
Corrado Mencuccini
Vittorio Silvestrini

ESERCIZI DI FISICA

MECCANICA E TERMODINAMICA

interamente svolti



CASA EDITRICE AMBROSIANA

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con l'esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941, n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati SIAE o con altre modalità indicate da SIAE.

Per le riproduzioni ad uso non personale (per esempio: professionale, economico, commerciale, strumenti di studio collettivi come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste vanno inoltrate a:

CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali
Corso di Porta Romana 108
20122 Milano
e-mail: autorizzazioni@clearedi.org e sito web: www.clearedi.org

L'autorizzazione non è concessa per un limitato numero di opere di carattere didattico riprodotte nell'elenco che si trova all'indirizzo <http://su.zanichelli.it/fotocopie-opere-escluse>

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La loro fotocopia per i soli esemplari esistenti nelle biblioteche è consentita, oltre il limite del 15%, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, né le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Nei contratti di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei e archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore.

Per permessi di riproduzione, anche digitali, diversi dalle fotocopie rivolgersi a direzione@ceaedizioni.it

Realizzazione editoriale: Epitesto, Milano

Composizione: Lucia Mazzilli

Disegni: Giuseppe Maserati

Copertina: 46xy

Immagine di copertina: Shutterstock, copyright © extosis

Prima edizione: gennaio 2017

Ristampa

4 3 2 1 0 2017 2018 2019 2020 2021

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.

Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:

C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana
viale Romagna 5, 20089 Rozzano (MI)
fax 02 52202260
e-mail: redazione@ceaedizioni.it

Sul sito online.universita.zanichelli.it/mencuccini-es1 è possibile verificare se sono disponibili **errata corrigé** per questo volume.

Stampato da Grafica Ragno
via Lombardia 25, Ozzano Emilia (BO)
per conto della C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana
 viale Romagna 5 - 20089 Rozzano (MI)



Prefazione

Questo libro di esercizi è rivolto a studenti dei corsi di laurea in fisica, ingegneria e matematica, con l'obiettivo di assisterli nella conquista di abilità di problem-solving, che richiede di armonizzare l'intero processo che va dalla schematizzazione alla scelta delle leggi generali da utilizzare di caso in caso. Il passo zero, preliminare all'attacco di ogni esercizio, deve essere lo studio della teoria; solo dopo aver compiuto questo primo passo, si può rivolgere l'attenzione ai problemi presentati nell'eserciziario. Problemi che possiamo suddividere in tre classi.

Un primo tipo di problemi, contrassegnati dall'icona , si occupa di sviluppare, in modo sistematico e graduale, i passaggi logici che vanno dalla schematizzazione della particolare situazione proposta, all'individuazione delle leggi generali di cui l'esercizio è applicazione. Di ogni esercizio sono dati il testo e la soluzione numerica. Lo studente deve, per cominciare, cercare di risolvere autonomamente il problema, anche con il ricorso alla consultazione del libro di testo o di appunti, e senza avere fretta di passare alle richieste di aiuto. In caso di persistente difficoltà, ampiamente prevista nella prima fase di preparazione, ci si collega al sito web (online.universita.zanichelli.it/mencuccini-es1) e si chiede il primo di una serie di aiuti. Ogni aiuto si presenta come una schermata su cui appaiono, in sequenza comandata da un clic, riquadri con commenti scritti, richiami di leggi, disegni schematici, formule, ecc. Tra un clic e il successivo si presuppone che lo studente si soffermi a tentare di anticipare il contenuto dell'elemento seguente della schermata. E così di seguito fino all'ultimo aiuto. È chiaro che, nella sequenza, ogni aiuto risulta più specifico del precedente. Gli esercizi di questo primo tipo li chiameremo a ***soluzione assistita***.

Salvo poche eccezioni, subito dopo ogni esercizio a soluzione assistita è proposto un esercizio evidenziato con un fondino grigio e contrassegnato dallo stesso numero dell'esercizio precedente con asterisco. L'argomento è simile a quello dell'esercizio che lo precede e simili sono anche gli strumenti concettuali necessari alla soluzione. Di questi ***esercizi di consolidamento*** sono forniti brevi suggerimenti a fine capitolo e soluzione dettagliata in fondo all'eserciziario. È chiaro che, in caso di difficoltà, è facile trovare aiuto ricorrendo alla soluzione assistita dell'esercizio precedente.

Per ogni capitolo, subito dopo i primi due gruppi di esercizi, ne è fornito un terzo, che può essere considerato ***di riepilogo e rifinitura*** della preparazione, con una miscellanea di problemi che coprono i vari argomenti; anche per essi sono dati, come per gli esercizi di consolidamento, suggerimenti e soluzione. Come parte preliminare di ogni capitolo dell'eserciziario, è presentato uno schema riepilogativo di strumenti concettuali, leggi, teoremi, ecc., detti "punti chiave", attinenti al corrispondente capitolo del libro di testo.

Alla fine dell'eserciziario è fornita un'appendice di formule matematiche utili alla soluzione degli esercizi.

Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini

CORRADO MENCUCCINI

È stato professore ordinario di Fisica generale presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli Federico II e, dal 1980, presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma "La Sapienza". Ha anche insegnato presso l'Università Campus Biomedico di Roma. Ha svolto ricerche in fisica subnucleare presso l'Eletrosincrotrone dei Laboratori Nazionali di Frascati, di cui è stato anche direttore, presso il Protosincrotrone di Argonne (USA) e presso l'anello di accumulazione di elettroni e positroni Adone di Frascati. Si è anche occupato di produzione di luce di sincrotrone (UV e X) da elettroni relativistici orbitanti in sistemi magnetici, nonché di didattica universitaria, di energia elettrica e di storia della fisica.

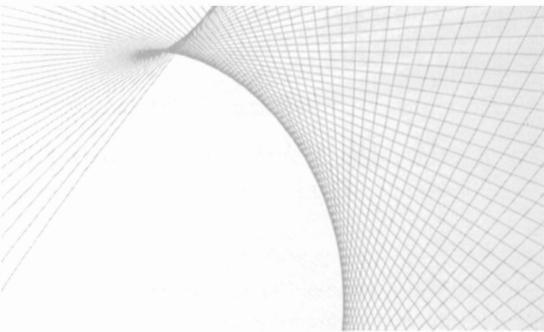
VITTORIO SILVESTRINI

Attualmente è presidente della Fondazione IDIS (Istituto per la Diffusione e la Valorizzazione della Cultura scientifica) nonché fondatore della Città della Scienza di Bagnoli (NA) di cui è anche presidente. È stato a lungo professore ordinario di Fisica generale presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II e ha alle spalle una prestigiosa attività di ricerca che spazia dalle particelle elementari all'energetica, all'ottimizzazione e pianificazione dei sistemi complessi. Ha pubblicato numerosi testi e saggi di divulgazione scientifica; nel 2006 ha ricevuto il prestigioso premio "Descartes" per la comunicazione scientifica.

Indice

■ Cinematica del punto materiale	1
Punti chiave	1
Esercizi assistiti e di consolidamento	3
Esercizi di riepilogo	5
Suggerimenti	6
<hr/>	
■ Principi della dinamica del punto materiale	7
Punti chiave	7
Esercizi	9
Esercizi di riepilogo	10
Suggerimenti	10
<hr/>	
■ Conseguenze del secondo principio della dinamica del punto materiale	11
Punti chiave	11
Esercizi assistiti e di consolidamento	13
Esercizi di riepilogo	15
Suggerimenti	16
<hr/>	
■ Leggi delle forze	17
Punti chiave	17
Esercizi assistiti e di consolidamento	20
Esercizi di riepilogo	23
Suggerimenti	24
<hr/>	
■ Leggi della dinamica dei sistemi	27
Punti chiave	27
Esercizi assistiti e di consolidamento	30
Esercizi di riepilogo	33
Suggerimenti	34
<hr/>	
■ Sistemi rigidi	35
Punti chiave	35
Esercizi assistiti e di consolidamento	37
Esercizi di riepilogo	42
Suggerimenti	44

■ Problemi d'urto	45
Punti chiave	45
Esercizi assistiti	46
Esercizi di riepilogo	47
Suggerimenti	48
■ Meccanica dei fluidi	49
Punti chiave	49
Esercizi assistiti e di consolidamento	51
Esercizi di riepilogo	54
Suggerimenti	56
■ Onde in mezzi elastici	57
Punti chiave	57
Esercizi	59
Esercizi di riepilogo	59
Suggerimenti	60
■ Calore e temperatura	61
Punti chiave	61
Esercizi	62
Esercizi di riepilogo	63
Suggerimenti	63
■ Primo principio della termodinamica	65
Punti chiave	65
Esercizi assistiti e di consolidamento	67
Esercizi di riepilogo	70
Suggerimenti	72
■ Trasmissione del calore	73
Punti chiave	73
Esercizi di riepilogo	75
Suggerimenti	76
■ Secondo principio della termodinamica	77
Punti chiave	77
Esercizi assistiti e di consolidamento	79
Esercizi di riepilogo	82
Suggerimenti	84
■ Soluzioni degli esercizi	85
■ Formule utili in matematica	153



Cinematica del punto materiale

Basato sul Capitolo 2 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi sviluppati in questo capitolo riguardano la cinematica del punto materiale, cioè la parte della Meccanica che si occupa di descrivere il moto senza collegarlo alle cause che lo determinano. I concetti fondamentali della cinematica sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini,

Fisica - Meccanica e termodinamica.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona

, prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

La *cinematica* si prefigge di descrivere il moto, disinteressandosi delle cause che lo determinano.

La descrizione cinematica di un certo sistema fisico è completa quando sia nota la posizione a ogni istante o, come si dice, quando sia nota la posizione in funzione del tempo.

Un sistema fisico è schematizzabile come un *punto materiale* quando le sue dimensioni lineari siano piccole rispetto alla precisione con cui ci interessa determinarne la posizione.

La *posizione* può essere definita solo rispetto a un sistema di riferimento, rispetto al quale si convenga di descrivere il moto.

Un sistema fisico ha tanti gradi di libertà quanti sono i parametri necessari a specificarne la posizione.

Graficamente, un punto materiale è rappresentato da un punto geometrico.

Di norma, useremo un sistema di riferimento cartesiano. Talvolta, può essere utile scegliere sistemi di riferimento diversi (ad esempio, in coordinate polari).

Un punto materiale ha 3 gradi di libertà. La sua posizione è determinata se si specificano le 3 coordinate del punto geometrico che lo rappresenta.

Punti chiave

La *legge oraria* di un punto materiale è nota quando è nota la funzione che esprime il suo vettore posizione \vec{r} al variare del tempo; ovvero quando sono note le tre funzioni che esprimono le coordinate (per es. cartesiane) al variare del tempo.

La velocità è una grandezza vettoriale che misura la rapidità con cui la posizione varia. La velocità media \bar{v} sull'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è pari allo spostamento $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ compiuto dal punto, diviso il tempo Δt impiegato a compierlo.

Calcolata su un intervallo di tempo sempre più breve, la velocità media si approssima sempre più alla *velocità istantanea*. Al limite per Δt tendente a zero, si calcola il valore istantaneo della velocità.

La derivata può essere eseguita per componenti. Le componenti della velocità possono essere calcolate, pertanto, calcolando le velocità con cui si muovono le proiezioni dei punti sugli assi coordinati (*composizione dei movimenti*).

In ogni istante, la *velocità è diretta come la tangente alla traiettoria*, nella posizione occupata dal punto in quell'istante.

L'*accelerazione* è quella grandezza vettoriale che misura la rapidità con cui varia nel tempo la velocità $\vec{v}(t)$ del punto. L'accelerazione istantanea $\vec{a}(t)$ può essere calcolata come derivata del vettore velocità.

Anche l'accelerazione può essere calcolata per componenti. Ciascuna componente dell'accelerazione è pari alla derivata della componente omologa della velocità.

Rispetto alla traiettoria, l'accelerazione \vec{a} ha in generale sia una *componente tangenziale* \vec{a}_t , che una *componente normale* \vec{a}_n .

L'*accelerazione tangenziale* \vec{a}_t ha modulo a_t pari alla derivata del modulo della velocità. Essa è nulla se e solo se il punto si muove con velocità il cui modulo sia costante.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad [\text{II.21}]$$

ovvero

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad [\text{II.20}]$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad [\text{II.25}]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad [\text{II.30}]$$

La [II.30] rappresenta la derivata del vettore posizione, e la matematica ci insegna come calcolarla quando sia nota la legge oraria [II.21].

$$\begin{cases} v_x = dx/dt \\ v_y = dy/dt \\ v_z = dz/dt \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\begin{cases} a_x = dv_x/dt \\ a_y = dv_y/dt \\ a_z = dv_z/dt \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a_t = dv/dt$$

Punti chiave

L'accelerazione normale a_n è centripeta, cioè diretta verso il centro del cerchio che meglio si adatta alla traiettoria in quel punto; la sua espressione è quella indicata a lato, dove R è il raggio del cerchio osculatore (raggio di curvatura della traiettoria).

Velocità \vec{v} e accelerazione \vec{a} possono essere calcolate univocamente, in ogni istante, se è nota la legge oraria [II.20] (o [II.21]).

Nota l'accelerazione, la velocità può invece essere calcolata solo se sono note anche le *condizioni iniziali*, cioè il valore che la velocità aveva all'istante iniziale (o a un istante qualunque di riferimento).

Analogamente, nota la velocità, la legge oraria può essere ricavata solo qualora sia nota anche la posizione a un istante di riferimento.

$$a_n = v^2/R$$

Se il punto si muove ($v \neq 0$), anche se v è costante l'accelerazione è diversa da zero, a meno che la traiettoria non sia rettilinea ($R \rightarrow \infty$). Solo nel moto che oltre a essere uniforme ($v = \text{costante} \rightarrow a_t = 0$) sia anche rettilineo ($a_n = 0$), l'accelerazione è nulla ($a_t = 0; a_n = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$).

$$\begin{cases} v_x = \int a_x(t) dt + c_{1x} \\ v_y = \int a_y(t) dt + c_{1y} \\ v_z = \int a_z(t) dt + c_{1z} \end{cases} \quad [\text{II.40}]$$

c_{1x}, c_{1y}, c_{1z} sono tre costanti arbitrarie (dal punto di vista matematico) che possono essere determinate solo fisicamente dalla conoscenza delle condizioni iniziali.

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt + c_{2x} \\ y(t) = \int v_y(t) dt + c_{2y} \\ z(t) = \int v_z(t) dt + c_{2z} \end{cases}$$

Le tre costanti c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} possono essere determinate se e solo se ci sono note le condizioni iniziali (cioè la posizione che il punto aveva a un istante di riferimento).

Esercizi assistiti e di consolidamento



Esercizio 2.1 (Esercizio correlato: 2.1*)

Due corpi puntiformi A e B vengono lanciati simultaneamente, al tempo $t = 0$, dallo stesso punto con velocità iniziale di modulo v_0 . Il corpo A è lanciato verticalmente verso l'alto, mentre il corpo B è lanciato con un angolo α rispetto all'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria, ricavare l'espressione della distanza D tra i due corpi nell'istante in cui il corpo B raggiunge la sua massima quota.

RISPOSTA

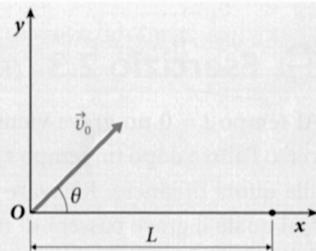
$$D = (v_0^2 \sin \alpha / g) \cdot [2(1 - \sin \alpha)]^{1/2}$$

Esercizio 2.1*

Un grave è lanciato dall'origine O del sistema di riferimento cartesiano mostrato in figura nella direzione che forma un angolo $\theta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il grave tocca di nuovo l'asse x nel punto di ascissa $L = 20$ m (gittata). Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare il modulo v_0 della velocità di lancio e il massimo valore H dell'ordinata y raggiunto dal grave.

RISPOSTE

$$v_0 = 14 \text{ m/s}; H = 5 \text{ m}$$



🌐 Esercizio 2.2 (Esercizi correlati: 2.2* e 2.2**)

Un corpo è lanciato con velocità di modulo v_0 a un angolo θ rispetto all'orizzontale. Trascurando la resistenza dell'aria, ricavare l'espressione del raggio di curvatura della traiettoria nel punto O di lancio e nel punto Q di arrivo al suolo. L'accelerazione è uniforme, è diretta verticalmente verso il basso e ha per modulo g .

RISPOSTA

$$r_O = v_0^2 / g \cos \theta = r_Q$$

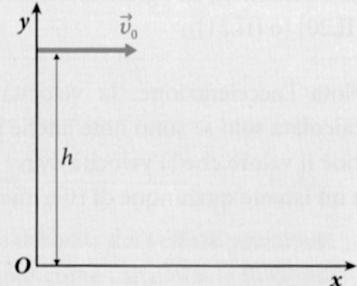
Esercizio 2.2*

Al tempo $t = 0$ un punto materiale viene lanciato orizzontalmente, con velocità di modulo $v_0 = 20$ m/s, da un punto a quota $h = 50$ m, come mostrato nel sistema di riferimento cartesiano in figura. All'istante $t^* = 2$ s calcolare: a) le coordinate (x^*, y^*) del punto materiale; b) il raggio di curvatura R della traiettoria nel punto (x^*, y^*) .

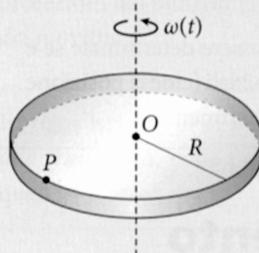
RISPOSTE

a) $\begin{cases} x^* = 40 \text{ m} \\ y^* = 30,4 \text{ m} \end{cases}$

b) $R(x^*, y^*) = 12 \text{ m}$



Esercizio 2.2**



Una piattaforma circolare di raggio R ruota intorno a un asse ortogonale passante per il suo centro, come mostrato in figura. La piattaforma è ferma all'istante $t = 0$ e la sua velocità angolare varia nel tempo con la legge $\omega(t) = Kt^2$, con K costante. Ricavare l'espressione, al tempo t , delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione di un punto P solido alla piattaforma, posto a distanza R dall'asse.

RISPOSTA

$$\begin{cases} a_t = 2Krt \\ a_n = K^2 R t^4 \end{cases}$$

🌐 Esercizio 2.3 (Esercizio correlato: 2.3*)

Al tempo $t = 0$ un grave viene lanciato verticalmente verso l'alto e dopo un tempo t_1 passa a quota h rispetto alla quota di lancio. Ricavare l'espressione del tempo t_2 al quale il grave passerà di nuovo, in fase di discesa, dalla quota h .

RISPOSTA

$$t_2 = 2h/gt_1$$

Esercizio 2.3*

Un razzo, partendo da fermo al tempo $t = 0$, viene lanciato da terra lungo la verticale spinto da motori che gli conferiscono un'accelerazione costante verso l'alto di modulo $a = 3g$. La spinta dei motori cessa al tempo $t = t^*$, dopodiché il razzo prosegue il suo moto sotto l'effetto della sola gravità, fino a raggiungere la massima quota, per poi iniziare la fase di discesa verso il basso. Ricavare l'espressione del modulo della velocità v con cui il razzo arriva al suolo.

RISPOSTA

$$v = 2\sqrt{3}gt^*$$

Esercizio 2.4

Un sottile anello rigido di raggio R e centro C rotola senza strisciare su un piano orizzontale con velocità angolare $\omega(t)$. Un punto P dell'anello è individuato dall'angolo $\alpha(t)$ tra il raggio CP e la verticale passante per il punto Q di contatto tra l'anello e il piano. Nel sistema di riferimento cartesiano indicato il punto P è sovrapposto all'origine O all'istante $t = 0$. Ricavare le componenti cartesiane di velocità e accelerazione del generico punto P nell'istante in cui la sua posizione è individuata dal valore $\alpha(t)$ e la velocità angolare vale $\omega(t)$. Determinare anche le velocità del punto di contatto Q e del centro C dell'anello. Ricavare l'equazione cartesiana $x = x(y)$ della traiettoria del punto P .

RISPOSTE

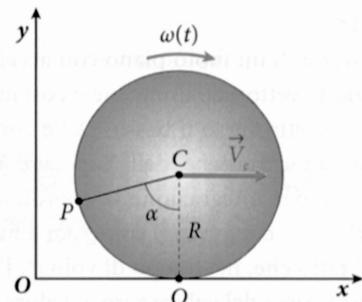
$$v_x = R\omega(1 - \cos\alpha); v_y = R\omega\sin\alpha$$

$$a_x = R(1 - \cos\alpha)d\omega/dt + R\omega^2\sin\alpha$$

$$a_y = R\sin\alpha d\omega/dt + R\omega^2\cos\alpha$$

$$v_Q = 0; V_c = \omega R$$

Traiettoria: cicloide



Esercizi di riepilogo

Esercizio 2.5

Un proiettile viene lanciato orizzontalmente con velocità iniziale $v_0 = 50$ m/s da una postazione a quota $h = 100$ m rispetto al suolo orizzontale. In assenza di attriti, con quale inclinazione rispetto al suolo il proiettile arriva a terra?

RISPOSTA

41,5°

Esercizio 2.6

Un punto materiale è lanciato orizzontalmente, con velocità iniziale v_0 , dalla sommità di una torre. Ricavare l'espressione, in funzione del tempo, delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione. Il moto, in assenza di attriti, avviene con accelerazione pari all'accelerazione di gravità g .

RISPOSTE

$$a_t = g^2 t / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}; a_n = g v_0 / \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

Esercizio 2.7

La piattaforma di una giostra si muove di moto circolare non uniforme. Essa parte da ferma e ha un'accelerazione angolare costante $d\omega/dt \equiv \dot{\omega} = 0,2$ rad/s². Calcolare:

- qual è la velocità angolare dopo 2 s;
- qual è l'accelerazione, in modulo, di un punto della piattaforma che dista $r = 2$ m dall'asse di rotazione.

RISPOSTE

a) 0,4 rad/s; b) $a = \omega r \sqrt{1 + \omega^2 t^4}$

Suggerimenti

2.1*

Si tratta di un moto piano con accelerazione vettoriale uniforme e costante (\ddot{g}), diretta verso il basso. Dalle componenti cartesiane della velocità, ricavare per integrazione le coordinate $x(t)$ e $y(t)$ del grave. Tenere poi conto del fatto che, nel tempo di volo t^* , l'ascissa passa dal valore zero al valore L , mentre l'ordinata cresce fino alla massima quota H e scende fino a tornare al valore nullo dell'origine O .

2.2*

Per le coordinate del punto all'istante t^* , procedere come nell'esercizio 2.1*, adattando le condizioni iniziali. Per il calcolo del raggio di curvatura in un punto della traiettoria, riferirsi al pro-

cedimento dell'esercizio 2.2.

2.2**

Si tratta di un moto piano su traiettoria circolare, per il quale la derivata temporale della velocità (che è puramente tangenziale) dà luogo a due componenti (tangenziale e normale) per l'accelerazione.

2.3*

Decomporre il moto in tre fasi: a) partenza da fermo a $t = 0$ e salita accelerata fino a quota h ; b) salita decelerata fino alla massima quota H ; c) discesa naturalmente accelerata dalla quota H al suolo.

2.5

Calcolare le componenti v_x e v_y della

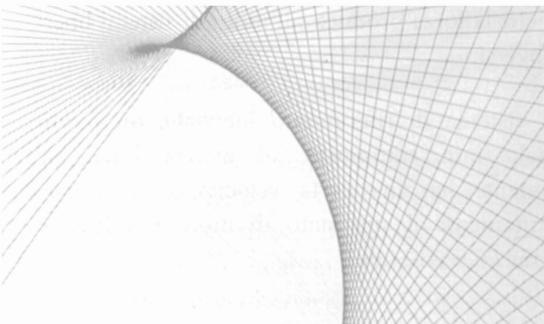
velocità nel punto di impatto al suolo e, da queste, ricavare l'angolo richiesto.

2.6

Le grandezze a_t e a_n possono essere espresse in funzione di g , di cui sono componenti sulla tangente e la normale alla traiettoria, e dell'angolo θ fra la tangente e la verticale.

2.7

1. Passare, per integrazione, dall'accelerazione angolare alla velocità angolare, in analogia al caso di moto rettilineo uniformemente accelerato.
2. L'accelerazione, in un moto circolare non uniforme, ha componenti normale e tangenziale.



Principi della dinamica del punto materiale

*Basato sul Capitolo 3 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica*

Gli esercizi di questo capitolo riguardano la dinamica del punto materiale, che tratta le relazioni che intercorrono tra il moto dei corpi (per ora puntiformi) e le cause (forze) che determinano tale moto. I concetti fondamentali

sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Punti chiave

La dinamica newtoniana classica è fondata sui seguenti principi:

- principio di relatività;
- principio di inerzia (o primo principio);
- secondo principio della dinamica;
- terzo principio della dinamica.

Enunciato del principio di relatività.

Per conseguenza del principio di relatività, la validità delle leggi della fisica deve essere preservata passando da un sistema di riferimento a un altro che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo e uniforme (covarianza delle leggi fisiche).

Particolare rilievo hanno i sistemi di riferimento cosiddetti inerziali.

In pratica, è inerziale un sistema con origine nel Sole e orientamento costante rispetto alle stelle fisse; ed è inerziale ogni sistema che si muova rispetto a questo di moto traslatorio rettilineo e uniforme.

Il principio di inerzia può essere dedotto dal principio di relatività.

Il terzo principio riguarda sistemi fisici costituiti da almeno due punti materiali.

Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo e uniforme, non esiste esperimento che dia risultati diversi nei due riferimenti.

Per definizione, un sistema di riferimento è inerziale se in esso un punto materiale "libero" (non sottoposto ad alcuna influenza da parte di altri sistemi), inizialmente in quiete, permane indefinitamente in quiete.

Punti chiave

La definizione operativa di forza può essere sia statica che dinamica.

Il principio di inerzia riguarda il moto di sistemi liberi, non sottoposti cioè ad alcuna forza.

Nei sistemi di riferimento inerziali, si riscontra che vi è proporzionalità diretta fra l'accelerazione \vec{a} di un punto materiale e il risultante \vec{f} delle forze ad esso applicate.

Si trova sperimentalmente che la massa inerziale può essere identificata con la *massa gravitazionale* m (o semplicemente *massa*) del corpo considerato.

Grazie all'identificazione fra massa inerziale e massa gravitazionale, la [III.1] diviene:

Le forze che agiscono su un punto in ogni particolare situazione sono riconducibili a effetti prodotti da altri sistemi presenti nell'ambiente circostante.

Le forze sono tutte riconducibili a tre categorie fondamentali:

- forza gravitazionale;
- forze elettromagnetiche (o elettrodeboli);
- forze nucleari.

Passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro, le coordinate di un punto si trasformano secondo le cosiddette *trasformazioni di Galileo*. Se i due riferimenti hanno lo stesso orientamento, tali relazioni si riducono alle

$$\begin{cases} x' = x - V_{0x}t \\ y' = y - V_{0y}t \\ z' = z - V_{0z}t \end{cases} \quad [\text{III.15}]$$

La definizione statica si basa sulla misura di deformazioni che le forze producono quando applicate a sistemi vincolati a non muoversi.

La definizione dinamica si basa sulla misura degli effetti che la forza produce sul moto di sistemi liberi di muoversi.

In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale non sottoposto ad alcuna forza, se inizialmente ha una certa velocità \vec{v} , mantiene indefinitamente il suo stato di moto rettilineo e uniforme (\vec{v} = costante).

$$\vec{f} = m_i \vec{a} \quad [\text{III.1}]$$

La costante di proporzionalità m_i è detta *massa inerziale*: essa misura la resistenza che il punto materiale oppone ai cambiamenti della sua velocità. Quanto più è grande la massa inerziale di un certo punto, tanto minore è l'accelerazione che esso subisce a parità di forza applicata.

La massa gravitazionale rappresenta la *quantità di materia* che costituisce il corpo: essa è responsabile dell'attrazione gravitazionale fra corpi diversi e può essere misurata con la bilancia.

$$\vec{f} = m \vec{a} \quad [\text{III.5}]$$

Secondo principio della dinamica

Le leggi che esprimono, in ogni situazione, la forza in funzione della posizione del punto (ed eventualmente della sua velocità e del tempo) sono dette *leggi delle forze*.

La legge [III.5] è covariante rispetto alle trasformazioni di Galileo: ciò significa che il secondo principio soddisfa il principio di relatività (galileiano).

Nei sistemi non inerziali, accanto alle forze reali appaiono le cosiddette *forze apparenti* o *forze di inerzia*. Nel caso generale, le forze apparenti sono due: *forza di trascinamento* e *forza complementare* (o di Coriolis).

Nel caso in cui il sistema non inerziale sia semplicemente un sistema ruotante con velocità angolare ω costante, la forza di trascinamento si riduce alla *forza centrifuga* \vec{f}_c . Nei problemi di equilibrio relativo ($\vec{v}' = 0$) la forza complementare non interviene.

FORZA DI TRASCINAMENTO

$$\vec{f}_t = -m\vec{a}_t$$

FORZA COMPLEMENTARE

$$\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

(vedi la [III.34] e la [III.33])

FORZA CENTRIFUGA

$$f_c = -m\omega^2 r$$

(vedi esempio E.3.3)

Esercizi

Esercizio 3.1

Un uovo, lasciato cadere da fermo da un cavalcavia autostradale, dopo un tratto verticale di lunghezza $h = 10$ m, colpisce una macchina in transito con moto rettilineo uniforme a velocità $V = 130$ km/h. Calcolare la velocità \vec{v}_r dell'uovo (modulo e direzione θ rispetto all'orizzontale, come visti dall'auto) al momento dell'impatto.

RISPOSTA

$$\begin{cases} v_r = 140 \text{ km} \\ \theta = 21^\circ \end{cases}$$

Esercizio 3.3

Un cuneo può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, nella disposizione mostrata in figura. Sul cuneo è appoggiato un grave C . Quando tutto è mantenuto fermo, la forza esercitata dal corpo sul cuneo è verticale e vale F_1 . A un certo istante il cuneo viene sbloccato e comincia a scivolare sul piano inclinato. Ricavare l'espressione della componente verticale F_2 della forza che il grave esercita sul cuneo mentre questo scivola lungo il piano.

RISPOSTA

$$F_2 = F_1 \cos^2 \alpha$$

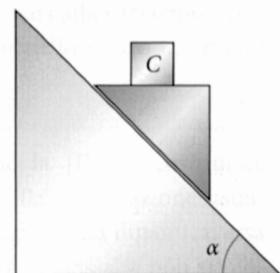
Esercizio 3.2

Mentre un treno si sta muovendo di moto rettilineo in direzione orizzontale con accelerazione \vec{A} costante rispetto al suolo, un grave, inizialmente fermo sul pavimento di un vagone, al tempo $t = 0$ viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v_0 rispetto al vagone stesso. Ricavare l'espressione della velocità (modulo e direzione θ rispetto all'orizzontale, nel riferimento solidale al vagone) nell'istante in cui il grave ricade sul pavimento del vagone.

RISPOSTE

$$v_0 = \left(v_0 \sqrt{g^2 + 4A^2} \right) / g$$

$$\theta = \arctg(g/2A)$$



Esercizi di riepilogo

Esercizio 3.4

Due aerei viaggiano orizzontalmente alla stessa quota con velocità $v_1 = 500 \text{ km/h}$ e $v_2 = 800 \text{ km/h}$ rispettivamente. Le direzioni di moto formano un angolo $\theta = 30^\circ$, mentre gli aerei si allontanano l'uno dall'altro. Calcolare la velocità relativa del secondo aereo rispetto al primo (modulo e direzione).

RISPOSTE

444 km/h; 64°

Esercizio 3.5

Durante la fase di frenamento, con accelerazione costante \vec{A} , opposta alla velocità, di un vagone che si muove su traiettoria rettilinea orizzontale, un corpo viene lanciato, internamente al vagone, con velocità v'_0 verticalmente verso l'alto, rispetto al vagone in moto. A che distanza $\Delta x'$ dal punto di lancio il corpo ricadrà sul pavimento del vagone?

RISPOSTA

$$\Delta x' = -2Av'^2_0/g^2$$

Suggerimenti

3.1

Il moto dell'uovo può essere considerato sia dal sistema di riferimento “assoluto” solidale all’autostrada, sia dal sistema di riferimento “mobile” solidale all’auto. Per quanto riguarda le rispettive velocità, vale la legge di composizione $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_i$.

3.2

Studiare il moto nel sistema di riferimento $(0xy)$ non inerziale solidale al

vagone. Insieme alla forza peso (reale) agisce la forza d’inerzia.

3.3

Il sistema di riferimento solidale con il cuneo in movimento non è inerziale. Alle forze reali va sommata la forza d’inerzia.

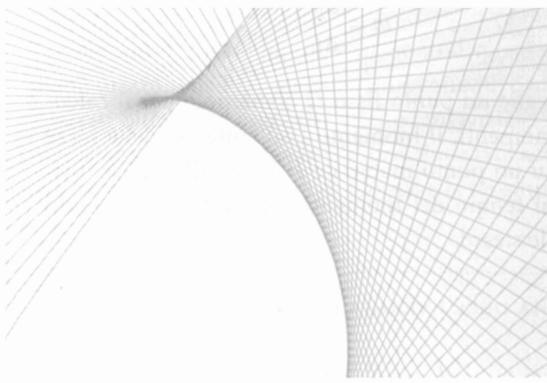
3.4

I dati del problema si riferiscono a un sistema di riferimento solidale con la Terra. Ciò che si vuole calcolare è il

vettore velocità relativa (\vec{v}_2) del secondo aereo rispetto a un sistema mobile solidale con il primo aereo.

3.5

Conviene studiare il fenomeno dal sistema mobile, non inerziale, solidale con il vagone. Il corpo è animato da un’accelerazione che è la differenza vettoriale tra l’accelerazione di gravità (verticale) e l’accelerazione di trascinamento (orizzontale).



Conseguenze del secondo principio della dinamica del punto materiale

Basato sul Capitolo 4 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano le conseguenze del secondo principio della dinamica per il punto materiale. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Mediane opportune elaborazioni matematiche, è possibile dedurre dal secondo principio della dinamica alcune rilevanti equazioni, che oltre a introdurre nuove grandezze fisiche di notevole utilità consentono di facilitare la soluzione dell'equazione $\vec{f} = m\vec{a}$ in ampie categorie di fenomeni. In tutto il capitolo, si è supposto di operare in sistemi di riferimento inerziale.

$$\vec{I}_{12} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} dt \quad [\text{IV.16}]$$

$$\vec{q} = m\vec{v} \quad [\text{IV.18}]$$

Sono queste le definizioni della grandezza dinamica *impulso* e della grandezza cinematica *quantità di moto* che compaiono nella [IV.17].

La definizione [IV.18] ci consente di scrivere l'equazione $\vec{f} = m\vec{a}$ nella forma

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad [\text{IV.19}]$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

$$\vec{I}_{12} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad [\text{IV.17}]$$

L'impulso della forza risultante \vec{f} agente su un punto materiale fra gli istanti t_1 e t_2 è pari alla variazione della quantità di moto del punto nello stesso intervallo di tempo.

Sperimentalmente, risulta che la [IV.19] costituisce una generalizzazione rispetto alla formulazione usuale, $\vec{f} = m\vec{a}$, del secondo principio della dinamica: essa vale infatti anche nel caso in cui la massa m non sia costante (caso di *massa variabile*).

Punti chiave

Per definizione:

$$\vec{m} = \Omega P \times \vec{f} \quad [\text{IV.23}]$$

momento della forza \vec{f} rispetto al polo Ω

$$\vec{p} = \Omega P \times \vec{q}$$

momento angolare, ovvero momento della quantità di moto \vec{q} rispetto al polo Ω .

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [\text{IV.28}]$$

Se si sceglie un punto fisso Ω come polo per il calcolo dei momenti, il momento risultante \vec{m} delle forze agenti su un punto materiale P è pari alla derivata rispetto al tempo del momento angolare \vec{p} del punto materiale stesso.

Per definizione:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad [\text{IV.39}]$$

Lavoro compiuto dalla forza spostandosi da A a B

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

energia cinetica del punto materiale.

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$L_{AB} = K_B - K_A \quad [\text{IV.42}]$$

Quando un punto materiale P si muove dalla posizione A alla posizione B , il lavoro L compiuto dalle forze su di esso agenti è pari alla variazione di energia cinetica K del punto stesso.

In generale il lavoro dipende, oltre che dai punti iniziale e finale A e B , anche dalla traiettoria seguita; nel caso particolare che esso sia indipendente dalla traiettoria, la forza si dice *conservativa*.

Nel caso di forza conservativa, il lavoro può essere scritto nella forma

$$L_{AB} = V(B) - V(A) = U(A) - U(B)$$

La funzione della posizione V è detta *potenziale*; la funzione $U = -V$ è detta *energia potenziale*.

Esprimendo il lavoro in termini di energia potenziale, la [IV.42] assume la forma:

$$E = K + U = \text{costante} \quad [\text{IV.72}]$$

che va sotto il nome di *teorema di conservazione dell'energia meccanica*.

In un campo di forze conservative, se è nota l'energia potenziale U possono essere calcolate le componenti della forza f_x, f_y, f_z ; e viceversa.

TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Se un punto materiale si muove sottoposto unicamente a forze conservative, la sua energia meccanica totale E (somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale U) si conserva.

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad [\text{IV.73}]$$

$$U(A) - U(P) = \int_A^P (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

Nel caso che il punto materiale sia soggetto, oltre che a forze conservative, anche a forze non conservative, l'energia meccanica totale $E = K + U$ non si conserva più; le sue variazioni sono pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative.

$$E_f - E_i = L_{nc}$$

La differenza fra l'energia totale finale E_f e l'energia totale iniziale E_i è pari al lavoro L_{nc} compiuto dalle forze non conservative.

Esercizi assistiti e di consolidamento



Esercizio 4.1 (Esercizio correlato: 4.1*)

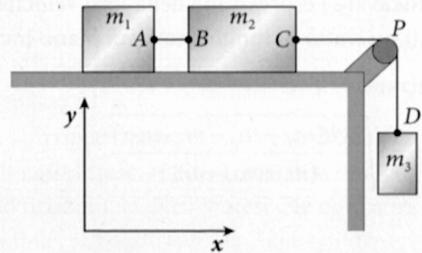
Tre blocchi di masse m_1 , m_2 e m_3 sono disposti come indicato in figura. Il piano orizzontale fisso su cui si muovono m_1 e m_2 è privo di attrito. Il piolo P su cui slitta il filo non offre attrito tangenziale. I fili sono inestensibili e di massa trascurabile. Ricavare l'espressione dell'accelerazione con cui scende m_3 , la tensione τ_1 sul tratto di filo AB e la tensione τ_2 sul tratto CD .

RISPOSTE

$$a = (m_3 g) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\tau_1 = (m_1 m_3 g) / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\tau_2 = [(m_1 + m_2)m_3 g] / (m_1 + m_2 + m_3)$$

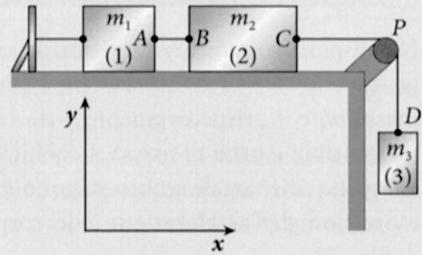


Esercizio 4.1*

I tre blocchi dell'esercizio 4.1 sono mantenuti fermi dal filo di blocco indicato in figura sulla sinistra del piano orizzontale. All'istante $t = 0$ il filo di blocco viene tagliato e il sistema dei tre blocchi si mette in movimento. Ricavare l'espressione della velocità dei blocchi quando il blocco (1) si è spostato di un tratto h sul piano orizzontale.

RISPOSTA

$$v = \sqrt{\frac{2m_3 gh}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$



Esercizio 4.2 (Esercizio correlato: 4.2*)

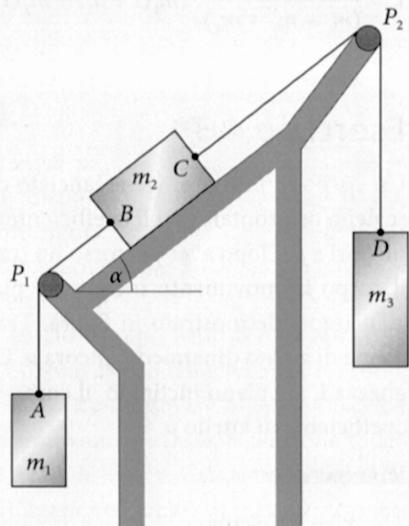
Tre blocchi di masse m_1 , m_2 e m_3 sono disposti come indicato in figura. Il piano inclinato fisso, formante un angolo α con l'orizzontale e sul quale si muove la massa m_2 , è privo di attrito. I pioli P_1 e P_2 , su cui slittano i fili, non offrono attriti tangenziali. I fili sono inestensibili e privi di massa. Nell'ipotesi che la massa m_3 sia tale da muoversi verso il basso, ricavare l'espressione dell'accelerazione con cui scende m_3 , la tensione τ_1 del tratto di filo AB e la tensione τ_2 del tratto CD .

RISPOSTE

$$a = \frac{(m_3 - m_1 - m_2 \operatorname{sen} \alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot g$$

$$\tau_1 = \frac{m_1 \cdot [2m_3 + m_2(1 - \operatorname{sen} \alpha)]}{(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot g$$

$$\tau_2 = \frac{m_3 \cdot [2m_1 + m_2(1 + \operatorname{sen} \alpha)]}{(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot g$$

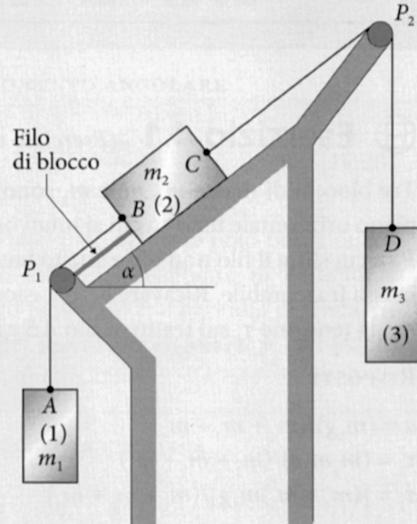


Esercizio 4.2*

I tre blocchi dell'esercizio 4.2 sono inizialmente mantenuti fermi dal filo di blocco indicato in figura nella zona del piolo P_1 . All'istante $t = 0$ il filo di blocco viene tagliato e il sistema dei tre blocchi si mette in movimento. Ricavare l'espressione della loro velocità quando il blocco (2) si è spostato di un tratto di lunghezza h sul piano inclinato.

RISPOSTA

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_3 - m_1 - m_2 \sin\alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$



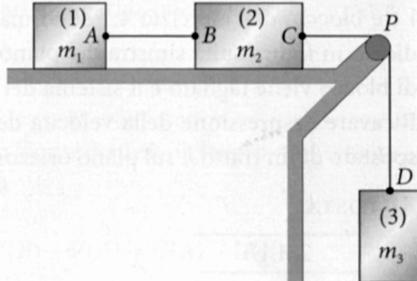
Esercizio 4.3 (Esercizio correlato: 4.3*)

Nel dispositivo mostrato in figura, in cui il piolo P è privo di attrito tangenziale, il corpo (3) di massa m_3 è tale da trascinare i corpi (1) e (2) di masse m_1 e m_2 rispettivamente. I tre corpi sono collegati tra loro da fili inestensibili e privi di massa. I coefficienti di attrito tra i corpi (1) e (2) e il piano orizzontale scabro valgono μ_1 e μ_2 rispettivamente. Ricavare le espressioni dell'accelerazione a del corpo (3) e della tensione τ_2 del tratto di filo CD .

RISPOSTE

$$a = g \frac{(m_3 - \mu_1 m_1 - \mu_2 m_2)}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$\tau_2 = \frac{m_3 g}{(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot [m_1(1 + \mu_1) + m_2(1 + \mu_2)]$$

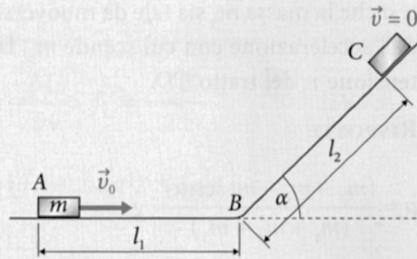


Esercizio 4.3*

Un corpo di massa m viene lanciato con velocità v_0 parallelo a un piano scaleno orizzontale con il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piano pari a μ . Dopo aver percorso un tratto di lunghezza l_1 su questo piano, il corpo in movimento incontra il piano inclinato ad angolo α rispetto all'orizzontale mostrato in figura. Tra questo piano e il corpo, il coefficiente di attrito dinamico è ancora μ . Dopo aver percorso un tratto di lunghezza l_2 sul piano inclinato, il corpo si ferma. Ricavare l'espressione del coefficiente di attrito μ .

RISPOSTA

$$\mu = \frac{v_0^2 - 2gl_2 \sin\alpha}{2g(l_1 + l_2 \cos\alpha)}$$



Esercizi di riepilogo

Esercizio 4.4

Un corpo di massa $m = 10 \text{ kg}$ si sta muovendo su una traiettoria orizzontale con velocità $v_0 = 3 \text{ m/s}$, quando una forza f costante inizia ad agire in verso opposto al movimento fino a fermare completamente il corpo in 10 s . Quanto vale l'impulso della forza nei 10 s in cui essa agisce? Qual è il valore della forza?

RISPOSTA

$-30 \text{ N} \cdot \text{s}; -3 \text{ N}$

Esercizio 4.6

Un'automobile di massa $M = 1000 \text{ kg}$ viaggia su una strada rettilinea orizzontale alla velocità $v = 100 \text{ km/h}$. Quale forza frenante costante è necessario applicare all'auto perché si fermi in 100 m ?

RISPOSTA

3858 N

Esercizio 4.8

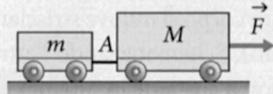
Con una normale bilancia a molla tarata, una persona si pesa in un ascensore che sale con accelerazione verticale $a = 2 \text{ m/s}^2$. Se la bilancia indica un peso di 100 kgp , quanto indicherebbe se la pesata fosse fatta a terra?

RISPOSTA

83 kgp

Esercizio 4.5

Una forza orizzontale costante $F = 10 \text{ N}$ trascina due carrelli, di massa $M = 1 \text{ kg}$ e $m = 2 \text{ kg}$ rispettivamente, collegati da un filo inestensibile e di massa trascurabile. I carrelli si muovono su un binario orizzontale. Nell'ipotesi che ogni altra forza sia trascurabile, calcolare la forza F che il filo esercita sul punto A (gancio) del carrello di massa m .



RISPOSTA

$F = 1,67 \text{ N}$

Esercizio 4.7

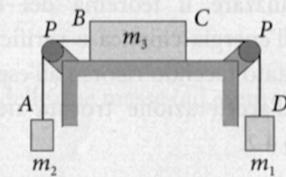
Un corpo è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito quando con una martellata gli viene applicata una forza di brevissima durata ($\Delta t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$), diretta orizzontalmente e approssimativamente costante nel tempo (durante tale breve intervallo). Dopo questo colpo, il corpo si muove con velocità $v = 20 \text{ m/s}$. Calcolare, in modo approssimato, di quanto si sposta il corpo nell'intervallo di tempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ in cui la forza impulsiva agisce sul corpo.

RISPOSTA

2 cm

Esercizio 4.9

Tre blocchi di massa m_1 , m_2 e m_3 sono disposti come indicato in figura. Il piano su cui si muove m_3 è orizzontale e privo di attrito. I pioli P su cui slittano i fili di collegamento tra le masse non offrono attrito tangenziale. I fili sono inestensibili e di massa trascurabile. Calcolare l'accelerazione con cui si muovono le masse, la tensione τ_1 del tratto di filo CD e la tensione τ_2 del tratto di filo AB . ($m_1 = 2 \text{ kg}$; $m_2 = 1 \text{ kg}$; $m_3 = 3 \text{ kg}$.)

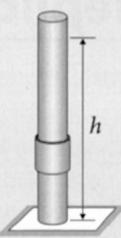


RISPOSTE

$a = 1,63 \text{ m/s}^2$; $\tau_1 = 16,3 \text{ N}$; $\tau_2 = 11,4 \text{ N}$

Esercizio 4.10

Una forza di attrito dinamico si manifesta quando un corpo si muove a contatto con un corpo esterno (per esempio quando un corpo si muove strisciando su un piano). Schematizzando l'attrito come una forza costante in modulo e diretta sempre in verso contrario allo spostamento, risolvere il seguente problema. Un manico cilindrico di massa $m = 0,3 \text{ kg}$ può scorrere a contatto con un'asta cilindrica verticale. Per effetto di una forza impulsiva (di durata praticamente trascurabile) il manico, inizialmente fermo alla base dell'asta, viene lanciato verso l'alto e raggiunge una quota massima $h = 3 \text{ m}$. Successivamente il manico ricade al suolo e lo raggiunge con una velocità $v = 5 \text{ m/s}$. Calcolare il valore I dell'impulso della forza di lancio.

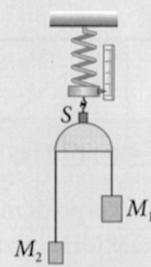


RISPOSTA

$$I = 2,89 \text{ Ns}$$

Esercizio 4.11

Il sistema mostrato in figura consta di due masse $M_1 = 10 \text{ kg}$ e $M_2 = 6 \text{ kg}$, collegate da un filo inestensibile di massa trascurabile, che può scorrere senza attrito su un supporto semicilindrico S di massa $M_s = 1 \text{ kg}$. L'intero sistema è sostenuto da un dinamometro ancorato a un sostegno fisso. Mentre le masse M_1 e M_2 si muovono per effetto della forza peso, quale forza misura il dinamometro?



RISPOSTA

$$F = \sim 157 \text{ N}$$

Suggerimenti

4.1*

Utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica e verificare il risultato facendo ricorso alla conoscenza dell'accelerazione acquisita nell'esercizio 4.1.

4.4

È conveniente usare il teorema dell'impulso.

riferimento non inerziale e misura la risultante delle forze (reali e fittizie) applicate alla persona.

4.2*

Utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica e verificare il risultato facendo ricorso all'espressione dell'accelerazione trovata nell'esercizio 4.2.

4.5

Dal punto di vista della forza F il sistema dei due carrelli può essere considerato come un singolo corpo di massa $(m + M)$. La forza F_A , invece, può essere considerata come l'unica responsabile del moto del singolo carrello di massa m .

4.9

È conveniente, mediante la schematizzazione di corpo singolo, ridursi all'analisi di tre problemi di dinamica del punto, relativi alle masse m_1 , m_2 e m_3 rispettivamente.

4.3*

I piani scabri, su cui il corpo si muove, esercitano su questo una reazione vincolare normale \vec{R}_N e una forza di attrito frenante \vec{A} tangenziale. Il coefficiente di attrito μ è tale che $|\vec{A}| = \mu |\vec{R}_N|$. Dunque il moto del corpo è frenato da una forza costante. Si può far uso del teorema del lavoro e dell'energia cinetica e poi verificare il risultato passando dalla legge oraria del moto del corpo.

4.6

È conveniente usare il teorema dell'energia cinetica.

4.10

È conveniente applicare il teorema dell'energia cinetica alle fasi di salita e discesa, facendo attenzione ai segni del lavoro della forza peso e del lavoro dell'attrito. Utilizzare anche il teorema dell'impulso.

4.7

L'approssimazione consiste nel considerare attiva una forza impulsiva media nell'intervallo di tempo Δt . Utilizzare le proprietà dell'impulso e del lavoro.

4.11

Le azioni meccaniche che le masse M_1 e M_2 trasmettono al supporto sono descritte tramite la tensione del filo. Per il supporto S si tratta di situazioni di equilibrio.

4.8

La bilancia è situata in un sistema di

Leggi delle forze

Basato sul Capitolo 5 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano le leggi delle forze (gravitazionali, elastiche, di attrito, viscose) e i loro effetti sul moto dei corpi. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Due masse puntiformi qualunque, M e m , si scambiano una forza attrattiva universale, espressa dalla *legge di gravitazione*. Si tratta di una forza conservativa, che dunque ammette energia potenziale $U(r)$.

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r} \quad [V.3]$$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad [V.7]$$

Grazie al teorema di Gauss [V.II], si dimostra che la stessa legge [V.3] vale anche se una delle due masse (ad esempio M) non è puntiforme, a condizione che questa abbia simmetria sferica.

La gravitazione universale è la forza che governa i fenomeni alla scala cosmica, e in particolare il moto dei pianeti intorno al Sole: non è difficile mostrare che dalla legge di gravitazione discendono le leggi di Keplero (vedi par. 5.3).

LEGGI DI KEPLERO

1. I pianeti compiono intorno al Sole orbite ellittiche, di cui il Sole è uno dei fuochi.
2. Il moto dei pianeti intorno al Sole si compie con velocità areolare costante.
3. Vi è proporzionalità diretta fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore di ciascuna orbita planetaria.

Punti chiave

Anche la *forza peso* \vec{f}_p con cui ogni oggetto è attratto verso la Terra è una manifestazione della gravitazione universale. L'espressione [V.14] dell'accelerazione di gravità è una relazione approssimata, a causa del fatto che la Terra è solo approssimativamente sferica; ma, soprattutto, a causa del fatto che la Terra non è un sistema di riferimento inerziale, e dunque in essa si manifestano forze apparenti.

La *forza elastica* è riconducibile, a livello microscopico, a interazioni elettromagnetiche fra i costituenti elementari della materia. Grazie all'elasticità, quando un oggetto rigido viene sottoposto a una piccola deformazione \vec{r} , esso viene richiamato verso la posizione di equilibrio da una forza, diretta in senso opposto allo spostamento, di intensità proporzionale allo spostamento stesso.

La forza elastica [V.37] (o [V.37.a]) è una forza conservativa.

Un punto materiale libero di muoversi lungo una direzione fissa (sia questa l'asse x) sottoposto alla forza elastica [V.37] costituisce un *oscillatore armonico unidirezionale*.

Quando un punto materiale si muove entro un fluido (ad esempio aria), questo esercita una forza che si oppone al moto (*forza viscosa di resistenza del mezzo*). Si tratta di una forza non conservativa e dissipativa, il cui lavoro è cioè sempre negativo, e tende dunque a far diminuire via via l'energia meccanica del punto. Il caso più semplice si ha quando nel fluido non si ingenerano vortici (*moto laminare*), e la forza di resistenza risulta opposta alla velocità e in modulo proporzionale ad essa.

$$\vec{f}_p = m\vec{g}$$

dove $\vec{g} \approx \frac{GM\hat{r}}{r^2}$ [V.14]

è detta accelerazione di gravità; r è la distanza dal centro della Terra.

Il principale termine non inerziale correttivo della [V.14] è espresso dalla [V.26].

FORZA ELASTICA

$$\vec{f} = -K\vec{r} \quad [\text{V.37.a}]$$

dove \vec{r} è lo spostamento dalla posizione di equilibrio e K è detta costante elastica. Particolare interesse ha la forza elastica unidimensionale (ad esempio lungo l'asse x) la cui legge è:

$$f_x = -Kx \quad [\text{V.37}]$$

ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA ELASTICA

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \quad [\text{V.38}]$$

$$(U(r) = \frac{1}{2}Kr^2 \text{ per la [V.37.a]}).$$

EQUAZIONE DINAMICA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \quad [\text{V.41}]$$

LEGGE ORARIA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad [\text{V.42}]$$

$$\text{dove } \omega = \sqrt{K/m}$$

FORZA DI RESISTENZA VISCOSA

$$\vec{f} = -\beta\vec{v} \quad [\text{V.43}]$$

In particolare, l'equazione dell'oscillatore armonico in presenza di resistenza viscosa diviene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m}x = 0 \quad [\text{V.50}]$$

la cui legge oraria è, di norma, un'oscillazione smorzata:

Punti chiave

Capita spesso il caso che un *vincolo* (un piano di appoggio, una cerniera, un binario ecc.) costringa il moto del punto a rispettare opportune condizioni geometriche (moto su traiettoria prestabilita; moto rettilineo ecc.). Per fare ciò, i vincoli esercitano sul punto in movimento una forza risultante (detta *reazione vincolare*) che non è a priori nota. Pertanto, i vincoli introducono al primo membro dell'equazione del moto $\vec{f} = m\vec{a}$ un'ulteriore incognita dinamica \vec{R} :

$$\vec{f} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$\vec{f} = \text{risultante delle forze attive}$$

[V.58]

$$\vec{R} = \text{risultante delle reazioni vincolari}$$

Grazie ai vincoli, tuttavia, le tre incognite cinematiche al secondo membro della [V.58] ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) non sono più fra di loro indipendenti.

Il caso più semplice si ha quando la reazione vincolare ha solo componente N normale al vincolo; o meglio quando è trascurabile la componente f_t della reazione parallela al vincolo (*vincoli privi di attrito*). In questo caso, le incognite dinamiche introdotte dal vincolo al primo membro della [V.58] sono in numero pari alle incognite cinematiche che esso elimina al secondo membro: la [V.58] consente allora di risolvere il moto e di determinare le incognite dinamiche \vec{R} . Ciò può essere fatto tramite la procedura illustrata, a livello metodologico, nel paragrafo 5.8.

In presenza di attriti, nota la componente normale N della reazione vincolare, la forza di attrito f_t (componente tangenziale della reazione vincolare \vec{R}) può essere determinata ricorrendo alle *leggi empiriche dell'attrito*.

ATTRITO STATICO

$$f_t \leq \mu_s N \quad [V.67]$$

(μ_s : coefficiente di attrito statico)

ATTRITO CINEMATICO RADENTE

$$\vec{f}_t = -\mu_c N \hat{v} \quad [V.69]$$

(μ_c : coefficiente di attrito cinematico)

ATTRITO VOLVENTE

$$\vec{f}_t = -\mu_v N \hat{v} \quad [V.71]$$

(μ_v : coefficiente di attrito volvente)

Se all'oscillatore armonico smorzato si applica una forza sinusoidale $F \sin \omega_0 t$, si ha un *oscillatore forzato*. Dopo un breve periodo di assestamento, l'oscillatore oscilla con pulsazione pari alla pulsazione forzante ω_0 . Quando la pulsazione forzante ω_0 si approssima alla pulsazione ω del corrispondente oscillatore libero ($\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$, vedi eq. [V.55]) si ha la *condizione di risonanza*.

EQUAZIONE DINAMICA DELL'OSCILLATORE FORZATO

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F \sin \omega_0 t \quad [V.78]$$

LEGGE ORARIA

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad [V.79]$$

L'ampiezza x_0 e la fase φ del moto sono calcolabili in termini dei dati m , β , K , F , ω_0 (vedi eq. [V.80]).

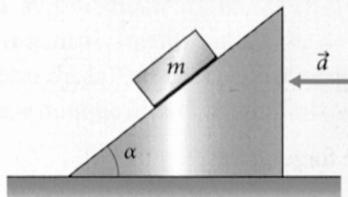
Quando si hanno due *oscillatori fra di loro accoppiati*, la legge oraria è esprimibile in termini dei cosiddetti modi normali di oscillazione descritti dalla [V.86] e dalla [V.87].

Esercizi assistiti e di consolidamento



Esercizio 5.1 (Esercizio correlato: 5.1*)

Un cuneo, con il piano inclinato ad angolo α , è appoggiato su un piano orizzontale sul quale può scorrere. Un corpo di massa m è posto sul piano inclinato. Il coefficiente di attrito μ tra corpo e piano inclinato è tale che il corpo non scivola quando il cuneo è fermo rispetto al piano orizzontale. Se il cuneo è accelerato verso sinistra e se a è la sua massima accelerazione perché il corpo resti fermo, ricavare l'espressione del coefficiente di attrito μ .



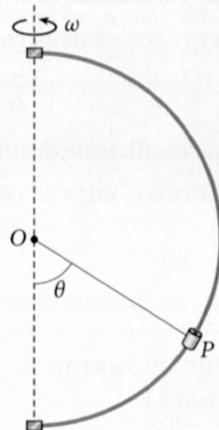
RISPOSTA

$$\mu = \frac{(a - g \tan \alpha)}{(g + a \tan \alpha)}$$



Esercizio 5.2 (Esercizio correlato: 5.2*)

Un sottile semianello rigido di raggio R ruota con velocità angolare costante intorno al suo diametro disposto verticalmente, come mostrato in figura. Sull'anello può scorrere senza attrito un piccolo manicotto P . Sapendo che il manicotto è in equilibrio quando il raggio OP forma un angolo θ (diverso da zero) con l'asse di rotazione, ricavare l'espressione della velocità angolare ω .

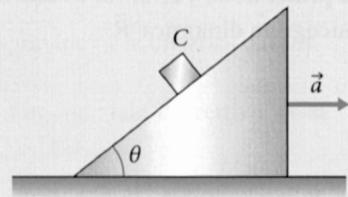


RISPOSTA

$$\omega = [g/(R \cos \theta)]^{1/2}$$

Esercizio 5.1*

Un cuneo con il piano inclinato di un angolo θ , come mostrato in figura, si muove su un piano orizzontale con accelerazione a costante diretta verso destra. Un corpo C è appoggiato sul piano inclinato e si muove su questo. Il coefficiente di attrito dinamico tra corpo e piano inclinato è pari a μ . Ricavare l'espressione a_T dell'accelerazione del corpo rispetto al piano inclinato.

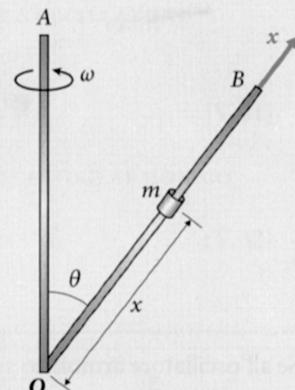


RISPOSTA

$$a_T = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) + a(\cos \theta + \mu \sin \theta)$$

Esercizio 5.2*

Due asti rigide OA e OB sono saldate nel punto O in modo da formare un angolo θ , come mostrato in figura. Nell'asta OB può scorrere senza attrito un manicotto di massa m , mentre il sistema ruota con velocità angolare ω intorno all'asse verticale OA . Ricavare, in funzione della distanza x dal punto O , l'espressione della forza $F_t(x)$, tangenziale all'asta OB , agente sul manicotto e commentarne l'andamento.



RISPOSTA

$$F_t(x) = m(-g \cos \theta + \omega^2 x \sin^2 \theta)$$

● Esercizio 5.3 (Esercizio correlato: 5.3*)

Un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto dal polo della Terra e, rispetto al suolo, raggiunge una quota massima h non trascurabile rispetto al raggio terrestre R . Trascurando la resistenza dell'aria e assumendo noti il raggio R della Terra e l'accelerazione di gravità al suolo g , ricavare l'espressione della velocità di lancio v_0 .

RISPOSTA

$$v_0 = [(2gRh)/(R + h)]^{1/2}$$

Esercizio 5.3*

Il rapporto tra la massa della Terra e la massa della Luna è $\alpha = M_T/M_L = 82$, mentre il rapporto tra la distanza centro Terra-centro Luna D e il raggio R_T della Terra è $\beta = D/R_T = 60$. Ricavare l'espressione della distanza r dal centro della Terra del punto P della congiungente dei centri di Terra e Luna nel quale è nullo il risultante delle forze gravitazionali di Terra e Luna.

RISPOSTA

$$r = \beta R_T \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha})}{(\alpha - 1)} = 54 R_T$$

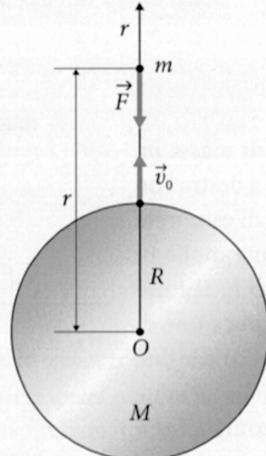
● Esercizio 5.4

Da un luogo a livello del mare un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 41.000$ km/h. Trascurando la resistenza dell'aria, si chiede se il corpo riuscirà a sfuggire alla gravità terrestre.

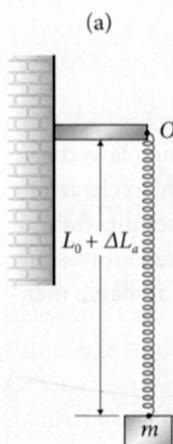
$$R = 6400 \text{ km};$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg};$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$



● Esercizio 5.6 (Esercizi correlati: 5.6* e 5.6**)



Una molla, di lunghezza a riposo L_0 e massa trascurabile, si allunga di una quantità ΔL_a quando l'estremo O è fissato a un supporto rigido e all'altro estremo viene appeso un piccolo corpo di massa m , come mostrato nella parte (a) della figura. Nella situazione della parte (b) il corpo è posto sul supporto alla quota dell'estremo fisso O della molla dal quale, partendo da fermo, viene lasciato cadere per effetto della gravità. Ricavare l'espressione dell'allungamento ΔL della molla nel punto di minima quota raggiunta dopo la caduta.

RISPOSTA

$$\Delta L = [mg + (m^2 g^2 + 2mgKL_0)^{1/2}]/K$$

$$K = mg/\Delta L_a$$

Esercizio 5.6*

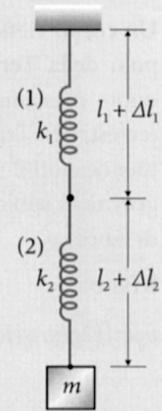
Una molla (1), avente lunghezza a riposo l_1 e costante elastica k_1 , è collegata in serie a una molla (2) di lunghezza a riposo l_2 e costante elastica k_2 . Le due molle hanno masse trascurabili. Se, come mostrato in figura, al sistema delle due molle, allineate in verticale, si appende in equilibrio una massa m , le due molle subiscono allungamenti Δl_1 e Δl_2 , rispettivamente. Ricavare le espressioni:

- della somma Δl degli allungamenti delle due molle;
- del periodo di oscillazione della massa m , se la si sposta dalla posizione di equilibrio e la si lascia andare.

RISPOSTE

a) $\Delta l = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_e}}$

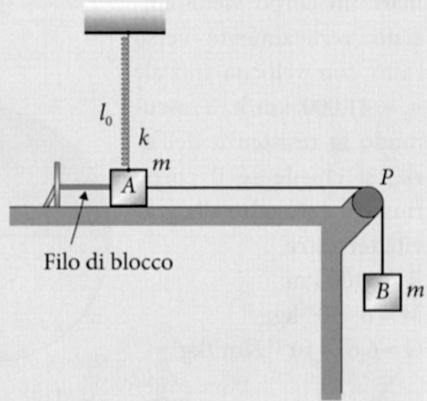


Esercizio 5.6**

Su un piano orizzontale privo di attrito è posto un corpo A , di massa m , collegato: a sinistra con un filo di blocco a un ancoraggio fisso; a destra con un filo di massa trascurabile passante per il piolo liscio P , con all'estremità un corpo B di massa m appeso nel vuoto; sulla verticale a una molla di massa trascurabile, di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 . Il tutto nella configurazione mostrata in figura. A partire da questa situazione di equilibrio iniziale, a un certo istante viene tagliato il filo di blocco e le due masse iniziano a muoversi. Ricavare l'espressione della velocità v dei due corpi nel momento in cui la massa A si stacca dal piano orizzontale ($m = 0,3 \text{ kg}$, $k = 20 \text{ N/m}$, $l_0 = 0,3 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

RISPOSTA

$v = 1,1 \text{ m/s}$



Esercizio 5.7* (Esercizio correlato: 5.7*)

Al tempo $t = 0$ un corpo di massa m con velocità iniziale v_0 si mette in moto su un piano orizzontale liscio sotto l'azione di una forza di resistenza del mezzo $F = -bv$. Ricavare le espressioni della:

- velocità $v = v(t)$;
- velocità $v = v(x)$ quando è stato percorso uno spazio di lunghezza x ;
- distanza totale percorsa fino all'arresto.

RISPOSTE

a) $v(t) = v_0 e^{-bt/m}$

b) $v(x) = v_0 - (bx)/m$

c) $x_{\max} = (v_0 m)/b$

Esercizio 5.7*

Un razzo, partendo da fermo al tempo $t = 0$ quando la sua quota è $y = 0$, viene lanciato lungo la verticale spinto da motori che lo fanno salire con accelerazione costante a . Sul razzo in movimento agisce una forza di resistenza del mezzo $F_r = -bv$. Ricavare l'espressione del lavoro L_r compiuto da questa forza frenante mentre il razzo arriva a quota h .

RISPOSTA

$$L_r = -\frac{b\sqrt{8a}}{3} h^{3/2}$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 5.8

Le trasmissioni via satellite di programmi televisivi intercontinentali avvengono tramite satelliti orbitanti sul piano equatoriale della Terra. Il moto di questi satelliti è tale che essi sono in posizione fissa rispetto a un osservatore terrestre. Sapendo che il periodo di rivoluzione della Luna è circa 27 giorni e che la distanza tra la Terra e la Luna è circa 380.000 km, e supponendo che tutte le orbite che intervengono nel problema siano circolari con centro nel centro della Terra, calcolare il raggio R_s dell'orbita del satellite artificiale.

RISPOSTA

$$R_s = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Esercizio 5.10

Inizialmente un satellite artificiale di massa $m = 1000 \text{ kg}$ è posto in orbita circolare intorno alla Terra a una quota $z_{in} = 5000 \text{ km}$ rispetto al livello del mare. La presenza di atmosfera produce un leggero frenamento che, con lenta spiralizzazione, porta il satellite a un'orbita ancora approssimativamente circolare a quota $z_f = 600 \text{ km}$ rispetto alla superficie terrestre. Di quanto varia l'energia cinetica del satellite? (Raggio terrestre $R_T = 6400 \text{ km}$; accelerazione di gravità $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

RISPOSTA

$$E_c = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Esercizio 5.12

Un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$, posto su un piano orizzontale privo di attrito, si muove di moto armonico unidirezionale sotto l'azione di una forza elastica. Con semplici misure si determinano il periodo di oscillazione $T = 6,28 \text{ s}$ e l'ampiezza $A_0 = 10 \text{ cm}$. Nel momento in cui il corpo raggiunge il massimo di spostamento dal centro di oscillazione, gli viene conferito, tramite un rapido colpo longitudinale, un impulso \vec{I} il cui effetto è di portare l'ampiezza di oscillazione al valore $A = 20 \text{ cm}$. Calcolare il valore dell'impulso I .

RISPOSTA

$$I = 0,17 \text{ Ns}$$

Esercizio 5.9

Un pianetino si muove intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica il cui semiasse maggiore è dato e vale a . L'ellisse ha per fuoco il Sole. Il periodo di rivoluzione è noto e vale T . Ricavare l'espressione della velocità v_B del pianetino nel momento in cui la direzione di \vec{v}_B è perpendicolare al semiasse minore dell'ellisse.

RISPOSTA

$$v_B = 2\pi a/T$$

Esercizio 5.11

Una molla, disposta verticalmente con un estremo fisso, subisce un allungamento $d = 10 \text{ cm}$ rispetto alla sua lunghezza di equilibrio, se le si appende una massa m . La stessa molla, con attaccata la stessa massa, se disposta su un piano orizzontale privo di attrito, imprime alla massa m un moto oscillatorio. Calcolarne il periodo.

RISPOSTA

$$T = 0,63 \text{ s}$$

Esercizio 5.13

La forza di resistenza del mezzo esercitata dall'aria su due sfere dello stesso materiale, che cadono per effetto della gravità, è proporzionale alla velocità e all'area della sezione di ciascuna sfera. Determinare il rapporto tra le velocità di regime delle due sfere in funzione del rapporto $\varrho = R_1/R_2$ tra i raggi delle due sfere.

RISPOSTA

$$v_{1\infty}/v_{2\infty} = \varrho$$

Esercizio 5.15

Un piattello è lanciato su un piano orizzontale con velocità iniziale $v_0 = 5 \text{ m/s}$ parallela al piano. Il piano è scabro e il piattello si ferma dopo aver percorso un tratto $l = 8 \text{ m}$. Dopo quanto tempo, dall'istante iniziale, la velocità si dimezza?

RISPOSTA

$$t = 1,6 \text{ s}$$

Esercizio 5.14

Un pendolo semplice, la cui massa è $m = 1 \text{ kg}$, è posto in oscillazione e, con opportuni impulsi, la sua ampiezza di oscillazione viene fatta crescere. A un certo momento l'ampiezza di oscillazione arriva a essere $a_0 = 45^\circ$: in questa situazione, il filo di sostegno del pendolo si spezza. Determinare il carico di rottura del filo.

RISPOSTA

$$15,5 \text{ N}$$

Esercizio 5.16

Un corpo è appoggiato su una piattaforma orizzontale che ruota intorno a un asse verticale con velocità angolare ω variabile. La distanza tra il corpo e il punto intersezione dell'asse di rotazione con il piano ruotante è $d = 0,1 \text{ m}$. Quando la velocità angolare raggiunge il valore $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$, il corpo, inizialmente fermo, comincia a muoversi. Calcolare il coefficiente di attrito statico tra corpo e piattaforma.

RISPOSTA

$$\mu_s = 0,16$$

Suggerimenti

5.1*

Determinare la componente tangenziale del risultante delle forze applicate al corpo nel sistema di riferimento non inerziale solidale al cuneo.

5.6*

Dallo studio della situazione di equilibrio si constata che il sistema delle due molle in serie si comporta come un'unica molla equivalente. Stabilito ciò, si procede all'analisi dell'oscillatore armonico verticale.

5.7*

Nel moto ascensionale ad accelerazione costante ricavare l'espressione della velocità in funzione della quota e poi eseguire l'integrale del lavoro.

5.2*

Nel sistema non inerziale solidale al sistema ruotante, sono presenti forze reali e forze fintizie. Ricavare il valore di x per cui si annulla la forza F_T e stabilire il tipo di equilibrio che ivi si realizza.

5.6**

Si ha distacco quando il corpo A raggiunge il punto D in cui l'elongazione $(l - l_0)$ della molla è tale che la componente verticale della forza elastica uguaglia in modulo la forza peso agente sul corpo A stesso. La sua velocità in quel punto è legata anche al lavoro della forza peso sul corpo B.

5.8

Utilizzare la terza legge di Keplero.

5.3*

Basta uguagliare le due forze gravitazionali agenti su una massa m posta a distanza r dal centro della Terra.

5.9

La velocità areolare è costante e l'area di un'ellisse di semiassi a e b è πab .

5.10

Utilizzare la seconda legge della dinamica tenendo conto del fatto che il moto è praticamente circolare uniforme.

me, nella situazione iniziale e in quella finale.

5.11

Ricavare la costante elastica della molla dalla condizione di equilibrio; e, da questa, il periodo dell'oscillatore armonico.

5.12

Usare il teorema dell'impulso e la conservazione dell'energia meccanica nei campi di forza conservativi.

5.13

La velocità di regime dipende dalla massa (e quindi dal volume) della sfera e dal coefficiente b (che è proporzionale all'area della sezione della sfera).

5.14

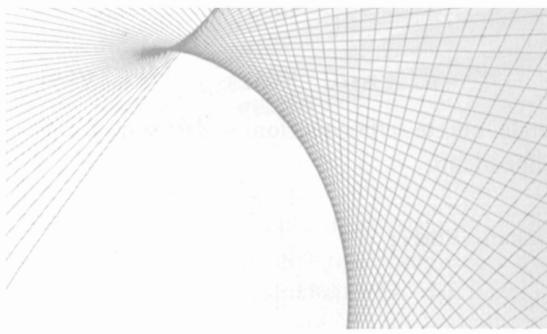
Calcolare la massima tensione del filo (massimo della reazione vincolare) in funzione dell'ampiezza di oscillazione α_0 (corrispondente al punto di minima quota) e uguagliarla al carico di rottura.

5.15

Con il teorema dell'energia cinetica ricavare μ_c . Poi, applicando il secondo principio della dinamica, ricavare la velocità in funzione del tempo.

5.16

Al momento dell'inizio del moto la forza centrifuga uguaglia la forza di attrito. L'equilibrio relativo permane fino a quando la forza di attrito statico riesce a equilibrare la forza centrifuga. La forza di attrito massima f_{max} è legata alla forza peso dalla relazione $f_{max} = \mu_s N$ con $N = mg$.



Leggi della dinamica dei sistemi

Basato sul Capitolo 6 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano le leggi della meccanica dei sistemi materiali estesi (discreti e continui). I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Ogni *sistema meccanico esteso* (sia esso discreto o continuo) può essere schematizzato come composto da un certo numero N di punti materiali; per ognuno di tali punti può essere scritta la legge $\vec{f} = m\vec{a}$. Conviene trattare separatamente le forze esterne e le forze interne agenti su ciascun punto. La soluzione del sistema di equazioni differenziali [VI.2] (3N equazioni differenziali scalari) è in generale di proibitiva difficoltà.

Oltre alla [VI.2] (il cui secondo membro scriveremo in termini della quantità di moto $\vec{q}_i : m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{q}_i}{dt}$), per ciascun punto può essere scritta l'equazione del momento angolare [VI.5] e l'equazione che esprime il teorema dell'energia cinetica [VI.6]. Per ciascun punto materiale, la [VI.5] e la [VI.6] sono conseguenze della [VI.4].

$$\vec{f}_i = m_i \vec{a}_i \quad [\text{VI.1}]$$

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = m_i \vec{a}_i \quad [\text{VI.2}]$$

$\vec{f}_i^{(e)}$ (risultante delle forze esterne agenti sul punto P_i) dipende dalle coordinate del punto P_i

$\vec{f}_i^{(i)}$ (risultante delle forze interne agenti su P_i) dipende dalle coordinate di tutti i punti costituenti il sistema.

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{q}_i}{dt} \quad [\text{VI.4}]$$

$$\vec{m}_i^{(e)} + \vec{m}_i^{(i)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q}_i \quad [\text{VI.5}]$$

$$L_i^{(e)} + L_i^{(i)} = K_i(B_i) - K_i(A_i) \quad [\text{VI.6}]$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

Punti chiave

Sommando membro a membro sull'indice i la [VI.4], la [VI.5] e la [VI.6], si ottengono due equazioni vettoriali e una equazione scalare. Queste equazioni sono in generale risolvibili con relativa facilità e consentono di ricavare informazioni parziali, ma utilissime, sul moto del sistema.

Su basi empiriche (a partire, cioè, da osservazioni sperimentali) si enuncia il *terzo principio della dinamica: in ogni riferimento inerziale, quantità di moto totale e momento angolare totale di un sistema materiale libero si conservano.*

Da ciò si deduce che: *risultante e momento risultante delle forze interne sono nulli.*

Tenuto conto del terzo principio ([VI.11]), e qualora il polo Ω sia fisso ovvero coincida con il centro di massa ($\vec{v}_\Omega = 0$, ovvero $\vec{v}_\Omega = \vec{v}_c$), le [VI.7] e [VI.8] si riducono alle [VI.28]. Queste sono dette *equazioni cardinali della dinamica dei sistemi*.

Il lavoro $L^{(i)}$ delle forze interne *non* è invece in generale nullo; esso si annulla solo quando il sistema materiale è un *corpo rigido*.

Se il sistema materiale ha massa M costante, il secondo membro della [VI.28.a] si riduce a $\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_c$ (\vec{a}_c = accelerazione del centro di massa): il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale di massa M , cui sia applicato il risultante $\vec{F}^{(e)}$ delle forze esterne.

Il momento angolare totale \vec{P} del sistema ammette un'interpretazione cinematica semplice solo nel caso di sistemi rigidi. Ciò verrà discusso nel prossimo capitolo.

Quando due corpi si muovono in virtù di sole forze interne, il moto del secondo rispetto al primo si compie come se il primo fosse fermo, pur di usare per il secondo la *massa ridotta* al posto della massa m_2 .

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad [\text{VI.7}]$$

$$\vec{M}^{(e)} + \vec{M}^{(i)} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{Q} \quad [\text{VI.8}]$$

$$L^{(e)} + L^{(i)} = K(B) - K(A) \quad [\text{VI.9}]$$

In generale, queste sette equazioni scalari sono fra di loro indipendenti.

Per un sistema libero:

$$\vec{Q} = \text{costante}$$

$$\vec{P} = \text{costante}$$

Segue:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(i)} = 0 \\ \vec{M}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad [\text{VI.11}]$$

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad [\text{VI.28.a}]$$

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad [\text{VI.28.b}]$$

$$L^{(e)} = K(B) - K(A)$$

per un corpo rigido.

$$\vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_c \quad [\text{VI.30}]$$

Teorema del centro di massa

PROBLEMA DEI DUE CORPI

massa ridotta: $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Punti chiave

Quando la massa del sistema non è costante [$M = M(t)$], la [VI.28.a] non si riduce più alla [VI.30]; occorre usare la [VI.41].

SISTEMI A MASSA VARIABILE

$$\vec{F}^{(e)} = M(t) \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec{V} - \vec{v}) \quad [\text{VI.41}]$$

\vec{V} : velocità del centro di massa;

\vec{v} : velocità del propellente nel laboratorio (nel caso di moto di un razzo).

Per il calcolo dell'energia cinetica di un sistema materiale qualunque, risulta di grande utilità il *teorema di Koenig*: l'energia cinetica totale può essere espressa come somma dell'energia cinetica del baricentro e dell'energia cinetica del moto intorno al baricentro.

Quando si abbia a che fare con sistemi rigidi, lo stesso effetto prodotto dal più generale sistema di forze Σ può essere prodotto da un'unica forza \vec{F} e da un'unica coppia di momento \vec{M} . \vec{F} e \vec{M} costituiscono un sistema di forze equivalenti a Σ .

Anche il lavoro elementare dL prodotto dal sistema di forze Σ , quando applicato a un sistema rigido, può essere espresso in termini di \vec{F} e di \vec{M} .

Se il sistema di forze Σ è un *sistema di forze parallele*, esso è equivalente a un'unica forza pari al risultante \vec{F} , applicato nel *centro delle forze parallele*.

$$K = \frac{1}{2} M v_C^2 + K' \quad [\text{VI.46}]$$

M : massa totale;

v_C : velocità del baricentro;

K' : energia cinetica del sistema in un riferimento baricentricale in moto traslatorio.

\vec{F} è pari al risultante del sistema di forze Σ .

Se \vec{F} è applicato nel punto qualunque Ω , \vec{M} è pari al momento di Σ rispetto a Ω .

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega dt + \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt \quad [\text{VI.50}]$$

\vec{v}_Ω : velocità istantanea del punto Ω ;

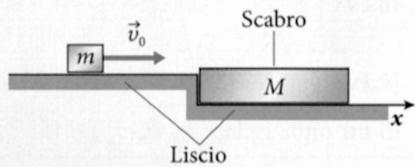
$\vec{\omega}$: velocità angolare istantanea del sistema intorno a Ω .

Quando il sistema Σ delle forze parallele sia rappresentato dalle forze peso, il centro delle forze parallele (detto *baricentro*) coincide con il centro di massa.

Esercizi assistiti e di consolidamento

Esercizio 6.1 (Esercizio correlato: 6.1*)

Un supporto orizzontale fisso e privo di attrito è costituito da due parti separate da un gradino, come mostrato in figura. Appoggiata all'alzata verticale del gradino c'è una lastra di massa M e altezza pari a quella del gradino. La lastra può scorrere senza attrito sul supporto orizzontale su cui appoggia. La superficie superiore della lastra è scabra. Dalla parte sinistra del supporto arriva un corpo, di massa m e velocità v_0 , che entra nella parte superiore della lastra e si sposta su questa incontrando un attrito. Dopo un certo percorso il corpo si ferma sulla lastra. Così lastra e corpo iniziano a muoversi insieme verso destra. Ricavare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza di attrito tra corpo e lastra.



RISPOSTA

$$L_{\text{ATTR}} = (mMv_0^2)/[2(m + M)]$$

Esercizio 6.1*

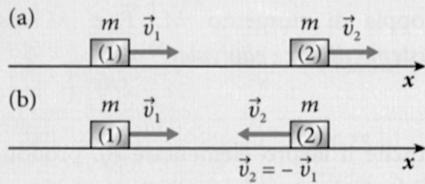
Nel sistema di riferimento del laboratorio, un corpo (1) si muove orizzontalmente con velocità \vec{v}_1 costante, nel verso positivo dell'asse x , mentre un corpo (2) si muove con velocità \vec{v}_2 costante, ancora orizzontalmente lungo l'asse x , come mostrato in figura. I due corpi hanno la stessa massa m . Ricavare l'espressione della quantità di moto totale e dell'energia cinetica totale nel sistema di riferimento solidale con il c.d.m. nei seguenti casi:

- i due corpi si muovono nella stessa direzione e versi concordi;
- i due corpi si muovono in versi opposti, con $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

RISPOSTE

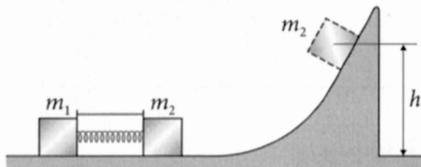
$$\text{a)} Q_C = 0 \quad K_C = \frac{m}{4}(v_1 - v_2)^2$$

$$\text{b)} Q_C = 0 \quad K_C = mv_1^2$$



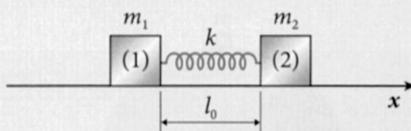
Esercizio 6.2 (Esercizi correlati: 6.2* e 6.2**)

Su un supporto fisso, sagomato come in figura e privo di attrito, sono posti due corpi di masse m_1 e m_2 rispettivamente. Tra i due corpi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un filo di collegamento tra i corpi stessi. A sinistra di questo sistema il supporto è orizzontale, mentre a destra la parte orizzontale si raccorda a un tratto di curva in salita. A un certo istante il filo viene tagliato e i due corpi vengono messi in moto dalla molla. Si osserva che il corpo di massa m_2 riesce a salire sul tratto di supporto a destra fino a un'altezza h , prima di fermarsi. Ricavare l'espressione del modulo della velocità v_1 del corpo m_1 mentre si muove verso sinistra.



RISPOSTA

$$v_1 = [m_2 \cdot (2gh)^{1/2}]/m_1$$

Esercizio 6.2*

Su un piano orizzontale privo di attrito sono appoggiati i

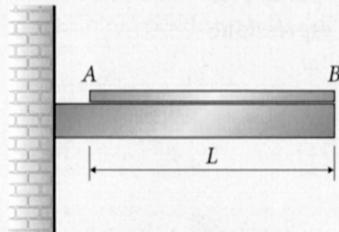
corpi (1) e (2), di masse m_1 e m_2 rispettivamente. I due corpi sono collegati da una molla di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k . Spostando i corpi dalla loro posizione di equilibrio e lasciandoli andare da fermi, il sistema si mette a oscillare. Ricavare l'espressione del periodo di oscillazione.

RISPOSTA

$$\left\{ \begin{array}{l} T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} \\ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{array} \right.$$

Esercizio 6.3 (*Esercizio correlato: 6.3**)

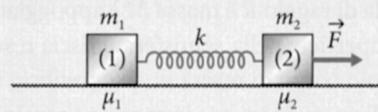
Un nastro flessibile e omogeneo è appoggiato su un supporto orizzontale privo di attrito, inizialmente per tutta la sua lunghezza L .



Con un piccolo spostamento in direzione orizzontale, una parte del nastro comincia a penzolare nel vuoto verso il basso per effetto della gravità e tutto il nastro inizia a muoversi. Ricavare l'espressione della velocità del nastro nel momento in cui il suo estremo A è arrivato al bordo del supporto e tutto il nastro inizia a cadere verticalmente per effetto della gravità.

RISPOSTA

$$v = (gL)^{1/2}$$

Esercizio 6.2**

Due corpi (1) e (2), di date masse m_1 e m_2

rispettivamente, sono posti su un piano orizzontale scabro e sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k . I coefficienti di attrito dinamico tra corpi e piano sono μ_1 e μ_2 , rispettivamente. Una forza orizzontale costante applicata al corpo (2) trascina il sistema dei due corpi a velocità costante. Ricavare l'espressione del modulo F della forza e dell'allungamento Δl della molla.

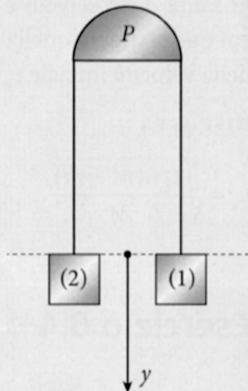
RISPOSTE

$$F = g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

$$\Delta l = \frac{\mu_1 m_1 g}{k}$$

Esercizio 6.3*

Due corpi (1) e (2), di masse m_1 e $m_2 < m_1$ rispettivamente, sono collegati da un filo inestensibile di massa trascurabile che passa per un piolo P liscio e posti nella configurazione mostrata in figura. Le due masse, inizialmente mantenute ferme alla stessa quota, a un certo istante vengono lasciate libere di muoversi. Ricavare l'espressione della loro accelerazione e del modulo della loro velocità quando si sono spostate della quantità h .

**RISPOSTE**

$$a = g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$v = \sqrt{2gh \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}}$$

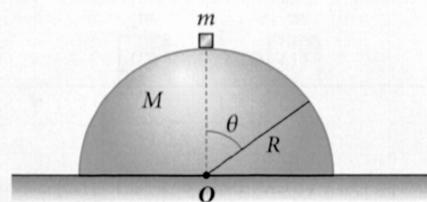
Esercizio 6.4

(Esercizi correlati: 6.4* e 6.4**)

Una semisfera rigida di raggio R e massa M è appoggiata su un piano orizzontale liscio. La superficie della semisfera è liscia e sulla sua sommità è appoggiato un piccolo corpo di massa m , in equilibrio instabile, mentre la semisfera è ferma. A un certo istante la massa m comincia a scivolare sulla superficie sferica. Ricavare l'espressione della velocità v della semisfera rispetto al piano orizzontale nell'istante in cui il raggio passante per il corpo forma un angolo θ rispetto alla verticale, essendo θ inferiore all'angolo per il quale il corpo si stacca dalla semisfera.

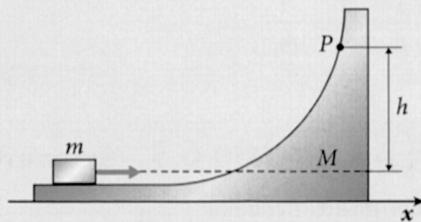
RISPOSTA

$$v = m \cos \theta \sqrt{\frac{2gR(1 - \cos \theta)}{(M + m) \cdot (M + m \sin^2 \theta)}}$$



Esercizio 6.4*

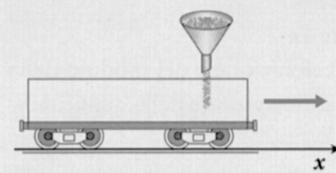
Uno scivolo di massa M , sagomato come in figura, è appoggiato su un piano orizzontale liscio. Sulla base orizzontale dello scivolo è appoggiato un corpo di massa m . Tra corpo e superficie dello scivolo, l'attrito è trascurabile. A partire da una situazione di equilibrio, a un certo istante al corpo di massa m viene impresso un impulso che lo mette in moto verso la parte in salita dello scivolo e lo fa arrivare, con velocità nulla, a un punto P la cui quota supera quella di partenza della quantità h . Ricavare l'espressione della velocità iniziale v_0 del corpo.



RISPOSTA

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh(M+m)}{M}}$$

Esercizio 6.4**



Un vagone di massa M porta un cassone e procede, senza apprezzabili attriti, lungo un binario orizzontale con velocità iniziale v_0 . A partire da questa situazione iniziale, a un certo istante sul cassone comincia ad arrivare sabbia che cade verticalmente in misura di μ kg/s. Ricavare, in funzione del tempo, l'espressione dell'accelerazione del vagone.

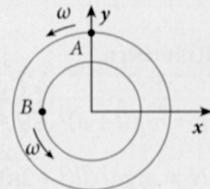
RISPOSTA

$$a(t) = -\frac{\mu v_0 M_0}{(M_0 + \mu t)^2}$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 6.5

Il punto materiale A , di massa $m_A = 0,2 \text{ kg}$, si muove su una traiettoria circolare di raggio $R_A = 20 \text{ cm}$, con velocità angolare costante $\omega = 2 \text{ rad/s}$, occupando all'istante iniziale la posizione indicata con A in figura [di coordinate $(0, R_A)$]. Il punto materiale B , di massa $m_B = 0,3 \text{ kg}$, si muove su una traiettoria circolare di raggio $R_B = 12 \text{ cm}$, con la stessa velocità angolare del punto A , occupando all'istante iniziale la posizione B della figura [di coordinate $(-R_B, 0)$]. Calcolare l'accelerazione del centro di massa.

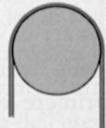


RISPOSTA

$$a = 0,43 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 6.6

Una cinghia omogenea di lunghezza L è appoggiata a cavallo di un piolo cilindrico, liscio, orizzontale e fisso, di raggio molto minore di L . Inizialmente, dalle due parti del piolo pendono tratti verticali di cinghia di ugual lunghezza $L/2$. A partire da questa situazione iniziale di equilibrio, per effetto di un piccolo spostamento, la cinghia inizia a scivolare sotto l'azione della forza di gravità. Calcolare l'accelerazione della cinghia quando da un lato del piolo pende un tratto di lunghezza $3/4 L$ (e dall'altro lato $1/4 L$).

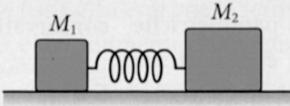


RISPOSTA

$$a = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 6.7

Su un piano orizzontale privo di attrito sono posti due blocchi di masse $M_1 = 2 \text{ kg}$ e $M_2 = 3 \text{ kg}$ rispettivamente. Tra i due blocchi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un corto filo di collegamento tra i blocchi. A un certo istante il filo viene tagliato e i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla. Si osserva che la velocità acquistata dalla massa M_1 è $v_1 = 0,5 \text{ m/s}$. Qual è l'energia elastica della molla nella sua configurazione iniziale?

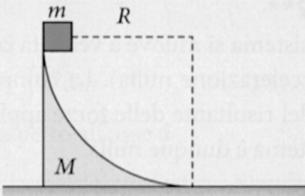


RISPOSTA

$$0,42 \text{ J}$$

Esercizio 6.8

Un cuneo di massa $M = 2 \text{ kg}$, la cui sezione è delimitata da un quarto di cerchio di raggio $R = 59 \text{ cm}$, è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Un corpo A , di massa $m = 0,5 \text{ kg}$, inizialmente tenuto fermo alla sommità del cuneo (vedi figura), può scivolare senza attrito sul profilo circolare del cuneo stesso. Inizialmente il sistema cuneo + corpo è fermo rispetto al piano orizzontale; poi il corpo viene lasciato libero e scivola lungo il profilo del cuneo. Calcolare la velocità v con cui arretra il cuneo, quando il corpo A ha raggiunto il piano orizzontale.



RISPOSTA

$$v = 0,7 \text{ m/s}$$

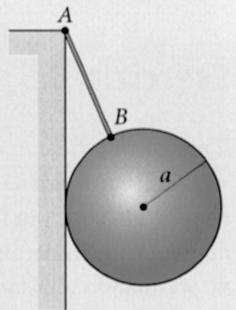
Esercizio 6.9

Una sfera omogenea, di massa m e raggio a , è collegata, in un punto B della sua superficie, a un filo flessibile, inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza l . Il filo è ancorato nel punto A a una parete verticale, rigida e liscia. Ricavare l'espressione della tensione del filo e della reazione vincolare della parete.

RISPOSTE

$$\tau = mg(l+a)/\sqrt{l(l+2a)}$$

$$N = mga/\sqrt{l(l+2a)}$$



Suggerimenti

6.1*

Ricavare la velocità del c.d.m. a partire dalla definizione di posizione $x_c(t)$. Esprimere le velocità dei due corpi nel sistema di riferimento solidale con il c.d.m.

6.2*

Il sistema dei due corpi, tra i quali è attiva la forza elastica, è isolato. L'estensione della molla è esprimibile in funzione della distanza relativa tra i due corpi.

6.2**

Il sistema si muove a velocità costante (accelerazione nulla). La componente x del risultante delle forze applicate al sistema è dunque nulla.

6.3*

Conviene usare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica per esprimere la velocità $v(t)$ in funzione della quota $y(t)$. E poi, da $v = v(t)$, si ricava l'accelerazione a .

6.4*

Dopo l'impulso iniziale è nulla la componente x delle forze esterne al sistema (corpo + scivolo) e quindi $Q_x = \text{costante}$. Per collegare la quota h alla velocità iniziale v_0 , utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

6.4**

Si tratta di un corpo di massa variabile $M(t) = M_0 + \mu t$. La componente x del risultante delle forze è nulla.

6.5

Ricavare le equazioni parametriche del c.d.m. $x_c(t)$, $y_c(t)$, e dimostrare che la traiettoria del c.d.m. è circolare. Osservare che il moto del c.d.m. è circolare uniforme di velocità angolare ω e da qui ricavare l'accelerazione del c.d.m.

6.6

Considerare come due corpi singoli i due tratti di cinghia pendenti dai due

lati del piolo. Tenere conto del fatto che, nei punti della cinghia dai quali i due tratti pendenti iniziano a essere verticali, il modulo della tensione ha lo stesso valore.

6.7

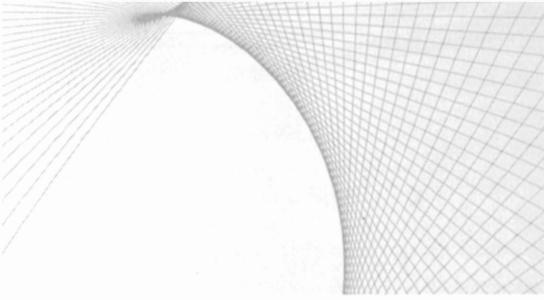
Le masse si muovono per effetto di sole forze interne e pertanto la quantità di moto totale non varia nel tempo. Nella fase di decompressione della molla c'è una trasformazione di energia potenziale elastica in energia cinetica del sistema (forze elastiche conservative).

6.8

In direzione orizzontale le forze esterne sono nulle. Utilizzare anche il teorema dell'energia cinetica.

6.9

Si tratta di una situazione di equilibrio in cui sono nulli il risultante e il momento risultante delle forze esterne.



Sistemi rigidi

Basato sul Capitolo 7 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano la meccanica dei sistemi rigidi, i cui concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Il momento angolare assiale P_a di un sistema rigido (proiezione di \vec{P} sull'asse fisso \hat{a}) si esprime in termini della velocità angolare ω e del momento di inerzia I_a rispetto all'asse.

Noto il momento di inerzia I_c rispetto a un asse \hat{c} baricentrale, il *teorema di Huygens-Steiner* consente di calcolare il momento di inerzia I_a rispetto a un altro asse qualunque \hat{a} parallelo a \hat{c} .

Gli assi baricentrali \hat{c} , al variare del loro orientamento, costituiscono una *stella di rette*. Fra tutti gli assi baricentrali, si individua una terna $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ ortogonale di assi rispetto ai quali il sistema materiale presenta particolare simmetria.

$$P_a = I_a \omega \quad [VII.7]$$

dove

$$I_a = \int h^2 dm \quad [VII.5]$$

è il momento di inerzia rispetto all'asse \hat{a} (h : distanza di dm da \hat{a}).

$$I_a = I_c + Md^2 \quad [VII.9]$$

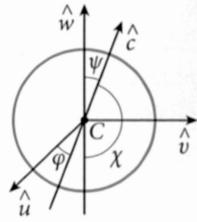
M : massa totale del sistema;
 d : distanza fra gli assi \hat{a} e \hat{c} .

Gli assi

$$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$$

sono detti *assi centrali di inerzia*. Indichiamo con I_u, I_v, I_w i momenti di inerzia rispetto agli assi centrali (detti *momenti centrali di inerzia*).

Punti chiave



Dato un asse baricentrale \hat{c} qualunque, siano φ, χ, ψ gli angoli che esso forma con gli assi centrali $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$. Il momento di inerzia I_c rispetto all'asse \hat{c} è immediatamente esprimibile in termini di I_u, I_v, I_w e di φ, χ, ψ .

$$I_c = I_u \cos^2 \varphi + I_v \cos^2 \chi + I_w \cos^2 \psi \quad [\text{VII.10.a}]$$

L'energia cinetica K e il momento angolare \vec{P} (rispetto a un polo fisso Ω qualunque) di un sistema rigido sono ora facilmente esprimibili in termini della velocità istantanea \vec{v}_c del baricentro e delle caratteristiche istantanee del moto intorno al baricentro.

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad [\text{VII.14}]$$

$$\vec{P} = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{P}_c \quad [\text{VII.16}]$$

M : massa totale;

\vec{v}_c : velocità istantanea del centro di massa;

I_c : momento di inerzia rispetto all'asse istantaneo di rotazione;

$\vec{\omega}$: velocità angolare istantanea;

\vec{r}_c : vettore posizione del baricentro (rispetto a Ω);

\vec{P}_c : momento angolare polare rispetto al baricentro.

Del tutto in generale, il momento angolare polare \vec{P}_c può essere scritto, tramite le [VII.19], in termini dei momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati e dei prodotti di inerzia. Scegliendo come riferimento una terna di assi centrali di inerzia, \vec{P}_c assume una forma semplificata detta *forma canonica*.

Forma canonica di \vec{P}_c :

$$\begin{cases} P_u = \omega_u I_u \\ P_v = \omega_v I_v \\ P_w = \omega_w I_w \end{cases} \quad [\text{VII.20}]$$

Come si vede, il momento angolare polare \vec{P}_c non è in generale parallelo alla velocità angolare $\vec{\omega}$ (vedi la [VII.23]).

Si ha parallelismo fra \vec{P}_c e $\vec{\omega}$ solo se la rotazione avviene intorno a un asse principale di inerzia; ciò è sempre vero, in particolare se il sistema materiale è dotato di completa simmetria ($I_u = I_v = I_w$).

In generale, il moto di un sistema rigido intorno al baricentro è governato dalle equazioni di Eulero [VII.59].

Di grande rilievo è il caso in cui sia nullo il momento risultante delle forze esterne rispetto al baricentro ($\vec{M}^{(e)} = 0$). Ciò vale in particolare per un corpo non vincolato in moto per azione della sola forza di gravitazione (pianeti intorno al Sole; grave in prossimità della Terra ecc.).

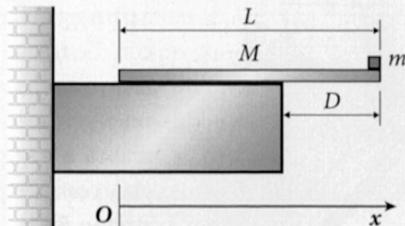
In questo caso, il moto è risolvibile ricorrendo al *teorema di Poinsot*.

Al moto di rotazione intorno all'asse si sovrappone in generale un moto di precessione e uno di nutazione dell'asse.

Esercizi assistiti e di consolidamento



Esercizio 7.1 (Esercizio correlato: 7.1*)



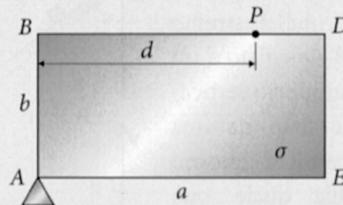
Su un supporto orizzontale fisso è appoggiata una sbarra omogenea di sezione costante, massa M e lunghezza L . La sbarra sporge dal supporto per un tratto di lunghezza D , come mostrato in figura. All'estremità della parte sporgente della sbarra è posto un piccolo corpo di massa m . Ricavare l'espressione del massimo valore della massa m perché la sbarra resti in equilibrio sul supporto e non inizi a ribaltarsi.

RISPOSTA

$$m_{\max} = M \left(\frac{L}{2D} - 1 \right)$$

Esercizio 7.1*

Una lastra rigida piana, omogenea con densità superficiale σ , ha forma rettangolare di lati a e b . La lastra è disposta su un piano verticale con il vertice inferiore A appoggiato a un supporto fisso, come mostrato in figura. Applicando al punto P del lato BD , a distanza d dal vertice B , una forza avente direzione verticale, si ottiene equilibrio della lastra con il lato BD in direzione orizzontale. Ricavare l'espressione del modulo F della forza applicata in P e l'espressione della reazione vincolare nel punto A .

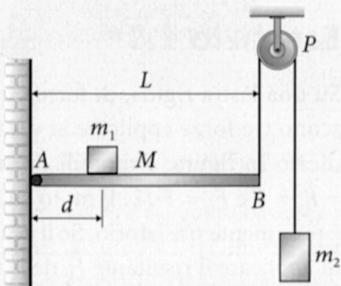


RISPOSTE

$$\begin{cases} F = \frac{\sigma a^2 b g}{2d} \\ R = \sigma a b g \left(1 - \frac{a}{2d} \right) \end{cases}$$

Esercizio 7.2 (Esercizio correlato: 7.2*)

Un'asta rigida omogenea AB , di lunghezza L e massa M , è vincolata in A da una cerniera intorno alla quale può ruotare. L'estremo B della sbarra è collegato a un filo, inestensibile e di massa trascurabile, che passa su una pulleggia per poi connettersi all'altro estremo a un corpo di massa m_2 . Sulla sbarra, a distanza d dall'estremo A , è posto un corpo di massa m_1 , come mostrato in figura. Assumendo note le grandezze m_1 , M , L e d , ricavare l'espressione della massa m_2 che garantisce l'equilibrio del sistema nella configurazione mostrata in figura.



RISPOSTA

$$m_2 = (2m_1 d + ML)/2L$$

Esercizio 7.2*

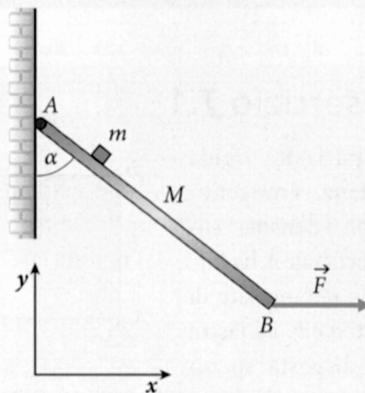
Un'asta rigida, di lunghezza L e massa M , ha un estremo vincolato al punto O , intorno al quale può ruotare senza attrito. L'altro estremo A è collegato a un corpo di massa m_1 tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che passa sul piolo liscio P mostrato in figura. A distanza $L/3$ dal punto O , sull'asta è fissata una massa m_2 . L'angolo compreso tra asta e filo è θ . Ricavare l'espressione dell'angolo β compreso, all'equilibrio, tra l'asta e la direzione orizzontale.

RISPOSTA

$$\cos \beta = \frac{6m_1 \sin \theta}{(2m_2 + 3M)}$$

Esercizio 7.3 (Esercizio correlato: 7.3*)

Una sbarra omogenea a sezione costante, di massa M e lunghezza L , ha l'estremo A vincolato a un supporto verticale fisso da una cerniera intorno alla quale può ruotare. A distanza $L/4$ dall'estremo A è fissato un piccolo corpo di massa m . All'estremo B della sbarra è applicata una forza F orizzontale che la tiene in equilibrio. Ricavare: a) l'espressione dell'angolo α tra la sbarra e la verticale; b) l'espressione della reazione vincolare R sulla cerniera (modulo e direzione).

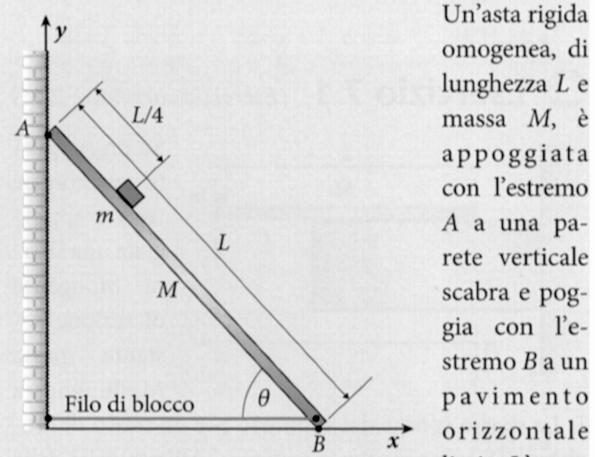


mo A è fissato un piccolo corpo di massa m . All'estremo B della sbarra è applicata una forza F orizzontale che la tiene in equilibrio. Ricavare: a) l'espressione dell'angolo α tra la sbarra e la verticale; b) l'espressione della reazione vincolare R sulla cerniera (modulo e direzione).

RISPOSTA

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{4F}{g(m+2M)} \\ R = \sqrt{F^2 + (M+m)^2 g^2} \\ \tan \theta = \frac{F}{(M+m)g} \quad (\varphi = \text{angolo tra } \vec{R} \text{ e asse } y) \end{array} \right.$$

Esercizio 7.3*



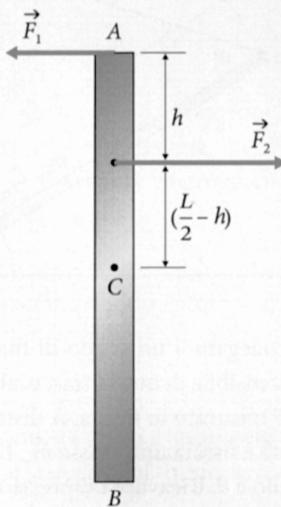
Un'asta rigida omogenea, di lunghezza L e massa M , è appoggiata con l'estremo A a una parete verticale scabra e poggia con l'estremo B a un pavimento orizzontale liscio. L'estremo B è collegato alla parete con un filo inestensibile orizzontale che tiene la sbarra in equilibrio con un'inclinazione θ rispetto al piano orizzontale, come mostrato in figura. A distanza $L/4$ dall'estremo A è fissato alla sbarra un piccolo corpo di massa m . Il coefficiente di attrito statico tra la sbarra e la parete scabra verticale è pari a μ . Ricavare l'espressione della tensione τ del filo.

RISPOSTA

$$\tau = -\frac{g}{4} \frac{(2M+3m)}{(\mu + \tan \theta)}$$

Esercizio 7.4 (Esercizio correlato: 7.4*)

Una sbarra omogenea AB , di lunghezza L e massa m , si muove su un piano orizzontale con moto puramente traslatorio sotto l'azione di due forze antiparallele F_1 e F_2 . La distanza tra le rette di applicazione di queste forze è h , come mostrato in figura. Assumendo nota l'intensità della forza F_2 , ricavare l'accelerazione della sbarra.



RISPOSTA

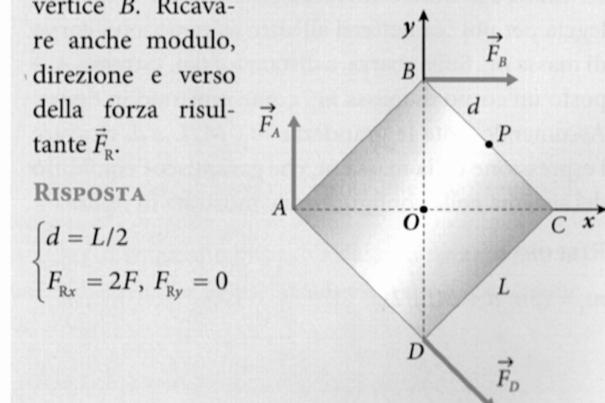
$$a = (2hF_2)/mL$$

Esercizio 7.4*

Su una lastra rigida, di forma quadrata di lato L , agiscono tre forze applicate ai vertici A , B e D , come indicato in figura. I moduli di queste forze sono $F_A = F_B = F$ e $F_D = F\sqrt{2}$. Il moto che ne deriva per la lastra è puramente traslatorio. Se il punto P al quale si sceglie di applicare il risultante \vec{F}_R delle forze date è situato sul lato BC , ricavare l'espressione della sua distanza d dal vertice B . Ricavare anche modulo, direzione e verso della forza risultante \vec{F}_R .

RISPOSTA

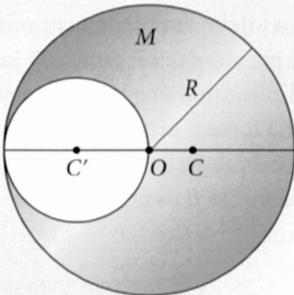
$$\left\{ \begin{array}{l} d = L/2 \\ F_{Rx} = 2F, F_{Ry} = 0 \end{array} \right.$$



Esercizio 7.5

(Esercizio correlato: 7.5*)

Un disco omogeneo di raggio R ha il foro mostrato in figura. La parte piena del disco, azzurra in figura, ha massa M . Ricavare l'espressione del momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al disco passante per il centro di massa C del disco forato.

**RISPOSTA**

$$I_C = (37/72) \cdot MR^2$$

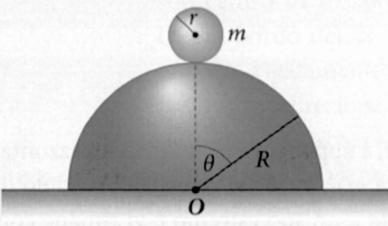
Esercizio 7.6

(Esercizio correlato: 7.6*)

Una sfera omogenea di raggio r parte da ferma dalla sommità di un supporto fisso di forma sferica di raggio R . La superficie del supporto è tale da garantire che la sfera rotoli senza strisciare mentre scende lungo il supporto fisso. Ricavare l'espressione della velocità angolare ω della sfera nel momento in cui si stacca dal supporto.

RISPOSTA

$$\omega = \sqrt{\frac{10g(R+r)}{17r^2}}$$

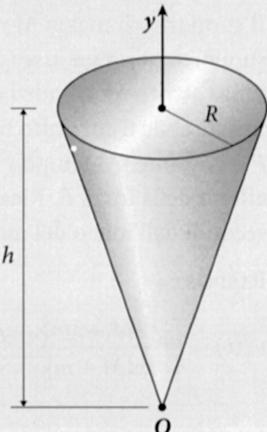


Esercizio 7.5*

Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse di un cono omogeneo di massa M , raggio di base R e altezza h .

RISPOSTA

$$I = \frac{3}{10}MR^2$$



Esercizio 7.6*

Una sfera omogenea di massa M e raggio R rotola, senza strisciare, su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Nell'ipotesi che all'istante $t = 0$ la sfera, da ferma, venga lasciata andare sul piano inclinato, ricavare l'espressione della velocità v_C del centro di massa dopo t secondi dall'inizio del moto.

RISPOSTA

$$v_C = \left(\frac{5}{7}g \sin \theta\right) \cdot t$$

Esercizio 7.7

(Esercizi correlati: 7.7* e 7.7**)

Un cilindro omogeneo di massa m e raggio di base R rotola, senza strisciare, su un piano fisso inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. All'istante $t = 0$ il cilindro comincia a scendere lungo il piano inclinato, partendo da fermo. Ricavare l'espressione dell'energia cinetica del cilindro al generico istante t .

RISPOSTA

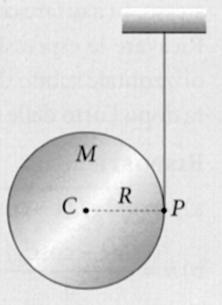
$$K(t) = [(mg^2 \sin^2 \alpha) \cdot t^2]/3$$

Esercizio 7.7*

Su un cilindro omogeneo di massa M e raggio di base R è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, un estremo del quale è connesso a un supporto fisso, come mostrato in figura. Al tempo $t = 0$ il cilindro, inizialmente fermo, viene lasciato muoversi per effetto della gravità. Ricavare l'espressione della velocità v_C del centro di massa C dopo t secondi dall'inizio del moto.

RISPOSTA

$$v_C(t) = \frac{2}{3}gt$$

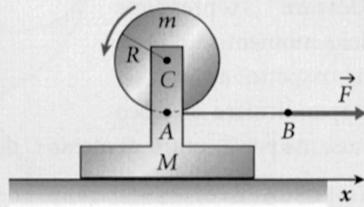


Esercizio 7.7**

Il supporto di massa M mostrato in figura può scivolare senza attrito sul piano orizzontale. La parte superiore del supporto porta un asse (perpendicolare al piano della figura e passante per il punto C) intorno al quale può ruotare senza attrito un cilindro omogeneo di massa m e raggio R . Sul cilindro è avvolto un lungo filo inestensibile di massa trascurabile il cui tratto finale AB è orizzontale per effetto di una forza \vec{F} orizzontale applicata all'estremo B . La forza \vec{F} è costante. Al tempo $t = 0$ il sistema (supporto + cilindro), inizialmente fermo, è lasciato libero di muoversi per effetto della forza \vec{F} . Ricavare l'espressione della velocità v_B del punto B dopo t secondi dall'inizio del moto.

RISPOSTA

$$v_B(t) = Ft \frac{(2M+3m)}{m(M+m)}$$



Esercizio 7.8

Al tempo $t = 0$ una sfera omogenea di raggio R viene lanciata tangenzialmente a un piano orizzontale scabro con velocità iniziale v_0 e senza alcuna rotazione intorno al suo asse. Inizialmente il punto di contatto striscia sul piano, ma dopo un tempo t^* lo strisciamento si arresta e la sfera inizia a muoversi con moto di puro rotolamento. Sapendo che il coefficiente di attrito tra sfera e piano vale μ , ricavare l'espressione dell'intervallo di tempo t^* necessario perché inizi il puro rotolamento.

RISPOSTA

$$t^* = 2v_0/7\mu g$$

Esercizio 7.9 (Esercizi correlati: 7.9* e 7.9**)

Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza L e massa M , è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito ed è ferma. Sullo stesso piano si muove una particella di massa $m = M/4$ con velocità di modulo v_0 e direzione perpendicolare alla direzione dell'asta. La particella colpisce l'asta a un suo estremo e vi rimane conficcata. Ricavare l'espressione dell'energia cinetica del sistema dopo l'urto.

RISPOSTA

$$K = Mu_0^2/16$$

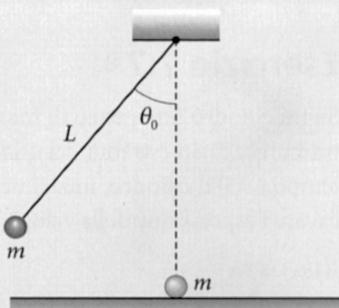
Esercizio 7.9*

Un pendolo semplice, costituito da un filo inestensibile di lunghezza L e massa trascurabile con appeso un piccolo corpo sferico di massa m , è portato a formare un angolo θ_0 con la verticale, come mostrato in figura. Lasciata andare da ferma, la massa del pendolo, quando passa per la posizione verticale del pendolo stesso, va a urtare centralmente una sfera di massa m , ferma su un piano orizzontale. Ricavare le espressioni: a) della velocità della massa inizialmente ferma sul piano orizzontale subito dopo l'urto, se l'urto è elastico; b) della massima quota h raggiunta dopo l'urto delle due masse, se tale urto è completamente anelastico.

RISPOSTE

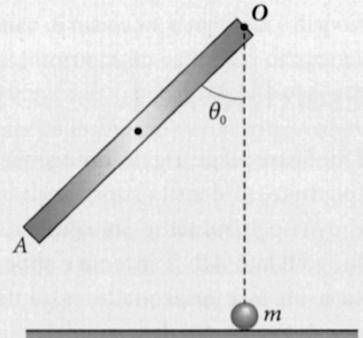
$$a) v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

$$b) h = \frac{L(1 - \cos\theta_0)}{4}$$



Esercizio 7.9**

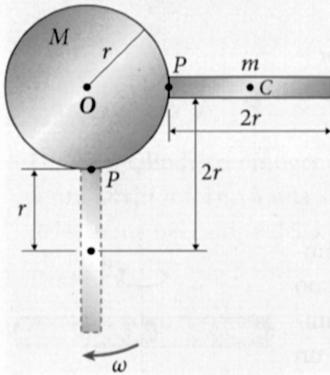
Una sbarra rigida omogenea a sezione costante, di massa M e lunghezza L , può ruotare senza attrito intorno a un asse orizzontale passante per il suo estremo O , come mostrato in figura. La sbarra, che può dunque muoversi sul piano verticale, viene spostata di un angolo θ_0 dalla direzione verticale e lasciata andare da ferma per effetto della gravità. Quando passa per la direzione verticale, con il suo estremo A urta in modo perfettamente anelastico contro un piccolo corpo di massa m . Ricavare l'espressione dell'energia E_d dissipata nell'urto anelastico.



RISPOSTA

$$E_d = \frac{3}{2} \frac{mM}{(M+3m)} gL(1 - \cos\theta_0)$$

Esercizio 7.10 (Esercizio correlato: 7.10*)



Un disco omogeneo di massa M e raggio r è libero di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro di massa O . Sul bordo del disco è rigidamente fissata in direzione radiale una sbarra omogenea di lunghezza $2r$ e massa m . Il sistema viene lasciato libero da fermo, con la sbarra orizzontale, dalla posizione indicata in figura. Ricavare l'espressione della velocità angolare del sistema quando la sbarra transita dalla posizione verticale.

omogenea di lunghezza $2r$ e massa m . Il sistema viene lasciato libero da fermo, con la sbarra orizzontale, dalla posizione indicata in figura. Ricavare l'espressione della velocità angolare del sistema quando la sbarra transita dalla posizione verticale.

RISPOSTA

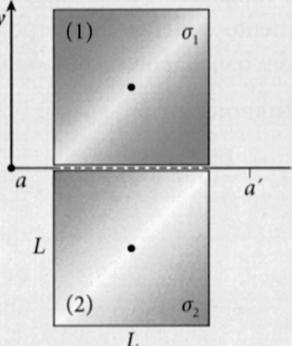
$$\omega = \sqrt{\frac{24mg}{r(3M + 26m)}}$$

Esercizio 7.10*

Un corpo rigido è costituito da due lamine omogenee piane (1) e (2), di forma quadrata di lato L , di densità superficiali σ_1 e σ_2 , rispettivamente. Le due lastre sono saldate lungo un lato a un asse aa' intorno al quale il sistema può ruotare senza attrito. L'asse aa' è disposto orizzontalmente con il corpo rigido in equilibrio su un piano verticale, essendo la lastra (1) con densità superficiale $\sigma_1 > \sigma_2$ disposta verso l'alto, come mostrato in figura. L'equilibrio è instabile e, per una leggera perturbazione, il corpo rigido, partendo da fermo, inizia a ruotare intorno all'asse aa' . Ricavare l'espressione della velocità angolare nel momento in cui il corpo compie un completo ribaltamento con rotazione di 180° intorno all'asse aa' .

RISPOSTA

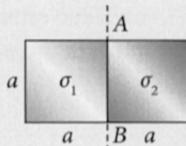
$$\omega = \sqrt{\frac{6g(\sigma_1 - \sigma_2)}{L(\sigma_1 + \sigma_2)}}$$



Esercizi di riepilogo

Esercizio 7.11

Due lastre piane, rigide, omogenee, quadrate, di densità superficiali σ_1 e σ_2 rispettivamente sono saldate lungo il lato AB . Il sistema è appeso a un asse orizzontale passante per A . Per effetto della gravità, e in assenza di attriti, qual è l'espressione dell'angolo formato, all'equilibrio, dal lato AB rispetto alla verticale?



RISPOSTA

$$\theta = \arctg \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right)$$

Esercizio 7.13

Su un disco omogeneo di raggio R , disposto con asse orizzontale nel campo della forza di gravità, è stata saldata, lungo un raggio formante un angolo θ con la verticale, una sbarretta sottile e omogenea di massa m e lunghezza pari al raggio del disco. Ricavare il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse del disco, nell'ipotesi che la massa del disco sia M .

RISPOSTA

$$I_0 = \frac{1}{6}(3M + 2m)R^2$$

Esercizio 7.15

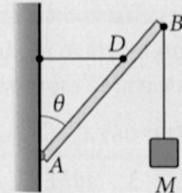
Su un piano inclinato, partendo da fermi dalla stessa quota, rotolano senza strisciare un cilindro e una sfera aventi lo stesso raggio. Chi arriva prima in fondo al piano inclinato? Al passaggio dal fondo del piano inclinato, qual è il rapporto tra la velocità del cilindro e quella della sfera?

RISPOSTE

Sfera; 0,97

Esercizio 7.12

Una sbarra rigida AB , di massa m e lunghezza L , può ruotare senza attriti intorno a una cerniera A fissata a un supporto verticale. All'estremo B della sbarra è appeso un carico di massa M . La sbarra forma con la verticale un angolo θ , essendo tenuta da un filo orizzontale il cui carico di rottura è τ_R ancorato alla sbarra nel punto D distante d dal punto A . Ricavare l'espressione del massimo valore M_{MAX} della massa M per cui si può avere equilibrio.

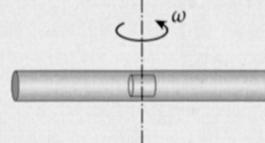


RISPOSTA

$$M_{MAX} = \frac{\tau_R d}{Lg} \cotg \theta - \frac{m}{2}$$

Esercizio 7.14

Un sottile tubo rigido, omogeneo, di massa M , ha al suo interno, in posizione simmetrica rispetto al tubo, un cilindretto molto corto di massa m , di diametro appena inferiore a quello interno del tubo. Il cilindretto può scorrere senza attrito dentro al tubo. Inizialmente tutto ruota con velocità angolare ω_0 intorno a un asse verticale, che passa per il baricentro del sistema (inizialmente il cilindretto è al centro). A un certo istante, per una lievissima perturbazione, il cilindretto si sposta dalla posizione iniziale e viene espulso dal tubo. In assenza di forze esterne, qual è la velocità angolare ω del tubo quando il cilindretto ne fuoriesce?



RISPOSTA

$$\omega = \frac{M}{M + 3m} \omega_0$$

Esercizio 7.16

Una sfera omogenea di massa m e raggio r ruota con attrito intorno a un suo asse baricentrale. Partendo con velocità angolare ω_0 , la sfera si ferma dopo un numero n di giri. Qual è l'espressione del momento M_A della coppia frenante nel caso in cui tale coppia sia costante?

RISPOSTA

$$M_A = \frac{mr^2\omega_0^2}{10\pi n}$$

Esercizio 7.17

Un cilindro omogeneo di massa m_1 e raggio R è disposto in modo da ruotare intorno a un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa e parallelo alle sue generatrici. Tale rotazione avviene con attrito costante nel tempo. Sul cilindro è avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, che non slitta sulla superficie del cilindro e alla cui estremità inferiore è attaccato un corpo di massa m_2 . Partendo tutto da fermo, si osserva che quando il corpo è sceso di una quantità h , il cilindro si trova a ruotare con velocità angolare ω_0 . In questo momento viene tagliato il filo. Dopo quanto tempo il cilindro si ferma?

RISPOSTA

$$\Delta t = \frac{\omega_0 m_1 R^2}{2 M_A} \text{ con } M_A = m_2 g R - \frac{\omega_0^2 R^3}{4h} (m_1 + 2m_2)$$

Esercizio 7.18

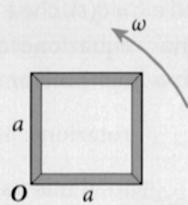
Un tubo cilindrico omogeneo, a parete sottile di spessore uniforme, il cui raggio medio è $R = 4,9$ m, può ruotare senza attriti intorno a una sua generatrice disposta orizzontalmente. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema nel campo della gravità.

RISPOSTA

$$T = 6,28 \text{ s}$$

Esercizio 7.19

Una sottile sbarra di massa m è utilizzata per formare una cornice quadrata di lato a . La cornice è situata su un tavolo orizzontale privo di attrito e ruota



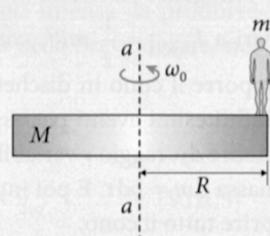
con velocità angolare ω intorno a un asse verticale passante per un suo vertice. Calcolare la reazione vincolare sull'asse di rotazione.

RISPOSTA

$$R = 2\lambda\omega^2 a^2 \sqrt{2} \text{ con } \lambda = m / 4a$$

Esercizio 7.20

Una piattaforma cilindrica, rigida e omogenea, di massa M e raggio R , può ruotare senza attriti intorno al suo asse, disposto verticalmente. Inizialmente un uomo di massa m è fermo sul bordo della piattaforma, mentre questa ruota liberamente con velocità angolare ω_0 . A un certo istante l'uomo si mette a camminare e alla fine raggiunge il centro della piattaforma. Qual è la velocità angolare finale? È variata l'energia cinetica totale?



RISPOSTA

$$\omega = \omega_0 \frac{M + 2m}{M}$$

L'energia cinetica totale è variata.

Suggerimenti

7.1*

Le forze attive sulla lastra sono la reazione vincolare \vec{R} in A , la forza peso applicata al c.d.m. della lastra e la forza \vec{F} in P . Applicare le condizioni di equilibrio per il corpo rigido.

7.2*

Non essendo richiesto il calcolo della reazione vincolare nel punto O , per determinare l'angolo β è sufficiente considerare l'equilibrio dei momenti, rispetto al polo O , delle forze agenti sul sistema rigido.

7.3*

Scrivere le equazioni vettoriali dell'equilibrio del corpo rigido scegliendo opportunamente il polo per i momenti.

7.4*

Ridurre il sistema delle tre forze, applicate al corpo rigido, a una forza risultante più una coppia di forze, scegliendo il punto P per la riduzione. Essendo il moto puramente traslatorio, il momento risultante deve essere nullo.

7.5*

Ricordando che il momento di un disco omogeneo di massa m e raggio R è pari a $I_{\text{DISCO}} = \frac{1}{2} m R^2$, conviene decomporre il cono in dischetti circolari infinitesimi aventi per asse l'asse y , spessore dy , raggio r variabile da O a R e massa $dm = \rho dr dy$. E poi integrare per coprire tutto il cono.

7.6*

Si chiede l'andamento temporale della velocità del c.d.m., quindi si ricorre alle equazioni cardinali della meccanica dei corpi rigidi. Il momento d'inerzia della sfera rispetto a un asse baricentrale è $I = \frac{2}{5} MR^2$.

7.7*

Applicare le equazioni cardinali della meccanica dei corpi rigidi. Il momento d'inerzia di un cilindro omogeneo rispetto a un asse baricentrale è $I = \frac{1}{2} MR^2$.

7.7**

Considerare il moto del sistema (supporto + cilindro) dal riferimento assoluto (solidale al piano orizzontale) e dal riferimento mobile (solidale al supporto di massa M).

7.9*

- Osservare che l'urto è elastico e frontale tra sfere di massa uguale, di cui una inizialmente ferma.
- Nell'urto anelastico si conserva il momento angolare, ma non l'energia cinetica. Prima e dopo l'urto, vale il teorema del lavoro e dell'energia cinetica nel campo della gravità.

7.9**

Il problema è concettualmente simile al precedente. Conviene suddividere il fenomeno in tre fasi: a) movimento di caduta della sbarra prima dell'urto; b) urto anelastico contro la massa m ; c) movimento del sistema (sbarra + massa m) subito dopo l'urto. La differenza di energia cinetica tra la fine della fase a) e il momento immediatamente seguente l'urto fornisce l'energia dissipata E_d .

7.10*

L'applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica richiede di individuare la posizione del c.d.m. del corpo nelle configurazioni iniziale e finale.

7.11

Conviene considerare separatamente le forze peso sulle due lastre come applicate ai rispettivi c.d.m. Per l'equilibrio, deve essere nullo il risultante dei momenti di queste due forze rispetto al punto A .

7.12

Scrivere la condizione di equilibrio per i momenti, per esempio rispetto al polo A , e poi cercare il valore di M che rende massima la tensione τ_R del filo.

7.13

Suddividere l'integrale complessivo del momento d'inerzia in due contri-

buti separati, uno dovuto al disco e uno dovuto alla sbarretta.

7.14

Il sistema è isolato e si conserva il momento della quantità di moto. Il cilindretto è corto e il suo momento angolare iniziale può essere trascurato. Per il momento di inerzia il sottile tubo può essere assimilato a una sbarretta rigida.

7.15

Applicare il teorema dell'energia cinetica e il teorema di König.

7.16

Come in tutti i casi in cui si considerano spostamenti e forze che li producono (in questo caso rotazioni e momenti delle forze), conviene ricorrere al teorema dell'energia cinetica.

7.17

Applicare il teorema dell'energia cinetica e, per la fase di frenamento in assenza di trazione, la seconda equazione cardinale della meccanica per i corpi rigidi ruotanti intorno ad asse fisso.

7.18

Il moto è descritto dalla funzione $\theta = \theta(t)$, che è determinata dalla seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi proiettata lungo l'asse di rotazione: $M_a = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Per il momento d'inerzia utilizzare il teorema di Huygens-Steiner.

7.19

In un sistema solidale con la cornice la reazione vincolare uguaglia la forza centrifuga totale.

7.20

È nulla la componente nella direzione dell'asse del momento delle forze esterne: si conserva il momento assiale della quantità di moto. Trascurare il momento della q.d.m. dell'uomo nella rotazione su se stesso, quando è arrivato al centro della piattaforma.

Problemi d'urto

Basato sul Capitolo 8 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano problemi d'urto, nei quali l'interazione tra i corpi coinvolti avviene in tempi molto brevi, durante i quali predominano gli effetti di intense forze interne e risultano praticamente ininfluenti le forze esterne. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle

equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina).

Punti chiave

Per definizione, un urto fra due particelle è un'interazione di breve durata, e tuttavia così intensa da produrre variazioni percentualmente considerevoli nello stato di moto delle due particelle. In virtù della breve durata, nel fenomeno d'urto è trascurabile l'impulso delle forze esterne.

Nell'urto, la *quantità di moto totale* delle due particelle *si conserva*. Per conseguenza, l'urto non perturba la velocità del centro di massa:

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{0c}$$

[VIII.7]

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{q}_{01} + \vec{q}_{02} \quad [\text{VIII.5}]$$

\vec{q}_1, \vec{q}_2 : quantità di moto dopo l'urto;

$\vec{q}_{01}, \vec{q}_{02}$: quantità di moto prima dell'urto.

Se nell'urto *si conserva*, oltre alla quantità di moto totale, anche l'*energia cinetica totale*, per definizione l'urto si dice *elastico*.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2$$

urto elastico

Punti chiave

La trattazione dell'urto risulta particolarmente semplice nel *sistema del baricentro*, in cui $\vec{V}_c = 0$.

In tale riferimento, la quantità di moto totale $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ è nulla sia prima che dopo l'urto. Le particelle si avvicinano all'urto con quantità di moto uguali e opposte ($\vec{q}_{01} = -\vec{q}_{02}$), ed emergono dall'urto con quantità di moto uguali e opposte ($\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$).

Nell'urto elastico di particelle sferiche, anche l'angolo con cui esse emergono dall'urto può essere calcolato (vedi eq. [VIII.15]) se è noto il parametro d'urto b .

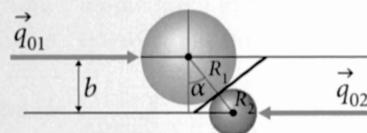
Negli *urti anelastici* l'energia cinetica totale non si conserva; continua a conservarsi, invece, la quantità di moto totale.

La massima possibile anelasticità si ha quando nell'urto si dissipata tutta l'energia cinetica del moto intorno al baricentro (*urto completamente anelastico*): dopo l'urto, nel sistema del baricentro le particelle sono ferme; nel laboratorio, sono ferme l'una rispetto all'altra (procedono insieme).

Se l'urto è elastico, nel sistema del centro di massa si conserva il modulo della quantità di moto di ciascuna particella:

$$q_{01} = q_1$$

$$q_{02} = q_2$$



La non conservazione dell'energia cinetica riguarda solo l'energia del moto intorno al baricentro: l'energia cinetica $\frac{1}{2}MV_c^2$ del baricentro si conserva sempre in virtù della conservazione della quantità di moto totale $Q = MV_c$.

$$K' = \varepsilon^2 K'_0 \quad [\text{VIII.21}]$$

K'_0 , K' : energia cinetica intorno al baricentro prima e dopo l'urto;

ε ($0 < \varepsilon < 1$): coefficiente di restituzione.

Se $\varepsilon = 0$, l'urto è completamente anelastico.

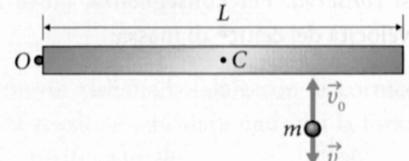
Esercizi assistiti

Esercizio 8.1

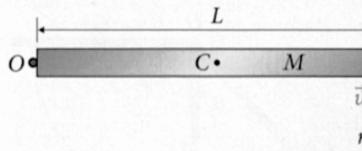
Una sbarra omogenea di sezione costante, lunghezza L e massa M , è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito e ha un estremo incernierato a un asse fisso verticale intorno al quale può ruotare liberamente. La sbarra è ferma quando viene colpita da un corpo puntiforme di massa $m = M/9$, avente velocità v_0 perpendicolare alla sbarra stessa, che impatta in un suo punto a distanza $3L/4$ dall'asse di rotazione. Dopo l'urto il corpo incidente rimbalza all'indietro con velocità $v = v_0/2$ perpendicolare alla sbarra. Ricavare l'espressione dell'energia cinetica della sbarra dopo l'urto.

RISPOSTA

$$K = (43mv_0^2)/128$$



Esercizio 8.2



Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza L e massa M , è appoggiata su un piano orizzontale liscio e ha l'estremo O incernierato a un asse fisso verticale intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta è in quiete quando è colpita da un corpo puntiforme, di massa $m = M/9$, che si muove sul piano orizzontale con velocità v_0 perpendicolare all'asta. Il corpo incidente si conficca sull'asta in prossimità dell'estremo opposto a quello incernierato. Ricavare l'espressione dell'energia cinetica del sistema (asta + corpo) dopo l'urto.

RISPOSTA

$K = (mv_0^2)/8$

Esercizio 8.3

Un'asta, di lunghezza L e massa M , a un estremo A è incernierata a un asse orizzontale intorno al quale può ruotare senza attriti in un piano verticale. L'asta è ferma in equilibrio iniziale in posizione verticale, come mostrato in figura. A un certo istante l'asta riceve un impulso J perpendicolare alla sua direzione e applicato all'estremo B , per effetto del quale si solleva di un angolo θ prima di fermarsi. Ricavare l'espressione dell'impulso J .

RISPOSTA

$$J = M \sqrt{\frac{gL(1 - \cos\theta)}{3}}$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 8.4

Una biglia P_1 di massa $m_1 = 100$ g e velocità $\vec{v}_{01} = \vec{v}_0$ pari a 2 m/s urta elasticamente contro una biglia P_2 inizialmente ferma di massa $m_2 = m_1 = 100$ g. Dopo l'urto, la velocità \vec{v}_1 di P_1 forma un angolo $\theta_1 = 45^\circ$ con \vec{v}_{01} . A quale angolo θ_2 rincula P_2 ? Quanto valgono i moduli v_1 e v_2 della velocità delle due biglie dopo l'urto?

RISPOSTE

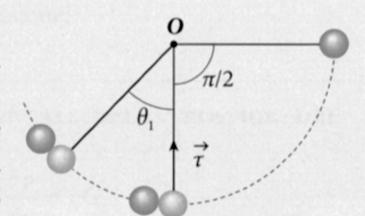
$$\theta_2 = -45^\circ; v_1 = v_2 = 1,41 \text{ m/s}$$

Esercizio 8.5

Una sfera P_1 praticamente puntiforme di massa m è appesa a un filo inestensibile di lunghezza l ; il filo teso viene portato a formare un angolo di 90° con la verticale e lasciato andare da fermo. Quando passa per la posizione verticale, la sfera P_1 compie un urto completamente anelastico con una seconda sfera P_2 puntiforme di massa m inizialmente ferma. Quale elongazione massima θ_f compie dopo l'urto il pendolo semplice costituito dalle due sfere?

RISPOSTA

$$\theta_f = 41,5^\circ$$

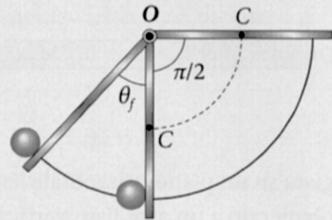


Esercizio 8.6

Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m è incornierata intorno a un asse orizzontale O . Essa viene portata in posizione orizzontale e lasciata andare da ferma. Quando essa passa per la posizione verticale, il suo estremo compie un urto completamente anelastico contro una massa puntiforme m . Quale elongazione massima θ_f compie il pendolo dopo l'urto? Si trascurino gli attriti.

RISPOSTA

$$\theta_f \approx 23,6^\circ$$



Suggerimenti

8.4

Si tratta di urto elastico tra sfere di ugual massa. Nel sistema di riferimento del laboratorio, le direzioni delle velocità dopo l'urto formano sempre tra di loro lo stesso angolo. Per il calcolo di v_1 e v_2 , una volta noti θ_1 e θ_2 si può far ricorso alla conservazione della quantità

di moto totale espressa direttamente nel sistema del laboratorio.

l'energia cinetica, ma si conserva la quantità di moto totale.

8.5

Prima e dopo l'urto, il pendolo si muove rispettando il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Nell'urto (anelastico) non si conserva

8.6

Prima dell'urto e dopo l'urto vale il teorema di conservazione dell'energia. Nell'urto si conserva il momento angolare totale.

Meccanica dei fluidi

Basato sul Capitolo 9 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano la meccanica di sistemi materiali per i quali non può essere applicata la schematizzazione del corpo rigido. Si tratta di sistemi fluidi, come liquido o gas. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Mecca-*

nica e termodinamica

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

I fluidi sono sistemi materiali perfettamente deformabili. Le forze agenti su ogni porzione di fluido di massa dm possono essere suddivise in forze di volume $d\vec{F}^{(V)}$ e forze di superficie $d\vec{F}^{(S)}$ agenti sulle superfici che delimitano l'elemento considerato di fluido.

Nei fluidi perfetti, e in ogni caso nei problemi di statica, lo sforzo di taglio τ può essere trascurato: le forze di superficie si riducono a forze normali alla superficie dS , descritte dalla pressione p .

In ogni posizione, la pressione p non dipende dall'orientamento della superficie dS su cui essa si esercita.

La pressione non cambia se ci si muove lungo una superficie S che sia punto per punto ortogonale alla forza di volume \vec{G} .

FORZA DI VOLUME

$$d\vec{F}^{(V)} = \vec{G}(x, y, z) \varrho dV$$

dove $dm = \varrho dV$

\vec{G} : forza per unità di massa

FORZE DI SUPERFICIE

$$\begin{aligned} dF_n^{(S)} &= p dS \\ dF_t^{(S)} &= \tau dS \end{aligned}$$

p : sforzo normale o pressione;

τ : sforzo di taglio.

EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA STATICHE DEI FLUIDI

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \varrho G_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho G_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho G_z \end{array} \right. \quad [IX.3]$$

Punti chiave

Particolare rilievo ha il caso in cui la forza di volume sia la forza peso. In questo caso è:

$$\vec{G} = (0, 0, -g)$$

(asse z : verticale ascendente).

In un fluido in equilibrio valgono il *principio di Archimede* e il *teorema di Pascal*.

Se la forza di volume è conservativa, la forza per unità di massa \vec{G} ammette potenziale U , tale che \vec{G} è pari al gradiente di U :

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; G_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; G_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Per la descrizione dei fluidi in movimento si ricorre di solito a due possibili approcci: lo *schema lagrangiano o particellare* e lo *schema euleriano o locale*.

Si ha moto stazionario quando le velocità euleriane non dipendono dal tempo.

Per un fluido perfetto in moto stazionario per effetto della sola forza peso vale il *teorema di Bernoulli*.

Nei fluidi reali in movimento, alla forza normale di superficie (descritta dalla pressione) si affiancano in generale forze tangenziali \vec{A} descritte dallo sforzo di taglio τ . Se il moto è laminare, τ è descritto dalla legge di Poiseuille.

Dalle [IX.3] si ricava in questo caso

$$dp = -\varrho g dz$$

e se ϱ è costante (liquido incompressibile):

$$p = p_0 + \varrho g h \quad [\text{IX.4}]$$

(legge di Stevino).

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

“Un corpo immerso in un fluido pesante riceve una spinta dal basso verso l’alto pari al peso del fluido spostato”.

TEOREMA DI PASCAL

“In un fluido in equilibrio, ogni variazione di pressione esercitata in un punto si trasmette inalterata in ogni punto e in ogni direzione”.

Dalle [IX.3] discende immediatamente, in questo caso:

$$dp = \varrho dU \quad [\text{IX.9}]$$

Le superfici isobare coincidono con le superfici equipotenziali.

SCHEMA LAGRANGIANO

Ogni singola particella viene inseguita nel suo moto.

SCHEMA EULERIANO

In ogni fissata posizione si misura la velocità delle particelle che via via passano per quella posizione.

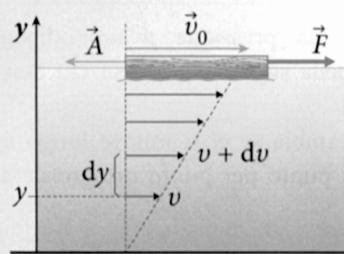
Le particelle che via via passano per uno stesso punto hanno sempre la stessa velocità.

TEOREMA DI BERNOULLI

$$p + \varrho g z + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{costante} \quad [\text{IX.18}]$$

LEGGE DI POISEUILLE

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad [\text{IX.1}]$$



Esercizi assistiti e di consolidamento

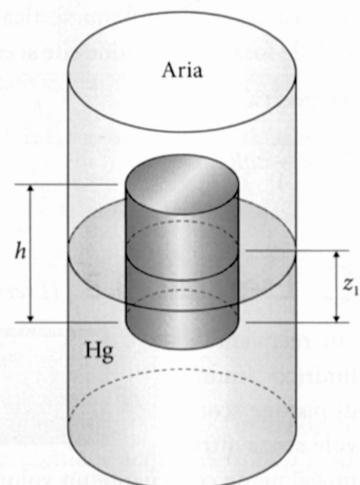


Esercizio 9.1 (Esercizio correlato: 9.1*)

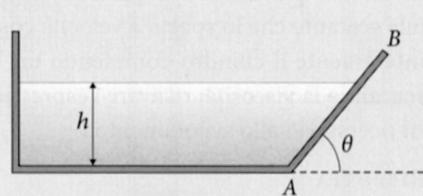
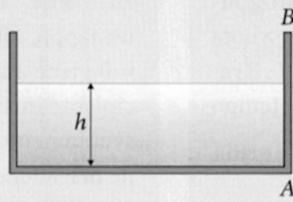
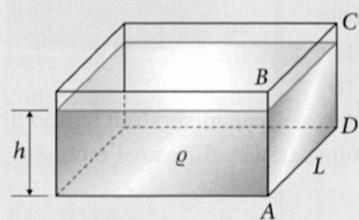
Un cilindro di altezza $h = 10 \text{ cm}$ è in equilibrio iniziale immerso in un recipiente aperto contenente mercurio ($\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). La parte immersa ha altezza $z_1 = 5 \text{ cm}$. A partire da questa situazione, nel recipiente viene aggiunta acqua ($\rho_a = 10^3 \text{ kg/m}^3$) in quantità tale da coprire esattamente l'intero cilindro. Calcolare l'altezza z_2 della parte immersa nel mercurio.

RISPOSTA

$$z_2 = 4 \text{ cm}$$



Esercizio 9.1*



Una vasca aperta contiene liquido di densità ϱ per un'altezza h , come mostrato in figura. Ricavare l'espressione della forza esercitata sulla parete rettangolare $ABCD$, la cui base ha lunghezza L , nei due casi seguenti:

- a) la parete $ABCD$ è verticale;
- b) la parete $ABCD$ è inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale.

RISPOSTE

a) $F_a = \frac{1}{2} \varrho g L h^2$; b) $F_b = \frac{1}{2} \varrho g L \frac{h^2}{\sin \theta}$

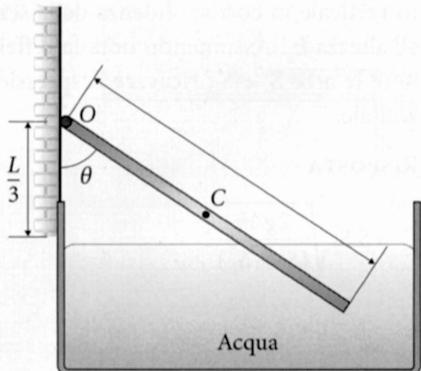


Esercizio 9.2 (Esercizio correlato: 9.2*)

Una sbarra omogenea di legno (densità ϱ), avente lunghezza L e sezione costante, è vincolata a ruotare senza attrito intorno a una cerniera O situata sulla parete verticale rigida indicata in figura. La sbarra è parzialmente immersa nell'acqua (densità ϱ_a) di una vasca ed è in equilibrio quando forma un angolo θ con la verticale. La distanza tra la cerniera O e la superficie libera dell'acqua è $L/3$. Ricavare l'espressione dell'angolo θ .

RISPOSTA

$$\cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{1 - \varrho/\varrho_a}}$$

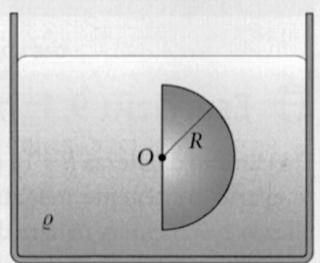


Esercizio 9.2*

All'interno di un recipiente contenente liquido di densità ϱ è immerso un corpo a forma di semisfera di raggio R , come mostrato in figura. La semisfera è mantenuta ferma con la sezione piana verticale. Ricavare l'espressione del momento M_0 risultante delle forze di pressione che si esercitano sulla superficie del corpo.

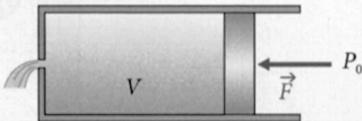
RISPOSTA

$$M_0 = \frac{1}{4} \pi \varrho R^4 g$$



Esercizio 9.3 (Esercizio correlato: 9.3*)

Un recipiente cilindrico munito di pistone scorrevole senza attrito, inizialmente contenente un volume V di acqua (densità ϱ), è disposto orizzontalmente, come mostrato in figura. Sul fondo del cilindro è presente un forellino di sezione s di area molto minore dell'area di base del cilindro. Sul pistone viene applicata una forza orizzontale costante che lo sposta a velocità costante e svuota interamente il cilindro compiendo un lavoro L . Trascurando la viscosità, ricavare l'espressione del tempo Δt necessario allo svuotamento.

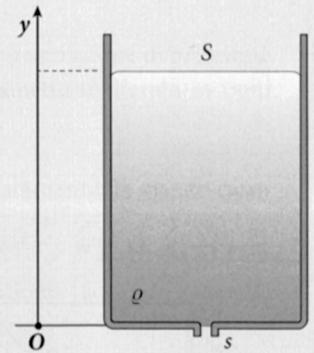


RISPOSTA

$$\Delta t = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\varrho V^3}{2L}}$$

Esercizio 9.3*

Un recipiente di sezione di area S contiene un liquido perfetto di densità ϱ , per un'altezza iniziale non nota. Sulla base del recipiente è praticato un piccolo foro di sezione di area $s \ll S$. Il foro, inizialmente chiuso con un tappo, all'istante $t = 0$ viene aperto e il recipiente inizia a svuotarsi. Viene misurato il tempo di svuotamento, che risulta pari a t^* . Ricavare l'espressione dell'altezza h .



RISPOSTA

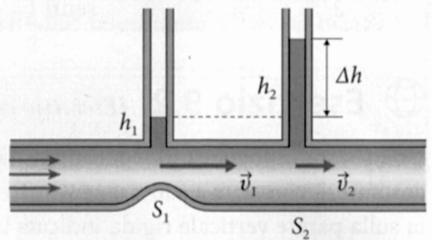
$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{S} \right)^2 g t^{*2}$$

Esercizio 9.4 (Esercizio correlato: 9.4*)

Nel tubo orizzontale a sezione variabile mostrato in figura scorre liquido ideale. In corrispondenza della sezione di area S_1 nel tubo aperto verticale (tubo di Venturi) il liquido sale fino all'altezza h_1 , mentre nel tubo aperto verticale in corrispondenza della sezione di area S_2 il liquido sale fino all'altezza h_2 . Assumendo nota la differenza tra le due quote Δh e anche note le aree S_1 e S_2 , ricavare l'espressione della portata Q del tubo orizzontale.

RISPOSTA

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{(S_2^2 - S_1^2)}}$$

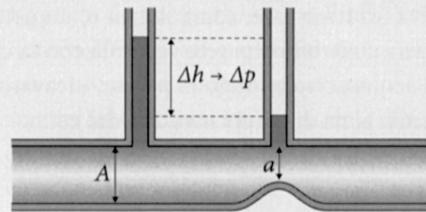


Esercizio 9.4*

Un tubo orizzontale è percorso da liquido ideale di densità ϱ in moto stazionario. La sezione del tubo ha area A costante, salvo in una zona in cui è presente una strozzatura di area interna a non nota. Tra la zona a sezione A e la zona della strozzatura si misura una differenza di pressione Δp . Nel tempo Δt da un'estremità del tubo esce una massa di liquido Δm , che viene misurata. Ricavare l'espressione dell'area a della strozzatura.

RISPOSTA

$$a = \frac{A(\Delta m/\Delta t)}{\sqrt{(\Delta m/\Delta t)^2 + 2\varrho A^2 \Delta p}}$$

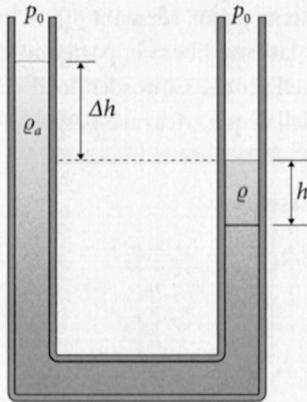


Esercizio 9.5 (Esercizio correlato: 9.5*)

In un tubo a U con i bracci aperti c'è acqua (densità ϱ_a). In uno dei due bracci viene aggiunto del liquido (densità ϱ) immiscibile con l'acqua, così che sopra il livello dell'acqua si forma una colonna di questo liquido di altezza pari a h . In questa situazione la differenza di quota tra le superfici libere a contatto con l'aria assume valore Δh , come mostrato in figura. Ricavare l'espressione della quantità Δh .

RISPOSTA

$$\Delta h = h \left(\frac{\varrho - \varrho_a}{\varrho_a} \right)$$

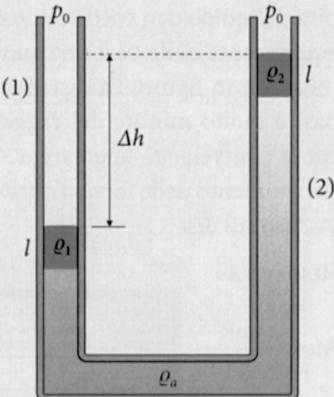


Esercizio 9.5*

Un tubo a U con i bracci aperti verso l'esterno, disposto verticalmente, contiene acqua (densità ϱ_a). Sul ramo (1) del tubo viene aggiunta una colonna di liquido immiscibile di altezza l e densità ϱ_1 , mentre nel ramo (2) viene aggiunta una colonna di liquido immiscibile di altezza l e densità ϱ_2 . Ricavare l'espressione della differenza di quota Δh tra le superfici libere a contatto con l'aria.

RISPOSTA

$$\Delta h = l \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_a}$$

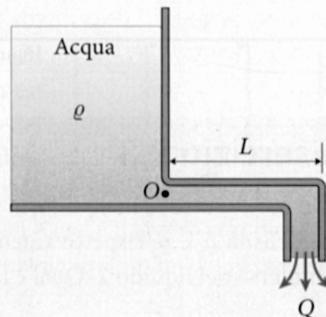


Esercizio 9.6 (Esercizio correlato: 9.6*)

Un grande recipiente pieno d'acqua ha un condotto d'uscita sagomato in modo che l'acqua fuoriesca verso il basso in direzione verticale. Il condotto ha raggio r e lunghezza della parte orizzontale pari a L . La portata d'uscita è Q . Trascurando la viscosità dell'acqua, ricavare l'espressione del momento rispetto al punto O delle forze esercitate dall'acqua sulla parete del condotto d'uscita.

RISPOSTA

$$M_0 = \frac{\varrho L Q^2}{\pi r^2}$$

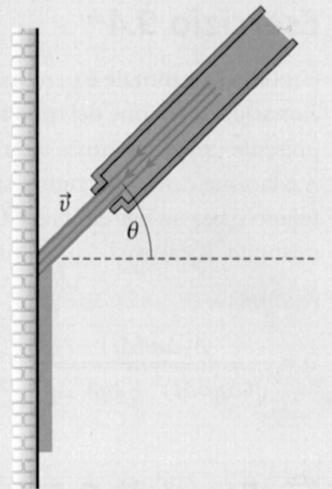


Esercizio 9.6*

Da un tubo esce, con velocità v , un getto collimato di liquido di densità ρ . Il getto urta contro una parete verticale con la cui normale forma un angolo θ . Dopo l'urto, l'acqua scivola lungo la parete. Ricavare l'espressione della pressione che si esercita sulla zona di parete investita dal getto.

RISPOSTA

$$p = \rho v^2 \cos^2 \theta$$



Esercizio 9.7 (Esercizio correlato: 9.7*)

Un sottile disco di raggio R , ruotante intorno al suo asse verticale, è inserito in una scatola cilindrica riempita di liquido con coefficiente di viscosità η . Il disco è equidistante dalle basi orizzontali della scatola, come mostrato in figura. La distanza h del disco da queste basi è molto minore del raggio R del disco. Il disco ruota con velocità angolare ω . Ricavare l'espressione del momento delle forze d'attrito esercitate dal liquido viscoso sul disco.

RISPOSTA

$$M = \frac{\pi \eta \omega R^4}{h}$$



Esercizio 9.7*

Una sferetta di legno (densità ρ_L) di raggio R è tenuta inizialmente ferma nel fondo di un recipiente contenente acqua (densità ρ_a). A un certo istante la sferetta è lasciata libera e, partendo da ferma, inizia a risalire nell'acqua. Conoscendo il coefficiente η di viscosità dell'acqua, ricavare l'espressione della velocità limite v^* della sferetta in acqua.

RISPOSTA

$$v^* = \frac{2}{9} g R^2 \frac{(\rho_a - \rho_L)}{\eta}$$

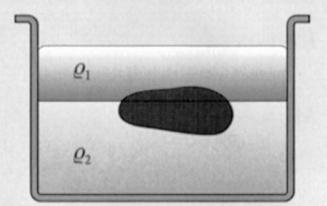
Esercizi di riepilogo

Esercizio 9.8

Un corpo si trova in equilibrio nella zona di separazione tra due liquidi non miscibili, di densità ρ_1 e ρ_2 rispettivamente ($\rho_1 < \rho_2$), con una frazione f_2 del suo volume totale immersa nel liquido 2. Qual è la densità ρ del corpo?

RISPOSTA

$$\rho = \rho_1 + f_2(\rho_2 - \rho_1)$$



Esercizio 9.9

Un pallone sferico, indeformabile, impermeabile e di massa trascurabile, galleggia in un lago. Sapendo che la densità dell'acqua è $\varrho = 1 \text{ g/cm}^3$ e che il raggio del pallone è $R = 15 \text{ cm}$, calcolare il lavoro meccanico L che occorre fare per immergerlo completamente nell'acqua.

RISPOSTA

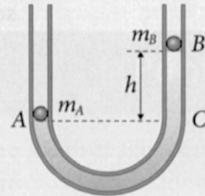
$$L = 20,8 \text{ J}$$

Esercizio 9.11

Un tubo a U aperto alle estremità e disposto verticalmente contiene olio ($\varrho = 0,9 \text{ g/cm}^3$). Le superfici dell'olio nelle sezioni A e B sostengono due sferette a tenuta di massa m_A e m_B rispettivamente. Il contatto tra le sferette e il tubo non presenta attrito apprezzabile. Se, all'equilibrio, il dislivello tra le sezioni A e B è $h = 10 \text{ cm}$ e il raggio del tubo è $R = 20 \text{ cm}$, qual è la differenza di massa $\Delta m = m_A - m_B$?

RISPOSTA

$$\Delta m = 0,13 \text{ kg}$$



Esercizio 9.13

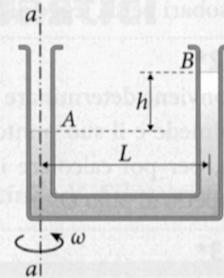
Un tubo a U è costituito da due rami verticali uguali, di larga sezione di area S , aperti verso l'atmosfera, collegati da un sottile tubo di raccordo lungo il quale è sistemato un rubinetto d'arresto R e un manometro M . Inizialmente il rubinetto è chiuso e uno dei rami contiene un liquido reale e omogeneo, di densità ϱ , per un'altezza h , mentre l'altro ramo è vuoto. A un certo istante il rubinetto viene aperto e, dopo una fase di oscillazioni smorzate, il liquido raggiunge la situazione di equilibrio occupando i due rami del tubo. Qual è il lavoro complessivo delle forze di attrito? Di quanto varia la lettura di pressione del manometro, passando dallo stato iniziale a quello finale?

RISPOSTE

$$L_A = -\frac{\varrho g S h^2}{4}; \Delta p = \varrho g \frac{h}{2}$$

Esercizio 9.10

Un tubo a U, sagomato con un tratto orizzontale e due tratti verticali, ha le estremità aperte e contiene un liquido omogeneo. La distanza tra i rami verticali è $L = 30 \text{ cm}$ e il diametro del tubo è molto più piccolo di L . Il tubo ruota con velocità angolare $\omega = 10 \text{ rad/s}$ intorno a un asse aa centrato su uno dei rami verticali del tubo. Qual è il dislivello h tra le superfici libere del liquido in equilibrio nei rami verticali?



RISPOSTA

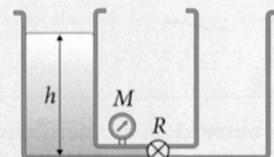
$$h = 0,46 \text{ m}$$

Esercizio 9.12

In un tubo orizzontale, la cui sezione S_1 presenta una strozzatura di sezione $S_2 < S_1$, scorre in modo stazionario un liquido perfetto di densità ϱ . La differenza di pressione tra le due sezioni è Δp . Qual è l'espressione della massa di liquido che passa in una sezione del tubo nell'unità di tempo?

RISPOSTA

$$S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\varrho \Delta p}{S_1^2 - S_2^2}}$$



Suggerimenti

9.1*

La forza sulla parete è risultante di contributi di forze di superficie su rettangoli infinitesimi a quote costanti (isobari per la legge di Stevino).

9.2*

Conviene determinare la spinta di Archimede e il suo punto di applicazione, per poi calcolare il momento M_0 rispetto al polo O .

9.3*

Lo svuotamento è controllato dall'equazione di continuità e dal teorema di Bernoulli. Occorre ricavare la legge oraria con cui si abbassa la superficie S , tramite la quale si mette in relazione la quota iniziale h e il tempo di svuotamento t^* .

9.4*

Si tratta di una condotta orizzontale a sezione variabile. Applicare il teorema di Bernoulli e l'equazione di continuità.

9.5*

All'interno di un liquido omogeneo,

in equilibrio nel campo della gravità, superfici isoquota sono isobare. Applicare la legge di Stevino.

9.6*

Come visto nell'esercizio 9.6, la variazione di q.d.m. del liquido nell'unità di tempo ha come effetto l'applicazione di una forza sulla parete.

9.7*

Sulla sferetta in movimento si esercitano la forza peso, la spinta di Archimede e la resistenza viscosa del mezzo. Nel caso di una sfera di raggio R la forza frenante ha l'espressione $F_r = -6\pi\eta Rv$.

9.8

Indicando con V_1 e V_2 le porzioni di volume V del corpo immerso nel liquido 1 e nel liquido 2 rispettivamente, calcolare la spinta di Archimede complessiva e tenere conto del fatto che il corpo è in equilibrio.

9.9

Conviene riferirsi alla variazione di

energia potenziale dell'acqua in corrispondenza all'immersione del pallone. Tenere conto che, a causa della vastità del lago, la sua quota praticamente non cambia.

9.10

Quando la forza di volume è conservativa, vale la relazione $dp = \rho dU$. Il potenziale è la somma dei contributi della forza centrifuga e della forza peso.

9.11

All'interno del liquido, in equilibrio nel campo della gravità, superfici alla stessa quota sono isobare.

9.12

La quantità richiesta è ρQ , dove $Q = vS$ è la portata del condotto. Procedere come nell'esercizio 9.4.

9.13

Si può applicare il teorema dell'energia cinetica a questo caso particolare in cui $\Delta K = 0$. Trascurare il volume del sottile tubo di raccordo. Tenere conto della legge di Stevino.

Onde in mezzi elastici

Basato sul Capitolo 10 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo riguardano fenomeni caratterizzati dal fatto che una perturbazione, esercitata su una grandezza fisica in una regione limitata di spazio, si propaga nello spazio circostante con modalità che dipendono anche dalle caratteristiche del mezzo. Si tratta di

onde in mezzi elastici. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Punti chiave

Un'onda è una perturbazione che si propaga con forma invariata a velocità costante v . L'espressione matematica di un'onda che si propaga lungo l'asse x è una funzione del tipo

$$\alpha(x,t) = f(x \mp vt) \quad [\text{X.2}] \text{ o } [\text{X.5}]$$

col segno – se l'onda è progressiva e segno + se l'onda è regressiva.

Particolare rilievo hanno le *onde sinusoidali*, la cui espressione è del tipo:

$$\begin{aligned} \alpha(x,t) &= A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) + \varphi \right] = \\ &= A \operatorname{sen} (kx \mp \omega t + \varphi) = \\ &= A \operatorname{sen} \left\{ 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T} \right) \right\} + \varphi \end{aligned}$$

A : ampiezza; λ = lunghezza d'onda; T : periodo;
 φ : fase iniziale; $k = 2\pi/\lambda$; $\omega = 2\pi/T$.

L'equazione cui soddisfa la [X.2] (o la [X.5]) è

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad [\text{X.6}]$$

detta *equazione delle onde*.

Grazie al *principio di sovrapposizione* e al *teorema di Fourier* ogni onda periodica è esprimibile come un'opportuna combinazione lineare di onde sinusoidali.

Punti chiave

La velocità di propagazione di un'onda elastica è esprimibile in funzione delle caratteristiche del mezzo in cui si propaga ed è in generale indipendente dalla lunghezza d'onda λ e dal periodo T .

E : modulo di Young; ϱ : densità volumica; K : coefficiente di compressibilità; P : pressione del gas; γ : rapporto tra il calore molare a pressione costante C_p e il calore molare a volume costante C_v ; τ : tensione della corda; μ : densità lineare della corda.

L'intensità I di un'onda misura l'energia per unità di superficie e per unità di tempo che l'onda trasporta.

L'interferenza è un fenomeno che si verifica quando si sovrappongono due onde con la stessa frequenza e differenza di fase φ costante.

Il principio di Huygens-Fresnel consente di costruire il fronte d'onda all'istante $t + dt$ come sovrapposizione di onde elementari emesse dal fronte d'onda all'istante t .

L'effetto Doppler si presenta quando la sorgente S del suono e il suo rivelatore R sono dotati di moto relativo.

VELOCITÀ DI ONDE LONGITUDINALI

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ in un mezzo solido elastico}$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}} \text{ in un fluido generico}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\varrho}} \text{ in un gas}$$

VELOCITÀ DI ONDE TRASVERSALI

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \text{ in una corda tesa}$$

$$I = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \varrho v$$

SORGENTE IN MOTO, OSSERVATORE FERMO

$$v_R = v_s v / (v \pm v_s) \quad [X.57], [X.58]$$

SORGENTE FERMA, OSSERVATORE IN MOTO

$$v_R = v_s (1 \pm v_r / v) \quad [X.59], [X.60]$$

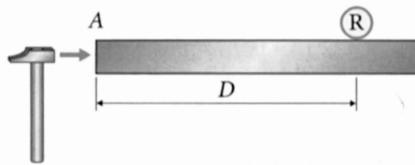
v_R : frequenza rivelata;

v_s : frequenza della sorgente.

Esercizi

Esercizio 10.1

L'estremità A di una sbarra di alluminio ($E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$) viene colpita con un martello. Un rivelatore acustico R registra due impulsi sonori distanziati nel tempo di $\Delta t = 10^{-1} \text{ s}$. Sapendo che la velocità del suono in aria è $c = 340 \text{ m/s}$, calcolare la distanza D tra rivelatore R ed estremo A della sbarra.

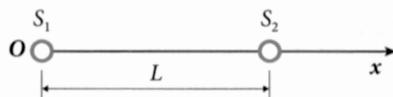


RISPOSTA

$$D = 36,4 \text{ m}$$

Esercizio 10.2

Due onde sinusoidali piane longitudinali, aventi la stessa ampiezza A e la stessa lunghezza d'onda $\lambda = 40 \text{ cm}$, si propagano nella stessa direzione con lo stesso verso (asse x) in un mezzo non dispersivo. Le rispettive sorgenti S_1 e S_2 distano di un tratto $L = 4 \text{ m}$. Le due onde hanno la stessa fase intrinseca. Calcolare l'ampiezza A_R dell'onda risultante.



RISPOSTA

$$A_R = 2A$$

Esercizio 10.3

Un treno, mentre avanza a velocità costante, emette un fischio a frequenza fissa. Un ricevitore acustico fermo rispetto al suolo misura una frequenza $v_1 = 1140 \text{ Hz}$ quando il treno si avvicina, e una frequenza $v_2 = 890 \text{ Hz}$ quando il treno si allontana. Sapendo che la velocità del suono in aria è $c = 340 \text{ m/s}$, calcolare la velocità v del treno e la frequenza v del fischio.

RISPOSTE

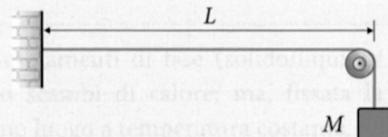
$$v = 150 \text{ km/h}$$

$$v = 1000 \text{ Hz}$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 10.4

Calcolare la velocità di propagazione di un'onda elastica trasversale che si propaga in un filo di lunghezza $L = 10 \text{ m}$, mantenuto teso da un peso di massa $M = 5 \text{ kg}$, come mostrato in figura. La massa m del filo è 100 g .



RISPOSTA

$$v = 221 \text{ m/s}$$

Esercizio 10.5

Una sorgente acustica emette onde sferiche nello spazio omogeneo e trasparente (cioè privo di smorzamento). La potenza della sorgente è $W = 10 \text{ W}$. Calcolare l'intensità dell'onda acustica, I , alle distanze $d_1 = 3 \text{ m}$ e $d_2 = 6 \text{ m}$.

RISPOSTE

$$I_1 = 8,84 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2; I_2 = 2,21 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

Esercizio 10.6

Due onde piane longitudinali, di tipo sinusoidale, aventi la stessa ampiezza e la stessa lunghezza d'onda $\lambda = 50 \text{ cm}$, si propagano nella stessa direzione e verso in un mezzo trasparente. Le rispettive sorgenti hanno la stessa fase e distano di un tratto $L = 3,25 \text{ m}$ nella direzione del moto. Calcolare l'intensità risultante dalla sovrapposizione delle due onde.

RISPOSTA

$$I = 0$$

Suggerimenti

10.1

Ricavare la velocità di propagazione delle onde longitudinali elastiche nella sbarra di alluminio e poi esprimere i tempi impiegati dalla perturbazione, in aria e nella sbarra, a percorrere la distanza D .

ferenza tra gli argomenti della funzione sinusoidale che descrive l'onda.

densità della corda.

10.5

L'energia W emessa dalla sorgente nell'unità di tempo transita, nel tempo unitario, attraverso ogni superficie sferica centrata nella sorgente.

10.2

In un fenomeno di interferenza tra onde coerenti, l'ampiezza risultante dipende dallo sfasamento Δ , ottenuto come dif-

10.3

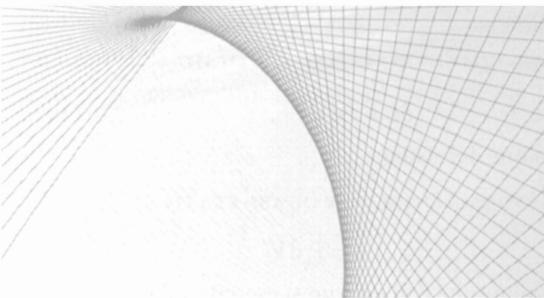
Si tratta di effetto Doppler con sorgente in movimento e ricevitore fermo.

10.4

Ricordare (o ricavare) l'espressione della velocità di propagazione di onde trasversali in una corda tesa in funzione della tensione applicata e della

10.6

Si tratta di un fenomeno di interferenza, per il quale vi è sfasamento fra le due onde.



Calore e temperatura

Basato sul Capitolo 12 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo introducono alla termodinamica, cioè a quella parte della Fisica che descrive i fenomeni termici (riscaldamento/raffreddamento) e la loro relazione con i fenomeni meccanici. I primi concetti

della termodinamica sono riassunti nei *Punti chiave* che seguono. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Punti chiave

La termodinamica si occupa di studiare i *fenomeni termici* in relazione ad altre forme di energia. Le principali grandezze termiche sono *temperatura* e *calore*. La temperatura caratterizza uno *stato termico*; il calore entra in gioco nelle *trasformazioni termiche*.

Un *sistema termodinamico* è un sistema macroscopico descritto in termini di parametri di insieme, detti *parametri di stato*.

Due sistemi interagenti fra loro, ma isolati dall'ambiente esterno, si portano all'equilibrio alla stessa temperatura.

Se due sistemi a diversa temperatura interagiscono, si ha passaggio di calore dall'uno all'altro; ma non sempre, quando un corpo riceve o cede calore, la sua temperatura cambia.

La definizione operativa di *temperatura* è basata sul *termometro*.

Il *calore* è quella forma di energia che si trasmette in virtù di differenze di temperatura: la sua definizione operativa è basata sul *calorimetro*.

Tipici parametri di stato sono la temperatura T , la pressione P , il volume V , la densità ρ ecc.

PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

In particolare i cambiamenti di fase (solido/liquido/vapore) richiedono scambi di calore; ma, fissata la pressione, essi hanno luogo a temperatura costante.

Punti chiave

Durante una trasformazione termodinamica, oltre a scambiare calore, in generale il sistema assorbe o compie lavoro meccanico.

In particolare, il sistema in generale assorbe o compie lavoro quando cambia il suo volume. Il lavoro scambiato, così come il calore, dipende in generale non solo dallo stato iniziale e da quello finale, ma anche dal particolare tipo di trasformazione che il sistema ha compiuto.

Nel caso di trasformazioni quasi-statiche, il lavoro è graficamente rappresentato dall'area sottesa dalla curva rappresentativa della trasformazione t nel piano P, V (piano di Clapeyron).

Per convenzione il calore Q è *positivo* quando è *assorbito* dal sistema (negativo se ceduto); il lavoro L è invece *positivo* se *compiuto* dal sistema verso l'esterno (negativo se assorbito).

IN TRASFORMAZIONI QUASI-STATICHE

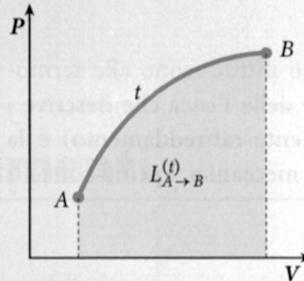
$$\delta L = P dV \quad [\text{XII.6}]$$

P : pressione del sistema.

IN TRASFORMAZIONI NON QUASI-STATICHE

$$\delta L = P_0 dV$$

P_0 : pressione che dall'esterno si esercita sul sistema.



Esercizi

Esercizio 12.1

Una sfera di ferro è completamente immersa in acqua, mentre il sistema è in equilibrio termico alla temperatura iniziale T_0 . In queste condizioni la spinta di Archimede sulla sfera è A_0 . Successivamente, il sistema innalza la temperatura di $\Delta T = 3^\circ\text{C}$ e la spinta di Archimede assume il valore A . Ricavare il rapporto A/A_0 , sapendo che il coefficiente di espansione volumica è per l'acqua $\beta_a = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e per il ferro $\beta_f = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

RISPOSTA

$$\frac{A}{A_0} = \frac{(1 + 3,6 \cdot 10^{-5})}{(1 + 5,4 \cdot 10^{-4})} < 1$$

Esercizio 12.2

Una sbarra di ferro (coefficiente di dilatazione termica lineare $\alpha_f = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e modulo di Young $E_f = 20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$) ha gli estremi saldati a due punti fissi A e B , sui quali non esercita sforzi quando la sua temperatura è $T_0 = 30^\circ\text{C}$. Se la temperatura si abbassa fino al valore $T = -20^\circ\text{C}$, calcolare lo sforzo di trazione ΔP sui punti fissi A e B .

RISPOSTA

$$\Delta P = 1,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$



Esercizi di riepilogo

Esercizio 12.3

Il pendolo di un orologio è costruito in ottone. Ammettendo che l'orologio sia esatto quando la temperatura ambiente è $t_0 = 20^\circ\text{C}$, quanto ritarda ogni giorno quando la temperatura ambiente è $t = 27^\circ\text{C}$?

RISPOSTA

5,7 s

Esercizio 12.4

Un gas alla pressione P_0 atmosferica e temperatura T_0 ambiente è contenuto dentro un cilindro con pistone il cui volume iniziale è $V_0 = 10$ litri. Raffreddando il gas, il pistone scende per azione della pressione atmosferica esterna, fino a che il volume occupato dal gas non è $V = 8$ litri. Qual è il lavoro, in valore assoluto e segno, compiuto dal gas?

RISPOSTA

$L = -202,6 \text{ J}$

Esercizio 12.5

Un recipiente metallico contiene 5 litri di acqua e una massa m_g pari a 5 kg di ghiaccio, fra di loro in equilibrio termico. Sotto il recipiente viene posta la fiamma di un fornelletto a gasolio: si riscontra che tutto il ghiaccio si è disciolto quando il fornello ha bruciato 100 g di gasolio. Quale frazione dell'energia termica sviluppata dal fornello è stata comunicata al recipiente? (Calore di combustione del gasolio = 10^4 cal/g.)

RISPOSTA

40%

Suggerimenti

12.1

Nel calcolare la spinta di Archimede, tenere conto del fatto che anche la densità dell'acqua varia con il variare della temperatura.

12.2

Tenere conto del fatto che, in generale, le dimensioni geometriche di un corpo dipendono dalla temperatura e dalle azioni meccaniche agenti sul corpo stesso. In questo caso c'è la concomitanza di entrambi gli effetti.

12.3

Se si trattasse di un pendolo semplice, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; nel caso di un pendo-

lo fisico, vale un'espressione analoga dove l è una lunghezza caratteristica (lunghezza ridotta) del pendolo. Essendo $T = T(l)$, ogni variazione Δl di lunghezza (dilatazione) produce una variazione ΔT del periodo. ΔT può essere calcolato approssimativamente tenendo conto che $\Delta l/l \ll 1$.

12.4

Si tratta di lavoro di compressione di un sistema soggetto a una pressione esterna costante pari a P_0 .

12.5

La soluzione è molto semplice, perché il sistema che riceve calore è praticamente un calorimetro; si è voluto mettere in evidenza che, in generale, solo una frazione del calore sviluppato in una fiamma viene utilmente impiegato.

Primo principio della termodinamica

Basato sul Capitolo 13 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Gli esercizi di questo capitolo si basano sul fatto che il calore è una forma di energia e che, per ogni trasformazione di un sistema, il primo principio della Termodinamica stabilisce una relazione tra calore, lavoro e variazioni della funzione di stato energia interna. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Men-

cuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*. Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona , prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Si riscontra sperimentalmente che nelle *trasformazioni cicliche* il rapporto fra il lavoro L che il sistema ha ricevuto e il calore complessivo che gli è stato sottratto (o viceversa) è una costante universale:

$$\frac{L}{Q} = J \text{ ovvero } QJ - L = 0 \quad [\text{XIII.1}]$$

La [XIII.1.a] mostra che la quantità $Q - L$, essendo nulla su ogni ciclo, può essere *in generale espressa* come variazione di una funzione di stato

$$Q - L = \Delta U \quad [\text{XIII.10}]$$

È questa la formulazione del *primo principio della termodinamica*.

Nelle *trasformazioni quasi-statiche*, il primo principio può essere scritto anche per ogni tratto elementare della trasformazione stessa:

$$\delta Q - \delta L = dU \quad [\text{XIII.11}]$$

La [XIII.I] mostra che *il calore è una forma di energia*. Se Q e L vengono misurati nelle stesse unità, allora nella [XIII.1] si ha $J = 1$; e la stessa diviene:

$$Q - L = 0 \quad [\text{XIII.1.a}]$$

nelle trasformazioni cicliche.

La funzione di stato U è detta *energia interna*: essa dipende dai parametri di stato del sistema.

Corpo rigido:

$$dU = mc dT \quad [\text{XIII.14}]$$

Gas perfetto:

$$dU = nC_V dT \quad [\text{XIII.27}]$$

Gas reali (una mole):

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV \quad [\text{XIII.42}]$$

m : massa; c : calore specifico; T : temperatura assoluta; n : numero di moli; C_V : calore molare a volume costante; V : volume; a : costante di Van der Waals.

Punti chiave

$\Delta U(dU)$ è indipendente dalla trasformazione; $Q(\delta Q)$ e $L(\delta L)$ dipendono invece, in generale, dalla trasformazione. Pertanto, anche i *calori specifici* dipendono in generale dalla trasformazione.

Per i solidi, di norma, vale approssimativamente la legge empirica di Dulong e Petit: $C = 3R$ (R : costante dei gas; C : calore molare).

I gas perfetti soddisfano l'*equazione di stato*

$$PV = nRT \quad [\text{XIII.20}]$$

Le trasformazioni quasi-statiche (reversibili) sono rappresentate da linee rappresentative ben definite nel piano di Clapeyron.

Anche il lavoro assume, su ogni trasformazione quasi-statica, una ben definita espressione in termini dei parametri di stato finali e iniziali: espressione che è però diversa a seconda dei vari tipi di trasformazione.

I gas reali sono ben descritti (salvo che nelle situazioni in cui si hanno cambiamenti di stato) dall'*equazione di Van der Waals*:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad [\text{XIII.38}]$$

(per una mole)

a e b sono legati ai *parametri critici* dalle [XIII.39].

Per le trasformazioni quasi-statiche dei gas perfetti si ha

$$C_p = C_v + R \quad [\text{XIII.33}]$$

C_p = calore molare a pressione costante

$C_v = 3/2R$ (gas monoatomici)

$C_v = 5/2R$ (gas biatomici)

$C_v = 3R$ (gas poliatomici)

Equazione della linea rappresentativa di alcune trasformazioni quasi-statiche notevoli di gas perfetti:

P = costante (isobara)

V = costante (isocora)

PV = costante (isoterma)

PV^γ = costante (adiabatica; $\gamma = C_p/C_v$)

PV^K = costante (politropica; K = reale qualunque)

LAVORO PER TRASFORMAZIONI REVERSIBILI DI GAS PERFETTI

$L = P(V_f - V_i)$ (isobara)

$L = 0$ (isocora)

$L = nRT \log V_f/V_i$ (isoterma)

$L = nC_v(T_i - T_f)$ (adiabatica)

Il pedice i indica gli stati iniziali, il pedice f gli stati finali.

Per i gas reali, risulta utile tener presenti le seguenti relazioni notevoli:

$$U = C_v T - a/V \quad [\text{XIII.40}]$$

$$\begin{cases} dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV \\ \delta L = \left[\frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{V^2} \right] dV \end{cases} \quad [\text{XIII.42}]$$

$$\delta Q = C_v dT + [RT/(V-b)]dV \quad [\text{XIII.43}]$$

$$T(V-b)^{\frac{R}{C_v}} = \text{costante} \quad [\text{XIII.44}]$$

Esercizi assistiti e di consolidamento



Esercizio 13.1 (Esercizi correlati: 13.1* e 13.1**)

Un gas perfetto viene riscaldato a pressione costante. Durante il riscaldamento viene fornita una quantità di calore pari a Q . Ricavare l'espressione del lavoro L compiuto dal gas.

RISPOSTA

$$L = \frac{(\gamma - 1)Q}{\gamma}$$

Esercizio 13.1*

Un volume V di gas perfetto biamomico subisce una trasformazione isocora che ne fa aumentare la pressione della quantità Δp . Ricavare l'espressione della quantità di calore scambiato dal gas.

RISPOSTA

$$Q = \frac{5}{2}V\Delta p$$

Esercizio 13.1**

Una mole di gas perfetto subisce una trasformazione isobara nella quale accresce la sua temperatura della quantità ΔT e riceve una quantità di calore Q . Ricavare le espressioni: a) del lavoro; b) della variazione di energia interna; c) del valore del rapporto $\gamma = C_p/C_v$.

RISPOSTE

a) $L = R\Delta T$

b) $\Delta U = Q - R\Delta T$

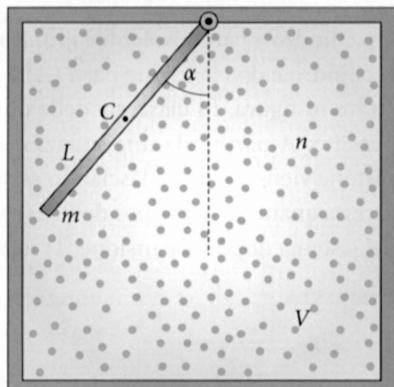
c) $\gamma = \frac{Q}{Q - R\Delta T}$

Esercizio 13.2

Una sbarra metallica omogenea, di massa m , lunghezza L e calore specifico c , può oscillare senza attrito intorno a un suo estremo. La sbarra è posta all'interno di un recipiente termicamente isolante e di capacità termica trascurabile. Il recipiente contiene anche n moli di un gas perfetto di volume V . La sbarra è inizialmente ferma a un angolo α con la verticale, come indicato in figura. A un certo istante la sbarra viene lasciata libera e inizia a oscillare, frenata dall'attrito con il gas. Dopo un certo tempo la sbarra si ferma in posizione verticale di equilibrio. Ricavare l'espressione della variazione di temperatura ΔT del sistema (sbarra + gas).

RISPOSTA

$$\Delta T = \frac{mgL(1 - \cos \alpha)}{2(nC_v + mc)}$$



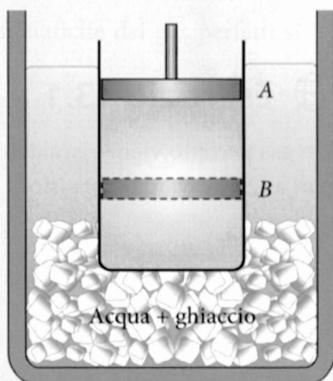


Esercizio 13.3 (Esercizio correlato: 13.3*)

Un recipiente cilindrico con pistone mobile contiene n moli di gas perfetto ed è in contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio (0°C). Il recipiente esterno è termicamente isolato. Il volume iniziale del gas è V_A . A partire da questa situazione di equilibrio, il pistone viene bruscamente abbassato finché il volume si riduce a V_B . A questo punto il pistone viene mantenuto fisso in posizione B fino a che il gas raggiunge equilibrio termico alla temperatura di 0°C . Da qui il pistone viene lentamente riportato nella posizione A . In tutto questo ciclo si scioglie una massa m di ghiaccio. Ricavare l'espressione del lavoro nella compressione iniziale dal volume V_A al volume V_B . Il calore latente di fusione è λ_f .

RISPOSTA

$$L_{A \rightarrow B} = m\lambda_f - nRT_0 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

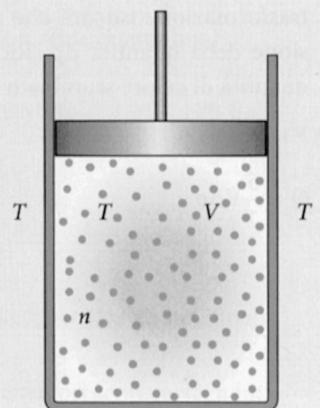


Esercizio 13.3*

In un cilindro metallico può scorrere senza attrito un pistone a tenuta. Nel cilindro sono contenute n moli di gas perfetto a temperatura T , in equilibrio termico con l'ambiente circostante. A partire da questa situazione, il pistone viene abbassato molto lentamente, fino a dimezzare il volume occupato dal gas. Calcolare la quantità Q di calore scambiato con l'esterno.

RISPOSTA

$$Q = nRT \ln \frac{1}{2}$$

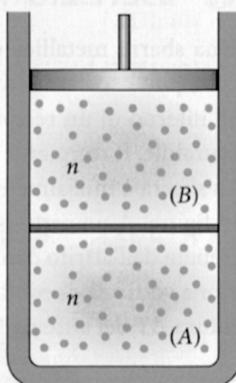


Esercizio 13.4 (Esercizio correlato: 13.4*)

Un cilindro a pareti isolanti è munito di pistone scorrevole senza attrito, anch'esso isolante. Il cilindro è diviso in due parti (A) e (B) da un setto rigido permeabile al calore, come mostrato in figura. In ciascuna delle due parti è contenuto lo stesso numero n di moli di gas perfetto. A partire da una situazione di equilibrio in cui il sistema ha temperatura T_{IN} , il pistone viene sollevato lasciando espandere il gas contenuto nella parte (B). L'espansione si arresta quando il corrispondente lavoro vale L . Ricavare l'espressione della temperatura T_{FIN} del sistema dopo l'espansione. Trascurare la capacità termica del recipiente e del pistone.

RISPOSTA

$$T_{FIN} = T_{IN} - \frac{L}{2nC_V}$$

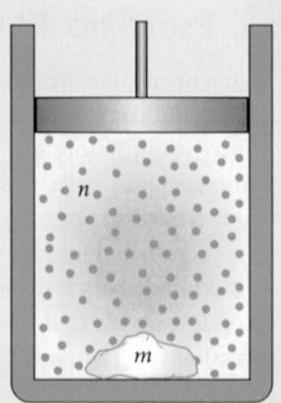


Esercizio 13.4*

Un cilindro isolante, munito di pistone mobile privo di attriti, contiene n moli di gas perfetto e una massa m di ghiaccio alla temperatura $T_0 = 0^\circ\text{C}$. La pressione iniziale è quella atmosferica P_0 . A partire da questa situazione, il pistone viene lentamente abbassato fino a che metà del ghiaccio si è sciolta. Calcolare la pressione finale P_f del gas, sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è λ .

RISPOSTA

$$P_f = P_0 e^{\frac{-\lambda m}{2nRT_0}}$$

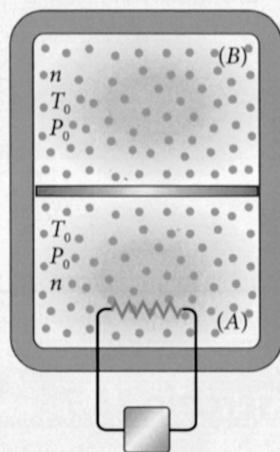


Esercizio 13.5 (Esercizi correlati: 13.5* e 13.5**)

Un recipiente cilindrico termicamente isolante è diviso in due parti uguali (A) e (B) da un pistone scorrevole senza attrito, isolante e di massa trascurabile. Ciascuna delle due parti contiene n moli di gas perfetto. Nella parte (A) è inserita una resistenza elettrica con cui è possibile trasferire calore. Inizialmente il sistema è in equilibrio alla temperatura T_0 e alla pressione P_0 . A partire da questa situazione, la resistenza elettrica inizia a riscaldare il gas in (A) con lento trasferimento di calore. Quando la quantità di calore arriva al valore Q , il gas in (A) si è espanso mentre la pressione in (B) è raddoppiata. Ricavare l'espressione di Q .

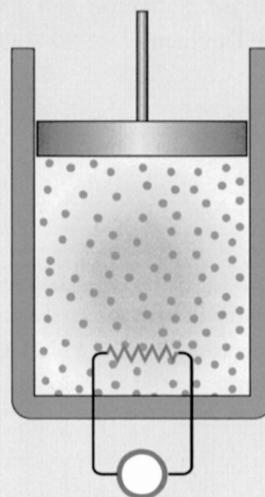
RISPOSTA

$$Q = nC_V(T_A - T_0) + nC_V(T_B - T_0) \text{ con } T_A \text{ e } T_B \text{ da ricavare}$$



Esercizio 13.5*

Nel cilindro isolante mostrato in figura, nel quale il pistone scorrevole si muove senza attrito apprezzabile, è racchiuso un gas perfetto. La pressione esterna al pistone è costante. Tramite una resistenza elettrica il gas viene riscaldato e, in corrispondenza di questo trasferimento di calore, viene compiuto un lavoro L . Ricavare l'espressione della quantità di calore Q ceduta al gas dalla resistenza elettrica.



Esercizio 13.5**

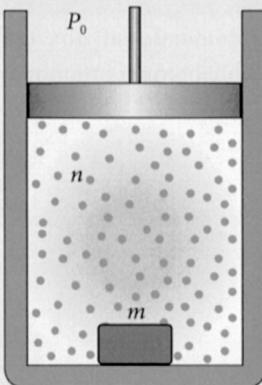
In un cilindro munito di pistone a tenuta, di massa trascurabile e scorrevole senza attrito, sono inizialmente presenti n moli di gas perfetto a temperatura T_0 . Cilindro e pistone sono termicamente isolanti e la pressione esterna è P_0 . A un certo istante nel cilindro viene introdotto un corpo solido di massa m a temperatura $T_1 > T_0$. Mentre avvengono scambi di calore tra corpo e gas, si osserva che il pistone si solleva a pressione costante, fino a quando si raggiunge una situazione di equilibrio finale, in corrispondenza della quale la variazione di volume del gas è ΔV . Ricavare l'espressione del calore specifico del corpo solido.

RISPOSTA

$$Q = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) L$$

RISPOSTA

$$c = \frac{nC_p P_0 \Delta V}{m[nR(T_1 - T_0) - P_0 \Delta V]}$$



Esercizio 13.6 (Esercizio correlato: 13.6*)

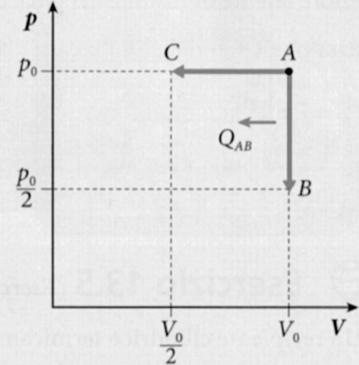
In una prima trasformazione (1) un gas perfetto viene lentamente compresso a temperatura costante fino a ridurre di un fattore α il volume iniziale. Sia L_1 il lavoro compiuto nella trasformazione (1). In una seconda trasformazione (2) lo stesso gas, partendo dalle stesse condizioni iniziali, viene lentamente compresso in modo adiabatico dello stesso fattore α . In questo secondo caso sia L_2 il lavoro necessario. Ricavare l'espressione del rapporto L_2/L_1 .

RISPOSTA

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{(\alpha^{\gamma-1} - 1)}{(\gamma - 1) \ln \alpha}$$

Esercizio 13.6*

Un gas perfetto, con una trasformazione isocora AB , dimezza la sua pressione iniziale P_0 cedendo la quantità di calore Q_{AB} . A partire dallo stesso stato iniziale, il gas compie una seconda trasformazione isobara AC che ne dimezza il volume iniziale V_0 . Ricavare l'espressione del lavoro L_{AC} compiuto dal gas, essendo nota la quantità di calore Q_{AB} .



RISPOSTA

$$L_{AC} = (\gamma - 1)Q_{AB}$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 13.7

Una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura di 0°C è formata da $m_g = 20\text{ g}$ di ghiaccio e $m_a = 80\text{ g}$ di acqua. Il tutto è contenuto entro un recipiente che, non essendo termicamente isolante, consente scambi di calore con l'ambiente a 20°C . Entro un certo tempo il ghiaccio si scioglie e l'acqua così formata si porta alla temperatura $t_a = 20^\circ\text{C}$ dell'ambiente.

- a) Qual è la quantità di calore Q che il sistema ha scambiato con l'ambiente?
- b) Qual è il lavoro L compiuto durante la trasformazione?
- c) Qual è la variazione ΔU di energia interna?

RISPOSTE

- a) $Q = 15 \cdot 10^{-3}\text{ J}$; b) $L = 0$; c) $\Delta U = 15 \cdot 10^{-3}\text{ J}$

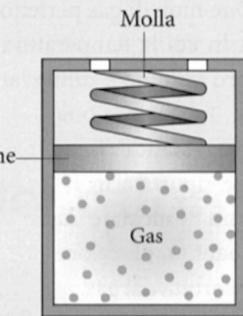
Esercizio 13.8

Un gas biatomico (ossigeno) è contenuto dentro un cilindro con pistone di area $S = 200 \text{ cm}^2$ e peso trascurabile collegato tramite una molla a un sostegno rigido. Inizialmente il volume del gas è $V_0 = 5 \text{ L}$. La pressione è pari a quella esterna $P_0 = 1 \text{ atm}$ (la molla è cioè nella sua posizione di riposo) e la temperatura è $T_0 = -30^\circ\text{C}$. Lasciando il sistema a contatto con l'ambiente esterno, esso si porta alla temperatura ambiente $T = 27^\circ\text{C}$ e il pistone si solleva di $h = 2 \text{ cm}$.

- Qual è la massa del gas (peso molecolare $M = 32$)?
- Quanto valgono la pressione P e il volume V finali?
- Qual è il valore della costante elastica K della molla?
- Qual è il lavoro L compiuto durante la trasformazione?
- Quale quantità di calore Q il sistema ha assorbito dall'ambiente? (Trattare il gas come un gas perfetto.)

RISPOSTE

- a) $m = 8 \text{ g}$; b) $V = 5,4 \text{ L}$ e $P = 1,3 \text{ atm}$; c) $K = 3,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$; d) $L = 47,3 \text{ J}$; e) $Q = 346,3 \text{ J}$



Esercizio 13.9

Una certa quantità di ossigeno alla temperatura $T_0 = 350 \text{ K}$ è contenuto in un cilindro con pistone (di massa trascurabile) in equilibrio con la pressione atmosferica esterna $P_0 = 1 \text{ atm}$. Il suo volume iniziale è $V_0 = 5 \text{ L}$. Al gas viene sottratta, lentamente, una quantità di calore $Q = 40 \text{ cal}$.

- Quale volume finale V e quale temperatura T raggiunge?
- Quanto valgono il lavoro L e la variazione ΔU di energia interna relativi alla trasformazione?

RISPOSTE

- a) $V = 4,53 \text{ L}$ e $T = 317 \text{ K}$; b) $L = -47,6 \text{ J}$ e $\Delta U = -119,6 \text{ J}$

Esercizio 13.10

Un gas monoatomico (elio) è contenuto in un cilindro con pistone termicamente conduttore, cosicché la temperatura resta pari a quella dell'ambiente esterno $T_0 = 300 \text{ K}$. Il volume iniziale è $V_0 = 5 \text{ L}$ e la pressione $P_0 = 20 \text{ atm}$. Il gas viene lasciato espandere molto lentamente fino a che il volume diviene $V = 10 \text{ L}$.

- Quale è lo stato finale?
- Quale è il calore Q ; quali il lavoro L e la variazione ΔU di energia interna relativi alla trasformazione?

RISPOSTE

- a) $P = 10 \text{ atm}$; b) $Q = L = 702 \text{ J}$, $\Delta U = 0$

Esercizio 13.11

Tre blocchi della stessa sostanza, di massa rispettivamente $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ e $m_3 = 3 \text{ kg}$, si trovano inizialmente alle temperature $t_1 = 10^\circ\text{C}$, $t_2 = 20^\circ\text{C}$ e $t_3 = 30^\circ\text{C}$. Immaginando che i tre corpi vengano posti a contatto mantenendoli isolati dall'ambiente esterno, calcolare la temperatura di equilibrio t_f che essi raggiungono.

RISPOSTA

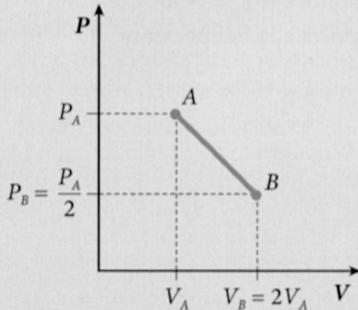
$$t_f = 23,3^\circ\text{C}$$

Esercizio 13.12

Due moli di gas perfetto, a partire da uno stato iniziale A in cui la temperatura è $T_A = 273$ K, raddoppiano il loro volume e dimezzano la loro pressione, seguendo la trasformazione quasi-statica lineare riportata in figura. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas.

RISPOSTA

$$Q = 3403 \text{ J}$$



Esercizio 13.13

Una mole di gas perfetto monoatomico, inizialmente alla pressione $P_A = 1 \text{ atm}$ e volume $V_A = 8 \text{ L}$, compie una trasformazione quasi-statica rappresentata dall'equazione $VT = \text{costante}$. Il volume finale è $V_B = 2 \text{ L}$. Calcolare il lavoro nella trasformazione.

RISPOSTA

$$L = -2431 \text{ J}$$

Suggerimenti

13.1*

Il lavoro è nullo ($V = \text{costante}$) e quindi la quantità di calore è pari alla variazione di energia interna.

13.1**

Procedere come nell'esercizio 13.1*, imponendo la condizione $\Delta p = 0$.

13.3*

Il cilindro metallico è buon conduttore di calore, per cui si tratta di trasformazione isoterma, che, sviluppandosi molto lentamente, è anche reversibile.

13.4*

Il sistema è termicamente isolato all'esterno. Rispetto al gas, il ghiaccio fa parte dell'ambiente esterno. Il gas cede calore al ghiaccio e subisce lavoro L a temperatura costante.

13.5*

Mancano informazioni sulla quantità di gas e sulla variazione di temperatura. Ricorrere al primo principio della termodinamica e tenere conto che si tratta di trasformazione isobara.

13.5**

Applicare il primo principio della termodinamica e tenere conto del fatto che l'espansione è isobara.

13.6*

Applicando il primo principio della termodinamica, tenere conto del fatto che gli stati B e C hanno la stessa temperatura.

13.7

Si ha $L = 0$. Il calcolo di Q è ricondotto alle definizioni calorimetriche (calore latente e calore specifico).

13.8

Lo stato iniziale e quello finale sono completamente noti. Nota la pressione finale e l'accorciamento h della molla si calcola la costante K della molla stessa. Quando il pistone si è sollevato di un tratto y ($0 < y < h$), la pressione vale

$$P = P_0 + \frac{Ky}{S}; \text{ per cui } dL = PSdy =$$

$= P_0 dV + Kydy$, il che consente il calcolo immediato del lavoro L relativo alla trasformazione. ΔU si calcola usando la variazione di temperatura e il primo principio consente di ricavare Q .

13.9

La trasformazione è isobara ($P = P_0$); essendo noto Q , è immediato il calcolo della variazione di temperatura, il che consente di calcolare i parametri dello

stato finale. Segue il calcolo di L e di ΔU ; il primo principio consente una verifica.

13.10

La trasformazione è quasi-statica e isoterma; gli stati iniziale e finale sono noti. È quindi immediato il calcolo di ΔU e di L e, tramite il primo principio, il calcolo di Q .

13.11

Il sistema è isolato, e dunque $\Delta U = 0$. U è funzione additiva.

13.12

Per il calcolo di Q ricorrere al primo principio della termodinamica. Per i gas perfetti $U = U(T)$. Calcolare T_B e confrontarlo con T_A . $L = \sum PdV$ può essere calcolato anche graficamente.

13.13

È opportuno esprimere la politropica $VT = \text{costante}$ nella forma $PV^k = \text{costante}$, cosa che può essere fatta tenendo conto che $PV = nRT$. Una volta ricavata la relazione $P = P(V)$, il calcolo del lavoro $L = \int PdV$ è immediato.

Trasmissione del calore

Basato sul Capitolo 14 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Questo capitolo riguarda meccanismi attraverso i quali il calore trasferisce energia in virtù di differenze di temperatura. Si tratta di trasmissione di calore per conduzione, convezione e irraggiamento. I concetti fondamentali

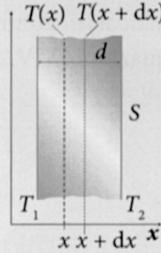
sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, indicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Punti chiave

CONDUZIONE DI CALORE IN REGIME STAZIONARIO attraverso un materiale omogeneo di superficie S e spessore d (dimensioni lineari di S molto maggiori di d).

$$H = \frac{\lambda}{d}$$
 è detta *conduttanza unitaria*

λ : conducibilità termica.



$$P = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad [\text{XIV.2}]$$

ovvero

$$P = \frac{\lambda S}{d} (T_1 - T_2) \quad [\text{XIV.3}]$$

P : potenza termica

λ : conducibilità termica

T_1, T_2 ($T_1 > T_2$): temperature delle due facce

CONDUZIONE ATTRAVERSO PIÙ LASTRE IN SERIE

Serie

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \dots + \frac{1}{H_n} \quad [\text{XIV.9}]$$

CONDUZIONE IN REGIME NON STAZIONARIO

EQUAZIONE UNIDIMENSIONALE DI FOURIER

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{XIV.13}]$$

EQUAZIONE TRIDIMENSIONALE DI FOURIER

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [\text{XIV.14}]$$

Punti chiave

SCAMBI TERMICI CONVETTIVI NEI FLUIDI

Il parametro empirico H_c dipende dal fluido, dalla geometria, dalla temperatura.

La potenza scambiata attraverso un'intercapedine di superficie S e spessore d può essere descritta da una relazione analoga alla [XIV.3]

$$P = H_c S(T_1 - T_2) \quad [\text{XIV.16}]$$

dove H_c è detto conduttanza unitaria convettiva.

SCAMBI TERMICI PER IRRAGGIAMENTO

Sono dovuti alla trasmissione di onde elettromagnetiche fra i due corpi in considerazione. Essi avvengono anche (e soprattutto) quando tra i due corpi ci sia il vuoto (o aria). Le leggi fondamentali dell'irraggiamento sono:

- legge di Planck di emissione del corpo nero;
- legge di Stefan-Boltzmann;
- legge di Wien.

Funzione di Planck (spettro di emissione del corpo nero):

$$f_n(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5 (\exp(C_2 / \lambda T) - 1)} \quad [\text{XIV.21}]$$

Potenza irraggiata da un corpo nero di superficie S a temperatura T (*legge di Stefan-Boltzmann*):

$$P_n = SF_n = S\sigma T^4 \quad [\text{XIV.23}]$$

Massimo dello spettro di emissione del corpo nero (*legge di Wien*):

$$\lambda_{\max} = \frac{2897,8 \mu\text{mK}}{T} \quad [\text{XIV.24}]$$

Per il calcolo della potenza termica scambiata fra due corpi qualunque (non neri), occorre conoscere, oltre alla configurazione geometrica del sistema costituito dai due corpi, anche le proprietà superficiali dei corpi nei riguardi dell'irraggiamento; in particolare la loro emittanza $\varepsilon(\lambda)$ che a ogni lunghezza d'onda è pari all'assorbanza $a(\lambda)$:

$$\varepsilon(\lambda) = a(\lambda) \quad [\text{XIV.26}]$$

(*legge di Kirchhoff*).

Il bilancio termico della Terra è determinato dagli scambi radiativi con il Sole (radiazione solare in arrivo) e con lo spazio cosmico freddo (radiazione infrarossa in uscita dalla Terra).

Per la confortevolezza termica del corpo umano è necessario che la potenza termica prodotta dal metabolismo venga dissipata verso l'ambiente senza che la temperatura interna del corpo si discosti dal valore di 37 °C necessario per il buon funzionamento dell'organismo.

Se $\varepsilon(\lambda)$ non dipende da λ , il corpo è detto *grigio*; se $\varepsilon = 1$, il corpo è *nero*. Se ε dipende da λ , la superficie del corpo è detta *selettiva*.

La potenza scambiata per irraggiamento in alcune particolari configurazioni geometriche è data dalle equazioni [XIV.27], [XIV.28], [XIV.29], [XIV.30].

In questi scambi, giocano un ruolo fondamentale le proprietà ottiche dell'atmosfera (trasparenza nel visibile e nell'infrarosso).

Ciò richiede un delicato equilibrio tra scambi termici convettivi, radiativi ed evaporativi.

Esercizi di riepilogo

Esercizio 14.1

Una parete di area 12 m^2 è costituita da 15 cm di calcestruzzo protetto da 3 cm di intonaco. Se la faccia interna si trova a 18°C e quella esterna a 2°C , qual è la potenza termica dissipata? Se il rendimento dell'impianto di riscaldamento è 0,80, qual è il consumo annuo di gasolio di cui quella parete è responsabile, supponendo che per 150 giorni all'anno la situazione termica media sia quella sopra detta? A quando scendono la potenza termica e il consumo se la parete viene protetta con 5 cm di poliuretano espanso?

RISPOSTE

Parete non isolata: $P = 1248 \text{ W}$; $Q = 484 \text{ kg}$

Parete isolata: $\bar{P} = 92 \text{ W}$; $Q = 38,6 \text{ kg}$

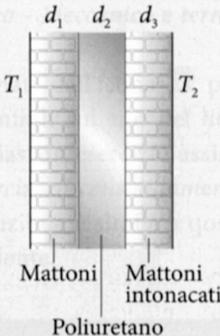
*Basato sul Capitolo 15 di C. M. Valanis, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.*

Esercizio 14.2

Una parete è costituita di tre strati: uno strato di mattoni, di spessore $d_1 = 10 \text{ cm}$, uno strato di poliuretano espanso, di spessore $d_2 = 8 \text{ cm}$, e uno strato di mattoni intonacati di spessore complessivo pari a 12,5 cm. Calcolare la conduttanza unitaria. Se la faccia interna si trova a temperatura $T_1 = 20^\circ\text{C}$ e la faccia esterna a $T_2 = 5^\circ\text{C}$, qual è il flusso W di potenza termica a regime attraverso l'unità di area? Quali sono le temperature T_3 e T_4 sulle superfici di separazione dei vari strati?

RISPOSTE

$H = 0,30 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$; $W = 4,5 \text{ W/m}^2$; $T_3 = 19,3^\circ\text{C}$ e $T_4 = 5,5^\circ\text{C}$



Esercizio 14.3

Risolvere l'esercizio 14.1 nell'ipotesi che lo strato di poliuretano espanso sia sostituito con un'intercapedine d'aria di pari spessore.

RISPOSTE

$H = 2,16 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$; $W = 32,4 \text{ W}$; $T_3 = 14,9^\circ\text{C}$ e $T_4 = 9,1^\circ\text{C}$

Suggerimenti

14.1

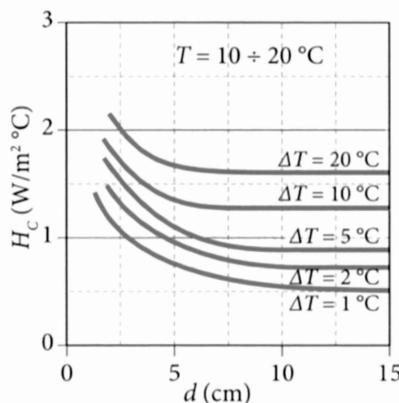
Calcolare le conduttanze unitarie dei tre strati (calcestruzzo, intonaco e poliuretano) e combinarle come indicato nelle domande, in modo da ottenere le potenze medie richieste. Poi calcolare i consumi di gasolio.

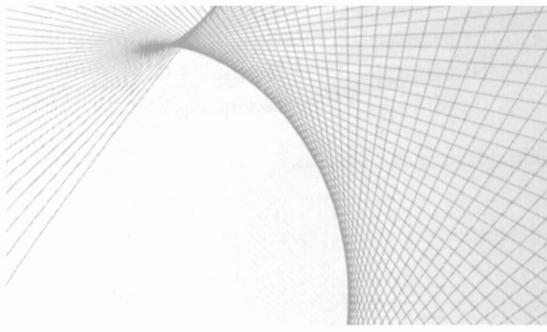
14.2

Procedi come nell'esercizio 14.1.

14.3

L'esercizio si risolve come l'esercizio 14.1, usando per l'intercapedine la conduttanza risultante dalla somma della conduttanza convettiva H_C e della conduttanza radiativa H_R . Per la conduttanza convettiva unitaria per intercapedine verticale vale l'andamento mostrato in figura.





Secondo principio della termodinamica

Basato sul Capitolo 15 di C. Mencuccini e V. Silvestrini,
Fisica - Meccanica e termodinamica

Il secondo principio della termodinamica formalizza i vincoli che per natura sono posti al procedere di certi fenomeni termodinamici. In particolare verranno chiariti i limiti esistenti alle trasformazioni di calore in lavoro (laddove non esistono limitazioni alle trasformazioni di lavoro in calore). Le trasformazioni di calore in lavoro sono alla base del funzionamento delle macchine termiche. I concetti fondamentali sono brevemente riassunti nei *Punti chiave*. La numerazione delle equazioni, in-

dicata tra parentesi quadre, si riferisce al volume di C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica - Meccanica e termodinamica*.

Gli *Esercizi assistiti*, contrassegnati dall'icona  prevedono una serie di aiuti disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina). A ciascun esercizio assistito corrispondono uno o più *Esercizi di consolidamento*, contrassegnati da *, la cui risoluzione è simile a quella dell'esercizio assistito corrispondente.

Punti chiave

Non tutti i processi relativi a sistemi termodinamici che soddisfano il primo principio possono avvenire in Natura. Più precisamente, alcuni processi che possono avvenire in un verso non possono aver luogo in verso opposto: essi sono *intrinsecamente irreversibili*. Ciò è codificato dal *secondo principio della termodinamica*.

Per conseguenza dell'enunciato (b), il più semplice motore termico funzionerà con due sorgenti; pertanto il suo ciclo sarà costituito da due isoterme e due adiabatiche. Se tale ciclo è reversibile, e se il fluido è un gas perfetto, si ha il più semplice fra i motori ideali, detto *macchina di Carnot*.

Il secondo principio ha due enunciati classici tra di loro equivalenti, quello di *Clausius* e quello di *Kelvin*. Sostanzialmente, essi dicono rispettivamente:

- mentre il calore fluisce spontaneamente dalle sorgenti calde a quelle fredde, è impossibile un processo spontaneo in cui il calore fluisca in senso inverso;
- è impossibile realizzare una macchina ciclica (motore) che trasformi in lavoro tutto il calore estratto a una sola sorgente.

In generale, il rendimento di una macchina termica è definito come

$$\eta = L/Q \quad [XV.4]$$

L: lavoro compiuto;

Q: calore assorbito.

Per una macchina di Carnot, si dimostra che

$$\eta = \frac{|Q_c| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad [XV.10]$$

dove i pedici c e f indicano le grandezze relative alla sorgente calda e fredda rispettivamente.

Punti chiave

L'importante *teorema di Carnot* stabilisce che, a parità di temperatura delle sorgenti, nessuna macchina può avere rendimento superiore a quello della macchina di Carnot, e tutte le macchine reversibili hanno lo stesso rendimento.

La disuguaglianza di Clausius può essere estesa a cicli con un numero qualunque di sorgenti.

Se l'integrale di Clausius [XV.21] viene calcolato su una trasformazione reversibile, esso è pari a zero.

Ciò ci assicura che

$$\int_{A_{(REV)}}^B \frac{\delta Q}{T}$$

può essere espresso come variazione di una funzione di stato.

Usando la disuguaglianza di Clausius [XV.21] e la definizione di entropia [XV.23], si ricava che del tutto in generale (per una trasformazione qualunque che porti da A a B):

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad [XV.25]$$

Per una macchina qualunque funzionante fra T_c e T_f :

$$1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad [XV.14]$$

da cui segue:

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0 \quad [XV.17]$$

detta *disuguaglianza di Clausius*.

Sorgenti discrete:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad [XV.20]$$

Sorgenti la cui temperatura varia con continuità:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad [XV.21]$$

$$\int_{A_{(REV)}}^B \frac{\delta Q}{T} = S(B) - S(A) \quad [XV.23]$$

Questa relazione definisce la *funzione di stato entropia*.

Nelle trasformazioni adiabatiche (o, se vogliamo, nei processi spontanei), la [XV.25] diviene:

$$S(B) - S(A) \geq 0 \quad [XV.26]$$

Nei processi spontanei, l'entropia non può diminuire. In un qualunque processo, l'entropia del sistema più quella delle sorgenti non può diminuire.
(Enunciato del secondo principio in termini di entropia.)

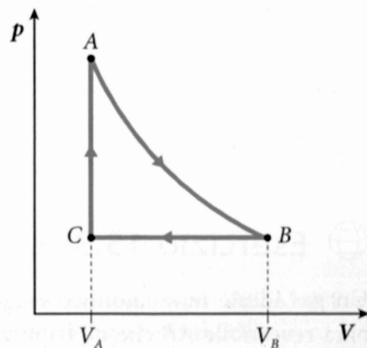
Esercizi assistiti e di consolidamento

Esercizio 15.1 (Esercizi correlati: 15.1* e 15.1**)

Un gas perfetto, di cui è noto il coefficiente $\gamma = C_p/C_v$, compie il ciclo reversibile mostrato in figura. Il tratto AB è un'espansione adiabatica che porta il gas dal volume V_A al volume $V_B = \alpha V_A$. Il tratto BC è un'isobara e il tratto CA è un'isocora. Ricavare l'espressione del rendimento η del ciclo.

RISPOSTA

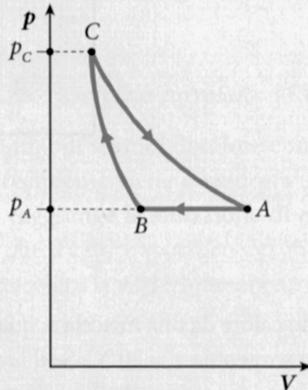
$$\eta = 1 - \gamma \frac{(\alpha - 1)}{(\alpha^\gamma - 1)}$$



Esercizio 15.1*

Nel ciclo mostrato in figura, il fluido termodynamico è costituito da un gas perfetto monoatomico. Le tre trasformazioni reversibili del ciclo sono: AB isobara, BC adiabatica, CA isoterna a temperatura T_A .

Sapendo che $P_C = 2P_A$, ricavare l'espressione del rendimento η del ciclo.



RISPOSTA

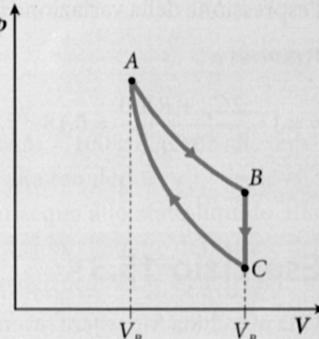
$$\eta = 0,13$$

Esercizio 15.1**

Un gas perfetto biatomico esegue il ciclo reversibile mostrato in figura, dove la trasformazione AB è un'isoterma che ne raddoppia il volume, la trasformazione BC è un'isocora, mentre la trasformazione CA è un'adiabatica che riporta il gas allo stato iniziale. Calcolare il rendimento del ciclo.

RISPOSTA

$$\eta = 0,14$$



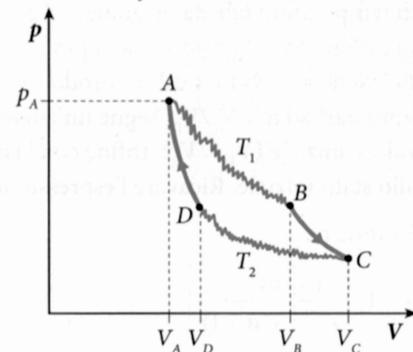
Esercizio 15.2 (Esercizio correlato: 15.2*)

Un gas ideale compie un ciclo venendo a contatto con due sole sorgenti. La trasformazione AB avviene con la pressione esterna bruscamente dimezzata, mentre il gas è a contatto con una sorgente a temperatura $T_1 = 800$ K. Raggiunto l'equilibrio, la trasformazione BC è un'espansione adiabatica reversibile che riduce la temperatura da T_1 a T_2 . Nel tratto CD la pressione esterna è bruscamente raddoppiata mentre il gas è a contatto con una sorgente a temperatura $T_2 = 300$ K. Il tratto DA è una compressione adiabatica reversibile che riporta il gas allo stato iniziale. Ricavare il rendimento η del ciclo e confrontarlo con quello η_c di un ciclo reversibile di Carnot operante tra le stesse temperature T_1 e T_2 .

RISPOSTE

$$\eta = 0,25$$

$$\eta_c = 0,625$$



Esercizio 15.2*

Consideriamo il ciclo dell'esercizio 15.1** e supponiamo che il fluido termodinamico sia costituito da 2 moli di gas perfetto monoatomico e che la trasformazione isocora BC sia irreversibile, perché realizzata ponendo il gas a contatto con un'unica sorgente a temperatura T_C . Calcolare la variazione di entropia dell'universo, cioè del sistema (gas + sorgenti).

RISPOSTA

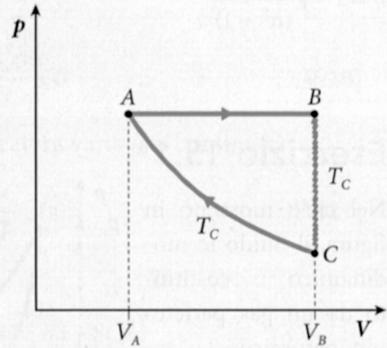
$$\Delta S_{UN} = +3,1 \text{ J/K}$$

Esercizio 15.3 (Esercizio correlato: 15.3*)

Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo costituito dall'espansione isobara reversibile AB che ne triplica il volume, seguita da una trasformazione irreversibile BC a volume costante nella quale è mantenuto il contatto con una sorgente di calore a temperatura T_C . La successiva trasformazione CA è un'isoterma reversibile a temperatura T_C . Ricavare il rendimento del ciclo e l'espressione della variazione di entropia dell'universo.

RISPOSTA

$$\eta = 1 - \frac{2C_V + R \ln 3}{2C_p} = 0,18$$

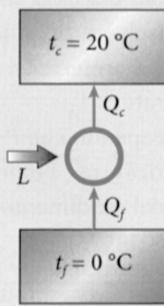


Esercizio 15.3*

Una macchina frigorifera reversibile produce ghiaccio prelevando calore da una miscela acqua-ghiaccio a $t_f = 0^\circ\text{C}$ e cedendo calore all'ambiente esterno, che funge da sorgente a $t_c = 20^\circ\text{C}$. Se il lavoro assorbito dal fluido termodinamico è pari a L in ogni ciclo, calcolare la massa m di ghiaccio prodotta in ogni ciclo (λ = calore latente = 80 cal/g).

RISPOSTA

$$m = 13,65 \frac{L}{\lambda}$$

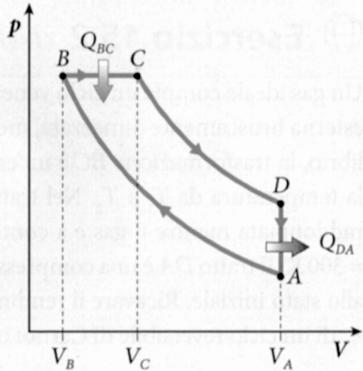


Esercizio 15.4 (Esercizio correlato: 15.4*)

Un ciclo Diesel ideale (ciclo termodinamico a combustione interna) può essere schematizzato con quattro trasformazioni reversibili di un gas perfetto. Un'adiabatica AB comprime il gas di un fattore $r = V_A/V_B$ producendo un innalzamento di temperatura tale da incendiare il combustibile iniettato alla fine del tratto AB (a differenza del motore a scoppio non serve la scintilla d'innesto). Nell'isobara BC viene assorbito il calore prodotto dalla combustione con rapporto tra i volumi pari ad $\alpha = V_C/V_B$. Segue un'adiabatica CD che riporta il volume del gas al valore iniziale ($V_D = V_A$). Infine con l'isocora DA viene ceduto calore e si ritorna allo stato iniziale. Ricavare l'espressione del rendimento del ciclo.

RISPOSTA

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \left[\frac{(\alpha^\gamma - 1)}{\gamma(\alpha - 1)} \right]$$

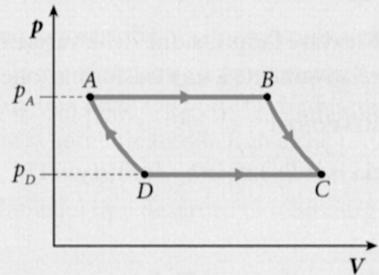


Esercizio 15.4*

Un gas perfetto monoatomico esegue il ciclo reversibile mostrato in figura. AB e CD sono isobare alle pressioni $P_A = 2P_D$ e P_D , rispettivamente. Le trasformazioni BC e DA sono adiabatiche. Sapendo che il calore assorbito in un ciclo è Q , ricavare l'espressione del lavoro relativo al ciclo stesso.

RISPOSTA

$$L = 0,24 \cdot Q$$



Esercizio 15.5

Un masso m di rame (calore specifico c), inizialmente a temperatura T_0 , viene gettato nelle acque di un lago a temperatura $T_L < T_0$, e ci resta fino al raggiungimento del nuovo equilibrio termico. Ricavare le espressioni della:

- a) variazione di entropia del rame;
- b) variazione di entropia del lago.

Esercizio 15.6 (Esercizio correlato: 15.6*)

In un recipiente con trascurabili scambi di calore con l'esterno è contenuta una massa $M = 100$ g d'acqua alla temperatura $t_1 = 27^\circ\text{C}$. Nel recipiente viene introdotta una massa $m = 25$ g di ghiaccio alla temperatura $t_2 = -23^\circ\text{C}$. Dopo un certo tempo si raggiunge la situazione di equilibrio finale in cui si ha solo acqua allo stato liquido alla temperatura t_f . Sapendo che il calore specifico del ghiaccio è $c_g = 0,45 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$ e che il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda_f = 80 \text{ cal/g}$, calcolare la variazione di entropia del sistema (calore specifico dell'acqua $c = 1 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$).

RISPOSTA

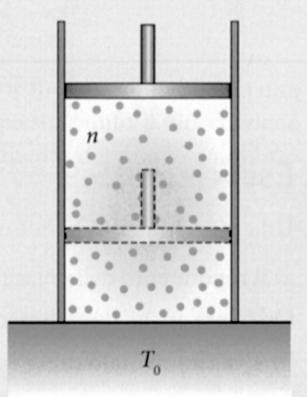
$$\Delta S = 0,44 \text{ cal/K}$$

Esercizio 15.6*

Un cilindro, munito di pistone scorrevole senza attrito e con la base a contatto con una sorgente a temperatura T_0 , contiene n moli di gas perfetto inizialmente in condizioni di equilibrio termico. A un certo istante, al pistone vengono applicate forze esterne tali che bruscamente il volume del gas diventa $1/3$ del volume iniziale, mentre le forze esterne compiono un lavoro L . Alla fine si stabilisce una situazione di equilibrio per il gas. Ricavare l'espressione della variazione di entropia dell'universo (gas + sorgente).

RISPOSTA

$$\Delta S_{UN} = -nR\ln 3 + \frac{|L|}{T_0}$$



Esercizio 15.7 (Esercizio correlato: 15.7*)

Ricavare l'espressione della variazione di entropia di n moli di gas perfetto, di cui è noto il coefficiente $\gamma = C_p/C_v$, relativamente a una trasformazione che aumenta il volume di un fattore 2 e riduce la pressione di un fattore 3.

RISPOSTA

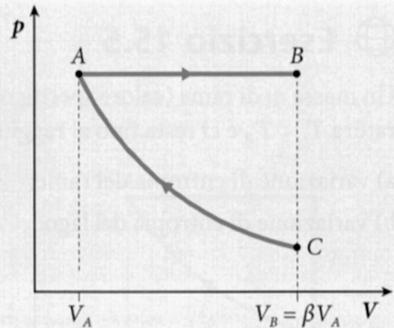
$$\Delta S = [nR \cdot \ln(\gamma \ln 2 - \ln 3)]/(\gamma - 1)$$

Esercizio 15.7*

Un fluido termodinamico, costituito da n moli di gas perfetto monoatomico, esegue il ciclo mostrato in figura. Nell'isobara reversibile AB il volume va da V_A a $V_B = \beta V_A$; la trasformazione BC è ottenuta mantenendo costante il volume, mentre il recipiente è a contatto termico con un'unica sorgente a temperatura T_c ; la trasformazione isoterma reversibile CA chiude il ciclo. Calcolare la variazione di entropia dell'universo.

RISPOSTA

$$\Delta S_{UN} = -nC_p \ln \beta + nC_v(\beta - 1) + nR \ln \beta$$



Esercizio 15.8

Un recipiente rigido adiabatico è diviso da una parete in due parti (A) e (B) di volumi V_A e $V_B = 2V_A$ rispettivamente. La parte (A) contiene n_1 moli di gas perfetto, mentre la parte (B) contiene n_2 moli di un gas perfetto diverso dal primo. I due gas sono alla stessa temperatura. A un certo momento viene aperto un foro nella parete divisoria e i due gas si mescolano completamente. Ricavare l'espressione della variazione di entropia del sistema.

RISPOSTA

$$\Delta S = n_1 R \ln 3 + n_2 R \ln(3/2)$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio 15.9

Una macchina di Carnot opera tra due sorgenti a temperature $T_c = 500$ K e $T_f = 300$ K. Calcolare:

a) il rendimento della macchina.

Calcolare anche il rendimento della macchina nei casi in cui:

b) T_c sia aumentato di $\Delta T = 20$ K e T_f resti al valore di 300 K;

c) T_c resti al valore di 500 K e T_f sia aumentato di $\Delta T = 20$ K.

RISPOSTE

a) $\eta = 0,40$;

b) $\eta = 0,42$;

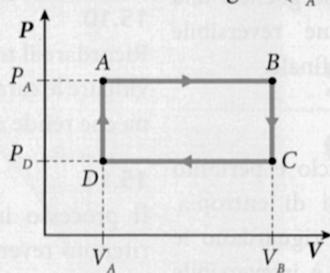
c) $\eta = 0,44$

Esercizio 15.10

Calcolare il rendimento del ciclo reversibile eseguito da un gas perfetto monoatomico e costituito da due isocore e da due isobare, come mostrato in figura. ($P_A = 4 \text{ atm}$, $P_D = 2 \text{ atm}$, $V_A = 1 \text{ L}$, $V_B = 4 \text{ L}$)

RISPOSTA

$$\eta = 0,188$$



Esercizio 15.12

Una massa $m = 100 \text{ g}$ di acqua, inizialmente a temperatura $t_1 = 30^\circ\text{C}$, è raffreddata a pressione atmosferica fino a diventare ghiaccio a temperatura $t_2 = 0^\circ\text{C}$. Successivamente il ghiaccio viene raffreddato fino alla temperatura di -10°C . Calcolare la variazione di entropia dell'acqua sapendo che il calore specifico dell'acqua in fase liquida vale $c_l = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$; il calore specifico dell'acqua in fase solida (ghiaccio) vale $c_s = 0,5 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$; il calore latente di fusione vale $\lambda \approx 80 \text{ cal/g}$. Si può supporre che i calori specifici non varino nell'intervallo di temperatura considerato.

RISPOSTA

$$\Delta S = -0,042 \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$

Esercizio 15.14

Una massa $m = 0,5 \text{ kg}$ di rame inizialmente a temperatura ambiente ($t_i = 20^\circ\text{C}$) viene messa a contatto con una sorgente S a temperatura $t_s = 100^\circ\text{C}$ fino a che non ne raggiunge la temperatura. A questo punto il blocco viene gettato nelle acque di un lago L a temperatura $t_L = 20^\circ\text{C}$, dove resta fino al raggiungimento del nuovo equilibrio termico. Sapendo che il calore specifico del rame è $c = 0,09 \text{ cal/gK}$, calcolare:

- l'integrale di Clausius per il blocco di rame;
- la variazione di entropia per l'intero sistema (rame + sorgente + lago).

RISPOSTE

$$\text{a)} -2,64 \text{ cal/K};$$

$$\text{b)} \Delta S = +2,64 \text{ cal/K}$$

Esercizio 15.11

Una macchina può lavorare tra una sorgente a temperatura $t_c = 100^\circ\text{C}$ e una sorgente a temperatura $t_f = 0^\circ\text{C}$, costituita da una massa $m = 20 \text{ kg}$ di ghiaccio a 0°C . Utilizzando la sorgente fredda fino a che tutto il ghiaccio è fuso, calcolare il massimo lavoro ottenibile da una macchina del tipo descritto ($\lambda \approx 80 \text{ cal/g}$).

RISPOSTA

$$L = 5,9 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

Esercizio 15.13

Una macchina termica opera reversibilmente scambiando calore con tre sorgenti a temperature $T_A = 500 \text{ K}$, $T_B = 373 \text{ K}$ e $T_C = 273 \text{ K}$ rispettivamente. La macchina assorbe calore $Q_A = 200 \text{ cal}$ dalla sorgente a temperatura T_A e calore $Q_B = 300 \text{ cal}$ dalla sorgente a temperatura T_B . Calcolare il rendimento del ciclo.

RISPOSTA

$$\eta = 34,4\%$$

Suggerimenti

15.1*

Procedere come nell'esercizio 15.1.

15.1**

Gli scambi di calore avvengono nell'isoterma (calore assorbito) e nell'isocora (calore ceduto per ridurre la temperatura da T_A a T_C).

15.2*

La variazione di entropia del fluido termodinamico (gas) è nulla, trattandosi di un ciclo. La variazione riguarda le due sorgenti utilizzate nel ciclo.

15.3*

Si tratta di una macchina reversibile di Carnot che lavora a ciclo invertito. Rispetto al ciclo diretto di Carnot cambiano segno tutte le grandezze (Q_c , Q_f , L). In questo problema interessa Q_f , cioè la quantità di calore scambiata con la sorgente "fredda" a 0 °C.

15.4*

Ricavare il rendimento η del ciclo, da cui risalire al lavoro L richiesto.

15.6*

La trasformazione è irreversibile, ma stato iniziale e stato finale sono in

equilibrio. Il calcolo della variazione di entropia si effettua scegliendo una qualsiasi trasformazione reversibile tra stato iniziale e stato finale.

15.7*

Il fluido compie un ciclo e pertanto non subisce variazioni di entropia. Variazioni di entropia riguardano le sorgenti. L'isocora BC è irreversibile perché, per essere reversibile, richiederebbe infinite sorgenti a temperature comprese tra T_B e T_C e diverse per infinitesimi.

15.8

Per macchina di Carnot si intende una macchina che opera tra due sole sorgenti con ciclo reversibile. Usare il teorema di Carnot e ricordare l'espressione del rendimento, in funzione delle temperature delle sorgenti, ricavata nel caso di ciclo reversibile che usi come fluido termodinamico un gas perfetto.

15.9

$L = \int P dV$ è facilmente ricavabile per integrazione grafica nel diagramma di Clapeyron. Individuare i due rami del

ciclo in cui il calore è assorbito dal gas.

15.10

Ricordare il teorema di Carnot e individuare le caratteristiche della macchina che rende massimo il rendimento.

15.11

Il processo in questione può essere ritenuto reversibile e separabile in tre processi parziali:

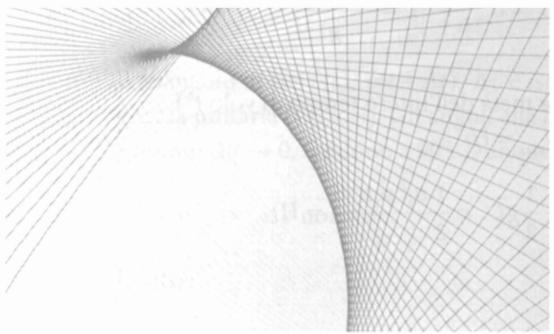
- raffreddamento reversibile da 30 °C a 0 °C;
- passaggio di stato liquido → solido a $t = 0^\circ\text{C} = \text{cost}$ (sottrazione di calore);
- raffreddamento del ghiaccio da 0 °C a -10°C .

15.12

Essendo nota la quantità totale di calore assorbita, per calcolare il rendimento basta calcolare la quantità di calore ceduta alla sorgente a temperatura T_c . Si tratta di un ciclo reversibile.

15.13

Per il calcolo dell'integrale di Clausius del rame ricordare che il sistema (rame + sorgente + lago) è isolato. Il lago si comporta come una sorgente a temperatura T_L .



Soluzioni degli esercizi

Questa parte del volume contiene le soluzioni agli *Esercizi di consolidamento* e agli *Esercizi di riepilogo*. Le soluzioni guidate degli *Esercizi assistiti* sono disponibili sul sito del libro (vedi seconda di copertina).

■ Cinematica del punto materiale

2.1* Moti componenti $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta) \cdot t \\ y(t) = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

Indicando con t^* l'istante in cui il grave ha quota $y = 0$, si ha:

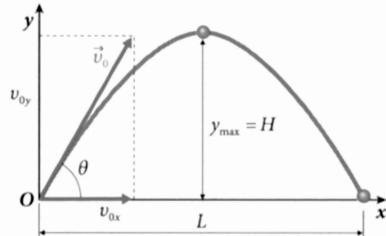
$$y(t^*) = (v_0 \sin\theta)t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \text{ con soluzioni:}$$

$$\begin{cases} t^* = 0 & \text{(istante di lancio)} \\ t^* = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} & \text{(istante di caduta a livello asse } x\text{)} \end{cases}$$

Ai tempi $t = t^*$ l'ascissa x assume i valori:

$$\begin{cases} t^* = 0 & \rightarrow x(0) = 0 \text{ (punto di partenza 0)} \\ t^* = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} & \rightarrow x(t^*) = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = L \end{cases}$$

L'ultima relazione permette di ricavare il modulo v_0 della velocità di lancio:



$$v_0 = 14 \text{ m/s}$$

La massima quota $H = y_{\max}$ si raggiunge nell'istante \bar{t} nel quale il grave passa dal moto di salita al moto di ricaduta, quando si inverte il segno di v_y . A $t = \bar{t}$ si ha dunque: $v_y(\bar{t}) = 0$

$$v_y(\bar{t}) = v_0 \sin \theta - g \bar{t} = 0 \rightarrow \bar{t} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

(osserviamo che \bar{t} è metà dell'intero tempo di volo t^*).

Per $t = \bar{t}$ si ha $y = y_{\max} = H$:

$$y(\bar{t}) = (v_0 \sin \theta) \bar{t} - \frac{1}{2} g \bar{t}^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} = H$$

$$H = 5 \text{ m}$$

2.2*

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$$

Per $t = t^* = 2 \text{ s}$ si ha:

$$\text{a)} \begin{cases} x^* = 20 \cdot 2 \\ y^* = 50 - \frac{1}{2} 9,8 \cdot 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^* = 40 \text{ m} \\ y^* = 30,4 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{b)} a_n^* = \frac{v^{*2}}{R^*} = g \cos \alpha \rightarrow R^* = \frac{v^{*2}}{g \cos \alpha}$$

$$v^{*2} = v_x^{*2} + v_y^{*2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} v_x^* = v_0 \\ v_y^* = -gt^* \end{cases}$$

$$v^{*2} = v_0^2 + g^2 t^{*2} = 400 + 9,8^2 \cdot 4 \cong 784,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$(v^* = 28 \text{ m/s})$$

$$v_x^* = v_0 = v^* \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{v_0}{v^*} = \frac{20}{28} = 0,714 \quad (\alpha \approx 44^\circ)$$

$$R^* = \frac{v^{*2}}{g \cos \alpha} = \frac{784,2}{9,8 \cdot 0,714}$$

$$R^* = 112 \text{ m}$$

2.2**

$\vec{v} = v(t) \hat{v}(t)$ $\hat{v}(t)$ versore della velocità

$$\ddot{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\vec{a}_t} \hat{v} + v(t) \underbrace{\frac{d\hat{v}}{dt}}_{\vec{a}_n} \quad (a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2})$$

Ricaviamo l'espressione della derivata temporale del versore della velocità.

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{v}}{\Delta t}$$

Il triangolo di lati $\hat{v}(t)$, $\hat{v}(t + \Delta t)$, $\Delta \hat{v}$ è isoscele, avendo due lati di lunghezza unitaria (versori). Gli angoli alla base sono uguali e, per $\Delta t \rightarrow 0$ e quindi $\Delta\theta \rightarrow 0$, tendono a 90° . Dunque:

$$\Delta \hat{v} \perp \hat{v} \rightarrow \Delta \hat{v} \text{ normale.}$$

Inoltre:

$$|\Delta \hat{v}| = |\hat{v}(t)| |\Delta \theta| = 1 \cdot \Delta \theta$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \hat{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega(t)$$

In conclusione, per l'accelerazione si ha:

$$\ddot{\vec{a}} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v(t) \omega(t) \hat{n} \quad (\hat{n} \text{ versore della normale alla traiettoria})$$

$$v(t) = R\omega(t) \quad a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\begin{cases} a_t = 2KRt \\ a_n = K^2 R t^4 \end{cases}$$

2.3*

a) Salita da A a B con $a = 3g$

$$\begin{cases} v(t^*) = 3gt^* \\ h = \frac{1}{2}(3g)t^{*2} \end{cases}$$

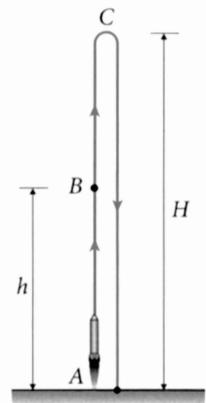
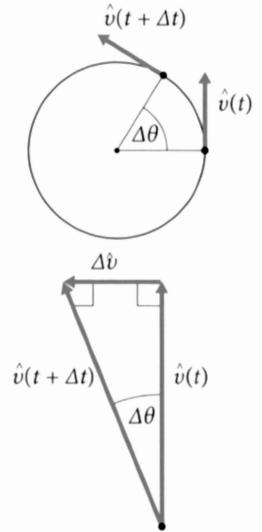
b) Salita da B a C con $a = -g$

$$\begin{cases} v(t) = v(t^*) - g(t - t^*) \\ y(t) = h + v(t^*)(t - t^*) - \frac{1}{2}g(t - t^*)^2 \end{cases}$$

La massima quota H si raggiunge all'istante \bar{t} , quando la velocità diventa nulla:

$$v(\bar{t}) = v(t^*) - g(\bar{t} - t^*) = 0 \rightarrow (\bar{t} - t^*) = \frac{v(t^*)}{g}$$

$$\begin{aligned} y(\bar{t}) &= H = h + v(t^*)(\bar{t} - t^*) - \frac{1}{2}g(\bar{t} - t^*)^2 = \\ &= \frac{3}{2}gt^{*2} + \frac{v(t^*)^2}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v(t^*)^2}{g^2} = \\ &= \frac{3}{2}gt^{*2} + \frac{1}{2}9gt^{*2} = 6gt^{*2} \end{aligned}$$



c) Caduta da quota H con moto naturalmente accelerato.

È facile dimostrare che un grave, lasciato cadere da fermo dalla quota H (accelerazione g diretta verso il basso) arriva a quota zero con velocità

$$v = \sqrt{2gH}$$

$$v = 2\sqrt{3}gt^*$$

2.5

Per calcolare l'angolo θ basta ricavare le componenti v_x e v_y della velocità nel punto di arrivo al suolo:

$$v_y = v_x \tan \theta \quad \rightarrow \quad \tan \theta = v_y / v_x$$

Le equazioni delle componenti della velocità sono:

$$\begin{cases} v_x = v_0 & (\text{poiché } a_x = 0, v_x = \text{cost}) \\ v_y = -gt & (a_y = -g, v_y(0) = 0) \end{cases}$$

Il tempo t^* impiegato per arrivare al suolo si ricava dall'equazione per la coordinata y :

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

che diventa:

$$y(t^*) = 0 = h - \frac{1}{2}gt^{*2} \quad \rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Dunque:

$$\begin{cases} v_x(t^*) = v_0 \\ v_y(t^*) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y(t^*)}{v_x(t^*)} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = 0,885 \quad \rightarrow \quad \theta = 41,5^\circ$$

2.6

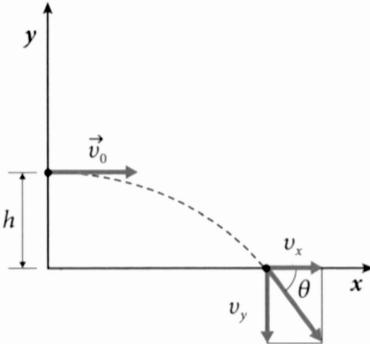
$$\vec{a} = \vec{g} \quad \begin{cases} a_n = g \sin \theta \\ a_t = g \cos \theta \end{cases} \quad g = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Il calcolo dell'angolo θ può essere fatto a partire dalle componenti cartesiane della velocità:

$$\tan \theta = \frac{v_x}{v_y}$$

dove:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases} \quad \rightarrow \quad \tan \theta = -\frac{v_0}{gt}$$



Può essere opportuno analizzare il risultato intermedio relativo al calcolo dell'angolo θ .

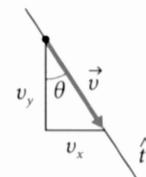
Si è trovato, dal punto di vista dimensionale, un numero puro:

$$[\operatorname{tg}\theta] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\left(\text{m}/\text{s}^2\right) \text{s}} = \frac{\text{m s}}{\text{s m}} = [\text{numero puro}]$$

Questo è quanto ci si deve aspettare per una funzione trigonometrica. Si è anche trovato un valore negativo per $\operatorname{tg}\theta$: ciò implica che l'angolo, compreso in modulo tra 0 e $\pi/2$ per la natura del problema, giaccia nel quarto quadrante del cerchio trigonometrico, come è ovvio data l'orientazione degli assi x e y .

È opportuno anche abituarsi a valutare, nelle formule ricavate, i casi estremi che, per loro natura, debbono essere facilmente prevedibili su basi fisiche. In questo caso, ad esempio, un caso estremo è relativo all'istante $t = 0$:

$$\text{per } t = 0, \quad \operatorname{tg}\theta = -\infty \quad \rightarrow \quad \theta = -\pi/2$$



Analogamente, per t molto grande ($t \rightarrow \infty$), $\operatorname{tg}\theta \approx 0$; questo è prevedibile, se si pensa che, nella caduta parabolica, la velocità tende a divenire verticale. Nelle espressioni $a_n = g \operatorname{sen}\theta$, $a_t = g \cos\theta$, occorre ora esprimere $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ in funzione di $\operatorname{tg}\theta$:

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg}\theta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$\cos\theta = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$\begin{cases} a_n = g \operatorname{sen}\theta = g \frac{v_0}{gt} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g^2 t^2}}} = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \\ a_t = g \cos\theta = g \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g^2 t^2}}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \end{cases}$$

Caso limite:

$$t = 0 \quad a_n = g \quad a_t = 0 \quad (\text{in accordo con quanto aspettato})$$

2.7

a) Dalla relazione

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \text{cost}$$

si ha:

$$\omega(t) = \int \dot{\omega} dt + \text{cost} = \dot{\omega} t + \text{cost}$$

dove la costante rappresenta il valore iniziale ($t = 0$) della velocità angolare, ω_0 ;

$$\omega(t) = \dot{\omega}t + \omega_0$$

(analoga alla relazione $v(t) = at + v_0$ del moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a).

Poiché la giostra parte da ferma, $\omega_0 = 0$ e dunque:

$$\omega(t) = \dot{\omega}t$$

Per $t = 2$ s si ha:

$$\omega(2) = \left(0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) \cdot (2 \text{ s}) = 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) L'accelerazione vettoriale del punto è:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} [v(t) \cdot \hat{i}(t)] = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt}$$

Il modulo della velocità vale $v = \omega r$, con r distanza del punto dall'asse di rotazione. Dunque:

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} \\ a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad \omega = \dot{\omega}t \end{cases}$$

Osserviamo che, nel caso del problema, l'accelerazione tangenziale è costante nel tempo, mentre la componente normale cresce con il quadrato del tempo.

Il modulo dell'accelerazione ha dunque l'espressione:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{\omega}^2 r^2 + \dot{\omega}^4 r^2 t^4} = \dot{\omega} r \sqrt{1 + \dot{\omega}^2 t^4}$$

■ Principi della dinamica del punto materiale

3.1 \vec{v}_a : velocità uovo nel sistema fisso (Oxy);

$\vec{v}_t = \vec{V}$: velocità di trascinamento;

\vec{v}_r : velocità uovo nel sistema ($O'x'y'$) solidale con l'auto.

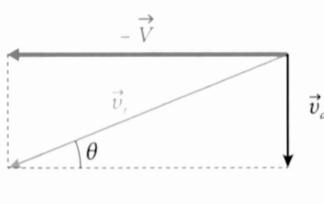
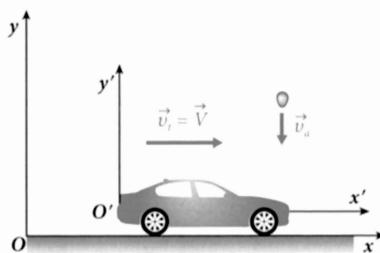
$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{V} \quad (V = 130 \text{ km/h} = 36,1 \text{ m/s})$$

v_a = velocità dopo caduta da 10 m = h

$$v_a = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s} \text{ (diretta verso il basso)}$$

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + V^2} = \sqrt{14^2 + 36,1^2} \quad v_r = 38,7 \text{ m/s} \cong 140 \text{ km/h}$$

$$\tan \theta = \frac{v_a}{V} = 0,39 \quad \theta \approx 21^\circ$$



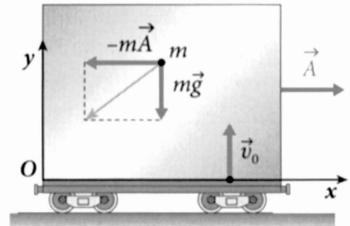
3.2

L'accelerazione \vec{a} (relativa) nel sistema mobile (Oxy) ha componenti a_x e a_y entrambe negative:

$$\begin{cases} a_x = -A \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = -At \\ v_y(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \frac{1}{2}At^2 \\ y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



Indicando con \bar{t} il tempo necessario a toccare il pavimento, si ha:

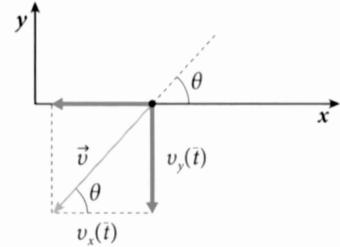
$$y(\bar{t}) = 0 = v_0 \bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{t} = \frac{2v_0}{g}$$

Per $t = \bar{t}$ le componenti della velocità sono:

$$\begin{cases} v_x(\bar{t}) = -A \frac{2v_0}{g} \\ v_y(\bar{t}) = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\bar{t}) = \sqrt{v_x(\bar{t})^2 + v_y(\bar{t})^2} \\ \operatorname{tg} \theta = v_y(\bar{t}) / v_x(\bar{t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(\bar{t}) = \frac{v_0}{g} \sqrt{g^2 + 4A^2} \\ \theta = \arctg \left(\frac{g}{2A} \right) \end{cases}$$



3.3

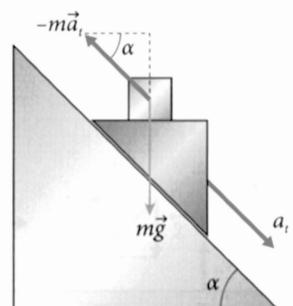
Con cuneo fermo, $F_1 = mg$, dove m è la massa del corpo.

Lasciato libero, il cuneo è animato da un'accelerazione diretta parallellamente al piano inclinato di modulo $a_i = g \operatorname{sen} \alpha$.

Sul corpo si esercita la forza reale $m\vec{g}$ e la forza d'inerzia $-m\vec{a}_i$. La componente verticale del loro risultante è F_2 (forza esercitata sul cuneo):

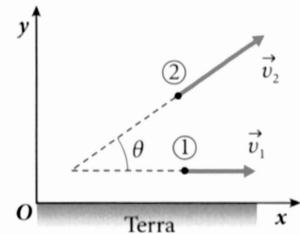
$$F_2 = mg - ma_i \operatorname{sen} \alpha = mg - m(g \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha = mg(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

$$F_2 = F_1 \cos^2 \alpha$$



3.4

Le grandezze date nel testo dell'esercizio si riferiscono a un sistema di riferimento fisso solidale con la Terra nel quale si ha la situazione di figura. Rispetto a questo sistema fisso, un sistema di riferimento mobile solidale con il primo aereo ha velocità di trascinamento costante $\vec{v}_t = \vec{v}_1$ (moto traslatorio, per cui la velocità di trascinamento ha lo stesso valore in tutti i punti dello spazio).



In questo sistema mobile, in cui l'aereo (1) è fermo, l'aereo (2) ha velocità relativa

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_t = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

essendo \vec{v}_2 la velocità del secondo aereo rispetto al riferimento fisso. Proiettando sugli assi x' e y' del sistema mobile (scelti paralleli ai corrispondenti assi x e y del sistema fisso) si ha:

$$\begin{cases} v'_{2x} = v_{2x} - v_t = v_2 \cos \theta - v_1 \\ v'_{2y} = v_{2y} = v_2 \sin \theta \end{cases}$$

L'angolo θ' è tale che:

$$\tan \theta' = \frac{v'_{2y}}{v'_{2x}}$$

e il modulo di \vec{v}'_2 è:

$$v'_2 = \sqrt{v'^2_{2x} + v'^2_{2y}}$$

Numericamente:

$$v'_{2x} = \left(800 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \cdot 0,87 - 500 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 196 \text{ km/h}$$

$$v'_{2y} = \left(800 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \cdot 0,5 = 400 \text{ km/h}$$

$$\tan \theta' = \frac{400}{196} = 2,04 \quad \rightarrow \quad \theta' \cong 64^\circ$$

$$v'_2 = \sqrt{(196)^2 + (400)^2} = 444 \text{ km/h}$$

3.5

Nel sistema fisso (inerziale) Oxy si ha: $\vec{a} = -\vec{g}$ (corrispondente al fatto che è presente soltanto la forza reale dovuta al peso).

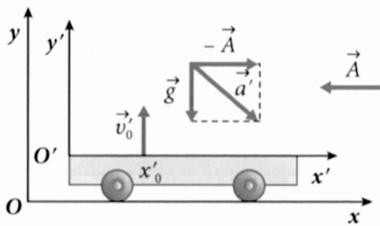
Nel sistema mobile $O'x'y'$ (non inerziale, nel quale oltre alla forza peso è presente la forza d'inerzia $-m\vec{A}$) si ha:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$$

Dunque l'accelerazione relativa \vec{a}' è uniforme nel riferimento mobile e inclinata rispetto alla verticale.

Conviene risolvere il problema ponendoci nel sistema mobile:

$$\begin{cases} a'_x = -A \\ a'_y = -g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_x = -At \\ v'_y = v'_0 - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'(t) = x'_0 - \frac{1}{2}At^2 \\ y'(t) = v'_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



La quota

$$y' = 0 \quad \left(y' = v'_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \right)$$

viene toccata per $t = 0$ (istante di lancio) e per

$$t = t^* = \frac{2v'_0}{g}$$

(istante di ricaduta sul fondo del vagone). La distanza dal punto di lancio ($x' - x'_{_0}$) del punto di ricaduta sarà:

$$\Delta x' = x'(t^*) - x'_{_0} = -\frac{1}{2} A t^{*2} = -\frac{1}{2} A \frac{4v'^2_0}{g^2} = -\frac{2A v'^2_0}{g^2}$$

Osserviamo che, essendo $A < 0$ (rispetto all'orientazione, scelta come positiva per l'asse x' , si tratta di frenamento), si ha $\Delta x' > 0$, cioè il corpo ricade in avanti.

■ Conseguenze del secondo principio della dinamica del punto materiale

- 4.1*** Lo spostamento della quantità h è comune ai tre blocchi. Il blocco (3) si muove per effetto della forza peso che, per una variazione di quota h , compie un lavoro:

$$L_g = m_3 g h.$$

La corrispondente variazione di energia cinetica ΔK riguarda i tre blocchi:

$$\Delta K = K^{FIN} - K^{IN} = K^{FIN} \text{ (partenza da fermo)}$$

$$K^{FIN} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v^2 = L_g = m_3 g h$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2m_3 gh}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$

Allo stesso risultato si perviene partendo dall'espressione dell'accelerazione:

$$a = \frac{m_3 g}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \text{costante}$$

Ponendo $x = x_{_0} = 0$ per la posizione del blocco (1) al tempo $t = 0$, quando $v(0) = 0$, si ha:

$$\begin{cases} v(t) = at \\ x(t) = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Lo spostamento $x = h$ si ha al tempo $t = \bar{t}$

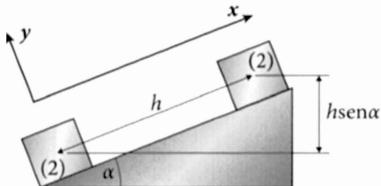
$$h = \frac{1}{2}a\bar{t}^2 \rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \rightarrow v(\bar{t}) = a\bar{t} = \sqrt{2ah}$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_3gh}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$

4.2*

Occorre ricavare il lavoro complessivamente fatto dalla forza di gravità agente sui tre corpi.

Il lavoro della forza peso è positivo sulla massa m_3 che scende (forza parallela e concorde con lo spostamento), mentre è negativo sulle masse m_1 e m_2 .



$$L_g = m_3gh - m_1gh - m_2gh\operatorname{sen}\alpha = \Delta K = K^{FIN}$$

$$K^{FIN} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_3 - m_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$

Altro modo:

$$a = \frac{(m_3 - m_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)}g \text{ (dall'esercizio 4.2)}$$

Per $t = \bar{t}$, $x(\bar{t}) = h$

$$\begin{cases} v(\bar{t}) = a\bar{t} \\ x(\bar{t}) = \frac{1}{2}a\bar{t}^2 = h \rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \end{cases}$$

$$v(\bar{t}) = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2gh(m_3 - m_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)}}$$

4.3*

Tratto orizzontale tra A e B (lunghezza l_1)

$$R_N = mg$$

$$A_1 = -\mu mg$$

Tra A e B la forza peso non compie lavoro; resta solo il lavoro negativo L_a della forza di attrito.

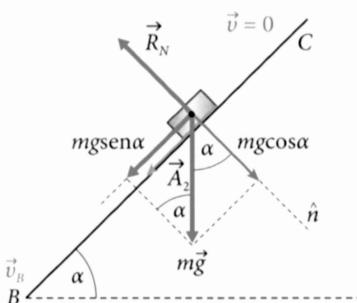
$$L_a = -\mu mgl_1 = K^{FIN} - K^{IN} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_B^2 = v_0^2 - 2\mu gl_1$$

Tratto obliquio tra B e C (lunghezza l_2)

Insieme al lavoro negativo della forza di attrito A_2 , pari a $L_a = -A_2 l_2$, c'è il lavoro, anch'esso negativo, della forza peso pari a $L_g = -mgl_2 \operatorname{sen}\alpha$.

Nel tratto BC la forza di attrito vale:



$$|\vec{A}_2| = \mu R_N = \mu mg \cos\alpha$$

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica:

$$L_a + L_g = K^{FIN} - K^{IN} \quad (K^{FIN} = 0, K^{IN} = \frac{1}{2}mv_B^2)$$

$$-\mu mgl_2 \cos\alpha - mgl_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\text{con } v_B^2 = v_0^2 - 2\mu gl_1$$

$$2\mu gl_2 \cos\alpha + 2gl_2 \sin\alpha + 2\mu gl_1 = v_0^2 \text{ da cui:}$$

$$\mu = \frac{v_0^2 - 2gl_2 \sin\alpha}{2g(l_1 + l_2 \cos\alpha)}$$

Altro modo: legge oraria del moto

Tratto orizzontale: $a_1 = -\mu g$

Tratto inclinato: $a_2 = -g(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$

4.4

Posto $t = 0$ per l'istante di inizio dell'azione frenante, il valore dell'impulso nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 10$ s è:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f dt = q_2 - q_1 = mv_2 - mv_1 = -mv_0 \quad (v_2 = 0, v_1 = v_0)$$

$$I_{12} = -(10 \text{ kg}) \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = -30 \text{ Ns}$$

Dall'impulso è immediato risalire alla forza costante:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} f dt = f(t_2 - t_1) \rightarrow f = \frac{I_{12}}{t_2 - t_1} = (-30 \text{ N} \cdot \text{s}) \cdot \left(\frac{1}{10 \text{ s}} \right) = -3 \text{ N}$$

4.5

La forza F , applicata alla massa totale $(m + M)$, le conferisce un'accelerazione a tale che:

$$F = (m + M)a \rightarrow a = \frac{F}{m + M} = \frac{10}{1,2} = 8,33 \text{ m/s}^2$$

Il carrello m , considerato come corpo singolo, si muove con accelerazione a sotto l'azione della forza F_A . Dunque:

$$F_A = ma = (0,2 \text{ kg}) \left(8,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1,67 \text{ N}$$

4.6

Indicando con l la lunghezza del tratto di frenata e con F la forza frenante incognita, e applicando il teorema dell'energia cinetica, si ha:

$$L = Fl = K_{fin} - K_{in} = -K_{in} = -\frac{1}{2}mv^2$$

($K_{fin} = 0$ perché la velocità finale è nulla).

Il lavoro risulta negativo perché forza frenante e spostamento hanno versi opposti:

$$|\vec{F}| = \frac{mv^2}{2l} = \frac{(10^3 \text{ kg})[(10^2 / 3,6)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2]}{2 \cdot (10^2 \text{ m})} = 3858 \text{ N}$$

- 4.7** Trattandosi di problema monodimensionale, il teorema dell'impulso si scrive:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = q_2 - q_1 = mv$$

($q_1 = 0$ perché il corpo è inizialmente fermo).

Per il teorema della media si ha:

$$I_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = \bar{F}(t_2 - t_1) = \bar{F}\Delta t$$

Dunque:

$$\bar{F} = \frac{mv}{\Delta t}$$

dove \bar{F} è il valor medio dell'intensità della forza che può essere considerata come una forza costante attiva per l'intervallo di tempo Δt . Il teorema dell'energia cinetica si può scrivere, per il lavoro della forza \vec{F} :

$$L = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \cong \bar{F}\Delta s = K_2 - K_1 = K_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Si ricava Δs :

$$\Delta s = \frac{mv^2}{2\bar{F}} = \frac{mv^2}{2mv} \Delta t = \frac{v\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (2 \cdot 10^{-3} \text{ s}) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

- 4.8** La forza agente su un corpo di massa m , in quiete nel sistema dell'ascensore, vale:

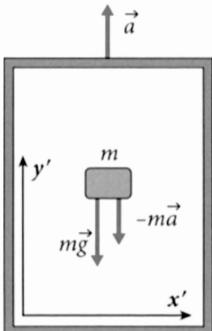
$$\vec{F}_{reale} + \vec{F}_{fittizia} + \vec{F}'_{bilancia} = 0$$

$$\vec{F}_{reale} = mg\vec{i}; \quad \vec{F}_{fittizia} = -m\vec{a}_t = -m\vec{a}$$

(\vec{a} rappresenta l'accelerazione di trascinamento del sistema mobile ed è uniforme, trattandosi di moto traslatorio).

Dunque forza peso e forza fittizia sono concordi e parallele e la forza che deve esercitare la bilancia sarà:

$$\vec{F}'_{bilancia} = mg + ma \rightarrow m = \frac{F'_{bilancia}}{g + a}$$



A terra, dove è attiva la sola forza reale mg , la bilancia indicherebbe:

$$F_{bilancia} = mg = \left(\frac{g}{g+a} \right) F'_{bilancia} = \left(\frac{9,8}{9,8+1} \right) \cdot 100 \text{ kgp} = 83 \text{ kgp} \approx 813 \text{ N}$$

4.9

Il secondo principio della dinamica, applicato alle singole masse m_1 , m_2 e m_3 , tenendo conto del fatto che il filo è inestensibile e di massa trascurabile e che non ci sono attriti sui pioli P , si scrive:

$$\begin{aligned} m_1 : \quad \tau_1 - m_1 g &= -m_1 a \quad \rightarrow \quad \tau_1 = m_1(g - a) \\ m_2 : \quad \tau_2 - m_2 g &= +m_2 a \quad \rightarrow \quad \tau_2 = m_2(g + a) \\ m_3 : \quad \tau_1 - \tau_2 &= m_3 a \end{aligned}$$

Inserendo le espressioni di τ_1 e τ_2 nella terza equazione, si ha:

$$\tau_1 - \tau_2 = m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a = m_3 a$$

da cui si ricava l'accelerazione a :

$$g(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2 + m_3)} g = \frac{(2-1)}{(2+1+3)} g = \frac{g}{6} = 1,63 \text{ m/s}^2$$

$$\tau_1 = m_1(g - a) = 2 \cdot (9,8 - 1,63) = 16,3 \text{ N}$$

$$\tau_2 = m_2(g + a) = 1 \cdot (9,8 + 1,63) = 11,4 \text{ N}$$

È da osservare che le tensioni relative ai due tratti di filo non sono uguali e sono tali che la loro differenza imprime alla massa m_3 l'accelerazione a che deve essere comune ai tre corpi m_1 , m_2 , m_3 .

4.10

La velocità di lancio v_0 è legata all'impulso I dalla relazione:

$$I = q_{fin} - q_{in} = mv_0 - 0 = mv_0$$

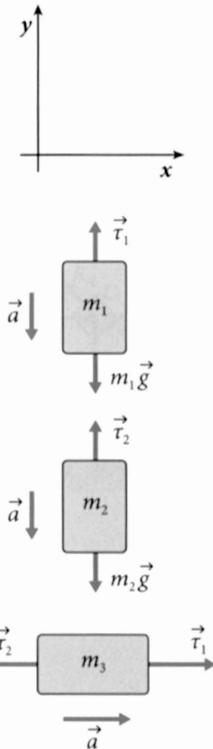
Nella fase di salita il mancotto è sottoposto alla forza peso $m\vec{g}$ e alla forza di attrito, entrambe dirette verso il basso. Tali forze, spostando il loro punto di applicazione della quantità h , riducono a zero l'energia cinetica iniziale del mancotto. Per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$L_s = -mgh - Ah = K_{fin} - K_{in} = -K_{in} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

dove A indica il modulo della forza di attrito (costante). Dunque:

$$mgh + Ah = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Nella fase di discesa, il mancotto è ancora sottoposto alla forza peso



e alla forza di attrito, che lo accompagnano per il tratto h considerato (prima che il manico tocchi il suolo). Il lavoro, questa volta, è positivo per la forza peso (forza e spostamento concordi), ma ancora negativo per la forza di attrito (sempre la forza di attrito ha verso contrario allo spostamento). Dunque:

$$L_d = mgh - Ah = K_{fin} - K_{in} = K_{fin} = \frac{1}{2}mv^2$$

($K_{in} = 0$ perché la fase di discesa inizia con il manico fermo alla massima quota).

Le due espressioni del lavoro permettono di ricavare la velocità v_0 in funzione della velocità di arrivo al suolo e della quota h . Infatti, dalle due relazioni:

$$\begin{cases} mgh + Ah = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ mgh - Ah = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases}$$

eliminando, mediante somma m.a.m., la parte relativa all'attrito, si ha:

$$\begin{aligned} 2mgh &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v_0^2 &= 4gh - v^2 \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{4gh - v^2} \end{aligned}$$

L'impulso richiesto è dunque:

$$I = mv_0 = m\sqrt{4gh - v^2} = 2,89 \text{ Ns}$$

- 4.11** Il supporto S è fermo, mentre le masse M_1 ed M_2 si muovono. Ciò implica che è nullo il risultante delle forze applicate al supporto stesso:

$$F - \tau_1 - \tau_2 - M_S g = 0 \quad \rightarrow \quad F = \tau_1 + \tau_2 + M_S g$$

Per il fatto che manca l'attrito e la massa del filo è trascurabile si ha:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

La seconda legge della dinamica, applicata ai corpi singoli M_1 ed M_2 , assume allora la forma:

$$\begin{cases} \tau - M_1 g = -M_1 a & (\text{il corpo } M_1 \text{ scende}) \\ \tau - M_2 g = +M_2 a & (\text{il corpo } M_2 \text{ sale}) \end{cases}$$

si ricava:

$$a = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) g; \quad \tau = 2 \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} g$$

da cui:

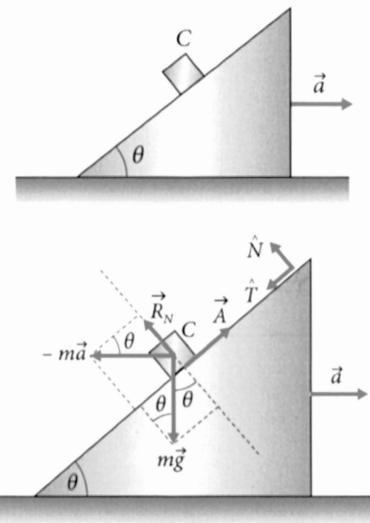
Osservazione. Se lo scorrimento del filo di collegamento tra le masse M_1 ed M_2 fosse impedito da qualche freno, il dinamometro misurerebbe una forza diversa.

■ Leggi delle forze

- 5.1* Le forze attive sono la forza peso, la forza d'inerzia, la reazione vincolare normale e la forza d'attrito tangenziale.

Ricaviamo le componenti normale (\hat{N}) e tangenziale (\hat{T}) delle forze.

Forza	Componente	
	\hat{N}	\hat{T}
$m\vec{g}$	$-mg\cos\theta$	$mg\sin\theta$
$-m\vec{a}$	$masen\theta$	$macos\theta$
\vec{R}_N	R_N	0
\vec{A}	0	$-A$



Per la forza risultante sul corpo C si ha:

$$\begin{cases} F_N = R_N + masen\theta - mg \cos\theta \\ F_T = mg \sin\theta + macos\theta - A \end{cases}$$

$$A = \mu R_N$$

$$F_N = 0 \rightarrow R_N = mg \cos\theta - masen\theta$$

$$A = \mu m(g \cos\theta - a \sin\theta)$$

$$F_T = mg \sin\theta + macos\theta - \mu(mg \cos\theta - a \sin\theta) = ma_T$$

$$a_T = g(\sin\theta - \mu \cos\theta) + a(\cos\theta + \mu \sin\theta)$$

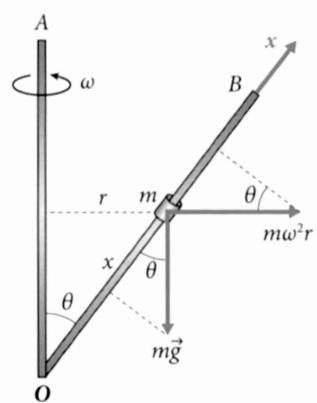
- 5.2* Poiché non c'è attrito tra manico e asta, la reazione vincolare è puramente normale e non contribuisce alla forza F_T . Restano le proiezioni tangenziali della forza peso e della forza centrifuga.

$$F_T(x) = -mg \cos\theta + m\omega^2 r(x) \sin\theta$$

$$(r = x \sin\theta)$$

$$F_T(x) = m(-g \cos\theta + \omega^2 x \sin^2\theta)$$

La componente tangenziale della forza risultante consta di due contributi. Quello dovuto alla forza di gravità, costante e diretto verso il punto O, e quello dovuto alla forza centrifuga, diretto verso il punto B e con modulo crescente con x.

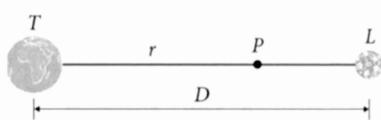


La forza F_T si annulla per $x = x_0$

$$x_0 = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{equilibrio})$$

Per $x < x_0$, il manicotto scende;
per $x > x_0$, il manicotto sale.
L'equilibrio è instabile.

- 5.3* Posta una massa m nel punto P si ha equilibrio:



$$G \frac{M_T m}{r^2} = G \frac{M_L m}{(D-r)^2}$$

$$M_T(D-r)^2 = M_L r^2$$

$(M_T - M_L)r^2 - 2M_L Dr + M_L D^2 = 0$, da cui risolvendo:

$$r = \frac{M_T D \pm D \sqrt{M_T M_L}}{(M_T - M_L)} = D \frac{(\alpha \pm \sqrt{\alpha})}{(\alpha - 1)}$$

(la soluzione con segno + darebbe $r > D$)

$$r = D \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha})}{(\alpha - 1)} = 0,9 D$$

$$r = \beta R_T \frac{(\alpha - \sqrt{\alpha})}{(\alpha - 1)} = 54 R_T$$

Osservazione: si tratta chiaramente di equilibrio instabile.

- 5.6* a) Nella situazione di equilibrio iniziale, la forza peso $m\vec{g}$ si trasmette lungo la serie delle due molle, per cui si ha:

$$mg = k_1 \Delta l_1 \rightarrow \Delta l_1 = mg/k_1$$

$$mg = k_2 \Delta l_2 \rightarrow \Delta l_2 = mg/k_2$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

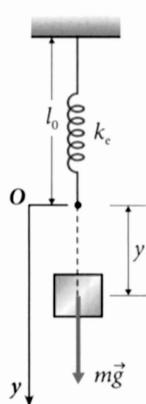
Osservazione: il sistema delle due molle in serie si comporta come un'unica molla equivalente di costante elastica k_e , tale che:

$$\Delta l = \frac{mg}{k_e} \rightarrow \frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

- b) La lunghezza imperturbata delle due molle è:

$$l_0 = l_1 + l_2$$

In corrispondenza di l_0 poniamo l'origine dell'asse y orientata verso il



basso. Appendendo la massa m e portandola a quota y rispetto all'origine O , il secondo principio della dinamica si scrive:

$$mg - k_e y = m\ddot{y}$$

L'equilibrio si ha per $\ddot{y} = 0$, per cui:

$$k_e y_0 = mg \quad \rightarrow \quad y_0 = mg/k_e$$

Ponendo:

$$y' = y - y_0 \quad \rightarrow \quad y = y' + y_0$$

per cui:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2} \text{ (essendo } y_0 = \text{costante)}$$

il secondo principio si può scrivere nella variabile y' :

$$mg - k_e(y' + y_0) = m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

$$mg - k_e y' - k_e \frac{mg}{k_e} = m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} - k_e y' = 0$$

(equazione dell'oscillatore armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k_e/m}$)

La soluzione è:

$$y'(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

e, per la variabile $y(t) = y' + y_0$:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k_e}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

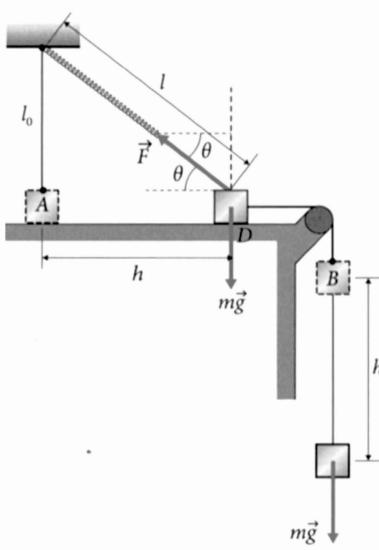
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_e}}$$

- 5.6**** Nel punto di distacco D , la forza elastica \vec{F} ha modulo $F = k(l - l_0)$ e la sua componente verticale è pari a:

$$F_n = k(l - l_0) \sin\theta.$$

Il distacco avviene per:

$$k(l - l_0) \sin\theta = mg$$



con $l_0 = l \sin \theta$, per cui:

$$\begin{cases} l = \frac{kl_0^2}{(kl_0 - mg)} = 0,6 \text{ m} \\ \sin \theta = \frac{(kl_0 - mg)}{kl_0} = 0,5 \\ (\theta = 30^\circ) \end{cases}$$

Lo spostamento h vale:

$$h = l \cos \theta = 0,43 \text{ m}$$

Mentre il corpo B scende della quantità h , la forza peso compie un lavoro L_g

$$L_g = mgh = 0,3 \cdot 9,81 \cdot 0,43 = 1,27 \text{ J}$$

Il lavoro L_g va in parte in energia cinetica dei corpi A e B e in parte nell'energia elastica corrispondente all'allungamento della molla dal valore l_0 al valore l .

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

$$mv^2 = 1,27 - \frac{1}{2}20(0,6 - 0,3)^2 = 1,27 - 0,9 = 0,37 \text{ J}$$

$$v^2 = \frac{0,37}{0,3} = 1,23 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 1,1 \text{ m/s}$$

5.7* $L_r = -\int_0^h b v dy \quad \text{con } v = v(y)$

$$a = \text{cost}$$

$$\begin{cases} v = at & (v_0 = 0) \\ y = \frac{1}{2}at^2 & \end{cases} \quad t = v/a \quad y = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \rightarrow v = \sqrt{2ay}$$

$$L_r = -b\sqrt{2a} \int_0^h y^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{2b\sqrt{2a}}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_0^h$$

$$L_r = -\frac{b\sqrt{8a}}{3} \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Allo stesso risultato si perviene integrando sul tempo:

$$L_r = -b \int_0^{t^*} v v dt = -b \int_0^{t^*} v^2 dt \quad \text{con } v = at$$

$$t^* = \sqrt{2h/a}$$

5.8

Supponendo che l'unica forza gravitazionale non trascurabile sia dovuta alla Terra, la terza legge di Keplero si scrive:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cost} = \frac{T_L^2}{R_L^3} = \frac{T_S^2}{R_S^3}$$

avendo indicato con T_L e T_S i periodi di rivoluzione della Luna e del satellite, rispettivamente, e con R_L e R_S i raggi delle orbite circolari della Luna e del satellite, rispettivamente.

Dunque:

$$R_S = R_L \left(\frac{T_S^2}{T_L^2} \right)^{1/3}$$

Poiché $T_S = 24 \text{ h} = 1 \text{ d}$ e $T_L = 27 \text{ d}$ si ha:

$$R_S = 3,8 \cdot 10^5 \left(\frac{1}{27} \right)^{2/3} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ km}$$

5.9

La velocità areolare costante vale:

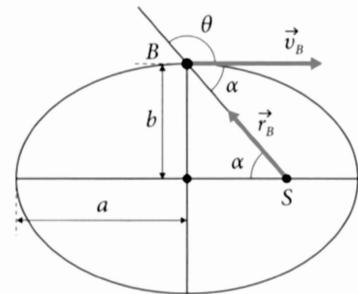
$$\frac{\text{area ellisse}}{\text{periodo}} = \frac{\pi ab}{T}$$

Nel punto B la velocità areolare si esprime come:

$$\frac{1}{2} r_B v_B \sin \theta = \frac{1}{2} r_B v_B \sin \alpha = \frac{1}{2} b v_B$$

(essendo $b = r_B \sin \alpha$). Dunque:

$$\frac{1}{2} b v_B = \frac{\pi ab}{T} \quad \rightarrow \quad v_B = \frac{2\pi a}{T}$$



5.10

$$\Delta K = K_f - K_{in} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_{in}^2 .$$

La seconda legge della dinamica si scrive:

$$\frac{GMm}{(R_T + z_{in})^2} = m \frac{v_{in}^2}{(R_T + z_{in})}$$

e analogamente per la posizione finale. Da qui:

$$v_{in}^2 = \frac{GM}{R_T + z_{in}} \quad v_f^2 = \frac{GM}{R_T + z_f}$$

e quindi:

Sapendo che $GM = g R_T^2$, si ricava il valore numerico della variazione di energia cinetica: $\Delta K = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

5.11

L'elongazione statica d è tale da realizzare l'equilibrio tra forza elastica e forza peso:

$$mg - kd = 0$$

La costante elastica k della molla vale:

$$k = \frac{mg}{d}$$

Disposta la molla orizzontalmente, l'oscillatore armonico che così si realizza ha pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{dm}} = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Il periodo di oscillazione vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} = 0,63 \text{ s}$$

5.12

L'effetto dell'urto è di conferire energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$ al corpo che, trovandosi al massimo dell'oscillazione ($x = A_0$), aveva velocità nulla. Subito dopo l'urto, il corpo ha dunque energia meccanica

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kA_0^2$$

Con questo contenuto energetico E costante, il corpo prosegue a oscillare con ampiezza maggiore della precedente.

È possibile esprimere E in funzione dell'ampiezza di oscillazione finale. Infatti per $x = A$, $v = 0$ e quindi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Dunque:

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - A_0^2)} = \omega \sqrt{A^2 - A_0^2}$$

L'impulso vale $I = mv$ ($I = q_f - q_{in} = q_f$) e quindi:

$$I = m\omega \sqrt{A^2 - A_0^2} = m \frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - A_0^2}$$

$$I = \left(1 \cdot \frac{2\pi}{6,28} \sqrt{(0,2)^2 - (0,1)^2} \right) \text{Ns} = 0,17 \text{ Ns}$$

- 5.13** Un corpo, sottoposto all'azione della forza di gravità e della resistenza del mezzo del tipo $F = -bv$, arriva ad avere una velocità di regime costante v_∞ , dal momento che si realizza un equilibrio dinamico ($a = 0$) tra la forza mg diretta verso il basso e la forza resistente $-bv_\infty$. Dunque, a regime, $mg - bv_\infty = 0 \rightarrow v_\infty = mg/b$.

Nel caso del problema, la dipendenza del coefficiente b dalla geometria è del tipo di proporzionalità all'area della sezione della sfera: $b = \alpha\pi R^2$, con α costante.

Per le due sfere, aventi la stessa densità δ , si ha:

$$v_{1\infty} = \frac{m_1 g}{b_1} = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \delta \frac{g}{\alpha \pi R_1^2} = \frac{4\delta g}{3\alpha} R_1$$

$$v_{2\infty} = \frac{m_2 g}{b_2} = \frac{4\delta g}{3\alpha} R_2$$

Dunque:

$$\frac{v_{1\infty}}{v_{2\infty}} = \frac{R_1}{R_2}$$

- 5.14** In un punto qualsiasi dell'oscillazione del pendolo, la seconda legge della dinamica si scrive:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a}$$

Proiettando sulla normale alla traiettoria, orientata verso l'esterno rispetto al punto O , si ha:

$$mg \cos\alpha - \tau = -ma_n = -m \frac{v^2}{l}$$

per cui la tensione del filo vale:

$$\tau = mg \cos\alpha + m \frac{v^2}{l}$$

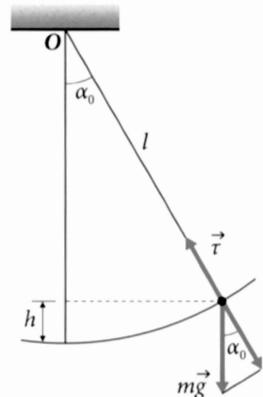
Il valore massimo della tensione τ_{MAX} , ad ampiezza di oscillazione α_0 fissa, si ottiene nel punto di minima quota, in cui:

$$\cos\alpha = 1, \quad v = v_{MAX} \quad \text{con} \quad \frac{1}{2}mv_{MAX}^2 = mbl(1 - \cos\alpha_0)$$

Dunque:

$$\tau_{MAX} = \tau(\alpha_0) = mg + m \frac{v_{MAX}^2}{l} = mg + \frac{m}{l} 2gl(1 - \cos\alpha_0) =$$

$$= 3mg - 2mg \cos\alpha_0 = mg(3 - 2\cos\alpha_0)$$



La rottura del filo si produrrà nel punto di minima quota, quando il carico di rottura uguaglierà τ_{MAX} :

$$\text{carico di rottura} = \tau_{MAX} = 1 \cdot 9,8 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 15,5 \text{ N}$$

-
- 5.15 La forza di attrito $f_t = \mu_c N$ con $N = mg$ compie un lavoro negativo

$$L = -\mu_c mgl$$

in corrispondenza del quale c'è una variazione di energia cinetica:

$$L = -\mu_c mgl = K_f - K_0 = -K_0 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Si ricava il coefficiente di attrito dinamico:

$$\mu_c = \frac{v_0^2}{2gl} = 0,16$$

Il secondo principio della dinamica consente di ricavare l'andamento della velocità in funzione del tempo:

$$f_t = ma \rightarrow -\mu_c mg = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu_c g.$$

Integrando si ha:

$$v(t) = v_0 - \mu_c gt$$

Il tempo t^* di dimezzamento della velocità si ricava dalla relazione:

$$v(t^*) = \frac{v_0}{2} = v_0 - \mu_c gt^* \rightarrow t^* = \frac{v_0}{2\mu_c g} = 1,6 \text{ s}$$

-
- 5.16

Nel sistema non inerziale solidale con la piattaforma ruotante si manifesta la forza centrifuga

$$F_c = m\omega^2 d$$

che, al momento dell'inizio del moto, diviene uguale alla forza tangenziale di attrito f_t :

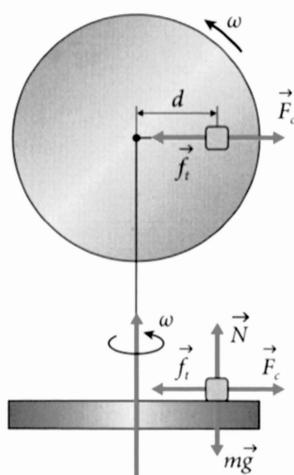
$$f_t = \mu_c N = \mu_c mg$$

Dunque:

$$m\omega^2 d = \mu_c mg$$

da cui:

$$\mu_c = \frac{\omega^2 d}{g} = 0,16$$



■ Leggi della dinamica dei sistemi

6.1* Indicando con $x_1(t)$ e $x_2(t)$ le ascisse dei due corpi, la coordinata del c.d.m. è:

$$x_c(t) = \frac{m x_1(t) + m x_2(t)}{m+m} = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$$

$$v_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} \right) = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Caso a)

Indicando con il suffisso c le velocità relative nel sistema di riferimento del c.d.m., per la composizione delle velocità nei moti relativi si ha:

$$v_1 = v_{c1} + v_c \quad \text{e} \quad v_2 = v_{c2} + v_c$$

(con v_c = velocità di trascinamento)

$$v_{c1} = v_1 - v_c \quad \text{e} \quad v_{c2} = v_2 - v_c$$

$$\begin{cases} v_{c1} = v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_2}{2} \\ v_{c2} = v_2 - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_2 - v_1}{2} \end{cases}$$

$$Q_c = mv_{c1} + mv_{c2} = \frac{m}{2}(v_1 - v_2 + v_2 - v_1) = 0$$

$$Q_c = 0$$

$$K_c = \frac{1}{2}m \left[\frac{(v_1 - v_2)^2}{4} + \frac{(v_2 - v_1)^2}{4} \right] = \frac{m}{4}(v_1 - v_2)^2$$

$$K_c = \frac{m}{4}(v_1 - v_2)^2$$

Caso b)

$$v_c = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 - v_1}{2} = 0 \quad \text{c.d.m. fermo nel laboratorio}$$

$$Q_c = mv_{c1} + mv_{c2} = m(v_1 + v_2) = 0$$

$$Q_c = 0$$

$$K_c = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mv_1^2$$

$$K_c = mv_1^2$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{F_1}{m_1} \\ \ddot{x}_2 = \frac{F_2}{m_2} \end{cases} \rightarrow (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = \frac{F_1}{m_1} - \frac{F_2}{m_2} = F \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$(F_2 = -F_1)$$

Ponendo $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (μ detta massa ridotta) si ha:

$$F = \mu(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = \mu \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2)$$

$$F = k(x_2 - x_1 - l_0) = -k(x_1 - x_2 + l_0)$$

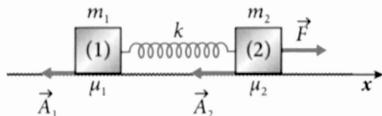
$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -\frac{k}{\mu}(x_1 - x_2) + \frac{kl_0}{\mu}$$

Equazione di un oscillatore armonico con:

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

6.2** $v = \text{costante}$



$$a = 0$$

$$F - A_1 - A_2 = 0$$

$$F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g = 0$$

$$F = g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

Per calcolare l'allungamento Δl della molla e dunque la forza elastica $k\Delta l$ che esercita nei punti di collegamento ai corpi (1) e (2), si può considerare un corpo, per esempio il (2), e scrivere la condizione di equilibrio dinamico ($v \neq 0, a = 0$):

$$F - A_2 - k\Delta l = 0$$

$$k\Delta l = F - A_2 = g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) - \mu_2 m_2 g = \mu_1 m_1 g$$

$$\Delta l = \frac{\mu_1 m_1 g}{k}$$

6.3*

La forza peso sul corpo (1) che scende compie un lavoro positivo, mentre sul corpo (2) che sale il lavoro è negativo.

Consideriamo per le due masse uno spostamento di modulo $y(t)$.

Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica fornisce la seguente relazione:

$$L_g = K^{FIN} - K^{IN} = K^{FIN}$$

$$m_1gy(t) - m_2gy(t) = \frac{1}{2}m_1v^2(t) + \frac{1}{2}m_2v^2(t)$$

da cui:

$$v^2(t) = \underbrace{\left[2g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \right]}_C y(t) = Cy(t)$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$2v \frac{dv}{dt} = C \frac{dy}{dt} = Cv$$

$$2va = Cv \rightarrow a = \frac{C}{2}$$

$$a = g \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

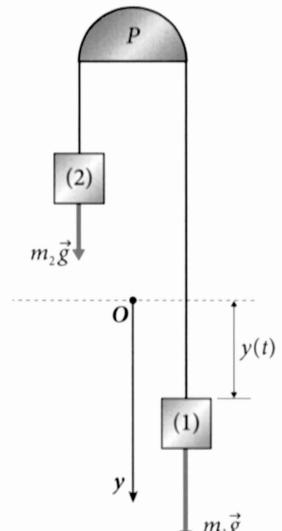
Per $y = h$ si ha $v^2 = Ch$

$$v = \sqrt{2gh \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}}$$

Caso estremo: $m_1 \gg m_2$

$$a = g$$

$$v = \sqrt{2gh}$$



- 6.4*** Nel punto P , nel quale il corpo è fermo rispetto allo scivolo e quindi si muove rispetto al laboratorio con la stessa velocità V dello scivolo, si ha:

$$Q_x = \text{costante} \rightarrow mv_0 = (M+m)V$$

$$V = \frac{m}{(M+m)}v_0$$

Il lavoro della forza peso, per una variazione di quota pari a h , della massa m è negativo:

$$L_g = -mgh = K^{FIN} - K^{IN} \quad \text{con}$$

$$K^{FIN} = \frac{1}{2}(M+m)V^2, \quad K^{IN} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$-mgh = \frac{1}{2}(M+m) \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left[-\frac{M}{(M+m)} \right] \text{ da cui:}$$

$$v_0^2 = 2gh \frac{(M+m)}{M}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh(M+m)}{M}}$$

6.4** $M(t) = M_0 + \mu t$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} [M(t)v(t)] = M(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt}(M_0 + \mu t) + \mu v(t) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v(t)}{(M_0 + \mu t)} \rightarrow \frac{dv}{v} = -\mu \frac{dt}{(M_0 + \mu t)}$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{d(M_0 + \mu t)}{(M_0 + \mu t)}$$

$$\ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\ln\left[\frac{(M_0 + \mu t)}{M_0}\right] = \ln\frac{M_0}{M_0 + \mu t}$$

$$v(t) = \frac{v_0 M_0}{(M_0 + \mu t)} \text{ da cui derivando:}$$

$$a(t) = -\frac{\mu v_0 M_0}{(M_0 + \mu t)^2}$$

6.5 Il c.d.m. ha coordinate

$$\begin{cases} x_c(t) = \frac{1}{m_A + m_B} [m_A x_A(t) + m_B x_B(t)] \\ y_c(t) = \frac{1}{m_A + m_B} [m_A y_A(t) + m_B y_B(t)] \end{cases}$$

Le equazioni parametriche dei punti A e B sono:

$$\begin{cases} x_A(t) = R_A \cos(\omega t + \alpha) \\ y_A(t) = R_A \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}; \begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega t + \beta) \\ y_B(t) = R_B \sin(\omega t + \beta) \end{cases}$$

Le condizioni iniziali determinano le fasi α e β . Per $t = 0$:

$$\begin{cases} x_A(0) = 0 = R_A \cos \alpha \\ y_A(0) = R_A = R_A \sin \alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x_B(0) = -R_B = R_B \cos \beta \\ y_B(0) = 0 = R_B \sin \beta \end{cases} \rightarrow \beta = -\pi$$

Pertanto le equazioni orarie dei punti A e B diventano:

$$\begin{cases} x_A(t) = R_A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y_A(t) = R_A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_B(t) = R_B \cos(\omega t - \pi) \\ y_B(t) = R_B \sin(\omega t - \pi) \end{cases}$$

Per il c.d.m. si ha:

$$\begin{cases} x_c(t) = \frac{1}{m_A + m_B} \cdot \left[m_A R_A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + m_B R_B \cos(\omega t - \pi) \right] \\ y_c(t) = \frac{1}{m_A + m_B} \cdot \left[m_A R_A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + m_B R_B \sin(\omega t - \pi) \right] \end{cases}$$

La traiettoria del c.d.m. si ottiene eliminando il tempo dalle precedenti equazioni mediante, ad esempio, quadratura e somma. Si ottiene:

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 &= \frac{1}{(m_A + m_B)^2} \left\{ m_A^2 R_A^2 + m_B^2 R_B^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2m_A m_B R_A R_B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega t + \pi\right) \right\} = \\ &= \frac{(m_A^2 R_A^2 + m_B^2 R_B^2)}{(m_A + m_B)^2} = R_c^2 \end{aligned}$$

Dunque la distanza $R_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$ del c.d.m. dall'origine del riferimento non dipende dal tempo. Si tratta di traiettoria circolare di raggio $R_c = 10,76$ cm. Il moto del c.d.m. è dunque un moto circolare uniforme di velocità angolare $\omega = 2$ rad/s e quindi la sua accelerazione sarà centripeta e di modulo $\omega^2 R_c$:

$$a_c = \omega^2 R_c = 0,43 \text{ m/s}^2$$

$$6.6 \quad \begin{cases} (\lambda y)g - \tau = (\lambda y)a \\ [\lambda(L-y)g] - \tau = -\lambda(L-y)a \end{cases}$$

Sottraendo m.a.m. si ha:

$$a = g \left(2 \frac{y}{L} - 1 \right)$$

Per $y = \frac{3}{4}L$ si ha:

$$a = g \left(2 \cdot \frac{3}{4} \frac{L}{L} - 1 \right) = 0,5 \cdot g = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Casi estremi:

$$y = \frac{L}{2} \rightarrow a = g \left(2 \cdot \frac{L}{2L} - 1 \right) = 0 \quad (\text{situazione di equilibrio})$$

$$y = L \rightarrow a = g \left(2 \cdot \frac{L}{L} - 1 \right) = g \quad (\text{caduta libera di tutta la cinghia})$$

6.7

Per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$M_1 V_1 + M_2 V_2 = 0$$

La conservazione dell'energia meccanica nella fase di decompressione della molla implica la seguente relazione:

$$U + K = U_{in} + 0 = 0 + K_{fin} = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2$$

$$\text{Poiché, dalla prima relazione, } V_2 = -V_1 \frac{M_1}{M_2}$$

$$\begin{aligned} U_{in} &= \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \frac{M_1^2}{M_2^2} V_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_1 V_1^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_1}{M_2} (M_1 + M_2) V_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2+3) \cdot 0,25 \approx 0,42 \text{ J.} \end{aligned}$$

6.8

Si conserva la componente x della quantità di moto (inizialmente nulla), perché le forze esterne al sistema cuneo + corpo A hanno componente x nulla:

$$0 = MV + mv = Q_x$$

Il teorema dell'energia cinetica si scrive tenendo conto che non ci sono attriti e che il lavoro della reazione tra cuneo e corpo è nullo perché si tratta di reazione puramente normale. Dunque:

$$L = L_{peso} = mgR = K_f - K_{in} = K_f = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

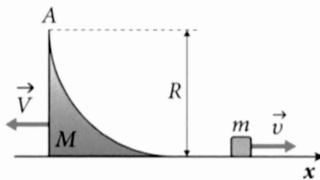
Dalla conservazione della Q_x si ha:

$$v = -\frac{M}{m} V$$

per cui:

$$mgR = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M^2 V^2}{m^2} \right) = \frac{1}{2} MV^2 \left(\frac{M+m}{m} \right)$$

$$V = \sqrt{\frac{2m^2 g R}{M(M+m)}} = 0,7 \text{ m/s}$$

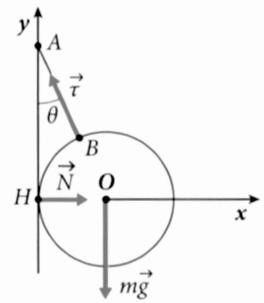


6.9

L'equilibrio si ha per

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = 0 \\ \vec{M}^{(e)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x^{(e)} = N - \tau \sin \theta = 0 \\ F_y^{(e)} = \tau \cos \theta - mg = 0 \\ M_0^{(e)} = OH \times \vec{N} + OO \times m\vec{g} + OB \times \vec{\tau} = \\ = 0 + 0 + OB \times \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$



(da cui si ricava che $\vec{\tau}$ ha retta di applicazione che passa per O oltre che per A).

Nel triangolo AOH si ha:

$$a = (l + a) \sin \theta$$

Dunque:

$$\tau = \frac{mg}{\cos \theta} \quad \text{e} \quad N = \tau \sin \theta = mg \tan \theta$$

Esprimendo $\cos \theta$ e $\tan \theta$ in funzione di $\sin \theta = \frac{a}{l+a}$, si ha:

$$\tau = mg \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(l+a)^2}}} = mg \frac{(l+a)}{\sqrt{l(l+2a)}}$$

$$N = mg \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = mg \frac{a}{\sqrt{l(l+2a)}}$$

Sistemi rigidi

7.1* Con i simboli indicati in figura e prendendo come polo per i momenti il punto A (in modo da eliminare il contributo al momento risultante della reazione vincolare), le condizioni di equilibrio sono:

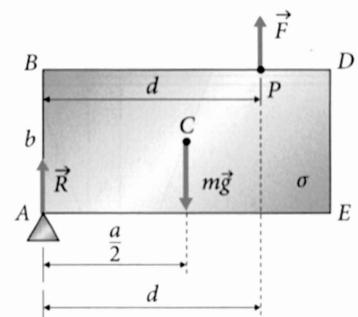
$$\vec{F}^{(e)} = \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} = 0$$

$$\vec{M}_A^{(e)} = \overrightarrow{AC} \times m\vec{g} + \overrightarrow{AP} \times \vec{F} = 0$$

La forza \vec{F} e la forza peso $m\vec{g}$ hanno direzione verticale e quindi anche la reazione vincolare \vec{R} è diretta verticalmente, per cui, proiettando in direzione verticale:

$$R + F - mg = 0 \quad \rightarrow \quad R = mg - F$$

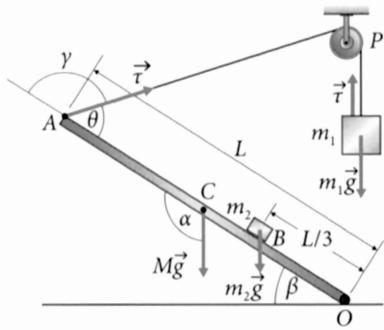
Per i momenti con polo A si ha:



$$M_A^{(e)} = \frac{a}{2} mg - d \cdot F = 0, \text{ da cui}$$

$$F = \frac{mga}{2d} = \frac{(\sigma ab)ga}{2d} = \frac{\sigma a^2 bg}{2d}$$

$$R = mg - F = \sigma abg - \frac{\sigma a^2 bg}{2d} = \sigma abg \left(1 - \frac{a}{2d} \right)$$



7.2*

Con le notazioni indicate in figura, si ha equilibrio quando:

$$M_0^{(e)} = \overrightarrow{OB} \times m_2 \vec{g} + \overrightarrow{OC} \times M \vec{g} + \overrightarrow{OA} \times \vec{\tau} = 0$$

(l'equilibrio della massa m_1 si ha per $m_1 g = \tau$)

$$M_0^{(e)} = \frac{L}{3} m_2 g \sin \alpha + \frac{L}{2} Mg \sin \alpha - L\tau \sin \gamma = 0$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\gamma + \theta = \pi \rightarrow \sin \gamma = \sin \theta$$

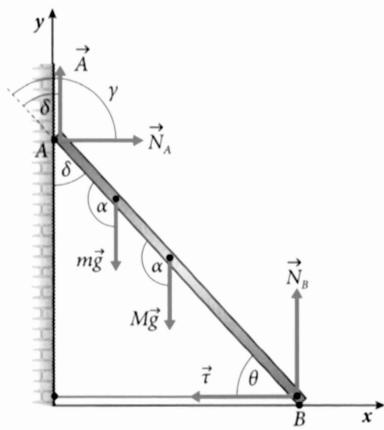
$$M_0^{(e)} = \frac{L}{3} m_2 g \cos \beta + \frac{L}{2} Mg \cos \beta - Lm_1 g \sin \theta = 0$$

$$\cos \beta = \frac{m_1 \sin \theta}{\left(\frac{m_2}{3} + \frac{M}{2} \right)}$$

$$\cos \beta = \frac{6m_1 \sin \theta}{(2m_2 + 3M)}$$

7.3*

Con le notazioni per i vettori mostrate in figura,



$$\vec{F}^{(e)} = \vec{A} + \vec{N}_A + m \vec{g} + M \vec{g} + \vec{N}_B + \vec{\tau} = 0$$

$$\text{asse } x: N_A = -\tau$$

$$\text{asse } y: A - mg - Mg + N_B = 0$$

$$A = \mu N_A$$

$$M_B^{(e)} = \frac{L}{2} Mg \sin \alpha + \frac{3}{4} Lmg \sin \alpha - LN_A \sin \gamma - LAs \sin \delta = 0$$

$$(\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}) \quad \rightarrow \quad \sin \alpha = \cos \theta$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \rightarrow \quad \sin \delta = \cos \theta$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \delta = \pi - \theta \rightarrow \sin \gamma = \sin \theta$$

$$\frac{L}{2} Mg \cos \theta + \frac{3}{4} Lmg \cos \theta - LN_A \sin \theta - L\mu N_A \cos \theta = 0$$

$$g \cos \theta \left(\frac{M}{2} + \frac{3}{4} m \right) = N_A (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$N_A = \frac{g(2M+3m)\cos\theta}{4(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$$

$$N_A = \frac{g}{4} \cdot \frac{(2M+3m)}{(\mu + \tan \theta)} = -\tau$$

7.4*

$$\begin{cases} F_{Rx} = F + (F\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 2F \\ F_{Ry} = F - (F\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{Rx} = 2F \\ F_{Ry} = 0 \end{cases}$$

Le forze indicate in azzurro a tratto sottile nella figura e applicate al punto P , accoppiate alle corrispondenti forze indicate ai punti A, B e D , rispettivamente, costituiscono tre coppie di forze di momenti M_1, M_2 e M_3 :

coppia $(\vec{F}, -\vec{F})$: $M_1 = Fd\sqrt{2}/2$

coppia $(\vec{F}, -\vec{F})$: $M_2 = F(L\sqrt{2}/2 + d\sqrt{2}/2)$

coppia $(\vec{F}\sqrt{2}, -\vec{F}\sqrt{2})$: $M_3 = (F\sqrt{2})L$

$$M = M_1 + M_2 - M_3 = F \left(d\frac{\sqrt{2}}{2} + L\frac{\sqrt{2}}{2} + d\frac{\sqrt{2}}{2} - L\sqrt{2} \right) = 0$$

(perché moto traslatorio)

$$d\sqrt{2} - L \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$d = \frac{L}{2}$$

7.5*

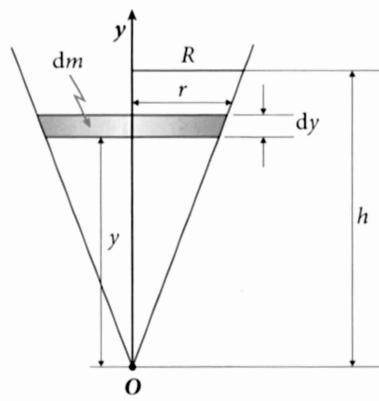
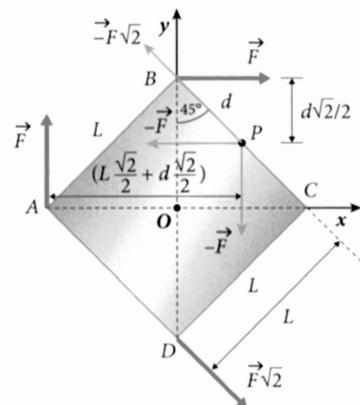
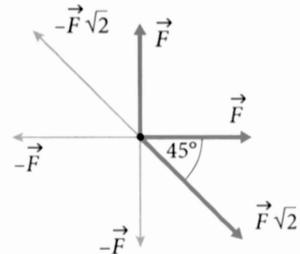
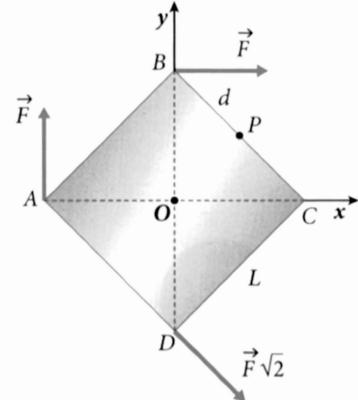
Dischetto infinitesimo:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \underbrace{(\rho \pi r^2 dy)}_{dm}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{h}{R} \rightarrow r = \frac{R}{h} y \text{ per cui}$$

$$dI = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{R}{h} \right)^4 y^4 dy$$

$$I_{\text{cono}} = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy = \frac{1}{10} \rho (\pi R^2 h) R^2$$



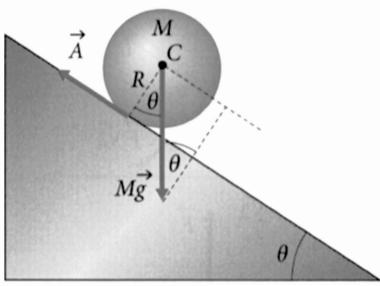
$$\text{Volume del cono: } \tau = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$\text{Massa del cono: } M = \varrho \frac{1}{3}\pi R^2 h, \text{ da cui:}$$

$$\varrho\pi R^2 h = 3M$$

$$I_{\text{cono}} = \frac{3}{10}MR^2$$

7.6* I equazione cardinale proiettata nella direzione del piano inclinato:



$$Mg \sin \theta - A = Ma \quad (a = \text{accelerazione del c.d.m.})$$

II equazione cardinale:

$$RA = I\dot{\omega} \quad \left(I = \frac{2}{5}MR^2 \right)$$

Puro rotolamento:

$$\omega R = v_c \rightarrow a = \dot{\omega}R$$

$$A = \frac{Ia}{R^2}$$

La I equazione cardinale diventa:

$$Mg \sin \theta - \frac{Ia}{R^2} = Ma \quad \text{da cui:}$$

$$a \left(M + \frac{I}{R^2} \right) = Mg \sin \theta$$

$$a \left(M + \frac{2}{5}M \right) = Mg \sin \theta$$

$$\frac{7}{5}a = g \sin \theta \rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \theta \text{ (costante)}$$

$$v_c(t) = \left(\frac{5}{7}g \sin \theta \right) \cdot t$$

7.7*

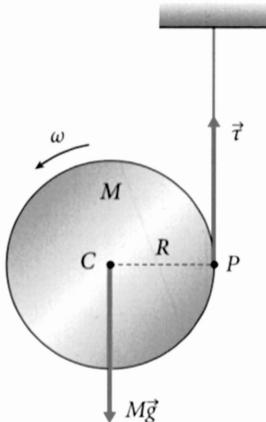
Il punto P di contatto tra il cilindro e il tratto verticale del filo è, istante per istante, fermo; pertanto

$$v_c = \omega R$$

$$a_c = \dot{\omega}R$$

Prendendo il c.d.m. C come polo per i momenti, si ha:

$$\begin{cases} R\tau = I\dot{\omega} = I \frac{a_c}{R} \\ Mg - \tau = Ma_c \end{cases}$$



$$\tau = I \frac{a_c}{R^2} = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a_c}{R^2} = \frac{1}{2} Ma_c$$

$$Mg - \frac{1}{2} Ma_c = Ma_c \rightarrow a_c = \frac{2}{3} g \text{ (costante)}$$

Si tratta, per il c.d.m. C, di un moto ad accelerazione costante con velocità iniziale nulla; pertanto:

$$v_c(t) = \frac{2}{3} gt$$

- 7.7**** Nel sistema fisso il sistema si muove orizzontalmente con accelerazione a_c :

$$F = (M + m)a_c \rightarrow a_c = \frac{F}{(M + m)}$$

Nel sistema mobile con il supporto, in moto con velocità di trascinamento v_c , la rotazione con velocità angolare ω del cilindro è dovuta alla forza \vec{F} , la cui retta di applicazione è a distanza R dall'asse di rotazione:

$$RF = I_c \dot{\omega} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} \rightarrow \dot{\omega} = \frac{2F}{mR}$$

Nel sistema mobile, la velocità relativa del punto A è:

$$v_{Ar} = \omega R \quad (\text{direzione orizzontale, verso positivo})$$

La velocità assoluta del punto A (e anche di B) è:

$$v_{Aa} = v_{Ar} + v_t = v_{Ar} + v_c$$

Per l'accelerazione si ha:

$$a_{Aa} = a_{Ba} = \dot{\omega}R + a_c$$

$$a_{Ba} = \frac{2FR}{mR} + \frac{F}{(M+m)} = F \frac{(2M+3m)}{m(M+m)} \quad (\text{costante})$$

$$v_B = v_{Ba} = a_{Ba} \cdot t$$

$$v_B = Ft \frac{(2M+3m)}{m(M+m)}$$

- 7.9*** a) Tenendo conto della conservazione dell'energia prima dell'urto, si ricava la velocità della sfera quando il pendolo passa per la posizione verticale (immediatamente prima dell'urto).

Nel passare dall'elongazione angolare θ_0 iniziale alla posizione verticale ($\theta = 0$), la variazione di quota è:

$$\Delta y = L(1 - \cos \theta_0)$$

Per il teorema del lavoro (della forza peso $m\vec{g}$) e dell'energia cinetica si ha:

$$mgL(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

In generale (vedi testo) nell'urto frontale tra una sfera di massa m_1 che si muove lungo l'asse x con velocità v_0 e una sfera di massa m_2 ferma, le velocità dopo l'urto hanno solo componente x e valgono:

$$v_{1x} = v_0 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}; \quad v_{2x} = v_0 \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}$$

Nel caso particolare di questo esercizio:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$v_{1x} = 0; v_{2x} = v_0 \text{ (si ha uno scambio di velocità tra le sfere).}$$

Quindi:

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

b) Nel caso di un urto completamente anelastico tra una massa m incidente con velocità v_1 su una massa uguale inizialmente ferma, la conservazione della quantità di moto implica:

$$mv_1 = (m + m)v_2 \rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{2}$$

con v_2 velocità dopo l'urto delle due masse unite.

Dopo l'urto anelastico, il corpo di massa $2m$ appeso al filo di lunghezza L rallenta per effetto della gravità fino a fermarsi alla massima quota h :

$$\frac{1}{2}2mv_2^2 = 2mgh$$

$$h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{8g} \quad (v_1 = v_0)$$

$$h = \frac{L(1 - \cos\theta_0)}{4}$$

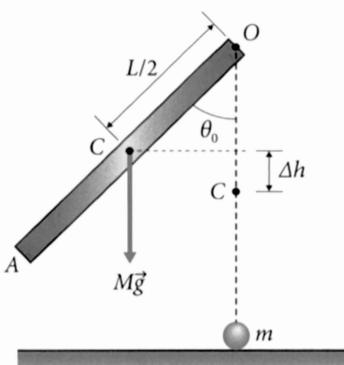
7.9** a) Il c.d.m. C della sbarra varia la sua quota di:

$$\Delta h = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta_0)$$

La forza peso compie un lavoro positivo:

$$L_g = \frac{MgL}{2}(1 - \cos\theta_0)$$

$$L_g = K^{FIN} - K^{IN} = K^{FIN}$$



$K^{FIN} = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$ con $I_0 = \frac{1}{3} M L^2$ e ω_0 velocità angolare subito prima dell'urto con la massa m . Così risulta:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta_0)$$

b) Nella fase dell'urto si conserva il momento della q.d.m. rispetto al polo O (nel quale peraltro si esplica una reazione impulsiva non trascurabile, ma di momento nullo rispetto al polo O).

$$I_0 \omega_0 = (I_0 + mL^2) \omega = \left[\frac{L^2(M + 3m)}{3} \right] \omega \quad \text{da cui:}$$

$$\omega = \omega_0 \cdot \left(\frac{M}{M + 3m} \right)$$

c) La variazione di energia cinetica, tra subito prima e subito dopo l'urto anelastico, è pari all'energia E_d dissipata nell'urto stesso:

$$\begin{aligned} E_d &= \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 - \frac{1}{2} (I_0 + mL^2) \omega^2 = \frac{1}{6} M L^2 \omega_0^2 \left[1 - \frac{M}{(M + 3m)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} M L^2 \frac{m}{(M + 3m)} \omega_0^2 \end{aligned}$$

dove $\omega_0^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta_0)$

$$E_d = \frac{3}{2} \frac{mM}{(M + 3m)} g L (1 - \cos \theta_0)$$

7.10*

Indicando con $m_1 = \sigma_1 L^2$ e $m_2 = \sigma_2 L^2$ le masse delle lastre quadrate (1) e (2) rispettivamente, e osservando che i c.d.m. C_1 e C_2 distano di $L/2$ dall'asse aa' , per la posizione iniziale del c.d.m. C dell'intero sistema [(1) + (2)] si ha:

$$y_C^{IN} = \frac{m_1 \cdot \left(+\frac{L}{2} \right) + m_2 \cdot \left(-\frac{L}{2} \right)}{(m_1 + m_2)} = \frac{L (\sigma_1 - \sigma_2)}{2 (\sigma_1 + \sigma_2)}$$

Nel ribaltamento di 180° , il c.d.m. si ritrova in posizione simmetrica rispetto all'asse aa' e la corrispondente variazione di quota risulta:

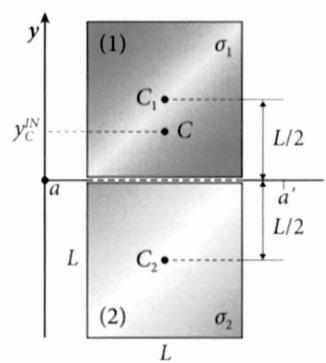
$$\Delta h = 2y_C^{IN} = L \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

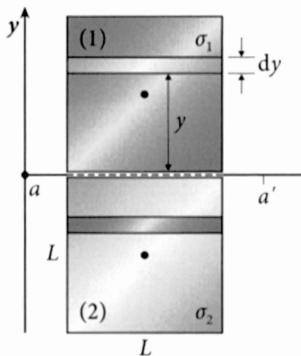
Il lavoro positivo fatto dalla forza peso è:

$$L_g = (m_1 + m_2) g \Delta h = g L^3 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica si ha:

$$L_g = K^{FIN} - K^{IN} = K^{FIN} = \frac{1}{2} I \omega^2$$





Calcoliamo il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse aa' :

$$I = \int_{(1)+(2)} y^2 dm = \int_{(1)+(2)} y^2 L dy = \int_0^L y^2 \sigma_1 L dy + \int_0^L y^2 \sigma_2 L dy = \frac{1}{3} L^4 (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$L_g = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$gL^3 (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{6} L^4 (\sigma_1 + \sigma_2) \omega^2$$

da cui si ricava ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{6g}{L} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}}$$

7.11

Dette m_1 ed m_2 le masse delle due lastre quadrate, per l'equilibrio si ha:

$$M_A^{(e)} = 0 = M_1 + M_2 = dm_1 g \sin\beta - dm_2 g \sin\alpha$$

dove:

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \theta \quad e \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \theta$$

da cui:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta - \sin\theta)$$

$$M_A^{(e)} = 0 \rightarrow m_1 \sin\beta - m_2 \sin\alpha = 0$$

con $m_1 = \sigma_1 a^2$ ed $m_2 = \sigma_2 a^2$ per cui:

$$\sigma_1 \sin\beta - \sigma_2 \sin\alpha = 0$$

da cui:

$$\sigma_1 (\cos\theta + \sin\theta) - \sigma_2 (\cos\theta - \sin\theta) = 0$$

da cui:

$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right)$$

7.12

Detta τ la tensione del filo ancorato al punto D e con la convenzione di prendere come positivi i momenti che tendono a far ruotare la sbarra in senso antiorario, la seconda equazione cardinale della statica dei corpi rigidi si scrive:

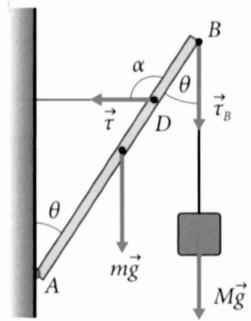
$$M_A^{(e)} = -L\tau_B \sin(\pi - \theta) - \frac{L}{2} mg \sin(\pi - \theta) + d\tau \sin\alpha = 0$$

Essendo $\tau_B = Mg$, si ha anche:

$$\begin{aligned} M_A^{(e)} &= -LMg \sin\theta - \frac{L}{2}mg \sin\theta + d\tau \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \\ &= -LMg \sin\theta - \frac{L}{2}mg \sin\theta + d\tau \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

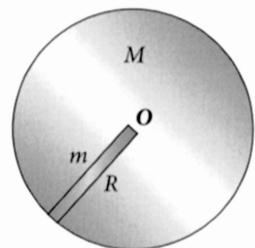
Il massimo valore M_{MAX} della massa M si ha per $\tau = \tau_R$ da cui:

$$M_{MAX} = \frac{\tau_R d}{Lg} \cot\theta - \frac{m}{2}$$



- 7.13** Il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia, rispetto a O , del disco di massa M e della sbarretta di massa m . Infatti

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\substack{\text{MASSA} \\ \text{TOTALE}}} h^2 dm = \int_{\substack{\text{DISCO}}} h^2 dm + \int_{\substack{\text{SBARRETTA}}} h^2 dm = \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}mR^2 = R^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3} \right) = \left(\frac{3M+2m}{6} \right) R^2 \end{aligned}$$



- 7.14** $M^{(e)} = 0 \rightarrow P = \text{cost}$

$$P^{(in)} = I_{TUBO}\omega_0 + P_{CIL}^{(in)} = P^{(fin)} = I_{TUBO}\omega + \frac{L}{2}m\left(\omega \frac{L}{2}\right)$$

avendo indicato con L la lunghezza del tubo; inoltre:

$$I_{TUBO} = \frac{1}{12}ML^2, \quad P_{CIL}^{(in)} \approx 0$$

(data la piccola altezza del cilindretto il suo momento d'inerzia è trascurabile); $\omega \frac{L}{2}$ è la velocità tangenziale del cilindretto nel momento in cui raggiunge l'estremità del tubo (fuoruscita).

Dunque:

$$\frac{1}{12}ML^2\omega_0 = \frac{1}{12}ML^2\omega + m\omega \frac{L^2}{4}$$

da cui:

$$\omega = \left(\frac{M}{M+3m} \right) \omega_0$$

- 7.15** Detto h il dislivello verticale tra le posizioni dei c.d.m. di cilindro e sfera alla partenza e al fondo del piano inclinato, il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$\bullet \text{ sfera: } M_s gh = K_s^{(fin)} - K_s^{(in)} = K_s^{(fin)}$$

Indicando con v_c e v_s le velocità dei c.d.m. del cilindro e della sfera rispettivamente, il teorema di König si scrive:

$$K_c = \frac{1}{2}M_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \omega_c^2 = \frac{1}{2}M_c v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_c R^2\right) \frac{v_c^2}{R^2} = \frac{3}{4}M_c v_c^2$$

$$K_s = \frac{1}{2}M_s v_s^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}M_s R^2\right) \frac{v_s^2}{R^2} = \frac{7}{10}M_s v_s^2$$

Dunque:

$$M_c gh = \frac{3}{4}M_c v_c^2 \quad \rightarrow \quad v_c = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

$$M_s gh = \frac{7}{10}M_s v_s^2 \quad \rightarrow \quad v_s = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Per il rapporto tra le velocità si ha:

$$\frac{v_c}{v_s} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{7}{10}} = \sqrt{\frac{14}{15}} = 0,97$$

Arriva prima la sfera.

7.16 Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$L_{ATTRITO} = K^{(fin)} - K^{(in)} = 0 - K^{(in)}$$

(il lavoro delle forze di attrito è negativo)

$$L_{ATTRITO} = - \int_{ngiri} M_A d\theta = -M_A n 2\pi$$

Dunque:

$$-M_A n 2\pi = -\frac{1}{2} I_c \omega_0^2$$

$$M_A = \frac{1}{4\pi n} \frac{2}{5} m r^2 \omega_0^2 = \frac{m r^2 \omega_0^2}{10\pi n}$$

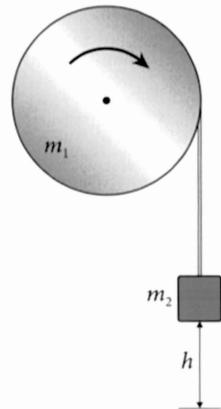
7.17 Per la fase di moto in cui il peso è attaccato e si sposta di h lungo la verticale, il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$m_2 gh - M_A \Delta\theta = \frac{1}{2} I \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_0^2$$

dove:

$\Delta\theta$ è l'angolo di cui ruota il cilindro in corrispondenza allo spostamento h di m_2 :

- $R\Delta\theta = h \rightarrow \Delta\theta = h/R$
- $M_A \Delta\theta$ è il lavoro della coppia frenante (come visto nell'esercizio 7.16);
- $I = \frac{1}{2}m_1R^2$ (momento d'inerzia del cilindro);
- v_0 è la velocità della massa m_2 , quando viene tagliato il filo: $v_0 = \omega_0 R$.



Dunque:

$$m_2gh - M_A \frac{h}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_0^2 R^2$$

da cui:

$$M_A = m_2 g R - \frac{\omega_0^2 R^3}{4h} (m_1 + 2m_2)$$

La fase di frenamento, seguente al distacco di m_2 , avviene con accelerazione angolare costante:

$$\dot{\omega} = -\frac{M_A}{I} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 - \frac{M_A}{I} t$$

avendo preso, come origine dei tempi ($t = 0$), l'istante in cui viene tagliato il filo.

Dunque, il tempo Δt necessario a ridurre a zero la velocità angolare è tale che:

$$0 = \omega_0 - \frac{M_A}{I} \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\omega_0 I}{M_A} = \frac{\omega_0 m_1 R^2}{2M_A}$$

7.18

Procedendo come indicato nel suggerimento, si ha:

$$-mgR \sin \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

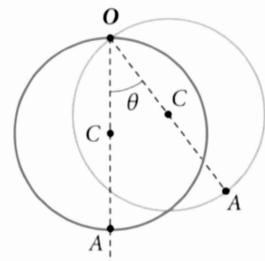
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgR}{I_0} \right) \theta \approx 0 \quad (\sin \theta \approx \theta)$$

$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, in cui la pulsazione ω vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_0}}, \text{ da cui } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgR}}$$

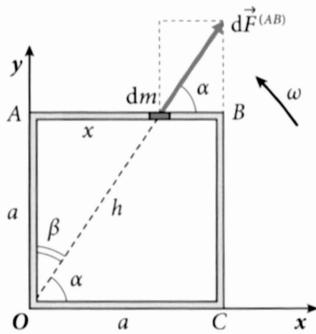
Il momento d'inerzia rispetto all'asse non baricentrale passante per O si calcola tramite il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_0 = I_c + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$



Dunque:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}} = 6,28 \text{ s}$$



7.19

La forza peso è sempre equilibrata dal tavolo. Per calcolare la reazione vincolare totale si può scegliere un sistema di riferimento solidale con la cornice, e quindi non inerziale, in cui la risultante delle forze fittizie (centrifughe) deve essere equilibrata dalla reazione vincolare cercata, dal momento che, nel sistema scelto, la cornice è in quiete. Calcoliamo la forza centrifuga complessiva.

Indicando con $dm = \lambda dl$ ($\lambda = m/4a$) un elemento di massa a distanza h dall'asse di rotazione O e con α e β gli angoli formati dalla direzione h con gli assi x e y rispettivamente, valutiamo separatamente i contributi alla forza centrifuga complessiva da parte dei lati OA , AB , BC e CO .

- *Lato OA:*

$$dF_y^{(OA)} = dm\omega^2 h^2 = dm\omega^2 y = \lambda\omega^2 y dy, \text{ da cui:}$$

$$F_x^{(OA)} = 0 \quad F_y^{(OA)} = \int_0^a dF_y^{(OA)} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a$$

- *Lato CO:*

$$dF_x^{(CO)} = \lambda\omega^2 x dx$$

$$F_x^{(CO)} = \int_0^a dF_x^{(CO)} = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2 \quad F_y^{(CO)} = 0$$

I lati AB e BC danno contributi con entrambe le componenti x e y diverse da zero.

- *Lato AB:*

$$\left| d\vec{F}^{(AB)} \right| = dm\omega^2 h = \lambda\omega^2 h dx = dF^{(AB)}$$

$$dF_x^{(AB)} = dF^{(AB)} \cos\alpha = dF^{(AB)} \sin\beta = dF^{(AB)} \frac{x}{h} = \lambda\omega^2 x dx$$

$$F_x^{(AB)} = \int_0^a \lambda\omega^2 x dx = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 a^2$$

$$dF_y^{(AB)} = dF^{(AB)} \cos\beta = dF^{(AB)} \frac{a}{h} = \lambda\omega^2 a dx$$

$$F_y^{(AB)} = \int_0^a \lambda\omega^2 a dx = \lambda\omega^2 a^2$$

- *Lato BC:*

$$dF_x^{(BC)} = dF^{(BC)} \cos \alpha = dF^{(BC)} \frac{a}{h} = \lambda \omega^2 a dy$$

$$F_x^{(BC)} = \int_0^a \lambda \omega^2 a dy = \lambda \omega^2 a^2$$

$$dF_y^{(BC)} = dF^{(BC)} \operatorname{sen} \alpha = dF^{(BC)} \frac{y}{h} = \lambda \omega^2 y dy$$

$$F_y^{(BC)} = \int_0^a \lambda \omega^2 y dy = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 a^2$$

Sommando i contributi dovuti ai 4 lati del quadrato, si ha:

$$\begin{cases} F_x = F_x^{(CO)} + F_x^{(BC)} + F_x^{(AB)} = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 a^2 + \lambda \omega^2 a^2 + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 a^2 = 2 \lambda \omega^2 a^2 \\ F_y = F_y^{(OA)} + F_y^{(BC)} + F_y^{(AB)} = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 a^2 + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 a^2 + \lambda \omega^2 a^2 = 2 \lambda \omega^2 a^2 \end{cases}$$

La forza centrifuga risultante, e dunque la reazione vincolare dell'asse, è diretta secondo la diagonale OB del quadrato. Il suo modulo vale:

$$F = R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8 \lambda^2 \omega^4 a^4} = 2 \lambda \omega^2 a^2 \sqrt{2}$$

Osserviamo che questa forza coincide con la forza centrifuga che si avrebbe se tutta la massa $m = 4\lambda a$ fosse concentrata nel c.d.m. e quindi si muovesse di moto circolare uniforme su un cerchio di raggio $a/\sqrt{2}$. In questo caso, infatti, si avrebbe:

$$F_{\text{centrifuga}} = m \omega^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = 4\lambda a \omega^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = 2 \lambda \omega^2 a^2 \sqrt{2}$$

che coincide con l'espressione trovata in modo diretto.

- 7.20** In un sistema di riferimento fisso si ha, indicando con il suffisso a la componente assiale:

$$M_a^{(e)} = 0 = \frac{dP_a}{dt} \rightarrow P_a = \text{cost} \rightarrow P_a^{(in)} = P_a^{(fin)}$$

$$\begin{aligned} P_a^{(in)} &= I\omega_0 + Rmv_0 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_0 + Rm\omega_0 R = \\ &= \omega_0 R^2 \left(\frac{M}{2} + m \right) = \frac{1}{2} (M + 2m) \omega_0 R^2 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $P_a^{(fin)}$, trascurando il momento della q.d.m. dell'uomo che ruota su se stesso quando si trova al centro della piattaforma, si ha:

$$P_a^{(fin)} = I\omega = \frac{1}{2} MR^2 \omega$$

La conservazione del momento della q.d.m. (componente assiale) implica:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}(M+2m)\omega_0 R^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \left(\frac{M+2m}{M} \right) \omega_0$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si ha:

$$K^{(fin)} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{M+2m}{M}\right)^2\omega_0^2 = \frac{1}{4}\frac{(M+2m)^2}{M}\omega_0^2R^2$$

$$K^{(in)} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2 =$$

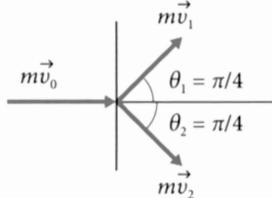
$$= \frac{1}{2}\omega_0^2R^2\left(\frac{M}{2} + m\right) = \frac{1}{4}(M+2m)\omega_0^2R^2$$

$$\frac{K^{(fin)}}{K^{(in)}} = \frac{M+2m}{M} = 1 + \frac{2m}{M} > 1$$

La variazione di energia cinetica è dovuta al lavoro delle forze interne.

■ Problemi d'urto

8.4



Poiché le due masse sono fra di loro uguali, l'angolo $\theta_1 + \theta_2$ che esse formano nel laboratorio vale $\pi/2$; da cui segue $\theta_2 = -\pi/4 = -45^\circ$. Proiettando l'equazione di conservazione della quantità di moto nelle direzioni trasversale e longitudinale rispetto a \vec{v}_0 si ha:

$$\begin{cases} mv_1 \sin \theta_1 + mv_2 \sin \theta_2 = 0 \\ mv_1 \cos \theta_1 + mv_2 \cos \theta_2 = mv_0 \end{cases}$$

Dalla prima (ponendo $\theta_2 = -\theta_1$) segue $v_1 = v_2$ (chiamiamo v il loro valore comune). Dalla seconda, ponendo $v_1 = v_2 = v$ e $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, segue

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \approx 1,41 \text{ m/s}$$

8.5

La velocità v_0 di P_1 prima dell'urto si ricava dal teorema di conservazione dell'energia:

$$mgl = \frac{1}{2}mv_0^2; \quad v_0^2 = 2gl$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto totale ($\vec{Q} = \vec{Q}_0$); infatti la reazione vincolare $\vec{\tau}$ è ortogonale a \vec{Q} :

$$\vec{Q}_0 = m\vec{v}_0 = \vec{Q} = 2m\vec{v}; \text{ da cui } \vec{v} = \vec{v}_0/2$$

Dopo l'urto si ha (teorema di conservazione dell'energia):

$$(2m)gl(1 - \cos\theta_f) = \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)\frac{v_0^2}{4} = \frac{1}{2}(2m)\frac{2gl}{4}$$

da cui:

$$(1 - \cos\theta_f) = \frac{1}{4} = 0,25; \quad \cos\theta_f = 0,75; \quad \theta_f \approx 41,5^\circ$$

- 8.6** Il teorema di conservazione dell'energia ci consente di calcolare la velocità angolare ω_0 della sbarretta prima dell'urto:

$$mgl/2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \text{ dove } I = \frac{ml^2}{3}. \text{ Da cui } \omega_0^2 = \frac{3g}{l}$$

Nell'urto si conserva il momento angolare totale (non la quantità di moto totale: infatti in O si esplica una reazione impulsiva:

$$I\omega_0 = (I + ml^2)\omega = \frac{4}{3}ml^2\omega$$

da cui:

$$\omega = \frac{I\omega_0}{I + ml^2} = \frac{ml^2}{3} \cdot \frac{\omega_0}{\frac{4}{3}ml^2} = \frac{\omega_0}{4}$$

Dopo l'urto si conserva l'energia:

$$\frac{1}{2}(I + ml^2)\omega^2 = \left(mg\frac{l}{2} + mgl \right)(1 - \cos\theta_f) = mgl\frac{3}{2}(1 - \cos\theta_f)$$

da cui:

$$\begin{aligned} (1 - \cos\theta_f) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right) \cdot \frac{\omega_0^2}{16} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}mgl} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right) \cdot \frac{3g}{l \cdot 16} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}mgl} = \frac{1}{12} = 0,083 \end{aligned}$$

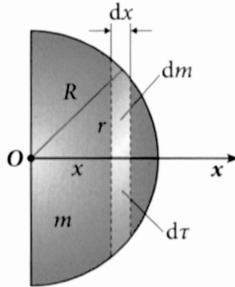
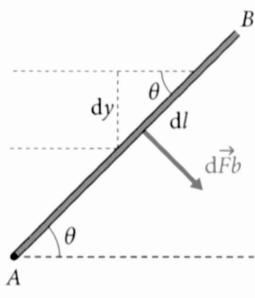
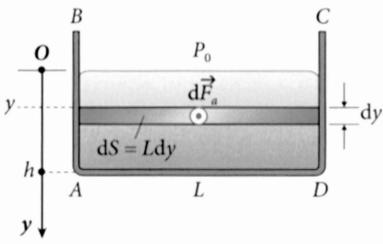
$$\cos\theta_f = (1 - 0,083) = 0,917 \quad \theta_f = 23,6^\circ$$

■ Meccanica dei fluidi

- 9.1*** Sulla parete $ABCD$, su ogni rettangolo infinitesimo di base L , quota y e altezza dy , si esercita una pressione interna ($P_0 + \rho gy$) e una pressione esterna P_0 .

Caso a)

La forza $d\vec{F}_a$, nel caso a), che si esercita sull'elemento di area dS , è nor-



9.2*

In primo luogo occorre ricavare la posizione del c.d.m. della massa liquida spostata dalla semisfera. Per la simmetria del sistema, il c.d.m. è situato sull'asse x . Decomponiamo la semisfera in dischetti di spessore dx e raggio r , aventi asse coincidente con l'asse x . La massa del dischetto è:

$$dm = \rho dx = \rho \pi r^2 dx \quad (r^2 = R^2 - x^2)$$

e il suo c.d.m. è situato sull'asse x , a distanza x dal punto O .

La coordinata x_c del c.d.m. della semisfera è:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \int_{(\text{semisfera})} x dm = \frac{1}{m} \int_0^R \rho \pi (R^2 - x^2) x dx = \\ &= -\frac{\pi \rho}{2m} \int_0^R (R^2 - x^2) d(R^2 - x^2) = \frac{\pi \rho R^4}{4m} \end{aligned}$$

$$m = \frac{1}{2} (\rho \frac{4}{3} \pi R^3) = \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \rightarrow x_c = \frac{3}{8} R$$

La spinta di Archimede è diretta verso l'alto e ha per modulo:

$$A = \frac{1}{2} (\rho \frac{4}{3} \pi R^3) g$$

Per cui:

$$M_O = x_c \cdot A = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 g$$

9.3*

Al generico istante t si ha:

$$\begin{cases} v(t)s = V(t)S & (\text{continuità}) \\ \rho gy(t) = \frac{1}{2} \rho v^2(t) & (\text{Bernoulli}) \end{cases}$$

male a dS , diretta orizzontalmente verso l'esterno e di modulo:

$$dF_a = (\rho gy)Ldy$$

Sull'intera parete $ABCD$ si esercita un sistema di forze parallele e concordi, il cui risultante è:

$$F_a = \int dF_a = \int_0^h \rho g Ly dy = \frac{1}{2} \rho g L h^2$$

Caso b)

La forza di pressione è ortogonale alla parete $ABCD$. Su una striscia infinitesima di parete, di base L e altezza dL ($dS = Ldy$) si esercita una forza $dF_b = (\rho gy)dS$. Dunque:

$$\begin{aligned} dF_b &= \rho gy L dy \quad \text{con } dy = \frac{dL}{\sin \theta} \\ F_b &= \int dF_b = \frac{\rho g L}{\sin \theta} \int_0^h y dy = \frac{\rho g L h^2}{2 \sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2(t) &= 2gy(t) \\ v(t) &= \left(\frac{S}{s}\right)V(t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} V^2(t) &= 2\left(\frac{s}{S}\right)^2 gy(t) \end{aligned} \right.$$

Per ricavare l'accelerazione a con cui si abbassa la superficie libera S , basta derivare rispetto al tempo:

$$2Va = 2\left(\frac{s^2}{S}\right)gV, \text{ da cui}$$

$$a = \left(\frac{s^2}{S}\right)g \quad (\text{costante})$$

Nota l'accelerazione, si ricava immediatamente la dipendenza dal tempo della quota $y(t)$:

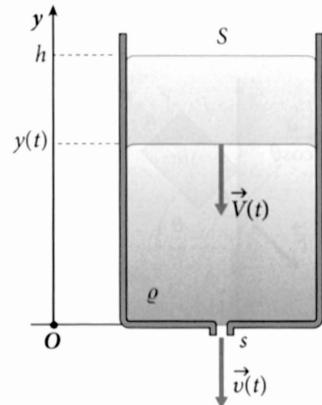
$$y(t) = h - \frac{1}{2}at^2$$

Per $t = t^*$:

$$y(t^*) = 0 \quad (\text{recipiente vuoto})$$

$$h = \frac{1}{2}at^{*2}$$

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{S}\right)^2 gt^{*2}$$



9.4* $v_1 A = v_2 a = Q$

$$(\rho Q = \Delta m / \Delta t)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

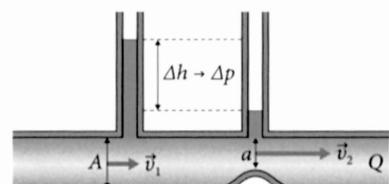
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)v_1^2$$

$$v_1 = \frac{Q}{A} = \frac{1}{\rho A}(\Delta m / \Delta t)$$

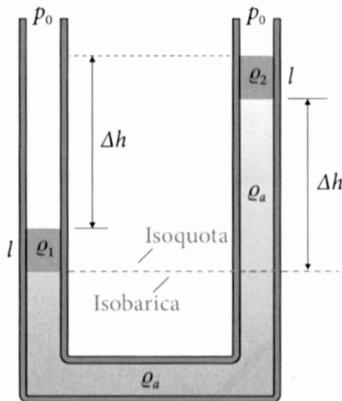
$$\frac{A^2}{a^2} - 1 = \frac{2\Delta p}{\rho v_1^2} = \frac{2\rho\Delta p A^2}{(\Delta m / \Delta t)^2}$$

$$\frac{A^2}{a^2} = \frac{(\Delta m / \Delta t)^2 + 2\rho A^2 \Delta p}{(\Delta m / \Delta t)^2}$$

$$a = \frac{A(\Delta m / \Delta t)}{\sqrt{(\Delta m / \Delta t)^2 + 2\rho A^2 \Delta p}}$$



9.5* Al di sotto del piano tratteggiato c'è liquido omogeneo (acqua). Il piano orizzontale rappresenta una superficie equipotenziale nel campo della gravità ed è dunque isobarica. Le colonne idrostatiche al di sopra di questa superficie nei due bracci devono produrre la stessa pressione. Per la legge di Stevino si ha:



$$p_0 + \rho_1 gl = p_0 + \rho_2 gl + \rho_a g \Delta h$$

$$\rho_1 l = \rho_2 l + \rho_a \Delta h$$

$$\Delta h = l \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_a}$$

9.6* $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$

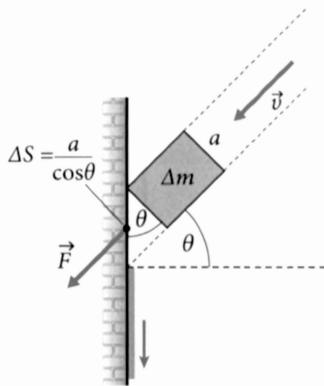
$$F_n = \frac{\Delta q_n}{\Delta t}$$

$$\Delta q_n = \underbrace{(\rho a v \Delta t)}_{\Delta m} v \cos \theta \quad (a = \text{sezione del getto})$$

$$F_n = \rho a v^2 \cos \theta \quad \left(\Delta S = \frac{a}{\cos \theta} \right)$$

$$P = \frac{F_n}{\Delta S} = \frac{\rho a v^2 \cos^2 \theta}{a}$$

$$P = \rho v^2 \cos^2 \theta$$



9.7* La seconda legge della dinamica si scrive:

$$m \vec{g} + \vec{A} + \vec{F}_r = m \frac{d \vec{v}}{dt} \quad (\vec{F}_r = -b \vec{v})$$

Proiettando lungo l'asse verticale y orientato verso l'alto, si ha:

$$-mg + A - bv = m \frac{dv}{dt}$$

Per integrazione si ricava $v = v(t)$.

Superando le variabili si ha:

$$\frac{dv}{[(A - mg) - bv]} = \frac{dt}{m}$$

$$\left(-\frac{1}{b} \right) \cdot \frac{d[(A - mg) - bv]}{[(A - mg) - bv]} = \frac{dt}{m}$$

e integrando:

$$\ln[(A - mg) - bv] = -\frac{b}{m}t + \text{costante}$$

da cui:

$$(A - mg) - bv = ke^{-\frac{b}{m}t}$$

Condizione iniziale: $t = 0, v = 0$;

$$k = A - mg$$

$$v(t) = \frac{(A - mg)}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$

Si ha la velocità limite per $t \rightarrow \infty$

$$v(\infty) = v^* = \frac{A - mg}{b} = \frac{A - mg}{6\pi\eta R}$$

$$A = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_a g, \quad mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_L g$$

$$v^* = \frac{2}{9}gR^2 \frac{(\varrho_a - \varrho_L)}{\eta}$$

- 9.8 Indicando con V_1 e V_2 le porzioni di volume V del corpo ($V = V_1 + V_2$) immerse nel liquido 1 e nel liquido 2 rispettivamente, la spinta di Archimede vale:

$$A = (\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2)g$$

Tale spinta, per l'equilibrio, deve essere uguale e opposta alla forza peso agente sul corpo:

$$\varrho Vg = (\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2)g \quad \text{da cui } \varrho = \frac{\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

Poiché $V_2 = f_2 V$, e quindi $V_1 = (1 - f_2)V$, si ha $V_2/V_1 = f_2/(1 - f_2)$.

Dunque:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 (V_2/V_1)}{1 + (V_2/V_1)} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 \frac{f_2}{1-f_2}}{1 + \frac{f_2}{1-f_2}} = \\ &= \varrho_1 - \varrho_1 f_2 + \varrho_2 f_2 \end{aligned}$$

da cui:

$$\varrho = \varrho_1 + f_2 (\varrho_2 - \varrho_1)$$

Poiché $0 < f_2 < 1$, è evidente che $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. I casi estremi sono:

- $f_2 = 0$, cioè corpo tutto immerso nel liquido 1, che corrisponde al caso $\varrho = \varrho_1$ (basta la spinta di Archimede del liquido meno denso);
- $f_2 = 1$, cioè corpo tutto immerso nel liquido 2, che corrisponde al caso $\varrho = \varrho_2$.

- 9.9 A causa della massa trascurabile, il pallone inizialmente galleggia fuoriuscendo dall'acqua in modo praticamente completo. L'immersione totale del pallone implica uno spostamento di una massa d'acqua

$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$ dalla quota iniziale del suo baricentro, che era a profondità R , alla superficie del lago (la cui quota non cresce apprezzabilmente). Il lavoro necessario è dunque:

$$L = mgR = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho gR \cong 20,8 \text{ J}$$

9.10

Nel sistema di riferimento non inerziale solidale con il tubo ruotante, il liquido è in equilibrio in un campo di forze di volume conservative, dovute alla sovrapposizione della forza peso e della forza centrifuga:

$$d\vec{F}^{(v)} = \vec{G}dm$$

con:

$$G_x = \omega^2 x, G_y = \omega^2 y, G_z = -g$$

avendo orientato l'asse z verso l'alto.

L'energia potenziale U associata al campo è tale che:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \omega^2 x; \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \omega^2 y; \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = -g$$

e quindi:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + gz + \text{cost}$$

Le sezioni A e B del liquido, che sono alla stessa pressione p_0 dell'ambiente esterno, debbono essere equipotenziali e quindi:

$$U(A) = U(B)$$

cioè:

$$gz_A + \text{cost} = -\frac{1}{2}\omega^2 L^2 + gz_B + \text{cost}$$

da cui:

$$g(z_B - z_A) = gh = \frac{1}{2}\omega^2 L^2 \rightarrow h = \frac{\omega^2 L^2}{2g} = 0,46 \text{ m}$$

9.11

Trattandosi di liquido omogeneo in equilibrio nel campo delle forze di volume della gravità (conservative), punti di ugual quota (equipotenziali) debbono avere uguale pressione (isobare).

Deve dunque essere $p_A = p_C$ e quindi, detta p_0 la pressione atmosferica esterna e $S = \pi R^2$ l'area della sezione del tubo:

$$p_A = p_0 + \frac{m_A g}{S} = p_C = p_0 + \frac{m_B g}{S} + \varrho g h$$

da cui:

- 9.12** La massa che passa nell'unità di tempo è ϱQ , dove Q è la portata del condotto: $Q = vS = \text{costante}$.

Dal teorema di Bernoulli per condotti orizzontali si ha:

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$$

da cui:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2} \varrho (v_2^2 - v_1^2)$$

Esprimendo le velocità in funzione della portata si ha:

$$v_1 = Q/S_1, \quad v_2 = Q/S_2 \quad \text{e quindi:}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \varrho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

da cui si ricava la massa che fluisce nell'unità di tempo:

$$\varrho Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\varrho \Delta p}{(S_1^2 - S_2^2)}}$$

- 9.13** Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$L_{\text{TOTALE}} = L_{\text{PESO}} + L_{\text{ATTRITO}} = \Delta K = 0$$

da cui:

$$\begin{aligned} L_{\text{ATTRITO}} &= -L_{\text{PESO}} = -[U^{(\text{IN})} - U^{(\text{FIN})}] = \\ &= -\left[mg \frac{h}{2} - mg \frac{h}{4} \right] = -\frac{1}{4} mgh \end{aligned}$$

con $m = \varrho Sh$.

Osserviamo che l'energia potenziale iniziale $U^{(\text{IN})}$ è quella che compete a una massa m con c.d.m. a quota $h/2$, mentre l'energia potenziale finale $U^{(\text{FIN})}$ si riferisce a una configurazione in cui il liquido occupa un trattato $h/2$ di entrambi i rami del tubo a U e quindi ha c.d.m. a quota $h/4$. Dunque:

$$L_{\text{ATTRITO}} = -\frac{1}{4} \varrho S g h^2$$

Per la legge di Stevino la pressione inizialmente misurata dal manometro è:

$$p^{(\text{IN})} = p_0 + \varrho gh$$

mentre la pressione finale è:

$$p^{(\text{FIN})} = p_0 + \varrho g \frac{h}{2}$$

Pertanto:

$$\Delta p = p^{(IN)} - p^{(FIN)} = \rho g \frac{h}{2}$$

■ Onde in mezzi elastici

10.1 Alluminio: $v = \sqrt{\frac{E}{l}} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

Aria: $c = 340 \text{ m/s}$

$$\begin{cases} t_{\text{Al}} = D/v \\ t_{\text{aria}} = D/c \end{cases} \quad t_{\text{aria}} - t_{\text{Al}} = \Delta t = D \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v} \right) = D \cdot 2,75 \cdot 10^{-3} = 10^{-1} \text{ s}$$

$$D = 36,4 \text{ m}$$

10.2 Nel caso attuale le due onde hanno la forma:

$$\begin{cases} \alpha_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \\ \alpha_2(x,t) = A \sin[k(x-L) - \omega t] \end{cases}$$

Lo sfasamento è dovuto alla differenza tra i cammini geometrici e si ottiene come differenza tra gli argomenti delle funzioni seno.

$$\Delta = kL = \frac{2\pi}{\lambda} L$$

L'ampiezza risultante A_R è

$$A_R = 2A \left(\cos \frac{\Delta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} (\text{si ha } \cos(\Delta/2) = 1 & \quad \text{per } \Delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \\ \cos(\Delta/2) = 0 & \quad \text{per } \Delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots) \end{aligned}$$

Nel caso attuale:

$$\Delta = \frac{2\pi}{40} \cdot 400 = 20\pi \quad (\text{cioè un numero pari di volte } \pi)$$

$$\cos(\Delta/2) = 1$$

$$A_R = 2A \quad (\text{il che implica per l'intensità } I_R = 4I)$$

10.3 In avvicinamento: $v_1 = v \left(\frac{c}{c-v} \right)$

In allontanamento: $v_2 = v \left(\frac{c}{c+v} \right)$

da cui:

$$v = c \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right) = 41,87 \text{ m/s} \quad v \approx 150 \text{ km/h}$$

$$v = v_i \left(\frac{c - v}{c} \right) = 10^3 \text{ Hz} \quad v = 1000 \text{ Hz}$$

- 10.4 La velocità v di propagazione di onde elastiche in una corda tesa è:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Nel nostro caso:

$$\tau = Mg = (5 \text{ kg}) \cdot \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 49 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,1 \text{ kg}}{10 \text{ m}} = 10^{-2} \text{ kg/m}$$

Dunque:

$$v = \sqrt{\frac{49 \text{ N} \cdot \text{m}}{10^{-2} \text{ kg}}} = \sqrt{4,9 \cdot 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 221 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- 10.5 Deve essere:

$$W = I_1 \cdot 4\pi d_1^2 = I_2 \cdot 4\pi d_2^2$$

Da cui:

$$I_1 = \frac{W}{4\pi d_1^2} = \frac{10 \text{ W}}{4\pi \cdot 9 \text{ m}^2} = 8,84 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I_2 = \frac{W}{4\pi d_2^2} = \frac{10 \text{ W}}{4\pi \cdot 36 \text{ m}^2} = 2,21 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- 10.6 $\alpha_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

$$\alpha_2(x, t) = A \sin(k[x - L] - \omega t)$$

Dunque:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \left[2A \cos\left(\frac{kL}{2}\right) \right] \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{kL}{2}\right)$$

L'ampiezza dell'onda risultante è:

$$2A \cos\left(\frac{kL}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{L}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) = 0$$

L'ampiezza è nulla, così come l'intensità: siamo in condizioni di interferenza distruttiva.

■ Calore e temperatura

12.1 Usando i seguenti simboli:

acqua: ϱ_a, V_a, β_a
ferro: V_F, β_F

la spinta di Archimede è:

$$t = t_0; \quad A_0 = \varrho_a(t_0)V_F(t_0)g$$

$$t = t_0 + \Delta t; \quad A = \varrho_a(t_0 + \Delta t)V_F(t_0 + \Delta t)g$$

$$\varrho_a(t_0) = \frac{m}{V_a(t_0)}, \quad \varrho_a(t_0 + \Delta t) = \frac{m}{V_a(t_0 + \Delta t)}$$

con $V_a(t_0 + \Delta t) = V_a(t_0)(1 + \beta_a \Delta t)$ e dunque:

$$\varrho_a(t_0 + \Delta t) = \frac{\varrho_a(t_0)}{(1 + \beta_a \Delta t)}$$

Mentre

$V_F(t_0 + \Delta t) = V_F(t_0)(1 + \beta_F \Delta t)$, per cui:

$$A = \varrho_a(t_0 + \Delta t) V_F(t_0 + \Delta t)g = \frac{\overbrace{\varrho_a(t_0)V_F(t_0)g}^{A_0}(1 + \beta_F \Delta t)}{(1 + \beta_a \Delta t)} = \\ = A_0 \frac{(1 + \beta_F \Delta t)}{(1 + \beta_a \Delta t)}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{(1 + \beta_F \Delta t)}{(1 + \beta_a \Delta t)} = \frac{1 + 3,6 \cdot 10^{-5}}{1 + 5,4 \cdot 10^{-4}} < 1$$

12.2 La lunghezza L della sbarra varia per:

variazione di temperatura: $\left(\frac{\Delta L}{L} \right)_t = \alpha \Delta t$

sforzi meccanici: $\left(\frac{\Delta L}{L} \right)_m = -\frac{1}{E} \Delta P$

($\Delta P = F/S$ con F = forza longitudinale e S = area della sezione).

Il segno negativo proviene dalla legge di Hooke: la forza longitudinale con cui la sbarra reagisce a un allungamento ΔL è proporzionale e opposta in segno all'allungamento stesso.

Gli effetti combinati portano all'allungamento relativo:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta t - \frac{1}{E} \Delta P$$

Se la lunghezza L è mantenuta fissa dai vincoli rigidi in A e B , si ha

$\Delta L = 0$ con l'azione meccanica che annulla gli effetti della dilatazione termica:

$$\alpha \Delta t - \frac{1}{E} \Delta P = 0$$

$$\Delta P = \alpha_E E \Delta t$$

Numericamente:

$$\Delta P = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 50 = 1,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta P = 1,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 \quad (\text{sforzo molto grande})$$

12.3 Il periodo del pendolo è $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Essendo $T = T(l)$, una variazione Δl di l si riflette in una variazione ΔT di T data da:

$$\Delta T = \frac{dT}{dl} \Delta l = \frac{1}{2} \frac{2\pi \cdot \Delta l}{\sqrt{gl}}.$$

La variazione percentuale di periodo è:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{2\pi \cdot \Delta l}{\sqrt{gl}} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l}$$

Poiché

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t = (1 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) \cdot 7 \text{ } ^\circ\text{C} = 1,33 \cdot 10^{-4}$$

si ha:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 0,66 \cdot 10^{-4}$$

Su un giorno, pari a $8,64 \cdot 10^4$ s, ciò si traduce in un ritardo pari a $8,64 \cdot 10^4 \cdot 0,66 \cdot 10^{-4} \approx 5,7$ s.

12.4 Il lavoro compiuto dal sistema è:

$$L = P_0 \Delta V = P_0 (V - V_0) = 1 \text{ atm} (-2 \text{ litri}) = -2 \text{ litri} \cdot \text{atm} = -202,6 \text{ J}$$

12.5 Nella combustione di 100 g di gasolio si sviluppano $Q = 10^6$ cal; la quantità di calore assorbita dal recipiente è $q = m_g \lambda_g = 5 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot 79,7 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 398 \cdot 10^3 \text{ cal}$. Si ha dunque

$$\frac{q}{Q} \approx \frac{0,4 \cdot 10^6}{10^6} \approx 0,4.$$

OSSERVAZIONE

Per il periodo abbiamo usato l'espressione $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ valida per un pendolo semplice. È possibile dimostrare che i risultati numerici sono gli stessi se si usa l'espressione valida per il pendolo fisico $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$ (I , momento di inerzia; M , massa; d , distanza fra il baricentro e il punto di sospensione).

■ Primo principio della termodinamica

$$13.1^* \quad Q - L = \Delta U \xrightarrow{L=0} Q = \Delta U$$

$\Delta U = nC_V\Delta T$ (per un gas perfetto $U = U(T)$)

In generale, per un gas perfetto si ha:

$$pV = nRT$$

e differenziando

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T$$

che, per isocore diventa:

$$V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T, \text{ da cui:}$$

$$\Delta T = \frac{V\Delta p}{nR}$$

$$\Delta U = nC_V \frac{V\Delta p}{nR} \quad (\text{gas biatomico: } C_V = \frac{5}{2}R)$$

$$Q = \frac{5}{2}V\Delta p$$

13.1** Differenziando l'equazione di stato dei gas perfetti si ha:

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T \quad (\text{per } \mathrm{d}p = 0, n = 1):$$

$$p\mathrm{d}V = R\mathrm{d}T$$

$$\text{a) } L = \int p\mathrm{d}V = \int R\mathrm{d}T = R\Delta T$$

$$\text{b) } \Delta U = Q - L = Q - R\Delta T$$

$$\text{c) } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\Delta U = C_v\Delta T \rightarrow C_v = \frac{Q - R\Delta T}{\Delta T}$$

Per la trasformazione a pressione costante di una mole di gas si ha:

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} \quad \text{da cui:}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{Q}{Q - R\Delta T}$$

13.3* Primo principio della termodinamica: $\Delta U = Q - L$

Gas perfetto: $U = U(T)$

Trasformazione isoterna reversibile:

$$L = \int_V^{V/2} p dV = nRT \int_V^{V/2} \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$L = nRT \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

- 13.4*** Per il gas il lavoro di volume è negativo (riduzione di volume) e il trasferimento di calore è anche negativo (calore ceduto al ghiaccio); il tutto a temperatura costante.

$$\Delta U_{\substack{\text{gas} \\ (T = \text{cost})}} = 0 \rightarrow |Q| = |L|$$

$$|Q| = \lambda \frac{m}{2} \quad (\text{fusione di metà della massa } m \text{ di ghiaccio})$$

Compressione isoterna reversibile:

$$L = \int_{V^{\text{IN}}}^{V^{\text{FIN}}} p dV = nRT_0 \int_{V^{\text{IN}}}^{V^{\text{FIN}}} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln\left(\frac{V^{\text{FIN}}}{V^{\text{IN}}}\right)$$

$$\text{Gas perfetto isoterna: } p_0 V^{\text{IN}} = p_F V^{\text{FIN}} \rightarrow \frac{V^{\text{FIN}}}{V^{\text{IN}}} = \frac{p_0}{p_F}$$

$$|L| = nRT_0 \ln\left(\frac{p_F}{p_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p_F}{p_0}\right) = \frac{\lambda m}{2nRT_0} \rightarrow p_F = p_0 e^{\frac{\lambda m}{2nRT_0}}$$

- 13.5*** $\Delta U = Q - L \rightarrow Q = \Delta U + L$

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

La variazione di temperatura ΔT è collegabile alla quantità di calore Q per il fatto che la trasformazione è isobara:

$$Q = nC_p \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{Q}{nC_p}$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T = nC_V \frac{Q}{nC_p} = \frac{Q}{\gamma}$$

Perciò il primo principio della termodinamica assume la forma:

$$\Delta U = \frac{Q}{\gamma} = Q - L \rightarrow Q \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) = -L$$

$$Q = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) L$$

$$L = p_0(V_F - V_0) = p_0 \Delta V$$

Espansione $\left\{ \begin{array}{l} p_0 V_0 = n R T_0 \text{ (gas perfetto)} \\ \text{a } p = p_0 = \text{cost} \\ p_0 V_F = n R T_F \end{array} \right.$

$$L = p_0 \Delta V = n R (T_F - T_0)$$

$$T_F = T_0 + \frac{p_0 \Delta V}{nR}$$

$$\Delta U = \Delta U_{\text{gas}} + \Delta U_{\text{corpo}} = n C_V (T_F - T_0) + mc(T_F - T_1) = -L = -nR(T_F - T_0)$$

$$(C_p - C_V = R)$$

$$n C_p (T_F - T_0) = mc(T_1 - T_F)$$

$$c = \frac{n C_p}{m} \frac{(T_F - T_0)}{(T_1 - T_F)} = \frac{C_p p_0 \Delta V}{m R} \frac{1}{\left(T_1 - T_0 - \frac{p_0 \Delta V}{n R} \right)}$$

$$c = \frac{n C_p p_0 \Delta V}{m [n R (T_1 - T_0) - p_0 \Delta V]}$$

$$13.6^* \quad \text{Stato C)} \quad p_0 \frac{V_0}{2} = n R T_c \quad \rightarrow \quad T_B = T_C$$

$$\text{Stato B)} \quad \frac{p_0}{2} V_0 = n R T_B$$

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow C \\ (p = \text{cost}) \end{array} \right\} \Delta U_{AC} = n R (T_C - T_A) = Q_{AC} - L_{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ (V = \text{cost}) \end{array} \right\} \Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} = Q_{AB}$$

$$L_{AC} = Q_{AC} - Q_{AB}$$

$$Q_{AC} = n C_p \Delta T \quad (\text{isobara})$$

$$Q_{AB} = n C_V \Delta T \quad (\text{isocora})$$

$$\frac{Q_{AC}}{Q_{AB}} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma \rightarrow Q_{AC} = \gamma Q_{AB}$$

$$L_{AC} = Q_{AC} - Q_{AB} = \gamma Q_{AB} - Q_{AB}$$

$$L_{AC} = (\gamma - 1) Q_{AB}$$

13.7

a) Possiamo suddividere il processo in due fasi: (1) si scioglie il ghiaccio; il calore Q_1 assorbito a tal fine dall'ambiente è

$$Q_1 = m_g \lambda_g = 20 \text{ g} \cdot 79,7 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 1594 \text{ cal.}$$

(2) Una massa pari a $m_g + m_a$ di acqua si porta da 0 °C a 20 °C, assorbendo una quantità di calore Q_2 pari

$$\text{a } Q_2 = (m_g + m_a) c \Delta t = 100 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ cal}}{^\circ \text{C}} \cdot 20 \text{ }^\circ \text{C} = 2000 \text{ cal.}$$

In totale il calore scambiato è $Q = Q_1 + Q_2 = 3594 \text{ cal} = 15,02 \cdot 10^3 \text{ J.}$

b) Poiché il volume è (praticamente) costante, $L = 0$.

c) $\Delta U = Q - L = Q = 15,02 \cdot 10^3 \text{ J.}$

13.8

a) Si ha:

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 5 \text{ L}}{82,06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{K} \cdot \text{moli}} \cdot 243 \text{ K}} = 0,25 \text{ moli}$$

$$m = n M = 0,25 \cdot 32 \text{ g} = 8 \text{ g}$$

b) $T = 300 \text{ K}; V = V_0 + Sh = 5 \text{ L} + 200 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ L} = 5,4 \text{ L}$

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V} = 1,3 \text{ atm}$$

c) $P = P_0 + \frac{Kh}{S}; K = \frac{P - P_0}{h} S = 3,4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

d) $L = \frac{1}{2} K h^2 + P_0 \Delta V = 47,3 \text{ J}$

e) $Q = \Delta U + L = n C_V \Delta T + L = 0,25 \left(\frac{5}{2} R \right) 57 \text{ K} + 47,3 \text{ J} = 346,3 \text{ J}$

13.9

a) La trasformazione è a pressione costante, per cui possiamo scrivere

$$Q = n C_p \Delta T. \text{ D'altro canto è } n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = 0,174 \text{ moli; per cui:}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{n C_p} = \frac{-40 \text{ cal} \cdot 4,18 \text{ J/cal}}{0,17 \text{ moli} \cdot \frac{7}{2} R} = -33,02 \text{ K}$$

Dunque $T = T_0 - \Delta T = 317 \text{ K}; V = \frac{V_0}{T_0} T = 4,53 \text{ L}$

b) Il lavoro L è pari a $P_0(V - V_0) = 1 \text{ atm} \cdot (-0,47) \text{ L} \approx -47,6 \text{ J}$:

$$\Delta U = Q - L = -40 \cdot 4,18 \text{ J} + 47,6 \text{ J} = -119,6 \text{ J}$$

Lo stesso risultato si ottiene calcolando:

$$\Delta U = n C_V \Delta T = 0,174 \frac{5}{2} R (-33,02 \text{ K})$$

13.10a) La trasformazione è isotermica ($T = T_0$), per cui $PV = P_0 V_0$. Essendo $V = 2V_0$, si ha $P = P_0/2 = 10 \text{ atm}$.b) Essendo $T = T_0$, si ha $\Delta U = n C_V (T - T_0) = 0$. Poiché la trasformazione è quasi statica:

$$L = \int_{V_0}^V P dV = \int_{V_0}^V \frac{n R T_0}{V} dV = n R T_0 \cdot \ln \frac{V}{V_0}$$

ed essendo $P_0 V_0 = n R T_0$, $L = P_0 V_0 \ln 2 = 702 \text{ J}$. Essendo $\Delta U = 0$, $Q = L$.

13.11Nello stato iniziale si ha: $U_i = m_1 c t_1 + m_2 c t_2 + m_3 c t_3 + \text{cost.}$ Nello stato

finale: $U_f = (m_1 c + m_2 c + m_3 c)t_f + \text{cost.}$
Essendo $Q = 0$ e $L = 0$, si ha $\Delta U = 0$; da cui:

$$t_f = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30}{1+2+3} = \frac{140}{6} = 23,3^\circ\text{C}$$

13.12 $Q = \Delta U + L$. $\Delta U = nC_V(T_B - T_A)$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P_A V_A = nRT_A$$

$$P_B V_B = nRT_B = \frac{P_A}{2} \cdot 2V_A = P_A V_A$$

Da cui segue $T_B = T_A$, e dunque $\Delta U = 0$.

$$Q = L = \int_A^B p dV = \text{area del trapezio} =$$

$$= \frac{1}{2}(P_A + P_B)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} P_A V_A = \frac{3}{4} nRT_A = 3403 \text{ J}$$

13.13

Essendo $PV = RT$, moltiplicando ambo i membri per V si ha $PV^2 = RTV = \text{costante}$; $PV^2 = P_A V_A^2$. Dunque si tratta di una politropica $PV^K = \text{cost.}$ con $K = 2$.

$$L = \int_A^B P dV = \int_A^B \frac{P_A V_A^2}{V^2} dV = P_A V_A^2 \left[-\frac{1}{V} \right]_A^B =$$

$$= P_A V_A^2 \left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right) = \frac{P_A V_A}{V_B} (V_B - V_A)$$

$$L = \frac{1 \cdot 8}{2} (2 - 8) =$$

$$= -24 \text{ L} \cdot \text{atm} = -24 \cdot 10^{-3} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \text{ J} = -2431 \text{ J}$$

(il lavoro è negativo trattandosi di una compressione). Dalla relazione che dà il calore molare per le politropiche si ha

$$C = C_V + \frac{R}{1-K} = \frac{3}{2} R - R = \frac{1}{2} R.$$

■ Trasmissione del calore

Materiale	Conducibilità W/m °C
Calcestruzzo ordinario	1,30
Intonaco calce e sabbia	0,80
Poliuretano espanso	0,026
Mattoni	0,80
Mattoni intonacati	0,80

14.1

La conduttanza unitaria dei tre strati è rispettivamente:

$$\bullet \text{ calcestruzzo } H_1 = \lambda_1/d_1 = 1,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} / 0,15 \text{ m} = 8,7 \text{ W/m}^2 \circ\text{C}$$

$$\bullet \text{ intonaco } H_2 = \lambda_2/d_2 = 0,80 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} / 0,03 \text{ m} = 26,7 \text{ W/m}^2 \circ\text{C}$$

$$\bullet \text{ poliuretano } H_3 = \lambda_3/d_3 = 0,026 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} / 0,05 \text{ m} = 0,52 \text{ W/m}^2 \circ\text{C}$$

La parete non isolata ha conduttanza H data da:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$

da cui:

$$H = 6,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$$

La parete isolata ha conduttanza \bar{H} data da:

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2} + \frac{1}{H_3};$$

da cui:

$$\bar{H} = 0,48 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$$

La potenza media dissipata è:

- parete non isolata:

$$P = SH(T_1 - T_2) = 12 \text{ m}^2 \cdot 6,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}} \cdot (18 - 2) \text{ }^\circ\text{C} = 1248 \text{ W}$$

- parete isolata:

$$\bar{P} = S\bar{H}(T_1 - T_2) = 12 \text{ m}^2 \cdot 0,48 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}} \cdot (18 - 2) \text{ }^\circ\text{C} = 92,2 \text{ W}$$

L'energia consumata annualmente è data, nei due casi, da:

- parete non isolata

$$E = P \cdot t = 1248 \frac{\text{joule}}{\text{s}} \times 150 \text{ giorni} \times 24 \frac{\text{h}}{\text{giorno}} \times \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = \\ = 16,17 \cdot 10^9 \text{ joule}$$

- parete isolata

$$\bar{E} = \bar{P} \cdot t = 92,2 \frac{\text{joule}}{\text{s}} \times 150 \text{ giorni} \times 24 \frac{\text{h}}{\text{giorno}} \times \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = \\ = 1,19 \cdot 10^9 \text{ joule}$$

Ogni kg di gasolio sviluppa circa 10^4 kcal = $4,18 \cdot 10^7 \frac{\text{joule}}{\text{kg}}$; tenendo conto di un rendimento di 0,80, ogni kg rende disponibili $3,34 \cdot 10^7$ joule.

Per sopperire alle dissipazioni termiche, servono dunque, nei due casi, le seguenti quantità di gasolio:

- parete non isolata

- parete isolata

$$\bar{Q} = 1,29 \cdot 10^9 \text{ joule} \frac{1}{3,34 \cdot 10^7 \text{ joule/kg}} = 38,6 \text{ kg}$$

14.2 La conduttanza totale è data da:

$$H = \frac{1}{(1/H_1) + (1/H_2) + (1/H_3)}$$

dove $1/H_i = d/\lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$). Numericamente $1/H_1 = 0,126 \text{ m}^\circ\text{C/W}$; $1/H_2 = 3,08 \text{ m}^\circ\text{C/W}$; $1/H_3 = 0,156 \text{ m}^\circ\text{C/W}$ (i valori delle conduttanze λ_i sono stati tratti dalla tabella della soluzione dell'esercizio 14.1). Risulta:

$$W = H \cdot \Delta T = 0,30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \circ\text{C}} \cdot 15 \circ\text{C} = 4,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

W è la stessa attraverso i tre strati, per cui:

$$T_3 - T_1 = W(1/H_1) = 4,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 0,125 \frac{\text{m}^\circ\text{C}}{\text{W}} = 0,5 \circ\text{C}$$

Analogamente:

$$T_4 - T_3 = W(1/H_2) = 13,8 \circ\text{C}; \quad T_2 - T_4 = W(1/H_3) = 0,7 \circ\text{C}$$

In definitiva:

$$T_1 = 20 \circ\text{C}; \quad T_2 = 5 \circ\text{C}; \quad T_3 = 19,3 \circ\text{C}; \quad T_4 = 5,5 \circ\text{C}$$

14.3 La conduttanza dell'intercapedine H_I è pari alla somma della conduttanza convettiva H_C e di quella radiativa H_R . Numericamente:

$$H_I = H_C + H_R = 5,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \circ\text{C}}$$

L'esercizio si risolve ora come l'esercizio 14.1, ponendo H_I al posto di H_2 . Si ottiene $H = 2,16 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \circ\text{C}}$; $W = 32,4 \text{ W}$

$$T_2 = 5 \circ\text{C}; \quad T_4 = 9,1 \circ\text{C}; \quad T_3 = 14,9 \circ\text{C}; \quad T_1 = 20 \circ\text{C}$$

Come si vede, la potenza dissipata è per un fattore di circa 7 maggiore rispetto al caso di intercapedine piena di isolante.

Q_{ASS} nell'isoterma CA

$$\Delta U_{CA} = 0 \rightarrow Q_{CA} = L_{CA}$$

$$L_{CA} = \int_C^A p dV = \int_C^A nRT_A \frac{dV}{V} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) > 0$$

Tenendo conto che si tratta di un'isoterma, il rapporto (V_A/V_C) può essere espresso in funzione del rapporto tra pressioni:

$$\begin{cases} p_A V_A = nRT_A \\ p_C V_C = nRT_C \rightarrow p_C V_C = nRT_A \end{cases}$$

da cui:

$$p_A V_A = p_C V_C \rightarrow (V_A/V_C) = (p_C/p_A) = 2$$

$$|Q_{ASS}| = Q_{CA} = nRT_A \ln 2$$

$$\eta = 1 - \frac{nC_p(T_A - T_B)}{nRT_A \ln 2} = 1 - \frac{C_p}{R \ln 2} \left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

Per esprimere il rapporto (T_B/T_A) in funzione del rapporto noto tra le pressioni osserviamo che:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_B}{T_C}$$

e che gli stati B e C sono collegati da una trasformazione adiabatica reversibile per la quale valgono le relazioni:

$$pV^\gamma = \text{cost} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost}$$

Pertanto si ha:

$$T_B p_B^{(1-\gamma)/\gamma} = T_C p_C^{(1-\gamma)/\gamma}$$

da cui:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{p_C}{p_B}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 2^{(1-\gamma)\gamma}$$

$$(\gamma = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} = -0,4 \rightarrow 2^{-0,4} = 0,76)$$

$$\eta = 1 - \frac{5}{2 \ln 2} (1 - 0,76) = 0,13$$

$$15.1^{**} \quad \eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|}$$

$$|Q_{\text{ASS}}| = nRT_A \ln(V_B/V_A) = nRT_A \ln 2$$

$$BC: L = 0 \rightarrow Q = \Delta U = nC_V(T_C - T_B) = nC_V(T_C - T_A)$$

$$|Q_{\text{CED}}| = nC_V(T_A - T_C) = nC_V T_A \left(1 - \frac{T_C}{T_A}\right)$$

Gli stati C e A sono collegati da un'adiabatica reversibile, per cui:

$$T_C V_C^{y-1} = T_A V_A^{y-1} \quad \text{con } V_C = V_B, \text{ per cui:}$$

$$\frac{T_C V_B^{y-1}}{T_A V_A^{y-1}} = \frac{T_C}{T_A} \rightarrow \frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{y-1}$$

$$|Q_{\text{CED}}| = nC_V T_A \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\right]$$

$$\eta = 1 - \frac{nC_V T_A (1 - 1/2^{y-1})}{nRT_A \ln 2} = 1 - \frac{5}{2 \ln 2} \left(1 - \frac{1}{2^{0.4}}\right)$$

$$\eta = 0,14$$

$$15.2^* \quad \Delta S_{\text{UN}} = \Delta S_A^{\text{SORG}} + \Delta S_C^{\text{SORG}}$$

Per il calcolo delle variazioni di entropia delle sorgenti, occorre utilizzare trasformazioni reversibili e, per quanto riguarda i segni, porsi nell'ottica "egoistica" delle sorgenti:

Sorgente a temperatura T_A che cede calore:

$$\Delta U = 0 \rightarrow \delta Q = dL = pdV = nRT_A \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S_A^{\text{SORG}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{1}{T_A} \int_A^B \delta Q$$

$$\Delta S_A^{\text{SORG}} = -\frac{Q_{AB}}{T_A} = -nR \int \frac{dV}{V} = -nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = -2R \ln 2$$

$$\Delta S_A^{\text{SORG}} = -11,53 \text{ J/K}$$

Sorgente a temperatura T_C che acquista calore:

$$\Delta S_C^{\text{SORG}} = \frac{1}{T_C} \int \delta Q = nC_V \frac{(T_B - T_C)}{T_C} = nC_V \frac{(T_A - T_C)}{T_C} = nC_V \left(\frac{T_A}{T_C} - 1 \right)$$

Gli stati A e C sono collegati da un'adiabatica reversibile per cui:

$$T_A V_A^{y-1} = T_C V_C^{y-1} = T_C V_B^{y-1}$$

$$\frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{y-1}$$

$$\Delta S_C^{\text{SORG}} = nC_V \left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{y-1} - 1 \right] = +14,63 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{UN}} = +3,1 \text{ J/K}$$

15.3* Nel ciclo diretto reversibile di Carnot si ha:

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = \frac{|Q_c| - |Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{(T_c - T_f)}{T_c}$$

$$L = \eta |Q_c| = |Q_c| - |Q_f| \rightarrow |Q_f| = |Q_c|(1 - \eta)$$

$$|Q_c| = \frac{L}{\eta} \rightarrow |Q_f| = L \frac{(1 - \eta)}{\eta}$$

Essendo $\eta = \frac{(T_c - T_f)}{T_c}$ si ha:

$$\frac{1 - \eta}{\eta} = \frac{T_f}{(T_c - T_f)} \text{ e dunque}$$

$$|Q_f| = L \frac{(1 - \eta)}{\eta} = L \frac{T_f}{(T_c - T_f)} = L \frac{273}{20} = 13,65L$$

$$|Q_f| = m\lambda$$

$$m = 13,65 \frac{L}{\lambda}$$

15.4* AB: $Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) (> 0, \text{assorbito})$

CB: $Q_{CD} = nC_p(T_D - T_C) (< 0, \text{ceduto})$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{|Q_{AB}|} = 1 - \frac{(T_C - T_D)}{(T_B - T_A)}$$

Essendo fornite informazioni sulle pressioni, si procede come nell'esercizio 15.1*.

$$\begin{aligned} T_A P_A^{(1-\gamma)/\gamma} &= T_D P_D^{(1-\gamma)/\gamma} \\ T_B P_A^{(1-\gamma)/\gamma} &= T_C P_D^{(1-\gamma)/\gamma} \end{aligned} \left\{ \frac{T_D}{T_C} = \frac{T_A}{T_B} \right.$$

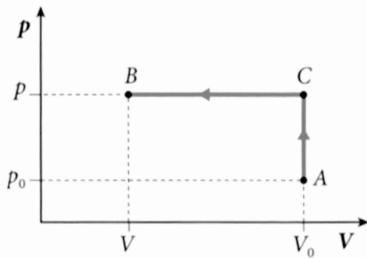
$$\eta = 1 - \frac{T_C \left(1 - \frac{T_D}{T_C} \right)}{T_B \left(1 - \frac{T_A}{T_B} \right)} = 1 - \frac{T_C}{T_B}$$

$$\text{con } \frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{P_A}{P_D} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{5} \right)$$

$$\eta = 1 - 2^{(1-\gamma)/\gamma} = 1 - 2^{(-0,4)} = 1 - 0,76 = 0,24$$

$$\eta = \frac{L}{|Q_{ASS}|} = \frac{L}{Q}$$

$$L = 0,24 \cdot Q$$



15.6*

Per il calcolo della variazione di entropia del gas, si può scegliere, per esempio, un'isocora reversibile AC seguita da un'isobara reversibile CB .

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C nC_V \frac{dT}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right)$$

$$\Delta S_{CB} = \int_C^B nC_p \frac{dT}{T} = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)$$

con $T_A = T_B = T_0$, per cui:

$$\Delta S_{AB} = nC_V \ln\left(\frac{T_C}{T_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{T_0}{T_C}\right)$$

Calcoliamo T_C utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\left. \begin{array}{l} C) \quad pV_0 = nRT_C \\ B) \quad p \frac{V_0}{3} = nRT_0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{T_C}{T_0} = 3$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= nC_V \ln 3 + nC_p \ln\left(\frac{1}{3}\right) = nC_V \ln 3 - nC_p \ln 3 = \\ &= -n(C_p - C_V) \ln 3 = -nR \ln 3 \end{aligned}$$

Se avessimo scelto un'isoterma reversibile per passare dallo stato A allo stato B (entrambi a temperatura T_0) avremmo ottenuto:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{1}{T_0} Q_{AB} \quad (\Delta U = 0, Q = L = \int_A^B p dV)$$

$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T_0} nRT_0 \int_A^B \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -nR \ln 3$$

Per la variazione di entropia della sorgente, che riceve calore Q (positivo dal punto di vista egoistico della sorgente), basta osservare che l'energia interna del gas non varia e quindi $Q = |L|$. Dunque

$$\Delta S_{SORG} = \frac{Q}{T_0} = \frac{|L|}{T_0}$$

e, complessivamente:

$$\Delta S_{UN} = -nR \ln 3 + \frac{|L|}{T_0}$$

15.7*

$$\Delta S_{UN} = \Delta S_{AB}^{SORG} + \Delta S_{BC}^{SORG} + \Delta S_{CA}^{SORG}$$

AB) Il gas assorbe calore $Q_{AB} (> 0$ per il gas) e dunque le sorgenti lo cedono (< 0 per le sorgenti).

$$\Delta S_{AB}^{SORG} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = -nC_p \int_A^B \frac{dT}{T} = -nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

Le informazioni sul gas perfetto riguardano i volumi V_A e V_B ; perciò occorre usare l'equazione di stato per esprimere le temperature in funzione dei volumi:

$$pV_A = nRT_A$$

$$pV_B = nRT_B$$

da cui:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} = \beta, \text{ e dunque}$$

$$\Delta S_{AB}^{\text{SORG}} = -nC_p \ln \beta$$

BC) Il gas si raffredda a volume costante e cede calore (< 0 per il gas e > 0 per la sorgente a temperatura T_C).

$$\Delta S_{BC}^{\text{SORG}} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_C} nC_V (T_B - T_C) \quad (> 0)$$

$$\Delta S_{BC}^{\text{SORG}} = nC_V \left(\frac{T_B}{T_C} - 1 \right) = nC_V \left(\frac{T_B}{T_A} - 1 \right) = nC_V \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) = nC_V (\beta - 1)$$

CA) Il gas viene compresso reversibilmente a temperatura costante ($\Delta U = 0$) per cui $Q_{CA} = L_{CA}$ (< 0 perché compressione). Dunque:

$$Q_{CA}^{\text{GAS}} < 0 \quad \text{per cui} \quad Q_{CA}^{\text{SORG}} > 0 \quad (\text{la sorgente assorbe calore a temperatura } T_A)$$

$$\Delta S_{CA}^{\text{SORG}} = \frac{1}{T_A} \int \delta Q = -\frac{1}{T_A} nRT_A \int_C^A \frac{dV}{V} = -nR \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln \beta$$

In conclusione:

$$\Delta S_{UN} = \sum \Delta S^{\text{SORG}} = -nC_p \ln \beta + nC_V (\beta - 1) + nR \ln \beta$$

15.9

Per i cicli di Carnot (reversibili) si ha:

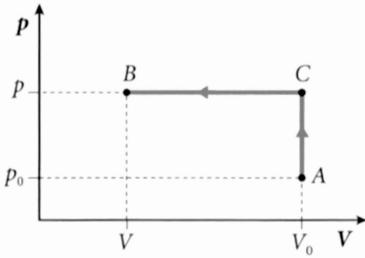
$$\eta(T_c, T_f) = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$$\text{a)} \quad T_c = 500 \text{ K}, \quad T_f = 300 \text{ K} \rightarrow \quad \eta(500, 300) = 1 - \frac{300}{500} = 0,40$$

$$\text{b)} \quad T_c = 520 \text{ K}, \quad T_f = 300 \text{ K} \rightarrow \quad \eta(520, 300) = 1 - \frac{300}{520} = 0,42$$

$$\text{c)} \quad T_c = 500 \text{ K}, \quad T_f = 280 \text{ K} \rightarrow \quad \eta(500, 280) = 1 - \frac{280}{500} = 0,44$$

Osserviamo che, nei casi (b) e (c), a parità di differenza di temperatura tra le sorgenti, è preferibile, dal punto di vista del rendimento, avere a più bassa temperatura la sorgente fredda.



15.6*

Per il calcolo della variazione di entropia del gas, si può scegliere, per esempio, un'isocora reversibile AC seguita da un'isobara reversibile CB .

$$\Delta S_{AC} = \int_A^C nC_V \frac{dT}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right)$$

$$\Delta S_{CB} = \int_C^B nC_p \frac{dT}{T} = nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right)$$

con $T_A = T_B = T_0$, per cui:

$$\Delta S_{AB} = nC_V \ln\left(\frac{T_C}{T_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{T_0}{T_C}\right)$$

Calcoliamo T_C utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\left. \begin{array}{l} C) \quad pV_0 = nRT_C \\ B) \quad p\frac{V_0}{3} = nRT_0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{T_C}{T_0} = 3$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= nC_V \ln 3 + nC_p \ln\left(\frac{1}{3}\right) = nC_V \ln 3 - nC_p \ln 3 = \\ &= -n(C_p - C_V) \ln 3 = -nR \ln 3 \end{aligned}$$

Se avessimo scelto un'isoterma reversibile per passare dallo stato A allo stato B (entrambi a temperatura T_0) avremmo ottenuto:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{1}{T_0} Q_{AB} \quad (\Delta U = 0, Q = L = \int_A^B p dV)$$

$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T_0} nRT_0 \int_A^B \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -nR \ln 3$$

Per la variazione di entropia della sorgente, che riceve calore Q (positivo dal punto di vista egoistico della sorgente), basta osservare che l'energia interna del gas non varia e quindi $Q = |L|$. Dunque

$$\Delta S_{SORG} = \frac{Q}{T_0} = \frac{|L|}{T_0}$$

e, complessivamente:

$$\Delta S_{UN} = -nR \ln 3 + \frac{|L|}{T_0}$$

15.7*

$$\Delta S_{UN} = \Delta S_{AB}^{SORG} + \Delta S_{BC}^{SORG} + \Delta S_{CA}^{SORG}$$

AB) Il gas assorbe calore $Q_{AB} (> 0$ per il gas) e dunque le sorgenti lo cedono (< 0 per le sorgenti).

$$\Delta S_{AB}^{SORG} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = -nC_p \int_A^B \frac{dT}{T} = -nC_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$$

Le informazioni sul gas perfetto riguardano i volumi V_A e V_B ; perciò occorre usare l'equazione di stato per esprimere le temperature in funzione dei volumi:

$$pV_A = nRT_A$$

$$pV_B = nRT_B$$

da cui:

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} = \beta, \text{ e dunque}$$

$$\Delta S_{AB}^{SORG} = -nC_p \ln \beta$$

BC) Il gas si raffredda a volume costante e cede calore (< 0 per il gas e > 0 per la sorgente a temperatura T_C).

$$\Delta S_{BC}^{SORG} = \int_B^C \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_C} nC_V (T_B - T_C) \quad (> 0)$$

$$\Delta S_{BC}^{SORG} = nC_V \left(\frac{T_B}{T_C} - 1 \right) = nC_V \left(\frac{T_B}{T_A} - 1 \right) = nC_V \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) = nC_V (\beta - 1)$$

CA) Il gas viene compresso reversibilmente a temperatura costante ($\Delta U = 0$) per cui $Q_{CA} = L_{CA}$ (< 0 perché compressione). Dunque:

$$Q_{CA}^{GAS} < 0 \quad \text{per cui} \quad Q_{CA}^{SORG} > 0 \quad (\text{la sorgente assorbe calore a temperatura } T_A)$$

$$\Delta S_{CA}^{SORG} = \frac{1}{T_A} \int \delta Q = -\frac{1}{T_A} nRT_A \int_C^A \frac{dV}{V} = -nR \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = nR \ln \beta$$

In conclusione:

$$\Delta S_{UN} = \sum \Delta S^{SORG} = -nC_p \ln \beta + nC_V (\beta - 1) + nR \ln \beta$$

15.9 Per i cicli di Carnot (reversibili) si ha:

$$\eta(T_c, T_f) = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$$\text{a) } T_c = 500 \text{ K}, T_f = 300 \text{ K} \rightarrow \eta(500, 300) = 1 - \frac{300}{500} = 0,40$$

$$\text{b) } T_c = 520 \text{ K}, T_f = 300 \text{ K} \rightarrow \eta(520, 300) = 1 - \frac{300}{520} = 0,42$$

$$\text{c) } T_c = 500 \text{ K}, T_f = 280 \text{ K} \rightarrow \eta(500, 280) = 1 - \frac{280}{500} = 0,44$$

Osserviamo che, nei casi (b) e (c), a parità di differenza di temperatura tra le sorgenti, è preferibile, dal punto di vista del rendimento, avere a più bassa temperatura la sorgente fredda.

15.10 $\eta = \frac{L}{|Q_{ASS}|}; |Q_{ASS}| = |Q_{AB}| + |Q_{DA}|$

$$L = (P_A - P_D) \cdot (V_B - V_A) = (2 \text{ atm}) \cdot (3 \text{ L}) = 6 \text{ L} \cdot \text{atm}$$

$$\begin{aligned} |Q_{AB}| &= nC_p(T_B - T_A) = \frac{C_p}{R}(P_B V_B - P_A V_A) = \\ &= \frac{5}{2}(4 \cdot 4 - 4 \cdot 1) = 30 \text{ L} \cdot \text{atm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Q_{DA}| &= nC_V(T_A - T_D) = \frac{C_V}{R}(P_A V_A - P_D V_D) = \\ &= \frac{3}{2}(4 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 3 \text{ L} \cdot \text{atm} \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{6}{30 + 3} = 0,182$$

- 15.11** La macchina che, lavorando con due sole sorgenti, ha il massimo rendimento è la macchina reversibile di Carnot. Il suo rendimento è:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{273}{373} = 0,27$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel problema 15.3* si ha:

$$L = \frac{\eta}{1-\eta} |Q_f| \text{ con } |Q_f| = m\lambda = (20 \cdot 10^3 \text{ g}) \left(80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \right) = 1,6 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

$$L = \frac{0,27}{1-0,27} 1,6 \cdot 10^6 = 5,9 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{(acqua)}^{273} \frac{\delta Q}{T} + \int_{acqua \rightarrow ghiaccio} \frac{\delta Q}{T} + \int_{(ghiaccio)}^{263} \frac{\delta Q}{T} = \\ &= \int_{303}^{273} \frac{mc_l dT}{T} + \frac{1}{T_0} \int \delta Q + \int_{273}^{263} \frac{mc_s dT}{T} = \\ &= mc_l \ln \frac{273}{303} + \frac{m\lambda}{273} + mc_s \ln \frac{263}{273} = \\ &= 0,1 \left[1 \cdot (-0,104) - \frac{80}{273} + 0,5(-0,037) \right] = \\ &= 0,1 \left[-0,104 - 0,293 - 0,019 \right] = -0,042 \text{ cal/K} \end{aligned}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A| + |Q_B|}$$

Poiché il ciclo è reversibile:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$

$$Q_C = -T_c \left(\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} \right) = -273 \left(\frac{200}{500} + \frac{300}{373} \right) = -328 \text{ cal}$$

$$\eta = 1 - \frac{328}{200 + 300} = 34,4\%$$

- 15.14 a) L'integrale di Clausius, pari all'integrale $\int \frac{\delta Q}{T}$ da calcolarsi lungo la trasformazione reale effettivamente seguita dal sistema (irreversibile), è nullo per sistemi isolati. In questo caso l'integrale di Clausius consta di tre contributi:

$$\int \frac{\delta Q(Cu)}{T} + \int \frac{\delta Q(\text{sorgente})}{T_s} + \int \frac{\delta Q(\text{lago})}{T_L} = 0$$

Il primo addendo della somma è l'integrale di Clausius relativo al rame richiesto dal problema:

$$\int \frac{\delta Q(Cu)}{T} + \frac{Q_s}{T_s} + \frac{Q_L}{T_L} = 0$$

Nel caso del problema la sorgente cede calore Q_s pari in modulo al calore che riceve il rame; il lago riceve una quantità di calore Q_L pari in modulo a quello che cede il rame. Poiché la temperatura del lago è uguale a quella iniziale del rame, si ha:

$$|Q_s| = mc(T_s - T_i) = |Q_L| = (0,5 \cdot 10^3 \text{ g}) \left(0,09 \frac{\text{cal}}{\text{g K}} \right) \cdot (80 \text{ K}) = 3600 \text{ cal}$$

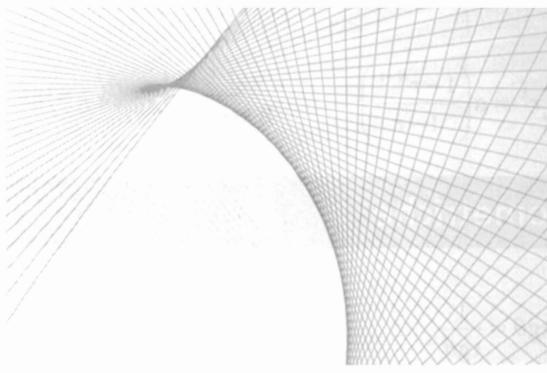
Dunque:

$$\int \frac{\delta Q(Cu)}{T} - \frac{|Q_s|}{T_s} + \frac{|Q_L|}{T_L} = 0$$

$$\int \frac{\delta Q(Cu)}{T} = + \frac{|Q_s|}{T_s} - \frac{|Q_L|}{T_L} = + \frac{3600}{373} - \frac{3600}{293} =$$

$$= 9,65 - 12,29 = -2,64 \text{ cal/K}$$

È da osservare che, poiché il rame compie una trasformazione che lo riporta alla stessa temperatura che aveva all'inizio, la sua variazione di entropia è nulla. In questo caso la disequazione di Clausius $\Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}$ diventa $0 \geq -2,64 \text{ cal/K}$.



Alcune nozioni e formule utili di matematica

■ Formule e approssimazioni

Equazioni algebriche

Equazioni algebriche di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenza del binomio

Per n intero positivo si ha:

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}x^{n-3}y^3 + \dots + nx\ y^{n-1} + y^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

con i coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

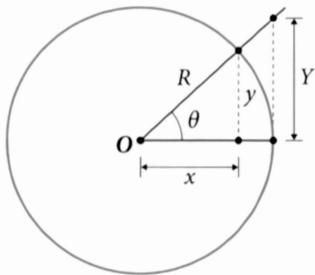
In particolare, nel caso in cui uno dei due addendi del binomio sia l'unità, si ha:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n$$

Serie geometrica

Data una successione del tipo $\alpha, \alpha r, \alpha r^2, \alpha r^3, \dots$, la somma dei primi $(N+1)$ termini per $r \neq 1$ vale:

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \dots + \alpha r^N \equiv \alpha \sum_{k=0}^N r^k = \alpha \left(\frac{1-r^{N+1}}{1-r} \right)$$



■ Funzioni trigonometriche

$$y = R \sin \theta$$

$$x = R \cos \theta$$

$$Y = R \operatorname{tg} \theta$$

$$y = x \operatorname{tg} \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Relazioni trigonometriche

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sin \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

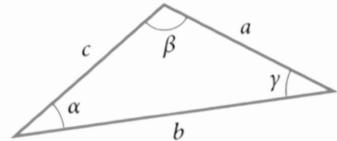
$$e^{y+ix} = e^y (\cos x + i \sin x)$$

Relazioni per triangoli

Per un triangolo qualsiasi valgono le relazioni:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{legge dei seni})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{relazione di Carnot})$$



Alcuni valori delle funzioni trigonometriche

Ricordando la relazione tra gradi e radianti $\theta(\text{rad}) = \theta(\text{gradi}) \cdot \frac{\pi}{180}$: $\theta(\text{gradi}) = 2\pi : 360^\circ$

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180} \theta(\text{gradi})$$

riportiamo alcuni valori delle funzioni trigonometriche:

Gradi	Rad	Seno	Tangente	Coseno
0	0	0	0	1,0000
10	0,1745	0,1736	0,1763	0,9848
20	0,3491	0,3420	0,3640	0,9397
30	0,5236	0,5000	0,5774	0,8660
40	0,6981	0,6428	0,8391	0,7660

Gradi	Rad	Seno	Tangente	Coseno
45	0,7854	0,7071	1,0000	0,7071
50	0,8727	0,7660	1,1918	0,6428
60	1,0472	0,8660	1,7321	0,5000
70	1,2217	0,9397	2,7475	0,3420
80	1,3963	0,9848	5,6713	0,1736
90	1,5708	1,0000	∞	0

■ Derivata delle funzioni più comuni

Nella tabella che segue raccogliamo le derivate $f'(x)$ di alcune fra le più semplici funzioni $f(x)$.

$$f(x) \quad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$y = x^a \quad y' = ax^{a-1} \quad a \text{ intero qualunque}$$

$$y = x^n \quad y' = nx^{n-1} \quad n \text{ intero qualunque}$$

$$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad y' = \frac{1}{n} x^{1/n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad n \text{ intero} > 0$$

$$y = x^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \quad y' = -\frac{1}{n} x^{-1/n-1} = -\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n+1}}} \quad n \text{ intero} > 0$$

$$y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$y = \sin x \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \cot x \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$y = e^x \quad y' = e^x$$

$$y = a^x \quad y' = a^x \ln a$$

$f(x)$

$f'(x) = \frac{df}{dx}$

$y = \arcsen x$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos x$

$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{artg} x$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \operatorname{arcotg} x$

$y' = \frac{-1}{1+x^2}$

$y = [f(x)]^n$

$y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$

$y' = [f(x)]^{\varphi(x)} \left[\frac{\varphi(x) \cdot f'(x)}{f(x)} + \varphi'(x) \ln f(x) \right] \text{ da cui:}$

$y = x^x$

$y' = x^x(1 + \ln x)$

■ Serie

Esiste una vasta classe di funzioni, dette *analitiche*, per le quali si verifica la seguente proprietà: se $y = f(x)$ è una tale funzione (che è anche dotata delle derivate di qualsiasi ordine), x_0 un punto dell'intervallo di definizione e Δx un incremento opportuno, vale *lo sviluppo in serie di Taylor*:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \cdot (\Delta x)^n$$

Diamo alcuni esempi di sviluppo in serie di Taylor con $x_0 = 0$, $\Delta x = x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = 2,7182\dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \text{ in radianti})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{(x \ln a)}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

■ Integrali

Integrali indefiniti

Ricordiamo che l'integrale indefinito (o primitiva) $F(x)$ di una funzione continua $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx + c \quad (\text{con } c \text{ costante arbitraria})$$

è definito come la funzione che soddisfa l'equazione

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad \text{ovvero} \quad dF = f(x) dx$$

In base a questa definizione, dalla tabella delle derivate presentate nel paragrafo dedicato, è possibile ricavare degli integrali immediati.

Integrali per sostituzione

Se $F(y)$ è primitiva di $f(y)$, cioè se

$$F(y) = \int f(y) dy$$

allora, operando la sostituzione $y \rightarrow y(x)$, si ha:

$$F[y(x)] = \int f[y(x)] y'(x) dx$$

dal momento che

$$dy = d[y(x)] = \frac{dy}{dx} dx = y' dx$$

La precedente relazione fornisce un metodo immediato per trovare la primitiva della funzione

$$g(x) = f[y(x)] \cdot y'(x)$$

se è nota la primitiva $F(y)$ della funzione $f(y)$.

Ad esempio, consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x dx$$

Ponendo $y(x) = \sin x$, si ha $y'(x) = \cos x$ e l'integrale considerato si può scrivere nella forma:

$$\int \sin^n x \cos x dx = \int y^n y' dx = \int y^n dy$$

che è risolto dalla funzione:

$$F(y) = \frac{1}{(n+1)} y^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sin^{(n+1)} x$$

Come altro esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \tan x dx$$

Operando la sostituzione $y = \cos x$, si ha $y'(x) = -\sin x$ e l'integrale considerato si può scrivere nella forma:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{dy}{y} = -\ln y = -\ln |\cos x|$$

Integrali per parti

Questa tecnica di integrazione si basa sulla seguente formula:

$$\int f(x)g'(x) dx = \int f dg = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

in cui il fattore $f(x)$ si dice fattore finito e la quantità $g'(x)dx$ fattore differenziale. Nella pratica questa tecnica si basa sulla capacità di individuare, in un'espressione integranda, un fattore finito e uno differenziale, in modo tale da ricondursi a integrali noti.

Ad esempio, calcoliamo l'integrale:

$$\int x^2 \ln x dx$$

in cui $\ln x$ può essere considerato fattore finito e $x^2 dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$ fattore differenziale. Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Come altro esempio, consideriamo l'integrale

$$\int x \sin x dx$$

in cui x può essere considerato fattore finito e $\sin x dx = -d(\cos x)$ fattore differenziale. Integrando per parti si ha:

$$\int x \sin x dx = - \int x d(\cos x) = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

Tabella di integrali indefiniti

Funzione presente nell'integrandi	Integrale indefinito
x^n	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ [n ≠ -1]
$\int \frac{dx}{x} = \ln x $	
$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ [n ≠ -1]	
$\int x^{p/2} dx = \frac{2}{p+2} x^{(p+2)/2}$	
$A = \alpha + \beta x$	$\int A^n dx = \frac{1}{\beta} \int A^n dA = \frac{A^{n+1}}{\beta(n+1)}$ [n ≠ -1]
$\int \frac{dx}{A^n} = -\frac{1}{(n-1)\beta A^{n-1}}$ [n ≠ -1]	
$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{\beta} \ln A $	
$\int \frac{x dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{1}{(n-2)A^{n-2}} + \frac{\alpha}{(n-1)A^{n-1}} \right]$	
$\int \frac{x dx}{A} = \frac{1}{\beta^2} [A - \alpha \ln A]$	
$\int \frac{x^2 dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^3} \left[-\frac{1}{(n-3)A^{n-3}} + \frac{2\alpha}{(n-2)A^{n-2}} - \frac{\alpha^2}{(n-1)A^{n-1}} \right]$	
$\int \frac{x^2 dx}{A} = \frac{1}{\beta^3} \left[\frac{A^2}{2} - 2\alpha A + \alpha^2 \ln A \right]$	
$\int \frac{x^3 dx}{A^n} = \frac{1}{\beta^4} \left[-\frac{1}{(n-4)A^{n-4}} + \frac{\alpha^3}{(n-1)A^{n-1}} - \frac{3\alpha^2}{(n-2)A^{n-2}} + \frac{3\alpha}{(n-3)A^{n-3}} \right]$	
$\int \frac{x^3 dx}{A} = \frac{1}{\beta^4} \left[\frac{A^3}{3} - \frac{3\alpha A^2}{2} + 3\alpha^2 A - \alpha^3 \ln A \right]$	
$\int \frac{dx}{xA} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left \frac{A}{x} \right $	

**Funzione
presente
nell'integrandi**

Integrale indefinito

$$A = \alpha + \beta x$$

$$\int \frac{dx}{xA^2} = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\ln \left| \frac{A}{x} \right| + \frac{\beta x}{A} \right]$$

$$\int \frac{dx}{xA^3} = -\frac{1}{\alpha^3} \left[\ln \left| \frac{A}{x} \right| + \frac{2\beta x}{A} - \frac{\beta^2 x^2}{2A^2} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{A}{x} - \beta \ln \left| \frac{A}{x} \right| \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{A}{x} - 2\beta \ln \left| \frac{A}{x} \right| - \frac{\beta^2 x}{A} \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A^3} = -\frac{1}{\alpha^4} \left[\frac{A}{x} - 3\beta \ln \left| \frac{A}{x} \right| - \frac{3\beta^2 x}{A} + \frac{\beta^3 x^2}{2A^2} \right]$$

**Binomi del tipo
 $(a+x)$, $(b+x)$
con $a \neq b$**

$$\int \frac{(a+x)}{(b+x)} dx = x + (a-b) \ln |b+x|$$

$$\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{(a-b)} \ln \left| \frac{b+x}{a+x} \right|$$

$$\int \frac{x dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{(a-b)} \left[a \ln(a+x) - b \ln(b+x) \right]$$

$$\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{1}{(b-a)(b+x)} + \frac{1}{(b-a)^2} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right|$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a+x)^2 (b+x)^2} &= -\frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{a+x}{b+x} \right| \end{aligned}$$

$$A = \alpha^2 + x^2$$

$$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{artg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{x}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{artg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{A^3} = \frac{x}{4\alpha^2 A^2} + \frac{3x}{8\alpha^4 A} + \frac{3}{8\alpha^5} \operatorname{artg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x dx}{A} = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + x^2)$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$A = \alpha^2 + x^2$$

$$\int \frac{x dx}{A^2} = -\frac{1}{2A}$$

$$\int \frac{x dx}{A^3} = -\frac{1}{4A^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{A} = x - \alpha \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{A^2} = -\frac{x}{2A} + \frac{1}{2\alpha} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{A} = \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^3}{2} \ln A$$

$$\int \frac{x^3 dx}{A^2} = \frac{x^2}{2A} - \frac{1}{2} \ln A$$

$$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\alpha^2} \ln \left(\frac{x^2}{\alpha^2 + x^2} \right)$$

$$\int \frac{dx}{xA^2} = \frac{1}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^4} \ln \frac{x^2}{A}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2 x} - \frac{1}{\alpha^3} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^4 x} - \frac{x}{2\alpha^4 A} - \frac{3}{2\alpha^5} \operatorname{artg} \frac{x}{\alpha}$$

$$A = \alpha^2 - x^2$$

$$\int \frac{dx}{A} = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{x}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{4\alpha^3} \ln \left| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{A^3} = \frac{x}{4\alpha^2 A^2} + \frac{3x}{8\alpha^4 A} + \frac{3}{16\alpha^5} \ln \left| \frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right|$$

$$\int \frac{x dx}{A} = -\frac{1}{2} \ln \left| \alpha^2 - x^2 \right|$$

$$\int \frac{x dx}{A^2} = \frac{1}{2A}$$

$$\int \frac{x dx}{A^3} = \frac{1}{4A^2}$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$A = \alpha^2 - x^2$$

$$\int \frac{x^2 dx}{A} = -x + \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha+x}{\alpha-x} \right|$$

$$\int \frac{x^2 dx}{A^2} = \frac{x}{2A} - \frac{1}{4\alpha} \ln \left| \frac{\alpha+x}{\alpha-x} \right|$$

$$\int \frac{x^3 dx}{A} = -\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \ln |A|$$

$$\int \frac{x^3 dx}{A^2} = \frac{\alpha^2}{2A} + \frac{1}{2} \ln |A|$$

$$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\alpha^2} + \ln \left| \frac{x^2}{\alpha^2 - x^2} \right|$$

$$\int \frac{dx}{xA^2} = \frac{1}{2\alpha^2 A} + \frac{1}{2\alpha^4} \ln \left| \frac{x^2}{A} \right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A} = -\frac{1}{\alpha^2 x} + \frac{1}{2\alpha^3} \ln \left| \frac{\alpha+x}{\alpha-x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{x^2 A^2} = -\frac{1}{\alpha^4 x} + \frac{x}{2\alpha^4 A} + \frac{3}{4\alpha^5} \ln \left| \frac{\alpha+x}{\alpha-x} \right|$$

$$A = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\int \frac{dx}{A} = \frac{2}{(4\alpha\gamma - \beta^2)^{1/2}} \operatorname{artg} \frac{2\alpha x + \beta}{(4\alpha\gamma - \beta^2)^{1/2}} \quad [4\alpha\gamma > \beta^2]$$

$$= \frac{1}{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}} \ln \left| \frac{2\alpha x + \beta - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}}{2\alpha x + \beta + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)^{1/2}} \right| \quad [4\alpha\gamma < \beta^2]$$

$$= -\frac{2}{2\alpha x + \beta} \quad [4\alpha\gamma = \beta^2]$$

$$\int \frac{dx}{A^2} = \frac{2\alpha x + \beta}{(4\alpha\gamma - \beta^2)A} + \frac{2\alpha}{4\alpha\gamma - \beta^2} \int \frac{dx}{A}$$

$$\int \frac{x dx}{A} = \frac{1}{2\alpha} \ln |A| - \frac{\beta}{2\alpha} \int \frac{dx}{A}$$

$$\int \frac{x dx}{A^2} = -\frac{\beta x + 2\gamma}{(4\alpha\gamma - \beta^2)A} - \frac{\beta}{4\alpha\gamma - \beta^2} \int \frac{dx}{A}$$

$$\int \frac{dx}{xA} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{x^2}{A} - \frac{\beta}{2\gamma} \int \frac{dx}{A}$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$r = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \int \frac{dx}{r^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{r}$$

$$\int \frac{dx}{r^5} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{r} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{r^3} \right]$$

$$\int \frac{x dx}{r} = r$$

$$\int \frac{x dx}{r^3} = -\frac{1}{r}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{r} = \frac{xr}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x+r)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{r} = \frac{r^3}{3} - a^2 r$$

$$\int \frac{dx}{xr} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right| = -\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right) \quad a > 0; r > 0$$

$$\int \frac{dx}{xr^3} = \frac{1}{a^2 r} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$$

$$\int r dx = \frac{xr}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+r)$$

$$\int r^3 dx = \frac{1}{4} xr^3 + \frac{3}{8} a^2 xr + \frac{3}{8} a^4 \ln(x+r)$$

$$\int xr dx = \frac{r^3}{3}$$

$$\int xr^3 dx = \frac{r^5}{5}$$

$$\int \frac{rdx}{x} = r - a \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$$

$$\int \frac{r^3 dx}{x} = \frac{r^3}{3} + a^2 r - a^3 \ln \left| \frac{a+r}{x} \right|$$

$$\int \frac{r dx}{x^2} = -\frac{r}{x} + \ln(x+r)$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$p = \sqrt{x^2 - a^2} \quad \int \frac{dx}{p} = \ln|x + p| \quad [x^2 > a^2]$$

$$\int \frac{dx}{p^3} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{p}$$

$$\int \frac{x dx}{p} = p$$

$$\int \frac{x dx}{p^3} = -\frac{1}{p}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{p} = \frac{xp}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + p|$$

$$\int \frac{dx}{xp} = \frac{1}{a} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \quad [x^2 > a^2]$$

$$\int \frac{dx}{xp^3} = -\frac{1}{a^2 p} - \frac{1}{a^3} \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$\int pdx = \frac{xp}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + p|$$

$$\int p^3 dx = \frac{1}{4} xp^3 - \frac{3}{8} a^2 xp + \frac{3}{8} a^4 \ln|x + p|$$

$$\int xpdx = \frac{p^3}{3}$$

$$\int xp^3 dx = \frac{p^5}{5}$$

$$\int \frac{p dx}{x} = p - a \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$\int \frac{p^3 dx}{x} = \frac{p^3}{3} - a^2 p + a^3 \arccos \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$\int \frac{p dx}{x^2} = -\frac{p}{x} + \ln|x + p|$$

$$m = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \int \frac{dx}{m} = \arcsen \frac{x}{a} \quad [x^2 < a^2]$$

$$\int \frac{dx}{m^3} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{m}$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$m = \sqrt{a^2 - x^2} \quad a > 0 \quad \int \frac{x dx}{m} = -m$$

$$\int \frac{x dx}{m^3} = \frac{1}{m}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{m} = -\frac{xm}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{xm} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+m}{x} \right| \quad [x^2 < a^2]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 m} = -\frac{m}{a^2 x}$$

$$\int m dx = \frac{xm}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}$$

$$\int m^3 dx = \frac{xm^3}{4} + \frac{3}{8} a^2 xm + \frac{3}{8} a^4 \arcsen \frac{x}{a}$$

$$\int xm dx = -\frac{m^3}{3}$$

$$\int xm^3 dx = -\frac{m^5}{5}$$

$$\int x^2 m dx = -\frac{xm^3}{4} + \frac{a^2 xm}{8} + \frac{a^4}{8} \arcsen \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{mdx}{x} = m - a \ln \left| \frac{a+m}{x} \right|$$

$$\int \frac{m^3 dx}{x} = \frac{m^3}{3} + a^2 m - a^3 \ln \left| \frac{a+m}{x} \right|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \sin \frac{x}{a} dx = -a \cos \frac{x}{a}$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x$$

$$\int x^2 \sin x dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$m = \sqrt{a^2 - x^2} \quad a > 0 \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int x \sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$$

$$\int x^2 \sin^2 x dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}$$

$$\int \sin^3 x dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

$$\int x \sin^3 x dx = \frac{x \cos 3x}{12} - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4} x \cos x + \frac{3}{4} \sin x$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} = x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1 - \sin x} = -x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

cosx

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \cos\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

**Funzione
presente
nell'integrandi**

Integrale indefinito

cosx

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} = x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{\cos x dx}{1 - \cos x} = -x - \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

senx e cosx

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{cotg} 2x$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\ln |\cos x|$$

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x} = -\sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$$

**Funzione
presente
nell'integrandi**

Integrale indefinito

senx e cosx

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x - x$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln |\sin x|$$

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x} = \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x - x$$

integrali definiti

$$\int \frac{\sin x dx}{1 \pm \cos x} = \mp \ln(1 \pm \cos x)$$

$$\int \frac{\cos x dx}{1 \pm \sin x} = \pm \ln(1 \pm \sin x)$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|$$

arcsenx

$$\int \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) dx = x \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) \right]^2 dx =$$

$$= x \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) \right]^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\int x \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) dx = x \operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int x \operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{arccos} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) dx = x \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int x \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{ax}{2}$$

**Funzione
presente
nell'integrando**

Integrale indefinito

$$e^x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\int xe^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right]$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right]$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x)$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$$

$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x)$$

$$\int e^{ax} \cos x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \cos x + \sin x)$$

$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \sin x - \cos x)$$

$$\int e^{ax} \cos x dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a \cos x + \sin x)$$

lnx

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Funzione presente nell'integrandi	Integrale indefinito
$\ln x$	$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
	$\int \ln(a+bx)dx = \frac{a+bx}{b} \ln(a+bx) - x$
	$\int \ln(x^2+a^2)dx = x \ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$

Integrali definiti

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e $F(x) = \int f(x)dx$ è la sua primitiva, risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b$$

Nell'integrazione per sostituzione, laddove si operi la sostituzione $x = \varphi(t)$ per cui

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

e si voglia l'integrale definito nell'intervallo $[a, b]$ della variabile x , occorre procedere come segue:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

dove la funzione $\psi(x)$ è l'inversa della $\varphi(t)$, cioè $t = \psi(x)$.

Riportiamo alcuni integrali definiti notevoli:

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \int_0^\pi \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\pi \quad \text{con } n \text{ intero}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n)} & n \text{ dispari} \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n)} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)dx = \int_0^\pi \cos(ax)\cos(bx)dx = 0 \quad \text{con } a \neq b$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0 \text{ dove} \quad \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h e^{-ax^2} dx$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0; n \text{ intero}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad a > 0; n \text{ intero}$$

■ Numeri complessi

Un numero complesso A è una coppia ordinata di numeri reali che di solito si scrive nella forma:

$$A \equiv a + ib$$

- Se $a = 0$ e $b = 0$ si ha il numero complesso nullo $N \equiv 0$.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$ il numero complesso si riduce al *numero reale* $A = a$; in particolare se $b = 0$ e $a = 1$, il numero complesso si riduce all'*unità reale* $U_R = 1$.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ il numero complesso $A = ib$ si dice *immaginario puro*; in particolare, se $a = 0$ e $b = 1$, il numero complesso si riduce all'*unità immaginaria* $U_i = i$.

Il numero complesso $A^* = a - ib$ viene detto *complesso coniugato* di $A = a + ib$.

Definizioni dell'algoritmo complesso

Dati due numeri complessi $A \equiv a + ib$ e $B \equiv c + id$ si definiscono le operazioni:

- *Somma algebrica* di due numeri complessi: $A \pm B = (a \pm c) + i(b \pm d)$
- *Prodotto* di due numeri complessi: $A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Casi particolari notevoli:

$$A^2 = a^2 - b^2 + i2ab \quad \text{quadrato di un generico numero complesso}$$

$$(\pm U_R)^2 = (\pm 1)^2 = 1 \quad \text{quadrato dell'unità reale}$$

$$(\pm U_i)^2 = (\pm i)^2 = -1 \quad \text{quadrato dell'unità immaginaria}$$

Il quadrato dell'unità immaginaria vale -1 ; e il quadrato di un qualunque numero ib immaginario puro è negativo: $(\pm ib)^2 = -b^2$. In effetti i numeri complessi sono stati introdotti per dare significato all'operazione di radice quadrata dei numeri reali negativi.

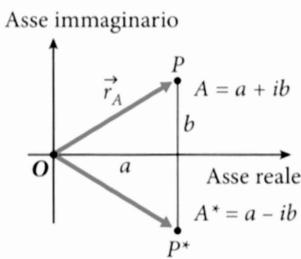
- *Reciproco* di un numero complesso:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}. \text{ Questa definizione comporta che } \frac{1}{A} \cdot A = 1.$$

- *Modulo* di un numero complesso:

$$|A| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Si verifica facilmente che $A \cdot A^* = |A|^2$: il modulo quadrato di un numero complesso è pari al prodotto di esso per il suo complesso coniugato.



Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Come i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta (asse reale), così i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano (piano complesso). Il punto P corrispondente al numero $A \equiv a + ib$ è quello di coordinate cartesiane a e b rispettivamente.

L'asse delle ascisse di questo piano è detto *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

Il modulo $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ di A rappresenta il modulo r_A del vettore posizione \vec{r}_A del suo punto rappresentativo P . Il complesso coniugato A^* di A è rappresentato dal punto P^* simmetrico a P rispetto all'asse reale.

È immediato verificare che la somma $S = A + B$ dei numeri complessi A e B è rappresentata dal punto il cui vettore posizione \vec{r}_S è somma vettoriale dei vettori posizione \vec{r}_A e \vec{r}_B di A e B rispettivamente.

L'interpretazione geometrica del prodotto $A \cdot B$ è più immediata nella rappresentazione polare che introduciamo qui di seguito.

Rappresentazione polare dei numeri complessi

Il numero complesso $A \equiv a + ib$ può essere espresso, oltre che tramite le componenti cartesiane a e b del suo vettore posizione \vec{r}_A nel piano complesso, anche tramite le sue coordinate polari r_A, θ tali che:

$$\begin{cases} a = r_A \cos \theta \\ b = r_A \sin \theta \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} r_A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} \end{cases}$$

per cui:

$$A \equiv (a + ib) \equiv r_A (\cos \theta + i \sin \theta)$$

L'anomalia θ è definita a meno di multipli interi di 2π .

Dati due numeri complessi

$$A \equiv (a + ib) = r_A (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{e} \quad B \equiv (c + id) = r_B (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

si verifica immediatamente che il prodotto

$$P = A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv r_p (\cos \gamma + i \sin \gamma)$$

ha come coordinate polari r_p, γ rispettivamente il prodotto dei raggi r_A ed r_B e la somma degli angoli θ e φ dei fattori:

$$\begin{aligned} r_p &= r_A r_B \\ \gamma &= \theta + \varphi \end{aligned}$$

per cui:

$$A \cdot B \equiv r_A r_B (\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

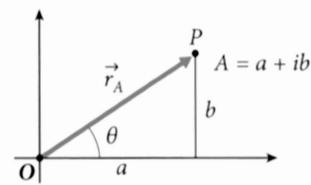
Ciò considerato, la rappresentazione polare consente di calcolare e di esprimere in termini compatti le potenze n -esime e le radici n -esime dei numeri complessi.

Se $A \equiv (a + ib) = r_A (\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha infatti:

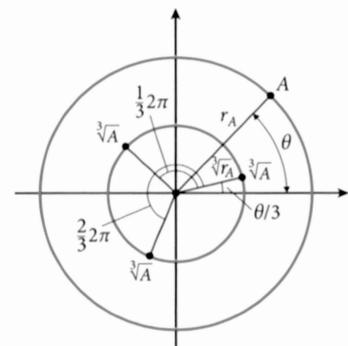
$$A^n = r_A^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r_A} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n} 2\pi \right) \right] \quad (k \text{ intero})$$

Questa espressione ci mostra che ogni numero complesso A ammette n radici n -esi-



Caso $n = 3$



me fra di loro distinte (corrispondenti a $k = 0, 1, \dots, n - 1$), la cui interpretazione geometrica (nel caso $n = 3$) risulta immediata dalla figura.

Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi

L'esponenziale $e^{i\theta}$ a esponente immaginario $i\theta$ (θ reale) è definito dalla relazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Per conseguenza, il numero complesso $A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\sin\theta)$ può essere scritto nella forma compatta:

$$A = r_A e^{i\theta}$$

Si verifica immediatamente che tutto l'algoritmo relativo all'esponenziale $e^{i\theta}$ a esponente immaginario mantiene le stesse proprietà rispetto al caso di esponente reale. Ad esempio, poiché si può trattare i come una costante, si ha:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} &= e^{i(\theta+\varphi)} \\ \frac{d}{dx} e^{ix} &= ie^{ix} \end{aligned}$$

Sono inoltre di immediata verifica le seguenti relazioni (dette *formule di Eulero*) già anticipate nel paragrafo dedicato alle relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

■ Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è una relazione tra una variabile indipendente t , una variabile dipendente y e una o più derivate di y rispetto a t .

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della più alta derivata che vi compare.

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le possibili funzioni $y = y(t)$ che soddisfano l'equazione data.

Considereremo nel seguito soltanto alcune semplici equazioni differenziali di frequente uso in meccanica elementare.

Equazioni del primo ordine a quadratura immediata

$$\frac{dy}{dx} = f(t)$$

soluzione:

$$y = \int f(t) dt + c$$

dove c è una costante arbitraria.

Equazioni del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y)$$

da cui separando le variabili (y al primo membro; t al secondo):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt$$

che può essere risolta per quadratura, cioè integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt$$

Ad esempio, l'equazione

$$y \frac{dy}{dt} = a - by^2$$

si risolve separando la variabile y al primo membro e la variabile indipendente t al secondo:

$$\frac{ydy}{a - by^2} = dt$$

da cui:

$$-\frac{1}{2b} \frac{d(a - by^2)}{(a - by^2)} = dt$$

e integrando:

$$-\frac{1}{2b} \ln(a - by^2) = t + c$$

Equazioni lineari del primo ordine

$$\frac{dy}{dt} + fy = g$$

dove f e g sono funzioni di t o costanti.

Si moltiplicano ambo i membri dell'equazione per l'esponenziale $e^{f(t)}$ e si integra. Si verifica immediatamente che:

$$\frac{d}{dt} [ye^{f(t)}] = \frac{dy}{dt}e^{f(t)} + yfe^{f(t)} = e^{f(t)} \left[\frac{dy}{dt} + fy \right]$$

e quindi:

$$ye^{f(t)} = \int e^{f(t)} g dt + c$$

Ad esempio, consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + ay = bt \text{ con } a \text{ e } b \text{ costanti}$$

Si può integrare moltiplicando ambo i membri per $e^{at} dt$ e integrando:

$$ye^{at} = b \int e^{at} t dt + c = be^{at} \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} \right) + c$$

da cui:

$$y = \frac{b}{a} \left(t - \frac{1}{a} \right) + ce^{-at}$$

Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + by = 0 \text{ con } a \text{ e } b \text{ costanti reali}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y = e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2 + 2am + b = 0 \text{ (equazione algebrica associata)}$$

Dette m_1 ed m_2 le due soluzioni dell'equazione algebrica, la soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie (tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale).

Poiché

$$m_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

si possono avere tre possibilità:

1. $a^2 > b$, e quindi due radici reali dell'equazione algebrica;
2. $a^2 = b$, e quindi una sola radice reale; la soluzione è in questo caso:

$$y(t) = e^{-at} (c_1 + c_2)$$

3. $a^2 < b$, e quindi radici complesse. Detto $a^2 - b = -n^2$, si ha:

$$y(t) = e^{-at} (c_1 e^{int} + c_2 e^{-int})$$

ovvero:

$$y(t) = e^{-at} (A \cos nt + B \sin nt)$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.

Se manca il termine contenente la derivata prima ($a = 0$), l'equazione si riduce alla forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0$$

Se $b > 0$, si pone di solito $b = \omega^2$, e quindi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

la cui soluzione è:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \varphi)$$

dove C e φ sono costanti arbitrarie.

Equazioni del secondo ordine di tipo particolare

Salvo il caso in cui l'equazione sia esprimibile solo in forma implicita, la più generale equazione differenziale del secondo ordine è del tipo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

dove f è una qualunque funzione. Non esistono tecniche elementari di tipo generale per risolvere questa equazione; tuttavia possono essere trattate semplicemente alcune sue forme particolari.

a. Equazione del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t)$$

Questa equazione si risolve quadrando due volte:

$$\frac{dy}{dt} = F(t) + c_1 \text{ dove } F(t) = \int f(t) dt$$

$$y = \int [F(t) + c_1] dt + c_2$$

b. Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, \frac{dy}{dt}\right)$$

Si pone:

$$\frac{dy}{dt} = x(t)$$

e dunque:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt}$$

L'equazione differenziale diviene:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

ed è così ricondotta a un'equazione differenziale del primo ordine.

c. Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(y)$$

Ponendo

$$\frac{dy}{dt} = x(t)$$

si ha:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x$$

Sostituendo nella nostra equazione, questa diviene:

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y)$$

che rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

Separando e integrando, si ha:

$$\frac{1}{2}x^2 = F(y) + c_1 \text{ dove } F(y) = \int f(y) dy$$

da cui:

$$x = \frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{2F(y) + 2c_1}$$

che rappresenta anch'essa un'equazione del primo ordine a variabili separabili, ed è dunque immediatamente ricondotta alla quadratura.

d. Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Mediante la sostituzione

$$\frac{dy}{dt} = x(t)$$

si ha:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x$$

e dunque:

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y, x)$$



L'equazione del secondo ordine è così ricondotta a una del primo ordine.

