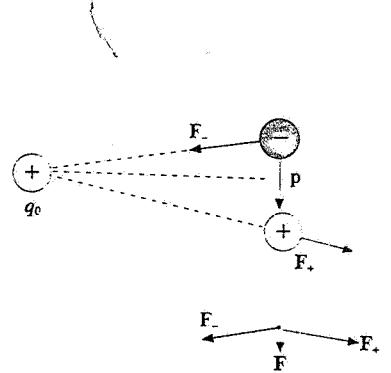
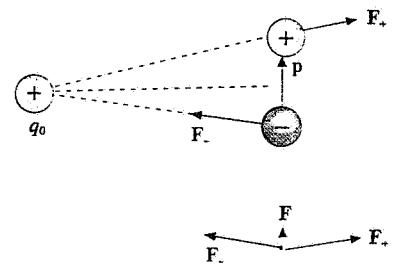


Figura 2.56

Dopo aver trovato i risultati con le formule generali (2.71) osserviamo che i versi delle forze si possono dedurre facilmente a priori: se il dipolo è concorde al campo la carica negativa è più vicina a q_0 di quella positiva e il risultato è attrattivo, viceversa nel caso opposto. Nella seconda posizione si vede dalla figura 2.56 che la forza è ortogonale al campo e concorde a \mathbf{p} .

Nell'esempio appena discusso ci sono alcuni fatti che è interessante mettere in evidenza. Quando il momento \mathbf{p} è parallelo al campo \mathbf{E} la forza si può scrivere

$$\mathbf{F} = -\frac{2 p q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{u}_y = p \left(\frac{-2 q_0}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \right) \mathbf{u}_y = p \frac{dE}{dr} \mathbf{u}_y = p \nabla E .$$

Questo risultato è vero anche in generale: se \mathbf{p} è parallelo a \mathbf{E} la forza è

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla (p E) = p \nabla E$$

e risulta parallela al gradiente del modulo del campo. Ciò significa che il *dipolo tende a portarsi nei punti in cui il campo è più intenso se il momento \mathbf{p} è concorde al campo, mentre tende ad allontanarsene se \mathbf{p} è discordo al campo*; tale situazione è frequente perché un dipolo tende spontaneamente ad allinearsi al campo.

Quando invece il momento di dipolo non è parallelo al campo, le cariche del dipolo sottraggono la struttura del campo anche trasversalmente alle linee di forza e la formula della forza è più complessa.

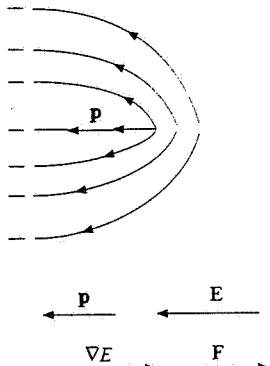


Figura 2.57

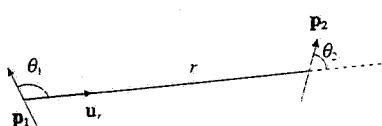


Figura 2.58

Interazione tra dipoli

Due dipoli di momenti elettrici \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , posti a distanza r tra loro, interagiscono in quanto ciascuno è sottoposto al campo dell'altro. Vogliamo calcolare l'energia elettrostatica del sistema di due dipoli e la forza in alcune situazioni geometricamente semplici.

Riprendiamo le formule del campo di un dipolo (2.62) e dell'energia di un dipolo in un campo (2.67); abbiamo per l'energia del secondo dipolo nel campo del primo

$$U_{e,2} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r)] , \quad (2.72)$$

essendo $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{1,2}$ il versore della direzione che va dal primo al secondo dipolo. Si vede che l'energia potenziale è simmetrica rispetto allo scambio $1 \rightarrow 2$, cioè che $U_{e,1} = U_{e,2}$, come deve essere trattandosi di una *interazione mutua*. L'energia è inversamente proporzionale a r^3 , per cui la forza è inversamente proporzionale a r^4 : l'interazione decresce molto rapidamente con la distanza.

Se i dipoli stanno nello stesso piano si ha la situazione della figura 2.58 e la (2.72) diventa

$$U_e = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} [p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2] = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) .$$

Esaminiamo per primo il caso in cui i due dipoli abbiano momenti concordi disposti su due rette parallele distanti r e ortogonalmente alla congiungente, per cui

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r = 0 \Rightarrow U_e = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} .$$

La forza subita dal secondo dipolo è

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla U_e = -\frac{\partial U_e}{\partial r} \mathbf{u}_r = \frac{3 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^4} \mathbf{u}_r .$$

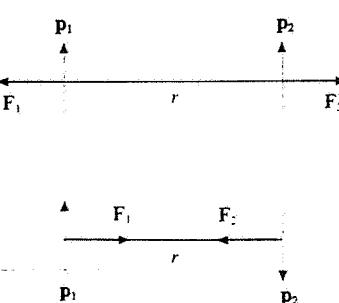


Figura 2.59

cioè repulsiva; si verifica subito che $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Se i momenti sono discordi l'energia cambia di segno e la forza tra i dipoli diviene attrattiva.

Supponiamo successivamente che i due dipoli abbiano momenti paralleli e concordi, posti sullo stesso asse:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 , \quad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r = p_1 , \quad \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r = p_2 \Rightarrow U_e = \frac{-2 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} .$$

La forza è attrattiva e vale

$$\mathbf{F} = \frac{-6 p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^4} \mathbf{u}_r .$$

Con i dipoli discordi energia e forza cambiano di segno.

L'interazione tra molecole aventi un momento di dipolo intrinseco avviene secondo le linee descritte. Una molecola d'acqua presenta un momento di dipolo elettrico $p = 6.2 \cdot 10^{-30}$ Cm; date due molecole distanti $r = 5 \cdot 10^{-10}$ m, che è un valore tipico per l'acqua nella fase liquida, il valore di riferimento dell'energia di interazione è

$$U_e = \frac{p_1 p_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} = \frac{9 \cdot 10^9 (6.2 \cdot 10^{-30})^2}{(5 \cdot 10^{-10})^3} = 2.77 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 1.73 \cdot 10^{-2} \text{ eV} = 17.3 \text{ meV} .$$

Quindi nella prima disposizione studiata $U_e = 17.3$ meV, nella seconda $U_e = -34.6$ meV (l'energia di agitazione termica, data come ordine di grandezza da $k_B T$, vale 26 meV a 300 K). Le forze corrispondenti sono $1.66 \cdot 10^{-11}$ N e $-3.32 \cdot 10^{-11}$ N.



Figura 2.60

Unità di misura

Il momento di dipolo elettrico, prodotto di una carica per una distanza, ha l'unità di misura Coulomb · metro, Cm. come abbiamo appena visto. I dipoli elementari, intrinseci o indotti, hanno valori da 10^{-30} Cm per i primi a 10^{-35} Cm per i secondi.

La legge di Gauss

Il campo elettrostatico di una carica puntiforme è un *campo centrale* e in quanto tale è *conservativo*, come abbiamo discusso nel capitolo 2. Per una distribuzione di carica discreta o continua non si può parlare in generale di campo radiale; esso però è sempre conservativo, come discende dall'applicazione del principio di sovrapposizione nel calcolo del lavoro, che è indipendente dal particolare percorso seguito in quanto lo sono tutti i contributi dovuti ai singoli campi.

La proprietà di essere conservativo non è una caratteristica specifica di un campo radiale che dipende dalla distanza come r^{-2} , ma vale per qualsiasi campo del tipo $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r$, radiale e con modulo dipendente solo dalla distanza, cioè centrale. Ad esempio, il campo

$$\mathbf{E} = \frac{C}{r^n} \mathbf{u}_r ,$$

con $n \neq 1$, è il gradiente della funzione potenziale calcolata secondo (2.15):

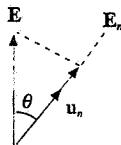


Figura 3.1

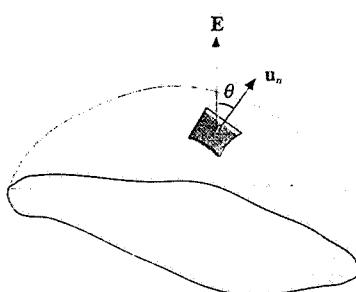
$$V(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{C}{(n-1)r^{n-1}} .$$

In questo capitolo dedurremo una legge che vale solamente se la dipendenza del campo dalla distanza è del tipo r^{-2} ; è una legge che si applica pertanto anche nel caso del campo gravitazionale e che è stata per questo già enunciata nel capitolo 5 del primo volume.

3.1 Flusso del campo elettrico. Legge di Gauss.

Consideriamo, figura 3.1, una superficie $d\Sigma$ immersa in una regione in cui è definito un campo \mathbf{E} e orientiamola fissando il verso del versore della normale \mathbf{u}_n . Si definisce *flusso del campo \mathbf{E} attraverso la superficie $d\Sigma$* la quantità scalare

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = E \cos\theta d\Sigma = E_n d\Sigma . \quad (3.1)$$



Il flusso attraverso una superficie finita Σ , figura 3.2, si ottiene sommando tutti i contributi infinitesimi (3.1) ovvero *integrandosi*:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (3.2)$$

Se la *superficie è chiusa* il *flusso* si scrive, con simbologia di significato evidente,

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (3.3)$$

$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$

Figura 3.2

In questo caso è convenzione orientare la normale verso l'esterno. I contributi positivi all'integrale (3.3) sono quelli per cui $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n > 0$, dovuti a quelle zone dove anche \mathbf{E} punta verso l'esterno: essi rappresentano un *flusso di E uscente* dalla superficie. I contributi negativi provengono dalle zone in cui $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n < 0$, in cui cioè \mathbf{E} punta verso l'interno, e rappresentano un *flusso di E entrante*. Pertanto l'integrale (3.3) dà il *flusso netto attraverso la superficie chiusa*; se esso è *nullo* vuol dire di norma che il *flusso entrante eguaglia in modulo il flusso uscente*.

La definizione di flusso si applica a qualsiasi campo vettoriale; ad esempio l'abbiamo già utilizzata nel paragrafo 2.6 a proposito del flusso del rotore di un vettore. Il nome di flusso deriva dalle applicazioni in idrodinamica, ma deve essere chiaro che il flusso di un campo vettoriale è un concetto matematico e non si accompagna necessariamente al passaggio attraverso Σ di materia o energia.

Prendiamo ora in esame il campo prodotto da una carica puntiforme q , dato da (1.14), e calcoliamo il flusso attraverso l'elemento di superficie orientata utilizzando (3.1):

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2},$$

dove $d\Sigma_0$ è la proiezione di $d\Sigma$ sul piano perpendicolare a \mathbf{u}_r . Per definizione (si veda la nota più avanti) $d\Sigma_0/r^2$ è l'*angolo solido* $d\Omega$ sotto cui è visto dalla carica q il contorno di $d\Sigma$, per cui

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (3.4)$$

Il *flusso del campo E di una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla carica*; tracciate da q una serie di semirette che definiscono un *cono infinitesimo* con vertice in q , il flusso di \mathbf{E} è lo stesso per qualsiasi superficie $d\Sigma$ il cui contorno si appoggi sulla superficie laterale del cono in quanto

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1 \cos\theta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_{1,0}}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos\theta_2}{r_2^2} = \frac{d\Sigma_{2,0}}{r_2^2} = \dots$$

Conviene osservare subito che la dipendenza del flusso dall'angolo solido è conseguenza del fatto che a denominatore dell'espressione del campo compare r^2 : *qualunque altra dipendenza funzionale non avrebbe portato alla (3.4)*.

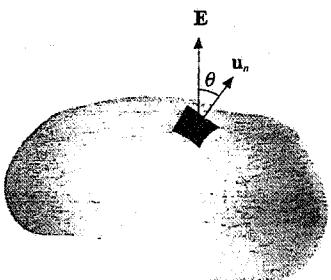
Il flusso attraverso una superficie finita è dato da

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (3.5)$$

con Ω , figura 3.6, angolo solido sotto cui è visto il contorno della superficie Σ dalla carica q . Calcoliamo adesso il flusso di \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa, distinguendo due casi: precisamente il caso in cui la *carica q è interna* alla superficie chiusa e il caso in cui è *esterna*.

Se la *carica è interna*, figura 3.7, tutti i contributi $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$ si sommano in quanto hanno sempre lo stesso segno in qualsiasi punto di Σ e applicando (3.5) abbiamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad (3.6)$$



$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$

Figura 3.3

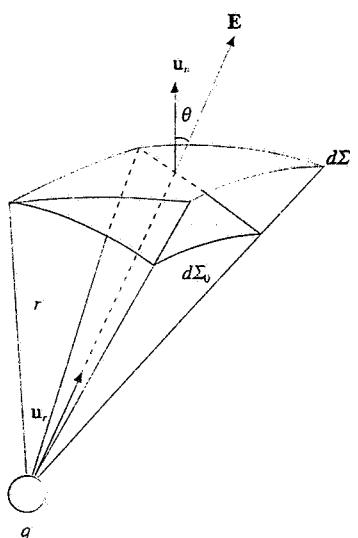


Figura 3.4

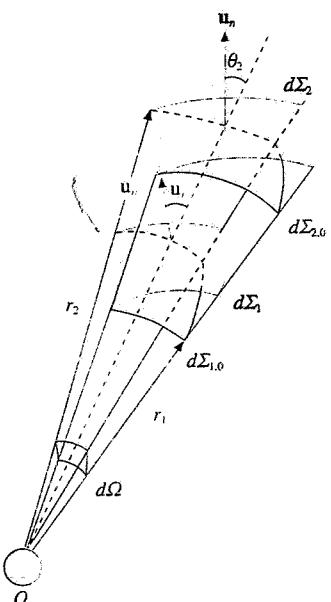


Figura 3.5

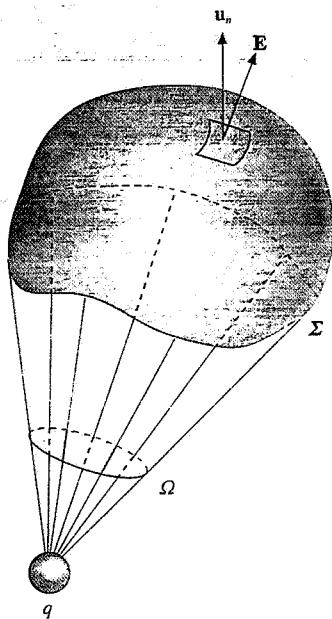


Figura 3.6

infatti (vedi nota più avanti) l'angolo solido totale sotto cui è vista una *superficie chiusa qualunque* da un punto all'interno è 4π .

Se invece la *carica* è *esterna* alla superficie chiusa, consideriamo (figura 3.8) un cono elementare che sottende l'angolo solido $d\Omega$ e che stacca sulla superficie chiusa due elementi $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$; l'orientazione della normale è tale che su $d\Sigma_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 < 0$ e su $d\Sigma_2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 > 0$. I flussi attraverso i due elementi sono:

$$\begin{aligned} d\Phi_1(\mathbf{E}) &= \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \\ d\Phi_2(\mathbf{E}) &= \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1(\mathbf{E}), \\ \Rightarrow d\Phi_1(\mathbf{E}) + d\Phi_2(\mathbf{E}) &= 0. \end{aligned}$$

Integrando su tutta la superficie chiusa otteniamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0. \quad (3.7)$$

Le (3.6) e (3.7) si possono così riassumere: *il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo di una carica puntiforme q vale q/ϵ_0 se la carica è interna alla superficie, vale zero se la carica è esterna.*

Il risultato enunciato si estende al caso di più cariche puntiformi, attraverso il principio di sovrapposizione e la proprietà additiva degli integrali: il flusso attraverso una superficie chiusa del campo \mathbf{E} generato da un sistema discreto di cariche è dato da

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \oint (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \sum_i \oint \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma.$$

Ciascun integrale vale q_i/ϵ_0 se la carica è contenuta all'interno della superficie e vale zero se la carica è esterna. Pertanto abbiamo

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Figura 3.7

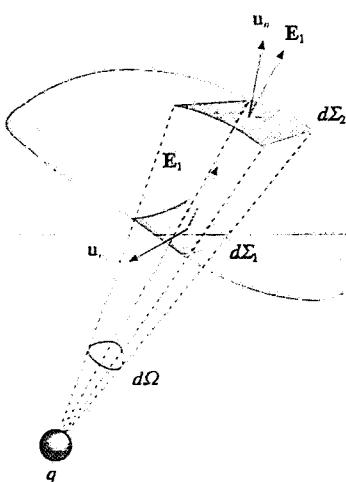


Figura 3.8

essendo la somma estesa a *tutte e sole le cariche poste all'interno della superficie Σ* (figura 3.9).

Nel caso più generale in cui il campo sia generato da una distribuzione continua di cariche caratterizzata dalla densità spaziale $\rho(x, y, z)$, definita dalla (1.19), la (3.8) diviene

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\tau, \quad (3.9)$$

dove l'integrale, esteso al volume τ racchiuso dalla superficie Σ , rappresenta sempre la carica totale contenuta all'interno di Σ .

Le (3.8) e (3.9) costituiscono la *legge*, o teorema, di *Gauss*: *il flusso del campo \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ϵ_0 .*

Notiamo esplicitamente che il campo \mathbf{E} è quello prodotto da tutte le cariche interne e esterne alla superficie; però il suo flusso attraverso Σ dipende solo dalle cariche interne.

Come abbiamo già accennato la dimostrazione della legge di Gauss si basa sul fatto che l'esponente di r al denominatore è esattamente 2. Per un campo radiale qualunque del tipo $1/r^n$, con $n \neq 2$ anche di una quantità molto piccola, non vale la legge di Gauss: questa può quindi essere considerata come una *formulazione alternativa della legge di Coulomb, basata sul concetto di campo*. Vedremo nell'esempio 4.3 che dalla legge di Gauss si ricava la legge di Coulomb.

Verificare sperimentalmente la legge di Gauss significa pertanto verificare la legge di Coulomb; e in effetti le verifiche più precise si hanno per questa via più che da misure dirette di forza (paragrafo 4.3).

Nota. L'angolo solido

La nozione di *angolo solido* è l'estensione a tre dimensioni del concetto di angolo piano, che richiamiamo brevemente per mettere in evidenza l'analogia tra le due definizioni. L'angolo piano compreso tra due semirette uscenti da uno stesso punto O è misurato dal rapporto tra la lunghezza s di un arco di circonferenza di centro O compreso tra le due semirette e il raggio r della circonferenza stessa,

$$\theta = \frac{s}{r}$$

La definizione è valida anche per un arco infinitesimo,

$$d\theta = \frac{ds}{r} ,$$

e si può estendere a un tratto ds' formante l'angolo α con ds scrivendo

$$d\theta = \frac{ds}{r} = \frac{ds' \cos\alpha}{r} ;$$

α è anche l'angolo tra le normali a ds e ds' . In ogni caso la definizione non dipende dalla circonferenza scelta, cioè da r .

L'unità di misura dell'angolo piano è il *radiane*, corrispondente all'angolo per cui $s = r$. Se s coincide con la lunghezza della circonferenza, $2\pi r$, l'angolo corrispondente vale 2π radianti, che è il valore massimo possibile. Per un giro completo del punto P rispetto a O lungo *qualsiasi linea chiusa* l'angolo vale sempre 2π .

Nel caso tridimensionale, figura 3.13, consideriamo subito l'*angolo solido infinitesimo* $d\Omega$ che è così definito: data una superficie $d\Sigma$ e la sua proiezione $d\Sigma_0$ ortogonale al raggio uscente da un punto O e passante per $d\Sigma$ si chiama angolo solido la quantità

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cos\alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

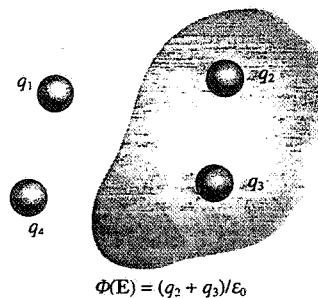
La superficie $d\Sigma_0$ è un elemento di calotta sferica e la sua area vale, nel sistema di coordinate polari della figura 3.14

$$(AB) \cdot (AD) = (r d\theta) (r \sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

per cui

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.10)$$

La (3.10) esprime l'*angolo solido* sotto cui dal punto O si vede il contorno $ABCD$ della superficie $d\Sigma_0$: risulta che $d\Omega$ non dipende dal raggio r . Geometricamente, possiamo dire che l'*angolo solido* dà una misura della parte di spazio compresa entro un fascio di semirette uscenti da O , così come l'*angolo piano* dà una misura della parte di piano compresa tra due semirette uscenti da O .



$$\Phi(E) = (q_1 + q_2)/\epsilon_0$$

Figura 3.9

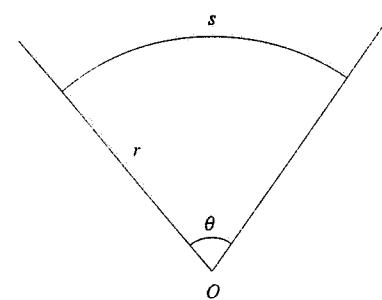


Figura 3.10

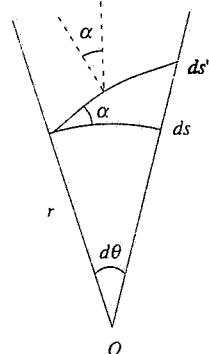


Figura 3.11

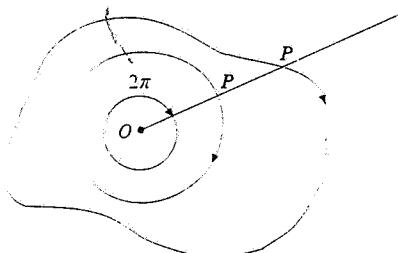


Figura 3.12

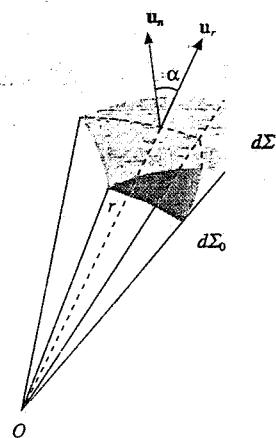


Figura 3.13

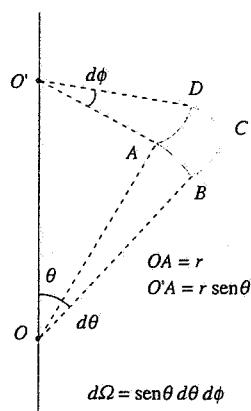


Figura 3.14

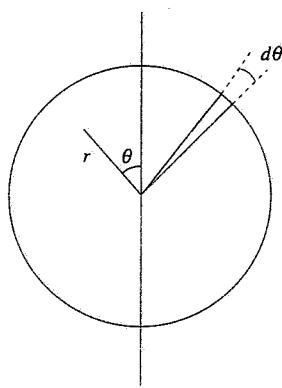


Figura 3.15

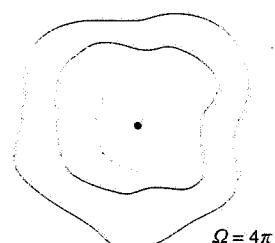


Figura 3.16

Per una superficie finita l'angolo solido è dato dall'integrale

$$\Omega = \int \sin \theta d\theta d\phi$$

che è un integrale doppio sulle variabili θ e ϕ .

Se, a θ costante, si fa variare ϕ da zero a 2π , abbiamo l'angolo solido sotto cui da O è vista la corona sferica infinitesima della figura 3.15:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Integrando da θ_1 a θ_2

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = 2\pi (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

In particolare, se $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$,

$$\Omega(\theta) = 2\pi (1 - \cos \theta)$$

e infine, se $\theta_2 = \pi$, abbiamo l'angolo solido sotto cui dal centro è vista tutta la superficie sferica,

$$\Omega = 4\pi \quad . \quad (3.11)$$

Il risultato (3.11) è valido per una superficie chiusa di qualsiasi forma che racchiuda O , in quanto per ogni elemento infinitesimo di questa vale sempre (3.10); cioè l'*angolo solido sotto cui un punto interno a una superficie chiusa vede la superficie è sempre 4π, che è il valore massimo di Ω*.

L'unità di misura dell'angolo solido è lo *steradiante*: Ω dato da (3.11) vale 4π steradianti.

3.2 Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss.

La legge di Gauss diventa uno strumento molto potente per determinare il campo E nei casi in cui la *distribuzione di carica* che genera il campo presenti un *elevato grado di simmetria* (sferica, cilindrica, piana). In queste condizioni di norma è facile individuare a priori l'andamento delle linee di forza e trovare di conseguenza delle superficie chiuse nei cui punti il campo è parallelo o ortogonale alla superficie stessa, per cui i contributi $E \cdot u_n d\Sigma$ sono nulli o si scrivono semplicemente $E \Sigma$. Se inoltre si può dedurre che il modulo del campo è costante nelle zone in cui E è parallelo a u_n , la legge di Gauss assume la forma

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = E \Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ,$$

da cui si trova subito il modulo del campo:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} \quad ;$$

q è la carica posta all'interno della superficie chiusa Σ . Questa procedura di calcolo è mostrata negli esempi che seguono, tra i quali troviamo problemi già trattati in precedenza; si vedrà così la maggior semplicità del metodo ora descritto.

Esempio 3.1

Una carica q è distribuita con densità superficiale costante σ su una superficie sferica di raggio R . Calcolare il campo \mathbf{E} nei punti all'interno e all'esterno della superficie.

Soluzione

Cominciamo col calcolare il campo all'esterno. Nel punto P distante $r > R$ dal centro \mathbf{E} è certamente radiale, in quanto è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, eguali in modulo, la cui risultante è radiale; se così non fosse vorrebbe dire che σ non è uniforme. In qualsiasi altro punto che ha la stessa distanza di P dal centro la situazione è la stessa. Ciò significa che il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio r , è ortogonale a questa e ha verso uscente o entrante a seconda del segno della carica:

$$\mathbf{E} = E(r) \mathbf{u}_r ,$$

dove abbiamo messo in evidenza che il modulo può dipendere solo da r . Applicando (3.9) ad una superficie sferica Σ di raggio $r > R$:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E}(r) \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = E(r) \oint d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

con $q = 4\pi R^2 \sigma$. Di conseguenza

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad , \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r .$$

Il campo all'esterno di una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica è eguale a quello di una carica puntiforme di egual valore concentrata in O ; a parità di carica esso non dipende dal raggio della distribuzione.

All'interno della superficie sferica valgono le stesse ragioni di simmetria per cui il campo dovrebbe essere radiale e il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica Σ' di raggio $r < R$ dovrebbe valere $E \Sigma'$. D'altra parte all'interno non c'è carica, il flusso attraverso Σ' è nullo e quindi deve essere $E = 0$ per $r < R$: *all'interno di una distribuzione superficiale sferica uniforme il campo è nullo*.

Notiamo che per r tendente a R dall'interno il campo è sempre nullo, mentre per r tendente a R dall'esterno E tende a $q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$: il campo presenta la discontinuità σ/ϵ_0 nel passaggio attraverso lo strato carico.

Il potenziale si calcola, per $r > R$, a partire dal campo e vale ovviamente $q/4\pi\epsilon_0 r$; in particolare, per $r = R$ $V = V_0 = q/4\pi\epsilon_0 R$ e questo è il valore costante in tutti i punti all'interno della superficie sferica, dove il campo è nullo.

L'andamento con r del campo e del potenziale è mostrato in figura 3.19.

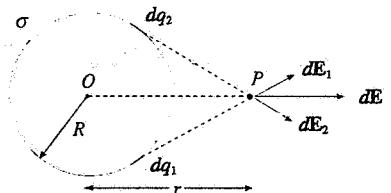


Figura 3.17

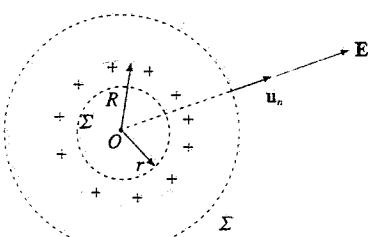


Figura 3.18

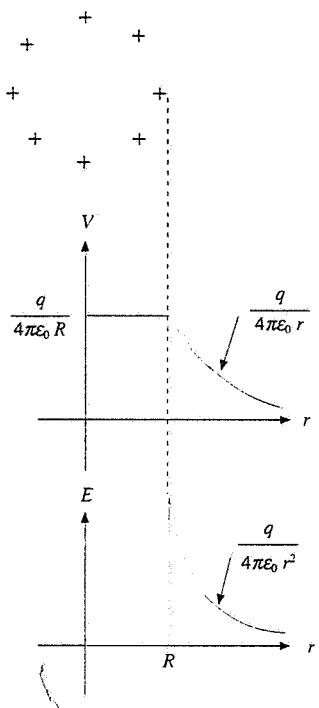


Figura 3.19

Esempio 3.2

Una carica q è distribuita con densità spaziale ρ uniforme nel volume di una sfera di raggio R . Calcolare il campo elettrostatico nei punti interni ed esterni alla sfera.

Soluzione

Il ragionamento basato sulla simmetria sferica utilizzato nell'esempio 3.1 è valido anche adesso per $r \geq R$ e possiamo subito dire che il campo all'esterno di una sfera uniformemente carica vale

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ,$$

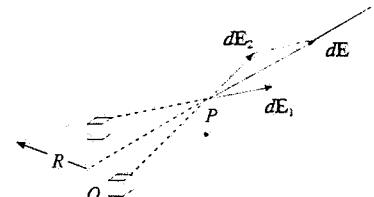


Figura 3.20

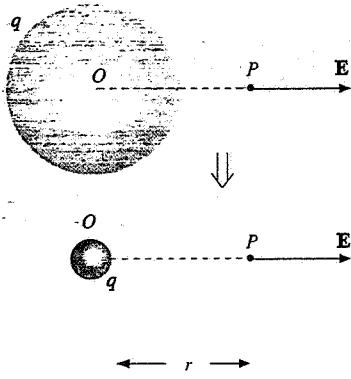


Figura 3.21

con

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho ;$$

è come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera, figura 3.21.

All'interno ($r < R$) esiste ora una carica distribuita uniformemente e il campo non è più nullo; resta però valido l'argomento di simmetria che porta ad un campo radiale per cui il flusso attraverso una superficie sferica di raggio r si scrive

$$\Phi(E) = 4\pi r^2 E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

dove q' è la carica contenuta all'interno della superficie Σ' :

$$q' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3} .$$

Ne segue che il modulo del campo elettrico a distanza $r < R$ dal centro vale

$$E = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} . \quad (3.12)$$

In conclusione, il campo cresce linearmente dal valore zero assunto nel centro della sfera al valore $\rho R / 3\epsilon_0 = q / 4\pi\epsilon_0 R^2$ assunto sulla superficie della sfera; all'esterno esso decresce con il quadrato della distanza dal centro. Per $r = R$ il campo è continuo (è discontinua dE/dr).

Il potenziale all'esterno della sfera è dato da $V = q / 4\pi\epsilon_0 r$ e in particolare vale

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

sulla superficie della sfera. All'interno

$$V(r) - V(R) = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) .$$

Nel centro $V(0) = \rho R^2 / 2\epsilon_0 = 3q / 8\pi\epsilon_0 R = \frac{3}{2} V(R)$.

Si noti che i valori del potenziale all'interno sono riferiti al potenziale sul bordo e che questo è riferito al potenziale all'infinito, assunto nullo; in sostanza ciò è conseguenza della definizione (2.7), che fissa il potenziale a meno di una costante additiva.

L'andamento di E e V è mostrato nella figura 3.23; nell'esempio 2.11 abbiamo calcolato il moto di una carica in una situazione simile.

Supponendo che un nucleo atomico possa essere assimilato a una distribuzione sferica continua di carica, di valore complessivo Ze , il campo sulla superficie è dato da

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} .$$

Posto $R_n \approx 10^{-15} m$, risulta $E \approx 1.5 Z \cdot 10^{21} V/m$, valore che dà un'idea dei campi molto intensi che esistono a livello *microscopico*.

Osserviamo infine che la proprietà del campo all'esterno di una sfera carica di essere eguale al campo prodotto da una carica puntiforme posta nel centro della sfera resta valida anche se la densità di carica non è costante: è sufficiente che ρ sia una funzione del tipo $\rho(r)$, cioè a simmetria sferica.

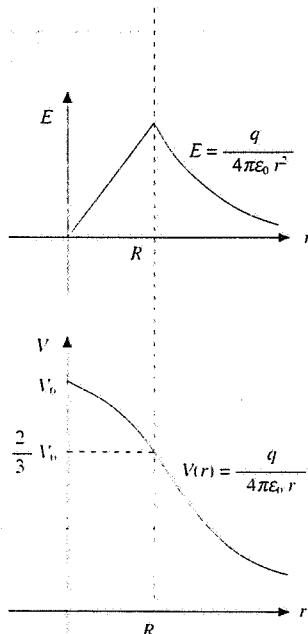


Figura 3.23

Esempio 3.3

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica ha forma cilindrica di raggio R ; calcolare il campo \mathbf{E} da essa prodotto.

Soluzione

La simmetria cilindrica del problema suggerisce che il campo sia diretto in ogni punto ortogonalmente all'asse del cilindro formato dalla carica e sia costante su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio r . Per applicare la legge di Gauss (3.9) consideriamo una scatola cilindrica Σ di raggio $r > R$ e altezza h , figura 3.24.

Il flusso di \mathbf{E} attraverso le basi di Σ è nullo in quanto il campo è parallelo alle basi e quindi ortogonale a \mathbf{u}_n . Il flusso attraverso la superficie laterale, che per quanto detto coincide con il flusso totale attraverso Σ , vale

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 2\pi r h E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carica contenuta entro Σ è

$$q = \int \rho d\tau = \rho \pi R^2 h = \lambda h$$

definendo

$$\lambda = \rho \pi R^2 = \frac{q}{h}$$

la carica contenuta in un cilindro di raggio R e altezza unitaria. Quindi

$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

Abbiamo ritrovato la (1.29) dell'esempio 1.6, relativa al campo prodotto da un filo indefinito uniformemente carico, risultato allora ottenuto con un calcolo piuttosto laborioso. Pertanto un cilindro uniformemente carico genera all'esterno un campo eguale a quello che genererebbe la stessa carica distribuita linearmente sull'asse del cilindro.

All'interno del cilindro possiamo ancora scrivere

$$\Phi(\mathbf{E}) = 2\pi r h E = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

dove adesso q' è la carica contenuta dentro una scatola cilindrica di raggio $r' < R$ e vale

$$q' = \rho \pi r^2 h = \lambda h \frac{r^2}{R^2}$$

per cui

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \quad (3.13)$$

Il campo cresce linearmente dal valore zero sull'asse al valore $\lambda / 2\pi\epsilon_0 R$ sul bordo; all'esterno decresce con legge $1/r$, per $r = R$ è continuo.

È interessante notare, in questo esempio come nel precedente, che la dimensione radiale finita del sistema ha come conseguenza la diminuzione continua del campo all'interno fino all'annullamento nel centro della distribuzione; si evita così la divergenza tipica della carica puntiforme o del filo di raggio nullo, che, come abbiamo già rilevato, non sono oggetti fisicamente realizzabili nella teoria classica dell'elettromagnetismo.

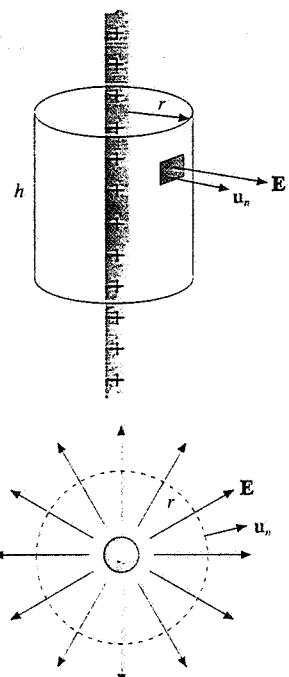


Figura 3.24

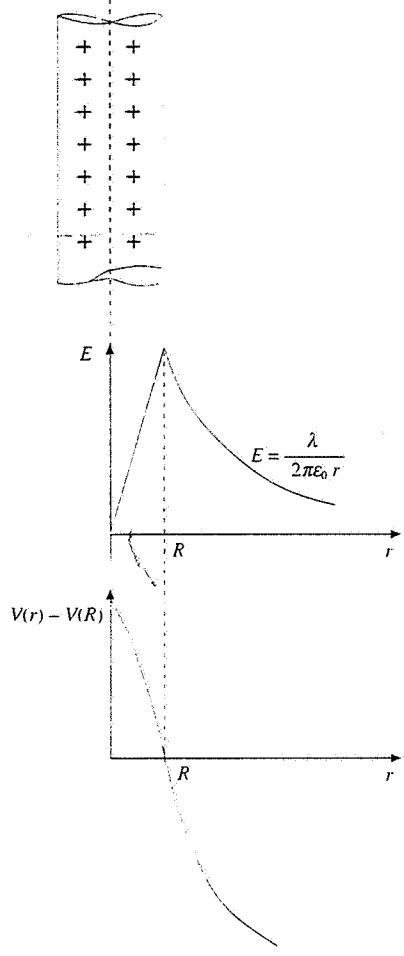


Figura 3.25

Il calcolo del potenziale per la distribuzione cilindrica presenta la stessa difficoltà segnalata nell'esempio 2.7, dovuta al fatto che la distribuzione è indefinita. Possiamo però facilmente calcolare le differenze di potenziale. All'interno, rispetto al bordo, si ha

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E dr = \int_r^R \frac{\lambda r}{2\pi \epsilon_0 R^2} dr = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0 R^2} (R^2 - r^2)$$

e in particolare $V(0) - V(R) = \lambda / 4\pi \epsilon_0$.

All'esterno la d.d.p. tra due qualsiasi superficie equipotenziali, che sono superficie cilindriche coassiali sia per $r < R$ che per $r > R$, è

$$V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} ;$$

rispetto al bordo

$$V(r) - V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{R} .$$

Nella figura 3.25 è mostrato l'andamento del campo e del potenziale rispetto al bordo, cioè della differenza $\Delta V = V(r) - V(R)$.

Si provi per esercizio, in analogia con l'esempio 3.1, a calcolare il campo generato da una carica distribuita con densità superficiale σ costante su una superficie cilindrica di raggio R e la discontinuità del campo nell'attraversamento della superficie carica.

Esempio 3.4

Calcolare il campo E generato da una carica distribuita con densità superficiale σ su un piano indefinito.

Soluzione

Sempre in base a ragionamenti di simmetria si deduce che il campo elettrostatico è ortogonale al piano su cui è distribuita la carica e ha versi opposti dalle due parti (cioè è sempre uscente o sempre entrante). Come superficie a cui applicare la legge di Gauss scegliamo una scatola cilindrica con la basi, di area Σ , parallele al piano, così che il flusso attraverso le basi è $2E\Sigma$ mentre quello attraverso la superficie laterale è nullo.

All'interno della scatola c'è la carica $q = \sigma\Sigma$ e quindi

$$\Phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Il campo ha modulo costante in tutto lo spazio, come abbiamo trovato nell'esempio 1.8, in cui il calcolo è stato eseguito partendo dalla legge di Coulomb.

Vettorialmente, detto x un asse ortogonale al piano,

$$E(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x = E_1 , \quad E(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x = E_2 ,$$

che sono le (1.32); nel passaggio attraverso la superficie carica il campo è discontinuo,

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} u_x \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} u_x ,$$

che è la (1.33).

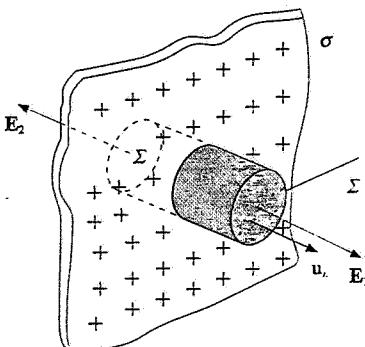


Figura 3.26

Anche in questo caso, essendo la distribuzione indefinita, il calcolo del potenziale presenta una divergenza, ma è semplice calcolare le d.d.p.:

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

Il risultato dipende solo da x e mostra che le superficie equipotenziali sono piani paralleli al piano carico.

Già da questi esempi risulta evidente come l'applicazione della legge di Gauss, nei problemi con distribuzioni simmetriche di carica, permetta la determinazione immediata del campo evitando il calcolo degli integrali (1.22), che potrebbe essere notevolmente complicato. In tali situazioni diventa poi più conveniente ottenere il potenziale tramite (2.7).

Nota. Equilibrio in un campo elettrico. Considerazioni ulteriori sulla legge di Gauss

Un problema di carattere più generale che si risolve agevolmente con la legge di Gauss è quello dell'equilibrio in un campo elettrostatico. Ricordiamo che una posizione P di equilibrio stabile per una carica q è definita dal fatto che per un qualsiasi piccolo spostamento da tale posizione esistono forze che riportano la carica nella posizione originaria. Di conseguenza in qualsiasi punto di una ipotetica superficie chiusa che circonda P la forza è diretta verso P e così il campo, se la carica q è positiva. Ma allora, per la legge di Gauss, c'è un flusso entrante nella superficie e quindi all'interno ci deve essere una carica q' negativa (e viceversa se q è negativa). Se in P non c'è alcuna carica la situazione descritta non può verificarsi e concludiamo che *una carica, posta in un campo elettrostatico, non ha posizioni di equilibrio stabile se non a ridosso delle cariche sorgenti o a distanza infinita da queste*.

Ad esempio, date due cariche eguali, nel punto di mezzo O della congiungente il campo è nullo ed è possibile porre lì una carica q_0 che resta in quiete. Se è una carica dello stesso segno delle sorgenti, solo per spostamenti lungo la congiungente essa è riportata verso il centro (equilibrio stabile), ma per qualsiasi altro spostamento essa si allontana indefinitamente (equilibrio instabile). Se è una carica $-q_0$ di segno opposto l'equilibrio è stabile solo per spostamenti ortogonali alla congiungente, instabile negli altri casi.

Un sistema di cariche libere dello stesso segno non può restare insieme spontaneamente, occorrono altre forze per vincolare le cariche. Un nucleo atomico è stabile perché tra i suoi costituenti agisce l'*interazione forte* che supera la repulsione elettrostatica tra i protoni. Sistemi macroscopici con una densità di carica di volume, come la sfera e il cilindro degli esempi 3.2 e 3.3, possono essere realizzati sfruttando le proprietà dei materiali isolanti, come vedremo nel capitolo 5; distribuzioni superficiali di carica si ottengono facilmente caricando materiali conduttori, come discuteremo ampiamente nel capitolo 4, oppure per strofinio di materiali isolanti. In nessun caso però le cariche sono completamente libere.

Un'altra serie di considerazioni interessanti riguarda quelle situazioni in cui il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo, indicando che la carica totale all'interno è nulla. Ciò non vuol dire necessariamente che il campo nei punti della superficie è nullo, ma, come abbiamo già rilevato nel paragrafo 3.1, che esso ha in alcune parti verso uscente e in altre verso entrante, così che flusso entrante e flusso uscente risultano eguali ed opposti. Solo quando tale situazione non è realizzabile a causa di particolari condizioni di simmetria (vedi esempio 3.1), la nullità del flusso comporta la nullità del campo.

La condizione $q = 0$ che segue da $\Phi = 0$ è soddisfatta in due modi: o non ci sono proprio cariche all'interno della superficie oppure la carica, algebricamente nulla, è composta da un'eguale quantità di carica positiva e di carica negativa.

Il caso più semplice della seconda possibilità è costituito dal dipolo elettrico, il cui campo E è in ogni punto diverso da zero, ma ha flusso nullo attraverso qualsiasi super-

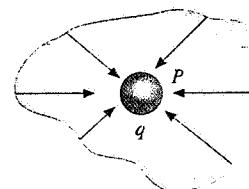


Figura 3.27

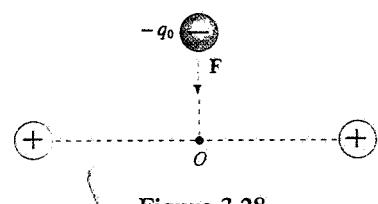
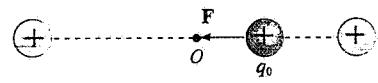


Figura 3.28

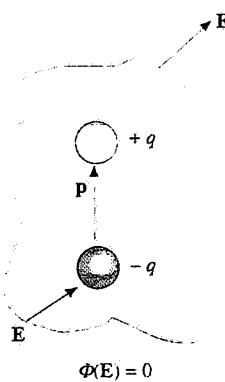


Figura 3.29

ficie che racchiuda al suo interno il dipolo. Il risultato non sarebbe vero per una superficie che contenesse una sola delle due cariche, però se consideriamo *solo* dipoli elementari $\Phi(\mathbf{E}) = 0$ attraverso qualsiasi superficie chiusa: questa caratteristica si indica dicendo che il campo di dipolo è *solenoidale*. Riprendiamo l'argomento nel paragrafo 3.4.

3.3 Campo elettrostatico nell'intorno di uno strato superficiale di carica

Le equazioni integrali che caratterizzano il campo \mathbf{E} .

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0} ,$$

permettono di prevederne il comportamento nel passaggio attraverso una superficie su cui è depositata una certa carica.

Questa situazione di carica superficiale è assai frequente nella pratica e si realizza sia con materiali conduttori che con materiali dielettrici, come abbiamo già accennato nel paragrafo 3.2 e come vedremo nel capitoli 4 e 5. In entrambi i casi lo spessore della distribuzione di carica è trascurabile e si può parlare correttamente di *densità superficiale*.

Sia dunque Σ una superficie che fa da supporto a una carica distribuita con densità σ . Consideriamo una linea chiusa infinitesima $ABCDA$: i lati $AB = ds_1$ e $CD = ds_2$, giacenti da parti opposte rispetto alla superficie, sono paralleli a questa ed eguali in modulo; i lati BC e DA , ortogonali alla superficie, sono infinitesimi di ordine superiore rispetto ai precedenti.

Diciamo E_1, E_2 i valori del campo su AB e CD e E_{1n}, E_{2n} le componenti tangenziali, cioè le proiezioni di E_1 e E_2 lungo la direzione di AB e CD , parallela alla superficie. Essendo il campo conservativo la circuitazione lungo il percorso chiuso è nulla:

$$\mathbf{E}_1 \cdot ds_1 + \mathbf{E}_2 \cdot ds_2 = E_1, ds_1 - E_2, ds_2 = (E_{1n} - E_{2n}) ds = 0$$

da cui segue

$$E_{1n} = E_{2n} \quad (3.14)$$

La componente tangenziale del campo \mathbf{E} è continua quando si attraversa una distribuzione superficiale di carica.

Consideriamo ora un punto di Σ e un suo intorno di area $d\Sigma$: sia \mathbf{u}_n la normale alla superficie. Costruiamo una scatola cilindrica di basi $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$, uguali in valore a $d\Sigma$ e parallele a questa, e con altezza tale che la superficie laterale sia infinitesima di ordine superiore rispetto a $d\Sigma$. La carica contenuta all'interno della scatola cilindrica è $\sigma d\Sigma$ e, per la legge di Gauss,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = (E_{2n} - E_{1n}) d\Sigma = \frac{\sigma d\Sigma}{\epsilon_0} ,$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Figura 3.31

avendo indicato con E_{1n} e E_{2n} le componenti normali alla superficie, cioè le proiezioni lungo \mathbf{u}_n . Si ha

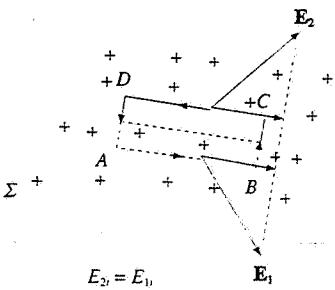


Figura 3.30

Continuità della componente tangenziale del campo elettrico

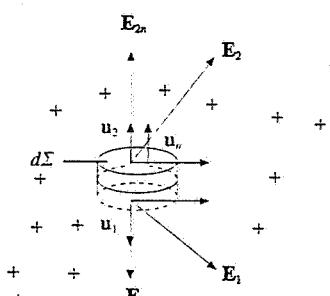


Figura 3.31

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.15) \quad \text{Discontinuità della componente normale del campo elettrico}$$

Nell'attraversamento della superficie la componente normale del campo \mathbf{E} subisce una discontinuità pari a σ / ϵ_0 .

Le (3.14) e (3.15) si possono riassumere nell'equazione vettoriale

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n, \quad (3.16)$$

essendo \mathbf{u}_n orientato dalla parte in cui il campo vale \mathbf{E}_1 a quella in cui il campo vale \mathbf{E}_2 .

La relazione (3.16) vale localmente, cioè in ogni punto della superficie: non è necessario che σ sia costante né che la superficie sia piana. I campi \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 sono dovuti sia alla carica sulla superficie che ad altre cariche presenti; i loro valori e le loro direzioni variano spostandosi lungo Σ , così come varia σ , con la condizione che la differenza è solo nella componente normale e dipende soltanto da σ .

Abbiamo già incontrato la (3.16) negli esempi 3.1 e 3.4, in casi particolari in cui era presente solo la carica superficiale e il campo era normale alla superficie; pertanto $E_{1n} = E_{2n} = 0$, $E_{1n} = E_1$, $E_{2n} = E_2$.

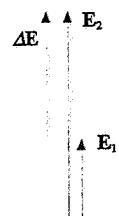
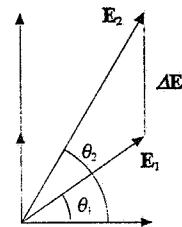


Figura 3.32

3.4 Legge di Gauss in forma differenziale. Divergenza di un campo vettoriale

La legge di Gauss nella forma (3.9) è una legge integrale che lega il flusso del campo \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa a quelle sorgenti del campo che stanno all'interno della superficie. Essa può essere espressa in forma differenziale tramite una *relazione locale* che lega le derivate del campo in un determinato punto con la densità di carica ρ in quel punto.

Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo con gli spigoli dx, dy, dz paralleli agli assi che contiene la carica $dq = \rho(x, y, z) d\tau$ essendo $d\tau = dx dy dz$ il volume del parallelepipedo. Il flusso attraverso la superficie $A' B' C' D'$, perpendicolare all'asse x , è dato da

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}_x dy dz = E'_x dy dz,$$

se indichiamo con E'_x la componente di \mathbf{E}' parallela all'asse x . Analogamente, il flusso attraverso la faccia $ABCD$ è

$$\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{u}_x) dy dz = -E_x dy dz;$$

infatti la normale alla superficie orientata verso l'esterno è $-\mathbf{u}_x$ per la faccia $ABCD$. Complessivamente

$$(E'_x - E_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

è il flusso attraverso le superficie considerate; il campo E'_x è espresso con uno sviluppo in serie di E_x arrestato al primo termine perché la distanza dx tra le superficie è molto piccola.

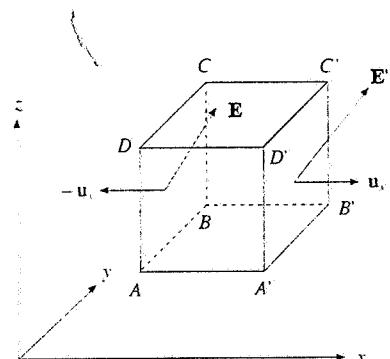


Figura 3.33

Espressioni simili si hanno per le altre coppie di superficie e quindi il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) d\tau . \quad (3.17)$$

Poiché, secondo la legge di Gauss (3.9),

$$d\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0} = \rho(x, y, z) \frac{d\tau}{\epsilon_0} ,$$

abbiamo la *relazione locale* che cercavamo:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z) . \quad (3.18)$$

La particolare combinazione di derivate del campo che è a primo membro della (3.18) si chiama *divergenza del campo E*.

Ricorrendo all'espressione (2.37) dell'operatore simbolico *del* vediamo che

Divergenza di E in coordinate cartesiane

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} , \quad (3.19)$$

cioè che la *divergenza di un campo vettoriale è data dal prodotto scalare dell'operatore del per il campo*; essa è quindi una grandezza scalare. La (3.18) si scrive

Legge di Gauss in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad (3.20)$$

il campo E ha divergenza diversa da zero solo nei punti in cui esiste una densità di carica, nello spazio vuoto la divergenza di E è nulla.

Anche se abbiamo utilizzato le coordinate cartesiane nella definizione della divergenza, essa è indipendente dal sistema di coordinate prescelto, per la sua natura di grandezza scalare. Il significato intrinseco si ricava da (3.17):

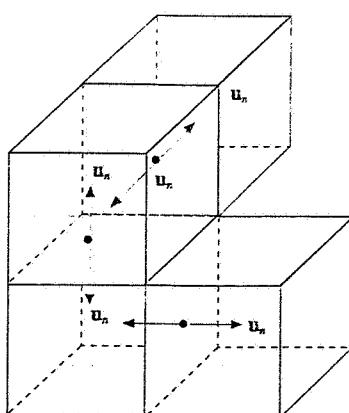


Figura 3.34

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{d\Phi}{d\tau} . \quad (3.21)$$

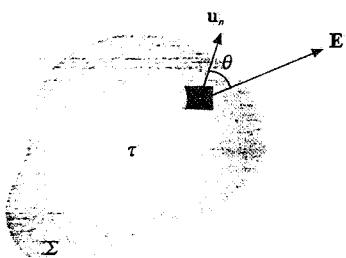
La *divergenza del campo nel punto P* è data dal rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato su P e il volume del parallelepipedo.

Questa definizione è vera per qualsiasi campo vettoriale. Nel caso di E vale la legge di Gauss e perciò, essendo il flusso diverso da zero solo se nel volume c'è una carica, si capisce che la divergenza è diversa da zero solo dove ci sono cariche.

La (3.17) si estende a un volume finito τ racchiuso da una superficie Σ ; τ può essere suddiviso in infiniti volumetti infinitesimi, a ciascuno dei quali si applica (3.21). Poiché i flussi attraverso le facce comuni si annullano essendo eguali ed opposti, resta solo il contributo delle facce esterne che coincidono con Σ e si ha il cosiddetto *teorema della divergenza*

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau : \quad (3.22)$$

il flusso del campo attraverso una superficie chiusa Σ è eguale all'integrale della divergenza del campo esteso al volume racchiuso da Σ .



Divergenza in coordinate polari e cilindriche

Anche per la divergenza riportiamo le espressioni in coordinate polari e cilindriche, utili nei problemi con simmetria rispetto a un punto o rispetto a un asse:

coordinate polari

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}, \quad (3.23)$$

coordinate cilindriche

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.24)$$

Divergenza di \mathbf{E} in coordinate polari

Divergenza di \mathbf{E} in coordinate cilindriche

Esempio 3.5

Calcolare la divergenza del campo prodotto da una carica puntiforme q posta nell'origine degli assi.

Soluzione

Ricorriamo alle espressioni (1.15) in coordinate cartesiane dalle quali si deduce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (y^2 + z^2 - 2x^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3x^2), \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x^2 + z^2 - 2y^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3y^2), \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^5} (r^2 - 3z^2), \end{aligned}$$

Si verifica subito che la somma è nulla. Il risultato si ottiene più facilmente da (3.23): poiché per il campo abbiamo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \Rightarrow E_r = \frac{k}{r^2}, \quad E_\theta = E_\phi = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{k}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (k) = 0.$$

Quindi la divergenza è ovunque nulla salvo che per $r = 0$ dove va all'infinito: se la carica q è contenuta in un volume nullo la densità è infinita. Se però q fosse distribuita con densità uniforme entro una piccola sfera, utilizzando (3.12) si troverebbe

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

in accordo con (3.20). Lo stesso risultato si otterrebbe se q fosse distribuita su una piccola superficie sferica con spessore non infinitesimo.

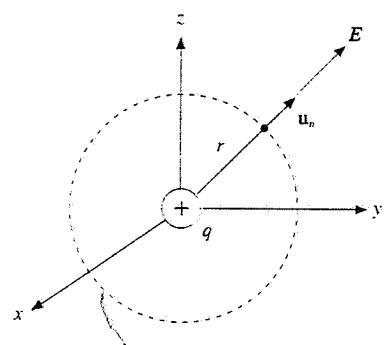


Figura 3.36

Campi vettoriali solenoidali

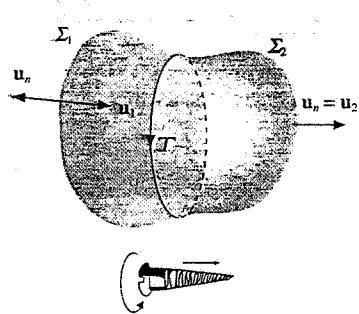


Figura 3.37

Nel paragrafo 3.2 abbiamo accennato al fatto che il campo generato da un doppio elementare ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa e abbiamo detto che un *campo* con questa proprietà si chiama *solenoidale*. Dal teorema della divergenza (3.22) ricaviamo che *per un campo solenoidale la divergenza è sempre nulla*: infatti, se essa fosse diversa da zero in un punto, sarebbe diverso da zero il flusso attraverso una superficie chiusa intorno al punto, contro l'ipotesi di flusso sempre nullo. Pertanto per un campo \mathbf{C} solenoidale vale sempre la relazione

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0 . \quad (3.25)$$

Una proprietà tipica di un campo solenoidale è la seguente: scelta una linea chiusa Γ e appoggiate due superficie Σ_1 e Σ_2 su tale contorno, l'insieme di Σ_1 e Σ_2 forma una superficie chiusa Σ per la quale il flusso totale è nullo:

$$\Phi(\mathbf{C}) = \oint \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = 0 .$$

Osserviamo che se fissiamo un verso di percorrenza lungo la linea le normali \mathbf{u}_n su Σ_1 e Σ_2 non sono orientate in modo coerente con la regola della vite. Se vogliamo fare ciò dobbiamo cambiare una orientazione, per esempio su Σ_1 , e allora si ha

$$\Phi(\mathbf{C}) = -\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 . \quad (3.26)$$

Proprietà di un campo solenoidale

In un campo solenoidale il flusso attraverso due superficie, aventi lo stesso contorno e orientate concordemente, è eguale. Non conta quindi la superficie, che serve per eseguire il calcolo, ma il contorno e si parla infatti di *flusso attraverso una linea chiusa*.

Il campo elettrostatico in generale non è solenoidale e infatti la sua divergenza non è identicamente nulla; lo sarebbe se le sue sorgenti fossero dipoli elementari, ma questo invece è un caso molto particolare. Vedremo nei capitoli successivi che il *campo magnetico* \mathbf{B} ha la proprietà di essere *solenoidale*, e quindi di avere divergenza identicamente nulla, in qualsiasi circostanza. Torneranno allora utili le considerazioni appena fatte.

3.5 Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e di Laplace

L'introduzione degli operatori rotore e divergenza permette di scrivere in forma sintetica le equazioni locali che corrispondono al fatto che il campo \mathbf{E} sia conservativo e obbedisca alla legge di Gauss: abbiamo

Equazioni di Maxwell
del campo elettrostatico

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (3.20)$$

che sono dette le *equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico*. Ciascuna di esse corrisponde a tre equazioni differenziali nelle componenti del campo.

Poiché per il campo \mathbf{E} la (2.54) equivale alla (2.36) $\mathbf{E} = -\nabla V$, inseriamo questa espressione nella (3.20):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Operando in coordinate cartesiane e quindi utilizzando (2.38) e (3.19) si ottiene

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.27) \quad \text{Equazione di Poisson}$$

Questa equazione differenziale che lega il potenziale alla densità di carica è detta *equazione di Poisson*. Nello spazio vuoto essa diventa

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.28) \quad \text{Equazione di Laplace}$$

ed è detta *equazione di Laplace*.

L'integrazione di (3.27) o (3.28) con determinate condizioni al contorno permette di determinare univocamente il potenziale $V(x, y, z)$ e da questo il campo elettrico attraverso l'operazione di gradiente. In effetti si dimostra che, se si impone al potenziale di annullarsi all'infinito insieme a tutte le sue derivate (e quindi è nullo all'infinito anche il campo) e si fissa una certa distribuzione di carica $\rho(x', y', z')$ contenuta in un'area finita di spazio, la soluzione dell'equazione di Poisson è data da

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}$$

coincidente con (2.23).

Operatore di Laplace

L'operatore $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, che in coordinate cartesiane si scrive

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.29)$$

Operatore laplaciano in coordinate cartesiane

e che, applicato a un campo scalare, dà luogo a un'altra grandezza scalare, si chiama *operatore di Laplace* o *laplaciano*. Il simbolo deriva dal fatto che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è eguale al quadrato del modulo e quindi alla somma dei quadrati delle componenti; in questo caso simbolico il quadrato vuol dire che l'operazione di derivazione è eseguita due volte.

In coordinate polari e cilindriche ricordando (2.42) e (2.44) si ha:

coordinate polari

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.30)$$

Operatore laplaciano in coordinate polari

coordinate cilindriche

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.31)$$

Operatore laplaciano in coordinate cilindriche

Si considera anche l'applicazione di ∇^2 a un vettore: il risultato è un vettore che ha come componenti i laplaciani delle componenti:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = (\nabla^2 a_x) \mathbf{u}_x + (\nabla^2 a_y) \mathbf{u}_y + (\nabla^2 a_z) \mathbf{u}_z \quad (3.32)$$

Esempio 3.6

Verificare che il potenziale di una carica puntiforme (posta nell'origine) soddisfa l'equazione di Laplace.

Soluzione

Adottiamo l'espressione (3.30) in coordinate polari:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0,$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0.$$

Se si esegue il calcolo in coordinate cartesiane si ottengono le stesse espressioni viste nell'esempio 3.5; infatti applicare l'operatore di Laplace al potenziale equivale a calcolare la divergenza del campo.

Esempio 3.7

Tra due piani indefiniti, distanti d e carichi con densità uniforme $+ \sigma$ e $- \sigma$, è posta una carica distribuita in tutto lo spazio con densità uniforme ρ . Determinare, nella regione compresa tra i due piani, il campo e il potenziale, assumendo che sia $V = 0$ per $x = d$.

Soluzione

La simmetria del problema suggerisce che le superficie equipotenziali siano piani paralleli ai due piani carichi per cui il problema è unidimensionale. L'equazione di Poisson (3.27) si scrive

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e la sua soluzione più generale è

$$V(x) = c_1 + c_2 x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}.$$

Le costanti c_1 e c_2 sono determinate dalle condizioni al contorno, $V(d) = 0$ e $V(0) = V_0$; per il momento V_0 non è noto. Si ha:

$$V(0) = V_0 = c_1 \Rightarrow c_1 = V_0$$

$$V(d) = 0 = c_1 + c_2 d - \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow c_2 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d}$$

per cui

$$V(x) = V_0 + \left(\frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{d} \right) x - \frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}, \quad E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} (2x - d)$$

Osserviamo che il campo è dato dalla somma di due contributi, uno E_ρ della carica con densità ρ e l'altro E_σ evidentemente dovuto ai piani carichi. Dall'esempio 1.9 sappiamo che il campo tra due piani carichi è

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x$$

per cui ricaviamo $V_0 = \sigma d / \epsilon_0$. In altre parole V_0 è la d.d.p. tra i piani dovuta alle cariche depositate su di essi.

Rispetto alla situazione con $\rho = 0$, campo costante e potenziale linearmente decrescente con la distanza (esempio 2.10), abbiamo ora che il campo varia linearmente tra i valori

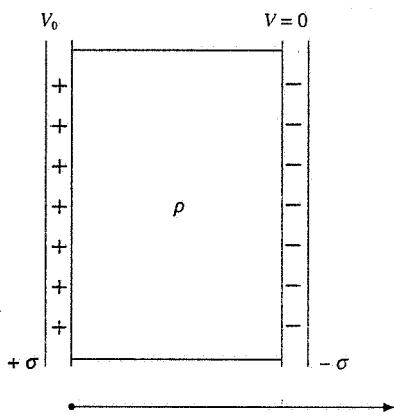
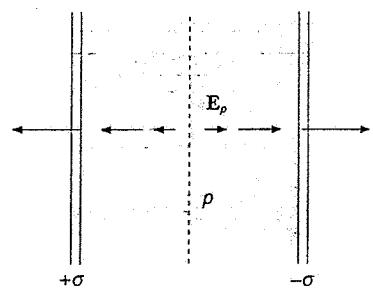


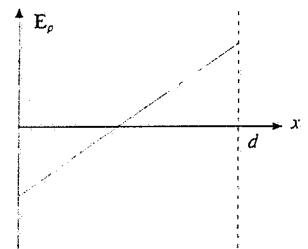
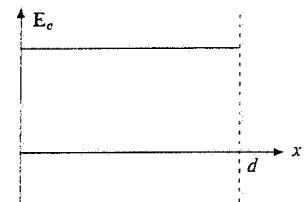
Figura 3.38

$$E(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\rho d}{2\epsilon_0} , \quad E(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

Il contributo della carica di volume, lineare in x , è negativo tra 0 e $d/2$, positivo tra $d/2$ e d (si provi a calcolare questo campo direttamente con la legge di Gauss). Il potenziale decresce con legge quadratica; però la d.d.p. tra i piani è sempre V_0 , ci sia o non ci sia la carica di volume, in quanto la d.d.p. dovuta a questa è nulla, come si capisce dall'andamento del suo campo.



$$\Delta V = 0$$



Con gli argomenti trattati in questo paragrafo abbiamo concluso lo studio delle *proprietà generali del campo elettrostatico*, cioè del campo generato da distribuzioni di carica fisse. Tutte le deduzioni sono state effettuate a partire dalla legge di Coulomb, la quale stabilisce che il campo di una carica puntiforme è centrale e dipende dalla distanza dalla carica secondo $1/r^2$. Sulla base di questo dato sperimentale, esprimendo la forza subita da una carica posta nel campo come $F = qE$ e servendosi del principio di sovrapposizione è possibile risolvere qualsiasi problema di elettrostatica nel vuoto.

Dalla struttura della legge di Coulomb risulta evidente la proprietà del campo di essere conservativo, però non appare l'altra proprietà fondamentale, stabilità esplicitamente dalla legge di Gauss; e in effetti per Newton risultò molto difficile stabilire che una sorgente sferica estesa esercita la stessa azione di una sorgente puntiforme posta nel centro della distribuzione. Questo esempio serve a spiegare le ragioni per cui spesso è più conveniente servirsi delle leggi derivate da quella di Coulomb, nella forma locale data dalle equazioni di Maxwell compendiate nell'equazione di Poisson, o nella forma integrale, relativa alle proprietà della circuitazione e del flusso di E .

Un'altra proprietà fondamentale, che abbiamo spesso utilizzato e continueremo a utilizzare, è resa esplicita dalla struttura delle leggi citate: esse sono lineari nel campo o nel potenziale, cioè E e V compaiono alla prima potenza, e contengono pertanto il principio di sovrapposizione. Ad esempio, se esistono due situazioni fisiche descritte dall'equazione di Poisson, nella forma semplificata unidimensionale,

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}, \quad \frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0},$$

la funzione $V = V_1 + V_2$ è soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} - \frac{\rho_2}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon_0}.$$

la sovrapposizione delle due distribuzioni genera un potenziale che è la somma dei potenziali generati da ciascuna singola distribuzione. Una struttura del tipo

$$k \frac{d^2V^2}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

non darebbe questo risultato.

Nei capitoli 4 e 5 studieremo le proprietà dell'elettrostatica dei materiali conduttori e dei materiali isolanti, detti anche dielettrici: alle leggi generali si aggiungono leggi specifiche, che possiamo considerare alla stregua di *equazioni di stato*, nel senso che descrivono il comportamento del mezzo materiale introducendo opportune grandezze caratteristiche del mezzo stesso.

Concludiamo osservando che, malgrado l'aspetto formale della nozione di campo elettrostatico, a cui abbiamo accennato nel paragrafo 1.9, rispetto all'aspetto più sostanziale che ha la forza subita da una carica, la teoria è sviluppata ponendo l'accento sulle proprietà del campo o del potenziale generato da un sistema di cariche, cioè su quel fattore dell'interazione che dipende dalle sorgenti: la forza e il lavoro vengono poi calcolati con $F = qE$, $W = q\Delta V$ o con formule integrali equivalenti.

Questo tipo di approccio, in cui le leggi generali riguardano i campi e la formula della forza è scritta a parte, è tipico della *teoria classica dei campi* ed è generalmente seguito nello studio dell'elettromagnetismo. L'idea di trattare i campi come entità fisiche significative risulta essenziale nella presentazione dei fenomeni di propagazione delle onde elettromagnetiche.

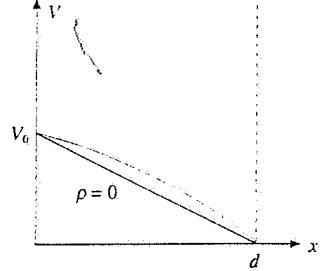
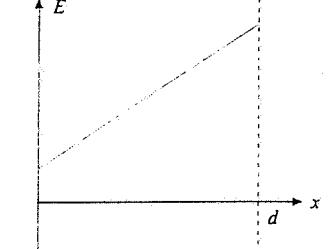


Figura 3.39 (Esempio 3.7)

Campo

3.6 Riepilogo sulle operazioni di gradiente, rotore, divergenza.

Nelle leggi che descrivono il comportamento del campo \mathbf{E} , e in altre che studieremo in seguito, compaiono alcune particolari combinazioni delle derivate spaziali del campo che sono espresse sinteticamente con i concetti di *gradiente*, *rotore*, *divergenza*.

Riepiloghiamo in questo paragrafo le proprietà di tali operazioni, servendoci dei simboli \mathbf{E} e V per i campi vettoriali e scalari a cui le operazioni si applicano, ma sottolineando che si tratta di proprietà generali, valide anche per altri campi. Ricordiamo con l'occasione che chiamiamo *campo una grandezza fisica che in una certa regione di spazio assume valori dipendenti dalla posizione, cioè è funzione delle coordinate*. Per il suo carattere fisico un campo ha un significato intrinseco che non dipende dal particolare sistema di riferimento. Ciò è vero per il numero che rappresenta il campo scalare in un punto, come per il modulo, la direzione, il verso del campo vettoriale in un punto; non è vero per le componenti del campo vettoriale, le quali dipendono esplicitamente dal sistema di riferimento e variano con questo.

Gradiente ∇V , grad V

Il gradiente si applica a un campo scalare e il risultato è un campo vettoriale. Il significato intrinseco è espresso da

$$dV = \nabla V \cdot ds : \quad (2.40)$$

la variazione infinitesima del campo scalare nella direzione di ds è data dal prodotto per ds della proiezione del gradiente lungo tale direzione. Il gradiente riassume quindi nello spazio tridimensionale le proprietà di variazione del campo scalare. In ogni punto del dominio ∇V è ortogonale alla superficie di livello passante per quel punto (si chiamano così le superficie $V = \text{costante}$) e indica col suo verso la massima crescita di V ; detto dn lo spostamento infinitesimo lungo tale verso, $|\nabla V| = dV/dn$.

Dato un campo scalare è evidente che la differenza finita

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot ds$$

è determinata solo dalla posizione dei punti A e B e non dal percorso scelto per andare da A a B (se il campo scalare è univoco). L'integrale di linea del gradiente è quindi indipendente dal percorso ovvero la circuitazione del gradiente è sempre eguale a zero:

$$\oint \nabla V \cdot ds = 0 . \quad (3.33)$$

Teorema del gradiente

Il risultato è noto come *teorema del gradiente* e si dice che il campo vettoriale ∇V è un campo conservativo.

Viceversa, se un campo vettoriale soddisfa alla proprietà di avere circuitazione nulla lungo qualsiasi linea chiusa contenuta nel suo dominio e se questo è connesso (cioè dati due punti essi sono sempre congiungibili con una linea interamente contenuta nel dominio), allora esiste una funzione scalare V di cui il campo vettoriale è il gradiente.

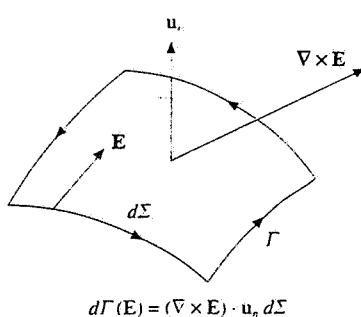


Figura 3.41

Rotore $\nabla \times \mathbf{E}$, rot \mathbf{E}

Il rotore si applica ad un campo vettoriale e fornisce un altro campo vettoriale. Il significato intrinseco è espresso da

$$d\Gamma = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma : \quad (2.51)$$

$d\Gamma$ è la circuitazione del vettore \mathbf{E} lungo un percorso infinitesimo su cui appoggia la superficie $d\Sigma$ e, secondo (2.51), essa è eguale al flusso di rotore di \mathbf{E} attraverso $d\Sigma$. Il rotore in un punto è dunque legato alla circuitazione elementare del campo intorno a quel punto.

Se un campo è conservativo la sua circuitazione è sempre nulla e quindi è nullo il rotore: in effetti $\nabla \times (\nabla V) = 0$: il gradiente è un campo irrotazionale. Viceversa se il rotore di \mathbf{E} è

identicamente nullo e il dominio del campo è semplicemente connesso (data una linea chiusa è sempre possibile trovare una superficie che si appoggia su quella linea ed è interamente contenuta nel dominio), allora \mathbf{E} è conservativo. Si vede che la condizione locale $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ è meno forte della condizione integrale (3.33).

In termini finiti si ha il *teorema di Stokes*:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\tau} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (2.53)$$

L'integrale di linea di \mathbf{E} è sostituibile con un integrale, esteso a una qualsiasi superficie che si appoggi alla linea, di quella particolare combinazione di derivate di \mathbf{E} che si chiama rotore.

Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{E}$, div \mathbf{E}

La divergenza si applica ad un campo vettoriale e fornisce un campo scalare. Il significato intrinseco è dato da

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau : \quad (3.21)$$

Il flusso infinitesimo del campo \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa $d\Sigma$ che racchiude il volume $d\tau$ è dato dal prodotto della divergenza di \mathbf{E} per $d\tau$. La divergenza in un punto è legata al flusso del campo entrante o uscente da quel punto.

La forma integrale di (3.21) è il *teorema della divergenza*:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau . \quad (3.22)$$

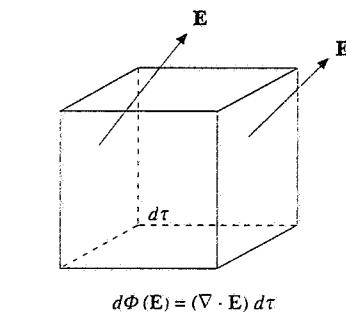


Figura 3.42

Teorema della divergenza

L'integrale di superficie di \mathbf{E} è sostituibile con l'integrale di volume di quella particolare combinazione di derivate di \mathbf{E} che si chiama divergenza. Si intende che Σ e τ sono completamente contenuti nel dominio di \mathbf{E} .

Il teorema della divergenza continua a valere per campi vettoriali gradienti di una funzione scalare del tipo $c_1 + c_2 / r$ anche se entro τ c'è un numero finito di punti in cui il modulo del campo vettoriale diverge oppure se τ tende all'infinito, cioè se il dominio diventa illimitato.

Un campo vettoriale che ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa si dice solenoidale e la sua divergenza risulta identicamente nulla. Viceversa un campo a divergenza nulla ha flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa ed è solenoidale.

Proprietà tipica dei *campi solenoidali* è che è sempre lo stesso il flusso attraverso le superficie che si appoggiano su uno stesso contorno: *il flusso cioè è definito soltanto dalla forma del contorno*.

Un particolare campo solenoidale è il vettore $\nabla \times \mathbf{E}$: infatti si verifica facilmente che $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$. Viceversa è pure vero che se un campo vettoriale è solenoidale, esso è il rotore di un altro campo vettoriale. Cioè: dato \mathbf{a} e calcolato $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$, risulta sempre $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$; se viceversa risulta sempre $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ allora esiste un vettore \mathbf{a} tale che $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$. In un certo senso, come V è la primitiva scalare di un campo irrotazionale, così \mathbf{a} è la primitiva vettoriale di un campo solenoidale. V è determinato a meno di una costante: infatti

$$\nabla V \text{ e } \nabla(V+k) = \nabla V + \nabla k$$

danno lo stesso risultato. Invece il campo \mathbf{a} di cui \mathbf{b} è il rotore è determinato a meno di un vettore esprimibile come gradiente: infatti

$$\nabla \times \mathbf{a} \text{ e } \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla S) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \nabla S$$

coincidono.

Campo solenoidale

L'operatore ∇ . Operazioni combinate.

Il vettore simbolico *del.* introdotto nel paragrafo 2.4. è molto utile per esprimere le operazioni di gradiente, rotore, divergenza e per dimostrare rapidamente alcune proprietà. Abbiamo:

Applicazione diretta a uno scalare	∇V	gradiente
Prodotto vettoriale per un vettore	$\nabla \times \mathbf{E}$	rotore
Prodotto scalare per un vettore	$\nabla \cdot \mathbf{E}$	divergenza

Considerando ∇ formalmente come un vettore, è immediato che

$$\nabla \times \nabla V, \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

siano identicamente nulli: il primo è un prodotto vettoriale tra due vettori paralleli, il secondo è un prodotto misto con due fattori eguali (vedi la nota successiva).

Altre operazioni combinate sono:

Divergenza di un gradiente	$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$	laplaciano
Gradiente di una divergenza	$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})$	

Nota. Prodotto misto di tre vettori. Doppio prodotto vettore

Si definisce prodotto misto di tre vettori l'operazione $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$: non c'è bisogno di parentesi perché non avrebbe senso eseguire prima $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, che è uno scalare, e farne il prodotto vettoriale con \mathbf{c} . In coordinate cartesiane il prodotto misto è dato dallo sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

e sono evidenti queste proprietà:

- 1) lo scambio di due fattori comporta solo un segno negativo;
- 2) se due vettori sono eguali il prodotto misto è nullo ($\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$);
- 3) si possono scambiare i prodotti: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Il modulo del prodotto misto è pari al volume del parallelepipedo che ha come spigoli \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

Il doppio prodotto vettore $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ è un vettore: modulo, direzione e verso si ricavano dalle note proprietà del prodotto vettoriale. Le parentesi sono necessarie in quanto

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

Si dimostra inoltre che

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.35)$$

il doppio prodotto vettore sta nel piano individuato da \mathbf{b} e \mathbf{c} .

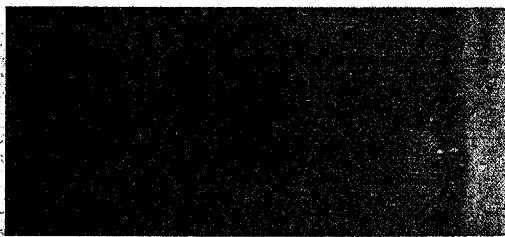
Rotore di un rotore

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Infine, detti S , \mathbf{a} e \mathbf{b} un campo scalare e due campi vettoriali, diamo alcune formule utili; in particolare la prima si ricava subito dalla (3.35):

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\ \nabla \cdot S \mathbf{a} &= \nabla S \cdot \mathbf{a} + S \nabla \cdot \mathbf{a} \\ \nabla \times S \mathbf{a} &= \nabla S \times \mathbf{a} + S \nabla \times \mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Conduttori. Energia elettrostatica



4.1 Conduttori in equilibrio

I materiali *conduttori* sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. In conduttori come le soluzioni eletrolitiche o i gas ionizzati si hanno spostamenti di cariche di entrambi i segni, però questi materiali non sono di interesse per l'elettrostatica. La nostra attenzione è invece concentrata sui conduttori solidi, il cui esempio più tipico sono i *metalli*: in essi per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel conduttore. Con l'applicazione di un opportuno campo \mathbf{E} si può provocare un moto ordinato di elettroni ovvero dar luogo a una *corrente elettrica*, argomento che cominceremo a studiare nel capitolo 6. Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo, altrimenti ci sarebbe un moto di cariche, contrariamente all'ipotesi. Pertanto in elettrostatica lo *stato di conduttore in equilibrio* è definito dalla condizione

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{all'interno}$$

Condizione di equilibrio
di un conduttore

Si deve intendere che questa è una *condizione media macroscopica*. Nelle immediate vicinanze dei nuclei ci sono campi molto intensi, come abbiamo visto nell'esempio 3.2, che tengono legati gli elettroni non liberi; inoltre gli elettroni liberi non sono in quiete ma hanno un moto completamente disordinato di agitazione termica. Però in nessun istante c'è un moto ordinato in una certa direzione degli elettroni liberi rispetto agli ioni metallici fissi; si usa per questo parlare di *gas di elettroni liberi* all'interno di un conduttore.

La condizione $\mathbf{E} = 0$ ha importanti conseguenze.

a) Se il campo elettrico è nullo, è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ si tracci all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss (3.7) all'interno di un conduttore non ci sono cariche ($q_{\text{int}} = 0$), nel senso che non c'è un eccesso di carica di un segno o dell'altro. Di conseguenza un *eccesso di carica in un conduttore può stare solo sulla superficie*, distribuito con densità superficiale $\sigma = dq/d\Sigma$; se si cedono elettroni questi si portano all'esterno, se si sottraggono elettroni ne risulta sprovvisto lo strato superficiale.

b) Il potenziale del conduttore è costante in ogni punto del conduttore: presi due punti qualsiasi

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

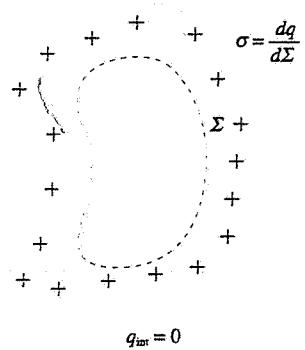


Figura 4.1

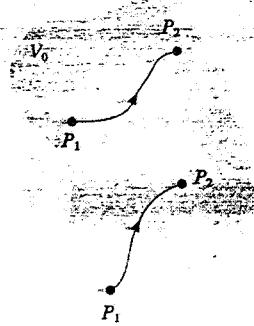


Figura 4.2

Il risultato è vero anche se uno dei due punti P_1 sta sulla superficie, che si trova quindi allo stesso potenziale V_0 dell'interno. Pertanto la *superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale*.

c) Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore, indipendentemente dalla forma di questo.

Tale valore del campo \mathbf{E} si ricava direttamente dalla (3.16) che esprime la discontinuità del campo nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica: posto $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = 0$ all'interno e detto $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$ il campo elettrico all'esterno, si ha

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n , \quad (4.1)$$

risultato noto come *teorema di Coulomb*. Il verso è *uscente* se la densità è *positiva*, *entrante* se è *negativa*.

Si vede che il modulo del campo elettrico è *maggior* dove σ è *maggior*: come giustificheremo più avanti σ è maggiore dove il raggio di curvatura della superficie è minore, fatto che si verifica ad esempio in zone a forma di *punta*. Se il conduttore possiede una carica notevole la densità sulle punte è molto elevata e tale è il campo nelle immediate vicinanze; in una rappresentazione grafica le linee di forza sono molto fitte vicino alle punte. Da questo effetto hanno origine svariati fenomeni, come la formazione di scintille tra elettrodi di forma appuntita in ambiente gassoso o l'effluvio di elettroni da punte cariche negativamente, che avviene anche nel vuoto.

Un conduttore carico lontano da altri conduttori ha dunque una distribuzione superficiale di carica tale che il campo elettrico all'interno sia nullo, qualunque sia la forma del conduttore. In particolare se il conduttore è sferico la carica è distribuita uniformemente: sappiamo infatti dall'esempio 3.1 che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica dà campo nullo all'interno. Notiamo inoltre che la carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie: un accumulo di elettroni soltanto in una certa zona sarebbe dovuto esclusivamente a un campo esterno che non esiste nel caso considerato.

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendolo in un campo elettrico esterno \mathbf{E} , il campo elettrico all'interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da \mathbf{E} ; senonché questo fatto provoca un movimento di elettroni e sulla superficie del conduttore compare una carica, se prima era scarico, o viene modificata la distribuzione di carica preesistente con il risultato che la sovrapposizione del campo esterno \mathbf{E} e del campo dovuto alla carica superficiale dà campo nullo all'interno. Avviene cioè un fenomeno transiente con movimento di cariche che ristabilisce lo stato di conduttore in equilibrio, espellendo il campo \mathbf{E} dall'interno: la durata è dell'ordine di $t = d/c$, se d è una dimensione tipica del conduttore e c la velocità della luce.

Ci sono varie precisazioni da fare relativamente a questo fenomeno di *induzione elettrostatica* (paragrafo 1.2). Gli elettroni si spostano per l'azione del campo esterno e si accumulano in una zona della superficie, lasciando sul resto della superficie un eccesso di carica positiva: tra queste zone si crea un campo elettrico indotto \mathbf{E}_i , che contrasta il movimento degli elettroni e si raggiunge l'equilibrio quando $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}$ in tutto l'interno del conduttore. Abbiamo così una distribuzione di carica indotta dei due segni sulla superficie del conduttore che si sovrappone all'eventuale carica preesistente; in totale però la carica del conduttore rimane la stessa poiché la carica indotta è la somma algebrica dei due contributi eguali ed opposti. È evidente che questa nuova distribuzione complessiva deve essere diversa da quella preesistente: essa dà all'interno un campo $\mathbf{E}_i \neq 0$.

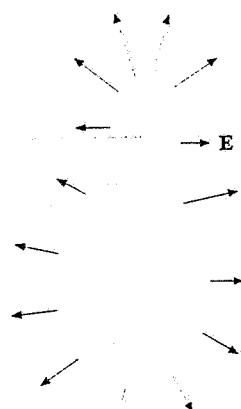


Figura 4.3

Infine bisogna dire che la distribuzione di equilibrio è una ed una sola, cioè non ci sono diverse soluzioni; ciò è dovuto all'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace, come discuteremo più avanti.

Nelle figure 4.4 e 4.5 sono mostrati due esempi: i conduttori sono inizialmente privi di carica (e tali restano). Nel primo caso un conduttore a forma di lastra piana è posto tra due piani uniformemente carichi: sulle facce compare la densità uniforme di carica $\sigma_i = \epsilon_0 E_i$ eguale in modulo alla densità $\sigma = \epsilon_0 E$ dei piani, con segno tale da produrre campo nullo dentro la lastra (e invariato fuori dalla lastra).

Nel secondo caso il conduttore è sferico e la densità di carica non può essere uniforme (darebbe da sola campo nullo all'interno); essa deve invece essere tale da dare campo uniforme, pari a $-\sigma / \epsilon_0$, in tutta la sfera. Il campo esterno risulta ora modificato dalla presenza della sfera; vedremo nell'esempio 4.23 come si risolve analiticamente questo problema.

Finora abbiamo parlato di un unico conduttore. Se poniamo a contatto due o più conduttori, ad esempio collegandoli con un filo conduttore, si costituisce un *unico corpo conduttore* e in equilibrio vale ovunque la condizione $E = 0, V = \text{costante}$: i *conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale*.

4.2 Capacità di un conduttore isolato

La carica distribuita sulla superficie di un conduttore carico isolato, cioè lontano da altri corpi carichi, e la densità della distribuzione sono legate da (1.23), estesa a tutta la superficie:

$$q = \oint \sigma(x', y', z') d\Sigma ;$$

il potenziale in un punto P qualsiasi del conduttore è costante in valore ed è dato da (2.22):

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{r'} .$$

Abbiamo già rilevato nel paragrafo 4.1 che la *distribuzione di carica tale da rendere il campo elettrico nullo all'interno e quindi costante il potenziale è una ed una sola*.

Se la carica del conduttore viene portata al valore $q' = mq$ anche la densità varia dello stesso fattore, $\sigma' = m\sigma$ e pure il potenziale del conduttore viene moltiplicato per m . Si deduce che il rapporto

$$C = \frac{q}{V} \quad (4.2)$$

tra la carica e il potenziale di un conduttore isolato non cambia al variare della carica sul conduttore: a questo rapporto si dà il nome di *capacità del conduttore* e si trova che dipende solamente dalla forma e dalle dimensioni del conduttore e dal mezzo che lo circonda, in questo caso il vuoto.

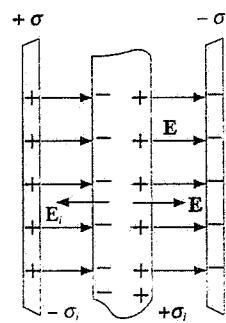


Figura 4.4

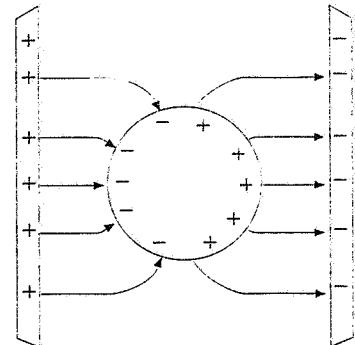
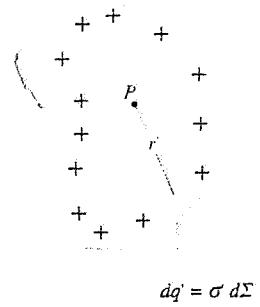


Figura 4.5

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \oint \frac{dq'}{r'} \end{aligned}$$

Figura 4.6



$$dq' = \sigma d\Sigma$$

Figura 4.7

Unità di misura

L'unità di misura della capacità di un conduttore è il coulomb/volt, che prende il nome di farad, simbolo F:

$$F = \frac{C}{V}$$

Si tratta di una unità di misura molto grande, come vedremo. Nella pratica si usano i sotomultipli:

millifarad	$mF = 10^{-3} F$
microfarad	$\mu F = 10^{-6} F$
nanofarad	$nF = 10^{-9} F$
picofarad	$pF = 10^{-12} F$

Esempio 4.1

Determinare la capacità di un conduttore sferico isolato, di raggio R .

Soluzione

Nell'esempio 3.1 abbiamo visto che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica, come quella che si trova su un conduttore sferico isolato, produce un campo che è nullo all'interno e vale $q / 4\pi\epsilon_0 r^2$ all'esterno; il potenziale è $V = q / 4\pi\epsilon_0 r$ e sulla superficie è pari a $q / 4\pi\epsilon_0 R$, valore assunto anche all'interno. Da (4.2) si ricava

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} ; \quad (4.3)$$

la capacità dipende soltanto dal raggio della sfera.
Facciamo alcuni esempi numerici:

$$R = 0.1 \text{ m} \quad C = \frac{10^{-1}}{9 \cdot 10^9} \approx 11 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 11 \text{ pF}$$

$R = 6.7 \cdot 10^6 \text{ m}$ (raggio della terra)

$$C \approx 0.74 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 0.74 \text{ mF}$$

$$R = 9 \cdot 10^9 \text{ m} \quad C = 1 \text{ F}$$

Almeno per la sfera isolata è evidente che il farad è una unità troppo grande.

Esempio 4.2

Due sfere conduttrici S_1 e S_2 , rispettivamente di raggi R_1 e R_2 , sono poste a distanza molto grande rispetto a R_1 e R_2 e sono unite da un filo conduttore. La carica complessiva è q e supponiamo che sia q_1 la carica distribuita con densità uniforme σ_1 sulla superficie Σ_1 della sfera S_1 e q_2 quella distribuita con densità uniforme σ_2 su Σ_2 , mentre si può trascurare la carica che si trova sul filo. Determinare i valori delle due cariche q_1 e q_2 .

Soluzione

Dal testo capiamo che possiamo porre $q = q_1 + q_2$ e che le sfere sono sufficientemente lontane da poter trascurare l'induzione elettrostatica che renderebbe non uniformi le

distribuzioni di carica sulla superficie. Nel paragrafo 4.1 abbiamo detto che due conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale, per cui

$$\frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_2}$$

e utilizzando anche la (4.3)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad . \quad (4.4)$$

La carica si ripartisce tra le sfere proporzionalmente ai raggi e quindi alle capacità. Ricordando che $q = q_1 + q_2$ abbiamo

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \quad , \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \quad .$$

La densità di carica sulle sfere vale

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad (4.5)$$

utilizzando il teorema di Coulomb (4.1). Abbiamo verificato in un caso particolare l'affermazione fatta nel paragrafo 4.1 che densità di carica e campo elettrico superficiali sono maggiori dove minore è il raggio di curvatura.

Sulla relazione (4.4) è basato il metodo di ripartizione di una data carica tra due conduttori sferici, descritto nel paragrafo 1.3 in relazione alle misure di Coulomb sulla legge della forza tra cariche.

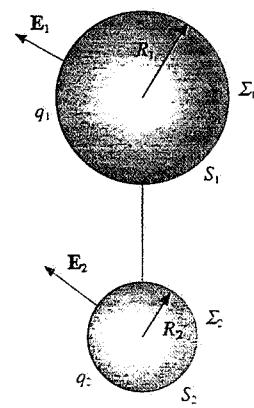
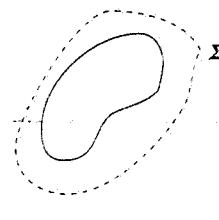


Figura 4.8



$E = 0$

Figura 4.9

4.3 Conduttore cavo. Schermo elettrostatico

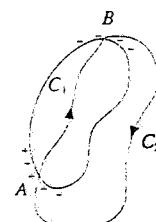
Consideriamo un conduttore carico che abbia nel suo interno una cavità. Nella massa del conduttore il campo elettrico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ che racchiuda la cavità: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di Σ non ci sono cariche e quindi *sulle pareti della cavità la carica è nulla*.

Non è nemmeno possibile sulle pareti una separazione della carica in $+q$ e $-q$: per negare questa circostanza si ricorre all'altra proprietà fondamentale di E , quella di essere conservativo.

Infatti, se sulle pareti della cavità fossero presenti due distribuzioni di carica di segno opposto, ci sarebbero nella cavità linee di forza, uscenti dalle cariche positive e entranti in quelle negative. La circuitazione di E lungo una linea chiusa, costituita da un tratto C_1 interno alla cavità su cui $E \neq 0$ e da un tratto C_2 interno al conduttore dove $E = 0$, darebbe

$$\oint E \cdot ds = \int_{C_1} E \cdot ds + \int_{C_2} E \cdot ds = \int_{C_1} E \cdot ds \neq 0 \quad ,$$

in contrasto col fatto che E è conservativo. Pertanto il campo nella cavità deve essere nullo se l'integrale di linea esteso a *qualsiasi percorso* C_1 interno alla cavità deve essere nullo: *sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche*. Inoltre è chiaro che il potenziale in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore: se ci fosse una d.d.p. dovrebbe infatti esserci un campo diverso da zero.



$$\oint E \cdot ds \neq 0$$

Figura 4.10

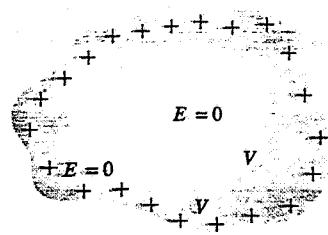


Figura 4.11

In conclusione la *carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche se il conduttore è cavo*; il campo elettrico è nullo e il potenziale è costante in ogni punto interno rispetto alla superficie del conduttore, sia esso nella massa del medesimo o in una eventuale cavità. La capacità di un conduttore isolato, definita nel paragrafo 4.2, è la stessa anche se il conduttore è cavo. In particolare resta vero quanto detto nell'esempio 4.1: un conduttore sferico, isolato carico di raggio R che sia pieno o con una cavità sferica concentrica o con cavità di qualsiasi forma, ha sempre campo nullo all'interno e campo all'esterno eguale a quello di una carica puntiforme posta nel centro; la sua capacità è sempre $4\pi \epsilon_0 R$.

Una prima osservazione importante è la seguente: la situazione descritta all'interno della cavità di un conduttore cavo non dipende dalla carica e quindi dal potenziale del conduttore. Il conduttore può essere a 10 V o a 10^6 V, ma all'interno della cavità non si misura mai tra due punti una d.d.p. diversa da zero: il punto di riferimento per il potenziale è la parete della cavità, rispetto a cui la d.d.p. è nulla, qualunque sia il valore del potenziale del conduttore.

Esempio 4.3

Dal fatto che il campo elettrico all'interno di un conduttore carico sferico cavo è nullo dedurre la legge di Coulomb.

Soluzione

Sulla superficie esterna di un conduttore sferico cavo la carica si distribuisce con densità superficiale costante e dà campo nullo all'interno. Teniamo inoltre conto dell'evidenza sperimentale che la forza esercitata da una carica puntiforme q su una carica di prova q_0 è proporzionale al prodotto delle cariche e diminuisce con la distanza, ha cioè l'espressione

$$F = k \frac{q q_0}{r^n}$$

essendo n l'esponente che bisogna determinare. Ciò equivale a dire che una carica puntiforme produce il campo elettrico:

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{q}{r^n}$$

Prendiamo un punto P interno alla cavità e due aree infinitesime $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$ come in figura, tali che gli angoli solidi (vedi nota paragrafo 3.1) sotto cui sono viste da P siano eguali:

$$\frac{d\Sigma_1 \cos\alpha_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2 \cos\alpha_2}{r_2^2}$$

Gli angoli α_1 e α_2 sono evidentemente uguali e la relazione precedente si riduce a

$$\frac{d\Sigma_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2}{r_2^2}$$

Se il campo in P è nullo, vuol dire che i due campi prodotti dalle cariche $dq_1 = \sigma d\Sigma_1$ e $dq_2 = \sigma d\Sigma_2$ sono opposti in verso ed eguali in modulo

$$k \frac{\sigma d\Sigma_1}{r_1^n} = k \frac{\sigma d\Sigma_2}{r_2^n}$$

Abbiamo pertanto

$$\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1^n}{r_2^n} \Rightarrow r_1^{n-2} = r_2^{n-2}$$

Poiché r_1 è diverso da r_2 , l'eguaglianza è soddisfatta solo se $n = 2$. Resta dimostrato che come conseguenza della legge di Gauss la forza tra due cariche è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Consideriamo adesso un conduttore C_2 cavo, isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore C_1 carico nella cavità, mantenendolo isolato da C_2 . In condizioni di equilibrio, se C_1 ha sulla sua superficie esterna una carica q , una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna e una carica q sulla superficie esterna di C_2 .

Tale fatto si spiega subito con la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa Σ interna a C_2 e contenente la cavità il flusso di \mathbf{E} è nullo in quanto è nullo il campo stesso: di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e se C_1 porta la carica q , sulla superficie interna di C_2 deve comparire una carica $-q$. Inoltre essendo C_2 neutro, lo spostamento di una carica $-q$ sulla superficie interna provoca la comparsa di una carica $+q$ sulla superficie esterna.

Siamo di fronte a un fenomeno di induzione che in questo caso, essendo la carica q completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa, si chiama *induzione completa: tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2* . Dalla superficie esterna di C_2 partono altre linee di forza, il cui andamento in prossimità del conduttore riflette la distribuzione delle cariche sorgenti. Le due zone in cui esiste un campo sono separate da una zona in cui, in equilibrio, non può esistere campo elettrostatico.

Il campo all'interno della cavità è determinato dal valore di q , dalla posizione di C_1 e dalla forma geometrica delle due superficie affacciate. Però, fissato q , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque siano forma e posizione. Infatti la distribuzione di carica superficiale esterna su C_2 che dà campo nullo all'interno è una sola e dipende esclusivamente dalla forma esterna di C_2 . Alternativamente possiamo dire che l'*informazione* sulla situazione interna potrebbe passare all'esterno solo attraverso un campo che penetrasse nel conduttore C_2 : ma questo non è possibile per la proprietà dei conduttori in equilibrio di avere campo nullo all'interno. Al limite si può portare C_1 a contatto con C_2 , con il che le cariche $+q$ e $-q$ si elidono, ma all'esterno non cambia nulla: questo fatto, la cui verifica sperimentale vedremo tra breve, ci fa anche capire che la distribuzione della carica $-q$ sulla faccia interna di C_2 , è sempre tale che, sommando l'effetto della carica q di C_1 , il campo dovuto alle cariche nella cavità è nullo all'esterno della cavità. Se così non fosse, il caso con carica nulla, ma separata (C_1 non tocca C_2), potrebbe essere diverso dal caso con carica assolutamente nulla (C_1 tocca C_2).

Analogamente, se variamo la carica sulla superficie esterna oppure variamo la sua distribuzione, ad esempio avvicinando al conduttore un altro corpo carico, cambia il campo all'esterno, ma la distribuzione di carica sulla superficie esterna di C_2 è sempre tale da dare campo nullo all'interno di C_2 e quindi non può alterare il campo locale esistente nella cavità. Come osservato prima, ciò potrebbe avvenire se un campo penetrasse dall'esterno nella massa del conduttore, ma la possibilità è esclusa dalle proprietà di un conduttore in equilibrio.

Pertanto, finché lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicanti, il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno ed esterno.

Una verifica sperimentale dell'azione di schermo perfetto di un conduttore cavo è la seguente; si introduce una carica $+q$ isolata dentro una cavità conduttrice

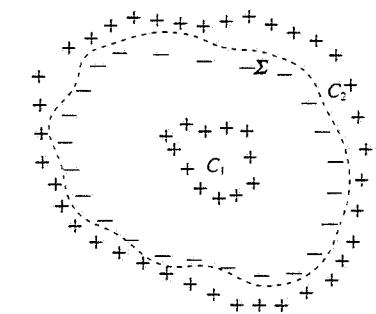


Figura 4.13

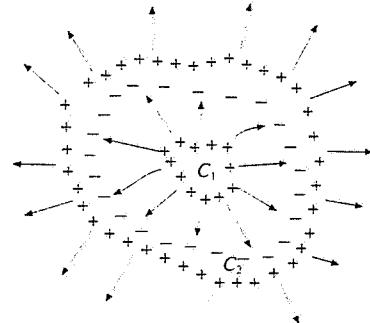


Figura 4.14

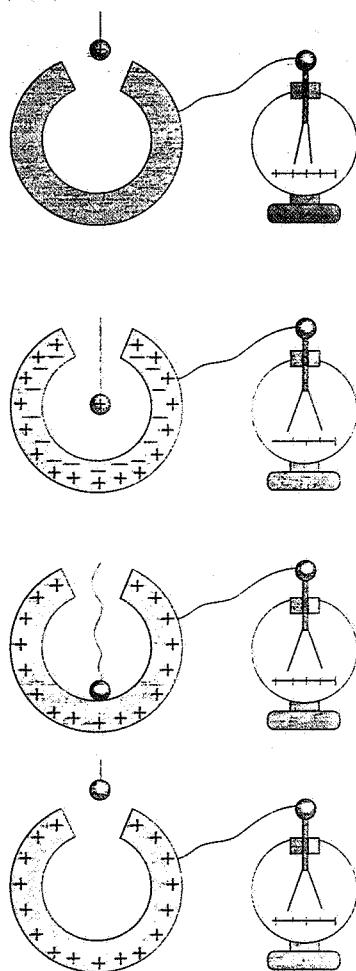


Figura 4.15

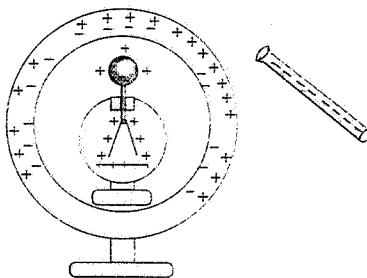


Figura 4.16

ce con apertura molto piccola e si misura con un elettroscopio collegato alla superficie esterna la carica indotta, che risulta essere $+q$. Se muoviamo la carica $+q$ all'interno della cavità, facendo variare il campo all'interno e la distribuzione di carica sulla parete interna della cavità, l'elettroscopio non segnala alcuna variazione, nemmeno se caliamo la carica fino a toccare il fondo. Successivamente poniamo un elettroscopio carico all'interno della cavità, che esternamente può essere carica o scarica e avviciniamo un corpo carico in modo da variare la distribuzione della carica esterna: si osserva che la deviazione dell'elettroscopio rimane inalterata. In effetti un conduttore cavo scherma lo spazio interno dallo spazio esterno nei due sensi.

Non è necessario che lo schermo sia compatto: esso può avere delle piccole aperture o una struttura a rete; la presenza di queste discontinuità non si avverte a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni.

Gli schermi elettrostatici trovano applicazione in laboratorio quando si devono eseguire determinate misure elettrostatiche o più in generale, quando si vuole schermare una strumentazione da disturbi elettromagnetici esterni: in effetti, anche in caso di campi variabili, si ha un'azione di schermo, pur se non completamente efficiente. Una rete metallica, ben collegata conduttrivamente alla terra, inserita nei muri di un edificio lo scherma dalle scariche atmosferiche.

È interessante ricordare che l'azione di schermo elettrostatico venne scoperta da Franklin nel 1755 e completamente verificata da Faraday nella prima metà dell'ottocento; già nel 1773, dodici anni prima che venisse effettuato l'esperimento di Coulomb, Cavendish dedusse dalle proprietà di schermo sperimentate in laboratorio che l'esponente della legge, detta poi di Coulomb, doveva essere $n = 2 \pm 0.02$; la misura diretta di Coulomb risultò avere una precisione analoga. Sulla linea di Cavendish si mosse Maxwell che nel 1873 trovò $n - 2 \approx 10^{-5}$; gli esperimenti più recenti (1971) danno $n - 2 = (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$.

Nell'esempio che segue calcoliamo analiticamente le distribuzioni di campo e potenziale in una situazione particolare di schermo elettrostatico.

Esempio 4.4

Un conduttore sferico di raggio R_1 è al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 . Una carica $+q$ è depositata sul conduttore interno. Calcolare campo e potenziale in funzione di r , distanza dal centro, e studiare i casi particolari in cui si colleghino i due conduttori oppure si ponga a potenziale zero quello esterno.

Soluzione

In equilibrio abbiamo la carica $+q$ sulla superficie di raggio R_1 , $-q$ sulla superficie di raggio R_2 e $+q$ sulla superficie di raggio R_3 . Per simmetria la densità di carica è costante su ciascuna superficie (ma non eguale su di esse) e campo e potenziale sono funzioni solo di r .

Utilizziamo i risultati già noti per una distribuzione sferica di carica (esempio 3.1) e sommiamo i contributi delle tre distribuzioni in base al principio di sovrapposizione, con i risultati riportati nella tabella all'inizio della pagina seguente e mostrati nella figura 4.18.

Si osservi che per $r \geq R_2$ gli effetti delle cariche interne alla cavità si elidono, dando campo e potenziale nulli, per cui tra R_2 e R_3 il campo è nullo e oltre R_3 è dovuto solo alla carica esterna.

In particolare la d.d.p. tra i due conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , \quad (4.6)$$

determinata dal valore della carica interna e dei raggi.

	$V(r)$	$E(r)$
1) $0 \leq r \leq R_1$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_1$	$0 + 0 + 0 = 0$
2) $R_1 \leq r \leq R_2$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 + 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
3) $R_2 \leq r \leq R_3$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = V_2$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + 0 = 0$
4) $R_3 \leq r$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

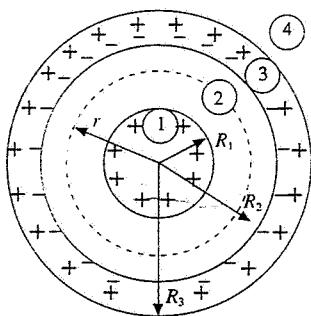


Figura 4.17

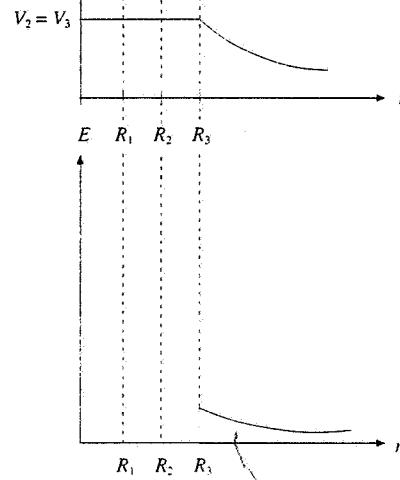
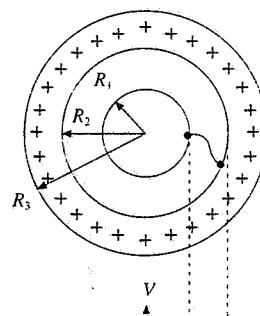


Figura 4.19

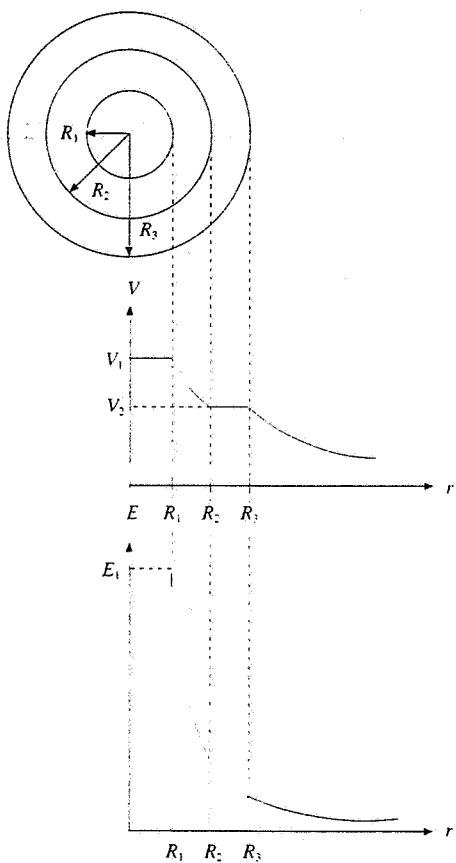


Figura 4.18

Se collegiamo i due conduttori (figura 4.19), la carica all'interno si annulla, le prime due colonne della tabella di $V(r)$ e $E(r)$ sono sempre nulle e resta un unico conduttore al potenziale $q / 4\pi\epsilon_0 R_3$, che genera all'esterno lo stesso campo e lo stesso potenziale di prima. Lo spazio esterno è schermato dalle variazioni di campo che avvengono all'interno.

Supponiamo infine di collegare la superficie esterna del conduttore cavo a terra (figura 4.20): la carica q viene neutralizzata e quindi sono ora le terze colonne ad essere identicamente nulle. All'esterno il campo è nullo, all'interno il campo è rimasto lo stesso ovunque. Il potenziale invece cambia: esso diminuisce ovunque della quantità $q / 4\pi\epsilon_0 R_3$, ma questo fatto

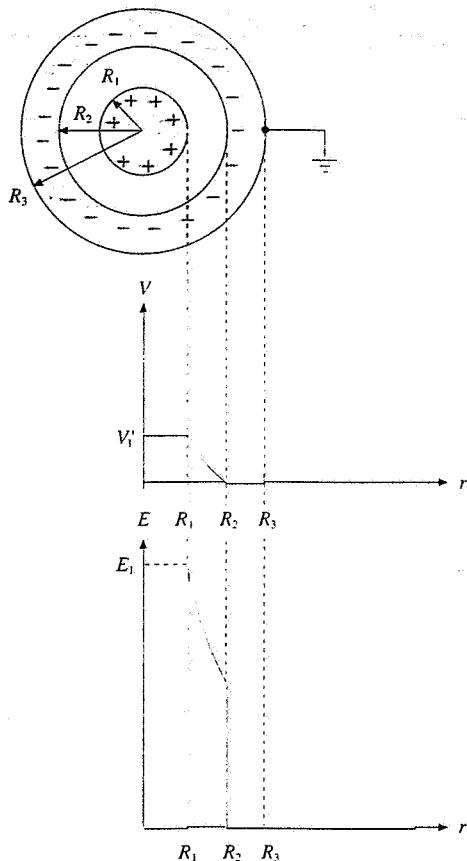


Figura 4.20

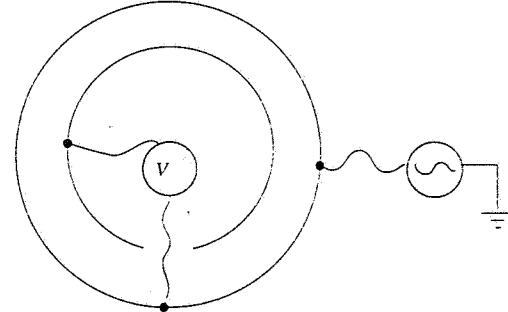


Figura 4.21

4.4 Sistemi di conduttori

Riprendiamo in esame il conduttore isolato carico del paragrafo 4.2, per il quale abbiamo definito la capacità secondo (4.2), dipendente dalla forma e dalle dimensioni del conduttore. Se a questo conduttore, che chiamiamo C_1 , e su cui si trova la carica q_1 , avviciniamo un altro conduttore C_2 scarico, sulla parte di C_2 più vicina a C_1 compare una carica $-q'$ e sulla parte più lontana la carica q' , per effetto dell'induzione elettrostatica, che in questo caso diciamo incompleta, in quanto non tutte le linee di forza che partono da C_1 finiscono su C_2 .

Il potenziale di C_1 si porta al valore $V_1 < V'$, in quanto esso viene diminuito dalla presenza della carica negativa $-q'$ più di quanto venga aumentato da q' , che è più lontana. Come risultato aumenta la capacità di C_1 , rapporto tra carica e potenziale.

Questo caso è un aspetto particolare del caso più generale, costituito da un sistema di n conduttori fissi racchiusi entro un conduttore, il cui potenziale viene assunto come riferimento e posto eguale a zero: questo conduttore può anche mancare e allora il riferimento è il potenziale nullo all'infinito. Tra i potenziali e le cariche dei conduttori sussistono le relazioni

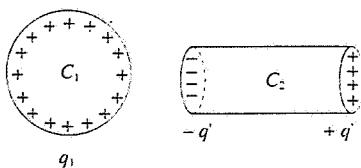


Figura 4.22

$$V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n$$

$$V_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2n} q_n$$

..... (4.7)

$$V_n = a_{n1} q_1 + a_{n2} q_2 + \dots + a_{nn} q_n .$$

Le grandezze a_{ij} sono dette *coefficienti di potenziale* e dipendono soltanto dalla geometria del sistema; per esse valgono le relazioni

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad a_{ij} > 0 \quad , \quad a_{ii} > a_{ij} \quad i \neq j \quad . \quad (4.8)$$

Dati i potenziali e nota la *matrice* (simmetrica) dei coefficienti a_{ij} le cariche sui conduttori sono univocamente determinate dalla soluzione del sistema di equazioni lineari (4.7); matematicamente ciò implica che il determinante della matrice sia diverso da zero.

Il sistema (4.7) può essere invertito esprimendo le cariche in funzione dei potenziali:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \dots + c_{1n} V_n \\ q_2 &= c_{21} V_1 + c_{22} V_2 + \dots + c_{2n} V_n \\ &\dots \\ q_n &= c_{n1} V_1 + c_{n2} V_2 + \dots + c_{nn} V_n \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le grandezze c_{ij} , determinate in funzione delle a_{ij} , sono chiamate *coefficienti di induzione* se $i \neq j$ e *coefficienti di capacità* se $i = j$. Valgono le seguenti relazioni:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad , \quad c_{ij} < 0 \quad , \quad c_{ii} > 0 \quad . \quad (4.10)$$

Anche la *matrice dei coefficienti* c_{ij} ha determinante non nullo.

La conoscenza dei coefficienti a_{ij} o c_{ij} consente di risolvere qualsiasi problema di elettrostatica che riguardi il sistema di n conduttori in esame. Poiché questi coefficienti non dipendono dalla carica presente sui conduttori, ma solamente dalla geometria del sistema, la loro determinazione può essere fatta considerando le distribuzioni di carica più convenienti.

Dimostriamo le (4.7) chiarendo contemporaneamente il significato dei coefficienti di potenziale. Supponiamo che il primo conduttore abbia carica q_1 , mentre tutti gli altri abbiano carica nulla: $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$. I potenziali degli n conduttori, dovuti alla presenza di q_1 , sono dati da formule tipo (2.22) e dipendono quindi dalla densità di carica sul primo conduttore; se questa viene moltiplicata per un dato fattore essi variano proporzionalmente e in definitiva sono proporzionali a q_1 :

$$V'_1 = a_{11} q_1 \quad , \quad V'_2 = a_{21} q_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad V'_n = a_{n1} q_1 \quad .$$

I coefficienti a_{ij} , con $i \neq j$, descrivono l'*interazione mutua* tra il primo conduttore e ognuno degli altri $n - 1$. Analogamente, se supponiamo $q_2 \neq 0$ e $q_1 = q_3 = \dots = q_n = 0$, abbiamo

$$V''_1 = a_{12} q_2 \quad , \quad V''_2 = a_{22} q_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad V''_n = a_{n2} q_2 \quad .$$

È chiaro che $a_{12} = a_{21}$ in quanto entrambi descrivono la stessa interazione, tra il primo e il secondo conduttore. Si capisce anche perché i coefficienti siano positivi (una carica di un certo segno dà un potenziale dello stesso segno).

Procedendo così di seguito si considerano in definitiva n situazioni di ciascuna delle quali è diversa da zero la carica posseduta da un conduttore e sono nulle tutte le $n - 1$ restanti. Se tutti gli n conduttori sono carichi, a norma delle proprietà additiva dei potenziali il potenziale complessivo di ciascun conduttore si ottiene dalla somma dei singoli potenziali V'_i , V''_i ,

È importante sottolineare che in ciascuna delle n situazioni singole la presenza della carica sul solo conduttore i -esimo induce distribuzioni di carica sugli altri (con carica totale nulla) che a loro volta modificano la distribuzione inducente: i coefficienti a_{i1}, \dots, a_{in} riassumono la condizione di equilibrio. Quando sono presenti tutte le cariche abbiamo su ogni conduttore la sovrapposizione delle distribuzioni di carica dei casi singoli ed è lecito applicare il principio di sovrapposizione.

Coefficienti di potenziale

Coefficienti di induzione e di capacità

Esempio 4.5

Calcolare i coefficienti di potenziale, di capacità e di induzione per il sistema di due conduttori sferici concentrici già considerato nell'esempio 4.4.

Soluzione

Le (4.7) in questo caso si riducono a

$$V_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 , \quad V_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 .$$

Sappiamo dall'esempio 4.4 che se diamo una carica q_1 al conduttore interno quello esterno ha una carica complessiva nulla e i potenziali sono

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_1} - \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3} , \quad V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

da confrontare con $V_1 = a_{11} q_1$, $V_2 = a_{21} q_1$. Pertanto

$$a_{11} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) , \quad a_{21} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

Se diamo una carica q_2 al conduttore esterno,

$$V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

da confrontare questa volta con $V_1 = a_{12} q_2$, $V_2 = a_{22} q_2$ per cui

$$a_{12} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} = a_{21} , \quad a_{22} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3}$$

Se comunichiamo una carica q_1 al conduttore interno e una carica q_2 a quello esterno i potenziali, secondo (4.7), sono

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) q_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_2 , \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_1 + \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_3} q_2 . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vediamo che per qualsiasi configurazione di carica la d.d.p. tra i conduttori è sempre data da (4.6),

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Invertiamo il sistema (4.11) e troviamo

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1 - \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_2 \\ q_2 &= c_{21} V_1 + c_{22} V_2 = -\frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1 + \frac{4\pi \epsilon_0 (R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3)}{R_2 - R_1} V_2 \end{aligned}$$

che riscriviamo nella forma più espressiva

$$q_1 = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) , \quad q_1 + q_2 = 4\pi \epsilon_0 R_3 V_2 : \quad (4.12)$$

la carica q_1 dipende soltanto dalla d.d.p. tra i conduttori; ricordando poi da (4.3) che la capacità del conduttore esterno è $C = 4\pi \epsilon_0 R_3$, vediamo che la sua carica CV_2 è la somma della carica q_2 posta dall'esterno e della carica q_1 indotta dall'interno.

Nelle applicazioni pratiche è più semplice controllare il potenziale dei vari conduttori e quindi V_1, V_2, \dots, V_n sono noti mentre le cariche sono le incognite che si possono calcolare o risolvendo le (4.7) o utilizzando direttamente le (4.9). Vedremo nel paragrafo 4.11 che esiste una ragione più profonda per preferire questa impostazione.

4.5 Condensatori

La relazione (4.6), che abbiamo ritrovato nell'esempio 4.5, si può scrivere

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.13)$$

e mostra che il rapporto tra carica e d.d.p. tra i due conduttori sferici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i raggi R_1 e R_2 , in questo caso il vuoto caratterizzato da ϵ_0 .

Più in generale una relazione analoga sussiste per una qualsiasi coppia di conduttori tra i quali ci sia *induzione completa*.

Poniamo infatti nelle (4.7) $q_1 = q$ e $q_2 = -q$:

$$V_1 = a_{11} q - a_{12} q , \quad V_2 = a_{12} q - a_{22} q ,$$

dove abbiamo tenuto conto che $a_{12} = a_{21}$. Sottraendo membro a membro

$$V_1 - V_2 = (a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}) q$$

e il rapporto

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}}$$

risulta indipendentemente da q e determinato dalla geometria.

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa si chiama condensatore; i due conduttori prendono il nome di *armature del condensatore*. Il rapporto tra il valore assoluto della carica presente su una delle armature e la d.d.p. si chiama *capacità del condensatore*, estendendo la definizione (4.2). Ripetiamo che la capacità di un condensatore è individuata dalla geometria delle armature e dal mezzo interposto e riscriviamo la definizione nelle tre maniere possibili, tutte di uso molto comune:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} , \quad q = C(V_1 - V_2) , \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{C} . \quad (4.14)$$

Condensatore

Capacità del condensatore

Esempio 4.6 Capacità di un condensatore sferico

Il condensatore sferico coincide con il sistema studiato negli esempi 4.4 e 4.5 e la sua capacità è data dalla formula (4.13):

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

In particolare per $R_2 \rightarrow \infty$ si ottiene la capacità (4.3) del conduttore sferico isolato, $C = 4\pi \epsilon_0 R_1$. Questo fatto suggerisce di definire un *conduttore isolato come un condensatore con un'armatura posta all'infinito*. Se il conduttore ha una carica $+q$, la carica $-q$ si forma per induzione all'infinito, distribuita su una superficie infinita e perciò con densità nulla. La presenza della seconda armatura ha come risultato l'aumento della capacità del sistema, che va attribuito all'aumento dell'influenza tra le due armature. Possiamo vedere quantitativamente tale effetto così: se la distanza tra le due armature sferiche diventa piccola rispetto ai raggi, cioè se

$$h = R_2 - R_1 \ll R_1 \approx R_2 = R$$

la capacità del condensatore si scrive

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R^2}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.15)$$

con $\Sigma = 4\pi R^2$ area delle armature. La capacità cresce all'aumentare di Σ e al diminuire di h .

Per fissare un'ordine di grandezza, se $\Sigma = 1 \text{ m}^2$ e $h = 1 \text{ mm}$, la capacità del condensatore sferico ($R = 0.282 \text{ m}$) è

$$C = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{10^{-3}} = 8.85 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 8.85 \text{ nF}$$

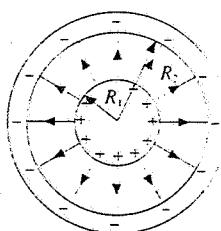
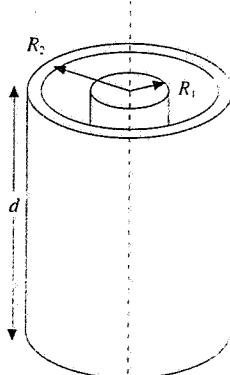


Figura 4.23

Esempio 4.7 Capacità di un condensatore cilindrico

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio R_1 e l'altra di raggio $R_2 > R_1$, di eguale lunghezza d grande rispetto ai raggi. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione approssimativamente completa. Se si escludono i tratti estremi, su cui torneremo più avanti, nell'intercapedine cilindrica tra R_1 e R_2 il campo elettrico è radiale.

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \mathbf{u}_r$$

come abbiamo calcolato nell'esempio 3.3, e la d.d.p. tra le armature è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

La carica per unità di lunghezza λ è pari a q/d e quindi

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi \epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.16)$$

Se $h = R_2 - R_1$ è molto minore dei raggi, sviluppiamo in serie il denominatore arrestandoci al primo termine,

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R}$$

per cui la capacità diventa

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.17)$$

con $\Sigma = 2\pi R d$ area delle armature distanti h : si ritrova la (4.15). Dalla (4.16) si definisce la *capacità per unità di lunghezza*

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.18)$$

Si realizza un condensatore cilindrico a capacità variabile facendo scorrere uno dei due cilindri lungo l'asse in modo da far variare la lunghezza d . Le formule restano valide se si possono trascurare gli effetti di bordo.

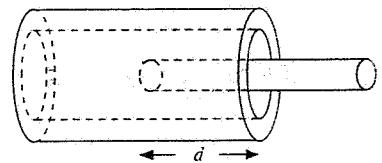


Figura 4.24

Esempio 4.8 Capacità di un condensatore piano

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h . La carica positiva q è distribuita con densità uniforme σ sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità uniforme $-\sigma$ sull'armatura negativa. Abbiamo già calcolato campo e potenziale per una tale distribuzione di cariche negli esempi 1.9 e 2.10, supponendo la struttura indefinita:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n \quad , \quad V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h .$$

Si deduce quindi che la capacità di un condensatore piano è data da

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.19)$$

coincidente con (4.15) e (4.17). Questa volta non ci sono approssimazioni geometriche, però la (4.19) è approssimata per un'altra ragione: il campo si può supporre uniforme solo nella regione del condensatore, lontano dai bordi.

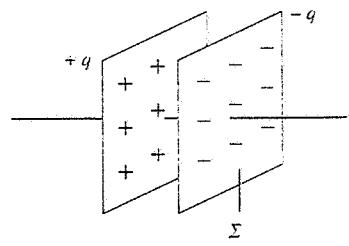
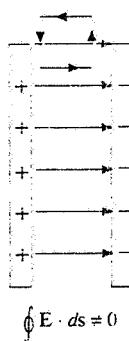


Figura 4.25

Le configurazioni regolari del campo \mathbf{E} , considerate nel condensatore cilindrico e nel condensatore piano, non sono completamente realizzabili nella pratica. Esse sarebbero corrette se l'estensione fosse indefinita; per una dimensione finita si avrebbe, nella zona del bordo, un passaggio brusco dalla regione in cui esiste un campo elettrico regolare alla regione con campo elettrico nullo e sarebbe possibile trovare una linea chiusa, come quella mostrata in figura 4.26, tale che

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 .$$

Essendo il campo conservativo, questa possibilità va esclusa e in effetti il campo è regolare solo nella zona centrale del condensatore, mentre vicino ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno, assumendo una configurazione che assicura la nullità della



$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$

Figura 4.26

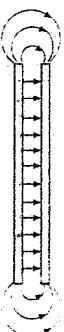


Figura 4.27

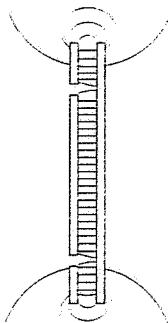


Figura 4.28



circuazione del campo elettrico; il valore del campo elettrico è ad ogni modo rapidamente decrescente verso l'esterno.

Si capisce che la configurazione sferica sarebbe l'unica ideale, per l'assenza dei bordi. Le capacità reali di condensatori cilindrici e piani differiscono dal valore calcolabile con le espressioni (4.16) e (4.19). Tuttavia queste vengono sempre usate per avere un'indicazione dei valori in gioco, tanto più vicina alla situazione reale quanto più ci si pone nella condizione $\Sigma \gg h^2$ (dimensioni delle armature grandi rispetto alla loro distanza) per la quale l'effetto di bordo è sostanzialmente trascurabile.

Per i condensatori piani da laboratorio si usa l'accorgimento dell'*anello di guardia*: le armature sono circolari e di raggio diverso, la più piccola essendo circondata da un anello complanare posto allo stesso potenziale. Nella zona centrale, che corrisponde praticamente all'intera aerea Σ dell'armatura più piccola, il campo è uniforme.

4.6 Collegamento di condensatori

Un condensatore viene utilizzato essenzialmente come deposito di carica; pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità $+q$ e $-q$, proporzionali per un conduttore di data capacità alla d.d.p. tra le armature. Tramite opportuni collegamenti conduttori esterni è possibile far fluire la carica negativa (elettroni) da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore. Vedremo questo argomento nel capitolo 6. Possiamo però subito descrivere come si collegano con fili conduttori più condensatori tra loro e calcolare la capacità equivalente. Noi supponiamo costanti nel tempo le cariche e le d.d.p., però i risultati sono validi anche in regime variabile.

Per comodità scriviamo V la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ che esiste tra le armature; inoltre con la lettera C indichiamo sia il condensatore che la sua capacità. Nella figura a fianco è mostrato il simbolo che individua un condensatore in un circuito elettrico: esso si rifà chiaramente al condensatore piano, che è la configurazione di gran lunga più comune, però è valido per qualsiasi condensatore.

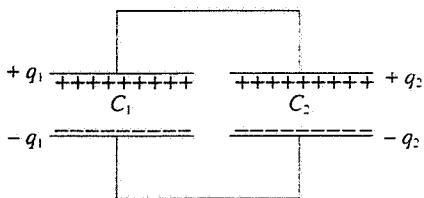
Condensatori in parallelo

La connessione in parallelo delle armature consiste nel realizzare, come mostrato in figura 4.29, due soli conduttori. In tal modo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. applicata al condensatore C_1 è eguale a quella applicata al condensatore C_2 e scriviamo, da (4.14),

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V.$$

La carica globale sul conduttore superiore, costituito dalle due armature superiori è

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V;$$



sul conduttore inferiore la carica è $-q = -(q_1 + q_2)$. Definiamo capacità equivalente del sistema

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2. \quad (4.20)$$

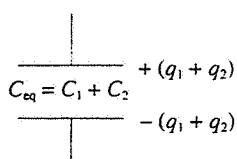


Figura 4.29

Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti. Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (4.21) \quad \text{Condensatori in parallelo}$$

La capacità equivalente è dunque sempre maggiore di quella di ciascun componente.

Collegamento in serie

Nella connessione in serie c'è un solo collegamento tra i due condensatori e viene costituito un sistema composto da tre conduttori: ai due estremi si applica la d.d.p. $V = V_C - V_A$ e il conduttore intermedio assume un potenziale $V' = V_B - V_A$. Se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale V_C , per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura affacciata e $+q$ sull'armatura di C_2 a questa collegata, doven-
do essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura di C_2 a potenziale V_A . Vediamo che il valore della carica è lo stesso nei due condensatori. Da (4.14)

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= \frac{q}{C_1}, \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2}, \\ V = V_C - V_A &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{\text{eq}}} \\ \frac{1}{C_{\text{eq}}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

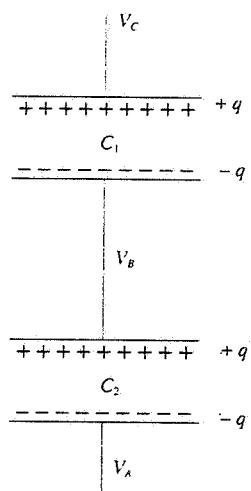


Figura 4.30

Il ragionamento si estende a n condensatori collegati in serie: l'inverso della capacità equivalente del sistema è la somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori.

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (4.23) \quad \text{Condensatori in serie}$$

Nel collegamento in serie la capacità è sempre minore della capacità di ciascun condensatore.

Ci si rende conto che da un insieme di condensatori di valori dati con opportuni collegamenti in parallelo o in serie è possibile ottenere capacità equivalenti in un grande intervallo di valori.

Esempio 4.9 Partitore capacitivo

Ai capi di tre condensatori in serie c'è una d.d.p. $V = V_B - V_A = 100$ V e la capacità equivalente del sistema è $C = 100$ pF. Calcolare i valori delle capacità C_1 , C_2 , C_3 tali che rispetto a V_A sia $V_1 = 50$ V e $V_2 = 70$ V.

Soluzione

La carica che si trova su ciascuna armatura è

$$q = C V = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 = 10^{-8} \text{ C}$$

e i valori richiesti delle capacità sono

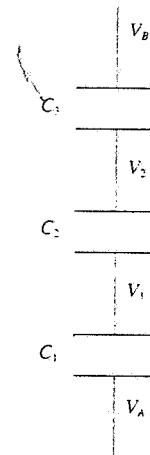


Figura 4.31

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 200 \text{ pF} ,$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 500 \text{ pF} ,$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 333 \text{ pF}$$

Il sistema si chiama *partitore capacitivo* perché permette di ripartire una data d.d.p. (in tre parti nel caso specifico). In generale, detti C_i e V_i i valori della capacità e della d.d.p. ai capi dell' i -esimo condensatore, dall'eguaglianza

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots = C_i V_i = \dots C_n V_n$$

si vede che la d.d.p. si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alla capacità:

$$V_1 : V_2 : \dots : V_n = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \dots : \frac{1}{C_n}$$

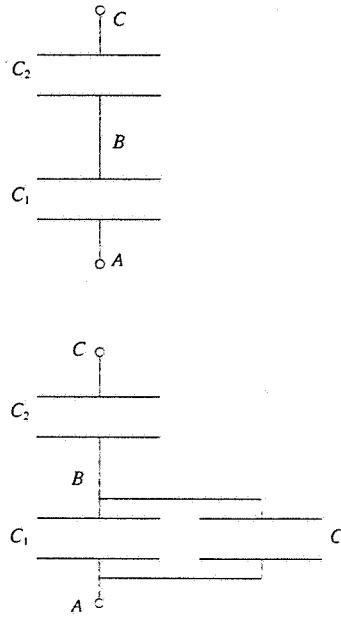


Figura 4.32

Esempio 4.10

Due condensatori C_1 e C_2 sono collegati in serie e le d.d.p. ai loro capi sono rispettivamente $V_1 = 30 \text{ V}$ e $V_2 = 20 \text{ V}$. Collegando in parallelo a C_1 un condensatore di capacità $C' = 2 \mu\text{F}$ le d.d.p. diventano $V'_1 = 5 \text{ V}$ e $V'_2 = 45 \text{ V}$. Calcolare i valori delle capacità C_1 e C_2 .

Soluzione

Nella prima situazione abbiamo

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3} .$$

Nella seconda situazione C_1 e C' equivalgono ad un unico condensatore di capacità $C_1 + C'$ per cui

$$(C_1 + C') V'_1 = C_2 V'_2 \Rightarrow \frac{C_1 + C'}{C_2} = \frac{V'_1}{V'_2} = 9$$

e risolvendo nelle due incognite abbiamo

$$C_1 = 0.16 \mu\text{F} , \quad C_2 = 0.24 \mu\text{F}$$

Esempio 4.11

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p. V_1 e V_2 . Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p. V rispetto alla terra. Calcolare il valore di V .

Soluzione

La carica presente inizialmente nei due condensatori è

$$q_1 = C_1 V_1 , \quad q_2 = C_2 V_2$$

e la somma rimane la stessa anche nella nuova situazione,

$$q = (C_1 + C_2)V = q_1 + q_2 = C_1V_1 + C_2V_2 ,$$

da cui si ricava

$$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} ,$$

intermedio tra V_1 e V_2 .

L'equilibrio viene raggiunto con un passaggio di carica positiva dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore e le cariche finali dei condensatori sono

$$q'_1 = C_1V = \frac{C_1}{C_1 + C_2}q \quad , \quad q'_2 = C_2V = \frac{C_2}{C_1 + C_2}q .$$

Si osservi che la ripartizione di carica tra i due condensatori avviene nello stesso modo dell'esempio 4.2. relativo a due sfere conduttrici messe in contatto.

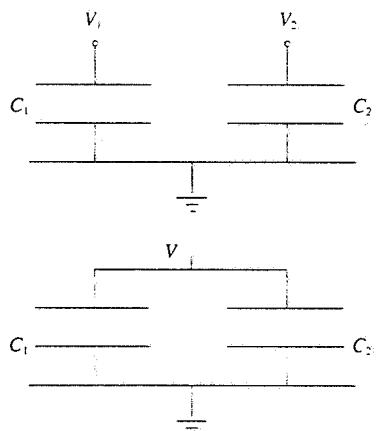


Figura 4.33

Esempio 4.12

Un condensatore di capacità C_0 è caricato alla d.d.p. V_0 . Esso viene collegato in parallelo a un elettroscopio. Discutere la condizione di equilibrio.

Soluzione

Supponiamo che l'involucro dell'elettroscopio sia di materiale conduttore, come del resto è sempre nella pratica (salvo la finestra che permette di leggere la deviazione). In tal modo le foglioline e l'involucro costituiscono le armature di un condensatore di capacità C_e . Le caratteristiche costruttive sono tali che la distanza tra l'armatura formata dall'asta e dalle foglioline e l'altra armatura, l'involucro, è mediamente piuttosto grande per cui risultano valori della capacità C_e piccoli, inferiori in genere a 100 pF. Applichiamo i risultati dell'esempio 4.11 con $V_2 = 0$, elettroscopio inizialmente scarico, e troviamo come potenziale di equilibrio

$$V = \frac{C_0V_0}{C_0 + C_e} = \frac{V_0}{1 + \frac{C_e}{C_0}} = \frac{1 - \frac{C_e}{C_0}}{1 - \left(\frac{C_e}{C_0}\right)^2}V_0 .$$

La carica acquistata dall'elettroscopio è

$$q_e = C_eV = \frac{C_eC_0}{C_e + C_0}V_0 ,$$

proporzionale alla d.d.p. iniziale ai capi di C_0 ; l'elettroscopio può quindi essere utilizzato come strumento di misura della d.d.p. ai capi di un condensatore.

Se il rapporto C_e/C_0 è piccolo per cui si può trascurare il suo quadrato rispetto a 1,

$$V = \left(1 - \frac{C_e}{C_0}\right)V_0 \Rightarrow \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{C_e}{C_0} .$$

La d.d.p. ai capi del condensatore varia percentualmente di poco se $C_e \ll C_0$; anche la carica asportata dal condensatore risulta piccola rispetto a q_0 :

$$\frac{q_e}{q_0} = \frac{C_e}{C_e + C_0} \approx \frac{C_e}{C_0} .$$

Lo strumento in queste condizioni perturba molto poco le quantità che si misurano; tale condizione è tipica degli strumenti di misura elettrostatici, anche se diversamente realizzati.

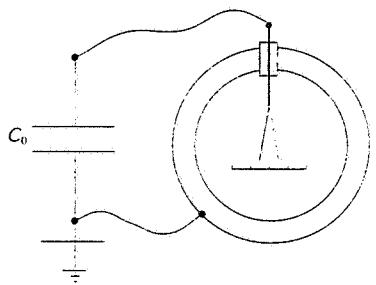


Figura 4.34

Concludiamo questo paragrafo notando che le connessioni in serie o in parallelo sono significative, dal punto di vista delle capacità equivalenti, solo se i valori delle capacità non sono molto diversi tra loro. In caso contrario, se ad esempio $C_1 >> C_2$, abbiamo

$$C_1 + C_2 \approx C_1, \quad \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \approx \frac{1}{C_2} :$$

nel parallelo predomina il valore maggiore, nella serie il valore minore.

4.7 Energia del campo elettrostatico

Il *processo di carica* di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero sulle armature alla situazione $(+q, -q)$ con una d.d.p. $V = q/C$ tra le armature, consiste in definitiva in una *separazione di cariche* e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare quindi che la carica di un condensatore avvenga sottraendo una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine una carica $+q$ è stata trasferita da un'armatura all'altra lasciando la prima con una carica $-q$, e si è stabilita tra le armature la d.d.p. V ; la *carica totale è in ogni istante nulla*.

Se in una fase intermedia del processo la d.d.p. tra le armature è V' , in quanto è già stata trasferita la carica $q' = CV'$ il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la d.d.p. V' è, secondo (2.8),

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} .$$

Come si vede, esso dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di *energia (potenziale) elettrostatica*. Assumendo che l'energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$ e, servendoci delle (4.14), scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C , carico con carica q e d.d.p. V :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV . \quad (4.24)$$

Energia elettrostatica

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di carica dall'infinito, dove $V = 0$, alla superficie del conduttore. Ciò torna formalmente con l'idea di considerare un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura all'infinito.

Il ragionamento svolto per il calcolo dell'energia del condensatore lega l'energia alle cariche, che la possiedono in quanto si trovano ad un certo potenziale: l'energia totale è la somma delle energie potenziali delle singole cariche. È però possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso.

Consideriamo per semplicità un condensatore piano, in cui il campo elettrico tra le armature è uniforme. Riprendiamo la (4.19) e la relazione $V = Eh$:

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico. Se facciamo l'ipotesi che l'energia sia distribuita nei punti in cui c'è campo e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la *densità di energia elettrostatica*, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 . \quad (4.25)$$

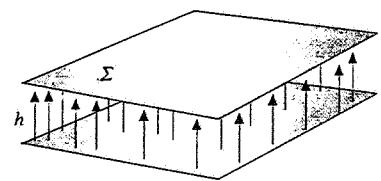


Figura 4.35

Densità di energia elettrostatica

La generalità di questa formula, in cui non compare alcun elemento caratteristico del sistema per cui il calcolo è stato eseguito, ma soltanto il valore del campo e una proprietà del mezzo (in questo caso il vuoto), suggerisce che (4.25) si possa applicare a qualsiasi situazione. In effetti si può dimostrare che in una regione in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo $d\tau$, al cui interno il campo vale E , è

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau ;$$

l'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando su tutto il volume in cui il campo elettrico è diverso da zero:

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau . \quad (4.26)$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo.

Esempio 4.13

Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2 .

Soluzione

Impostiamo il calcolo sulla (4.26) utilizzando quanto visto nell'esempio 4.4: il campo tra le armature del condensatore vale $E = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$; il volume della corteccia sferica infinitesima compresa tra il raggio r e il raggio $r + dr$ è $d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$ e pertanto

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) . \quad (4.27)$$

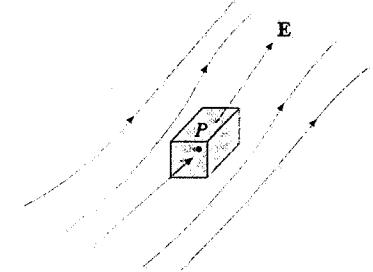


Figura 4.36

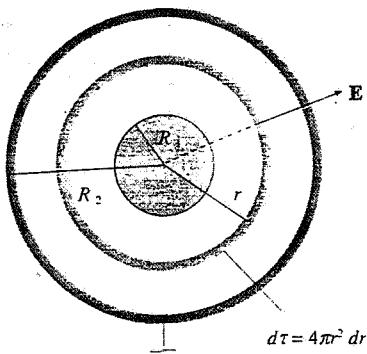


Figura 4.37

Ricordando che la capacità di un condensatore sferico è data da (4.13), vediamo che (4.27) è pari a $q^2/2C$: quindi (4.26) e (4.24) portano allo stesso risultato. L'energia così calcolata corrisponde al lavoro per creare la d.d.p. V tra i due conduttori sferici; se il conduttore esterno è a terra non ci sono altri termini. Se invece il conduttore esterno è isolato, esso ha la carica q distribuita sulla superficie sferica esterna di raggio R_3 e nello spazio circostante c'è il campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, ovvero è distribuita l'energia

$$U_e = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_3} . \quad (4.28)$$

Poiché la capacità di un conduttore sferico di raggio R_3 è $4\pi\epsilon_0 R_3$ risulta $U_e = q^2/2C$. Anche per il campo esterno verifichiamo che i due metodi di calcolo portano allo stesso risultato.

Esempio 4.14

Riprendendo i condensatori dell'esempio 4.11 calcolare l'energia elettrostatica prima e dopo il collegamento in parallelo.

Soluzione

Le energie elettrostatiche iniziale e finale sono

$$U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 , \quad U_{e, \text{fin}} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) V$$

per cui la variazione di energia vale

$$\Delta U_e = U_{e, \text{fin}} - U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 (V - V_1) + \frac{1}{2} q_2 (V - V_2) .$$

Ricorriamo all'espressione del potenziale finale trovata nell'esempio 4.11 e troviamo

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_2}{C_1 + C_2} (q_2 C_1 - q_1 C_2) .$$

Siccome

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 C_2}$$

si ha infine

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2 .$$

L'energia finale è minore di quella iniziale; evidentemente lo spostamento delle cariche richiede un lavoro e l'energia diminuisce.

A commento di (4.24) e (4.26) occorre dire che nei fenomeni statici il problema della localizzazione dell'energia non è concettualmente molto importante: noi usiamo indifferentemente le due espressioni, badando soprattutto alla semplicità del calcolo. Dove la (4.26) diventa di importanza fondamentale è nei fenomeni di

propagazione di onde elettromagnetiche, ai quali è possibile estenderla includendo anche il contributo del campo magnetico. In tali fenomeni l'espressione legata alle sorgenti perde significato ed è solo attraverso l'espressione legata ai campi che è possibile calcolare l'energia portata da un'onda (come vedremo nei capitoli successivi).

4.8 Energia di un sistema di cariche

Nel paragrafo 2.3 abbiamo discusso l'energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi arrivando alla formula (2.26) che ha l'aspetto di una somma di termini del tipo $q_i V_{ji}$: ciascuno rappresenta il lavoro necessario per portare la carica q_i dall'infinito, dove il potenziale vale zero, a distanza r_{ij} dalla carica dove il potenziale vale $V_{ji} = q_j / 4\pi \epsilon_0 r_{ij}$. Poiché la sommatoria è simmetrica negli indici, cioè conta per ogni coppia sia il lavoro per portare q_i nel campo di q_j che quello eguale per portare q_j nel campo di q_i , ci vuole il fattore 1/2.

Per una generica distribuzione di carica, lineare, superficiale o di volume, la (2.26) si scrive rispettivamente

$$U_e = \frac{1}{2} \int_s V \lambda ds , \quad U_e = \frac{1}{2} \int_\Sigma V \sigma d\Sigma , \quad U_e = \frac{1}{2} \int_v V \rho d\tau ; \quad (4.29)$$

il potenziale V è quello generato da tutte le cariche presenti, secondo (2.21) e seguenti, per cui il calcolo può essere molto complicato. Il risultato è sempre eguale a quello che si ottiene da (4.26).

Nel caso di conduttori la carica è superficiale e il potenziale è costante: l'energia elettrostatica diventa

$$U_e = \frac{1}{2} V \int_\Sigma \sigma d\Sigma = \frac{1}{2} qV$$

e, per più conduttori,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i . \quad (4.30)$$

Ad esempio in un condensatore

$$U_e = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

ed essendo $q_1 = q$ e $q_2 = -q$,

$$U_e = \frac{1}{2} q (V_1 - V_2)$$

che è la terza delle (4.24).

Osserviamo in relazione a (2.26) che il fattore 1/2 non sarebbe necessario se si facesse variare l'indice j da 1 a n e l'indice i da $j+1$ a n , se cioè si scrivesse

$$U_e = \sum_{i>j} q_i V_{ji} ; \quad (4.31)$$

in questo modo non si effettuano doppi conteggi. Se la carica è distribuita con continuità l'espressione diventa

$$U_e = \int V dq . \quad (4.32)$$

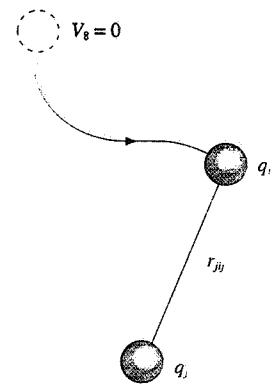


Figura 4.38

Esempio 4.15

Calcolare l'energia elettrostatica di un sistema di cinque cariche puntiformi.

Soluzione

Usiamo (4.31) scrivendo così il risultato:

$$\begin{aligned} U_e = & q_2 V_{12} \\ & + q_3 V_{13} + q_3 V_{23} \\ & + q_4 V_{14} + q_4 V_{24} + q_4 V_{34} \\ & + q_5 V_{15} + q_5 V_{25} + q_5 V_{35} + q_5 V_{45} \end{aligned}$$

Vediamo subito che la prima riga rappresenta il lavoro per portare la carica q_2 nel campo della carica q_1 , la seconda il lavoro per portare la carica q_3 nel campo di q_1 e q_2 e così via. I vari V_{ji} dipendono dalle posizioni relative delle cariche.

Il risultato è valido anche per (4.32) e quindi l'energia elettrostatica si può calcolare sommando i lavori necessari per trasportare una carica nel campo delle cariche precedentemente trasportate, lavori dati da $V dq$ con V che varia durante il processo.

Proprio questa è la logica seguita nel paragrafo 4.7 per il calcolo dell'energia elettrostatica di un condensatore o di un conduttore isolato. Nel caso particolare il calcolo è facilitato dalla relazione (4.14) che si può chiamare l'*equazione di stato del sistema*, per cui alla fine è possibile esprimere il risultato (4.24) in funzione soltanto di q o di V , oltre che della grandezza caratteristica C .

Esempio 4.16

Calcolare l'energia elettrostatica di due sfere conduttrici, con cariche q_1 e q_2 e raggi R_1 e R_2 poste a una distanza d tra i loro centri molto maggiori dei raggi.

Soluzione

Secondo (4.30)

$$U_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

Il potenziale V_1 della prima sfera è dato dalla somma del contributo della carica q_1 sulla sfera stessa e della carica q_2 sulla seconda sfera:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Analogamente

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Nello scrivere queste relazioni supponiamo che la distanza sia tale che le densità di carica siano uniformi su ciascuna superficie sferica e che l'interazione tra le sfere sia eguale a quella di due cariche puntiformi. Pertanto

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

utilizzando l'espressione della capacità di una sfera isolata.

I primi due termini, sempre positivi, danno il lavoro per caricare le due sfere; il terzo rappresenta l'*energia mutua di interazione* tra le sfere e dipende dal segno relativo delle cariche.

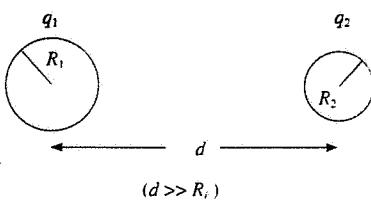


Figura 4.39

Esempio 4.17

Calcolare l'energia elettrostatica del campo di una carica q distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio R oppure in tutta la sfera. Eseguire il calcolo con $q = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$, $R = 10^{-15} \text{ m}$.

Soluzione

Il primo caso è già stato considerato alla fine dell'esempio 4.13, formula (4.28) e nell'esempio 4.16:

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

Se volessimo utilizzare questa espressione per una carica puntiforme troveremmo un risultato infinito; questo vuol dire che nell'elettromagnetismo classico il concetto di carica puntiforme è un'astrazione più che una realtà fisica.

Nel caso della distribuzione di volume, il contributo della parte esterna è sempre $q^2/8\pi \epsilon_0 R$ perché il campo è eguale nei due casi. In più c'è il contributo del campo esistente tra $r = 0$ e $r = R$, campo che vale $E = \rho r / 3\epsilon_0$ (esempio 3.2). Da (4.26)

$$\int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{5} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R},$$

per cui in totale

$$U_e = \frac{6}{5} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 R} \quad (4.33)$$

Allo stesso risultato si arriva con (4.29). L'integrale va esteso al volume della sfera, dove il potenziale vale

$$V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

secondo quanto trovato nell'esempio 3.2. Pertanto

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) \rho 4\pi r^2 dr = \frac{\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R (3R^2 - r^2) r^2 dr \\ &= \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 R} \end{aligned}$$

avendo posto

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

Infine si può effettuare un calcolo diretto di lavoro in base a (4.32). Nel caso della sfera piena supponiamo di aver già costruito una sfera di raggio $r < R$ con carica $q(r)$ e potenziale $V(r)$ in superficie dati da

$$q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

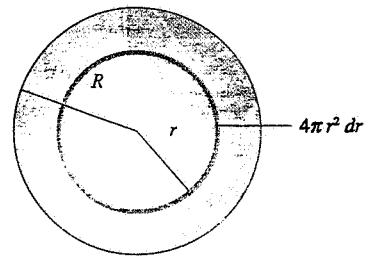


Figura 4.40

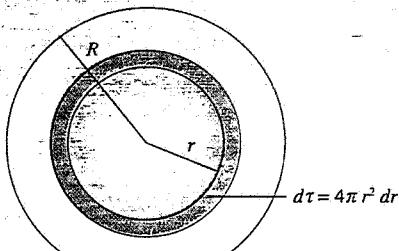


Figura 4.41

Il lavoro per portare la carica $dq = \rho d\tau = \rho 4\pi r^2 dr$ dall'infinito sulla superficie della sfera, il cui raggio passa da r a $r + dr$, è

$$dW = V dq = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$$

e integrando

$$U_e = W = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Introducendo i dati numerici, se la carica è superficiale

$$U_e = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (3.2 \cdot 10^{-18})^2}{2 \cdot 10^{-15}} = 4.61 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 288 \text{ MeV},$$

se è di volume

$$U_e = \frac{6}{5} \cdot 288 = 346 \text{ MeV}$$

Sarebbe questa l'energia elettrostatica del nucleo di un atomo contenente 20 protoni ($q = 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$) e con raggio 10^{-15} m , pensando la carica distribuita uniformemente in tutto il nucleo.

Sotto l'azione della forza elettrica repulsiva tra protoni in nucleo non potrebbe essere stabile; è la forza nucleare tra i costituenti (protoni e neutroni) che permette la stabilità.

Esempio 4.18

Date Z sfere di raggio R_0 , cariche uniformemente con densità ρ , calcolare come variano con Z il raggio e l'energia elettrostatica del sistema ottenuto dalla fusione delle sfere.

Soluzione

Detto R il raggio finale e se la densità resta la stessa, abbiamo dall'eguaglianza della carica iniziale e finale

$$Z \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \Rightarrow R = R_0 Z^{1/3}.$$

Per l'energia elettrostatica, dall'esempio 4.17 troviamo, chiamando e la carica di una sfera,

$$U_e = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 R_0} Z^{5/3}.$$

Lo stesso procedimento si potrebbe applicare a distribuzioni sferiche di massa e in effetti per i nuclei si trova sperimentalmente che il raggio varia secondo la legge

$$R = R_0 A^{1/3}$$

dove A è il numero di componenti (protoni e neutroni) e R_0 una costante che vale $1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

Esempio 4.19

Calcolare il raggio dell'elettrone nell'ipotesi che la sua energia a riposo mc^2 sia di origine esclusivamente elettrostatica.

Soluzione

Eguagliamo (4.33) a mc^2 dove m è la massa dell'elettrone (tabella 1.1 paragrafo 1.3):

$$\frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r} = mc^2 \Rightarrow r = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} = 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m} .$$

In fisica atomica compare spesso la costante

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 m c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

detta *raggio classico dell'elettrone*. Essa però non indica le dimensioni reali dell'elettrone che in qualsiasi esperimento finora condotto appare puntiforme (dimensioni minori di 10^{-17} m). L'egualanza proposta non è quindi significativa.

Se si ripete lo stesso calcolo per il protone, la cui massa è data nella medesima tabella 1.1, si trova

$$r_p = \left(\frac{m_e}{m_p} \right) r = 1.6 \cdot 10^{-18} \text{ m} ,$$

in contrasto con i dati sperimentali che danno $r_p \approx 10^{-15}$ m.

Le dimensioni finite del protone pongono il problema della sua struttura interna. L'ipotesi che meglio corrisponde ai risultati di numerosissimi esperimenti è che il protone sia composto da tre particelle dette *quark*, due con carica $2/3e$ e una con carica $-1/3e$ (carica risultante e), le quali sono legate tra loro dall'*interazione forte* e hanno la peculiarità di esistere solo confinate all'interno del protone. Infatti non è mai stato possibile osservare quark liberi; tuttavia le prove indirette della loro esistenza sono molto convincenti. Anche il neutrone è composto di tre quark, due con carica $-1/3e$ e una con carica $2/3e$ (carica risultante zero). Le forze che agiscono tra i nucleoni, come sono chiamati il protone e il neutrone, e che tengono insieme il nucleo atomico, sono la manifestazione all'esterno dei nucleoni delle interazioni tra i quark.

Il protone è formato
da tre quark

Anche il neutrone è formato
da tre quark

Figura 4.42

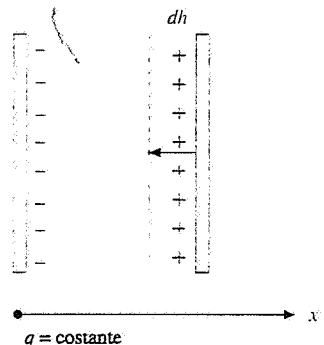


Figura 4.43

4.9 Forza tra le armature di un condensatore.

Pressione elettrostatica

L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area Σ distanti h è

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h .$$

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza F attrattiva che, per ragioni di simmetria, è parallela al campo, cioè ortogonale alle armature.

Supponiamo, con riferimento alla figura 4.43, di mantenere fissa l'armatura negativa e di lasciare avvicinare, sotto l'azione della forza, l'armatura positiva di una quantità dh (negativa).

La carica sulle armature resta costante, la capacità C aumenta perché la distanza tra le armature diminuisce e quindi la d.d.p. diminuisce (ovvero: il campo $E = \sigma/\epsilon_0$ rimane lo stesso, $V = E h$ diminuisce con h). L'energia diminuisce della quantità

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\tau$$

e viene fornito dalle forze del campo il lavoro

$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh$$

positivo perché la forza è concorde allo spostamento.

Pertanto l'espressione della forza agente sull'armatura è

$$F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma \quad (4.34)$$

Alla stessa espressione si sarebbe giunti ragionando sullo spostamento (concorde all'asse x) dell'armatura negativa.

Più in generale (4.34) si ottiene dalla relazione esistente tra forza e energia potenziale per un campo conservativo:

$$\mathbf{F} = -\nabla U_e \Rightarrow F = -\frac{dU_e}{dh} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

Invece che a carica costante il processo di spostamento dell'armatura può avvenire a potenziale costante: si connettono le armature ai poli di un generatore di tensione che è un dispositivo in grado di mantenere costante la d.d.p. tra due conduttori ad esso collegati. Di conseguenza, quando l'armatura positiva si sposta di dh avvicinandosi all'altra armatura, V resta costante, C aumenta e quindi q deve aumentare: il processo comporta ora uno spostamento di carica da un'armatura all'altra, con spesa di lavoro; se aumenta q aumenta σ e pertanto il campo $E = \sigma/\epsilon_0$ (come si ricava anche da $E = V/h$).

La variazione di energia elettrostatica è

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2} CV^2\right) = \frac{V^2}{2} dC$$

e poiché

$$dC = d\left(\frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}\right) = -\frac{\epsilon_0 \Sigma}{h^2} dh$$

è positiva essendo dh negativo, l'energia elettrostatica aumenta di

$$dU_e = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma dh = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\tau$$

Visto che l'energia aumenta e che è necessario del lavoro positivo per spostare l'armatura, evidentemente c'è un intervento dall'esterno: in effetti ora il sistema non è isolato, ma collegato al generatore che mantiene costante la d.d.p.

Il lavoro per lo spostamento della carica $dq = V dC$ è

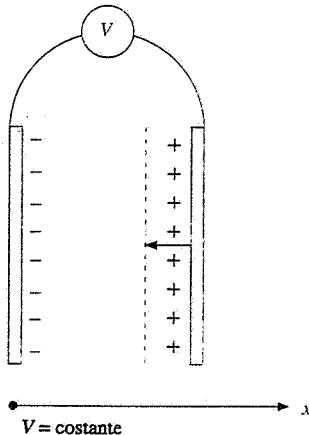


Figura 4.44

$$dW = V dq = V^2 dC = -dU_{\text{gen}}$$

ed è fornito a spese dell'energia interna del generatore U_{gen} che diminuisce. L'energia totale del sistema, somma dell'energia elettrostatica e dell'energia interna del generatore, varia quindi in corrispondenza dello spostamento dh di

$$dU = dU_e + dU_{\text{gen}} = \frac{V^2}{2} dC - V^2 dC = -\frac{V^2}{2} dC = -dU_e .$$

In definitiva il bilancio energetico è il seguente: l'energia interna del generatore diminuisce, la metà dell'energia così resasi disponibile la ritroviamo sotto forma di energia elettrostatica, l'altra metà deve corrispondere al lavoro per avvicinare le armature e concludiamo che

$$dW = \frac{V^2}{2} dC = dU_e = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma dh .$$

a cui corrisponde la forza attrattiva

$$F = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma . \quad (4.35)$$

Sia a carica costante che a potenziale costante la forza ha la stessa espressione: essa dipende dal quadrato della densità di carica e dall'area. Esprimendo σ in funzione del campo E abbiamo in modulo

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma \quad (4.36)$$

e la forza per unità di superficie risulta

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 , \quad (4.37) \quad \text{Pressione elettrostatica}$$

detta *pressione elettrostatica*. In questa espressione non compaiono elementi caratteristici del sistema e possiamo assumere pertanto che essa sia valida in generale, qualsiasi sia la distribuzione di carica superficiale e la forma delle armature.

La (4.37) può essere anche dimostrata considerando un elemento di carica $dq = \sigma d\Sigma$ sulla superficie di un conduttore di forma qualunque e determinando qual è la forza che agisce su di esso. Il campo elettrico nelle immediate vicinanze di dq all'esterno del conduttore vale

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

secondo il teorema di Coulomb (4.1); invece all'interno il campo è nullo. D'altra parte lo strato di carica dq sulla superficie $d\Sigma$ genera nei punti immediatamente vicini il campo elettrico:

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n \quad \text{all'esterno}$$

$$-\mathbf{E}' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n \quad \text{all'interno} .$$

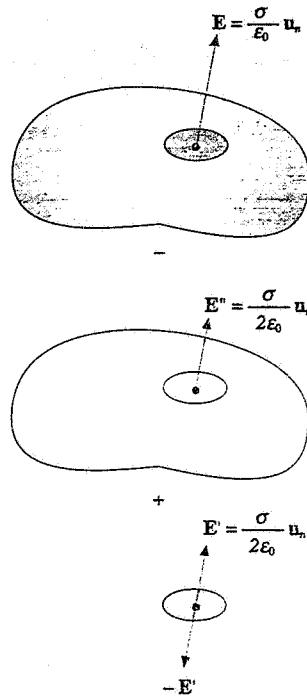


Figura 4.45

Allora evidentemente *tutte le altre cariche* del conduttore generano nella zona in cui si trova la carica q il campo elettrico

$$\mathbf{E}'' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

il quale sommandosi a \mathbf{E}' e a $-\mathbf{E}'$ dà la situazione nota.

Si osservi che con questa elementare applicazione del principio di sovrapposizione abbiamo risolto un problema apparentemente difficile. Data una distribuzione di carica leviamo una piccola aerea su cui c'è la carica $dq = \sigma d\Sigma$ e lasciamo il resto imperturbato: quanto vale il campo nel foro? La risposta è

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n$$

La carica dq è dunque sottoposta al campo \mathbf{E}'' e subisce la forza

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}'' = \sigma d\Sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_n = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\Sigma \mathbf{u}_n .$$

diretta sempre verso l'esterno qualunque sia il segno della carica. A questa forza corrisponde la pressione

$$p = \frac{dF}{d\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

che tende a dilatare la distribuzione di carica.

Da (4.37) notiamo che *la pressione elettrostatica coincide con la densità di energia elettrostatica sulla superficie del conduttore*. Non è la prima volta che incontriamo questo legame tra pressione e densità di energia. Nel teorema di Bernoulli la densità di energia cinetica e di energia potenziale hanno il significato di pressione dovuta alla velocità del fluido e alla forza di gravità.

Dimensionalmente l'eguaglianza è evidente:

$$p = \frac{N}{m^2} = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{J}{m^3} .$$

Concludiamo osservando che spesso, anche per sistemi non complessi, il calcolo delle forze appare in generale più semplice se affrontato partendo dall'energia elettrostatica del sistema. Il calcolo diretto sulla base della legge di Coulomb richiede, anche nei casi più banali, calcoli laboriosi. Nota l'energia elettrostatica la componente della forza nella direzione x si ottiene derivando l'energia elettrostatica rispetto a x . Bisogna avere l'avvertenza di verificare se il processo si svolge a carica costante o a potenziale costante. Nei due casi

$$q = \text{cost} \quad F_x = -\frac{\partial U_e}{\partial x} , \quad (4.38)$$

$$V = \text{cost} \quad F_x = \frac{\partial U_e}{\partial x} ; \quad (4.39)$$

il cambiamento di segno è dovuto al fatto che nel secondo caso agisce anche il generatore, come discusso in precedenza.

Esempio 4.20

Nell'elettrometro a bilancia di Thomson l'aerea delle armature, costituite da due piastre circolari parallele, è $\Sigma = 400 \text{ cm}^2$ e la loro distanza è $h = 5 \text{ mm}$. Connettendo le piastre a un generatore che fornisce la d.d.p. V , per rimettere la bilancia in equilibrio occorre aggiungere una massa $m = 20 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ sul piatto della bilancia. Calcolare V .

Soluzione

La bilancia è in equilibrio prima del collegamento. Dopo, la forza di attrazione tra le piastre è data da

$$F = p\Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 \Sigma \frac{V^2}{h^2}$$

che, per l'equilibrio, deve essere eguale a mg :

$$m = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{2gh^2} V^2 \quad \text{ovvero} \quad V = \sqrt{\frac{2mg h^2}{\epsilon_0 \Sigma}} = 166.4 \text{ V}$$

La grandezza che si misura, m , dipende dal quadrato della grandezza che si vuole determinare, V , e per questo si dice che lo strumento ha una *scala quadratica*. La *sensibilità*

$$\frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{gh^2}{\epsilon_0 \Sigma V},$$

cioè la variazione di V che corrisponde alla più piccola variazione di m misurabile, è inversamente proporzionale a V ; l'errore relativo è

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{gh^2}{\epsilon_0 \Sigma} \frac{\Delta m}{V^2}$$

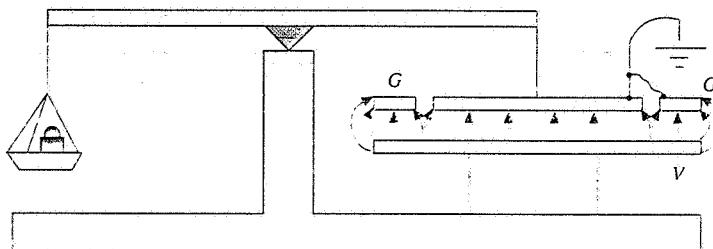


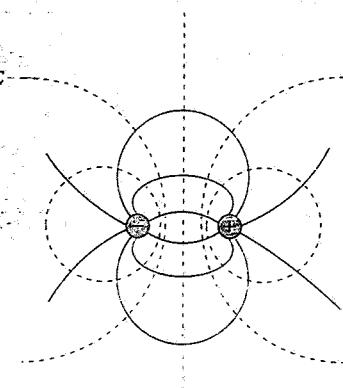
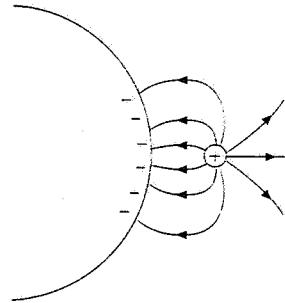
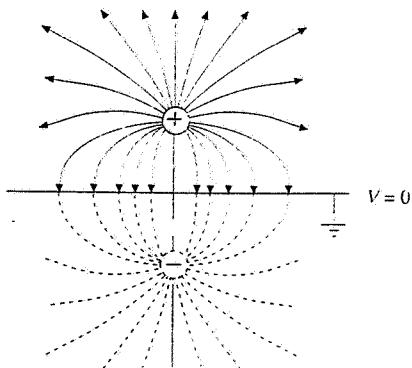
Figura 4.46

Inserendo i dati numerici e supponendo $\Delta m = 10^{-5} \text{ g} = 10^{-8} \text{ kg}$,

$$\frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{6.92 \cdot 10^8}{V} \frac{V}{\text{kg}}, \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{692}{V^2}$$

Con $V = 100 \text{ V}$ $\Delta V/V = 6.92\%$, con $V = 200 \text{ V}$ $\Delta V/V = 1.73\%$;

Lo strumento è poco sensibile e impreciso se adoperato per misurare piccole d.d.p., ma le sue prestazioni migliorano al crescere di V . La sua importanza risiede nel fatto che si tratta di uno *strumento assoluto*: esso riferisce una grandezza elettrica non ad altre grandezze elettriche, bensì a grandezze meccaniche (purché sia definita ϵ_0).

 **Σ** **Figura 4.47****Figura 4.48**

4.10 Il metodo delle cariche immagini

Supponiamo di avere n cariche puntiformi e di tracciare una superficie equipotenziale Σ che separi idealmente m cariche dalle altre $n-m$. Nei punti di Σ le linee del campo E sono ortogonali alla superficie stessa. Se al posto di una parte di Σ mettiamo un foglio conduttore mantenuto al potenziale caratteristico di Σ nulla cambia per quanto riguarda la distribuzione spaziale del potenziale e del campo elettrostatico. Estendendo abbastanza la superficie conduttrice, sempre seguendo Σ si può far sì che tutte le linee di campo che escono dalle m cariche e non si chiudono su qualcuna di esse terminino su questa superficie. Abbiamo così realizzato uno schermo elettrostatico: dentro ci sono m cariche che inducono sulla faccia interna dello schermo una carica eguale ed opposta; sulla faccia esterna appare, opportunamente distribuita, la carica totale delle m cariche interne. Se queste vanno a toccare la faccia interna si neutralizzano con la carica indotta senza che nulla accada all'esterno.

Alla fine abbiamo la situazione nuova in cui $n-m$ cariche sono poste vicino a un conduttore delimitato dalla superficie Σ su cui è distribuita una carica indotta e la situazione elettrostatica al di fuori di Σ è equivalente a quella delle n cariche originarie.

Quindi il problema di calcolare campo e potenziale elettrostatici di un sistema di cariche posto nelle vicinanze di un conduttore mantenuto a un determinato potenziale, nonché la densità di carica indotta sulla superficie del conduttore, è ricondotto alla ricerca di un altro sistema di cariche, poste al di là della superficie del conduttore, che insieme a quelle reali abbiano tale superficie come superficie equipotenziale al valore corretto. Le cariche fittizie così introdotte si chiamano *cariche immagini*.

Vediamo negli esempi alcuni casi di applicazione del metodo; dalla figura 4.47 si intuisce che per una carica posta di fronte a un piano o a una sfera conduttrice il problema si risolve con una sola carica immagine.

Esempio 4.21

Una carica puntiforme positiva q è posta di fronte a una lastra conduttrice indefinita a potenziale zero, da cui dista x . Calcolare la densità di carica indotta sul conduttore e la forza con cui la carica è attirata dal conduttore.

Soluzione

La carica $+q$ induce una carica $-q$ sulla lastra conduttrice (l'induzione è completa), distribuita con densità superficiale σ in modo tale che la carica q e la carica indotta diano in ogni punto della superficie un valore nullo del potenziale.

Il potenziale dovuto alla carica q in un punto del piano distante r da q è

$$V_q = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

e la carica indotta deve generare in quel punto il potenziale

$$V_i = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} ,$$

eguale e contrario. Una situazione di questo genere si può realizzare, in ogni punto del piano, ponendo una *carica immagine* $-q$ in posizione simmetrica a quella della carica q rispetto al piano.

Il problema è ricondotto in tal modo a due cariche puntiformi uguali e contrarie distanti $2x$. Il piano mediano è equipotenziale a potenziale zero, il campo in ogni punto del piano è normale al piano, diretto verso l'esterno e vale

$$E(v) = -2 \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos\theta = -\frac{2qx}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

La densità di carica indotta negativa è data dal teorema di Coulomb (4.1):

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{qx}{2\pi (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Essa è massima in corrispondenza della congiungente le due cariche ($y = 0$) e decresce radialmente, tendendo rapidamente a zero. C'è ovviamente simmetria circolare rispetto al centro.

Verifichiamo che la carica indotta è $-q$:

$$\begin{aligned} \int \sigma d\Sigma &= -\frac{q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} 2\pi y dy = -\frac{qx}{2} \int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-3/2} d(y^2) = \\ &= qx [(x^2 + y^2)^{-1/2}]_0^\infty = -q \end{aligned}$$

Calcoliamo infine la forza totale esercitata dal piano carico su q . Suddividiamo la carica indotta in corone circolari infinitesime di carica dq distribuita con densità σ sull'area $2\pi y dy$ (stesso procedimento seguito per l'integrazione appena eseguita). Ciascuna dà in P il campo dE equivalente a quello di un anello di raggio y e densità di carica $\lambda = \sigma d\Sigma / 2\pi y = \sigma dy$; da (1.30) e dall'espressione di σ

$$dE = -\frac{qx^2 y dy}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2)^3} = -\frac{qx^2}{8\pi \epsilon_0} (x^2 + y^2)^{-3} d(y^2),$$

per cui il campo elettrico che agisce su q è, in modulo,

$$E = \frac{qx^2}{8\pi \epsilon_0} \int_0^\infty (x^2 + y^2)^{-3} d(y^2) = \frac{q}{16\pi \epsilon_0 x^2},$$

e la forza subita da q vale

$$F = qE = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 (2x)^2},$$

coincidente con la forza dovuta alla carica immagine posta a distanza $2x$ da q . La soluzione trovata è pertanto consistente: *al sistema piano conduttore - carica induttrice si è sostituito l'insieme di due cariche puntiformi, assai più facile da trattare.*

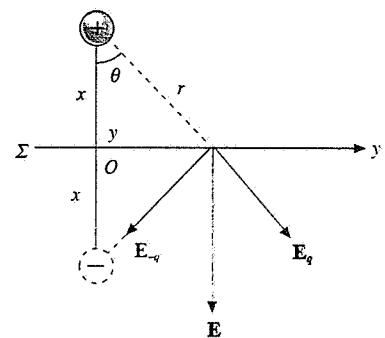


Figura 4.49

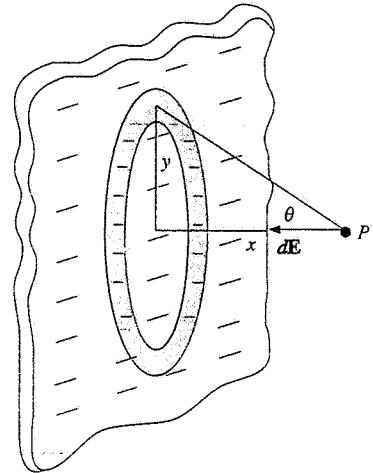


Figura 4.50

Esempio 4.22

Una carica puntiforme q è posta a distanza d dal centro di una sfera conduttrice scarica e mantenuta a potenziale zero. La distanza d è maggiore del raggio R della sfera. Calcolare la densità di carica indotta sulla sfera.

Soluzione

Per risolvere il problema cerchiamo un sistema di due cariche q e q_i che abbia la superficie di raggio R come superficie equipotenziale a $V = 0$. Prendiamo l'asse x con origine nel centro della sfera e passante per la carica q e poniamo la carica q_i sull'asse x a distanza dal centro della sfera compresa tra zero e R ; supponiamo inoltre che sia $q_i = -y q$.

Il potenziale di queste due cariche in un punto P della superficie sferica è $V(P) = V_q + V_{q_i} = 0$ per cui

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{q}{(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta)^{1/2}} - \frac{y q}{(x^2 + R^2 - 2Rx \cos \theta)^{1/2}} \right] = 0$$

da cui segue l'eguaglianza

$$y^2 (d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta) = x^2 + R^2 - 2Rx \cos \theta$$

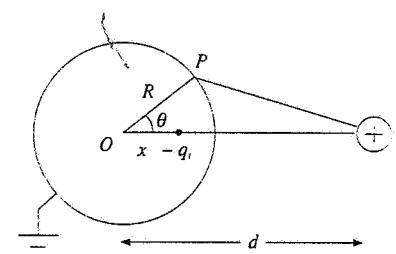


Figura 4.51

che deve essere verificata per ogni valore di θ . Allora in base al principio di identità dei polinomi, deve essere

$$y^2 (d^2 + R^2) = x^2 + R^2 \quad , \quad -2R d y^2 = -2R x \quad \Rightarrow \quad y^2 d = x$$

Sostituita la seconda nella prima si ottiene un'equazione di secondo grado che ammette le soluzioni $x_1 = d$, $x_2 = R^2/d$ e, in corrispondenza, $y_1 = 1$, $y_2 = R/d$. La prima soluzione è banale in quanto pone $q_i = q$ e coincidente spazialmente con q , così che il potenziale è nullo in tutto lo spazio. La seconda soluzione dice che la carica immagine vale

$$q_i = -y_2 q = -\frac{R}{d} q$$

ed è posta a distanza

$$x_i = x_2 = \frac{R^2}{d}$$

dal centro della sfera, ovvero a distanza $d - x_2 = (d^2 - R^2)/d$ dalla carica q . Si verifica che tale posizione è la proiezione sull'asse x del punto T , individuato da una retta tangente alla sfera passante per q .

La soluzione trovata può essere vista in modo diverso, cioè come la dimostrazione che date due cariche q_1 e q_2 di segno opposto esiste sempre una superficie equipotenziale sferica con $V = 0$. Le formule ricavate permettono facilmente di determinarne il raggio e la posizione noti i valori delle cariche e la loro distanza.

Le due cariche q e q_i generano nello spazio il potenziale

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(d^2 + r^2 - 2r d \cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{d} \frac{1}{\left(\frac{R^4}{d^2} + r^2 - 2r \frac{R}{d} \cos\theta\right)^{1/2}} \right] ,$$

in un riferimento polare con origine nel centro della sfera. Il campo elettrico sulla superficie $r = R$, evidentemente radiale, è dato da

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} \mathbf{u}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{d^2 - R^2}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} \mathbf{u}_r ,$$

diretto verso l'interno se q è positiva, verso l'esterno se è negativa. La densità superficiale di carica sulla sfera è

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{q}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} ,$$

ovunque di segno opposto a q : le cariche indotte dello stesso segno di q sfuggono verso la terra attraverso il filo di collegamento. Questa distribuzione non uniforme di carica produce all'interno della sfera un campo diverso da zero che cancella il campo prodotto da q , cioè un campo radiale con centro in q e opposto a quello di q . Si noti che non si tratta del campo prodotto da q : ma sappiamo che il sistema $q - q_i$ dà la situazione corretta all'esterno della sfera. Osserviamo infine che in questo caso l'*induzione non è completa* e quindi l'integrale di σ sulla superficie non è eguale a $-q$. È abbastanza facile verificare che

$$\int \sigma d\Sigma = -\frac{q(d^2 - R^2)}{4\pi R} \int \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{(d^2 + R^2 - 2R d \cos\theta)^{3/2}} = -\frac{R}{d} q = q_i ,$$

come dovevamo attenderci sulla base delle considerazioni generali fatte all'inizio del paragrafo.

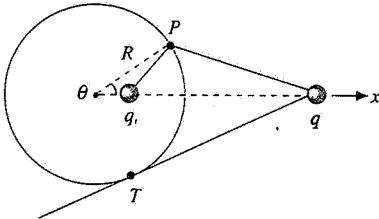


Figura 4.52

Esempio 4.23

Dimostrare che, posto un dipolo di momento \mathbf{p} in un campo uniforme \mathbf{E}_0 , con \mathbf{p} parallelo e concorde a \mathbf{E}_0 , nel campo risultante esiste una superficie equipotenziale sferica con centro nel dipolo e calcolare il raggio di tale superficie e il potenziale che le compete. Applicare il risultato al caso di una sfera conduttrice scarica posta in un campo uniforme.

Soluzione

Prendiamo un asse z con origine nel centro del dipolo e orientato come \mathbf{p} e \mathbf{E}_0 . Il potenziale dovuto alla distribuzione di cariche che generano il campo uniforme è dato da (2.30), dove la costante è pari al valore V_0 nell'origine, il contributo del dipolo è (2.59). In un generico punto P

$$V(P) = V_0 - E_0 z + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = V_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Se esiste una superficie sferica equipotenziale di raggio R centrata sul dipolo, nei suoi punti deve essere $V(P) = \text{costante}$ qualsiasi sia il valore di θ :

$$V_0 - \cos \theta \left(E_0 R - \frac{p}{4\pi \epsilon_0 R^2} \right) = \text{costante}$$

La condizione è soddisfatta se $R^3 = p / 4\pi \epsilon_0 E_0$ e il valore della costante è proprio V_0 . Pertanto nel campo elettrico risultante dalla somma di un campo uniforme \mathbf{E}_0 e di un campo di dipolo, con \mathbf{p} concorde a \mathbf{E}_0 , esiste una superficie sferica di raggio

$$R = \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$$

equipotenziale con valore V_0 uguale al potenziale del campo uniforme nella posizione in cui si trova il dipolo.

Il campo elettrostatico nei punti della superficie equipotenziale è radiale ed è dato dalla somma delle componenti radiali del campo di dipolo (2.60) e del campo uniforme:

$$\mathbf{E}(P) = \left(\frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 R^3} + E_0 \cos \theta \right) \mathbf{u}_r = 3E_0 \cos \theta \mathbf{u}_r$$

Quando mettiamo una sfera conduttrice scarica in un campo uniforme, la sua superficie deve essere equipotenziale; ma allora la situazione elettrostatica all'esterno della sfera si può calcolare supponendo di porre nel centro della sfera un *dipolo immagine* il cui momento è determinato dal raggio della sfera e dal valore del campo uniforme:

$$p = 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera è dato dalla sovrapposizione di \mathbf{E}_0 e del campo elettrico del dipolo di momento \mathbf{p} ; la perturbazione dovuta alla presenza della sfera è massima sulla superficie della sfera, dove il campo è radiale, ma decresce rapidamente come $1/r^2$.

Il potenziale assunto dalla sfera è quello che ci sarebbe nel centro in assenza della sfera e la densità di carica indotta (che perturba il campo \mathbf{E}_0) è data da

$$\sigma = \epsilon_0 E = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad : \quad (4.40)$$

essa è positiva nell'emisfero anteriore ($0 \leq \theta < \pi/2$) con massimo $3\epsilon_0 E_0$ per $\theta = 0$, si annulla per $\theta = \pi/2$, è negativa nell'emisfero posteriore ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) con minimo $-3\epsilon_0 E_0$ per $\theta = \pi$. Resta così giustificato quanto avevamo qualitativamente detto nel paragrafo 4.1.

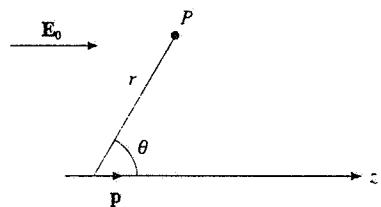


Figura 4.53

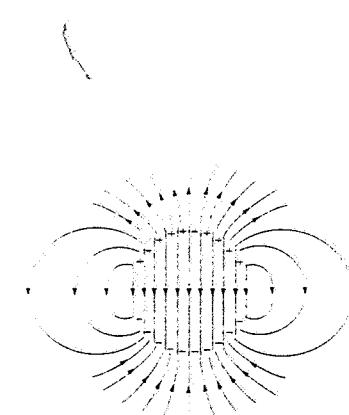


Figura 4.54

Questa distribuzione superficiale deve dare all'interno della sfera un campo elettrico ovunque opposto a \mathbf{E}_0 : abbiamo così trovato il risultato interessante che una carica distribuita su una superficie sferica con densità che varia come $\cos\theta$ produce all'interno un campo uniforme di valore

$$E_0 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \quad (4.41)$$

che va dall'emisfero dove $\cos\theta > 0$ all'emisfero dove $\cos\theta < 0$; all'esterno essa produce un campo di dipolo.

Esempio 4.24

Una sfera conduttrice di raggio R è posta a distanza $r \gg R$ da una carica puntiforme q . Calcolare la forza che agisce sulla sfera.

Soluzione

Il campo della carica q non è uniforme, però agli effetti dell'induzione sulla sfera possiamo supporlo tale se la distanza è grande. Utilizzando i risultati dell'esempio 4.23, abbiamo un dipolo di momento

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qR^3}{r^2}$$

dipendente dalla posizione. Esso, posto nel campo della carica, ha l'energia elettrostatica (2.67):

$$U_e = -pE = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{q^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

Calcoliamo la forza come derivata dell'energia secondo (4.38):

$$F = -\frac{dU_e}{dr} = -\frac{q^2 R^3}{\pi\epsilon_0 r^5}$$

Tale forza, che decresce molto rapidamente con la distanza, è sempre attrattiva: le cariche indotte di segno opposto a q sono più vicine alla carica di quelle indotte dello stesso segno.

Se il campo è veramente uniforme p non dipende dalla posizione, U_e è costante e la forza è nulla.

4.11 Funzioni armoniche. Problema di Dirichlet

Nel paragrafo 3.5 abbiamo visto che l'equazione di Laplace (3.28) riassume tutte le proprietà del campo elettostatico nello spazio privo di cariche, cioè $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Noi ci siamo serviti di queste ultime, e della definizione $\mathbf{E} = 0$ all'interno, per stabilire le proprietà dei conduttori in equilibrio. Vogliamo adesso brevemente accennare a come si imposta il problema partendo dall'equazione di Laplace; essendo questo argomento tipico della fisica matematica, ci limitiamo ai concetti generali.

Le soluzioni di (3.28) che sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e hanno derivate seconde finite si dicono *funzioni armoniche*. Si può dimostrare formalmente l'esistenza di tali soluzioni, ma ciò non è per noi molto importante perché siamo sicuri a priori, per via sperimentale, che c'è almeno una soluzione nei problemi di elettrostatica. Ben più interessante è il *teorema di unicità* della soluzione: una funzione armonica V definita in una certa regione finita è univocamente determinata in tale regione se si assegnano i suoi valori sulla superficie chiusa Σ che delimita la regione. Il teorema resta valido se la regione si estende all'infinito: in questo caso, dati i valori di V su una o più superficie chiuse

se Σ , V è univocamente determinato in tutto lo spazio esterno a Σ , purché abbia un certo comportamento asintotico. Precisamente, considerato un qualsiasi punto O del dominio e un punto P distante r da O , quando P tende a distanza infinita da O $V(r)$ deve andare a zero almeno come $1/r$ e $\partial V/\partial r$ almeno come $1/r^2$.

Altra proprietà importante della funzione armonica V è che se essa ha un valore costante su una superficie chiusa Σ , essa ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio interno a Σ .

Il problema della determinazione di V una volta che siano noti i suoi valori al contorno si chiama *problema di Dirichlet*. Vediamo che la soluzione di un qualsiasi problema di elettrostatica con conduttori consiste nella soluzione di un problema di Dirichlet; purtroppo pur essendo garantita l'esistenza e l'unicità della soluzione, non esiste un metodo generale di ricerca della soluzione, come avviene per altre classi di equazioni differenziali.

Assumendo di poter arrivare alla soluzione, che in molti casi si ottiene per via analitica e che si può sempre avere con metodi numerici, analizziamo qualche caso che già conosciamo.

Dato un conduttore qualsiasi carico isolato, il potenziale V in tutto lo spazio è univocamente determinato se è dato quello V_0 del conduttore. Questo è vero purché il conduttore abbia dimensioni finite, altrimenti V non può soddisfare alle condizioni di comportamento asintotico e nascono problemi di divergenze, come abbiamo visto per fili, cilindri e piani indefiniti. Noto V , è noto ovunque il campo elettrostatico $-\nabla V$, in particolare nelle immediate vicinanze del conduttore e quindi col teorema di Coulomb (4.1) si calcola la densità di carica sul conduttore; da questa per integrazione si ottiene la carica q_0 sul conduttore e dividendo per V_0 la sua capacità. Risolto così il problema e trovata la relazione $q_0 = CV_0$, sappiamo che per qualsiasi altro valore noto di carica q messa sul conduttore o per qualsiasi altro valore noto del potenziale del conduttore il legame sarà sempre $q = CV$.

Il problema immediatamente successivo è quello di più conduttori carichi, che quindi si influenzano tra loro, di cui siano noti i potenziali oppure le cariche. La soluzione permette di calcolare ovunque il campo $-\nabla V$, quindi di determinare le densità di carica sui conduttori e per integrazione le loro cariche e porta alle relazioni (4.7) e (4.9) per i potenziali e le cariche dei conduttori.

Ancora, dal fatto che se V è costante su una superficie chiusa, essa è costante anche all'interno, si derivano le proprietà di schermo elettrostatico in un conduttore cavo.

Concludiamo con due precisazioni: noi sappiamo che il campo E vicino alla superficie di un conduttore è determinato dal valore locale della densità di carica e viceversa; il termine locale non deve però trarre in inganno, facendo pensare ad esempio che le altre cariche presenti non abbiano influenza, in quanto il valore locale di σ è determinato dalla soluzione del problema di Dirichlet, che dipende da tutte le cariche presenti. La stessa osservazione vale evidentemente per la pressione elettrostatica (4.37).

L'altra precisazione riguarda il potenziale di un conduttore: quando parliamo di conduttore isolato il suo potenziale non è noto a priori e dipende dalla carica che è stata depositata sul conduttore e dalle altre cariche. È però possibile fissare il potenziale di un conduttore collegandolo a un generatore di tensione che lo mantiene a una d.d.p. costante rispetto alla terra; in questo caso è la carica del conduttore che varia a seconda della situazione elettrostatica circostante.

Problema di Dirichlet

Esempio 4.25

Verificare che la funzione $V(x,y) = h(x^2 - y^2)$ è una funzione armonica e determinare il campo elettrostatico e l'andamento delle linee di campo. Discutere la forza che questo campo esercita su una carica puntiforme.

Soluzione

Calcoliamo le derivate della funzione V :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2hx \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2h \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -2hy \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2h$$

e quindi l'equazione di Laplace (3.28) è soddisfatta. Il campo è il gradiente del potenziale per cui

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2hx \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2hy \quad , \quad \mathbf{E} = -2h(x\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y)$$

Il modulo è $E = 2h \sqrt{x^2 + y^2} = 2hr$, la direzione rispetto all'asse x è tale che $\tan \theta = E_y/E_x = -y/x$. Il problema è piano, le superficie equipotenziali sono linee equipotenziali di equazione

$$h(x^2 - y^2) = \text{costante}$$

iperboli equilatere che hanno come asintoti gli assi a 45° rispetto agli assi coordinati. Per trovare l'equazione delle linee di campo ricorriamo a (1.36) nel caso piano:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

La soluzione di questa equazione differenziale è

$$\ln x = -\ln y + \text{costante} \quad \text{ovvero} \quad xy = \text{costante}$$

Le linee di campo \mathbf{E} sono iperboli equilatere, ortogonali alle precedenti, che hanno come asintoti gli assi coordinati. La forza su una carica q è

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -2hqx\mathbf{u}_x + 2hy\mathbf{u}_y$$

e risulta che la componente x è attrattiva e quella y repulsiva, se la carica è positiva. Una tale particella in moto lungo l'asse z ortogonale al disegno non risente di nessuna forza perché sull'asse z il campo elettrico è nullo; se invece si muove lungo un asse parallelo all'asse z , essa risente di una forza che la avvicina all'asse z nel piano orizzontale, ma la allontana nel piano verticale. L'opposto succede per una carica negativa.

Un *quadrupolo eletrostatico* è un sistema di quattro conduttori con sagoma iperbolica che producono il campo descritto. Mettendo in serie un secondo quadrupolo ruotato di 90° rispetto all'asse z , una particella carica viene dal primo quadrupolo deflessa verso l'asse z in un piano e allontanata nell'altro, dal secondo quadrupolo subisce l'effetto opposto. Si dimostra che l'*effetto* complessivo è sempre di avvicinare le particelle all'asse z , cioè è *focalizzante* e per questo una *coppia di quadrupoli* siffatta viene chiamata anche *lente eletrostatica* (convergente).

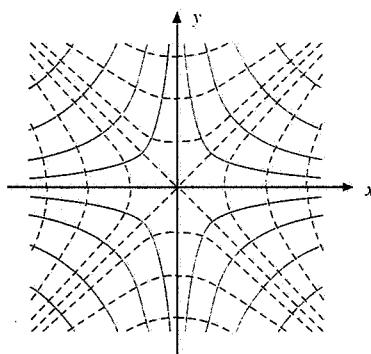


Figura 4.55

Dielettrici



5.1 La costante dielettrica

L'interazione tra cariche elettriche fisse è stata studiata nei capitoli precedenti supponendo che lo spazio tra le cariche fosse vuoto. Successivamente sono state descritte le proprietà dei conduttori in equilibrio: esse possono essere riassunte dicendo che la carica di un conduttore si distribuisce sempre sulla sua superficie in modo tale che il campo generato da essa e da altre cariche eventualmente presenti sia nullo all'interno del conduttore. Questo è dunque equipotenziale e il valore del potenziale dipende dalla distribuzione di tutte le cariche presenti (paragrafo 4.4). La carica di un conduttore può essere facilmente cambiata, dando origine a una nuova situazione elettrostatica, sfruttando il fatto che è molto semplice cedergli o sottrargli carica attraverso il contatto con altri corpi carichi o il collegamento con generatori.

Vogliamo adesso studiare come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un *materiale isolante* e quali fenomeni avvengono all'interno di un materiale isolante sottoposto ad un campo \mathbf{E} .

Cominciamo con l'esaminare una situazione semplice, un condensatore piano carico e isolato, in modo che la carica sulle armature resti costante. Se q_0 è il valore della carica, distribuita con densità uniforme σ_0 , tra le armature c'è un campo elettrico E_0 e una d.d.p. V_0 dati da

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h ;$$

C_0 è la capacità e h la distanza tra le armature.

Introduciamo parallelamente alle armature e senza toccarle una lastra conduttrice di spessore $s < h$: si osserva che la d.d.p. tra le armature diminuisce (come è messo in evidenza ad esempio dalla diminuzione dell'angolo tra le foglie di un elettroskopio connesso in parallelo al condensatore). Infatti sulle facce della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, due distribuzioni di densità σ_0 con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra: all'esterno invece il campo resta invariato e pertanto

$$V = E_0 (h - s) < V_0 .$$

indipendentemente dalla posizione della lastra. La presenza della carica indotta sulle facce della lastra può essere messa in evidenza toccando una faccia con una sferetta conduttrice sostenuta da un manico isolante e portando la sferetta a contat-

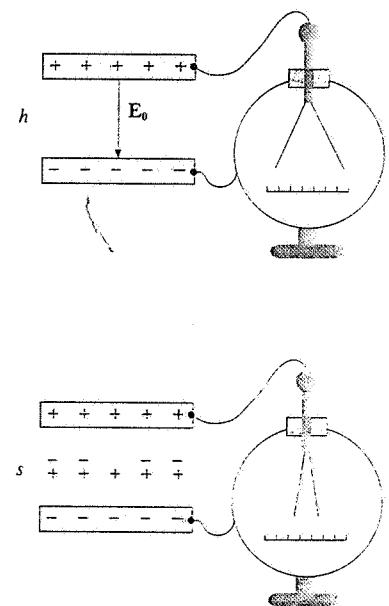


Figura 5.1

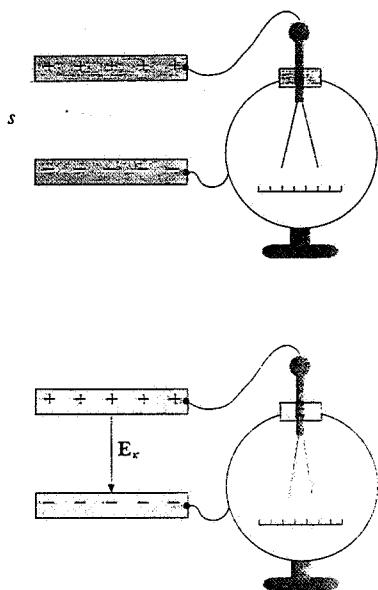


Figura 5.2

Costante dielettrica relativa

to con un elettroscopio; in tal modo si può anche verificare che sulle due facce le cariche hanno segno opposto.

Ripetiamo l'esperimento con una lastra di materiale isolante, definito nel paragrafo 1.1 come un materiale in cui la carica prodotta localmente per strofinio non è libera di muoversi. La d.d.p. tra le armature diminuisce e l'effetto, a parità di spessore s , è minore di quello rilevato con la lastra di conduttore. Un esame dello stato di carica delle facce dell'isolante, fatto con la sferetta di prova, non segnala la presenza di carica elettrica libera. La d.d.p. diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore s della lastra, come dimostreremo nell'esempio 5.2 e assume il valore minimo V_κ quando tutto lo spazio tra le armature è riempito da materiale isolante. Il contatto tra la lastra di isolante e le armature del condensatore non produce alcun effetto dal momento che sulle facce della lastra non si è formata carica libera.

Una serie di esperienze di carattere sistematico, come quelle condotte da Faraday nel 1831, mostra che il rapporto tra la d.d.p. V_0 misurata con il condensatore vuoto e la d.d.p. V_κ misurata con il condensatore completamente riempito di isolante è sempre maggiore di 1 e dipende soltanto dal tipo di materiale, ma non dalla carica sulle armature o dalle dimensioni e forma delle stesse.

Le sostanze isolanti che hanno questa proprietà di ridurre la d.d.p. tra le armature, e quindi il campo elettrico, si chiamano anche *sostanze dielettriche* o *dielettrici* e il rapporto adimensionale

$$\kappa = \frac{V_0}{V_\kappa} > 1 \quad (5.1)$$

è detto *costante dielettrica relativa del dielettrico*.

Ritornando al condensatore piano riempito completamente di dielettrico, il campo elettrico all'interno (nell'ipotesi che resti uniforme) deve valere

$$E_\kappa = \frac{V_\kappa}{h} = \frac{V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}, \quad (5.2)$$

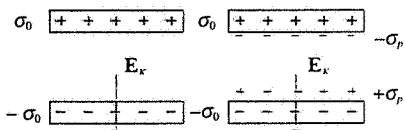


Figura 5.3

pertanto ridotto dello stesso fattore κ . La variazione del campo elettrico dovuta alla presenza del dielettrico è

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1 + \chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

definendo

Suscettività elettrica

$$\chi = \kappa - 1 \quad (5.3)$$

una grandezza chiamata *suscettività elettrica del dielettrico*. Per il campo elettrico nel dielettrico possiamo dunque scrivere

$$E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

ponendo

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0 \quad (5.5)$$

La (5.4) mostra che il campo elettrico all'interno del dielettrico ha la stessa espressione di un campo nel vuoto sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo di una distribuzione uniforme di carica con densità σ_p , che immaginiamo depositata sulle facce della lastra dielettrica, con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura contigua. Come vedremo queste cariche non sono fittizie, bensì sono il risultato dei processi microscopici che avvengono all'interno del dielettrico sotto l'azione del campo esterno.

La capacità del condensatore pieno di dielettrico è

$$C_\kappa = \frac{q_0}{V_\kappa} = \kappa \frac{q_0}{V_0} = \kappa C_0 , \quad (5.6)$$

Capacità del condensatore con dielettrico

aumentata dello stesso fattore κ di cui è diminuita la d.d.p. ai capi del condensatore, in accordo col fatto che la carica è rimasta costante. Allo stesso modo di (5.1) si trova che (5.6) è una relazione di carattere generale che vale qualunque sia la forma del condensatore. Deduciamo allora che le formule (4.13, 4.16, 4.19), date per un condensatore sferico, cilindrico, piano, restano valide purché si sostituisca a ϵ_0 la grandezza

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 , \quad (5.7)$$

Costante dielettrica assoluta del dielettrico

della costante dielettrica assoluta del dielettrico. In particolare, per il condensatore piano, scriviamo esplicitamente

$$C_\kappa = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h} . \quad (5.8)$$

Notiamo che il vuoto può essere assimilato, per queste formule, a un dielettrico con costante dielettrica assoluta ϵ_0 , costante dielettrica relativa $\kappa = 1$ e suscettività elettrica $\chi = 0$.

Nella tabella 5.1 sono riportati i valori della costante dielettrica relativa per alcuni materiali sottoposti, a temperatura ambiente, ad un campo elettrico costante. È anche riportata la rigidità dielettrica, cioè il massimo valore del campo elettrico che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno, concetto che discuteremo nell'esempio 5.4.

Rigidità dielettrica

Tabella 5.1 Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche

Sostanza	Costante dielettrica relativa κ	Rigidità dielettrica V/m
aria	1.00059	$3 \cdot 10^6$
acqua	80	—
alcool etilico	28	—
olio per trasformatori	2.5	$20 \cdot 10^6$
ambra	2.7	$90 \cdot 10^6$
bachelite	4.9	$24 \cdot 10^6$
carta	3.7	$16 \cdot 10^6$
polietilene	2.3	$50 \cdot 10^6$
polistirolo	2.6	$25 \cdot 10^6$
porcellana	6.5	$4 \cdot 10^6$
teflon	2.1	$60 \cdot 10^6$
vetro	4 ÷ 7	$20 \cdot 10^6$

5.2 Polarizzazione dei dielettrici

La spiegazione dei fenomeni osservati si basa sulla struttura elettrica microscopica della materia. Ricordiamo come il fenomeno dell'induzione elettrostatica, che rende possibile la separazione delle cariche dei due segni nei conduttori, sia dovuto al fatto che nei conduttori un certo numero di elettroni per atomo è separato dall'atomo stesso: all'interno dei conduttori esiste un *gas di elettroni* praticamente liberi.

Negli isolanti invece tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non se ne allontanano spontaneamente. Per fare avvenire la separazione occorre agire dall'esterno, ad esempio tramite lo strofinio con un panno. Se si applica al dielettrico un campo elettrico esterno avviene soltanto uno *spostamento locale* delle cariche che costituiscono gli atomi. Si tratta di effetti molto piccoli per ogni singolo atomo: come vedremo nell'esempio 5.10, gli spostamenti delle cariche sono dell'ordine di 10^{-15} m, confrontabili con le dimensioni del nucleo. Però il numero di atomi per unità di volume è $n = 10^{25} \div 10^{28} \text{ m}^{-3}$, a seconda dello stato di aggregazione, e l'effetto complessivo è misurabile.

In un atomo in condizioni normali e in assenza di campo elettrico esterno la distribuzione degli elettroni è in media simmetrica rispetto al nucleo: essa viene rappresentata come una nube di carica negativa che occupa una zona intorno al nucleo di raggio pari alle dimensioni dell'atomo ($\sim 10^{-10}$ m); il centro di massa della carica negativa coincide con il nucleo positivo.

Sotto l'azione di un campo E il centro (di massa) della nube negativa subisce uno spostamento in verso contrario al campo, il nucleo in senso concorde al campo e si raggiunge una posizione di equilibrio in cui questo effetto è bilanciato dall'attrazione tra le cariche di segno opposto. Detta x la distanza tra i centri delle cariche ovvero x il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo, ha senso definire il *momento di dipolo elettrico* di questa configurazione come

$$\mathbf{p}_a = Ze \mathbf{x} \quad (5.9)$$

Momento di dipolo elettrico

Infatti l'atomo è un sistema elettricamente neutro e il *momento di dipolo* (5.9) ha un significato intrinseco (si veda il paragrafo 2.8).

Possiamo quindi affermare che un atomo acquista un momento di dipolo elettrico microscopico \mathbf{p}_a , parallelo e concorde al campo E ; l'effetto cessa quando si annulla il campo. Il fenomeno si chiama *polarizzazione elettronica*.

Come abbiamo accennato nel paragrafo 2.7 e come vedremo in seguito nel paragrafo 5.10, esistono delle sostanze le cui molecole presentano un *momento di dipolo intrinseco*: si tratta di molecole poliatomiche formate da specie atomiche diverse (H_2O , CO_2 , NH_3) in cui la distribuzione delle cariche è tale che il centro delle cariche negative non coincide con il centro delle cariche positive. In assenza di campo elettrico esterno i dipoli molecolari sono orientati a caso, per via degli urti dovuti al moto di agitazione termica che distruggono eventuali configurazioni ordinate dovute alle interazioni tra dipoli. Quando si applica un campo E , su ciascuno dei dipoli di momento \mathbf{p}_0 agisce il momento delle forze (2.68) che ne causa un orientamento con il campo soltanto parziale perché disturbato dall'agitazione termica. Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrico esterno.

Anche questo meccanismo, che prende il nome di *polarizzazione per orientamento*, porta al risultato che ogni molecola acquista un *momento di dipolo elettrico medio* $\langle \mathbf{p} \rangle$ microscopico parallelo al campo E .

Senza approfondire oltre la dinamica dei meccanismi di polarizzazione, che verranno trattati nei paragrafi 5.10, 5.11 e 5.12, riassumiamo per ora l'effetto dell'applicazione di un campo elettrico ad un dielettrico dicendo che ciascun atomo o molecola acquista un momento di dipolo elettrico medio $\langle \mathbf{p} \rangle$, parallelo e concorde a E .

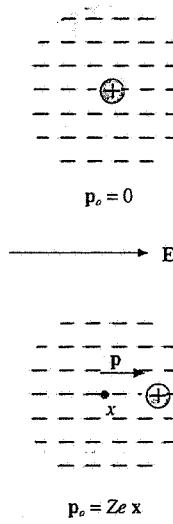


Figura 5.4

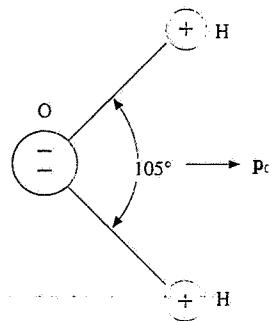


Figura 5.5

Considerato un volumetto $\Delta\tau$ nell'intorno di un punto O in cui sono contenuti ΔN atomi (o molecole), il momento di dipolo risultante Δp è dato da $\Delta p = \Delta N \langle p \rangle$ e il momento di dipolo per unità di volume nell'intorno del punto O si scrive

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \langle \mathbf{p} \rangle = n \langle \mathbf{p} \rangle , \quad (5.10)$$

dove n è il *numero di atomi (o molecole) per unità di volume*. Se nella (5.10) facciamo tendere $\Delta\tau$ a zero otteniamo il valore di \mathbf{P} nel punto O . Bisogna dire che il passaggio al limite deve essere inteso nel senso che $\Delta\tau$ è piccolo su scala macroscopica, ma sempre abbastanza grande da contenere un numero tale di atomi per cui abbia senso affermare che $\langle \mathbf{p} \rangle$ rappresenta il momento di dipolo elettrico medio di ciascun elemento (la media cioè ha senso se il numero di elementi è grande). Ad esempio, se prendiamo un cubetto di lato 10^{-6} m, il volume è $\Delta\tau = 10^{-18}$ m³; con $n = 10^{25}$ atomi/m³ $\Delta N = n \Delta\tau = 10^7$, per cui $\langle \mathbf{p} \rangle$ e \mathbf{P} sono bene definiti e non soggetti a fluttuazioni.

Il vettore \mathbf{P} , che caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno, si chiama *polarizzazione del dielettrico*. Nella maggior parte dei dielettrici risulta che \mathbf{P} è proporzionale a \mathbf{E} e tale relazione si scrive

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} . \quad (5.11)$$

I *dielettrici* che obbediscono a (5.11) si chiamano *lineari*; essi sono materiali amorfi, dotati di simmetria spaziale in tutte le direzioni ovvero, come si dice, caratterizzati da *isotropia spaziale*.

Esistono mezzi anisotropi, come i cristalli, nei quali la suscettività elettrica non è un numero, ma un *tensore* (paragrafo 5.6). In queste sostanze il parallelismo tra \mathbf{P} e \mathbf{E} è mantenuto solo lungo alcune direzioni che coincidono con gli *assi cristallografici*.

5.3 Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato

Riprendiamo in considerazione il condensatore piano carico con all'interno una lastra di dielettrico, che supponiamo *polarizzato uniformemente*: il vettore polarizzazione \mathbf{P} è cioè costante in tutti i punti della lastra.

Suddividiamo la lastra in prismi infinitesimi di base $d\Sigma_0$, altezza dh e volume $d\tau = d\Sigma_0 dh$: ciascuno di questi ha, secondo (5.10), il momento di dipolo

$$dp = P d\tau = P d\Sigma_0 dh ,$$

essendo dh orientato concordemente a \mathbf{P} . Ricordiamo, sempre dal paragrafo 2.8, che potenziale e campo di dipolo di un sistema neutro di cariche *non* dipendono dalla distribuzione effettiva delle cariche: qualsiasi distribuzione che abbia lo stesso momento di dipolo non è distinguibile sperimentalmente dalla distribuzione reale ed è quindi ad essa perfettamente *equivalente* per quanto riguarda gli effetti prodotti.

Sostituiamo allora al prisma un sistema costituito da due cariche $\pm dq_p = \pm P d\Sigma_0$, poste nel *vuoto* e distanti dh , distribuite sulle basi del prisma con *densità* $\pm \sigma_p = \pm dq_p / d\Sigma_0 = \pm P$. Tali cariche hanno un momento di dipolo dp eguale a quello del prisma.

Se consideriamo due prismi consecutivi con una base in comune e se \mathbf{P} è costante, la carica $+dq_p$ di un prisma si annulla con la carica $-dq_p$ dell'altro sulla base in comune; ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra.

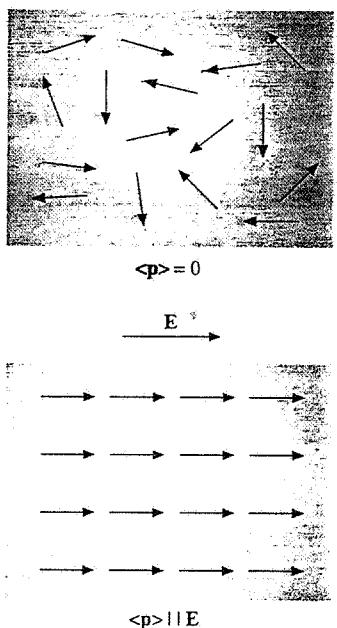


Figura 5.6



Figura 5.7

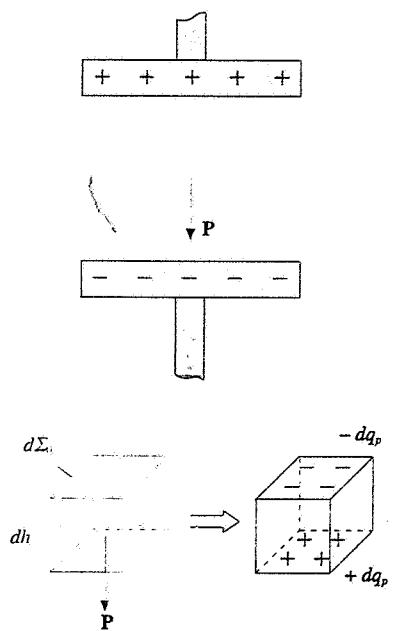


Figura 5.8

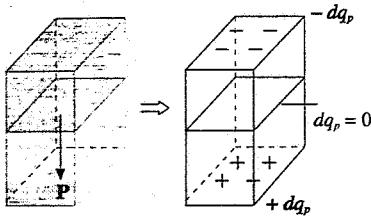


Figura 5.9

Cariche di polarizzazione

Il significato fisico dell'operazione è di ammettere che avvenga una compensazione delle cariche, spostate dalle posizioni di equilibrio, all'interno del dielettrico uniformemente polarizzato, ma *non* alla superficie limite dove la discontinuità del mezzo impedisce la compensazione. Qui la *carica* è *localizzata* entro uno strato di spessore pari alle dimensioni atomiche ed è a tutti gli effetti trattabile come una distribuzione superficiale di carica. La *lastra* viene quindi ad essere *equivalente a due distribuzioni di carica, localizzate sulle facce, con densità* $\pm \sigma_p = \pm P$.

È bene sottolineare che queste *cariche di polarizzazione non sono libere* come nei conduttori: esse si manifestano a causa degli *spostamenti microscopici locali, ma rimangono vincolate agli atomi o alle molecole*. Per questo motivo quando cerchiamo di prelevarne un campione non riusciamo ad asportarne nemmeno una piccola quantità misurabile. Per lo stesso motivo quando un dielettrico occupa completamente lo spazio interno a un condensatore e le facce del dielettrico vengono in più punti a contatto con le cariche libere presenti sulle armature conduttrici non avvengono trasferimenti di carica, pur essendo affacciate cariche di segno opposto.

Estendiamo il risultato a un dielettrico di forma qualunque, sempre uniformemente polarizzato; in un punto in cui il versore \mathbf{u}_n normale alla superficie è orientato verso l'esterno forma con \mathbf{P} l'angolo θ , la carica $dq_p = P d\Sigma_0$ è distribuita sulla superficie $d\Sigma$, con $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\theta$; pertanto la densità superficiale è

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos\theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$$

Possiamo allora dire che in generale la *densità superficiale delle cariche di polarizzazione* in un dielettrico è eguale alla *componente* di \mathbf{P} lungo la *normale* alla superficie:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P \cos\theta \quad (5.12)$$

Il caso della lastra considerata in precedenza corrisponde alle due orientazioni particolari $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. In generale, quando $0 \leq \theta < \pi/2$ la densità di carica è positiva, quando $\pi/2 < \theta \leq \pi$ essa è negativa ed è nulla solo per $\theta = \pi/2$, superficie parallela a \mathbf{P} . Di conseguenza in un dielettrico polarizzato, indipendentemente dalla forma, avremo *sempre* una parte della superficie carica positivamente e la rimanente carica negativamente. Se la *polarizzazione è uniforme* non si manifestano cariche all'interno del dielettrico, come abbiamo già notato, e quindi la *carica totale superficiale deve essere nulla*, come deve sempre essere una carica di polarizzazione visti i meccanismi da cui ha origine. Pertanto

$$\oint \sigma_p d\Sigma = \oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad (5.13)$$

l'integrale essendo esteso a tutta la superficie del dielettrico.

Supponiamo ora che la *polarizzazione non sia uniforme* ed esaminiamo il valore della carica sulla base comune a due prismi infinitesimi contigui, come quelli già visti, con asse parallelo all'asse x e area di base $d\Sigma = dy dz$. Utilizziamo (5.12) con riferimento alla figura 5.13:

$$-dq'_p = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{u}'_x d\Sigma = -P'_x dy dz ,$$

$$dq_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_x d\Sigma = P_x dy dz ,$$

$$dq_p - dq'_p = -(P'_x - P_x) dy dz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz .$$

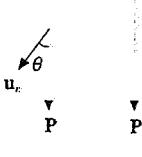


Figura 5.11

Vediamo che se \mathbf{P} varia lungo l'asse x non c'è *compensazione* tra le cariche e compare una *carica di polarizzazione* anche all'interno del dielettrico. Il risultato ottenuto si generalizza nel senso che dentro un volume infinitesimo $d\tau = dx dy dz$ c'è la carica

$$dq_p = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) d\tau$$

distribuita con densità

$$\rho_p = \frac{dq_p}{d\tau} = -\nabla \cdot \mathbf{P} , \quad (5.14)$$

ricordando (3.19). Quindi in un *dielettrico* in cui la *polarizzazione non sia uniforme* oltre alla densità superficiale (5.12) esiste una *densità spaziale di carica di polarizzazione eguale in ogni punto all'opposto della divergenza del vettore \mathbf{P}* .

Anche in questo caso la *carica totale di polarizzazione* del dielettrico deve essere nulla e abbiamo al posto di (5.13)

$$\oint \sigma_p d\Sigma + \int_{\tau} \rho_p d\tau = 0 \quad (5.15)$$

ovvero

$$\oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} dt , \quad (5.16)$$

formalmente coincidente col teorema della divergenza (3.22). Le due distribuzioni di carica superficiale e spaziale si compensano *globalmente* (non localmente) dando carica totale nulla.

La conoscenza della polarizzazione \mathbf{P} permette dunque di calcolare il potenziale e il campo elettrico in ogni punto Q esterno al dielettrico. Da (2.22, 2.23)

$$V(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot \mathbf{P} dt}{r} , \quad (5.17)$$

dove r è la distanza da Q all'elemento di carica di polarizzazione. Se sono presenti anche cariche libere, ad esempio distribuite sulla superficie di un conduttore, alla (5.17) bisogna aggiungere il loro contributo

$$V'(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma' d\Sigma'}{r} .$$

Dall'espressione del potenziale si ricava il campo elettrico come $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Le sorgenti del campo elettrico sono quindi sia le cariche libere localizzate sulla superficie dei conduttori che le cariche di polarizzazione descritte da σ_p e ρ_p . Quando $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ la carica di polarizzazione all'interno del dielettrico si annulla e rimane solamente il contributo dovuto alla carica superficiale. La condizione $\mathbf{P} = \text{costante}$ comporta necessariamente $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$; esistono però condizioni più generali, che vedremo nel paragrafo 5.6, per cui $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ pur non essendo $\mathbf{P} = \text{costante}$. Tali condizioni si verificano nella maggior parte dei casi e, per questi, gli effetti introdotti dalla presenza del dielettrico polarizzato si riconducono esclusivamente alla carica di polarizzazione superficiale.

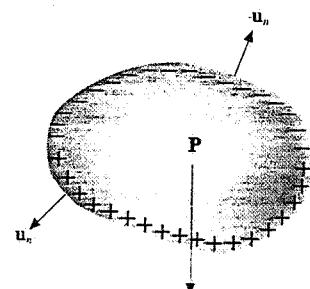


Figura 5.12

Densità spaziale di carica di polarizzazione

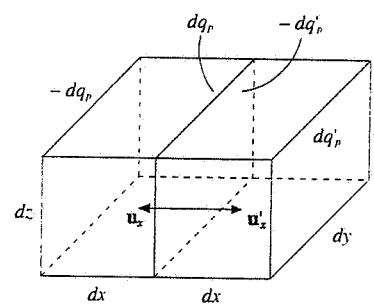


Figura 5.13

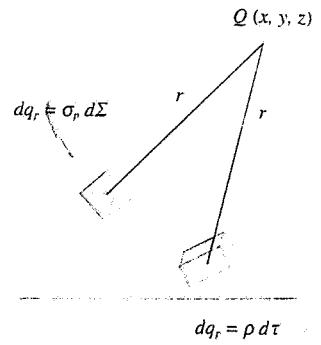


Figura 5.14

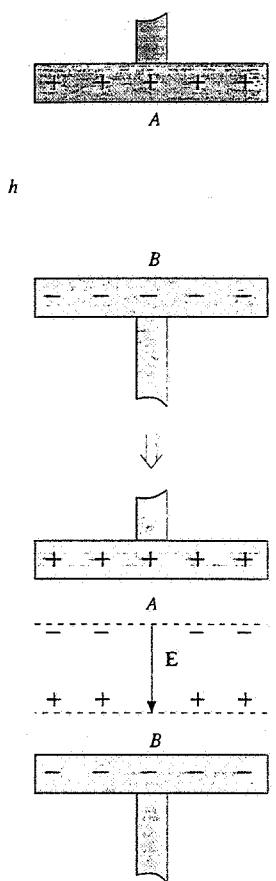


Figura 5.15

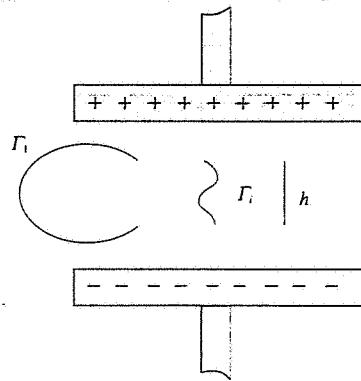


Figura 5.16

Campo elettrico medio macroscopico

5.4 Campo elettrico all'interno di un dielettrico polarizzato

Rivolghiamo adesso la nostra attenzione al *campo elettrico all'interno* di un *dielettrico polarizzato*. Per fissare le idee ci rifacciamo ancora una volta alla situazione più semplice che conosciamo, la lastra dielettrica posta all'interno di un condensatore piano carico. Abbiamo visto che la conseguenza della polarizzazione del dielettrico è la comparsa di una densità di carica σ_p sulle facce della lastra, così che si hanno le due distribuzioni $\pm \sigma_0$ e $\pm \sigma_p$. Nello spazio vuoto tra le armature il campo elettrico vale in modulo $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$, mentre all'interno del dielettrico il valore sarebbe

$$E = \frac{(\sigma_0 - \sigma_p)}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} ,$$

uniforme ovunque, ma inferiore al campo E_0 .

Se prendiamo due punti A e B sulle facce del dielettrico, la d.d.p. tra di essi è

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

ed è la stessa qualunque percorso si scelga, essendo il campo elettrostatico conservativo.

È necessario però chiarire il significato del campo che compare nell'integrale. Per un percorso Γ_i esterno al dielettrico si tratta del campo elettrico nel vuoto dovuto alle suddette distribuzioni di carica. All'interno un qualsiasi percorso incontra invece situazioni molto particolari. La lastra è composta da nuclei e da elettroni e i *campi elettrici locali* sono molto differenti a seconda che la linea di integrazione passi vicina ad un nucleo o nello spazio vuoto tra gli atomi. Il campo elettrico sulla superficie di un protone, che ha raggio $r \sim 10^{-15}$ m, è dato da $e / 4\pi \epsilon_0 r^2 \approx 10^{21}$ V/m, mentre all'esterno di un atomo, a distanze dell'ordine di 10^{-10} m dal nucleo, il campo elettrico microscopico è praticamente nullo. Il campo che compare nell'integrale è il *campo totale*, dovuto sia alle cariche esterne che a quelle atomiche, ed è rapidamente variabile da punto a punto, appunto a causa dei contributi atomici che sono completamente casuali lungo la linea di integrazione, sia in intensità che in direzione. D'altra parte ci sono precise conferme sperimentali che anche a piccolissime distanze la forza elettrica è coulombiana e quindi i *campi elettrici locali sono conservativi*; detto \mathbf{E}_i il campo interno, possiamo sempre scrivere, per qualsiasi percorso interno Γ_i ,

$$\int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

e pertanto definire un *campo elettrico medio macroscopico* all'interno del dielettrico come

$$E = \frac{1}{h} \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} , \quad (5.18)$$

coincidente col *campo che producono le distribuzioni $\pm \sigma_0$ e $\pm \sigma_p$ nello spazio occupato dal dielettrico considerato come se fosse vuoto*. Osserviamo che l'effetto delle cariche di polarizzazione è di *diminuire* il campo dovuto alle cariche libere esterne; per questa ragione si parla di *effetto depolarizzante*.

Le conclusioni raggiunte sono di carattere generale: il campo elettrico effettivo

nel vuoto e quello medio all'interno di un dielettrico si calcolano a partire dalle distribuzioni di carica libera e di carica di polarizzazione con le formule che abbiamo già stabilito. Il campo interno è sempre minore di quello che ci sarebbe nello stesso punto in assenza del dielettrico; la media in un dato punto, che porta alla formula (5.18), si può intendere come

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \mathbf{E} d\tau , \quad (5.19)$$

dove τ è un volume molto piccolo intorno al punto, ma contenente un grandissimo numero di atomi, secondo quanto discusso nel paragrafo 5.3.

La determinazione sperimentale del campo elettrico medio all'interno di un dielettrico, ad esempio con una carica di prova su cui si misura la forza, non è in realtà eseguibile direttamente: l'introduzione di una carica di prova, di dimensioni tali da essere sensibile solo al valor medio macroscopico del campo, può essere effettuata solo praticando un *foro* nel dielettrico, con il che si ottiene una *cavità vuota, esterna al dielettrico*. La difficoltà è superabile concettualmente operando nel modo seguente. Si pratica nel dielettrico una cavità cilindrica di base Σ e altezza s , parallela alla direzione di \mathbf{E} , con la condizione $\Sigma / s^2 \approx 0$: la cavità cioè è *lunga e sottile*, in modo che le cariche di polarizzazione che compaiono sulle basi diano luogo a una perturbazione trascurabile (sulle pareti laterali della cavità non si hanno cariche di polarizzazione se \mathbf{P} è parallelo a \mathbf{E} e quindi alle pareti stesse). Consideriamo ora una linea chiusa $ABCD$ con i lati AB e CD paralleli all'asse della cavità e contenuti rispettivamente nella cavità e nel dielettrico e i restanti lati infinitesimi. La circuitazione del campo elettrico lungo questa linea deve essere nulla, il che comporta

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} + \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{CD} = E |AB| - \langle E \rangle |CD| = 0 ,$$

indicando con \mathbf{E} il campo nella cavità e con $\langle \mathbf{E} \rangle$ il campo medio nel dielettrico. Pertanto

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle :$$

il campo elettrico misurato nella cavità lunga e sottile è eguale al campo elettrico medio all'interno del dielettrico.

La scelta della forma della cavità è essenziale nella dimostrazione; vedremo più ampiamente l'argomento del valore del campo in cavità di forme diverse nel paragrafo 5.8.

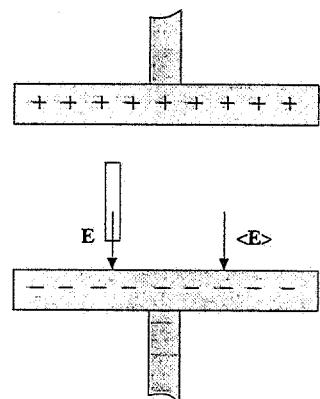


Figura 5.17

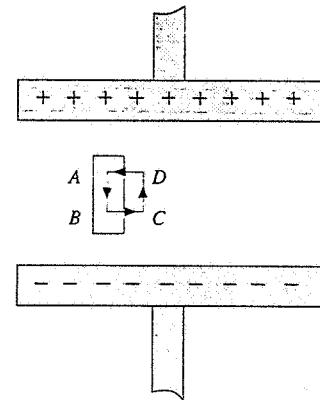


Figura 5.18

5.5 Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici. Il vettore induzione dielettrica

Nel paragrafo 5.4 abbiamo menzionato il fatto che il campo elettrico prodotto da cariche ferme è conservativo anche in presenza di dielettrici polarizzati. Continuano pertanto a valere le due formulazioni, integrale e locale, date da (2.10) e (2.54),

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 ,$$

e la proprietà equivalente che il campo elettrico si possa ottenere come gradiente della funzione potenziale, $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Anche la legge di Gauss resta valida in presenza di dielettrici polarizzati, purché si tenga conto delle cariche di polarizzazione oltre che delle cariche libere:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\epsilon_0} . \quad (5.20)$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione contenute all'interno della superficie. In forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} . \quad (5.21)$$

Ricordando (5.14) abbiamo

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

a cui corrisponde la legge integrale

$$\oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q .$$

Introduciamo il vettore \mathbf{D} , detto *induzione dielettrica*:

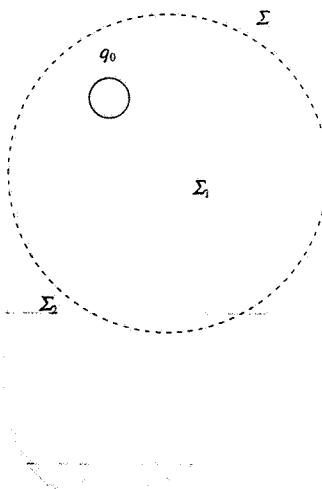
Induzione dielettrica \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} ; \quad (5.22)$$

la definizione è generale, valida qualunque sia la relazione tra \mathbf{P} e \mathbf{E} . Le leggi precedenti si scrivono allora

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho , \quad (5.23)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q \quad (5.24)$$



Il flusso del vettore \mathbf{D} attraverso una superficie chiusa, contenente in generale sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende soltanto dalle cariche libere. La proprietà non è banale perché la superficie chiusa Σ può intersecare un dielettrico, invece che contenere interamente, per cui la carica di polarizzazione all'interno di Σ non è nulla.

Per chiarire l'argomento è opportuno ricavare (5.24) ragionando sulla forma integrale della legge di Gauss (5.20), con riferimento alla figura 5.19. La superficie chiusa Σ contiene al suo interno la carica libera q_0 e una parte di un dielettrico polarizzato; diciamo Σ_1 la superficie del dielettrico interno a Σ e Σ_2 la superficie di intersezione col dielettrico; inoltre τ è il volume di dielettrico racchiuso in Σ . Abbiamo:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau ,$$

dove σ_p è la densità superficiale e ρ_p la densità spaziale di carica di polarizzazione. Usiamo (5.12), (5.14) e il teorema della divergenza (3.22) per scrivere

Figura 5.19

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma ,$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Pertanto nella somma gli integrali estesi a Σ_1 si elidono e si ottiene

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q_0}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma :$$

il flusso di \mathbf{E} attraverso Σ contiene un contributo, in generale non nullo, dovuto alla carica di polarizzazione. Poiché nella parte di Σ non coincidente con Σ_2 , cioè nella parte esterna al dielettrico, \mathbf{P} è nulla, è lecito scrivere

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

e in conclusione

$$\oint_{\Sigma} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q_0 ,$$

che, tenuto conto di (5.22), è la (5.24).

Se avessimo scelto Σ completamente all'interno del dielettrico, dove non ci sono cariche libere, non ci sarebbero stati il termine con q_0 e quello con σ_p e avremmo trovato

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

ovvero $\Phi(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$, in accordo con la successiva (5.25).

L'utilità delle relazioni (5.23) e (5.24) riguardanti il vettore \mathbf{D} si può capire osservando che di norma sono le cariche libere ad essere conosciute e non le cariche di polarizzazione. È quindi possibile, con i metodi visti nel capitolo 3, calcolare il vettore \mathbf{D} ; allora, tramite (5.22) e se è nota la relazione tra \mathbf{E} e \mathbf{P} , si determinano sia il campo elettrico che la polarizzazione e da questa le densità di carica di polarizzazione.

Nello spazio privo di cariche libere, come può essere lo spazio tra conduttori carichi riempito da un dielettrico, le relazioni (5.23) e (5.24) diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 , \quad \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 : \quad (5.25)$$

in assenza di cariche libere il campo vettoriale \mathbf{D} è solenoidale (vedi paragrafo 3.4).

Per completezza aggiungiamo che per il vettore induzione dielettrica non si può stabilire che la circuitazione lungo qualsiasi percorso chiuso è nulla: \mathbf{D} non è cioè un campo conservativo.

Infine notiamo esplicitamente che è significativo utilizzare \mathbf{D} soltanto in presenza di un dielettrico; nello spazio vuoto $\mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, per cui \mathbf{D} non ha nessuna proprietà particolare che lo distingua da \mathbf{E} .

Proprietà di \mathbf{D} in assenza di cariche libere

Unità di misura

La polarizzazione e l'induzione dielettrica hanno la stessa unità di misura, che è quella della densità superficiale di carica, C/m^2 .

La costante dielettrica relativa e la suscettività elettrica sono adimensionali. Invece la costante dielettrica assoluta ha le dimensioni di ϵ_0 , che si possono ricavare da $E = \sigma / \epsilon_0$ e risultano farad/m, F/m, unità corrispondente, ma più usata, di C^2 / Nm^2 , indicata nella (1.6).

5.6 Dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico. Dielettrici isotropi e anisotropi

Nel paragrafo 5.2 abbiamo definito come dielettrici lineari quelli che seguono la relazione (5.11) di parallelismo tra \mathbf{P} e \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} .$$

Da (5.22) e (5.7) si ricava

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (5.26)$$

e introducendo tale relazione in (5.11), $\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{D} / \epsilon$ ovvero

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mathbf{D} = \frac{\chi}{1 + \chi} \mathbf{D} . \quad (5.27)$$

In un dielettrico lineare l'induzione dielettrica, il campo elettrico e la polarizzazione sono vettori tra loro paralleli, legati da relazioni in cui le proprietà del dielettrico sono espresse soltanto dalla costante dielettrica relativa κ o, equivalentemente, dalla suscettività elettrica χ .

Se il dielettrico lineare è omogeneo, cioè a densità costante, la costante dielettrica relativa è anch'essa ovunque costante e da (5.27) si ricava

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{D} .$$

In assenza di cariche libere nel dielettrico $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ e quindi

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 . \quad (5.28)$$

Proprietà dei dielettrici lineari

In un dielettrico lineare e omogeneo la densità spaziale di carica di polarizzazione è nulla e le cariche di polarizzazione sono distribuite esclusivamente sulle superficie. Ciò avviene anche se il campo elettrico all'interno del dielettrico e quindi la polarizzazione ad esso parallela non sono uniformi: vuol dire che in tal caso la legge di variazione è tale da soddisfare sempre alla (5.28).

Esempio 5.1

Una sfera conduttrice, di raggio R e carica q , è immersa in un dielettrico indefinito, lineare e omogeneo, di costante dielettrica relativa κ . Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}(r)$, la polarizzazione $\mathbf{P}(r)$ e la densità di carica di polarizzazione.

Soluzione

In assenza di dielettrico il campo elettrico all'esterno della sfera è dato da

$$\mathbf{E}_0(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ;$$

in particolare, per $r = R$, cioè sulla superficie della sfera,

$$\mathbf{E}_0(R) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_r .$$

In presenza di dielettrico applichiamo la legge di Gauss (5.24) al vettore \mathbf{D} su una superficie sferica di raggio $r > R$, concentrica alla sfera.

Seguendo le considerazioni di simmetria già sviluppate nell'esempio 3.1 otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{D}) &= \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 4\pi r^2 D = q \\ \mathbf{D}(r) &= \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (5.29)$$

e quindi, in base alle (5.26) e (5.7),

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}(r)}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi \kappa \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{E}_0(r)}{\kappa} . \quad (5.30)$$

Il campo elettrico nel dielettrico indefinito risulta ridotto del fattore κ rispetto al campo nel vuoto, come avviene nel condensatore piano del paragrafo 5.1. Per $r = R$

$$\mathbf{E}(R) = \frac{q}{4\pi \kappa \epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{\kappa \epsilon_0} \mathbf{u}_r ;$$

è come se la presenza del dielettrico portasse a una riduzione delle densità di carica di un fattore κ .

L'effetto è dovuto alle cariche di polarizzazione, di segno opposto a q , che compaiono sulla superficie del dielettrico a contatto con il conduttore. Infatti la polarizzazione del dielettrico, secondo (5.27), è

$$\mathbf{P}(r) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mathbf{D} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r$$

e sulla superficie del dielettrico ($r = R$)

$$\mathbf{P}(R) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \mathbf{u}_r$$

ovvero, in termini di densità,

$$\sigma_p = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{u}_n = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma ,$$

in quanto il versore \mathbf{u}_n uscente dalla superficie è opposto a \mathbf{u}_r .

La carica di polarizzazione è

$$q_p = 4\pi R^2 \sigma_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} 4\pi R^2 \sigma = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q$$

e quindi, per $r \geq R$, il campo elettrico effettivo è

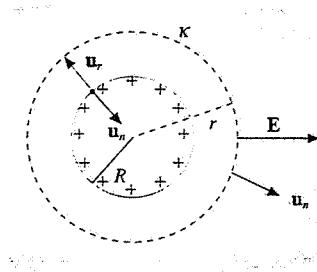


Figura 5.20

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q + q_p}{r^2} \mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) \mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi \kappa \epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r ,$$

in accordo con (5.30). Si vede anche in questo caso l'effetto depolarizzante del dielettrico.

La polarizzazione nel dielettrico è una funzione del tipo $k \mathbf{u}_r / r^2$ e si verifica, come nell'esempio 3.5, che $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ ovunque. Anche se la polarizzazione non è uniforme, la densità spaziale di carica è nulla.

Quando invece, pur essendo il dielettrico lineare, la costante dielettrica relativa varia da punto a punto, si ha da (5.27)

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) ,$$

dove abbiamo usato l'identità vettoriale (3.36) relativa a $\nabla \cdot (\mathcal{S} \mathbf{a})$.

Anche in assenza di cariche libere nel dielettrico la divergenza di \mathbf{P} non è nulla e dipende dal gradiente della funzione $(\kappa - 1) / \kappa$:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{D} \cdot \nabla \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) . \quad (5.31)$$

Bisogna dire che il caso (5.28) è quello di gran lunga più frequente.

Abbiamo già accennato nel paragrafo 5.2 al fatto che i *dielettrici lineari* sono dotati di simmetria spaziale, cioè sono *isotropi*. Per i *dielettrici anisotropi*, come i *cristalli*, la polarizzazione \mathbf{P} non è in generale parallela al campo \mathbf{E} e la relazione tra \mathbf{P} ed \mathbf{E} è espressa dalla terna di equazioni

Dielettrici anisotropi

Tensore suscettività elettrica

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z) \quad (5.32)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z) .$$

I nove numeri χ_{ij} costituiscono il *tensore suscettività elettrica*; essi sono in realtà sei, poiché $\chi_{ij} = \chi_{ji}$ ($i \neq j$), il *tensore* cioè è *simmetrico*. Introduciamo (5.22) e otteniamo

$$D_x = \epsilon_0 [(1 + \chi_{11}) E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z]$$

$$D_y = \epsilon_0 [\chi_{21} E_x + (1 + \chi_{22}) E_y + \chi_{23} E_z] \quad (5.33)$$

$$D_z = \epsilon_0 [\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + (1 + \chi_{33}) E_z] .$$

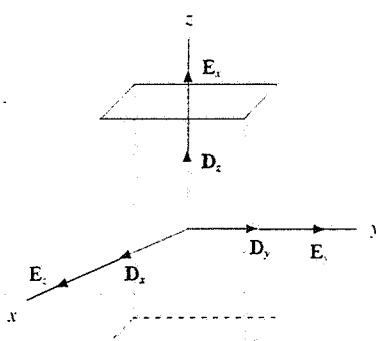


Figura 5.21

Nemmeno il vettore \mathbf{D} è parallelo al campo \mathbf{E} .

In questi materiali esistono tuttavia tre direzioni caratteristiche, tra loro ortogonalì, lungo ciascuna delle quali \mathbf{E} , \mathbf{P} e \mathbf{D} sono paralleli. Detta i una qualsiasi di queste direzioni, si ha

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i = \epsilon_0 (1 + \chi_i) E_i = \epsilon_i E_i .$$

Tali direzioni sono note come *assi cristallografici* o *assi ottici del dielettrico*, per

le proprietà connesse con la propagazione della luce lungo di essi.

Se si scelgono questi assi coordinati le (5.33) diventano

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 E_x + P_x = \epsilon_0 (1 + \chi_x) E_x = \epsilon_x E_x \\ D_y &= \epsilon_0 E_y + P_y = \epsilon_0 (1 + \chi_y) E_y = \epsilon_y E_y \\ D_z &= \epsilon_0 E_z + P_z = \epsilon_0 (1 + \chi_z) E_z = \epsilon_z E_z \end{aligned} \quad (5.34)$$

In tale sistema di riferimento il tensore è diagonalizzato: ciò non vuol dire che \mathbf{D} è parallelo a \mathbf{E} , perché $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$.

5.7 Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due dielettrici

Nel paragrafo 3.3 abbiamo studiato la discontinuità del campo elettrico nell'attraversare una superficie su cui è depositata una carica. Una situazione di questo tipo si ritrova sempre quando si attraversa la superficie limite di un dielettrico polarizzato e quindi anche sulla superficie Σ di separazione tra due dielettrici diversi, di costanti dielettriche relative κ_1 e κ_2 . Indichiamo con \mathbf{E}_1 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{D}_1 il campo elettrico, la polarizzazione e l'induzione dielettrica sulla faccia di Σ rivolta al dielettrico di costante dielettrica κ_1 e con \mathbf{E}_2 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{D}_2 i corrispondenti valori sulla faccia di Σ rivolta al secondo dielettrico.

Sappiamo da (3.14) che la componente tangenziale di \mathbf{E} rimane costante nel passaggio attraverso Σ , circostanza che si esprime con la relazione

$$E_{1n} = E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 = E_{2n} \quad (5.35)$$

Applichiamo adesso la legge di Gauss al vettore \mathbf{D} , scegliendo per superficie di integrazione una scatola cilindrica di altezza infinitesima ortogonale a Σ e con le basi all'interno dei due dielettrici, in analogia a quanto fatto nel paragrafo 3.3. All'interno della superficie del cilindro non ci sono cariche libere e quindi

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma = (D_{2n} - D_{1n}) d\Sigma = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \quad , \quad (5.36)$$

nel passaggio attraverso Σ la componente normale di \mathbf{D} non varia. Da (5.22)

$$\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$$

e pertanto

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{P_{1n} - P_{2n}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{1p} - \sigma_{2p}}{\epsilon_0} \quad .$$

che corrisponde alla (3.15) e poteva essere ricavata direttamente. Da (5.36) e (5.26) otteniamo inoltre

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \cos \theta_1 = \kappa_2 \epsilon_0 E_2 \cos \theta_2 \quad (5.37)$$

e dividendo membro a membro (5.35) e (5.37)

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \quad . \quad (5.38)$$

La discontinuità della componente normale di \mathbf{E} , insieme alla continuità della componente tangenziale, comporta un cambiamento di direzione delle linee di

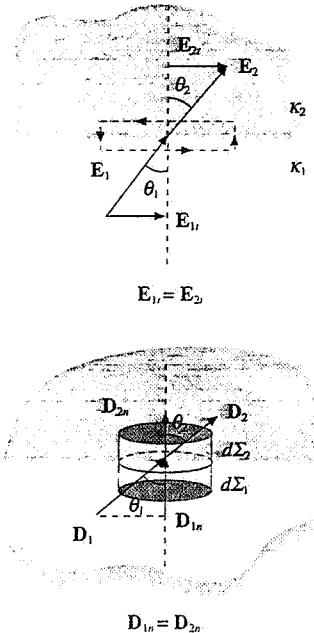


Figura 5.22

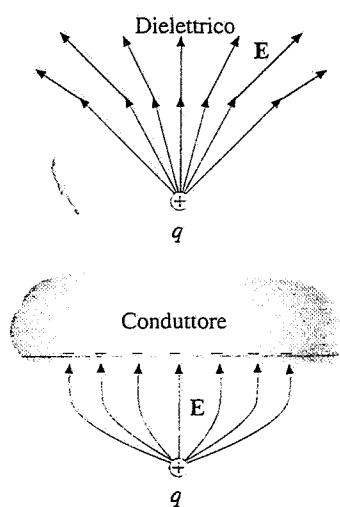


Figura 5.23

Rifrazione delle linee di forza

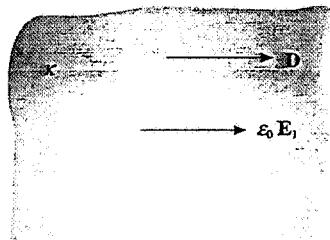


Figura 5.24

forza del campo elettrico, fenomeno che si chiama anche *rifrazione delle linee di forza*. Si vede che se κ_1 è minore di κ_2 , θ_2 è maggiore di θ_1 : le linee di forza si allontanano in questo caso dalla normale alla superficie. Nella figura 5.23 sono confrontati i comportamenti delle linee di forza del campo elettrico prodotto da una carica q quando incontrano un dielettrico e un conduttore.

In particolare se $\theta_1 = 0$ anche $\theta_2 = 0$ e le condizioni (5.36, 5.37) diventano

$$D_1 = D_2, \quad \kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2. \quad (5.39)$$

Se praticchiamo in un dielettrico di costante dielettrica relativa κ una *cavità cilindrica vuota* ($\kappa = 1$) con le basi ortogonali alle linee di \mathbf{D} , il vettore \mathbf{D} ha lo stesso valore nel dielettrico e nella cavità: pertanto, *misurando il campo elettrico \mathbf{E}_1 nella cavità e moltiplicandolo per ϵ_0 otteniamo il valore di \mathbf{D} all'interno del dielettrico*. Non è necessario in questo caso che la base sia molto piccola: anche se la cavità è larga e sulle basi c'è una carica di polarizzazione non trascurabile, \mathbf{D} è continuo nel passaggio dal dielettrico alla cavità.

Esempio 5.2

Una lastra di dielettrico lineare e omogeneo, di area Σ e spessore s , è inserita in un condensatore piano carico parallelamente alle armature, di area Σ e distanti h . Determinare i valori dei campi E , P , D e la d.d.p. tra le armature al variare dello spessore s della lastra.

Soluzione

Abbiamo già discusso parzialmente questa situazione, a cui ora applichiamo le condizioni di discontinuità appena determinate. Chiamiamo $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$ il campo in assenza di dielettrico, $D = \epsilon_0 E_0 = \sigma_0$ l'induzione dielettrica e $V_0 = E_0 h = \sigma_0 h / \epsilon_0$ la d.d.p. tra le armature. Introducendo il dielettrico sulle facce di questo si formano le cariche di polarizzazione distribuite con densità σ_p . Nello spazio vuoto il campo elettrico e l'induzione dielettrica conservano i loro valori; passando nel dielettrico l'induzione dielettrica non varia,

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E$$

e quindi

$$E_0 = \kappa E.$$

La polarizzazione, nulla nello spazio vuoto, vale nel dielettrico

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa} E_0 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} D = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0; \quad ;$$

questo è il valore assoluto della densità di carica di polarizzazione. Le conclusioni tratte finora non dipendono dallo spessore del dielettrico.

La d.d.p. tra le armature si scrive

$$V = \int_0^h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{h} = E_0 (h - s) + Es.$$

qualunque sia la posizione della lastra rispetto alle armature. Introduciamo i valori dei campi:

$$V = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (h - s) + \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} s = \frac{\sigma_0 h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h} \right) = V_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h} \right).$$

La d.d.p. diminuisce linearmente con s ed è minima quando il dielettrico riempie completamente lo spazio tra le armature ($s = h$): in effetti in tal caso $E = E_0 / \kappa$ ovunque e l'integrale di linea assume il suo valore minimo che è $V = Eh = E_0 h / \kappa = V_0 / \kappa$. Abbiamo

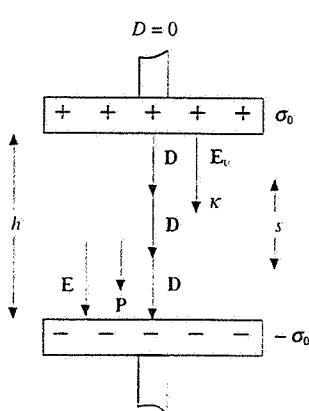


Figura 5.25

così ricavato e spiegato i risultati degli esperimenti presentati nel paragrafo 5.1. La d.d.p. si può riscrivere

$$V = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} \left(h - \frac{\kappa - 1}{\kappa} s \right) ,$$

in cui $\sigma_0 \Sigma$ è la carica libera q presente sulle armature. Pertanto

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{h-s}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\epsilon_0 \kappa \Sigma} ,$$

dove C è la capacità del condensatore parzialmente riempito di dielettrico. Si vede dalla formula che la capacità non dipende dalla posizione della lastra e che il sistema si può interpretare come due condensatori in serie, uno vuoto con capacità $\epsilon_0 \Sigma / (h-s)$, l'altro con dielettrico, di capacità $\epsilon_0 \kappa \Sigma / s$. In realtà tra il primo e il secondo condensatore della serie non c'è un'armatura conduttrice. Si può però immaginare di porre una sottilissima lastra conduttrice sulla faccia del dielettrico, al potenziale che compete a quella posizione, con densità di carica $\pm \sigma_0$, e si ottengono realmente due condensatori in serie, senza alterare lo stato elettrico del sistema.

Esempio 5.3

Un condensatore piano, con armature di area Σ distanti h , è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 e costante dielettrica relativa κ_1 , l'altra di spessore d_2 e costante dielettrica relativa κ_2 . Ai capi del condensatore è applicata una d.d.p. V . Calcolare i valori E_1 e E_2 del campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione tra i due dielettrici.

Soluzione

In ciascun dielettrico il campo elettrico è uniforme e ortogonale alle armature; alla superficie di separazione esso è discontinuo secondo (5.39):

$$\kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 .$$

Questa esprime anche la *continuità dell'induzione dielettrica D* nell'attraversamento della superficie di separazione. In modulo D è eguale alla densità di carica libera sulle armature,

$$D = \epsilon_0 \kappa_1 E_1 = \epsilon_0 \kappa_2 E_2 = \sigma_0 .$$

La d.d.p. tra le armature si scrive

$$V = \int_0^h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{h} = E_1 d_1 + E_2 d_2 ;$$

facendo sistema con (5.39) si trova

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_1} \quad , \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \kappa_2} \quad , \quad (5.40)$$

e quindi

$$D = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} .$$

Le densità di carica di polarizzazione nei due dielettrici sono

$$\sigma_1 = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} D \quad , \quad \sigma_2 = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} D$$

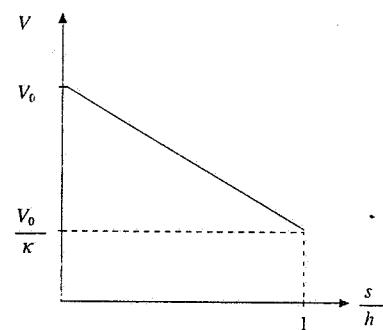


Figura 5.26

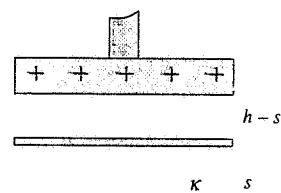


Figura 5.27

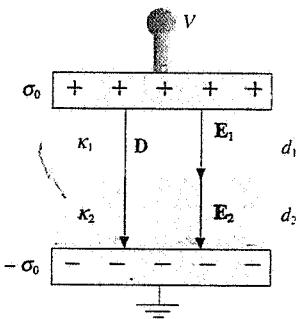


Figura 5.28

e sulla superficie di separazione

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 \kappa_2} D = \frac{\epsilon_0 (\kappa_1 - \kappa_2) V}{\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2} ,$$

positiva o negativa a seconda che κ_1 sia maggiore o minore di κ_2 .
Dalle relazioni precedenti risulta pure

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\epsilon_0}{\kappa_1} \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right) = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} \left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right)$$

essendo $q = \sigma_0 \Sigma$ la carica libera sulle armature. Quindi

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \kappa_1 \Sigma} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \kappa_2 \Sigma}$$

La capacità equivalente è quella di *due condensatori in serie*. La d.d.p. si ripartisce tra i due condensatori nel rapporto

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2 d_1}{\kappa_1 d_2}$$

Esempio 5.4 Rigidità dielettrica

Dare l'espressione della massima d.d.p. V applicabile al condensatore dell'esempio 5.3.

Soluzione

Per ogni dielettrico esiste un valore limite del campo elettrico oltre il quale si produce una scarica attraverso il dielettrico; se questo è solido, la scarica lo deteriora irreparabilmente. Tale campo massimo si chiama *rigidità dielettrica*; valori indicativi per alcuni dielettrici sono stati riportati nella tabella 5.1. Per un dato dielettrico la rigidità dielettrica dipende dalla purezza del dielettrico e dallo stato delle superficie conduttrici che portano la carica libera (pulizia, levigatezza).

Dalle formule (5.40) si deduce che il campo elettrico è più intenso dove la costante dielettrica relativa è minore, in quanto minore è la carica di polarizzazione e il suo effetto depolarizzante. Per evitare scariche nei due dielettrici, dette E_{1S} e E_{2S} le rispettive rigidità dielettriche, devono essere soddisfatte entrambe le condizioni $E_1 < E_{1S}$, $E_2 < E_{2S}$, ovvero

$$V < (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2) \frac{E_{1S}}{\kappa_2} = V_{1S} \quad , \quad V < (\kappa_2 d_1 + \kappa_1 d_2) \frac{E_{2S}}{\kappa_1} = V_{2S}$$

Supponiamo che sia $V_{1S} < V_{2S}$ (cioè $\kappa_1 E_{1S} < \kappa_2 E_{2S}$) e che si applichi al condensatore una d.d.p. $V > V_{1S}$. Nel primo dielettrico si ha una scarica e tutta la d.d.p. V è applicata al secondo dielettrico. Allora, se $V < E_{2S} d_2$, il secondo dielettrico può sopportare la d.d.p. V ; altrimenti anche nel secondo dielettrico avviene una scarica. Se è verificata la condizione $V_{1S} = V_{2S}$, cioè $\kappa_1 E_{1S} = \kappa_2 E_{2S}$, la d.d.p. di scarica è $V_S = E_{1S} d_1 + E_{2S} d_2$.

Con riferimento al collegamento in serie tra condensatori (paragrafo 4.6), osserviamo che se una data d.d.p. non è sopportabile da un solo condensatore, è sempre possibile collegarne vari in serie realizzando un partitore capacitivo, così che il campo in ciascuno sia inferiore alla rigidità dielettrica. La capacità equivalente complessiva è minore, però il sistema non presenta scariche. L'osservazione è pertinente in quanto tutti i condensatori di uso pratico hanno un dielettrico che non è il vuoto.

Anche se il vuoto in sé avrebbe rigidità dielettrica infinita, dati due conduttori tra i quali c'è il vuoto esiste in ogni caso un valore massimo della d.d.p. applicabile oltre la quale c'è una scarica tra i conduttori, sotto forma di elettroni che vengono strappati dal conduttore a potenziale minore a causa del fortissimo campo superficiale e sono raccolti dal conduttore a potenziale maggiore.

5.8 Campo elettrico all'interno di una cavità in un dielettrico

Vogliamo adesso calcolare il campo elettrico all'interno di cavità di forma definita praticamente in un dielettrico uniformemente polarizzato. Per eseguire il calcolo ci serviremo del principio di sovrapposizione secondo le linee seguenti. All'interno della massa del dielettrico il campo elettrico \mathbf{E} (Q) in un punto Q può essere pensato come somma del campo elettrico \mathbf{E}_b dovuto a tutte le altre cariche, libere esterne al dielettrico e di polarizzazione sul dielettrico:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b \quad (5.41)$$

La situazione è illustrata graficamente nella figura 5.29, in cui i vettori tutti eguali rappresentano la polarizzazione uniforme. Se siamo in grado di determinare \mathbf{E} e \mathbf{E}_b possiamo ricavare \mathbf{E}_c come $\mathbf{E} - \mathbf{E}_b$.

Cavità cilindrica

Supponiamo che il blocco di materiale che ha la forma della cavità sia un cilindro di raggio R e lunghezza h , polarizzato uniformemente con \mathbf{P} parallela all'asse del cilindro. In un punto Q dell'asse il campo è quello prodotto da due dischi coincidenti con le basi del cilindro, uniformemente carichi con densità di carica $+P$ e $-P$. Dalla relazione (1.31) dell'esempio 1.8 abbiamo

$$\mathbf{E}_Q = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} [(1 - \cos\theta_+) + (1 - \cos\theta_-)] \quad ,$$

essendo θ_+ e θ_- gli angoli sotto cui da Q sono visti i bordi dei due dischi. In particolare nel centro $\theta_+ = \theta_- = \theta_0$ e

$$\mathbf{E}_{Q,0} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} (1 - \cos\theta_0)$$

mentre su una base, per esempio quella negativa, $\theta_- = \pi/2$ e

$$\mathbf{E}_{Q,1} = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} (2 - \cos\theta_+) = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{2} \cos\theta_+\right) \quad ;$$

si verifica che il campo diminuisce spostandosi dal centro verso le basi. Notiamo che si tratta in ogni caso di un campo depolarizzante.

Applicando (5.41) abbiamo il campo nella cavità cilindrica; nel centro

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{Q,0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} (1 - \cos\theta_0) \quad (5.42)$$

Esaminiamo due casi limite.

a) Cavità piatta, $R \gg h$.

L'angolo θ_0 coincide in pratica con $\pi/2$ e (5.42) diventa

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \kappa \mathbf{E} \quad , \quad (5.43)$$

se introduciamo (5.11). Il campo elettrico è maggiore nella cavità vuota che nel dielettrico; l'induzione dielettrica vale

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad .$$

pertanto eguale nel dielettrico e nella cavità. Abbiamo ritrovato il risultato del paragrafo 5.7.

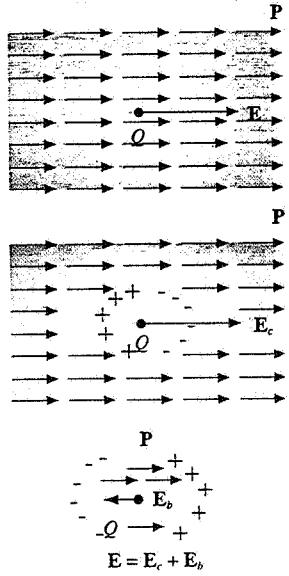


Figura 5.29

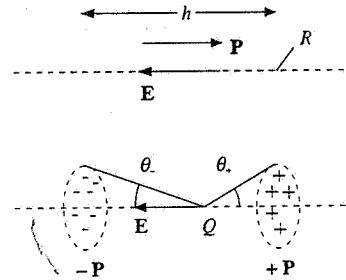


Figura 5.30

b) Cavità lunga e sottile, $R \ll h$.

In questo caso l'angolo θ_0 è piccolo e possiamo scrivere

$$\cos \theta_0 \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{2} = 1 - \frac{2R^2}{h^2}$$

Utilizziamo anche (5.11) e da (5.42) otteniamo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{2R^2}{\epsilon_0 h^2} \mathbf{P} = \left(1 + \frac{2R^2}{h^2} \chi\right) \mathbf{E}$$

Al limite, per $R/h = 0$,

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$$

il campo elettrico nella cavità è eguale a quello nel dielettrico (paragrafo 5.4).

Cavità sferica

Una sfera uniformemente polarizzata ha una densità superficiale di carica di polarizzazione data da (5.12), con P costante. Una carica distribuita in tal modo produce, come visto nell'esempio 4.23, un campo elettrico uniforme all'interno della superficie sferica, dato da (4.41)

$$\mathbf{E}_b = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Secondo (5.41) il campo elettrico all'interno di una cavità sferica è quindi

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \mathbf{E} = \frac{\kappa+2}{3} \mathbf{E} \quad (5.44)$$

Siccome è sempre $\kappa > 1$, il campo elettrico nella cavità è maggiore di quello nel dielettrico. L'induzione dielettrica nella cavità vale

Figura 5.31

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3}$$

diversa dal valore $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ nel dielettrico (in modulo $D_c < D$).

La polarizzazione nel dielettrico oltre che in funzione di \mathbf{E} si può scrivere in funzione di \mathbf{E}_c , servendosi di (5.44):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = 3 \epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_c \quad (5.45)$$

Nella figura 5.32 sono mostrate le linee di forza nel dielettrico e nella cavità sferica vuota.

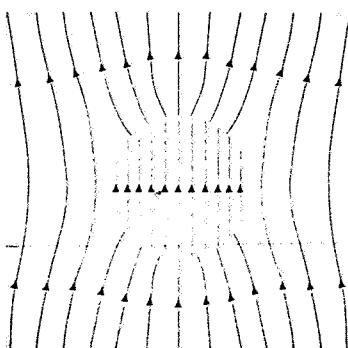


Figura 5.31

I risultati trovati si possono riassumere dicendo che il campo nella cavità è maggiore o al più eguale a quello nel dielettrico secondo la formula

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.46)$$

dove γ è un coefficiente numerico che dipende dalla forma della cavità: nei casi visti

$\gamma = 0$	cavità cilindrica sottile
$\gamma = 1$	cavità cilindrica piatta
$\gamma = \frac{1}{3}$	cavità sferica

Notiamo da (5.41) che è $\mathbf{E}_b = -\gamma \mathbf{P} / \epsilon_0$: γ misura pertanto l'*effetto depolarizzante* che si ha nel blocco di dielettrico e per questa ragione di chiama anche *fattore di depolarizzazione*.

Esempio 5.5

Una sfera di dielettrico lineare e omogeneo è immersa in un campo elettrico uniforme \mathbf{E}_0 .

Calcolare il campo elettrico e la polarizzazione nella sfera.

Soluzione

Premettiamo un risultato importante, che ci permette di capire come si polarizza la sfera. Un dielettrico di forma qualsiasi in generale non si polarizza uniformemente quando è posto in un campo elettrico uniforme: ciò avviene solo se la sua forma è ellisoidica o, in particolare, sferica. Noi abbiamo implicitamente ammesso che la polarizzazione sia uniforme in una lastra piana ortogonale a un campo uniforme in quanto supponiamo trascurabili gli effetti di bordo.

La sfera in questione si polarizza dunque uniformemente. Riprendendo quanto detto prima introducendo l'argomento cavità sferica, il campo depolarizzante dovuto alla densità superficiale di carica di polarizzazione è $\mathbf{E}_b = -\mathbf{P} / 3\epsilon_0$ e quindi il campo all'interno della sfera è

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Ricorriamo a (5.11) e otteniamo

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{P} = 3\epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0 \quad .$$

All'esterno la sfera produce un campo che è pari a quello di un dipolo posto nel suo centro e di momento elettrico $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_\sigma$, dove R è il raggio della sfera e \mathbf{E}_σ l'opposto del campo prodotto all'interno dalla densità superficiale di carica sulla sfera (esempio 4.23). Nel nostro caso $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{P} / 3\epsilon_0$ e quindi

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0 \quad .$$

Si osservi che tale momento è pari al prodotto della polarizzazione per il volume della sfera, in accordo con la definizione di polarizzazione come momento di dipolo elettrico dell'unità di volume. Abbiamo una conferma diretta che il campo di un dielettrico polarizzato è pari ad un campo di dipolo.

La perturbazione di \mathbf{E}_0 da parte del campo della sfera decresce rapidamente con la distanza dal centro della sfera. L'andamento delle linee di campo è mostrato in figura 5.33; si confronti con la figura 5.32 relativa alla cavità sferica e con la figura 4.54 relativa alla sfera conduttrice.

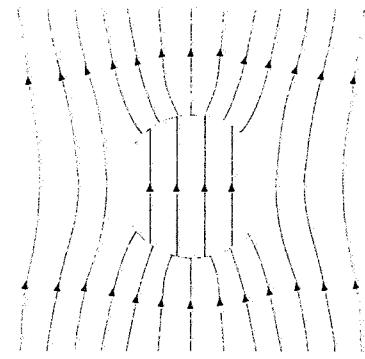


Figura 5.33

5.9 L'energia elettrostatica nei dielettrici

Il ragionamento che nel paragrafo 4.7 ha portato all'espressione dell'energia elettrostatica di un condensatore piano caricato con carica q può essere ripetuto anche se lo spazio tra le armature è riempito completamente da un dielettrico di costante dielettrica relativa κ , con il risultato

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{2\epsilon \Sigma / h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Sigma h \quad . \quad (5.47)$$

Vediamo le stesse possibilità di interpretazione a suo tempo discusse: da una parte l'energia è legata alle cariche, dall'altra al campo elettrico. Ora abbiamo in più la dipendenza dalle proprietà del dielettrico che riempie lo spazio in cui esiste il

campo elettrico; nella (5.47) compare κ e rispetto al caso in cui il dielettrico è il vuoto l'energia è diminuita proprio del fattore κ . La quantità

Densità di energia elettrostatica

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} \quad (5.48)$$

rappresenta la *densità di energia elettrostatica*.

Pure adesso la formula (5.48) è di validità generale: in una regione in cui esiste campo elettrico l'energia elettrostatica è distribuita con densità (5.48) e vale

Energia elettrostatica

$$U_e = \int_{\tau} u_e d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau \quad (5.49)$$

Nei dielettrici anisotropi la (5.48) diventa

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (5.50)$$

e il prodotto scalare mette in evidenza che in questi dielettrici i campi \mathbf{E} e \mathbf{D} non sono paralleli.

Poiché per riempire di campo elettrico un dato volume occorre spendere per unità di volume il lavoro $1/2 \varepsilon_0 E^2$ e in presenza di dielettrico tale lavoro risulta, a parità di campo elettrico, $1/2 \varepsilon_0 \kappa E^2$, la differenza $1/2 \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2$ rappresenta evidentemente il lavoro necessario per polarizzare l'unità di volume del dielettrico (lavoro che nel vuoto è nullo). In effetti, per separare di dx la carica q dalla carica $-q$ occorre spendere il lavoro $dW = E q dx = E dp$, dove dp è il momento di dipolo elettrico creato con la separazione dx ; nell'unità di volume

$$dW = E dP = E \varepsilon_0 (\kappa - 1) dE$$

e integrando si ottiene appunto $1/2 \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2$.

Esempio 5.6

In un condensatore piano, le cui armature sono quadrate di lato d e distanti h , è parzialmente inserita una lastra di dielettrico di spessore h . Assumendo che la carica libera sulle armature sia costante, calcolare in funzione della posizione della lastra le densità di carica, la d.d.p., la capacità e l'energia elettrostatica.

Soluzione

Le armature sono equipotenziali e quindi il campo elettrico è lo stesso sia nella regione vuota larga $d - x$ che nella regione riempita di dielettrico larga x . Dette σ_1 e σ_2 le densità di carica libera sulle armature in corrispondenza delle due zone, si ha

$$E = E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = E_2 = \frac{\sigma_2}{\kappa \varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_2 = \kappa \sigma_1$$

La maggior densità di carica libera sulle armature in corrispondenza del dielettrico compensa la carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \sigma_2 - \sigma_1 = (\kappa - 1) \sigma_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_2$$

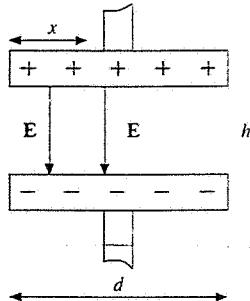


Figura 5.34

Il vettore induzione dielettrica è maggiore nel dielettrico che nel vuoto:

$$D_1 = \epsilon_0 E \quad , \quad D_2 = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 E + \epsilon_0 (\kappa - 1) E = \epsilon_0 \kappa E = \kappa D_1$$

La carica totale del condensatore è

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 (d - x) d + \sigma_2 x d$$

e quindi, essendo $\sigma_2 = \kappa \sigma_1$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{q}{d[d + (\kappa - 1)x]} \quad , \quad \sigma_2(x) = \frac{\kappa q}{d[d + (\kappa - 1)x]} \quad , \\ E(x) &= \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]} \quad , \\ \sigma_p(x) &= \sigma_2(x) - \sigma_1(x) = \frac{(\kappa - 1)q}{d[d + (\kappa - 1)x]} \quad . \end{aligned}$$

La d.d.p. ai capi del condensatore è

$$V(x) = E h = \frac{\sigma_1(x)}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma_2(x)}{\kappa \epsilon_0} h = \frac{q h}{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]}$$

e la capacità del condensatore vale

$$C(x) = \frac{q}{V(x)} = \frac{\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]}{h} = \frac{\epsilon_0 d (d - x)}{h} + \frac{\epsilon_0 \kappa dx}{h} \quad ,$$

equivalente, come c'era da aspettarsi, alla *capacità di due condensatori in parallelo*. L'energia elettrostatica del sistema si scrive

$$U_e(x) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d [d + (\kappa - 1)x]} \quad (5.51)$$

e si verifica subito che questa espressione corrisponde a

$$U_e(x) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d (d - x) h + \frac{1}{2} \epsilon_0 \kappa E^2 d x h \quad .$$

Esempio 5.7

Lo spazio compreso tra le armature di un condensatore sferico, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 , è riempito parzialmente da un dielettrico lineare e omogeneo di costante dielettrica relativa κ che occupa la corona sferica compresa tra R_1 e R_0 , con $R_0 < R_2$. Calcolare l'energia elettrostatica del sistema e la densità di carica di polarizzazione.

Soluzione

Per ragioni di simmetria E , P , D sono radiali e dipendono solo da r . L'induzione dielettrica si ricava come nell'esempio 5.1 in quanto il suo flusso dipende solo dalla carica libera sulle armature q . Vale quindi in tutta l'intercapedine la (5.29):

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} u_r \quad .$$

Da questa e da (5.48) si calcola l'energia elettrostatica del sistema, tenendo presente che

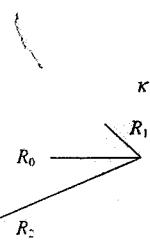


Figura 5.35

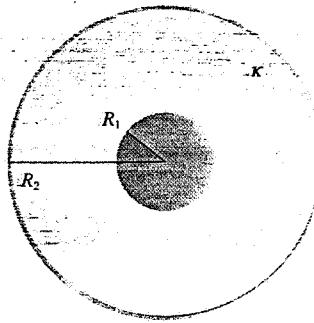


Figura 5.36

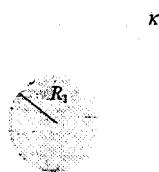


Figura 5.37

c'è una variazione di dielettrico per $r = R_0$:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_0} \frac{D^2}{2\kappa \epsilon_0} 4\pi r^2 dr + \int_{R_0}^{R_2} \frac{D^2}{2\epsilon_0} 4\pi r^2 dr \\ = \frac{q^2}{8\pi \kappa \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q^2}{2C}$$

La capacità C è quella della serie di due condensatori C_1 e C_2 sferici, il primo con dielettrico e il secondo vuoto.

La densità di carica di polarizzazione sulle due facce della corona sferica dielettrica è

$$\sigma_p(R_1) = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = -\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R_1^2},$$

$$\sigma_p(R_2) = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R_2^2},$$

avendo utilizzato (5.27). È evidente che

$$q_p(R_1) = \sigma_p(R_1) 4\pi R_1^2 = -\frac{\kappa-1}{\kappa} q = -q_p(R_2) = -\sigma_p(R_2) 4\pi R_2^2.$$

All'interno del dielettrico non ci sono cariche libere per cui $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ e di conseguenza $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, essendo κ costante. La verifica diretta è immediata, come nell'esempio 5.1.

Se R_0 coincide con R_2 il condensatore è totalmente riempito dal dielettrico e l'energia vale

$$U_e = \frac{q^2}{2} \left[\frac{1}{4\pi \kappa \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = \frac{q^2}{2C},$$

con $C = 4\pi \kappa \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, κ volte maggiore che nel vuoto.

Infine se R_2 tende all'infinito

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi \kappa \epsilon_0 R_1} = \frac{q^2}{2C}, \quad C = 4\pi \kappa \epsilon_0 R_1.$$

Abbiamo così l'energia elettrostatica e la capacità di una sfera conduttrice immersa in un dielettrico indefinito (esempio 5.1).

Esempio 5.8

Calcolare la forza con cui la lastra di dielettrico dell'esempio 5.6 è attratta dentro il condensatore. Esaminare anche il caso in cui la d.d.p. ai capi del condensatore resti costante.

Soluzione

L'energia elettrostatica è data da (5.51); lo spostamento della lastra comporta una variazione di energia e alla fine, quando il condensatore è completamente riempito dalla lastra, l'energia è minima. Essendo il sistema a carica costante, cioè isolato, la diminuzione di energia corrisponde al lavoro fornito dalla forza elettrica che vale

$$F(x) = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{q^2 h}{2\epsilon_0 d} \frac{\kappa-1}{[d + (\kappa-1)x]^2}$$

ovvero, ricorrendo all'espressione del campo elettrico calcolata nell'esempio 5.6,

$$F(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2(x) \Sigma ; \quad (5.52)$$

$\Sigma = hd$ è la sezione della lastra, cioè la superficie su cui agisce la forza F . Si noti che questa dipende da x .

Il processo considerato avviene a *carica costante*. Se invece si mantiene *costante la d.d.p.* tra le armature, tramite il collegamento con un generatore, il campo elettrico è sempre costante, indipendentemente dalla posizione della lastra, e vale $E = V/h$. L'energia elettrostatica si scrive più convenientemente nella forma

$$U_e = \frac{1}{2} C(x) V^2 = \frac{V^2}{2} \varepsilon_0 \frac{d}{h} [d + (\kappa - 1)x] ,$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione della capacità ricavata nell'esempio 5.6. L'energia aumenta, per un avanzamento dx , della quantità

$$dU_e = \frac{V^2}{2} dC(x) = \frac{V^2 \varepsilon_0 d}{2h} (\kappa - 1) dx .$$

Seguiamo in questo caso lo stesso ragionamento sviluppato nel paragrafo 4.9. Per mantenere costante la d.d.p. V in presenza di un aumento di capacità $dC(x)$ il generatore deve spostare la carica $dq = V dC$ dall'armatura negativa a quella positiva compiendo il lavoro $dW_{\text{gen}} = V dq = V^2 dC$ a spese della propria energia U_{gen} che varia di $dU_{\text{gen}} = -dW_{\text{gen}} = -V^2 dC$. Osserviamo che ritroviamo la metà di questo lavoro nell'aumento di energia elettrostatica dU_e e quindi la restante metà è spesa come lavoro per fare avanzare la lastra,

$$dW = \frac{V^2}{2} dC = dU_e ;$$

la forza corrispondente, indipendente da x , risulta

$$F = \frac{dU_e}{dx} = \frac{V^2 \varepsilon_0 d (\kappa - 1)}{2h} .$$

Poiché

$$dU_{\text{tot}} = d(U_{\text{gen}} + U_e) = -V^2 dC + \frac{V^2}{2} dC = -\frac{V^2}{2} dC = -dU_e$$

la forza appena calcolata è $-dU_{\text{tot}}/dx$.

Sostituendo Eh al posto di V

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2 hd = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2 \Sigma .$$

formalmente eguale a (5.52).

Riassumendo: nel processo a *carica costante* in cui $dU_{\text{tot}} = dU_e$

$$F = - \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{q=\text{cost}} ,$$

mentre nel processo a potenziale costante in cui $dU_{\text{tot}} = -dU_e$

$$F = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{V=\text{cost}} ,$$

Abbiamo ritrovato in questo caso, che è fisicamente diverso, le relazioni (4.38, 4.39). In effetti esse rivestono carattere generale: *la forza agente si può sempre calcolare come l'opposto del gradiente dell'energia elettrostatica se il processo è a carica costante e come gradiente della stessa energia se il processo è a potenziale costante*.

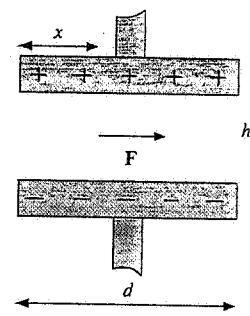


Figura 5.38

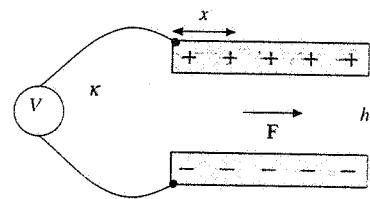


Figura 5.39

Esempio 5.9

Una sfera di dielettrico lineare e omogeneo è posta nel campo di una carica puntiforme; il raggio R della sfera è molto minore della distanza r tra la carica puntiforme e il centro della sfera. Calcolare la forza subita dalla sfera.

Soluzione

La situazione è analoga a quella dell'esempio 4.24. La forza sulla sfera è in ogni caso attrattiva perché, a causa della polarizzazione, nella parte di sfera rivolta alla carica puntiforme compaiono cariche di polarizzazione di segno opposto a quello della carica inducente, mentre le cariche di segno eguale compaiono sull'altra parte della sfera, più lontane.

Supponendo uniformi campo e polarizzazione all'interno della sfera e detto E_0 il valore del campo dovuto alla carica puntiforme, sappiamo dall'esempio 5.5 che la polarizzazione vale

$$\mathbf{P} = 3\epsilon_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0$$

e che il momento di dipolo elettrico della sfera è

$$\mathbf{p} = 4\pi \epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0$$

L'energia elettrostatica di questo dipolo nel campo della carica è

$$U_e = -pE_0 = -4\pi \epsilon_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2}{(4\pi \epsilon_0 r^2)^2} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2 R^3}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^4}$$

e la forza risulta

$$\mathbf{F} = -\frac{dU_e}{dr} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \frac{q^2 R^3}{\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^5}$$

variabile molto rapidamente con la distanza. Il risultato spiega l'attrazione di corpi isolanti neutri da parte di corpi carichi.

Osserviamo che se κ è molto grande $(\kappa - 1) / (\kappa + 2)$ vale circa 1 e la forza è la stessa di quella ricavata per una sferetta conduttrice: il caso del conduttore appare come il limite per $\kappa \rightarrow \infty$ del caso del dielettrico (risultato questo che è di carattere generale).

5.10 Meccanismi di polarizzazione nei dielettrici isotropi

Nello studio delle proprietà macroscopiche dei dielettrici isotropi abbiamo ammesso la validità della legge di proporzionalità tra polarizzazione e campo agente nel dielettrico

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} . \quad (5.11)$$

Vogliamo ora discutere i meccanismi di *polarizzazione elettronica* e di *polarizzazione per orientamento* al fine di dimostrare la validità della (5.11) e di ottenere un'espressione della suscettività elettrica in termini di grandezze relative ai processi elementari da cui dipende il fenomeno della polarizzazione.

Polarizzazione elettronica in un gas

Discutiamo innanzitutto la polarizzazione di un gas costituito da molecole non polari. Nell'atomo non perturbato la carica negativa è distribuita nel volume dell'atomo con densità media

$$\rho_{-} = -Ze / \frac{4}{3}\pi R^3$$

e il suo centro coincide col nucleo. Sotto l'azione del campo elettrico \mathbf{E}_{loc} effettivamente agente sul singolo atomo la nube elettronica risente di una forza $\mathbf{F}_{\text{loc}} = -Ze \mathbf{E}_{\text{loc}}$, che causa uno spostamento del centro rispetto al nucleo di una quantità x . Il nucleo risente in tal caso di una forza attrattiva che possiamo calcolare come dovuta al campo (3.12) di una distribuzione sferica uniforme di carica,

$$\mathbf{E}_{-} = \rho_{-} \frac{\mathbf{x}}{3\epsilon_0} = -\frac{Ze \mathbf{x}}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$

cioè di una forza $\mathbf{F} = Ze \mathbf{E}_{-}$. La forza che il nucleo esercita sulla nube elettronica vale $\mathbf{F}_e = -\mathbf{F} = -Ze \mathbf{E}_e$ e si raggiunge l'equilibrio quando

$$\mathbf{F}_{\text{loc}} + \mathbf{F}_e = -Ze (\mathbf{E}_{\text{loc}} + \mathbf{E}_{-}) = 0$$

ovvero quando

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = -\mathbf{E}_e \Rightarrow Ze \mathbf{x} = 4\pi \epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_{\text{loc}}$$

D'altra parte, secondo (5.9), $Ze \mathbf{x}$ è il momento di dipolo elettrico \mathbf{p}_e acquistato dall'atomo, per cui possiamo scrivere

$$\mathbf{p}_e = \epsilon_0 \alpha_e \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (5.53)$$

con

$$\alpha_e = 4\pi R^3 \quad (5.54)$$

coefficiente chiamato *polarizzabilità elettronica*, caratteristico della sostanza e pari a tre volte il volume dell'atomo. La proporzionalità tra \mathbf{p}_e e \mathbf{E}_{loc} riflette la proporzionalità tra \mathbf{E}_{loc} e la deformazione \mathbf{x} da esso indotta.

Detto n il numero di atomi per unità di volume, la polarizzazione (5.10) è data da

$$\mathbf{P} = n \mathbf{p}_e = \epsilon_0 n \alpha_e \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (5.55)$$

Il campo \mathbf{E}_{loc} agente sul singolo atomo a rigore non coincide con il campo macroscopico \mathbf{E} presente nel dielettrico, in cui è compreso il contributo dell'atomo interessato. Questo contributo, come vedremo nel paragrafo 5.11, è però trascurabile in un gas in condizioni standard di temperatura e pressione; limitandoci per ora a questo caso nella (5.55) sostituendo \mathbf{E}_{loc} con \mathbf{E} ottenendo $\mathbf{P} = \epsilon_0 n \alpha_e \mathbf{E}$. Dal confronto con (5.11) si ottiene

$$\chi = n \alpha_e \quad (5.56)$$

Abbiamo così giustificato la relazione di proporzionalità tra \mathbf{P} e \mathbf{E} e ottenuto la *suscettività elettrica come somma delle polarizzabilità dei singoli atomi contenuti nell'unità di volume*.

Valutiamo ora l'ordine di grandezza della suscettività di un gas ideale. Il volume molare è $\tau_A = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ e contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ atomi. Quindi

$$n = \frac{N_A}{\tau_A} = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ atomi/m}^3$$

Poniamo il raggio R di un atomo pari a 10^{-10} m e otteniamo

$$\chi = n \alpha_e = n 4\pi R^3 = 3.4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \kappa = 1 + \chi = 1.00034$$

Nella tabella 5.2 sono indicati alcuni valori sperimentali, a 20°C e pressione atmosferica.

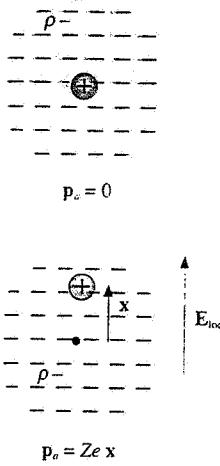


Figura 5.40

Polarizzabilità elettronica

Suscettività elettrica

Tabella 5.2 Costanti dielettriche di gas non polari

Gas	Costante dielettrica relativa κ
anidride carbonica	1.000985
argon	1.000545
azoto	1.000580
elio	1.000068
idrogeno	1.000264
ossigeno	1.000523

Esempio 5.10

La costante dielettrica dell'azoto gassoso a 20°C e alla pressione atmosferica è $\kappa = 1.000580$. Supponendo che il meccanismo di polarizzazione avvenga a livello della molecola di azoto, calcolare il valore della polarizzabilità elettronica e del momento di dipolo elementare in un campo $E = 3 \cdot 10^6$ V/m. Il numero di massa dell'azoto è $A = 14$ e la densità, nelle condizioni suddette, è $\rho = 1.25$ kg/m³.

Soluzione

Per applicare (5.56) calcoliamo il numero di molecole per unità di volume con la formula

$$n = \frac{N_A}{2A} \rho$$

Infatti N_A è il numero di molecole per mole, $2A$ il numero di chilogrammi per mole (la molecola di azoto è biatomica) e ρ il numero di chilogrammi per m³, così che $N_A \rho / 2A$ dà appunto il numero di molecole per m³. Risulta

$$n = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 1.25 = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ molecole / m}^3.$$

La polarizzabilità elettronica vale

$$\alpha_e = \chi / n = (\kappa - 1) / n = 2.16 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3.$$

Nel campo E dato il momento di dipolo elementare, secondo (5.53), vale

$$p_a = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2.16 \cdot 10^{-29} \cdot 3 \cdot 10^6 = 5.73 \cdot 10^{-34} \text{ Cm}.$$

Se questo momento fosse dovuto allo spostamento di tutte le cariche della molecola ($Z = 14$), sarebbe $x = p_a / Ze = 0.26 \cdot 10^{-15}$ m. Questo calcolo indicativo mostra quanto siano piccoli gli spostamenti che danno luogo al fenomeno della polarizzazione elettronica: essi sono dell'ordine delle dimensioni di un nucleo.

Polarizzazione per orientamento nei gas

Consideriamo ora una molecola che possiede un momento di dipolo permanente p_0 , come la molecola dell'acqua H₂O. Tali molecole, dette *polari*, contengono due o più atomi, di specie diverse, disposti secondo configurazioni in cui il centro della carica negativa non coincide con quello della carica positiva (essi invece coincidono ad esempio nelle molecole H₂, N₂, O₂, CH₄). Nelle molecole d'acqua il centro della carica positiva sta praticamente nel punto di mezzo della congiungente gli atomi di idrogeno, mentre quello della carica negativa coincide quasi col nucleo di ossigeno: ne deriva un momento di dipolo che vale circa $p_0 = 6 \cdot 10^{-30}$ Cm, molto maggiore dei valori tipici della polarizzazione elettronica.

In assenza di campo elettrico i singoli dipoli, almeno se la sostanza è in fase fluida, sono diretti casualmente in tutte le direzioni così che in ogni elemento di volume $d\tau$ il momento di dipolo elettrico risultante è eguale a zero e quindi la polarizzazione è nulla. Quando si applica un campo elettrico dall'esterno ha luogo la polarizzazione elettronica, ma succede anche che su ogni dipolo permanente agisce il momento (2.68)

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_{loc} ,$$

che tende a orientare \mathbf{p}_0 concordemente a \mathbf{E}_{loc} . Se tutte le molecole si allineassero risulterebbe una polarizzazione intensa; però, a temperature ordinarie e con campi elettrici non particolarmente intensi, gli urti tra le molecole dovuti all'agitazione termica permettono un *allineamento soltanto parziale* che si rappresenta con un momento di dipolo medio $\langle \mathbf{p}_a \rangle$, parallelo a \mathbf{E}_{loc} e ad esso proporzionale. Ne ha origine una polarizzazione che si calcola con un metodo classico di meccanica statistica, sviluppato da P. Debye.

La funzione che descrive il comportamento statistico di un insieme di N dipoli alla temperatura T e sottoposti a un campo elettrico \mathbf{E}_{loc} è la *funzione di distribuzione di Boltzmann*. Precisamente, se N molecole sono in equilibrio termico alla temperatura T in un campo di forza conservativo in cui ciascuna molecola ha un'energia potenziale U , la *frazione di molecole* con energia compresa tra U e $U + dU$ è data da

$$\frac{dN}{N} = A e^{-U/k_B T} dU , \quad (5.57)$$

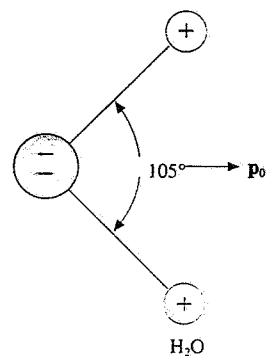


Figura 5.41

Funzione di Boltzmann

dove $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K è la *costante di Boltzmann* e A una costante, che ha le dimensioni dell'inverso di un'energia, determinata dalla condizione di normalizzazione

$$\int \frac{dN}{N} = A \int e^{-U/k_B T} dU = 1 \quad \text{ovvero} \quad \int dN = N .$$

È importante notare che la (5.57) è *valida* solamente se i dipoli, pur interagendo tramite gli urti, rimangono liberi. Ciò è senz'altro vero nei gas in condizioni normali in cui le molecole sono mediamente lontane tra loro, ma può non verificarsi in un liquido in cui le molecole sono praticamente a contatto. Se ad esempio le molecole interagendo tendono a formare strutture composte da *catene di molecole*, la trattazione che segue non è applicabile.

Il dipolo \mathbf{p}_0 nel campo \mathbf{E}_{loc} possiede l'energia elettrostatica (2.67)

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_{loc} = -p_0 E_{loc} \cos\theta$$

e la (5.57) diviene

$$\frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} e^{p_0 E_{loc} \cos\theta / k_B T} d\cos\theta .$$

In condizioni ordinarie l'argomento dell'esponenziale è molto minore di 1, il che vuol dire che l'energia potenziale del dipolo in presenza del campo \mathbf{E}_{loc} è molto minore dell'energia legata all'agitazione termica: l'*interazione elettrica* è solo una *piccola perturbazione* (ad esempio $p_0 E_{loc}$ per vapor d'acqua sottoposto a 10^6 V/m è $6 \cdot 10^{-24}$ J, mentre $k_B T$ è $4 \cdot 10^{-21}$ J a 300 K). Allora

$$\frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} \left(1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos\theta}{k_B T} \right) d\cos\theta .$$

Imponiamo la condizione di normalizzazione:

$$\int \frac{dN}{N} = -A p_0 E_{loc} \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{p_0 E_{loc} \cos\theta}{k_B T} \right) d\cos\theta = -A p_0 E_{loc} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta = 1$$

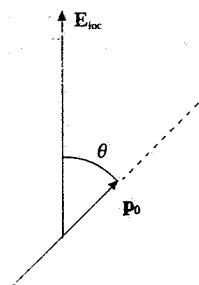


Figura 5.42

e si ricava $A = 1/2 p_0 E_{\text{loc}}$, per cui

$$\frac{dN}{N} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E_{\text{loc}} \cos \theta}{k_B T} \right) d \cos \theta . \quad (5.58)$$

Questa espressione dà la frazione di molecole con momento di dipolo p_0 che forma un angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$ con il campo elettrico E_{loc} (passando da zero a π , $d \cos \theta$ è negativo e dN risulta positivo).

Ciascuna molecola ha una componente del momento di dipolo p_0 parallela al campo E_{loc} data da $p(\theta) = p_0 \cos \theta$ e la somma di queste componenti dà il momento di dipolo risultante nella direzione di E_{loc} : le componenti ortogonali a E_{loc} danno somma nulla, per ragioni di simmetria. Il momento di dipolo per dN molecole, con dN dato da (5.58), è

$$dp = p_0 \cos \theta dN = -\frac{N}{2} p_0 \left(1 + \frac{p_0 E_{\text{loc}} \cos \theta}{k_B T} \right) \cos \theta d \cos \theta$$

e, integrando, il momento di dipolo di N molecole risulta

$$p = \int dp = -\frac{N}{2} p_0 \int_1^{-1} \left(1 + \frac{p_0 E_{\text{loc}} \cos \theta}{k_B T} \right) \cos \theta d \cos \theta = -\frac{N p_0^2 E_{\text{loc}}}{3 k_B T} .$$

Il momento di dipolo medio acquistato da ogni singola molecola è

$$\langle \mathbf{p}_a \rangle = \frac{\mathbf{p}}{N} = \frac{p_0^2}{3 k_B T} \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (5.59)$$

e risulta parallelo e concorde a E_{loc} . Sottolineamo che questa è una proprietà media: da (5.58) si vede che ci sono dipoli con momento ad un angolo rispetto a E_{loc} maggiore di $\pi/2$, però la *media pesata* su N molecole è *concorde* a E_{loc} . Sotto questo aspetto c'è una profonda differenza con il meccanismo di polarizzazione elettronica, in cui tutti i contributi sono dello stesso segno.

Scriviamo (5.59) in modo analogo a (5.53):

$$\langle \mathbf{p}_a \rangle = \epsilon_0 \alpha_D \mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (5.60)$$

con

Polarizzabilità per orientamento

$$\alpha_D = \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} , \quad (5.61)$$

polarizzabilità per orientamento (la D ricorda Debye). Detto n il numero di molecole per unità di volume, la polarizzazione vale

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p}_a \rangle = \epsilon_0 n \alpha_D \mathbf{E}_{\text{loc}} .$$

Approssimiamo, trattandosi di un gas, il campo locale con il campo macroscopico e utilizziamo (5.11) ottenendo

Suscettività elettrica

$$\chi = n \alpha_D = \frac{n p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T} . \quad (5.62)$$

Concludiamo che anche il meccanismo di polarizzazione per orientamento porta nei gas a una *relazione lineare* tra \mathbf{P} e \mathbf{E} e a una interpretazione della suscettività in termini microscopici.

La *polarizzabilità complessiva* è la somma della polarizzabilità elettronica e di quella per orientamento,

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_D = \alpha_e + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} ,$$

Polarizzabilità complessiva

e la suscettività elettrica complessiva è

$$\chi = n \alpha = n (\alpha_e + \alpha_D) \quad (5.63)$$

ovvero, più esplicitamente,

$$\kappa - 1 = n \left(\alpha_e + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \right) . \quad (5.64)$$

In un dielettrico polare di norma l'importanza della polarizzazione per orientamento è maggiore di quella della polarizzazione elettronica. Poiché un meccanismo dipende dalla temperatura mentre l'altro ne è indipendente, una misura della costante dielettrica relativa in funzione della temperatura, mantenendo costante il numero di n di molecole per unità di volume, permette di separare i due contributi. La (5.64) dice che $\kappa - 1$ in funzione di $1/T$ varia linearmente: l'intercetta (estrapolata) con l'asse delle ordinate dà α_e e il coefficiente angolare dà p_0^2 . *due informazioni microscopiche ottenute da una misura macroscopica*, come è quella della costante dielettrica relativa di un gas.

Esempio 5.11

I dati relativi all'andamento della suscettività elettrica del vapor d'acqua in funzione della temperatura possono essere descritti dalla retta di equazione

$$\kappa - 1 = 0.25 \cdot 10^{-3} + \frac{1.47}{T}$$

Nella misura, eseguita a numero di molecole per unità di volume costante, quando la temperatura del vapor d'acqua è $T = 393$ K la pressione è $p = 0.75 \cdot 10^5$ Pa. Determinare i parametri microscopici che descrivono il meccanismo di polarizzazione della singola molecola d'acqua. Determinare inoltre, quando il vapore si trova nel particolare stato sopra indicato ed è sottoposto ad un campo $E = 10^6$ V/m, quanto vale la sua polarizzazione.

Soluzione

Dalla (5.64) sappiamo che $\kappa - 1 = n \alpha_e$ quando $1/T = 0$ e quindi

$$n \alpha_e = 0.25 \cdot 10^{-3}$$

La pendenza della retta è

$$\frac{n p_0^2}{3\epsilon_0 k_B} = 1.47$$

Il numero di molecole per unità di volume si calcola a partire dalla formula $n = N_A \rho / A$, vista nell'esempio 5.10, e dall'equazione di stato per $T = 393$ K e $p = 0.75 \cdot 10^5$ Pa (trattando il vapor d'acqua come un gas ideale):

$$p = n_m RT \Rightarrow p \frac{M}{\rho} = n_m RT \quad \rho = \frac{pM}{n_m RT} = \frac{pA}{RT}$$

M è la massa di gas, n_m il numero di moli e $M = n_m A$. Quindi:

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{N_A p}{RT} = \frac{p}{k_B T} = 1.38 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3 ,$$

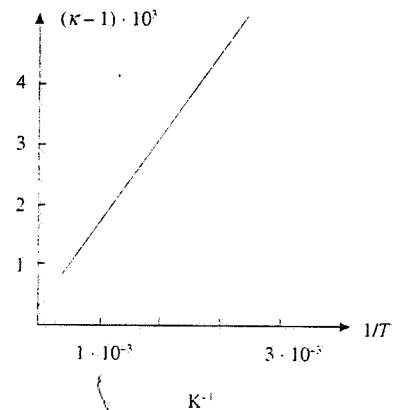


Figura 5.43

$$\alpha_e = 1.87 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3, \quad p_0 = 6.25 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$$

Alla temperatura $T = 393 \text{ K}$, secondo (5.61),

$$\alpha_D = \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} = \frac{1.47}{n T} = 2.71 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3,$$

pari a $14.7 \alpha_e$: si verifica la preponderanza del meccanismo di polarizzazione per orientamento.

A $T = 393 \text{ K}$ e $p = 0.75 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ la suscettività elettrica del vapore d'acqua vale $\kappa - 1 = 4 \cdot 10^{-3}$ e la polarizzazione nel campo E dato vale

$$P = \epsilon_0 (\kappa - 1) E = 3.54 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Osserviamo che se i dipoli fossero tutti orientati, con $n = 1.38 \cdot 10^{25} \text{ molecole/m}^3$ e $p_0 = 6.25 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$, sarebbe $P^* = n p_0 = 8.63 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2 \approx 2.44 \cdot 10^3 P$. Nella realtà, è come se fosse orientato un solo dipolo p_0 su 2440.

5.11 La costante dielettrica dei liquidi. Equazione di Clausius-Mossotti

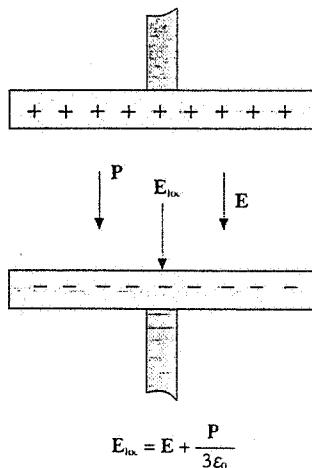


Figura 5.44

Nei gas è lecito approssimare E_{loc} con il campo medio macroscopico e quindi le formule sono immediatamente utilizzabili.

Abbiamo già notato che il campo microscopico locale comprende l'azione di tutti i dipoli del dielettrico escluso quello interessato, mentre nel campo medio nessun contributo è escluso. Supponendo sferica una molecola, il campo locale può essere pensato come quello agente all'interno di una cavità sferica, campo che abbiamo calcolato nel paragrafo 5.8 ottenendo la (5.44). Assumiamo quindi che il campo realmente agente su una molecola sia

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}, \quad (5.66)$$

dove il secondo addendo rappresenta il riferimento del campo medio dovuto all'azione locale dei dipoli che circondano la molecola interessata. Inserendo nella (5.65)

$$P = \epsilon_0 n \alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

e risolvendo nella polarizzazione si ottiene

$$P = \epsilon_0 \frac{\frac{n \alpha}{n \alpha}}{1 - \frac{n \alpha}{3}} E, \quad (5.67)$$

relazione che lega la polarizzazione nel dielettrico al campo medio macroscopico. Di conseguenza, da (5.11),

$$\chi = \kappa - 1 = \frac{\frac{n \alpha}{n \alpha}}{1 - \frac{n \alpha}{3}}, \quad (5.68)$$

che è un'espressione più generale di (5.63).

Nei gas $n \alpha / 3 \ll 1$ e $\chi = n \alpha$, come abbiamo scritto nel paragrafo 5.10. In effetti i valori misurati della suscettività elettrica sono inferiori a 10^{-3} . Ciò equivale a dire che l'effetto

delle molecole circostanti la molecola interessata è trascurabile. Pertanto (5.67) è semplicemente $\mathbf{P} = \epsilon_0 n \alpha \mathbf{E}$ e (5.66) diventa

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \mathbf{E} = \left(1 + \frac{n\alpha}{3}\right) \mathbf{E} \approx \mathbf{E}$$

La situazione è diversa nei liquidi non polari in cui la suscettività elettrica ha valori prossimi all'unità. Per fissare le idee supponiamo che sia $\chi = 0.6$ e quindi $\chi/3 = 0.2$. Il campo locale vale

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \mathbf{E} = (1 + 0.2) \mathbf{E}$$

l'effetto delle molecole circostanti la molecola interessata porta a un incremento del 20% del campo medio \mathbf{E} .

Una verifica della relazione (5.68) si effettua nel modo seguente. L'argon gassoso, a temperatura ambiente e pressione atmosferica, ha una suscettività elettrica $\chi_g = 0.545 \cdot 10^{-3}$ e quindi

$$(n\alpha)_g = \chi_g = 0.545 \cdot 10^{-3}$$

Se ammettiamo che la polarizzazione sia la stessa nella fase gassosa e nella fase liquida, cioè sia indipendente dalla densità, deve essere

$$\frac{(n\alpha)_g}{(n\alpha)_l} = \frac{n_g}{n_l} = \frac{\rho_g}{\rho_l}$$

Il valore misurato del rapporto delle densità è $\rho_l/\rho_g = 810$, per cui $(n\alpha)_l = 0.44$. Da (5.68)

$$\chi_l = \frac{(n\alpha)_l}{1 - \frac{1}{3}(n\alpha)_l} = 0.52$$

in accordo molto buono con il valore sperimentale 0.54. L'uso della formula semplificata $\chi = n\alpha$ anche per il liquido avrebbe portato al valore $\chi = 0.44$, inferiore di circa il 20% al valore reale. Abbiamo così provato che (5.68) descrive in modo adeguato la suscettività elettrica di un liquido (non polare).

La relazione (5.68) può essere riscritta esplicitando $n\alpha$:

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{n\alpha}{3}$$

Ricordando che $n = N_A \rho / A$ otteniamo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = \frac{N_A \alpha}{3A}$$

Equazione di
Clausius-Mossotti

detta *equazione di Clausius-Mossotti*, nome riservato anche alla (5.68). Il secondo membro è caratteristico della sostanza, indipendentemente dal fatto che essa si trovi nella fase gassosa o liquida. Quindi anche il primo membro deve conservare lo stesso valore nelle due fasi, anche se κ e ρ hanno valori differenti.

Nella tabella 5.3 sono riportati i dati sperimentali per varie sostanze e si nota che l'accordo è buono, migliore per le molecole semplici che per le più complesse. Si tratta in ogni caso di molecole non polari.

L'equazione (5.69) cade in difetto se applicata all'acqua. La massa molecolare dell'acqua è $A = 18$, la densità è $\rho_l = 10^3 \text{ kg/m}^3$ e quindi

$$n_l = \frac{N_A}{A} \rho_l = 3.35 \cdot 10^{28} \text{ molecole/m}^3$$

Nell'esempio 5.11 abbiamo visto che $n_g = 1.38 \cdot 10^{25}$ molecole/m³ e che, nel particolare stato indicato, $\chi_g = (n\alpha)_g = 4 \cdot 10^{-3}$. Pertanto

$$(n\alpha)_l = \frac{n_l}{n_g} (n\alpha)_g = \frac{n_l}{n_g} \chi_g = 9.71$$

Tabella 5.3 Verifica dell'equazione di Clausius-Mossotti

			Liquido			
	$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	κ	$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right)$	$\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$	κ	$\frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right)$
elio	0.178	1.000068	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$0.15 \cdot 10^3$	1.055	$1.20 \cdot 10^{-4}$
azoto	1.251	1.000580	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$0.81 \cdot 10^3$	1.454	$1.62 \cdot 10^{-4}$
ossigeno	1.429	1.000523	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^3$	1.507	$1.21 \cdot 10^{-4}$
argon	1.784	1.000545	$1.02 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^3$	1.538	$1.06 \cdot 10^{-4}$
CS_2	3.39	1.0029	$2.85 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^3$	2.641	$2.74 \cdot 10^{-4}$
CCl_4	4.89	1.0030	$2.04 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^3$	2.238	$1.84 \cdot 10^{-4}$

e inserendo questo valore in (5.68) si ottiene $\chi_i = -4.34$, addirittura negativa, mentre la suscettività elettrica dell'acqua è $\chi_e \approx 80$.

Non si può dunque applicare l'equazione di Clausius-Mossotti alle molecole polari. In effetti nella fase liquida le molecole tendono a formare *catene* più o meno lunghe e non è più valida la teoria di Debye: non possiamo dunque fare ipotesi sull'egualanza della polarizzabilità nel gas e nel liquido. Inoltre non si può descrivere con il termine $P / 3\epsilon_0$ il contributo locale al campo.

5.12 Cenno ai meccanismi di polarizzazione nei solidi

Polarizzabilità ionica

I fenomeni di polarizzazione nei solidi sono molto vari e interessanti. In certi *cristalli* detti *ionici* (come ad esempio il cloruro di sodio) oltre alla polarizzabilità elettronica che è un fenomeno generale si manifesta la *polarizzabilità ionica*: gli ioni che formano il reticolo cristallino si spostano sotto l'azione del campo elettrico provocando la formazione di un momento di dipolo addizionale per unità di volume, cioè di una polarizzazione. La polarizzabilità totale è data da $\alpha = \alpha_e + \alpha_i$ e di norma α_i è maggiore di α_e : entrambi i meccanismi non dipendono dalla temperatura.

Elettreti

Più vistosi sono gli effetti nei solidi che hanno momenti di dipolo permanenti. Certe sostanze, dette *elettreti*, sottoposte a un campo elettrico molto intenso acquistano una notevole polarizzazione dovuta all'allineamento dei dipoli elementari e la conservano anche quando il campo viene spento. Esse generano nello spazio un campo di dipolo che però, se non si prendono particolari precauzioni, viene annullato da cariche libere presenti nell'aria che si depositano sul materiale e anche dallo spostamento di cariche all'interno.

Piezoelettricità

Altre sostanze, come il quarzo, sottoposte a compressione o trazione presentano una polarizzazione, che non hanno in assenza di azioni meccaniche, e quindi generano un campo elettrico; viceversa, se sottoposte a un campo elettrico, esse si deformano. Il fenomeno si chiama *piezoelettricità* e ha notevoli e numerose applicazioni.

Materiali ferroeletrici

Citiamo infine l'esistenza dei *materiali ferroeletrici*, particolari cristalli che hanno un momento di dipolo elettrico per ogni cella del reticolo cristallino e che in particolari condizioni presentano una *polarizzazione spontanea*, senza applicazione di campo elettrico, dovuta all'allineamento quasi completo dei dipoli elementari.

Un'ultima considerazione di carattere generale riguarda il comportamento dei dielettrici quando vengono sottoposti a campi elettrici variabili rapidamente nel tempo.

Con riferimento a una sostanza polare come l'acqua, il meccanismo di polarizzazione per orientamento presuppone la rotazione della molecola, che ha un dato momento d'inerzia e impiega un certo tempo per disporsi parallelamente al campo elettrico. Se il periodo con cui varia il campo è inferiore a un certo valore T , le molecole non riescono più a seguire il campo. $\langle p_a \rangle$ risulta nullo e scompare il contributo della polarizzazione per orientamento. Resta soltanto il contributo dovuto alla polarizzazione elettronica, che è indipendente da T fino a valori dell'ordine di 10^{-16} s, a causa della piccola inerzia degli elettroni i quali possono seguire senza ritardo le variazioni del campo. Per questo motivo la costante dielettrica relativa dell'acqua passa da $\kappa = 81$ a $\kappa = 1.75$ quando T scende al di sotto di 10^{-9} s. Nel ghiaccio la riduzione avviene intorno a $T = 10^{-4}$ s.

Vedremo che questa circostanza è di grande importanza nello studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nei dielettrici.

Corrente elettrica



6.1 Conduzione elettrica

I materiali conduttori solidi, le cui proprietà sono state descritte nel capitolo 4, sono costituiti da un reticolo spaziale ai cui vertici si trovano gli ioni positivi (atomi che hanno perso uno o più elettroni) e al cui interno si muovono gli elettroni liberi. In un metallo questi sono gli unici *portatori* mobili di carica e il loro numero per unità di volume si calcola come nell'esempio 5.10. Nel rame e nell'argento, in cui c'è un elettrone libero per atomo, abbiamo rispettivamente

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 8.96 \cdot 10^3}{63.55} = 8.49 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / m}^3,$$

$$n = \frac{6.022 \cdot 10^{26} \cdot 10.5 \cdot 10^3}{107.87} = 5.86 \cdot 10^{28} \text{ elettroni / m}^3.$$

L'ordine di grandezza è lo stesso per tutti i conduttori metallici.

Il moto degli elettroni liberi in un conduttore in equilibrio elettrostatico è completamente disordinato. In qualsiasi volume τ , piccolo su scala macroscopica, ma contenente un numero N di elettroni abbastanza elevato (con $\tau = 10^{-18} \text{ m}^3 = 1 \mu \text{m}^3$, $N = n \tau \approx 10^{29} \cdot 10^{-18} = 10^{11}$ elettroni), la velocità media è nulla:

$$\bar{v}_m = \frac{1}{N} \sum_i v_i = 0 ,$$

indicando con v_i le velocità dei singoli elettroni. Ciò vuol dire che non esiste una direzione di moto preferenziale per gli elettroni.

Se si mettono a contatto due conduttori C_1 e C_2 isolati, a potenziali V_1 e V_2 diversi, si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale V . Nel processo un certo numero di elettroni passa dal conduttore a potenziale minore a quello a potenziale maggiore, sotto l'azione del campo elettrico E dovuto alla d.d.p. ΔV . Questo moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una *corrente elettrica* e il fenomeno è un esempio di *conduzione elettrica*.

La corrente elettrica in questo caso specifico dura soltanto un tempo molto breve: il limite inferiore è dato da una dimensione tipica del conduttore divisa per la velocità della luce; la breve durata impedisce l'esecuzione di studi sistematici del fenomeno.

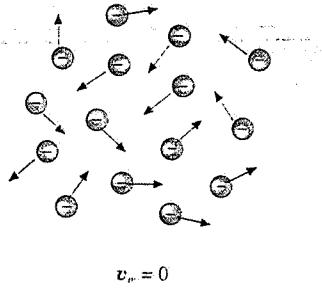


Figura 6.1

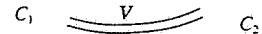
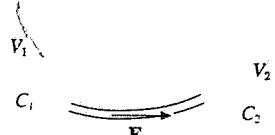


Figura 6.2

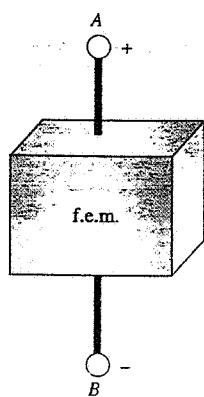


Figura 6.3

Corrente continua

A tale scopo è necessario disporre di un dispositivo capace di mantenere una differenza di potenziale, e quindi un campo elettrico, tra due conduttori a contatto ovvero tra due punti di uno stesso conduttore. Così facendo il flusso di elettroni può durare per molto tempo e quindi nel conduttore si instaura una corrente elettrica stabile, in un regime di equilibrio dinamico e non più di equilibrio elettrostatico.

Un qualsiasi dispositivo con le caratteristiche appena descritte è definito come *generatore di forza elettromotrice* (f.e.m.). Storicamente il primo è quello inventato da Alessandro Volta nel 1800: esso permise da una parte lo studio della conduzione nei metalli e in altri mezzi conduttori, dall'altra la successiva scoperta degli effetti magnetici di una corrente elettrica (vedi capitolo 8).

Nella sua versione originale la cella o pila voltaica consta di una serie di elementi ciascuno dei quali è costituito da un disco di zinco, un tampone imbevuto di una soluzione acquosa di acido solforico e un disco di rame: il disco di rame risulta carico positivamente e quello di zinco negativamente. Se si misura con uno strumento elettrostatico, cioè senza far passare corrente, la d.d.p. tra i due dischi si trova un valore fisso, caratteristico della coppia di metalli e che con m elementi è m volte quello del singolo elemento: tale valore è detto f.e.m. della pila. Collegando alla estremità (o *poli*) della pila un conduttore, ad esempio un filo metallico, viene stabilita in questo una corrente elettrica costante nel tempo, denominata anche *corrente continua*; in realtà con una pila di Volta la corrente diminuisce lentamente nel tempo.

Esiste attualmente una grande varietà di pile, e tra queste le batterie automobilistiche, che funzionano sostanzialmente in base allo stesso principio scoperto da Volta. Il lavoro necessario per mantenere un moto ordinato di cariche in un circuito chiuso è ottenuto nella pila trasformando energia chimica in energia elettrica. In altri tipi di generatori di f.e.m. avviene invece la trasformazione di energia meccanica in energia elettrica.

Torneremo in seguito sul funzionamento della pila di Volta e sulle caratteristiche elettriche generali dei generatori di f.e.m.; per ora ci limitiamo a considerarli dispositivi in grado di mantenere una d.d.p. costante ai capi di un conduttore e quindi di una corrente elettrica continua attraverso di esso.

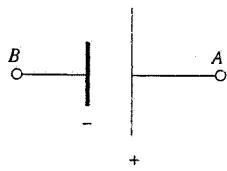
A fianco è indicato il simbolo che si usa per tali generatori; esso ricorda la pila (ma è valido qualunque sia il meccanismo di funzionamento interno) e il fatto che si addensano cariche di segno opposto alle due estremità A e B, dette appunto *polo positivo* e *polo negativo del generatore*.

La conduzione elettrica, che nei metalli è dovuta al moto degli elettroni, è possibile anche nei gas e nei liquidi se in essi sono contenuti portatori di carica.

Nei gas in condizioni ordinarie gli atomi sono neutri e quindi un gas non è un conduttore di corrente. Se però avviciniamo al gas un *agente ionizzante*, come può essere una fiamma o una sorgente radioattiva o di raggi X, si creano coppie ione positivo-elettrone appunto per il fenomeno della ionizzazione, cioè della cessione ad un elettrone di una quantità di energia tale da staccarlo dall'atomo. Nel moto completamente disordinato di queste cariche uno ione può catturare un elettrone ricostituendo un atomo o una molecola neutra (*fenomeno di ricombinazione*) e un elettrone può essere catturato da un atomo neutro formando uno ione negativo (*fenomeno di cattura*, importante nei gas elettronegativi come l'ossigeno). Si raggiunge in generale un equilibrio dinamico caratterizzato da n portatori positivi e n negativi per unità di volume, con velocità media nulla.

Una situazione simile a quella dei gas si può avere con liquidi dielettrici, come l'argon liquido; in una soluzione elettrolitica invece i sali o gli acidi si *dissociano spontaneamente* in modo che anche in essa sono contenute in media n coppie di segno opposto per unità di volume. Il moto di queste cariche è sempre completamente disordinato e la velocità media è nulla.

Quando nel gas o nel liquido ionizzato o nella soluzione elettrolitica vengono



immersi due elettrodi tra i quali viene mantenuta una d.d.p. tramite un generatore di f.e.m., nel fluido si manifesta una corrente elettrica continua dovuta al moto degli ioni positivi nel verso del campo elettrico E e degli ioni negativi nel verso opposto a E .

Infine sono molto importanti nella tecnologia elettronica i *semiconduttori*, materiali solidi isolanti nei quali con un trattamento opportuno di cui parleremo in seguito è possibile avere portatori di carica dei due segni e mantenere quindi una corrente elettrica se viene applicata una d.d.p.

In tutti i casi di conduzione elettrica che abbiamo citato il moto delle cariche è ostacolato dal mezzo in cui avviene il moto e l'analisi di questo fatto porta al concetto di *resistenza* del conduttore (paragrafo 6.5). È quindi sempre necessaria la spesa di un lavoro per vincere le forze che si oppongono al passaggio di corrente, lavoro che come abbiamo già notato è ottenuto a spese dell'energia interna del generatore di f.e.m.

L'unica eccezione si ha in alcuni metalli puri e leghe metalliche a temperature vicine allo zero assoluto e si parla di *supercondutività*: una corrente elettrica può essere mantenuta in essi per tempi molto lunghi senza spesa di potenza. Anche su questo argomento torneremo più avanti, sia in questo capitolo che quando descriveremo il comportamento degli elettroni nei metalli secondo le leggi della meccanica quantistica.

Esempio 6.1

Calcolare la velocità quadratica media degli elettroni in un metallo, nell'ipotesi che il gas di elettroni si comporti come un gas ideale.

Soluzione

Se gli elettroni liberi potessero essere trattati come un gas ideale, la loro energia cinetica media alla temperatura T sarebbe

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg è la massa dell'elettrone e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/mole K la costante di Boltzmann. Alla temperatura ambiente $T = 293$ K

$$E = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 0.61 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.038 \text{ eV},$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.16 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Questo valore risulta essere in completo disaccordo con quanto prevede la meccanica quantistica. Secondo la teoria di Fermi-Sommerfeld, che verrà discussa nel capitolo 19, gli elettroni all'interno di un metallo hanno una distribuzione di energie cinematiche che varia da un valore minimo ad un valore massimo E_F , detto energia di Fermi, caratteristico del tipo di conduttore. Nel rame $E_F = 7.03$ eV, che è due ordini di grandezza superiore al valor medio previsto dalla teoria cinetica dei gas: in corrispondenza

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = 1.57 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Tali risultati, validi per $T = 0$, non variano apprezzabilmente con la temperatura del conduttore. Osserviamo che se gli elettroni si comportassero come un gas ideale, per avere un'energia cinetica E_F dovrebbero essere portati alla temperatura

$$T_F = \frac{2E_F}{3k_B} = 54386 \text{ K}$$

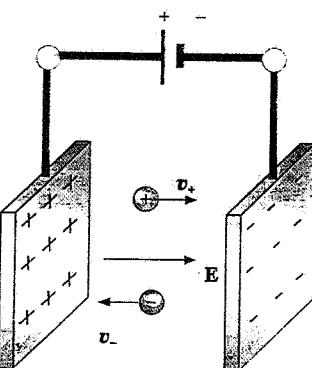


Figura 6.4

L'esempio appena visto mette in luce una grossa discrepanza tra un modello classico e uno quantistico. Siccome la teoria quantistica spiega coerentemente tutta una serie di fenomeni che si osservano nei metalli, è ad essa e ai suoi risultati numerici che bisogna fare riferimento anche quando si costruisce un modello basato su concetti classici. Vedremo un esempio alla fine del paragrafo 6.5.

6.2 Corrente elettrica

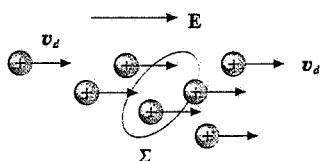


Figura 6.5

Supponiamo che in una certa regione di un conduttore ci siano n_+ portatori di carica $+e$ per unità di volume e che in essa agisca un campo elettrico \mathbf{E} prodotto da un generatore di f.e.m.; i portatori si muovono sotto l'azione della forza elettrica $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, dando origine a una corrente elettrica, e indichiamo con v_d la loro velocità lungo la direzione del campo elettrico \mathbf{E} , detta anche *velocità di deriva* (vedi paragrafo 6.4).

Consideriamo una superficie Σ tracciata all'interno del conduttore: detta Δq la carica che passa attraverso Σ nel tempo Δt , si definisce intensità di corrente la grandezza

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} . \quad (6.1)$$

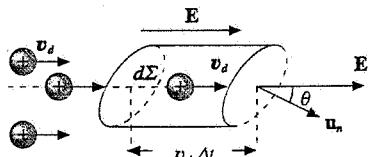


Figura 6.6

La definizione (6.1) è del tutto generale e vale anche per fenomeni variabili nel tempo.

Per mettere in relazione la corrente elettrica con il moto delle cariche ci riferiamo a una superficie infinitesima $d\Sigma$ la cui normale \mathbf{u}_n formi un angolo θ con il campo elettrico \mathbf{E} e quindi con la velocità v_d delle cariche positive. Nel tempo Δt le cariche percorrono la distanza $v_d \Delta t$ per cui la carica complessiva che passa attraverso $d\Sigma$ nel tempo Δt è quella contenuta nel volume infinitesimo $d\tau$ definito da $d\Sigma$ e $v_d \Delta t$:

$$d\tau = v_d \Delta t d\Sigma \cos \theta , \quad \Delta q = n_+ e d\tau = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta \Delta t .$$

La carica che passa nell'unità di tempo attraverso $d\Sigma$, cioè l'intensità di corrente attraverso $d\Sigma$, è in base a (6.1)

$$di = n_+ e v_d d\Sigma \cos \theta .$$

Definiamo il vettore densità di corrente \mathbf{j} come

$$\mathbf{j} = n_+ e \mathbf{v}_d \quad (6.2)$$

e riscriviamo

$$di = \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma . \quad (6.3)$$

Figura 6.7

L'intensità di corrente attraverso la superficie finita Σ si ottiene integrando (6.3):

$$i = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \Phi_{\Sigma}(\mathbf{j}) ; \quad (6.4)$$

essa risulta eguale al flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie Σ .

In particolare, se la superficie Σ è ortogonale a \mathbf{j} , cioè a \mathbf{v}_d , e \mathbf{j} ha lo stesso valore in tutti i punti di Σ ,

$$i = j\Sigma \quad , \quad j = \frac{i}{\Sigma} \quad . \quad (6.5)$$

la densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche (e resta così giustificato il nome densità di corrente).

Se, come nei conduttori metallici, i portatori di carica sono negativi, fissata la direzione e il verso di \mathbf{E} la velocità di deriva \mathbf{v}_- è diretta in verso opposto rispetto al campo elettrico. Il vettore $-e\mathbf{v}_-$ ha invece lo stesso verso di \mathbf{E} e la densità di corrente, detto n_- il numero di portatori per unità di volume, è

$$\mathbf{j} = -n_- e \mathbf{v}_- \quad , \quad (6.6)$$

parallel a \mathbf{E} e concorde al campo elettrico.

Quando sono presenti, come nei fluidi ionizzati o nelle soluzioni elettrolitiche o nei semiconduttori, portatori positivi che hanno velocità di deriva \mathbf{v}_+ e portatori negativi che hanno velocità di deriva \mathbf{v}_- , la densità di corrente è data da

$$\mathbf{j} = n_+ e \mathbf{v}_+ + n_- e \mathbf{v}_- \quad ; \quad (6.7)$$

i due termini sono concordi e hanno lo stesso verso del campo elettrico.

Questo fatto, cioè che la densità di corrente sia sempre concorde a \mathbf{E} , discende dalla definizione di \mathbf{j} come prodotto della carica per unità di volume (con il suo segno) per la velocità di deriva e riflette la circostanza sperimentale che *su scala macroscopica non è possibile correlare il verso della corrente al segno dei portatori di carica*: fissata una data d.d.p. gli stessi effetti si hanno se la conduzione è dovuta a cariche positive con moto concorde a \mathbf{E} oppure a cariche negative con moto discorda a \mathbf{E} . Solo per mezzo di un effetto microscopico, l'*effetto Hall* che vedremo nel capitolo 8, è possibile, almeno nei conduttori metallici, riconoscere il segno dei portatori di carica.

In base a queste considerazioni si assume *convenzionalmente* come verso della corrente quello del moto delle cariche positive, ovvero quello che va dai punti a potenziale maggiore ai punti a potenziale minore.

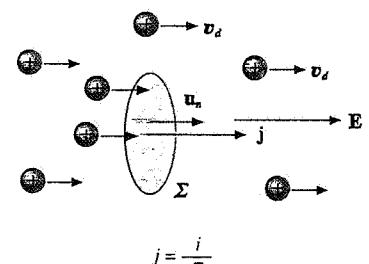


Figura 6.8

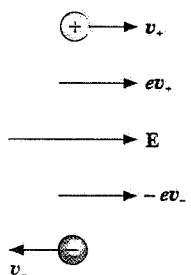


Figura 6.9

Unità di misura

L'unità di misura della corrente elettrica nel sistema internazionale è l'ampere, simbolo A. Si ha l'intensità di corrente di 1 A quando, attraverso una data superficie, passa la carica di 1 C in 1 s:

$$A = \frac{C}{s} \quad .$$

Nella pratica sono molto usati i sottomultipli *milliampere*, *microampere*, *nanoampere*.

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A} \quad , \quad 1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A} \quad , \quad 1 \text{ nA} = 10^{-9} \text{ A} \quad .$$

e, nelle applicazioni di potenza, i multipli *chiloampere* e *megaampere*:

$$1 \text{ kA} = 10^3 \text{ A} \quad , \quad 1 \text{ MA} = 10^6 \text{ A} \quad .$$

La densità di corrente si misura in A/m^2 .

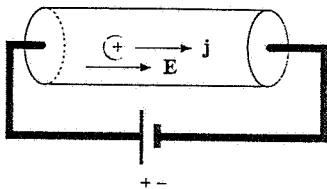
Esempio 6.2

Un conduttore cilindrico di rame, avente sezione di area $\Sigma = 4 \text{ mm}^2$, è percorso da una corrente di intensità $i = 8 \text{ A}$. Calcolare la velocità di deriva degli elettroni.

Soluzione

In base a (6.5) la densità di corrente vale

$$j = i / \Sigma = 2 \text{ A/mm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

**Figura 6.10**

È questo l'ordine di grandezza della densità di corrente massima che può fluire in un conduttore senza che abbiano origine apprezzabili effetti termici, i quali possono portare alla fusione del conduttore (si veda l'esempio 6.6). Ricordando che nel rame $n = 8.49 \cdot 10^{28}$ elettroni / m^3 , da (6.2).

$$v_d = j / n e = 1.47 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0.147 \text{ mm/s}$$

Il confronto della velocità di deriva con la velocità v_F calcolata nell'esempio 6.1 dà $v_d / v_F \sim 10^{-10}$. L'effetto della conduzione è quello di introdurre una *perturbazione molto piccola* della velocità di ogni singolo elettrone. Tuttavia questo *effetto collettivo ordinato*, in cui tutti gli elettroni hanno la stessa velocità di deriva, dà origine a un risultato macroscopico visibile, la corrente elettrica; per quanto piccola, la velocità media degli elettroni, coincidente con v_d , non è nulla come avviene in assenza di campo, e il numero di elettroni per unità di volume è molto grande.

Nei dielettrici abbiamo visto una situazione simile. Precisamente, nella polarizzazione elettronica l'effetto del campo elettrico su un atomo o su una molecola è quello di perturbare leggermente la distribuzione di carica, dando origine a un momento di dipolo elettrico molto piccolo; però il numero di dipoli per unità di volume è molto grande e l'effetto collettivo macroscopico, cioè la polarizzazione del dielettrico, è ben misurabile. Notiamo inoltre che la carica che può muoversi, per unità di volume, è

$$n e = 8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 13.6 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3 = 13.6 \text{ C/mm}^3.$$

Si tratta di una carica molto grande, enorme dal punto di vista elettrostatico; però non è un'eccesiva di carica, che con valori simili non potrebbe mai stare insieme, bensì è una parte della carica costitutiva del materiale, finemente mescolata a una eguale carica di segno opposto (gli ioni del reticolo), per cui non si hanno effetti elettrostatici repulsivi. Il valore della densità di corrente dipende dalla velocità con cui questa carica si muove e quindi dal campo elettrico agente, come vedremo nel paragrafo 6.4.

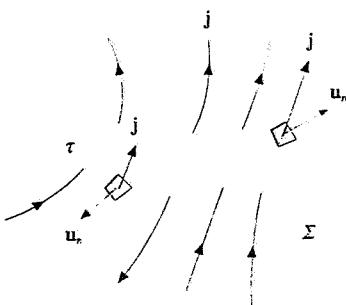
6.3 Legge di conservazione della carica. Regime di corrente stazionaria

Consideriamo una regione di spazio di volume τ delimitato da una superficie chiusa Σ , che orientiamo in modo che il versore della normale \mathbf{u}_n sia in ogni punto diretto verso l'esterno. Se la regione è sede di una corrente elettrica, definita dal vettore densità di corrente \mathbf{j} , la carica totale che passa nell'unità di tempo attraverso la superficie Σ è data, secondo (6.4), dal flusso di \mathbf{j} attraverso Σ :

$$i = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma .$$

Figura 6.11

I contributi positivi all'integrale vengono da quelle parti di Σ in cui $\mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n$ è positivo (\mathbf{j} punta verso l'esterno) e rappresentano una *carica positiva* che *esce* da Σ o una negativa che *entra*, mentre i contributi negativi si hanno dove $\mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n < 0$ (\mathbf{j} punta verso l'interno) e sono dovuti a una *carica positiva* che *entra* in Σ o una negativa che *esce*.



Il principio di conservazione della carica richiede che i , pari alla carica che attraversa Σ nell'unità di tempo, sia eguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva contenuta all'interno di Σ : ovvero, in accordo formalmente anche con (6.1), deve essere

$$i = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} \quad (6.8)$$

Principio di conservazione della carica

Il segno meno è giustificato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo la carica all'interno diminuisce e quindi ha derivata negativa (e viceversa se l'integrale è negativo).

Un caso particolare, ma interessante e soprattutto molto diffuso nella pratica, si ha quando la carica contenuta all'interno della superficie non varia, per cui $\partial q_{int} / \partial t = 0$; segue da (6.8) la cosiddetta *condizione di stazionarietà*:

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad (6.9)$$

Condizione di stazionarietà

Prima di discutere il significato fisico della (6.9), ne ricaviamo la forma locale.

Scriviamo $q_{int} = \int_{\tau} \rho d\tau$ e inseriamo questa espressione nella (6.8), scambiando contemporaneamente le operazioni di integrazione su τ e di derivazione rispetto al tempo, che sono indipendenti in quanto Σ e τ non variano nel tempo:

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau .$$

Applichiamo il teorema della divergenza (3.22) all'integrale superficiale e otteniamo

$$\int_{\tau} \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 .$$

Se questa relazione deve essere valida comunque si scelga il volume τ , deve essere nullo l'integrando:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.10)$$

Equazione di continuità

La (6.10) è nota come *equazione di continuità della corrente elettrica* ed esprime in modo dinamico la *conservazione della carica elettrica*; essa è l'*espressione locale* della legge integrale (6.8).

In condizioni stazionarie $\partial \rho / \partial t = 0$ e quindi

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (6.11)$$

Regime stazionario

che è l'espressione locale di (6.9) e si chiama *equazione di continuità della corrente elettrica in regime stazionario*.

Come abbiamo discusso nel paragrafo 3.4, e visto ad esempio nel caso del vett-

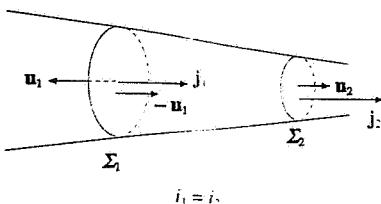


Figura 6.12

tore induzione dielettrica in assenza di cariche libere, un vettore il cui flusso è nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa, ovvero un vettore a divergenza identicamente nulla, si dice *solenoidale*. Le (6.9) e (6.11) affermano che il *vettore densità di corrente j in condizioni stazionarie è solenoidale*. Dalla (3.26) sappiamo che nel caso più generale ciò vuol dire che il flusso entrante in Σ è eguale al flusso uscente e così, appunto, la carica interna resta costante.

Particolarmente significativa è l'applicazione di questo risultato a un conduttore solido percorso da una corrente di densità j . La superficie Σ è costituita da due diverse sezioni Σ_1 e Σ_2 del conduttore e dalla superficie laterale del conduttore stesso (vedi figura 6.12), attraverso cui non passa corrente. Pertanto, in base a (6.9),

$$\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 = 0 ,$$

ovvero

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot (-\mathbf{u}_1) d\Sigma_1 ,$$

che è l'applicazione di (3.26) al caso in esame. Di conseguenza

$$i_1 = i_2 : \quad (6.12)$$

in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è la stessa attraverso ogni sezione del conduttore. Se il conduttore è a sezione variabile la densità di corrente, e quindi la velocità di deriva secondo (6.2), sono maggiori dove la sezione è minore, situazione che ricorda quella del moto di un fluido incompressibile in regime stazionario lungo un condotto a sezione variabile.

È importante osservare che la condizione di stazionarietà non implica necessariamente che la corrente sia costante nel tempo: essa può variare purché la carica che per unità di tempo entra in una data superficie chiusa Σ sia eguale a quella che ne esce, sempre nell'unità di tempo. L'affermazione resta vera finché il tempo che caratterizza la variabilità della corrente è grande rispetto al tempo che impiegherebbe la luce ad attraversare il volume compreso in Σ . Questo criterio si fonda sul fatto che una perturbazione elettrica, ad esempio una variazione di carica, localizzata ad un certo istante in un dato punto, si *propaga* con velocità $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Se il tempo di propagazione è piccolo rispetto agli altri tempi in gioco, si ammette che la perturbazione venga avvertita istantaneamente in ogni punto.

6.4 Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm

Un modello classico della conduzione elettrica nei metalli fu proposto nel 1900 da Drude e successivamente sviluppato da Lorentz nel 1906. In questo modello si suppone che gli ioni del reticolo cristallino siano fissi e che gli elettroni si muovano attraverso il reticolo in modo completamente disordinato. Nel loro moto gli elettroni subiscono continue *interazioni* con gli ioni, che chiamiamo *urti*: tra un urto e il successivo il moto è libero e la traiettoria rettilinea, cosicché la traiettoria di ciascun elettrone è costituita da una successione di segmenti rettilinei, con direzione e lunghezza variabili. L'insieme delle traiettorie è completamente casuale e non si ha un flusso netto di carica, cioè una corrente, in nessuna direzione. Si possono definire un *tempo medio* τ e un *cammino libero medio* l tra due urti successivi, legati dalla relazione

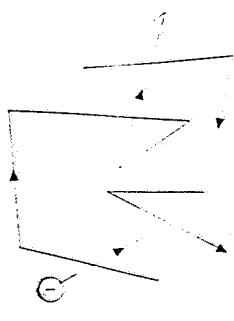


Figura 6.13

$$\tau = 1/v$$

(6.13)

essendo v la velocità degli elettroni nel metallo.

Quando si applica un campo elettrico \mathbf{E} ciascun elettrone acquista un'accelerazione $a = \mathbf{F}/m = -e\mathbf{E}/m$, opposta al campo elettrico, e i tratti rettilinei tra due urti diventano archi di parabola, come abbiamo visto nell'esempio 2.4. Alla distribuzione casuale e isotropa delle velocità si sovrappone una *velocità v_d di deriva*; essendo questa velocità piccola rispetto a quella propria degli elettroni, il tempo medio τ tra due urti consecutivi non cambia. Se diciamo v_i la velocità di un elettrone subito dopo un urto e v_{i+1} la velocità subito prima dell'urto successivo, abbiamo

$$v_{i+1} = v_i - \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau$$

Facciamo la media su un gran numero N di urti e definiamo la *velocità di deriva* come

$$v_d = \frac{1}{N} \sum_i v_{i+1} = \frac{1}{N} \sum_i v_i - \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau$$

La media non cambia il termine contenente il campo elettrico che è eguale per tutti gli elettroni; inoltre $\sum_i v_i = 0$ in quanto dopo ogni urto la distribuzione delle velocità rimane casuale. Pertanto

$$v_d = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} : \quad (6.14) \quad \text{Velocità di deriva}$$

per effetto del campo elettrico \mathbf{E} ciascun elettrone nel metallo acquista una *velocità v_d nella direzione del campo elettrico*, che è *proporzionale al campo elettrico stesso*.

In sostanza si ammette che in media l'urto cancelli la direzione preferenziale del moto dovuta all'azione del campo elettrico e che questa venga ristabilita durante il tempo τ . La (6.14) si può scrivere anche $m v_d = -e \mathbf{E} \tau$ e interpretare dicendo che l'elettrone acquista nel tempo τ la quantità di moto $m v_d$ pari all'impulso della forza, quantità di moto che viene persa nell'urto successivo e riacquistata dopo un altro intervallo di tempo τ . Essendo τ il tempo medio tra due urti, ciò vuol dire che gli elettroni hanno in media la componente di velocità v_d nella direzione del campo; questa risulta proporzionale alla forza agente (come avviene nel moto di un punto materiale sottoposto all'azione di una forza costante e di una forza resistente viscosa).

La densità di corrente che consegue a questo moto ordinato è, secondo (6.6),

$$\mathbf{j} = -n e v_d = \frac{n e^2 \tau}{m} \mathbf{E} \quad (6.15)$$

Indicando con

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} \quad (6.16)$$

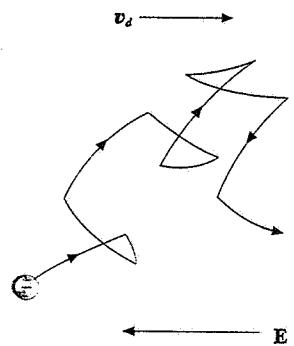


Figura 6.14

una grandezza caratteristica del materiale, detta *conduttività*, la (6.15) si scrive

Legge di Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad . \quad (6.17)$$

Benché la (6.14) sia stata dedotta considerando il moto degli elettroni in un metallo, si capisce che essa può essere generalizzata al moto di portatori dei due segni ottenendo

$$\mathbf{v}_+ = \frac{e\tau_+}{m_+} \mathbf{E}, \quad \mathbf{v}_- = -\frac{e\tau_-}{m_-} \mathbf{E},$$

dove a priori il tempo medio tra due urti può essere diverso per portatori positivi di massa m_+ e negativi di massa m_- . La densità di corrente è data da

$$\mathbf{j} = n e \mathbf{v}_+ - n e \mathbf{v}_- = n e^2 \left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-} \right) \mathbf{E} \quad . \quad (6.18)$$

Definiamo anche ora la *conduttività del mezzo* come

Conduttività del mezzo

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau_+}{m_+} + \frac{n e^2 \tau_-}{m_-}$$

e la (6.18) assume la stessa forma di (6.17).

La (6.17) è nota come *legge di Ohm della conduzione elettrica*: essa stabilisce che il rapporto tra la densità di corrente \mathbf{j} e il campo elettrico applicato \mathbf{E} è dato da una grandezza caratteristica del conduttore. La dipendenza di σ da e^2 , cioè il fatto che la conduttività sia intrinsecamente positiva, ribadisce il fatto che la densità di corrente è concorde al campo elettrico indipendentemente dal segno dei portatori di carica.

Molto spesso la (6.17) è scritta nella forma

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad (6.19)$$

dove la grandezza

Resistività del conduttore

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (6.20)$$

è chiamata *resistività del conduttore*.

La potenza spesa dalla forza $\mathbf{F} = e \mathbf{E}$ per mantenere in moto la carica e con velocità \mathbf{v}_d è

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_d = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \quad .$$

Se nel conduttore ci sono n portatori per unità di volume, la *potenza spesa per unità di volume* è

Potenza trasferita agli ioni
del reticolo

$$P_\tau = n P = n e \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad . \quad (6.21)$$

Applichiamo la legge di Ohm nella forma (6.17) o (6.19) e otteniamo

$$P_\tau = \sigma E^2 = \rho j^2 \quad . \quad (6.22)$$

In un conduttore metallico questa potenza viene trasferita tramite gli urti agli ioni del reticolo cristallino e in definitiva si ha una trasformazione di energia elettrica in energia interna del conduttore, con conseguente aumento di temperatura dello stesso e cessione di calore all'ambiente.

La legge di Ohm ha le caratteristiche di una *equazione di stato* che descrive le proprietà del materiale rispetto alla conduzione elettrica, così come, ad esempio, la (5.11) descrive il comportamento di un dielettrico lineare sottoposto a un campo elettrico. Il modello che porta alla (6.16) fornisce inoltre una descrizione della condutività, che è una grandezza macroscopica, in termini di grandezze che caratterizzano fenomeni microscopici, proprio come i modelli dei meccanismi di polarizzazione fanno per la suscettività elettrica.

Esempio 6.3

Una corrente stazionaria passa attraverso due conduttori solidi, di conduttività σ_1 e σ_2 , a contatto lungo una superficie di separazione Σ_0 . Determinare il comportamento dei vettori j e E nell'attraversamento di Σ_0 .

Soluzione

Prendiamo una scatola cilindrica con asse ortogonale a Σ_0 e basi infinitesime $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$, parallele a Σ_0 , una nel primo conduttore e una nel secondo. Da (6.9) e (6.17) ricaviamo

$$\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Sigma_2 + \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 = (j_{2n} - j_{1n}) d\Sigma_0 = (\sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n}) d\Sigma_0 = 0 ,$$

in quanto assumiamo nullo il flusso attraverso la superficie laterale (sarebbe un infinitesimo di ordine superiore). Pertanto

$$j_{1n} = j_{2n} = \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} . \quad (6.23)$$

La componente normale a Σ_0 della densità di corrente è continua, mentre è discontinua la componente normale del campo elettrico E che provoca il passaggio di corrente. Osserviamo che se applichiamo lo stesso ragionamento in prossimità della superficie laterale di uno qualsiasi dei due conduttori, siccome all'esterno la condutività è nulla all'interno deve essere

$$j_n = \sigma E_n = 0 :$$

in prossimità della superficie del conduttore il campo elettrico e la densità di corrente sono paralleli alla superficie del conduttore (non c'è flusso di carica attraverso la superficie laterale).

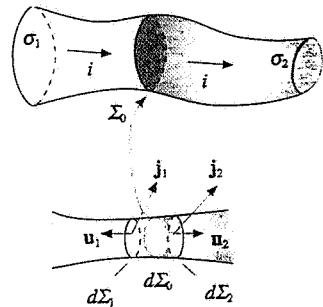


Figura 6.15

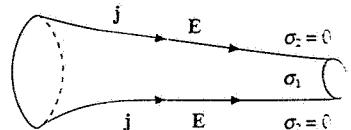


Figura 6.16

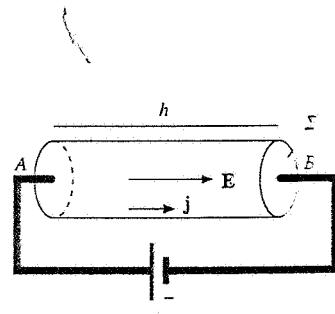


Figura 6.17

6.5 Legge di Ohm per i conduttori metallici. Resistenza elettrica. Effetto Joule

Applichiamo i risultati del paragrafo 6.4 ad un conduttore metallico cilindrico di lunghezza h e sezione Σ . Ai capi del conduttore è applicata, tramite un generatore di f.e.m., una d.d.p. $V = V_A - V_B$ per cui il conduttore è sede di un campo elettrico E , parallelo all'asse del cilindro, ed è percorso da una corrente elettrica di densità

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} ,$$

secondo (6.17) e (6.19). Il regime è stazionario, l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore e vale, in base a (6.5).

$$i=j\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho} E \Rightarrow E = \frac{\rho}{\Sigma} i$$

Tra campo elettrico e d.d.p. sussiste la relazione (2.7)

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Eh$$

e in definitiva

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i . \quad (6.24)$$

Chiamando *resistenza del conduttore* in esame la grandezza

Resistenza di un conduttore

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} , \quad (6.25)$$

la (6.24) diviene

Legge di Ohm per i conduttori metallici

$$V = R i , \quad (6.26)$$

nota come *legge di Ohm per i conduttori metallici*.

Se la sezione del conduttore è variabile, per un tratto lungo dh e di sezione Σ scriviamo

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

e integrando lungo tutto il conduttore otteniamo di nuovo (6.26) se definiamo come *resistenza del conduttore* la grandezza

$$R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma} \quad (6.27)$$

e ricordiamo che l'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione.

Pertanto in regime stazionario il rapporto tra la d.d.p. applicata ai capi di un conduttore metallico e l'intensità di corrente che a seguito di ciò l'attraversa è pari a una grandezza, detta *resistenza del conduttore*, che dipende solamente dalla natura del conduttore (resistività ρ) e dalle sue dimensioni. Come vedremo tra breve la resistenza è costante se la temperatura del conduttore è costante.

All'inverso della resistenza si dà il nome di *conduttanza* e il simbolo G :

Conduttanza

$$G = \frac{1}{R} . \quad (6.28)$$

Da (6.25) e (6.20) vediamo che

$$G = \frac{\Sigma}{\rho h} = \frac{\sigma \Sigma}{h} . \quad (6.29)$$

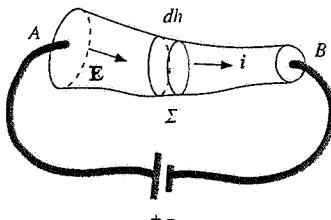


Figura 6.18

Unità di misura

L'unità di misura della resistenza si deduce da (6.26): ad essa è stato assegnato il nome di ohm e il simbolo Ω :

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

La resistività ρ si misura di conseguenza in Ωm , da (6.25), la conduttanza in Ω^{-1} , la conduttività in $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. L'unità Ω^{-1} è chiamata siemens (S). Sottomultipli e multipli dell'ohm comunemente usati sono i seguenti:

milliohm ($m\Omega$) = $10^{-3} \Omega$, chiliohm ($k\Omega$) = $10^3 \Omega$, megaohm ($M\Omega$) = $10^6 \Omega$.

Nella tabella 6.1 sono riportati i valori della resistività alla temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ per alcuni materiali. La scala dei valori è molto estesa, dai buoni conduttori che hanno valori di ρ dell'ordine di $10^{-8} \Omega\text{m}$ agli isolanti, con valori di ρ dell'ordine di $10^{14} \div 10^{17} \Omega\text{m}$.

Tabella 6.1 Resistività e coefficienti termici della resistività

Materiale	Resistività ($\Omega \cdot \text{m}$)	Coefficiente termico ($^\circ\text{C}^{-1}$)
argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
rame	$1.67 \cdot 10^{-8}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$
oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
alluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
tungsteno	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
zinc	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
nicel	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
ferro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
stagno	$11.0 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$
niobio	$12.5 \cdot 10^{-8}$	
piombo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
mercurio	$98.4 \cdot 10^{-8}$	
carbonio (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$- 0.5 \cdot 10^{-2}$
germanio	0.46	$- 48 \cdot 10^{-3}$
silicio	$2.30 \cdot 10^3$	$- 75 \cdot 10^{-3}$
acqua	$2 \cdot 10^5$	
vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
zolfo	$2 \cdot 10^{15}$	
quarzo fuso	$10^{16} \div 10^{17}$	

Effetti termici

La resistività nella maggior parte dei conduttori metallici puri è una funzione crescente della temperatura. In un intervallo limitato (qualche decina di gradi) intorno alla temperatura di 20°C la relazione è praticamente lineare.

$$\rho = \rho_{20} (1 + \alpha \Delta t) \quad , \quad (6.30)$$

dove $\Delta t = t - 20$ e ρ_{20} è la resistività misurata a 20°C (la temperatura t è chiaramente espressa in gradi Celsius). Il coefficiente α , chiamato *coefficiente termico*, è definito da (6.30) come

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$$

Coefficiente termico

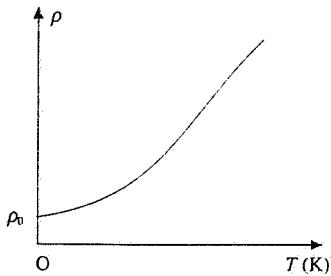


Figura 6.19

essendo $\Delta \rho$ la variazione di resistività nell'intervallo Δt . In tabella 6.1 accanto ai valori della resistività sono riportati anche i valori del coefficiente termico. Come si è detto, α è positivo nei metalli puri, mentre risulta negativo nel carbonio, germanio e silicio, indicando per questi elementi una decrescita della resistività all'aumentare della temperatura. Si possono produrre leghe come la *costantana* e il *nickelcromo* che hanno resistività tipica dei conduttori, ma un coefficiente α un ordine di grandezza inferiore ($\sim 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$).

Nei conduttori l'andamento della resistività con la temperatura si scosta decisamente dalla linearità a basse temperature e la resistività tende a un valore finito ρ_0 al tendere della temperatura allo zero assoluto, come mostrato in figura 6.19. Esiste però una classe di conduttori la cui resistività si annulla al di sotto di una certa temperatura, chiamata *temperatura critica* T_c : alcuni esempi sono riportati nella tabella 6.2; quando si trovano a $T < T_c$ questi conduttori sono detti *superconduttori*. Proprietà fondamentale è che in essi si può mantenere una corrente, anche elevata, senza l'applicazione di una d.d.p.

Tabella 6.2 Temperatura critica di alcuni superconduttori

Materiale	T_c (K)	Materiale	T_c (K)
Nb_3Ge	23.2	stagno	3.72
Nb_3Sn	18.1	alluminio	1.18
niobio	9.25	zincio	0.88
piombo	7.23	cadmio	0.52
mercurio	4.15	iridio	0.14

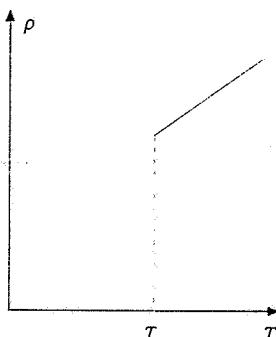


Figura 6.20

Citiamo infine che nei conduttori metallici la *conduttività* σ è legata dalla semplice legge di Wiedemann e Franz alla *conducibilità termica* k (vedi Vol. I, paragrafo 10.9): il rapporto k / σ è proporzionale alla temperatura assoluta,

$$\frac{k}{\sigma} = L T \quad . \quad (6.31)$$

Legge di Wiedemann-Franz

Il valore sperimentale della costante L , detta *numero di Lorenz*, si situa intorno a $2.5 \cdot 10^{-8} \text{ J}^2 / \text{C}^2 \text{ K}^2$.

Il fatto che ad una data temperatura la conducibilità termica sia proporzionale alla conduttività elettrica indica che anche il flusso di energia termica dai punti più caldi a quelli più freddi di un conduttore è legato, come il trasporto della carica, alle proprietà degli elettroni di conduzione del metallo.

Esempio 6.4

La resistività del rame alla temperatura $t = 20^\circ\text{C}$ è $\rho = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Calcolare il valore del campo elettrico E necessario per mantenere in un conduttore di rame una

densità di corrente $j = 2 \text{ A/mm}^2$ (vedi esempio 6.2). Dedurre i parametri microscopici relativi alla conduzione elettrica che compaiono nel modello sviluppato nel paragrafo 6.4.

Soluzione

Dalla (6.19) abbiamo $E = \rho j = 1.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^6 = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$: si vede che in un buon conduttore è sufficiente un valore molto piccolo di campo elettrico per mantenere la massima densità di corrente tollerabile (vedi esempio 6.6).

La conduttività del rame si ricava da (6.20), $\sigma = 0.60 \cdot 10^8 (\Omega \text{ m})^{-1}$, e da (6.13, 6.16) calcoliamo il tempo medio tra due urti successivi,

$$\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.60 \cdot 10^8}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2} = 2.51 \cdot 10^{-14} \text{ s},$$

e il *cammino libero medio*

$$l = \tau v_F = 2.51 \cdot 10^{-14} \cdot 1.58 \cdot 10^6 = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

In quest'ultimo calcolo abbiamo usato la velocità calcolata nell'esempio 6.1 in base al modello di Fermi. Siccome la distanza tra gli ioni del reticolo cristallino è $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la lunghezza media degli archi di parabola percorsi da un elettrone tra un urto e il successivo è pari a circa 200 distanze interatomiche.

Esempio 6.5

Calcolare di quanto varia percentualmente la resistenza di un conduttore d'argento quando viene portato dalla temperatura ambiente alla temperatura $t = 150^\circ\text{C}$.

Soluzione

Utilizziamo la relazione (6.30) e i valori dati in tabella 6.1:

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_{20}} = \alpha \Delta t = 4.1 \cdot 10^{-3} \cdot 130 = 0.533.$$

La variazione è notevole e questo effetto viene sfruttato per la costruzione di termometri. La sensibilità dipende dalla capacità di apprezzare piccole variazioni di resistenza; la variazione percentuale per grado è data proprio da α .

Nella pratica sono utilizzate resistenze a filo di platino, che permettono di misurare temperature fino a $\sim 1500 \text{ K}$: sono anche molto usati i termistori, fatti con semiconduttori la cui resistività diminuisce con la temperatura (e di norma il modulo della variazione di resistività a parità di variazione di temperatura è maggiore che nei conduttori).

Potenza. Effetto Joule

La potenza che bisogna spendere per fare circolare la corrente elettrica i in un tratto di conduttore di sezione Σ e lungo dh è, in base a (6.22),

$$dP = P_t \Sigma dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2} \Sigma dh = \rho \frac{dh}{\Sigma} i^2.$$

Per un conduttore di lunghezza finita abbiamo

$$P = i^2 \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

e, ricordando l'espressione (6.27) della resistenza,

$$P = R i^2 \quad , \quad (6.32)$$

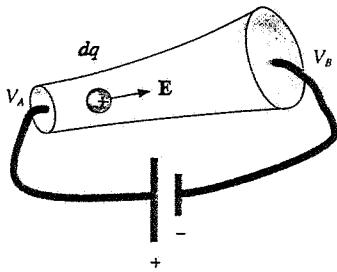


Figura 6.21

Alla formula (6.21) per la potenza siamo arrivati considerando grandezze locali come il campo elettrico che agisce sulle cariche e la densità di corrente che ne deriva. Aggiungendo la legge di Ohm abbiamo ottenuto (6.22) e quindi (6.32).

Agli stessi risultati si perviene anche considerando la carica dq che si muove attraversando la d.d.p. $V = V_A - V_B$: per questo spostamento viene compiuto il lavoro (2.8)

$$dW = V dq = V i dt$$

e spesa pertanto la potenza

$$P = \frac{dW}{dt} = Vi \quad , \quad (6.33)$$

formula di carattere generale equivalente a (6.21). Se vale la legge di Ohm (6.26),

$$P = R i^2 = \frac{V^2}{R} \quad . \quad (6.34)$$

Il passaggio di corrente attraverso un conduttore metallico per un tempo t comporta dunque il lavoro

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t R i^2 dt \quad (6.35)$$

che, se la corrente è costante nel tempo, si riduce a

$$W = R i^2 t \quad . \quad (6.36)$$

Come abbiamo già notato nel paragrafo 6.4, questo lavoro è necessario per vincere la resistenza opposta dal reticolo cristallino al moto ordinato degli elettroni e, da un punto di vista termodinamico, esso viene assorbito dal conduttore la cui energia interna aumenta. Di conseguenza aumenta la temperatura del conduttore: se esso è isolato termicamente dall'ambiente il processo porta alla fusione del metallo; se invece il conduttore è in contatto termico con l'ambiente la sua temperatura cresce fino a che si raggiunge uno stato di equilibrio in cui l'energia interna non varia più e il lavoro elettrico viene ceduto all'ambiente sotto forma di calore (purché naturalmente la temperatura di equilibrio sia inferiore alla temperatura di fusione del conduttore).

L'effetto di riscaldamento di un conduttore percorso da corrente si chiama *effetto Joule*. La misura calorimetrica del calore ceduto dal conduttore e la verifica dell'egualanza con il lavoro speso per far circolare la corrente ha costituito una delle prove storiche fondamentali dell'equivalenza tra calore e lavoro.

Esempio 6.6

Un filo di stagno, lungo $h = 1 \text{ m}$ e con sezione quadrata di area $\Sigma = 1 \text{ mm}^2$, è percorso dalla corrente i . La conducibilità termica esterna vale $h^* = 10 \text{ J/m}^2 \text{ K s}$, la temperatura di fusione dello stagno è $T_f = 232^\circ\text{C}$, l'ambiente esterno è a $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Calcolare il valore di i per cui la temperatura di equilibrio raggiunta dallo stagno è T_f .

Soluzione

Il lavoro elettrico provoca un aumento di temperatura del filo e una cessione di calore all'ambiente secondo l'equazione

$$R i^2 dt = m c dT + h^* S (T - T_0) dt$$

m è la massa del filo e c il suo calore specifico. L'ultimo termine esprime la legge di Newton relativa allo scambio di calore; S è la superficie esterna del filo (si veda il Vol. I, paragrafo 10.9).

In equilibrio $dT = 0$ e abbiamo

$$R i^2 = h^* S (T - T_0)$$

La resistenza del filo alla temperatura T è

$$R = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}$$

e in conclusione

$$i^2 = \frac{(T - T_0) h^* S}{\rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \frac{h}{\Sigma}}$$

Prendendo dalla tabella 6.1 i valori di ρ_0 e α per lo stagno, ponendo $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ e $T = T_f$, si ottiene

$$i = 6.34 \text{ A} \quad , \quad j = \frac{i}{\Sigma} = 6.34 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$$

Anche se il calcolo è indicativo in quanto la legge di Newton non è più molto attendibile per grandi differenze di temperatura, si vede l'ordine di grandezza del limite imposto alla densità di corrente dagli effetti termici: il limite pratico è $\sim 1 \div 2 \text{ A/mm}^2$.

L'annullarsi della resistività nei superconduttori comporta che non occorre spendere potenza per mantenere la corrente. L'utilizzazione di cavi superconduttori per il trasporto dell'energia elettrica sarebbe quindi conveniente; purtroppo bisognerebbe mantenere tutto il cavo alla temperatura di pochi kelvin e quindi rinchiuderlo dentro un criostato isolato dall'ambiente: l'intera operazione richiede una notevole spesa di potenza e non è nemmeno semplice tecnologicamente. Negli ultimi anni sono stati scoperti materiali superconduttori già a temperature dell'ordine di 100 K e il loro uso sarebbe più conveniente; però essi sono disponibili soltanto in campioni di piccole dimensioni e si è ancora ben lontani dal poter produrre cavi utili al trasporto dell'energia.

Conduttori non Ohmici

La legge di Ohm (6.26) valida per i conduttori metallici è verificata in opportune condizioni anche nei gas ionizzati e nelle soluzioni elettrolitiche: vi sono altri conduttori che inve-

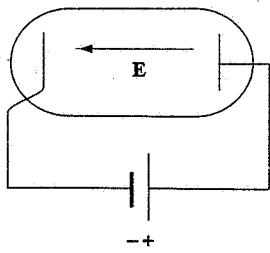


Figura 6.22

ce non seguono la (6.26), ovvero non sono caratterizzati da un andamento lineare della corrente che li percorre in funzione della d.d.p. applicata. Tra questi i più importanti nelle applicazioni sono i *dispositivi a semiconduttore*. Un altro esempio è costituito dal *diodo a emissione termoelettronica*, che descriviamo brevemente.

All'interno di un involucro di vetro in cui è praticato un alto vuoto ($\sim 10^{-5}$ Pa) si trova un elettrodo, il *catodo*, formato da un filamento che è mantenuto ad alta temperatura e per questa ragione emette elettroni (*effetto termoelettronico*); con un filamento di tungsteno trattato con torio la temperatura di esercizio è ~ 1900 K. Un secondo elettrodo, l'*anodo*, può essere portato a potenziale positivo rispetto al catodo e quindi raccogliere gli elettroni emessi da questo. Si trova che all'aumentare della d.d.p. tra anodo e catodo la corrente che attraversa il diodo segue la *legge di Child-Langmuir*

$$i = a V^{3/2}$$

fino a raggiungere un valore di saturazione (vedi figura 6.23); la costante a dipende dalla forma geometrica degli elettrodi. La densità di corrente di saturazione emessa dal catodo è data dalla *legge di Richardson*

$$j_s = A T^2 e^{-We/k_B T},$$

dove T è la temperatura assoluta, k_B la costante di Boltzmann e W_e il *lavoro di estrazione del metallo* che costituisce il catodo, pari al lavoro minimo che bisogna spendere per portare un elettrone di conduzione dall'interno all'esterno del metallo (conceitto che riprenderemo nel capitolo 19). A è una costante che dipende dal tipo di materiale catodico.

L'applicazione più semplice cui si presta un diodo è quella di interruttore veloce: a seconda del segno della d.d.p. tra anodo e catodo esso permette o vieta il passaggio della corrente. A parte casi particolari il diodo a vuoto è stato però sostituito dal *diodo a semiconduttore* che, pur funzionando secondo un principio diverso, svolge le stesse funzioni con minore spesa di potenza e minore ingombro.

È opportuno, come conclusione di questo paragrafo, fare alcune precisazioni. La prima è di carattere storico: Ohm scoprì la legge che porta il suo nome nel 1826 e gli effetti termici vennero investigati da Joule intorno al 1850; poco dopo vennero formulate le leggi di Kirchhoff (vedi paragrafo 6.10) e quindi la comprensione macroscopica del comportamento dei circuiti resistivi era ben consolidata alla fine del 1800. Il modello del gas elettronico venne proposto agli inizi del 1900, quando cominciarono a formarsi le idee sulla composizione elettronica della materia e la teoria quantistica di Fermi-Sommerfeld, su cui è basata la spiegazione moderna del comportamento degli elettroni nei metalli, fu sviluppata intorno al 1930.

Rimandiamo al capitolo 19 per una presentazione elementare della teoria di Fermi-Sommerfeld e dei principali effetti che si riscontrano nei metalli. In questo capitolo ci siamo serviti del modello classico per giustificare la legge di Ohm: abbiamo però notato che la previsione quantitativa della velocità degli elettroni è sbagliata. Aggiungiamo adesso che se, ad esempio, volessimo prevedere l'andamento della resistività con la temperatura, utilizzando (6.16, 6.20) e l'espressione $v = \sqrt{3k_B T / m}$ della velocità quadratica media, otterremmo

$$\rho = \frac{m}{n e^2 \tau} = \frac{mv}{n e^2 l} = \frac{1}{n e^2 l} \sqrt{3m k_B T}.$$

La resistività dovrebbe dipendere dalla radice quadrata della temperatura assoluta, mentre sappiamo che la relazione è lineare, almeno per un certo intervallo di temperatura.

Questa situazione insoddisfacente in cui alcune proprietà vengono spiegate e altre non corrispondono alle previsioni è tipica dei modelli che cercano di applicare concetti classici per spiegare fenomeni microscopici, regolati invece da leggi quantitative.

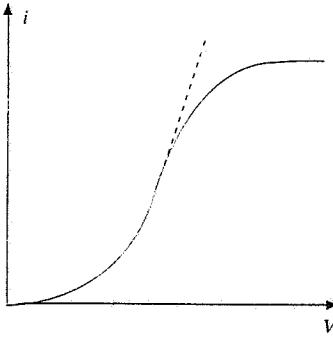


Figura 6.23

6.6 Resistori in serie e in parallelo

Conduttori ohmici caratterizzati da un determinato valore della resistenza (alla temperatura ambiente) sono elementi molto usati nei circuiti elettrici. Essi vengono chiamati *resistori* e oltre al valore della resistenza viene sempre precisato il *valore massimo della potenza* che può essere in essi dissipata senza causare alterazioni irreversibili.

Il simbolo che rappresenta un resistore in un circuito è indicato a fianco. Più resistori possono essere collegati tra loro, tipicamente da fili o piattine metallici, la cui resistenza è di norma completamente trascurabile (un centimetro di filo di rame con diametro di 1 mm ha una resistenza di $\sim 2 \cdot 10^{-4} \Omega$). I *collegamenti di base* sono due, in *serie* e in *parallelo*, secondo una terminologia che abbiamo già usato per i condensatori.



Resistori in serie

Due resistori sono collegati in serie quando hanno un estremo in comune: in regime stazionario l'intensità di corrente che li attraversa è la stessa. Applichiamo a ciascun resistore la legge di Ohm e sommiamo:

$$V_A - V_B = R_1 i \quad , \quad V_B - V_C = R_2 i \quad ,$$

$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i \quad .$$

I due resistori in serie presentano la resistenza equivalente

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad . \quad (6.37)$$

Tale relazione si generalizza subito a un qualsiasi numero di resistori in serie e afferma che la *resistenza equivalente di un sistema di resistori collegati in serie è eguale alla somma delle singole resistenze*; R_{eq} è pertanto sempre maggiore del valore di ciascuna resistenza.

La potenza totale spesa è

$$P = (V_A - V_C) i = (R_1 + R_2) i^2 = R_{eq} i^2 = P_1 + P_2$$

ed è pari alla somma delle potenze spese nelle singole resistenze. Anche questa formula si estende subito a un numero qualsiasi di resistori in serie.

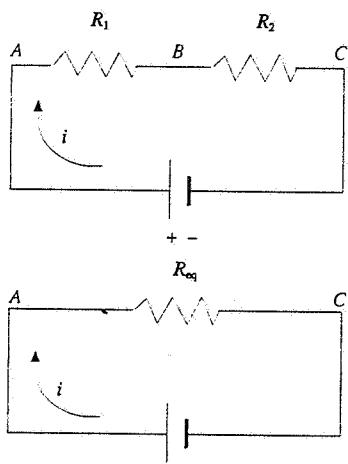


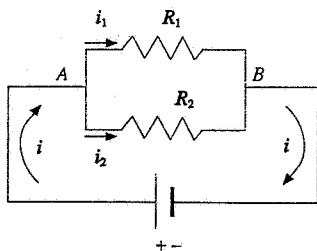
Figura 6.24

Resistori in parallelo

Due resistori si dicono in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi. In questo caso l'elemento comune ai due resistori è la d.d.p. $V = V_A - V_C$ e quindi, in base alla legge di Ohm, essi sono attraversati da due correnti i_1 e i_2 , diverse se sono diversi i valori delle resistenze R_1 e R_2 .

Nel punto A in cui la corrente si dirama nei due resistori possiamo generalizzare il ragionamento fatto nel paragrafo 6.3 e che ha portato alla (6.12). Basta considerare tre superficie Σ , Σ_1 , Σ_2 , con i che entra attraverso Σ , i_1 e i_2 che escono rispettivamente attraverso Σ_1 e Σ_2 ; per la *condizione di stazionarietà*

$$i = i_1 + i_2 \quad .$$

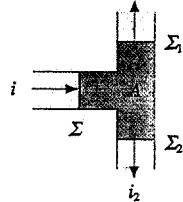


Pertanto

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

avendo posto

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad . \quad (6.38)$$



Anche la (6.38) si estende a un numero qualsiasi di resistori tutti in parallelo tra loro e dice che il *reciproco della resistenza equivalente è eguale alla somma dei reciproci delle singole resistenze*: R_{eq} risulta dunque minore di ciascuna delle R_i .

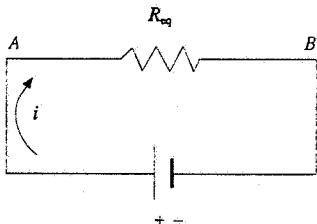
Le correnti nei due resistori valgono

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad , \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

e la potenza spesa è

$$P = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = R_1 \frac{V^2}{R_1^2} + R_2 \frac{V^2}{R_2^2} = V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq} i^2.$$

Figura 6.25



Attraverso combinazioni di serie e parallelo si può in pratica realizzare qualsiasi valore di resistenza. Come si è già notato nel caso dei condensatori, le connessioni hanno significato solo se i valori non sono molto diversi; altrimenti nella serie predomina la resistenza più grande e nel parallelo quella più piccola.

Esempio 6.7

Nella rete elettrica di resistori, collegati come in figura 6.26, i valori delle resistenze sono $R_1 = 3\Omega$ e $R_2 = 9\Omega$. Tra i terminali A e B è applicata una d.d.p. $V = V_A - V_B = 17.4V$. Calcolare la resistenza equivalente del circuito e la potenza spesa nel circuito stesso.

Soluzione

Il ramo CDEF consiste di tre resistori eguali di valore R_2 e quindi, in base a (6.37) la sua resistenza equivalente è $R' = 3R_2 = 27\Omega$. R' a sua volta è in parallelo alla resistenza R_1 del ramo CF e la resistenza equivalente è

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_1} \quad , \quad R'' = \frac{R_1 R'}{R_1 + R'} = 2.7\Omega \quad .$$

Infine R'' è in serie alle due resistenze R_1 e la resistenza equivalente di tutta la rete è

$$R_{eq} = 2R_1 + R'' = 8.7\Omega$$

L'intensità di corrente che fluisce attraverso R_{eq} è

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = 2A$$

e la potenza totale spesa è

$$P = R_{\text{eq}} i^2 = \frac{V^2}{R_{\text{eq}}} = 34.8 \text{ W}$$

La d.d.p. tra i punti C e F è

$$V_C - V_F = R'' i = 5.4 \text{ V}$$

e le correnti i_1 e i_2 (vedi figura 6.26) valgono

$$i_1 = \frac{V_C - V_T}{R_1} = 1.8 \text{ A} \quad , \quad i_2 = \frac{V_C - V_F}{R_2} = 0.2 \text{ A}$$

Si verifichi che la potenza spesa nei resistori è eguale alla potenza totale.

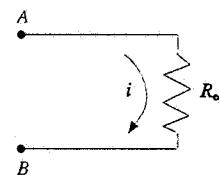
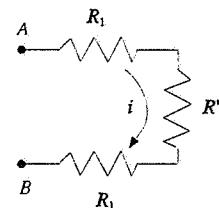
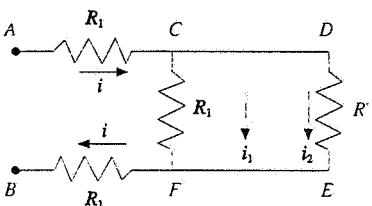
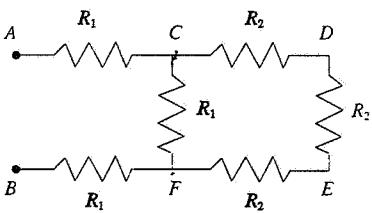


Figura 6.26 (Esempio 6.7)

6.7 Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata

Nel paragrafo 6.5 abbiamo visto che per un conduttore di resistenza R vale la legge di Ohm

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = R i \quad (6.26)$$

che mette in relazione l'intensità della corrente i nel conduttore con il campo elettrico \mathbf{E} prodotto da un generatore esterno, ai cui poli è collegato il conduttore. La (6.26) applicata a un *circuito chiuso* diventa

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = R_T i \quad , \quad (6.39)$$

essendo R_T la resistenza totale del circuito stesso. Il primo membro di (6.39) coincide con la definizione (2.6) di forza elettromotrice (f.e.m.) e pertanto la (6.39) afferma che per ottenere nel circuito una corrente di intensità i è necessaria la presenza nel circuito di una sorgente di f.e.m. ovvero di un campo \mathbf{E} la cui circuitazione non sia nulla. Ne segue che non può essere un campo elettrostatico \mathbf{E}_{el} a fare circolare le cariche nel circuito in quanto esso è conservativo e, secondo (2.10), la corrispondente f.e.m. è sempre nulla. La sorgente di f.e.m. deve invece avere al suo interno *forze* di natura non elettrostatica, *non conservative*, che possono determinare il moto continuo delle cariche.

Esaminiamo il circuito elettrico più semplice, formato da un conduttore collegato ai poli A e B di un generatore, sui quali sono accumulate le cariche $+q$ e $-q$, come abbiamo detto nel paragrafo 6.1. Il campo elettrostatico \mathbf{E}_{el} prodotto da tali cariche è sempre diretto da A verso B , sia nel conduttore che all'interno del generatore, in accordo col fatto che

$$\oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s})_{ext} + \int_B^A (\mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s})_{int} = 0 :$$

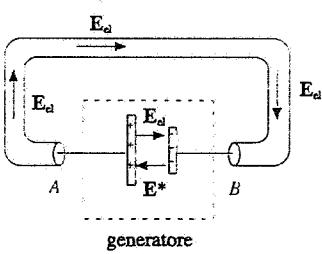


Figura 6.27

Campo elettromotore

il *primo termine* è l'integrale calcolato lungo il *conduttore esterno* e il *secondo* l'integrale calcolato all'*interno del generatore*. Il passaggio di una carica positiva all'interno del generatore dal polo negativo *B* al polo positivo *A* (o di una carica negativa da *A* a *B*) non può quindi avvenire per effetto del campo \mathbf{E}_{el} ; deve esserci all'interno del generatore un campo \mathbf{E}^* di natura non elettrostatica, che chiamiamo *campo elettromotore*, per cui il campo elettrico \mathbf{E} che esiste nel circuito vale

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el} && \text{all'interno del generatore} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{el} && \text{nel conduttore}\end{aligned}\quad (6.40)$$

La f.e.m. del campo \mathbf{E} si scrive

Forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} . \quad (6.41)$$

Il campo \mathbf{E} definito dalle (6.40) dunque *non è conservativo* e la sua *f.e.m. coincide*, secondo la definizione (2.4), con la *tensione del campo elettromotore* \mathbf{E}^* calcolata lungo una linea interna al generatore che va da *B* ad *A*, come dice la (6.41). Invece lungo una qualsiasi linea da *B* ad *A* esterna al generatore la tensione di \mathbf{E}^* è nulla, essendo \mathbf{E}^* nullo all'esterno del generatore.

Il dispositivo che genera il campo elettromotore, e quindi la f.e.m., può sfruttare azioni meccaniche, come vedremo nel paragrafo 6.8, reazioni chimiche (pile e accumulatori), il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, come vedremo nel capitolo 10, o altri meccanismi ancora (pile termoelettriche, celle solari, ecc.).

In ogni caso all'interno del generatore una carica dq viene spostata da *B* verso *A* da una forza $d\mathbf{F}^*$ che deve vincere la forza $d\mathbf{F}_{el} = dq \mathbf{E}_{el}$ e il campo elettromotore \mathbf{E}^* viene definito come rapporto tra la forza $d\mathbf{F}^*$ e la carica dq :

$$\mathbf{E}^* = \frac{d\mathbf{F}^*}{dq} . \quad (6.42)$$

Per avere un moto di cariche nel verso voluto all'interno del generatore deve essere $|\mathbf{E}^*| > |\mathbf{E}_{el}|$ di modo che risulti

$$\int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} > 0 .$$

All'esterno invece il moto delle cariche lungo il conduttore è dovuto al campo \mathbf{E}_{el} , generato dall'azione del campo elettromotore \mathbf{E}^* .

Siccome la corrente i che attraversa il conduttore esterno passa anche nel generatore dal polo *B* al polo *A*, definiamo una grandezza caratteristica del generatore, la *resistenza interna* r , mediante la relazione

Resistenza interna

$$\int_B^A (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} = ri , \quad (6.43)$$

che estende la legge di Ohm all'interno del generatore.

Pertanto un generatore è caratterizzato dalla f.e.m. \mathcal{E} , ovvero dalla tensione tra i due poli, e dalla resistenza interna r . Tenuto conto che nel conduttore esterno vale la (6.26), possiamo scrivere (6.41) come

$$\mathcal{E} = Ri + ri = (R + r)i = R_T i \quad , \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \quad ; \quad (6.44)$$

la corrente che circola nel circuito è data dal rapporto tra la f.e.m. fornita dal generatore e la resistenza totale. Dalla (6.44) ricaviamo inoltre

$$V_A - V_B = R i = \mathcal{E} - ri \quad : \quad (6.45)$$

la d.d.p. misurata tra i poli A e B del generatore è minore della f.e.m. \mathcal{E} , se nel circuito passa corrente.

Quando si stacca il conduttore esterno (*circuito aperto*) nel generatore si instaura una condizione di equilibrio, in quanto l'accumulo di carica sui poli impedisce un ulteriore spostamento di carica (per repulsione eletrostatica). Di conseguenza, quando $i = 0$,

$$\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{el} = 0 \quad , \quad V_A - V_B = \mathcal{E} \quad . \quad (6.46)$$

L'ultima relazione fornisce una *definizione operativa* della f.e.m. di un generatore: essa è eguale alla d.d.p. misurata ai capi del generatore a circuito aperto; vedremo nel paragrafo 6.11 che proprio su questa proprietà è basato un metodo di misura della f.e.m. di un generatore.

Nella figura 6.29 è riportata, per il circuito base finora considerato, la variazione del potenziale elettrico dal polo positivo A al polo negativo B, considerato a potenziale zero, lungo il resistore esterno, variazione che è lineare con la posizione se la sezione del conduttore è costante: in tal caso infatti la resistenza è proporzionale alla lunghezza secondo (6.25) e anche ΔV lo è, in base a (6.26). All'interno del generatore la rappresentazione è soltanto schematica, con un salto brusco pari a \mathcal{E} e una diminuzione pari a $r i$: in effetti la f.e.m. può essere distribuita con continuità lungo tutto il generatore.

Poiché l'energia potenziale di una carica positiva q che percorre il circuito è qV , la stessa figura rappresenta anche l'andamento dell'energia potenziale: passando da B ad A all'interno del generatore la carica acquista ad opera del campo elettromotore l'energia potenziale $q\mathcal{E}$ che perde parzialmente dentro il generatore stesso (effetto della resistenza interna) e poi nel resistore (effetto della resistenza esterna) così che in B la sua energia è nulla. Possiamo quindi affermare che la f.e.m. è numericamente *pari al lavoro fornito dal generatore alla carica unitaria che lo attraversa*.

Questo bilancio energetico è evidente se moltiplichiamo la (6.44) per $dq = i dt$:

$$\mathcal{E} i dt = R i^2 dt + r i^2 dt \quad .$$

Il lavoro fornito dal generatore viene dissipato nelle resistenze del circuito; in termini di potenza

$$\mathcal{E} i = R i^2 + r i^2 = R_T i^2 \quad . \quad (6.47)$$

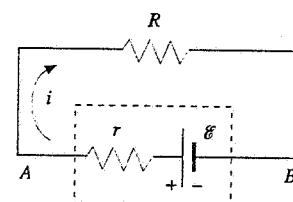


Figura 6.28

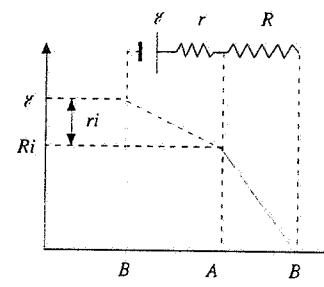


Figura 6.29

Esempio 6.8 Partitore resistivo

Nel circuito in figura 6.30 un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = 100$ V e resistenza interna $r = 10\Omega$ è collegato a tre resistori in serie di valori $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$. Calcolare la d.d.p. ai capi di ciascun resistore e ai capi del generatore.

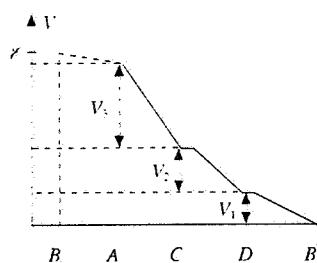
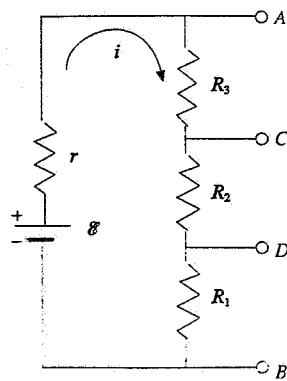


Figura 6.30

Soluzione

La resistenza totale del circuito è $R_T = r + R_1 + R_2 + R_3 = 200 \Omega$ e nel circuito circolante l'intensità di corrente (6.44) $i = \mathcal{E} / R_T = 0.5 \text{ A}$. La d.d.p. ai capi di ciascun resistore vale

$$V_1 = V_D - V_B = R_1 i = 20 \text{ V} ,$$

$$V_2 = V_C - V_D = R_2 i = 25 \text{ V} ,$$

$$V_3 = V_A - V_C = R_3 i = 50 \text{ V} .$$

e ai capi del generatore abbiamo

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - r i = V_1 + V_2 + V_3 = (R_1 + R_2 + R_3) i = 95 \text{ V} .$$

minore della f.e.m. \mathcal{E} .

Il circuito costituisce un *partitore resistivo*: esso consente di suddividere la tensione fornita da un generatore in parti determinate dai valori delle resistenze.

Esempio 6.9

Dimostrare che nel circuito elettrico della figura 6.31 si ottiene il massimo trasferimento di potenza su una resistenza esterna R quando R è eguale alla resistenza interna r del generatore.

Soluzione

L'intensità di corrente vale $i = \mathcal{E} / (R + r)$ e la potenza dissipata in R è

$$P_R = R i^2 = \mathcal{E}^2 \frac{R}{(R + r)^2}$$

Calcoliamo la derivata rispetto ad R e annulliamola:

$$\frac{dP_R}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0 \Rightarrow R = r .$$

Questo valore di R corrisponde a un massimo, in quanto $d^2 P_R / dR^2$ è negativa per $r = R$. In condizioni di massimo trasferimento di potenza la corrente vale $i = \mathcal{E} / 2r$ (inferiore al massimo valore possibile \mathcal{E} / r); la potenza erogata dal generatore è $P = \mathcal{E} i = \mathcal{E}^2 / 2r$ e la potenza spesa su R , pari a quella spesa su r , è $P_R = \mathcal{E}^2 / 4r$; quindi al massimo può essere trasferito su una resistenza esterna solo il 50% della potenza erogata dal generatore. Nella figura 6.32 sono mostrate, in funzione del rapporto R/r , la potenza totale P e le potenze spese sulle resistenze P_R e P_r .

La resistenza esterna su cui si trasferisce la potenza è chiamata *resistenza di carico* e nella situazione $R = r$ di massimo trasferimento di potenza si dice che la *resistenza di carico è adattata alla resistenza interna del generatore*. Osserviamo che R può essere il valore R_{eq} della resistenza equivalente di una rete resistiva connessa al generatore.

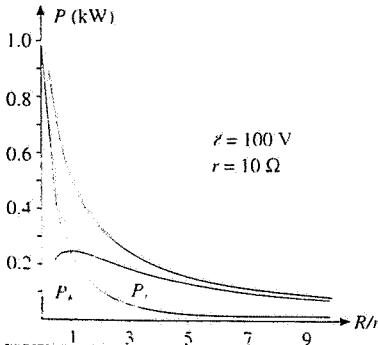


Figura 6.32

Consideriamo ora un tratto di circuito, che chiamiamo *ramo*, percorso dalla corrente i e costituito da un resistore R e da due generatori collegati come in figura 6.33. Applichiamo (6.26) e (6.45):

$$V_A - V_C = R i , \quad V_D - V_C = \mathcal{E}_1 - r_1 i \Rightarrow V_C - V_D = -\mathcal{E}_1 + r_1 i ,$$

$$V_D - V_B = \mathcal{E}_2 - r_2 (-i) = \mathcal{E}_2 + r_2 i .$$

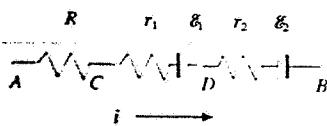


Figura 6.33

Sommendo membro a membro otteniamo

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + (R + r_1 + r_2) i , \\ V_A - V_B + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) &= (R + r_1 + r_2) i = R_T i . \end{aligned} \quad (6.48)$$

Notiamo che fissato il verso della corrente i , e quindi il verso secondo cui il potenziale elettrico diminuisce lungo la resistenza R_T , la f.e.m. \mathcal{E}_1 compare col segno positivo perché nel generatore la corrente entra nel polo negativo e esce da quello positivo (\mathcal{E}_1 da sola farebbe passare corrente nel verso scelto), mentre \mathcal{E}_2 compare per questa ragione col segno negativo (se agisse da sola farebbe passare corrente nel verso opposto a quello scelto).

Con questa precisazione la (6.48) può essere estesa ad un ramo comprendente un numero qualunque di generatori:

$$V_A - V_B + \sum_k \mathcal{E}_k = R_T i , \quad (6.49)$$

Legge di Ohm generalizzata

dove R_T è la resistenza totale del ramo, somma della resistenza esterna R e delle resistenze interne di tutti i generatori, e nella sommatoria il segno delle f.e.m. è preso come detto sopra.

La (6.49) si chiama legge di Ohm generalizzata; da essa si possono ottenere tutti i casi che abbiamo già considerato. Se nel tratto $A-B$ non ci sono generatori ($\mathcal{E}_k = 0$, $r_k = 0$) la (6.49) coincide con (6.26); se il circuito è chiuso ($V_A = V_B$) otteniamo

$$\sum_k \mathcal{E}_k = R_T i , \quad (6.50)$$

cioè la prima delle (6.44) applicata al caso di più generatori.

Esempio 6.10

Nel circuito in figura 6.34 $R = 50\Omega$, $\mathcal{E}_1 = 50$ V, $r_1 = 20\Omega$, $\mathcal{E}_2 = 100$ V, $r_2 = 30\Omega$. Calcolare l'intensità della corrente i , l'andamento del potenziale lungo il circuito e il bilancio energetico.

Soluzione

Fissiamo convenzionalmente come verso di percorrenza della corrente i quello orario e applichiamo (6.50):

$$i^* = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{50 - 100}{50 + 20 + 30} = -0.5 \text{ A}$$

Poiché il risultato è negativo, vuol dire che il verso della corrente è opposto a quello fissato: $i = -i^* = 0.5$ A (come si capisce subito guardando i valori delle f.e.m.). Le d.d.p. ai capi di ciascun elemento sono:

$$V_C - V_D = \mathcal{E}_2 - r_2 i = 85 \text{ V}, \quad V_B - V_C = -Ri = -25 \text{ V}, \quad V_A - V_B = -\mathcal{E}_1 - r_1 i = -60 \text{ V}.$$

La potenza vale:

$$(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)i = (R + r_1 + r_2)i^2 \Rightarrow \mathcal{E}_2 i = \mathcal{E}_1 i + (R + r_1 + r_2)i^2$$

Il generatore di f.e.m. \mathcal{E}_2 eroga la potenza $\mathcal{E}_2 i = 50$ W che viene dissipata in parte sulla resistenza totale ($R_T i^2 = 25$ W) e in parte nel generatore di f.e.m. \mathcal{E}_1 ($\mathcal{E}_1 i = 25$ W), nel quale la corrente viene forzata a passare dal polo positivo al polo negativo, contro il campo elettromotore: infatti in tale generatore la d.d.p. applicata dall'esterno (60 V) è maggiore della f.e.m. ($\mathcal{E}_1 = 50$ V), quindi $|E_e| > |E^*|$.

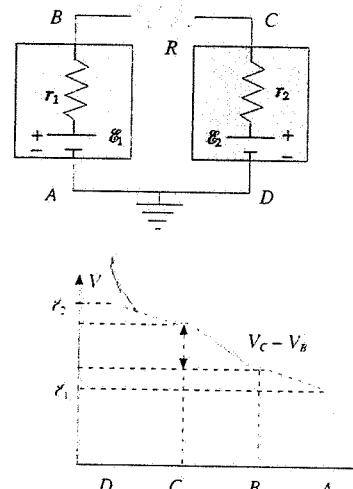


Figura 6.34

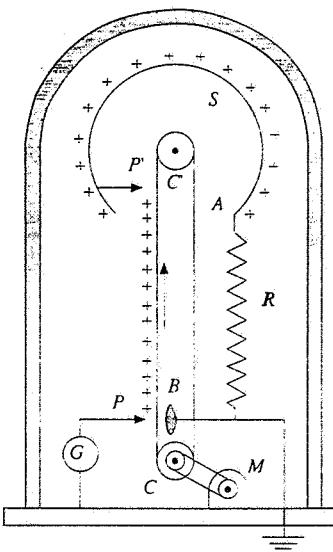


Figura 6.35

6.8 Il generatore Van de Graaf

Il generatore ideato da Van de Graaf nel 1929 sfrutta fenomeni elettrostatici, come l'induzione elettrostatica e l'effetto delle punte, per attuare una separazione di cariche e di conseguenza stabilire una d.d.p. tra due elettrodi. Il moto delle cariche all'interno del generatore, in verso contrario a quello che sarebbe determinato dal campo elettrostatico, è dovuto ad un intervento meccanico, come ora descriveremo. I generatori il cui funzionamento si basa su principi analoghi (trasformazione di lavoro meccanico in energia elettrostatica) sono detti *generatori elettrostatici*.

Gli elementi del generatore Van de Graaf (vedi figura 6.35) sono una *testa* conduttrice cava *S* di forma sferica, avente raggio R_0 , sorretta da una colonna di resistenza elettrica *R*, una cinghia di trasmissione tesa tra due puleggie *C* e *C'* e costituita da materiale isolante, due sistemi di punte *P* e *P'*. Un motore *M* mantiene in rotazione la puleggia *C* e quindi la cinghia. Tramite un generatore *G* viene stabilita una d.d.p. dell'ordine di 10^4 V tra le punte *P* (positive) e un elettrodo *B*; il forte campo elettrico locale provoca la ionizzazione del gas circolante e gli ioni positivi vanno a depositarsi sulla cinghia e vengono trasportati verso la sommità del sistema. Passando di fronte alle punte *P'*, collegate alla testa sferica, le cariche positive *inducono* cariche negative sulle punte e positive sulla superficie sferica. Le cariche negative sfuggono dalle punte e depositandosi sulla cinghia ne annullano la carica, così che la cinghia quando esce dalla testa sferica è priva di carica.

Il processo elementare ora descritto, che sfrutta l'induzione elettrostatica per separare le cariche e accumulare cariche di un segno sulla superficie della testa, continua fino a che la sfera raggiunge rispetto alla terra un potenziale elettrostatico V_{\max} tale che il campo elettrico superficiale $E_{\max} = V_{\max} / R_0$ egualgi la rigidità dielettrica E_s del gas circostante (definita nell'esempio 5.4). Ha origine allora una dispersione di carica verso l'esterno e il potenziale V_{\max} non cresce più.

Se il gas circostante è aria, dalla tabella 5.1 vediamo che $E_s = 3 \cdot 10^6$ V/m; con una sfera di diametro pari a 1 m $R_0 = 0.5$ m e $V_{\max} = E_s R_0 = 1.5 \cdot 10^6$ V = 1.5 MV. Tale valore viene aumentando chiudendo tutto il sistema in una campana in cui viene immesso gas ad alta pressione, in quanto la rigidità dielettrica di un gas aumenta con la pressione: con azoto a circa 10^6 Pa si può raggiungere il valore $V_{\max} = 6$ MV. Nelle versioni più recenti si utilizza l'esafluoruro di zolfo SF₆ fino a pressioni di $7 \cdot 10^6$ Pa e si raggiungono valori di V_{\max} intorno a 16 MV. Si tratta dei massimi valori ottenuti finora per una d.d.p. continua.

Il generatore di Van de Graaf fu concepito, ed è tuttora usato, per l'accelerazione di ioni ai quali fornisce l'energia cinetica $\frac{1}{2} mv^2 = qV_{\max}$, se m e q sono la massa e la carica dello ione (q è pari ad un multiplo intero piccolo della carica elementare e). Il dispositivo sperimentale è mostrato nella figura 6.36, in cui per semplicità non sono disegnate la cinghia e le punte. Una sorgente *I* di ioni positivi è posta all'interno della testa ed è allo stesso potenziale: gli ioni emessi dalla sorgente si muovono all'interno di un tubo verticale, nel quale è fatto il vuoto, e sono accelerati dal campo elettrostatico dovuto alla d.d.p. $V_A - V_B$ tra la testa e la terra. Il tubo è costituito in realtà da una serie di tratti ceramici e di anelli conduttori, ciascuno connesso al partitore resistivo di resistenza totale *R*: in questo modo si assicura l'uniformità del campo accelerante lungo il tubo. All'uscita del tubo gli ioni sono deviati di 90° dall'azione di un campo magnetico *B* (vedi capitolo 7) e si muovono lungo una linea orizzontale; alla fine essi vengono fatti urtare contro un bersaglio e dallo studio delle modalità di interazione tra ioni e nuclei del bersaglio si ricavano informazioni sulle proprietà nucleari della materia (si riveda il paragrafo 1.7).

Discussiamo adesso un circuito contenente un generatore Van de Graaf alla luce di quanto visto nel paragrafo 6.7. Il circuito è schematizzato nella figura 6.35: le cariche elettriche passano da *B* ad *A* all'interno del generatore sospinte dal motore e successivamente dalla testa sferica alla base attraverso la serie di resistori esterni (come vedremo in seguito, il contributo della corrente ionica nel tubo dell'acceleratore è trascurabile): i punti *A* e *B* sono quindi i poli del generatore.

Il motore che fa girare la cinghia esercita su ogni carica q trasportata una forza meccanica F che deve essere in modulo maggiore della forza $q E_e$ esercitata su q dalle cariche positive presenti su *S*. Pertanto su q agisce la forza

$$F = F' + q E_e \quad \text{lungo la cinghia .}$$

$$F = q E_e \quad \text{lungo il resistore esterno .}$$

e il lavoro complessivo lungo il circuito vale

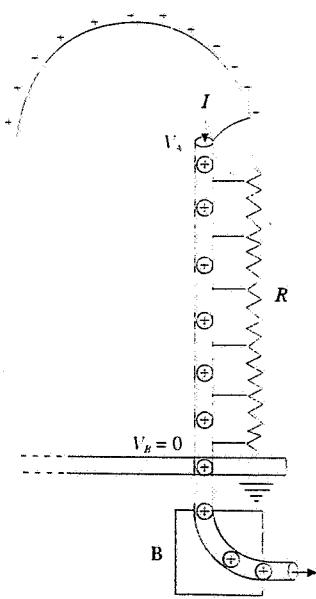


Figura 6.36

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A (\mathbf{F}^* + q \mathbf{E}_{el}) \cdot d\mathbf{s} + \int_A^B q \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{s} ,$$

in quanto $\oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Esso è quindi pari al lavoro meccanico fatto dal motore per muovere q , che è solidale alla cinghia. La f.e.m., pari al lavoro per unità di carica, è

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \int_B^A \frac{\mathbf{F}^*}{q} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} ,$$

dove $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^* / q$ è il campo elettromotore (6.42). Abbiamo in sostanza ripetuto per il generatore in esame il ragionamento generale che ha portato alla (6.41).

Questa f.e.m., che è dovuta all'azione del motore ed è quindi di origine meccanica, fa circolare corrente nel resistore esterno e nel tubo in cui vengono accelerati gli ioni, oltre che nel gas isolante e lungo la cinghia che presenta anch'essa una resistenza elettrica (correnti di fuga).

Se stacchiamo il carico, costituito dal resistore e dal tubo, il motore continuerà a fare accumulare cariche sulla testa e a fare aumentare il campo elettrostatico \mathbf{E}_{el} fino a che

$$\mathbf{F}^* + q \mathbf{E}_{el} = 0 :$$

oltre questo valore limite del campo elettrostatico (ammesso che sia inferiore alla rigidità dielettrica E_s) il motore non riesce più ad esercitare una forza superiore a quella elettrostatica e quindi si arresta. La d.d.p. misurata in queste condizioni di corrente nulla coincide con la f.e.m. del generatore, come si è detto nel paragrafo 6.7, relazione (6.46).

L'energia elettrostatica immagazzinata sulla testa al potenziale γ è

$$W = \frac{1}{2} C \gamma^2 = \frac{1}{2} 4\pi \epsilon_0 R_0 \gamma^2 .$$

Con $R_0 = 0.5$ m e $\gamma = 6$ MV si ha $W = 2 \cdot 10^3$ J.

La corrente erogata dal generatore si deduce dal calcolo della carica che può essere trasportata dalla cinghia. Supponiamo che questa sia larga $h = 20$ cm e si muova con velocità $v = 10$ m/s; supponiamo inoltre che la carica trasmessa con continuità dalla punte alla cinghia si distribuisca su questa con densità $\sigma = 50 \cdot 10^{-6}$ C/m². La carica dq trasportata, nel tempo dt vale

$$dq = \sigma d\Sigma = \sigma h ds = \sigma h v dt$$

e la corrente di convezione trasportata dalla cinghia è

$$i = \frac{dq}{dt} = \sigma h v = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2 \cdot 10 = 10^{-4} \text{ A} = 100 \mu\text{A} :$$

essa dipende dalle caratteristiche costruttive del generatore ed è la *corrente massima* che il generatore può erogare (per una data velocità della cinghia). Dividendo γ per i abbiamo un'idea dell'ordine di grandezza della resistenza del circuito: $\gamma/i = 6 \text{ MV} / 100 \mu\text{A} = 6 \cdot 10^{10} \Omega$; la potenza erogata è $P = \gamma i = 600 \text{ W}$.

Calcoliamo infine il valore della corrente ionica nel tubo acceleratore. Il numero massimo di ioni che possono essere accelerati è dell'ordine di 10^{13} ioni/secondo a cui corrisponde la corrente

$$i_{ioni} = 10^{13} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{C}{s} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 1.6 \mu\text{A} .$$

quasi cento volte inferiore alla corrente di convezione della cinghia.

Il generatore Van de Graaf in conclusione è un generatore con f.e.m. molto elevata e corrente piuttosto bassa: per confronto osserviamo che un generatore tipo batteria per uso automobilistico, in cui la f.e.m. ha origine da processi chimici, presenta f.e.m. dell'ordine di 10 V e corrente dell'ordine di 10 A, costante nel tempo per molte ore.

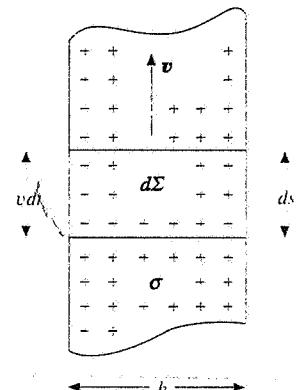


Figura 6.37

6.9 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore

Nei circuiti visti finora la corrente elettrica era continua, cioè costante nel tempo. Prendiamo ora in esame alcuni semplici circuiti nei quali la corrente varia nel tempo, secondo una legge definita.

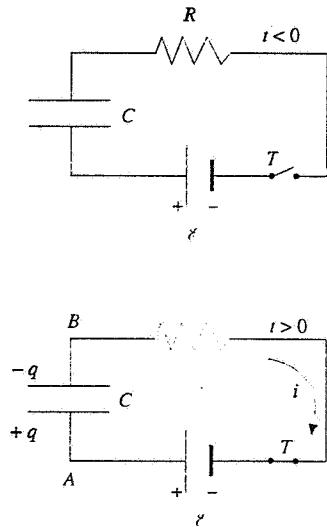


Figura 6.38

Carica di un condensatore

Consideriamo il circuito costituito da un generatore \mathcal{E} , un resistore R e un condensatore C ; inizialmente l'interruttore T è aperto, nel circuito non circola corrente e il condensatore è scarico. Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e il generatore inizia a prelevare cariche dai conduttori connessi al polo negativo e a portarle al polo positivo di modo che sulle armature del condensatore compaiono le cariche $+q$ e $-q$. Il processo continua fino a quando la carica del condensatore raggiunge il valore massimo $q_0 = C\mathcal{E}$, cui corrisponde la d.d.p. $V_A - V_B$ tra le armature, pari alla f.e.m. \mathcal{E} del generatore (il campo elettromotore è eguale in modulo al campo elettostatico).

In un istante generico t valgono le relazioni

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = R i(t) + \frac{q(t)}{C}, \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt};$$

la prima è la (6.45) applicata al nostro caso, supponendo la resistenza interna del generatore trascurabile rispetto alla resistenza esterna (oppure compresa nel valore di R) e considerando che c'è una d.d.p. anche ai capi del condensatore. Abbiamo pertanto

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \frac{dt}{RC}.$$

Integriamo tra l'istante $t = 0$ e l'istante generico t , ai quali corrispondono le cariche $q = 0$ e q :

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt, \quad \ln \left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} \right) = - \frac{t}{RC}.$$

Esplicitiamo infine la carica e otteniamo

$$\begin{aligned} q(t) &= C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \\ V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \\ V_R(t) &= R i(t) = \mathcal{E} e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (6.51)$$

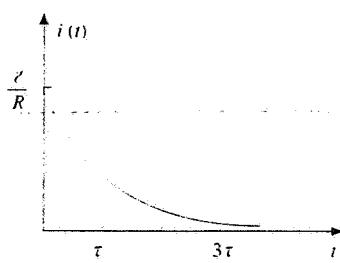
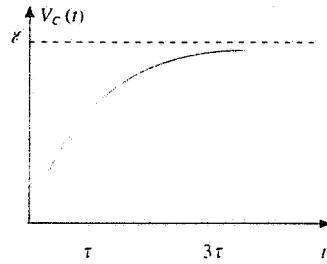


Figura 6.39

Quando si carica un condensatore connettendolo ad un generatore, la d.d.p. finale ai capi del condensatore è uguale alla f.e.m. \mathcal{E} del generatore e la carica finale è $q_0 = C\mathcal{E}$: questi valori massimi sono raggiunti asintoticamente. La corrente nel circuito è massima nell'istante $t = 0$, quando vale \mathcal{E}/R , e decresce esponenzialmente nel tempo annullandosi per $t \rightarrow \infty$. L'andamento temporale è regolato dalla *costante di tempo* $\tau = RC$. Ricordiamo (si veda il paragrafo 1.7 del volume I) che per la funzione $e^{-t/\tau}$ in un intervallo di tempo $\Delta t = \tau$ si ha una riduzione del valore pari a un fattore e ($= 2.72$): dopo τ secondi dall'istante iniziale essa vale 0.368, dopo 2τ 0.135, dopo 3τ 0.050, ecc; per la funzione $1 - e^{-t/\tau}$ la differenza rispetto al valore asintotico è 0.368 dopo τ secondi dall'istante $t = 0$, 0.135 dopo 2τ , 0.050 dopo 3τ , ecc. In pratica dopo un tempo $t \approx 5\tau$ entrambe le funzioni hanno raggiunto il loro valore asintotico, rispettivamente 0 e 1 (l'errore è del 7 per mille). Ad esempio, se $C = 2 \mu\text{F}$ e $R = 5 \cdot 10^5 \Omega$, $\tau = RC = 1 \text{ s}$ e dopo 5 s il condensatore si può considerare carico e la corrente nulla.

È facile verificare che il prodotto RC ha le dimensioni di un tempo:

$$RC = \Omega F = \frac{V}{A} \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

La potenza istantanea erogata dal generatore vale

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E}i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC}$$

e quella spesa nel resistore è

$$P_R = R i^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$$

Il lavoro elementare di carica del condensatore, corrispondente ad un aumento dell'energia elettrostatica del condensatore, è $V_C dq$ e la relativa potenza si scrive, ricorrendo alle (6.51),

$$P_C = V_C \frac{dq}{dt} = V_C i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC} = P_{\text{gen}} - P_R$$

In ogni istante quindi

$$P_{\text{gen}} = P_R + P_C ,$$

in accordo col *principio di conservazione dell'energia*.

Il lavoro fornito dal generatore, quello consumato nella resistenza e l'energia elettrostatica del condensatore alla fine del processo valgono

$$\begin{aligned} W_{\text{gen}} &= \int_0^\infty P_{\text{gen}} dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} dt = C \mathcal{E}^2 , \\ W_R &= \int_0^\infty P_R dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 , \quad \Delta U_e = \int_0^\infty P_C dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 . \end{aligned}$$

Principio di conservazione dell'energia

Nella *carica di un condensatore* il 50% dell'energia fornita dal generatore va in energia elettrostatica, l'altra metà viene dissipata in calore, indipendentemente dai valori di R e C : questi determinano la durata del processo, C insieme a \mathcal{E} fissa la spesa energetica, però la ripartizione relativa è sempre la stessa.

Lo stesso risultato si può ottenere più rapidamente calcolando il lavoro fatto dal generatore come

$$W_{\text{gen}} = \int \mathcal{E} dq = \mathcal{E} \int_0^{q_0} dq = \mathcal{E} q_0 = C \mathcal{E}^2 ;$$

siccome $\Delta U_e = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$, dalla conservazione dell'energia si deduce che sulla resistenza viene dissipato il lavoro $\frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$.

È interessante notare l'analogia con i risultati già trovati nel paragrafo 4.9 e nell'esempio 5.8, relativi a processi a potenziale costante, cioè a processi in cui il condensatore è sempre connesso ad un generatore.

Scarica di un condensatore

Consideriamo ora un condensatore C , con carica iniziale q_0 , un resistore R e un interruttore inizialmente aperto. La d.d.p. ai capi del condensatore vale $V_0 = q_0/C$ e l'energia elettrostatica in esso immagazzinata è $U_e = q^2/2C$. All'istante $t=0$ si chiude l'interruttore e le cariche si muovono dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore, dando luogo a una corrente positiva lungo il resistore data da $i = -dq/dt$, dove il segno meno è

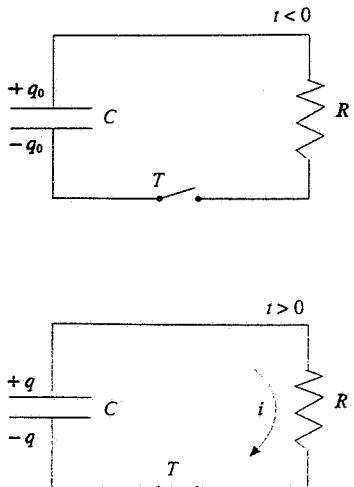


Figura 6.40

necessario in quanto la carica diminuisce nel tempo.

Nell'istante generico la d.d.p. V_C ai capi del condensatore è eguale a quella V_R ai capi del resistore e valgono quindi le relazioni

$$V_C = \frac{q}{C} = V_R = R i \quad , \quad i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad ,$$

$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \quad , \quad \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} \quad .$$

Le espressioni esplicite sono

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} \quad , \quad V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \quad , \quad (6.52)$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R} \quad .$$

La carica, la d.d.p. ai capi del condensatore e la corrente nel circuito diminuiscono esponenzialmente nel tempo con una rapidità caratterizzata dalla *costante di tempo* $\tau = R C$.

La potenza istantanea dissipata su R vale

$$P_R = R i^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

e nell'intero processo viene dissipata l'energia

$$W_R = \int_0^\infty P_R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C} \quad .$$

pari all'energia elettrostatica iniziale del condensatore.

Notiamo che la corrente di carica è eguale a quella di scarica (se si pone $V_0 = \gamma$): siccome la stessa corrente produce gli stessi effetti, se nella scarica si ha egualanza in modulo tra variazione di energia del condensatore e energia dissipata nella resistenza, è giustificato il fatto che pure nella carica i due contributi siano numericamente eguali: la differenza sta nel fatto che ora essi hanno lo stesso segno e quindi devono essere forniti da una sorgente esterna (il generatore). In effetti le soluzioni ottenute mostrano che il processo di variazione di carica per unità di tempo nelle due situazioni è lo stesso, solo che in un caso avviene spontaneamente in un certo verso, nell'altro è forzato ad avvenire in verso contrario.

Circuiti RC

I due circuiti semplici che abbiamo illustrato, detti comunemente *circuiti RC* , mostrano realisticamente i processi di carica e scarica di un condensatore. Per caricare un condensatore occorre sempre un certo tempo (il processo non è istantaneo) perché c'è sempre resistenza nel circuito, se non altro quella interna del generatore; inoltre la spesa di energia è sempre maggiore di $C V_0^2 / 2$, per via della dissipazione resistiva (irreversibile). Nel caso della scarica occorre sottolineare che se questa avviene come descritto, cioè tramite un resistore, l'energia elettrostatica è completamente persa. Notiamo inoltre che un condensatore isolato non mantiene indefinitamente la sua carica, in quanto ci sono sempre processi conduttori attraverso il dielettrico o attraverso l'aria, che si possono schematizzare con una *resistenza di perdita R* : dal valore di questa e della capacità dipende il tempo di scarica.

Esempio 6.11

Si riconsideri il sistema di due condensatori degli esempi 4.11 e 4.14 e si immagini che al tempo $t = 0$, quando la d.d.p. ai capi del condensatore C_1 è V_1 e ai capi di C_2 è V_2 , venga effettuata la connessione tra i due condensatori con un resistore R . Calcolare la corrente nel circuito e l'energia dissipata su R .

Soluzione

Supponiamo $V_1 > V_2$: dopo la connessione C_1 si scarica e C_2 si carica, per cui $i = -dq_1/dt = dq_2/dt$. In un istante generico

$$\frac{q_1}{C_1} = R i + \frac{q_2}{C_2}$$

Deriviamo rispetto al tempo e poniamo $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$:

$$-\frac{i}{C_1} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} \Rightarrow R \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} \quad , \quad \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando, $i = i_0 e^{-t/RC}$ dove i_0 è la corrente nell'istante iniziale, pari a $(V_1 - V_2)/R$. La soluzione è quindi

$$i(t) = \frac{V_1 - V_2}{R} e^{-t/RC}$$

La corrente decresce esponenzialmente e si annulla quando, a seguito dello spostamento di carica, le d.d.p. ai capi dei due condensatori sono uguali. L'energia dissipata su R è

$$W_R = \int_0^{\infty} R i^2 dt = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

e constatiamo che è eguale alla diminuzione dell'energia elettrostatica dei condensatori, calcolata nell'esempio 4.14.

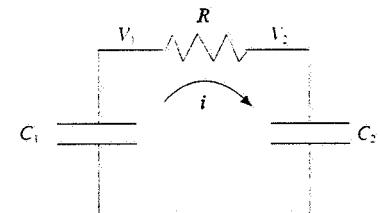


Figura 6.42

L'introduzione di circuiti con corrente variabile nel tempo richiede un richiamo alla condizione di stazionarietà enunciata nel paragrafo 6.3. Noi abbiamo implicitamente ammesso che la corrente $i(t)$ sia la stessa in ogni sezione del circuito e quindi soddisfi alla condizione di stazionarietà o, come si dice meglio in questo caso, di quasi stazionarietà. Ciò vuol dire che riteniamo il fenomeno di variabilità abbastanza lento per cui il tempo che impiegherebbe la luce ad attraversare il circuito è molto minore di τ , tempo caratteristico del circuito RC . Se una dimensione tipica del circuito è dell'ordine di $s = 10$ cm, il tempo di cui parliamo è $\tau = s/c = 3.3 \cdot 10^{-10}$ s: fino a valori di τ dell'ordine di 10^{-9} s l'ipotesi di stazionarietà è valida.

Un altro problema, legato alla presenza di un condensatore nel circuito, è il seguente: il concetto di corrente è stato da noi associato a quello di movimento di cariche da una parte e a quello di circuito chiuso dall'altra, lungo cui le cariche si muovono; però attraverso lo spazio compreso tra le armature di un condensatore non c'è trasporto di cariche. La difficoltà si risolve considerando che per una variazione di carica dq su una armatura c'è una variazione $-dq$ sull'altra (induzione completa) e ciò equivale a dire che quando una carica dq arriva su un'armatura, una carica dq lascia l'altra armatura, come se la carica dq fosse passata attraverso il condensatore. Il ragionamento è valido solo in regime variabile: con una f.e.m. costante e una corrente costante, anche la d.d.p. V_C deve essere costante, così come la carica sulle armature e quindi non può esserci corrente nel circuito. A parte il fenomeno transitorio, che dura poche costanti di tempo, nei circuiti RC come quelli esaminati non può sussistere un regime di corrente continua.

Formalmente, e facendo riferimento per semplicità a un condensatore piano vuoto ($C = \epsilon_0 \Sigma / h$, $E = V / h$), possiamo scrivere

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma V}{h}\right) = \epsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dt} . \quad (6.53)$$

La corrente variabile viene dunque messa in relazione con la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso la sezione del condensatore. Vedremo nel paragrafo 10.10 che la (6.53) ha un significato più profondo di quello che ora potremmo attribuirle, l'essere cioè un artificio formale per dare un'espressione della corrente all'interno del condensatore.

6.10 Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche

Rete elettrica

Nei paragrafi precedenti è stato sempre considerato un circuito semplice, formato da un generatore di f.e.m. e da un resistore, che per quanto visto nel paragrafo 6.6 potrebbe essere l'equivalente di un insieme di resistori connessi tra loro in serie e in parallelo. Esistono d'altra parte circuiti con geometrie più complicate, che non possono essere ridotti ad un unico resistore equivalente soltanto con operazioni di serie e parallelo (si veda l'esempio 6.13). Sia il caso più semplice che quelli più complessi sono particolari esempi di *rete elettrica*.

Gli elementi geometrici distintivi di una *rete* sono i *nodi* e i *rami*. Un *nodo* è un punto nel quale convergono almeno tre conduttori; i nodi sono collegati da *rami*, in cui possono esserci componenti attive (generatori) e componenti passive (resistori). All'interno di una rete è possibile individuare determinati cammini chiusi, detti *maglie*, costituiti da più rami; un dato ramo può pertanto appartenere a più maglie.

L'analisi delle reti elettriche, cui accenniamo soltanto senza sviluppare a fondo l'argomento, che è materia di corsi specialistici, è semplificata dall'uso di due leggi generali, dette *leggi o principi di Kirchhoff*, relative ai nodi e alle maglie: esse sintetizzano quanto abbiamo finora esposto sui circuiti elettrici resistivi percorsi da corrente elettrica stazionaria.

La *prima legge di Kirchhoff*, o *legge di nodi*, dice che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla, se prendiamo con un dato segno le correnti che escono dal nodo e col segno opposto quelle che entrano:

Prima legge di Kirchhoff

$$\sum_k i_k = 0 \quad . \quad (6.54)$$

Si tratta di una generalizzazione della (6.12), conseguenza del principio di conservazione della carica espresso per una corrente stazionaria dalla relazione (6.9).

Consideriamo ora una *maglia* di una rete, nella quale fissiamo arbitrariamente un verso di percorrenza; in ogni ramo della maglia viene a sua volta fissato un verso della corrente che lo percorre; la *seconda legge di Kirchhoff*, o *legge delle maglie*, stabilisce che

Seconda legge di Kirchhoff

$$\sum_k R_k i_k = \sum_k \epsilon_k : \quad (6.55)$$

la somma algebrica delle f.e.m. presenti nei rami della maglia è eguale alla somma algebrica dei prodotti $R_k i_k$, cioè delle d.d.p. ai capi dei resistori R_k (situati nei rami della maglia (nella somma sono compresi anche i contributi delle resistenze interne dei generatori)). I segni dei vari termini devono soddisfare le seguenti regole:

- se nel ramo k -esimo la corrente i_k è concorde al verso scelto nella maglia, $R_k i_k$ ha segno positivo;
- in caso contrario $R_k i_k$ ha segno negativo;
- se la sorgente di f.e.m. ϵ_k viene attraversata dal senso di percorrenza fissato nel verso che va dal polo negativo al polo positivo, essa va presa col segno positivo;
- in caso contrario ϵ_k va presa col segno negativo.

Prendiamo come esempio la maglia disegnata in figura 6.45, con i versi ivi specificati, e applichiamo la legge di Ohm generalizzata (6.49) ad ogni ramo:

$$R_1 i_1 = V_A - V_B + \epsilon_1$$

$$R_2 i_2 = V_B - V_C - \epsilon_2$$

$$-R_3 i_3 = V_C - V_D - \epsilon_3$$

$$R_4 i_4 = V_D - V_A + \epsilon_4 .$$

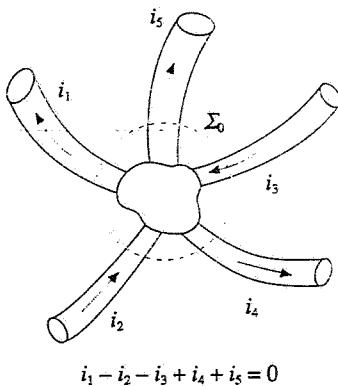


Figura 6.43

Sommendo le quattro relazioni si ottiene

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 ,$$

che corrisponde alla (6.55), se vengono soddisfatte le regole sui segni sopra enunciate.

L'applicazione delle due leggi di Kirchhoff ad una rete, formata da più maglie, porta a definire procedure di soluzione che sono applicabili in generale e alle quali accenneremo dopo gli esempi.

Se la rete ha N nodi ($N \geq 2$) e L rami ($L \geq 3$), utilizzando la (6.54) si possono scrivere N equazioni lineari tra le correnti che circolano negli L rami; di queste però solo $N - 1$ sono indipendenti, come si può intuitivamente capire se si pensa che ogni corrente di un ramo afferisce sempre a due nodi, quelli terminali del ramo, e quindi, scritte $N - 1$ equazioni (6.54), la N -esima ha tutti gli elementi che già compaiono in altre equazioni e non è una condizione realmente diversa da quelle già imposte (nel caso più semplice di rete con due nodi quanto detto è evidente: con le stesse correnti si scrivono due equazioni identiche e pertanto una sola è sufficiente).

Abbiamo così L incognite e $N - 1$ condizioni per cui il numero di correnti indipendenti da determinare è

$$M = L - (N - 1) = L - N + 1 \quad (6.56)$$

Questo evidentemente è anche il numero di maglie indipendenti che si possono individuare nella rete ($M \geq 2$). Un metodo semplice e pratico per individuare in una rete le M maglie indipendenti consiste nello scegliere le maglie in modo tale che ciascuna abbia almeno un ramo che non è parte delle maglie scelte precedentemente.

Individuate le M maglie si associa ad ogni maglia una corrente (i_1, i_2, \dots, i_M) e un verso di percorrenza nella maglia e si scrivono le M equazioni (6.55): la soluzione di tale sistema lineare dà i valori delle correnti incognite, un segno negativo significando che la corrente nella maglia circola in verso opposto a quello scelto inizialmente. Infine la corrente in un singolo ramo è pari a una delle correnti calcolate se il ramo appartiene a una sola maglia oppure è la somma algebrica di più correnti se il ramo appartiene a più maglie.

La procedura esposta non è univoca, nel senso che a seconda della scelta delle maglie si hanno diversi sistemi di equazioni e diversi insiemi di correnti di maglia; però alla fine le correnti nei rami sono ovviamente sempre le stesse.

Esempio 6.12

Nella rete elettrica della figura 6.46 $\mathcal{E}_1 = 18 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$. Determinare l'intensità di corrente erogata da ciascun generatore e l'intensità di corrente attraverso il resistore R_3 . Verificare inoltre il bilancio della potenza nella rete. Le resistenze interne dei generatori sono trascurabili.

Soluzione

I nodi della rete sono due, B e C , e i rami sono tre; quindi il numero di maglie indipendenti è $M = 3 - 2 + 1 = 2$. Sceglieremo le maglie $ABCD$ e $BEFC$, con le relative correnti i_1 e i_2 nei versi indicati: nel ramo contenente R_3 supponiamo che la corrente, pari a $i_1 - i_2$, vada da B a C . Scriviamo le equazioni (6.55):

$$-\mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) \quad , \quad \mathcal{E}_2 = (R_2 + R_4) i_2 - R_3 (i_1 - i_2) \quad .$$

Riordiniamo evidenziando le incognite i_1 e i_2 :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 &= -\mathcal{E}_1 \\ -R_3 i_1 + (R_2 + R_3 + R_4) i_2 &= \mathcal{E}_2 \end{aligned} \quad (6.57)$$

Numericamente

$$18 i_1 - 6 i_2 = -18 \quad , \quad -6 i_1 + 12 i_2 = 12$$

$$\Rightarrow i_1 = -0.8 \text{ A} \quad , \quad i_2 = 0.6 \text{ A} \quad .$$

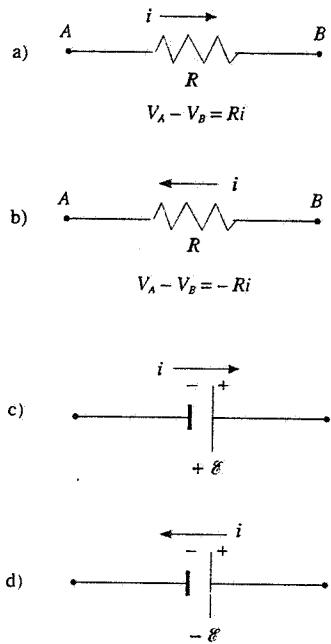


Figura 6.44

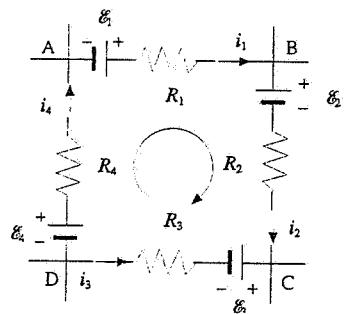


Figura 6.45

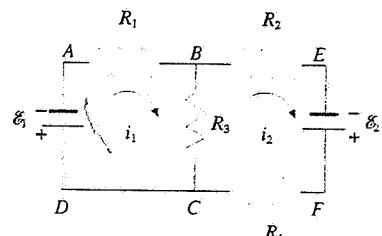


Figura 6.46

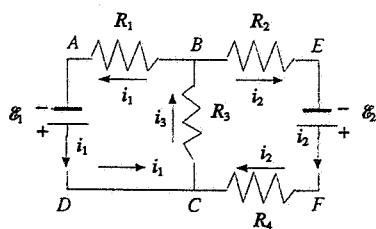


Figura 6.47

La corrente nella prima maglia circola pertanto in verso opposto a quello scelto; nel resistore R_3 le correnti sono concordi e circolano quindi 1.4 A da C a B . La soluzione è illustrata nella figura 6.47.

La potenza erogata dai generatori è

$$P_{\text{gen}} = E_1 i_1 + E_2 i_2 = 21.6 \text{ W}$$

e nei singoli resistori si ha

$$P_R = 12 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.36 + 6 \cdot 1.96 + 4 \cdot 0.36 = 21.6 \text{ W}.$$

Si provi a risolvere l'esercizio considerando le maglie $A B C D$, $A E F D$ e si troverà $i_1 = -1.4 \text{ A}$, $i_2 = 0.6 \text{ A}$: nei singoli rami si hanno le stesse correnti prima calcolate.

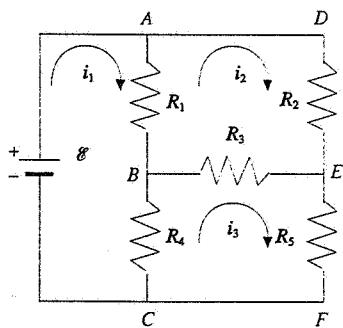


Figura 6.48

Esempio 6.13

Nella rete elettrica della figura 6.48 $\mathcal{E} = 18 \text{ V}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$. Calcolare la potenza erogata dal generatore. La resistenza interna del generatore è trascurabile.

Soluzione

La rete ha $N = 4$ nodi, $L = 6$ rami, $M = 3$ maglie indipendenti, che sceglieremo come in figura. Applichiamo (6.55):

$$\mathcal{E}_1 = R_1 (i_1 - i_2) + R_4 (i_1 - i_3)$$

$$0 = R_2 i_2 + R_3 (i_2 - i_3) - R_1 (i_1 - i_2)$$

$$0 = R_5 i_3 - R_4 (i_1 - i_3) - R_3 (i_2 - i_3) .$$

Riordiniamo mettendo in evidenza le correnti incognite:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4) i_1 - R_1 i_2 - R_4 i_3 &= \mathcal{E}_1 \\ -R_1 i_1 + (R_1 + R_2 + R_3) i_2 - R_3 i_3 &= 0 \\ -R_4 i_1 - R_3 i_2 + (R_3 + R_4 + R_5) i_3 &= 0 . \end{aligned} \quad (6.58)$$

La soluzione numerica è $i_1 = 5.74 \text{ A}$, $i_2 = 4.73 \text{ A}$, $i_3 = 4.28 \text{ A}$: tutte le correnti di maglia circolano pertanto nei versi ipotizzati.

Nei singoli resistori si hanno le correnti

$$i(R_1) = i_1 - i_2 = 1.01 \text{ A} \quad i(R_2) = i_2 \quad i(R_3) = i_2 - i_3 = 0.45 \text{ A} .$$

$$i(R_4) = i_1 - i_3 = 1.46 \text{ A} \quad i(R_5) = i_3 .$$

La potenza erogata dal generatore è

$$P_{\text{gen}} = \mathcal{E} i_1 = 103.3 \text{ W}$$

ed è facile verificare che è pari alla somma delle potenze dissipate nelle singole resistenze.

Dal generatore il circuito è visto come un unico resistore di resistenza $R_{\text{eq}} = \mathcal{E} / i_1 = 3.14 \Omega$. Si osservi che questo valore non può essere ottenuto con operazioni di serie e parallelo sui resistori componenti.

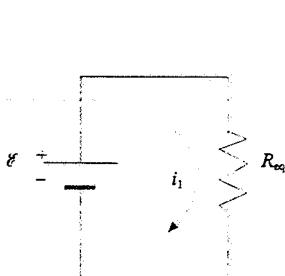


Figura 6.50

Le equazioni (6.57) e (6.58) hanno una forma che è generale: esse corrispondono alla cosiddetta *regola delle maglie*, seguendo la quale la scrittura è immediata. Individuate le M maglie indipendenti e fissati i versi delle correnti, l'equazione della j -esima maglia ha sempre questa struttura:

$$\pm R_1 i_1 \pm R_2 i_2 \pm \dots + (\Sigma_k R_k) i_j \pm \dots \pm R_{jM} i_M = \Sigma_k \mathcal{E}_k . \quad (6.59)$$

R_{jm} è la somma dei valori delle resistenze che la j -esima maglia ha in comune con la m -esima maglia (se non ci sono resistenze in comune $R_{jm} = 0$); il segno dipende dal fatto che le correnti j -esima e m -esima siano concordi o discordi. $\Sigma_k R_k$ è la somma delle resistenze della j -esima maglia. $\Sigma_k \mathcal{E}_k$ è la somma algebrica (secondo la solita regola) delle f.e.m. presenti nella j -esima maglia.

Tale procedura (*metodo delle maglie*) porta dunque alla scrittura diretta delle M equazioni che danno le correnti ed è valida per qualsiasi rete elettrica resistiva. Un metodo alternativo, detto *metodo dei nodi* e che citiamo soltanto, si basa invece sui potenziali dei nodi, assunti come variabili indipendenti, e porta a un sistema lineare di $N - 1$ equazioni (infatti un nodo è assunto con riferimento): l'equazione relativa a ciascun nodo si scrive immediatamente in base a determinate regole. Data una rete conviene scegliere l'uno o l'altro metodo basandosi sul criterio di risolvere il sistema con minor numero di equazioni e si guarderà quindi quale dei valori M o $N - 1$ è minore.

6.11 Alcuni circuiti particolari in corrente continua

Applichiamo alcune delle nozioni finora esposte a situazioni pratiche che si incontrano frequentemente in laboratorio e che riguardano la misura di correnti: differenze di potenziale, forze elettromotrici e resistenze.

Misura dell'intensità di corrente

Uno strumento comune, che vedremo in dettaglio nell'esempio 7.3, è il galvanometro a bobina mobile. La parte essenziale è una bobina rettangolare di filo conduttore avvolta su un nucleo di ferro che è libera di ruotare attorno ad un asse ed è immersa in un campo magnetico generato da un piccolo magnete permanente. Si vedrà in seguito che una bobina percorsa da corrente e sottoposta all'azione di un campo magnetico è soggetta a una coppia di forze il cui momento è proporzionale alla corrente. Questo momento fa ruotare la bobina e se il sistema di sospensione è in grado di sviluppare un momento resistente elastico si raggiunge una posizione di equilibrio, caratterizzata da un angolo proporzionale all'intensità di corrente che percorre la bobina. Se alla bobina è solidale un indice che scorre su una scala graduata opportunamente tarata si ha la visualizzazione del valore della corrente.

La corrente massima misurabile è detta anche corrente di fondo scala i_f , in quanto porta l'indice all'estremità della scala di lettura; insieme alla resistenza interna r_g essa è una caratteristica costruttiva del galvanometro. Valori tipici sono $i_f = 100 \mu\text{A}$, $r_g = 10 \Omega$.

Per eseguire una misura di intensità di corrente in un ramo di un circuito bisogna necessariamente interrompere il ramo in un punto e inserire il galvanometro nel ramo: così operando si altera il circuito preesistente in quanto viene variata la resistenza del ramo in questione.

Nel caso più semplice di circuito costituito da una sola maglia, di resistenza totale R , la corrente cambia da i a i_{mis} , valore misurato dal galvanometro:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad , \quad i_{mis} = \frac{\mathcal{E}}{R + r_g} \Rightarrow i_{mis} = \frac{R}{R + r_g} i = \frac{1}{1 + \frac{r_g}{R}} i \quad ,$$

$$\frac{i - i_{mis}}{i} = \frac{r_g}{R + r_g} = \frac{r_g / R}{1 + \frac{r_g}{R}}$$

La corrente misurata è sempre minore di i , ma la variazione percentuale è tanto minore quanto più piccola è la resistenza interna del galvanometro rispetto alla resistenza totale del circuito.

Regola delle maglie

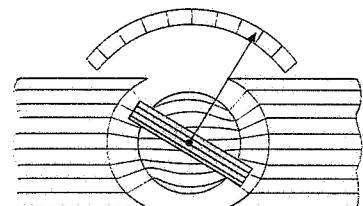


Figura 6.51

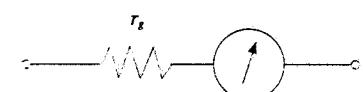


Figura 6.52

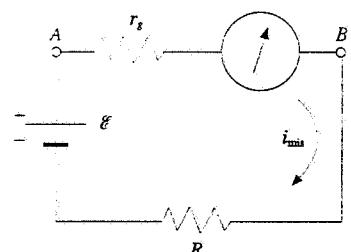
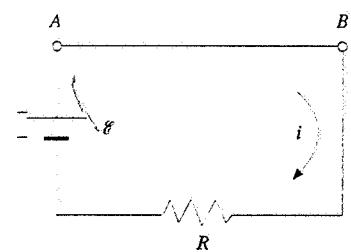


Figura 6.53

Shunt

Si può aumentare la corrente massima misurabile collegando in parallelo al galvanometro un resistore chiamato *shunt*, di resistenza r_s , minore di r_g . Per i due rami in parallelo valgono le relazioni

$$i = i_g + i_s \quad , \quad r_g i_g = r_s i_s$$

$$\Rightarrow i = \frac{r_g + r_s}{r_s} i_g \quad , \quad \frac{i}{i_g} = 1 + \frac{r_g}{r_s} \quad . \quad (6.60)$$

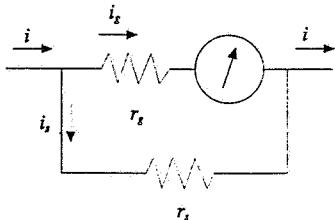


Figura 6.54

A seconda del valore r_s rispetto a r_g si determina il valore di $i > i_{fs}$ che porta lo strumento a fondo scala. Ad esempio:

$$r_{s1} = \frac{1}{9} r_g, i_1 = 10 i_{fs}, \quad r_{s2} = \frac{1}{99} r_g, i_2 = 100 i_{fs} \quad .$$

Corredando lo strumento con varie resistenze di shunt (si veda l'esempio 6.14) si può variare notevolmente il campo di misura: a tale strumento si dà in generale il nome di *amperometro*. Essendo lo shunt in parallelo a r_g in ogni caso la *resistenza equivalente* è minore di quella interna, il che riduce la perturbazione prodotta dalla presenza del galvanometro.

Misure di differenze di potenziale

Quando un galvanometro è percorso da una corrente i_g , la d.d.p. ai suoi capi vale $V_g = r_g i_g$; con $r_g = 10 \Omega$ e $i_g = 10^{-4} \text{ A}$, $V_g = 10^{-3} \text{ V} = 1 \text{ mV}$. Se poniamo in serie al galvanometro un resistore R_V opportuno, dalla misura di i_g si risale alla d.d.p. ai capi dello strumento mediante la $V_g = (R_V + r_g) i_g$.

Supponiamo di voler misurare la d.d.p. $V_A - V_B = R i$ esistente ai capi di un resistore R percorso da corrente. Collegiamo in parallelo al resistore il galvanometro con in serie R_V . La resistenza equivalente è

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V + r_g} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R(R_V + r_g)}{R + R_V + r_g}$$



Figura 6.55

e la d.d.p. ai capi del parallelo vale

$$(V_A - V_B)_{mis} = R_{eq} i = \frac{R_V + r_g}{R + R_V + r_g} (V_A - V_B) \quad ,$$

misurata dal galvanometro attraversato dalla corrente

$$i_g = \frac{(V_A - V_B)_{mis}}{R_V + r_g} = \frac{V_A - V_B}{R + R_V + r_g} \quad .$$

La d.d.p. $(V_A - V_B)_{mis}$ è minore della d.d.p. $V_A - V_B$ esistente prima della connessione dello strumento. La variazione percentuale è

$$\frac{(V_A - V_B) - (V_A - V_B)_{mis}}{V_A - V_B} = \frac{R}{R + R_V + r_g} \approx \frac{R}{R_V + r_g} = \frac{R}{R_V} \quad ,$$

tanto minore quanto più grande è R_V rispetto a R (di norma r_g è trascurabile).

A parità di corrente che attraversa il galvanometro, il valore della d.d.p. misurabile aumenta all'aumentare di R_V . Dotando il galvanometro di varie resistenze in serie (esempio 6.14) si ottiene uno strumento con un campo di misura molto ampio; esso è tarato direttamente in volt e prende il nome di *voltmetro*.

Riassumendo, un amperometro deve avere resistenza trascurabile rispetto a quelle del circuito e va sempre inserito in serie; invece un voltmetro deve avere resistenza molto mag-

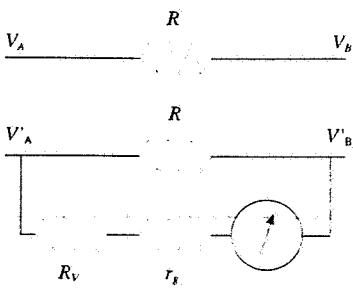


Figura 6.56

giore di quelle del circuito ed essere sempre connesso in parallelo.

Menzioniamo soltanto che il galvanometro, correddato di un opportuno circuito, può essere utilizzato anche per misurare la resistenza di un resistore connesso esternamente ai suoi poli, svolgendo in tal caso la funzione di *ohmetro*. Si chiama *strumento universale* uno strumento con cui, selezionando la funzione e la scala desiderata, si possono eseguire misure di corrente, differenza di potenziale e resistenza.

Strumento universale

Esempio 6.14

Un galvanometro di resistenza interna $r_g = 100 \Omega$ e corrente di fondo scala $i_{fs} = 100 \mu A$ deve essere usato come:

- amperometro con correnti di fondo scala $i_1 = 0.1 A$, $i_2 = 1 A$, $i_3 = 10 A$;
- voltmetro con indicazioni di fondo scala $V_1 = 1 V$, $V_2 = 10 V$, $V_3 = 100 V$.

Si determinino i valori delle resistenze R_1 , R_2 , R_3 degli schemi elettrici in figura 6.57 e 6.58.

Soluzione

Nell'utilizzazione come amperometro, quando la connessione al circuito esterno è fatta nei punti A e B_1 la resistenza di shunt è $R_1 + R_2 + R_3$.

In base alla (6.60)

$$\frac{r_g}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{i_1}{i_{fs}} - 1 = 999 \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = \frac{r_g}{999} = 0.1 \Omega$$

Da questa relazione si capisce che ognuna delle resistenze è molto minore di r_g . Quando la connessione è fatta tra A e B_2 , R_3 è in serie a r_g e $R_1 + R_2$ fungono da shunt:

$$\frac{r_g + R_3}{R_1 + R_2} = \frac{i_2}{i_{fs}} - 1 = 9999 \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{r_g + R_3}{9999} = \frac{r_g}{9999} = 0.01 \Omega.$$

Procedendo in modo analogo per la connessione fatta in A e B_3

$$\frac{r_g + R_2 + R_3}{R_1} = \frac{i_3}{i_{fs}} - 1 = 99999 \Rightarrow R_1 = \frac{r_g}{99999} = 0.001 \Omega.$$

Si conclude che $R_1 = 0.001 \Omega$, $R_2 = 0.009 \Omega$, $R_3 = 0.090 \Omega$.

Nel collegamento come voltmetro la scala inferiore ($V_1 = 0.1 V$) si ha quando lo strumento è connesso in A e B_1 e in tal caso

$$(r_g + R_1) i_{fs} = V_1 \Rightarrow R_1 = \frac{V_1}{i_{fs}} - r_g = 9900 \Omega = 9.9 \text{ k}\Omega.$$

Con la connessione in A e B_2

$$(r_g + R_1 + R_2) i_{fs} = V_2 = V_1 + R_2 i_{fs} \Rightarrow R_2 = \frac{V_2 - V_1}{i_{fs}} = 9 \cdot 10^4 \Omega = 90 \text{ k}\Omega.$$

Infine nel terzo collegamento

$$R_3 = \frac{V_3 - V_2}{i_{fs}} = 900 \text{ k}\Omega.$$

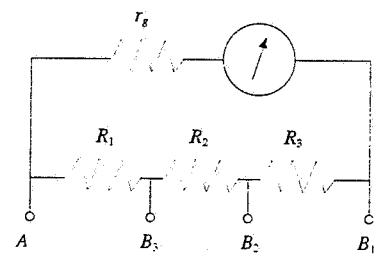


Figura 6.57

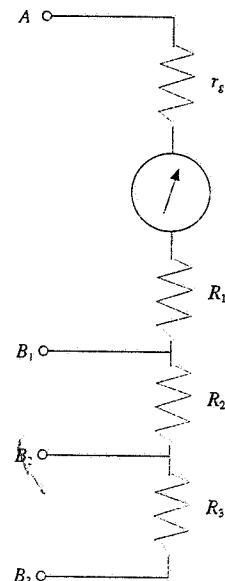


Figura 6.58

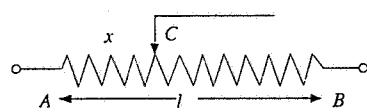


Figura 6.59

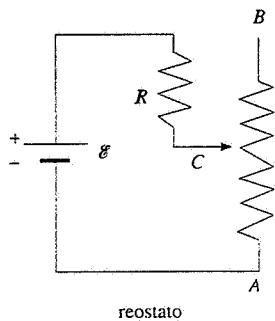


Figura 6.60

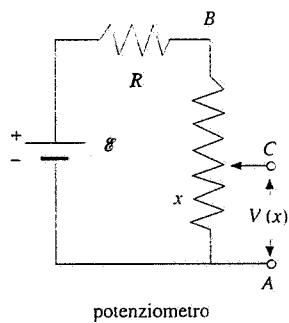


Figura 6.61

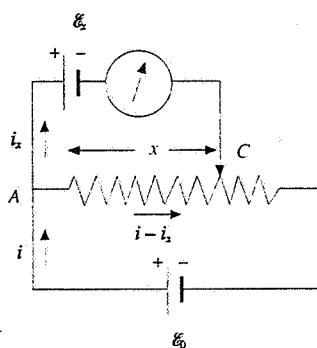


Figura 6.62

Reostato e potenziometro. Misura di f.e.m.

La resistenza di un conduttore omogeneo (resistività ρ uniforme), avente sezione Σ costante e lunghezza x , è proporzionale a x secondo (6.25):

$$R_x = \rho \frac{x}{\Sigma} = rx ,$$

indicando con r la resistenza per unità di lunghezza del conduttore.

Se disponiamo di un contatto mobile C che scorre sul conduttore (*cursore*), possiamo ottenere una resistenza variabile con continuità e con legge nota. Un tale dispositivo si chiama *reostato*: inserito in serie in un circuito permette di variare con continuità l'intensità di corrente.

$$i = \frac{\epsilon}{R + rx} ,$$

spostando il cursore tra la posizione $x = 0$ (reostato escluso) e la posizione $x = l$ (reostato completamente inserito).

Lo stesso dispositivo, collegato ad un generatore di f.e.m. come in figura 6.61, permette di ottenere tra il cursore C e il polo A una d.d.p. variabile linearmente:

$$V_C - V_A = V(x) = \frac{\epsilon}{R + rx} rx = vx ,$$

dove v è la d.d.p. per unità di lunghezza del sistema; questo prende il nome di *potenziometro*. Se tra A e C si inserisce un conduttore di resistenza R' , la d.d.p. tra C e A varia, poiché R' è in parallelo a R , $R' = rx$, e non è più lineare in x ; solo se $R' \gg rx$ $V(x)$ è ancora approssimativamente lineare.

Il circuito con potenziometro, mostrato nella figura 6.62, può essere usato per la misura della f.e.m. incognita ϵ_0 , secondo il *metodo detto di Poggendorff*. Ricordiamo dal paragrafo 6.7, relazione (6.46), che la f.e.m. di un generatore è pari alla d.d.p. misurata tra i suoi poli quando esso non è attraversato da corrente. La condizione di corrente zero si realizza applicando ai poli del generatore una d.d.p. eguale alla f.e.m. e con la stessa polarità. Nella pratica si cerca la posizione x del cursore in corrispondenza alla quale i_1 , misurata dal galvanometro, è nulla; vuol dire che allora

$$\epsilon_0 = V_A - V_C = rx_0 i ,$$

dove $i = \epsilon_0 / rx_0$ è la corrente erogata dal generatore ϵ_0 in queste condizioni. Se al posto di ϵ_0 si inserisce nel circuito un generatore di f.e.m. ϵ_c nota e di opera nello stesso modo, cioè cercando la posizione x_c del cursore per cui $i_1 = 0$, si ha

$$\epsilon_c = rx_c i ,$$

la corrente i essendo la stessa del caso precedente. Dal rapporto tra le due relazioni,

$$\epsilon_0 = \epsilon_c \frac{x_0}{x_c} ;$$

la misura di ϵ_0 relativa a ϵ_c è quindi ricondotta alla misura delle lunghezze x e x_c .

Ponte di Wheatstone

Si tratta di un circuito adatto alla misura precisa della resistenza di un conduttore, per confronto con resistenze note. In figura 6.63 il generatore di f.e.m. ϵ alimenta il circuito $ABCD$, costituito dai quattro resistori R_1, R_2, R_3, R_4 ; il galvanometro nel ramo $B D$ viene usato come rivelatore di zero. Si variano R_1 e R_2 finché il galvanometro non segna corrente, $i_g = 0$: il ponte

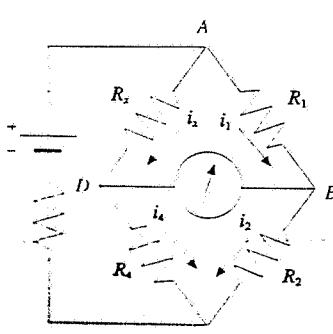


Figura 6.63

si dice allora in equilibrio e i punti B e D sono allo stesso potenziale, $V_B = V_D$.

Nei nodi B e D , in condizioni di equilibrio, la prima legge di Kirchhoff (6.54) dà $i_1 = i_2$, $i_x = i_4$. Inoltre, da $V_B - V_A = V_D - V_A$ e $V_B - V_C = V_D - V_C$ si ha $R_1 i_1 = R_x i_x$, $R_2 i_2 = R_4 i_4$. Dividendo membro a membro e sfruttando l'egualanza delle correnti, la condizione di equilibrio si esprime come

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4} \quad \text{oppure} \quad R_1 R_4 = R_x R_2$$

da cui si ricava

$$R_x = \frac{R_1 R_4}{R_2} \quad . \quad (6.61)$$

Le resistenze R_1 e R_2 possono essere sostituite da un filo calibro su cui scorre il cursore B : all'equilibrio il rapporto R_1 / R_2 è semplicemente il rapporto tra le lunghezze l_1 e l_2 dei due tratti di filo AB e BC . In questa versione il circuito prende il nome di *ponte a filo*.

6.12 Calcolo della resistenza di conduttori tridimensionali

L'unica formula esplicita per il calcolo della resistenza di un conduttore che è stata finora usata è la (6.25), valida per un conduttore unidimensionale, in quanto la lunghezza è il solo parametro; l'applicazione tipica è a un conduttore di forma cilindrica, come un filo. L'estensione (6.27) tiene conto di variazioni della sezione ed è applicabile ad esempio a conduttori a forma di tronco di cono.

Sono però possibili altre situazioni geometriche: consideriamo allo scopo lo spazio tra due superficie sferiche conduttrici, di raggi a e b , e supponiamo che sia riempito con un mezzo conduttore di resistività ρ . La resistenza opposta al passaggio di una corrente radiale si può calcolare in questo modo: presa una superficie sferica di raggio r ($a < r < b$) e un'altra di raggio $r + dr$, la resistenza dR dello strato di conduttore spesso dr si può pensare come il parallelo di infinite resistenze infinitesime, ciascuna di valore $\rho dr / d\Sigma$, e quindi

$$\frac{1}{dR} = \int \frac{d\Sigma}{\rho dr} = \frac{4\pi r^2}{\rho dr} \Rightarrow dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2} \quad .$$

Tutti questi strati sono in serie e la resistenza complessiva vale

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad .$$

Confrontando con l'espressione (4.13) della capacità di un condensatore sferico vuoto, che ora scriviamo

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi \epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad .$$

ricaviamo la relazione

$$RC = \rho \epsilon_0 \quad (6.62)$$

tra resistenza, capacità e caratteristiche fisiche del mezzo.

Anche se esaminiamo la situazione geometrica del condensatore piano, supponendo che sia riempito con un mezzo conduttore, abbiamo

$$R = \rho \frac{h}{\Sigma} \quad , \quad C = \epsilon_0 \frac{\Sigma}{h} \quad , \quad RC = \rho \epsilon_0 \quad .$$

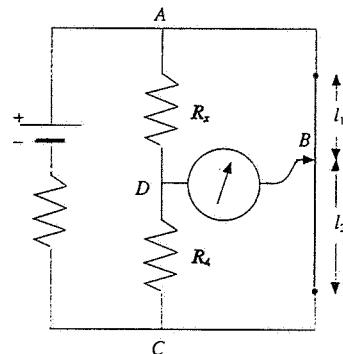


Figura 6.64

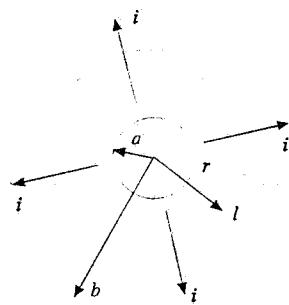
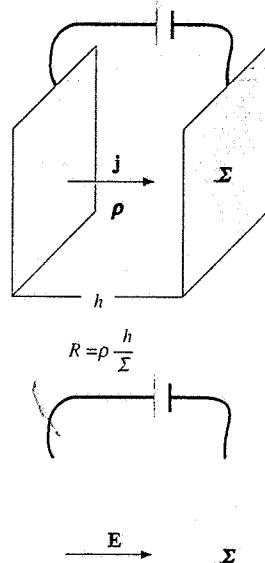
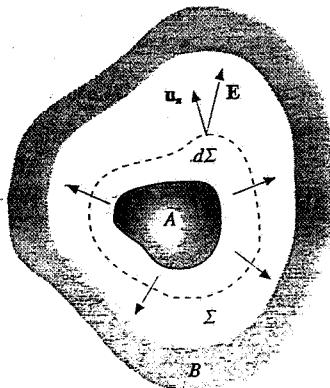


Figura 6.65



$$C = \epsilon_0 \frac{h}{\Sigma}$$

Figura 6.66



In effetti la (6.62) non contiene alcun elemento caratteristico della geometria del sistema, per cui si può pensare che abbia *validità generale*. Per dimostrarlo, consideriamo due conduttori *A* e *B* che costituiscono le armature di un condensatore di capacità *C* e ai quali è applicata la d.d.p. $V_A - V_B$. Detta Σ una qualunque superficie chiusa, tracciata nella regione compresa tra i due conduttori, che contenga *A* al suo interno, mentre *B* è esterno, in base alla legge di Gauss (3.8) abbiamo

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{C(V_A - V_B)}{\epsilon_0}$$

Se ora immaginiamo che lo spazio tra *A* e *B* sia riempito da un mezzo conduttore di resistività ρ , possiamo scrivere in base a (6.19, 6.4, 6.26)

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = \rho \oint j \cdot u_n d\Sigma = \rho i = \rho \frac{V_A - V_B}{R}$$

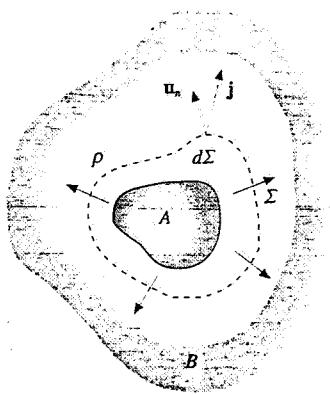
dove *R* è la resistenza del conduttore. Dal confronto tra le due espressioni del flusso si ottiene la (6.62).

L'interesse di tale relazione sta nel fatto che essa permette di utilizzare espressioni di capacità di sistemi noti per il calcolo delle resistenze e viceversa. Ad esempio, la resistenza di un conduttore a forma di cilindro cavo che viene attraversato da una corrente radiale è data, per unità di lunghezza, da

$$R = \frac{\rho \epsilon_0}{C} = \frac{\rho}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

dove ci siano serviti di (4.18), con *a* e *b* raggio minore e maggiore.

Figura 6.67



6.13 Conduzione elettrolitica

La maggior parte dei liquidi presenta resistività elevata; nell'acqua distillata, ad esempio, $\rho = 2 \cdot 10^5 \Omega \text{m}$ a 20°C (vedi tabella 6.1) e il fenomeno è dovuto principalmente al fatto che una piccolissima percentuale di molecole d'acqua è dissociata in uno ione H^+ e uno ione OH^- ($H_2O \rightarrow H^+ + OH^-$): il numero di molecole per unità di volume (vedi esempio 5.10 e 5.11) è $\rho N_A / A = 3.35 \cdot 10^{28}$ molecole/ m^3 , mentre il numero di ioni di ciascun segno è $\approx 6 \cdot 10^{19}$ ioni/ m^3 . A questo relativamente piccolo numero di portatori di carica è dovuta la conduttività dell'acqua.

La situazione cambia radicalmente se nell'acqua viene sciolta una quantità, anche piccola, di acido, base o sale. Il legame tra i componenti delle molecole di tali sostanze, dette *elettroliti*, è dovuto alla cessione di uno o più elettroni da parte di un atomo agli altri atomi ed è quindi di natura elettrostatica. Quando si forma una soluzione in acqua, detta *soluzione elettrolitica*, il legame risulta indebolito e si ha la dissociazione di una grande percentuale di molecole in ioni positivi e negativi; ad esempio



Dissociazione



Si potrebbe pensare che il legame sia indebolito perché in un mezzo con costante dielettrica così elevata il campo elettrico e quindi la forza tra i componenti della molecola sono ridotti, ma ciò non è corretto: infatti tale ragionamento è vero per il *campo medio macroscopico in un dielettrico*, ma non si può estendere ai *campi interni di una molecola*, perché non si può ipotizzare che le molecole d'acqua vadano a riempire lo spazio tra i componenti della molecola del soluto. Piuttosto ciò che avviene è che intorno ai componenti, ad esempio intorno a Na^+ e Cl^- , si formino degli addensamenti di molecole d'acqua, polarizzate dai campi elettrici locali molto intensi, e che queste schermino parzialmente il campo tra sodio e cloro.

Ne risulta che negli urti tra molecole dovuti al moto di agitazione termica le molecole del soluto hanno una certa probabilità di scindersi, che aumenta con la temperatura in quanto dipende dal rapporto tra il fattore $k_B T$ e l'energia (ridotta) del legame molecolare; di conseguenza nella soluzione troviamo ioni dei due segni e molecole non dissociate. Esiste anche una certa probabilità che avvenga *ricombinazione*, dipendente dalla concentrazione e crescente con questa, perché maggiore è la densità di ioni presenti più facile è che essi si trovino a una distanza tale da risentire fortemente della forza di attrazione.

Si raggiunge pertanto una *condizione di equilibrio* in cui dissociazione e ricombinazione si compensano e il numero di ioni per unità di volume resta costante. Quantitativamente, si definisce il *grado di dissociazione*

$$\alpha = n_i / n \quad (6.63)$$

Grado di dissociazione

come rapporto tra il numero di molecole dissociate e il numero totale di molecole del soluto (nell'acqua distillata senza soluti $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-3}$). Per quanto detto prima α è funzione crescente della temperatura e decrescente della concentrazione. In condizioni normali di temperatura si chiamano *elettroliti forti* quelli con α praticamente eguale a 1 anche per concentrazioni elevate, *deboli* quelli in cui α si avvicina a 1 solo per piccolissime concentrazioni, esistendo naturalmente situazioni intermedie.

L'acqua è un solvente privilegiato per le soluzioni eletrolitiche in quanto in essa la dissociazione è notevole; questa avviene però anche in altri solventi, come alcool etilico e acetone, pur essendo minore a parità di condizioni. Invece esistono liquidi, come il benzene, che non sono ionizzanti; e ci sono molte sostanze, tipicamente quelle organiche, che non si dissociano in soluzione (ad esempio lo zucchero).

È evidente dai fatti esposti che le soluzioni eletrolitiche siano buoni conduttori, in quanto in esse sono presenti portatori mobili di carica dei due segni. Le proprietà di conduzione si studiano immergendo nella soluzione due elettroliti, ad esempio a forma di lastre parallele, e applicando tra questi tramite un generatore una differenza di potenziale; uno strumento di questo tipo si chiama *voltmetro* o *cella eletrolitica*.

Bisogna però sottolineare che la *dissociazione avviene anche in assenza di campo elettrico applicato*. Una prova di questa affermazione viene da misure di *pressione osmotica* (vedi nota alla fine del paragrafo), che, in una soluzione, dipende dal numero di molecole del soluto; in una soluzione eletrolitica di N molecole, di cui αN dissociate che danno origine a $2\alpha N$ ioni e $(1 - \alpha)N$ indivise, il numero di particelle è

$$2\alpha N + (1 - \alpha)N = (1 + \alpha)N$$

e in effetti si misura una pressione osmotica maggiore di quella attesa se le particelle fossero N (si noti che tali misure permettono di determinare il grado di dissociazione).

Caratteristica dei portatori è che la loro carica, dovuta a cessione o assorbimento di elettroni, è sempre un multiplo intero (piccolo) della carica elementare, il valore del multiplo essendo pari alla *valenza* degli elementi nel dato elettrolita. Ad esempio nella dissociazione del sale $CuSO_4$ lo ione Cu^{2+} ha carica doppia positiva, essendo il rame *bivalente* in questo composto, e quindi lo ione negativo SO_4^{2-} ha anch'esso carica doppia (la molecola di partenza è neutra); nella dissociazione di HCl si hanno due ioni con una sola carica ciascuno, nella dissociazione di H_2SO_4 lo ione negativo è bivalente, i due ioni idrogeno sono ciascuno monovalente, ma nel loro insieme trasportano una carica positiva doppia. In ogni caso, data la natura del processo, la soluzione resta *neutra*.

Applichiamo ora quanto detto nel paragrafo 6.4 nel caso di portatori di segno opposto: sotto l'azione di un campo elettrico si sovrappone al moto termico disordinato una componente di moto ordinato, concorde al campo elettrico per gli ioni positivi e discorde per gli ioni negativi; a causa dei continui urti il moto di deriva avviene con velocità proporzionale al campo elettrico:

$$v_+ = \mu_+ E, \quad v_- = \mu_- E \quad (6.64)$$

Introduciamo così la grandezza *mobilità degli ioni positivi e negativi*, come rapporto tra i moduli della velocità di deriva e del campo elettrico.

Da (6.18) utilizzando (6.64) scriviamo il modulo della densità di corrente

$$j = n' e (\mu_+ + \mu_-) E = \sigma E \quad (6.65)$$

e la *conduttività della soluzione eletrolitica* vale pertanto

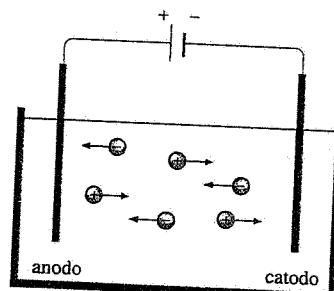


Figura 6.68

Valenza

Condutività di una soluzione elettrolitica

$$\sigma = n' e (\mu_+ + \mu_-) \quad (6.66)$$

Il numero n' è pari al prodotto $\alpha n f$: αn , secondo (6.63), è il *numero di ioni per unità di volume* e f la *valenza* degli ioni.

Le mobilità μ_+ e μ_- , che in generale sono diverse a seconda del tipo di ione, dipendono anche da proprietà della soluzione, come viscosità e concentrazione, e dalla temperatura. Nella tabella 6.3 sono dati i valori, nelle unità $(\text{m/s})/(\text{V/m}) = \text{m}^2/\text{Vs}$, per alcuni ioni in soluzione acquosa contenente una massa di soluto pari a 0.1 kg/m^3 per le sostanze che danno ioni monovalenti e a 0.05 kg/m^3 per quelle che danno ioni bivalenti (così che il numero di valenze è lo stesso nei due casi).

Tabella 6.3 Mobilità in m^2/Vs a 25°C

H^+	$34 \cdot 10^{-8}$	Zn^{++}	$6 \cdot 10^{-8}$
OH^-	$18 \cdot 10^{-8}$	Cu^{++}	$5 \cdot 10^{-8}$
SO_4^{--}	$8 \cdot 10^{-8}$	Na^+	$5 \cdot 10^{-8}$
Cl^-	$7 \cdot 10^{-8}$		

A questi valori delle mobilità corrispondono velocità di deriva molto piccole: anche con un campo elettrico relativamente alto per queste applicazioni, $E = 10^3 \text{ V/m}$, la velocità di uno ione H^+ è $3.4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = 0.34 \text{ mm/s}$, quella di uno ione Cu^{++} è $5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 0.05 \text{ mm/s}$. Per confronto, da (6.14) e dai dati dell'esempio 6.4, la mobilità degli elettroni nel rame risulta $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$.

In una soluzione di cloruro di sodio completamente dissociata ($f = 1$, $\alpha = 1$), con concentrazione $1 \text{ kg/m}^3 = 0.017 \text{ kmoli/m}^3$ ($A = 58.44$), il numero di ioni per m^3 è pari a

$$n = 0.017 \cdot 6.022 \cdot 10^{26} = 1.024 \cdot 10^{25} \text{ ioni/m}^3.$$

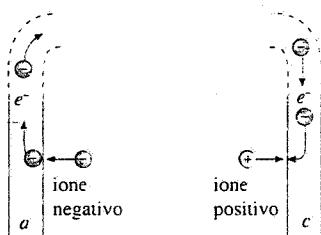


Figura 6.69

La conduttività della soluzione risulta essere $\sigma = 0.17 (\Omega\text{m})^{-1}$ e quindi, dalla (6.66), si ricava $\mu_+ + \mu_- = 10.4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$. Il valore non è molto diverso da $12 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$ che si legge in tabella 6.3, valido per una concentrazione dieci volte minore. Evidentemente per tali valori, piuttosto piccoli, di concentrazione le mobilità non variano sensibilmente. Al citato valore della conduttività corrisponde la resistività $\rho = 1/\sigma = 5.9 \Omega\text{m}$. La conduttività aumenta notevolmente con la concentrazione: a 1 kmole/m^3 essa vale $7.7 (\Omega\text{m})^{-1}$ e si ricava $\mu_+ + \mu_- = 8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$.

Lo spazio tra gli elettrodi è dunque sede, in presenza di un campo elettrico, di una corrente elettrica avente densità (6.65). La continuità con la corrente nel circuito esterno è assicurata da uno scambio di carica che avviene agli elettrodi: al catodo (elettrodo negativo) arrivano ioni positivi che assorbono elettroni dal metallo e si neutralizzano. contemporaneamente all'anodo (elettrodo positivo) arrivano ioni negativi che cedono elettroni al metallo neutralizzandosi: torneremo tra breve sui dettagli di queste reazioni.

Variando la d.d.p. ai capi del voltmetro si osserva che la *soluzione elettrolita obbedisce alla legge di Ohm di linearità tra d.d.p. applicata e corrente*: con riferimento a (6.65) vuol dire che la conduttività σ non dipende dal campo elettrico e quindi non ne dipende anche la mobilità degli ioni.

Reazioni agli elettrodi. Legge di Faraday. Polarizzazione

Un aspetto tipico del passaggio di corrente in una soluzione elettrolitica è lo spostamento di materia attraverso la soluzione. L'arrivo degli ioni agli elettrodi dà origine a varie reazioni chimiche, di cui vediamo alcuni esempi. Si tratta in ogni caso di *reazioni di ossidazione all'anodo* (che assorbe elettroni dalla soluzione) e di *riduzione al catodo* (che cede elettroni alla soluzione).

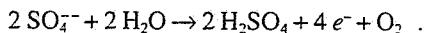
A. Soluzione acquosa di HCl, elettrodi inerti

Gli ioni Cl^- si neutralizzano all'anodo e danno luogo allo sviluppo di cloro gassoso, mentre al catodo gli ioni H^+ una volta neutralizzati sviluppano idrogeno gassoso. Le due reazioni sono:



B. Soluzione acquosa di H_2SO_4 , elettrodi inerti.

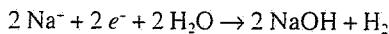
Il comportamento degli ioni idrogeno è lo stesso che in A. Invece gli ioni SO_4^{2-} all'anodo partecipano a una reazione con l'acqua in cui gli elettroni sono ceduti all'anodo, si riforma acido solforico e viene sviluppato ossigeno gassoso:



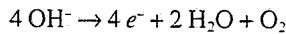
In totale è come se si scindesse l'acqua, $2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{H}_2 + \text{O}_2$, con sviluppo dei suoi componenti agli elettrodi. Lo stesso risultato si otterrebbe con acqua distillata, però a causa della bassissima concentrazione di ioni la reazione sarebbe molto lenta. La presenza dell'acido solforico permette il trasporto di una carica per unità di tempo molto superiore e rende la reazione di scissione dell'acqua più veloce. Il termine di elettrolisi deriva originariamente da questo effetto di scissione del solvente facilitato dal passaggio di corrente nella soluzione.

C. Soluzione acquosa di NaCl , elettrodi inerti.

Il cloro di comporta come in A. invece il sodio al catodo reagisce con l'acqua secondo lo schema



e si ha formazione di idrossido di sodio e idrogeno gassoso. Questo processo fornisce uno dei metodi più comuni di produzione industriale di cloro. Analogamente, nella soluzione acquosa di NaOH si riforma NaOH al catodo con sviluppo di idrogeno, mentre all'anodo lo ione OH^- dà luogo alla reazione



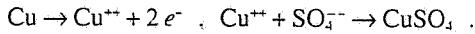
con sviluppo di ossigeno. Anche in questo caso è l'acqua che si scinde.

D. Soluzione acquosa di CuSO_4 , elettrodi inerti.

Il rame si deposita sul catodo ($\text{Cu}^{2+} + 2 e^- \rightarrow \text{Cu}$). lo ione SO_4^{2-} porta a sviluppo di ossigeno all'anodo come in B.

E. Soluzione acquosa di CuSO_4 , elettrodi di rame.

Invece di elettrodi inerti, ad esempio di platino, utilizziamo elettrodi di rame. Al catodo il rame si deposita sul rame, all'anodo il rame scende in soluzione lasciando due elettroni e riformando solfato di rame:



Nulla cambia nella soluzione, l'anodo si assottiglia e il catodo si ingrossa.

Si vede che in realtà le reazioni non corrispondono sempre a un semplice deposito di materiale o svolgimento di gas, ma spesso coinvolgono il solvente (l'acqua). Al catodo ciò avviene se la reazione di riduzione degli ioni positivi è meno probabile della riduzione dell'acqua: questo è il caso ad esempio per sodio e potassio, i quali formano l'idrossido mentre è l'idrogeno dell'acqua che si riduce. Se invece è più probabile la riduzione dello ione, come è per rame o argento, questo si deposita sul catodo. Analogamente se all'anodo è più probabile la reazione di ossidazione dello ione rispetto all'acqua, come per cloro o rame, si ha formazione di Cl_2 o entrata in soluzione del rame, altrimenti, come per SO_4^{2-} , si ossida l'acqua con produzione di ossigeno.

La chimica e la termodinamica delle soluzioni permettono di fissare le regole generali di questi processi, ma l'argomento esula dai nostri scopi.

Con un opportuno voltmetro si può dunque eseguire, oltre allo studio delle proprietà elettriche, la misura delle masse delle sostanze che si depositano sugli elettrodi o vengono emesse in fase gassosa. Per depositare una chilomole di una sostanza, che è composta da N_A molecole, occorre la neutralizzazione di N_A ioni, a cui corrisponde la carica $N_A e f$. Detta A la massa atomica o molecolare, per A chilogrammi occorre il passaggio di $N_A e f$ coulomb; una massa m generica richiede q coulomb e vale la proporzione

$$\frac{m}{A} = \frac{q}{N_A e f} .$$

Definiamo adesso alcune grandezze, utili per questi processi:

- *equivalente chimico* A_c , rapporto tra massa molecolare A e valenza f (una massa A_c contiene pertanto N_A valenze);
- *costante di Faraday* $F = N_A e$ (è la carica di una chilomole di elettroni ovvero di una massa di ioni pari ad A_c);
- *equivalente elettrochimico* A_e , rapporto tra A_c e F .

Possiamo allora riscrivere la relazione trovata in questo modo:

Legge di Faraday
dell'elettrolisi

$$m = A_c \frac{q}{F} = A_e q \quad (6.67)$$

Costante di Faraday

La massa depositata dal passaggio di una carica q è proporzionale alla carica stessa tramite l'equivalente elettrochimico della sostanza.

La (6.67) si chiama *legge di Faraday dell'elettrolisi* ed è stata scoperta da Faraday molto tempo prima della formulazione dell'ipotesi ionica (Arrhenius, 1884). La *costante di Faraday* è una costante universale, eguale al valore della carica che deve passare attraverso la soluzione per liberare una massa pari all'equivalente chimico, qualunque sia il tipo di ione. Il suo valore attuale è, con un errore dell'ordine di 1 parte su 10^9 , usando $N_A = 6.02213674 \cdot 10^{26}$ e il valore della tabella 1.1 per e ,

$$F = N_A e = 9.64853099 \cdot 10^7 C \quad ; \quad (6.68)$$

questa formula è molto importante perché mette in relazione tre costanti universali che possono essere determinate indipendentemente e serve quindi sia come verifica delle ipotesi di base che come mezzo per una determinazione precisa di una delle tre costanti a partire dalle due misurate con maggiore precisione (in questo caso N_A ed e).

Come l'*equivalente chimico* è la *massa liberata dal passaggio di una carica F* , così l'*equivalente elettrochimico* è la *massa liberata dal passaggio di 1 C*. Poiché in passato le misure di massa erano tra quelle più precise, la (6.67) è stata usata per definire l'unità di carica. In un voltmetro a nitrato di argento AgNO_3 , con anodo di argento e catodo di platino, l'argento entra in soluzione all'anodo e si deposita sul catodo. La definizione elettrolitica del coulomb lo poneva eguale a quella carica il cui passaggio causava il deposito di 1.118 milligrammi di argento (1893). La massa atomica dell'argento è $A = 107.868$; con $F = 9.648531 \cdot 10^7 C$, l'equivalente elettrochimico dell'argento risulta $1.11797 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ e si vede che questo metodo non può essere molto preciso.

Ritornando agli esempi di reazioni agli elettrodi si osserva che, a parte casi analoghi al punto E o al voltmetro a nitrato d'argento, con un metallo che scende in soluzione e si deposita sul catodo, si producono alterazioni superficiali degli elettrodi, dovute ad esempio a fenomeni di adsorbimento di idrogeno al catodo o di ossigeno all'anodo, oppure all'attacco da parte degli alogeni. In corrispondenza si osserva anche che la corrente nel voltmetro diminuisce dal valore iniziale ad un valore stabile che viene raggiunto dopo un tempo dell'ordine del minuto. Tutto avviene come se a regime fosse presente una forza elettromotrice γ che si oppone al passaggio della corrente, per cui la legge del tratto di circuito contenente il voltmetro è, in accordo con la forma generalizzata (6.49),

$$V_A - V_B - \gamma = R i \quad ,$$

invece di $V_A - V_B = R i$: ed è da escludere che sia $V_A - V_B = R' i$, cioè non si tratta di un cambiamento di resistenza.

I valori di queste f.e.m. sono dell'ordine dei decimi di volt e il fenomeno si chiama *polarizzazione*. Se si esclude il generatore e si chiude il voltmetro su una resistenza esterna si osserva il passaggio di una corrente in senso inverso alla precedente dovuta al generatore, segno della presenza della f.e.m. di polarizzazione. Questa corrente si riduce rapidamente a zero perché ora nel voltmetro avvengono processi inversi che riportano gli elettrodi allo stato iniziale.

Concludiamo questo paragrafo con un cenno ad alcune applicazioni pratiche dei fenomeni descritti. Abbiamo già ricordato la produzione di cloro: storicamente, l'alluminio è diventato un metallo di uso corrente solo dopo l'invenzione di un metodo elettrolitico di produzione; il sodio e il magnesio sono ricavati con l'elettrolisi dei loro cloruri fusi (e non in soluzione acQUosa).

Il deposito di un metallo al catodo viene usato nella cosiddetta *galvanoplastica* (o *elettrodepositazione*): l'anodo è formato dal metallo che si vuole depositare (oro, argento, rame, cromo, nickel) e nella soluzione c'è un sale di questo metallo, mentre il catodo è formato

Polarizzazione

dall'oggetto che si vuole ricoprire. Secondo lo stesso principio si esegue la *raffinazione eletrolitica di un metallo*: l'anodo è formato da metallo impuro, ma operando in modo opportuno è possibile fare depositare sul catodo solo il metallo voluto; tipico è il caso del rame.

Nota. La pressione osmotica

Consideriamo un solvente come l'acqua e una soluzione diluita acquosa, ad esempio di zucchero, contenuti in due recipienti diversi, separati da una *membrana semipermeabile*, la quale lascia passare le molecole d'acqua, ma non quelle del soluto. Si osserva che il volume del solvente puro diminuisce e quello della soluzione aumenta, segno del passaggio di acqua attraverso la membrana verso la soluzione, che si diluisce ulteriormente. Il passaggio si arresta quando il dislivello ha raggiunto un certo valore h , corrispondente a una pressione $P = \rho g h$, se ρ è la densità della soluzione (circa eguale a quella dell'acqua in condizioni di diluizione). Questa pressione dovuta alla presenza del soluto si chiama *pressione osmotica*; si può dimostrare con argomenti termodinamici che la pressione osmotica in una soluzione diluita non dipende dal tipo di soluto, ma soltanto dal numero di molecole del soluto, e obbedisce all'*equazione di Van t'Hoff*

$$P V = n R T$$

formalmente eguale all'*equazione di stato dei gas ideali*, in cui V è il volume occupato dalla soluzione, n il numero di moli del soluto, R la costante dei gas, T la temperatura espressa in kelvin. Le molecole del soluto si comportano quindi come quelle di un gas ideale, in particolare esercitano una determinata pressione sulle pareti del contenitore. Sperimentalmente l'*equazione di Van t'Hoff* è tanto più verificata quanto più la soluzione è diluita.

I valori della pressione osmotica possono essere notevoli: a 300 K con $V = 1$ litro = 10^{-3} m^3

$$P = 24.9 \cdot 10^5 n \text{ Pa} \approx 24.6 n \text{ atm}$$

Ad esempio una soluzione di 3.42 g di zucchero in un litro d'acqua ($n = 0.01$ con $A = 342$) presenta una pressione osmotica $P = 0.246$ atm.

Nelle soluzioni elettrolitiche la pressione osmotica risulta superiore a quella calcolabile con l'*equazione di Van t'Hoff* e numericamente l'aumento è in accordo con l'*ipotesi della dissociazione in ioni*: questi esercitano una pressione come se fossero molecole e quindi il numero effettivo n di moli deve contenere un fattore moltiplicativo (2, 3, ...) a seconda del numero di ioni in cui si dissocia la molecola del soluto. Inoltre, se il grado di dissociazione α è minore di 1, bisogna tener conto anche di questo fatto nel calcolo di n .

Le anomalie della pressione osmotica delle soluzioni elettrolitiche hanno costituito un'importante verifica dell'*ipotesi di dissociazione ionica* formulata da Arrhenius.

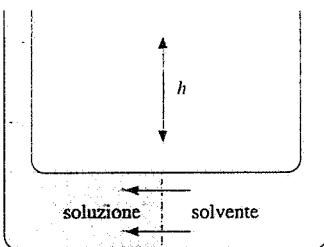


Figura 6.70

6.14 Pile e accumulatori

Il passaggio di corrente attraverso un voltmetro comporta una spesa di energia da parte del generatore, energia che viene impiegata per fare avvenire reazioni chimiche. Nei casi in cui si manifestano fenomeni di polarizzazione occorre anche vincere l'effetto della f.e.m. di polarizzazione, che tenderebbe a far passare corrente nel verso opposto.

La *pila di Volta*, e tutti gli altri dispositivi simili che vennero in seguito realizzati, sfruttano invece la *trasformazione di energia chimica in energia elettrica*, impiegando cioè reazioni chimiche per dare origine a una f.e.m. tra due elettrodi immersi in una soluzione elettrolitica e quindi a una corrente elettrica quando i due elettrodi sono collegati all'esterno della pila con un conduttore.

La configurazione originale consistente in due dischi, uno di rame e uno di zinco, separati da un tampone imbevuto di acido solforico, può essere schematizzata più convenientemente con due elettrodi immersi in una soluzione, come in figura 6.71. L'elettrodo di zinco

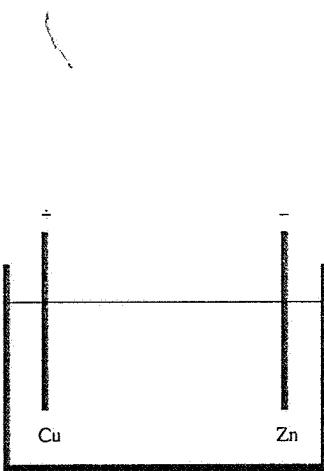


Figura 6.71

risulta carico negativamente a seguito del passaggio in soluzione di ioni di zinco secondo il processo $Zn \rightarrow Zn^{++} + 2e^-$, processo che però viene rapidamente bloccato dall'attrazione elettrostatica dell'elettrodo carico negativamente, ovvero dall'equilibrio tra un campo elettromotore e un campo elettrostatico. All'elettrodo di rame invece avviene il processo $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$, per cui l'elettrodo si carica positivamente cedendo elettroni e si forma idrogeno: anche qui si raggiunge subito l'equilibrio tra processo chimico e attrazione elettrostatica. Globalmente non si ha passaggio di corrente, ma soltanto l'elettrodo di rame risulta positivo rispetto all'elettrodo di zinco. Quando si connette con un filo conduttore il rame allo zinco gli elettroni in eccesso sullo zinco passano al rame, il che corrisponde a un moto convenzionale di cariche positive dal rame allo zinco, e i processi chimici descritti possono avvenire con continuità. Lo zinco entrato in soluzione si combina con gli ioni SO_4^{2-} e la reazione complessiva è $Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2$, con formazione di solfato di zinco e sviluppo di idrogeno gassoso intorno all'elettrodo di rame.

Riassumendo, durante il funzionamento con passaggio di corrente questa va dallo zinco al rame all'interno della pila e dal rame allo zinco all'esterno: secondo la terminologia che abbiamo usato, il rame è il *polo positivo* del generatore e funge da *catodo* nella soluzione, lo zinco è il *polo negativo* e funge da *anodo*. All'interno agisce un *campo elettromotore*, che è la somma dei campi elettromotori ai due elettrodi e consente il moto delle cariche in senso contrario a quello voluto dal campo elettrostatico tra i due conduttori; la presenza del *campo elettromotore* è il *risultato delle reazioni chimiche che avvengono tra gli elettrodi metallici e la soluzione e permettono il trasporto di materia tra i due elettrodi*. Fenomeni analoghi si hanno con diverse coppie di metalli e sono tabulati i valori dei cosiddetti *potenziali normali o potenziali standard di riduzione* dei metalli rispetto ad un opportuno riferimento; per rame e zinco i valori sono rispettivamente +0.34 V e -0.76 V e in effetti la f.e.m. della pila rame-zinco di Volta è $\gamma = 1.10$ V. Ad ogni mole di zinco ($A = 65.38$) che passa in soluzione corrisponde il lavoro

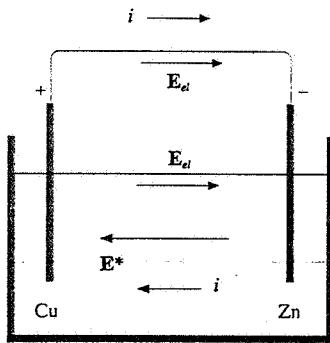
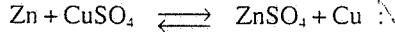


Figura 6.72

$$W = fF\gamma = 2 \cdot 9.6485 \cdot 10^4 \cdot 1.1 = 212.3 \text{ kJ}$$

Anche nella pila di Volta si verifica il fenomeno della polarizzazione: si osserva infatti che la f.e.m. diminuisce durante il funzionamento portandosi a circa 0.5 V e che il valore iniziale può essere ristabilito estraendo l'elettrodo di rame e pulendolo: l'effetto è attribuito all'adsorbimento di idrogeno nella superficie di rame. Dopo molte ore di funzionamento lo zinco in soluzione comincia ad arrivare al catodo depositandosi e alla fine ciò rende gli elettrodi eguali, per cui la pila cessa di funzionare. La connessione di un generatore esterno può forzare il passaggio di corrente nella pila in senso inverso se la f.e.m. del generatore è superiore a quella della pila, però non riporta la pila nello stato originario eliminando le cause della polarizzazione, perché adesso il rame entra in soluzione e si sviluppa idrogeno all'elettrodo di zinco ($Cu + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2$), reazione diversa da quella del funzionamento normale.

La prima *pila reversibile* fu quella concepita da Daniell nel 1836 (la pila di Volta è del 1800). I due elettrodi di rame e zinco sono immersi ciascuno in una cella elettrolitica, contenente rispettivamente $CuSO_4$ e $ZnSO_4$: le celle sono separate da un setto poroso che permette il passaggio degli ioni, ma impedisce il mescolamento delle soluzioni. La reazione globale è



nel funzionamento come pila la freccia va da sinistra a destra, quando viene fatta circolare corrente nel verso contrario la reazione è quella con la freccia da destra a sinistra.

Le pile attualmente più diffuse, tipo Leclanché o a mercurio (queste ultime di dimensioni molto ridotte), utilizzano agenti depolarizzanti che impediscono l'alterazione del catodo e consentono una durata notevole con f.e.m. praticamente costante.

La pila reversibile è concettualmente molto interessante in quanto si possono alternare periodi di scarica, in cui essa funge da generatore fornendo energia elettrica a spese di energia chimica, e periodi di carica in cui, con spesa di energia elettrica dall'esterno, si invertono i processi immagazzinando energia chimica. Il principio è messo in pratica negli accumulatori.

Il più diffuso è l'*accumulatore a piombo*: l'anodo (polo negativo) è costituito da una griglia di piombo riempita con piombo spugnoso, il catodo (polo positivo) è anch'esso formato da una griglia di piombo riempita con ossido di piombo PbO_2 . Gli elettrodi sono immersi in una soluzione acquosa di acido solforico. Le reazioni sono:

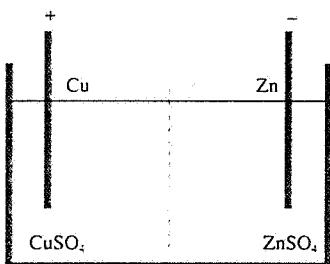
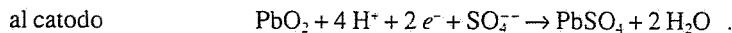
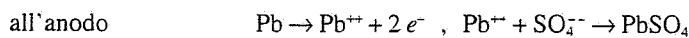


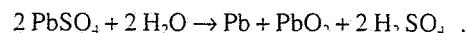
Figura 6.73

Accumulatore a piombo



Il piombo anodico scende in soluzione mentre al catodo il piombo si riduce da tetravalente a bivalente; ad entrambi gli elettrodi si forma solfato di piombo. Una cella di questo tipo dà una f.e.m. di 2 V; connettendo in serie sei celle si hanno gli accumulatori da 12 V (usati tipicamente nelle automobili).

Durante il funzionamento la soluzione si diluisce e oltre un certo limite la f.e.m. diminuisce; la cella però può essere ricaricata forzando il passaggio di corrente in senso contrario e la reazione inversa globale è



con il che si ricostituiscono i composti originari.

Si definisce *capacità di un accumulatore* la carica massima che esso è in grado di erogare a tensione costante. L'unità di misura usuale è l'ampere-ora (Ah), pari a 3600 C: ad esempio, un accumulatore da 100 Ah è capace di erogare una corrente di 10 A per 10 ore o di 1 A per 100 ore, ma non in generale una corrente di 100 A per un'ora. Il funzionamento descritto cioè è valido per correnti non troppo elevate, né in scarica né in carica. Il *rendimento energetico di un accumulatore* è dell'ordine di 0.8: occorre più energia per caricarlo di quanta esso possa fornire durante la scarica.

Sullo stesso principio sono fondati gli *accumulatori al nichel-cadmio*, molto più ridotti in peso e dimensioni, utilizzati negli apparecchi portatili.

7

Forza magnetica. Campo magnetico

7.1 Primi fatti sperimentali sull'interazione magnetica

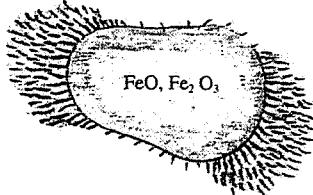


Figura 7.1

La proprietà di attrarre la limatura di ferro, mostrata da alcuni minerali di ferro e in particolare dalla *magnetite* (combinazione di ossidi di ferro, $\text{FeO}\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$), era nota già nel VII secolo a.C.; il nome magnetite derivò da quello della città greca di Magnesia, in Asia minore, dove si trovavano giacimenti del minerale, e la proprietà osservata prese il nome di magnetismo.

Tale proprietà di attrazione non è uniformemente presente nel materiale, ma si manifesta principalmente in determinate parti ed è in particolare possibile costruire campioni cilindrici in cui essa è localizzata nella zona delle basi. Sia questi oggetti che altri con diversa geometria (ad esempio una sbarra piegata a forma di C) si indicano col nome di *magneti* e le parti in cui si localizza la proprietà di attrazione si chiamano i *poli del magnete*. Per ora ci riferiremo esclusivamente a magneti con due poli, pur essendo possibili altre configurazioni alle quali accenneremo.

Nel sedicesimo secolo W. Gilbert compì una serie di esperienze con magneti, aventi lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche del magnetismo e le differenze con i fenomeni di elettrostatica, da lui stesso studiati (vedi paragrafo 1.1). I risultati sullo studio delle interazioni tra poli magnetici, anche tenendo conto di successive osservazioni, sono riassunti nei punti seguenti.

A. Se ad un magnete sospeso nel centro tramite un filo, e quindi libero di ruotare, si avvicina un secondo magnete, tenuto ad esempio in mano, si osserva che questo esercita sul primo una certa forza. Come per le forze di natura elettrostatica, possiamo interpretare il fatto dicendo che un magnete genera un campo, chiamato *campo magnetico*, e che l'altro magnete risente dell'azione che il campo magnetico esercita nella posizione da esso occupata.

Un'analisi sistematica porta a stabilire che la forza di interazione tra i due magneti è attrattiva o repulsiva a seconda dei poli dei magneti che vengono affacciati e che esistono soltanto due specie di poli, detti *poli positivi* e *poli negativi*; inoltre si trova che *i poli di uno stesso magnete sono sempre di segno opposto*.

Le modalità di svolgimento di questo primo esperimento chiariscono che i fenomeni osservati non sono attribuibili in nessun modo a cariche elettriche fisse, localizzate in alcune regioni dei magneti. Infatti la magnetite è un conduttore e il secondo magnete, che è tenuto in mano, è certamente scarico, come del resto si può verificare con mezzi elettrostatici.

B. Se si avvicina a un pezzo di magnetite una bacchetta sottile di ferro, questo acquista la proprietà di attrarre la limatura di ferro, principalmente in vicinanza delle estremità: la bacchetta di ferro immersa nel campo magnetico generato dalla magnetite è diventata pertanto un magnete, ovvero si è *magnetizzata*. Essa viene chiamata *magnete artificiale* o *calamita* e presenta due poli magnetici di segno opposto. Soprattutto se è di piccole dimensioni la bacchetta viene anche detta *ago magnetico*.

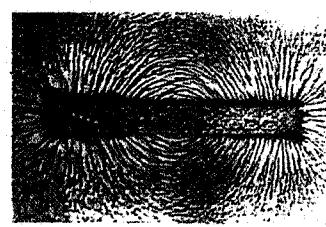


Figura 7.2

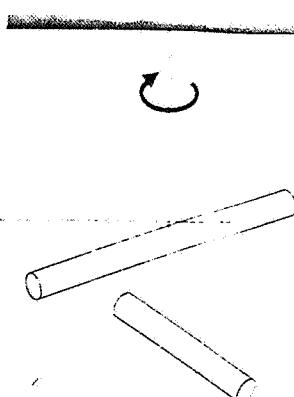


Figura 7.3

C. Se suspendiamo ad un filo l'ago magnetico sopra definito e lo lasciamo libero di ruotare, osserviamo che esso tende a disporsi approssimativamente parallelo al meridiano terrestre; spostato da questa posizione di equilibrio l'ago compie intorno ad essa oscillazioni, smorzate inevitabilmente dagli attriti.

L'esperienza mostra l'esistenza di un campo magnetico naturale, il *campo magnetico terrestre*, e mette in evidenza un comportamento dell'ago magnetico del tutto analogo a quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico E , studiato nel paragrafo 2.9 e nell'esempio 2.14. L'ago magnetico, in altre parole, si comporta come un *dipolo magnetico* che lasciato libero si orienta nella direzione e verso del campo magnetico esistente nel punto dove è posto.

Il polo dell'ago che si orienta approssimativamente verso il nord geografico viene chiamato *polo nord* (N) e gli si attribuisce segno *positivo*, l'altro è chiamato *polo sud* (S) e gli si dà segno *negativo*. Accenneremo alle caratteristiche del campo magnetico terrestre nella nota alla fine del paragrafo 7.2.

Definiti nel modo detto i poli di un magnete ed eseguendo esperienze come quelle del punto A, si trova sempre che l'interazione tra *poli magnetici dello stesso segno è repulsiva*, quella tra *poli magnetici di segno opposto attrattiva*.

D. Lo studio quantitativo della forza magnetica tra i poli di due magneti, svolto da Coulomb con la stessa apparecchiatura con cui aveva ottenuto la legge per la forza tra cariche elettriche (paragrafo 1.3), dimostrò anche in tale caso un andamento inversamente proporzionale al quadrato della distanza, almeno per *poli puntiformi*, come sono con buona approssimazione quelli agli estremi di *sbarre lunghe e sottili*. Si potrebbe pertanto enunciare una *legge di Coulomb* per l'*interazione magnetica* tra due poli, data dalla forza

$$F = k_m \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} \quad , \quad (7.1)$$

in cui i poli sono caratterizzati dalle *masse magnetiche* q_1^* e q_2^* e k_m è una costante il cui valore dipende dal mezzo in cui avviene l'interazione e dal sistema di unità di misura adottato; essa esprime l'*intensità dell'azione magnetica*, al pari della costante universale γ per l'interazione gravitazionale (1.1) e della costante k per l'interazione elettrostatica (1.2).

Sebbene la struttura di (7.1) sia identica a quella della forza tra due cariche elettriche o tra due masse, c'è tuttavia una differenza fondamentale. Una carica elettrica, positiva o negativa, può sempre essere isolata e ciò è una conseguenza dell'esistenza della carica elementare positiva portata dal protone e della carica elementare negativa portata dall'elettrone: la possibilità di separazione esiste cioè già a livello elementare. Anche la massa, sebbene non quantizzata e di un solo segno, è chiaramente isolabile a livello elementare. Invece non è mai stato possibile ottenere un polo magnetico isolato: i *poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto*, cioè si manifestano solamente sotto forma di *dipoli magnetici*.

L'indicazione classica, ottenuta quando ancora il quadro attuale della struttura elementare della materia non si era formato, è costituita dall'*esperimento della calamita spezzata*. Se si taglia a metà una calamita compaiono sempre due poli di segno opposto nella zona del taglio, che precedentemente a questo non mostrava la proprietà di attirare limatura di ferro. Con il dispositivo sperimentale di Coulomb, dopo aver verificato l'egualanza in modulo dei poli preesistenti, si trova che i due nuovi poli sono quantitativamente eguali a questi. Ripetendo il taglio su pezzi sempre più piccoli si ottiene ogni volta lo stesso risultato, senza riuscire ad isolare un polo magnetico.

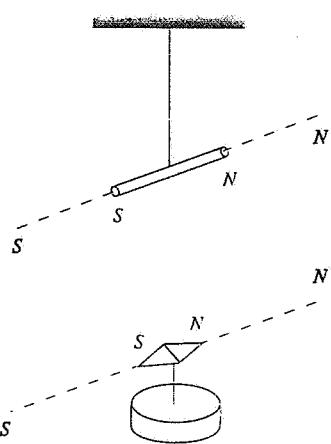


Figura 7.4

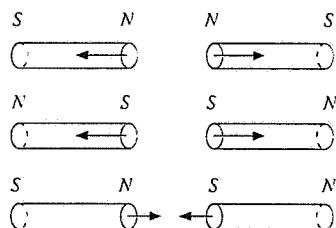


Figura 7.5

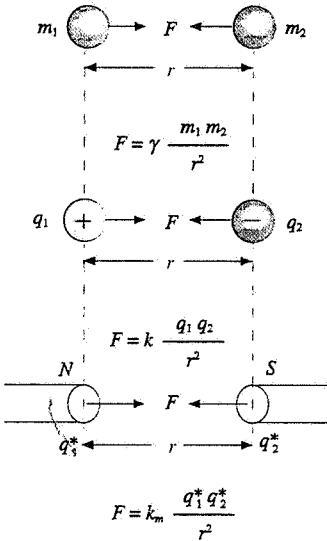


Figura 7.6

Esperimento della calamita spezzata

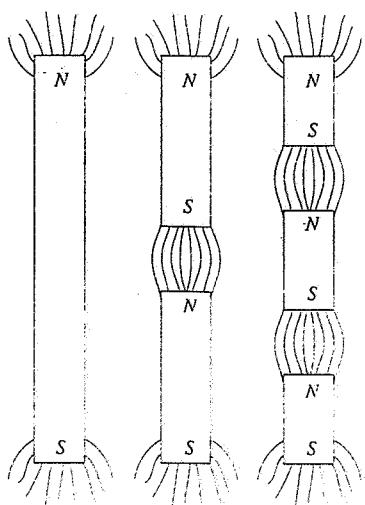


Figura 7.7

Accanto a tale esperienza sono significative quelle condotte con limatura di ferro posta in vicinanza di un magnete. I granelli di limatura si dispongono in modo ordinato lungo linee regolari, fatto che interpretiamo supponendo che ciascun granello venga magnetizzato dal campo magnetico del magnete e diventato un dipolo magnetico si orienti parallelamente al campo stesso.

L'insieme dei fatti sperimentali esposti suggerisce l'ipotesi che gli elementi costitutivi dei magneti siano i dipoli magnetici, cioè oggetti caratterizzati da massa magnetica nulla e da un momento di dipolo magnetico \mathbf{m} . Siccome la non isolabilità degli ipotetici poli magnetici è confermata anche a livello elementare, siamo portati a supporre che *atomi e molecole*, come possiedono una struttura elettrica, abbiano anche un momento di dipolo magnetico (argomento che tratteremo estesamente nel capitolo 9).

Concludiamo pertanto che la (7.1) non riveste un ruolo fondamentale, come (1.1) e (1.2), essendo utilizzabile solo in situazioni particolari e riferendosi a grandezze come le masse magnetiche che non hanno una realtà fisica.

La prima relazione tra fenomeni magnetici ed elettrici fu scoperta da Oersted nel 1811 e successivamente l'argomento venne approfondito soprattutto da Ampère intorno al 1820. La sperimentazione fu resa possibile dall'utilizzazione della pila di Volta che permettendo la produzione di correnti elettriche costanti e intense aprì il campo dello studio dell'interazione sia tra un circuito percorso da corrente e un magnete che tra circuiti.

Oersted mostrò che un ago magnetico, posto in prossimità di un filo percorso da corrente, tende ad assumere una ben definita posizione di equilibrio. Alla luce di quanto visto finora il risultato si interpreta dicendo che il filo percorso da corrente produce un campo magnetico e che l'ago si orienta parallelamente al campo magnetico esistente nel punto in cui viene posto. In seguito Ampère dimostrò che anche due fili percorsi da corrente interagiscono e intuì che le *azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra cariche elettriche in movimento*, ponendo le basi della teoria attuale del magnetismo.

L'interazione tra due circuiti percorsi da corrente è il risultato dell'interazione tra le cariche che costituiscono le due correnti, interazione avente caratteristiche diverse da quella tra cariche fisse. Per spiegare le azioni sui magneti bisogna pensare che in ogni atomo o in ogni molecola devono esistere delle *correnti microscopiche locali*, che prendono il nome di *correnti molecolari di Ampère* o *correnti amperiane*; l'interazione tra un circuito percorso da corrente e un magnete è allora il risultato delle interazioni tra gli elettroni liberi in moto nel conduttore e le micro-correnti presenti nel materiale magnetizzato. Infine l'interazione tra due magneti è il risultato delle interazioni tra le correnti microscopiche in essi presenti.

Si chiarisce così come non solo le masse magnetiche, ma anche la loro unione sotto forma di dipolo magnetico non abbiano realtà fisica: si può ricorrere ai dipoli soltanto per rappresentare il modo con cui si manifestano le interazioni magnetiche. In effetti Ampère provò, come vedremo in parte nel paragrafo 7.5, l'*equivalenza tra un circuito percorso da corrente e un dipolo magnetico*, sia rispetto alle forze subite ad opera di un campo magnetico, sia per quanto riguarda il campo magnetico prodotto (delle sorgenti del campo magnetico ci occuperemo nel capitolo 8). Avendo allora già sviluppato il formalismo relativo ai dipoli elettrici, è comodo utilizzarlo anche per le azioni magnetiche, senza dargli però un significato fisico profondo. Seguendo l'analogia, un magnete viene visto come un mezzo polarizzato e si spiega così perché sulle basi di un magnete cilindrico, dove non c'è compensazione tra dipoli consecutivi, si manifestino i fenomeni di attrazione della limatura di ferro; si spiega anche perché la somma delle ipotetiche masse magnetiche risulti sempre nulla, sia nei magneti dipolari che nei magneti con più poli (realizzabili con opportuni accorgimenti). Inoltre, proprio perché $\sum q_i = 0$, si può dire che il mo-

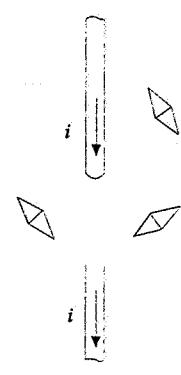


Figura 7.8



Figura 7.9

mento di dipolo magnetico dell'insieme di dipoli considerati è una proprietà intrinseca del sistema, come dimostrato nel paragrafo 2.8.

Vedremo infine che una proprietà fondamentale del campo magnetico, quella di essere *solenoidale*, si ricava facilmente sempre in analogia alle proprietà dei dipoli elettrici (paragrafo 7.2). Avvertiamo però che un circuito elettrico e un dipolo magnetico, pur essendo equivalenti sotto molti aspetti, non sono lo stesso sistema fisico per cui l'equivalenza non può essere completa. E infatti dimostreremo nel capitolo 8 che il campo magnetico non è irrotazionale, mentre tale dovrebbe essere se fosse dovuto a dipoli i cui costituenti obbediscono alla legge (7.1).

La possibilità che abbiamo attualmente di misurare i momenti magnetici atomici e molecolari, cui abbiamo prima accennato, e la constatazione che essi sono riconducibili agli elettroni e al loro moto è una ulteriore conferma dell'intuizione di Ampère. L'ipotesi dell'esistenza fisica dei dipoli magnetici è così scartata anche a livello microscopico, ma con alcune eccezioni. Si è infatti scoperto che pure i costituenti dell'atomo, il protone, il neutrone e l'elettrone, possiedono un momento magnetico: ora, mentre ai primi due si attribuisce la struttura a quark (esempio 4.18) per cui il momento magnetico sarebbe riconducibile a questi, l'elettrone (come del resto i quark) entro i limiti delle nostre conoscenze attuali è puntiforme per cui il momento magnetico appare proprio come una proprietà intrinseca, peraltro legata al momento angolare intrinseco (spin), non riconducibile a moti interni o a rotazioni su se stesso, impossibili per un oggetto puntiforme.

Ritornando allo sviluppo storico, negli anni successivi al 1820 Faraday dimostrò l'esistenza di una ulteriore connessione tra elettricità e magnetismo, provando che campi magnetici variabili nel tempo producono campi elettrici (non conservativi). Infine Maxwell, a cui è dovuta la sistemazione formale dell'elettromagnetismo classico, predisse il risultato simmetrico, cioè che campi elettrici variabili nel tempo danno origine a campi magnetici. Egli dimostrò pertanto che nel caso più generale un campo elettrico e un campo magnetico non possono avere esistenza indipendente e vanno unificati nell'unico concetto di campo elettromagnetico. Con lo sviluppo della teoria della relatività ristretta la nozione di campo elettromagnetico acquistò un ulteriore aspetto, nel senso che campo elettrico e campo magnetico hanno significato relativo: un'interazione magnetica in un sistema di riferimento inerziale può apparire elettrica in un altro sistema di riferimento inerziale e viceversa.

Nota. Il monopolo magnetico

L'esistenza del monopolo magnetico elementare (e della sua antiparticella) non sarebbe in contrasto con le teorie quantistiche che descrivono il comportamento elementare della materia. Una possibile spiegazione della loro attuale assenza è la seguente: nel big-bang da cui ha avuto origine l'universo sono stati prodotti, insieme alle altre particelle, anche monopoli e antimonopoli: la maggior parte di questi, a seguito di processi di annichilazione particella-antiparticella è scomparsa in un tempo brevissimo liberando energia, ma alcuni però potrebbero essere sopravvissuti e sarebbero sparsi nell'universo, analogamente a quanto succede per i neutrini e per la cosiddetta radiazione cosmica di fondo. altri fossili dei processi avvenuti negli istanti immediatamente successivi al big-bang. Poiché l'interazione di questi ipotetici monopoli con la materia dovrebbe dar luogo a un rilascio di energia notevole (su scala microscopica) sono stati costruiti esperimenti per segnalare l'eventuale passaggio di monopoli: uno di questi è installato nel laboratorio sotterraneo del Gran Sasso, dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. Caratteristica di tali laboratori è la schermatura, dovuta a chilometri di roccia, di buona parte della radiazione cosmica, con il che è facilitata la rivelazione di fenomeni rari dovuti a particelle extraterrestri penetranti: ad esempio nel laboratorio del Gran Sasso è stata di recente effettuata una misura diretta del flusso di neutrini prodotti nelle reazioni nucleari che avvengono all'interno del sole.

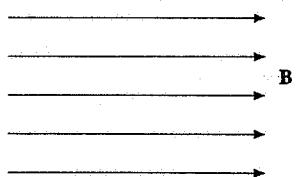


Figura 7.10

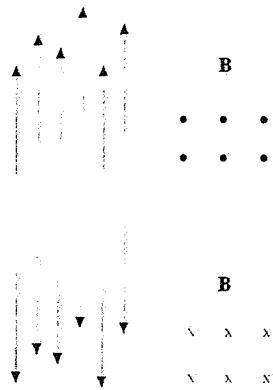


Figura 7.11

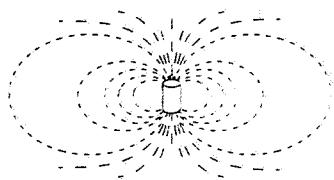
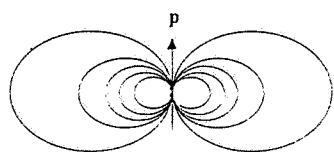


Figura 7.12

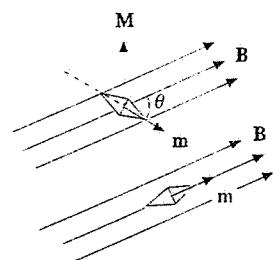


Figura 7.13

7.2 Linee di forza del campo magnetico. Legge di Gauss per il campo magnetico

La conclusione principale del paragrafo 7.1 è che le azioni magnetiche sono il risultato dell’interazione tra cariche in moto; adottando la rappresentazione tramite un campo, diciamo che l’azione magnetica è dovuta al fatto che un *sistema di cariche in moto genera un campo magnetico*, che indichiamo con il simbolo \mathbf{B} , e che l’altro sistema di cariche in moto risente di una forza in quanto immerso in \mathbf{B} .

Il legame tra \mathbf{B} e le correnti che lo generano sarà discusso nel capitolo 8 mentre delle forze subite da una o più cariche in campo magnetico parleremo a partire dal paragrafo 7.3; prima esaminiamo alcune proprietà generali del campo magnetico.

Innanzitutto occorre dire che la sperimentazione è consistente col fatto che il campo magnetico sia una grandezza vettoriale; è facile immaginare una verifica studiando il comportamento di un ago magnetico sottoposto all’azione di più magneti.

Determinare \mathbf{B} in una certa regione vuol dire quindi darne in ogni punto direzione, verso e modulo. In generale questi variano da punto a punto (campo non uniforme) e, in un dato punto, possono variare nel tempo (campo non costante); inoltre il valore di \mathbf{B} può dipendere dal mezzo che riempie lo spazio intorno alle sorgenti. Come per il campo elettrico, ci limitiamo all’inizio a considerare *fenomeni magnetici nel vuoto e stazionari*, indicando con quest’ultimo termine che il *campo magnetico è costante nel tempo* (o al più lentamente variabile).

Rinviamo ai prossimi paragrafi, dopo aver visto le formule esplicite delle forze magnetiche, la definizione operativa del campo magnetico \mathbf{B} . Possiamo anticipare adesso che la rappresentazione grafica dell’andamento di \mathbf{B} si fa tramite le *linee di forza*, cioè quelle linee che in ogni punto sono tangenti ed equidistanti al vettore \mathbf{B} esistente in quel punto. La situazione è analoga a quella descritta nel paragrafo 1.6 in relazione al campo elettrostatico \mathbf{E} e valgono anche per \mathbf{B} le proprietà *a*, *b*, *c* là enunciate e inoltre pure la proprietà che un campo magnetico uniforme è rappresentato da linee parallele ed equidistanti (figura 7.10).

Una simbologia specifica, che qui adottiamo per il campo magnetico pur essendo applicabile in generale, riguarda il caso in cui le linee di forza sono ortogonali ad un piano (spesso coincidente col foglio che stiamo leggendo): con un *punto* si indica che il campo \mathbf{B} è *uscente dal foglio verso il lettore*, con una *croce* che è *entrante*, come mostrato nella figura 7.11.

Una visualizzazione immediata della configurazione delle linee di forza di un campo magnetico si ha utilizzando limatura di ferro, come già accennato nel paragrafo 7.1: alla disposizione regolare dei granelli di limatura lungo le linee di \mathbf{B} si dà il nome di *spettro magnetico*. Ad esempio con questo sistema si osserva che le linee del campo magnetico in vicinanza di un magnete rettilineo hanno la stessa configurazione geometrica delle linee di forza del campo elettrico generato da un dipolo elettrico. Alternativamente, ma il principio è lo stesso, si può studiare l’andamento di \mathbf{B} con un piccolo ago magnetico: questo si orienta parallelamente a \mathbf{B} indicandone così la direzione, mentre il verso è quello dal polo sud al polo nord dell’ago; se l’ago è abbastanza piccolo si può supporre che \mathbf{B} non vari lungo l’ago e quindi la misura sia effettivamente puntuale e non mediata.

La proprietà più caratteristica delle linee di forza del campo elettrostatico, di partire e terminare sulle cariche elettriche sorgenti del campo (proprietà *d* del paragrafo 1.6) non può invece essere estesa al campo magnetico: da questo punto di vista le linee dei due campi sono intrinsecamente diverse. Una prima giustificazione viene da una proprietà generale del campo magnetico che ora dimostriamo.

Consideriamo una superficie chiusa Σ che racchiude al suo interno un magnete o anche una parte di questo. L’equivalenza formale tra le correnti microscopiche e i dipoli magnetici, che abbiamo enunciato nel paragrafo 7.1, comporta che all’inter-

no della superficie Σ sia contenuto sempre un *numero intero* di dipoli: una qualsiasi superficie *non può* cioè *mai tagliare* uno di questi ipotetici dipoli elementari. D'altra parte il campo magnetico dà luogo a una forza tra i componenti dei dipoli che ha la forma (7.1), condizione necessaria e sufficiente perché si possa formulare la legge di Gauss, studiata nel capitolo 3 per il campo E . Siccome, data la struttura dipolare, la somma delle masse magnetiche è sempre nulla, ne deriva

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad : \quad (7.2)$$

il *flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo*. Nella (7.2) la superficie Σ è orientata ovunque allo stesso modo, ad esempio verso l'esterno, e \mathbf{u}_n è il versore della normale; il campo magnetico \mathbf{B} è quello prodotto da tutte le sorgenti, interne o esterne a Σ (le sorgenti esterne danno per definizione flusso nullo attraverso Σ). In termini locali, la *divergenza del campo magnetico è sempre nulla*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (7.3)$$

Malgrado sia stata dimostrata con riferimento ad un magnete la (7.2) è vera in generale e costituisce una delle proprietà fondamentali del campo magnetico; sotto la forma (7.3) essa è *una delle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo*.

Il *campo magnetico \mathbf{B}* è dunque *solenoidale*; riprendendo quanto dimostrato alla fine del paragrafo 3.4, il flusso di \mathbf{B} attraverso le infinite superficie che hanno lo stesso contorno e sono concordemente orientate è sempre lo stesso; si può parlare pertanto in maniera univoca di *flusso attraverso una linea chiusa* ovvero di *flusso concatenato con una linea chiusa*:

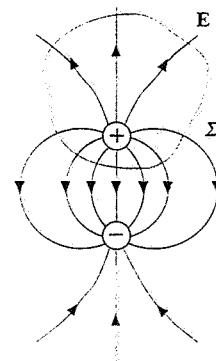
$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 = \dots = \int_{\Sigma_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_i \quad . \quad (7.4)$$

Proprietà analoghe sono state riscontrate per il vettore induzione dielettrica \mathbf{D} , con la limitazione che \mathbf{D} è solenoidale solo in assenza di cariche libere (paragrafo 5.5), mentre \mathbf{B} è *sempre solenoidale*; ritorneremo su questo argomento nel capitolo 9.

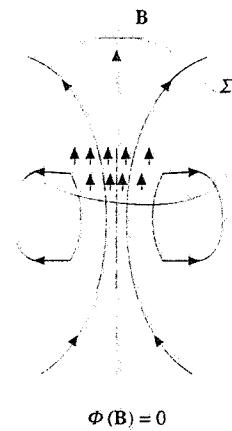
Conseguenza di (7.2) è che presa una qualsiasi superficie chiusa per ogni linea di forza entrante deve esserci una linea di forza uscente: se così non fosse il flusso attraverso la superficie chiusa sarebbe diverso da zero. Questa considerazione, insieme alla non esistenza di masse magnetiche isolate e di dipoli magnetici reali, porta alla conclusione che le *linee di forza del campo magnetico \mathbf{B} sono linee chiuse, senza né inizio né fine*: esse possono chiudersi al finito o al limite, in casi particolari, all'infinito. Vedremo vari esempi di queste configurazioni nel capitolo 8, insieme ad altre considerazioni sulla struttura delle linee di forza di \mathbf{B} . e possiamo anzi dire che la forma sempre chiusa delle linee di forza del campo magnetico, comunque questo sia stato prodotto, è una conferma della generalità di (7.2).

Nota. Il campo magnetico terrestre (1)

Utilizzando un ago magnetico si possono determinare direzione e verso del campo magnetico terrestre e, se l'ago è opportunamente tarato, anche il modulo facendo oscillare l'ago attorno alla posizione di equilibrio, come descritto nel paragrafo 7.5 (questo in

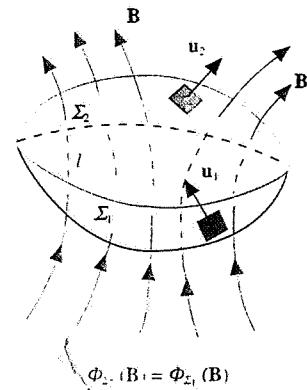


$$\Phi(E) = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\Phi(B) = 0$$

Figura 7.14



$$\Phi_{\Sigma_1}(B) = \Phi_{\Sigma_2}(B)$$

Figura 7.15

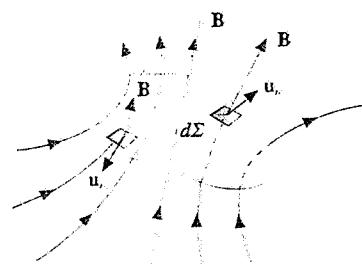


Figura 7.16

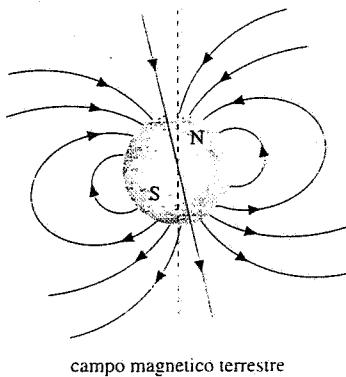


Figura 7.17

linea di principio: esistono metodi più semplici e precisi, come quello che descriveremo nell'esempio 10.4).

Il campo magnetico corrisponde approssimativamente al campo di un dipolo (mostrato nella figura 7.12) che forma con l'asse terrestre un angolo di circa 15° ; l'asse del dipolo incontra la superficie terrestre nel punto con latitudine 75° e longitudine 291° , a circa 2000 km dal polo Nord e nel punto simmetrico rispetto al centro della terra vicino al polo Sud; l'orientazione del dipolo è da nord a sud. In un dato punto il campo ha una componente tangente al meridiano e una radiale, in accordo con le figure 2.40 e 2.44 del paragrafo 2.7. Il valore delle due componenti, in vicinanza della superficie terrestre, è dell'ordine di qualche decimo di gauss (si veda la nota sulle unità di misura nel paragrafo 7.6).

Una bussola magnetica è costituita da un ago magnetico che si orienta concordemente alla componente orizzontale del campo magnetico terrestre: la prima applicazione risale al secolo 12^o.

7.3 Forza magnetica su una carica in moto

Consideriamo ora una particella, di massa m e carica q , posta in un campo magnetico \mathbf{B} . Se la particella è ferma in un sistema di riferimento solidale alle sorgenti del campo magnetico si trova che su di essa non agisce nessuna forza, in accordo col fatto che l'interazione magnetica si manifesta solamente tra cariche in movimento. Se invece la particella è in moto con velocità \mathbf{v} rispetto al sistema di riferimento suddetto, si verifica che su di essa agisce la *forza*, detta *di Lorentz*.

Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.5)$$

Il modulo della forza di Lorentz ha il valore

$$F = q v B \sin\theta \quad (7.6)$$

essendo θ l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{B} : la forza è dunque *nulla* se la *velocità* è *parallela* al *campo magnetico* ($\theta = 0, \theta = \pi$) ed è *massima*, pari a qvB , quando \mathbf{v} è *ortogonale* a \mathbf{B} ($\theta = \pi/2$). La direzione della forza è ortogonale al piano individuato dai vettori \mathbf{v} e \mathbf{B} e il verso è determinato dalla nota regola del prodotto vettoriale se la carica è positiva, mentre è opposto se la carica è negativa; ricordiamo che il verso del risultato di un prodotto vettoriale è quello di avanzamento di una vite destrorsa che nella sua rotazione porta \mathbf{v} su \mathbf{B} (*regola della vite*).

In particolare la forza è sempre ortogonale alla velocità, cioè alla traiettoria e pertanto in base alla definizione di lavoro e di energia cinetica si ha

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 = W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Per un qualsiasi spostamento dal punto P al punto Q nella regione in cui esiste il campo magnetico \mathbf{B} l'energia cinetica della particella resta costante in quanto la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella: essa non comunica alla particella un'accelerazione tangenziale, ma soltanto un'accelerazione centripeta. In altre parole, quando una particella carica si muove in campo magnetico la sua velocità cambia in direzione, ma non in modulo.

È bene mettere subito in evidenza le *differenze* tra la *forza magnetica* (7.5) e la *forza* (1.18) che una particella carica subisce in un *campo elettrostatico*. In tale campo, a meno che i punti P e Q coincidano o si trovino su una superficie equipotenziale, viene compiuto il lavoro (2.8)

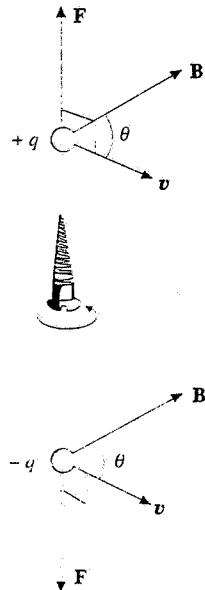


Figura 7.18

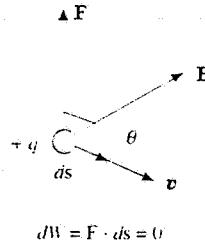


Figura 7.19

$$W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q(V_P - V_Q)$$

e l'energia cinetica della particella varia; in generale quindi la velocità può cambiare sia in modulo che in direzione.

Notiamo inoltre che la *forza elettrostatica* è parallela al campo \mathbf{E} , mentre la *forza magnetica* è ortogonale a \mathbf{B} . Non sarebbe quindi molto appropriato in questo caso parlare di linee di forza di \mathbf{B} nel senso inteso nel paragrafo 7.2; siccome anche la forza magnetica su una corrente, che vedremo nel paragrafo 7.4, è ortogonale a \mathbf{B} , come è intuitivo essendo la corrente un flusso di cariche, è preferibile nei fenomeni magnetici utilizzare la terminologia *linee di campo*, come faremo nel seguito.

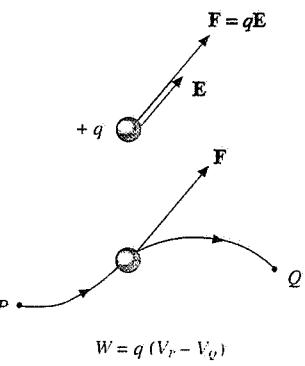


Figura 7.20

Moto in un campo magnetico uniforme, $\theta = \pi/2$

Supponiamo che il campo magnetico \mathbf{B} sia uniforme in una certa regione e che la velocità iniziale della particella sia ortogonale a \mathbf{B} : la forza (7.5), anch'essa ortogonale a \mathbf{B} , produce una variazione della direzione della velocità ancora ortogonale a \mathbf{B} e quindi la velocità in qualsiasi istante successivo sta nel piano ortogonale a \mathbf{B} individuato dalla velocità iniziale. Il moto della particella si svolge dunque in tale piano e la legge del moto è, ponendo in (7.6) $\sin\theta = 1$,

$$F = q v B = m a_n = m \frac{v^2}{r},$$

da cui si ricava il *raggio di curvatura* della traiettoria:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}, \quad (7.7) \quad \text{Raggio di curvatura}$$

dove p è il modulo della quantità di moto. Il raggio di curvatura è costante in quanto B è costante per definizione, q e m sono costanti, la velocità non cambia in modulo essendo la forza esclusivamente centripeta. La (7.7) nella forma $r = p/qB$ è corretta per qualsiasi valore della velocità, con l'avvertenza che nei casi relativistici p è data da $m\gamma v = mv/\sqrt{1-(v/c)^2}$ (vedi capitolo 3 del primo volume). Nel seguito ci limiteremo al caso non relativistico, salvo riprendere l'argomento nel paragrafo 7.8.

Essendo il raggio comunque costante, la *traiettoria è un arco di circonferenza* di raggio r dato da (7.7) o una circonferenza completa se la particella resta sempre nella regione in cui è definito \mathbf{B} . Il moto lungo la traiettoria è circolare uniforme con velocità eguale a quella iniziale e velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

In termini vettoriali, ricordando l'espressione dell'accelerazione centripeta (formula (1.32) del volume primo) e la proprietà anticommutativa del prodotto vettoriale, si ha

$$q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

ovvero

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \quad (7.8)$$

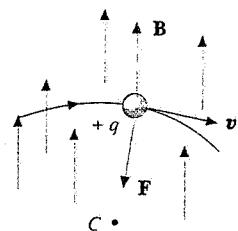


Figura 7.21

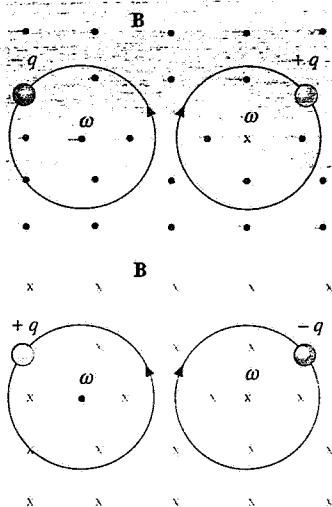


Figura 7.22

Questa relazione, *indipendente* dal valore dell'angolo θ (per cui è valida anche se $\theta \neq \pi/2$), mostra che la *velocità angolare* è sempre *parallela* a \mathbf{B} : se la *carica* q è *negativa*, ω ha lo stesso verso di \mathbf{B} e quindi, dalla punta di \mathbf{B} , il moto appare *antiorario*, se la carica q è *positiva*, ω è *opposta* a \mathbf{B} e il moto appare *orario*. Inoltre (7.8) non dipende dal valore della velocità: infatti r varia proporzionalmente a v secondo (7.7) e il loro rapporto resta costante. Di conseguenza, il tempo impiegato a percorrere una circonferenza ovvero il *periodo* del moto circolare uniforme (e la frequenza di rivoluzione) non dipendono dal raggio dell'orbita e dalla velocità con cui questa viene descritta, valendo sempre

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (7.9)$$

La relazione (7.7), riscritta come

$$B = \frac{mv}{qr},$$

si presta a una *definizione operativa* di \mathbf{B} basata sulla misura del raggio di curvatura della traiettoria percorsa da particelle con velocità e rapporto m/q noti. Il campo magnetico viene dato in funzione di grandezze meccaniche e della carica elettrica, senza dover definire prima grandezze quali la massa magnetica o il momento di dipolo magnetico, come sarebbe necessario se ci si basasse sulla forza (7.1) tra poli di magneti o sull'azione orientatrice subita da un ago magnetico ad opera di un campo magnetico. Una versione più pratica della definizione operativa di \mathbf{B} attraverso la forza di Lorentz verrà esposta nell'esempio 7.1.

Moto in un campo magnetico uniforme, θ generico

Se l'angolo θ che la velocità della particella forma con il campo magnetico è qualsiasi, scomponiamo la velocità iniziale nelle due componenti $v_n = v \sin \theta$ ortogonale a \mathbf{B} e $v_p = v \cos \theta$ parallela a \mathbf{B} . La forza magnetica che agisce sulla particella è

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_p) \times \mathbf{B} = q \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}$$

in quanto $\mathbf{v}_p \times \mathbf{B} = 0$ essendo i fattori paralleli. Abbiamo pertanto in un piano ortogonale a \mathbf{B} un moto circolare uniforme con velocità v_n , eguale a quello descritto nel caso precedente; il raggio di curvatura è

$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (7.10)$$

e la velocità angolare è sempre data da (7.8), essendo indipendente da θ . Siccome lungo \mathbf{B} non c'è forza, \mathbf{v}_p resta costante e il moto proiettato nella direzione di \mathbf{B} è rettilineo uniforme. La composizione del moto circolare uniforme in un piano ortogonale a \mathbf{B} e del moto rettilineo uniforme lungo \mathbf{B} dà luogo a un *moto elicoidale uniforme* avente come asse la direzione di \mathbf{B} . Nel tempo (7.9), indipendente da v e pari al periodo del moto circolare uniforme, la particella si sposta lungo \mathbf{B} della quantità

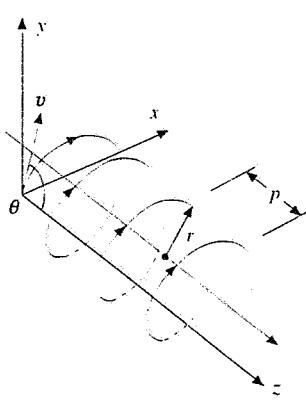


Figura 7.24

$$P = v_p T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{q B}$$

(7.11) Passo dell'elica

detta *passo dell'elica*. Fissato \mathbf{B} , il verso di percorrenza dell'elica corrisponde al verso di percorrenza del moto circolare e quindi è dato dalla stessa regola trovata nel caso precedente.

Nota. Bottiglia magnetica e fasce di Van Allen

Quando il moto delle particelle avviene in un campo magnetico non uniforme si presentano situazioni complesse. Come esempio consideriamo un campo magnetico a simmetria assiale, più intenso alle estremità e più debole al centro, secondo lo schema della figura 7.25, in cui l'infittirsi e il diradarsi delle linee di campo indicano il valore del modulo di \mathbf{B} . L'asse z è l'asse di simmetria e il campo magnetico ha la componente longitudinale B_z sempre dello stesso segno e la componente radiale B_r , che cambia segno passando da sinistra a destra; il disegno è lo stesso in ogni piano passante per l'asse z . Questa configurazione è nota come *bottiglia magnetica*.

Supponiamo di immettere nella zona a sinistra in alto una particella con carica positiva e velocità entrante nel foglio: essa è sottoposta alla forza $q \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_z + \mathbf{B}_r)$, che ha inizialmente una componente radiale dovuta a \mathbf{B}_z e una componente lungo l'asse z , dovuta a \mathbf{B}_r . La particella comincia così ad avvitarsi intorno all'asse z portandosi verso una zona in cui B è minore e sono quindi maggiori il raggio di curvatura (7.10) e il passo dell'elica (7.11). In un istante generico abbiamo perciò un moto elicoidale con raggio e passo variabili: \mathbf{B}_z agisce solo sulla componente \mathbf{v}_n della velocità, \mathbf{B}_r agisce sia su \mathbf{v}_n che su \mathbf{v}_p . Passato il centro \mathbf{B} , cambia verso e cambia verso anche la forza lungo l'asse z che ora rallenta il moto della particella lungo l'asse z ; questa intanto si porta verso zone in cui B è maggiore per cui diminuiscono sia il raggio di curvatura che il passo dell'elica. È possibile che ad un certo istante $v_n = v_p$ si annulli e poi cambi di segno: la particella torna indietro, percorrendo una traiettoria elicoidale diversa, però con lo stesso verso di rotazione. Questo effetto di *specchio magnetico* si ripete nel moto da destra a sinistra per cui la *particella resta intrappolata*.

Il sistema costituisce un *contenitore senza pareti* adatto ad esempio a mantenere confinato un *plasma di elettroni e ioni positivi* a temperature molto elevate ($T > 10^7$ K), come sarebbe richiesto nelle applicazioni tipo *fusione termonucleare controllata*. Però nelle condizioni richieste per la fusione, e cioè densità di particelle caricate molto elevata, il *sistema non è stabile*: infatti il moto di queste cariche produce un campo magnetico che altera notevolmente la configurazione di campo magnetico desiderata; a causa di ciò molte particelle non sono più confinate e non si riesce ad ottenere la densità necessaria per la realizzazione dei processi di fusione. In altre parole la bottiglia magnetica funziona solo se la densità del plasma è tale da non disturbare la configurazione di \mathbf{B} nella bottiglia. Le *fasce di Van Allen* sono un esempio di *effetto bottiglia magnetica dovuto al campo magnetico terrestre*, le cui linee hanno proprio un andamento come quello descritto, con gli estremi al polo Nord e al polo Sud. Particelle cariche, essenzialmente protoni ed elettroni, provenienti direttamente dall'esterno della terra o prodotte da interazioni di particelle cosmiche con l'atmosfera terrestre, entrano nella bottiglia magnetica e compiono il moto descritto restando intrappolate. Il confinamento non è perfetto e si raggiunge un equilibrio dinamico tra particelle entrate e particelle che sfuggono. Le zone di confinamento sono due: una zona interna, popolata da protoni ed elettroni derivanti dal decadimento di neutroni prodotti in interazioni particelle cosmiche-atmosfera, che si estende da 800 km a 4000 km dalla superficie terrestre, e una zona esterna, composta da particelle cosmiche provenienti dal sole, soprattutto elettroni, che si estende fino a 60.000 km dalla terra.

Le fasce di Van Allen furono scoperte nel 1958 esaminando i dati trasmessi dalle apparecchiature portate in orbita dal satellite americano Explorer I e successivamente studiate tramite altri satelliti americani e sovietici. Il nome deriva dal ricercatore responsabile della progettazione del primo esperimento su satellite ideato per misurare la distribuzione di particelle cariche nell'alta atmosfera terrestre.

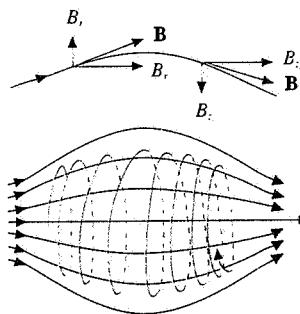


Figura 7.25

Fasce di Van Allen

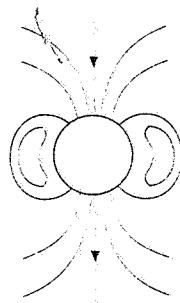


Figura 7.26

La densità di particelle caricate nelle fasce di Van Allen è dell'ordine di $10^4 \div 10^5$ particelle/cm³ (nell'aria a pressione atmosferica ci sono $2.5 \cdot 10^{19}$ molecole/cm³): essa corrisponde alla densità di molecole che restano in un contenitore quando in esso si raggiunge il miglior vuoto attualmente realizzabile ($\sim 10^{-10}$ Pa).

7.4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

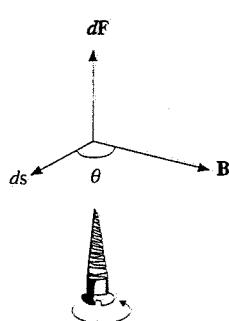
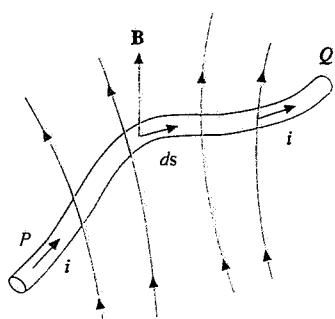


Figura 7.27

Seconda legge elementare
di Laplace

La corrente elettrica in un conduttore è dovuta al moto degli elettroni sotto l'azione del campo elettrico applicato tramite un generatore; se n è il numero di elettroni liberi per unità di volume, ciascuno con carica $-e$, e v_d la loro velocità di deriva, la densità di corrente si scrive $j = -n e v_d$ ed è parallela e concorde al campo elettrico applicato, come abbiamo discusso nel paragrafo 6.2.

Quando il conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico a ciascun elettrone è applicata la forza di Lorentz (7.5):

$$\mathbf{F}_L = -e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} .$$

Attraverso gli urti che gli elettroni in moto hanno con gli ioni del reticolo cristallino tale forza è *trasmessa* alla massa del filo conduttore, che ora è in seguito supponiamo indeformabile.

In un tratto di conduttore lungo ds e di sezione Σ sono contenuti $n \Sigma ds$ elettroni e la forza risultante è

$$d\mathbf{F} = n \Sigma ds \mathbf{F}_L = -(\Sigma ds) n e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = \Sigma ds \mathbf{j} \times \mathbf{B} .$$

Da questa espressione, essendo Σds eguale al volume infinitesimo $d\tau$, si vede che la *forza agente per unità di volume* sul conduttore è

$$\mathbf{F}_\tau = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (7.12)$$

D'altra parte, riferendoci a un conduttore filiforme e ricordando che Σj è la corrente i che percorre il filo, orientiamo ds come \mathbf{j} e otteniamo

$$d\mathbf{F} = i ds \times \mathbf{B} . \quad (7.13)$$

Questa relazione si chiama *seconda legge elementare di Laplace* ed esprime il fatto che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al filo e al campo magnetico ed è orientata rispetto a ds e \mathbf{B} secondo la regola della vite già ricordata nel paragrafo 7.3: il modulo è dato da $dF = i B ds \sin\theta$, essendo θ l'angolo tra ds e \mathbf{B} . Osserviamo che le caratteristiche della forza non dipendono dal segno dei portatori di carica e che essa è in ogni caso proporzionale all'intensità di corrente.

Per ottenere la forza su un tratto di filo indeformabile di lunghezza finita, percorso dalla corrente (stazionaria) i , si integra la (7.13):

$$\mathbf{F} = i \int_P^Q ds \times \mathbf{B} . \quad (7.14)$$

I punti P e Q sono gli estremi del filo; l'integrale è esteso lungo il filo, nei cui punti \mathbf{B} può variare sia in modulo che in direzione che in verso; però si assume che \mathbf{B} sia lo stesso in tutti i punti di una qualsiasi sezione, appunto perché il *conduttore è filiforme*. La corrente si porta fuori dal segno di integrale in quanto stazionaria (o semistazionaria).

Dato un campo magnetico qualsiasi, la legge (7.14) permette di calcolare la forza magnetica agente su un conduttore filiforme di forma generica, cioè curvilineo, percorso da corrente; in generale la forza è diversa da zero anche se il circuito è chiuso ($P \equiv Q$). La struttura di (7.14) mostra che la forza risultante è dovuta alla somma di infiniti contributi infinitesimi; però a differenza di altri casi matematicamente simili, in cui il singolo contributo infinitesimo ha un significato fisico anche se preso singolarmente e isolato dagli altri (si pensi alla forza gravitazionale su una massa estesa o alla forza elettrica su una distribuzione di carica, che sono il risultato di interazioni elementari), nel caso di (7.14) il *singolo contributo* (7.13) non ha significato fisico: infatti non è possibile realizzare un tratto infinitesimo di conduttore percorso da corrente e misurare la forza su di esso, ma si ha sempre a che fare con tratti finiti di circuiti; in altre parole, non ha senso l'elemento infinitesimo aperto di corrente in un conduttore, se non come strumento matematico di calcolo. A livello elementare ha invece senso una corrente chiusa, come quella che percorre una spira infinitesima di Ampère (paragrafo 7.5) o quella dovuta ad un elettrone in moto intorno ad un nucleo (capitolo 9).

Un'altra osservazione importante è la seguente: la (7.14) è una legge macroscopica molto ben verificata sperimentalmente, che può essere assunta come *legge di base*; da essa si può ricavare (7.5) eseguendo a ritroso il ragionamento, una volta ammesso che la corrente sia dovuta a un flusso di cariche elementari. Così facendo si constata che la *velocità* da considerare nella (7.5) applicata agli elettroni di conduzione è quella, come abbiamo implicitamente ammesso, *di deriva* v_d e *non* la *velocità del moto termico*, molto maggiore di v_d . Questo fatto conferma l'idea che le velocità termiche siano distribuite in modo casuale per cui la risultante delle corrispondenti forze di Lorentz è nulla in ogni istante: si spiega così perché su un conduttore immerso in un campo magnetico, ma non percorso da corrente, non agisca nessuna forza magnetica, pur essendo gli elettroni in movimento. Viene in definitiva sottolineata l'importanza del *moto collettivo* con velocità v_d che dà luogo alla corrente e alla forza magnetica.

Studiamo ora alcuni casi particolari interessanti. Supponiamo che il campo magnetico sia uniforme e che il conduttore sia rettilineo, di lunghezza l . Allora la (7.14) si semplifica in

$$\mathbf{F} = i \left(\int_P^Q ds \right) \times \mathbf{B}$$

in quanto sia il modulo del campo che l'angolo θ formato con ds sono costanti durante l'integrazione, e si ha

$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B} , \quad \text{in modulo} \quad F = i l B \sin\theta . \quad (7.15)$$

Se il conduttore è curvilineo, ma sta in un piano, è facile verificare che

$$\mathbf{F} = i \int_P^Q ds \times \mathbf{B} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} . \quad (7.16)$$

Basta scrivere

$$ds = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y , \quad \mathbf{PQ} = \Delta x \mathbf{u}_x + \Delta y \mathbf{u}_y , \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z ,$$

dove il piano x, y è quello in cui giace il filo, $\Delta x = x_Q - x_P$, $\Delta y = y_Q - y_P$, B_x, B_y, B_z , sono costanti; sviluppando i prodotti vettoriali e integrando a sinistra si constata subito l'eguaglianza. Pertanto la forza su un filo che giace in un piano ed è immer-

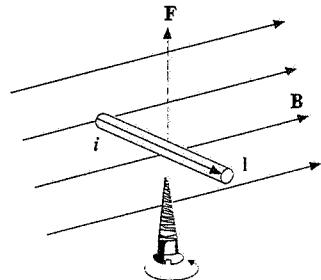


Figura 7.28

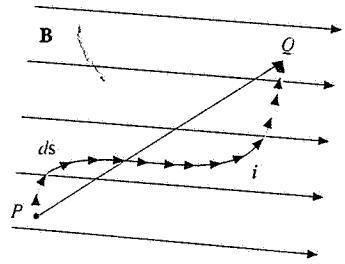


Figura 7.29

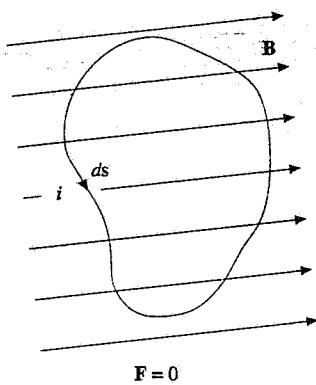


Figura 7.30

so in un campo magnetico uniforme non dipende dalla forma del filo, ma solo dai punti iniziale e finale; (7.15) si riconduce così a (7.16).

Se infine il filo che giace in un piano forma un circuito chiuso, la forza risulta evidentemente nulla, in quanto $\mathbf{PQ} = 0$ (si veda l'esempio 7.2). Sia questo risultato che (7.16) sono validi in realtà anche se il filo non sta in un piano, come dimostreremo nel paragrafo 7.6 con un metodo differente.

Pur non essendo possibile realizzare un conduttore percorso da corrente isolato, in quanto la corrente fluisce sempre in un circuito chiuso, esistono vari modi per costruire un dispositivo in cui una parte di circuito sia mobile (vedi esempio 7.4) così da poter mettere in evidenza l'effetto della forza (7.14), oppure in cui le forze su vari tratti di circuito si compensino e resti soltanto l'effetto su un unico tratto, come vediamo nell'esempio 7.1.

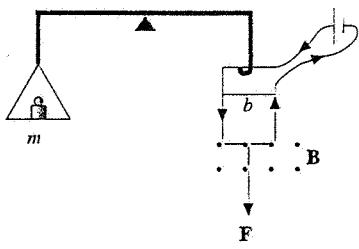


Figura 7.31

Esempio 7.1

Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida larga $b = 5 \text{ cm}$. La parte inferiore è immersa in un campo magnetico uniforme B ortogonale al piano della spira. Se nella spira circola una corrente di intensità $i = 1 \text{ A}$ con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa $m = 0.5 \text{ g}$ sul piatto. Calcolare il valore del modulo di B .

Soluzione

Il lato orizzontale della spira immerso nel campo magnetico risente della forza (7.15) $\mathbf{F} = i \mathbf{b} \times \mathbf{B}$, che in modulo vale ibB , in quanto \mathbf{b} e \mathbf{B} sono ortogonali. Negli altri tratti di spira sottoposti al campo magnetico la corrente ha versi opposti e le forze date da (7.15) sono eguali e contrarie; esse hanno anche la stessa retta di azione, per cui non producono nessun effetto. Con i versi indicati nella figura 7.31 \mathbf{F} è diretta verso il basso e viene equilibrata dalla forza peso mg . In conclusione

$$mg = ibB \Rightarrow B = \frac{mg}{ib} = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

(per l'unità di misura del campo magnetico, il tesla (T), si veda il paragrafo 7.6).

Con questo metodo, o un analogo in cui la bilancia è sostituita da un *dinamometro*, è pertanto possibile determinare il valore di un campo magnetico misurando la forza agente su un tratto di conduttore percorso da corrente. Come avevamo detto, basandosi sulla legge di Laplace e quindi in definitiva sulla forza di Lorentz, si ha una *definizione operativa* semplice e pratica del campo magnetico. Oltre al modulo si possono trovare direzione e verso di \mathbf{B} orientando lo strumento (nella versione dinamometro) e cercando la posizione in cui la forza è massima.

Esempio 7.2

In un circuito chiuso a forma di semicirconferenza di raggio R fluisce una corrente di intensità i . Il circuito è contenuto nel piano x, y con il tratto rettilineo PQ parallelo all'asse x ed è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme parallelo all'asse y . Calcolare la forza magnetica sul tratto curvo e sul tratto rettilineo.

Soluzione

La forza sul tratto rettilineo $PQ = 2Ru$, immerso nel campo magnetico $\mathbf{B} = Bu$, è, secondo (7.15).

$$\mathbf{F} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} = 2iR B \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = 2iR B \mathbf{u}_z,$$

parallela e concorde all'asse z , uscente dal foglio.

Nel tratto curvilineo, seguendo il verso della corrente, $ds = -dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y$ e dalla (7.13)

$$d\mathbf{F} = i ds \times \mathbf{B} = -i B dx \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y + i B dy \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = -i B dx \mathbf{u}_z;$$

integrandolo lungo la semicirconferenza

$$\mathbf{F} = -i B \mathbf{u}_z \int_{-R}^R dx = -2i R B \mathbf{u}_z,$$

eguale ed opposta a quella sul diametro.

Verifichiamo con questo esempio che in un campo uniforme la forza non dipende dalla forma del conduttore, purché stia in un piano, e che la forza su un circuito piano chiuso è nulla.

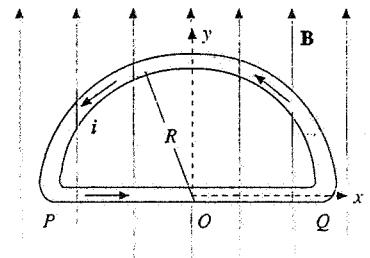


Figura 7.32

7.5 Momenti meccanici su circuiti piani.

Principio di equivalenza di Ampère

Da un punto di vista meccanico la forza magnetica (7.14) deve considerarsi come la risultante di un sistema di forze applicate in punti diversi; essa provoca uno spostamento in accordo con il teorema del moto del centro di massa. In generale, oltre ad avere la risultante (7.14), il sistema di forze magnetiche presenta un momento risultante diverso da zero, per cui è possibile avere anche delle rotazioni.

In questo paragrafo ci occupiamo per semplicità soltanto di *circuiti piani rigidi* percorsi da corrente e *immersi in campo magnetico uniforme*; in tal caso la forza risultante è nulla e il circuito *non si sposta* (e non si deforma), però il momento risultante può essere diverso da zero e mettere in rotazione il circuito.

Consideriamo una spira rettangolare, di lati a e b , percorsa dalla corrente i e orientiamo il versore \mathbf{u}_n della normale al piano della spira in accordo con la convenzione descritta nel paragrafo 2.6, figura 2.33, rispetto al verso di percorrenza della corrente (è sempre la regola della vite). La spira è immersa in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, che forma l'angolo θ con \mathbf{u}_n . Come si deduce dalla figura 7.33, le forze magnetiche \mathbf{F}_3 e \mathbf{F}_4 sui lati RS e PQ sono eguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione: ciascuna di esse è la risultante di un sistema di forze parallele (7.13), applicata nel centro del lato, e nel loro insieme formano una coppia di braccio nullo e quindi di momento nullo. Le forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sui lati QR e SP , ciascuna di modulo $i a B$ secondo (7.15) in quanto \mathbf{B} è ortogonale ai lati a , sono anch'esse eguali e contrarie, ma costituiscono una coppia di braccio $b \sin \theta$. Il momento della coppia vale in modulo

$$M = b \sin \theta F = i a b B \sin \theta = i \sum B \sin \theta \quad (7.17)$$

ed è parallelo al piano della spira e orientato come in figura 7.33.

Definiamo *momento magnetico della spira* il vettore

$$\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n \quad , \quad (7.18)$$

parallelo e concorde a \mathbf{u}_n e con modulo eguale al prodotto dell'intensità di corrente per l'area della spira. Il *momento meccanico* M può pertanto essere scritto, in accordo con (7.17),

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = i \sum \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} \quad . \quad (7.19)$$

La (7.19), dedotta per una spira rettangolare, è valida in realtà per un *circuito*

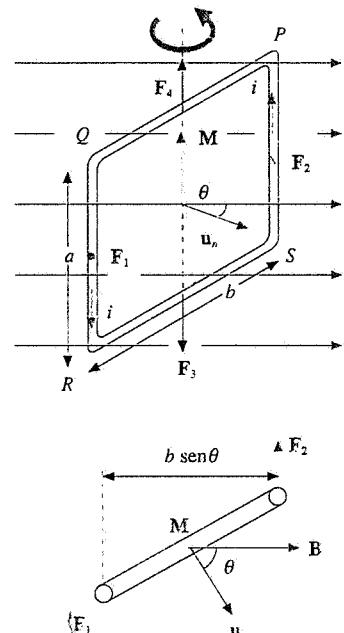


Figura 7.33

Momento magnetico di una spira

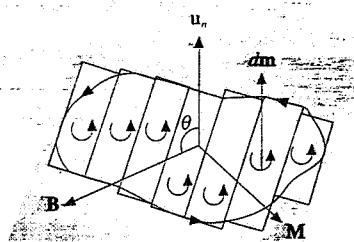


Figura 7.34

piano di forma qualunque immerso in un campo magnetico uniforme. Infatti il circuito si può sempre approssimare con n circuiti rettangolari adiacenti, tutti percorsi da una stessa corrente i con verso tale da avere le normali concordemente orientate; le correnti che passano nei lati in comune sono uguali ed opposte per cui gli effetti del campo magnetico si annullano e restano solo gli effetti prodotti sul contorno esterno, coincidente con il circuito. L'approssimazione è tanto migliore quanto più n è grande e al limite, per n tendente all'infinito, detto $dm = i d\Sigma \mathbf{u}_n$ il momento magnetico del generico circuito rettangolare infinitesimo di area $d\Sigma$, su cui agisce il momento meccanico $d\mathbf{M} = dm \times \mathbf{B}$, si ha per il momento meccanico risultante

$$\mathbf{M} = \int_{\Sigma} d\mathbf{M} = \int_{\Sigma} dm \times \mathbf{B} = i \int_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = i \left(\int_{\Sigma} d\Sigma \right) \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = i \sum \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} ,$$

coincidente con (7.19) se \mathbf{m} è definito come in (7.18).

Il momento (7.19) risulta nullo soltanto se \mathbf{m} è parallelo a \mathbf{B} : la posizione con $\theta = 0$ è di *equilibrio stabile*, quella con $\theta = \pi$ di *equilibrio instabile*. Per qualsiasi altro valore di θ \mathbf{M} tende a far ruotare la spira in modo che il momento magnetico \mathbf{m} diventi parallelo e concorde a \mathbf{B} . Sospendendo opportunamente la spira è possibile generare in questo modo un moto oscillatorio.

In particolare, prendiamo un asse di rotazione parallelo a \mathbf{M} e sia I il momento d'inerzia della spira rispetto a questo asse: supponiamo di spostare la spira dalla posizione di equilibrio stabile di un angolo θ piccolo, così da poter confondere $\sin \theta$ con θ . Il teorema del momento angolare proiettato sull'asse di rotazione dà

$$M = -m B \theta = \frac{dL}{dt} = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} ,$$

dove il segno meno indica che il momento richiama sempre la spira verso la posizione di equilibrio. Abbiamo così ottenuto l'equazione

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{m B}{I}}$$

e quindi le *piccole oscillazioni* della spira risultano armoniche con *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m B}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{i \Sigma B}} . \quad (7.20)$$

Anche la (7.20) si presta a una definizione operativa di B : tramite l'orientazione di un piccolo circuito si possono misurare direzione e verso di \mathbf{B} e dal periodo delle piccole oscillazioni si deduce il modulo del campo magnetico; l'area Σ deve essere sufficientemente piccola per poter ritenere \mathbf{B} uniforme su di essa.

Il comportamento oscillatorio della spira percorsa da corrente e immersa in campo magnetico ricalca esattamente quello di un dipolo elettrico posto in un campo elettrico, che abbiamo visto nel paragrafo 2.9 e nell'esempio 2.14. D'altra parte abbiamo ricordato più volte, nei paragrafi 7.1 e 7.2, che anche un ago magnetico ha un comportamento del tutto simile quando posto in un campo magnetico: anzi la formula (7.20) fornisce un metodo pratico per determinare il momento magnetico di un ago magnetico dalla misura del suo periodo di oscillazione in un campo magnetico noto.

Questa identità di comportamento tra spira e ago magnetico nei riguardi delle

azioni meccaniche subite quando posti in un campo magnetico uniforme venne generalizzata da Ampère sotto forma di un postulato, detto *principio di equivalenza di Ampère*: una spira piana di area $d\Sigma$ percorsa dalla corrente i equivale agli effetti magnetici a un dipolo elementare di momento magnetico

$$dm = i d\Sigma \mathbf{u}_n , \quad (7.21)$$

perpendicolare al piano della spira e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite. Abbiamo appena constatato questa equivalenza per quanto riguarda un particolare tipo di moto in campo magnetico e vedremo nel capitolo 8 la sua validità anche rispetto al campo magnetico prodotto.

La (7.21) deve essere considerata uno strumento di calcolo molto utile perché permette di applicare a situazioni magnetiche concetti già sviluppati per i dipoli elettrici; non le si può però attribuire validità assoluta, come abbiamo già accennato e discuteremo nel capitolo 8.

Sempre in analogia con quanto visto per il dipolo elettrico, anche per il dipolo magnetico (spira o ago magnetico) si definisce una *energia potenziale*, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di \mathbf{B} ,

$$U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m B \cos \theta = -i \Sigma B \cos \theta , \quad (7.22)$$

minima nella posizione di equilibrio stabile ($\theta = 0$) e massima in quella di equilibrio instabile ($\theta = \pi$). Tra momento meccanico \mathbf{M} ed energia potenziale U_p sussiste la relazione

$$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -m B \sin \theta . \quad (7.23)$$

Esempio 7.3 Il galvanometro

Nel paragrafo 6.11 è stato descritto il principio di funzionamento del galvanometro, che è alla base di *strumenti universali* per la misura di intensità di corrente, differenze di potenziale e resistenze. Richiamiamo nella figura 7.37, analoga alla 6.51, lo schema dello strumento.

La corrente i da misurare passa attraverso una bobina, costituita da N spire rettangolari di area Σ e sostenuta lungo l'asse da due molle. La bobina è sottoposta all'azione di un campo magnetico \mathbf{B} prodotto da un magnete che si esplicita in una coppia di forze applicate ai lati verticali. All'interno della bobina in posizione fissa è posto un cilindro C di ferro dolce e questo accorgimento, come vedremo nel capitolo 9, fa sì che le linee di campo di \mathbf{B} risultino sempre perpendicolari alla superficie del cilindro e quindi ai lati verticali della bobina, indipendentemente dalla posizione da essa assunta.

Il momento magnetico della bobina $\mathbf{m} = N i \Sigma \mathbf{u}_n$ forma un angolo $\theta = \pi/2$ con il campo magnetico \mathbf{B} agente sui lati verticali (è questo il campo che interessa e non quello nel ferro, che non è sentito dalla corrente). Di conseguenza la bobina è sottoposta al momento meccanico (7.17) $M = Ni \Sigma B$ ed entra in rotazione. Le molle tramite cui la bobina è collegata al filo di sospensione esercitano un *momento elastico* di modulo $k\theta$ che si oppone alla rotazione; k è una costante caratteristica del sistema. Si ha pertanto una posizione di *equilibrio* individuata dalla condizione

$$k\theta = Ni \Sigma B \Rightarrow \theta = \frac{Ni \Sigma B}{k} . \quad (7.24)$$

L'indice solidale alla bobina serve per misurare l'angolo θ di deviazione dalla posizione di riposo a corrente nulla osservando lo spostamento s su una scala graduata distante

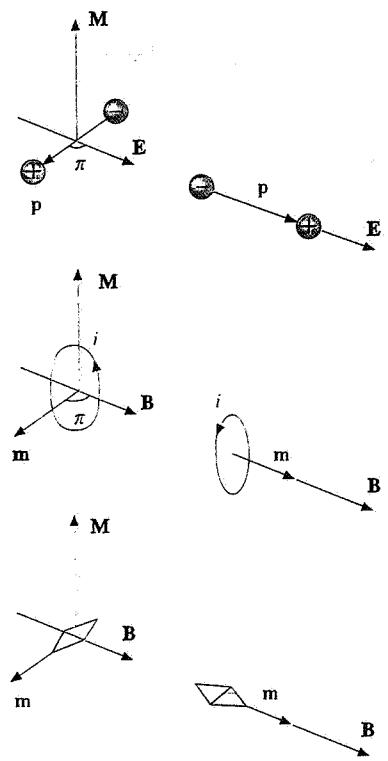


Figura 7.35

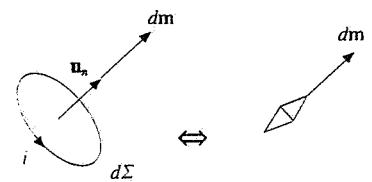


Figura 7.36

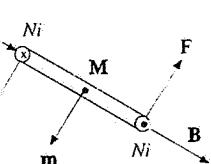
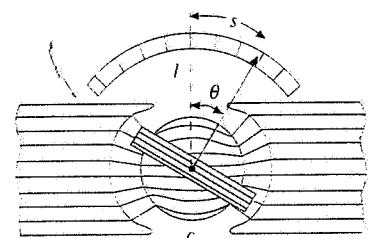


Figura 7.37

θ dall'asse della bobina (quindi $\theta = s/l$). Supponiamo che la scala sia graduata in modo tale che $s = n s_0$; allora $\theta = n s_0 / l$ e la (7.24) diventa

$$i = \left(\frac{k s_0}{N \Sigma B l} \right) n = S n \quad (7.25)$$

Sussiste dunque una *relazione di proporzionalità diretta* tra l'intensità di corrente i e il numero di divisioni n di cui si sposta l'indice sulla scala graduata. La costante S dipende dalle caratteristiche costruttive dello strumento e può essere misurata facendo attraversare lo strumento da una corrente di intensità nota. Indicativamente, se la *corrente di fondo scala* è $i_{f_s} = 50 \mu\text{A}$ e la scala ha $n = 100$ divisioni, $S = 50 \mu\text{A} / 100 = 0.2 \mu\text{A} / \text{divisione}$. Si può ridurre S , rendendo lo strumento più sensibile, eliminando le molle e sospendendo la bobina direttamente con un filo: se questo è abbastanza sottile, la costante k di norma è minore che in presenza delle molle.

Invertendo il verso della corrente si inverte il senso di rotazione; si può quindi costruire un *galvanometro a zero centrale* che oltre a misurare la corrente ne indica anche il verso.

7.6 Espressioni di forza, momento e lavoro tramite il flusso magnetico

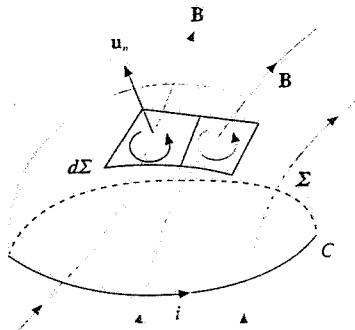


Figura 7.38

Energia potenziale
di un circuito

I risultati sulle azioni meccaniche subite da un circuito percorso da corrente immerso in un campo magnetico, che abbiamo ottenuto nei paragrafi 7.4 e 7.5, possono essere generalizzati.

Consideriamo un circuito qualsiasi C , anche non piano, percorso dalla corrente i e una qualunque superficie Σ che abbia il circuito C come contorno o, come si dice, che si *appoggi* sul circuito C . Estendiamo alla superficie Σ l'argomento della suddivisione in tanti piccoli circuiti rettangolari, tutti percorsi dalla stessa corrente i e concordemente orientati, che abbiamo utilizzato nel paragrafo 7.5. L'energia potenziale del generico circuito di area $d\Sigma$, in base a (7.22), è

$$dU_p = -d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -i \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -i d\Phi(\mathbf{B}) \quad , \quad (7.26)$$

introducendo l'espressione del *flusso infinitesimo* di \mathbf{B} attraverso la superficie $d\Sigma$. L'*energia potenziale del circuito* C si ottiene integrando (7.26) sulla superficie Σ :

$$U_p = -i \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -i \Phi(\mathbf{B}) \quad . \quad (7.27)$$

Il campo magnetico \mathbf{B} è solenoidale e pertanto, come abbiamo ricordato nel paragrafo 7.2, fissato il contorno C il flusso di \mathbf{B} *non* dipende dalla particolare superficie Σ che si appoggia su C . La (7.27) cioè è determinata fissato C e afferma che l'*energia potenziale di un circuito percorso da corrente i e immerso in un campo magnetico \mathbf{B}* è *eguale al prodotto cambiato di segno della corrente i per il flusso di \mathbf{B} concatenato col circuito*.

A seguito di uno spostamento rigido del circuito, in generale una rototraslazione, oppure di una deformazione che ne alteri il contorno il flusso attraverso il circuito può cambiare e indichiamo con $d\Phi(\mathbf{B})$ la *variazione infinitesima*, notando che lo stesso simbolo ha ora un *significato diverso* (prima era un flusso infinitesimo, ora è una *variazione infinitesima di flusso*); essendo cambiato il flusso da Φ a $\Phi + d\Phi$, cambia l'energia potenziale da U_p a $U_p + dU_p$, cioè della quantità $dU_p = -i (\Phi + d\Phi - \Phi) = -i d\Phi$, che è la (7.26) col significato appena specificato, e viene compiuto il *lavoro elementare*

$$dW = -dU_p = i d\Phi(\mathbf{B}) \quad (7.28)$$

Per una variazione finita da una configurazione iniziale a una finale il lavoro complessivo vale

$$W = i \Delta \Phi = i [\Phi_2(\mathbf{B}) - \Phi_1(\mathbf{B})] \quad (7.29)$$

Se esso risulta positivo è stato compiuto dalle forze del campo, se negativo contro le forze del campo.

È essenziale la condizione che durante lo spostamento la corrente resti costante: se ciò non avviene le formule scritte non sono più valide. L'importanza di questa precisazione deriva dall'esistenza di fenomeni, che vedremo nel capitolo 10, i quali provocano una variazione di corrente in un circuito quando varia il flusso magnetico concatenato col circuito stesso. Si capisce così che la condizione richiesta comporta necessariamente un intervento per mantenere costante la corrente e che quindi U_p non può essere l'unica forma di energia nei fenomeni magnetici (situazione che ricorda quella dei processi a potenziale costante in elettrostatica).

Passiamo ora ad esaminare alcuni casi specifici. Se il circuito compie una *traslazione rigida* lungo l'asse x il lavoro per uno spostamento infinitesimo dx è

$$dW = F_x dx = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$$

per cui la componente lungo l'asse x della forza agente è

$$F_x = i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Procedendo in modo analogo per le altre componenti si ottiene

$$\mathbf{F} = i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{u}_z \right) = i \nabla \Phi = -\nabla U_p \quad : \quad (7.30)$$

la forza agente sul circuito è proporzionale al gradiente del flusso magnetico attraverso il circuito. La (7.30) può essere ricavata da (7.28) ricordando la proprietà (2.40) del gradiente:

$$dW = i d\Phi = i \nabla \Phi \cdot ds = \mathbf{F} \cdot ds \Rightarrow \mathbf{F} = i \nabla \Phi$$

Si mette così in evidenza che la (7.30) è *indipendente* dal sistema di coordinate prescelto.

L'espressione della forza (7.30) è valida per un circuito di forma qualunque immerso in un campo magnetico qualsiasi, anche non uniforme; se \mathbf{B} è uniforme il suo flusso attraverso il circuito che compie una qualsiasi traslazione non varia con la posizione, il gradiente del flusso di conseguenza è nullo e la forza è nulla. Se ora immaginiamo di dividere il circuito in due parti (figura 7.39) e chiamiamo \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_3 le forze sulle due parti, deve essere $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 = 0$ ovvero $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_3$; anche se cambiamo la forma del tratto da P a Q , deve essere $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$ cioè $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$ e in conclusione $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$: la forza su un tratto di filo anche non piano dipende solo dai punti iniziale e finale e non dalla forma del filo, se il campo \mathbf{B} è uniforme. Abbiamo così esteso, con una dimostrazione diversa, i risultati visti per circuiti piani nel paragrafo 7.4.

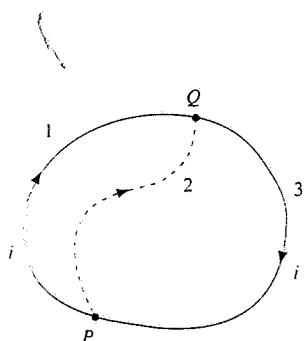


Figura 7.39

Quando il circuito compie una *rotazione rigida infinitesima*

$$dW = -dU_p = M_\theta d\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta ,$$

se M_θ è la componente del momento lungo l'asse di rotazione; risulta pertanto

$$M_\theta = i \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial U_p}{\partial \theta} . \quad (7.31)$$

Se il circuito è piano e il campo uniforme, il flusso è semplicemente $B \Sigma \cos \theta$ e da (7.31) si ottiene (7.23).

Infine, nel caso di un circuito piano di area Σ molto piccola posto in un campo magnetico non uniforme, (7.30) e (7.31) diventano

$$\mathbf{F} = i \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \Sigma) = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) , \quad (7.32)$$

$$M_\theta = i \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \Sigma) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) ; \quad (7.33)$$

\mathbf{m} è il momento magnetico del circuito, pari a $i \Sigma \mathbf{u}_n$, e si suppone che \mathbf{B} , pur non essendo uniforme, abbia lo stesso valore in tutti i punti di Σ . Queste formule, che potevano essere ricavate anche da (7.22), si applicano pure a un piccolo ago magnetico di momento \mathbf{m} ; si noti che (7.32) è analoga a (2.71) valida per un dipolo elettrico in campo \mathbf{E} non uniforme.

Riassumendo i risultati sulla forza subita da un circuito in campo non uniforme, noi abbiamo a disposizione due formule: la (7.14), basata direttamente sulla seconda legge elementare di Laplace (7.13), che utilizza un integrale esteso al circuito e la (7.30) la quale invece si serve del gradiente del flusso di \mathbf{B} attraverso una superficie appoggiata al circuito. Questa seconda procedura fornisce esplicitamente anche un'espressione per il lavoro e per il momento meccanico.

Per confrontare le due procedure, appliciamole a una spira circolare di raggio r , con centro sull'asse z e posta in un piano ortogonale all'asse z , percorsa dalla corrente i . Essa è sottoposta all'azione di un campo magnetico a simmetria assiale rispetto all'asse z , le cui linee di \mathbf{B} formano l'angolo θ con l'asse z nei punti in cui è posta la spira (vedi figura 7.40). Calcoliamo la forza agente sulla spira servendoci prima della (7.13). Nel punto P abbiamo

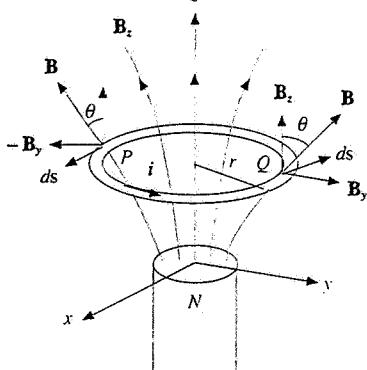


Figura 7.40

$$ds = ds \mathbf{u}_x \quad \mathbf{B} = -B \sin \theta \mathbf{u}_z + B \cos \theta \mathbf{u}_y ,$$

per cui la forza elementare è

$$d\mathbf{F}_P = i ds \times \mathbf{B} = i B ds (-\sin \theta \mathbf{u}_x - \cos \theta \mathbf{u}_y) .$$

Sull'elemento ds diametralmente opposto, cioè nel punto Q , si ha

$$d\mathbf{F}_Q = i (-ds \mathbf{u}_x) \times (B \sin \theta \mathbf{u}_z + B \cos \theta \mathbf{u}_y) = i B ds (-\sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_y) .$$

La forza risultante sui due elementi di circuito è

$$d\mathbf{F} = -2 i B \sin \theta ds \mathbf{u}_z .$$

Notiamo che il risultato è indipendente dalla scelta degli assi x e y , come deve essere vista la simmetria del problema. La forza totale è diretta lungo l'asse z e si ottiene integrando lungo mezza spira, dato che sono state considerate coppie di elementi:

$$\mathbf{F} = -2iB \sin\theta \mathbf{u}_z \int_0^{2\pi r} ds = -2\pi r i B \sin\theta \mathbf{u}_z$$

La *forza* risulta *attrattiva*, per il dato verso della corrente (\mathbf{u}_z concorde a \mathbf{B}); se la corrente circolasse in verso contrario la forza sarebbe repulsiva. Osserviamo che pur essendo la spira piana la forza non è nulla perché il campo magnetico *non* è uniforme; però, data la simmetria della configurazione, è certamente nullo il momento meccanico risultante (la spira non ruota).

Lo stesso risultato si ottiene partendo dalla relazione (7.30), riscritta come

$$F = F_z = i \frac{\partial \Phi}{\partial z} ;$$

infatti, per ragioni di simmetria, la forza deve essere parallela all'asse z . Supponiamo ora che la spira compia una traslazione infinitesima dz lungo l'asse z e consideriamo una superficie chiusa a forma di scatola cilindrica avente come basi la superficie piana Σ racchiusa dalla spira prima dello spostamento e la corrispondente superficie Σ' dopo lo spostamento; la superficie laterale è una striscia di altezza dz e area $2\pi r dz$. Se orientiamo questa superficie verso l'esterno e chiamiamo Φ' il flusso uscente attraverso Σ' , $-\Phi$ quello uscente attraverso Σ e Φ , quello uscente attraverso la superficie laterale, deve essere in base a (7.2)

$$\Phi' - \Phi + \Phi_l = 0$$

La differenza $\Phi' - \Phi$ rappresenta proprio la variazione di flusso attraverso il circuito causata dallo spostamento e quindi, in termini infinitesimi,

$$d\Phi = -\Phi_l = -2\pi r dz B \sin\theta ;$$

infatti la componente di \mathbf{B} ortogonale alla superficie laterale è $B \sin\theta$, eguale su tutta la striscia data la simmetria cilindrica. In conclusione

$$F = i \frac{d\Phi}{dz} = -i \frac{d\Phi_l}{dz} = -2\pi r i B \sin\theta$$

e il segno meno indica che la forza è attrattiva (discorde all'asse z): abbiamo così ritrovato la formula precedente. Se la corrente circola in senso contrario la normale alla spira è discorda al campo \mathbf{B} e cambiano i segni dei flussi: la forza diventa positiva, cioè repulsiva.

Al flusso attraverso la superficie laterale si dà normalmente il nome di *flusso tagliato*, in quanto corrisponde al flusso lungo le linee del campo magnetico attraversate (*tagliate*) dalla spira nel suo spostamento.

Qualora la spira sia di piccole dimensioni così che $r \ll z$, se z è la distanza dal polo più vicino del magnete che immaginiamo generi il campo \mathbf{B} , possiamo porre $\sin\theta \approx \theta \approx r/z$ e la forza diventa

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi r^2 i B}{z} \mathbf{u}_z = -\frac{2B}{z} \mathbf{m} .$$

indicando con $\mathbf{m} = \pi r^2 i \mathbf{u}_z$ il momento magnetico della spira. Se inoltre il campo magnetico varia lungo l'asse z secondo la legge (7.1), $B(z) = k/z^2$, allora

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{2k}{z^3} = -\frac{2B}{z}$$

e la forza sulla piccola spira si può scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{dB}{dz} \mathbf{m} ; \quad (7.34)$$

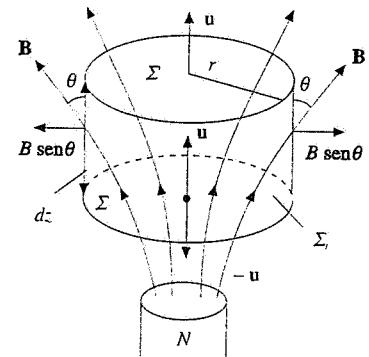


Figura 7.41

Flusso tagliato

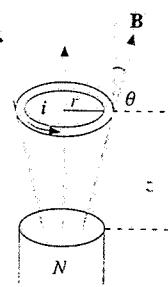


Figura 7.42

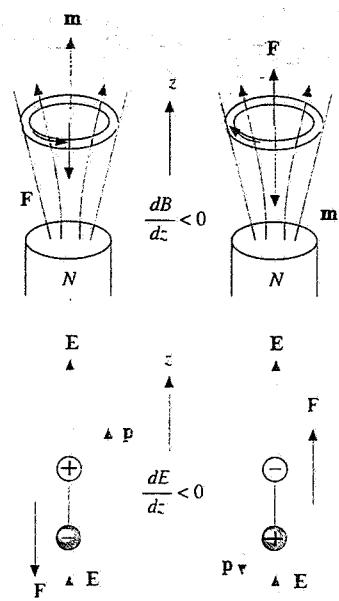


Figura 7.43

Essa è attrattiva, essendo dB/dz negativa; con la corrente circolante in verso opposto \mathbf{m} e quindi \mathbf{F} cambiano verso. Osserviamo che (7.34) discende da (7.32) se \mathbf{m} e \mathbf{B} sono paralleli e che la situazione, in tal caso, si può così sintetizzare: la spira tende a portarsi dove il campo magnetico è maggiore se \mathbf{m} è concorde a \mathbf{B} , mentre tende a portarsi dove il campo è minore se \mathbf{m} è opposto a \mathbf{B} . Tutto ciò si applica anche ad un ago magnetico: in particolare giustifica purché la limatura di ferro sia attratta dai poli di un magnete, dove il campo magnetico è maggiore.

Abbiamo ritrovato i risultati del paragrafo 2.9 relativi ai dipoli elettrici, completando il quadro delle analogie riscontrate, che riassumiamo nella tabella 7.1.

Tabella 7.1 Proprietà dei dipoli

	$\rightarrow \mathbf{p}$	$\rightarrow \mathbf{m}$
momento di dipolo momento meccanico energia potenziale	$\mathbf{p} = qa$ $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ $U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n$ $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ $U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$
periodo delle piccole oscillazioni	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pE}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mB}}$
forza in un campo non uniforme parallelo al momento di dipolo	$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x}$	$F_x = m \frac{\partial B}{\partial x}$

Oltre a traslazioni e rotazioni rigide un circuito può subire una deformazione, come abbiamo già menzionato, e ciò comporta in genere una variazione di flusso e un lavoro, dato da (7.29), sempre nell'ipotesi che la corrente resti costante durante il processo. Nell'esempio che segue trattiamo un caso particolare molto semplice, però interessante anche per successive applicazioni.

Esempio 7.4

Un generatore in grado di mantenere una corrente costante i (indicato col simbolo della figura 7.44) alimenta un circuito formato da due conduttori rigidi rettilinei paralleli e da un filo rigido PQ lungo b che può scorrere senza attrito, restando sempre ortogonale ai due conduttori suddetti (che sono fissi, insieme al generatore). Il circuito è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, entrante nel foglio. Calcolare la forza agente sul filo PQ .

Soluzione

Il filo PQ risente della forza (7.15) che, con i versi dati, è parallela e concorde all'asse x :

$$\mathbf{F} = i \mathbf{PQ} \times \mathbf{B} = i b B \mathbf{u}_x$$

Tale forza è costante e il filo si muove di *moto uniformemente accelerato*.

Lo stesso risultato si ottiene da (7.28): per uno spostamento dx il flusso attraverso il circuito, $\Phi = \Sigma B = b x B$, varia di $d\Phi = b B dx$, viene compiuto il lavoro $dW = i b B dx$ e quindi $F = i b B$. Il flusso è positivo, perché la normale al circuito orientata secondo la regola della vite è concorde a \mathbf{B} , e aumenta nello spostamento, per cui $d\Phi$ e dW sono positivi e la forza risulta concorde all'asse x . Se la corrente avesse verso opposto \mathbf{u}_n e \mathbf{B} sarebbero discordi, il flusso sarebbe negativo, $\Phi = -b x B$, e diminuirebbe a seguito dello spostamento, quindi $d\Phi$ e dW sarebbero negativi e la forza risulterebbe discor-

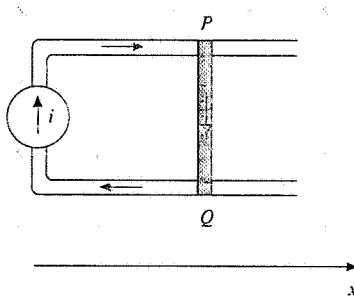


Figura 7.44

de all'asse x . È importante fare attenzione ai segni se, oltre al modulo, si vuole il verso della forza; da questo punto di vista il risultato ottenuto da (7.15) è più immediato. Osserviamo che la forza si può scrivere $F = i d\Phi / dx$, in accordo con (7.30) applicata al caso specifico. In effetti il fenomeno deriva da una traslazione, anche se solo di una parte del circuito, che comporta una variazione di flusso, pertanto siamo nel campo di validità di (7.30).

Ad ogni modo si conclude che il circuito si deforma sotto l'azione della forza magnetica e che il filo si sposta verso destra se \mathbf{u}_n e \mathbf{B} sono concordi (entrambi uscenti o entranti), mentre si sposta verso sinistra se \mathbf{u}_n e \mathbf{B} sono discordi. Si noti un fatto importante: lo spostamento sotto l'azione della forza magnetica è sempre *nel verso che fa aumentare il flusso attraverso il circuito*. Infatti lo spostamento verso destra fa aumentare l'area e quindi il flusso, che è positivo perché \mathbf{u}_n e \mathbf{B} sono concordi; ma anche nello spostamento verso sinistra il flusso, che è negativo perché \mathbf{u}_n e \mathbf{B} sono discordi, aumenta in quanto da un valore negativo tende a zero.

Il fatto notato alla fine dell'esempio appena svolto è di carattere generale: l'*azione delle forze magnetiche è sempre quella di fare evolvere il sistema, entro i limiti imposti dai vincoli, verso la configurazione in cui è massimo il flusso magnetico Φ attraverso il circuito e quindi è minima l'energia potenziale U_p* . Si verifica facilmente che tale condizione è soddisfatta in tutti i casi che abbiamo considerato, tenuto conto correttamente del segno del flusso.

Unità di misura

Dalla (7.5) si vede che l'unità di misura del campo magnetico nel sistema internazionale è

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2}$$

a questa unità si dà il nome di *tesla* e il simbolo T. Sottomultipli molto usati, anche se non standard, sono il *gauss* (G), definito da $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$, e il *chilogauss* (k G), pari a $10^3 \text{ G} = 10^{-1} \text{ T}$.

Abbiamo già detto che il campo magnetico terrestre sulla superficie terrestre è dell'ordine di 10^{-5} T , cioè 10^{-1} G . I massimi campi magnetici costanti che si è in grado di produrre attualmente utilizzando la tecnologia della *supercondutività* sono dell'ordine di 10 T . Il flusso del campo magnetico si misura in T m^2 (campo per superficie) e questa unità si chiama *weber* (Wb). Quindi

$$\text{Wb} = \text{T m}^2 \quad , \quad \text{T} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Dalla (7.29) si ha inoltre

$$\text{Wb} = \frac{\text{J}}{\text{A}} = \frac{\text{J s}}{\text{C}} = \text{V s} \Rightarrow \text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

L'unità del momento magnetico da (7.18) e (7.22) è

$$\text{A m}^2 = \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Ad esempio, la bobina di un galvanometro con $N = 10$, $\Sigma = 10 \text{ cm}^2$, $i = 50 \mu\text{A}$, ha il momento magnetico $5 \cdot 10^{-7} \text{ A m}^2$. I momenti magnetici delle correnti microscopiche atomiche e dell'elettrone sono dell'ordine di 10^{-23} A m^2 , quello del protone è dell'ordine di $5 \cdot 10^{-27} \text{ Am}^2$. Per tali momenti magnetici elementari si può usare l'unità

$$\frac{\text{eV}}{\text{T}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A m}^2$$

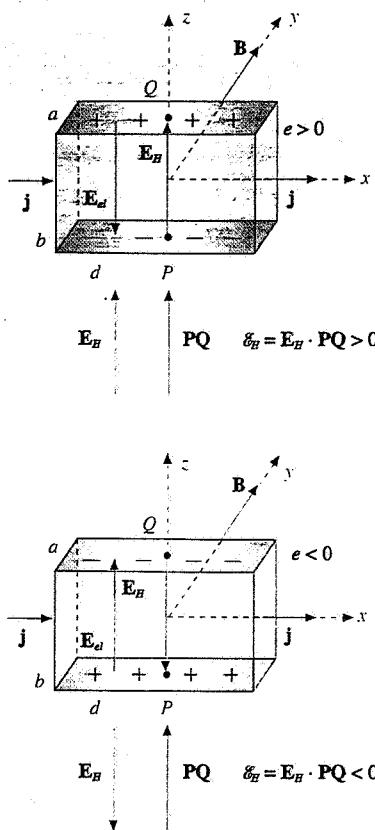


Figura 7.45

Campo di Hall

7.7 Effetto Hall

Un conduttore a forma di nastro sottile, di sezione $\Sigma = a b$, è percorso da una corrente di intensità i con verso concorde all'asse x . La densità di corrente vale, secondo (6.2, 6.5),

$$\mathbf{j} = \frac{i}{a b} \mathbf{u}_x = n e \mathbf{v}_d$$

e, come abbiamo più volte notato, ha lo stesso verso qualunque sia il segno dei portatori di carica.

Se il nastro è sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme \mathbf{B} , che assumiamo perpendicolare a \mathbf{j} e concorde all'asse y , su ciascun portatore di carica agisce la forza di Lorentz (7.5)

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$$

La struttura della formula mostra che sulla carica e agisce una forza \mathbf{F} non elettrostatica e pertanto definiamo in accordo con quanto discusso nel paragrafo 6.7 il *campo elettromotore*

$$\mathbf{E}_H = \frac{\mathbf{F}}{e} = \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{B} \quad (7.35)$$

Questo è un aspetto molto importante della forza magnetica su una carica in movimento, la quale permette in ogni caso di definire un campo elettrico di origine magnetica ovvero un *campo elettromotore* dato dalla

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.36)$$

Come verificheremo tra poco e come è vero in generale tale *campo non è conservativo*.

Nel caso in esame \mathbf{E}_H ha la direzione dell'asse z , cioè quella del lato b del nastro: il verso dipende dal segno della carica: se $e > 0$ \mathbf{E}_H è concorde all'asse z , mentre è disconcreto all'asse z se $e < 0$. Ad ogni modo \mathbf{E}_H , che è noto come *campo di Hall* dal nome del fisico che nel 1879 lo mise per la prima volta in evidenza, provoca una deflessione nel moto delle cariche, aggiungendo una componente trasversa alla velocità di deriva, e di conseguenza tende ad accumulare cariche di segno opposto sulle due facce ortogonali a \mathbf{E}_H , cioè all'asse z . Si raggiunge subito un equilibrio in quanto tale accumulo dà origine a un campo elettostatico \mathbf{E}_{el} che si oppone a un ulteriore accumulo; la condizione è

$$\mathbf{E}_H + \mathbf{E}_{el} = 0$$

In equilibrio il dispositivo si comporta come un generatore in cui non circola corrente; la *tensione* del campo \mathbf{E}_H , in base a (6.41), è

$$\mathcal{E}_H = \int_p^Q \mathbf{E}_H \cdot d\mathbf{z} = \mathbf{E}_H \cdot \mathbf{PQ} = \pm E_H b$$

con segno positivo se $e > 0$, negativo se $e < 0$. In modulo la tensione di Hall vale

$$\mathcal{E}_H = E_H b = \frac{j B b}{n e} = \frac{i B}{n e a} = \frac{B b}{n e \rho} \frac{V_A - V_B}{d} \quad ; \quad (7.37)$$

L'ultima eguaglianza si ottiene ponendo, secondo (6.26) e (6.25), $i = (V_A - V_B) / R$ e $R = \rho d / \Sigma = \rho d / a b$, con $V_A - V_B$ d.d.p. ai capi del nastro lungo d .

Il fenomeno descritto, chiamato *effetto Hall trasversale*, si presta ad alcune interessanti applicazioni. Innanzitutto dal segno di \mathcal{E}_H si può determinare il *segno dei portatori di carica*: inoltre, noti i moduli di \mathcal{E}_H e B dalla (7.37) si può ricavare la *densità di carica ne dei portatori*. Per la maggior parte dei metalli i portatori di carica risultano negativi, in accordo con l'ipotesi che siano elettroni, e la densità di carica così misurata è in buon accordo con il

Tensione di Hall

Effetto Hall

numero di elettroni di valenza per unità di volume. Vi sono però alcuni metalli bivalenti tra cui lo zinco e materiali come i semiconduttori in cui il segno di ε_H corrisponde a portatori positivi. La spiegazione di questa apparente anomalia è attribuita a una particolare modalità del moto di deriva degli elettroni in questi materiali: in sostanza gli elettroni vanno a riempire delle posizioni vuote, dette *lacune*, creando a loro volta delle lacune nelle posizioni che abbandonano; il passaggio di elettroni da una zona A neutra a una zona B con lacune e quindi positiva rende neutra la zona B e positiva la zona A e appare perciò come un moto di cariche positive nel verso opposto al moto degli elettroni. Solo con la meccanica quantistica si può dare una spiegazione completa di questi effetti.

Infine la (7.37), fornendo una relazione di proporzionalità tra la tensione ε_H e il modulo B del campo magnetico, può essere utilizzata per costruire *misuratori di campo magnetico*, detti *sonde di Hall*; la costante di proporzionalità

$$\alpha = \frac{\varepsilon_H}{B} = \frac{i}{n e a} = \frac{b(V_A - V_B)}{n e p d}$$

può essere calcolata da queste formule o meglio può essere determinata sperimentalmente introducendo la sonda in un campo magnetico di valore noto e misurando il valore della tensione di Hall.

Esempio 7.5

Un nastro di rame, lungo $d = 2$ cm e con lati $a = 0.1$ cm, $b = 1.5$ cm, è percorso dalla corrente $i = 5$ A ed è immerso in un campo magnetico uniforme di modulo $B = 1.5$ T, ortogonale al nastro. Calcolare il valore della tensione di Hall e della corrente che circola se tra i punti P e Q della figura 7.46 viene collegato un resistore con $R = 10^4 \Omega$.

Soluzione

Nel rame il numero di elettroni per unità di volume è $n = 8.49 \cdot 10^{28}$ elettroni/m³, come visto nel paragrafo 6.1. Dalla (7.37) calcoliamo la tensione di Hall:

$$\varepsilon_H = \frac{i B}{n e a} = \frac{5 \cdot 1.5}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 5.52 \cdot 10^{-7} \text{ V.}$$

La costante α sopra definita vale $3.68 \cdot 10^{-7}$ V/T.

Quando tra i punti P e Q si collega una resistenza esterna R si forma un circuito in cui il nastro di rame percorso da corrente ed immerso in campo magnetico funge da generatore. Utilizzando la simbologia del paragrafo 6.7, il campo elettrico \mathbf{E} lungo il circuito vale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_H + \mathbf{E}_{el}$ dentro il nastro, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el}$ dentro il resistore esterno, e nel generatore \mathbf{E}_H in modulo è maggiore di \mathbf{E}_{el} perché il circuito non è più aperto e le cariche accumulate possono muoversi lungo il resistore esterno: all'equilibrio statico con corrente nulla si è sostituito un equilibrio dinamico con corrente costante. La forza elettromotrice è

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} + \int_P^Q \mathbf{E}_H \cdot dz = \varepsilon_H$$

chiaramente coincidente con la tensione di Hall (e si vede che \mathbf{E}_H non è conservativo). La corrente che circola è

$$i_H = \frac{\varepsilon_H}{r + R}$$

dove r , resistenza del blocco di rame lungo l'asse z si calcola con (6.25) e in base al dato della tabella 6.1:

$$r = \rho \frac{b}{a d} = 1.28 \cdot 10^{-5} \Omega$$

Lacune

Sonda di Hall

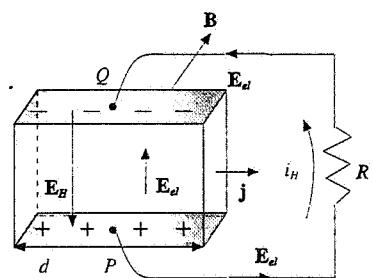


Figura 7.46

Quindi $i_H = 4.9 \cdot 10^{-3} \text{ A}$, facilmente misurabile con un milliamperometro. La d.d.p. ai capi di R , cioè tra i punti P e Q , è

$$\Delta V = \mathcal{E} - r i_H = R i_H = 4.9 \cdot 10^{-7} \text{ V}.$$

Col metodo descritto si può dalla misura di i_H e note r e R dedurre \mathcal{E}_H e quindi B ; la sensibilità della sonda in esame sarebbe $i_H / B = 3.27 \text{ mA/T}$. Una misura diretta di \mathcal{E}_H senza assorbimento di corrente è più difficile, data la piccolezza dei valori in gioco.

7.8 Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme

Esaminiamo adesso sia alcuni dispositivi che dall'analisi del moto di particelle cariche in un campo magnetico permettono di dedurre alcune proprietà delle particelle stesse che un particolare tipo di acceleratore di particelle. La legge del moto in campo magnetico è basata sulla forza (7.5) o, in caso di presenza contemporanea di un campo elettrico, sulla

Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.38)$$

espressione completa della forza agente su una particella carica, cui ci si riferisce ancora col nome di *forza di Lorentz*.

È sottinteso che il moto delle particelle considerate, di norma ioni o elettroni, si svolge all'interno di contenitori in cui è stato praticato il vuoto per evitare l'azione di disturbo degli urti con le molecole dell'aria: questi farebbero avvenire il moto con caratteristiche molto diverse da quelle prevedibili in base a (7.38).

Spettrometri di massa

Lo *spettrometro di massa* è uno strumento che separa ioni aventi la stessa carica e massa diversa o, più in generale, aventi rapporto carica su massa diverso. Esempio tipico è quello degli *isotopi*, atomi dello stesso elemento che hanno nuclei con lo stesso numero Z di protoni, ma un diverso numero N di neutroni, per cui il numero di massa $A = Z + N$ è diverso. Essi sono collocati nello stesso posto della tavola periodica (dove il nome isotopi) e hanno identiche proprietà chimiche, però avendo una differente composizione nucleare presentano differenti proprietà fisiche.

Il primo *spettrometro* di massa venne concepito da Thomson intorno al 1912; in sostanza al dispositivo con cui aveva misurato nel 1897 il rapporto e/m degli elettroni (vedi esempio 2.4) egli aggiunse un campo magnetico parallelo al campo elettrico e utilizzò come sorgente un gas rarefatto in cui ioni positivi sono prodotti tramite scariche elettriche e accelerati da una d.d.p. dell'ordine di 10^4 V , che conferisce loro una velocità v . Con riferimento alla figura 7.47 in cui i campi sono discordi, la forza elettrica $q \mathbf{E}$ causa una deviazione nel piano $y-z$ e quella magnetica $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ una deviazione nel piano $x-z$. Supponendo che gli ioni entrino nel dispositivo a $z=0$ muovendosi lungo l'asse z , per $z=L$ si ha

$$y = \frac{1}{2} \frac{q E}{m} \frac{L^2}{v^2}, \quad x = \frac{q B L^2}{2 m v}.$$

L'espressione di y è quella di un moto uniformemente accelerato, già vista nell'esempio 2.4 e da cui appunto fu determinato il rapporto e/m per gli elettroni. L'espressione di x è in realtà approssimata nell'ipotesi che il raggio di curvatura r data da (7.7) sia molto maggiore di L ; allora l'arco di circonferenza si può confondere con un arco di parabola, come se il moto fosse uniformemente accelerato, e risulta

$$x = \frac{1}{2} \frac{q v B}{m} \frac{L^2}{v^2}.$$

Valori numerici tipici possono essere $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 20 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$,

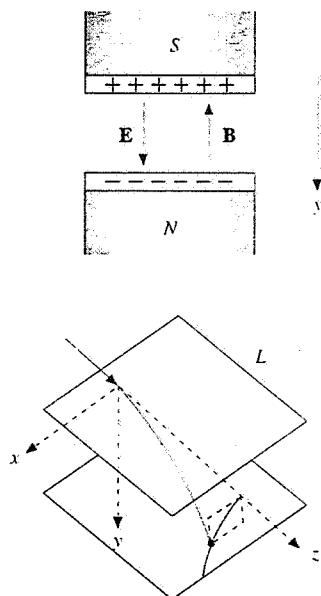


Figura 7.47

$v = \sqrt{2qV/m} = 3.1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, $B = 0.1 \text{ T}$, $r = 0.65 \text{ m}$ da paragonare con $L = 0.1 \text{ m}$, $E = 10^4 \text{ V/m}$.

Il luogo dei punti x , y all'uscita del dispositivo, o su uno schermo più distante, è una parabola: cioè, il punto d'uscita del fascetto di ioni positivi, a seconda del valore della velocità fissati gli altri parametri, si sposta lungo la parabola

$$y = \frac{2E}{L^2 B^2} \frac{m}{q} x^2 ;$$

ioni egualmente ionizzati e con masse diverse cadono su parbole diverse.

In tal modo Thomson scoprì che ioni di neon cadevano su due parbole diverse, una corrispondente a $A = 20$, l'altra a $A = 22$; inoltre dall'intensità delle tracce delle due parbole, registrata con una lastra fotografica impressionata dal deposito di energia degli ioni da essa assorbiti, dedusse che l'isotopo con massa 20 era circa 9 volte più frequente di quello con massa 22: e in effetti la media pesata con fattori 9 e 1 dà il noto valore 20.2 di A per il neon. Si capisce così l'origine dei valori di A abbastanza diversi da un numero intero: essi sono causati appunto dal fatto che un elemento si presenta come miscela di isotopi; ciascun isotopo invece ha un numero di massa A molto vicino ad un numero intero.

La scoperta di Thomson stimolò la crescita di questo campo di ricerca e vennero costruiti vari tipi di spettrometri più precisi in cui cioè, a parità di isotopi, la separazione dei punti di arrivo era più netta che nello spettrometro di Thomson. Un contributo notevole venne dato da Aston che intorno al 1920 sviluppò uno spettrometro in cui la zona di deviazione elettrica era distinta da quella di deviazione magnetica e che consentiva misure di massa con una precisione di almeno una parte su 10^4 . Aston scoprì un gran numero di isotopi e ne misurò le percentuali relative (le cosiddette abbondanze).

Uno spettrometro particolarmente adatto alla misura delle abbondanze è quello esclusivamente magnetico progettato sempre intorno al 1920 da Dempster. Gli ioni prodotti nella sorgente S passano attraverso una coppia di fenditure strette F_1 e F_2 che ne definiscono la traiettoria e tra le quali è applicata una d.d.p. V dell'ordine di 10^3 V (si veda la figura 7.48).

Spettrometro di Dempster

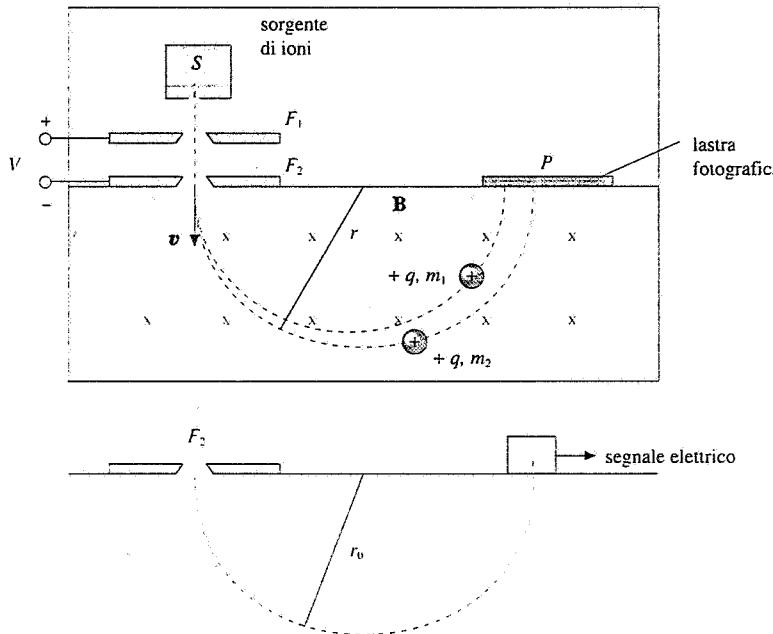


Figura 7.48

All'uscita di F_2 tutti gli ioni, indipendentemente dalla loro massa se hanno la stessa carica e considerando trascurabile la velocità iniziale, possiedono l'*energia cinetica*

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = q V \quad . \quad (7.39)$$

Si ottiene così un fascetto di *ioni isoenergetici* sottile e collimato che, dopo F_2 , entra in una regione in cui agisce solamente un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, ortogonale al disegno ed entrante nel foglio se gli ioni sono positivi come supponiamo.

Per quanto detto nel paragrafo 7.3 gli ioni descrivono una traiettoria circolare di raggio r dato da (7.7), $r = m v / q B$. A parità di energia cinetica e di carica, a masse diverse corrispondono velocità diverse e quindi raggi diversi. Ricavando v in funzione di r e sostituendo nella (7.39) si ottiene

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}, \quad r = \sqrt{\frac{2V}{B^2} \frac{m}{q}} \quad (7.40)$$

Il rapporto m/q risulta quindi determinato per i vari tipi di ioni dalla misura di r , noti il campo magnetico e la d.d.p. acceleratrice; a sua volta r è dato da $F_2 P = 2r$, detto P il punto in cui termina la semicirconferenza descritta dagli ioni.

Supponiamo che il rivelatore di posizione sia una lastra fotografica e che nel fascio di ioni siano presenti due isotopi di massa atomica A_1 e A_2 ; dalla (7.40) ricaviamo

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

e si vede che il rapporto delle masse non dipende dalla conoscenza di V e di B . D'altra parte lo spettrometro può essere tarato direttamente inviando ioni di massa A_1 nota e misurando r_1 ; per gli ioni di massa A_2 si ha

$$A_2 = \frac{A_1}{r_1^2} r_2^2 = k r_2^2$$

Ad ogni punto P della lastra fotografica corrisponde una massa atomica.

Per esempio i due isotopi del potassio ($A_1 = 39$, $A_2 = 41$) accelerati con $V = 10^3$ V acquistano, se ionizzati una volta sola, le velocità $v_1 = 7.0 \cdot 10^4$ m/s, $v_2 = 6.8 \cdot 10^4$ m/s e in un campo magnetico $B = 0.1$ T i raggi di curvatura sono $r_1 = 28.5$ cm, $r_2 = 29.1$ cm con una differenza $\Delta r = 0.6$ cm, facilmente rilevabile sulla lastra.

La (7.40) è una relazione *quadratica* tra grandezza incognita e grandezza misurata, fatto che si esprime dicendo che la *scala* dello strumento è *quadratica*. Per una data variazione dr la variazione dA è data da $2k r dr$: a parità di dr , dA è maggiore a r maggiore, cioè a masse maggiori, ovvero la sensibilità dello strumento è maggiore a masse maggiori. Abbiamo già discusso questa situazione nell'esempio 4.20 a proposito dell'*elettrometro a bilancia*.

Invece di utilizzare una lastra fotografica si può praticare una fenditura molto sottile distante $2r_0$ da F_2 , dietro la quale è posto uno strumento che misura la carica. Riescono ad entrare nello strumento, fissati V e B , solo gli ioni che descrivono una semicirconferenza di raggio r_0 fissato e quindi che hanno un ben preciso rapporto m/q . La misura in questo caso si effettua facendo variare V : sempre nel caso del potassio al crescere di V raggiungono il raggio r_0 prima gli ioni con $A = 41$ e poi quelli con $A = 39$, come si capisce da (7.40). Nella figura 7.49 è mostrato il risultato di una tale misura e si intuisce che con opportune procedure se ne può dedurre l'*abbondanza dei due isotopi* (Dempster trovò il rapporto 18:1).

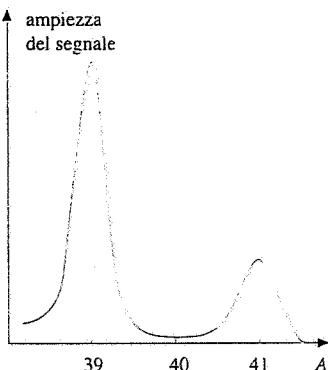


Figura 7.49

Selettore di velocità. Spettrometro di Bainbridge. Esperimento di Bucherer

Un fascio di ioni diversi con la stessa velocità, invece che con la stessa energia cinetica, si ottiene ponendo dopo la fenditura F_2 un *selettore di velocità*: si fanno agire contemporaneamente nella stessa regione un campo elettrostatico \mathbf{E} e un campo magnetico \mathbf{B} , entrambi uniformi e ortogonali tra loro, ad esempio, come in figura 7.50, uno nel piano del disegno e uno entrante nel disegno. Se i moduli sono scelti in maniera tale che

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (7.41)$$

la forza sullo ione è nulla, indipendentemente dal valore e dal segno della carica: la defles-

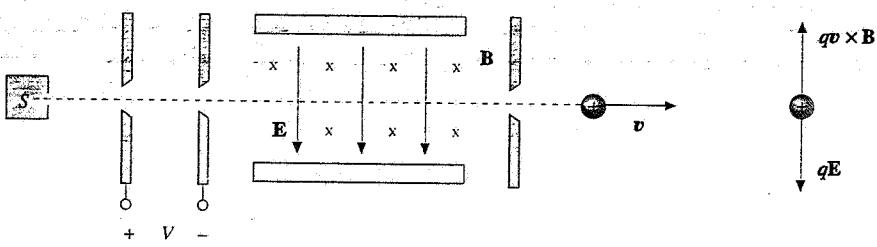


Figura 7.50

sione di uno ione in una data direzione e verso dovuta al campo elettrico è esattamente compensata dalla deflessione nella stessa direzione e in verso contrario dovuta al campo magnetico. La condizione (7.41) è verificata però solo per quegli ioni la cui velocità soddisfa alla

$$v = \frac{E}{B} \quad (7.42) \quad \text{Selettore di velocità}$$

Riassumendo, una particella carica può compiere un moto rettilineo uniforme in una regione in cui esistono un campo E e un campo B uniformi se questi sono ortogonali tra loro e alla velocità iniziale e se il modulo della velocità è eguale al rapporto dei moduli dei campi secondo (7.42); i versi dei campi devono essere tali che il prodotto $E \times B$ abbia lo stesso verso di v (vedi figura 7.51). Variando uno o entrambi i valori dei campi è possibile scegliere un determinato valore di velocità. Con $v = 10^5$ m/s e $B = 0.1$ T deve essere $E = 10^4$ V/m. Il sistema costituisce quindi un *selettore di velocità*.

Nello spettrometro di massa di Bainbridge (figura 7.52) le particelle cariche emesse dalla sorgente vengono accelerate, passano attraverso un *selettore di velocità* ed entrano in una regione in cui agisce solo un campo magnetico uniforme B_0 , come nello spettrometro di Dempster. La traiettoria è una semicirconferenza di raggio $r = m v / q B_0$ e combinando con (7.42) si ha

$$\frac{m}{q} = \frac{B_0 B}{E} r, \quad r = \frac{E}{B_0 B} \frac{m}{q} \quad (7.43)$$

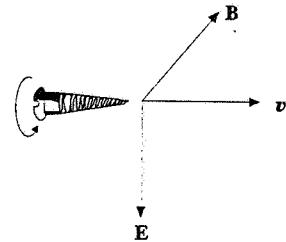


Figura 7.51

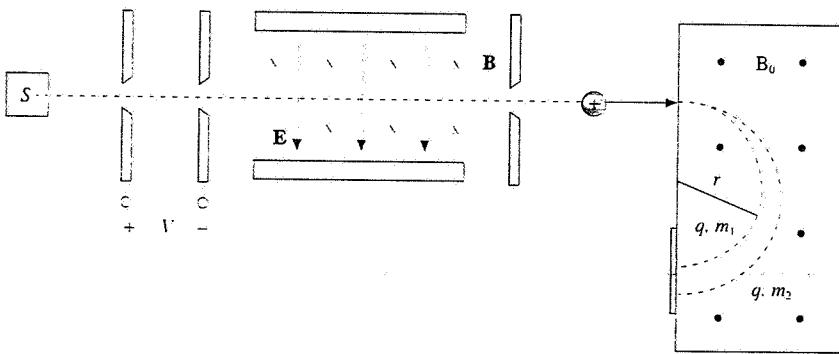


Figura 7.52

Valgono tutte le considerazioni fatte per lo spettrometro di Dempster circa l'utilizzo e la taratura se lo strumento viene impiegato per separare isotopi di uno stesso elemento e per la misura di masse di ioni in generale. È da notare che lo strumento è *lineare* in quanto la gran-

dezza m da misurare è direttamente proporzionale alla grandezza r misurata; la sensibilità è costante in tutto l'intervallo di misura.

Il rapporto e/m può essere misurato anche per gli elettroni se si utilizza come sorgente un filamento di tungsteno percorso da corrente, da cui vengono emessi elettroni per effetto termoelettronico (vedi paragrafo 6.5). Da (7.7) nella forma relativistica e da (7.42) si ha

$$r = \frac{m\gamma v}{eB_0} = \frac{m\gamma E}{eB_0 B} \quad , \quad \frac{e}{m} = \frac{\gamma E}{B_0 B r}$$

Il raggio di curvatura varia proporzionalmente a γv , se il rapporto e/m è costante; nell'esperimento si varia la velocità degli elettroni tramite la d.d.p. acceleratrice e si misura nel selettore di velocità.

Nella figura 7.53 sono rappresentati alcuni dati sperimentali tratti dalla letteratura. In funzione di v/c vediamo in particolare che il rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone resta costante, come previsto dalla teoria della relatività; il valore del rapporto è $1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$, in accordo con la prima misura eseguita da Thomson (esempio 2.4).

L'esperimento descritto venne eseguito per la prima volta da Bucherer nel 1909, quattro anni dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, e costituì così una importante verifica sperimentale della stessa. Il successivo esperimento di Millikan (paragrafo 1.8) rese possibile il calcolo preciso della massa dell'elettrone.

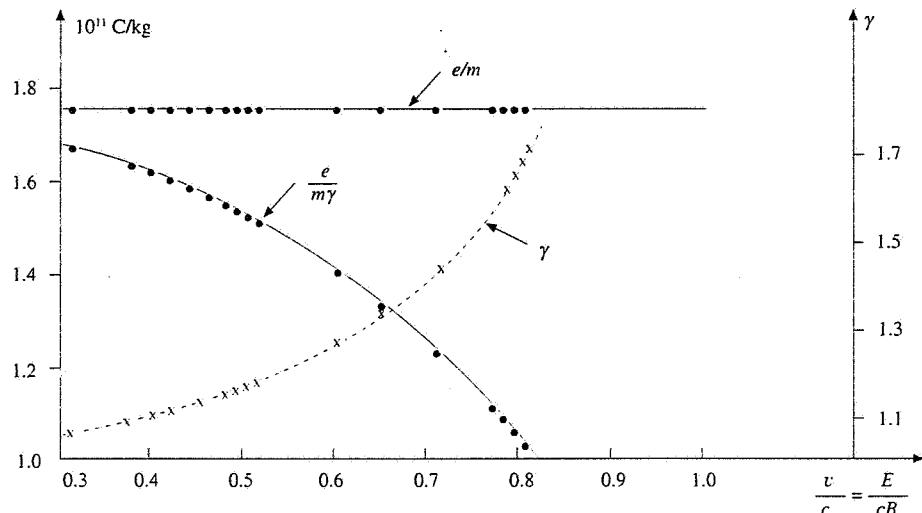


Figura 7.53

Il ciclotrone

L'accelerazione di particelle caricate tramite campi elettrostatici ha un limite posto dalla massima d.d.p. raggiungibile, che è dell'ordine di 10^7 V , come discusso nel paragrafo 6.8 in relazione al generatore di Van de Graaf.

Un metodo alternativo, realizzato nel 1934 da Lawrence e Livingstone, consiste nella ripetuta applicazione di una d.d.p. variabile. La macchina si chiama *ciclotrone* e funziona secondo lo schema seguente (figura 7.54). Tra due cavità metalliche semicilindriche, chiamate D per la loro forma a *d* maiuscola, viene applicata una d.d.p. alternata $V = V_0 \sin \omega_{RF} t$, detta *radiofrequenza*; le cavità sono immerse in un campo magnetico uniforme ad esse ortogonale.

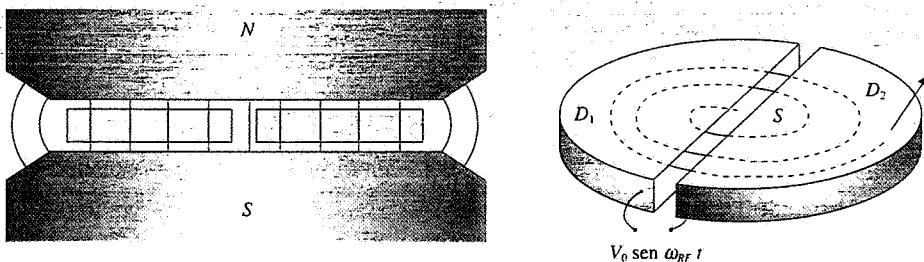


Figura 7.54

Uno ione di massa m e carica q viene iniettato nel sistema dalla sorgente S che si trova al centro e supponiamo che venga accelerato dalla d.d.p. V esistente in quell'istante tra le due D . Esso entra in D_1 , al cui interno il campo elettrico è sostanzialmente nullo, e viene deviato dalla forza di Lorentz compiendo una semicirconferenza di raggio $r_1 = m v_1 / q B$ dove v_1 è la velocità acquistata, che si determina da $1/2 m v_1^2 = q V$; dopo un tempo

$$t_1 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m}{q B}$$

lo ione esce da D_1 per entrare in D_2 . Se *nello stesso tempo* la radiofrequenza ha cambiato di segno lo ione subisce una seconda accelerazione tra D_1 e D_2 e si ha

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V = 2q V.$$

All'interno di D_2 lo ione compie una semicirconferenza di raggio $r_2 = m v_2 / q B > r_1$ nel tempo

$$t_2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_2}{v_2} = \frac{\pi m}{q B} = t_1$$

come del resto già sappiamo dal paragrafo 7.3: il *tempo (7.9) di percorrenza* di un'orbita circolare in campo magnetico *non dipende* dalla *velocità della particella*. Se intanto nel tempo t_2 la radiofrequenza ha cambiato di nuovo segno il processo di accelerazione si ripete tra D_2 e D_1 e così via.

La condizione di funzionamento è dunque che il tempo t impiegato a percorrere mezzo giro sia eguale al semiperiodo della radiofrequenza ovvero

$$T_{RF} = \frac{2\pi}{\omega_{RF}} = 2t = \frac{2\pi m}{q B} \Rightarrow \omega_{RF} = \frac{q B}{m} = \omega \quad : \quad (7.44)$$

la pulsazione ω_{RF} della radiofrequenza, detta pulsazione di ciclotrone, deve essere eguale alla velocità angolare degli ioni (7.8).

Il processo continua finché lo ione raggiunge il raggio massimo R , determinato dalle dimensioni del magnete del ciclotrone. A tale raggio corrisponde la velocità massima dello ione,

$$v_{max} = \frac{q B R}{m}$$

e quindi l'energia cinetica massima

$$E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} \quad : \quad (7.45)$$

Pulsazione di ciclotrone

Dal momento che ad ogni giro lo ione acquista l'energia cinetica $2qV$, il numero di giri per raggiungere l'energia cinetica massima è

$$N = \frac{E_{k,\max}}{2qV} = \frac{qB^2R^2}{4mV} \quad (7.46)$$

a cui corrisponde il tempo

$$t_N = \frac{2\pi m}{qB} N = \frac{\pi R^2 B}{2V} \quad (7.47)$$

A tal punto con un opportuno meccanismo il fascio di ioni accelerati viene deflesso all'esterno del ciclotrone e guidato verso la zona di utilizzazione e può avere inizio un nuovo ciclo di accelerazione; si dice che il *ciclotrone* è una macchina a funzionamento *pulsato*, cioè non continuo.

Anche questo metodo presenta una limitazione fondamentale. Al crescere della velocità delle particelle occorre usare formule relativistiche; da (7.7) risulta $\omega = qB/m\gamma$: per piccole velocità è corretta (7.44) in quanto $\gamma \approx 1$, ma quando $v \geq 0.1 c$ l'effetto di γ non si può trascurare. Riferendoci, come si fa comunemente, alla frequenza di rivoluzione, scriviamo:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m\gamma} = \frac{\nu_0}{\pi} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad (7.48)$$

Frequenza di ciclotrone

dove $\nu_0 = \omega_{RF}/2\pi = qB/2\pi m$ è la cosiddetta *frequenza di ciclotrone*. All'aumentare di v la frequenza ν diminuisce (aumenta il periodo di rivoluzione) e si perde il sincronismo con la radiofrequenza che ha la frequenza fissa $\nu_{RF} = \nu_0$. Lo ione non risente più della stessa d.d.p. acceleratrice e finisce per presentarsi nell'intercapedine tra le due D in istanti in cui la d.d.p. è di segno sbagliato, venendo decelerato.

Il valore massimo di energia cinetica raggiungibile dagli ioni risulta dell'ordine di qualche decina di MeV. Risulta inoltre che il metodo è *inapplicabile agli elettroni* i quali, avendo massa molto inferiore a quella degli ioni (1836 volte inferiore a quella del protone, che è lo ione H^+ , e ancora di più per ioni più pesanti), raggiungono molto presto velocità relativistiche.

La difficoltà descritta è stata parzialmente superata agendo su ν_{RF} che viene opportunamente diminuita durante il processo di accelerazione, in modo da seguire la variazione della frequenza di rivoluzione; a questo punto però il limite viene posto dalle dimensioni del magnete, in quanto al crescere dell'energia deve crescere R . Il più grande ciclotrone a frequenza variabile, detto *sincrociclotrone*, ha raggiunto energie di circa 600 MeV con fasci di protoni.

Per ottenere energie superiori è stato inventato un diverso sistema magnetico, utilizzato sempre in combinazione con il principio dell'orbita circolare che consente di riapplicare la d.d.p. acceleratrice; la macchina è denominata *sincrotron* e la realizzazione maggiore attualmente funzionante permette di ottenere protoni con energia di 1 TeV = 10^{12} eV (il raggio di curvatura è di circa 2 km). Accenneremo brevemente al principio costruttivo nel capitolo 9.

Esempio 7.6

Un ciclotrone ha raggio $R = 0.5$ m e campo magnetico $B = 1.3$ T e viene utilizzato per accelerare particelle α , cioè ioni He^{++} con carica $q = 2e$ e massa $m = 6.64 \cdot 10^{-27}$ kg. Calcolare l'energia cinetica massima, il numero di giri e il tempo di accelerazione; si ponga $V = 10^4$ V.

Soluzione

Da (7.45) abbiamo

$$E_{k,\max} = \frac{(2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.3 \cdot 0.5)^2}{2 \cdot 6.64 \cdot 10^{-27}} = 3.26 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 20.4 \text{ MeV}$$

L'incremento di energia per giro è $2qV = 4 \cdot 10^{-2}$ MeV; il numero totale di giri e il tempo di accelerazione, secondo (7.46) e (7.47), valgono

$$N = 510, \quad t_N = 5.1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

La frequenza di ciclotrone delle particelle α è

$$\nu_0 = \frac{qB}{2\pi m} = 9.971 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

e ν_{RF} deve essere eguale a ν_0 .

Dato che la velocità massima alla fine del ciclo è

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{k,\max}}{m}} = 3.13 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

la frequenza di ciclotrone secondo (7.48) è

$$\nu = 0.9945 \nu_0 = 9.916 \cdot 10^6 \text{ Hz},$$

ovvero

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 5.5 \cdot 10^{-3},$$

e quindi la *condizione di isocronismo* non è apprezzabilmente modificata. A rigore andrebbero usate nel calcolo di E_k e v formule relativistiche, però essendo $v^2/c^2 \ll 1$ l'approssimazione classica è sufficiente (un elettrone con 20 MeV di energia ha invece $v = 0.9997 c$).

Ricollegandoci a quanto detto all'inizio di questo paragrafo, osserviamo che il principio della riapplicazione della stessa d.d.p. non può essere esteso agli acceleratori elettrostatici: infatti il campo elettrostatico è conservativo e quindi il lavoro lungo un percorso chiuso è nullo. Se gli ioni, dopo essere stati accelerati da un dato campo, ovvero da una data d.d.p., venissero deviati con un campo magnetico per essere riportati al punto di partenza, essi dovrebbero attraversare in senso contrario la stessa d.d.p. e sarebbero decelerati fino al valore della velocità iniziale. Invece un campo elettrico variabile non è conservativo, come avremo modo di discutere in seguito, e quindi il suo integrale lungo una linea chiusa, pari a una f.e.m., può essere diverso da zero, rendendo possibile una fornitura positiva di lavoro ad ogni giro.

Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère

8.1 Campo magnetico prodotto da una corrente

Nel capitolo 7 abbiamo esposto alcune proprietà dell'interazione magnetica, sottolineando il fatto che essa si manifesta tra cariche elettriche in movimento, e abbiamo analizzato la forza su un circuito percorso da corrente partendo dalla forza di Lorentz (7.5). Seguendo un procedimento già visto in elettrostatica, la forza è espressa dal prodotto tra una grandezza caratteristica del sistema che subisce l'interazione (una carica in moto o una corrente in un circuito) e il campo **B** generato dalle sorgenti; si pensa cioè alla forza come il risultato di una interazione tra carica o corrente e campo.

In questo paragrafo ci occupiamo del legame esplicito tra il campo magnetico e le correnti che lo generano, arrivando a delle espressioni che hanno lo stesso significato di (1.16) e (1.22), relative al legame tra il campo elettrostatico e le cariche fisse che ne sono le sorgenti.

L'analisi dei primi esperimenti sulle caratteristiche del campo magnetico prodotto da correnti in conduttori filiformi indusse Laplace a formulare una legge, nota come *prima legge elementare di Laplace*, che esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo ds di filo, percorso dalla corrente i , in un punto P distante r dall'elemento di filo:

$$d\mathbf{B} = k_m i \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} = k_m \frac{i ds}{r^2} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r ;$$

\mathbf{u}_r è il versore della direzione orientata da ds a P , \mathbf{u}_r il versore tangente al filo per cui $ds = ds \mathbf{u}_r$, k_m è una costante che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo materiale in cui si sperimenta. Assumendo di operare nel vuoto, come faremo in tutto questo capitolo, nel sistema internazionale si ha

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} ,$$

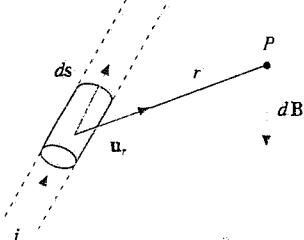


Figura 8.1

dove l'unità H/m (henry su metro) verrà giustificata alla fine del paragrafo 8.5. In realtà k_m viene sempre scritta come

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

e la costante

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (8.1)$$

è chiamata *permeabilità magnetica del vuoto*.

La *prima legge elementare di Laplace* diventa pertanto

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (8.2)$$

Permeabilità magnetica
del vuoto

Prima legge elementare
di Laplace

Il campo magnetico elementare di un tratto infinitesimo di circuito risulta proporzionale alla corrente e inversamente proporzionale al quadrato della distanza; l'orientazione di \mathbf{B} è legata al verso della corrente, cioè a \mathbf{u}_r , dalla regola del prodotto vettoriale che abbiamo già visualizzato con la *regola della vite*: una vite che avanza lungo la corrente indica con il suo verso di rotazione il verso delle linee di \mathbf{B} . Si usa spesso anche la cosiddetta *regola della mano destra*: se il pollice della mano destra, tenuta chiusa a pugno, punta nel verso della corrente, le linee di \mathbf{B} circondano la corrente nel verso indicato dalla punta delle altre dita (si veda la figura 8.2).

La formula (8.2) ha validità generale, però soltanto come strumento matematico di calcolo; valgono infatti in proposito osservazioni analoghe a quelle fatte per la seconda legge elementare di Laplace (7.13): sperimentalmente non è possibile misurare in alcun modo il contributo di un elemento infinitesimo di filo, che a sua volta non può esistere da solo.

Ciò che ha significato fisico, e si può misurare, è la sovrapposizione dei contributi (8.2), cioè l'integrale di (8.2) esteso a un circuito chiuso finito; il risultato costituisce la *legge di Ampère-Laplace*,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (8.3)$$

Legge di Ampère-Laplace

che dà in ogni punto dello spazio il campo magnetico dovuto a un circuito chiuso di forma qualunque, percorso dalla corrente stazionaria i . La (8.3), che risulta verificata sperimentalmente in ogni situazione, fornisce il legame cercato tra il campo magnetico e la corrente che lo genera, se questa circola in un conduttore filiforme, la cui sezione è tale da poter ritenere su di essa costanti tutti i parametri che compaiono in (8.3).

Più in generale, se il conduttore non è filiforme, si considera un elemento lungo ds , di sezione $d\Sigma$, percorso da una corrente di densità $\mathbf{j}(x, y, z)$; l'elemento di corrente della (8.2) si scrive

$$di ds = \mathbf{j} d\Sigma ds = \mathbf{j} d\tau$$

tenuto conto che \mathbf{j} è parallelo a ds . La (8.2) diventa

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad (8.4)$$

e integrando a tutto il volume τ in cui \mathbf{j} è diverso da zero si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad (8.5)$$

Se è nota la distribuzione delle correnti, (8.5) permette di calcolare il campo magnetico \mathbf{B} in tutto lo spazio.

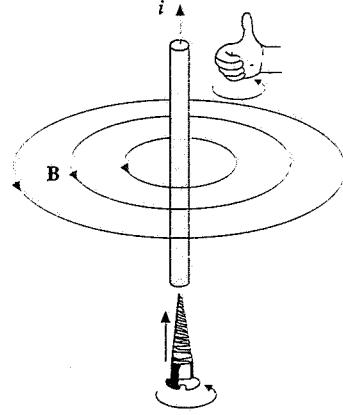


Figura 8.2

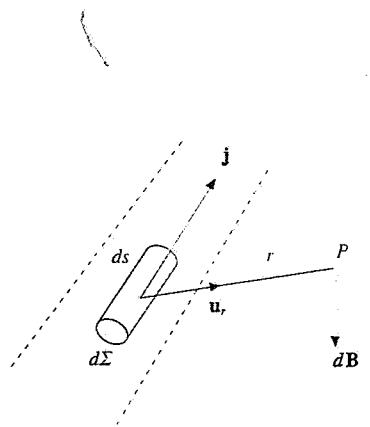


Figura 8.3

In caso di presenza di più circuiti il campo magnetico risultante si calcola sommando vettorialmente i termini (8.3) o (8.5) dovuti a ciascun circuito.

Campo magnetico prodotto da una carica in moto

Ricordiamo che la densità di corrente è legata alla velocità dei portatori di carica e al loro numero per unità di volume dalla $\mathbf{j} = n q \mathbf{v}$; sostituendo nella (8.4) abbiamo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} n d\tau$$

in cui $n d\tau$ dà il numero di cariche contenute nel volume $d\tau$ che con il loro moto producono il campo $d\mathbf{B}$. Allora il campo magnetico prodotto da una singola carica in moto è

Campo magnetico di una carica in moto

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}, \quad (8.6)$$

misurato nel sistema di riferimento in cui la carica ha la velocità \mathbf{v} .

Il campo elettrico dovuto alla carica, nello stesso punto P in cui abbiamo calcolato il campo magnetico (8.6), è

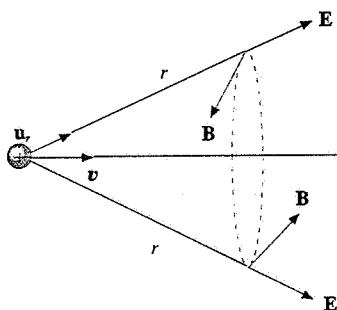


Figura 8.4

ammettendo che continui a valere la formula elettrostatica anche se la carica è in moto. Segue che possiamo scrivere

$$\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (8.7)$$

stabilendo così una stretta relazione tra campo elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto. Nella (8.7) abbiamo posto

Velocità della luce nel vuoto

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (8.8)$$

essendo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s la *velocità della luce nel vuoto*. In effetti, se prendiamo i valori (1.6) e (8.1) delle costanti ϵ_0 e μ_0 troviamo che la (8.8) è soddisfatta. Torneremo alla fine del paragrafo 8.3 su questa importante relazione.

La (8.6) è verificata finché la velocità v è trascurabile rispetto a c , più precisamente finché $(v/c)^2 \ll 1$: anche l'espressione del campo elettrico ha le stesse limitazioni.

L'interesse di (8.6) risiede nel fatto che essa mette in evidenza come il campo magnetico dipenda dal moto delle cariche, indipendentemente dalle cause che producono il moto. Quindi c'è da attendersi che non solo una corrente in un conduttore generi un campo magnetico, ma anche un moto di cariche ottenuto con altri mezzi, quali quelli meccanici impiegati nell'acceleratore di Van de Graaf (cinghia carica mobile); tratteremo questo argomento nell'esempio 8.2.

8.2 Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari

Applichiamo adesso la prima legge elementare di Laplace (8.2) ad alcune configurazioni in cui la corrente percorre un conduttore filiforme di forma semplice. In sostanza l'integrale che compare nella legge finita (8.3) è esteso ad una linea tale che il calcolo si riduca a quello di un integrale unidimensionale. Vedremo nel paragrafo 8.4 un metodo alternativo molto più semplice da applicare nei casi che presentino simmetrie.

Filo rettilineo indefinito. Legge di Biot-Savart

Consideriamo un filo conduttore rettilineo, di lunghezza $2a$, percorso dalla corrente continua i , e poniamoci sull'asse mediano del filo nel punto P distante R dal filo (vedi figura 8.5). Un elemento di filo produce in P il campo magnetico

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

Osserviamo che

$$r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$$

$$s \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -s \operatorname{tg} \theta = R \Rightarrow ds = \frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\cos \theta)}{R}$$

Il tratto di filo di lunghezza a (mezzo filo) produce quindi il campo di modulo

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos \theta_i}^0 d(\cos \theta) = -\frac{\mu_0 i \cos \theta_i}{4\pi R}$$

e il campo di tutto il filo vale, esprimendo $\cos \theta_i$ in funzione della lunghezza del filo,

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

Nel piano mediano il campo magnetico \mathbf{B} è costante su ogni circonferenza di raggio R ed è tangente a tale circonferenza. Detto \mathbf{u}_ϕ il versore tangente alla circonferenza e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite, possiamo scrivere

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \mathbf{u}_\phi \quad (8.9)$$

Facciamo ora tendere la lunghezza a all'infinito ovvero θ_i a zero e $\cos \theta_i$ a 1. La (8.9) diventa

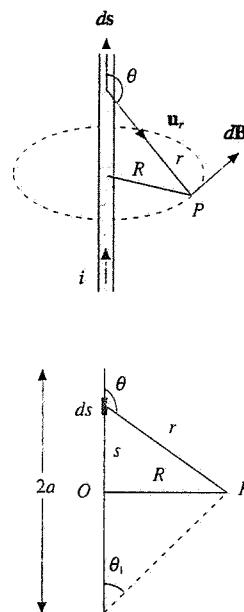


Figura 8.5

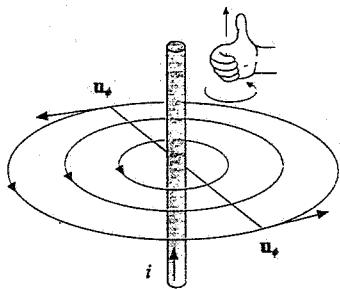


Figura 8.6

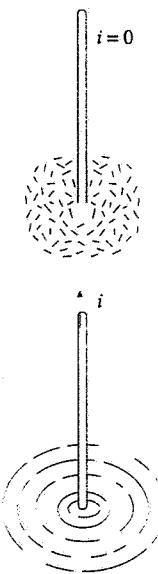


Figura 8.7

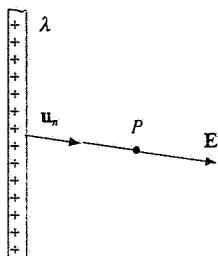


Figura 8.8

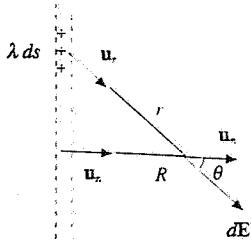


Figura 8.9

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_n \quad (8.10)$$

essendo \mathbf{u}_r il versore parallelo al filo e concorde alla corrente e \mathbf{u}_n il versore normale al filo diretto verso il punto P .

La (8.10), nota come *legge di Biot-Savart*, afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza dal filo, in modo inversamente proporzionale; le sue linee sono circonferenze concentriche al filo. La struttura delle linee di \mathbf{B} si mette facilmente in evidenza con limatura di ferro posta in un piano ortogonale al filo. Mentre in assenza di corrente non si nota una disposizione ordinata, quando nel filo passa una corrente continua i grani si addensano lungo circonferenze con centro sul filo. L'esperienza si può anche eseguire con aghi magnetici posti a eguale distanza R dal filo, che si orientano tangenzialmente a una circonferenza di raggio R (se rispetto al campo del filo si possono trascurare gli effetti del campo magnetico terrestre); invertendo il verso della corrente nel filo gli aghi ruotano di 180° .

Il filo indefinito è un sistema ideale; nella realtà si può avere un circuito con un tratto rettilineo abbastanza lungo e la (8.10) risulta verificata se ci si mette a una distanza dal filo molto inferiore alla lunghezza.

È interessante collegare il risultato (8.10) a quello visto nell'esempio 1.6, relativo al campo elettrico (1.29) prodotto da un filo rettilineo indefinito carico con densità uniforme λ :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R} \mathbf{u}_n$$

Il campo \mathbf{E} è stato ottenuto come sovrapposizione dei contributi ortogonali al filo degli elementi di filo con carica $dq = \lambda ds$ (i contributi paralleli si elidono):

$$dE = \frac{\lambda ds}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sin\theta.$$

Si può allora ipotizzare che anche il campo magnetico, il cui modulo ha la stessa struttura di quello del campo elettrico, si possa ottenere sommando contributi elementari: sostituendo $1/4\pi\epsilon_0$ con $\mu_0/4\pi$, λ con i e abbiamo

$$dB = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \sin\theta.$$

Sistemando la parte vettoriale in accordo con l'indicazione sperimentale sull'andamento delle linee di campo si ottiene (8.2).

Proprio da queste osservazioni è nata la prima legge elementare di Laplace, dimostratasi poi valida in qualsiasi circostanza.

Esempio 8.1

Calcolare il campo magnetico prodotto da una spira quadrata di lato $2a$ nei punti dell'asse della spira.

Soluzione

Ciascun lato della spira, ad esempio quello denominato 1, produce sull'asse x , normale alla spira, il campo magnetico \mathbf{B} , dato da (8.9), di modulo

$$B_1 = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}}$$

la cui componente lungo l'asse x è (vedi figura 8.10)

$$B_{1,x} = \frac{\mu_0 i a \cos \alpha}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

Il campo risultante sull'asse è

$$\mathbf{B} = 4 \mathbf{B}_{1,x} = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2}{(x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + 2a^2}} \mathbf{u}_x ,$$

avendo sostituito $x^2 + a^2$ a R^2 ; esso è parallelo all'asse x in quanto, nei punti dell'asse, le quattro componenti ortogonali si elidono. Nel centro della spira ($x = 0$) il campo magnetico è massimo e vale

$$\mathbf{B}_{\max} = \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\pi a} i \mathbf{u}_x ,$$

mentre per x tendente all'infinito il campo magnetico tende a zero.

A grande distanza dalla spira $x \gg a$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2}{x^3} \mathbf{u}_x .$$

Secondo la definizione (7.18) di momento magnetico di una spira piana, per la spira quadrata di lato $2a$ si ha

$$\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n = 4 a^2 i \mathbf{u}_n$$

e il campo magnetico sull'asse ($\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_x$) si scrive

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathbf{m}}{r^3} , \quad (8.11)$$

identico come struttura a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2 \mathbf{p}}{r^3} ,$$

campo elettrico sull'asse di un dipolo elettrico (paragrafo 2.7). Il campo magnetico sull'asse di una spira piccola (come appare se $x \gg a$) è un *campo di dipolo*.

Ritorneremo tra poco sull'argomento, ma diciamo fin d'ora che il risultato è valido per circuiti piani percorsi da corrente qualunque sia la loro forma e costituisce l'altro aspetto del *principio di equivalenza di Ampère*, secondo cui una spira e un dipolo sono equivalenti anche agli effetti del campo magnetico prodotto, oltre che delle forze subite in campo magnetico.

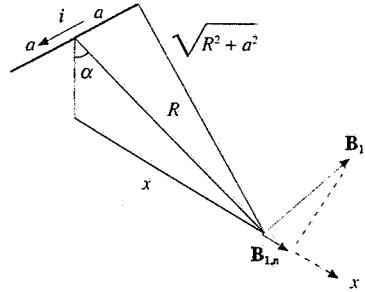
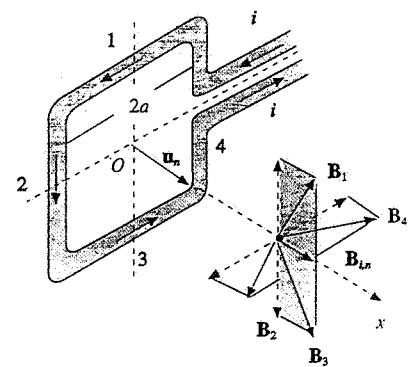


Figura 8.10

Spira circolare

Passiamo ora a calcolare il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio R , percorsa dalla corrente i . Nel punto P , distante x dal centro O della spira, un elemento ds di spira genera il campo $d\mathbf{B}$ di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{|ds \times \mathbf{u}_r|}{r^2} = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} .$$

in quanto ds e \mathbf{u}_r sono ortogonali. La componente lungo l'asse x vale

$$dB_x = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2} \cos \theta ,$$

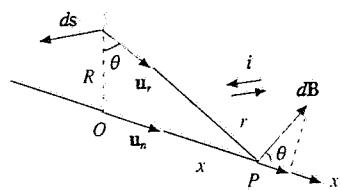


Figura 8.11

se θ è l'angolo formato da $d\mathbf{B}$ con l'asse x . Quando si considerano i contributi $d\mathbf{B}$ di tutti gli elementi ds che formano la spira, le componenti parallele all'asse si sommano, mentre quelle trasversali si elidono a due a due, per la simmetria del problema. Nei punti dell'asse della spira il campo magnetico è dunque parallelo all'asse stesso e concorde a questo se l'orientazione corrisponde a quella della corrente secondo la regola della vite. In totale

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} ds \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{r^2} 2\pi R \mathbf{u}_n ,$$

essendo $\cos\theta$ e r costanti, fissato il punto P . Posto $r^2 = x^2 + R^2$ e $\cos\theta = R/r$, si ottiene

Campo sull'asse di una spira circolare

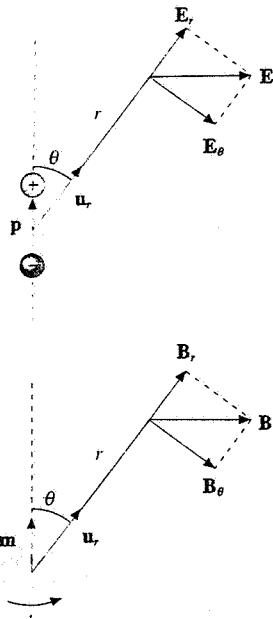


Figura 8.12

Osserviamo che \mathbf{B} ha lo stesso verso in tutti i punti dell'asse.

Nel centro della spira ($x = 0$) il campo è massimo e vale

$$\mathbf{B}_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2R} \mathbf{u}_n ; \quad (8.13)$$

per $x \rightarrow \infty$ il campo tende a zero.

Quando è soddisfatta la condizione $x \gg R$ la (8.12) diventa

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i\pi R^2}{x^3} \mathbf{u}_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \quad (8.14)$$

se indichiamo con $\mathbf{m} = i \sum \mathbf{u}_n = i \pi R^2 \mathbf{u}_n$ il momento magnetico (7.18) della spira.

Anche nel caso della spira circolare ritroviamo il risultato (8.11) già visto nell'esempio 8.1, e cioè che il campo magnetico prodotto dalla spira nei punti dell'asse ha la stessa struttura del campo elettrico prodotto da un dipolo, purché ci si ponga a una distanza molto maggiore delle dimensioni del sistema. L'analogia non è limitata ai punti dell'asse, ma si trova che in generale l'andamento del campo magnetico \mathbf{B} della spira è identico a quello del campo elettrico \mathbf{E} di un dipolo, così che valgono le espressioni (2.61)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{r^3} (2 \cos\theta \mathbf{u}_r + \sin\theta \mathbf{u}_\theta) \quad (8.15)$$

in cui sono messe in evidenza la componente radiale e la componente trasversa, e (2.62)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \mathbf{m}] \quad (8.16)$$

in cui il campo \mathbf{B} è dato come somma di una componente radiale e di una componente antiparallela al momento magnetico \mathbf{m} ; il verso di \mathbf{m} è legato a quello della corrente dalla solita convenzione.

Come nel caso del filo rettilineo i risultati possono essere verificati osservando con la limatura di ferro gli spettri magnetici oppure analizzando le linee di campo con un piccolo ago magnetico; si trova confermato pienamente il postulato di equivalenza di Ampère.

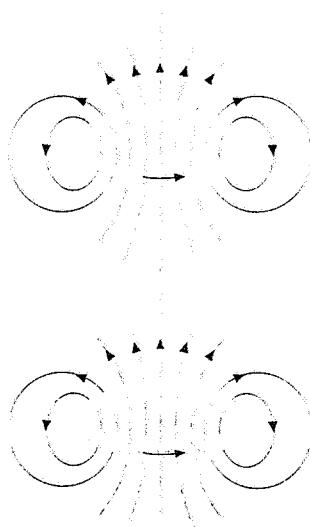


Figura 8.13

Se in un punto distante r da una spira di momento magnetico \mathbf{m}_1 , lungo la direzione orientata individuata dal versore \mathbf{u}_r , viene posta una seconda spira di momento magnetico \mathbf{m}_2 , l'*energia potenziale magnetica* si scrive seguendo (2.72):

$$U_p = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u}_r)] \quad (8.17)$$

La simmetria dell'espressione di U_p rispetto a \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 indica che (8.17) descrive l'*interazione mutua dipolo-dipolo nel caso magnetico*.

Per calcolare la *forza di interazione* tra due dipoli o il *momento* rispetto ad un asse di rotazione si utilizzano le (7.32), (7.33)

$$\mathbf{F} = -\nabla U_p = \nabla (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1), \quad M_\theta = -\frac{\partial U_p}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1) \quad (8.18)$$

Valgono in particolare casi analoghi a quelli visti nel paragrafo 2.9 con riferimento alle figure 2.59 e 2.60.

Esiste però una differenza sostanziale tra le linee del campo elettrico di un dipolo elettrico e del campo magnetico di una spira nelle immediate vicinanze del sistema: le prime escono o entrano nelle cariche sorgenti, le seconde sono *continue senza inizio o fine* (si veda la figura 8.14). La struttura delle linee del campo elettrico dipolare è in accordo con la proprietà che la circuitazione di \mathbf{E} lungo una qualsiasi linea chiusa sia nulla; invece se prendiamo un percorso chiuso coincidente con una delle linee del campo \mathbf{B} di una spira circolare ci accorgiamo che il campo è sempre equiverso lungo tale linea e quindi la sua circuitazione non può essere nulla. Questa differenza non è legata al caso particolare, ma è una proprietà fondamentale del campo magnetico, come vedremo nel paragrafo 8.4: si trova qui il limite del principio di equivalenza di Ampère, dovuto sostanzialmente alla non esistenza dei dipoli magnetici.

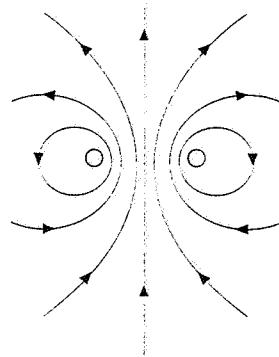
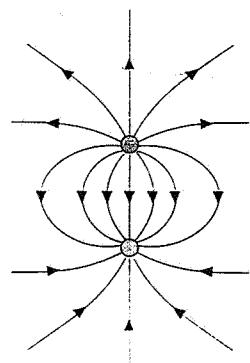


Figura 8.14

Esempio 8.2 Disco di Rowland

Un disco di raggio $R = 20$ cm possiede una carica elettrica distribuita uniformemente con densità $\sigma = 10^{-6}$ C/m² e ruota intorno al proprio asse compiendo $N = 200$ giri al secondo. Calcolare il campo magnetico prodotto sull'asse del disco a una distanza $x = 1$ cm dal centro O .

Soluzione

La carica dq che si trova nella corona circolare compresa tra i raggi r e $r + dr$ vale

$$dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr ;$$

a causa della rotazione abbiamo una corrente equivalente

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi\sigma r dr = \omega\sigma r dr ,$$

essendo T il periodo e ω la velocità angolare del moto di rotazione. Tale spira di raggio r produce in un punto P dell'asse distante x dal centro il campo magnetico (8.12)

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Il campo magnetico totale si ottiene integrando (ad esempio per parti) tra zero e R , considerando cioè il disco formato da infinite spire infinitesimali, e risulta

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{2x^2 + r^2}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left[\frac{2x^2 + R^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right] - 2x .$$

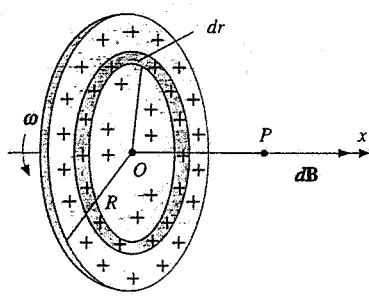


Figura 8.15

Se $x^2 \ll R^2$, come è nel nostro caso, il campo magnetico si può approssimare con l'espressione

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$$

Numericamente, essendo $\omega = 2\pi N = 4\pi \cdot 10^2$ rad/s,

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2}{2} = 1.58 \cdot 10^{-10} \text{ T.}$$

Questo campo è molto piccolo rispetto al campo magnetico terrestre, che è dell'ordine di 10^{-5} T, per cui la sua rivelazione pone notevoli problemi sperimentali. Tuttavia la misura fu eseguita da Rowland nel 1878 e mise in evidenza per la prima volta che gli effetti magnetici prodotti da un corpo carico in moto non differiscono qualitativamente da quelli delle correnti elettriche.

Solenoide rettilineo

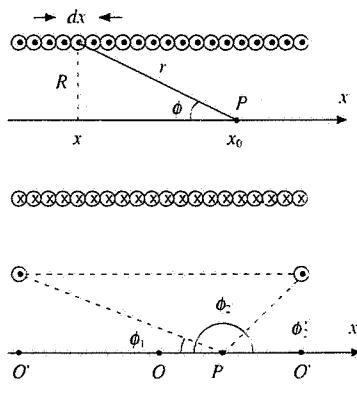


Figura 8.16

Un solenoide rettilineo è costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo. Sia d la lunghezza del solenoide, R il raggio, N il numero totale di spire, $n = N/d$ il numero di spire per unità di lunghezza; se queste sono abbastanza fitte, così da poterle considerare distribuite con continuità, nel tratto dx ci sono $n dx$ spire. Il valore del campo magnetico in un punto P sull'asse si calcola con la formula (8.12) del campo di una spira percorsa dalla corrente $n i dx$:

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n}{2r^3} dx ;$$

esso è parallelo all'asse x ed è legato al verso della corrente dalla regola della vite. Introducendo la variabile ϕ come in figura 8.16 si vede che

$$r \sin \phi = R , \quad x - x_0 = -R \operatorname{ctg} \phi , \quad dx = \frac{R d\phi}{\sin^2 \phi} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 n i}{2} \sin \phi d\phi .$$

Il campo magnetico nel punto P si ottiene sommando su tutte le spire ovvero integrando da ϕ_1 a ϕ_2 :

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2') ,$$

in cui ϕ_1 e $\phi_2' = \pi - \phi_2$ sono gli angoli sotto cui sono viste da P le spire terminali del solenoide.

Misurando x rispetto al centro del solenoide si ha

$$B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left[\frac{d+2x}{\sqrt{(d+2x)^2 + 4R^2}} + \frac{d-2x}{\sqrt{(d-2x)^2 + 4R^2}} \right] . \quad (8.20)$$

Il campo magnetico è massimo al centro del solenoide ($x = 0$), dove vale

$$B_0 = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}} ; \quad (8.21)$$

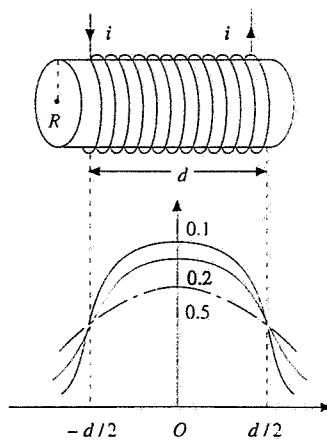


Figura 8.17

esso decresce simmetricamente rispetto al centro mantenendo su tutto l'asse lo stesso verso. Nel centro di una spira estrema, ad esempio quella di destra, $x = d$,

$$\phi_2' = \pi/2, \cos\phi_2' = 0, \cos\phi_1 = d/\sqrt{d^2 + R^2} \text{ e quindi}$$

$$B_o = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}} \quad (8.22)$$

In particolare, se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio ($d \gg R$), dal centro O le due spire terminali vengono viste sotto angoli quasi nulli, per cui $\cos\phi_1 = \cos\phi_2' = 1$ e il campo magnetico in O vale

$$B_\infty = \mu_0 n i \quad , \quad (8.23)$$

risultato che si ottiene anche direttamente da (8.21); nel centro O' delle spire terminali da (8.22) si ha $B_{O'} = \mu_0 n i / 2 = B_\infty / 2$.

Nella figura 8.17 è riportato l'andamento del campo magnetico sull'asse del solenoide per vari valori del rapporto R/d . Quando tale rapporto è molto piccolo, al limite nullo (caso del solenoide indefinito), la zona in cui il campo magnetico ha all'incirca il valore B_∞ è piuttosto estesa; essa si restringe al crescere di R/d e contemporaneamente diminuisce il valore al centro, mentre si estende la regione all'esterno in cui c'è campo magnetico apprezzabilmente diverso da zero. È interessante notare, in vista di applicazioni che faremo nel capitolo 9, che la variazione dB/dx del campo magnetico sull'asse è massima in prossimità delle facce terminali del solenoide.

Le linee del campo \mathbf{B} prodotto da un solenoide, mostrate in figura 8.18, sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico.

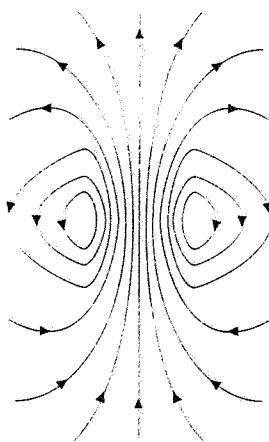
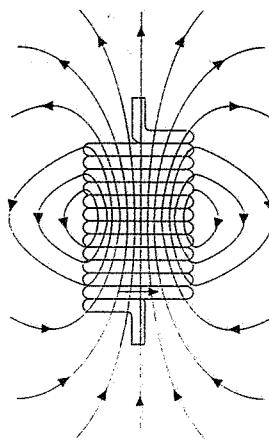


Figura 8.18

Nota. Il campo magnetico terrestre (2)

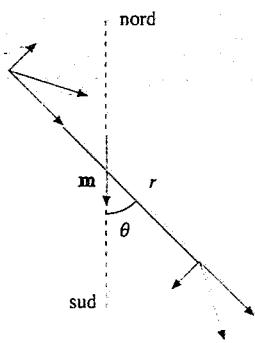
Nella nota alla fine del paragrafo 7.2 abbiamo accennato alle caratteristiche del campo magnetico terrestre. Alla luce di quanto stabilito adesso per il campo di una spira, possiamo dire che le componenti del campo magnetico terrestre sulla superficie terrestre ($r = R_T = 6370$ km) sono, in accordo con (8.15).

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos\theta}{R_T^3} \quad , \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{R_T^3} \quad ,$$

m è il valore del momento magnetico del dipolo equivalente, sorgente del campo magnetico terrestre, detto *momento di dipolo geomagnetico*. Nell'emisfero nord B_r è negativa (punta verso la superficie terrestre) mentre è positiva nell'emisfero sud, confermando l'orientazione dal nord geografico al sud geografico del momento di dipolo m . Il valore di m si ricava dalla misura delle componenti del campo; ad esempio, all'angolo $\theta = 105^\circ$ rispetto all'asse del dipolo geomagnetico queste hanno il valore

$$B_r = -2.16 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad , \quad B_\theta = 4.04 \cdot 10^{-5} \text{ T} \Rightarrow m = \frac{4\pi B_r R_T^3}{2\mu_0 \cos\theta} = \frac{4\pi B_\theta R_T^3}{\mu_0 \sin\theta} = 1.08 \cdot 10^{23} \text{ Am}^2.$$

All'equatore magnetico ($\theta = \pi/2$), $B_r = 0$ e $B_\theta = \mu_0 m / 4\pi R_T^3 = 4.18 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, diretta dal sud al nord geografico (vedi figura 8.19): nei poli magnetici ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$) $B_\theta = 0$ e B_r vale in modulo $9.36 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. I poli magnetici distano circa 2000 km dai rispettivi poli geografici.



Si ritiene che le sorgenti del campo magnetico terrestre siano *correnti convettive* di ioni ed elettroni nel nucleo liquido della terra. Il fenomeno è legato anche al moto di rotazione: pianeti come Giove che ruotano più rapidamente della terra presentano un campo magnetico maggiore.

Diciamo infine che il campo magnetico terrestre non è costante nel tempo: vi sono variazioni periodiche dovute all'influenza del sole e della luna sui moti convettivi nel nucleo terrestre. Inoltre la posizione dei poli varia lentamente nel tempo: l'analisi di rocce ferromagnetiche di origine vulcanica ha rivelato che la direzione del campo magnetico terrestre si è invertita diverse volte nell'ultimo milione di anni.

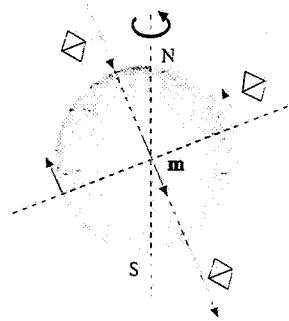
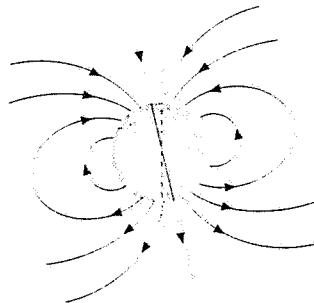


Figura 8.19 (Nota)

Forza tra due circuiti

8.3 Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente

Calcoliamo ora la forza tra due circuiti percorsi da corrente, partendo dalle leggi elementari di Laplace (7.13) e (8.2). Detti ds_1 e ds_2 gli elementi di filo dei due circuiti e i_1 , i_2 le rispettive correnti, la forza $d\mathbf{F}_{1,2}$ agente sull'elemento ds_2 a causa del campo magnetico $d\mathbf{B}_1$ prodotto da ds_1 nel posto in cui si trova ds_2 è

$$d\mathbf{F}_{1,2} = i_2 ds_2 \times d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times \mathbf{u}_1)}{r^2}$$

La forza esercitata da ds_2 su ds_1 è data da

$$d\mathbf{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{ds_1 \times (ds_2 \times \mathbf{u}_2)}{r^2}$$

Non è difficile trovare situazioni particolari in cui $d\mathbf{F}_{1,2} \neq -d\mathbf{F}_{2,1}$, in contrasto con il principio di azione e reazione; il fatto tuttavia non è preoccupante in quanto, come è stato notato, le leggi elementari di Laplace, considerate a sé, non si applicano a sistemi fisicamente realizzabili.

La forza risultante tra i due circuiti si ottiene con una doppia integrazione estesa ai due circuiti che tiene conto di tutte le coppie di elementi ds_1 e ds_2 tra i quali si esercitano le forze $d\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{ds_2 \times (ds_1 \times \mathbf{u}_1)}{r^2}, \quad \mathbf{F}_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{ds_1 \times (ds_2 \times \mathbf{u}_2)}{r^2}. \quad (8.24)$$

Se ricordiamo la regola (3.35)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

l'integrale che compare in $\mathbf{F}_{1,2}$ si trasforma in

$$\oint_1 \oint_2 \frac{(ds_2 \cdot \mathbf{u}_1) ds_1}{r^2} - \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_1 \cdot ds_2) \mathbf{u}_1}{r^2}$$

Scrivendo $\mathbf{u}_1 / r^2 = -\nabla(1/r)$, il primo termine

$$\oint_1 \left[\oint_2 \frac{ds_2 \cdot \mathbf{u}_1}{r^2} \right] ds_1 = - \oint_1 \left[\oint_2 \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot ds_2 \right] ds_1$$

è nullo in quanto la circuitazione di un gradiente è sempre nulla.

Pertanto, dato che $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$ e che gli integrali si possono scambiare,

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_1 \cdot ds_2) \mathbf{u}_1}{r^2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(ds_2 \cdot ds_1) \mathbf{u}_2}{r^2} = -\mathbf{F}_{2,1} : \quad (8.25)$$

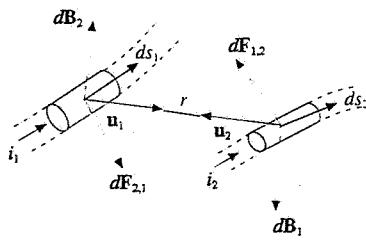


Figura 8.20

la forza tra i due circuiti obbedisce al principio di azione e reazione.

Esaminiamo in particolare due fili rettilinei molto lunghi e abbastanza vicini, così da poter essere considerati indefiniti, percorsi dalle correnti i_1 e i_2 . Se essi sono ortogonali la (8.25) dice subito che la forza è nulla ($ds_1 \cdot ds_2 = 0$ ovunque). Se essi sono paralleli sempre da (8.25) si vede che nel caso le correnti siano *equiverse* (ds_1 concorde a ds_2) la forza è *attrattiva*: $\mathbf{F}_{1,2}$ ha il verso di $-\mathbf{u}_1$, $\mathbf{F}_{2,1}$ di $-\mathbf{u}_2$; se invece le correnti sono *discordi* la forza è *repulsiva*. Per il calcolo del modulo, detta r la distanza tra i fili, da (8.10) si ha che il campo magnetico del primo filo nei punti del secondo è $B_1 = \mu_0 i_1 / 2\pi r$; su un tratto finito del secondo filo di lunghezza d si esercita allora la forza (7.15)

$$F_{1,2} = B_1 i_2 d = \frac{\mu_0 i_1 i_2 d}{2\pi r}$$

Per unità di lunghezza la forza subita dal secondo filo ad opera del primo vale

$$F_a = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r} \quad (8.26)$$

ed è evidentemente eguale a quella subita dal primo filo ad opera del secondo.

L'undicesima Conferenza Internazionale di pesi e misure ha deciso nel 1960 di adottare come *grandezza elettrica fondamentale* l'intensità di corrente, definendone l'unità di misura in base a (8.26): ha l'*intensità di 1 A quella corrente che circolando in due fili rettilinei paralleli distanti $r = 1 \text{ m}$ dà luogo a una forza $F = \mu_0 / 2\pi = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N per metro di ciascun conduttore}$* . Si osservi che tale definizione fissa in pratica il valore di k_m ovvero fissa per la permeabilità magnetica del vuoto μ_0 il valore $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. Dalla (8.8), nota la velocità della luce nel vuoto, resta di conseguenza fissata ε_0 .

Esempio 8.3 Elettrodinamometro assoluto a bilancia

Due spire circolari di raggio $R = 30 \text{ cm}$ aventi lo stesso asse sono poste in piani paralleli orizzontali distanti $a = 3 \text{ mm}$. La spira superiore è appesa al giogo di una bilancia. Se nelle spire circola nello stesso verso la stessa corrente $i = 1 \text{ A}$, per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa m che ora determiniamo. Il rapporto tra la distanza a e la lunghezza $2\pi R$ delle spire vale $1.6 \cdot 10^{-3}$: esso è molto piccolo e le due spire possono essere trattate come fili paralleli indefiniti. Tra di esse agisce allora la forza attrattiva

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi a} 2\pi R = \frac{\mu_0 R i^2}{a}$$

e l'equilibrio viene ristabilito se $F = mg$, cioè con una massa

$$m = \frac{\mu_0 R i^2}{a g} = 1.28 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 1.28 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

La forza e quindi la massa sono molto piccole e la misura si presenta difficile e con errori notevoli. A parità di corrente la forza aumenta se le due spire sono sostituite da due bobine compatte con n spire ciascuna: la geometria resta la stessa, ma la forza aumenta di un fattore n^2 . Già con $n = 10$ spire la massa diventa 1.28 g. più facile da determinare con elevata precisione.

In ogni caso, fissato il valore di μ_0 lo strumento permette di misurare la corrente attraverso misure di grandezze meccaniche; la scala è *quadratica*, come nell'elettrometro a bilancia (esempio 4.20).

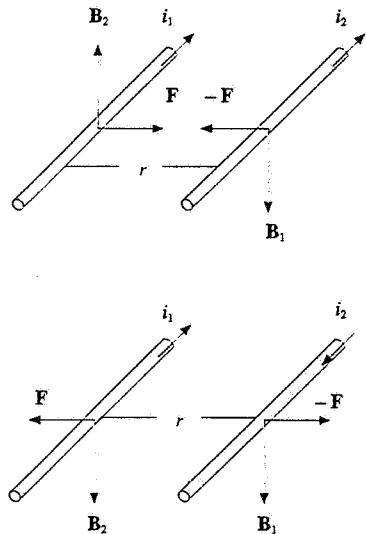


Figura 8.21

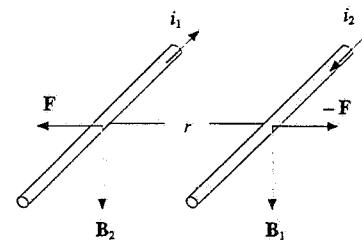
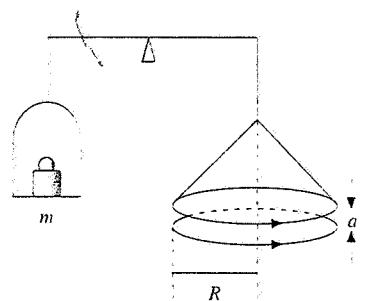


Figura 8.22



Nota. I fattori 4π nelle definizioni di ϵ_0 e μ_0

Detti k_e e k_m i coefficienti nelle espressioni delle forze tra due cariche e tra due correnti, vale la relazione

$$c^2 = k_e / k_m ,$$

come si vedrà quando deriveremo dalle equazioni di Maxwell l'esistenza delle onde elettromagnetiche. Le definizioni

$$k_e = 1 / 4\pi \epsilon_0 , \quad k_m = \mu_0 / 4\pi$$

trasformano la suddetta relazione nella (8.8), $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$.

Numericamente i valori delle grandezze elettriche e magnetiche non cambiano, però è diverso l'aspetto delle formule se si utilizzano k_e e k_m al posto di ϵ_0 e μ_0 . Ad esempio la legge di Gauss diventa

$$\Phi(\mathbf{E}) = 4\pi k_e q$$

e i campi elettrici nei casi a simmetria sferica, cilindrica e piana si scrivono rispettivamente

$$\mathbf{E} = \frac{k_e q}{r^2} \mathbf{u}_r , \quad \mathbf{E} = \frac{2k_e \lambda}{r} \mathbf{u}_r , \quad \mathbf{E} = 4\pi k_e \sigma \mathbf{u}_n .$$

Analogamente la legge di Biot-Savart (8.10) e il campo magnetico (8.23) all'interno di un solenoide rettilineo indefinito si scrivono

$$\mathbf{B} = \frac{2k_m i}{r} \mathbf{u}_p , \quad \mathbf{B} = 4\pi k_{mn} i \mathbf{u}_n .$$

Risulta che i fattori 4π o 2π non compaiono nelle forme relative a simmetrie circolari, dove i campi variano come $1/r^2$ o $1/r$, ma si ritrovano nei campi costanti, dove le linee di campo sono rettilinee.

È da questo fatto che nacque la proposta di *razionalizzare* l'elettromagnetismo, sostituendo a k_e e k_m rispettivamente $1/4\pi \epsilon_0$ e $\mu_0 / 4\pi$, con il che le formule assumono l'aspetto che abbiamo visto finora, con i fattori 4π e 2π presenti nei problemi in cui l'angolo solido e l'angolo piano hanno rilevanza, ma assenti negli altri casi. Alla razionalizzazione delle formule si accompagnò l'adozione del cosiddetto sistema Giorgi di unità di misura o *sistema m k s A razionalizzato*, in cui le unità fondamentali erano il *metro*, il *chilogrammo*, il *secondo* e l'*ampere*. Aggiungendo a queste le altre unità *Kelvin*, *mole* e *candela* si formò il *sistema internazionale*.

Osserviamo infine che la scelta del valore numerico di μ_0 e quindi di ϵ_0 fissa arbitrariamente i valori della costante dielettrica e della permeabilità magnetica dello spazio vuoto; l'effetto dei mezzi materiali è misurato rispetto a queste dalla *costante dielettrica relativa* e dalla *permeabilità magnetica relativa* (capitolo 9), i cui valori invece sono intrinseci e non dipendono dal sistema di unità di misura, essendo definiti tramite rapporti.

8.4 Legge di Ampère

Il legame tra le correnti e il campo magnetico da esse prodotto, che è dato dalle formule (8.3) e (8.5), può essere espresso attraverso un particolare integrale eseguito sul campo magnetico, così come avviene nel caso elettrostatico con la legge di Gauss (3.8).

Cominciamo col considerare un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i , che produce il campo magnetico (8.10), e scriviamo il prodotto scalare tra il campo \mathbf{B} e un generico vettore infinitesimo ds posto nello spazio circostante il filo, a distanza r da questo:

L'integrale da B a A lungo la circonferenza risulta da (8.15), in cui poniamo $m = i\pi R^2$,

$$\int_B^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A B_\theta r d\theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi r^3} i\pi R^2 \sin\theta r d\theta = -\frac{\mu_0 i R^2}{4r^2} \int_1^{-1} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^2} .$$

Se $r \gg R$ il contributo del tratto rettilineo vale $\mu_0 i$, mentre quello del tratto curvilineo si annulla. Se invece la condizione $r \gg R$ non è soddisfatta, non possiamo utilizzare l'espressione (8.15) per il campo fuori dell'asse e non è così facile verificare (8.27), che però continua sempre a valere.

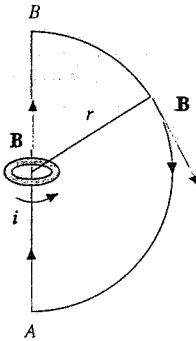


Figura 8.27

Esempio 8.5 Filo rettilineo indefinito

Un filo rettilineo indefinito di raggio R è percorso da una corrente di intensità i . Calcolare il campo magnetico prodotto dal filo in funzione della distanza r dall'asse del filo.

Soluzione

La simmetria assiale del problema indica che il modulo del campo magnetico può dipendere solo dalla distanza dall'asse del filo, cioè $B = B(r)$; questo fatto, insieme alla direzione e verso dati dalla prima legge elementare di Laplace, dice che le linee del campo \mathbf{B} sono circonferenze con centro sull'asse del filo e poste in piani ortogonali al filo. Ad una di queste circonferenze con raggio $r > R$ applichiamo la (8.27):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ,$$

che è la legge di Biot-Savart (8.10); la corrente i è proprio quella che percorre il filo, concatenata dalla circonferenza prescelta. È interessante osservare che il campo magnetico all'esterno del filo non dipende dal raggio R del filo ed è eguale a quello di un filo a sezione trascurabile, coincidente con l'asse del filo.

Consideriamo adesso nella regione interna al filo una circonferenza analoga alla precedente, ma di raggio $r < R$: le considerazioni di simmetria sono le stesse, però la corrente concatenata, nell'ipotesi che la densità sia uniforme sulla sezione e valga $j = i/\pi R^2$, è

$$i(r) = j \pi r^2 = i \frac{r^2}{R^2} .$$

Dalla legge di Ampère

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2 = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \quad 0 \leq r \leq R . \quad (8.30)$$

Il modulo del campo \mathbf{B} è nullo sull'asse, cresce linearmente col raggio all'interno, è continuo per $r = R$ e decresce come $1/r$ all'esterno.

Se il filo fosse cavo, simile a una superficie cilindrica di spessore trascurabile, il campo magnetico all'esterno sarebbe sempre lo stesso, ma all'interno sarebbe nullo, come si prova facilmente con gli stessi argomenti usati finora.

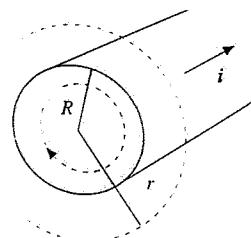


Figura 8.28

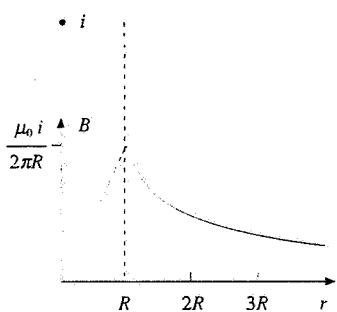


Figura 8.29

Esempio 8.6 Solenoide rettilineo indefinito

Ricavare dalla legge di Ampère il campo magnetico prodotto da un solenoide rettilineo indefinito.

Soluzione

Dato che il sistema è indefinito e si suppone che la densità delle spire sia costante, il campo magnetico in ogni punto dell'asse, oltre ad essere parallelo all'asse, deve avere

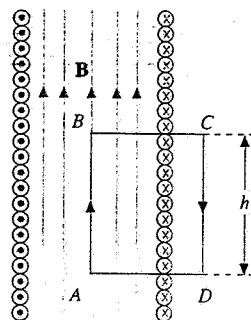


Figura 8.30

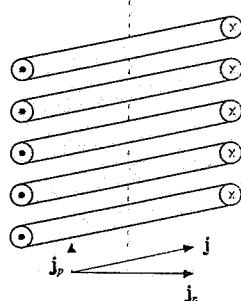


Figura 8.31

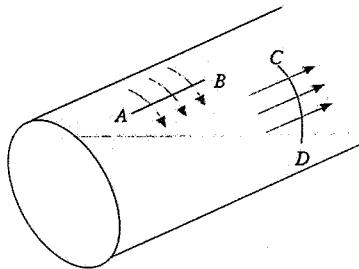


Figura 8.32

lo stesso valore. Più in generale il valore del campo nei punti di una data sezione deve essere eguale al valore nei punti corrispondenti di qualsiasi altra sezione, cioè non ci possono essere variazioni delle caratteristiche di \mathbf{B} lungo il solenoide purché le spire siano addossate. Una conseguenza di ciò è che, se prendiamo una scatola cilindrica coassiale al solenoide e situata tutta all'interno, il flusso \mathbf{B} entrante da una base è eguale a quello uscente dall'altra; siccome in totale il flusso attraverso la superficie della scatola è nullo, deve essere nullo quello uscente dalla superficie laterale, qualunque sia il raggio della scatola. Ciò può avvenire solo se \mathbf{B} è parallelo alla superficie laterale (se non lo fosse in un punto non lo sarebbe in nessun altro) e concludiamo che \mathbf{B} è parallelo all'asse anche nei punti fuori dall'asse. Le linee di campo sono dunque tutte confinate all'interno del solenoide e il campo all'esterno è nullo.

Fatte queste premesse si consideri il percorso chiuso ABCD della figura 8.30: la corrente concatenata è $n h i$, se n è il numero di spire per unità di lunghezza, e l'unico contributo alla circuitazione viene dal tratto AB in quanto negli altri tratti il campo magnetico o è ortogonale al percorso o è nullo.

Da (8.27) abbiamo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B h = \mu_0 n h i \Rightarrow B = \mu_0 n i ,$$

che è la (8.23). Il risultato non cambia se il tratto AB non coincide con l'asse e quindi il *campo magnetico all'interno di un solenoide rettilineo indefinito è ovunque uniforme*: esso è parallelo all'asse del solenoide, orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite, e il modulo dipende dalla corrente e dalla densità delle spire, ma non dal raggio delle stesse.

In un solenoide di lunghezza finita questa situazione è approssimativamente vera nella zona intorno al centro, tanto meglio quanto minore è il rapporto tra raggio e lunghezza del solenoide. Come per gli altri casi di estensione infinita il solenoide indefinito è un caso ideale non fisico, utile come punto di riferimento per i calcoli.

Notiamo infine il fatto seguente: nella pratica l'*avvolgimento* di un solenoide è necessariamente disposto secondo un'elica cilindrica, per cui il moto delle cariche può essere pensato come *sovraposizione* di un moto circolare e di un moto rettilineo parallelo all'asse del solenoide, moti che si svolgono su una superficie cilindrica di raggio R , coincidente con la superficie del solenoide. Se prendiamo un tratto AB come in figura 8.32, esso è attraversato da una corrente che si può esprimere come prodotto di una *densità lineare di corrente* j_n (misurata in A/m) per la distanza AB; si noti che nella (8.23) il termine ni ha proprio questo significato di densità lineare di corrente, corrente che percorre n spire disposte sulla lunghezza di un metro. Analogamente il tratto CD è attraversato da una corrente di densità lineare j_p e passando ai vettori la densità lineare di corrente del solenoide è $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_p$. Ciascuna densità è proporzionale alla velocità delle cariche e il loro rapporto vale

$$\frac{j_p}{j_n} = \frac{v_p}{v_n} = \frac{p}{2\pi R}$$

in quanto nello stesso tempo in cui viene compiuta una circonferenza di raggio R c'è un avanzamento della quantità p , pari al passo dell'elica. Se il solenoide è indefinito la componente j_n dà luogo al campo magnetico di modulo $B_0 = \mu_0 j_n$ all'interno e nullo all'esterno che abbiam finora considerato. La componente j_p equivale a una corrente distribuita lungo una superficie cilindrica (vedi esempio 8.5 alla fine) e dà luogo a un campo nullo all'interno e pari all'esterno a quello di un filo indefinito percorso dalla corrente $j_p 2\pi R$.

$$B = \frac{\mu_0 j_p 2\pi R}{2\pi r} = \mu_0 j_p \frac{R}{r} = \mu_0 \frac{j_n p}{2\pi R} \frac{R}{r} = B_0 \frac{p}{2\pi r} .$$

Normalmente p è molto minore di R e a maggior ragione di r , per cui B / B_0 è molto minore di 1: quantitativamente l'effetto descritto non è rilevante.

Esempio 8.7 Solenoide toroidale

Un solenoide toroidale è costituito da N spire avvolte attorno ad una superficie a forma di ciambella (*toroide*). Calcolare il campo magnetico se nel sistema circola la corrente i .

Soluzione

La simmetria del problema suggerisce che le linee del campo magnetico all'interno del solenoide siano circonferenze con centro sull'asse del toroide e che il modulo di \mathbf{B} dipenda solo dalla distanza r dall'asse. Applicando (8.27) a una tale circonferenza di raggio r si ha

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \mu_0 N i ,$$

in quanto la linea di integrazione concatena tutte le N spire. Quindi

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} .$$

Il campo magnetico è variabile come $1/r$ all'interno della sezione del toroide; solo se la differenza tra i valori massimo e minimo di r è piccola rispetto al raggio medio r_m , si può assumere che \mathbf{B} sia uniforme in modulo nel toroide.

All'esterno, se le spire sono compatte, il campo può essere considerato nullo; in realtà, a causa del fatto che l'avvolgimento è disposto come un'elica, c'è una componente della densità di corrente che avanza lungo il toroide e che agli effetti magnetici equivale alla corrente in una spira di raggio circa pari a r_m , per cui c'è campo magnetico all'esterno, anche se piuttosto debole.

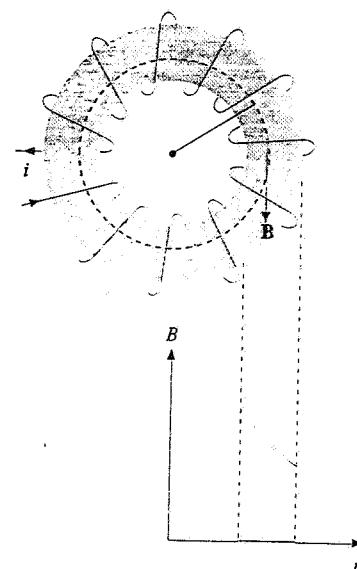


Figura 8.33

Esempio 8.8 Corrente piana indefinita

Molti fili rettilinei indefiniti sono disposti uno accanto all'altro su una superficie piana. Calcolare il campo magnetico da essi prodotto se ciascuno è percorso dalla corrente i .

Soluzione

Chiamiamo n il numero di fili per metro e quindi ni è il numero di ampere/metro che passa attraverso una linea ortogonale ai fili, cioè la densità lineare di corrente j_s (vedi esempio 8.6). Il sistema potrebbe essere realizzato anche con una *lastra conduttrice continua*.

Considerando il sistema indefinito nelle due dimensioni il campo magnetico deve avere necessariamente la disposizione mostrata in figura 8.35 (se la corrente è uscente), cioè essere ovunque parallelo al piano della corrente con i versi indicati: questo perché ogni filo produce un campo in accordo con la legge di Biot-Savart e il campo in un dato punto P può essere pensato come la somma dei campi dovuti a infinite coppie di fili simmetrici rispetto a P : per ogni coppia le componenti parallele si sommano e quelle ortogonali si elidono.

La legge di Ampère applicata al percorso chiuso $ABCD$, con $AB = h$, dà

$$2Bh = \mu_0 n i h ;$$

infatti i contributi alla circuitazione vengono solo dai tratti AB e CD . Segue

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} = \frac{\mu_0 j_s}{2}$$

in modulo, mentre vettorialmente si ha nelle due regioni

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j_s}{2} \mathbf{u}_x , \quad \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \mathbf{u}_x . \quad (8.32)$$

Il risultato non dipende dalla posizione dei tratti AB e CD e in conclusione una corren-

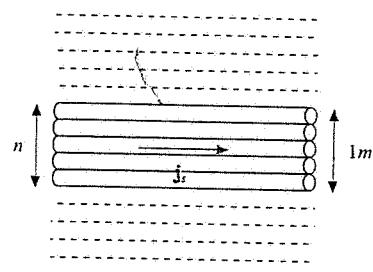


Figura 8.34

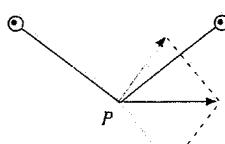
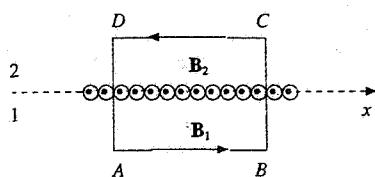


Figura 8.35

te piana indefinita produce un campo magnetico uniforme da ciascuna parte, parallelo al piano e ortogonale alle linee di corrente. Detto \mathbf{u} , il versore concorde a \mathbf{j} , e \mathbf{u}_n un versore ortogonale al piano, diretto dalla corrente al punto in cui si calcola il campo, le (8.32) si riuniscono nell'espressione

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n . \quad (8.33)$$

Anche se la corrente piana indefinita non è fisicamente realizzabile, ci si trova in pratica nella situazione descritta quando si considera un punto molto vicino a una corrente superficiale, che localmente appare piana e molto estesa.

L'argomento trattato, con la caratteristica discontinuità del campo \mathbf{B} nel passaggio attraverso una sorgente piana indefinita, ricorda quanto visto per il campo \mathbf{E} di una distribuzione piana di carica (esempi 1.8 e 3.4), pur essendo nei due casi diversa la direzione del campo; ritorneremo su questa proprietà nel paragrafo 8.6.

L'esame degli esempi visti ci porta a una considerazione già fatta per gli analoghi casi elettrostatici: malgrado la legge elementare indichi una dipendenza tipo $1/r^2$ del modulo del campo magnetico con la distanza, la composizione dei vari contributi può portare a dipendenze diverse. Nei casi a simmetria cilindrica il modulo del campo varia come $1/r$, nei casi a simmetria rispetto ad un piano si ha un campo uniforme (naturalmente le linee di campo sono completamente diverse per \mathbf{E} e \mathbf{B}). Solo come curiosità citiamo il caso di simmetria radiale, che si otterrebbe con linee di corrente che divergono radialmente da un punto; in qualsiasi punto il contributo di tutti gli elementi di corrente si elide e il campo magnetico risulta nullo.

8.5 Flusso tra circuiti. Autoflusso

Il campo magnetico \mathbf{B}_1 generato da un circuito percorso dalla corrente i_1 determina un certo flusso magnetico $\Phi_{1,2}$ attraverso un qualsiasi altro circuito presente nella regione in cui agisce \mathbf{B}_1 . Mettendo insieme la definizione di flusso e la (8.3) si ottiene

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left(\oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{ds_1 \times \mathbf{u}_r}{r^2} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_2 ,$$

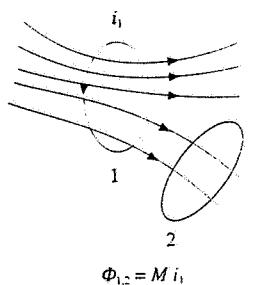
dove Σ_2 è una *qualsiasi superficie* che si appoggia sul secondo circuito, r è la distanza dall'elemento ds_1 del primo circuito all'elemento di area $d\Sigma_2$ e \mathbf{u}_r è il versore della direzione orientata \mathbf{r} . L'espressione del flusso può essere riscritta sinteticamente

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1 .$$

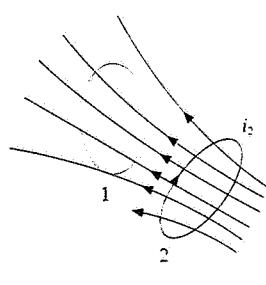
conglobando in $M_{1,2}$ tutti i *fattori geometrici* e l'eventuale dipendenza dalle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti; il flusso prodotto dal primo circuito e che attraversa il secondo è proporzionale alla corrente i_1 che scorre nel primo circuito. In modo analogo si trova che

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2 .$$

Nel paragrafo 8.7 tramite il potenziale vettore e nel capitolo 10 tramite un ragionamento energetico dimostreremo che $M_{1,2} = M_{2,1} = M$: M si chiama *coefficiente di mutua induzione* tra i due circuiti e dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posi-



$$\Phi_{1,2} = M i_1$$



$$\Phi_{2,1} = M i_2$$

Figura 8.36

Coefficiente
di mutua induzione

zione relativa, oltre che dalle proprietà magnetiche del mezzo; esso è costante soltanto se i circuiti sono indefiniti e fissi uno rispetto all'altro. Possiamo dunque scrivere

$$\Phi_{1,2} = M i_1, \quad \Phi_{2,1} = M i_2, \quad (8.34) \quad \text{Flusso concatenato}$$

come espressioni del *flusso concatenato* con un circuito dovuto al campo magnetico di un altro circuito.

Esempio 8.9

Due solenoidi rettilinei indefiniti sono coassiali: il primo ha n_1 spire per unità di lunghezza e sezione Σ_1 , il secondo ha n_2 spire per unità di lunghezza e sezione $\Sigma_2 > \Sigma_1$. Calcolare il coefficiente di mutua induzione per unità di lunghezza.

Soluzione

Calcoliamo $\Phi_{1,2}$. Il primo solenoide produce il campo $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$ al suo interno, mentre all'esterno $B_1 = 0$: il flusso concatenato con il secondo solenoide è quello che attraversa la parte della sezione Σ_2 che coincide con Σ_1 . Quindi, nell'unità di lunghezza del secondo solenoide, che presenta n_2 spire,

$$\Phi_{1,2} = n_2 \Sigma_1 B_1 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_1 \Rightarrow M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 .$$

Per calcolare $\Phi_{2,1}$ osserviamo che il campo $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$ produce attraverso n_1 spire del primo solenoide di sezione Σ_1 il flusso

$$\Phi_{2,1} = n_1 \Sigma_1 B_2 = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 i_2 \Rightarrow M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_1 .$$

Si capisce da questo esempio che è importante non tanto la sezione geometrica del circuito attraverso cui si calcola il flusso, quanto quella parte su cui il campo è diverso da zero; cioè, come è ovvio, è la *geometria del flusso* che interessa.

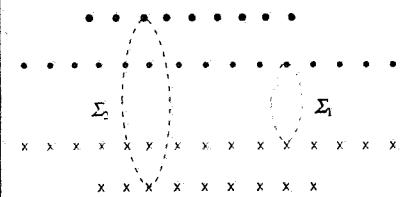


Figura 8.37

Esempio 8.10

Un filo rettilineo indefinito coincide con l'asse di un solenoide toroidale avente N spire di sezione Σ , pari ad un rettangolo di lati a, b ; il raggio interno del toroide è R . Calcolare il coefficiente di mutua induzione del sistema.

Soluzione

Il filo indefinito produce il campo magnetico $B = \mu_0 i / 2\pi r$, ortogonale a ciascuna spira del solenoide. Il flusso attraverso una spira è

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_R^{R+b} \frac{a dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

e quindi il coefficiente di mutua induzione è

$$M = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R} .$$

Se invece partiamo dal campo del solenoide, dato da (8.31), il flusso di questo concatenato col circuito di cui fa parte il filo, che immaginiamo completato da un tratto molto lontano dal sistema, coincide col flusso attraverso una spira del solenoide toroidale, in quanto il campo esterno del solenoide è praticamente trascurabile. Si ritrova pertanto la stessa espressione di M .

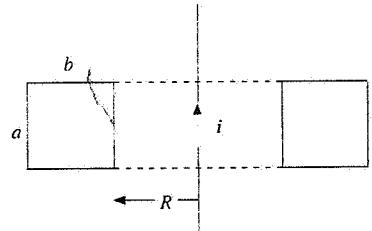


Figura 8.38

Negli esempi trattati è stato semplice verificare che $M_{1,2} = M_{2,1}$; in altri casi la verifica potrebbe essere molto difficile. Se nell'esempio 8.10 invece del filo indefinito avessimo una spira di forma qualunque, il calcolo di $\Phi_{2,1}$ (dal solenoide alla spira) sarebbe identico, ma quello di $\Phi_{1,2}$ (dalla spira al solenoide) sarebbe proibitivo. In un calcolo di M conviene quindi esaminare attentamente il problema e, sfruttando il fatto che si hanno a disposizione due possibilità di calcolo, scegliere quella analiticamente più accessibile.

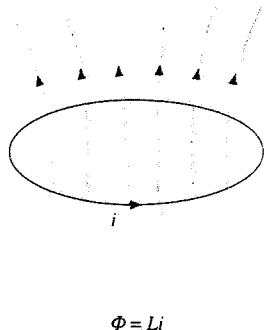


Figura 8.39

Coefficiente di autoinduzione

Autoflusso

Il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso il circuito stesso, detto *autoflusso del circuito*, che si scrive con ovvio significato dei simboli

$$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

Mettendo in evidenza la corrente, l'espressione dell'autoflusso è

$$\Phi = Li \quad (8.35)$$

dove il fattore L si chiama *coefficiente di autoinduzione* del circuito. Esso dipende dalla forma del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo ed è costante se il circuito è indeformabile.

Esempio 8.11

Calcolare il coefficiente di autoinduzione di un solenoide toroidale e di un solenoide rettilineo indefinito (in quest'ultimo caso per unità di lunghezza).

Soluzione

Per il solenoide toroidale, se N sono le spire, Σ la sezione e R il raggio medio, si può scrivere

$$\Phi = N \Sigma B = N \Sigma \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 \Sigma}{2\pi R}$$

Questo è vero se il campo si può considerare uniforme sulla sezione; altrimenti bisogna conoscere la forma della sezione ed eseguire l'integrale del flusso, come si è visto nell'esempio 8.10. Con un solenoide toroidale appunto di quel tipo si avrebbe

$$\Phi = N \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 N^2 a i}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+b}{R}$$

Nel caso del solenoide rettilineo di sezione Σ si ha, per unità di lunghezza,

$$\Phi = n \Sigma B = n \Sigma \mu_0 n i \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \Sigma \quad (8.36)$$

Quando si calcola l'autoflusso il versore normale alla superficie Σ è orientato rispetto al verso della corrente nel circuito secondo la regola della vite per cui il flusso attraverso Σ è positivo: in altre parole il coefficiente di autoinduzione L si assume sempre positivo. Diverso è il caso di M : normalmente si assume M positivo se il flusso concatenato dal primo circuito al secondo ha lo stesso segno dell'autoflusso.

flusso del secondo circuito; la questione diventa rilevante solo in presenza di flussi variabili nel tempo.

In effetti, le espressioni dei flussi tramite i coefficienti di mutua induzione e di autoinduzione, che abbiamo introdotto adesso come applicazioni delle formule che danno il campo magnetico prodotto da un circuito, risulteranno molto utili nel capitolo 10, quando tratteremo i fenomeni legati alle variazioni del flusso magnetico nel tempo.

Unità di misura

I coefficienti M e L sono dati come rapporto tra un flusso magnetico e una corrente; la loro unità di misura pertanto è

$$\frac{\text{weber}}{\text{ampere}} = \frac{\text{volt secondo}}{\text{ampere}} = \text{ohm secondo}$$

A tale unità si dà il nome di *henry*, simbolo H. Nel paragrafo 8.1 abbiamo visto che l'unità di μ_0 è Tm/A = Wb/Am e quindi ora giustifichiamo l'uso di H/m. Sono molto usati i sottomultipli

$$\text{millihenry} \quad mH = 10^{-3} \text{ H} \quad \text{microhenry} \quad \mu\text{H} = 10^{-6} \text{ H.}$$

Ad esempio, il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza di un solenoide rettilineo con $n = 10^3$ spire/metro e $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$ è, secondo (8.36), $L = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 4 \pi \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$. In generale, quando si opera nel vuoto o in mezzi non ferromagnetici, M e L sono piuttosto piccoli. Vedremo nel capitolo 9 come si abbia un notevole incremento di M e L quando i circuiti sono avvolti su materiali ferromagnetici.

8.6 Proprietà del campo magnetostatico nel vuoto

Le caratteristiche dell'interazione magnetica nel vuoto dovuta a correnti stazionarie, ovvero della *magnetostatica* come comunemente si dice, sono riassunte dalle *proprietà integrali* (8.27) e (7.2)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad , \quad \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad ,$$

cui corrispondono le *proprietà locali*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (8.37)$$

dette *equazioni di Maxwell della magnetostatica*.

Il campo magnetico ha dunque la proprietà di essere sempre *solenoidale*, ma non è *irrotazionale*. Questa circostanza non rende possibile definire in modo univoco un potenziale scalare magnetico da cui derivare il campo attraverso l'operazione di gradiente, come discuteremo nel paragrafo 8.7.

L'espressione esplicita più generale del campo magnetico dovuto a una distribuzione di correnti è la (8.5) che riportiamo,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau \quad , \quad (8.5)$$

e dalla quale si ricava (8.3) nel caso di conduttori filiformi.

Equazioni di Maxwell della magnetostatica

Il campo magnetico è solenoidale

La compatibilità tra (8.5) e (8.37) si dimostra applicando gli operatori rotore e divergenza alla (8.5). Utilizzando la $\mathbf{u}_r / r^2 = -\nabla(1/r)$ abbiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{\tau} \mathbf{j} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{j} \cdot \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = 0 ;$$

infatti ∇ può essere portato sotto il segno di integrale e scambiato con \mathbf{j} (cambiando il segno del prodotto misto) ottenendo il rotore di un gradiente che è sempre nullo. In modo analogo, anche se abbastanza più complicato, si dimostra che se \mathbf{B} è dato da (8.5) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$.

Accanto alle proprietà del campo magnetico va posta, per completare il quadro, la formula della forza subita da una carica in campo magnetico, cioè la *forza di Lorentz* (7.5):

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

Discontinuità del campo magnetico

Nel paragrafo 3.3 abbiamo visto che il campo elettrostatico è discontinuo nell'attraversamento di una superficie carica. Analogamente dimostriamo adesso che il campo magnetico è discontinuo nell'attraversamento di una superficie sede di una corrente con densità lineare j_s . Presi due punti P e Q molto vicini alla superficie, che quindi localmente appare pianata, il campo magnetico dovuto alla corrente superficiale nei punti P e Q è dato da (8.32). A questo campo in generale si sovrappone un campo magnetico \mathbf{B} dovuto ad altre sorgenti, che nei punti P e Q molto vicini tra loro ha lo stesso valore. Il campo magnetico totale nei punti P e Q è pertanto diverso:

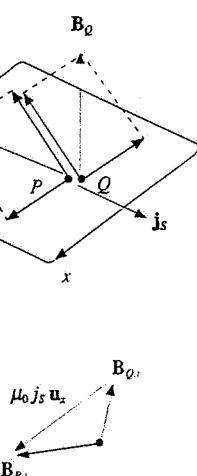


Figura 8.40

La discontinuità è data da

$$\mathbf{B}_P - \mathbf{B}_Q = \mu_0 j_s \mathbf{u}_x \quad (8.38)$$

ed è tangente alla superficie e ortogonale alle linee di corrente. Quindi la *componente normale del campo magnetico non varia nell'attraversamento della superficie sede di corrente mentre varia, in modulo e in direzione, la componente tangenziale*, come mostrato in figura 8.40.

La costanza della componente normale si prova facilmente anche applicando la legge di Gauss (7.2) a una scatola cilindrica con le basi parallele alla superficie e la superficie laterale infinitesima, seguendo un procedimento che abbiamo visto più volte.

Il risultato generale (8.38) si trova verificato in alcuni degli esempi precedenti. Alla fine dell'esempio 8.5 è stato considerato un tubo cavo percorso da una corrente i longitudinale: per $r < R$ $B = 0$, mentre appena all'esterno $B = \mu_0 i / 2\pi R$, tangente al tubo e ortogonale alle linee di corrente. In questo caso $i / 2\pi R$ è proprio la densità lineare di corrente e la discontinuità di \mathbf{B} passando dall'interno all'esterno è $\mu_0 j_s \mathbf{u}_o$, in accordo con (8.38) in quanto \mathbf{u}_o è ortogonale a \mathbf{j}_s come \mathbf{u}_x .

Anche in un solenoide rettilineo indefinito passando dall'esterno all'interno il campo varia di $\mu_0 n i = \mu_0 j_s$ e la discontinuità è ortogonale alle linee di corrente.

In questi casi semplici in cui \mathbf{B} è ortogonale a \mathbf{j}_s ed è esclusivamente tangenziale la discontinuità si calcola direttamente applicando la legge di Ampère (8.27) ad

un percorso chiuso rettangolare che giace in un piano ortogonale a \mathbf{j}_s , come nella figura 8.35:

$$B_1 h + B_2 h = \mu_0 j_s h$$

Essendo da una parte $B_1 = 0$, dall'altra in modulo $B_2 = \mu_0 j_s$ e vettorialmente $\mathbf{B}_2 = \mu_0 j_s \mathbf{u}_\phi$; $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ è in accordo con (8.38).

8.7 Potenziale vettore

Il fatto che il rotore del campo magnetico sia proporzionale alla densità di corrente e quindi non sia identicamente nullo, ovvero che la circuitazione di \mathbf{B} sia diversa da zero quando la linea di integrazione concatena una corrente, non permette di definire un potenziale scalare magnetico come invece è stato possibile in elettrostatica, dove $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Con riferimento alla figura 8.42, in cui sono considerati tre cammini dal punto P al punto Q e un circuito percorso da corrente, si ha

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,2} &= \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 + \int_Q^P (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_{-2} = 0 \Rightarrow \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 = \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_2 \\ \Gamma_{1,3} &= \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 + \int_Q^P (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_{-3} = \mu_0 i \Rightarrow \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_1 = \mu_0 i + \int_P^Q (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s})_3\end{aligned}$$

L'integrale di linea di \mathbf{B} dal punto P al punto Q è diverso a seconda del percorso considerato e non può essere posto eguale alla differenza tra i valori che una funzione V scalare univoca della posizione assume in Q e in P : lungo percorsi come 1 e 2 ΔV avrebbe sempre lo stesso valore, ma lungo percorsi come 3 a tale valore andrebbe aggiunto $k \mu_0 i$, con $k = 1, 2, \dots$ a seconda che il percorso giri una o più volte intorno alla corrente i . Fissato arbitrariamente il valore $V(P)$, $V(Q)$ non è univocamente definito, ma può assumere infiniti valori differenti tra loro di multipli interi della quantità $\mu_0 i$.

Il campo magnetico soddisfa però alla condizione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e ciò vuol dire che esso può sempre essere espresso come *rotore* di un altro vettore \mathbf{A} , detto *potenziale vettore*:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.39) \quad \text{Potenziale vettore}$$

Infatti, se applichiamo nella (8.39) l'operatore divergenza ad entrambi i membri troviamo un risultato identicamente nullo in quanto la divergenza di un rotore è sempre nulla (si veda il paragrafo 3.6). Le componenti di \mathbf{B} si ricavano per derivazione dalle componenti di \mathbf{A} , ad esempio applicando le (2.50) in coordinate cartesiane o le (2.57) in coordinate cilindriche.

La definizione (8.39) non determina completamente il potenziale vettore: infatti se consideriamo un nuovo campo vettoriale

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla S \quad (8.40)$$

dove S è una funzione scalare arbitraria, abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla S = \nabla \times \mathbf{A}$$

e quindi il campo magnetico derivato da \mathbf{A}' è eguale a quello derivato da \mathbf{A} . Il *potenziale vettore* è dunque *definito a meno del gradiente di una funzione scalare arbitraria*.

Questa parziale indeterminazione di \mathbf{A} può essere sfruttata per impostare una condizione che tornerà utile tra breve. Calcolando la divergenza di (8.40) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla S) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 S ;$$

se allora si sceglie S in modo che soddisfi all'equazione $\nabla^2 S + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, risulta $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. In altre parole, se abbiamo un certo potenziale vettore \mathbf{A} e si sceglie la funzione S in modo tale da soddisfare alla $\nabla^2 S = -\nabla \cdot \mathbf{A}$, il potenziale vettore $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla S$ è a divergenza nulla. Tutto ciò è possibile senza che cambi il campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$.

Pertanto la definizione completa di potenziale vettore del campo magnetico è

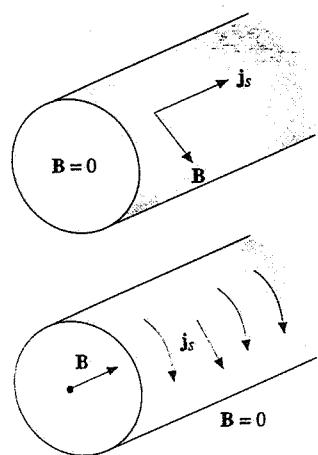


Figura 8.41

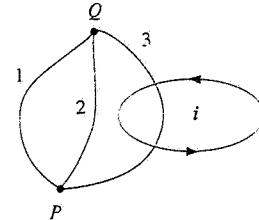


Figura 8.42

campo \mathbf{B} direttamente con (8.5) oppure con l'operazione di rotore sul potenziale vettore (8.44). È difficile dire a priori quale sia il metodo più semplice per calcolare \mathbf{B} perché in entrambi i casi devono essere eseguite integrazioni vettoriali. Ad ogni modo risulta chiaro che il significato concettuale di \mathbf{A} è la ragione del nome potenziale vettore.

Il potenziale vettore è utilizzato soprattutto in applicazioni più avanzate. Vediamo tuttavia che esso ci permette di dimostrare in modo semplice che $M_{1,2} = M_{2,1}$ (paragrafo 8.5). Mettiamo insieme (8.46) e (8.45) nei due casi:

$$\Phi_{1,2} = \oint_2 \mathbf{A}_{1,2} \cdot d\mathbf{s}_2 = \oint_2 \left(\oint_1 \frac{\mu_0 i_1 d\mathbf{s}_1}{4\pi r_{1,2}} \right) \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r_{1,2}},$$

$$\Phi_{2,1} = \oint_1 \mathbf{A}_{2,1} \cdot d\mathbf{s}_1 = \oint_1 \left(\oint_2 \frac{\mu_0 i_2 d\mathbf{s}_2}{4\pi r_{2,1}} \right) \cdot d\mathbf{s}_1 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{2,1}}.$$

I due integrali all'ultimo membro sono eguali perché $r_{1,2} = r_{2,1}$ e perché il risultato non dipende dall'ordine con cui è sviluppato il calcolo; ma allora

$$\Phi_{1,2} / i_1 = M_{1,2} = \Phi_{2,1} / i_2 = M_{2,1}.$$

Calcoli di \mathbf{A} in casi particolari

Due campi magnetici con andamento semplice che abbiamo già visto più volte sono quello di un solenoide rettilineo indefinito e quello di un filo rettilineo indefinito. Vogliamo determinare le corrispondenti espressioni del potenziale vettore.

Cominciando dal solenoide ricordiamo che, detto z l'asse del solenoide, il campo \mathbf{B} vale $\mu_0 n i \mathbf{u}_z$ all'interno ed è nullo all'esterno. La componente j_z della densità di corrente è nulla e quindi, essendo nulla A_z , il potenziale vettore sta nel piano x, y ortogonale a \mathbf{B} e all'asse z . La situazione di simmetria assiale delle linee di \mathbf{A} rispetto a quelle di \mathbf{B} , suggerita dalla struttura del sistema, comporta che le linee di \mathbf{A} siano circonferenze che concatenano le linee di \mathbf{B} e che il modulo di \mathbf{A} dipenda solo dalla distanza dall'asse. Applicando (8.46) a una circonferenza di raggio r minore del raggio R del solenoide, posta nel piano x, y e coassiale al solenoide, si ha

$$2\pi r A = \pi r^2 B \Rightarrow A = \frac{1}{2} B r = \frac{1}{2} \mu_0 n i r$$

Per $r > R$ la circuitazione di \mathbf{A} cambia, ma il flusso di \mathbf{B} non cresce più:

$$2\pi r A = \pi R^2 B \Rightarrow A = \frac{1}{2} \frac{B R^2}{r} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 n i R^2}{r}$$

Il potenziale vettore cresce dal valore zero sull'asse al valore massimo per $r = R$ in modo lineare e all'esterno, dove il campo magnetico è nullo, decresce con legge $1/r$.

Nel calcolo sono state usate implicitamente le coordinate cilindriche, che sono naturali per questo sistema: si ha $A_r = 0, A_\theta = A, A_z = 0$. In coordinate cartesiane, come si vede dalla figura 8.46,

$$A_x = -A \sin \theta = -A \frac{y}{r}, \quad A_y = A \cos \theta = A \frac{x}{r}, \quad A_z = 0,$$

e pertanto

$$r < R \quad A_x = -\frac{1}{2} B y, \quad A_y = \frac{1}{2} B x, \quad A_z = 0,$$

$$r > R \quad A_x = -\frac{1}{2} \frac{B R^2 y}{r^2}, \quad A_y = \frac{1}{2} \frac{B R^2 x}{r^2}, \quad A_z = 0,$$

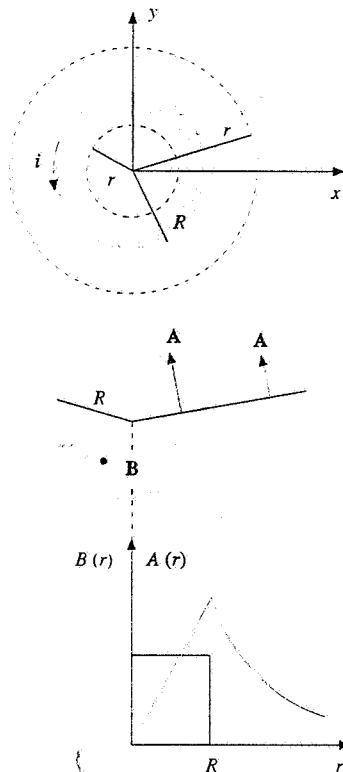


Figura 8.45

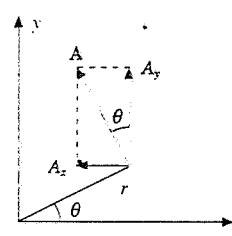


Figura 8.46

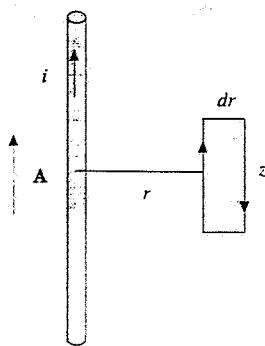


Figura 8.47

con $B = \mu_0 n i$. Si verifichi, utilizzando le componenti cartesiane (2.50) del rotore, che $B_x = B_y = 0$, $B_z = B$ all'interno e che $B_x = B_y = B_z = 0$ all'esterno. Si verifichi inoltre che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ovunque.

Nel caso del filo rettilineo, che assumiamo parallelo all'asse z , è $j_x = j_y = 0$, cioè $\mathbf{j} = j_z \mathbf{u}_z$, e quindi $A_x = A_y = 0$; il potenziale vettore è parallelo all'asse del filo e concorde al verso della corrente. Sempre per ragioni di simmetria il modulo può dipendere solo dalla distanza r dal filo. Ricorriamo di nuovo a (8.46) applicata al percorso rettangolare infinitesimo della figura 8.47; chiamiamo A il potenziale vettore a distanza r e $A + dA$ quello a distanza $r + dr$, z il lato finito del rettangolo, dr quello infinitesimo:

$$Az - (A + dA) z = B d\Sigma = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} z dr \Rightarrow dA = -\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{dr}{r}$$

Al crescere di r il potenziale diminuisce e su una distanza finita da r_1 a r_2

$$A_2 - A_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Questo risultato potrebbe far ritenere che il potenziale vettore avesse il modulo

$$A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r$$

In realtà la situazione è più complicata; come succede nel caso del filo carico indefinito, un calcolo diretto tramite (8.44) o (8.45) dà un risultato infinito, appunto perché il sistema è infinito. La formula logaritmica è però utile per calcolare le variazioni del potenziale vettore.

Un argomento intuitivo per capire l'andamento delle linee di \mathbf{A} si basa sull'analogia matematica tra le equazioni $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$. Come le linee rettilinee di \mathbf{j} danno un campo \mathbf{B} disposto lungo circonferenze (filo indefinito) così le linee rettilinee di \mathbf{B} danno un potenziale vettore \mathbf{A} disposto lungo circonferenze (solenoide indefinito); e come linee di \mathbf{j} circolari danno un campo \mathbf{B} rettilineo (solenoide indefinito), così linee di \mathbf{B} circolari danno un campo \mathbf{A} rettilineo (filo indefinito).

Potenziale magnetico scalare

Abbiamo sottolineato le differenze tra le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e la magnetostatica e le loro conseguenze sulle proprietà dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} . Esiste però un caso in cui i problemi di magnetostatica si riconducono esattamente a quelli di elettrostatica e ciò avviene quando il campo \mathbf{B} è definito in una regione delimitata di spazio in cui non esistono correnti; vedremo nel capitolo 9 possibili realizzazioni pratiche. In tal caso le (8.37) diventano

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8.47)$$

Potenziale scalare magnetico

ed è possibile definire un *potenziale scalare magnetico* V_m tale che

$$\mathbf{B} = -\nabla V_m. \quad (8.48)$$

Il potenziale magnetico obbedisce all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 V_m = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} = 0. \quad (8.49)$$

L'interesse di questa situazione particolare sta nel fatto che le soluzioni trovate in determinati problemi elettrostatici si possono trasportare esattamente al caso magnetico: la struttura geometrica delle superficie equipotenziali e delle linee di campo è la stessa. Resta ovviamente diversa la forza subita da una carica elettrica, pari a $q \mathbf{E}$ nel caso elettrostatico e a $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ nel caso magnetostatico.

8.8 Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici

Una carica q in moto con velocità v in un sistema di riferimento inerziale, che chiamiamo sistema del laboratorio, genera i campi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \mathbf{u}_r}{r^2},$$

che in ogni istante sono legati dalla relazione (8.7)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad . \quad (8.7)$$

Come abbiamo detto nel paragrafo 8.1 queste formule sono valide se $(v/c)^2 \ll 1$.

Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento inerziale che si muove rispetto al primo con velocità v , eguale a quella della carica q . Indichiamo sinteticamente con O il primo sistema e con O' il secondo sistema, in cui la carica è in quiete.

Una carica di prova q_0 è sottoposta alla stessa forza nei due sistemi, appunto perché inerziali; per semplicità supponiamo che q_0 abbia in un dato istante proprio la velocità v nel sistema O . In O essa subisce la forza (7.38)

$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

mentre nel sistema O' la forza sulla carica è soltanto elettrica,

$$\mathbf{F}' = q_0 \mathbf{E}'$$

in quanto, in O' , il campo magnetico \mathbf{B}' è nullo. Dall'egualanza tra le due forze si deduce

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Per il campo \mathbf{B}' vale certamente la relazione

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

dato che \mathbf{B}' è nullo e tale è il secondo membro in accordo con (8.7).

Un altro esempio è il seguente: nel sistema del laboratorio O una carica è in quiete e un dispositivo che produce un campo magnetico è in moto con velocità v ; a tale dispositivo è solidale un sistema di riferimento O' . In O' la carica si muove con velocità $-v$, il campo elettrico \mathbf{E}' è nullo e la forza sulla carica si scrive

$$\mathbf{F}' = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

Nel sistema O il campo magnetico \mathbf{B} è eguale a \mathbf{B}' , la carica è in quiete, ma subisce una forza \mathbf{F} che deve essere eguale a \mathbf{F}' :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} = \mathbf{F}' = -q \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

Le relazioni $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ possono essere scritte, dato che $\mathbf{E}' = 0$, nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'$$

Le espressioni delle trasformazioni dei campi che abbiamo ricavato nei casi particolari descritti hanno validità generale, indipendentemente dal sistema di cariche che genera i campi. Precisamente, i campi misurati nel sistema O' in moto con velocità v rispetto al sistema O sono dati da

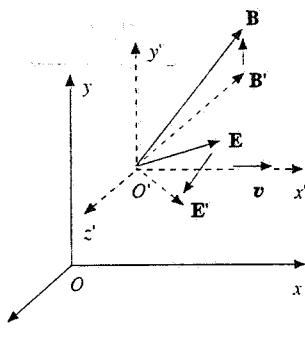


Figura 8.48

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (8.50)$$

Le relazioni inverse, relative ai campi nel sistema O in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a O' , sono

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \quad (8.51)$$

Trasformazioni galileiane dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B}

Le (8.50) e (8.51) costituiscono le *trasformazioni galileiane dei campi elettrici e magnetici*; esse sono valide quando tutte le velocità considerate sono molto minori della velocità della luce.

La cosa più interessante da osservare è che nel passaggio da un sistema all'altro il campo \mathbf{E} e il campo \mathbf{B} non si trasformano indipendentemente; di conseguenza la forza su una carica può apparire soltanto elettrica o soltanto magnetica o risultante dei due effetti: la *classificazione del tipo di interazione cambia a seconda del sistema di riferimento, pur essendo la forza la stessa*.

Esempio 8.12

Una carica q_0 si muove con velocità \mathbf{v}_r rispetto ad un sistema O' a sua volta in moto con velocità \mathbf{v} rispetto al sistema O . Dimostrare che la forza agente su q_0 non dipende dal sistema di riferimento.

Soluzione

In O' la carica q_0 è soggetta alla forza

$$\mathbf{F}' = q_0 (\mathbf{E}' + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}')$$

mentre in O , dove la velocità della carica è $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}$, somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento, la forza vale

$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$$

Sostituiamo nella formula di \mathbf{F}' le (8.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= q_0 \left[\mathbf{E}' + \mathbf{v}_r \times \left(\mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \right) \right] = q_0 \left[\mathbf{E}' + (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}) \times \mathbf{B}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_r \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}') \right] = \\ &= q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) - \frac{q_0}{c^2} \mathbf{v}_r \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Per ipotesi le velocità sono molto inferiori a c e l'ultimo termine risulta trascurabile, per cui $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

La forma più completa delle trasformazioni dei campi è quella relativistica, di cui (8.50) è il limite per $v \rightarrow 0$. Accenneremo brevemente nel capitolo 10 al legame tra elettromagnetismo e relatività.

Proprietà magnetiche della materia



9.1 Magnetizzazione della materia

Nel paragrafo 7.1, introducendo i fenomeni magnetici, abbiamo osservato che esistono in natura materiali, tipicamente composti del ferro, che sono sorgenti permanenti di campi magnetici o che, sottoposti all'azione di un campo magnetico, diventano a loro volta sorgenti di \mathbf{B} . Accanto a tali fenomeni vistosi, limitati a poche sostanze, ne avvengono altri molto più comuni, ma meno evidenti.

In questo capitolo discuteremo le proprietà magnetiche della materia, ovvero il comportamento della materia in presenza di un campo magnetico. Inizialmente daremo una descrizione fenomenologica e, introducendo il vettore magnetizzazione \mathbf{M} , vedremo come si modificano le equazioni della magnetostatica. Nei paragrafi 9.11 e 9.12 accenneremo all'interpretazione microscopica classica della magnetizzazione della materia e alla necessità di una trattazione quantistica, come è naturale essendo il magnetismo nella materia un fenomeno in cui le proprietà atomiche giocano un ruolo fondamentale.

Consideriamo un solenoide rettilineo, di raggio R e lunghezza d , con n spire per unità di lunghezza, e disponiamolo con l'asse verticale. Sospendiamo tramite una molla una piccola bobina, costituita da N spire di raggio $r \ll R$ coassiali con le spire del solenoide e percorse dalla corrente i' ; supponiamo che la posizione di equilibrio della bobina, sotto l'azione della forza peso e della forza elastica, coincida con il centro O' della faccia terminale del solenoide. Quando nel solenoide circola la corrente i che produce nei punti dell'asse il campo magnetico (8.20), sulla bobina agisce la forza (7.34).

$$F = \pm m' \frac{dB}{dx} :$$

$m' = \pi r^2 N i'$ è il momento magnetico della bobina secondo (7.18). È conveniente porre la bobina in O' perché, come abbiamo detto nel paragrafo 8.2, in O' è massima la derivata del campo magnetico. Se m' è concorde al campo \mathbf{B} del solenoide, cioè se i e i' sono equiverse, la forza sulla bobina è attrattiva e tende a portare la bobina verso l'interno del solenoide dove il campo è maggiore, se invece m' è discorda a \mathbf{B} la forza è repulsiva e spinge la bobina verso l'esterno dove il campo è minore. Tarando opportunamente la molla (dinamometro), dalla misura dello spostamento dalla posizione di equilibrio a campo nullo si determina il valore della forza magnetica.

Sospendiamo adesso al dinamometro, in modo che stiano nella posizione O' , campioni di vari materiali aventi piccole dimensioni, ad esempio prismetti con volume dell'ordine del cm^3 . Quando nel solenoide circola corrente si osserva che su ciascun campione viene esercitata una forza.

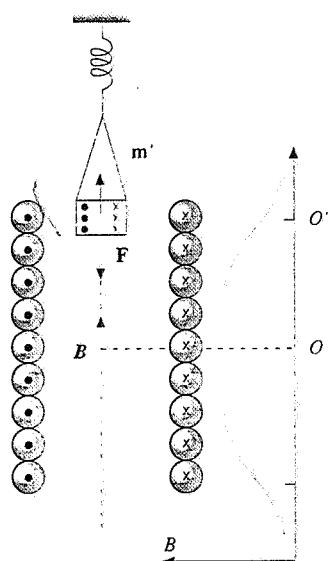


Figura 9.1

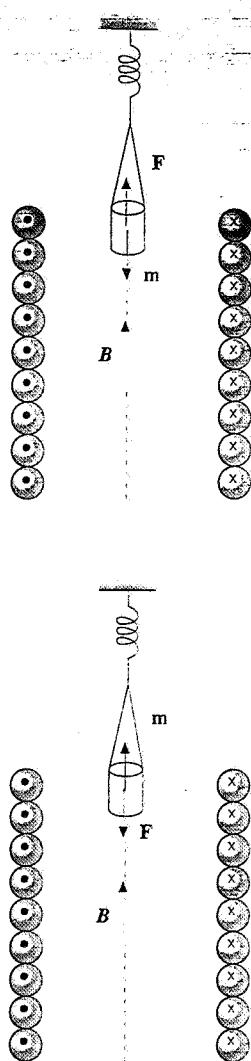


Figura 9.2

Sostanze diamagnetiche

Sostanze paramagnetiche

Sostanze ferromagnetiche

Qualitativamente, per la maggior parte delle sostanze la forza, pur facilmente misurabile, è molto piccola anche se il campo magnetico assume valori elevati (si veda l'esempio 9.4). Alcuni campioni sono attratti verso l'interno, altri respinti verso l'esterno, e ciò indipendentemente dal verso del campo magnetico, come si verifica invertendo il senso della corrente nel solenoide. L'insieme dei risultati si interpreta supponendo che alcune sostanze, sottoposte all'azione del campo magnetico \mathbf{B} del solenoide, acquistino un momento magnetico \mathbf{m} parallelo e concorde a \mathbf{B} , mentre in altre \mathbf{m} è parallelo e discorde a \mathbf{B} : le prime sono quelle attratte, le seconde quelle respinte. Tra le prime sostanze ve ne sono alcune, come il ferro, il nichel e il cobalto, per le quali la forza è molto grande, segno che il momento magnetico acquistato è molto grande.

Per un'analisi quantitativa facciamo riferimento a un dato volume τ , eguale per tutti i campioni. La forza per unità di volume vale, in modulo,

$$F_\tau = \frac{F}{\tau} = \frac{m}{\tau} \frac{dB}{dx} = M \frac{dB}{dx}$$

La grandezza M , che rappresenta il *momento magnetico dell'unità di volume del materiale*, si chiama *magnetizzazione*; essa è definita vettorialmente come

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{\tau} \quad (9.1)$$

Dalla misura sistematica di F_τ , oltre alle differenze di segno e di modulo sopra riportate, si deducono ulteriori differenze di comportamento. Se facciamo variare l'intensità della corrente i nel solenoide, con il che variano B e dB/dx , ricaviamo ad esempio come M varia con B : mentre per la maggior parte delle sostanze si osserva che la magnetizzazione è direttamente proporzionale al valore del campo magnetico cui il campione è sottoposto, per il ferro e gli altri materiali con proprietà analoghe la dipendenza di M da B appare più complicata. Inoltre in alcuni materiali la forza dipende dalla temperatura, in altri è indipendente.

In base alle caratteristiche sperimentali descritte si può procedere a una suddivisione in tre classi alle quali, come vedremo in seguito, corrispondono diversi meccanismi microscopici di formazione del momento magnetico in presenza di un campo magnetico.

Sono dette *diamagnetiche* le sostanze che vengono *repunte* dal solenoide: la *magnetizzazione* M è *opposta* al campo magnetico \mathbf{B} esterno ed è ad esso proporzionale: l'effetto non dipende dalla temperatura, salvo poche eccezioni. È questa la classe più ampia a cui appartiene la maggior parte delle sostanze.

Si chiamano *paramagnetiche* le sostanze che vengono *attratte* dal solenoide, quelle cioè in cui la *magnetizzazione* è *concorde* al campo magnetico; anche ora M è proporzionale a B . Si trova che in generale l'effetto aumenta al diminuire della temperatura, ma ci sono svariate eccezioni. In alcuni materiali paramagnetici la forza è dello stesso ordine di grandezza di quella subita dalle sostanze diamagnetiche, in altri è abbastanza superiore. In tutti i casi si tratta di forze piuttosto piccole, alle temperature ordinarie.

Infine sono dette *ferromagnetiche* le sostanze che sono *attratte fortemente* verso la zona in cui il campo magnetico è maggiore: anche in questi campioni la *magnetizzazione* è *concorde* al campo magnetico, però la relazione tra M e B non è *lineare* e nemmeno univoca. Inoltre di norma i campioni rimangono magnetizzati anche dopo che il campo è stato spento, cosa che non accade con le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche.

Il procedimento di ricondurre la forza alla magnetizzazione, cioè al momento magnetico per unità di volume, ricorda quanto già fatto nel caso dei dielettrici con riferimento al vettore polarizzazione \mathbf{P} , momento di dipolo elettrico per unità di volume. In effetti si vedrà nel resto del capitolo che il tipo di trattazione è abbastanza simile e che vi sono analogie formali tra i due casi, pur essendo i fenomeni molto diversi.

9.2 Permeabilità magnetica e suscettività magnetica

Il momento magnetico per unità di volume che si forma per l'azione del campo magnetico esterno causa una modifica del campo stesso: il mezzo magnetizzato cioè si aggiunge alle sorgenti di \mathbf{B} costituite dalle correnti di conduzione. Esaminiamo l'effetto in un solenoide indefinito il cui campo ha l'espressione (8.23), $B_0 = \mu_0 n i$: col simbolo B_0 indichiamo il valore del campo magnetico nel vuoto. Tale campo può essere misurato con una sonda di Hall (paragrafo 7.7).

Supponiamo di riempire completamente il solenoide con un mezzo omogeneo; la misura di \mathbf{B} può di nuovo essere effettuata con una sonda di Hall che però va inserita in una cavità praticata nel mezzo, se questo è solido. Dimostreremo nel paragrafo 9.6 che la forma da dare alla cavità per misurare correttamente \mathbf{B} nel mezzo è quella di un disco sottile con le basi ortogonali alle linee di campo. Una cavità analoga può essere ricavata in un mezzo fluido mettendo il misuratore dentro un apposito contenitore.

Dalla misura di \mathbf{B} troviamo che esso è parallelo e concorde a \mathbf{B}_0 e che il rapporto tra i moduli vale ovunque

$$\frac{B}{B_0} = \kappa_m \quad . \quad (9.2) \quad \text{Permeabilità magnetica relativa}$$

A questo rapporto diamo il nome di *permeabilità magnetica relativa* (al vuoto) del mezzo considerato. Quindi

$$B = \kappa_m B_0 = \mu_0 \kappa_m n i = \mu n i \quad (9.3)$$

definendo *permeabilità magnetica* (assoluta) la grandezza

$$\mu = \mu_0 \kappa_m \quad . \quad (9.4) \quad \text{Permeabilità magnetica}$$

Mentre κ_m è adimensionale, μ ha la stessa unità di misura di μ_0 , H/m.

La relazione (9.2) risulta valida per circuiti di forma qualunque immersi in un mezzo indefinito. Anche la definizione (9.4) è generale, perché secondo la legge di Ampère-Laplace (8.3) il campo magnetico nel vuoto ha sempre il coefficiente moltiplicativo μ_0 . Possiamo quindi dire che *sperimentalmente* il campo magnetico esistente in un mezzo indefinito omogeneo in cui è immerso un circuito percorso da corrente è dato da

$$\mathbf{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{ds \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad . \quad (9.5)$$

Al termine *omogeneo* diamo d'ora in poi un significato più ampio, intendendo che insieme alla densità è costante nel mezzo anche la *permeabilità magnetica relativa*.

La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è dunque

$$B - B_0 = \kappa_m B_0 - B_0 = (\kappa_m - 1) B_0 = \chi_m B_0$$

Definiamo così una nuova grandezza, la *suscettività magnetica*

Suscettività magnetica

$$\chi_m = \kappa_m - 1, \quad \kappa_m = 1 + \chi_m, \quad (9.6)$$

che in questo contesto ha il significato di variazione relativa del campo magnetico, $\chi_m = (B - B_0) / B_0$.

Ritornando alla (9.3) scriviamo

$$B = \kappa_m B_0 = (1 + \chi_m) B_0 = B_0 + \chi_m B_0 = \mu_0 n i + \mu_0 \chi_m n i$$

e vediamo che ne possiamo dare l'interpretazione seguente: dato che il termine $\mu_0 n i$ è il campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione che circola nelle spire del solenoide, il secondo termine deve rappresentare l'effetto del mezzo magnetizzato, effetto che risulta identico a quello che sarebbe prodotto da un secondo solenoide eguale al primo, ma percorso dalla corrente di densità lineare $\chi_m n i$ (fig. 9.3). Come vedremo nel paragrafo 9.3 questa interpretazione non è fittizia: sulla superficie del mezzo magnetizzato una corrente esiste realmente, anche se non è una corrente di conduzione, bensì il risultato di *correnti di origine atomica* che si formano per effetto del campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione. Tali correnti sono dette *amperiane*, in onore di Ampère che per primo ne intuì l'esistenza (vedi paragrafo 7.1).

È chiara l'analogia con quanto abbiamo trattato all'inizio del capitolo 5: la permeabilità magnetica gioca lo stesso ruolo della costante dielettrica e le correnti amperiane quello delle cariche di polarizzazione.

Però la varietà dei fenomeni magnetici è maggiore, come adesso proviamo supponendo di riempire il solenoide con sostanze diverse secondo la classificazione data nel paragrafo 9.1.

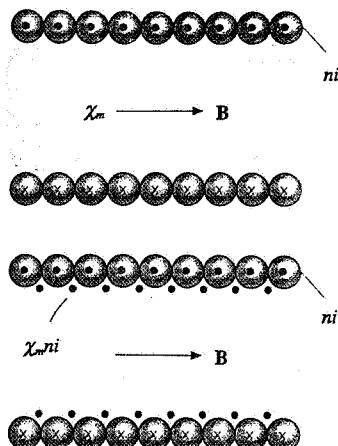


Figura 9.3

Sostanze diamagnetiche

Dalla misura del campo B nel solenoide avvolto su una sostanza diamagnetica si ricava che la *permeabilità magnetica* relativa è costante al variare di B e minore di 1:

$$\kappa_m < 1 \Rightarrow \chi_m < 0. \quad (9.7)$$

Dal momento che B è minore di B_0 le *correnti amperiane* devono dare un contributo opposto a B_0 , circolando quindi in verso opposto rispetto a quelle di conduzione; ciò è coerente col fatto che il *momento magnetico* risulti opposto a B_0 negli esperimenti di attrazione e repulsione descritti nel paragrafo 9.1, se ammettiamo che m nasca dalle correnti amperiane.

Nella tabella 9.1 sono riportati alcuni dati numerici; si noti che χ_m dipende dalla densità del materiale, nel senso che è molto minore nei gas che nei liquidi e nei solidi. Per questi ultimi χ_m ha valori dell'ordine di 10^{-5} .

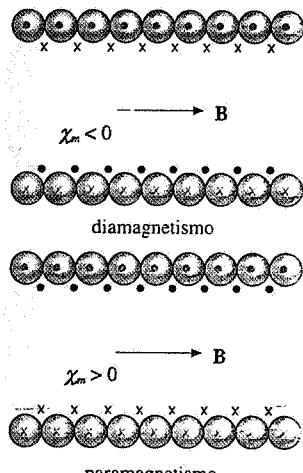


Figura 9.4

Tabella 9.1 Suscettività di sostanze diamagnetiche

argento	$-2.39 \cdot 10^{-5}$	acqua	$-0.90 \cdot 10^{-5}$
bismuto	$-16.42 \cdot 10^{-5}$	mercurio	$-2.80 \cdot 10^{-5}$
oro	$-3.46 \cdot 10^{-5}$		
piombo	$-1.58 \cdot 10^{-5}$	argon	$-1.10 \cdot 10^{-8}$
rame	$-0.98 \cdot 10^{-5}$	azoto	$-1.35 \cdot 10^{-8}$
silicio	$-0.42 \cdot 10^{-5}$	idrogeno	$-0.45 \cdot 10^{-8}$

Sostanze paramagnetiche

Per queste risulta che la *permeabilità magnetica* relativa è costante al variare di B e maggiore di 1:

$$\kappa_m > 1 \Rightarrow \chi_m > 0 ; \quad (9.8)$$

le *correnti amperiane* sono quindi *equiverse* alle correnti di conduzione e gli effetti magnetici si sommano. Si tratta anche in questo caso di effetti piccoli, come appare dalla tabella 9.2: i valori di χ_m sono di norma compresi tra 10^{-4} e 10^{-5} , a temperatura ambiente.

Tabella 9.2 Suscettività di sostanze paramagnetiche

alluminio	$2.08 \cdot 10^{-5}$	titanio	$18.22 \cdot 10^{-5}$
calcio	$1.94 \cdot 10^{-5}$	tungsteno	$7.92 \cdot 10^{-5}$
magnesio	$1.17 \cdot 10^{-5}$	uranio	$40.92 \cdot 10^{-5}$
platino	$27.91 \cdot 10^{-5}$		
sodio	$0.85 \cdot 10^{-5}$	ossigeno	$387.4 \cdot 10^{-8}$

È importante la dipendenza dalla temperatura che obbedisce alla legge, detta *prima legge di Curie*.

$$\chi_m = \frac{C \rho}{T} , \quad (9.9)$$

Prima legge di Curie

dove ρ è la densità, T la temperatura espressa in Kelvin e C una costante. Soltanto alcuni metalli paramagnetici, con χ_m dell'ordine di 10^{-5} , non seguono (9.9) e hanno suscettività praticamente costante.

Sostanze ferromagnetiche

La permeabilità di una sostanza ferromagnetica può arrivare a valori dell'ordine di $10^3 \div 10^5$ e inoltre essa dipende dal valore del campo esterno e dal modo con cui tale valore è stato raggiunto; κ_m e χ_m non sono cioè funzioni univoche di B , come spiegheremo nel paragrafo 9.7. Le *correnti amperiane* sono *equiverse* a quelle di conduzione e il loro contributo al campo magnetico totale è di gran lunga superiore, dati i valori di χ_m . Anche nel ferromagnetismo c'è dipendenza dalla temperatura nel senso che oltre una certa temperatura il comportamento diventa eguale a quello paramagnetico.

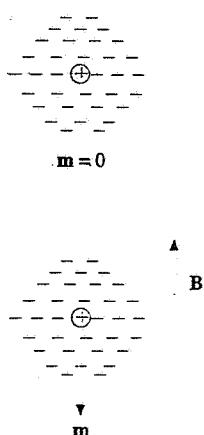


Figura 9.5

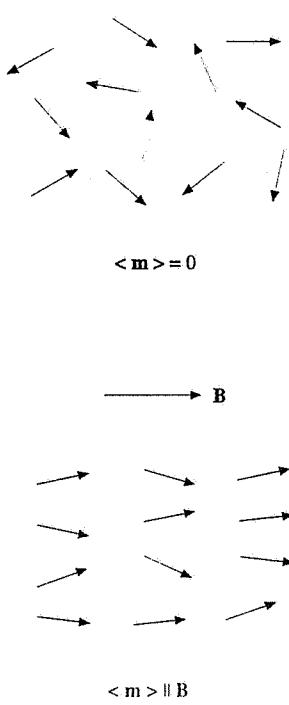


Figura 9.6

9.3 Correnti amperiane e magnetizzazione

Nel paragrafo 9.2 abbiamo introdotto la suscettività magnetica come grandezza macroscopica che permette di valutare l'importanza del processo di magnetizzazione in un materiale. D'altra parte abbiamo avanzato l'ipotesi che la comparsa della magnetizzazione fosse dovuta a correnti atomiche. Tratteremo per esteso questo argomento a partire dal paragrafo 9.10 e arriveremo tra l'altro ad espressioni della suscettività in funzione di grandezze microscopiche. Per ora diciamo semplicemente che il moto degli elettroni intorno al nucleo può essere assimilato a correnti microscopiche, alle quali è associato un momento magnetico. Nella maggior parte dei casi questi momenti si compensano e l'atomo non ha momento magnetico, mentre quando agisce un campo magnetico esterno il moto degli elettroni è perturbato e ha origine un momento magnetico che è opposto al campo esterno: questo è il meccanismo classico del diamagnetismo e si capisce che esso è sempre presente. La situazione ricorda il meccanismo di polarizzazione elettronica, anch'esso sempre presente sotto l'azione di un campo elettrico: e come nel caso elettrico l'effetto si oppone al campo che lo ha provocato, riducendo il campo magnetico effettivo nel mezzo (effetto smagnetizzante, analogo all'effetto depolarizzante).

In alcune sostanze vi sono condizioni di assimetria per cui le molecole possono avere un momento magnetico intrinseco. A causa dell'agitazione termica il momento magnetico medio è nullo, ma sotto l'azione di un campo magnetico esterno c'è un fenomeno di orientazione parziale e ha origine un momento magnetico parallelo e concorde al campo esterno, che supera l'effetto diamagnetico. Questo è ciò che accade nei materiali paramagnetici ed è evidente il parallelismo con il meccanismo della polarizzazione per orientamento nei dielettrici. La differenza sostanziale è che mentre il campo di dipolo elettrico all'interno del mezzo si oppone a E , il campo magnetico delle correnti elementari che generano i momenti magnetici è concorde al campo B (si veda la figura 8.14 per visualizzare l'effetto). Però, a parte il segno, si può eseguire la stessa trattazione matematica, come vedremo.

Sia nel diamagnetismo che nel paramagnetismo si arriva classicamente a capire l'origine dei fenomeni, ma le previsioni numeriche non sono precise perché la spiegazione corretta richiede la meccanica quantistica. Nel ferromagnetismo il fenomeno è più complesso e non esiste una spiegazione classica; anche ora vi sono dei momenti magnetici che vengono orientati concordemente al campo magnetico esterno, solo che basta un campo relativamente debole per ottenere una orientazione quasi completa dei momenti elementari, per cui gli effetti sono notevolissimi.

Senza approfondire ulteriormente l'argomento diciamo che in ogni caso tutti gli atomi o molecole del materiale acquistano sotto l'azione del campo B un *momento magnetico medio* $\langle \mathbf{m} \rangle$, orientato parallelamente a B . Considerato un volumetto $\Delta\tau$ nell'intorno di un punto P , in cui sono contenuti ΔN_r atomi (o molecole), il momento magnetico è

$$\Delta \mathbf{m} = \Delta N_r \langle \mathbf{m} \rangle$$

e il momento magnetico per unità di volume, ovvero la magnetizzazione (9.1), vale

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N_r}{\Delta \tau} \langle \mathbf{m} \rangle = n \mathbf{m} \quad (9.10)$$

dove n è il *numero di atomi (o di molecole) per unità di volume nell'intorno di P* . Al tendere di $\Delta\tau$ a zero viene definita la *magnetizzazione* \mathbf{M} in funzione della posizione. Si parla di *magnetizzazione uniforme* quando \mathbf{M} è costante nel mezzo; di norma ciò avviene, almeno per le *sostanze amorfe*, dotate di *simmetria spaziale*, quando esse sono immerse in un campo magnetico uniforme.

Supponiamo ora di avere un cilindro magnetizzato uniformemente con magnetizzazione \mathbf{M} parallela all'asse e isoliamo un disco di spessore dz . Suddividiamo il disco in prismetti di base $d\Sigma$, altezza dz e volume $d\tau = d\Sigma dz$. Ciascuno dei prismetti ha il momento magnetico, orientato come \mathbf{M} ,

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\tau = M d\Sigma dz \mathbf{u}_z .$$

Secondo il principio di equivalenza di Ampère (7.21) lo stesso momento magnetico è posseduto da una spira a forma di nastro, di area $d\Sigma$ e altezza dz , percorsa da una corrente di_m tale che

$$d\mathbf{m} = di_m d\Sigma \mathbf{u}_z = M d\Sigma dz \mathbf{u}_z \Rightarrow di_m = M dz . \quad (9.11)$$

Come sappiamo, l'*equivalenza* è valida anche per quanto riguarda il campo magnetico prodotto.

Sostituiamo ogni prisma di materiale magnetizzato con l'equivalente circuito percorso dalla corrente di_m . Se \mathbf{M} è costante le correnti si elidono a due a due sui lati contigui dei circuiti elementari e rimangono attive solamente le correnti sulla superficie laterale del cilindro. Il *disco di materiale magnetizzato uniformemente è equivalente a tutti gli effetti ad un circuito percorso dalla corrente* (9.11). Procedendo nello stesso modo per tutti i dischi di altezza dz che costituiscono il cilindro magnetizzato di altezza h , concludiamo che esso equivale a una fascia di altezza h percorsa dalla corrente

$$i_m = \int_0^h M dz = M h , \quad (9.12)$$

ovvero percorsa dalla corrente di *densità lineare*

$$M = \frac{i_m}{h} = \frac{di_m}{dz} = j_{s.m} .$$

Vettorialmente il legame tra la densità lineare di corrente amperiana e la magnetizzazione, collegate tra loro dalla regola della vite per quanto riguarda i versi, si scrive

$$\mathbf{j}_{s.m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n , \quad (9.13)$$

indicando con \mathbf{u}_n il versore normale all'asse del cilindro e orientato verso l'esterno.

Un'altra forma della relazione tra magnetizzazione e correnti amperiane si ottiene considerando la figura 9.9 e eseguendo la circuitazione di \mathbf{M} lungo un *percorso chiuso* generico che *concateni* la corrente i_m . Dato che al di fuori del cilindro $\mathbf{M} = 0$ e che all'interno, qualunque sia il percorso, vale (9.12), si ha

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = i_m . \quad (9.14)$$

Nel caso più generale \mathbf{M} può non essere *uniforme* nel materiale. Allora in due prismetti contigui lungo l'asse x (vedi figura 9.10) abbiamo due componenti M_z e M'_z diverse, derivanti dalle correnti $di_1 = M_z dz$ e $di_2 = M'_z dz$, per cui la *corrente effettiva* lungo l'asse y , cioè sulla faccia di contatto, è

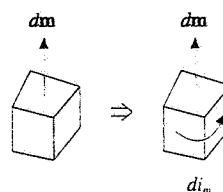
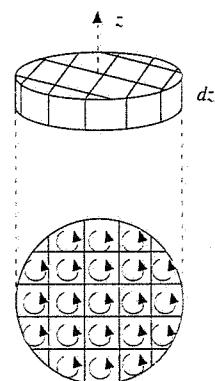
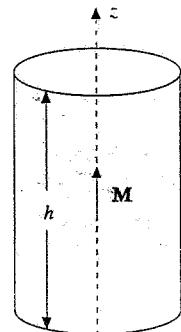


Figura 9.7

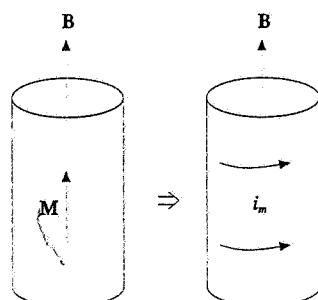


Figura 9.8

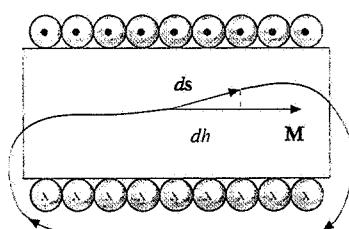


Figura 9.9

$$di_1 - di_2 = (M_z - M_z') dz = - \frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$$

Ripetendo l'argomento per due prismetti contigui lungo l'asse z e per la componente M_x della magnetizzazione, vediamo dalla figura che lungo l'asse y c'è la corrente

$$di_4 - di_3 = (M'_x - M_x) dx = \frac{\partial M_x}{\partial z} dz dx$$

e in totale lungo l'asse y abbiamo la corrente

$$di_y = (di_4 - di_3) + (di_1 - di_2) = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) dx dz .$$

L'elemento di area $d\Sigma = dx dz$ è ortogonale all'asse y e quindi la componente lungo y della densità di corrente è

$$j_y = \frac{di_y}{dx dz} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = (\nabla \times \mathbf{M})_y$$

Completando il ragionamento per gli altri due assi si ha

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (9.15)$$

Si faccia attenzione al fatto che \mathbf{j}_m è una *densità di corrente*, definita in un volume e misurata in A/m^2 , mentre $j_{s.m}$ è una densità lineare di corrente, definita su una superficie e misurata in A/m .

Le (9.13) e (9.15) stabiliscono nel caso più generale la relazione tra il vettore magnetizzazione, introdotto per caratterizzare il momento magnetico acquistato dal mezzo, e le correnti amperiane, che sono l'aspetto macroscopico delle correnti atomiche originate nel mezzo dalla presenza di un campo magnetico esterno. Se ne deduce tra l'altro che gli effetti magnetici di un mezzo magnetizzato si possono calcolare a partire da una distribuzione superficiale di corrente con densità lineare $j_{s.m}$ e da una distribuzione spaziale di corrente con densità j_m . In particolare è così che si può determinare all'interno di un mezzo magnetizzato il campo magnetico dovuto al mezzo stesso, inteso naturalmente come *campo macroscopico medio*.

Vedremo nel paragrafo 9.4 una utilizzazione formale di (9.13) e (9.15). Per ora notiamo l'analogia con la situazione di un dielettrico polarizzato in cui l'effetto del mezzo si calcola a partire da una distribuzione superficiale di carica di polarizzazione σ_p e da una distribuzione di volume con densità ρ_p , legate al vettore polarizzazione dalle (5.12) e (5.14):

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n \quad , \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} .$$

9.4 Equazioni generali della magnetostatica. Il campo \mathbf{H}

Le equazioni generali della magnetostatica nel vuoto, riepilogate nel paragrafo 8.6, devono essere in parte modificate quando sono presenti mezzi magnetizzati. Resta invariata la proprietà di \mathbf{B} di essere solenoidale mentre cambiano le equazio-

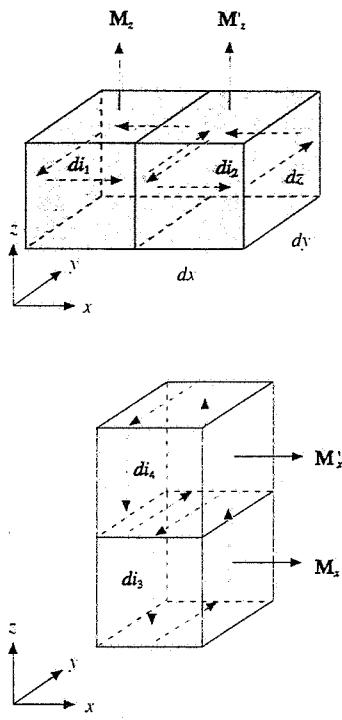


Figura 9.10

ni in cui compaiono le sorgenti, a seguito dell'introduzione delle correnti amperiane. Occorre pertanto scrivere, in forma integrale,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.16)$$

e, in forma differenziale,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \quad (9.17)$$

dove ci siamo serviti di (9.14) e (9.15). Raccogliendo nello stesso membro i termini con \mathbf{B} e \mathbf{M} abbiamo

$$\oint (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i, \quad \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Se ora introduciamo il nuovo *campo vettoriale H* attraverso la definizione

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (9.18) \quad \text{Campo vettoriale H}$$

vediamo che esso soddisfa alle relazioni

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i, \quad (9.19) \quad \text{Legge di Ampère per il campo H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (9.20)$$

La (9.19) esprime la *legge di Ampère per il campo H*: la circuitazione di \mathbf{H} estesa ad una qualsiasi linea chiusa è eguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate dalla linea. In termini locali il rotore di \mathbf{H} è eguale alla densità di corrente di conduzione.

Possiamo allora riscrivere le *equazioni della magnetostatica* in generale servendoci dei due campi \mathbf{B} e \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= i, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Equazioni della magnetostatica

In esse formalmente sono sparite le correnti amperiane, ma per risolvere occorre un'ulteriore informazione. Infatti \mathbf{B} e \mathbf{H} sono sì legati dalla definizione (9.18), però in essa c'è anche il vettore \mathbf{M} : il problema per ora è stato soltanto spostato nel senso che il contributo delle correnti amperiane, nascosto con la riformulazione delle equazioni generali, ricompare nel legame tra \mathbf{B} e \mathbf{H} . C'è dunque bisogno dell'*equazione di stato del mezzo magnetizzato*, cioè della relazione esplicita tra \mathbf{B} e \mathbf{M} o tra \mathbf{H} e \mathbf{M} .

Per le ragioni che diremo tra poco si preferisce mettere in evidenza il legame tra \mathbf{M} e \mathbf{H} assumendo come relazione caratteristica del mezzo magnetizzato la

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9.21)$$

Come immediata conseguenza abbiamo

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (9.22)$$

e, mettendo insieme (9.21) e (9.22),

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu} \chi_m \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\kappa_m} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m - 1}{\kappa_m} \mathbf{B} \quad (9.23)$$

Ci sono alcuni commenti da fare su tutta la procedura che abbiamo seguito. Da un punto di vista generale la (9.19) non definisce completamente il vettore \mathbf{H} , fissa soltanto la proprietà della sua circuitazione. Però in molti casi pratici interessanti, che vedremo negli esempi, le condizioni di simmetria permettono di ricavare \mathbf{H} direttamente da (9.19) senza doversi preoccupare della presenza del mezzo magnetizzato. Questa è una circostanza importante: dalla conoscenza delle correnti di conduzione, che sono sotto il nostro controllo, determiniamo \mathbf{H} e siamo quindi in grado di valutare l'effetto sul mezzo, tramite (9.21), e di calcolare il campo magnetico risultante da tutte le correnti presenti tramite (9.22). Si può dire che \mathbf{H} svolge il ruolo di *variabile indipendente* alla quale riferiamo gli effetti magnetici nei mezzi e ciò giustifica il fatto di utilizzare (9.21) come equazione di stato.

Per la verifica di (9.21) rimandiamo all'esempio 9.1; il significato fisico sta nell'assunzione che i momenti magnetici presenti nel mezzo magnetizzato siano sempre proporzionali al campo che li provoca e in effetti nella maggior parte dei materiali (9.21) e (9.22) sono vere relazioni lineari, con χ_m e μ costanti. Non è così nei mezzi ferromagnetici, in cui χ_m è funzione non univoca di \mathbf{H} e non si può parlare di equazione di stato nei termini semplici di (9.21); la relazione tra \mathbf{M} e \mathbf{H} o tra \mathbf{B} e \mathbf{H} è espressa tramite il *ciclo di isteresi*, come vedremo nel paragrafo 9.7; solo in specifiche situazioni (9.21) e (9.22) restano valide con χ_m e μ costanti. Non cambiano invece i metodi di determinazione di \mathbf{H} in presenza di simmetrie poiché (9.19) non dipende dal mezzo.

Riepiloghiamo nella tabella 9.3 le caratteristiche fenomenologiche finora discusse; \mathbf{B}_0 è il campo magnetico dovuto alle correnti di conduzione, \mathbf{B} il campo magnetico in presenza di un mezzo indefinito.

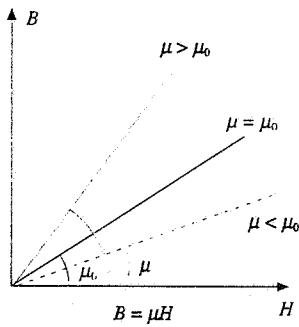


Figura 9.11

Tabella 9.3

sostanza	χ_m	κ_m	χ_m, κ_m	$\mathbf{M} \text{ e } \mathbf{H}$	$\mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B}_0$
diamagnetica	< 0	< 1	costanti	\mathbf{M} opposto a \mathbf{H}	$B < B_0$
paramagnetica	> 0	> 1	costanti	\mathbf{M} concorde a \mathbf{H}	$B > B_0$
ferromagnetica	$\gg 0$	$\gg 1$	funzioni di H	\mathbf{M} dipende da \mathbf{H} (vedi paragrafo 9.9)	$B \gg B_0$

Unità di misura

La magnetizzazione, definita come momento magnetico per unità di volume, risulta anche eguale a una densità lineare di corrente; di conseguenza la sua unità di misura è A/m. La stessa unità è valida per il campo \mathbf{H} , detto talvolta *campo magnetizzante*: infatti vale la (9.21) e sappiamo dal paragrafo 9.2 che la suscettività magnetica, come pure la permeabilità magnetica relativa, è adimensionale. Ricordiamo che invece la permeabilità magnetica assoluta si misura in H/m (henry su metro).

Esempio 9.1

Un solenoide toroidale è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa κ_m . Calcolare i campi \mathbf{H} e \mathbf{B} nel suo interno.

Soluzione

Seguendo l'esempio 8.7, ma applicando il ragionamento al vettore \mathbf{H} , abbiamo in base a (9.19)

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r H = N i \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{N i}{2\pi r} \mathbf{u}_o \quad (9.24)$$

Da questa e da (9.22)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H} = \frac{\mu_0 \kappa_m N i}{2\pi r} \mathbf{u}_o \quad (9.25)$$

Il campo \mathbf{H} non dipende dal mezzo che riempie il solenoide, il campo magnetico invece è cambiato di un fattore κ_m rispetto al valore (8.31) nel vuoto.

Nel paragrafo 9.2 avevamo trovato in generale il risultato $B / B_0 = \kappa_m$ parlando di un mezzo indefinito in cui si immerge il circuito: siamo in pratica nello stesso caso perché, se trascuriamo il piccolo campo esterno al solenoide, tutto lo spazio in cui \mathbf{B} è diverso da zero è stato riempito con un mezzo omogeneo. Sappiamo dunque, indipendentemente da (9.22), che $\mathbf{B} = \kappa_m \mathbf{B}_0$ e anche da (9.24) che $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Dato che nel vuoto $\mathbf{M} = 0$, da (9.18) abbiamo

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad , \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} \quad ,$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad .$$

Si verifica dunque che nel caso in esame (9.21) è soddisfatta e che la magnetizzazione si scrive

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m N i}{2\pi r} \mathbf{u}_o \quad .$$

In effetti (9.21) è più generale di quanto possa sembrare da questo esempio.

Esempio 9.2

All'interno di un solenoide indefinito di raggio R è posto un cilindro indefinito di raggio $r < R$, coassiale al solenoide, avente permeabilità magnetica relativa κ_m . Calcolare i valori di \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{M} e la densità di corrente amperiana.

Soluzione

Tutti i campi, per ragioni di simmetria, sono paralleli all'asse del sistema. Il campo \mathbf{H} si calcola applicando (9.19) prima ad un percorso rettangolare che concatena la corrente $n i h$ e poi ad un secondo percorso che invece non concatena correnti di conduzione (n è il numero di spire per unità di lunghezza). Nei due casi si ha

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 h = n i h \Rightarrow H_1 = n i \quad ,$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_1 h - H_2 h = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 \quad .$$

Pertanto il campo \mathbf{H} ha lo stesso valore

$$\mathbf{H} = n i \mathbf{u}_z \quad (9.26)$$

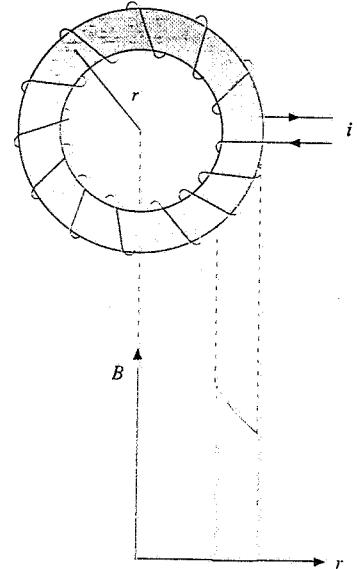


Figura 9.12

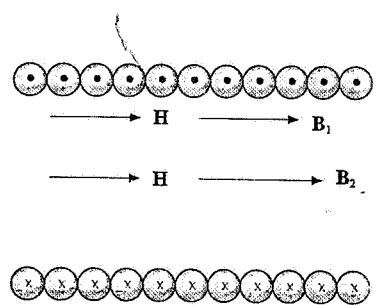


Figura 9.13

nella zona vuota del solenoide e nel cilindro magnetizzato.
Il campo magnetico \mathbf{B} invece è diverso nelle due regioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 n i \mathbf{u}_z , \\ \mathbf{B}_2 &= \mu \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m n i \mathbf{u}_z = \kappa_m \mathbf{B}_1 .\end{aligned}\quad (9.27)$$

La magnetizzazione è diversa da zero solo nel cilindro e vale

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = \chi_m n i \mathbf{u}_z .$$

\mathbf{M} è uniforme, per cui da (9.15) $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ e $\mathbf{j}_{s.m} = 0$: non ci sono correnti amperiane di volume, ma solo la corrente amperiana superficiale con densità lineare (9.13)

$$\mathbf{j}_{s.m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n = \chi_m n i \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_n , \quad j_{s.m} = \chi_m n i .$$

Essa ha lo stesso verso della corrente di conduzione contribuendo ad un aumento del campo magnetico nel materiale se χ_m è positiva, mentre ha verso opposto se χ_m è negativa, facendo diminuire il campo magnetico nel materiale.

Un metodo semplice per magnetizzare uniformemente un cilindro finito di ferro consiste nel metterlo al centro di un solenoide abbastanza lungo.

Se ad esempio $n i = 10^3$ A/m consideriamo queste tre possibilità:

$$\begin{array}{lll}\chi_m = 10^{-4} & M = 0.1 \text{ A/m} & B_2 = 1.0001 B_1 , \\ \chi_m = -10^{-4} & M = 0.1 \text{ A/m} & B_2 = 0.9999 B_1 , \\ \chi_m = 10^2 & M = 10^5 \text{ A/m} & B_2 = 101 B_1 .\end{array}$$

Si vede che l'effetto magnetico è notevole in un mezzo ferromagnetico.

Esempio 9.3

Un filo conduttore indefinito, di raggio R e permeabilità magnetica relativa $\kappa_{1.m}$, è posto sull'asse di una guaina cilндrica indefinita, con raggio interno a e raggio esterno b , avente permeabilità magnetica relativa $\kappa_{2.m}$. Dare l'andamento di \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{B} in funzione della distanza r dall'asse quando il filo è percorso dalla corrente i e determinare la distribuzione delle correnti amperiane. Si supponga che entrambe le permeabilità siano maggiori di 1.

Soluzione

Dall'esempio 8.5, adattato al campo \mathbf{H} , abbiamo che questo vale

$$\mathbf{H} = \frac{i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R , \quad \mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad r \geq R ,$$

essendo \mathbf{u}_ϕ il versore tangente alle linee di campo, che sono circonferenze, orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della vite.

Da (9.22) ricaviamo le seguenti espressioni di \mathbf{B} , a seconda del mezzo:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 \kappa_{1.m} i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R , \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad R \leq r \leq a , \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 \kappa_{2.m} i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad a \leq r \leq b , \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad r \geq b .\end{aligned}$$

La magnetizzazione è diversa da zero soltanto nei due mezzi materiali:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_{1,m} i r}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi \quad 0 \leq r \leq R \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \quad a \leq r \leq b$$

All'interno del filo, dove la densità di corrente di conduzione vale

$$\mathbf{j} = \frac{i}{\pi R^2} \mathbf{u}_z \quad ,$$

abbiamo secondo (9.15) e (9.20)

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \chi_{1,m} \nabla \times \mathbf{H} = \chi_{1,m} \mathbf{j} \quad :$$

la densità di corrente amperiana è costante nel volume del filo e corrisponde a una corrente $i_m = j_m \pi R^2 = \chi_{1,m} i$, equiversa ad i . Sulla superficie del filo, secondo (9.13),

$$\mathbf{j}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n = \frac{\chi_{1,m} i}{2\pi R} \mathbf{u}_\phi \times \mathbf{u}_n = -\frac{\chi_{1,m} i}{2\pi R} \mathbf{u}_z$$

e la corrente superficiale vale $i'_m = j_{s,m} 2\pi R = -\chi_{1,m} i = -i_m$. Complessivamente la corrente amperiana nel filo è nulla e non ha alcun effetto all'esterno del filo.

Nella guaina $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ e quindi $\nabla \times \mathbf{M} = 0$, non c'è densità spaziale di corrente amperiana: ci sono soltanto due densità lineari sulle superfici cilindriche di raggi a e b , pari sempre secondo (9.13) a

$$\mathbf{j}_a = -\mathbf{M}(a) \times \mathbf{u}_n \quad , \quad \mathbf{j}_b = \mathbf{M}(b) \times \mathbf{u}_n \quad .$$

Infatti per $r = a$ il versore normale al filo è $-\mathbf{u}_n$, per $r = b$ è \mathbf{u}_n . La prima densità è concorde alla densità di corrente \mathbf{j} del filo, la seconda è discorde a \mathbf{j} . In modulo

$$j_a = M(a) = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi a} \quad , \quad j_b = M(b) = \frac{\chi_{2,m} i}{2\pi b}$$

e le due correnti corrispondenti sono

$$i_a = j_a 2\pi a = \chi_{2,m} i \quad , \quad i_b = -j_b 2\pi b = -\chi_{2,m} i \quad .$$

Anche nella guaina globalmente la corrente amperiana è nulla; per $r < a$ essa non ha alcun effetto magnetico, per $a \leq r \leq b$ la corrente i_a concorde ad i rinforza il campo magnetico (è come se sull'asse ci fosse una corrente $i + \chi_{2,m} i = \kappa_{2,m} i$) e i_b non ha effetto, per $r > b$ gli effetti delle due correnti sono eguali e contrari.

Se le suscettività sono negative cambiano i segni dei contributi, che però restano sempre confinati all'interno dei due mezzi.

Si osservi infine che il campo magnetico \mathbf{B} , esclusivamente tangenziale come del resto \mathbf{H} e \mathbf{M} , subisce tre discontinuità, una per $r = R$, una per $r = a$ e una per $r = b$; si verifichi che in ognuno dei tre casi la discontinuità, procedendo dall'interno verso l'esterno, è data da $-\mu_0 j_{s,m}$, dove $j_{s,m}$ è la locale densità lineare di corrente amperiana. Ciò è in accordo, tenuto conto dei segni, con quanto visto nel paragrafo 8.6 e con quanto discuteremo nel paragrafo 9.5.

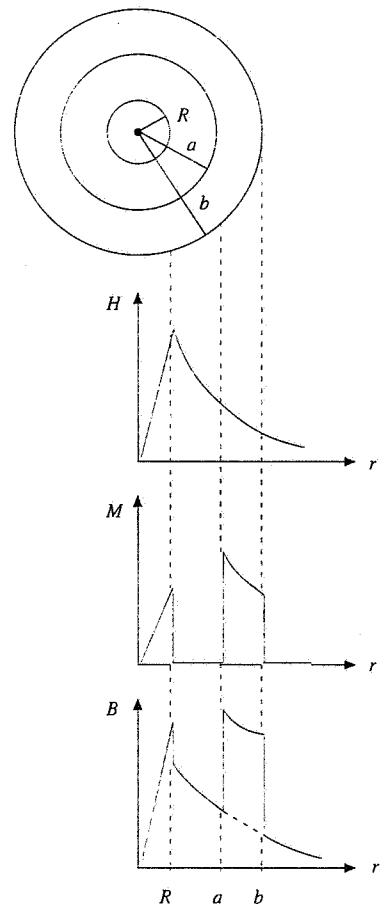


Figura 9.14

Esempio 9.4

Calcolare in funzione della suscettività del materiale la forza magnetica su un cilindretto di volume $\tau = 1 \text{ cm}^3$ posto nel centro della faccia terminale di un solenoide lungo; il raggio del solenoide è $r = 0.05 \text{ m}$ e la densità lineare di corrente è $n i = 10^3 \text{ A/m}$.

Soluzione

La derivata del campo magnetico (8.20) per $x = d/2$ è

$$\frac{dB}{dx} = \mu_0 n i \left[\frac{4R^2}{(4d^2 + 4R^2)^{3/2}} - \frac{1}{2R} \right] \approx -\frac{\mu_0 n i}{2R}$$

se $d \gg R$.

La forza sul cilindretto è data da (7.34), come detto nel paragrafo 9.1; utilizzando anche (9.1) e (9.23) si ha

$$F = m \frac{dB}{dx} = M\tau \frac{dB}{dx} = \frac{\chi_m \tau}{\mu_0 \kappa_m} B \frac{dB}{dx}$$

All'estremità di un solenoide lungo il campo magnetico vale $\mu_0 n i / 2$ (paragrafo 8.2) e in definitiva abbiamo, in modulo,

$$F = \frac{\chi_m}{\kappa_m} \frac{\mu_0 \tau}{4R} (n i)^2 = \frac{\chi_m}{\kappa_m} 6.28 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Con valori di χ_m compresi tra 10^{-4} e 10^{-5} otteniamo forze dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-10}$ N, molto piccole.

La forza aumenta se si aumenta il campo magnetico, come è possibile fare, a parità di corrente, avvolgendo il filo del solenoide su un materiale ferromagnetico; si raggiungono in tal modo forze dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$ N, più facilmente misurabili. Su questo principio sono basati metodi di misura della suscettività delle sostanze diamagnetiche e paramagnetiche.

La trattazione svolta non si può applicare direttamente a un campione ferromagnetico in quanto in generale non è valida (9.23) con χ_m costante. La forza (attrattiva) dipende sempre da dB/dx , ma la magnetizzazione non è proporzionale al campo magnetico.

9.5 Discontinuità dei campi sulla superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati. Campi all'interno di una cavità

Abbiamo già visto nel paragrafo 8.6 che il campo magnetico subisce una discontinuità tangenziale quando si passa da una parte all'altra di una superficie sede di una corrente di conduzione. Dobbiamo aspettarci un effetto analogo anche nel passaggio attraverso la superficie di separazione tra due mezzi magnetizzati diversi: infatti sulle rispettive superfici sono localizzate correnti amperiane, in generale diverse tra loro e quindi con somma non nulla (nell'esempio 9.3 è stata verificata una situazione di questo tipo, in cui un mezzo era il vuoto).

Detti \mathbf{H}_1 e $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$ i campi nel primo mezzo e \mathbf{u}_n il versore della normale alla superficie di separazione in un dato punto P , resta individuato un piano in cui stanno i tre vettori \mathbf{u}_n , \mathbf{H}_1 , \mathbf{B}_1 e anche la magnetizzazione \mathbf{M}_1 . La densità lineare di corrente amperiana $j_{\text{a.m}}$ è ortogonale a questo piano e la discontinuità ad essa dovuta, ortogonale a $\mathbf{j}_{\text{a.m}}$ come sappiamo dal paragrafo 8.6, sta nel piano suddetto: quindi \mathbf{B}_1 , pur essendo discontinuo, resta nel medesimo piano, a differenza di quanto può succedere nel passaggio attraverso una corrente superficiale di conduzione che è a priori indipendente da \mathbf{B}_1 . Tutto ciò è corretto se il secondo mezzo è il vuoto, ma resta vero in generale anche in caso diverso, come si può intuire con un ragionamento di continuità, che faccia aumentare gradualmente la densità del secondo mezzo.

Ammettiamo dunque che $\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ siano tutti in uno stesso piano che contiene la normale alla superficie di separazione nel punto P considerato. L'applicazione della legge di Gauss del campo \mathbf{B} ad una scatola cilindrica di

altezza infinitesima, con le basi nei due mezzi e parallele alla superficie, porta alla relazione

$$B_{1,n} = B_{2,n} \quad \text{ovvero} \quad B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \quad , \quad (9.28)$$

indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli che \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 formano con la normale. Il campo magnetico ha la stessa componente normale dalle due parti della superficie di separazione, come è ovvio potendo essere la discontinuità solo tangenziale. Da $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ segue

$$\kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n} \quad : \quad (9.29)$$

la componente normale del campo \mathbf{H} è discontinua nel passaggio attraverso la superficie.

Successivamente applichiamo la legge di Ampère (9.19) ad un rettangolo che sta nel piano individuato dai campi, con due lati paralleli alla superficie di separazione e da parti opposte e gli altri due lati infinitesimi; si trova

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_{1,t} h - H_{2,t} h = 0$$

non essendoci correnti di conduzione concatenate e quindi

$$H_{1,t} = H_{2,t} \quad \text{ovvero} \quad H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2 \quad . \quad (9.30)$$

Gli angoli sono gli stessi considerati in precedenza in quanto \mathbf{H} e \mathbf{B} sono paralleli in entrambi i mezzi. Mentre dunque la componente tangenziale di \mathbf{H} è continua, quella di \mathbf{B} è discontinua secondo la relazione

$$\frac{B_{1,t}}{\kappa_{1,m}} = \frac{B_{2,t}}{\kappa_{2,m}} \quad . \quad (9.31)$$

Combinando le relazioni trovate si ha, per il rapporto dei moduli dei campi,

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\kappa_{2,m}}{\kappa_{1,m}} \right)^2 \sin^2 \theta_1} \quad , \quad (9.32)$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}} \right)^2 \cos^2 \theta_1} \quad .$$

Infine, dividendo membro a membro (9.28) e (9.30) si trova

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\kappa_{1,m}}{\kappa_{2,m}} \quad , \quad (9.33)$$

detta legge della rifrazione delle linee di campo magnetico nel passaggio da un mezzo ad un altro; se $\kappa_{2,m}$ è maggiore di $\kappa_{1,m}$ l'angolo θ_2 è maggiore di θ_1 ; le linee si allontanano dalla normale.

La deviazione è notevole nel passaggio dal vuoto o da qualsiasi altro mezzo ad un mezzo ferromagnetico con $\kappa_{2,m}/\kappa_{1,m}$ dell'ordine di $10^2 \div 10^4$: θ_2 è quasi eguale a

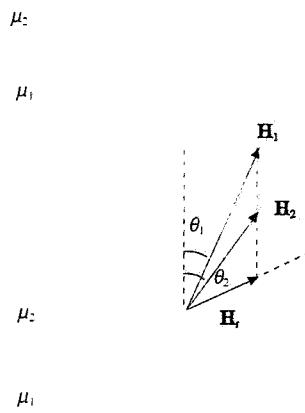
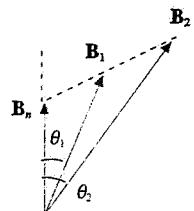


Figura 9.15

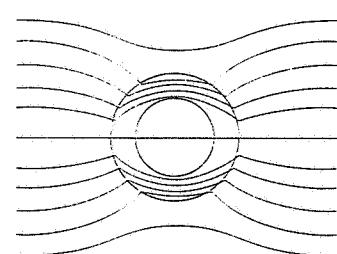
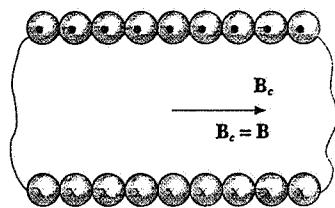


Figura 9.16

90° e \mathbf{B}_2 quasi parallelo alla superficie di separazione. Su questo effetto è basato il cosiddetto *schermo magnetico*. Se poniamo un tubo cilindrico di ferro in un campo magnetico, nelle vicinanze del tubo e nelle pareti di questo le linee di \mathbf{B} hanno l'andamento mostrato in figura 9.16: esse si *addensano dentro il ferro*, segno che il campo assume nelle pareti un valore notevole, e sono quasi assenti all'interno. Lo *schermo non è perfetto* perché se $\theta_1 = 0$ anche $\theta_2 = 0$: le linee esattamente perpendicolari alla superficie penetrano all'interno. Ciò nonostante l'accorgimento è utilizzato per schermare da campi magnetici strumenti il cui funzionamento sarebbe alterato dalla presenza di \mathbf{B} .

Un altro caso limite si ha quando le *linee di campo* sono *parallele* alla superficie di separazione ($\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$): le componenti normali sono nulle e deve essere



$$H_1 = H_2, \quad \frac{B_1}{K_{1,m}} = \frac{B_2}{K_{2,m}} \Rightarrow B_2 = \frac{K_{2,m}}{K_{1,m}} B_1.$$

Le linee di \mathbf{B} sono più fitte nel mezzo a permeabilità maggiore. Una realizzazione pratica è quella dell'esempio 9.2, dove si ha il passaggio dal vuoto ($K_{1,m} = 1$) ad un mezzo magnetizzato.

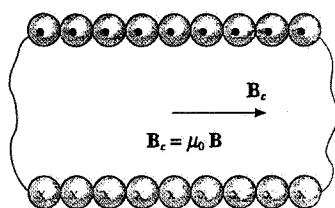


Figura 9.17

I risultati sulle discontinuità dei campi \mathbf{B} e \mathbf{H} permettono di stabilire una *definizione operativa del campo magnetico \mathbf{B} macroscopico* e del *campo \mathbf{H} macroscopico all'interno della materia*. Se pratichiamo una cavità piatta ortogonale alle linee di \mathbf{B} , da (9.28) sappiamo che \mathbf{B} ha lo stesso valore sia nel mezzo che nella cavità e quindi basta misurare \mathbf{B} in una tale cavità per conoscerne il valore nel mezzo. Se invece si pratica una cavità sottile parallela alle linee di \mathbf{B} , è \mathbf{H} secondo (9.30) ad avere lo stesso valore nel mezzo e nella cavità: basta misurare \mathbf{B} nella cavità e dividerlo per μ_0 per avere il campo \mathbf{H} nella cavità e quindi conoscerne il valore nel mezzo.

Esempio 9.5

Calcolare il campo magnetico \mathbf{B} all'interno di un cilindro uniformemente magnetizzato e utilizzare il risultato per determinare il campo magnetico all'interno di una cavità cilindrica parallela alle linee di \mathbf{B} praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato.

Soluzione

Ricorriamo al calcolo eseguito nel paragrafo 8.2 per un solehoide rettilineo di lunghezza d e raggio R . Il campo \mathbf{B} in un punto dell'asse è dato dalla (8.19) in cui ora sostituiamo M al posto di n :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2).$$

In particolare nel centro $\phi_1 = \phi_2 = \phi_0$ e

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{M} \cos \phi_0 :$$

al centro di una faccia terminale (un polo del cilindro), dove ad esempio $\phi_0 = \pi/2$.

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} \cos \phi_0.$$

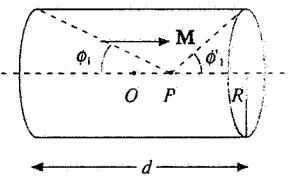


Figura 9.18

Nell'ipotesi che il cilindro sia sottile, $R/d \ll 1$, possiamo approssimare i coseni con le espressioni

$$\cos\phi_0 = 1 - \frac{\phi_0^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{d/2} \right)^2 = 1 - 2 \frac{R^2}{d^2} ,$$

$$\cos\phi_1 = 1 - \frac{\phi_1^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2} .$$

I valori del campo magnetico nei punti O e O' diventano

$$\mathbf{B}_O = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right) \quad , \quad \mathbf{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{d^2} \right) \quad . \quad (9.34)$$

Se $R^2/d^2 \approx 0$, come in un magnete molto lungo,

$$\mathbf{B}_O = \mu_0 \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{B}_{O'} = \mu_0 \frac{\mathbf{M}}{2} \quad .$$

Osserviamo che la presenza dei poli, ovviamente sempre presenti in un magnete reale di lunghezza finita, ha come risultato la diminuzione del campo, cioè ha un *effetto smagnetizzante*.

Prendiamo ora un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato in cui pratichiamo una cavità cilindrica lunga e sottile, della forma del magnete appena considerato. In base al principio di sovrapposizione il campo \mathbf{B} nel mezzo è eguale al campo \mathbf{B}_c nella cavità più il campo \mathbf{B}_O del blocco cilindrico corrispondente alla cavità (si veda la figura 5.29 del paragrafo 5.8 che tratta l'analogia problematica nel caso dei dielettrici):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_O \Rightarrow \mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{B}_O \quad .$$

Riunendo (9.18), (9.21) e (9.34) si ha

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) - \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - 2 \frac{R^2}{d^2} \right) = \mu_0 \left(\mathbf{H} + 2 \frac{R^2}{d^2} \mathbf{M} \right) = \mu_0 \left(1 + 2 \chi_m \frac{R^2}{d^2} \right) \mathbf{H} \quad .$$

Quando il secondo termine tra parentesi, dovuto alla presenza delle basi di raggio R , è trascurabile, $\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}$ e si giustifica la definizione operativa di \mathbf{H} nel mezzo data in precedenza.

Quantitativamente deve essere

$$2 \chi_m \frac{R^2}{d^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{R^2}{d^2} \ll \frac{1}{2 \chi_m} \quad .$$

D'altra parte le approssimazioni che portano alla (9.34) sono valide per angoli piccoli: ad esempio, con $\phi_0 = 3^\circ$ risulta $R/d = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $R^2/d^2 = 6.3 \cdot 10^{-4}$. Valori di quest'ordine soddisfano sempre la diseguaglianza per i materiali diamagnetici e paramagnetici in cui $|\chi_m| \ll 1$. In un mezzo ferromagnetico, anche ammettendo di utilizzare le stesse formule, i valori di χ_m possono essere così elevati da richiedere angoli molto piccoli: con $\chi_m = 10^3$ la diseguaglianza è soddisfatta se $R^2/d^2 < 10^{-4}$ ovvero $\phi_0 \sim 1^\circ$: la cavità deve essere molto sottile.

Esempio 9.6

Calcolare il campo magnetico prodotto da una sfera magnetizzata uniformemente e utilizzare il risultato per determinare il campo magnetico all'interno di una cavità sferica praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato.

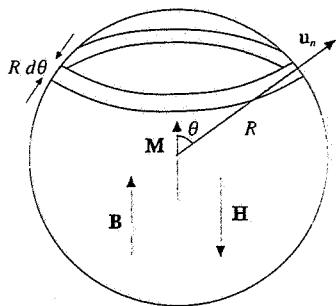


Figura 9.19

Soluzione

Il modulo della densità lineare di corrente amperiana sulla superficie della sfera è, da (9.13), $j_{s.m} = M \sin \theta$; attraverso un tratto $R d\theta$ passa la corrente $di_m = M R \sin \theta d\theta$ che produce nel centro della sfera il campo magnetico (8.12) di una spira di raggio $R \sin \theta$, calcolato in un punto dell'asse distante R dai punti della spira:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{(R \sin \theta)^2}{R^3} = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta .$$

In totale, integrando da zero a π e dato che $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4/3$,

$$\mathbf{B}_o = \mathbf{B}_{int} = \frac{2}{3} \mu_0 M . \quad (9.35)$$

Si dimostra che il campo magnetico ha tale valore anche negli altri punti interni alla sfera e si può enunciare questo risultato, valido per qualsiasi tipo di corrente (di conduzione o amperiana): data una superficie sferica e un diametro con direzione \mathbf{u}_z , una corrente superficiale distribuita con densità lineare $\mathbf{j}_s = k \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_n$, essendo \mathbf{u}_n il versore della normale alla superficie orientato verso l'esterno, produce all'interno della sfera il campo magnetico uniforme

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 k \mathbf{u}_z .$$

Il campo \mathbf{H} all'interno vale

$$\mathbf{H}_{int} = \frac{\mathbf{B}_{int}}{\mu_0} - \mathbf{M} = - \frac{1}{3} \mathbf{M}$$

e risulta pertanto opposto a \mathbf{M} e a \mathbf{B} .

Il momento magnetico della sfera, secondo la definizione (9.1), è

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \tau = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M}$$

e sull'asse della sfera, avente direzione e verso di \mathbf{M} , il campo magnetico nei punti esterni si può calcolare con (8.14):

$$\mathbf{B}_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathbf{m}}{r^3} = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{R^3}{r^3} \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{H}_{ext} = \frac{\mathbf{B}_{ext}}{\mu_0} = \frac{2}{3} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{M} .$$

Per $r = R$ queste espressioni diventano

$$\mathbf{B}_{ext} = \frac{2}{3} \mu_0 M = \mathbf{B}_{int} \quad ; \quad \mathbf{H}_{ext} = \frac{2}{3} M = \mathbf{H}_{int} + \mathbf{M} \quad ;$$

il campo magnetico è continuo, invece il campo \mathbf{H} ha la discontinuità $\mathbf{H}_{ext} - \mathbf{H}_{int} = \mathbf{M}$. Il campo magnetico all'interno di una cavità sferica praticata in un mezzo indefinito uniformemente magnetizzato si calcola come nell'esempio 9.5:

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B} - \mathbf{B}_{int} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) - \frac{2}{3} \mu_0 M = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right) = \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_m}{3} \right) \mathbf{H} . \quad (9.36)$$

Analogamente a quanto fatto con i dielettrici, si può utilizzare questa espressione per il campo magnetico locale che agisce su un singolo atomo o molecola nel processo di magnetizzazione.

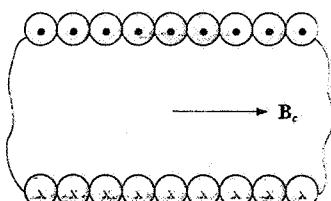


Figura 9.20

9.6 Confronto tra le leggi dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi omogenei indefiniti

Abbiamo già notato varie volte nel corso di questo capitolo analogie con la trattazione delle proprietà dei dielettrici polarizzati, svolta nel capitolo 5. La ragione risiede nel fatto che, pur essendo i fenomeni fisici differenti, le equazioni che li descrivono hanno la stessa struttura e quindi le soluzioni sono matematicamente eguali, anche se si riferiscono a campi diversi.

Per effettuare il confronto dove è più appropriato, riscriviamo le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica in mezzi indefiniti e in assenza di cariche elettriche libere ($\rho = 0$) e di correnti di conduzione ($j = 0$):

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

Equazioni dell'elettrostatica
e della magnetostatica

Queste mettono in evidenza le corrispondenze formali

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \quad \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \leftrightarrow \mathbf{M} \quad (9.37)$$

Una verifica immediata la possiamo eseguire ricapitolando i risultati sulle discontinuità e sui campi nelle cavità, che abbiamo ottenuto separatamente nel capitolo 5 e in questo capitolo, ma che, avendo in mente (9.37), potevano adesso essere dedotti direttamente da quelli del capitolo 5.

Discontinuità

Componenti tangenziali continue

$$E_{1,t} = E_{2,t} \quad H_{1,t} = H_{2,t}$$

componenti normali discontinue

$$\kappa_1 E_{1,n} = \kappa_2 E_{2,n} \quad \kappa_{1,m} H_{1,n} = \kappa_{2,m} H_{2,n}$$

componenti normali continue

$$D_{1,n} = D_{2,n} \quad B_{1,n} = B_{2,n}$$

componenti tangenziali discontinue

$$\frac{D_{1,t}}{\kappa_1} = \frac{D_{2,t}}{\kappa_2} \quad \frac{B_{1,t}}{\kappa_{1,m}} = \frac{B_{2,t}}{\kappa_{2,m}}$$

Cavità sottile parallela alle linee di campo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c \neq \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c \neq \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Figura 9.21

Cavità piatta ortogonale alle linee di campo

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{B}$$

Figura 9.22

Cavità sferica



$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3}$$

$$\mathbf{D}_c = \epsilon_0 \mathbf{E}_c = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3} \neq \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right) \neq \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

In generale, per una cavità di forma qualunque si può scrivere

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M} \quad , \quad (9.38)$$

dove γ è un *coefficiente* che varia con la forma della cavità ed è in particolare minimo con valore zero nella cavità del primo tipo e massimo con valore 1 nella cavità del secondo tipo.

Anche l'esempio 9.6 mostra lo stesso tipo di relazione. Il caso analogo sarebbe una sfera di dielettrico uniformemente polarizzata, come quella considerata nell'esempio 5.5; allora la situazione non è stata sviluppata completamente perché, salvo casi molto speciali, non è possibile realizzare una sfera polarizzata senza l'azione di un campo elettrico esterno, mentre invece è possibile, con un materiale ferromagnetico, avere una sfera magnetizzata senza l'azione continua di un campo magnetico esterno. È però facile verificare che sussistono le relazioni

$$\mathbf{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{E}_{ext} = \frac{2\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{D}_{int} = \frac{2}{3} \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{D}_{ext} = \frac{2}{3} \mathbf{P} \quad ;$$

queste si ricavano con le stesse argomentazioni dell'esempio 9.6 e corrispondono alle relazioni là trovate se si applicano gli scambi (9.37).

Più in generale si può dire che quando si è risolto un problema che richiede soltanto l'applicazione delle equazioni generali scritte all'inizio, di norma esiste una formulazione parallela dello stesso problema che si ottiene con le (9.37).

Mezzi lineari omogenei

Nei mezzi lineari alle equazioni generali si aggiungono le equazioni di stato

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad .$$

formalmente analoghe secondo (9.37). Il risultato dei processi di polarizzazione e magnetizzazione sono densità di carica collegate a \mathbf{P} e densità di corrente collegate a \mathbf{M} : in particolare le distribuzioni di volume si ottengono con l'operatore divergenza applicato a \mathbf{P} e l'operatore rotore applicato a \mathbf{M} e qui non può esserci analogia diretta perché le proprietà sia matematiche che fisiche della carica e della corrente sono diverse. Però in entrambi i casi le densità di volume si annullano se i mezzi sono omogenei e se non ci sono cariche e correnti libere. Nel caso di \mathbf{P} ciò è stato dimostrato nel paragrafo 5.6, mentre per \mathbf{M} si procede così: da (9.21) e dalla terza delle (3.36) abbiamo

$$\nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \nabla \chi_m \times \mathbf{H} + \chi_m \nabla \times \mathbf{H} \quad ;$$

se il mezzo è omogeneo $\nabla \chi_m = 0$ e se non ci sono correnti libere $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, per cui $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$. Per la validità del risultato non occorre che \mathbf{P} e \mathbf{M} siano uniformi.

Il tipo di analogia che abbiamo trattato è relativamente comune: ci sono svariati fenomeni che si riconducono allo stesso tipo di equazioni e che quindi sono descritti dallo stesso formalismo matematico: bisogna però essere molto cauti ad estendere l'analogia sul piano fisico. Nel caso che stiamo trattando non si deve ad esempio dare significato fisico alla corrispondenza matematica riguardante \mathbf{E} e \mathbf{H} , segnalata dalla prima delle (9.37): i campi fondamentali sono \mathbf{E} e \mathbf{B} in quanto è attraverso di essi che si esprime l'interazione tra le cariche, fisse o in moto.

I campi **D** e **H** sono utili variabili ausiliarie che permettono una struttura semplificata delle equazioni e che, quando sono applicabili le relazioni

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

portano alla soluzione del calcolo di **E** e **B**. L'utilità risiede nel fatto che il flusso di **D** dipende solo dalle cariche libere e la circuitazione di **H** dalle correnti di conduzione: nei casi in cui ci sono simmetrie ciò permette il calcolo diretto di **D** e **H** a partire dalle sole sorgenti libere. Nella pratica **H** è in effetti molto usato perché in un circuito è sempre possibile conoscere la corrente; nei problemi di elettrostatica invece più che le cariche spesso sono noti i potenziali dei conduttori e allora si seguono procedimenti diversi.

Una considerazione volta a dissipare possibili dubbi è la seguente: il fatto che il flusso di **D** e la circuitazione di **H** dipendano solo dalle sorgenti libere non vuol dire che ciò sia vero anche per **D** e **H** in generale. Quando la conformazione geometrica delle sorgenti e dei mezzi non è più simmetrica ci si rende conto che **D** e **H**, come **E** e **B**, sono influenzati anche dalla presenza delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione; basti pensare alle discontinuità attraverso una superficie tra due mezzi diversi nel caso più generale.

Ricordiamo infine che ci siamo già occupati alla fine del paragrafo 8.7 di un'altra analogia tra elettrostatica e magnetostatica, relativa al comportamento dei campi nel vuoto, sempre in assenza di cariche e correnti libere. Le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ sono identiche e si possono quindi utilizzare risultati ottenuti in elettrostatica risolvendo l'equazione di Laplace $\Delta^2 V = 0$, come vedremo nell'esempio 9.10.

9.7 Sostanze ferromagnetiche

Abbiamo già più volte accennato al fatto che le proprietà delle sostanze ferromagnetiche sono molto diverse da quelle delle altre sostanze e più complesse da trattare, anche soltanto da un punto di vista fenomenologico, in quanto le relazioni che legano **B** e **M** al campo **H** in generale non soltanto non sono lineari, ma non sono nemmeno univoche. D'altra parte è nelle sostanze ferromagnetiche che gli effetti sono notevoli e rivestono importantissimi aspetti tecnologici, per cui il loro studio, oltre che interessante concettualmente, è molto utile.

Fin dal paragrafo 7.1 abbiamo detto che esistono in natura sostanze come la *magnetite*, $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, che sottoposte all'azione di un campo magnetico si magnetizzano, diventando sorgenti permanenti di campo magnetico. Sperimentando con campi magnetici esterni noti si osserva innanzitutto che la magnetizzazione è elevata anche con valori dei campi, e quindi delle correnti di conduzione, non particolarmente elevati; inoltre tali effetti, che a temperatura ambiente sono presenti negli elementi ferro, nichel e cobalto, si ottengono pure con svariate leghe, sia contenenti almeno uno di questi elementi che prive di essi (e d'altra parte non tutte le leghe contenenti ferro, nichel o cobalto sono ferromagnetiche).

Le proprietà magnetiche delle leghe variano notevolmente con la composizione chimica (bastano piccolissime variazioni della composizione per causare grandi cambiamenti della permeabilità o addirittura fare scomparire le caratteristiche ferromagnetiche) e dipendono anche dai trattamenti termici subiti, per cui è richiesta grande accuratezza nella preparazione allo scopo di evitare che gradienti termici elevati in alcune fasi delle lavorazioni possano incidere negativamente sulle proprietà magnetiche della lega. Infine, per alcune leghe speciali ad alta permeabilità ($\sim 10^4$) le proprietà magnetiche possono cambiare radicalmente sotto sollecitazioni meccaniche esterne. Tutti questi fatti inducono a ritenere che i fenomeni atomici che stanno alla base del ferromagnetismo dipendano fortemente dalla struttura cristallina e dalle sue modificazioni causate da agenti termici o meccanici.

Per trovare la relazione tra **B** e **H** serviamoci del solenoide toroidale descritto nell'esempio 9.1. Il campo **H**, dato da (9.24), viene variato variando l'intensità di corrente nelle spire e il campo **B** nel mezzo viene misurato con una sonda di Hall inserita in una cavità ortogonale alle linee di campo. Per ogni valore di **H** si misura

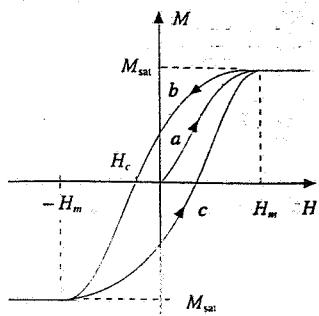


Figura 9.24

B e si ricava il valore della magnetizzazione con (9.18), $M = (B / \mu_0) - H$. Tale esperimento fornisce quindi direttamente la funzione $B(H)$ e indirettamente $M(H)$.

Supponiamo che inizialmente il materiale si trovi nello *stato vergine*, cioè non sia mai stato sottoposto a magnetizzazione, e che siano nulli tutti i campi. Facendo crescere H i valori di B e di M si dispongono lungo la curva a , detta *curva di prima magnetizzazione*; quando H supera il valore H_m la magnetizzazione resta costante al valore M_{sat} e il campo magnetico cresce linearmente con H , molto più lentamente di prima. Infatti, per $M = M_{sat} = \text{costante}$, la (9.18) $B = \mu_0(H + M_{sat})$ è una retta con pendenza μ_0 , cioè molto piccola. Si dice che per $H > H_m$ il materiale ha raggiunto la *saturazione* e il valore M_{sat} si chiama *magnetizzazione di saturazione*: oltre H_m il campo B cresce solo per effetto dell'aumento della corrente di conduzione, perché il contributo del mezzo ha raggiunto il massimo valore possibile.

Non essendo la curva a una retta, le grandezze

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad \kappa_m = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \chi_m = \kappa_m - 1$$

non sono costanti, ma *funzioni di H* . Si definisce anche la *permeabilità differenziale*

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} \quad o \quad \kappa_{m,d} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH};$$

la prima coincide con la pendenza della curva. Si ha un aumento da un valore iniziale non nullo per $H = 0$ fino ad un massimo in corrispondenza ad un flesso e poi una decrescita fino al valore μ_0 (o 1).

Se dopo aver raggiunto il valore H_m si fa decrescere H , i valori di B e di M si dispongono lungo una nuova curva b che si mantiene al di sopra della curva di prima magnetizzazione e interseca l'asse delle ordinate ($H = 0$) col valore B_r o M_r , legati da

$$B_r = \mu_0 M_r;$$

si parla di *magnetizzazione residua* e di *campo magnetico residuo*, a significare il fatto fondamentale che il materiale è magnetizzato anche in assenza di corrente; è diventato cioè un *magnete permanente*.

Per annullare la magnetizzazione bisogna invertire il senso della corrente e far diminuire H fino al valore H_c , detto *campo coercitivo*, in corrispondenza del quale $M = 0$ e $B = \mu_0 H_c$. Facendo ulteriormente decrescere H si osserva che oltre il valore $-H_m$ la curva è rettilinea, come lo era oltre H_m , con la stessa pendenza: il materiale ha raggiunto la magnetizzazione di saturazione, ma con verso opposto.

Infine, se si riporta H al valore H_m si percorre la curva c fino al ricongiungimento con la curva a . La curva completa prende il nome di *ciclo di isteresi del materiale* e può essere data, come abbiamo visto, in termini di M (fig. 9.24) o in termini di B (fig. 9.25). Finché H varia nell'intervallo $H_m, -H_m$ o maggiore si ottiene sempre il medesimo ciclo; se si riduce l'intervallo di variabilità si ottengono cicli più stretti, con i vertici sulla curva di prima magnetizzazione (fig. 9.26). Facendo descrivere al materiale la curva della figura 9.27 lo si riporta allo stato vergine: è questo il metodo che si utilizza in pratica per *smagnetizzare* un materiale.

Il ciclo di isteresi rappresenta il *diagramma di stato del materiale ferromagnetico*; però uno stato (H, B) può coincidere con un punto del ciclo solo se viene seguita la procedura descritta. Se invece in un dato istante del processo H viene portato a zero e poi riportato al suo valore, lo stato (H, B) raggiunto sta in un punto interno al ciclo: operando in modo opportuno tutti i punti interni sono raggiungibili

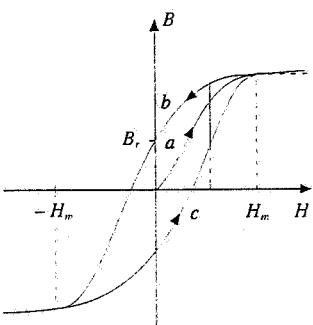


Figura 9.25

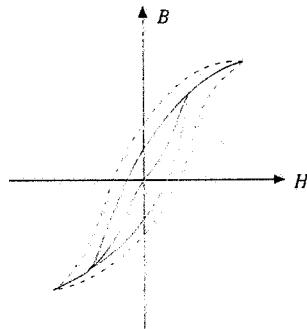


Figura 9.26

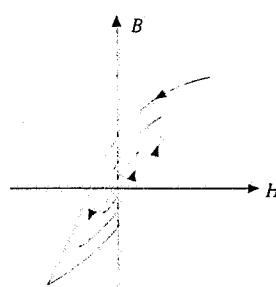


Figura 9.27

e il ciclo delimita quindi una regione luogo dei possibili stati del sistema. Ad un dato valore di H possono corrispondere infiniti valori di B compresi tra le curve b e c , situazione che viene riassunta dicendo che la *magnetizzazione di una sostanza ferromagnetica dipende dalla storia della sostanza, oltre che dal valore di H* .

La forma del ciclo d'isteresi dipende fortemente dalla composizione della sostanza. Prendendo come parametri caratteristici i valori della magnetizzazione residua e del campo coercitivo, abbiamo i materiali cosiddetti *duri*, il cui *ciclo di isteresi* è piuttosto *largo* (M_r e H_c grandi): essi sono adatti per la costruzione di magneti permanenti, sia perché M_r è grande e quasi eguale a M_{sat} , sia perché è difficile smagnetizzarli (H_c grande). Nella situazione opposta sono i materiali cosiddetti *dolci* che hanno un *ciclo di isteresi molto stretto*: dato che H_c è piccolo, è facile magnetizzarli e smagnetizzarli; inoltre la permeabilità magnetica è quasi costante in un ampio intervallo di valori di H . Nel caso dell'isoperm, lega Fe-Ni-Cu, $\kappa_m \approx 60$. Tali materiali sono adatti per la costruzione di *elettromagneti* (vedi paragrafo 9.9), in quanto spegnendo H si porta B quasi a zero.

Altra proprietà fondamentale dei materiali ferromagnetici è che per ognuno di essi esiste una *temperatura critica* T_C , detta *temperatura di Curie*, al di sopra della quale il materiale diventa paramagnetico, con suscettività che segue la legge

$$\frac{\chi_m(T - T_C)}{\rho} = C = \text{costante} \quad , \quad (9.39)$$

nota come *seconda legge di Curie*; ρ è la densità della sostanza e C una costante, detta *costante di Curie*. La temperatura di Curie del ferro è $T_C = 1043$ K = 770°C .

Nella tabella 9.4 sono riportati alcuni dati relativi a materiali ferromagnetici; si noti come le proprietà magnetiche dipendano fortemente dalla composizione.

Tabella 9.4

	$\kappa_{m,d}(H=0)$	$\kappa_{m,d}(\max)$	H_c (A/m)	$\mu_0 M_{sat}$ (T)
ferro puro (99.95%)	10^4	$2 \cdot 10^5$	4	2.16
ferro-silicio (0.5%)	280	$3 \cdot 10^3$	72	2.14
ferro-silicio (6.5%)	1390	$6.7 \cdot 10^4$	16	1.81
ferro-nichel (45%)	$3.5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	5.6	1.60
ferro-nichel (65%)	$3 \cdot 10^4$	10^6	0.8	1.40
ferro-nichel (78%)	$8 \cdot 10^3$	10^5	4.0	1.08
ferro 16%-nickel 79%-molibdeno 5%	10^5	10^6	0.3	0.79

I valori di H_m (a cui si raggiunge la saturazione) sono in generale modesti, inferiori a 10^3 A/m e si vede che $\mu_0 M_{sat} \gg \mu_0 H_m$: il contributo del mezzo è largamente predominante. Si capisce anche come non sia conveniente operare oltre H_m : un aumento esiguo di B richiede enormi aumenti di corrente, con conseguente spesa di potenza: infatti raramente un mezzo ferromagnetico è usato oltre la saturazione.

Dovrebbe adesso risultare più chiaro il richiamo alla cautela nell'utilizzazione di (9.21) per i mezzi ferromagnetici: il valore della suscettività χ_m dipende dallo stato (H, B) in cui si trova il materiale e quindi non c'è semplice proporzionalità tra M e H . Formalmente si può conservare la scrittura $M = \chi_m H$, ma con un valore del coefficiente diverso in ogni stato: ad esempio, nel solenoide toroidale prima citato, se per un dato valore i della corrente si ha un valore di B , al valore $2i$ non corrisponde un campo magnetico doppio, come avviene nel vuoto o in un comune mezzo magnetico, bensì bisogna conoscere il nuovo valore di χ_m per calcolare B . Solo nel caso dei materiali con ciclo di isteresi stretto come in figura 9.28, curva 2, si può assumere χ_m costante in un certo intervallo di H .

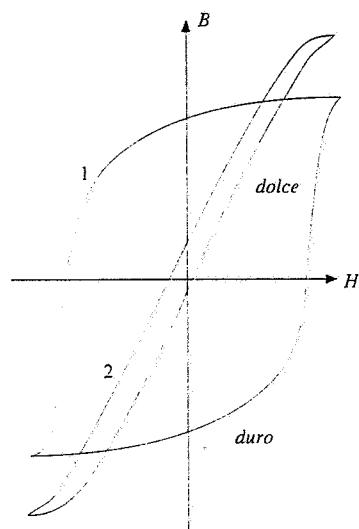


Figura 9.28

9.8 Circuiti magnetici

Il dispositivo con cui abbiamo eseguito la determinazione del ciclo di isteresi, descritta nel paragrafo 9.7, è il più semplice esempio di *circuito magnetico*. Le relazioni tra corrente i che percorre le N spire del solenoide, campo \mathbf{H} e campo \mathbf{B} sono

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = Ni \quad , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad ;$$

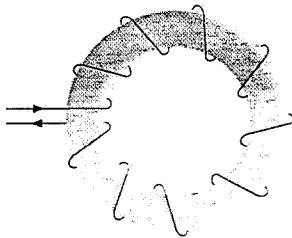


Figura 9.29

μ è la permeabilità del toroide di materiale ferromagnetico su cui sono avvolte le spire. Se μ è abbastanza elevata le linee di \mathbf{B} e \mathbf{H} sono praticamente contenute tutte all'interno del mezzo e diciamo che attraverso la superficie esterna del toroide non c'è flusso del campo magnetico \mathbf{B} ovvero non c'è *flusso disperso* nel mezzo che circonda il toroide. Dato che \mathbf{B} è solenoidale, segue che il flusso di \mathbf{B} è costante attraverso qualsiasi sezione del materiale:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = B\Sigma = \text{costante}$$

L'espressione $B\Sigma$ vale se si può considerare \mathbf{B} costante sulla sezione oppure se si prende il valor medio di \mathbf{B} sulla sezione. Conseguenza del confinamento del campo magnetico è che non è essenziale avvolgere le spire su tutto l'anello, ma che è sufficiente concentrarle in una regione limitata, come mostrato in figura 9.30.

Mettiamo insieme le relazioni scritte, supponendo \mathbf{H} parallelo a $d\mathbf{s}$ e ricordando che Φ è costante:

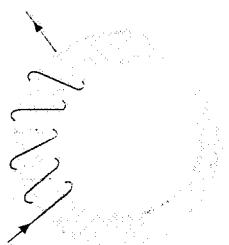


Figura 9.30

$$Ni = \oint H ds = \oint \frac{B}{\mu} ds = \Phi \oint \frac{ds}{\mu \Sigma}$$

Se definiamo *forza magnetomotrice* (f.m.m.) e *riluttanza del circuito* rispettivamente le grandezze

Forza magnetomotrice

$$\mathcal{F} = \oint H ds = Ni \quad , \quad (9.40)$$

Riluttanza

$$\mathcal{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma} \quad , \quad (9.41)$$

otteniamo la *legge di Hopkinson*

Legge di Hopkinson

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi \quad , \quad (9.42)$$

che è la legge fondamentale per il calcolo dei circuiti magnetici, riunendo in sé tutte le caratteristiche e le proprietà del sistema. La sua utilizzazione si può schematizzare come segue: nota la geometria del circuito e la permeabilità del mezzo, dalla conoscenza della corrente nell'avvolgimento si risale al flusso e quindi al valore (medio) del campo magnetico lungo il circuito oppure, al contrario, si può calcolare la corrente necessaria per produrre un dato campo magnetico. Naturalmente il valore della permeabilità dovrebbe essere quello corrispondente allo stato (H, B) del materiale, dedotto dal ciclo di isteresi: ma nella (9.42) o H o B sono incogniti e la legge viene usata proprio per determinare uno essendo noto l'altro. Essa si può pertanto applicare utilmente solo a quei materiali ferromagnetici con ciclo di isteresi molto stretto e limitatamente alle regioni in cui l'andamento di B con H è lineare: oppure, per calcoli approssimati, si può utilizzare un appropriato valore medio di μ . Vedremo nel paragrafo 9.9 un metodo di soluzione alternativo più generale.

Confrontiamo il risultato ottenuto con quanto sappiamo valere in un circuito elettrico percorso da una corrente continua:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathcal{F} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$i = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

$$R = \oint \frac{ds}{\sigma \Sigma} \quad \mathcal{R} = \oint \frac{ds}{\mu \Sigma}$$

$$\mathcal{E} = R i$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \Phi$$

Si nota che le espressioni sono eguali se si scambiano tra loro

$$E, H \quad j, B \quad \sigma, \mu \quad i, \Phi \quad R, \mathcal{R} \quad \mathcal{E}, \mathcal{F}$$

L'analogia è solo formale: in un circuito elettrico la corrente corrisponde ad un moto di cariche, mentre in un circuito magnetico non c'è nessun moto alla base del flusso di \mathbf{B} . La f.e.m. \mathcal{E} fornisce l'energia necessaria al moto delle cariche, che viene dissipata nella resistenza R ; invece \mathcal{F} e \mathcal{R} non corrispondono fisicamente ad elementi che forniscono ed assorbono energia. Tuttavia l'analogia è utile perché ci permette di applicare ai circuiti magnetici i risultati ricavati per i circuiti elettrici, in particolare quelli relativi a collegamenti in serie e in parallelo.

Ad esempio, se nel circuito magnetico c'è un'interruzione in aria (detta *interferro o trasferro*), di lunghezza s_2 piccola rispetto alla lunghezza s_1 del tratto in ferro e anche rispetto alle dimensioni trasverse del circuito, si può trascurare la deformazione delle linee di \mathbf{B} dovuta alla rifrazione nel passaggio ferro-aria e supporre che il circuito abbia sempre la stessa sezione. La *riluttanza totale* è data dalla somma delle due riluttanze in serie.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{s_1}{\mu \Sigma} + \frac{s_2}{\mu_0 \Sigma} = \frac{s_1 + \kappa_m s_2}{\mu \Sigma}$$

e si vede che il piccolo tratto s_2 tanto più contribuisce alla riluttanza totale quanto maggiore è κ_m . Facilmente si può avere che $\kappa_m s_2$ sia maggiore di s_1 : il tratto a permeabilità minore è il più importante, come in un circuito elettrico il conduttore a conduttanza minore, ovvero resistenza maggiore, è predominante in un collegamento in serie.

Unità di misura

La forza magnetomotrice si misura in ampere mentre la riluttanza \mathcal{R}/Φ si misura in $\text{A/Wb} = \text{H}^{-1}$.

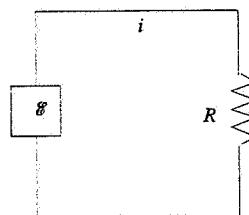
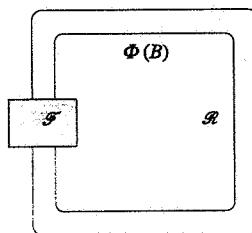


Figura 9.31

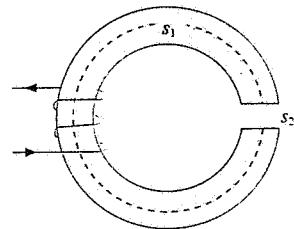


Figura 9.32

Esempio 9.7

Una bobina di $N = 200$ spire percorse dalla corrente $i = 5 \text{ A}$ è avvolta su un anello toroidale di isoperimetro ($\kappa_m = 60$), di lunghezza media $L = 50 \text{ cm}$ e sezione $\Sigma = 5 \text{ cm}^2$. Calcolare il valore del campo magnetico e ripetere il calcolo se nel circuito c'è un interferro di spessore $h = 5 \text{ mm}$.

Soluzione

Secondo (9.40), (9.41), (9.42)

$$\mathcal{F} = N i = 10^3 \text{ A} \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{L}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 1.33 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad , \quad \Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = 7.54 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

Il campo magnetico vale $B = \Phi / \Sigma = 0.151 \text{ T}$, risultato che si ottiene anche più rapidamente seguendo l'esempio 9.1. Però, in presenza di interferro, il metodo adesso sviluppato porta subito al risultato:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' &= \frac{L-h}{\mu \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = \frac{L-h+\kappa_m h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \frac{L+(\kappa_m-1)h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \mathcal{R} + \frac{(\kappa_m-1)h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = \\ &= 1.33 \cdot 10^7 + 0.78 \cdot 10^7 = 2.11 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad , \end{aligned}$$

$$\Phi' = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = 4.74 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \quad , \quad B' = \frac{\Phi'}{\Sigma} = 0.095 \text{ T} .$$

Si vede che 0.5 cm di aria su una lunghezza totale di 50 cm (effetto dell'1%) producono una riluttanza confrontabile con quella del ferro e una riduzione del campo magnetico al 63% del valore senza interferro ($B' = 0.63 B$).

Il campo magnetico è lo stesso sia nel ferro che nell'aria, invece il campo **H** cambia:

$$H_1 = \frac{B'}{\mu_0 \kappa_m} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ A/m} \quad , \quad H_2 = \frac{B'}{\mu_0} = \kappa_m H_1 = 7.56 \cdot 10^4 \text{ A/m} .$$

Si verifica che entro le approssimazioni di calcolo $H_1(L-h) + H_2 h = Ni$. Se la permeabilità del materiale fosse maggiore, ad esempio di un ordine di grandezza, nel caso senza interferro la riluttanza diminuirebbe di un fattore 10 e il campo magnetico aumenterebbe di un fattore 10, a parità di forza magnetomotrice. Nel caso con interferro invece la riluttanza decresce poco, perché il contributo dell'interferro è praticamente costante, e il campo magnetico aumenta poco, portandosi a 0.216 T. Al limite, per κ_m molto grande, mentre B cresce proporzionalmente, B' tende al valore $\mu_0 N i / h$ indipendente da κ_m e pari a 0.251 T; non è quindi molto utile, in questo caso, utilizzare materiali con κ_m elevata.

Esempio 9.8

Nel circuito magnetico della figura $N = 200$, $s_1 = 30 \text{ cm}$, $s_2 = 20 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ mm}$, la sezione del ferro è $\Sigma = 5 \text{ cm}^2$, la permeabilità relativa è $\kappa_m = 250$. Calcolare l'intensità i della corrente nella bobina se il campo magnetico nell'interferro deve valere $B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

Soluzione

Il flusso di **B** attraverso qualsiasi sezione del ramo *QRST* deve essere

$$\Phi_2 = B\Sigma = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

Tale ramo è in parallelo al ramo *QT* e quindi $\mathcal{R}_1 \Phi_1 = \mathcal{R}_2 \Phi_2$ con

$$\mathcal{R}_1 = \frac{s}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 6.37 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1} \quad , \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2s_2 + s - h}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = 7.94 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} .$$

Segue $\Phi_1 = \mathcal{R}_2 \Phi_2 / \mathcal{R}_1 = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ e il flusso totale vale

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 3.37 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} .$$

La riluttanza del ramo *TVPQ* è

$$\mathcal{R}_3 = \frac{2s_1 + s}{\mu_0 \kappa_m \Sigma} = 4.46 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

e la riluttanza totale del circuito è

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 + \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = 5.05 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} .$$

La f.m.m. necessaria è

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi = 1.70 \cdot 10^3 \text{ A} \Rightarrow i = \frac{\mathcal{F}}{N} = 8.5 \text{ A} .$$

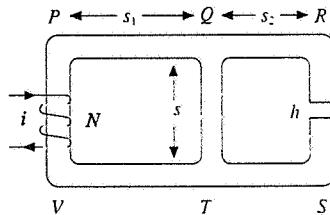


Figura 9.33

Gli esempi precedenti chiariscono il significato di (9.42) e il suo uso in analogia con la legge di Ohm (6.26). Il valore del campo magnetico ottenibile con una data corrente nell'avvolgimento è inversamente proporzionale alla riluttanza del circuito magnetico; poiché questa aumenta notevolmente se è presente un interferro, in tale evenienza viene ridotto il campo magnetico, a parità di corrente. Ciò può sembrare dannoso; bisogna però pensare che una delle ragioni per cui si producono campi magnetici intensi, impiegando materiali ferromagnetici per il grande apporto fornito dalla loro magnetizzazione, sta nella necessità di applicarli a sistemi che acquistano di conseguenza particolari proprietà o in cui si vogliono compiere misure che sfruttano la presenza di \mathbf{B} . Occorre pertanto disporre di campi magnetici in aria e non soltanto nel ferro, dove non si possono introdurre apparecchiature.

Non si praticano invece interferri in quelle situazioni nelle quali si vuole semplicemente convogliare tutto il flusso magnetico attraverso un dato circuito. Ad esempio, se su un toroide di ferro si mettono due avvolgimenti, anche in posti diversi, praticamente tutto il flusso prodotto da uno è concatenato con l'altro. Con riferimento a quanto visto nel paragrafo 8.5, il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti aumenta per la presenza del ferro, sia perché il campo magnetico è maggiore (a parità di corrente) sia perché, come appena detto, si ha una concatenazione quasi completa delle linee di campo tra i due circuiti; un'applicazione pratica si ha nei trasformatori (paragrafo 10.8 ed esempio 11.5). Il fatto di avvolgere il filo percorso da corrente su un materiale ferromagnetico ha anche, per le stesse ragioni, l'effetto di fare aumentare il coefficiente di autoinduzione del circuito stesso: per i casi trattati nell'esempio 8.11 l'aumento è di un fattore κ_m .

Un'osservazione di carattere diverso, che si ricollega a quanto detto verso la fine del paragrafo 9.6, è la seguente: nel circuito magnetico, purché senza interferro, \mathbf{H} ha sempre lo stesso valore qualunque sia il mezzo, come dice la (9.24) per il caso del solenoide toroidale: esso cioè dipende solo dalla corrente di conduzione. Non appena si pratica un interferro \mathbf{H} subisce una modifica ed è diverso nei due mezzi: questo senza aver cambiato la corrente i . Quando sono distrutte le condizioni di simmetria del mezzo si vede che \mathbf{H} dipende dalle correnti di magnetizzazione.

In sostanza si può dire questo per spiegare i casi considerati: finché il mezzo è continuo, \mathbf{B} dipende dalle correnti di conduzione secondo il fattore $\mu_0(1 + \chi_m)$, \mathbf{M} ne dipende secondo il fattore χ_m ed è evidente che $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}$ non dipende da χ_m . Non appena viene introdotta una discontinuità del mezzo, che non sia tangente alle linee di campo, la situazione cambia: per semplicità, se la discontinuità del mezzo è ortogonale alle linee di campo, \mathbf{B} non subisce variazione, ma \mathbf{M} sì e $\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}$ non può restare inalterato, anche se la configurazione delle correnti di conduzione è inalterata. Quindi in generale \mathbf{H} dipende anche dalle correnti amperiane.

9.9 Elettromagneti. Magneti permanenti

Si è già osservato nel paragrafo 9.8 che il più semplice circuito magnetico è l'anello toroidale riempito di materiale ferromagnetico (vedi anche l'esempio 9.1). Se il valore di μ è abbastanza elevato le linee di \mathbf{B} e \mathbf{H} stanno praticamente tutte all'interno del ferro, cioè nessuna attraversa la superficie esterna: si dice allora che non c'è flusso disperso verso l'esterno e, come conseguenza, il flusso di \mathbf{B} è costante attraverso qualsiasi sezione del circuito. Non è pertanto necessario distribuire le spire lungo tutto l'anello, ma basta concentrarle in una regione limitata (fig. 9.30).

Queste considerazioni restano valide se nel circuito magnetico c'è una interruzione (interferro o traferro) di lunghezza h piccola rispetto alla lunghezza media complessiva s del circuito magnetico. Il sistema, mostrato in figura 9.34, costituisce lo schema di base degli *elettromagneti*, cioè di quei dispositivi che, alimentati da una o più bobine, producono un campo magnetico in una regione di spazio accessibile. Dalla costanza di $\Phi(\mathbf{B})$ segue che nel passaggio ferro-aria \mathbf{B} è continuo e \mathbf{H} discontinuo secondo la relazione

$$B = \mu H = \mu_0 H_0$$

La legge di Ampère (9.19) applicata a una linea tutta interna al circuito e che conca-

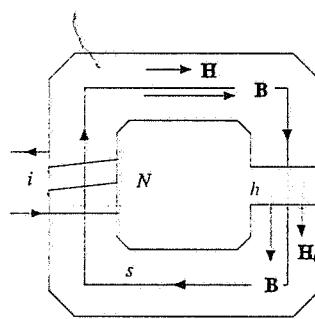


Figura 9.34

tene la bobina di alimentazione dà

$$H(s-h) + H_0 h = Ni$$

Facendo sistema con la legge di Ampère ed eliminando H_0 otteniamo

$$B = \mu_0 \frac{s-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} \quad (9.43)$$

Nel ferro devono dunque valere contemporaneamente due relazioni tra H e B , quella corrispondente al ciclo di isteresi del materiale e la (9.43) derivata dalla legge di Ampère e dipendente dalle caratteristiche geometriche e dalla bobina.

Nel piano (H, B) la (9.43) è una retta a pendenza negativa, $-\mu_0(s-h)/h$, in cui compaiono solo i parametri geometrici; le sue intercette sono

$$H^* = \frac{Ni}{s-h} \quad , \quad B^* = \mu_0 \frac{Ni}{h}$$

Fissata la geometria, e quindi la pendenza, al variare della corrente la retta si sposta parallelamente a se stessa, essendo fissato il limite dal massimo valore di Ni di progetto, a sua volta dipendente dalla massima temperatura tollerabile nella bobina, dove viene dissipata energia per effetto Joule. I possibili punti di funzionamento sono determinati dall'intersezione della retta con il ciclo di isteresi; per una data corrente sono possibili tutte le soluzioni comprese tra c e b , a seconda di come è stato raggiunto il valore i della corrente.

Ad esempio, se partiamo con ferro nello stato vergine e corrente nulla, all'aumentare della corrente la soluzione è data dall'intersezione della retta con la curva di prima magnetizzazione: per una data corrente i_o , supponiamo che sia a . Aumentiamo ancora la corrente fino a che l'intersezione coincide con il punto S_1 , dove inizia la saturazione, e poi riportiamo la corrente al valore i_o : questa volta il punto di funzionamento è b . Se portiamo la corrente a zero, ne invertiamo il verso, raggiungiamo l'intersezione S_2 e torniamo indietro fino al valore i_o , il punto di funzionamento sarà c . Così procedendo, il punto di funzionamento coincide sempre con un punto del ciclo, ma con diverse procedure di variazione di corrente si può ottenere qualsiasi altro punto interno, cioè compreso tra c e b .

È interessante discutere l'effetto dell'interferro. Consideriamo inizialmente l'assenza di interfero, $h = 0$. La (9.43) è una retta di equazione $H = Ni/s$ parallela all'asse B , che interseca il ciclo di isteresi lungo un tratto verticale, su cui stanno le possibili soluzioni: è la situazione già vista nella figura 9.25 del paragrafo 9.7, dove abbiamo introdotto il ciclo di isteresi. La presenza dell'interfero fa ruotare la retta in senso antiorario, tanto più quanto maggiore è l'interfero, pur dovendo restare $h \ll s$: nel caso considerato in figura 9.36 a parità di corrente i punti b e a scendono al di sotto di b' e a' , mentre c sale rispetto a c' , e quindi si può avere un campo magnetico che è minore o maggiore rispetto a quello senza interfero.

Osserviamo un'altra conseguenza della forma del ciclo di isteresi, che non si avrebbe con una relazione B, H univoca e passante per l'origine: sono possibili stati di funzionamento con vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} opposti (punti nel secondo e quarto quadrante). Questo perché, una volta magnetizzato, il ferro conserva la propria magnetizzazione ed occorre un'azione contraria, a volte piuttosto intensa, per riportare a zero ed invertire la magnetizzazione: nelle fasi del processo si realizzano appunto situazioni con \mathbf{H} in un verso e \mathbf{B} e \mathbf{M} nell'altro o \mathbf{B} e \mathbf{H} in un verso e \mathbf{M} nell'altro, ovvero situazioni in cui la suscettività assume valori negativi. Bisogna però dire che i punti

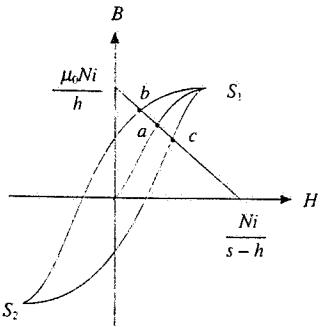


Figura 9.35

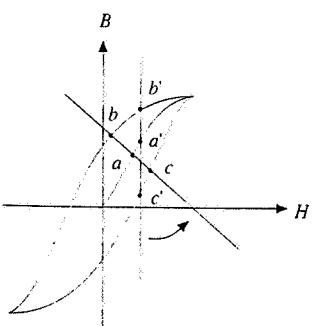


Figura 9.36

di funzionamento usuali sono quelli con \mathbf{H} e \mathbf{B} dello stesso verso, a correnti piuttosto elevate; gli altri stati sono attraversati se si effettua una transizione da $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ma non sono comunemente usati per la semplice ragione che si cerca di ottenere il massimo valore di B .

Come avviene per la maggior parte degli strumenti anche un elettromagnete viene acceso, portato a regime, dove resta durante il periodo di utilizzazione, e poi spento; questa successione di operazioni viene ripetuta un numero indefinito di volte, con la variante che il valore di B può essere diverso di volta in volta, a seconda dello scopo specifico. È chiaro che sarebbe molto conveniente sia avere un campo residuo nullo quando la corrente è portata a zero sia essere in grado di conoscere il valore del campo per un dato valore di corrente, sebbene questo sia raggiunto. Dalla discussione finora svolta ricaviamo che tali proprietà richiedono un *ciclo di isteresi molto stretto*, come quello della figura 9.28 e, in effetti, le leghe utilizzate per la costruzione di elettromagneti vengono ottimizzate in tal senso.

Il valore massimo del campo magnetico ottenibile con un elettromagnete del tipo descritto è di circa 2 T; esso coincide sostanzialmente con $\mu_0 M_{sat}$ (tab. 9.4) in quanto ulteriori aumenti possono venire soltanto dal termine $\mu_0 H$, cioè aumentando la corrente nell'avvolgimento ma, come si è già osservato, tali aumenti sono molto piccoli e richiedono grandi spese di energia. In pratica quindi i valori massimi sono limitati appunto a circa 2 T nei dispositivi che abbiamo descritto. Se è necessario disporre di un campo magnetico in volumi molto grandi si ricorre più spesso al solenoide in aria (ne sono stati realizzati con diametri di qualche metro e lunghezze pari a due o tre diametri), ma in tal caso si arriva nel centro a campi magnetici di $0.5 \div 1$ T.

Questi limiti sono stati superati impiegando *bobine superconduttrici*, nelle quali si sfrutta l'annullamento della resistività di certi conduttori al di sotto di una temperatura critica (vedi paragrafo 6.5). È possibile quindi far circolare correnti molto elevate, dell'ordine di 10^4 A, senza avere i problemi di dissipazione di energia (effetto Joule) presenti nei conduttori ordinari. Basandosi su tale tecnologia sono stati costruiti solenoidi in aria molto grandi con campi magnetici vicini a 2 T e si sono raggiunti stabilmente campi di 10 T in magneti più compatti e con geometria diversa, realizzabili in quanto le sezioni dei conduttori restano limitate pur con correnti così intense. Il funzionamento dei magneti superconduttori richiede temperature di qualche Kelvin: pertanto le bobine devono essere termicamente isolate dall'ambiente e occorre un impianto criogenico, con impiego di elio liquido, per mantenere tali temperature. Tutto ciò ne limita l'impiego e si capisce l'interesse per la ricerca di materiali che siano superconduttori a temperature più elevate, come quella dell'azoto liquido (77 K) o addirittura dell'ambiente.

Il magnete della figura 9.34 è chiamato magnete a C per la forma del circuito magnetico: qui accanto è disegnato un magnete ad H. Le figure sono sezioni e si intende che il magnete si sviluppa ortogonalmente al foglio. La forma delle facce dell'interferro, chiamate poli dell'elettromagnete, è quella di un rettangolo, ma sono possibili sagome qualsiasi.

Quando i poli sono paralleli il campo magnetico nell'interferro è uniforme e ortogonale alle facce polari, ad eccezione delle zone vicine ai bordi, dove le linee di campo escono dall'interferro e il modulo del campo è minore. L'approssimazione di campo uniforme è tanto migliore quanto più lo spessore h è piccolo rispetto alle dimensioni trasverse, anche se le linee devono sempre incurvarsi verso l'esterno, altrimenti sarebbe violata la legge di Ampère (8.27). Infatti, per un percorso chiuso che non concatene nessuna corrente e sia parzialmente esterno all'interferro, la circuitazione di \mathbf{B} deve essere nulla e ciò è possibile solo se \mathbf{B} ha un valore diverso da zero anche all'esterno dell'interferro (si veda l'analogo ragionamento fatto per il campo elettrico in un condensatore piano, paragrafo 4.5).

Se le facce polari non sono parallele il campo non è più uniforme, poiché è infe-

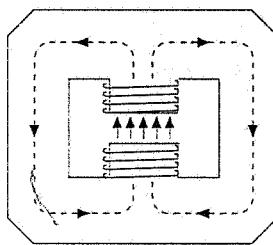


Figura 9.37

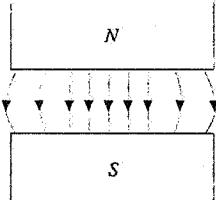


Figura 9.38

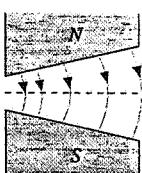


Figura 9.39

riore in modulo dove la spaziatura è maggiore (lo si dimostri sempre applicando la legge di Ampère) e acquista una componente trasversa.

I magneti con due poli sono detti *magneti dipolari* o anche semplicemente *dipoli*. Vedremo una disposizione con più poli nel successivo esempio 9.10.

Esempio 9.9

Un magnete a C, con circuito magnetico di lunghezza complessiva $s = 1.01 \text{ m}$ e interferro $h = 1 \text{ cm}$, è alimentato da $N = 20$ spire percorse dalla corrente i . Il materiale di cui è costituito ha il ciclo di isteresi della figura 9.40. Calcolare il valore del campo magnetico se la corrente è portata al valore $i = 500 \text{ A}$ partendo dallo stato vergine. Calcolare inoltre il valore di B per tale corrente, ma in assenza di interferro, e il valore di B con interferro e senza interferro quando la corrente viene portata a zero in modo tale che il sistema percorra la curva b .

Soluzione

La retta (9.43) ha l'equazione, per $i = 500 \text{ A}$,

$$B = -1.257 \cdot 10^{-4} H + 1.257$$

e le sue intercette sono

$$H^* = 10^4 \text{ A/m} , \quad B^* = 1.257 \text{ T} .$$

Essa incontra la curva di prima magnetizzazione nel punto di coordinate

$$H_A = 2 \cdot 10^3 \text{ A/m} , \quad B_A = 1 \text{ T} ,$$

trovato per via grafica in figura 9.40; nell'interferro il valore di B è lo stesso che nel ferro.

Se non ci fosse interferro l'equazione della retta sarebbe

$$H = \frac{Ni}{s} = \frac{10^4}{1.01} \simeq 10^4 \text{ A/m}$$

e dall'intersezione con il ciclo di isteresi, che è nella zona di saturazione, si ha $B_s = 1.6 \text{ T}$. Quando la corrente è ridotta a zero nel modo detto e siamo in presenza di interferro, la retta passa per l'origine e incontra il ciclo di isteresi nel punto P di coordinate

$$H_p \simeq -2.8 \cdot 10^3 \text{ A/m} , \quad B_p \simeq 0.35 \text{ T} .$$

Al punto P il sistema arriva percorrendo la curva A a S b P ; nell'interferro B ha lo stesso valore B_p .

Infine, in assenza di corrente e di interferro, B ha il valore residuo $B_r = 1 \text{ T}$, che si ricava dal grafico. In entrambi i casi il ferro resta permanentemente magnetizzato. Torneremo tra poco più in generale sull'argomento magneti permanenti.

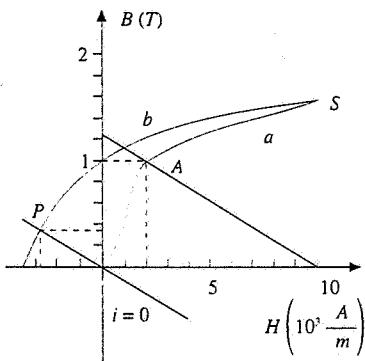


Figura 9.40

Esempio 9.10 Quadrupolo magnetico

Consideriamo un magnete con quattro espansioni polari la cui sezione è mostrata in figura 9.41: la sagoma dei poli corrisponde all'equazione $x/y = \text{costante}$, cioè è iperbolica. La situazione ricorda quella dell'esempio 4.25 e la figura 4.55 è identica alla 9.41. Riprendiamo quanto detto nel paragrafo 8.7 sul fatto che nel vuoto le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica sono identiche e risolviamo il problema del calcolo magnetico nella zona centrale vuota rifacendoci alla soluzione dell'analogo problema elettrostatico. In questo i quattro poli sono quattro conduttori, ciascuno equipo-

tenziale con valore del potenziale $V_0 = \pm k x y$, che è l'equazione delle superfici equipotenziali coincidenti con i poli. La funzione $V(x, y) = k x y$, eguale su ciascun conduttore al potenziale del conduttore è, per il teorema di unicità, la soluzione dell'equazione di Laplace nel caso considerato e da essa si può ricavare il campo con l'operazione di gradiente. Passando direttamente al campo magnetico, le sue componenti sono

$$B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k y, \quad B_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -k x, \quad B_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Quindi in un quadrupolo magnetico come quello della figura 9.41, che si sviluppa ortogonalmente al disegno lungo l'asse z , il campo magnetico sta nel piano x, y del disegno ed è dato da

$$\mathbf{B} = -k y \mathbf{u}_x - k x \mathbf{u}_y.$$

Le linee di campo sono indicate in figura; le assegnazioni nord e sud ai poli sono coerenti col fatto che le linee sono uscenti dai poli nord e entranti nei poli sud.

Una particella carica positivamente che esca ortogonalmente dal disegno con velocità $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_z$ subisce la forza di Lorentz (7.5)

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q v \mathbf{u}_z \times (-k y \mathbf{u}_x - k x \mathbf{u}_y) = k q v (x \mathbf{u}_x - y \mathbf{u}_y).$$

Si verifica facilmente che qualunque sia il punto $P(x, y)$ la componente F_x allontana la particella dalla zona centrale, mentre la componente F_y la avvicina, essendo l'effetto proporzionale alla distanza. Si dice che il quadrupolo *defocalizza* in x e *focalizza* in y . Un quadrupolo ruotato di 90° (poli nord e sud scambiati) fa l'effetto opposto e si dimostra che l'effetto complessivo di una coppia di quadrupoli siffatti attraversati successivamente dalla particella è *focalizzante* sia in x che in y . Per questa ragione una coppia di quadrupoli magnetici è detta anche *lente magnetica convergente*.

Intuitivamente si capisce che la somma di un'azione divergente più una convergente è complessivamente convergente osservando la figura 9.42 che rappresenta la traiettoria idealizzata di una particella proiettata nel piano x, z . Il primo quadrupolo allontana la particella dall'asse z così che essa passa nel secondo a distanza maggiore dall'asse z : nel secondo l'azione è focalizzante ed è in modulo maggiore che nel primo perché la forza è lineare con la distanza; in totale la particella è riportata verso l'asse. Il ragionamento vale anche per la somma di un'azione convergente e di una divergente: per convincersi basta guardare la figura 9.42 da destra verso sinistra invece che da sinistra verso destra. E tutto può essere ripetuto per il quadrupolo elettrostatico dell'esempio 4.25.

Negli acceleratori circolari di particelle detti *sincrotroni* le particelle sono guidate lungo l'orbita da magneti dipolari, disposti lungo una circonferenza e con campo magnetico ortogonale al piano (orizzontale) della circonferenza: la forza di Lorentz $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ esercita la necessaria azione centripeta. È però difficile tenere circa 10^{13} particelle (protoni o elettroni) su un'orbita esatta eguale per tutte: oltre a una componente della velocità tangente alla circonferenza ideale esse hanno inevitabilmente una (piccola) componente trasversa, per cui l'orbita reale tende a divergere. Si ovvia a questo fatto con *copie di quadrupoli*, intercalate tra i dipoli, che esercitano un'*azione focalizzante*: come risulta l'orbita reale delle particelle oscilla intorno all'orbita ideale e si riesce a mantenerle in orbita per tempi molto lunghi. Si noti che i campi magnetici descritti non danno mai accelerazione tangente; per comunicare energia alle particelle sono disposte lungo la macchina cavità acceleratrici in cui agiscono opportuni campi elettrici. D'altra parte per ovvie ragioni costruttive, avvenendo il moto delle particelle all'interno di un tubo in cui è praticato un altro vuoto, il raggio di curvatura deve rimanere costante: quindi, secondo (7.7), durante il processo di accelerazione il campo magnetico nei dipoli deve aumentare man mano che aumenta l'energia delle particelle.

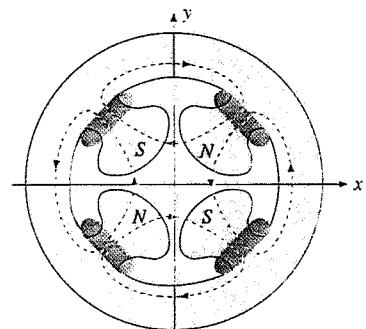


Figura 9.41

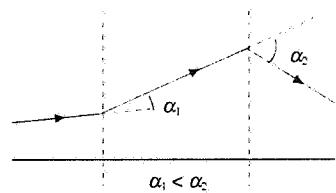


Figura 9.42

Magneti permanenti

Ritorniamo all'elettromagnete a C e supponiamo, dopo averlo portato alla saturazione, di ridurre a zero la corrente, come descritto nell'esempio 9.9. Il ferro

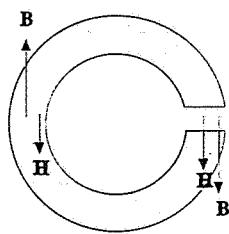
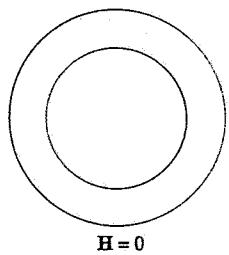
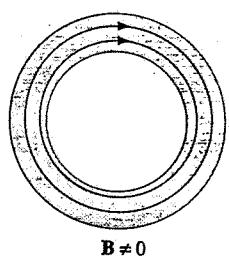


Figura 9.43

resta magnetizzato e il campo magnetico residuo è tanto maggiore quanto più squadrato è il ciclo di isteresi (e piccolo lo spessore dell'interferro); poiché in tal caso è generalmente grande il campo coercitivo, risulta difficile smagnetizzare il ferro.

Ponendo $i = 0$ nella (9.43) si ha

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \frac{s-h}{h} \mathbf{H}$$

Da una parte questa relazione ci permette di trovare graficamente il valore di \mathbf{B} col metodo dell'intersezione col ciclo di isteresi, dall'altra ci mostra che all'interno di un magnete permanente \mathbf{B} e \mathbf{H} sono *opposti*. In effetti, dato che nell'interferro \mathbf{B} e \mathbf{H} sono concordi, solo così è possibile soddisfare (9.19) con $i = 0$. Se non ci fosse interfero il campo magnetico avrebbe il valore residuo B_r della figura 9.25 e il campo \mathbf{H} sarebbe nullo. È la presenza dell'interfero che comporta \mathbf{H} diverso da zero e discontinuo all'interfaccia ferro-aria.

Una configurazione di magnete permanente completamente diversa dalla calamita a C è quella del *magnete cilindrico* (vedi figura 9.18). Ricordiamo che un cilindro di ferro magnetizzato uniformemente si ottiene ponendo il campione al centro di un solenoide rettilineo, dove esso acquista la magnetizzazione \mathbf{M} ; se il ciclo di isteresi è largo e squadrato possiamo assumere che il cilindro conservi la stessa magnetizzazione, praticamente \mathbf{M}_{sat} , anche quando è estratto dal solenoide. Il campo magnetico al centro ha l'espressione (9.34),

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2R^2}{d^2}\right) = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2\pi R^2}{\pi d^2}\right) = \mu_0 \mathbf{M} \left(1 - \frac{2\Sigma}{\pi d^2}\right)$$

dove Σ è l'area della sezione del cilindro; il campo \mathbf{H} , sempre al centro, vale

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = -\frac{2\Sigma}{\pi d^2} \mathbf{M} \quad (9.44)$$

ed è opposto a \mathbf{B} .

Se il cilindro è lungo e sottile ($R^2 / d^2 \ll 1$) il campo magnetico è praticamente eguale a $\mu_0 \mathbf{M}$ in tutti i punti interni mentre \mathbf{H} in tali punti è nullo.

Più in generale, per un cilindro di dimensioni qualsiasi il campo magnetico si calcola in tutti i punti, interni ed esterni, come quello di un solenoide finito avvolto sulla superficie esterna del cilindro e percorso dalla corrente di densità lineare M . Le linee di \mathbf{B} sono mostrate nella figura 9.44, insieme a quelle di \mathbf{H} dedotte dalla definizione (9.18).

Notiamo che i tre vettori \mathbf{B} , \mathbf{H} e \mathbf{M} non sono paralleli: a differenza di quanto abbiamo ammesso ad esempio per lo spazio interno di un solenoide toroidale o rettilineo indefinito oppure per la regione che circonda un filo rettilineo indefinito o anche per un anello ferromagnetico magnetizzato, le relazioni (9.21, 9.22, 9.23) non valgono adesso nemmeno formalmente; il risultato si estende ad un blocco ferromagnetico di forma qualsiasi uniformemente magnetizzato. Il fatto che la magnetizzazione \mathbf{M} non sia parallela al campo magnetico macroscopico locale (generato dal mezzo stesso) fa pensare che il momento magnetico elementare sia mantenuto in una direzione fissa da un'interazione che non è quella magnetica classica, come si vedrà nel paragrafo 9.12.

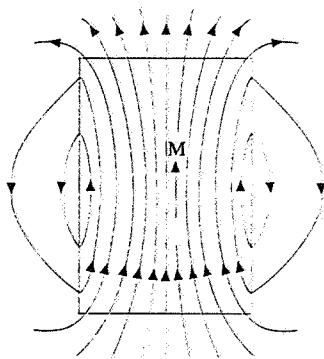
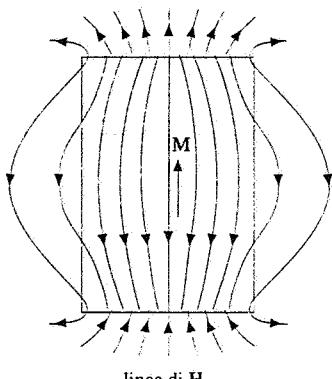


Figura 9.44

Ripetiamo che niente di simile si può realizzare con un mezzo non ferromagnetico: un cilindro uniformemente magnetizzato perché posto all'interno di un solenoide lungo si smagnetizza non appena è portato all'esterno in una regione dove il campo magnetico è nullo.

Se si realizzasse un cilindro dielettrico uniformemente polarizzato (\mathbf{P} costante), le linee di \mathbf{E} e \mathbf{D} sarebbero eguali rispettivamente a quelle di \mathbf{H} e \mathbf{B} della figura 9.44.

Osserviamo infine che nel caso di un magnete permanente, di qualsiasi forma, il campo \mathbf{H} è conservativo in quanto la sua circuitazione è sempre nulla in base a (9.19), non essendoci correnti di conduzione. Invece \mathbf{B} non è conservativo: la sua circuitazione, secondo (9.16), è proporzionale a quella di \mathbf{M} e quindi è nulla per percorsi completamente esterni al magnete, ma può essere diversa da zero per percorsi che passino all'interno del magnete.

Poli magnetici

La (9.44) si presta a una deduzione che è interessante per ragioni di carattere storico. Detta $r = d/2$ la distanza di ciascun polo dal centro del magnete, possiamo scrivere nel centro

$$\mathbf{H} = -\frac{2\sum}{\pi d^2} \mathbf{M} = 2 \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{\sum}{r^2} \mathbf{M} \right) = 2 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\Sigma M}{r^2} \right) \mathbf{u}_r ,$$

se \mathbf{u}_r è il versore dell'asse del cilindro, opposto a \mathbf{M} , che va cioè dal polo nord al polo sud. Nel centro entrambi i poli contribuiscono allo stesso modo e se indichiamo con $q^* = \sum M$ una quantità chiamata *massa magnetica del polo*, ricaviamo che un polo magnetico genera un campo \mathbf{H} dato da

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q^*}{r^2} \mathbf{u}_r .$$

espressione che costituisce la *legge di Coulomb per il campo \mathbf{H}* . La magnetizzazione sarebbe la massa magnetica per unità di superficie che si forma sui poli.

A partire da tali densità di masse magnetiche poste sui poli dei magneti permanenti si può costruire una *magnetostatica dei magneti permanenti* che segue la trattazione elettrostatica e che arriva agli stessi risultati per i calcoli di \mathbf{B} che si ottengono a partire dalle correnti amperiane. Il campo \mathbf{H} in quanto coulombiano è conservativo (come affermato prima con ragionamento diverso) e il suo flusso attraverso una superficie chiusa dipende dalla massa magnetica interna alla superficie: per la forza tra due masse si ottiene una formula tipo (7.1). Però non è concettualmente conveniente proseguire su questa strada: innanzitutto la nozione di massa magnetica non corrisponde ad alcuna realtà fisica, ci sono sorgenti differenti dell'interazione magnetica, come le correnti di conduzione, che generano un campo \mathbf{H} non conservativo ed, infine, è il campo \mathbf{B} che regola la forza agente su una carica elettrica e \mathbf{B} non ha in generale proprietà analoghe a quelle di \mathbf{E} .

Per queste ragioni la trattazione dei fenomeni magnetici si basa in modo unitario sulle correnti (di conduzione e amperiane); di conseguenza utilizziamo la dizione polo magnetico solo per indicare le facce terminali di un magnete di dimensioni finite, senza attribuire al termine nessun altro significato. Gli stessi nomi nord e sud servono per indicare il verso delle linee di \mathbf{B} .

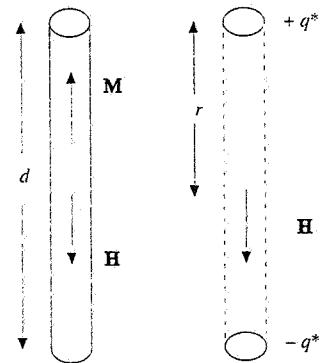


Figura 9.45

Nota. Forza di Lorentz e campo magnetico

La forza di Lorentz su una particella carica è stata espressa tramite il campo magnetico \mathbf{B} , ma nel vuoto possiamo anche esprimere la forza tramite il campo \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{H} .$$

Ci si può chiedere quale di queste due formulazioni sia rilevante e la questione si risolverebbe misurando la forza in un mezzo in cui \mathbf{B} e \mathbf{H} siano realmente diversi, come ad esempio in un blocco di ferro magnetizzato. L'esperimento non è facile da realizzare: in primo luogo esso è possibile solo con particelle cariche subatomiche, le uniche che possono attraversare uno spessore anche notevole. Si dovrebbe misurare la traiettoria delle particelle prima e dopo il blocco e dal calcolo della deviazione risalire alla forza agente. Siccome nell'attraversamento la particella interagisce con elettroni e nuclei, cedendo ad essi una parte della sua energia, occorre che la particella abbia una certa energia minima che dipende dallo spessore del blocco; e questo d'altra parte deve essere abbastanza spesso se si vuole avere un effetto di deviazione ben misurabile. Inoltre, poiché le interazioni suddette perturbano la traiettoria, disturbando la misura della deviazione magnetica, ma in modo che decresce con l'energia delle particelle, è bene che l'energia sia elevata anche per questo motivo.

Fino agli anni intorno al 1950 non esistevano acceleratori in grado di produrre particelle con energie sufficienti, però la questione venne risolta definitivamente nel 1944 utilizzando la radiazione cosmica. Nel 1937 era stata scoperta una componente carica penetrante nei raggi cosmici, con un ampio spettro di energia, successivamente identificata con il *leptone muon* e che si pensa principalmente originata dal decadimento di altre particelle prodotte in interazioni di protoni con i nuclei dei gas atmosferici. Misurando gli angoli di deflessione di muoni che attraversavano un blocco di ferro spesso 9 cm e magnetizzato con un campo interno $B = 1.5 \text{ T}$, Rasetti verificò che tali angoli erano in accordo col fatto che il campo agente fosse \mathbf{B} e non \mathbf{H} .

9.10 Correnti elettriche e momenti magnetici atomici

All'inizio del paragrafo 9.3 abbiamo anticipato che i fenomeni di magnetizzazione sono riconducibili ad alterazioni delle distribuzioni di correnti atomiche, dovute alla presenza di un campo magnetico. Prima di affrontare questo argomento, esaminiamo le correnti presenti in un atomo.

La struttura elettrica della materia è stata descritta nel paragrafo 1.2; la trattazione completa delle proprietà atomiche richiede l'impiego della meccanica quantistica. Tuttavia è sufficiente, per una spiegazione approssimata, ricorrere al modello di Bohr-Sommerfeld, in cui gli elettroni descrivono orbite circolari o ellittiche intorno al nucleo e soddisfano a determinate regole di quantizzazione (vedi paragrafo 2.3).

Consideriamo un elettrone che ruota attorno al nucleo lungo un'orbita circolare; il momento angolare \mathbf{L} del moto orbitale, costante in quanto la forza è centrale, vale in modulo

$$L = m_e v r , \quad (9.45)$$

essendo m_e la massa dell'elettrone, v la sua velocità e r il raggio dell'orbita; la direzione di \mathbf{L} è ortogonale al piano dell'orbita. Tale moto di rivoluzione, di periodo $T = 2\pi r/v$, corrisponde a una corrente di intensità $i = -e/T = -e v / 2\pi r$, dove il segno meno indica che la corrente ha verso opposto al moto dell'elettrone. In base al principio di equivalenza di Ampère (7.21) a questa corrente è associato il momento magnetico \mathbf{m} di modulo

$$m = i \pi r^2 = -\frac{e v r}{2} , \quad (9.46)$$

anch'esso ortogonale al piano dell'orbita, ma opposto a \mathbf{L} . Combinando (9.45) e (9.46) si ha

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (9.47)$$

che contiene soltanto costanti fondamentali. Questo fatto induce a sospettare che (9.47) sia *sempre valida* e in effetti si dimostra che è così, in qualsiasi sistema di forze centrali e anche se l'orbita non è circolare.

Concludiamo che ad ogni orbita elettronica sono associati un momento angolare e un momento magnetico, entrambi costanti e legati tra loro da (9.47). Il risultato ha un solido

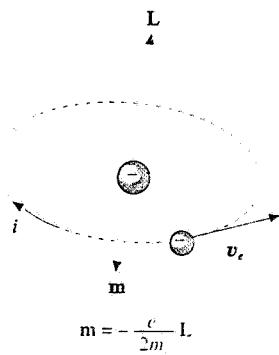


Figura 9.46

fondamento in quanto è valido anche nella trattazione quantistica. Sempre nel paragrafo 2.3 abbiamo visto che il valore di \mathbf{L} è quantizzato secondo la regola $L = (l + 1) \hbar$: anche il momento magnetico orbitale è dunque quantizzato, in unità $e \hbar / 2 m_e$. Ricordiamo che

$$\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$$

è la costante di Planck e che \hbar , da leggere *h tagliata*, è definita come

$$\hbar = \frac{\hbar}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV s} .$$

Analogamente, dato che la normale al piano dell'orbita può assumere solo determinate orientazioni rispetto ad una certa direzione (*quantizzazione spaziale*) e che ciò si traduce nel fatto che la proiezione di \mathbf{L} lungo quella direzione possa assumere solo i valori $m \hbar$, con m intero compreso tra $-l$ e $+l$, anche la proiezione del momento magnetico orbitale lungo quella direzione è quantizzata, sempre in unità $e \hbar / 2 m_e$.

Oltre al momento angolare orbitale esiste un'altra causa di momento magnetico a livello atomico, che non ha equivalente nella fisica classica. L'elettrone possiede un momento angolare intrinseco, che è detto *spin* e ha il valore

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2} \hbar \quad . \quad (9.48)$$

Allo spin dell'elettrone è associato il momento magnetico intrinseco

$$\mu_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S} = -2 \left(\frac{e}{2 m_e} \right) \mathbf{S} \Rightarrow \mu_e = \frac{e \hbar}{2 m_e} \quad . \quad (9.49)$$

La costante

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 0.9274 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 = 0.5788 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \quad (9.50)$$

è detta *magnetone di Bohr*. Sia dalla quantizzazione del momento magnetico orbitale che da (9.49) deduciamo che il magnetone di Bohr è il momento magnetico di riferimento per un elettrone atomico.

Anche il protone e il neutrone hanno uno spin, dato da (9.48), e un momento magnetico. Nell'unità

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2 m_p} = \frac{m_e}{m_p} \mu_B = 5.446 \cdot 10^{-4} \mu_B = 0.5051 \cdot 10^{-26} \text{ Am}^2 ,$$

detta *magnetone nucleare*, risulta

$$\mu_p = 2.793 \mu_N = 1.549 \cdot 10^{-3} \mu_B = 5.586 \frac{e}{2 m_p} |\mathbf{S}| ,$$

$$\mu_n = -1.913 \mu_N = -1.042 \cdot 10^{-3} \mu_B = -3.826 \frac{e}{2 m_p} |\mathbf{S}| .$$

Si tratta di valori molto minori di μ_B e per questa ragione i momenti magnetici legati ai componenti del nucleo vengono trascurati nella discussione del magnetismo atomico.

La presenza di un coefficiente diverso da 2 nella relazione tra μ e \mathbf{S} indica che il protone e il neutrone hanno una struttura non elementare, cioè non sono puntiformi come l'elettrone. Abbiamo già accennato alla struttura a *quark* (esempio 4.18) ed è alla dinamica dei costituenti che vanno attribuiti i valori cosiddetti *anomali* dei momenti magnetici dei nucleoni.



Figura 9.47

Se un atomo ha Z elettroni e per ogni orbita vale (9.47), la relazione tra il momento angolare orbitale risultante e il momento magnetico orbitale risultante è ancora (9.47), perché il fattore comune $e / 2m_e$ nella somma viene raccolto. Bisogna poi aggiungere il contributo che viene dai momenti magnetici intrinseci degli elettroni e in generale per un atomo in un certo stato il legame tra il momento angolare totale \mathbf{J} e il momento magnetico totale \mathbf{m} risulta essere

$$\mathbf{m} = -g \frac{e}{2m_e} \mathbf{J}, \quad (9.51)$$

dove g è un fattore caratteristico dello stato dell'atomo, che si chiama *rapporto giromagnetico* ed è sperimentalmente compreso tra 1 e 2: il valore è 1 se al momento angolare totale contribuiscono solo i moti orbitali, è 2 se invece il contributo viene solo dagli spin. La (9.51), che è quantisticamente corretta, afferma dunque che in un *atomo il momento magnetico è sempre parallelo e discorde al momento angolare*.

I possibili valori del momento angolare e quindi del momento magnetico di un atomo oltre che dalle regole di quantizzazione sono condizionati dal *principio di Pauli*, legge fondamentale della meccanica quantistica: esso afferma che *in un atomo due elettroni non possono stare nello stesso stato, cioè non possono avere tutti i numeri quantici eguali*. Ad esempio, nei primi tre elementi, idrogeno, elio, litio, considerati nello stato fondamentale, abbiamo che l'unico elettrone dell'idrogeno ha i numeri quantici $n = 1, l = 0, m = 0$ e può avere $m_s = 1/2$ o $m_s = -1/2$, indicando con m_s il numero quantico di spin; nell'atomo di elio i due elettroni hanno $n = 1, l = 0, m = 0$ e pertanto devono avere gli spin opposti, da cui segue che anche i momenti magnetici di spin sono opposti: nel litio il terzo elettrone deve stare in uno stato $n = 2, l = 0, m = 0$ ($m_s = \pm 1/2$) e così via. Si comprende l'importanza del principio di Pauli nella spiegazione delle proprietà che stanno alla base della *tavola periodica degli elementi*.

In definitiva, le situazioni che possono presentarsi per il momento magnetico di un atomo o di una molecola sono molteplici. Quando per ragioni di simmetria spaziale e a causa del principio di Pauli i momenti angolari orbitali e quelli di spin hanno risultante nulla (come avviene nei gas nobili) oppure si compensano dando ad ogni modo risultante nulla, abbiamo che il momento magnetico totale è nullo. Ciò avviene nella maggior parte delle sostanze e per queste l'unico effetto in presenza di un campo magnetico esterno è il *diamagnetismo*, come spiegheremo nel paragrafo 9.11.

Per alcune sostanze invece non c'è compensazione o direttamente a livello atomico (come avviene in certi elementi con numero dispari di elettroni) oppure a livello molecolare (un esempio è l'ossigeno O_2) e abbiamo la presenza di *momenti magnetici elementari*, che sono dell'ordine di μ_B . Sottoposte a campo magnetico queste sostanze danno luogo al *paramagnetismo*.

Ci sono poi alcuni elementi, ferro, cobalto, nichel, gadolinio e dispresio, nei quali un'interazione che si può spiegare solo con la meccanica quantistica porta all'allineamento in ogni atomo degli spin di alcuni elettroni dei livelli più interni, che non sono completamente riempiti. I singoli atomi possiedono quindi un momento magnetico non nullo e la misura del rapporto giromagnetico g fornisce un valore vicino a 2, confermando che il momento magnetico è dovuto agli spin. Nella fase solida la struttura cristallina è tale che al di sotto della temperatura di Curie la suddetta interazione allinea gli spin di un gran numero di atomi, dando luogo a una magnetizzazione locale. Vedremo nel paragrafo 9.12, in modo essenzialmente qualitativo, come partendo da questa proprietà si possano spiegare le principali caratteristiche del ferromagnetismo.

La dipendenza del ferromagnetismo da proprietà della struttura cristallina giustifica intuitivamente le osservazioni sperimentali riportate all'inizio del paragrafo 9.7 sull'influenza di sollecitazioni meccaniche e trattamenti termici e sull'importanza della composizione chimica delle leghe: a questo proposito è interessante il fatto che un elemento come il manganese, non ferromagnetico, ma vicino alle condizioni per cui si verifica il ferromagnetismo, forma delle *leghe*, dette di *Heusler* (ad esempio con rame, alluminio e piombo), che sono ferromagnetiche in quanto nella nuova struttura reticolare può avvenire il fenomeno di orientamento collettivo che nel manganese puro non avviene.

Esempio 9.11

Calcolare il valore della corrente che corrisponde al momento magnetico del moto orbitale dell'elettrone dell'atomo di idrogeno nel livello fondamentale.

Soluzione

La via più diretta è applicare (9.47) con $L = \hbar$, come avviene nello stato fondamentale dell'idrogeno ($n = 1, l = 0, m = 0$); allora il momento magnetico coincide con il magneteone di Bohr (9.50) e dividendo per πr_0^2 , con $r_0 = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m raggio dell'orbita dello stato fondamentale dell'idrogeno, si ottiene

$$i = \frac{\mu_B}{\pi r_0^2} = \frac{0.9274 \cdot 10^{-23}}{\pi (0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 1.051 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

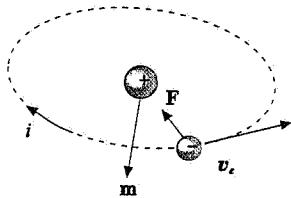
Oppure si può partire dal valore r_0 del raggio dell'orbita e scrivere la legge del moto proiettata sul raggio.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = m_e \frac{v^2}{r_0} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r_0}} = 2.186 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Il periodo del moto è $T = 2\pi r_0/v = 1.523 \cdot 10^{-16}$ s e la corrente risulta

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r_0} = 1.052 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

(si verifica che $i \pi r_0^2 = \mu_B$). Notiamo che poiché il valore di r_0 è stato ricavato imponendo $L = \hbar$ (vedi paragrafo 2.3), in realtà il secondo metodo non è diverso dal primo. Il valore trovato per la velocità, circa $3 \cdot 10^6$ m/s, giustifica il fatto di non usare, in prima approssimazione, formule relativistiche.

**Figura 9.48****Esempio 9.12**

Una sfera di raggio R e massa M , carica con una carica $-q$ distribuita uniformemente sulla superficie, ruota con velocità angolare ω attorno ad un suo diametro. Calcolare il momento magnetico della sfera e ripetere il calcolo supponendo che la carica sia distribuita uniformemente con densità $-\rho$ in tutta la sfera.

Soluzione

In entrambi i casi il momento angolare vale

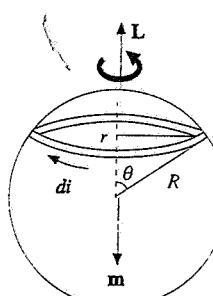
$$L = I\omega = \frac{2}{5} MR^2 \omega$$

dove I è il momento d'inerzia della sfera rispetto a un diametro, supponendo la massa distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera.

Con la carica distribuita superficialmente, consideriamo una calotta sferica infinitesima di area $d\Sigma = 2\pi r R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$, su cui si trova la carica $-dq = -\sigma d\Sigma = -2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta$, che a causa della rotazione genera la corrente

$$di = -\frac{dq}{T} = -\frac{dq}{2\pi} \omega = -\omega \sigma R^2 \sin\theta d\theta$$

L'area di questa spira è $\pi r^2 = \pi R^2 \sin^2\theta$ e il corrispondente momento magnetico è

**Figura 9.49**

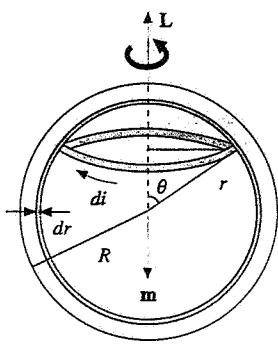


Figura 9.50

$$dm = \sum d\mathbf{i} = -\omega \sigma \pi R^4 \sin^3 \theta d\theta,$$

opposto al momento angolare. Integrando su tutta la sfera

$$m = -\omega \sigma \pi R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{4}{3} \omega \sigma \pi R^4$$

Dato che $\sigma = q / 4\pi R^2$ si ha

$$m = -\frac{1}{3} \omega R^2 q \Rightarrow m = -\frac{5}{3} \frac{q}{2M} L, g = \frac{5}{3}$$

Se invece la carica è distribuita in tutto il volume della sfera, applichiamo il ragionamento precedente a una calotta sferica infinitesima di raggio r (compreso tra zero e R , non è lo stesso di prima) in cui al posto della carica $\sigma d\Sigma$ c'è la carica $\rho d\tau = \rho d\Sigma dr$. Quindi basta sostituire nell'espressione dm del momento magnetico a σ la quantità ρdr e a R r ottenendo

$$dm = -\omega \rho \pi r^4 \sin^3 \theta d\theta dr$$

Si integra tra zero e π e tra zero e R :

$$m = -\omega \rho \pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = -\frac{4}{15} \omega \rho \pi R^5$$

Dato che $\rho = q / \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$,

$$m = -\frac{1}{5} \omega R^2 q \Rightarrow m = -\frac{q}{2M} L, g = 1$$

Vediamo che nessuna delle due distribuzioni di carica porta al risultato visto per l'elettrone ($g = 2$) e nemmeno per il protone ($g = 2 \cdot 2.793$). D'altra parte i momenti magnetici dovuti allo spin sono effetti quantistici non attribuibili a rotazioni rispetto ad un asse e non si possono descrivere con ragionamenti classici.

L'esperimento di Stern e Gerlach

La quantizzazione spaziale implica che, fissata una direzione z , la proiezione del momento angolare lungo z possa assumere solo un certo numero di valori diversi, spaziati di \hbar . Detto J_z uno qualsiasi di questi valori, il corrispondente valore della componente del momento magnetico è, secondo (9.51),

$$m_z = -g \frac{e}{2m_e} J_z = -g \mu_B j_z, \quad (9.52)$$

avendo posto $J_z = j_z \hbar$, con j_z numero intero o semintero.

Una tipica direzione significativa è quella del campo magnetico \mathbf{B} in cui l'atomo eventualmente si trovi e in questa situazione dunque il momento magnetico, proiettato sulla direzione di \mathbf{B} , può assumere solo un numero discreto di valori, non è cioè possibile un'orientazione qualsiasi. Ricordando l'espressione (7.22) dell'energia di un dipolo in campo magnetico, si ha che l'energia dell'atomo subisce una variazione a seconda dello stato in cui esso viene a trovarsi, data da

$$\Delta U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m_z B = -g \mu_B j_z B. \quad (9.53)$$

Se ad esempio $J_z = (\hbar, 0, -\hbar)$, $j_z = (1, 0, -1)$, $m_z = (-g \mu_B, 0, g \mu_B)$ e $\Delta U = (g \mu_B B, 0, -g \mu_B B)$. Detto U_0 il livello di energia dell'atomo in assenza di campo magnetico, nel campo B si ha una separazione in tre livelli,

$$U_1 = U_0 + g \mu_B B, \quad U_2 = U_0, \quad U_3 = U_0 - g \mu_B B.$$

Schematicamente, l'esperimento di Stern e Gerlach, compiuto nel 1922, consiste nell'inviare un fascio collimato di raggi molecolari (vedi volume I, paragrafo 11.10) attraverso un campo magnetico costante fortemente non uniforme e rivelare la posizione del fascio dopo il magnete, come mostrato in figura 9.51, che ricorda per quanto riguarda la sagoma dei poli la figura 2.57 relativa a un campo elettrico non uniforme.

Se il singolo atomo ha un certo momento magnetico, inizialmente distribuito completamente a caso, questo passando attraverso il campo magnetico può assumere solo le proiezioni (9.52); siccome il campo non è uniforme sull'atomo agisce la forza (7.30) e, da (9.53),

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} (\Delta U) = -m_z \frac{\partial B}{\partial z} = -g \mu_B j_z \frac{\partial B}{\partial z};$$

F_z ha intensità e verso diversi a seconda del valore di m_z . Nell'ipotesi più semplice che m possa assumere solo due proiezioni, $+m_z$ e $-m_z$, metà fascio sarà deviato verso l'alto e metà verso il basso: nel piano del rivelatore si vedranno due zone di impatto distinte. Classicamente invece, essendo possibile qualsiasi proiezione, la forza dovrebbe assumere un insieme continuo di valori e i punti di impatto dovrebbero distribuirsi in un'unica zona allargata.

Stern e Gerlach, con un fascio di atomi di argento, trovarono proprio due punti nettamente distinti, provando in questo modo l'esistenza della *quantizzazione spaziale*. Dalla misura della deviazione si può ricavare il valore di m_z , essendo noto il campo B , e quindi risalire al valore del rapporto giromagnetico g . Queste determinazioni furono successivamente rese molto precise da Rabi, che introdusse nel semplice apparato descritto una modifica sostanziale basata su un fenomeno di risonanza.

La linea di ricerca iniziale da Stern e Gerlach venne subito seguita da molti ricercatori; in particolare si trovò la divisione in due parti anche in un fascio di atomi di idrogeno, che sono il sistema atomico più semplice. L'analisi di questi risultati, insieme ad altri sulle caratteristiche dell'emissione di radiazione da parte degli atomi, portò nel 1925 all'ipotesi di esistenza dello spin dell'elettrone; sempre nel 1925 venne formulato il principio di esclusione e nell'anno successivo ebbe inizio la formulazione coerente della meccanica atomica ad opera di Schrödinger e Heisenberg. Restando nell'ambito dei numeri quantici di uno stato elettronico, n , l e m introdotti in precedenza conservano il loro significato, anche se la quantizzazione del momento angolare orbitale è $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$, con $l = 0, 1, \dots, n-1$: è cioè possibile uno stato con $L = 0$, inesistente nel modello di Bohr-Sommerfeld. Nello stato fondamentale dell'idrogeno ($n = 1$, $l = 0$, $m = 0$) il momento magnetico è quindi dovuto esclusivamente allo spin dell'elettrone e si spiega l'esistenza di due soli livelli in campo magnetico, messi in evidenza dagli esperimenti con i raggi molecolari (analoga spiegazione si ha per l'atomo di argento).

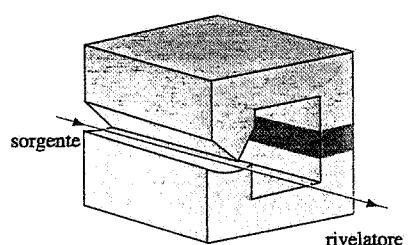


Figura 9.51

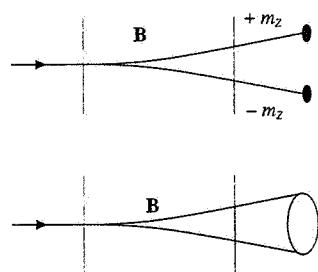


Figura 9.52

9.11 Teoria microscopica classica del diamagnetismo e del paramagnetismo

Nella prima parte del capitolo abbiamo discusso gli aspetti macroscopici del magnetismo nella materia assumendo che per le sostanze isotrope esista tra la magnetizzazione M e il campo H la relazione

$$M = \chi_m H. \quad (9.21)$$

Il comportamento del mezzo sottoposto ad un campo magnetico esterno viene descritto dalla suscettività magnetica χ_m e, basandosi su di essa, si ha la distinzione tra sostanze diamagnetiche ($\chi_m < 0$, $|\chi_m| \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$) e sostanze paramagnetiche ($\chi_m > 0$, $\chi_m \approx 10^{-3} \div 10^{-5}$). Un caso a parte è costituito dalle sostanze ferromagnetiche, su cui ritorneremo nel paragrafo 9.12.

Nel paragrafo 9.10 abbiamo mostrato come nell'atomo possano esistere momenti magnetici, dovuti al moto e ai momenti magnetici intrinseci degli elettroni, constatando che il modello di Bohr-Sommerfeld, miscela di concetti classici e quantistici, è alla fine inadeguato per spiegare i fenomeni osservati e che sarebbe necessaria una corretta impostazione quantistica.

Adesso sviluppiamo un modello che permette di ottenere una *descrizione della suscettività magnetica dei materiali diamagnetici e paramagnetici in termini di grandezze microscopiche*. La trattazione non fa ricorso a concetti quantistici, che non possediamo, ma si basa sull'interazione classica tra campo magnetico e momenti magnetici (calcolati nel paragrafo 9.10) per il diamagnetismo e su una estensione della teoria della polarizzazione per orientamento (vista nel paragrafo 5.10) per il paramagnetismo. I risultati che si ottengono sono abbastanza vicini a quelli sperimentali, indicando che la descrizione di ciò che accade nei mezzi magnetizzati è nel complesso corretta, sebbene sussistano discrepanze e casi non spiegabili, poiché l'unico modo corretto di procedere sarebbe quello di ricorrere soltanto alla meccanica quantistica.

Diamagnetismo

Cominciamo col considerare una sostanza in cui atomi o molecole non abbiano un momento magnetico intrinseco. Ad ogni elettrone che compie un'orbita con momento angolare \mathbf{L} è associato il momento magnetico (9.47). Se agisce un campo magnetico \mathbf{B}_{loc} , uniforme nella regione occupata dall'atomo, compare il momento meccanico

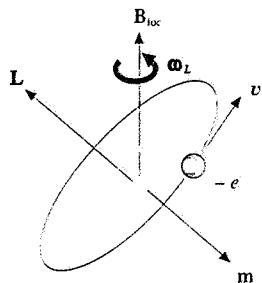
$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{loc}} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} \times \mathbf{L} ,$$

che ha come effetto una variazione del momento angolare secondo il teorema del momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} ,$$

con

$$\boldsymbol{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}_{\text{loc}} . \quad (9.54)$$



L'effetto di \mathbf{M} cioè non è quello di orientare \mathbf{L} e \mathbf{m} parallelamente a \mathbf{B}_{loc} , ma quello di fare compiere a \mathbf{L} e \mathbf{m} un *moto di precessione* con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_L$ attorno alla direzione di \mathbf{B}_{loc} , indipendentemente dall'orientazione di \mathbf{L} rispetto a \mathbf{B}_{loc} (vedi volume I, paragrafi 6.4 e 6.11). Ricordiamo che la deduzione è valida se la *velocità angolare di precessione* $\boldsymbol{\omega}_L$ è molto minore della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ legata al moto di rivoluzione che dà origine a \mathbf{L} . Dall'esempio 9.11, relativo all'idrogeno, ricaviamo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4.13 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

e la condizione $\omega_L \ll \omega$ diventa

$$\frac{e B_{\text{loc}}}{2m_e} \ll \omega \Rightarrow B_{\text{loc}} \ll \frac{2m_e \omega}{e} = 4.7 \cdot 10^5 \text{ T} .$$

Non c'è nessuna evidenza che all'interno dei materiali ordinari agiscano campi così intensi per cui possiamo ritenere largamente soddisfatta la disegualanza e non solo per l'idrogeno. Con $B_{\text{loc}} = 1 \text{ T}$ abbiamo ad esempio

$$\omega_L = 8.8 \cdot 10^{10} \text{ rad/s} \cdot \frac{\omega_L}{\omega} = 2 \cdot 10^{-6} .$$

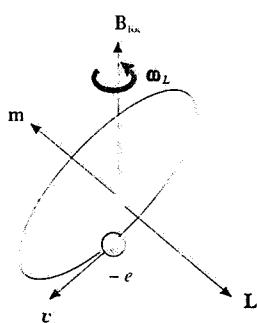


Figura 9.53

Al moto di precessione descritto si dà il nome di *precessione di Larmor*. Malgrado la perturbazione sia piccola, come risulta dall'esempio numerico, tutti i momenti angolari delle singole orbite precedono nello stesso verso attorno alla direzione di \mathbf{B}_{loc} , indipendentemente

dalla direzione dell'orbita e dal verso del moto di rivoluzione. I singoli effetti si sommano dando luogo ad un effetto globale su tutto l'atomo.

Alla precessione di Larmor di un elettrone corrisponde una corrente di intensità

$$\Delta i = -\frac{e}{T_L} = -\frac{e}{2\pi} \omega_L = -\frac{e^2 B_{loc}}{4\pi m_e} ,$$

opposta al verso di percorrenza dell'elettrone. Indicando con r il raggio della proiezione dell'orbita dell'elettrone sul piano perpendicolare a \mathbf{B}_{loc} , a Δi corrisponde il momento magnetico

$$\Delta m = \Delta i \pi r^2 = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} B_{loc} .$$

L'orbita può avere una qualunque inclinazione rispetto a \mathbf{B}_{loc} e quindi conviene prendere per r^2 un valore medio. Assumendo per l'atomo una simmetria sferica e detto r_i il raggio dell'orbita, si hanno per i valori medi le condizioni

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = r_i^2 , \quad \bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = \frac{r_i^2}{3} .$$

Posto che \mathbf{B}_{loc} abbia la direzione dell'asse z , per il raggio medio dell'orbita proiettata nel piano x, y si ottiene

$$r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \frac{2}{3} r_i^2$$

e in conclusione per effetto della precessione a ciascuna orbita si associa il momento magnetico

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{e^2 r_i^2}{6m_e} \mathbf{B}_{loc}$$

opposto al campo magnetico locale.

Se l'atomo ha Z elettroni il momento magnetico acquistato è

$$\mathbf{m}_a = \sum_i \Delta \mathbf{m}_i = -\frac{e^2}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right) \mathbf{B}_{loc} = -\frac{e^2 Z \bar{r}^2}{6m_e} \mathbf{B}_{loc} . \quad (9.55)$$

avendo indicato con

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{Z} \sum_i r_i^2$$

il *raggio quadratrico medio dell'atomo*. Osserviamo subito che nel caso dell'idrogeno ($Z = 1$, $r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m) il momento magnetico (9.55) vale in modulo $1.42 \cdot 10^{-6} \mu_B B_{loc}$: in un campo dell'ordine del tesla esso è molto inferiore al magnetone di Bohr (9.50), a conferma della piccolezza dell'effetto.

La magnetizzazione, in quanto momento magnetico per unità di volume, si scrive secondo (9.10)

$$\mathbf{M} = n \mathbf{m}_a = -\frac{e^2 n Z \bar{r}^2}{6m_e} \mathbf{B}_{loc} .$$

essendo n il numero di atomi per unità di volume. Come campo magnetico locale assumiamo il campo (9.36) all'interno di una cavità sferica.

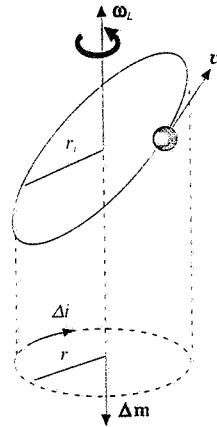


Figura 9.54



Figura 9.55

$$\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_m}{3}\right) \mathbf{H} \cong \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}$$

esso coincide col campo magnetico macroscopico dato che nei diamagnetici χ_m è al più dell'ordine di 10^{-4} . La (9.56) diventa

$$\mathbf{M} = -\frac{e^2 n Z \bar{r}^2}{6m_e} \mu_0 \mathbf{H}$$

e ricorrendo alla (9.21) si arriva a

$$\chi_m = -n \mu_0 \frac{e^2 Z \bar{r}^2}{6m_e} = -n \alpha_m \quad . \quad (9.57)$$

Abbiamo quindi ottenuto un'espressione della *suscettività magnetica in termini delle grandezze microscopiche che compaiono nei singoli processi elementari di magnetizzazione*.

Il modello descritto, dovuto a Langevin, spiega il segno negativo di χ_m riscontrato sperimentalmente e rende anche conto del fatto che la suscettività magnetica sia proporzionale alla densità del materiale ($n = \rho N_A / A$). Quantitativamente però l'accordo non è buono: prendendo come esempio il rame, in cui $n = 8.49 \cdot 10^{28}$ atomi/m³ e $\bar{r} = 1.41 \cdot 10^{-10}$ m (stimato supponendo che il volume di un atomo sia dato da $1/n$), da (9.57) abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_m}{Z} &= \mu_0 \frac{e^2 \bar{r}^2}{6m_e} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (1.41 \cdot 10^{-10})^2}{6 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} = 1.17 \cdot 10^{-34} \text{ m}^3, \\ \frac{\chi_m}{Z} &= -n \frac{\alpha_m}{Z} = -\frac{0.99}{Z} 10^{-5}. \end{aligned}$$

Valori analoghi si ottengono per altri materiali (argento $-0.88 \cdot 10^{-5}/Z$, mercurio $-0.77 \cdot 10^5/Z$). Quindi, per ciascun elettrone, si ha circa 10^{-5} , però se si moltiplica per Z il disaccordo è notevole: nel rame risulta $\chi_m = -28.8 \cdot 10^{-5}$ rispetto al valore $-0.98 \cdot 10^{-5}$ della tabella 9.1.

Paramagnetismo

Consideriamo ora una sostanza le cui molecole abbiano un momento magnetico permanente \mathbf{m}_0 , risultante dei momenti magnetici orbitali e di spin e legato al momento angolare dalla (9.51). Quando la sostanza viene posta in campo magnetico al comportamento diamagnetico prima descritto se ne sovrappone un altro che è predominante.

Mentre in assenza di campo magnetico i momenti magnetici \mathbf{m}_0 delle singole molecole sono disposti in modo completamente disordinato e hanno risultante nulla, la presenza del campo magnetico causa un momento meccanico $\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 \times \mathbf{B}_{\text{loc}}$. A questa azione si oppone l'agitazione termica e, per ogni temperatura, si raggiunge un equilibrio dinamico caratterizzato dal fatto che ogni singola molecola acquista in media un momento magnetico $\langle \mathbf{m} \rangle$ diverso da zero, parallelo e concorde al campo magnetico \mathbf{B}_{loc} . Siamo nella stessa situazione trattata nel paragrafo 5.10 a proposito della polarizzazione per orientamento nei dielettrici e il formalismo utilizzato è lo stesso, per cui scriviamo direttamente il numero dN di molecole il cui momento \mathbf{m}_0 forma con \mathbf{B}_{loc} un angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$ sostituendo semplicemente m_0 a p_0 e B_{loc} a E_{loc} nell'analogia espressione scritta per i dielettrici:

$$dN = A^* e^{m_0 B_{\text{loc}} \cos \theta / k_B T} d \cos \theta = A^* e^{a \cos \theta} d \cos \theta \quad .$$

Nella costante A^* sono congregate tutte le costanti che non interverranno nel risultato finale e la grandezza a è definita come

$$a = \frac{m_0 B_{\text{loc}}}{k_B T} \quad . \quad (9.58)$$

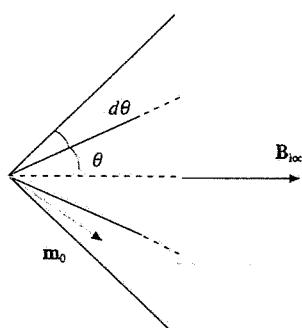


Figura 9.56

A questo punto però non operiamo l'approssimazione $a \ll 1$, che in realtà è verificata nei paramagnetici a temperatura ambiente, perché vogliamo trovare la soluzione generale in vista della sua applicazione al ferromagnetismo.

Ognuna delle dN molecole possiede nella direzione di \mathbf{B}_{loc} il momento magnetico $m(\theta) = m_0 \cos \theta$ e in totale il momento acquistato è

$$dm = m_0 \cos \theta dN = m_0 \cos \theta A^* e^{a \cos \theta} d \cos \theta ;$$

le componenti trasverse invece si elidono per ragioni di simmetria. Il momento medio $\langle m \rangle$ acquistato da ogni molecola concordemente a \mathbf{B}_{loc} risulta quindi

$$\langle m \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} dm}{\int_{-1}^{+1} dn} = m_0 \frac{\int_{-1}^{+1} \cos \theta e^{a \cos \theta} d \cos \theta}{\int_{-1}^{+1} e^{a \cos \theta} d \cos \theta} .$$

Il calcolo degli integrali porta alla formula finale

$$\langle m \rangle = m_0 \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right) = m_0 \left(\operatorname{ctgh} a - \frac{1}{a} \right) = m_0 L(a) . \quad (9.59)$$

La magnetizzazione è

$$M = n \langle m \rangle = n m_0 L(a) = M_{\text{sat}} L(a) , \quad (9.60)$$

avendo indicato con $M_{\text{sat}} = nm_0$ la *magnetizzazione di saturazione*, cioè la magnetizzazione massima che si ottiene quando tutti gli n momenti magnetici dell'unità di volume sono orientati concordemente a \mathbf{B}_{loc} .

La funzione $L(a)$, la cui definizione matematica si ricava da (9.59) e il cui significato fisico è dato da

$$L(a) = \frac{\langle m \rangle}{m_0} = \frac{M}{M_{\text{sat}}} , \quad (9.61)$$

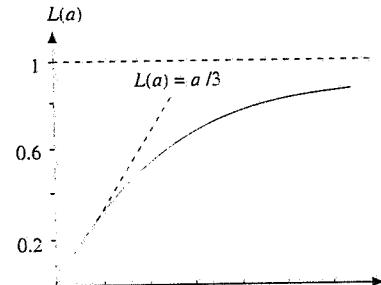


Figura 9.57

si chiama *funzione di Langevin*. Essa è mostrata nella figura 9.57: per $a = 0$ è nulla e cresce monotonamente al crescere di a tendendo a 1 per a tendente all'infinito (con B_{loc} costante ciò si ottiene facendo diminuire la temperatura).

Lo sviluppo in serie di $L(a)$ nell'intorno di $a = 0$ porge

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$$

e se adesso imponiamo $a \ll 1$, analogamente a quanto è stato fatto nei dielettrici, ovvero approssimiamo $L(a)$ con l'espressione $a/3$, che è una retta tangente alla curva nell'origine e con pendenza $1/3$, otteniamo

$$M = n m_0 \frac{a}{3} = \frac{n m_0^2}{3 k_B T} B_{\text{loc}} . \quad (9.62)$$

Ricorriamo infine a (9.36) nella forma $\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} \right)$ e abbiamo

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{u}_\phi \cdot d\mathbf{s}$$

Ma $\mathbf{u}_\phi \cdot d\mathbf{s}$ dà la proiezione di $d\mathbf{s}$ lungo \mathbf{u}_ϕ , che è eguale a $r d\phi$, e quindi

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi \quad :$$

il prodotto scalare indicato dipende dall'angolo piano sotto cui è vista la proiezione di $d\mathbf{s}$ lungo la direzione di \mathbf{B} .

La circuitazione di \mathbf{B} estesa ad una linea chiusa è data da

$$\Gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi \quad .$$

Si presentano adesso due possibilità: o la *linea chiusa concatena* il filo (gli gira intorno), nel qual caso l'integrale a secondo membro vale 2π per cui

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \pm \mu_0 i \quad ,$$

dove il segno dipende dal fatto che l'orientazione della linea chiusa sia legata al verso della corrente nel filo dalla regola della vite (segno positivo) o sia opposta a questa (segno negativo). Oppure la *linea chiusa non concatena* il filo e allora l'integrale sull'angolo è nullo: infatti, per ogni trattino $d\mathbf{s}_1$ di curva con proiezione lungo \mathbf{B} vista sotto l'angolo $d\phi$ c'è un altro trattino $d\mathbf{s}_2$ con proiezione vista sotto l'angolo $-d\phi$, come è mostrato in figura 8.23.

Se la linea chiusa concatena più fili rettilinei percorsi dalle correnti i_1, i_2, \dots, i_n che producono i campi magnetici $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$, il campo magnetico in ogni punto dello spazio è dato da $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n$ e quindi

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint (\sum_k \mathbf{B}_k) \cdot d\mathbf{s} = \sum_k \oint \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{s} = \sum_k \Gamma_k \quad .$$

Ciascuna circuitazione vale $\mu_0 i_k$ o zero a seconda che la linea concatenti o no la corrente i_k e in conclusione possiamo scrivere che la circuitazione del campo magnetico è espressa dalla *legge detta di Ampère*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i \quad , \quad (8.27)$$

sottointendendo che la corrente a secondo membro è la *somma delle correnti concatenate*, ciascuna presa con il segno opportuno secondo la regola vista in precedenza.

Per quanto ricavata da noi nel caso del campo magnetico prodotto da fili indefiniti la legge di Ampère ha validità generale, qualunque sia la forma del circuito percorso da corrente, ed è una proprietà fondamentale del campo magnetico prodotto da correnti stazionarie.

Richiamiamo l'attenzione sul fatto che il campo magnetico che compare nell'integrale di linea è quello generato da *tutte* le correnti presenti: però la sua circuitazione dipende *solo* dalle correnti concatenate.

La (8.27) può essere scritta in forma diversa esprimendo ciascuna corrente tramite la relativa densità di corrente. Allo scopo prendiamo una generica superficie Σ appoggiata sulla linea lungo cui si esegue la circuitazione di \mathbf{B} e orientata, rispetto all'orientazione della linea, secondo la regola della vite; diciamo $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots$ le intersezioni dei fili conduttori con la superficie Σ e scriviamo

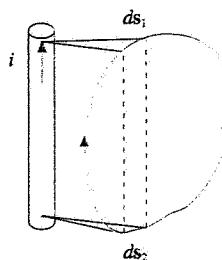
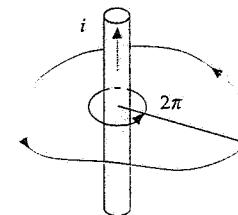
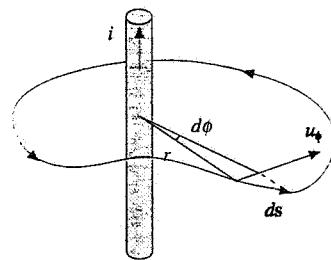
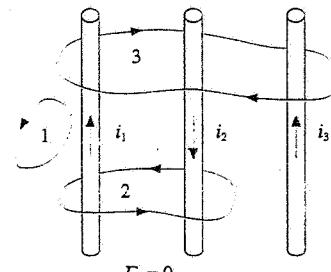
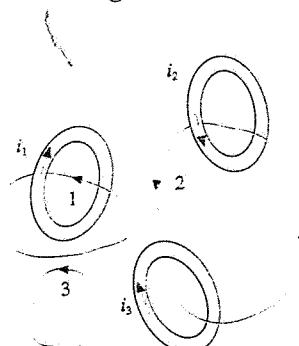


Figura 8.23



$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= 0 \\ \Gamma_2 &= \mu_0 (i_1 - i_2) \\ \Gamma_3 &= \mu_0 (-i_1 + i_2 - i_3)\end{aligned}$$

Figura 8.24



$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \mu_0 i_1 \\ \Gamma_2 &= -\mu_0 (i_2 + i_3) \\ \Gamma_3 &= 0\end{aligned}$$

Figura 8.25

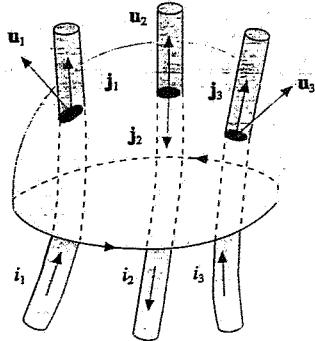


Figura 8.26

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{u}_1 d\Sigma_1 + \dots + \int_{\Sigma_k} \mathbf{j}_k \cdot \mathbf{u}_k d\Sigma_k + \dots$$

come è possibile in quanto \mathbf{j} è diverso da zero solo sulle dette intersezioni, dove coincide con $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_k \dots$. Ciascun integrale a secondo membro non dipende dalla particolare sezione considerata se la corrente è stazionaria (paragrafo 6.3) e coincide con la corrente che percorre il rispettivo filo. Di conseguenza

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad . \quad (8.28)$$

Il *teorema di Stokes* (2.53) permette di trasformare la circuitazione di \mathbf{B} lungo la linea nel flusso del rotore di \mathbf{B} attraverso la superficie Σ appoggiata sulla linea per cui

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

e dovendo questa eguaglianza valere per qualsiasi superficie Σ deve essere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad (8.29)$$

espressione *locale* della legge integrale (8.27).

Si verifica subito che la (8.29) è compatibile con la condizione di stazionarietà della corrente, espressa dalla $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, come visto nel paragrafo 6.3: infatti anche la divergenza del primo membro è nulla, in quanto $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B}$, prodotto misto di tre vettori di cui due uguali, è identicamente nullo (paragrafo 3.6). Invece in condizioni non stazionarie, riassunte dalla (6.10) $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$, la (8.29) non può essere valida; questa inconsistenza venne superata da Maxwell che modificò la (8.29) rendendola valida in ogni circostanza, come dimostreremo nel capitolo 10.

Abbiamo già osservato che la legge di Ampère costituisce un legame tra sorgenti e campo analogo a quello fornito dalla legge di Gauss. Allo stesso modo, anche se in un contesto geometrico diverso, la legge di Ampère è utilizzabile per il calcolo esplicito del campo magnetico quando siano presenti particolari condizioni di simmetria. Conviene cercare in tal caso linee di integrazione lungo le quali il campo sia costante in modulo e orientato sempre allo stesso modo rispetto all'elemento di linea (tipicamente tangente o normale), di modo che il calcolo dell'integrale (8.27) sia immediato. Negli esempi che seguono, ad eccezione dell'8.4, mostriamo questa applicazione pratica della legge di Ampère in alcune situazioni già viste e in due problemi nuovi.

Esempio 8.4

Verificare che il campo magnetico prodotto da una piccola spira di raggio R soddisfa la legge di Ampère (8.27).

Soluzione

Scegliamo come cammino di integrazione quello indicato in figura 8.27, in cui il tratto curvilineo è una circonferenza di raggio $r \gg R$. Per l'integrale da A a B utilizziamo la (8.12):

$$\int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \int_A^B \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \left[\frac{x}{R^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_{-r}^{+r} = \frac{\mu_0 i r}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

$$\boxed{\frac{\mu_0 n m_0}{3 k_B T} \mathbf{M} = \frac{\mu_0 n m_0}{3 k_B T} \mathbf{H}} \quad (9.63)$$

Dal confronto con (9.21) si ricava l'espressione della suscettività magnetica di un materiale paramagnetico che scriviamo nella forma compatta

$$\boxed{\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_0}} \quad (9.64)$$

avendo posto

$$C\rho = \frac{\mu_0 n m_0^2}{3 k_B} \quad , \quad T_0 = \frac{1}{3} C\rho = \frac{1}{3} \frac{\mu_0 n m_0^2}{3 k_B} \quad ; \quad (9.65)$$

ρ è la densità del materiale. C una costante nota come *costante di Curie*.

Per stimare i valori numerici di χ_m in un solido, prendiamo $n = 10^{29}$ molecole/m³ e $m_0 = \mu_B$; abbiamo

$$C\rho = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{29} \cdot (9.27)^2 \cdot 10^{-48}}{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} = 0.26 \text{ K}, \quad T_0 = \frac{1}{3} C\rho = 0.09 \text{ K}$$

A temperature non troppo basse (9.64) si può quindi scrivere

$$\boxed{\chi_m = \frac{C\rho}{T}} \quad , \quad (9.66)$$

coincidente con (9.9). Il modello sviluppato è dunque in accordo con la dipendenza sperimentale di χ_m dalla densità e dalla temperatura. Con $T = 300$ K si avrebbe $\chi_m \approx 10^{-3}$. I valori misurati sono più piccoli, almeno di un ordine di grandezza, e ciò potrebbe indicare che m_0 è minore di μ_B , a causa di parziali compensazioni tra i vari momenti atomici; dobbiamo però ricordare che stiamo trattando in modo classico un problema quantistico.

Si osservi che, dati i valori sperimentali di χ_m a temperature non troppo basse, si poteva utilizzare subito (9.36) nella forma $\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 \mathbf{H}$ come fatto per i diamagnetici, ottenendo direttamente (9.66).

La teoria di Langevin del paramagnetismo prevede il fenomeno della saturazione: in questo caso bisogna usare nel calcolo la forma completa della funzione $L(a)$ poiché la variabile a può avere valori notevoli, argomento che riprenderemo nel paragrafo 9.12. Il fenomeno si verifica a bassissima temperatura ($T \approx 1$ K) e la suscettività magnetica si avvicina all'unità, sotto l'azione di un campo \mathbf{H} dell'ordine di 10^6 A/m.

Esempio 9.13

La suscettività magnetica del cloruro di gadolinio GdCl_3 a temperatura ambiente è $\chi_m = 2.672 \cdot 10^{-3}$, la densità è $\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$, il numero di molecole per unità di volume $n = 5.48 \cdot 10^{27}$ molecole/m³. Calcolare il momento magnetico intrinseco m_0 e la magnetizzazione di saturazione M_{sat} .

Soluzione

Gli elementi noti come *terre rare* hanno una struttura elettronica tale che i loro atomi possiedono un momento magnetico intrinseco dovuto agli spin di alcuni elettroni dei livelli più interni (il gadolinio e il disporio sono addirittura ferromagnetici). Con tali

elementi si formano sali paramagnetici, come il cloruro di gadolinio, che hanno χ_m elevata, dell'ordine di 10^{-3} , superiore a quella della maggior parte delle sostanze paramagnetiche.

Da (9.64) ricaviamo, sostituendo $C\rho/3$ a T_0 ,

$$C\rho = \frac{3T\chi_m}{3 + \chi_m} \approx T\chi_m = 0.80 \text{ K}$$

in accordo con (9.66) in quanto alla temperatura $T = 300 \text{ K}$ χ_m è trascurabile rispetto a 3; e $T_0 = C\rho/3 = 0.27 \text{ K}$ è certamente trascurabile rispetto a 300 K. Noto $C\rho$, dalla prima delle (9.65)

$$m_0 = \sqrt{\frac{3k_B C\rho}{\mu_0 n}} = 6.935 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 \approx 7.5 \mu_B$$

La magnetizzazione di saturazione vale

$$M_{\text{sat}} = n m_0 = 3.80 \cdot 10^5 \text{ A/m} \Rightarrow \mu_0 M_{\text{sat}} = 0.48 \text{ T}$$

In condizioni ordinarie, con $H = 10^5 \text{ A/m}$ e $T = 300 \text{ K}$, $M = \chi_m H = 267 \text{ A/m} \ll M_{\text{sat}}$. Da (9.61)

$$\frac{\langle m \rangle}{m_0} = \frac{M}{M_{\text{sat}}} = 7.03 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \langle m \rangle = 7.03 \cdot 10^{-4} m_0 = 5.27 \cdot 10^{-3} \mu_B$$

Anche se ciascuna molecola di GdCl_3 ha un momento magnetico m_0 particolarmente grande rispetto a μ_B , a $T = 300 \text{ K}$ l'effetto dell'agitazione termica porta a un momento magnetico medio molecolare $7 \cdot 10^{-4}$ volte più piccolo. È come se soltanto 7 molecole su 10000 fossero orientate concordemente al campo, malgrado l'elevato valore di H .

Oltre al paramagnetismo descritto ne esiste un altro più debole, con $\chi_m = 10^{-5}$, che si manifesta in alcuni conduttori ed è attribuito ad un parziale orientamento degli spin degli elettroni di conduzione; il fenomeno è indipendente dalla temperatura.

Un'applicazione fondamentale della saturazione nei materiali paramagnetici, come i sali delle terre rare, è la seguente: si mantiene il materiale a contatto termico con un serbatoio alla temperatura $T = 1 \text{ K}$ (elio liquido) e lo si magnetizza portandolo alla saturazione con un opportuno campo magnetico, così che tutti i momenti magnetici elementari siano paralleli e concordi a \mathbf{B} . Si isola termicamente il materiale e si diminuisce lentamente il campo magnetico, procedimento noto come *smagnetizzazione adiabatica*; a causa del moto di agitazione termica, per quanto ridotto, qualche momento elementare viene disallineato: però questo processo richiede energia ($2 m_0 B$ se l'orientazione cambia di 180°) che viene fornita a spese dell'energia interna del materiale, il quale si raffredda. Con tale sistema si riesce a portare la temperatura a $\sim 10^{-3} \text{ K}$.

Si noti che a $T = 1 \text{ K}$ e $B = 1 \text{ T}$ l'energia $\mu_B B$ è dello stesso ordine di grandezza di $k_B T$, la variabile a di (9.58) vale cioè circa 1. Un'analogia condizione di allineamento con $a = 1$ si può raggiungere per i momenti magnetici nucleari, però a una temperatura circa mille volte più piccola, cioè a $\sim 10^{-3} \text{ K}$, dato che i momenti nucleari sono circa mille volte più piccoli di μ_B (paragrafo 9.10). Il sale paramagnetico a 10^{-3} K viene pertanto usato come serbatoio termico per raffreddare un materiale in cui a tale temperatura il magnetismo nucleare sia saturato; con un ulteriore processo di smagnetizzazione adiabatica si arriva a $\sim 10^{-6} \text{ K}$.

Smagnetizzazione adiabatica

9.12 Cenno alla teoria del ferromagnetismo

Tra i materiali paramagnetici e quelli ferromagnetici esistono alcuni punti in comune. Se dalla tabella 9.4 ricaviamo il valore della magnetizzazione di saturazione del ferro puro,

$1.72 \cdot 10^6 \text{ A/m}$, vediamo che esso non è molto diverso da quello di un mezzo paramagnetico vicino allo zero assoluto; inoltre a temperature superiori alla temperatura di Curie i materiali ferromagnetici si comportano come i paramagnetici. Sembra quindi naturale supporre che anche in un materiale ferromagnetico ci siano momenti magnetici intrinseci $\mathbf{m}_0 (= \mu_B)$ e provare ad applicare la teoria di Langevin. Gli elevati valori di magnetizzazione riscontrati sperimentalmente nei ferromagnetici a temperatura ambiente fanno presumere che la funzione $L(a)$ definita da (9.61) possa assumere valori vicini all'unità, corrispondenti a valori elevati della variabile a definita da (9.58); ma a temperatura ambiente a è grande solo se il campo magnetico locale è eccezionalmente intenso: posto $m_0 = \mu_B$, con $T = 300 \text{ K}$, $a = 10$ implica $B_{\text{loc}} \approx 3000 \text{ T}$. Siamo pertanto portati a ipotizzare una struttura tipo (9.38),

$$\mathbf{B}_{\text{loc}} = \mu_0 (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{M}),$$

dove però γ non vale $1/3$, ma deve assumere un valore molto grande.

Weiss, a cui si deve questa teoria fenomenologica, postula appunto l'esistenza di un campo molecolare $\mathbf{H}_W = \gamma \mathbf{M}$, di gran lunga superiore al campo \mathbf{H} applicato dall'esterno, dovuto ad una azione orientatrice mutua che porta ad allineare i momenti magnetici \mathbf{m}_0 .

Introduciamo l'espressione di \mathbf{B}_{loc} nella (9.58),

$$a = \frac{\mu_0 m_0}{k_B T} H + \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}}{k_B T} \frac{M}{M_{\text{sat}}} \quad ,$$

e da questa ricaviamo

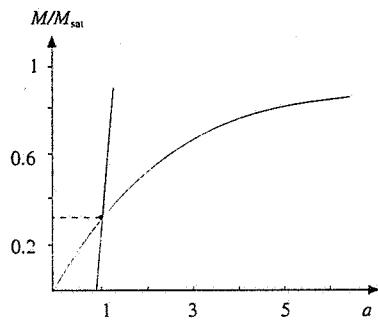


Figura 9.58

Quindi, oltre alla relazione (9.61), tra M e a esiste anche la relazione lineare (9.67) che dipende dal campo esterno H e dal valore di γ . Nella figura 9.58 sono riportate le due relazioni e lo studio del sistema (9.61)-9.67) può essere fatto per via grafica, ricavando la magnetizzazione per una data temperatura e un dato valore di H dall'intersezione tra le due curve.

Discussiamo innanzitutto l'effetto della temperatura in assenza di campo esterno, $H = 0$. La (9.67) si riduce all'equazione di una retta passante per l'origine,

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{k_B T}{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}} a \quad . \quad (9.68)$$

Abbiamo già osservato che la tangente nell'origine alla curva di Langevin ha l'equazione $M/M_{\text{sat}} = a/3$ e la (9.68) coincide con tale tangente quando la temperatura assume il valore

$$T_C = \frac{\gamma \mu_0 m_0 M_{\text{sat}}}{3 k_B} \quad . \quad (9.69)$$

Riscriviamo la (9.68) come

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{1}{3} \frac{T}{T_C} a \quad . \quad (9.70)$$

e vediamo allora che esistono due regioni di temperatura, separate dal valore T_C , in cui il comportamento è diverso:

- per $T > T_C$ la retta (9.70) non incontra mai la curva di Langevin e non esiste soluzione che non sia $M/M_{\text{sat}} = 0$; a campo esterno nullo corrisponde magnetizzazione nulla;
- per $T < T_C$ invece la retta interseca la curva di Langevin anche in un punto al di fuori dell'origine e quindi è prevista una *magnetizzazione spontanea*, anche in assenza di campo H esterno, dovuta al campo locale di Weiss $H_W = \gamma M$: al di sotto di T_C cioè l'agi-

tazione termica non riesce a distruggere l'accoppiamento tra i vari momenti magnetici che si allineano parallelamente uno all'altro.

È plausibile identificare con la *temperatura di Curie* la temperatura T_c a cui avviene la transizione tra il regime di magnetizzazione spontanea e il regime paramagnetico in cui la magnetizzazione è nulla in assenza di campo esterno. Dai valori sperimentali per il ferro,

$$\mu_0 M_{\text{sat}} = 2.16 \text{ T} \Rightarrow M_{\text{sat}} = 1.72 \cdot 10^6 \text{ A/m}, T_c = 1043 \text{ K},$$

e ponendo $m_0 = \mu_B$, da (9.69) si ricava

$$\gamma = \frac{3k_B T_c}{\mu_0 m_0 M_{\text{sat}}} = 2156,$$

cui corrispondono un campo molecolare di Weiss e un campo magnetico

$$H_w = \gamma M_{\text{sat}} = 3.71 \cdot 10^9 \text{ A/m}, B_w = \mu_0 H_w = 4662 \text{ T}.$$

Si tratta di valori che sono circa mille volte superiori a quelli massimi realizzabili macroscopicamente.

Facendo aumentare la temperatura nell'intervallo $0 < T \leq T_c$ la pendenza della retta (9.70) aumenta e il punto di intersezione si sposta nel verso delle a decrescenti: si determina così M/M_{sat} in funzione di T/T_c e si trova la curva tratteggiata della figura 9.60. Il massimo della magnetizzazione si ottiene per $T = 0 \text{ K}$; ad ogni altra temperatura il valore di M rappresenta l'equilibrio tra l'azione orientatrice del campo di Weiss e l'agitazione termica; a $T = T_c$ prevale il moto di agitazione termica e la magnetizzazione scompare (in assenza di H).

Supponiamo ora il campo H esterno diverso da zero e riscriviamo (9.67) utilizzando (9.69):

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{1}{3} \frac{T}{T_c} a - \frac{H}{\gamma M_{\text{sat}}} \quad (9.71)$$

Manteniamo la temperatura costante ad un valore inferiore a T_c e facciamo variare H ; disegniamo inoltre (figura 9.61) la funzione $L(a)$ anche per valori negativi della variabile a . La retta (9.71) incontra la curva in uno o due punti, che danno il valore della funzione $M(H)$: qualitativamente si ottiene un andamento simile a quello del ciclo di isteresi.

Se invece supponiamo che sia $T > T_c$, si ha che, a causa della grande pendenza della retta (9.71) e dei limitati valori di H esterno disponibili, l'intersezione è vicina all'origine dove si può approssimare $L(a)$ con $a/3$. Eliminando a dal sistema delle due rette (9.71) e $M/M_{\text{sat}} = a/3$ si ha

$$M = \frac{T_c}{T - T_c} \frac{H}{\gamma} \quad :$$

questo è il valore della magnetizzazione del materiale al variare di H e si vede che la suscettività magnetica $\chi_m = M/H$ corrisponde alla legge (9.39), ponendo $T_c/\gamma = C\rho$. È dunque previsto il comportamento paramagnetico trovato sperimentalmente per i ferromagnetici a temperature superiori a quella di Curie. Non poteva essere diversamente in quanto formalmente è stato seguito lo stesso procedimento che ha portato alla (9.64); se si pone $\gamma = 1/3$, T_c dato da (9.69) coincide con T_0 dato da (9.65), essendo appunto $T_c = 3\gamma T_0$. Sono però i valori numerici che non tornano: nei ferromagnetici γ è dell'ordine di 10^3 e quindi l'interazione locale postulata da Weiss è molto superiore a quella calcolabile con la magnetostatica classica.

Riassumendo, la teoria di Weiss riesce a descrivere, almeno qualitativamente, il passaggio dal comportamento paramagnetico a quello ferromagnetico, l'andamento del ciclo di isteresi e la dipendenza della magnetizzazione dalla temperatura: in particolare per questo problema, al di sotto della temperatura di Curie la curva corretta, calcolata con la teoria quantistica e che è seguita con buona approssimazione dagli elementi ferromagnetici, è quella continua della figura 9.60. Classicamente però non si può dare nessuna spiegazione dell'elevato valore del campo locale che sarebbe necessario per il verificarsi della magnetizzazione spontanea oppure di quale possa essere l'eventuale altra causa del fenomeno.

Il problema è stato risolto nell'ambito della meccanica quantistica, anche se la chiarificazione dei punti fondamentali ha richiesto molti decenni e tuttora alcuni aspetti non sono spiegati.

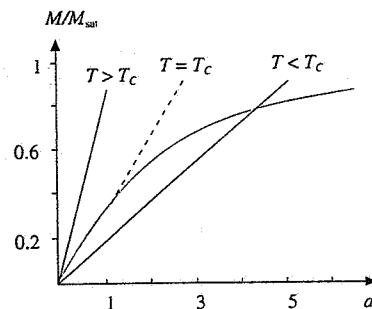


Figura 9.59

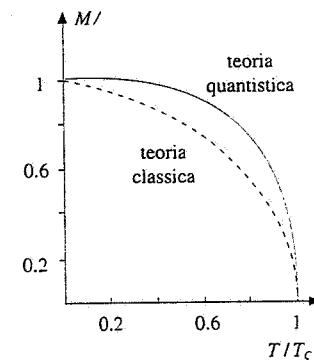


Figura 9.60

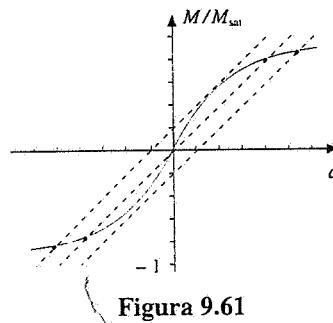


Figura 9.61

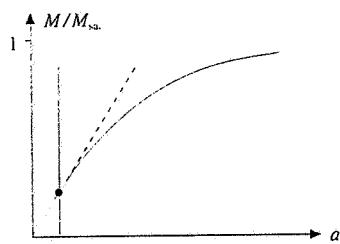


Figura 9.62

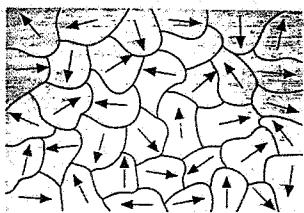


Figura 9.63

A livello atomico il *momento magnetico* m_0 degli *elementi ferromagnetici* è dovuto quasi esclusivamente allo *spin* degli elettroni; nell'atomo si verifica una condizione particolare per cui non si ha una *compensazione* tra gli spin come ci si potrebbe aspettare dal principio di esclusione. Il fenomeno non è tipico soltanto degli elementi ferromagnetici, ma avviene anche in altri casi; a questo però si aggiunge che risulta energeticamente conveniente, cioè corrisponde a uno stato di energia minima, la configurazione per cui atomi adiacenti abbiano i momenti angolari paralleli e concordi. Si tratta di una condizione delicata, che dipende dal rapporto tra distanza interatomica nel reticolo e dimensioni atomiche e che è realizzata in pochissimi elementi. Non esiste quindi un campo magnetico locale elevatissimo, ma un'interazione quantistica tra gli spin.

In un cristallo di ferro (o di cobalto, nichel, ecc.) si hanno delle zone, dette *domini di Weiss*, con volume compreso tra 10^{-12} e 10^{-18} m^3 e contenenti perciò tra 10^{17} e 10^{11} atomi, nelle quali esiste una magnetizzazione spontanea, dovuta all'*interazione non magnetica* che *allinea gli spin*. All'interno del dominio la magnetizzazione è saturata ad un valore che dipende dalla temperatura secondo la curva di figura 9.60. Domini adiacenti non hanno la magnetizzazione nella stessa direzione: nella zona di confine, detta *parete di Bloch*, l'orientazione degli spin passa con continuità da quella di un dominio a quella del dominio adiacente. Un blocco di materiale ferromagnetico è composto di norma da molti cristalli orientati a caso (solido policristallino) e quindi, pur essendo localmente magnetizzato, può non manifestare alcun momento magnetico. La ragione di ciò, sia all'interno dei cristalli che del blocco, si può ancora spiegare in termini energetici, nel senso che una distribuzione casuale delle singole M è quella che rende minima l'energia totale del sistema.

Il reticolo cristallino del ferro è cubico centrato e l'orientazione spontanea preferenziale dei domini è quella parallela ai lati del cubo, come mostrato nella figura 9.64 in cui sono schematizzati quattro domini (si parla di assi di facile magnetizzazione). Quando si applica un campo magnetico dall'esterno si ha uno spostamento delle pareti di Bloch, con ingrandimento dei domini la cui magnetizzazione è concorde o quasi al campo esterno, e la magnetizzazione del blocco non è più nulla. All'aumentare del campo esterno si ha prima che in ogni cristallo c'è un'unica direzione di magnetizzazione, non necessariamente concorde ad \mathbf{H} , e successivamente che tutte le magnetizzazioni diventano parallele ad \mathbf{H} , con il che si raggiunge la saturazione in tutto il blocco. Nel singolo cristallo il valore istantaneo della magnetizzazione dipende dall'orientazione di \mathbf{H} , anche se non ne dipende la magnetizzazione di saturazione, che è caratteristica del materiale; invece dipende dall'orientazione di \mathbf{H} il valore H_{\max} per cui si raggiunge la saturazione.

Il processo di spostamento delle pareti di Bloch e di orientazione non è reversibile, se non per piccoli valori di \mathbf{H} a partire dallo stato vergine, a causa di imperfezioni dei cristalli e della presenza di impurezze, per cui quando si torna indietro dallo stato di saturazione non si ristabilisce la situazione di disordine dei singoli domini e resta una magnetizzazione residua.

Nella tabella 9.5 sono riportati per ferro, cobalto e nichel la temperatura di Curie, la magnetizzazione di saturazione, il numero di atomi per unità di volume e il numero medio di magnetoni di Bohr per ogni atomo, dedotto da $M_{\text{sat}} = n m_0 = n n_B \mu_B$.

Se confrontiamo i valori della magnetizzazione di saturazione nella tabella 9.5 con quello del sale paramagnetico Gd Cl_3 , dell'esempio 9.13, pari a $0.38 \cdot 10^6 \text{ A/m}$, notiamo che essi sono dello stesso ordine di grandezza. È però opportuno ricordare di nuovo le diverse condizioni fisiche in cui viene raggiunto il completo allineamento dei momenti magnetici elementari. Da una parte l'effetto è ottenuto a temperatura ambiente e con valori di H dell'ordine di 10 A/m , dall'altra a circa 1 K con $H \sim 10^6 \text{ A/m}$: di conseguenza la suscettività magnetica, che misura in sostanza la risposta del mezzo alla sollecitazione magnetica esterna, in un caso è dell'ordine di 10^5 , nell'altro di 1 e ciò mette in evidenza l'assoluta preponderanza nei ferromagnetici del contributo del mezzo rispetto a quello delle correnti di conduzione, mentre nei paramagnetici saturati i due contributi sono confrontabili. Inoltre, viste le condizioni estreme di temperatura e campo esterno, la saturazione paramagnetica trova soltanto applicazioni particolari, mentre quella ferromagnetica è di uso comune.

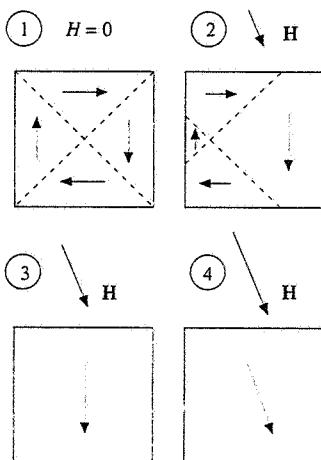


Figura 9.64

Tabella 9.5

	temp. di Curie	$\mu_0 M_{\text{sat}} (\text{T})$	$M_{\text{sat}} (10^6 \text{ A/m})$	$n (10^{28} \text{ atomi/m}^3)$	n_B
ferro	770°C 1043 K	2.16	1.72	8.48	2.2
cobalto	1131 1404	1.79	1.42	9.09	1.7
nichel	358 631	0.61	0.49	9.13	0.6

Effetto Einstein-de Haas

Molte previsioni sullo stato di orientamento dello spin nei mezzi ferromagnetici sono state verificate facendo passare un fascio di neutroni, anch'essi dotati di spin, attraverso il materiale e studiando le caratteristiche delle *interazioni neutrone-elettrone, dipendenti dallo spin di entrambi*.

Una differente *verifica di carattere generale* venne ideata da *Einstein e de Haas*. Un cilindro di ferro sospeso verticalmente tramite un filo costituisce un pendolo di torsione che può ruotare attorno all'asse concidente con il filo. Il cilindro è immerso in un solenoide e quando viene fatta passare corrente si osserva che il cilindro entra in rotazione.

La ragione è la seguente: il processo di magnetizzazione orienta i momenti angolari dei domini di Weiss, prima disordinati, per cui il cilindro acquista un momento angolare L parallelo all'asse; però il momento angolare totale del cilindro deve restare costante e quindi il cilindro entra in rotazione in modo tale che L totale, dovuto al moto collettivo e ai singoli atomi, resti nullo.

Il rapporto macroscopico m/L tra il momento magnetico del cilindro e il momento angolare della rotazione si misura sperimentalmente; d'altra parte secondo (9.51) $m/L = ge/2m_e$. Dal confronto con il dato sperimentale si trova g molto vicino a 2, a conferma che il contributo dominante è dovuto agli spin degli elettroni, anche se non si può escludere un piccolo contributo dovuto al moto orbitale.

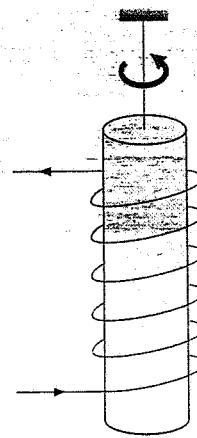


Figura 9.65

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, sono stabilite nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (10.1)$$

in cui le sorgenti sono rappresentate dalla densità di carica $\rho(x, y, z)$ e dalla densità di corrente $\mathbf{j}(x, y, z)$, entrambe costanti nel tempo. La condizione di stazionarietà è evidenziata dal fatto che nelle (10.1) compaiono solo le derivate rispetto alle coordinate spaziali e non quelle rispetto al tempo. Nei capitoli 5 e 9 abbiamo visto le modifiche necessarie per tener conto della presenza di materiali.

Il campo elettrico statico \mathbf{E} , conservativo, è generato dalle cariche elettriche fisse e il campo magnetico statico \mathbf{B} , non conservativo, è generato dalle cariche elettriche in moto stazionario. A parte questo fatto che le sorgenti dei campi statici sono sempre le cariche elettriche, non esiste in un dato sistema di riferimento inerziale nessun'altra connessione tra i fenomeni elettrici e magnetici statici e le relative coppie di equazioni possono essere risolte separatamente.

Esperimenti condotti da Faraday in Inghilterra e indipendentemente da Henry negli Stati Uniti misero in evidenza una diversa connessione tra elettricità e magnetismo: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico non conservativo che in opportuni dispositivi può dar luogo a una forza elettromotrice e ad una corrente in un circuito chiuso; un fenomeno analogo si ottiene in casi di moto relativo tra un circuito e un campo magnetico costante. Successivamente Maxwell dimostrò che per rendere compatibili le equazioni dei fenomeni variabili con la legge di conservazione della carica nella sua forma più generale (6.10) occorre postulare che un campo elettrico variabile nel tempo dicesse origine ad un campo magnetico.

Maxwell arrivò così a una forma più generale delle equazioni che regolano i fenomeni elettrici e magnetici variabili, la quale contiene (10.1) come caso limite per fenomeni statici. Caratteristica fondamentale è che un campo elettrico e un campo magnetico variabili non possono esistere separatamente, ma vanno riuniti sotto il concetto più generale di *campo elettromagnetico*; inoltre la soluzione delle equazioni prevede che il campo elettromagnetico possa propagarsi con velocità che risulta eguale a quella della luce: quest'ultima viene pertanto identificata come un fenomeno elettromagnetico rapidamente variabile.

In questo capitolo studieremo i fenomeni elettrici e magnetici variabili nel tempo più caratteristici e formuleremo le equazioni di Maxwell nel modo più generale. Nel capitolo 13 vedremo come si deduca da esse l'esistenza delle onde elettromagnetiche.

Ricordiamo preliminarmente alcuni concetti e proprietà che utilizzeremo spesso in seguito.

La *forza elettromotrice* (f.e.m.) è definita come integrale del campo elettrico \mathbf{E} lungo una linea chiusa, cioè come la circuitazione di \mathbf{E} ,

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

e un suo valore non nullo implica che il campo elettrico non è conservativo (vedi paragrafo 2.1); nel capitolo 6 abbiamo discusso due particolari esempi di f.e.m., derivanti da un'azione meccanica (generatore di Van de Graaf) e da reazioni chimiche (pile e accumulatori). Nel paragrafo 7.7 si è studiata una f.e.m. dovuta alla forza di Lorentz (effetto Hall).

Il flusso del campo magnetico \mathbf{B} attraverso una superficie Σ è dato da

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

La superficie Σ ha come contorno una linea chiusa s e anzi sono infinite le superfici Σ che hanno s come contorno. Siccome il campo \mathbf{B} è *solenoidale*, proprietà che non dipende dal fatto che i fenomeni studiati siano variabili nel tempo oppure no, il flusso attraverso le infinite superfici Σ con lo stesso contorno s è lo stesso, come abbiamo dimostrato nel paragrafo 3.4 e ripreso nel paragrafo 7.2: si parla pertanto di *flusso attraverso la linea chiusa s o concatenato con la linea chiusa s* , essendo sottinteso così che il calcolo effettivo di Φ può essere eseguito scegliendo una qualsiasi superficie delimitata da s . Fissato un verso di percorrenza su s , l'orientazione della normale \mathbf{u}_n a Σ segue la convenzione della vite destrogiara più volte adottata.

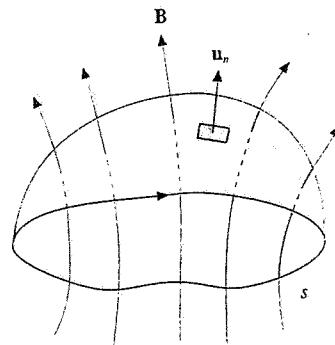


Figura 10.1

10.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

Consideriamo dapprima una spira A di filo conduttore connessa con un galvanometro a zero centrale (esempio 7.3). Se si avvicina un magnete alla spira l'indice del galvanometro si sposta in una certa direzione mentre se si allontana il magnete dalla spira l'indice del galvanometro si sposta nella direzione opposta; quando il magnete è fermo rispetto alla spira non si osserva nessuno spostamento dell'indice dello strumento. Gli effetti sono eguali se si tiene il magnete fermo e si avvicina o si allontana la spira. Se sostituiamo il magnete con una spira A' in cui è inserito un generatore che fa circolare corrente e muoviamo la spira A' rispetto alla spira A o questa rispetto alla spira A' si ottiene di nuovo lo stesso effetto. Da tali osservazioni si può concludere che in una spira compare una *corrente*, che chiamiamo *indotta*, ogni qual volta c'è un *moto relativo* tra la spira e un campo magnetico \mathbf{B} , generato da un magnete permanente o da un'altra spira percorsa da corrente.

Siccome per avere corrente in un circuito è necessario che in esso sia presente una sorgente di forza elettromotrice (paragrafo 6.7), diciamo meglio che dal moto relativo tra una spira e un campo magnetico ha origine una *forza elettromotrice* \mathcal{E}_i che viene chiamata *indotta*. In base alla legge di Ohm (6.44) per un circuito chiuso, la presenza di \mathcal{E}_i nel circuito dà luogo alla corrente indotta messa in evidenza con il *galvanometro*.

Consideriamo ora un'altra esperienza eseguita per la prima volta da Faraday. Una spira connessa ad un galvanometro è posta nelle vicinanze di un solenoide di lunghezza finita con nucleo di ferro. Il solenoide è collegato ad un generatore e ad un interruttore T con il quale si può far passare o interrompere la corrente nel circuito. La spira e il solenoide sono entrambi fermi. Nell'istante in cui l'interruttore T

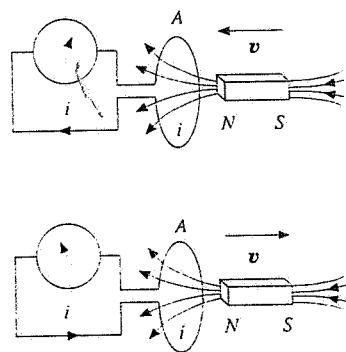


Figura 10.2

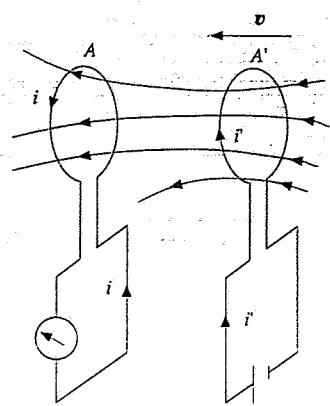


Figura 10.3

viene chiuso l'indice del galvanometro, in precedenza fermo sullo zero, si sposta in una certa direzione e poi torna sullo zero, dove resta mentre il solenoide è percorso da corrente costante. Quando l'interruttore T viene aperto l'indice del galvanometro si sposta nella direzione opposta alla precedente e poi torna a zero. La conclusione di Faraday fu che si può generare una f.e.m. in un circuito mediante un campo magnetico variabile nel tempo: essa si manifesta infatti nei brevi intervalli di tempo in cui il campo magnetico prodotto dal solenoide nei punti della spira cambia, passando da zero al valore B alla chiusura e da B a zero all'apertura, ma non compare quando la corrente e il campo B sono costanti.

Dall'esame quantitativo dei casi descritti e di tutte le altre situazioni in cui si manifesta il *fenomeno dell'induzione Faraday* dedusse che *ogni qual volta il flusso del campo magnetico $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato con un circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo:*

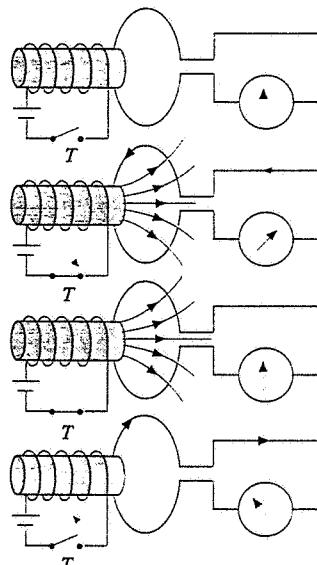
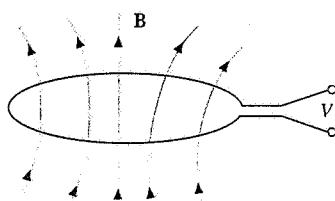


Figura 10.4



$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Figura 10.5

Deve essere chiaro che l'*effetto principale* è quello dato da (10.2), mentre la *corrente* è un *effetto secondario* dipendente oltre che dalla variazione di flusso anche dalla resistenza del circuito.

Se si interrompe il circuito in un punto (circuito aperto, $R = \infty$) e si collegano i due estremi ad un opportuno strumento senza alterare la forma geometrica del circuito, si constata che lo strumento segna una d.d.p. pari a $V = \xi_i = -d\Phi/dt$. La f.e.m. indotta si comporta quindi come la f.e.m. di un *generatore*: essa è eguale alla d.d.p. che si misura tra i poli del generatore quando nel circuito *non* passa corrente.

In effetti ciò è confermato dal seguente fatto sperimentale: quando un circuito di resistenza R e contenente un generatore di f.e.m. ξ è interessato da una variazione del flusso magnetico concatenato, la corrente è data dalla legge di Ohm (6.44):

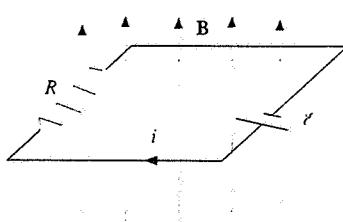
$$i = \frac{\xi + \xi_i}{R} = \frac{\xi - \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}}{R}; \quad (10.4)$$

la f.e.m. indotta si somma alla f.e.m. del generatore.

Ricordando le definizioni di forza elettromotrice e flusso magnetico riportate nell'introduzione di questo capitolo, la (10.2) si può scrivere nella forma

$$\xi_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma. \quad (10.5)$$

La variazione $d\Phi/dt$ del flusso magnetico concatenato con una linea chiusa s dà origine ad un *campo elettrico indotto* \mathbf{E}_i la cui circuitazione lungo s è eguale a $-d\Phi/dt$.



$$\tau = -\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

Figura 10.6

Tale campo non è dunque conservativo; d'altra parte, come abbiamo già visto in generale nel paragrafo 6.7 e discusso in casi particolari (generatore Van de Graaf, effetto Hall), sono solamente i campi elettrici non conservativi che forniscono la possibilità di mantenere una corrente in un circuito tramite la loro f.e.m., che rappresenta il lavoro fornito all'unità di carica per ogni giro completo del circuito.

Legge di Lenz

Il segno meno che compare nella (10.2) è molto importante e viene messo in evidenza con un enunciato particolare, detto *legge di Lenz*: l'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno. Ad esempio, se in un circuito chiuso circola una corrente indotta, questa ha verso tale che il flusso del proprio campo magnetico concatenato col circuito si oppone alla variazione del flusso primario Φ : se questo aumenta ($d\Phi/dt > 0$) la f.e.m. indotta è negativa e la corrente ad essa dovuta genera un autoflusso che si oppone all'aumento di Φ , così che il flusso complessivo attraverso il circuito cresce più lentamente; viceversa se Φ diminuisce ($d\Phi/dt < 0$), la f.e.m. indotta è positiva e la corrente indotta genera un autoflusso concorde a Φ , per cui la diminuzione avviene più lentamente.

Vedremo in seguito che questo comportamento è in accordo con il *principio di conservazione dell'energia*.

Unità di misura

Abbiamo visto nel paragrafo 7.6 che l'unità di flusso magnetico, il weber (Wb) è uguale a volt per secondo, $Wb = Vs$, e quindi $Wb/s = V$. Notiamo adesso che tale relazione discende direttamente da (10.2) e ricaviamo questa definizione: in un circuito ha luogo una variazione di flusso di 1 Wb quando questa variazione, avvenendo in 1 s, provoca una f.e.m. indotta di 1 V. Procedendo a ritroso possiamo poi definire il tesla come Wb/m^2 .

10.2 Origine fisica della forza elettromotrice indotta

Riprendiamo l'espressione (10.5) della legge di Faraday mettendo in evidenza la relazione tra campo magnetico e campo elettrico indotto:

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad (10.6)$$

Σ è una qualsiasi superficie che si appoggia sulla linea chiusa s e questa può coincidere con un circuito conduttore chiuso, ma può anche essere una linea geometrica chiusa, senza alcun supporto materiale. Conviene qui ripetere l'osservazione fatta a proposito di (10.2) e (10.3): la variazione del flusso magnetico genera un campo elettrico indotto e questo è l'effetto principale; se poi il campo E_i agisce all'interno di un conduttore che forma un circuito chiuso abbiamo in questo una corrente indotta, ma non si tratta dell'unica situazione possibile, anche se certamente è una delle più importanti dal punto di vista applicativo.

Il simbolo di *derivata parziale* nella (10.6) indica esplicitamente che è la variazione temporale del flusso concatenato a causare il fenomeno. Esaminiamo ora come si realizza una variazione di flusso nel tempo, elencando prima le varie possibilità e cercando poi una classificazione e una spiegazione fisica.

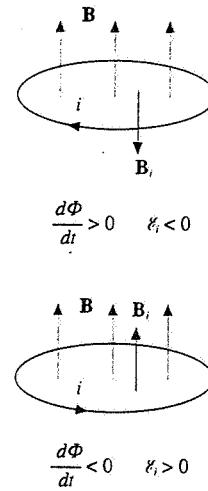


Figura 10.7

a) Consideriamo innanzitutto un *circuito indeformabile* che compie un *moto rigido* in una zona in cui esiste un *campo magnetico B costante* nel tempo. Se il moto è soltanto traslatorio e il campo magnetico è uniforme non si ha variazione di flusso: infatti sono costanti tutti i termini che compongono il flusso, in quanto \mathbf{B} è uniforme e costante, l'area non varia e l'angolo tra \mathbf{B} e il versore \mathbf{u}_n di ciascun elemento $d\Sigma$ è fisso. Se invece il campo magnetico non è uniforme il flusso attraverso il circuito cambia al variare della posizione del circuito stesso e in questo nasce una f.e.m. indotta. Una situazione analoga si presenta se il moto è rotatorio: ad ogni modo, con \mathbf{B} uniforme o non uniforme, il flusso attraverso il circuito cambia in quanto cambia nel tempo l'orientazione del circuito rispetto al campo magnetico. Nel caso più generale di moto rototraslatorio il flusso di norma varierà nel tempo. *Quindi, a parte il caso di moto traslatorio in campo uniforme, si ha sempre una f.e.m. indotta in un circuito indeformabile che si muove in un campo magnetico.*

b) Una seconda possibilità è che il *circuito venga deformato*; si ha il moto di ogni singola parte del circuito o anche soltanto di qualche parte e il flusso concatenato con il circuito in generale cambia nel tempo. Il fenomeno avviene sia in campo uniforme che in campo non uniforme.

c) Il flusso attraverso un circuito può cambiare nel tempo anche quando si mantiene il *circuito fisso* e si sposta la sorgente del campo magnetico; precisamente si ha una f.e.m. indotta in tutti i casi, eccettuato quello di moto traslatorio di un campo magnetico uniforme.

d) Con *circuito fisso* e *sorgenti di B* (uniforme o meno) *fisse* il flusso concatenato cambia nel tempo se si muove un mezzo ferromagnetico magnetizzato: infatti questo movimento altera la distribuzione geometrica delle linee del campo \mathbf{B} .

e) Infine, in assenza di qualsiasi moto relativo tra circuito e campo magnetico e di variazioni locali di permeabilità magnetica, si ha una variazione di flusso attraverso il circuito se il *campo magnetico*, uniforme o no, *varia nel tempo* a causa della variazione nel tempo dell'intensità della corrente che lo genera.

Le situazioni considerate possono essere prese come punti di riferimento: in sostanza si tratta dei casi più semplici in cui viene variata una sola delle tre grandezze che concorrono a formare il flusso, il campo magnetico, l'area e l'angolo tra \mathbf{B} e \mathbf{u}_n . Certamente è possibile realizzare fenomeni in cui la variazione del flusso è dovuta a più effetti sovrapposti, tuttavia sembra evidente che l'induzione elettromagnetica possa essere ricondotta a due cause distinte: il *moto di un conduttore* in un sistema di riferimento in cui le sorgenti del campo magnetico sono in quiete (punti a, b) e la *variazione nel tempo del campo magnetico* in un sistema di riferimento in cui il conduttore è in quiete (punti c, d, e).

Cominciando dalla *prima causa* dimostriamo che all'origine del fenomeno di induzione c'è la forza di Lorentz. Allo scopo consideriamo una spira conduttrice che si muove di moto traslatorio con velocità v in una regione in cui agisce un campo magnetico \mathbf{B} costante. Sugli elettroni di conduzione, che sono in moto con la velocità v della spira, agisce la forza di Lorentz (7.5) e si può definire, come nel paragrafo 6.7, il campo *elettromotore*

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad (10.7)$$

rapporto tra la forza sulla carica e la carica stessa. Sotto l'azione di \mathbf{E}_i le cariche

entrano in movimento lungo la spira e per uno spostamento corrispondente al tratto infinitesimo ds di spira viene compiuto sull'unità di carica il lavoro

$$d\mathcal{E}_i = \mathbf{E}_i \cdot ds = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.8)$$

Ne segue, integrando lungo tutta la spira, la forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot ds = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds \quad (10.9)$$

Dato che nel tempo dt ogni elemento di spira si sposta di $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, la (10.9) può essere riscritta come

$$\mathcal{E}_i = \oint ds \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = \oint ds \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{B}$$

in cui si è utilizzata la proprietà di poter permutare ciclicamente i fattori nel prodotto misto. Il vettore $ds \times d\mathbf{r}$ ha modulo pari all'area del parallelogramma di lati ds e $d\mathbf{r}$, descritto da ds nel tempo dt , e possiamo scrivere $d\Sigma' \mathbf{u}_n = ds \times d\mathbf{r}$, essendo \mathbf{u}_n il versore normale al piano del parallelogramma. Pertanto

$$ds \times d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma' = d\Phi'$$

rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso il suddetto parallelogramma. Nella traslazione infinitesima di tutta la spira viene descritta complessivamente un'area $d\Sigma$ attraverso cui si ha il flusso

$$d\Phi_i(\mathbf{B}) = \int d\Phi' = \oint ds \times d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int_{d\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma'$$

Si osservi che l'integrazione è condotta lungo la spira, cioè su ds , e che $d\Phi'$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $d\Phi_i$. Detto $\Phi_1(\mathbf{B})$ il flusso concatenato al circuito nella posizione iniziale e $\Phi_2(\mathbf{B})$ quello nella posizione finale, assunta dopo la traslazione infinitesima, vale la relazione

$$\Phi_2(\mathbf{B}) - \Phi_1(\mathbf{B}) + d\Phi_i(\mathbf{B}) = 0$$

Infatti, come si vede dalla figura 10.8, la traslazione della spira individua una superficie chiusa di cui $d\Sigma$ può essere considerata la superficie laterale e il flusso complessivo uscente deve essere nullo in quanto \mathbf{B} è solenoidale. La variazione di flusso attraverso la spira vale dunque

$$d\Phi(\mathbf{B}) = \Phi_2(\mathbf{B}) - \Phi_1(\mathbf{B}) = -d\Phi_i(\mathbf{B})$$

e in definitiva abbiamo

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot ds = \frac{d\Phi_i(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad (10.10)$$

in accordo con la legge di Faraday (10.2).

Ricordando quanto visto nel paragrafo 7.6 vediamo che la f.e.m. indotta è data dalla variazione nel tempo del flusso tagliato dal circuito durante la traslazione.

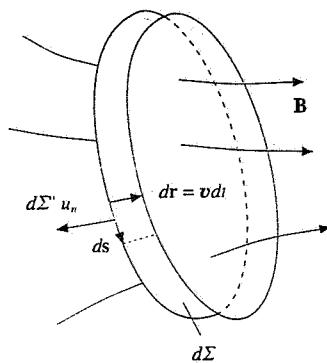


Figura 10.8

Se $\Phi_1 = \Phi_2$ il flusso tagliato è nullo e non c'è f.e.m. indotta: in particolare questo è il caso della traslazione in campo magnetico uniforme.

In modo analogo si procede per una rotazione, arrivando di nuovo all'equivalenza tra (10.9) e (10.2); riprenderemo questo punto specifico nel paragrafo 10.3.

Il caso della *deformazione* può anch'esso essere affrontato in modo generale, con lo stesso risultato. Noi ci limitiamo a trattarlo con un esempio.

Esempio 10.1

Un circuito rettangolare è costituito da due conduttori paralleli, chiusi a sinistra da un conduttore di resistenza R e a destra da una sbarretta conduttrice mobile di lunghezza b e resistenza r ; esso è posto in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme e costante, ortogonale al piano contenente il circuito (si tratta dello stesso dispositivo dell'esempio 7.4, con il generatore sostituito dal resistore R). Supponendo che la sbarretta si muova di moto traslatorio con velocità v nel verso indicato in figura 10.9, calcolare la f.e.m. e la corrente indotta nel circuito.

Soluzione

Sugli elettroni nella sbarretta agisce il campo elettrico indotto (10.7), la cui *tensione ai capi* della sbarretta è data dalla (2.4),

$$T = \int_M^N \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -v B b ;$$

infatti \mathbf{v} e \mathbf{B} sono ortogonali tra loro e $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ è parallelo e discorde a MN , la cui orientazione è stata legata a quella di \mathbf{B} secondo la regola delle vite. Negli altri punti del circuito, che sono fermi, $\mathbf{E}_i = 0$ e quindi la f.e.m. nel circuito vale

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -v B b . \quad (10.11)$$

Detta x la distanza $PN = QM$, il flusso del campo magnetico attraverso il circuito vale

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = B b x$$

e in base a (10.2)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B b \frac{dx}{dt} = -B b v$$

che è la (10.11).

La f.e.m. indotta nel circuito è direttamente proporzionale alla velocità con cui si sposta la sbarretta; se questa viene mantenuta in moto con velocità costante la f.e.m. indotta è costante.

La corrente indotta, secondo (10.3), è

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{r+R} = -\frac{v B b}{r+R} ,$$

se consideriamo trascurabile la resistenza dei due conduttori paralleli. Il segno meno indica che il verso è da N a M : tale corrente genera un campo magnetico opposto a \mathbf{B} , contrastando così la variazione di flusso (legge di Lenz).

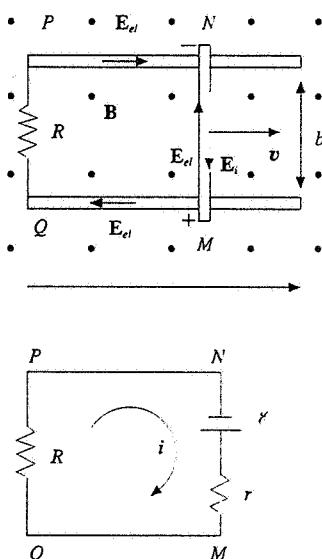


Figura 10.9

In sostanza il moto della sbarretta in campo magnetico ha dato luogo a un *generatore di f.e.m.* \mathcal{E}_i , come avviene nel generatore di Van de Graaf per trasporto meccanico o nelle pile per trasporto chimico. Il campo elettromotore (10.7) porta gli elettroni verso il punto N e i poli del generatore sono M (polo positivo) e N (polo negativo); il risultato di questa separazione di cariche è la produzione di un campo elettrostatico E_{el} per cui il campo elettrico nel circuito vale

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{el} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_{el} \text{ tra } M \text{ e } N \text{ nella sbarretta ,}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} \quad \text{nel resto del circuito dove } \mathbf{E}_i = 0,$$

relazioni del tutto analoghe a quelle del paragrafo 6.7. La f.e.m. è

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}_{el} \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_M^N \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = vBb \quad ,$$

come abbiamo già ricavato. La d.d.p. che a circuito chiuso si misura tra M e N è

$$V_M - V_N = \mathcal{E}_i - ri$$

Quando, con la sbarretta in movimento, si apre il circuito, la corrente si annulla e la d.d.p. che si misura tra M e N è la f.e.m. \mathcal{E}_i del generatore. In tale situazione all'interno della sbarretta c'è uno *stato di equilibrio* con campo elettrico nullo, in quanto il campo elettrostatico dovuto alla separazione delle cariche è eguale ed opposto a E_i :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \mathbf{E}_{el} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad .$$

Da quanto abbiamo dimostrato siamo portati alle seguenti conclusioni. Quando un elemento di materiale conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avviene una separazione di cariche dovuta ad un *campo elettromotore che ha origine nella forza di Lorentz*. Se i singoli elementi formano un circuito chiuso questo diventa sede di una f.e.m. \mathcal{E}_i che di norma è diversa da zero e in esso circola una corrente indotta. \mathcal{E}_i è data da (10.9), ma in ogni caso si verifica che essa è anche eguale all'opposto della derivata rispetto al tempo del flusso magnetico concatenato con il circuito, secondo la legge di Faraday (10.2): nei casi considerati quindi il *fenomeno di induzione elettromagnetica viene ricondotto alla forza di Lorentz*. La f.e.m. si può pensare localizzata nei punti del circuito in movimento in cui \mathcal{E}_i è diverso da zero: può trattarsi di tutto il circuito o anche di una sola parte, come nell'esempio 10.1.

Anche il caso di un conduttore aperto, ai cui capi si misura una d.d.p. eguale alla tensione del campo elettromotore, è rappresentabile con il formalismo della (10.2) attraverso il concetto di flusso tagliato dal conduttore. È chiaro che in tutta questa classe di fenomeni la presenza del supporto materiale costituito dal conduttore, aperto o chiuso, è essenziale.

Passiamo ora a considerare la *seconda causa* di induzione e cioè la variazione del campo magnetico vista da un circuito fisso. Essendo nulla la velocità degli elementi di circuito sugli elettroni ora non agisce la forza $\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$; poiché la forza su una carica è data in generale da (7.38), $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, la presenza della f.e.m. indotta si spiega con la presenza di un campo elettrico \mathbf{E} : dobbiamo cioè supporre che in una regione in cui il campo magnetico varia nel tempo venga indotto un campo elettrico.

Per trovare la relazione quantitativa tra i campi ritorniamo a (10.6) in cui portiamo il simbolo di derivata sotto il segno di integrale, operazione possibile in quanto il circuito è fisso:

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

Applichiamo alla circuitazione del campo elettrico il *teorema di Stokes* (2.53) ottenendo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$$

L'eguaglianza tra i due integrali superficiali deve essere vera per qualsiasi superficie che si appoggi al circuito e deve quindi valere la relazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (10.12)$$

che esprime il *legame locale tra la variazione nel tempo del campo magnetico e il campo elettrico indotto*.

Riassumendo, la legge integrale (10.2) si applica a tutte le situazioni in cui una linea chiusa sia interessata da una variazione del flusso magnetico concatenato. Localmente, il campo elettrico da cui calcoliamo la f.e.m. indotta può essere dovuto al moto in campo magnetico oppure alla variazione temporale del campo magnetico: questo secondo fenomeno è un fatto assolutamente nuovo, che si aggiunge alle proprietà dei campi studiate fino ad ora.

La (10.12), che esprime quantitativamente la relazione locale tra campo magnetico variabile e campo elettrico, è *una delle quattro equazioni di Maxwell nella forma più generale*. Essa è valida in qualsiasi mezzo e in particolare nel vuoto, in assenza di conduttori; vedremo un esempio di ciò nel paragrafo 10.3.

Nel paragrafo 8.7 abbiamo espresso il campo \mathbf{B} come rotore del potenziale vettore \mathbf{A} ; se inseriamo la (8.39) nella (10.12) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = - \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

In generale il campo \mathbf{E} può essere dovuto anche a cariche fisse e allora la sua espressione in funzione del potenziale scalare elettrostatico e del potenziale vettore si scrive

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad . \quad (10.13)$$

Formalmente (10.13) è ancora compatibile con (10.12) in quanto il rotore di un gradiente è identicamente nullo.

Per concludere, vogliamo far notare l'*aspetto relativistico* di alcune delle proprietà che abbiamo discusso. Sperimentalmente risulta che si misura la stessa forza elettromotrice nel sistema di riferimento in cui un circuito si muove con velocità v rispetto alla sorgente (fissa) di \mathbf{B} e nel sistema di riferimento in cui il circuito è fisso e la sorgente si muove con velocità $-v$; nel primo sistema l'effetto è attribuito alla forza magnetica $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ agente su cariche in moto, nel secondo alla forza elettrica $q \mathbf{E}$ agente su cariche fisse, con \mathbf{E} dato da (10.12), sebbene le due situazioni non siano

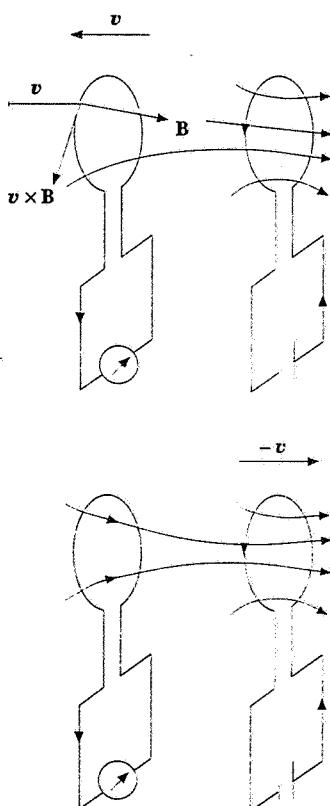


Figura 10.10

distinguibili perché danno origine alla stessa grandezza misurabile, che non dipende dal sistema di riferimento. Questa impossibilità di stabilire uno stato di moto assoluto è uno dei concetti fondamentali della teoria della relatività, di cui appunto i fenomeni suddetti costituiscono un'importante conferma.

Da tale contesto resta distinto soltanto il caso di assenza di qualsiasi moto relativo, in cui la variazione di corrente in un circuito fisso produce la variazione di flusso in un altro circuito fisso. Sappiamo che la legge di Faraday (10.2) conserva la sua validità e che il campo elettrico locale è ancora espresso da (10.12): ciò vuol dire in particolare che dalla sola misura di \mathcal{E} non si può stabilire se la variazione di \mathbf{B} nel tempo vista da un circuito fisso sia dovuta al moto di una sorgente di campo magnetico costante o ad una sorgente fissa con campo variabile.

Esempio 10.2

Una bobina costituita da $N = 100$ spire di area $\Sigma = 100 \text{ cm}^2$ e resistenza complessiva $R = 5 \Omega$ è posta tra le espansioni polari di un elettromagnete e giace in un piano ortogonale alle linee di \mathbf{B} . Il campo magnetico, uniforme nei punti di Σ , varia nel tempo aumentando linearmente dal valore zero al valore $B_0 = 0.8 \text{ T}$ in un tempo $t_0 = 10 \text{ s}$. Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina, la carica q che fluisce nella bobina durante il tempo t_0 e il lavoro totale speso nello stesso tempo.

Soluzione

La legge di variazione del campo magnetico è $B = B_0 t/t_0$ e di conseguenza il flusso attraverso la bobina (fissa) vale

$$\Phi(t) = N\Sigma B = \frac{N\Sigma B_0}{t_0} t$$

Il valore della f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -N\Sigma \frac{dB}{dt} = -\frac{N\Sigma B_0}{t_0} = -8 \cdot 10^{-2} \text{ V} ,$$

costante per tutto il tempo t_0 , e la corrente nella bobina ha il valore

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -1.6 \cdot 10^{-2} \text{ A} .$$

Esso circola in verso tale da opporsi con il suo campo alla variazione di \mathbf{B} .

La carica totale che passa attraverso una qualsiasi sezione del filo che costituisce la bobina è

$$q = \int i dt = i t_0 = 0.16 \text{ C} .$$

La potenza dissipata sulla resistenza R e il lavoro totale valgono

$$P = \mathcal{E}_i i = 1.28 \cdot 10^{-3} \text{ W} , \quad W = Pt_0 = \mathcal{E}_i i t_0 = \mathcal{E}_i q = 1.28 \cdot 10^{-2} \text{ J} .$$

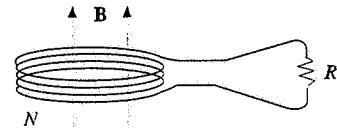


Figura 10.11

10.3 Applicazioni della legge di Faraday

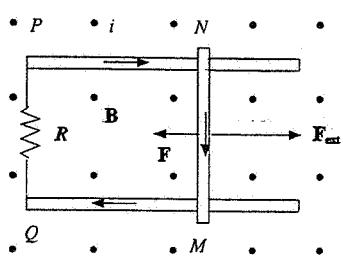


Figura 10.12

Resistenza di attrito elettromagnetico

In questo paragrafo discutiamo alcune applicazioni interessanti della legge di Faraday, occupandoci in particolare degli scambi energetici che si verificano nei fenomeni di induzione elettromagnetica.

Attrito elettromagnetico. Generatori

Riprendiamo in considerazione il circuito dell'esempio 10.1. Siccome manteniamo in moto la sbarretta con velocità v nel circuito compare la f.e.m. $\mathcal{E}_i = -vBb$ e circola la corrente $i = \mathcal{E}_i/(r+R)$. Ma allora sulla sbarretta agisce la forza magnetica (7.15),

$$\mathbf{F} = i \mathbf{NM} \times \mathbf{B} = -\frac{B^2 b^2}{r+R} \mathbf{v},$$

che ha verso opposto a quello del moto della sbarretta e modulo proporzionale alla velocità. La presenza del campo magnetico da una parte dà origine alla corrente, dall'altra a una *forza resistente di tipo viscoso*, comunemente chiamata *resistenza di attrito elettromagnetico*.

Per vincere la resistenza di attrito bisogna applicare una forza esterna, eguale e contraria a \mathbf{F} , spendendo la potenza

$$P = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \frac{B^2 b^2 v^2}{r+R} = (r+R) i^2 = \mathcal{E}_i i$$

La *potenza meccanica* impiegata per fare avvenire il movimento viene ritrovata *integralmente* sotto forma di *potenza elettrica* spesa sulle resistenze del circuito. Il sistema può essere considerato come un *generatore* in cui la potenza erogata $\mathcal{E}_i i$ proviene da un'azione meccanica esterna; r è la resistenza interna del generatore e R la resistenza esterna.

Se nella (10.2) ci fosse il segno positivo, ovvero se la corrente indotta circolasse in verso tale che la forza magnetica non fosse opposta al moto, basterebbe mettere in moto la sbarretta, ad esempio con un impulso, e successivamente il moto sarebbe mantenuto dalla stessa forza \mathbf{F} . Avremmo un generatore che fornisce potenza elettrica senza ricevere una quantità equivalente di potenza sotto altra forma, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia. Vediamo qui il *significato energetico del segno meno della* (10.2), cioè della *legge di Lenz*. Se quindi la sbarretta ricevesse un impulso essa si fermerebbe quando la sua energia cinetica iniziale si fosse trasformata tutta in lavoro elettrico e alla fine in calore; durante la fase di frenamento la velocità presenta un andamento esponenziale decrescente nel tempo (vedi vol. I, paragrafo 1.7) e lo stesso andamento caratterizza la f.e.m. e la corrente indotta.

Un altro dispositivo in cui si ha trasformazione di potenza meccanica in potenza elettrica è indicato in figura 10.13; esso è noto come *disco di Barlow*. Il disco conduttore di raggio a , libero di ruotare attorno all'asse passante per il centro O e ortogonale al disegno, è collegato ad un resistore R con due conduttori, uno fissato al centro del disco e l'altro a contatto col disco in un punto del bordo. Il sistema è immerso in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme e costante, parallelo all'asse di rotazione e uscente dal foglio. Ad un certo istante sia ω la velocità angolare del disco, dovuta ad un'azione esterna; il vettore ω è uscente dal foglio, cioè la rotazione ci appare antioraria.

Il campo elettrico indotto in ciascun punto Q del segmento mobile OP è $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = r\omega B \mathbf{u}_r$, se \mathbf{u}_r è il versore del vettore \mathbf{OP} e r la distanza di Q dal centro O . La f.e.m. indotta nel circuito è

$$\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_0^P r \omega B \mathbf{u}_r \cdot dr = \int_0^a \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

e la corrente indotta $i = \mathcal{E}_i/R$, dove R è la resistenza totale del circuito, circola dal centro verso il bordo, come si deduce dal verso della forza di Lorentz agente sugli elettroni che sono trascinati dal moto del disco (e come si misura sperimentalmente).

Sull'elemento radiale di corrente dr , distante r dal centro, agisce la forza elementare di Laplace (7.13) $d\mathbf{F} = i dr \times \mathbf{B}$, ortogonale a dr e rivolta verso sinistra, giacente nel piano del

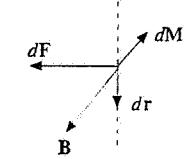
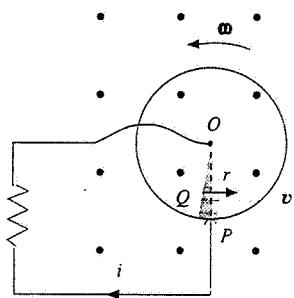


Figura 10.13

disco. Questa forza ha rispetto al centro il momento $dM = r \times dF$, ortogonale al disco e diretto verso il foglio, cioè opposto a ω ; sviluppando si ottiene

$$dM = -\frac{B^2 a^2}{2R} r dr \omega$$

Il momento risultante, opposto a ω , vale

$$M = \int_0^a dM = -\frac{B^2 a^4}{4R} \omega$$

Si tratta di un *momento frenante* che è proporzionale a ω , quindi di *tipo viscoso*, detto *momento di attrito elettromagnetico*. Per mantenere in moto il disco bisogna applicare dall'esterno il momento $M' = -M$ e spendere la potenza

$$P = -M \omega = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{4R} = \frac{\epsilon_i^2}{R} = R i^2$$

che risulta *eguale* alla *potenza elettrica* dissipata nel circuito.

Sia in questo caso che nel precedente le formule sono valide per qualsiasi tipo di moto; se la traslazione o la rotazione sono uniformi la f.e.m. e la corrente indotta sono costanti nel tempo, abbiamo cioè due *generatori di corrente continua*, altrimenti si può avere qualsiasi forma di variazione. Tuttavia i casi trattati sono essenzialmente dimostrativi; vediamo nell'esempio seguente una situazione più vicina alle realizzazioni pratiche effettive.

Momento di attrito elettromagnetico

Esempio 10.3 Generatore di corrente sinusoidale

Una spira rettangolare, di lati $MN = PQ = s$ e $NP = QM = s'$, ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa, parallelo al lato MN . Sulla spira agisce un campo magnetico B uniforme e costante, orizzontale; indichiamo con θ l'angolo formato dalla normale alla spira con B : $\theta = 0$ significa che il vettore u_n , orientato secondo la regola della vite, è parallelo e concorde a B . Calcoliamo la f.e.m. indotta con (10.9). Lungo i lati MN e PQ $v \times B$ è parallelo e concorde al verso di percorrenza del lato stesso per cui

$$v \times B \cdot MN = v \times B \cdot PQ = s v B \sin \theta$$

mentre lungo gli altri due lati

$$v \times B \cdot NP = v \times B \cdot QM = 0$$

in quanto $v \times B$ è perpendicolare al lato. Quindi

$$\epsilon_i = 2 s v B \sin \theta$$

Siccome $v = \omega s'/2$, $ss' = \Sigma$ area della spira e $\theta = \omega t$, si ha

$$\epsilon_i = \omega B \Sigma \sin \omega t \quad , \quad (10.14)$$

espressione della f.e.m. indotta nella spira a causa della rotazione uniforme in campo magnetico. Lo stesso risultato si ottiene da (10.2):

$$\Phi(B) = \int_{\Sigma} B \cdot u_n d\Sigma = B \Sigma \cos \theta = B \Sigma \cos \omega t \Rightarrow \epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B \Sigma \sin \omega t \quad .$$

La (10.14), applicabile anche a una spira piana di forma qualsiasi, mostra che la f.e.m.

Generatori di corrente continua

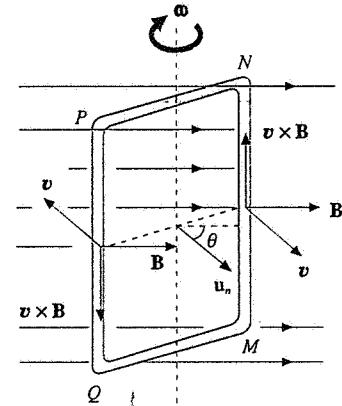


Figura 10.14

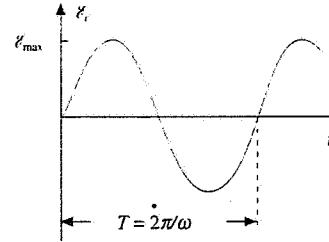


Figura 10.15

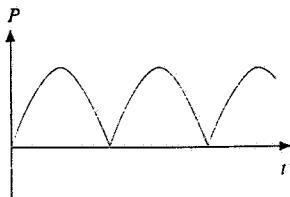


Figura 10.16

così ottenuta varia sinusoidalmente nel tempo, con valore massimo

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma \quad (10.15)$$

Se la spira viene collegata in serie ad un circuito avente resistenza complessiva R , compresa quella della spira, nel circuito passa la corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} \sin \omega t$$

e viene spesa la potenza elettrica

$$P = \mathcal{E}_i i = R i^2 = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (10.16)$$

Dato che la spira percorsa dalla corrente i ha il momento magnetico $m = i \Sigma$, per mantenerla in rotazione contro il momento meccanico delle forze magnetiche che tende ad orientare \mathbf{m} parallelo e concorde a \mathbf{B} (vedi paragrafo 7.5) deve essere fornita la potenza meccanica

$$P = M \omega = (m B \sin \theta) \omega = i \omega B \Sigma \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t,$$

eguale a (10.16).

Si osservi che tale potenza deve essere sempre fornita al sistema. Infatti nel primo semiperiodo ($0 \leq \theta \leq \pi$, $\sin \theta \geq 0$) la corrente indotta circola nel verso di percorrenza prefissato e il momento magnetico \mathbf{m} forma l'angolo θ con \mathbf{B} : aumentando θ col tempo bisogna fornire lavoro per la rotazione che disallinea \mathbf{m} e \mathbf{B} . Nel secondo semiperiodo ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $\sin \theta \leq 0$) la corrente cambia verso e \mathbf{m} forma con \mathbf{B} l'angolo $\theta - \pi$, ancora minore di π e crescente; di conseguenza occorre fornire lavoro come prima.

Agli effetti pratici si è interessati più che ai valori istantanei della potenza al suo *valor medio* in un periodo, tenuto conto che l'utilizzo normalmente avviene per tempi molto maggiore del periodo T di rotazione. Da (10.16) si vede che il valor medio della potenza è proporzionale al valor medio di $\sin^2 \omega t$. Sappiamo che questo vale $1/2$ (vol. I, paragrafo 9.3) e quindi

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2R} \quad (10.17)$$

la *potenza media* in un periodo è pari alla *metà del valore massimo* della potenza istantanea (a rigore il valor medio è calcolato nel periodo di $\sin^2 \omega t$ che è $T/2$, ma evidentemente il risultato è lo stesso nel periodo T della rotazione).

La potenza media (10.17) coincide con quella che sarebbe erogata, sulla medesima resistenza R , da un generatore di corrente continua con f.e.m. \mathcal{E}_{eff} tale che $\mathcal{E}_{\text{eff}}^2 / R = \mathcal{E}_{\max}^2 / 2R$. Da questo punto di vista il generatore di corrente sinusoidale è *equivalente* ad un generatore di corrente continua la cui f.e.m., detta *f.e.m. efficace*, vale

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (10.18)$$

Facciamo un esempio numerico: il circuito ruotante è costituito da una bobina con $N = 20$ spire circolari di raggio $r = 19.9$ cm, che ruota con frequenza $v = 50$ Hz in un campo magnetico $B = 0.4$ T. La f.e.m. massima, da (10.15), e la f.e.m. efficace, da (10.18), risultano:

$$\mathcal{E}_{\max} = \omega B \Sigma = 2 \pi v B N \pi r^2 = 312.6 \text{ V} \quad , \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = 221 \text{ V} \quad .$$

Una f.e.m. e una corrente sinusoidale sono casi particolari di grandezze alternate. Riprenderemo l'argomento nel capitolo 11.

Motori

I processi descritti di trasformazione di energia meccanica in energia elettrica possono essere invertiti ottenendo movimento di corpi a spese di energia elettrica fornita da un generatore.

Nel dispositivo della figura 10.9 sostituiamo il resistore R con un generatore che fa circolare corrente nel verso indicato in figura 10.17. La situazione è la stessa dell'esempio 7.4 (sono cambiati di verso sia corrente che campo magnetico). Alla sbarretta attraversata da corrente è applicata la forza $\mathbf{F}_1 = i B b \mathbf{u}_x$ ed essa si sposta verso destra; di conseguenza varia il flusso magnetico concatenato con il circuito e nasce la f.e.m. indotta (10.11), che tende a far diminuire la corrente nel circuito e quindi a frenare il moto della sbarretta.

Detta \mathcal{E}_0 la f.e.m. del generatore, la legge di Ohm del circuito è

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = R i \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}_0 - v B b}{R}$$

se con R indichiamo la resistenza totale del circuito; ammettiamo dunque che la corrente (ma non la f.e.m. \mathcal{E}_0) cambi durante il moto, discostandoci in ciò dall'esempio 7.4.

Supponiamo inoltre che alla sbarretta sia applicata anche la forza resistente costante \mathbf{F}_0 , opposta alla velocità: ad esempio la sbarretta tramite una fune e una carrucola solleva un corpo (e dentro \mathbf{F}_0 può essere conglobata un'eventuale forza di attrito radente). La legge del moto è

$$F = F_1 - F_0 = i B b - F_0 = m a = m \frac{dv}{dt}$$

e sostituendo per i l'espressione scritta sopra si ottiene l'equazione differenziale del moto della sbarretta, di massa m :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 - v B b}{m R} B b - \frac{F_0}{m}$$

Se per $t = 0$ la sbarretta è in quiete, la soluzione è

$$v(t) = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{B b} - \frac{R F_0}{B^2 b^2} \right) (1 - e^{-B^2 b^2 t / m R})$$

A regime, per tempi grandi rispetto alla costante di tempo $\tau = m R / B^2 b^2$, il moto della sbarretta è uniforme e la forza applicata è nulla ($F_1 = F_0$). I valori di regime della velocità, della corrente e della f.e.m. sono

$$v_\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{B b} - \frac{R F_0}{B^2 b^2}, \quad i_\infty = \frac{\mathcal{E}_0 - v_\infty B b}{R} = \frac{F_0}{B b}$$

$$\mathcal{E}_{i,\infty} = -v_\infty B b = -\left(\mathcal{E}_0 - \frac{R F_0}{B b} \right)$$

La potenza erogata dal generatore per $v = v_\infty$ è

$$P_\infty = \mathcal{E}_0 i_\infty = (R i_\infty - \mathcal{E}_{i,\infty}) i_\infty = R i_\infty^2 - \mathcal{E}_{i,\infty} i_\infty = R i_\infty^2 + F_0 v_\infty$$

Il primo termine corrisponde alla potenza dissipata nella resistenza, il secondo alla potenza meccanica necessaria per vincere la forza resistente F_0 .

Secondo le stesse linee si svolge il ragionamento nel caso del disco di Barlow in cui al posto del resistore R è posto un generatore di f.e.m. \mathcal{E}_0 e che deve vincere un momento meccanico esterno M_0 (ad esempio sul disco è avvolta una fune che sostiene una massa). Il passaggio di corrente nel disco produce il momento meccanico di origine magnetica $M_1 = i B a^2/2$, che mette in rotazione il disco; ha origine allora la f.e.m. indotta $\mathcal{E}_i = -B a^2 \omega/2$ e si ha

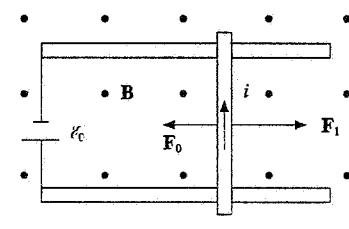


Figura 10.17

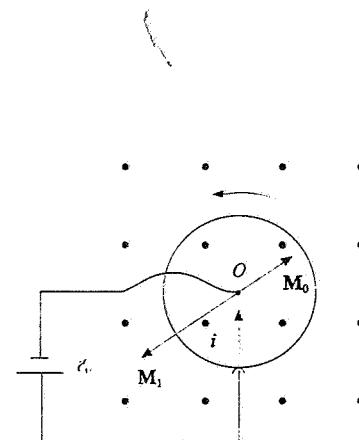


Figura 10.18

$$\xi_0 + \xi = R i \Rightarrow i = \frac{\xi_0 - \frac{1}{2} B a^2 \omega}{R},$$

mentre l'equazione del moto è data dal teorema del momento angolare

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_0 = \frac{i B a^2}{2} - M_0,$$

essendo I il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione. Si trova anche in questo caso che a *regime* il *moto* del disco è *uniforme*; la *costante di tempo* è $\tau = 4 I R/B^2 a^4$ e il *valore di regime della velocità angolare*, a cui è nullo il momento meccanico totale ($M_1 = M_0$), è

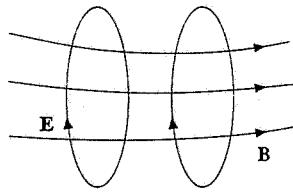
$$\omega_{\infty} = \frac{2}{B a^2} \left(\xi_0 - \frac{2 R M_0}{B a^2} \right)$$

La corrente, la f.e.m. indotta e la potenza erogata dal generatore a *regime* valgono

$$i_{\infty} = \frac{2 M_0}{B a^2}, \quad \xi_{i\infty} = - \left(\xi_0 - \frac{2 R M_0}{B a^2} \right), \quad P_{\infty} = R i_{\infty}^2 + M_0 \omega_{\infty}.$$

I sistemi esaminati si comportano in definitiva come *motori* in cui una parte dell'energia fornita dal generatore viene trasformata in energia cinetica. Nella pratica i dispositivi possono essere molto differenti, ma i principi fondamentali sono quelli esposti.

Figura 10.19



Correnti di Foucault

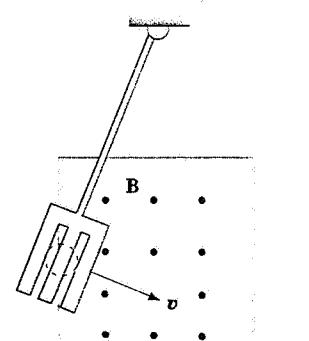
Un campo magnetico variabile produce un campo elettrico secondo (10.12): la struttura della relazione è tale che se le linee di B sono in una certa direzione le linee di E stanno in un piano ortogonale a tale direzione e concatenano quelle di B , come mostrato in figura 10.19. Quando il campo magnetico è variabile all'interno di un *conduttore metallico* il campo elettrico indotto dà origine a *correnti concatenate alle linee di B*, che possono essere molto intense dato che la resistività del metallo è piccola. Il fenomeno porta ad un riscaldamento del conduttore ed è sfruttato ad esempio nei *forni ad induzione* in cui si fondono metalli sottoponendoli a campi magnetici variabili con alta frequenza. Se invece si vogliono ridurre le correnti indotte, si lamina la massa del conduttore in fogli paralleli alle linee di B e separati da strati di vernice isolante, di modo che le correnti debbano attraversare tali strati.

Tecnicamente tali correnti si chiamano *correnti parassite* o *di Foucault*. Esse si manifestano anche quando una massa metallica si muove in un campo magnetico costante e sono dovute alla forza di Lorentz sugli elettroni. Secondo la legge di Lenz l'effetto rallenta il moto in campo magnetico (attrito elettromagnetico) ed è proprio per questo che viene utilizzato.

Una semplice dimostrazione si fa con una piastrina metallica sospesa a una sbarretta che viene fatta oscillare così da entrare e uscire da una regione in cui agisce un campo magnetico B ortogonale alla piastrina. La piastrina viene chiaramente frenata quando entra nella zona in cui c'è campo, non lo è più finché è nel campo, è di nuovo frenata quando esce: le variazioni di flusso danno luogo a correnti che si oppongono alle variazioni stesse. Se si praticano nella piastrina dei tagli in modo da interrompere la circolazione delle correnti indotte l'effetto frenante è molto ridotto.

Il *freno elettromagnetico* è utilizzato in molte metropolitane: un elettromagnete posto sotto una vettura in vicinanza delle rotaie viene acceso e il fatto genera correnti di Foucault nelle rotaie con conseguente frenamento del moto relativo e quindi della vettura. Il sistema è vantaggioso perché può essere facilmente regolato variando la corrente che eccita l'elettromagnete. Lo stesso accorgimento è applicato per smorzare oscillazioni, ad esempio in alcuni modelli di bilance.

Figura 10.20



Il betatron

Il *betatrone* è un acceleratore che fornisce un fascio pulsato di elettroni con energia dell'ordine di 100 MeV; il principio di funzionamento venne formulato nel 1941 da Kerst. Nella figura 10.21 è riportato uno schema in sezione. Un elettromagnete, con le espansioni circolari opportunamente sagomate, produce un campo magnetico \mathbf{B} non uniforme, ma a simmetria radiale, nel senso che il modulo di \mathbf{B} è funzione della distanza r dall'asse di simmetria. Coassiale a tale asse e giacente nel piano mediano c'è una *cavità toroidale* C in cui viene praticato un vuoto spinto e in cui vengono immessi tangenzialmente elettroni con energia dell'ordine della decina di keV.

Supponiamo che il campo magnetico vari nel tempo; le linee del campo elettrico indotto secondo la legge (10.12) sono circonferenze coassiali all'asse di simmetria e ortogonali a questo. Il valore del campo elettrico nei punti della circonferenza di raggio R pari al raggio medio della cavità C si calcola dalla (10.6):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R E = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\frac{d}{dt} (\pi R^2 B_m) \quad ,$$

dove si è introdotto il valore medio B_m del campo magnetico nel piano dell'orbita. Quindi

$$E = \frac{R}{2} \frac{dB_m}{dt}$$

Un elettrone immesso lungo la detta circonferenza con verso opportuno, che tiene conto sia del fatto che la carica è negativa che del verso di \mathbf{E} dato dalla legge di Lenz, viene accelerato dalla forza tangenziale eE e la sua quantità di moto varia secondo la legge

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{eR}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad ,$$

per cui in un tempo finito

$$\Delta p = \frac{eR}{2} \Delta B_m \quad : \quad (10.19)$$

la variazione di quantità di moto è proporzionale alla variazione del *campo magnetico medio nel piano dell'orbita*.

Perché il moto sia circolare d'altra parte il campo magnetico locale \mathbf{B}_{orb} che agisce sugli elettroni deve produrre la necessaria accelerazione centripeta, deve cioè valere la (7.7) $p = eR B_{\text{orb}}$. Se si vuole che il raggio R dell'orbita resti costante occorre che il valore di \mathbf{B}_{orb} cresca in accordo con

$$\Delta p = eR \Delta B_{\text{orb}} \quad . \quad (10.20)$$

Quindi, affinché l'elettrone descriva orbite circolari di raggio costante sotto l'azione combinata del campo elettrico \mathbf{E} che lo accelera tangenzialmente e del campo magnetico \mathbf{B}_{orb} che lo accelera normalmente, deve valere l'eguaglianza tra (10.19) e (10.20), da cui si ricava

$$\Delta B_m = 2\Delta B_{\text{orb}} \quad :$$

la variazione del campo magnetico medio nel piano dell'orbita deve essere *doppia* della variazione del campo magnetico locale sull'orbita. In questo senso vanno sagomate le espansioni polari così da produrre un campo magnetico non uniforme che decresce radialmente.

Si osservi che la trattazione è *relativisticamente corretta*, come è richiesto dal fatto che l'energia raggiunta dagli elettroni è molto superiore alla loro energia a riposo $m_e c^2 = 0.5$ MeV: infatti sono state usate le formule $dp/dt = F$ e $R = p/eB$, valide in ogni caso. L'energia cinetica degli elettroni è, con ottima approssimazione, data dalla formula $E_k = pc$, dove c è la

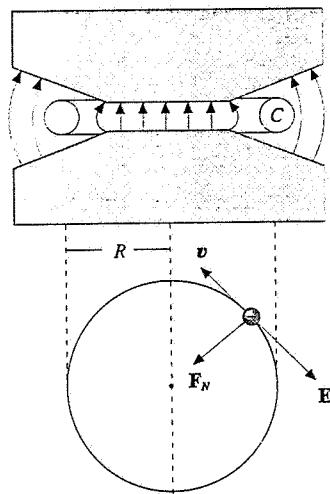


Figura 10.21

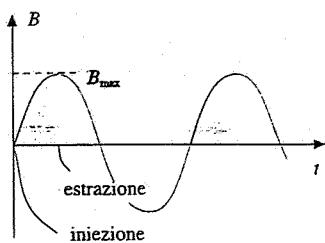


Figura 10.22

velocità della luce. Assumendo $R = 1 \text{ m}$ e $B_{\max} = 0.5 \text{ T}$,

$$E_{k,\max} = p_{\max} c = e R B_{\max} c = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ J} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ eV} = 150 \text{ MeV} ,$$

appunto molto maggiore di 0.5 MeV. La velocità degli elettroni a queste energie è praticamente eguale a c e per fare un giro, con le dimensioni date, essi impiegano un tempo $t = 2\pi R/c = 21 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. Assumendo che la f.e.m. indotta valga 1000 V, ovvero che in un giro l'elettrone acquisti 1000 eV, occorrono per arrivare a 150 MeV $1.5 \cdot 10^5$ giri, percorsi in $3.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

L'alimentazione del magnete di un betatron viene fatta di norma con una corrente sinusoidale, ma soltanto un quarto di periodo è utile per il processo di accelerazione. Se la frequenza della corrente è 50 Hz, un quarto di periodo è $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, pienamente compatibile con il valore $3.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ del tempo totale di accelerazione. Alla fine del quarto di periodo utile gli elettroni vengono *estraiti* dal betatron accendendo per un tempo molto breve un campo magnetico che ne devia le traiettorie verso l'esterno. Il *fascio estratto* di elettroni è dunque *pulsato* (non continuo) con frequenza eguale a quella della corrente di alimentazione.

Il funzionamento del betatron è un esempio del fatto che nei fenomeni di induzione *non c'è necessariamente bisogno di un circuito conduttore*: in questo caso il campo elettrico indotto è prodotto nel vuoto e la f.e.m. indotta viene calcolata lungo una linea geometrica chiusa.

Diamagnetismo

La spiegazione classica del *diamagnetismo*, trattata nel paragrafo 9.11, può essere ottenuta anche in base alla legge di Faraday. Consideriamo due orbite elettroniche eguali, ma percorse in versi opposti, e accendiamo un campo magnetico B , uniforme nel piano dell'orbita e ortogonale a questo. Lungo l'orbita di raggio r viene indotto il campo elettrico

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} ,$$

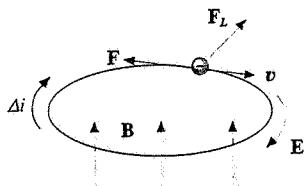


Figura 10.23

come abbiamo visto nel caso del betatron. Il verso del campo elettrico è tale da decelerare l'elettrone della figura 10.23, che produce col suo moto un campo magnetico concorde a \mathbf{B} , e accelerare l'elettrone della figura 10.24, che produce un campo magnetico discorde a \mathbf{B} . In entrambi i casi è come se si aggiungesse alla corrente orbitale una corrente Δi in verso concorde a E , la quale produce un momento magnetico Δm opposto a \mathbf{B} . Il segno del diamagnetismo è dunque spiegato dalla legge di Lenz.

Per il calcolo del modulo di Δm partiamo dall'equazione del moto dell'elettrone, considerato non relativistico; tangenzialmente all'orbita si ha

$$m \frac{dv}{dt} = e E = \frac{e r}{2} \frac{dB}{dt}$$

e la variazione di velocità corrispondente alla variazione del valore del campo magnetico da zero a B è

$$\Delta v = \frac{e r}{2m} B ,$$

qualunque sia l'andamento temporale. La velocità angolare subisce quindi la variazione

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{r} = \frac{e B}{2m} .$$

La corrente supplementare Δi con cui rappresentiamo l'effetto del cambiamento di velocità dell'elettrone è pari a $e/\Delta T = e \Delta \omega / 2 \pi$ e ad essa corrisponde il momento magnetico

$$\Delta m = \pi r^2 \Delta i = \frac{e^2 r^2}{4m} B .$$

Abbiamo così raggiunto, per un'orbita elettronica ortogonale a \mathbf{B} , lo stesso risultato del paragrafo 9.11. Quando si spegne il campo avviene il fenomeno contrario e l'effetto scompare.

Si verifica facilmente che il raggio dell'orbita resta lo stesso. Infatti all'attrazione coulombiana preesistente si somma la forza di Lorentz dovuta alla presenza del campo magnetico, con segno positivo nella situazione in cui la velocità sull'orbita aumenta (figura 10.24) e negativo nell'altra situazione (figura 10.23): la *forza di Lorentz fornisce cioè la variazione di forza centripeta necessaria per percorrere la stessa orbita con velocità diversa*. Quantitativamente, la forza centripeta corrispondente alla velocità $v + \Delta v$ deve essere

$$m \frac{(v + \Delta v)^2}{r} = m \frac{v^2}{r} + 2 m v \frac{\Delta v}{r},$$

dove si è trascurato il termine contenente $(\Delta v)^2$. Il primo contributo è fornito dalla forza di Coulomb ed esiste anche quando $B = 0$, il secondo vale

$$2m v \frac{\Delta v}{r} = 2m v \Delta \omega = 2m v \frac{e B}{2m} = e v B$$

e risulta eguale alla forza di Lorentz (tralasciando il termine $e \Delta v B$ rispetto a $e v B$).

Se utilizziamo i dati dell'esempio 9.11, la variazione della velocità $v = 2.2 \cdot 10^6$ m/s dell'elettrone nell'orbita fondamentale dell'atomo di idrogeno ($r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m/s), dovuta ad un campo $B = 1$ T, è

$$\Delta v = \frac{e r}{2m} B = 4.7 \text{ m/s}$$

La perturbazione è molto piccola, come del resto già sappiamo dal capitolo 9.

10.4 Legge di Felici. Misure di campo magnetico

Abbiamo visto che quando una spira di resistenza R si muove in un campo magnetico \mathbf{B} in essa viene indotta una corrente data da (10.3),

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 nella spira fluisce una carica q data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} \quad (10.21) \quad \text{Legge di Felici}$$

Il valore della carica *non* dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solamente dal valore iniziale e finale.

La (10.21), nota come *legge di Felici*, è molto importante nella pratica perché fornisce un metodo semplice di *misura dell'intensità del campo magnetico*.

Per un esempio di misura in una regione estesa vuota o riempita da un fluido rimandiamo al successivo esempio 10.4; vediamo invece ora come si può dedurre il valore del campo magnetico all'interno di un materiale solido utilizzando (10.21). Ricordiamo quanto visto nel paragrafo 9.6: per determinare il campo \mathbf{B} all'interno di un materiale occorre praticare una cavità sottile, ortogonale alle linee di \mathbf{B} , e misurare \mathbf{B} nella cavità. Supponiamo allora di introdurre in questa cavità una bobina piatta composta da N spire di area Σ , abbastanza piccola da poter considerare \mathbf{B}

uniforme su tutta l'area. Il flusso di \mathbf{B} attraverso la bobina è

$$\Phi_1 = NB\Sigma$$

Estraendo rapidamente la bobina dalla cavità e portandola in una zona in cui il campo magnetico è nullo, e quindi è nullo il flusso Φ_2 attraverso la bobina, abbiamo da (10.21)

$$q = \frac{\Phi_1}{R} = \frac{NB\Sigma}{R} \Rightarrow B = \frac{qR}{N\Sigma}$$

La misura di B è ricondotta a quella della carica che fluisce nella bobina durante il processo di estrazione.

Un metodo classico per la misura di tale carica utilizza il cosiddetto *galvanometro balistico*. Rispetto al galvanometro normale dell'esempio 7.3 quello balistico ha momento d'inerzia grande e quindi periodo di oscillazione molto lungo. Se il fenomeno transitorio dura molto poco, in pratica la carica passa nella bobina dello strumento prima che essa si metta in movimento. Il momento angolare acquistato e la velocità angolare iniziale della bobina risultano proporzionali a q : detto m il momento magnetico della bobina, M il momento meccanico, I il momento d'inerzia, N' il numero di spire di area Σ' e B' il campo magnetico interno dello strumento abbiamo infatti

$$\frac{dL}{dt} = M = mB' = N'\Sigma'iB' \Rightarrow L = \int_0^t M dt = N'\Sigma'B' \int_0^t i dt = N'\Sigma'B'q$$

$$\omega_0 = \frac{L}{I} = \frac{N'\Sigma'B'}{I}q$$

La bobina del galvanometro entra pertanto in rotazione con velocità angolare ω_0 . Al moto si oppone il momento elastico del sistema di sospensione della bobina e anche un momento resistente proporzionale alla velocità angolare dovuto al fatto che la bobina taglia le linee di B' e diventa sede di una f.e.m. indotta (attrito elettromagnetico). Si avrebbe così un moto oscillatorio smorzato esponenzialmente (vol. I, paragrafo 9.7); se però si fa in modo che il sistema sia molto poco smorzato, si può assumere che nell'oscillazione iniziale si conservi l'energia, che si trasforma da cinetica a potenziale quando la bobina ha raggiunto la massima ampiezza di oscillazione:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}k\theta_0^2 \Rightarrow \theta_0 = \sqrt{\frac{I}{k}} \quad \omega_0 = \frac{N'\Sigma'B'}{\sqrt{kI}}q$$

Se dunque si dispone di un galvanometro opportuno (grande I , piccolo smorzamento) e si opera in modo tale che il tempo di estrazione della bobina di misura sia piccolo rispetto al periodo di oscillazione della bobina del galvanometro, si determina q dalla misura dell'*ampiezza dell'oscillazione iniziale*.

Flussometro

L'insieme bobina-galvanometro balistico prende il nome di *flussometro*. La resistenza R che compare nella (10.21) è la resistenza complessiva della serie dei due avvolgimenti. Il flussometro può essere tarato ponendo la bobina all'interno di un solenoide che produce un campo B_0 noto, ortogonale al piano della bobina, e poi estraendola rapidamente; la misura della deviazione n_0 dell'indice del galvanometro fornisce la determinazione della costante $C = B_0/n_0$. Ripetendo l'operazione in un campo magnetico incognito si ha $B = Cn$, se n è la deviazione dell'indice. La relazione tra grandezza misurata e grandezza da determinare risulta lineare.

Lo stesso sistema può essere utilizzato per misurare il campo nell'interferro di un elettromagnete, soprattutto se lo spessore è piccolo. Se invece c'è spazio a sufficienza, la misura di B può anche essere effettuata mantenendo in rotazione uniforme una bobina e determinando il valore efficace della corrente indotta (vedi esempio 10.3). Un caso di rotazione che sfrutta (10.21) è trattato nell'esempio che segue.

Esempio 10.4 Cerchio di Palmieri

Una bobina piatta è formata da $N = 3000$ spire di area $\Sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e resistenza complessiva $R = 10^3 \Omega$. Il montaggio meccanico è tale che l'asse di rotazione è orientabile in qualunque direzione. Poniamo la bobina in un piano orizzontale e ribaltiamola (rotazione di 180°). La variazione di flusso è dovuta alla componente normale B_r del campo magnetico terrestre e la carica messa in movimento vale

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{2N\Sigma B_r}{R} = 0.24 B_r$$

Se ad esempio nel luogo considerato $B_r = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, $q = 9.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Disponendo la bobina verticalmente e lungo un parallelo terrestre, con una rotazione di 180° si ha $q = 0.24 B_r$ e si misura la componente tangente del campo magnetico terrestre (per i simboli si riveda la nota alla fine del paragrafo 8.2).

Il dispositivo si chiama *cerchio di Palmieri*; nella misure descritte, in cui viene accoppiato ad un galvanometro balistico, fornisce una precisione relativa dell'ordine del per cento.

10.5 Autoinduzione

Nel paragrafo 8.5 abbiamo messo in evidenza come il campo magnetico generato dalla corrente che percorre un circuito dia luogo ad un flusso magnetico attraverso il circuito stesso, il cosiddetto *autoflusso*, che risulta proporzionale alla corrente i tramite il *coefficiente di autoinduzione* L , secondo (8.35). Il coefficiente L dipende dalla forma geometrica del circuito e dalla permeabilità magnetica del mezzo in cui il circuito è immerso.

La nozione di autoflusso acquista particolare importanza quando la corrente nel circuito non è costante nel tempo oppure quando viene variata la forma del circuito. In entrambi i casi, come nel caso più generale in cui le due variazioni avvengano contemporaneamente, il flusso concatenato col circuito cambia nel tempo e nel circuito compare una f.e.m. indotta che con i suoi effetti tende ad opporsi alla variazione che l'ha generata. Tale f.e.m., detta di autoinduzione, si calcola inserendo (8.35) in (10.2):

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L i) \quad (10.22) \quad \text{f.e.m. di autoinduzione}$$

Nei casi pratici più comuni il coefficiente di autoinduzione resta costante e la (10.22) assume la forma

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (10.23)$$

La (10.23) fornisce operativamente la definizione del coefficiente L di un qualsiasi circuito, purché rigido, immerso in un mezzo qualunque. Si deve supporre però che le variazioni di corrente non siano così rapide da avvenire in un tempo paragonabile a quello impiegato dalla luce a percorrere la dimensione tipica del circuito, perché in tal caso la corrente non avrebbe più lo stesso valore su diverse sezioni del circuito.

Il coefficiente di autoinduzione di un circuito viene comunemente indicato anche con il termine *induttanza*. Un *circuito* con induttanza non nulla si dice *indut-*

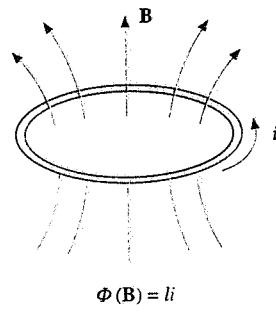


Figura 10.25

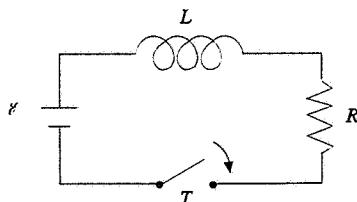
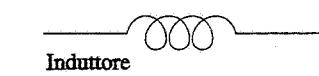


Figura 10.26

tivo; quando l'induttanza si può pensare concentrata in un tratto particolare del circuito, ad esempio perché il filo conduttore è avvolto così da formare un solenoide, si designa quel particolare conduttore con il nome di *induttore* e si utilizza per rappresentarlo il simbolo mostrato qui a lato.

Ricordiamo che l'unità di misura dell'induttanza è l'*henry*, definito nel paragrafo 8.5; in quell'occasione abbiamo notato che i valori di L sono normalmente piccoli, a meno che l'induttore non abbia un nucleo di materiale ferromagnetico (vedi paragrafo 9.8). Per questa ragione, anche se L è sempre diverso da zero a meno di particolari accorgimenti nella struttura geometrica del circuito, nei circuiti immersi in mezzi con permeabilità magnetica relativa quasi unitaria gli effetti dell'autoinduzione non sono molto rilevanti (e di fatto sono stati trascurati negli esempi del paragrafo 10.3).

Ad ogni modo, la presenza di un induttore in un circuito impedisce alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente in quanto, in base a (10.23), la variazione genera una f.e.m. che si oppone alla variazione stessa. Esaminiamo il problema nel circuito più semplice, detto *circuito RL in serie*, costituito da un generatore di f.e.m. \mathcal{E} e resistenza interna trascurabile, da un induttore con induttanza L e da un resistore di resistenza R . Le variazioni di corrente sono causate inizialmente dall'apertura e dalla chiusura dell'interruttore T . Dato che queste variazioni danno luogo alla f.e.m. di autoinduzione (10.23), la legge di Ohm per il circuito deve essere scritta

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = R i \Rightarrow \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + R i \quad . \quad (10.24)$$

Si separano le variabili e si integra ottenendo

$$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L} \quad , \quad \ln(\mathcal{E} - Ri) = -\frac{R}{L}t + \text{cost} \quad , \quad \mathcal{E} - Ri = A e^{-Rt/L} \quad , \quad (10.25)$$

dove A è una costante di integrazione che si determina in base alle condizioni iniziali.

a) Chiusura del circuito

Quando all'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore, la corrente, che era nulla in precedenza (circuito aperto), deve restare nulla essendo impossibile una variazione brusca, cioè per $t = 0$ $i = 0$. Risulta allora da (10.25) $A = \mathcal{E}$ e quindi

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad , \quad (10.26)$$

avendo posto

Costante di tempo

$$\tau = \frac{L}{R} \quad ; \quad (10.27)$$

τ è la *costante di tempo* del circuito (vedi paragrafo 6.9).

In figura 10.27 è mostrato l'andamento della corrente $i(t)$: si vede che essa tende asintoticamente al valore di *regime* $i_\infty = \mathcal{E}/R$, corrispondente alla legge di Ohm per le correnti costanti. In pratica il raggiungimento di i_∞ è regolato dal valore

della costante di tempo τ : maggiore è l'induttanza, più tempo è necessario per lo stabilizzarsi della corrente.

La f.e.m. di autoinduzione vale

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\nu t}$$

l'effetto ritardante tende esponenzialmente a zero, naturalmente con costante di tempo τ . Ad ogni istante la differenza tra valore asintotico e valore effettivo di corrente è dato da

$$i_{\infty} - i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{\mathcal{E}_L}{R} = i_L$$

e quindi $i(t) = i_{\infty} - i_L$: durante la fase transitoria si manifesta un'altra corrente oltre a quella calcolabile con la semplice legge di Ohm applicata ad un resistore, detta *extracorrente di chiusura*.

Se $R = 100 \Omega$, con $L = 10^{-6} \text{ H}$ si ha $\tau = 10^{-8} \text{ s}$, con $L = 10^{-3} \text{ H}$ $\tau = 10^{-5} \text{ s}$: il regime di corrente costante viene raggiunto in tempi molto brevi con i valori di L presenti in un normale circuito resistivo. Se invece dovessimo chiudere un circuito contenente l'avvolgimento di un elettromagnete, che può avere $L \sim 1 \text{ H}$ e $R \sim 1 \Omega$, la costante di tempo risulterebbe dell'ordine del secondo.

b) Apertura del circuito

All'istante di apertura ($t = 0$) la corrente ha il suo valore di regime $i_{\infty} = \mathcal{E}/R$. Supponiamo che aprendo l'interruttore la resistenza passi dal valore R al valore R' molto maggiore di R e che R' resti costante durante il transitorio in cui la corrente passa da i_{∞} a zero. Nella (10.25) con R' al posto di R imponiamo $i = i_{\infty}$ per $t = 0$ e otteniamo

$$A = \mathcal{E} - R' i_{\infty} = \mathcal{E} - R' \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E} \left(1 - \frac{R'}{R}\right)$$

L'espressione della corrente risulta, posto $\tau' = L/R'$,

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R'} (1 - e^{-t/\tau'}) + \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} \approx \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau'} = i_{\infty} e^{-t/\tau'}$$

L'egualanza approssimata vale se $R' \gg R$ e se il tempo t è abbastanza breve. La corrente tende a zero con costante di tempo τ' , tanto minore quanto maggiore è R' .

La f.e.m. di autoinduzione vale

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R'}{R} \mathcal{E} e^{-t/\tau'}$$

e risulta particolarmente elevata all'apertura: per $t = 0$ $\mathcal{E}_L = R' \mathcal{E}/R \gg \mathcal{E}$; la corrente corrispondente è $i_L = \mathcal{E}_L/R = i(t)$ e in effetti durante il processo l'unica f.e.m. agente è \mathcal{E}_L . Questa corrente, diversa da zero per un tempo molto breve, si chiama *extracorrente di apertura*.

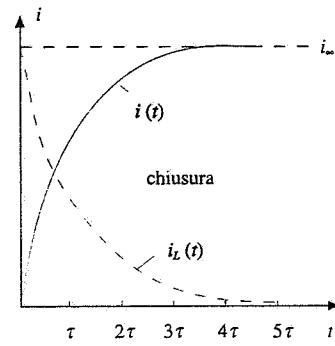


Figura 10.27

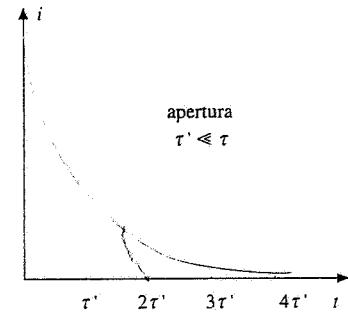


Figura 10.28

La f.e.m. si manifesta, quando si apre l'interruttore, come una d.d.p. tra i contatti di questo, che dà origine a una scintilla se il dielettrico è l'aria. R può essere pensata come *resistenza della scintilla* che mantiene chiuso il circuito per un breve tempo. Allo scopo di evitare questi fenomeni, che possono essere distruttivi negli interruttori di grossi impianti, come quelli di distribuzione dell'energia elettrica, si progettano speciali interruttori, ad esempio con i contatti immersi in olio: l'interruzione del circuito può avvenire così senza danni.

10.6 Energia magnetica

La presenza di una f.e.m. in un circuito implica, per definizione, un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente, positivo o negativo a seconda del segno della f.e.m.; negli esempi del paragrafo 10.3 abbiamo già calcolato alcuni bilanci energetici in presenza di f.e.m. indotte.

Riprendiamo ora in esame il circuito RL in serie del paragrafo 10.5 e scriviamo la legge di Ohm nella forma (10.24). La potenza erogata dal generatore quando la corrente ha il valore i è

$$\mathcal{E}i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} \quad (10.28)$$

e il lavoro nel tempo dt vale

$$\mathcal{E}i dt = R i^2 dt + L i di \quad (10.29)$$

La (10.29) esprime il *bilancio energetico* del circuito. Il primo membro, pari a $\mathcal{E}dq$, è il lavoro compiuto dal generatore, secondo la definizione di f.e.m. di un generatore. Il termine $R i^2 dt$ rappresenta il lavoro speso per fare circolare corrente nel circuito e trasformato in calore (effetto Joule), il termine $L i di$ è il lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione $\mathcal{E}_L = -L di/dt$ per fare aumentare la corrente da i a $i + di$.

I valori dei tre termini della (10.28) sono mostrati in figura con $i(t)$ data da (10.26). Fissato un qualunque valore di t , l'area sotto ciascuna curva tra zero e t fornisce il lavoro corrispondente. Quando la corrente ha raggiunto il valore di regime, il generatore continua a fornire la potenza

$$\mathcal{E}i_\infty = R i_\infty^2 \quad ,$$

necessaria per mantenere una corrente costante in un circuito resistivo.

Nell'intervallo di tempo in cui, a seguito della chiusura del circuito, la corrente passa da zero al valore i (che in particolare può essere quello di regime \mathcal{E}/R), il generatore oltre al lavoro corrispondente all'effetto Joule deve spendere contro \mathcal{E}_L il lavoro

$$W = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2 \quad ,$$

che non dipende dal modo in cui avviene la variazione di corrente, ma solo dai valori iniziale e finale. Possiamo quindi definire la cosiddetta *energia intrinseca della corrente*

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad , \quad (10.30)$$

Energia intrinseca
della corrente

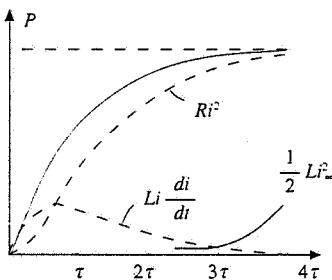


Figura 10.29

la cui variazione dà il lavoro fatto dal generatore contro la f.e.m. di autoinduzione durante la corrispondente variazione di corrente.

Nel passaggio da zero a i_∞ $U_L = L i_\infty^2 / 2$; se si apre il circuito la corrente torna a zero secondo la legge $i = (\mathcal{E}/R) e^{-Rt/L}$ e nel resistore viene speso il lavoro

$$\int_0^\infty R' i^2 dt = R' \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} = \frac{1}{2} L i_\infty^2 .$$

Durante la diminuzione il lavoro per fare circolare la corrente è fornito a spese dell'energia intrinseca: l'*energia immagazzinata nell'induttanza si ritrova alla fine dissipata sotto forma di calore nella resistenza*.

L'espressione (10.30) dell'energia intrinseca suggerisce che essa sia legata alla corrente e quindi localizzabile nel circuito in cui la corrente fluisce. D'altra parte questa energia viene ottenuta tramite il lavoro contro la f.e.m. autoindotta, legata alla variazione del flusso magnetico, che in questo caso è dovuta alla variazione del campo magnetico; alla fine della variazione, quando la corrente è costante, lo spazio intorno al circuito è sede di un campo magnetico che prima non esisteva. Viceversa, durante lo spegnimento, è la f.e.m. autoindotta che fornisce energia mantenendo la corrente e alla fine il campo magnetico è scomparso. Queste considerazioni fanno pensare di legare l'energia (10.30) al campo **B**, *localizzandola* nello spazio in cui esiste un campo magnetico: l'energia intrinseca della corrente appare cioè come *energia magnetica*, nello stesso senso con cui abbiamo definito un'energia elettrostatica legata al campo **E** (paragrafo 4.7).

Per provare che l'energia (10.30) è distribuita nello spazio con una densità che dipende dal valore locale del campo magnetico, consideriamo un tratto di solenoide rettilineo indefinito lungo d ; il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza è dato da (8.36), il campo magnetico da (8.23). Si vede che

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \Sigma d) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau .$$

Lo stesso risultato si trova per il solenoide toroidale dell'esempio 8.11. In entrambi i casi la *densità di energia* risulta quindi

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} .$$

Data la struttura di questa espressione, che dipende solo dal valore del campo magnetico e dalla permeabilità del mezzo (che è il vuoto), siamo portati a concludere che il risultato trovato valga sempre, nel vuoto, qualunque sia l'andamento del campo magnetico e la sorgente che lo genera. Ricordando che nel vuoto $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, diciamo che in una regione in cui esiste un campo magnetico è presente un'energia distribuita con densità

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB , \quad (10.31)$$

Densità di energia magnetica

che chiamiamo *densità di energia magnetica*. In un volume $d\tau$ intorno al punto P in cui il campo magnetico vale \mathbf{B} c'è l'energia magnetica

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

e l'energia magnetica totale si ottiene integrando su tutto lo spazio in cui \mathbf{B} è diverso da zero:

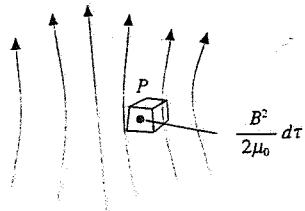


Figura 10.30

La formulazione (10.32) è in effetti la più generale; nei casi in cui si può definire l'induttanza la (10.30) porta agli stessi risultati di (10.32).

Esempio 10.5

Un cavo coassiale è costituito da due superfici cilindriche coassiali di raggi R_1 e R_2 . Una corrente i fluisce in un verso nel conduttore interno e in verso opposto nel conduttore esterno. Calcolare l'induttanza e l'energia magnetica per unità di lunghezza del cavo.

Soluzione

Le linee del campo \mathbf{B} sono circonferenze di raggio r contenute in un piano ortogonale all'asse del sistema. Il campo magnetico è diverso da zero solo nell'intercapedine e ha l'espressione (8.10); in modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad , \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Consideriamo il rettangolo infinitesimo lungo a e alto dr , di area $d\Sigma = a dr$, ortogonale alle linee di \mathbf{B} . Il flusso concatenato col rettangolo è

$$d\Phi = B d\Sigma = B a dr = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

Integrando tra R_1 e R_2 , sulla lunghezza a il flusso vale

$$\Phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Allora, per unità di lunghezza ($a = 1$) abbiamo

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} i^2 \quad . \quad (10.33)$$

Partendo invece da (10.32), la densità di energia magnetica nell'intercapedine è

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} \quad ;$$

nel volume infinitesimo $d\tau$ costituito da un guscio cilindrico con superficie laterale $2\pi r a$ e altezza dr c'è l'energia

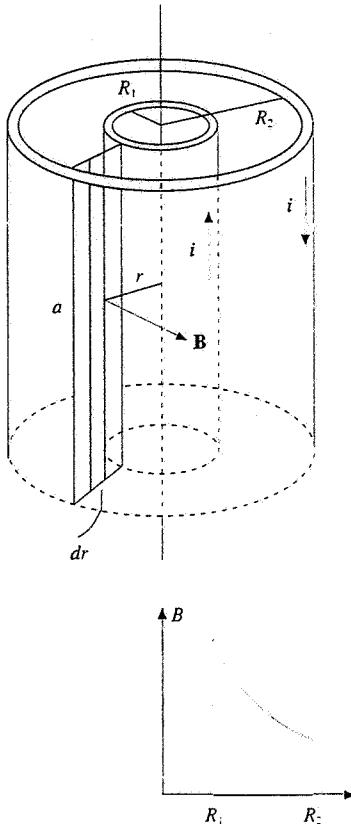


Figura 10.31

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi a r dr = \frac{\mu_0 i^2 a}{4\pi} \frac{dr}{r} ;$$

integrandi da R_1 a R_2 e ponendo $a = 1$ si ottiene

$$U_m = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} ,$$

coincidente con l'espressione trovata prima.

Se il conduttore centrale è pieno e la corrente è distribuita sulla sezione con densità uniforme $j = i/\pi R_1^2$, nell'intercapedine non cambia nulla, ma all'interno, per $0 \leq r \leq R_1$, c'è il campo magnetico (8.30); in modulo

$$B = \frac{\mu_0 j r}{2} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} .$$

Per unità di lunghezza si ha l'energia

$$U'_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{R_1} \left(\frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} r^2 .$$

Confrontando con $L i^2/2$ risulta che la parte interna dà il contributo $\mu_0/8\pi$ all'induttanza per unità di lunghezza del cavo, che è dunque

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) . \quad (10.34)$$

Il contributo interno non dipende dal raggio R_1 e la sua importanza decresce al crescere del rapporto R_2/R_1 .

Passiamo adesso ad esaminare il problema dell'energia magnetica in presenza di materiali magnetici. Per semplicità consideriamo un circuito magnetico toroidale avente N spire, con sezione di dimensioni piccole rispetto al diametro dell'anello, così da poter ritenere B costante sulla sezione. Facendo passare la corrente dal valore zero al valore i il flusso concatenato con le N spire cambia e nasce la f.e.m.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (N \sum B) = - N \sum \frac{dB}{dt}$$

In un istante generico la legge del circuito è

$$\mathcal{E} = R i - \mathcal{E}_i = R i + N \sum \frac{dB}{dt}$$

e il lavoro speso dal generatore nel tempo dt è

$$\mathcal{E} i dt = R i^2 dt + N \sum i dB$$

analoga alla (10.29). La variazione di energia magnetica è

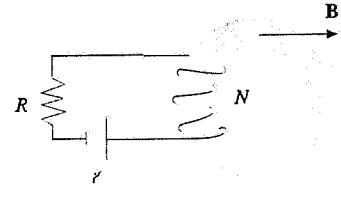


Figura 10.32

$$dU_m = N \Sigma i dB = H dB 2\pi r \Sigma ,$$

ricordando che $H = N i / 2\pi r$. Pertanto la variazione di energia magnetica per unità di volume risulta

$$du_m = H dB$$

e il lavoro fornito dal generatore per portare B da zero al valore finale è, per unità di volume,

$$u_m = \int_0^B H dB . \quad (10.35)$$

Il calcolo dell'integrale può essere eseguito se si conosce la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} (curva di magnetizzazione). Nei mezzi lineari $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, con μ costante indipendente da \mathbf{H} e quindi

$$u_m = \int_0^B H dB = \int_0^B \frac{B}{\mu} dB = \int_0^H \mu H dH \Rightarrow u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} HB . \quad (10.36)$$

Le espressioni della densità di energia magnetica coincidono con (10.31), a parte la sostituzione di μ_0 con μ ; esse hanno validità generale nei materiali diamagnetici e paramagnetici, mentre nei ferromagnetici si possono applicare solo in quelle situazioni in cui la permeabilità si può ritenere costante (ad esempio tratto lineare del ciclo di isteresi, figura 9.28).

L'energia magnetica totale si ottiene integrando (10.36) su tutto il volume in cui esiste il campo \mathbf{B} :

Energia magnetica

$$U_m = \int \frac{B^2}{2\mu} d\tau = \int \frac{1}{2} \mu H^2 d\tau . \quad (10.37)$$

U_m corrisponde al lavoro speso dal generatore per produrre il campo magnetico, nel vuoto e nei materiali, in aggiunta al lavoro speso per fare circolare la corrente. Nei mezzi in cui (10.37) è valida l'energia magnetica viene completamente restituita nel processo inverso in cui il campo magnetico torna a zero: *nei mezzi lineari i processi di magnetizzazione e smagnetizzazione avvengono reversibilmente*.

Quando il materiale è ferromagnetico la relazione che lega \mathbf{B} ad \mathbf{H} non è analitica, ma è rappresentata dal ciclo di isteresi (paragrafo 9.7); l'integrale (10.35) non porta ad un risultato univoco.

Con riferimento alla figura 10.33 consideriamo la variazione di H da zero ad H_{\max} che comporta lo spostamento del punto rappresentativo dello stato del sistema da P a Q ; in questo processo il generatore fornisce, per unità di volume, il lavoro

$$u_{PQ} = \int_P^Q H dB = \text{area del triangolo curvilineo } PQR ;$$

u_{PQ} è positivo perché H è positivo e, siccome B cresce, anche dB è positivo. Se poi H torna da H_{\max} a zero lo stato del sistema passa da Q a S e il lavoro vale

$$u_{QS} = \int_Q^S H dB = \text{area del triangolo curvilineo } RQS ,$$

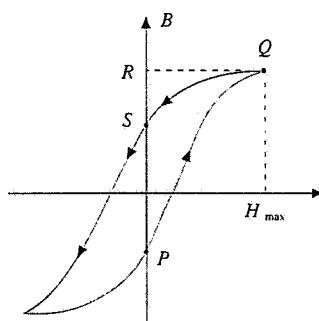


Figura 10.33

negativo (B diminuisce, $dB < 0$). In totale e per unità di volume nel semiciclo descritto il generatore spende più di quanto riceve e la perdita è

$$u_{PQS} = u_{PQ} + u_{QS} = \text{area del triangolo curvilineo } PQS$$

Completando il ciclo, il lavoro speso e non recuperato per unità di volume del materiale è

$$W_t = \oint H dB$$

pari all'area racchiusa dalla curva che dà il ciclo di isteresi: W_t è assorbito dal materiale e trasformato in calore, segno che il processo di allineamento e disallineamento dei domini di Weiss non è reversibile. Nella Tabella 10.1 è riportato W_t per alcuni dei materiali già elencati nella Tabella 9.4.

Tabella 10.1 Area del ciclo di isteresi

	$W_t (\text{J/m}^3)$
ferro puro (99.95%)	30
ferro-silicio (0.5%)	230
ferro-nichel (45%)	120
ferro 16% – nichel 79% – molibdeno 5%	2

Se un materiale ferromagnetico deve essere sottoposto ad un campo magnetico variabile, come avviene ad esempio nei motori elettrici e nei trasformatori, conviene in generale che il ciclo di isteresi sia stretto, e quindi W_t piccolo, in modo da ridurre le perdite di energia.

Esempio 10.6

Il permalloy 45 ha un ciclo di isteresi con area $W_t = 120 \text{ J/m}^3$; il calore specifico è $c = 400 \text{ J/kg K}$, la densità $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Supponendo il sistema termicamente isolato, calcolare l'innalzamento di temperatura in un secondo se il ciclo di isteresi viene eseguito con frequenza $v = 50 \text{ Hz}$.

Soluzione

Il lavoro assorbito in un secondo è

$$W_t v = 120 \cdot 50 = 6 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3 \text{ s}$$

La capacità termica per unità di volume è $c\rho$ per cui l'aumento di temperatura si ricava dall'eguaglianza

$$W_t v = c\rho \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{6 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^3} = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ K/s}$$

In un minuto la variazione sarebbe

$$\Delta T = 0.11 \text{ K} = 0.11 {}^\circ\text{C}$$

10.7 Pressione magnetica. Forze su corpi magnetizzati

Nel paragrafo 4.9 abbiamo calcolato la forza tra le armature di un condensatore carico collegate ad un generatore che mantiene costante la d.d.p. tra di esse e nell'esempio 5.8 la forza con cui una lastra di materiale dielettrico viene attratta verso l'interno di un condensatore piano, sempre in una situazione di d.d.p. costante. In entrambi i casi abbiamo scritto il bilancio energetico del processo, in cui interviene anche il generatore, e abbiamo dimostrato che la componente della forza lungo una certa direzione x si calcola secondo (4.39) come derivata dell'energia elettrostatica rispetto a x ,

$$F_x = \left(\frac{\partial U_e}{\partial x} \right)_{V=\text{cost}}$$

In sostanza varia la capacità del sistema e la costanza della d.d.p. comporta uno spostamento di cariche con conseguente lavoro del generatore; la variazione dell'energia totale, somma dell'energia interna del generatore e dell'energia elettrostatica, risulta eguale ed opposta alla variazione dell'energia elettrostatica, $dU = -dU_e$.

Consideriamo ora un circuito, contenente un generatore e percorso dalla corrente i , nel quale avvenga una deformazione e l'induttanza cambi da L a $L + dL$; supponiamo inoltre che il generatore sia in grado di mantenere costante la corrente, lavorando contro la f.e.m. indotta che compare nel circuito a seguito del cambiamento di induttanza.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} (L i) = - i \frac{dL}{dt}$$

Nel circuito avviene la variazione di energia magnetica

$$dU_m = \frac{i^2}{2} dL$$

e il generatore compie il lavoro

$$dW_{\text{gen}} = - \mathcal{E}_i i dt = i^2 dL = 2 dU_m$$

a spese della propria energia interna ($dW_{\text{gen}} = -dU_{\text{gen}}$).

La variazione dell'energia totale, somma dell'energia interna del generatore e dell'energia magnetica, è

$$dU = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dW_{\text{gen}} + dU_m = -dU_m$$

opposta alla variazione dell'energia magnetica. Ne segue

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i=\text{cost}} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_{i=\text{cost}} \quad (10.38)$$

come espressione della componente della forza secondo la direzione x . Se la variazione di induttanza è positiva e quindi l'*energia magnetica aumenta*, l'*energia totale diminuisce* e il *sistema compie lavoro*: esso *tende a evolvere spontaneamente verso stati in cui l'energia magnetica è massima*. Per fare avvenire il processo contrario bisogna invece applicare una forza dall'esterno, compiendo lavoro sul sistema. Nel resto del paragrafo applichiamo questo risultato ad alcuni casi interessanti.

Pressione magnetica

Le spire di un solenoide rettilineo sono sottoposte a una forza radiale diretta verso l'esterno. Che debba essere così lo si capisce considerando la forza magnetica esercitata su una spira dalle altre: la forza elementare (7.13) su ciascun tratto di spira risulta sempre rivol-

ta verso l'esterno. Eseguiamo il calcolo applicando (10.38); l'energia magnetica contenuta in un tratto di solenoide lungo d e con sezione $\Sigma = \pi r^2$ si ottiene da (10.32):

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 d ,$$

ammettendo che B sia uniforme. La forza vale

$$F = \left(\frac{dU_m}{dr} \right)_{i=\text{cost}} = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r d .$$

$S = 2\pi r d$ è la superficie laterale del tratto di solenoide lungo d e vediamo che su tale superficie agisce la *pressione*

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} , \quad (10.39) \quad \text{Pressione}$$

coincidente con la densità di energia magnetica nel solenoide. Abbiamo così ritrovato la struttura (4.37), che *eguaglia la pressione alla densità di energia*. Nel caso specifico $B = \mu_0 n i = \mu_0 j_i$, con j_i densità lineare di corrente, e quindi

$$p = \frac{1}{2} \mu_0 (n i)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 j_i^2 .$$

Se il solenoide è avvolto su un mezzo con permeabilità magnetica $\mu = \kappa_m \mu_0$, l'energia magnetica e la forza sono κ_m volte quelle nel vuoto, a parità di corrente.

Nella progettazione meccanica di un solenoide bisogna tener conto della pressione magnetica. Ad esempio, in un solenoide capace di produrre un campo $B = 1$ T, la pressione vale $p = 1/8 \pi \cdot 10^{-7} \cong 4 \cdot 10^5$ Pa, cioè circa quattro volte la pressione atmosferica: su un'area di 1 m^2 ciò equivale alla forza peso di una massa di circa 40 tonnellate (4 kg per cm^2).

Come paragone, si consideri che la pressione elettrostatica sulla calotta sferica di un generatore Van de Graaf con $R = 1$ m e campo $E = 6 \cdot 10^6$ V/m è $p = \epsilon_0 E^2 / 2 \cong 160$ Pa, tre ordini di grandezza inferiore.

Forza su un materiale magnetizzato

Una sbarretta di materiale con permeabilità magnetica relativa $\kappa_m = 1 + \chi_m$ è parzialmente inserita, per un tratto x , all'interno di un solenoide rettilineo lungo d , avente la stessa sezione della sbarretta. Agli effetti dei calcoli assumiamo che l'induttanza abbia l'espressione (8.36) valida per unità di lunghezza in un solenoide indefinito con densità di spire n e sezione Σ . Scriviamo pertanto, tenuto conto che nel tratto x c'è il materiale e nel tratto $d - x$ il vuoto,

$$L = \mu n^2 \Sigma x + \mu_0 n^2 \Sigma (d - x)$$

L'energia magnetica è

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma [d + (\kappa_m - 1)x] i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \Sigma (d + \chi_m x) i^2 .$$

Secondo (10.38) la forza vale

$$F = \left(\frac{d U_m}{dx} \right)_{i=\text{cost}} = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \Sigma n^2 i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \Sigma H^2 . \quad (10.40)$$

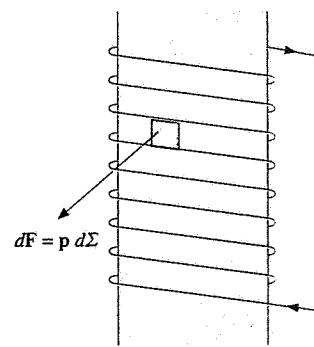


Figura 10.34

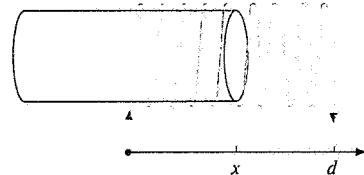


Figura 10.35

Se la suscettività magnetica χ_m è positiva (materiali paramagnetici e ferromagnetici) l'energia magnetica aumenta con x , la forza è positiva e la sbarretta viene attirata dentro il solenoide, verso lo stato di massima energia magnetica, raggiunto quando $x = d$. Viceversa, se χ_m è negativa (materiali diamagnetici), la sbarretta è spinta verso l'esterno. La forza agente non dipende dalla posizione, nell'approssimazione di solenoide indefinito. Si osservi che la struttura di (10.40) coincide con quella trovata nell'esempio 5.8, $F = \varepsilon_0 \chi_e \sum E^2 / 2$.

Alla stessa espressione della forza si arriva da (10.31). Nell'avanzamento della sbarretta della quantità dx all'interno del volume $d\tau = \sum dx$ la densità di energia passa dal valore $\mu_0 H^2 / 2$ al valore $\mu H^2 / 2$, per cui la variazione di energia magnetica è

$$dU_m = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) \sum H^2 dx = \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m \sum H^2 dx \Rightarrow F = \frac{dU_m}{dx}$$

Notiamo che dU_m è la variazione di energia magnetica di tutto il sistema, in quanto, escluso $d\tau$, l'energia magnetica altrove non cambia.

Basandosi sull'azione di queste forze attrattive o repulsive si possono costruire sistemi di misura della suscettività χ_m : ad esempio si può disporre il solenoide verticalmente ed equilibrare la forza magnetica (e la forza peso) con l'azione di una molla o di una bilancia; al solenoide si può sostituire un elettromagnete a C con le superfici polari verticali.

Ricordiamo, come detto nei capitoli precedenti, che le forze descritte nascono dall'interazione tra la corrente nel solenoide che produce il campo \mathbf{B} e le correnti microscopiche generate nel mezzo dalla presenza di \mathbf{B} .

Esempio 10.7

Un piccolo campione di materiale magnetico avente volume τ è posto sull'asse di un solenoide, in una zona in cui il campo magnetico dipende dalla posizione. Calcolare la forza agente e confrontare con il risultato dell'esempio 9.4.

Soluzione

In assenza del campione l'energia magnetica ha un dato valore. Quando il campione viene posto in un punto di coordinata x sull'asse del solenoide, nel volume τ si ha la variazione di energia

$$\Delta U_m = \left(\frac{B^2}{2\mu} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_x \tau$$

B è il campo nel campione, di permeabilità $\mu = \mu_0 \kappa_m$, e B_0 il campo nel vuoto, cioè prima dell'inserzione del campione. Se il campo magnetico fosse uniforme, tale variazione sarebbe indipendente da x ovvero spostando il campione l'energia magnetica non cambia e non si hanno forze. Però il campo dipende da x e la variazione di energia magnetica per uno spostamento dx coincide con la variazione di ΔU_m ; si ha

$$dU_m = \frac{\tau}{\mu_0} \left(\frac{B}{\kappa_m} \frac{dB}{dx} - B_0 \frac{dB_0}{dx} \right) dx \approx \frac{\tau B_0}{\mu_0} \left(\frac{dB}{dx} - \frac{dB_0}{dx} \right) dx = \frac{\tau}{\mu_0} \chi_m B_0 \frac{dB_0}{dx} dx$$

$$F = \frac{dU_m}{dx} = \frac{\tau}{m_0} \chi_m B_0 \frac{dB_0}{dx}$$

Nella dimostrazione abbiamo assunto $B = \kappa_m B_0$: il risultato coincide con quello trovato nell'esempio 9.4; tenuto conto che là dB/dx sta per dB_0/dx e che $B/\kappa_m = B_0$.

Forza tra le superficie polari di un elettromagnete

Tra i poli di un magnete, ad esempio a C o ad H, si esercitano notevoli forze attrattive. In effetti l'energia magnetica aumenterebbe a seguito di una diminuzione dell'interferro, per-

ché aumenterebbe l'induttanza dell'avvolgimento (ad una parte in aria del circuito magnetico verrebbe sostituita una parte in materiale ferromagnetico). Generalizzando la nozione di pressione magnetica, si utilizza (10.39) con il valore di \mathbf{B} nell'interferro e poi, nota la superficie, si ottiene la forza direttamente o tramite un integrale se il campo non è uniforme. Abbiamo già visto nel caso del solenoide come si possano avere pressioni dell'ordine di quella atmosferica con campi magnetici dell'ordine del tesla.

Esempio 10.8

Un circuito magnetico è costituito da un tratto a forma di U , su cui sono avvolute N spire percorse dalla corrente i , e da un'ancora dello stesso materiale ferromagnetico del tratto a U , separata da questo da una piccola distanza x . Detta Σ la sezione del circuito magnetico e $s + 2x$ la lunghezza totale del circuito magnetico, calcolare la forza con cui l'ancora è attirata dal magnete a U .

Soluzione

Seguiamo il metodo esposto nel paragrafo 9.8 per calcolare il campo magnetico. Il teorema di Ampère per il campo \mathbf{H} dà

$$2x H_0 + s H = N i$$

mentre la relazione tra \mathbf{B} e \mathbf{H} è

$$B = \mu_0 H_0 = \mu H = \mu_0 \kappa_m H$$

dato che il campo magnetico è lo stesso lungo tutto il circuito mentre \mathbf{H} cambia. Pertanto

$$2x \frac{B}{\mu_0} + s \frac{B}{\mu_0 \kappa_m} = N i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \kappa_m N i}{2 \kappa_m x + s}$$

Le densità di energia magnetica nell'interferro e nel mezzo sono rispettivamente

$$u_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m^2 (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} \quad , \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\kappa_m (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} \quad ,$$

e l'energia magnetica totale del circuito magnetico è

$$U_m = u_0 2x \Sigma + u_m s \Sigma = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \kappa_m \Sigma (N i)^2}{2 \kappa_m x + s} \quad .$$

La forza F esercitata sull'ancora vale

$$F = \frac{dU_m}{dx} = - \frac{\mu_0 \kappa_m^2 \Sigma (N i)^2}{(2 \kappa_m x + s)^2} = - 2 \Sigma \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad .$$

dove si è usata l'espressione del campo magnetico trovata sopra. Dividendo per l'area 2Σ delle superfici che sono affacciate si ottiene l'espressione (10.39) per la *pressione magnetica*, che dunque risulta valida anche in questi casi. Il segno meno è dovuto al fatto che l'energia magnetica diminuisce all'aumentare di x e mostra che la forza è *attrattiva*.

Se l'ancora è fissata ad una molla che tende ad allontanarla dal magnete, riducendo la corrente a zero può predominare la forza elastica e l'ancora si stacca mentre aumentando la corrente predomina la forza magnetica e l'ancora aderisce al magnete. In questo modo si realizza un *movimento a comando elettromagnetico* che può servire per aprire e chiudere un interruttore, per sistemi di agganciamento o di sostegno e altre svariate applicazioni.

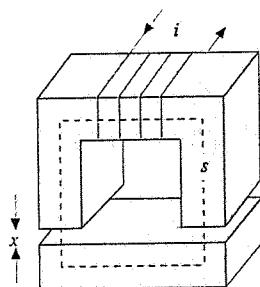


Figura 10.36

È interessante completare le considerazioni su forza ed energia magnetica svolte in questo paragrafo nel caso in cui il campo magnetico sia generato da un magnete permanente. A parità di valore di \mathbf{B} le forze misurate sono le stesse e si ricavano derivando l'energia magnetica, che a sua volta viene calcolata a partire dalla densità (10.31). Questa volta però le variazioni di energia magnetica sono le uniche fonti di lavoro, non essendoci generatori: se le forze del campo compiono un lavoro l'energia magnetica deve diminuire e, viceversa, se il lavoro è compiuto contro le forze del campo l'energia magnetica deve aumentare. L'energia magnetica deve avere pertanto un segno negativo (ammettendo che sia nulla dove non si sente l'interazione magnetica), ma la forza deve essere espressa come $-\partial U_m / \partial x$ e i segni si cancellano.

10.8 Induzione mutua

Nel paragrafo 8.5 abbiamo definito il coefficiente di *induzione mutua* tra due circuiti secondo (8.34)

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{2,1}}{i_2} ;$$

la dimostrazione dell'egualanza tra i due rapporti ($M_{1,2} = M_{2,1}$), effettuata nel paragrafo 8.7 servendosi del potenziale vettore, verrà esposta in modo diverso più avanti, utilizzando un argomento energetico.

Due *circuiti* per i quali sia $M \neq 0$ si dicono *accoppiati*: essi sono caratterizzati completamente dalla loro resistenza, dalla loro induttanza e dal *coefficiente di induzione mutua*, detto anche *induttanza mutua*. Quest'ultima dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posizione relativa, oltre che dalla permeabilità dei mezzi circostanti.

Come già affermato nel paragrafo 10.5 per il fenomeno dell'autoinduzione, l'induzione tra due circuiti diventa fondamentale quando si hanno variazioni di corrente e quindi di flusso concatenato tra un circuito e l'altro o anche quando c'è un movimento relativo. Supponendo che M sia costante (circuiti fissi e permeabilità invariabile), si ha per le f.e.m. indotte in un circuito dalla variazione di corrente nell'altro

$$\mathcal{E}_1' = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2' = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} . \quad (10.41)$$

Queste vanno sommate in ciascun circuito alle f.e.m. di autoinduzione

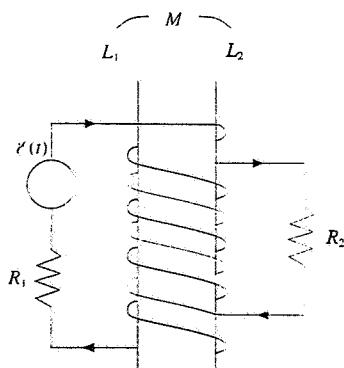


Figura 10.37

$$\mathcal{E}_1'' = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_2'' = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Abbiamo quindi per due circuiti come in figura, in cui c'è un generatore di f.e.m. variabile nel primo e nessun generatore nel secondo, le seguenti espressioni della legge di Ohm:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 , \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2 . \end{aligned} \quad (10.42)$$

Le (10.42) costituiscono un *sistema di equazioni differenziali accoppiate*: il termine di accoppiamento in ciascuna è quello contenente M . Vediamo che la presenza di una corrente i_2 nel circuito senza generatore è possibile proprio grazie al processo di induzione mutua: si verifica in pratica uno *scambio di energia tra i due circuiti mediante il campo magnetico variabile*. Anche con un generatore di f.e.m. costante nel primo circuito si può avere corrente nel secondo circuito durante i fenomeni transitori che si verificano se si apre o chiude il primo circuito.

Un'applicazione fondamentale del fenomeno dell'induzione mutua si ha nei trasformatori; risolveremo esplicitamente le (10.42) applicate ad un trasformatore nell'esempio 11.5 con $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Esempio 10.9

Una bobina compatta S_1 è composta da N_1 spire di raggio r_1 . Una seconda bobina compatta S_2 , costituita da N_2 spire di raggio $r_2 \ll r_1$, è posta nell'intorno del centro della prima bobina. L'angolo tra i versori normali \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 delle due bobine è θ . Un generatore inserito nel circuito S_2 fa circolare la corrente $i = i_0 \cos \omega t$. Calcolare la f.e.m. indotta nella bobina S_1 .

Soluzione

Occorre innanzitutto calcolare l'induttanza mutua. Sfruttiamo l'egualanza $M_{1,2} = M_{2,1}$ calcolando il flusso concatenato con S_2 prodotto da una generica corrente i_1 che circola in S_1 . Sceglieremo cioè la situazione più conveniente, come consigliato nel paragrafo 8.5. Il campo magnetico nel centro della bobina S_1 è dato da (8.13):

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2r_1} \mathbf{u}_1$$

Con $r_2 \ll r_1$ possiamo supporre \mathbf{B}_1 uniforme sulla sezione di S_2 per cui

$$\Phi_{1,2} = N_2 \sum_2 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1} i_1$$

$$M = \frac{\Phi_{1,2}}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1}$$

Vediamo che il calcolo di $\Phi_{1,2}$ è stato agevole mentre quello di $\Phi_{2,1}$ sarebbe stato praticamente impossibile.

La f.e.m. indotta secondo (10.41) è

$$\mathcal{E}_1(t) = -M \frac{di_2}{dt} = M \omega i_0 \sin \omega t = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 \cos \theta}{2r_1} \omega i_0 \sin \omega t$$

Se la bobina S_2 ruotasse con velocità angolare costante Ω così che $\cos \theta = \cos \Omega t$, scritto $M = A \cos \Omega t$ con $A = \mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 / 2r_1$, sarebbe

$$\mathcal{E}_1(t) = -\frac{d}{dt} (M i_2) = -M \frac{di_2}{dt} - i_2 \frac{dM}{dt} = A i_0 (\omega \cos \Omega t \sin \omega t + \Omega \sin \Omega t \cos \omega t)$$

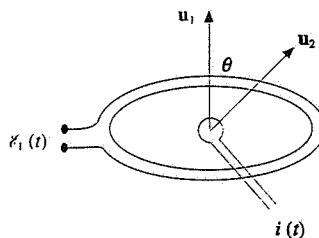


Figura 10.38

10.9 Energia magnetica di circuiti accoppiati

Anche per un sistema di due *circuiti accoppiati* si definisce un'energia magnetica in modo analogo a quanto visto per un circuito percorso da corrente nel para-

grafo 10.6. Supponiamo che inizialmente le correnti nei circuiti siano nulle e portiamo la corrente i_1 al valore di regime mantenendo $i_2 = 0$; per fare ciò il generatore del primo circuito spende il lavoro $U_1 = L_1 i_1^2 / 2$. Successivamente si porta la corrente i_2 al valore di regime mentre i_1 resta invariata: il generatore del secondo circuito spende $U_2 = L_2 i_2^2 / 2$ e quello del primo, dovendo lavorare contro la f.e.m. di induzione mutua causata dalla variazione di i_2 , spende

$$U_{2,1} = - \int \mathcal{E}_1 i_1 dt = \int M_{2,1} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{2,1} i_1 \int di_2 = M_{2,1} i_1 i_2$$

In totale il lavoro speso dai generatori che si è trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico è

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{2,1} i_1 i_2$$

Figura 10.39

Portando prima i_2 a regime con $i_1 = 0$ e poi i_1 a regime con i_2 costante il lavoro speso è

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{1,2} i_1 i_2$$

Poiché lo stato iniziale e lo stato finale sono rispettivamente eguali nei due casi, eguale deve essere la variazione di energia magnetica e si conclude che $M_{1,2} = M_{2,1} = M$, come già dimostrato per altra via.

L'espressione dell'*energia magnetica* del sistema di *due circuiti accoppiati* è dunque

Energia magnetica
per due circuiti accoppiati

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad . \quad (10.43)$$

Oltre a U_m i generatori forniscono naturalmente il lavoro necessario per fare circolare le correnti i_1 e i_2 .

La (10.43) è strutturalmente simile all'espressione dell'energia elettrostatica di due sfere conduttrici, con raggi R_1 e R_2 e poste a distanza d , calcolata nell'esempio 4.16:

$$U_e = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad ;$$

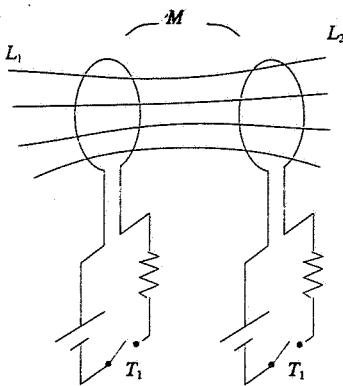
i primi due termini rappresentano l'energia elettrostatica dei due conduttori, considerati singolarmente, e il terzo termine è l'*energia di interazione mutua*.

Immaginiamo ora di spostare i due circuiti così che l'induttanza mutua vari di dM , restando però costanti le due correnti i_1 e i_2 . La variazione di energia magnetica è

$$dU_m = i_1 i_2 dM$$

e nei due circuiti si manifestano le f.e.m. indotte

$$\mathcal{E}_1 = -i_2 \frac{dM}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_2 = -i_1 \frac{dM}{dt}$$



I generatori devono pertanto spendere i lavori

$$dW_1 = -\mathcal{E}_1 i_1 dt = i_1 i_2 dM \quad , \quad dW_2 = -\mathcal{E}_2 i_2 dt = i_1 i_2 dM \quad ,$$

ovvero in totale

$$dW_{\text{gen}} = dW_1 + dW_2 = 2 i_1 i_2 dM = 2 dU_m$$

La variazione di energia magnetica rende dunque conto della metà del lavoro del generatore; l'altra metà deve corrispondere al lavoro meccanico nello spostamento dei circuiti,

$$dW_{\text{mecc}} = dU_m = i_1 i_2 dM = dU_{\text{acc}} \quad , \quad (10.44)$$

dove nell'ultima eguaglianza abbiamo messo in evidenza che in realtà la variazione dell'energia magnetica (10.43) è eguale alla variazione dell'energia di accoppiamento essendo U_1 e U_2 costanti.

In uno spostamento finito che comporti soltanto la variazione ΔM dell'induttanza mutua si ha, integrando (10.44),

$$W_{\text{mecc}} = \Delta U_{\text{acc}} = i_1 i_2 \Delta M \quad , \quad W_{\text{gen}} = 2 i_1 i_2 \Delta M \quad .$$

Se in particolare i due circuiti sono inizialmente così lontani da poter supporre $M = 0$ e vengono poi avvicinati fino a che l'induttanza mutua vale M , il lavoro corrispondente è $M i_1 i_2$, eguale all'energia di accoppiamento, mentre $W_{\text{gen}} = 2 M i_1 i_2$.

Concludiamo che nello spostamento dei due circuiti accoppiati c'è uno scambio di energia tra i generatori e il sistema: se $dM > 0$ i generatori erogano lavoro e questo va in *aumento di energia magnetica e in lavoro meccanico compiuto dalle forze del campo*, se $dM < 0$ i generatori assorbono energia, proveniente dalla *diminuzione di energia magnetica e dal lavoro compiuto (dall'esterno) contro le forze del campo*.

Nel bilancio energetico complessivo la variazione dell'energia totale è opposta alla variazione dell'energia magnetica, in quanto

$$dU = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dW_{\text{gen}} + dU_m = -2 dU_m + dU_m = -dU_m \quad ,$$

e la componente della forza nella direzione x si scrive

$$F_x = \left(\frac{dU_m}{dx} \right)_{i=\text{cost}} = \left(\frac{dU_{\text{acc}}}{dx} \right)_{i=\text{cost}} \quad . \quad (10.45)$$

Dalle derivate spaziali dell'energia magnetica, coincidenti con quelle dell'energia di accoppiamento, si possono calcolare le componenti della forza magnetica agente su un circuito immesso nel campo di un altro circuito, nell'ipotesi che le correnti e i coefficienti di autoinduzione siano costanti. Si dimostra anche che se il circuito può ruotare rispetto ad un asse il momento della forza rispetto all'asse di rotazione è

$$M_\theta = \left(\frac{dU_m}{d\theta} \right)_{i=\text{cost}} = \left(\frac{dU_{\text{acc}}}{d\theta} \right)_{i=\text{cost}} \quad , \quad (10.46)$$

indicando con θ l'angolo che descrive la rotazione: la proprietà discende da (10.44) e dalla relazione $dW = M_\theta d\theta$ tra lavoro nella rotazione e momento della forza.

È importante precisare a questo punto che il coefficiente di induzione mutua, e di conseguenza l'energia di accoppiamento, vanno considerati con il segno: M cioè può essere positivo o negativo, a differenza di L che si assume sempre positivo. Fissato il verso dell'autoflusso $L_1 i_1$ in un circuito, che è legato a quello della corrente i_1 dalla regola la vite, il flusso $M i_2$ dovuto all'altro circuito può essere *concordo* o *discorde* all'autoflusso: nel primo caso si assume M positivo e nel secondo negativo.

Giustifichiamo questa scelta con un esempio. Prendiamo due spire coassiali poste in piani paralleli distanti x : esse si *attirano* se percorse da *correnti concordi* e si *repellono* se percorse da *correnti discordi*; misuriamo x a partire dal centro della prima spira e supponiamo che le correnti siano concordi. Il coefficiente M aumenta in modulo al diminuire della distanza x e così fa l'energia di accoppiamento $M i_1 i_2$, la forza sulla seconda spira, derivata dell'energia rispetto a x , dovrebbe risultare negativa essendo attrattiva e quindi $d U_{\text{acc}} / dx$ dovrebbe essere negativa. Ciò è garantito se M è positivo in quanto così $M i_1 i_2$ è funzione decrescente di x e ha derivata negativa. In effetti la scelta enunciata sopra assegna valore positivo a M nel caso delle correnti concordi.

Il segno di M riflette il fatto che l'energia di accoppiamento possa essere positiva o negativa, ovvero la forza repulsiva o attrattiva; oltre che al verso della forza esso è collegato al senso della rotazione determinata dal momento (10.46). E naturalmente dal segno di M dipende quello delle f.e.m. indotte (10.41): si verifica facilmente che la convenzione sul segno di M comporta, nel caso di forza attrattiva, che le f.e.m. indotte si oppongono alle correnti i_1 e i_2 , come deve essere.

In definitiva il *valore* di M è completamente determinato dalla *configurazione geometrica*, dalla *permeabilità del mezzo* e dai *versi di percorrenza delle correnti nei circuiti*.

Energia magnetica di n circuiti accoppiati

Per estendere il calcolo dell'energia magnetica ad un sistema di n circuiti accoppiati riscriviamo la (10.43) in un modo che è suscettibile di generalizzazione: posto $L_1 = M_{1,1}$, $L_2 = M_{2,2}$, $M_{1,2} = M_{2,1} = M$, si ha

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} M_{1,1} i_1^2 + \frac{1}{2} M_{1,2} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{2,1} i_1 i_2 + \frac{1}{2} M_{2,2} i_2^2 = \\ &= \frac{1}{2} i_1 (M_{1,1} i_1 + M_{2,1} i_2) + \frac{1}{2} i_2 (M_{1,2} i_1 + M_{2,2} i_2) = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) \quad (10.47) \end{aligned}$$

avendo chiamato $\Phi_1 = M_{1,1} i_1 + M_{2,1} i_2$ il flusso totale concatenato col primo circuito, dovuto al campo magnetico risultante $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ prodotto dai due circuiti, e analogamente $\Phi_2 = M_{1,2} i_1 + M_{2,2} i_2$ il flusso totale concatenato col secondo circuito.

La (10.47) si applica a n circuiti accoppiati scrivendo

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_j^n \sum_k^n M_{j,k} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_j^n i_j \Phi_j \quad (10.48)$$

La quantità

$$\Phi_j = \sum_k^n M_{j,k} i_k$$

dà il *flusso totale del campo magnetico* $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_n$ attraverso il circuito

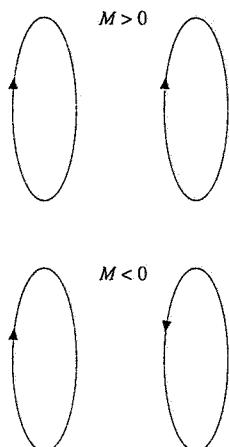


Figura 10.40

j-esimo e consta di un termine di autoflusso ($k = j$) e di $n-1$ termini di flusso di induzione mutua. I coefficienti con indici eguali, $M_{j,j}$, danno le *induttanze L_j dei singoli circuiti* e i coefficienti con indici diversi l'*induttanza mutua tra il circuito j-esimo e il circuito k-esimo*, per cui $M_{j,k} = M_{k,j}$.

Quando si sposta rigidamente il solo circuito j-esimo rispetto agli altri che restano fissi e si mantengono costanti tutte le correnti si ha:

$$\begin{aligned} dU_m &= d\left(\frac{1}{2}i_1\Phi_1 + \frac{1}{2}i_2\Phi_2 + \dots + \frac{1}{2}i_j\Phi_j + \dots + \frac{1}{2}i_n\Phi_n\right) = \\ &= \frac{1}{2}i_1i_jdM_{1,j} + \frac{1}{2}i_2i_jdM_{2,j} + \dots + \frac{1}{2}i_jd\Phi_j + \dots + \frac{1}{2}i_ni_jdM_{n,j} \end{aligned}$$

Infatti in ciascun termine cambia solo l'energia di accoppiamento col circuito j-esimo; invece nel termine j-esimo cambiano tutte le energie di accoppiamento, cioè

$$d\left(\frac{1}{2}i_jd\Phi_j\right) = \frac{1}{2}i_ji_1dM_{j,1} + \frac{1}{2}i_ji_2dM_{j,2} + \dots ,$$

e non cambia solo l'energia intrinseca $\frac{1}{2}i_j^2M_{j,j}$. Pertanto il lavoro per uno spostamento rigido è

$$dW = dU_m = i_jd\Phi_j \quad . \quad (10.49)$$

Esso è dato dal prodotto della corrente che percorre il circuito per la variazione del flusso concatenato col circuito stesso: abbiamo così ritrovato il risultato (7.28) del paragrafo 7.6, che consigliamo di rileggere adesso, dopo aver chiarito cosa succede se si mantiene costante la corrente in un circuito interessato da una variazione di flusso magnetico. In particolare si noti che l'energia potenziale U_p dei paragrafi 7.5 e 7.6 coincide con l'energia magnetica se si trattano solo magneti permanenti e mezzi magnetizzati ed è l'opposto dell'energia magnetica nei sistemi costituiti da circuiti.

Da (10.49) si deducono forze e momenti utilizzando (10.45) e (10.46); ripetiamo che l'evoluzione spontanea del sistema è verso lo stato di massima energia magnetica, compatibilmente con i vincoli.

La (10.48) fornisce una descrizione dell'energia magnetica del sistema in termini delle correnti che circolano nei singoli circuiti e della configurazione geometrica, ovvero in termini delle sorgenti del campo magnetico. In questo senso è analoga a (2.26) per un sistema di cariche puntiformi o a (4.30) per un sistema di conduttori.

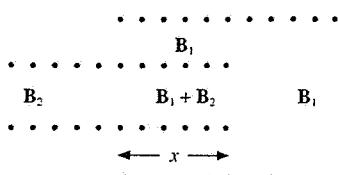
D'altra parte (10.37) lega direttamente l'energia magnetica al campo magnetico. Nei sistemi in cui si possono definire i coefficienti $M_{j,k}$, e quindi individuare le correnti che generano il campo, le due espressioni dell'energia magnetica portano allo stesso risultato e del resto la loro equivalenza si può dimostrare formalmente. Però la (10.37) è più generale in quanto è applicabile sempre e in particolare in tutti quei casi in cui si può definire un campo magnetico nello spazio, ma non è possibile localizzare le sorgenti che lo generano. È questa ad esempio la situazione dell'energia associata ad un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio, come abbiamo già ricordato alla fine del paragrafo 4.7 per l'energia elettrostatica nella forma (4.26).

Esempio 10.10

Un solenoide di lunghezza d_1 , molto grande è costituito da N_1 spire di area Σ_1 ed è percorso dalla corrente i_1 . Un secondo solenoide di lunghezza d_2 , costituito da N_2 spire di area $\Sigma_2 < \Sigma_1$ percorse dalla corrente i_2 , si trova dentro il primo solenoide per un tratto x . Calcolare l'energia magnetica del sistema in funzione di x e la forza F di interazione tra i due solenoidi.

Soluzione

Calcoliamo dapprima l'energia magnetica utilizzando (10.43). Il coefficiente di induzione mutua si ricava dall'esempio 8.9 applicato alla lunghezza x di sovrapposizione:

**Figura 10.41**

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x \quad , \quad n_1 = \frac{N_1}{d_1} \quad , \quad n_2 = \frac{N_2}{d_2} \quad .$$

I coefficienti di autoinduzione sono $L_1 = \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1$ e $L_2 = \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2$, da (8.36). Quindi

$$U_m = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2^2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2 \quad .$$

Ovviamente lo stesso risultato si ha da (10.47). I campi magnetici sono $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$, $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$ e di conseguenza

$$\Phi_1 = n_1 d_1 \Sigma_1 B_1 + n_1 x \Sigma_2 B_2 = \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_2 \quad ,$$

$$\Phi_2 = n_2 d_2 \Sigma_2 B_2 + n_2 x \Sigma_1 B_1 = \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 \Sigma_1 d_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 \Sigma_2 d_2 i_2^2 + \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2 \quad .$$

Infine sempre allo stesso risultato si arriva da (10.32). Nella zona lunga $d_1 - x$ c'è l'energia

$$\frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} \Sigma_1 (d_1 - x) = \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 \Sigma_1 (d_1 - x) \quad ,$$

mentre nella zona lunga $d_2 - x$ c'è l'energia

$$\frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} \Sigma_2 (d_2 - x) = \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 i_2^2 \Sigma_2 (d_2 - x) \quad .$$

Nel tratto x , dove agiscono entrambi i campi, l'energia vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} (\Sigma_1 - \Sigma_2) x + \frac{1}{2} \frac{(B_1 + B_2)^2}{\mu_0} \Sigma_2 x &= \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 (\Sigma_1 - \Sigma_2) x + \frac{1}{2} \mu_0 n_1^2 i_1^2 \Sigma_2 x + \\ &+ \frac{1}{2} \mu_0 n_2^2 i_2^2 \Sigma_2 x + \mu_0 n_1 n_2 i_1 i_2 \Sigma_2 x \quad . \end{aligned}$$

Sommendo tutti i contributi si ottiene l'espressione già vista di U_m .

Al termine di accoppiamento $\mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 x i_1 i_2$ va attribuito il segno, positivo se i_1 e i_2 sono concordi, negativo se sono discordi.

La forza tra i due solenoidi è

$$F = \frac{dU_m}{dx} = \frac{dU_{acc}}{dx} = \mu_0 n_1 n_2 \Sigma_2 i_1 i_2 = \frac{B_1 B_2 \Sigma_2}{\mu_0} \quad ,$$

indipendente da x . Essa è *concorde* all'asse x , e quindi *attrattiva*, se le *correnti* sono *concordi*, *repulsiva* se sono *discordi*. In ogni caso il *sistema evolve verso le condizioni di massima energia magnetica*.

Esempio 10.11

La bobina S_2 dell'esempio 10.9 può ruotare attorno ad un asse che sta nel piano della bobina S_1 e passa per il centro delle due bobine. Detto I il momento d'inerzia di S_2 rispetto a tale asse, calcolare il periodo T delle piccole oscillazioni di S_2 attorno alla posizione di equilibrio se le due bobine sono percorse dalle correnti i_1 e i_2 di eguale verso.

Soluzione

In equilibrio i versori normali \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono paralleli e concordi, se le correnti sono concordi. Per un generico angolo θ tra le bobine l'energia di accoppiamento, utilizzando il risultato dell'esempio 10.9, è

$$U_{\text{acc}} = M i_1 i_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 i_1 i_2}{2r_1} \cos \theta = k \cos \theta ,$$

posto $k = (\mu_0 N_1 N_2 \pi r_2^2 i_1 i_2) / 2r_1$, costante. Gli altri termini dell'energia magnetica sono costanti e quindi il momento della forza rispetto all'asse di rotazione vale, secondo (10.46),

$$M_\theta = \frac{dU_m}{d\theta} = \frac{dU_{\text{acc}}}{d\theta} = -k \sin \theta .$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni $M_\theta = -k\theta$ e l'equazione del moto di rotazione risulta

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}} .$$

La bobina S_2 compie quindi *oscillazioni armoniche* di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} .$$

Osserviamo che U_{acc} dipende solo dall'angolo e che pertanto non ci sono forze su S_2 che tendano a spostarla dal centro della bobina S_1 .

10.10 Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell

Il campo magnetico nel vuoto soddisfa alla *legge di Ampère*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma , \quad (8.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} , \quad (8.29)$$

rispettivamente in forma integrale e differenziale, come si è dimostrato nel paragrafo 8.4. Nella (8.28) la superficie Σ attraverso cui si calcola il flusso della densità di corrente è una qualsiasi superficie avente come contorno la linea s che concatena la corrente i e lungo cui si calcola la circuitazione di \mathbf{B} .

Sempre nel paragrafo 8.4 abbiamo rilevato che (8.29) è in accordo con la conservazione della carica elettrica solo nel caso stazionario. Infatti calcolando la divergenza di entrambi i membri di (8.29) si ha

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 .$$

in quanto la divergenza del rotore di un qualsiasi vettore è sempre nulla (paragrafo 3.6). E appunto $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ è la forma differenziale (6.11) della *legge di conservazione della carica elettrica* nei processi non dipendenti dal tempo. Nel caso generale in cui la densità di carica vari nel tempo la densità di corrente soddisfa l'*equazione di continuità*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} ;$$

essa quindi ha divergenza non nulla, in contrasto con (8.29).

La non validità della legge di Ampère in condizioni non stazionarie si può constatare nel processo di carica di un condensatore. Nel paragrafo 6.9 abbiamo ammesso, applicando la legge di Ohm all'intero circuito, che durante il processo una corrente $i(t)$ circolasse *ovunque*, senza tener conto che tra le armature del condensatore c'è un mezzo isolante e non può esserci corrente di conduzione. In realtà, come spiegato alla fine del paragrafo 6.9, su un'armatura del condensatore si verifica una variazione di carica nel tempo dq/dt , corrispondente alla corrente i entrante nell'armatura, e sull'altra armatura c'è una variazione, eguale in modulo e opposta in segno, $-dq/dt$, che corrisponde a una corrente uscente $i = -(-dq/dt) = dq/dt$. Attraverso una superficie chiusa che racchiude le armature abbiamo un flusso netto di carica che è nullo, come se ci fosse continuità nel circuito (purché la variazione non sia troppo rapida): ciò è stato sufficiente per risolvere l'equazione del circuito RC . Però, se consideriamo una superficie chiusa che racchiuda una sola armatura, non importa quale, il flusso di \mathbf{j} non è nullo perché c'è una carica entrante o uscente, ma nello spazio tra le armature del condensatore non c'è nessun passaggio di carica. Tale superficie può essere divisa in due parti Σ_1 e Σ_2 come in figura 10.42. La circuitazione di \mathbf{B} lungo la linea s è diversa da zero, però mentre attraverso Σ_1 abbiamo

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = i = \frac{dq}{dt} ,$$

attraverso Σ_2 , che si appoggia anch'essa su s , ma non incontra il filo, si ha

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 .$$

Il vettore densità di corrente non è quindi solenoidale nel caso considerato, come invece dovrebbe essere secondo (8.28) e (8.29).

Per sanare queste contraddizioni Maxwell propose di estendere il significato della densità di corrente, ragionando nel modo seguente.

Esprimiamo la derivata della densità di carica che compare nella (6.10) utilizzando la legge di Gauss in forma locale, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, e invertiamo le due operazioni indipendenti di derivazione rispetto al tempo e di derivazione rispetto alle coordinate spaziali:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

La (6.10) diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Il vettore

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.50) \quad \text{Densità di corrente totale}$$

risulta avere sempre divergenza nulla. Modifichiamo allora la legge di Ampère sostituendo alla densità di corrente di conduzione la densità \mathbf{j}_{tot} :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \mu_0 (i + i_s) \quad , \quad (10.51) \quad \text{Legge di Ampère-Maxwell}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s) \quad . \quad (10.52)$$

Le quantità

$$\mathbf{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad (10.53) \quad \text{Densità di corrente di spostamento}$$

$$i_s = \int \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} \quad (10.54) \quad \text{Corrente di spostamento}$$

si chiamano rispettivamente *densità di corrente di spostamento nel vuoto* e *corrente di spostamento nel vuoto*.

Con l'aggiunta del nuovo termine le difficoltà che avevamo segnalato vengono superate. L'applicazione della divergenza alla (10.52) dà risultato identicamente nullo sia a primo membro che a secondo membro. Nel circuito *RC*, sulla superficie Σ_2 della figura 10.42 è nulla la densità di corrente di conduzione, ma è diverso da zero il campo elettrico generato dalle cariche che stanno sulle armature (tra le quali supponiamo ci sia il vuoto), per cui abbiamo

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{j}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = i_s$$

D'altra parte su Σ_1 , dove possiamo pensare nullo \mathbf{E} ,

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{j}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = i$$

Dato che \mathbf{j}_{tot} è solenoidale i due flussi devono essere uguali: la corrente che ha la densità data da (10.50) ha lo stesso valore lungo tutto il circuito: essa coincide con la corrente di conduzione nei cavi di collegamento e con la corrente di spostamento all'interno del condensatore. Formalmente avevamo già trovato questa egualanza con la (6.53).

La (10.51) è chiamata *legge di Ampère-Maxwell*: essa attribuisce gli stessi effetti magnetici di una corrente di conduzione alle variazioni temporali del campo elettrico. Il termine corrente di spostamento, coniato da Maxwell, non deve trarre

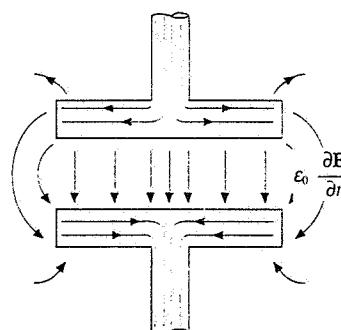


Figura 10.43

in inganno: *alla densità* (10.53) non è collegato nessun moto di carica.

Vedremo nel successivo esempio 10.12 come si possa verificare il nuovo effetto ipotizzato da Maxwell. La conferma più significativa della correttezza del ragionamento viene però dall'esistenza delle *onde elettromagnetiche*; come dimostreremo formalmente nel capitolo 13 esse derivano proprio dal fatto che la variazione temporale di un campo dà origine all'altro campo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} \text{ legge di Faraday} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{B} \text{ legge di Ampère-Maxwell} \quad .$$

I campi \mathbf{E} e \mathbf{B} prodotti sono a loro volta variabili e in opportune condizioni ha luogo una propagazione.

Esempio 10.12

Un condensatore piano con armature circolari di raggio R è collegato ad un generatore che stabilisce tra le armature il campo elettrico $E = E_0 \sin \omega t$. Calcolare il campo magnetico \mathbf{B} all'interno del condensatore in funzione della distanza r dall'asse e la f.e.m. indotta in un solenoide toroidale di raggio medio r coassiale alle armature.

Soluzione

Consideriamo una circonferenza di raggio $r < R$ all'interno del condensatore, con centro sull'asse del sistema; lungo di essa la circuitazione di \mathbf{B} è $2\pi r B$, in quanto per ragioni di simmetria le linee di \mathbf{B} sono circonferenze come quella data. Ad un certo istante il campo \mathbf{E} è uniforme nel piano della circonferenza e la legge (10.51) si scrive

$$2\pi r B = \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

L'espressione di \mathbf{B} , utilizzando anche (8.8), è

$$B(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 r \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r \omega E_0}{2c^2} \cos \omega t \quad : \quad (10.55)$$

il modulo del campo magnetico varia linearmente con il raggio, per $0 \leq r \leq R$, come avviene all'interno di un filo percorso da corrente. In effetti la (10.55) è identica alla (8.30) con $j = \epsilon_0 \partial E / \partial t = j_s$.

La f.e.m. indotta nella N spire del solenoide toroidale, ammesso che la dimensione radiale della sezione Σ' sia piccola rispetto a r , è

$$\mathcal{E}_i = -N \Sigma' \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{N \Sigma' r \omega^2 E_0}{2c^2} \sin \omega t \quad .$$

Ponendo ad esempio $r = 10$ cm, $\Sigma' = 3$ cm 2 , $N = 600$, $E_0 = 10^3$ V/m e $\omega = 10^7$ rad/s, si ha

$$B = 5.6 \cdot 10^{-9} \cos 10^7 t \text{ T} \quad , \quad \mathcal{E}_i = 0.01 \sin 10^7 t \text{ V} \quad .$$

Da un punto di vista quantitativo l'effetto diretto della corrente di spostamento è difficile da mettere in evidenza. L'apporto alla circuitazione di \mathbf{B} nella (10.51),

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} \quad ,$$

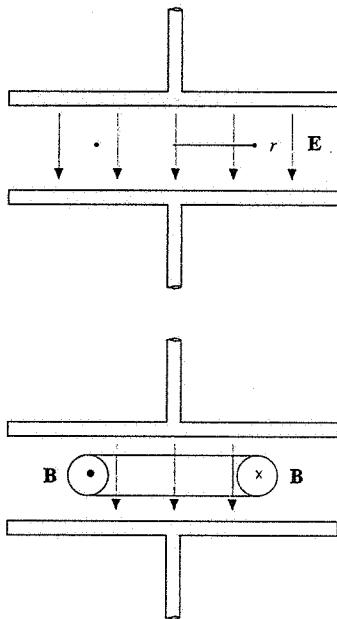


Figura 10.44

risente del fattore $1/c^2 = 1.1 \cdot 10^{-17} \text{ s}^2/\text{m}^2$, che solo una variazione del campo elettrico molto rapida nel tempo può in parte controbilanciare. Nell'esempio 10.12, in cui la corrente di spostamento è l'unica sorgente di \mathbf{B} , l'effetto nel vuoto diventa misurabile solo con frequenze elevate, superiori a 10^5 Hz .

La trattazione precedente non considera la presenza di mezzi materiali. Se invece lo spazio è riempito da un mezzo dielettrico conviene servirsi del vettore *induzione dielettrica* \mathbf{D} : la sua divergenza è legata alla densità di carica libera dalla (5.23), $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, e la densità di corrente a divergenza nulla è

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad (10.56)$$

La legge di Ampère-Maxwell si scrive

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left[\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \right] = \mu_0 (i + i_s) \quad , \quad (10.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_s) \quad , \quad (10.58)$$

con

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad (10.59)$$

$$i_s = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{\partial \Phi(\mathbf{D})}{\partial t} \quad , \quad (10.60)$$

densità di corrente di spostamento e corrente di spostamento nel mezzo. Nel vuoto $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ e si ritrovano tutte le relazioni precedenti.

Se infine nella densità di corrente \mathbf{j}_{tot} deve essere compresa anche la densità di corrente amperiana $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$, fatto che non altera la solenoidalità di \mathbf{j}_{tot} , sappiamo che il termine contenente la magnetizzazione può essere fatto scomparire formalmente ricorrendo al vettore $\mathbf{H} = (\mathbf{B} / \mu_0) - \mathbf{M}$ e la legge di Ampère-Maxwell, che scriviamo solo in termini differenziali, diventa

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad . \quad (10.61)$$

10.11 Equazioni di Maxwell

Nello spazio vuoto, in presenza di cariche e di correnti di conduzione distribuite rispettivamente con densità ρ e \mathbf{j} , le *equazioni di Maxwell* si scrivono

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Rispetto alle (10.1) sono comparsi i fenomeni dipendenti dal tempo.

La prima equazione stabilisce il legame tra carica elettrica e campo elettrico: la struttura è la stessa sia per campi statici che per campi variabili; la seconda equazione mostra che anche un campo magnetico variabile è sorgente di un campo elettrico. La terza equazione afferma che il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche e infine la quarta individua come sorgenti del campo magnetico le correnti di conduzione e le variazioni del campo elettrico.

Applicando la divergenza alla quarta equazione e utilizzando la prima, si ottiene l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad , \quad (6.10)$$

espressione dinamica della *conservazione della carica*, proprietà che dunque è compresa nelle (10.62).

La forza su una carica q è la *forza di Lorentz*

Legge di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.38)$$

e il moto della carica obbedisce alla *legge di Newton*

Legge di Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad ,$$

scritta in forma relativisticamente corretta; per velocità piccole rispetto alla velocità della luce $d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$, con m massa della carica q .

Ai campi \mathbf{E} e \mathbf{B} è associata la *densità di energia elettromagnetica*

Densità di energia elettromagnetica

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ,$$

espressione che resta valida anche con campi variabili nel tempo.

Tutte le proprietà generali che abbiamo studiato finora, comprese quelle dei campi statici, sono racchiuse nelle (10.62). Situazioni specifiche sono descritte da relazioni speciali, che caratterizzano il particolare sistema e hanno spesso validità limitata: ad esempio in un conduttore percorso da corrente non troppo rapidamente variabile la densità di corrente e il campo elettrico sono legati dalla legge di Ohm (6.17),

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad .$$

Nei mezzi materiali la presenza dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} provoca la formazione di cariche di polarizzazione e di correnti di magnetizzazione, le cui densità sono esprimibili in termini dei vettori \mathbf{P} e \mathbf{M} . Tali densità modificano i valori di ρ e \mathbf{j} nelle (10.62); esse vengono eliminate dalle equazioni tramite i vettori

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad .$$

e le equazioni di Maxwell, se i mezzi sono in quiete, assumono la forma seguente, in cui appaiono solo le cariche libere e le correnti di conduzione:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.64) \quad \text{Equazioni di Maxwell}$$

A queste bisogna però aggiungere le relazioni esplicite tra \mathbf{E} e \mathbf{D} e tra \mathbf{B} e \mathbf{H} . Nei mezzi isotropi si ha

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{H},$$

e le (10.64) si riconducono alle (10.62) con ε al posto di ε_0 e μ al posto di μ_0 .

Una situazione particolarmente significativa si ha nello spazio vuoto privo di correnti e di cariche, in cui le (10.62) diventano

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.65) \quad \text{Equazioni di Maxwell nel vuoto in assenza di sorgenti}$$

La struttura di queste equazioni è simmetrica rispetto ai due campi e si vede che, a parte la soluzione banale $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, è possibile solo una soluzione con campi variabili nel tempo e nello spazio, situazione che come vedremo porta alla *propagazione del campo elettromagnetico*. Il fenomeno si ricava anche da (10.62) e (10.64), sia in vicinanza delle sorgenti che lontano da esse e in uno spazio riempito da mezzi materiali, eventualmente sovrapposto a campi statici, però il caso (10.65) è il più semplice concettualmente.

La teoria di Maxwell, pubblicata nella sua forma completa nel 1873, costituisce uno dei risultati scientifici più importanti della fisica classica. Con essa viene compiuta la sistemazione teorica dei fenomeni elettrici e magnetici e la loro unificazione concettuale: tali fenomeni, che nel caso più generale non possono esistere separatamente, sono gli aspetti di un'unica interazione fondamentale, legata all'esistenza della carica elettrica.

Le equazioni di Maxwell non sono però soltanto il punto di arrivo di un processo conoscitivo iniziato circa cento anni prima. La previsione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche, verificata sperimentalmente da Herz nel 1888, e della coincidenza della loro velocità con quella della luce permise di spiegare la natura della luce e aprì un campo fondamentale di ricerca e applicazione.

Un ultimo aspetto che vogliamo notare riguarda la connessione della teoria di Maxwell con la teoria della relatività ristretta enunciata da Einstein nel 1905. Secondo il principio di relatività tutte le leggi della Fisica, e non solo quelle della meccanica, devono avere la stessa espressione in *sistemi di riferimento inerziali*; inoltre la legge di trasformazione delle coordinate spaziali e del tempo tra due sistemi inerziali è quella di Lorentz (vedi vol. I, paragrafo 3.8): quindi le *leggi della Fisica* devono essere *invarianti per una trasformazione di Lorentz*. Sappiamo che ciò non è vero per le leggi della meccanica newtoniana, invarianti per trasformazioni galileiane che sono il limite per $v \ll c$ delle trasformazioni di Lorentz. Invece le *equazioni di Maxwell sono relativisticamente invarianti*; tale fatto era stato notato ben prima del 1905, nel senso che si era trovato formalmente quali trasformazioni lasciavano invariate le equazioni, però non era stato compreso. Intuitivamente non è sorprendente che una teoria la quale tratta correttamente campi che si propagano

con la velocità della luce sia in accordo con la teoria della relatività. Una discussione sull'argomento esula però dai limiti di questo libro.

Equazioni per i potenziali

Nei problemi statici i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} possono essere derivati dai potenziali scalare e vettore attraverso le formule (2.36) e (8.39):

$$\mathbf{E} = -\nabla V, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

I potenziali obbediscono alle equazioni (3.27) e (8.42) in cui compaiono le sorgenti:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Ricordiamo dal paragrafo 8.7 che il *potenziale vettore* è definito a meno del gradiente di una funzione scalare, per cui \mathbf{A} può essere scelto in modo da soddisfare alla condizione $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Quando i campi sono variabili le relazioni tra campi e potenziali diventano

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (10.66)$$

La prima relazione, coincidente con (10.13), va intesa in senso più esteso di quanto visto nel paragrafo 10.2. Dato che

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad ,$$

al vettore $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ può essere aggiunto il gradiente di una funzione scalare senza che il rotore cambi:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad .$$

La (10.13) resta dunque vera anche se V è funzione del tempo; per campi statici essa coincide con (2.36).

Abbiamo già notato che se \mathbf{A} diventa $\mathbf{A} + \nabla S$ il campo \mathbf{B} non cambia; però cambia il campo \mathbf{E} . Ciò può essere evitato se a V viene aggiunta $-\frac{\partial S}{\partial t}$:

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla S) - \nabla \left(V - \frac{\partial S}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla S - \nabla V + \nabla \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V = \mathbf{E} \quad .$$

Nei fenomeni variabili le sostituzioni

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla S, \quad V \rightarrow V - \frac{\partial S}{\partial t}$$

non alterano i campi. Il potenziale vettore quindi è definito a meno del gradiente di una funzione scalare e il potenziale scalare a meno della derivata rispetto al tempo della stessa funzione. Come nel caso statico questa indeterminazione viene sfruttata per definire in modo conveniente $\nabla \cdot \mathbf{A}$. Precisamente, per una ragione che vedremo subito, si impone che sia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad , \quad (10.67)$$

condizione che contiene il caso statico ($V = \text{costante}$).

Per dedurre le (10.65) abbiamo utilizzato le equazioni di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; per trovare le equazioni cui obbediscono i potenziali nel caso generale utilizziamo le altre due equazioni di Maxwell inserendo le (10.66):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right)$$

Sviluppando si ottiene

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial V}{\partial t}$$

in cui abbiamo fatto ricorso per il rotore di un rotore alla prima delle (3.36) e abbiamo scambiato, come sempre, le operazioni di derivazione spaziale e di derivazione temporale. A questo punto risulta evidente la convenienza della condizione (10.67) in base alla quale le equazioni dei potenziali diventano

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} , \quad \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (10.68) \quad \text{Equazioni per i potenziali}$$

Per una data distribuzione di cariche e correnti possiamo ottenere i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} o direttamente dalle equazioni di Maxwell (10.62) o risolvendo le *equazioni per i potenziali* e ricavando i campi da queste tramite (10.66). Nello spazio vuoto privo di cariche e correnti

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 , \quad \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 . \quad (10.69)$$

Le (10.68) e (10.69) sono particolarmente interessanti perché mostrano esplicitamente una struttura tipo equazione delle onde (vol. I, paragrafo 9.10 e seguenti), anche se più generale. Riprenderemo l'argomento nel capitolo 13.

Oscillazioni elettriche. Correnti alternate

11.1 Oscillazioni smorzate in un circuito RLC

Abbiamo già incontrato alcuni esempi di correnti variabili nel tempo studiando i circuiti RC e RL , rispettivamente nei paragrafi 6.9 e 10.5. Nel primo caso, quando le armature di un condensatore carico vengono collegate con un resistore, si ha una corrente dall'armatura positiva a quella negativa che scarica il condensatore. Diciamo V_C la d.d.p. ai capi del condensatore, avente valore massimo V_0 nell'istante iniziale, quando viene chiuso il circuito; in ogni istante successivo la d.d.p. ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi del resistore e valgono le equazioni

$$V_C = \frac{q}{C} = R i \quad , \quad i = -\frac{dq}{dt}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{R C} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\nu t} \quad .$$

con $\tau = RC$. L'energia elettrica $CV_0^2/2$ viene dissipata per effetto Joule nel resistore.

Analogamente, se un induttore percorso da una corrente costante i_0 viene chiuso su un resistore, l'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt} = R i$$

e la corrente decresce nel tempo secondo la legge

$$i(t) = i_0 e^{-\nu t}$$

con $\tau = L/R$. L'energia magnetica $L i_0^2/2$ è dissipata per effetto Joule nel resistore.

In entrambi i casi l'equazione del circuito è del tipo

$$\frac{di}{dt} = -k i \quad ,$$

equazione differenziale lineare del prim'ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione più generale è

$$i(t) = A e^{-kt} \quad ,$$

essendo determinata la costante A dalla condizione iniziale. La diminuzione della corrente è causata dalla presenza dell'elemento dissipativo R che assorbe la potenza $R i^2$.

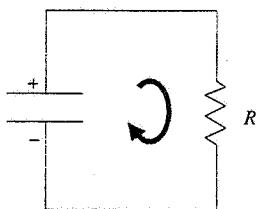


Figura 11.1

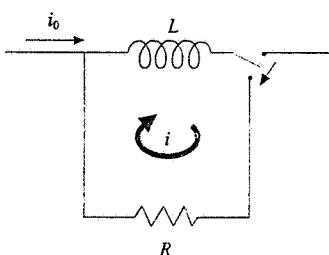


Figura 11.2

Se invece dei processi di scarica si considerano i corrispondenti *processi di carica*, realizzati inserendo nel circuito un generatore di f.e.m. costante, abbiamo ancora una corrente decrescente esponenzialmente nel tempo per il circuito *RC*, nel quale a regime la corrente è nulla, mentre nel circuito *RL* la corrente ha l'espressione

$$i(t) = i_0(1 - e^{-\nu t}) ,$$

tendente al valore costante di regime. Il lavoro necessario per mantenere queste correnti è fornito dal generatore, che inoltre eroga le energie immagazzinate nel condensatore o nell'induttore.

In ogni caso si tratta di fenomeni transitori, la cui durata tipica è regolata dalla costante di tempo, pari a RC o a L/R .

Prendiamo ora in esame il caso di un condensatore carico che all'istante $t = 0$ viene connesso ad un induttore e ad un resistore in serie; il *circuito* si chiama *RLC in serie*. Alla chiusura del circuito in questo inizia a passare una corrente e nell'induttore compare la f.e.m. di autoinduzione $-L \frac{di}{dt}$; la d.d.p. ai capi del resistore non è più eguale a quella ai capi del condensatore, vale bensì l'eguaglianza

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = R i \quad (11.1)$$

Deriviamo rispetto al tempo ponendo $i = -dq/dt$ e otteniamo

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 , \quad (11.2)$$

equazione differenziale lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Definendo

$$\gamma = \frac{R}{2L} , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \quad (11.3)$$

detti rispettivamente *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione propria*, la (11.2) si scrive

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 . \quad (11.4)$$

Si tratta della stessa equazione che regola il moto dell'*oscillatore armonico smorzato* da una forza di attrito proporzionale alla velocità (attrito viscoso), studiato nel capitolo 9 del primo volume. Rivediamo pertanto i risultati già trovati adattandoli al caso elettrico.

La soluzione più generale di (11.4) ha la forma

$$i(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} , \quad (11.5)$$

dove α_1 e α_2 sono le soluzioni dell'*equazione caratteristica*

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 ,$$

Circuito *RLC in serie*

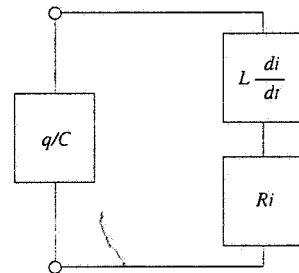
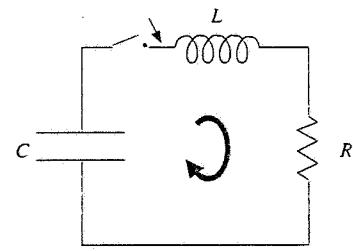


Figura 11.3

ovvero

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (11.6)$$

La corrente (11.5) ha un andamento temporale differente a seconda della relazione tra γ e ω_0 . Si considerano tre situazioni:

smorzamento forte $\gamma^2 > \omega_0^2 \Rightarrow R^2 > 4L/C$

$$i(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (11.7)$$

smorzamento critico $\gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow R^2 = 4L/C$

$$i(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (11.8)$$

smorzamento debole $\gamma^2 < \omega_0^2 \Rightarrow R^2 < 4L/C$

$$i(t) = D e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad . \quad (11.9)$$

Nei primi due casi ($\gamma^2 \geq \omega_0^2$) l'andamento predominante è esponenziale decrescente, nel terzo caso si ha un'oscillazione smorzata. Le costanti A, B, D, ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali sul valore della corrente e della derivata prima della corrente. Si tratta sempre di un fenomeno transitorio in quanto è dominante il fattore di smorzamento $e^{-\gamma t}$; il ruolo dell'attrito viscoso è svolto nel caso elettrico dalla resistenza del circuito. La quantità $R_c = 2\sqrt{LC}$ prende il nome di *resistenza critica*.

Esempio 11.1

In un circuito *RLC* in serie la capacità vale $C = 4 \text{ nF}$ e l'induttanza vale $L = 2.56 \text{ mH}$. Supponendo che all'istante $t = 0$ il condensatore, carico alla d.d.p. $V_0 = 100 \text{ V}$, venga chiuso sulla serie *RL*, determinare la corrente nel circuito nei tre casi $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$, $R = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$, $R = 0.5 \cdot 10^3 \Omega$.

Soluzione

La quantità $4LC$ vale $2.56 \cdot 10^{-6} \Omega^2$ e quindi la *resistenza critica* del circuito è $R_c = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$: avremo per $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$ e $R = 1.6 \cdot 10^3 \Omega$ un andamento esponenziale smorzato e per $R = 0.5 \cdot 10^3 \Omega$ un andamento oscillatorio smorzato. La pulsazione propria del circuito è $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 31.25 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$.

Le condizioni iniziali sono le seguenti: la corrente, nulla un istante prima della chiusura, non può cambiare istantaneamente per la presenza dell'induttanza e perciò $i(0) = 0$. Dall'equazione (11.1) si ricava allora che per $t = 0$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{q_0}{CL} = \frac{V_0}{L} = 3.91 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Nel caso $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$ ($\gamma = 9.77 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$), imponendo le condizioni iniziali alla (11.7) si trova

$$A + B = 0, \quad A = \frac{V_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = 21.1 \cdot 10^{-3} \text{ A},$$

$$i(t) = 21.1 \cdot 10^{-3} e^{-0.52 \cdot 10^5 t} - 21.1 \cdot 10^{-3} e^{-19.02 \cdot 10^5 t} \text{ A}.$$

La corrente passa da zero al valore massimo di $18.5 \cdot 10^{-3}$ A, raggiunto nell'istante $t = 1.95 \cdot 10^{-6}$ s (come si ottiene annullando la derivata di/dt), e poi tende a zero con costante di tempo $\tau = 1/0.52 \cdot 10^5 = 19.2 \cdot 10^{-6}$ s; si noti infatti che il primo esponenziale ha costante di tempo molto maggiore del secondo, praticamente nullo dopo un tempo dell'ordine di $2 \cdot 10^{-6}$ s.

Quando $R = R_c = 1.6 \cdot 10^3$ ($\gamma = \omega_0 = 31.25 \cdot 10^4$ s $^{-1}$) la corrente ha l'espressione (11.8); con le date condizioni iniziali risulta $A = 0$ e $B = V_0/L$ per cui

$$i(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-\gamma t} = 3.91 \cdot 10^4 t e^{-31.25 \cdot 10^4 t} \text{ A}$$

Anche ora la corrente partendo da zero raggiunge un valore massimo ($46 \cdot 10^{-3}$ a $t = 1/\gamma = 3.2 \cdot 10^{-6}$ s) e poi decresce fino a zero; la costante di tempo è $\tau = 3.2 \cdot 10^{-6}$ s. Nelle condizioni di smorzamento critico la scarica del condensatore avviene più rapidamente che negli altri casi.

Infine, con $R = 500 \Omega$ ($\gamma = 9.77 \cdot 10^4$ s $^{-1}$) l'espressione di riferimento è la (11.9), con

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 29.68 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$$

In base alle condizioni iniziali

$$D = \frac{V_0}{\omega L} = 131.7 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad , \quad \phi = 0$$

e quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{-\gamma t} \sin \omega t = 131.7 \cdot 10^{-3} e^{-9.77 \cdot 10^4 t} \sin 29.68 \cdot 10^4 t \text{ A}$$

L'oscillazione avviene con *pseudoperiodo* $T = 2\pi/\omega = 21.2 \cdot 10^{-6}$ s ed è smorzata con costante di tempo $\tau = 1/\gamma = 10.2 \cdot 10^{-6}$ s. Il valore massimo della corrente, $82.8 \cdot 10^{-3}$ A, è raggiunto al tempo $t = 4.2 \cdot 10^{-6}$ s.

Nella figura 11.4 sono mostrati gli andamenti corrispondenti ai tre diversi regimi. All'inizio la corrente sembra descrivere un'oscillazione, però con $R \geq R_c$ lo smorzamento è tale che dopo il massimo si ha una decrescita monotona verso lo zero; solo con smorzamento debole si instaura una vera oscillazione smorzata.

Un'altra condizione iniziale si realizza chiudendo un'induttore percorso da una corrente costante i_0 su una serie RC con il condensatore inizialmente scarico: si ha $i(0) = i_0$ e $(di/dt)_{i=0} = -R i_0 / L$. L'andamento asintotico è lo stesso.

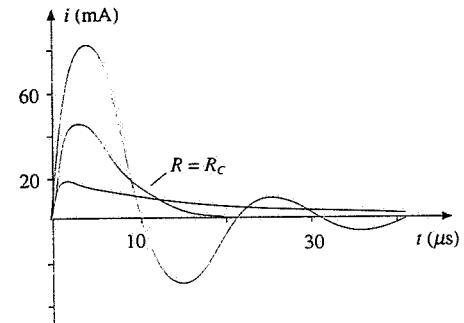


Figura 11.4

Il circuito LC

Una situazione limite, difficile da realizzare in pratica, si ha quando $R = 0$. Le (11.1) e (11.2) diventano

$$\frac{q}{C} = L \frac{di}{dt}, \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

La corrente obbedisce all'equazione dell'oscillatore armonico e varia nel tempo secondo la legge

$$i(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (11.10)$$

mentre la d.d.p. ai capi del condensatore, eguale ed opposta alla f.e.m. indotta nell'induttore, è

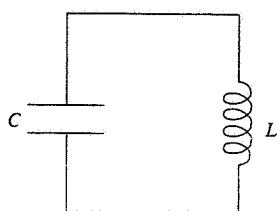


Figura 11.5

La pulsazione vale $\omega = 1/\sqrt{LC}$, le costanti A e ϕ si determinano dalle condizioni iniziali. Ad esempio, se un condensatore carico viene chiuso su un'induttore, $i(0) = 0$ e $(di/dt)_{t=0} = V_0/L$ per cui

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \quad , \quad V_C = V_L = V_0 \cos \omega t$$

Se invece si chiude un induttore percorso da corrente su un condensatore scarico $i(0) = i_0$, $(di/dt)_{t=0} = 0$ e

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_C = V_L = -\omega L i_0 \sin \omega t$$

Si trova sempre che quando la corrente è massima V_C è nulla e viceversa che quando V_C è massima la corrente è nulla, come deve essere viste le (11.10) e (11.11): le due grandezze sono in *quadratura di fase*, seguendo la terminologia introdotta nel paragrafo 9.4 del volume primo.

Nell'istante in cui il condensatore è carico con $V_C = V_0$ tutta l'energia è elettrica non essendoci energia magnetica ($i = 0$); successivamente il condensatore si scarica, la corrente cresce, l'energia è in parte elettrica e in parte magnetica fino a che $V_C = 0$, $i = i_0$, istante in cui tutta l'energia è magnetica. Questo fenomeno richiede un quarto di periodo; nel successivo quarto di periodo la corrente si riduce a zero e la d.d.p. ai capi del condensatore raggiunge il valore $-V_0$: adesso di nuovo tutta l'energia è elettrica. Dopo di che il condensatore inizia a scaricarsi e si carica l'induttore, con corrente che fluisce in verso opposto a quello precedente; infine, nell'ultimo quarto di periodo, si torna alla condizione iniziale $V_C = V_0$, $i = 0$.

Il bilancio energetico in un istante generico è

$$\frac{1}{2} C V_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2 C} = \frac{1}{2} L i_0^2 \quad (11.12)$$

e i valori massimi sono legati dalle relazioni

$$V_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} i_0 = \omega L i_0 = \frac{i_0}{\omega C} \quad , \quad q_0 = CV_0 = \sqrt{LC} i_0 = \frac{i_0}{\omega} \quad . \quad (11.13)$$

Il circuito LC è dunque sede di un'*oscillazione elettrica permanente* (cioè non smorzata) e per questa ragione viene anche chiamato *circuito oscillante*. La situazione è matematicamente identica a quella di una massa m sottoposta all'azione di una forza elastica $-kx$: le varie formule mettono in evidenza una *corrispondenza*, soltanto *formale*, tra queste grandezze:

$$q \leftrightarrow x \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} \leftrightarrow v = \frac{dx}{dt} \quad , \quad L \leftrightarrow m \quad , \quad C \leftrightarrow \frac{1}{k} \quad .$$

La stessa osservazione può essere estesa anche ai sistemi oscillatore smorzato, circuito RLC aggiungendo la corrispondenza tra la resistenza R e il coefficiente λ della forza di attrito viscoso ($F = -\lambda v$).

RiconSIDERANDO sotto l'aspetto energetico il circuito *RLC* alla luce di quanto visto per il circuito ideale *LC*, possiamo dire che nel caso di oscillazione elettrica smorzata si hanno trasformazioni di energia dalla forma elettrica a quella magnetica e viceversa, anche se ad ogni ciclo una parte dell'energia viene dissipata nella resistenza e alla fine il fenomeno si spegne; inoltre $i(t)$ e $V_C(t)$ non sono in quadratura di fase. Nei casi con andamento soltanto esponenziale, come quelli considerati nell'esempio 11.1, una parte di energia elettrica viene momentaneamente trasformata in energia magnetica, anche se il condensatore in seguito non si ricarica (la d.d.p. V_C tende a zero e non cambia mai di segno): alla fine tutta l'energia è stata assorbita dalla resistenza.

11.2 Oscillazioni permanenti in un circuito *RLC*. Risonanza

Per mantenere un'oscillazione elettrica permanente in un circuito *RLC* occorre fornire con continuità la potenza che viene dissipata nel resistore. Allo scopo si connette al circuito un generatore di f.e.m. variabile, ad esempio secondo la legge $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi)$. L'equazione del circuito è

$$\varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi) - L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C} + R i \quad ,$$

generalizzazione di (6.50): a primo membro abbiamo le f.e.m. presenti nel circuito e a secondo membro le d.d.p. ai capi del condensatore e del resistore. Deriviamo rispetto al tempo ponendo $i = dq/dt$ e otteniamo

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad . \quad (11.14)$$

La soluzione più generale di questa equazione è la somma della soluzione generale (11.5) dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare di (11.14), che cerchiamo nella forma $i = i_0 \cos \omega t$. Infatti, dato che il fenomeno transitorio rappresentato da (11.5) scompare dopo un certo tempo, a regime resterebbe così solo la soluzione particolare oscillante. Per verificare se ciò è possibile inseriamo la suddetta espressione della corrente nella (11.14) che diventa

$$-\omega^2 i_0 \cos \omega t - \frac{R}{L} \omega i_0 \sin \omega t + \frac{i_0}{LC} \cos \omega t = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} (\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \quad ,$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{L} \omega i_0 \sin \omega t + i_0 \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \cos \omega t = -\frac{\omega \varepsilon_0}{L} \cos \phi \sin \omega t - \frac{\omega \varepsilon_0}{L} \sin \phi \cos \omega t \quad .$$

L'egualanza deve essere valida in qualsiasi istante e quindi devono essere eguali i coefficienti di $\sin \omega t$ a primo e a secondo membro; lo stesso deve valere per i coefficienti di $\cos \omega t$ e imponendo queste due identità si ottiene

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad , \quad (11.15)$$

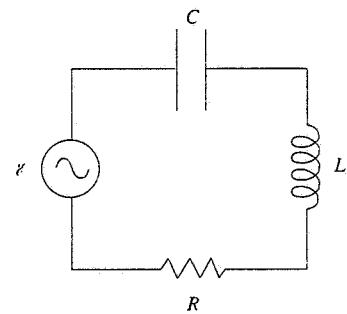


Figura 11.7

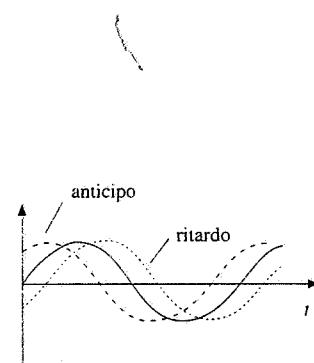


Figura 11.8

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.16)$$

È dunque possibile instaurare un'*oscillazione elettrica permanente* nel circuito *RLC*: applicando la f.e.m. variabile $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ si ha nel circuito la corrente $i = i_0 \cos \omega t$, con la stessa pulsazione ω della f.e.m. applicata e ampiezza dipendente da \mathcal{E}_0 , ω e dai parametri del circuito, ma non dalle condizioni iniziali; ad una sollecitazione sinusoidale il circuito risponde in modo sinusoidale. La f.e.m. però è *sfasata* rispetto alla corrente di un angolo ϕ , anch'esso dipendente da ω e dai parametri del circuito.

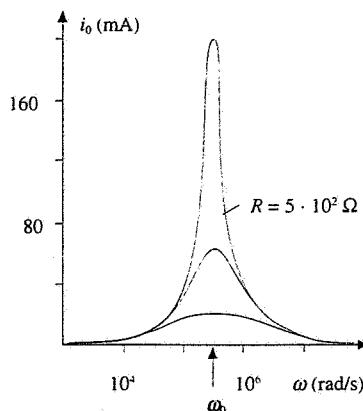


Figura 11.9

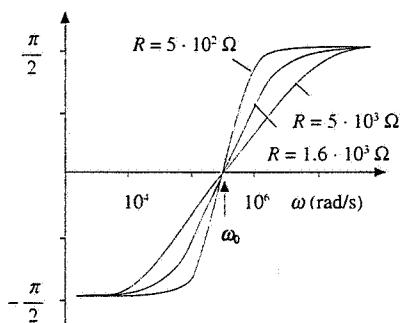


Figura 11.10

Esempio 11.2

Al circuito dell'esempio 11.1 applichiamo la f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ con $\mathcal{E}_0 = 100$ V. Determinare l'andamento della corrente massima i_0 e dello sfasamento ϕ in funzione di ω , per i dati valori di R .

Soluzione

A seconda del valore della pulsazione della f.e.m. applicata la risposta del circuito è diversa, sia in ampiezza che in fase, come mostrano (11.15) e (11.16). Nelle figure sono mostrati i grafici delle funzioni $i_0(\omega)$ e $\phi(\omega)$ nei tre casi proposti.

Se $\omega < \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ $\operatorname{tg}\phi$ è negativa, cioè ϕ è compresa tra $-\pi/2$ e zero ($0 < \omega < \omega_0$, $-\pi/2 < \phi < 0$): la corrente è in anticipo sulla f.e.m. applicata. Se $\omega = \omega_0 \operatorname{tg}\phi = 0$, cioè la corrente è circa in fase con la f.e.m., essendolo esattamente se $\omega = \omega_0$. Se $\omega > \omega_0 \operatorname{tg}\phi$ è positiva, ϕ è compresa tra zero e $\pi/2$ ($\omega_0 < \omega < \infty$, $0 < \phi < \pi/2$) e la corrente è in ritardo rispetto alla f.e.m. applicata.

Data la struttura di (11.16) si vede che il denominatore ha un minimo, e quindi i_0 un massimo, per $\omega L = 1/\omega C$ ovvero $\omega^2 = 1/LC = \omega_0^2$. Il massimo è tanto più accentuato quanto più R è piccola. Numericamente nei tre casi $i_0 = 20 \cdot 10^{-3}$ A, $62.5 \cdot 10^{-3}$ A, $200 \cdot 10^{-3}$ A se $\omega = \omega_0$.

Osserviamo che (11.15) e (11.16) non cambierebbero se la f.e.m. e la corrente avessero le espressioni $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi)$ e $i = i_0 \sin \omega t$; se invece si volesse mettere in evidenza lo sfasamento della corrente rispetto alla f.e.m., scrivendo ad esempio $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ e $i = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, l'unico cambiamento sarebbe un segno negativo davanti al secondo membro della (11.15), come è ovvio.

Risonanza

Il risultato trovato nell'esempio 11.2 ha validità generale: la corrente nel circuito *RLC* è massima quando la pulsazione della f.e.m. applicata è eguale alla pulsazione propria del circuito; in tali condizioni lo sfasamento tra corrente e f.e.m. è nullo. Il fenomeno è detto *risonanza*: esso diventa sempre più accentuato al diminuire della resistenza del circuito.

In condizioni di risonanza

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}, i = i_0 \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad : \quad (11.17)$$

Risonanza

il circuito si comporta come se fosse *puramente resistivo* (si veda per questo anche il paragrafo 11.3).

Si definisce *larghezza della risonanza* la differenza tra i valori ω_2 e ω_1 , il primo maggiore e il secondo minore di ω_0 , in corrispondenza dei quali la corrente massima assume il valore $\mathcal{E}_0 / R \sqrt{2}$, ridotto di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al valore di risonanza. Imponendo

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

si vede che l'eguaglianza avviene per i valori di ω tali che $R^2 = (\omega L - 1/\omega C)^2$.

Da questa si ricava

$$\begin{aligned} \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} &= R \quad , \quad \omega_2^2 - \frac{R}{L} \omega_2 - \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad , \\ \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} &= -R \quad , \quad \omega_1^2 + \frac{R}{L} \omega_1 - \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad . \end{aligned}$$

Le soluzioni col segno meno davanti alla radice vanno scartate perché danno pulsazioni negative e in conclusione

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad , \quad \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad .$$

Notiamo che $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$: ω_0 cioè è il medio proporzionale di ω_1 e ω_2 ($\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2$; ω_1 e ω_2 non sono equidistanti da ω_0 , la curva di risonanza non è simmetrica). Notiamo anche come in corrispondenza a ω_1 e ω_2 sia rispettivamente $\operatorname{tg}\phi = -1$, $\phi = -45^\circ$ e $\operatorname{tg}\phi = +1$, $\phi = 45^\circ$.

La *larghezza della risonanza* risulta dunque

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad , \quad (11.18) \quad \text{Larghezza della risonanza}$$

dove la quantità

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

si chiama *fattore di merito della risonanza*: essa è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza, cioè quanto più piccola è la resistenza rispetto a $\omega_0 L$. Non è difficile raggiungere valori di Q dell'ordine di 100: ciò vuol dire ad esempio che con $\omega_0 = 10^6$ rad/s la risonanza è larga 10^4 rad/s.

Un circuito *RLC* con un alto fattore di merito è molto selettivo nella risposta: in esso circola una corrente notevole in pratica soltanto quando la pulsazione esterna ω coincide con quella propria ω_0 . Il fenomeno è molto utile per mettere in evidenza segnali deboli: esso è sfruttato nei *sintonizzatori* impiegati per la ricezione radiofonica e televisiva.

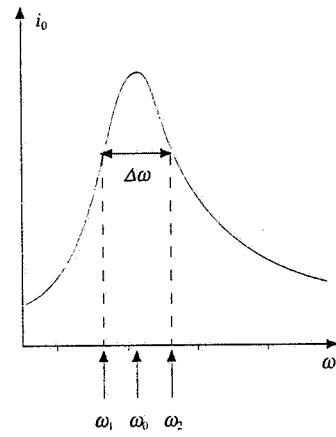


Figura 11.11

Fattore di merito
della risonanza

Con riferimento a quanto detto nel paragrafo 9.8 del primo volume per la risonanza in un oscillatore armonico forzato ad oscillare da una forza esterna sinusoidale, notiamo una differenza sostanziale: nell'oscillatore meccanico si ha risonanza solo se $\omega_0^2 > 2\gamma$, cioè con smorzamenti deboli, mentre nell'oscillatore elettrico *RLC* in serie si può sempre avere risonanza (più o meno pronunciata).

11.3 Circuiti in corrente alternata. Impedenza

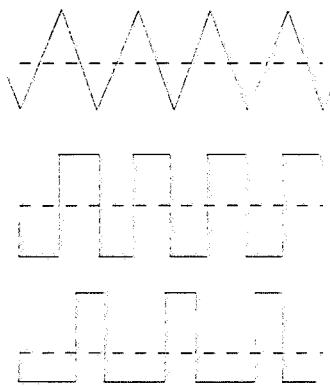


Figura 11.12

Una f.e.m. e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a $\sin \omega t$ o $\cos \omega t$ sono dette *alternate*. Per definizione si chiama *alternata* una grandezza *periodica* che ha *valor medio nullo in un periodo*; alcuni esempi sono mostrati in figura 11.12. Nell'uso comune il termine è riservato alle variazioni sinusoidali, che sono un caso particolare.

In questo paragrafo esaminiamo il comportamento in regime alternato sia dei singoli elementi di circuito (resistore, induttore, condensatore) che di alcune semplici combinazioni in *serie* e in *parallelo*; in particolare ritroveremo i risultati del paragrafo 11.2 relativi al circuito *RLC* in serie. Supponiamo sempre che le variazioni nel tempo siano sufficientemente lente così da poter considerare in ogni istante la corrente eguale in qualsiasi punto del circuito: detta *d* una dimensione tipica del circuito e *c* la velocità della luce, il periodo di oscillazione deve essere tale che $T = 2\pi/\omega \gg d/c$.

Resistore *R*

Applicando ai capi di un resistore una f.e.m. $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ si ha un passaggio di corrente in accordo con la legge di Ohm:

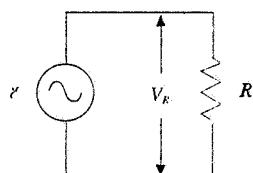


Figura 11.13

$$\varepsilon = R i \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$

La corrente è in fase con la f.e.m. e tra i valori massimi sussiste la relazione $i_0 = \varepsilon_0 / R$.

Nel caso di un resistore facente parte di un circuito più complesso e attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos \omega t$ possiamo dire che ai capi del resistore compare la tensione

$$V_R = R i = R i_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t$$

in fase con la corrente e che tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = R i_0$$

Osserviamo che il comportamento di un resistore in regime alternato non dipende dal valore della pulsazione ω .

Induttore *L*

L'equazione di un circuito contenente una f.e.m. alternata e un induttore con resistenza nulla è

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t$$

e quindi la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) :$$

il valore massimo è dato da $i_0 = \mathcal{E}_0 / \omega L$ e lo sfasamento vale $-\pi/2$ (corrente in quadratura e in ritardo rispetto alla f.e.m. ovvero f.e.m. in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente).

L'equazione del circuito, riscritta come $\mathcal{E} = L di/dt$, ci permette di affermare che ai capi dell'induttore percorso da corrente compare la tensione $V_L = L di/dt$, così come ai capi di un resistore compare V_R . Pertanto in un induttore inserito in un circuito generico e attraversato dalla corrente alternata $i = i_0 \cos \omega t$ si ha

$$V_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L i_0 \sin \omega t = \omega L i_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) :$$

la tensione V_L è in anticipo di $\pi/2$ sulla corrente e tra i valori massimi sussiste la relazione

$$V_0 = \omega L i_0$$

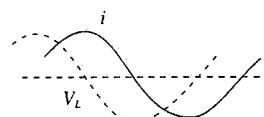
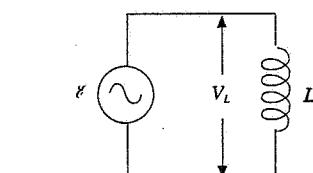


Figura 11.14

Reattanza dell'induttore

Il termine ωL si chiama *reattanza dell'induttore* e notiamo che, mentre lo sfasamento è indipendente da ω , la reattanza cresce linearmente con ω : il comportamento dell'induttore varia al variare della pulsazione.

Condensatore C

Ai capi di un condensatore carico c'è la tensione $V_C = q/C$ e l'equazione del circuito, in caso di connessione ad una f.e.m. alternata e supponendo nulla la resistenza complessiva, è

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C \mathcal{E} = C \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

La corrente vale

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\omega C \mathcal{E}_0 \sin \omega t = \omega C \mathcal{E}_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) :$$

essa è in anticipo di $\pi/2$ sulla f.e.m. applicata e il suo valore massimo è $i_0 = \omega C \mathcal{E}_0$. Pertanto, per un condensatore inserito in un circuito qualsiasi e attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos \omega t$, possiamo scrivere, dato che $i = C dV_C/dt$,

$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \sin \omega t = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = V_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) . \quad V_0 = \frac{i_0}{\omega C}$$

Il termine $1/\omega C$ è detto *reattanza del condensatore*. Anche ora notiamo che la relazione di fase tra i e V_C è indipendente dalla pulsazione, mentre ne dipende la relazione tra i valori massimi.

In conclusione, l'applicazione di una f.e.m. alternata provoca nei tre casi esami-

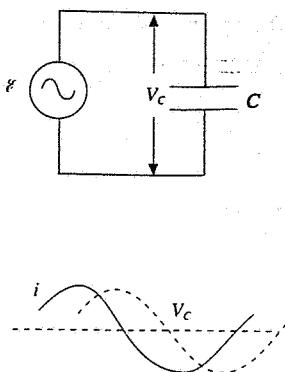


Figura 11.15

Serie RL

Applicando una f.e.m. alternata alla serie di un resistore e di un induttore abbiamo:

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_R = R i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad .$$

V_R e V_L sono rappresentati da due vettori rotanti, con \mathbf{V}_L che precede \mathbf{V}_R di $\pi/2$ come mostrato nella figura 11.16 (si assume che il verso di rotazione sia antiorario); in questa figura il vettore rotante che rappresenta la corrente è parallelo e concorde a \mathbf{V}_R . La somma $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L$, tensione ai capi della serie, è data dal vettore risultante \mathbf{V} , il cui modulo V_0 e la cui fase ϕ rispetto ad i sono espressi da

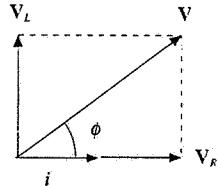


Figura 11.16

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad i_0 \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L}{R} \quad .$$

La proiezione $V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ è il risultato cercato. Tale tensione è in *anticipo di fase* sulla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. Lo sfasamento dipende dal rapporto $\omega L / R$ e tende a $\pi/2$ se $R \ll \omega L$ (circuito praticamente soltanto induttivo) oppure a zero se $R \gg \omega L$ (circuito praticamente soltanto resistivo); in corrispondenza V_0 tende rispettivamente a $\omega L i_0$ oppure a $R i_0$. Si noti che l'importanza relativa del termine ωL rispetto a R dipende dalla pulsazione e aumenta con questa. Fissati i valori di L e R , il comportamento del circuito passa da resistivo ($R \gg \omega L$) a induttivo ($R \ll \omega L$) al crescere di ω . Ad esempio, con $R = 10 \Omega$ e $L = 10^{-5} \text{ H}$, il termine induttivo è praticamente trascurabile fino a $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ (frequenza $v = \omega/2\pi \approx 1590 \text{ Hz}$).

Serie RC

Adottando la stessa costruzione, con \mathbf{V}_C che segue \mathbf{V}_R di $\pi/2$, si ha:

$$i = i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_R = R i_0 \cos \omega t \quad , \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad , \quad V_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad i_0 \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\omega C R} \quad .$$

La fase è negativa in quanto \mathbf{V} è sempre in ritardo rispetto a \mathbf{V}_R (vedi figura 11.17); la tensione dunque è in ritardo rispetto alla corrente e i valori massimi sono proporzionali tra loro. L'importanza relativa dei termini R e $1/\omega C$ dipende dalla pulsazione, oltre che dai valori di R e C . Fissati questi, $1/\omega C$ predomina al diminuire di ω (comportamento capacitivo), mentre al crescere di ω il comportamento tende a diventare resistivo. Con $R = 10 \Omega$ e $C = 10^{-6} F$, $1/\omega C$ diventa trascurabile rispetto a R per pulsazioni superiori a $\omega = 10^7$ rad/s.

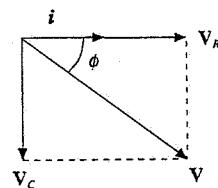


Figura 11.17

Serie LC

In questo caso abbiamo solo i vettori \mathbf{V}_L e \mathbf{V}_C , paralleli e discordi, entrambi ortogonali al vettore \mathbf{i} :

$$i = i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$\text{se } \omega L > \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad V_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) i_0 ;$$

$$\text{se } \omega L < \frac{1}{\omega C} \quad V = V_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad V_0 = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) i_0 .$$

A seconda della relazione tra ωL e $1/\omega C$, dipendente dalla pulsazione, il circuito si comporta come un induttore di induttanza L' tale che $\omega L' = \omega L - 1/\omega C$ ovvero $L' = L - 1/\omega^2 C$ o come un condensatore di capacità $C' = C/(1 - \omega^2 LC)$. Il comportamento induttivo si ha per $\omega > \omega_0$, quello capacitivo per $\omega < \omega_0$, con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Se $\omega = \omega_0$, cioè se $\omega L = 1/\omega C$, \mathbf{V}_L e \mathbf{V}_C sono eguali ed opposti per cui la tensione ai capi della serie LC è uguale a zero.

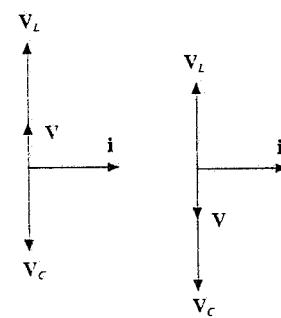


Figura 11.18

Serie RLC

Ridiscutiamo ora la serie RLC già trattata nel paragrafo 11.2. Abbiamo:

$$i = i_0 \cos \omega t, \quad V_R = R i_0 \cos \omega t, \quad V_L = \omega L i_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) ;$$

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad V_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} i_0, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Tali relazioni, ottenute con la costruzione di Fresnel relativa ai tre vettori \mathbf{V}_R , \mathbf{V}_L , \mathbf{V}_C , coincidono con (11.15) e (11.16).

Si vede come al crescere di ω il circuito passi dalla situazione in cui $1/\omega C$ è preponderante rispetto a ωL (comportamento capacitivo, $\phi < 0$, come se fosse una serie RC) a quella in cui ωL è preponderante rispetto a $1/\omega C$ (comportamento induttivo, $\phi > 0$, come se fosse una serie RL). La condizione di risonanza è quella in cui c'è la transizione da un regime all'altro: $\omega L = 1/\omega C$, $\phi = 0$, il comportamento è resistivo. Dallo studio della serie LC ricaviamo che ciò corrisponde all'annullarsi di due contributi opposti ($V_L = -V_C$).

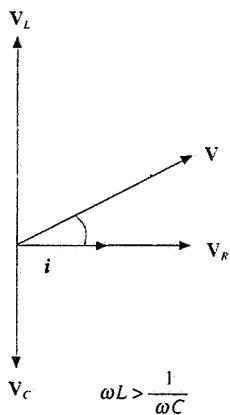
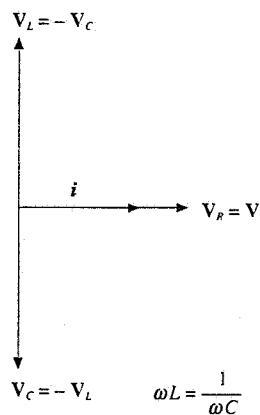
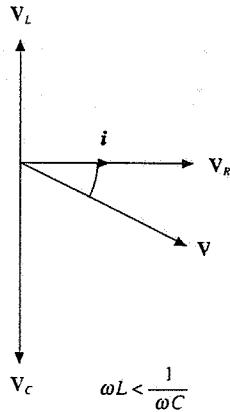
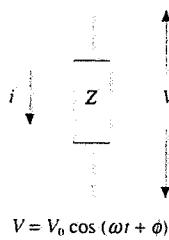


Figura 11.19



$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$i = i_0 \cos \omega t$$

$$V_0 = Z_0 i_0$$

Figura 11.20

Dato che in un circuito reale, anche se privo di resistori, sono sempre presenti le resistenze dei fili di collegamento e degli eventuali avvolgimenti che costituiscono gli induttori e che in un circuito soltanto resistivo esistono sempre una certa induttanza, dovuta all'autoflusso, e capacità parassite derivanti dalla vicinanza tra i vari conduttori, i circuiti RL , RC e RLC sono quelli più realistici. Gli elementi puri L , C e LC sono idealizzazioni alle quali tanto più ci si avvicina quanto più le reattanze ωL e $1/\omega C$ sono dominanti rispetto a R .

Tutti i risultati trovati possono essere riassunti nel modo seguente: quando attraverso uno o più elementi R , L , C in serie viene fatta passare una corrente alternata $i = i_0 \cos \omega t$, ad esempio perché si collega alla serie un generatore di f.e.m. alternata, la tensione ai capi della serie è

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Il valore massimo V_0 è legato al valore massimo i_0 della corrente dalla relazione di proporzionalità

$$V_0 = Z_0 i_0 \quad (11.19)$$

Sia il valore della grandezza Z_0 , detta *impedenza della serie*, che della fase ϕ dipendono dai parametri del circuito e dalla pulsazione ω .

La (11.19) stabilisce tra i valori massimi di tensione e corrente una relazione che è analoga alla legge di Ohm (6.26). Osserviamo che tali valori massimi non sono raggiunti nello stesso istante, in quanto V e i sono sfasate, e ripetiamo che l'impedenza non è una costante caratteristica del circuito in quanto dipende da ω . Per avere la relazione completa tra corrente e tensione occorre conoscere Z_0 e ϕ al dato valore di ω .

Nella tabella 11.1 sono riassunti i casi finora esaminati.

Tabella 11.1 Impedenza e sfasamento per elementi R , L , C in serie

Z_0	ϕ
R	0
L	$\pi/2$
C	$-\pi/2$
RL	$\arctg \omega L/R$
RC	$\arctg -1/\omega CR$
LC	$\pm \pi/2$
RLC	$\arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

Riepiloghiamo anche quanto trovato per l'andamento dell'impedenza in funzione della pulsazione. Solo in un resistore l'impedenza, che coincide con la resi-

stenza, è costante. In un induttore l'impedenza, che coincide con la reattanza, cresce monotonicamente con la pulsazione da zero (circuito in corrente continua) all'infinito: ciò è dovuto al fatto che la f.e.m. di autoinduzione, che si oppone alla variazione di corrente, è tanto più grande quanto più questa è rapida, essendo proporzionale a di/dt e quindi, in regime alternato, a ω . Di conseguenza, a parità di valore di f.e.m. applicata, nell'induttore passa una corrente che decresce al crescere della pulsazione.

In un condensatore l'impedenza, che di nuovo coincide con la reattanza, decrese monotonicamente al crescere di ω dal valore infinito assunto per $\omega = 0$ (corrente continua) a zero. Il passaggio della corrente variabile nel condensatore comporta una variazione di carica sulle armature e i valori massimi sono legati dalla (11.13), $V_0 = q_0/C = i_0/\omega C$: per avere una data i_0 , a bassa pulsazione deve avvenire un notevole spostamento di carica (grandi q_0 e V_0) mentre ad alta pulsazione lo stesso effetto si ottiene con un piccolo spostamento di carica (piccoli q_0 e V_0); ciò spiega il comportamento in funzione di ω del rapporto $V_0/i_0 = Z$. A parità di f.e.m. applicata la corrente nel condensatore aumenta al crescere della pulsazione.

Quando si mettono due elementi diversi in serie si ha un effetto combinato, con comportamento sempre induttivo o capacitivo. Solo nella serie RLC (e al limite nella serie LC) si ha risonanza e cambiamento del comportamento al variare della pulsazione.

Elementi in parallelo. Ammettenza

Considerazioni analoghe a quelle svolte per gli elementi in serie si possono fare per elementi in parallelo. La tensione $V = V_0 \cos \omega t$ è eguale per tutti i rami del parallelo, mentre nei singoli rami passano correnti in genere sfasate tra loro e rispetto alla tensione comune. Per ogni elemento R , L , C valgono le relazioni trovate in precedenza, anche se questa volta si somma sulle correnti per trovare la corrente totale assorbita dal parallelo; il metodo di somma è sempre quello di Fresnel.

Nel seguito trattiamo, in modo schematico, i tre possibili paralleli tra R , L , C e l'unico parallelo RLC .

Parallelo RL

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_L = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{R}{\omega L} \quad .$$

Nel complesso il comportamento è induttivo in quanto la corrente i è in ritardo rispetto alla tensione e l'impedenza

$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}} = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

cresce con ω , dal valore zero per $\omega = 0$ al valore R per $\omega = \infty$. Pertanto la corrente assorbita diminuisce al crescere di ω , come del resto si intuisce dal fatto che, nel parallelo, la reattanza ωL del ramo induttivo cresce con ω mentre la resistenza R non dipende da ω .

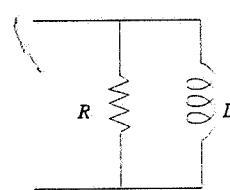


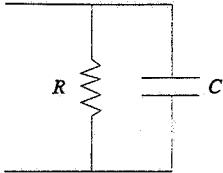
Figura 11.21

Parallelo RC

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_C = \omega C V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = \omega CR$$

La corrente è in *anticipo* sulla tensione e l'impedenza



$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

Figura 11.22

diminuisce al crescere di ω dal valore R per $\omega = 0$ al valore zero per $\omega = \infty$; la corrente assorbita cresce quindi con ω . Si può dire che il comportamento è capacitivo.

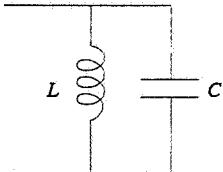
Parallelo LC

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i_C = \omega C V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_L + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{se } \omega L > \frac{1}{\omega C} \quad , \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } \omega L < \frac{1}{\omega C} \quad ,$$



$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = \frac{\omega L}{\omega^2 L C - 1}$$

Figura 11.23

Il comportamento è diverso a seconda che sia $\omega < \omega_0$ oppure $\omega > \omega_0$ con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Per $\omega = \omega_0$ l'impedenza diventa infinita e la corrente si annulla, essendo $i_L = -i_C$.

Parallelo RLC

$$V = V_0 \cos \omega t \quad , \quad i_R = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad , \quad i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i_C = \omega C V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad ,$$

$$i = i_R + i_L + i_C = i_0 \cos(\omega t + \psi) \quad , \quad i_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) , \quad Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}$$

Il circuito si comporta come un parallelo RC se $\omega C > 1/\omega L$ e come un parallelo RL se $\omega C < 1/\omega L$. Quando $\omega C = 1/\omega L$ il comportamento è resistivo, l'impedenza ha un massimo e la corrente un minimo: si parla di *antirisonanza* e lo stesso termine si può applicare all'analogia situazione del parallelo LC .

In ognuno dei casi esaminati la corrente totale assorbita dal parallelo è sfasata rispetto alla tensione ai capi del parallelo; si usa scrivere la relazione tra il valore massimo della corrente e il valore massimo della d.d.p. nella forma

$$i_0 = Y_0 V_0 , \quad (11.20)$$

definendo una nuova grandezza, l'*ammettenza* Y_0 . Dal confronto con (11.19) risulta

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} : \quad (11.21) \quad \text{Ammettenza}$$

l'ammettenza è l'inverso dell'impedenza. Naturalmente, come per l'impedenza, l'ammettenza dipende dai parametri del circuito e dalla pulsazione; lo stesso vale per l'angolo di sfasamento ψ .

Riassumiamo nella Tabella 11.2 le espressioni di Y_0 e ψ per i singoli elementi R, L, C e per i paralleli appena visti.

Tabella 11.2 Ammettenza e sfasamento per elementi R, L, C in parallelo

	Y_0	ψ
R	$1/R$	0
L	$1/\omega L$	$-\pi/2$
C	ωC	$\pi/2$
RL	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$	$\operatorname{arctg} -R/\omega L$
RC	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$	$\operatorname{arctg} \omega CR$
LC	$\omega C - \frac{1}{\omega L}$	$\mp \pi/2$
RLC	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$	$\operatorname{arctg} R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$

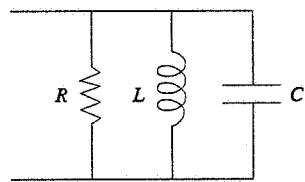


Figura 11.24

Conduttanza, suscettanza

L'inverso della resistenza si chiama *conduttanza* (paragrafo 6.5) e l'inverso della reattanza è detto *suscettanza*.

L'analisi condotta su circuiti semplici può essere estesa a configurazioni fatte da serie e paralleli degli elementi R , L , C e anche da strutture più complicate, non riconducibili immediatamente a serie e paralleli. Noi però tratteremo il problema generale (e anche quelli particolari già visti) con un formalismo differente, più potente in quanto permette di estendere ai circuiti in corrente alternata i principi di Kirchhoff e i metodi di risoluzione che da essi derivano, esposti nel paragrafo 6.10 per i circuiti resistivi in corrente continua.

11.4 Metodo simbolico per i circuiti in corrente alternata

Ripetiamo ancora una volta il risultato più importante che abbiamo ottenuto in questo capitolo: quando ad un elemento R , L , C o ad una serie o parallelo di tali elementi si applica una f.e.m. alternata, la corrente assorbita dal circuito è alternata, con la stessa pulsazione della f.e.m. applicata. Tra le due grandezze non c'è una relazione di linearità, in quanto esse risultano sfasate; la linearità sussiste tra i valori massimi. Abbiamo

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi), \quad i = i_0 \cos \omega t, \quad \mathcal{E}_0 = Z_0 i_0.$$

L'effetto dell'elemento attraversato dalla corrente è espresso dall'impedenza Z_0 e dallo sfasamento ϕ . Negli elementi singoli si è trovato:

$$\begin{array}{lll} R & Z_0 = R & \phi = 0 \\ L & Z_0 = \omega L & \phi = \pi/2 \\ C & Z_0 = 1/\omega C & \phi = -\pi/2 \end{array}.$$

In un circuito composto da più elementi l'effetto complessivo è dato da una $Z_0(\omega)$ e da una $\phi(\omega)$. Invece che dell'impedenza ci si può servire dell'ammittenza $Y_0 = 1/Z_0$ e dello sfasamento ψ della corrente rispetto alla d.d.p. che è ovviamente eguale a $-\phi$.

Osserviamo adesso, ritornando all'equazione (11.14), che se scrivessimo la f.e.m. applicata come $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$, l'equazione avrebbe l'aspetto

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i(\omega t + \phi)}$$

e una soluzione particolare sarebbe $I = I_0 e^{i\omega t}$ (nel resto del capitolo indicheremo la corrente con la lettera maiuscola I per evitare confusione con l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$). Infatti, sostituendo questa espressione nell'equazione si trova

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_0 e^{i\omega t} + \frac{R}{L} i \omega I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0}{LC} e^{i\omega t} &= i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i(\omega t + \phi)} \\ \Rightarrow -\omega^2 I_0 + \frac{R}{L} i \omega I_0 + \frac{I_0}{LC} &= i \omega \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Utilizzando la *formula di Eulero*

Formula di Eulero

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (11.22)$$

l'eguaglianza assume la forma $a + i b = c + i d$ e imponendo $a = c$, $b = d$ si trovano le relazioni (11.15) e (11.16).

Pertanto, quando si considera una f.e.m. complessa $\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)}$ l'equazione del circuito ammette come soluzione una corrente complessa $I_0 e^{i\omega t}$. Per la formula di Eulero (11.22)

$$\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \phi)} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi) + i \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi),$$

$$I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos \omega t + i I_0 \sin \omega t;$$

d'altra parte già sappiamo che quando la f.e.m. applicata è $E_0 \cos(\omega t + \phi)$ la soluzione è $I_0 \cos(\omega t + \phi)$. Concludiamo quindi che, trovata la soluzione complessa corrispondente alla data sollecitazione complessa, la parte reale della soluzione complessa è a sua volta una soluzione, corrispondente alla parte reale della sollecitazione (e un risultato analogo vale per la parte immaginaria).

Una proprietà fondamentale delle grandezze complesse è la seguente: scritta la f.e.m. complessa come

$$\mathcal{E} = E_0 e^{i(\omega t + \phi)} = E_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

e sostituendo a \mathcal{E}_0 , in accordo con quanto trovato nel paragrafo 11.3, la quantità

$$Z_0 I_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} I_0$$

si ha

$$\mathcal{E} = Z_0 e^{i\phi} I_0 e^{i\omega t} = Z I \quad ; \quad (11.23) \quad \text{Impedenza complessa}$$

le grandezze complesse \mathcal{E} e I sono tra loro proporzionali. Il coefficiente di proporzionalità Z è detto *impedenza complessa* del circuito.

In definitiva, per il circuito in esame, che è la serie *RLC*, abbiamo questi risultati: se rappresentiamo le grandezze alternate f.e.m. e corrente con numeri complessi, aventi modulo eguale al valore massimo e fase eguale alla fase della corrispondente grandezza alternata (così che f.e.m. e corrente sono le parti reali di questi numeri complessi), la relazione tra la f.e.m. complessa e la corrente complessa è lineare. Il coefficiente di proporzionalità (impedenza complessa) riassume in sè l'effetto del circuito: infatti il suo modulo dà il rapporto tra i valori massimi di f.e.m. e corrente e la sua fase dà lo sfasamento introdotto dal circuito tra f.e.m. e corrente reali.

Relazioni analoghe alla (11.23) si possono stabilire per i singoli elementi R , L , C . Il caso del resistore è il più semplice: esso non introduce sfasamento, per cui l'impedenza ha solo la parte reale, eguale a R , e abbiamo $V_R = Z I = R I$.

In un induttore, posto $I = I_0 e^{i\omega t}$,

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i \omega L I_0 e^{i\omega t} = i \omega L I, \quad Z = i \omega L = \omega L e^{i\pi/2} \quad ;$$

l'impedenza complessa di un induttore è immaginaria pura.

In un condensatore, posto $V_C = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$,

$$I = I_0 e^{i\omega t} = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = i \omega C V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = i \omega C V.$$

$$Z = \frac{1}{i \omega C} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \quad ;$$

anche l'impedenza complessa di un condensatore è immaginaria pura.

Riassumendo, per ciascun elemento R , L , C vale la relazione $V = Z I$ tra tensione complessa e corrente complessa e i valori dell'impedenza complessa sono:

$$R \quad Z = R \quad Z_0 = R \quad \phi = 0 \quad (11.24)$$

$$L \quad Z = i \omega L = \omega L e^{i\pi/2} \quad Z_0 = \omega L \quad \phi = \pi/2 \quad (11.25)$$

$$C \quad Z = \frac{1}{i \omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \quad Z_0 = \frac{1}{\omega C} \quad \phi = -\pi/2 \quad (11.26)$$

Se confrontiamo con lo schema dato all'inizio del paragrafo troviamo conferma che l'impedenza complessa riassume nel suo modulo e nella sua fase l'effetto dell'elemento R , L o C .

L'aver stabilito una relazione lineare tra tensione e corrente (complesse) anche per un induttore e per un condensatore permette di estendere i risultati trovati nel capitolo 6 per le serie e i paralleli di resistenze alle serie e ai paralleli di impedenze: quando gli elementi sono in serie l'impedenza totale è la somma delle singole impedenze, quando sono in parallelo l'inverso dell'impedenza totale è la somma degli inversi delle singole impedenze. Introducendo l'ammettenza complessa

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0} e^{-i\phi} = Y_0 e^{-i\phi} \quad ,$$

abbiamo che per elementi in parallelo l'ammettenza totale è la somma delle ammettenze mentre per elementi in serie si sommano gli inversi delle ammettenze.

Più in generale pure i principi di Kirchhoff (paragrafo 6.10) e i metodi di soluzione da essi derivati, come il metodo delle maglie, validi per reti resistive in regime continuo, possono essere estesi a reti comunque complicate di elementi R , L , C (reti lineari) in regime alternato. A calcolo concluso si hanno le correnti e le tensioni in ciascun elemento e, a questo punto, basta prendere le parti reali per avere i valori effettivi.

Tale tipo di trattazione, che formalmente generalizza la legge di Ohm nel campo complesso, è detto *metodo simbolico*.

Esempio 11.3

Calcolare le impedenze e le ammettenze complesse delle serie RL , RC , LC , RLC e dei corrispondenti paralleli.

Soluzione

Per la serie RL ricorriamo a (11.24) e (11.25):

$$Z = Z_R + Z_L = R + i\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{i\phi} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \phi = \omega L / R \quad ;$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-i\phi} \quad .$$

Negli altri casi utilizziamo anche (11.26):

$$Z = Z_R + Z_C = R - \frac{i}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{i\phi} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\omega C R}$$

$$Z = Z_L + Z_C = i\omega L - \frac{i}{\omega C} = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) e^{i\pi/2}$$

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{i\phi} \quad .$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad .$$

Si noti come si ritrovino molto rapidamente tutti i risultati del paragrafo 11.3, tabella 11.1. Le ammettenze si calcolano tramite (11.27), come abbiamo fatto esplicitamente per la serie RL : il modulo è l'inverso del modulo dell'impedenza, la fase è opposta. Per i casi in parallelo abbiamo:

$$Y = Y_R + Y_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} e^{i\psi} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega L R} e^{i\psi} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{R}{\omega L} \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-i\psi} \quad ;$$

$$Y = Y_R + Y_C = \frac{1}{R} + i \omega C = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} e^{i\psi} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}{R} e^{i\psi}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \omega C R \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{-i\psi} \quad ;$$

$$Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) e^{i\pi/2}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = -\frac{i\omega L}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} e^{-i\pi/2} \quad ;$$

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} e^{i\psi} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \psi = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) R \quad , \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega L R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2 (\omega^2 L C - 1)^2}} e^{-i\psi} \quad .$$

Di nuovo possiamo dire che i risultati del paragrafo 11.3 (Tabella 11.2) sono stati ottenuti in modo semplice e rapido.

L'impedenza totale di un generico circuito ha sempre una parte reale Z_r e una parte immaginaria Z_i , che viene chiamata *reattanza* e indicata di norma con la lettera X :

$$Z = Z_0 e^{i\phi} = Z_r + iX \quad , \quad Z_0 = \sqrt{Z_r^2 + X^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{X}{Z_r} \quad .$$

Sia Z , che X sono in generale funzioni della pulsazione. Analogamente per l'ammettenza dello stesso circuito si scrive

$$Y = Y_0 e^{-i\phi} = G + iB \quad , \quad Y_0 = \sqrt{G^2 + B^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{G} \quad ,$$

e sia la parte reale G , detta conduttanza, che la parte immaginaria B , detta suscettanza, sono funzioni della pulsazione. Servendosi della relazione $Z_r + iX = 1/(G + iB)$ è immediato ricavare le espressioni di G e B in funzione di Z_r e X e viceversa.

Esempio 11.4

Calcolare per il circuito in figura, a cui è applicata la f.e.m. $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$, con $\varepsilon_0 = 10$ V e $\omega = 500$ rad/s, il valore della corrente nei singoli rami e quello della corrente totale. Si ponga $R = 8 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $L = 1.6 \cdot 10^{-2}$ H.

Soluzione

L'impedenza del ramo RC è

$$Z_1 = R - \frac{i}{\omega C} = 8 - i 20 = 21.541 e^{i\phi_1} \quad ,$$

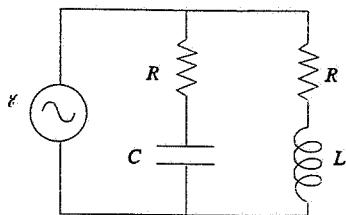


Figura 11.25

$$\operatorname{tg} \phi_1 = -2.5, \quad \phi_1 = -68.2^\circ.$$

Al ramo è applicata la f.e.m. $10 e^{i\omega t}$ e in esso circola la corrente

$$I_1 = \frac{10 e^{i\omega t}}{21.541 e^{i\phi_1}} = 0.464 e^{i(\omega t - \phi_1)},$$

la cui parte reale è $0.464 \cos(500t + 68.2^\circ)$ A.

Nel ramo RL l'impedenza è

$$Z_2 = R + i\omega L = 8 + i8 = 11.314 e^{i\phi_2}, \quad \operatorname{tg} \phi_2 = 1, \quad \phi_2 = 45^\circ,$$

e la corrente vale

$$I_2 = \frac{10 e^{i\omega t}}{11.314 e^{i\phi_2}} = 0.884 e^{i(\omega t - \phi_2)},$$

con parte reale $0.884 \cos(500t - 45^\circ)$ A.

L'impedenza totale del circuito è

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = 12.186 e^{i13.7^\circ}$$

e la corrente totale assorbita dal circuito è

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{10 e^{i\omega t}}{12.186 e^{i13.7^\circ}} = 0.821 e^{i(\omega t - 13.7^\circ)}.$$

La parte reale vale $0.821 \cos(500t - 13.7^\circ)$ A: la corrente effettiva risulta quindi sfasata in ritardo rispetto alla f.e.m. applicata. L'impedenza reale equivalentemente del circuito è 12.186Ω .

Alternativamente si poteva calcolare l'ammettenza totale come somma delle ammettenze Y_1, Y_2 e ottenere la corrente I come YE (mentre $I_1 = Y_1 E$ e $I_2 = Y_2 E$).

Si verifichi che quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale e vale $\frac{1}{2} \left(R + \frac{L}{RC} \right) = 14 \Omega$.

Nota. Richiamo sui numeri complessi

Un numero complesso può essere rappresentato nelle due maniere, cartesiana e polare:

$$z = x + iy = \rho e^{i\phi} = \rho \cos \phi + i \rho \sin \phi;$$

x e iy sono la parte reale e la parte immaginaria, ρ il modulo e ϕ la fase. Si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x}, \quad x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi.$$

Il complesso coniugato di z è

$$z^* = x - iy = \rho e^{-i\phi}$$

e sussiste la proprietà

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

L'inverso di un numero complesso è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho e^{i\phi}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\phi}$$

il modulo dell'inverso $1/z$ è l'inverso del modulo di z e la fase dell'inverso $1/z$ è l'opposto della fase di z .

Alcune utili relazioni di cui ci siamo serviti nel corso del paragrafo, sono $1/i = -i$ e $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$, ricavate rispettivamente dalla definizione $i^2 = -1$ e dalla formula di Eulero (11.22).

La grandezza complessa funzione del tempo

$$\rho e^{i\omega t} = \rho \cos \omega t + i\rho \sin \omega t$$

è rappresentata, nel piano (x, iy) della figura 11.26, da un punto che al passare del tempo descrive in senso antiorario una circonferenza di raggio ρ , con moto uniforme; le proiezioni sugli assi, che danno parte reale e parte immaginaria, descrivendo due moti armòniici.

È evidente il legame con la costruzione di Fresnel dei vettori rotanti. Nel caso più elementare della somma di due grandezze sinusoidali sfasate, come possono essere le tensioni ai capi di due elementi in serie o le correnti in due elementi in parallelo, è chiaro che la somma di due vettori sfasati porta allo stesso risultato della somma di due numeri complessi.

Però il metodo simbolico è più potente in quanto, stabilendo una relazione lineare tra tensione e corrente sinusoidali complesse, cosa impossibile nel campo reale, permette di riprendere i metodi più generali di soluzione delle reti lineari, come abbiamo già osservato.

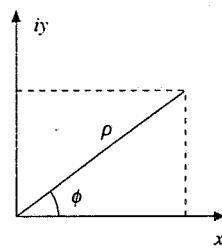


Figura 11.26

11.5 Alcune applicazioni

Consideriamo in questo paragrafo alcuni esempi relativi ad applicazioni pratiche molto comuni. Per risolvere i circuiti utilizziamo il metodo simbolico esposto nel paragrafo 11.4.

Trasformatore

Riprendiamo le equazioni (10.42) del paragrafo 10.8 e la relativa figura 10.37. Introduciamo le grandezze complesse

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}, \quad I_1 = I_{0,1} e^{i(\omega t + \theta_1)}, \quad I_2 = I_{0,2} e^{i(\omega t + \theta_2)},$$

e riscriviamo così le (10.42):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= R_1 I_1 + i \omega L_1 I_1 + i \omega M I_2 & (R_1 + i \omega L_1) I_1 + i \omega M I_2 &= \mathcal{E} \\ 0 &= R_2 I_2 + i \omega L_2 I_2 + i \omega M I_1 & \Rightarrow & i \omega M I_1 + (R_2 + i \omega L_2) I_2 &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è

$$I_1 = \frac{(R_2 + i \omega L_2) \mathcal{E}}{(R_1 + i \omega L_1)(R_2 + i \omega L_2) + \omega^2 M^2}, \quad I_2 = \frac{-i \omega M \mathcal{E}}{(R_1 + i \omega L_1)(R_2 + i \omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

Entrambe le correnti possono essere ricondotte alla forma $I_0 e^{i(\omega t + \theta)}$ e si determinano così i valori massimi delle correnti e il loro sfasamento rispetto alla f.e.m. del generatore.

Esaminiamo in particolare il caso in cui R_1 sia trascurabile rispetto a ωL_1 ; inoltre supponiamo che l'induttore L_1 sia costituito da N_1 spire avvolte su un nucleo di ferro di sezione Σ e lungo d , che analogamente l'induttore L_2 abbia N_2 spire avvolte sullo stesso nucleo e che si

possano utilizzare le espressioni degli esempi 8.9 e 8.11 con μ al posto di μ_0 :

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2}{d} \Sigma, \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2}{d} \Sigma, \quad M = \mu \frac{N_1 N_2}{d} \Sigma = \sqrt{L_1 L_2}$$

Le correnti nel circuito primario e secondario diventano

$$I_1 = \frac{R_2 + i \omega L_2}{i \omega L_1 R_2} \varepsilon = \frac{\omega L_2 - i R_2}{\omega L_1 R_2} \varepsilon, \quad I_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \varepsilon = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\varepsilon}{R_2}$$

I_1 è in ritardo di fase rispetto a ε , con $\operatorname{tg} \phi = -R_2 / \omega L_2$, I_2 è in opposizione di fase rispetto a ε (risultato che dipende dal segno di M : con M negativo I_2 risulta in fase rispetto a ε). Ai capi di R_2 c'è la tensione

$$V_2 = R_2 I_2 = -\frac{N_2}{N_1} \varepsilon \Rightarrow \frac{V_2}{\varepsilon} = -\frac{N_2}{N_1} \quad ;$$

ne segue che il rapporto tra i moduli di V_2 e ε dipende dal rapporto tra il numero di spire del secondario e del primario, mentre V_2 è in opposizione di fase rispetto a ε (o in fase se $M < 0$).

Il rapporto tra le correnti vale, qualunque sia il valore di R_1 ,

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i \omega M}{R_2 + i \omega L_2} = -\frac{\omega M (\omega L_2 + i R_2)}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \quad ;$$

quanto più R_2 è piccolo rispetto a ωL_2 , tanto più I_2 / I_1 tende a $-M / L_2 = -N_1 / N_2$.

Esempio 11.5

Nel circuito con trasformatore mostrato in figura 11.27 $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$, $\varepsilon_0 = 312.6$ V, $\omega = 314.2$ rad/s, $L_1 = 10^{-1}$ H, $L_2 = 10^{-3}$ H, $M = \sqrt{L_1 L_2} = 10^{-2}$ H, $R_2 = 1 \Omega$. Calcolare i valori delle correnti e della tensione ai capi di R_2 .

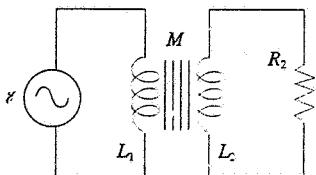


Figura 11.27

Soluzione

La corrente nel circuito primario vale

$$I_1 = \frac{\omega L_2 - i R_2}{i \omega L_1 R_2} \varepsilon = 3.33 \cdot 10^{-2} e^{-i 72.6^\circ} \cdot 312.6 e^{i \omega t} = 10.41 e^{i(\omega t - 72.6^\circ)},$$

quella nel circuito secondario è

$$I_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} \varepsilon = 31.26 e^{i(\omega t - 180^\circ)}.$$

Le parti reali sono, rispettivamente,

$$10.41 \cos(\omega t - 72.6^\circ) \text{ A}, \quad 31.26 \cos(\omega t - 180^\circ) = -31.26 \cos \omega t \text{ A}.$$

Ai capi di R_2 c'è la tensione

$$V_2 = R_2 I_2 = 31.26 e^{i(\omega t - 180^\circ)} \Rightarrow \frac{V_2}{\varepsilon} = -\frac{1}{10}.$$

La parte reale di V_2 è $-31.26 \cos \omega t$ V; il valore del rapporto V_2 / ε mostra che tra numero di spire N_1 nel circuito primario e numero di spire N_2 nel circuito secondario c'è la relazione $N_1 = 10 N_2$.

L'uso di un trasformatore collegato ad un generatore nel circuito primario permette in sostanza di disporre nel circuito secondario di una f.e.m. con valore variabile entro larghi limiti, avente la stessa pulsazione di quella primaria e fase in generale diversa. Si noti che il riferimento di terra nei due circuiti può essere diverso, in quanto essi non sono collegati condutivamente; ad esempio, mentre la f.e.m. del primario oscilla intorno a zero, nel secondario può oscillare rispetto ad un valore V_0 , positivo o negativo. In tal caso la d.d.p. media tra le spire N_1 e le spire N_2 non è zero, ma è V_0 ed è necessario un adeguato isolamento.

Ponte capacitivo

Un circuito come quello indicato nella figura 11.28 è detto *ponte*, anche se più esattamente tale nome andrebbe riservato al ramo BC . Quando in tale ramo non passa corrente vuol dire che i punti B e C sono equipotenziali e che attraverso Z_1 e Z_3 passa la stessa corrente I_1 e analogamente attraverso Z_2 e Z_4 passa la stessa corrente I_2 . In formule

$$V_{AB} = V_{AC} \Rightarrow Z_1 I_1 = Z_2 I_2 , \quad V_{BD} = V_{CD} \Rightarrow Z_3 I_1 = Z_4 I_2 ;$$

dividendo membro a membro,

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4} \Rightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 .$$

Tale condizione tra le impedenze è detta la *condizione di equilibrio del ponte*; si noti che si tratta di una generalizzazione di quanto visto per il ponte di Wheatstone nel paragrafo 6.11.

Questi circuiti sono usati per misurare un'impedenza, note le altre tre. Un esempio semplice è mostrato in figura 11.29: il valore della capacità C_4 incognita si ricava da

$$R_1 \frac{1}{i \omega C_4} = R_3 \frac{1}{i \omega C_2} \Rightarrow C_4 = \frac{R_1 C_2}{R_3}$$

L'equilibrio si raggiunge facendo variare una delle resistenze e si verifica osservando il misuratore di corrente inserito nel ponte. In modo analogo si realizza un ponte induttivo. Nel caso più generale la condizione di equilibrio si traduce in due equazioni, una relativa all'egualanza delle parti reali dei due membri e l'altra relativa all'egualanza delle parti immaginarie.

Linea di trasmissione, cavo coassiale

Consideriamo un circuito indefinito, costituito da induttori e condensatori, collegati come in figura 11.30. Nella figura 11.31 è mostrata quella che possiamo considerare la cella

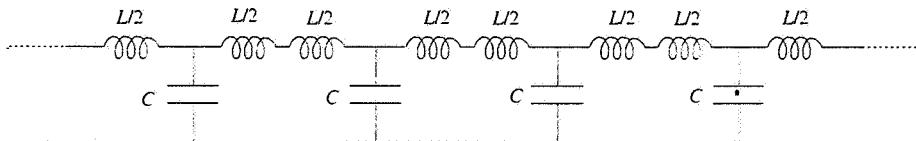


Figura 11.30

di base, ripetuta infinite volte. Detta Z l'impedenza complessa, essa non cambia se si aggiunge una celletta, appunto perché il circuito è indefinito. Simbolicamente indichiamo questo fatto col seguente disegno:

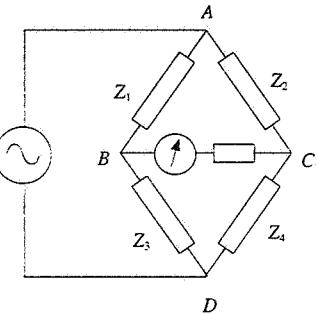


Figura 11.28

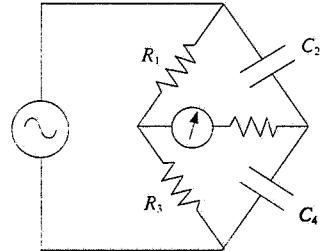


Figura 11.29

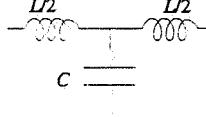


Figura 11.31

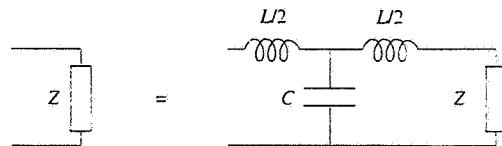


Figura 11.32

Utilizzando le espressioni per impedenze in serie e in parallelo si ha:

$$Z = i \omega \frac{L}{2} + \frac{\frac{-i}{\omega C} \left(i \omega \frac{L}{2} + Z \right)}{-\frac{i}{\omega C} + i \omega \frac{L}{2} + Z} \Rightarrow Z^2 = \frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}$$

Il quadrato dell'impedenza è dunque un numero reale e sono possibili due soluzioni, a seconda del valore della pulsazione:

a) $\omega^2 < \frac{4}{LC}$, $Z^2 > 0$, l'impedenza Z è reale

b) $\omega^2 > \frac{4}{LC}$, $Z^2 < 0$, l'impedenza Z è immaginaria pura.

Se la pulsazione è inferiore al cosiddetto *valore di taglio*,

Pulsazione di taglio

$$\omega_t = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

la rete della figura 11.30 si comporta cioè come un resistore, di valore

$$Z_1 = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{4}{LC} - \omega^2}$$

per $\omega = \omega_t$, l'impedenza è nulla e per $\omega > \omega_t$, il comportamento è come quello di un'induttanza di valore

$$Z_2 = i \frac{L}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{4}{LC}}$$

Tra le due situazioni esiste un'altra differenza sostanziale che ora evidenziamo. Applichiamo alla rete un generatore: tra i punti A e B fluisce la corrente I e la tensione vale

$$V_A - V_B = \left(i \omega \frac{L}{2} + i \omega \frac{L}{2} \right) I = i \omega L I$$

Inoltre, siccome da A verso destra si vede l'impedenza $i \omega L/2$ in serie all'impedenza Z , cioè l'impedenza $Z + i \omega L/2$, abbiamo

$$V_A = \left(Z + i \omega \frac{L}{2} \right) I \quad , \quad I = \frac{V_A}{Z + i \omega \frac{L}{2}} \quad , \quad V_A - V_B = \frac{i \omega L V_A}{Z + i \omega \frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = 1 - \frac{i \omega L}{Z + i \omega \frac{L}{2}} = \frac{Z - i \omega \frac{L}{2}}{Z + i \omega \frac{L}{2}}$$

Se Z è reale il rapporto V_B/V_A , che è lo stesso per qualsiasi coppia di punti come A e B , cioè è lo stesso lungo la rete, è un numero complesso rapporto di due numeri complessi coniugati: il suo modulo è 1, la sua fase è 2ϕ , dove ϕ è tale che $\operatorname{tg}\phi = -\omega L/2Z$. In tutti i punti $A, B, C, D \dots$ della rete è lo stesso, ma da un punto all'altro c'è uno sfasamento costante 2ϕ : la rete non introduce attenuazione, ma solo sfasamento.

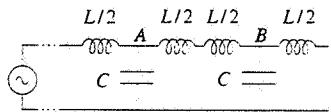


Figura 11.33

Se invece Z è immaginaria pura, cioè $Z = iX$, V_B/V_A è un numero reale, pari a $(X - \omega L/2)/(X + \omega L/2)$, e quindi è minore di 1: nella rete c'è attenuazione; inoltre V_B è in fase o in opposizione di fase rispetto a V_A a seconda del segno positivo o negativo di V_B/V_A .

Abbiamo pertanto che se $\omega < \omega_0$, ai capi di tutti i condensatori della rete si ritrova in istanti diversi la stessa V diversa da zero, mentre se $\omega > \omega_0$, la rete è in pratica scarica: dopo un certo numero di celle non c'è d.d.p. ai capi dei condensatori.

Dato che la rete ha un'impedenza Z definitiva, nella pratica non c'è bisogno che essa sia indefinita; essa può essere interrotta alla fine di qualsiasi cella e chiusa su un'impedenza Z : il comportamento è lo stesso, come indicato in figura 11.32. Z è detta *impedenza caratteristica della rete*.

L'induttanza e la capacità della rete sono concentrate negli elementi L e C ; abbiamo studiato un diverso sistema fisico, il *cavo coassiale* (esempio 10.5), in cui invece *l'induttanza e la capacità sono distribuite*. Per unità di lunghezza si ha, in accordo con (10.33) e (4.18),

$$L_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad C_x = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La capacità è distribuita in parallelo, tra il conduttore interno e quello esterno, mentre l'induttanza è distribuita in serie; in un tratto Δx abbiamo l'induttanza $L_x \Delta x$ e la capacità $C_x \Delta x$ per cui l'impedenza caratteristica è

$$Z = \sqrt{\frac{L_x \Delta x}{C_x \Delta x} - \frac{\omega^2 (L_x \Delta x)^2}{4}}$$

Passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ si ottiene l'*impedenza caratteristica del cavo coassiale*,

$$Z = \sqrt{\frac{L_x}{C_x}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \approx 60 \ln \frac{R_2}{R_1} \Omega$$

La pulsazione di taglio, per $\Delta x \rightarrow 0$, è

$$\omega_t = \frac{2}{\sqrt{L_x C_x (\Delta_x)^2}} = \infty$$

L'impedenza del cavo coassiale è quindi reale per ogni pulsazione, come del resto si è appena trovato, e il cavo non introduce attenuazione (almeno nel caso ideale di conduttori con resistenza nulla).

Le reti che stiamo esaminando, per $\omega < \omega_0$, assorbono potenza con continuità dal generatore, in quanto si comportano come una resistenza: questa potenza, non essendoci attenuazione, può servire solo a caricare gli induttori e i condensatori lungo la rete e così siamo portati all'idea che ci sia *propagazione di energia lungo la rete*. Se invece $\omega > \omega_0$ (cosa che però non può succedere nel cavo coassiale) Z è immaginaria pura e non c'è assorbimento di potenza: infatti c'è attenuazione, la rete è scarica, l'energia non si propaga. Per tali ragioni, e più propriamente quando Z è reale, queste reti sono chiamate *linee di trasmissione*, a costanti concentrate o a costanti distribuite.

L'esistenza di un fenomeno di propagazione si prova facilmente. Con riferimento al cavo coassiale, e ritornando alle notazioni usate in precedenza, la variazione di tensione lungo un tratto dx di cavo, dovuta all'autoinduzione, è

$$dV = L_x dx \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = L_x \frac{di}{dt}$$

La corrente di carica del conduttore di capacità $C_x dx$ è

$$di = \frac{d}{dt} (dq) = \frac{d}{dt} (C_x dx V) = C_x dx \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dx} = C_x \frac{dV}{dt}$$

Impedenza caratteristica della rete

Cavo coassiale

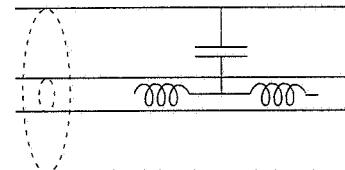


Figura 11.34

Impedenza caratteristica del cavo assiale

Linee di trasmissione

Pertanto

$$\frac{d^2V}{dx^2} = L_x \frac{d^2i}{dx dt} = L_x \frac{d}{dt} \frac{di}{dx} = L_x C_x \frac{d^2V}{dt^2}$$

Analogamente si trova

$$\frac{d^2i}{dx^2} = L_x C_x \frac{d^2i}{dt^2}$$

Quindi sia la tensione tra i conduttori che la corrente lungo i conduttori obbediscono all'*equazione delle onde piane*, che abbiamo visto nel capitolo 9 del primo volume e riprenderemo nel capitolo 12. La velocità di propagazione è

Velocità di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

cioè eguale alla velocità della luce nel vuoto. Troviamo qui per la prima volta che *una perturbazione elettromagnetica si propaga con la velocità della luce*. Se lo spazio tra i conduttori è riempito da un mezzo con costante dielettrica $\kappa = \kappa \epsilon_0$ (e permeabilità magnetica praticamente eguale a μ_0), la velocità è

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_x \kappa C_x}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} < c$$

In un comune cavo coassiale $v \approx 2 \cdot 10^8$ m/s e $Z = 50 \Omega$. Ciò vuol dire che $\kappa \approx 2.25$ e $R_2/R_1 \approx 3.5$.

La corrente i e la tensione V , in quanto soluzioni dell'equazione delle onde, sono funzioni della posizione e del tempo, $i(x, t)$ e $V(x, t)$. Ad un dato istante la corrente lungo i conduttori e la d.d.p. tra i conduttori non sono le stesse in tutti i punti del cavo.

11.6 Potenza in regime alternato

L'applicazione di una f.e.m. alternata ad una rete lineare provoca il passaggio di una corrente alternata e l'erogazione di una potenza il cui valore istantaneo è dato dal prodotto $\mathcal{E}(t) i(t)$. Con i metodi descritti nei paragrafi precedenti siamo in grado di calcolare la $i(t)$ per una data $\mathcal{E}(t)$ e quindi la potenza.

Riferendoci ad un generico circuito o ad una qualsiasi sua parte e chiamando $V(t)$ la tensione ai capi quando la corrente vale $i(t)$ e ϕ lo sfasamento tra le due grandezze, abbiamo

$$\begin{aligned} P(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi) i_0 \cos \omega t = V_0 i_0 (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \cos \omega t = \\ &= V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t - V_0 i_0 \sin \phi \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= V_0 i_0 \cos \phi \cos^2 \omega t - V_0 i_0 \sin \phi \frac{1}{2} \sin 2\omega t \end{aligned}$$

Il valore medio in un periodo è

$$P = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \phi \quad , \quad (11.29)$$

in quanto il valore medio di $\cos^2 \omega t$ è $1/2$ (vedi paragrafo 9.3 del primo volume), mentre il valore medio di $\sin 2\omega t$ è zero.

Come fatto nell'esempio 10.3, relazione (10.18), introduciamo il *valore efficace* di una grandezza alternata, pari al valore massimo diviso per $\sqrt{2}$,

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad , \quad i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \quad ,$$