

**ADRIANO ALIPPI ANDREA BETTUCCI MASSIMO GERMANO**

# **FISICA GENERALE**

**Esercizi risolti e guida allo svolgimento  
con richiami di teoria**



**ISBN 978-88-9385-017-9**

*Prima edizione: Ottobre 2012*

*Seconda edizione: Febbraio 2017*

Responsabile produzione: *Alessandro Parenti*

Redazione: *Giancarla Panigali e Carlotta Lenzi*

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano

e-mail: autorizzazioni@clearedi.org - sito: <http://www.clearedi.org>.



40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136  
[www.editrice-esculapio.it](http://www.editrice-esculapio.it)

# Indice

<b>Premessa</b>	<b>xii</b>
<b>I CONCETTI</b>	<b>1</b>
<b>1 Il metodo</b>	<b>3</b>
1.1 La fisica ‘intuita’ . . . . .	3
1.2 Caratteristiche della fisica ‘intuita’ e della conoscenza scientifica . . . . .	5
1.3 L’osservazione in fisica: sistemi fisici e stati fisici di un sistema . . . . .	6
1.3.1 Le grandezze fisiche: misura e definizione operativa . . . . .	9
1.4 Il metodo sperimentale . . . . .	13
1.5 Il linguaggio della matematica . . . . .	15
<b>2 I temi della fisica generale</b>	<b>23</b>
2.1 La meccanica . . . . .	23
2.1.1 I sistemi di riferimento per le leggi della dinamica . . . . .	24
2.1.2 Il modello del punto materiale . . . . .	29
2.1.3 Il modello del corpo rigido . . . . .	33
2.2 Strutture materiali e stati fisici della materia . . . . .	36
2.2.1 Le equazioni di stato . . . . .	36
2.2.2 Solidi . . . . .	38
2.2.3 I liquidi . . . . .	41
2.2.4 Gli aeriformi . . . . .	43
2.3 Il concetto di campo in fisica. I campi conservativi . . . . .	46
2.4 Le oscillazioni armoniche . . . . .	49
2.5 Le onde . . . . .	62
2.6 Saturazione . . . . .	67
2.7 Isteresi . . . . .	72

2.8 Biforcazione e bistabilità . . . . .	76
<b>3 Funzioni, operatori e dintorni</b>	<b>81</b>
3.1 Prodotto scalare e prodotto vettore . . . . .	81
3.2 Il fattoriale $n!$ . . . . .	86
3.3 L'esponenziale e il logaritmo . . . . .	90
3.3.1 Caduta di un grave nell'aria . . . . .	93
3.3.2 Assorbimento di un'onda . . . . .	94
3.3.3 Decadimento radioattivo, svuotamento di un recipiente, scarica di un condensatore, interessi in banca . . . . .	95
3.4 Derivazione e integrazione . . . . .	102
3.4.1 Derivazione . . . . .	102
3.4.2 Integrazione . . . . .	105
3.5 Le derivate parziali e l'operatore nabla $\nabla$ . . . . .	107
3.6 Autovalori . . . . .	116
3.7 Le condizioni al contorno . . . . .	122
<b>II ESERCIZI</b>	<b>127</b>
<b>1 Come si fanno gli esercizi</b>	<b>129</b>
1.1 Introduzione . . . . .	129
1.2 Cinematica . . . . .	131
1.3 Dinamica del punto . . . . .	134
1.3.1 Moto di punti su un piano inclinato . . . . .	134
1.3.2 Energia potenziale di una molla . . . . .	143
1.4 Dinamica del corpo rigido . . . . .	145
1.4.1 Conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto . . . . .	149
1.5 Statica dei fluidi . . . . .	153
1.6 Termodinamica . . . . .	155
1.6.1 Primo principio della termodinamica . . . . .	155
1.6.2 Secondo principio della termodinamica . . . . .	159
1.7 Elettrostatica . . . . .	163
1.7.1 Teorema di Gauss . . . . .	163
1.7.2 Il campo elettrico in casi di simmetria sferica . . . . .	164
1.7.3 Il campo elettrico in casi con altre simmetrie di distribuzione di carica . . . . .	167
1.7.4 Problemi riconducibili a casi con distribuzioni simmetriche .	168
1.8 Magnetismo . . . . .	171
1.8.1 Forza di Lorentz - Induzione elettromagnetica . . . . .	171

<b>2 Cinematica del punto materiale</b>	<b>175</b>
2.1 Esercizio guida – Moti rettilinei uniformi . . . . .	175
2.2 Esercizio guida – Moti uniformemente accelerati . . . . .	183
2.3 Domande di verifica . . . . .	191
2.4 Esercizi . . . . .	191
2.5 Soluzioni degli esercizi . . . . .	194
<b>3 Dinamica del punto materiale</b>	<b>201</b>
3.1 Esercizio guida – Forze elastiche . . . . .	201
3.2 Esercizio guida – Moti periodici e oscillatori . . . . .	208
3.3 Esercizio guida – Sistemi di riferimento: inerziali e non, forze centrifughe . . . . .	213
3.4 Esercizio guida – Energia potenziale gravitazionale . . . . .	219
3.5 Domande di verifica . . . . .	225
3.6 Esercizi . . . . .	225
3.7 Soluzioni degli esercizi . . . . .	233
<b>4 Dinamica dei sistemi di punti materiali</b>	<b>251</b>
4.1 Esercizio guida – Urti centrali . . . . .	251
4.2 Domande di verifica . . . . .	261
4.3 Esercizi . . . . .	262
4.4 Soluzioni degli esercizi . . . . .	264
<b>5 Corpo rigido</b>	<b>271</b>
5.1 Esercizio guida – Forze di attrito nella statica del corpo rigido . . . . .	271
5.2 Esercizio guida – Masse sospese a funi su carrucole . . . . .	279
5.3 Esercizio guida – Rotolamento . . . . .	285
5.4 Domande di verifica . . . . .	294
5.5 Esercizi . . . . .	294
5.6 Soluzioni degli esercizi . . . . .	298
<b>6 Fluidi</b>	<b>307</b>
6.1 Esercizio guida – Forza di Archimede . . . . .	307
6.2 Esercizio guida – Dinamica dei fluidi . . . . .	312
6.3 Domande di verifica . . . . .	316
6.4 Esercizi . . . . .	317
6.5 Soluzioni degli esercizi . . . . .	321
<b>7 Primo principio della termodinamica</b>	<b>329</b>
7.1 Esercizio guida – Calorimetria . . . . .	329
7.2 Esercizio guida – Trasformazioni politropiche . . . . .	334

7.3 Domande di verifica . . . . .	338
7.4 Esercizi . . . . .	339
7.5 Soluzioni degli esercizi . . . . .	341
<b>8 Secondo principio della termodinamica</b>	<b>347</b>
8.1 Esercizio guida – Cicli termodinamici . . . . .	347
8.2 Esercizio guida – Variazioni di entropia . . . . .	354
8.3 Domande di verifica . . . . .	359
8.4 Esercizi . . . . .	359
8.5 Soluzioni degli esercizi . . . . .	363
<b>9 Sistemi di cariche</b>	<b>373</b>
9.1 Esercizio guida – Sistemi di cariche puntiformi . . . . .	373
9.2 Esercizio guida – Potenziale elettrico da distribuzioni spaziali di cariche . . . . .	380
9.3 Domande di verifica . . . . .	386
9.4 Esercizi . . . . .	387
9.5 Soluzioni degli esercizi . . . . .	393
<b>10 Capacità elettrica e dielettrici</b>	<b>411</b>
10.1 Esercizio guida – Sistemi di condensatori . . . . .	411
10.2 Esercizio guida – Energia immagazzinata nei condensatori . . . . .	418
10.3 Esercizio guida – Dielettrici . . . . .	425
10.4 Domande di verifica . . . . .	432
10.5 Esercizi . . . . .	433
10.6 Soluzioni degli esercizi . . . . .	438
<b>11 Correnti elettriche</b>	<b>451</b>
11.1 Esercizio guida – Leggi di Kirchhoff . . . . .	451
11.2 Esercizio guida – Carica e scarica di un condensatore . . . . .	455
11.3 Esercizio guida – Corrente di spostamento . . . . .	460
11.4 Domande di verifica . . . . .	466
11.5 Esercizi . . . . .	467
11.6 Soluzioni degli esercizi . . . . .	469
<b>12 Campo di induzione magnetica</b>	<b>477</b>
12.1 Esercizio guida – Campo di induzione $\mathbf{B}$ generato da correnti continue . . . . .	477
12.2 Esercizio guida – Solenoidi . . . . .	481
12.3 Esercizio guida – Forza di Lorentz . . . . .	483
12.4 Esercizio guida – Seconda legge di Laplace . . . . .	487
12.5 Domande di verifica . . . . .	495

12.6 Esercizi . . . . .	495
12.7 Soluzioni degli esercizi . . . . .	502
<b>13 Induzione elettromagnetica</b>	<b>519</b>
13.1 Esercizio guida – Induzione da moti relativi . . . . .	519
13.2 Esercizio guida – Induzione da variazioni di corrente . . . . .	524
13.3 Esercizio guida – Auto e mutua induzione . . . . .	529
13.4 Domande di verifica . . . . .	533
13.5 Esercizi . . . . .	534
13.6 Soluzioni degli esercizi . . . . .	539
<b>14 Ottica</b>	<b>551</b>
14.1 Esercizio guida – Specchi . . . . .	551
14.2 Esercizio guida – Lenti . . . . .	556
14.3 Esercizio guida – Diffrazione . . . . .	560
14.4 Esercizio guida – Interferenza . . . . .	565
14.5 Domande di verifica . . . . .	569
14.6 Esercizi . . . . .	570
14.7 Soluzioni degli esercizi . . . . .	573



# Premessa

Nasce questo volume al seguito di un precedente testo, anch'esso di carattere didattico, nel quale la conoscenza della fisica fondamentale – o generale, come viene detta nei corsi di insegnamento universitario – era presupposta nel lettore e al tempo stesso a questi riproposta. Si cita il testo precedente perché è premessa causale del presente, ma anche per suggerirlo – essendo disponibile in rete ai lettori – come estensione dei contenuti su aspetti e fenomeni che tutti si riconducono ai problemi della fisica generale.

Dichiarato fine di quel testo era la speranza di formare un rapporto costruttivo e quasi amichevole tra le leggi che governano i fenomeni fisici e l'osservatore, meglio tra la fisica stessa e lo studente, disvelando la realtà sita alla base di quella fisica ‘intuita’, per la quale interagiamo nel mondo ottimizzando le nostre reazioni agli accadimenti esterni. Così, siamo in grado di evitare un oggetto in moto verso di noi, forzare l’apertura di un contenitore facendo leva nel punto più opportuno, porci sul lato all’ombra di un sentiero in una giornata afosa ecc. Una relativamente breve serie di problemi o ‘esercizi’ di fisica pagava il giusto pegno a chi avesse voluto utilizzare il testo per la preparazione d’esame.

Questo volume sposta più direttamente la mira verso quest’ultimo bersaglio, non volendo tuttavia mancare alla vocazione iniziale di costruire dal di dentro dei fenomeni la comprensione degli stessi. Così, mentre si amplifica notevolmente la serie dei così detti esercizi di esame, si anticipa a ciascuna sezione in cui essi sono raccolti una breve serie di esercizi guida e di domande, che servono a familiarizzarsi col contenuto di quelli e che si suggerisce allo studente di seguire prima di cimentarsi cogli altri.

Il contenuto è suddiviso in capitoli, secondo una ripartizione più o meno codificata dei programmi d’esame, ai quali è premesso un primo capitolo di suggerimento su

come si fanno gli esercizi e ai quali fa seguito un capitolo, riportato come Appendice, che raccoglie temi comuni a più argomenti diversi, che si affrontano con una medesima metodologia a dimostrazione dell'omogeneità e unicità dell'approccio scientifico.

È cosa nota che la soluzione di un esercizio sia il momento più duro della pratica d'esame, anche quando l'esercizio sia scelto tra i più semplici di una collezione. Al cimentarsi con le prime prove sembra quasi che lo studio della teoria sia altra cosa rispetto all'applicazione pratica delle leggi. Di fatto, come nell'apprendimento di una lingua straniera non basta la conoscenza delle regole e dei significati terminologici per comprendere le poche battute scambiate in un film, ma occorre la pratica e la ripetizione del sentire per aprire le porte alla comprensione del parlato, così in fisica la conoscenza della teoria non è un'automatica carta di credito per la risoluzione degli esercizi.

Cosa occorre, dunque, per passare a questo secondo livello? Certamente la pratica ripetitiva dei problemi è un valido ausilio, ma l'intelligenza nel farli e nel selezionarli vale assai più di una meccanica ripetizione di prove su tipologie simili. Non vi è regola generale per risolvere un esercizio di fisica; occorre piuttosto costruire una mentalità per affrontare i problemi: questa soltanto può considerarsi la 'regola generale' o il 'modo univoco' dell'approccio.

A questo fine, ci è sembrato non solo opportuno, ma obbligatorio, far precedere in ogni capitolo alla serie degli esercizi d'esame alcuni esercizi guida. Questi – dopo una breve scheda riassuntiva della teoria necessaria – sono riportati in modo dialogante, senza valori numerici e talvolta anche senza una possibile soluzione: a un testo iniziale, riportato in corsivo, seguono possibili varianti e vengono anche lasciate allo studente, direttamente o implicitamente, possibili estensioni. Questa modalità di approccio deve indurre lo studente a crearsi egli stesso le varianti, a sperimentare su quelle le possibili vie di soluzione o anche solo a individuare i parametri necessari perché un problema ammetta soluzione. La matematica – più spesso l'algebra elementare – può talvolta sembrare inutilmente noiosa o difficile; non è questo il punto su cui fermarsi, lo studente deve abituarsi a creare la soluzione quasi prescindendo dalla sua realizzazione pratica. Viene da ripetere l'adagio latino: *rem tene, verba sequantur*, a voler indicare che bisogna trovare la strada (la cosa, *rem*), indipendentemente dai passi (le parole, *verba*).

Una breve collezione di domande d'esame, che funge da prova di verifica della

---

conoscenza degli argomenti, precede una serie di esercizi d'esame, la cui soluzione è riportata in coda a ogni capitolo, piuttosto che a seguito del singolo esercizio, così da invitare lo studente a cimentarsi egli stesso con la prova prima di vederne a lato la soluzione. Siamo ben consci che la quantità di problemi riportati, sia negli esercizi guida sia in quelli d'esame, satura qualunque volontà di preparazione; tuttavia, pur presupponendo una limitata quantità di approcci ai singoli problemi, lo studente è invitato a recepire il metodo, la strada per creare assuefazione con la risoluzione: leggere e comprendere il testo, osservandone le possibili implicazioni e varianti e far uso della matematica per dare corpo alla logica del processo risolutivo.



# **Parte I**

# **CONCETTI**



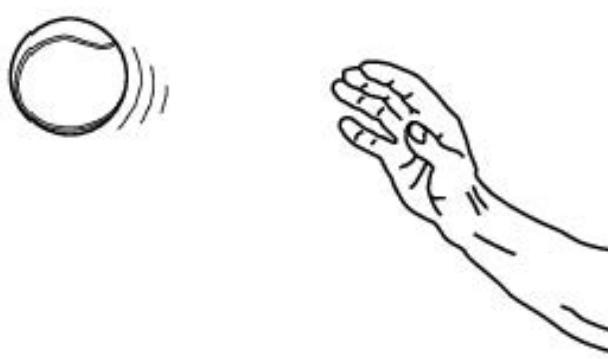
# Il metodo

## 1.1 La fisica ‘intuita’

“Ciascuno di noi ha una qualche familiarità con la fisica”, si è detto nel cenno introduttivo, per ricordarci di esperienze, leggi o problemi incontrati nei nostri curriculi di scuola. Ma, usata la frase per smuovere la nostra storia dalla sua difficile partenza definitoria, possiamo darle un altro significato e renderla, in altro modo, interrogativa: “Conosciamo la fisica?”. Verrebbe fatto di rispondere in modo articolato: ponendo limiti, indicando sofferenze, individuando livelli o momenti temporali ecc. Precisiamo allora la domanda chiedendo di risolvere un problema specifico, quello del moto di un grave, ad esempio: il tempo di volo di una palla lanciata con una certa velocità da un giocatore a un altro, posti in determinate posizioni. Problema di dinamica elementare, risolubile con qualche difficoltà dagli studenti già pronti per l’esame. Eppure, al lancio di una palla da parte di un giocatore, chiunque di noi sarebbe in grado di afferrarla al volo, avendo non soltanto computato o avuto conoscenza del tempo di volo, ma computato o avuto conoscenza della traiettoria, tenuto in debito conto magari anche l’effetto del rallentamento della palla nell’aria e il moto di questa rispetto al terreno, se c’è un po’ di vento, e l’eventuale rotazione della palla su sé stessa, che ne allontana la traiettoria dalla condizione di giacenza su un piano. Tutti fenomeni che superano largamente le capacità risolutive dello studente medio, che pure ha già studiato la meccanica, e che invece ciascuno di noi, senza nessuna formazione scientifica, conosce in modo apparentemente aprioristico, si direbbe, quasi

intuitivo. Talvolta piace chiamare questo tipo di conoscenza del reale come una fisica ‘ingenua’ o addirittura ‘innata’; a noi sembra più corretto chiamarla ‘intuita’, visto il presumibile modo in cui si è formata in noi. Siamo anche in grado di risolvere ‘intuitivamente’ problemi più ardui, se solo pensiamo alla difficoltà predittiva della velocità da imprimere ancora a una palla, per esempio, per tirarla nel cesto della pallacanestro o per batterla al di sopra della rete di un campo da tennis e farla cadere nel rettangolo di gioco al di là di questa.

Esempi tratti da attività sportive, ma che potremmo facilmente ridurre a esempi comuni: scendere o salire le scale mantenendoci in equilibrio, versare l’acqua in un bicchiere, battere un chiodo col martello e cento altri ancora, non solo tratti dalla dinamica, ma anche dalla termodinamica o dall’acustica o dall’ottica: soffiamo istintivamente sul cucchiaio di una minestra calda per raffreddarla, senza conoscere la convezione o la conduzione termiche, calibriamo l’intensità della nostra voce per una chiamata a seconda della distanza del nostro interlocutore o del livello di rumore presente nell’ambiente, senza conoscere le leggi della propagazione del suono o il modo di sommarsi delle intensità acustiche. L’esperienza ce l’insegna, un’esperienza di fatti che riguardano il procedere dei fenomeni naturali, ma che stenteremmo ad accreditare a una vera conoscenza scientifica. Le connessioni tra le cellule neuronali del nostro cervello si sono costituite sulla base delle informazioni che sono pervenute dai nostri sensi nel tempo in modo tale da riproporre un certo schema quando i neuroni vengono stimolati in un certo modo e, quindi, da fornire una previsione o un anticipo di quanto potrà accadere in certe circostanze. La conoscenza scientifica sembra essere diversa: ciò che è stata esperienza passata non diviene *intuito* o istinto del soggetto in interazione con l’ambiente, ma si specifica in *legge* e la soluzione del problema in esame si deriva da questa legge, nella quale dobbiamo entrare con i dati specifici. Anche nella conoscenza che basiamo sull’esperienza entriamo con dei dati: le posizioni, le velocità, le temperature,



**Fig. 1.1.** Presa d’istinto al volo di una palla

l'intensità del suono ecc., ma di queste non abbiamo coscienza, rientrano piuttosto in un quadro complessivo del problema, un “immagine globale, che il cervello elabora secondo un preciso schema di uscita.

## 1.2 Caratteristiche della fisica ‘intuita’ e della conoscenza scientifica

La conoscenza scientifica è più schematica, suddivide e separa i dati, li astrae in una struttura logica e li ricombina in un modo deterministico per trovare le soluzioni: è meno diretta, più lenta nelle sue soluzioni, richiede ‘istruzioni’ per l’uso. Tuttavia, può portare lontano: là dove i sensi o l’esperienza non trovano più l’oggetto del sentire o del conoscere, la scienza continua a costruire. Problemi di grande scala o di piccola scala – la cosmologia e la struttura della materia, per esempio – ci sarebbero del tutto sconosciuti se non si fosse scelta la strada della conoscenza scientifica; ma, più banalmente, i fenomeni dell’elettromagnetismo, di gran parte della termodinamica e dell’ottica, della fluidodinamica, per citare solo campi di studio della fisica generale noti allo studente universitario dei corsi di base, sono al di là dei confini dei nostri sensi. Un dato emerge storicamente: le conoscenze scientifiche si costruiscono e si accrescono sulle precedenti, sono codificabili, si possono insegnare e trasmettere, non sono personali, e si sviluppano e progrediscono nel tempo. Quasi all’opposto, la conoscenza diretta è personale e si migliora con l’esperienza del singolo, con l’allenamento alla prova, ma non si insegna: è ‘istintiva’ – si dice – confondendo o sovrapponendo parzialmente quanto è già predisposto nel sistema biologico dell’individuo per l’acquisizione della conoscenza (istinto) con quello che viene realmente acquisito per esperienze successive (esperienza). Le caratteristiche di questa conoscenza sono certo più adatte per la sopravvivenza biologica dell’individuo, che deve conformarsi all’ambiente in modo diretto e immediato, ma limitatamente alle interazioni che lo sfidano nell’ambiente in cui opera: i sensi ricevono le informazioni dall’ambiente, il cervello elabora la previsione e predisponde l’organismo alla risposta. Questa conoscenza è grandemente finalizzata alla vita dell’individuo ed è ottimizzata per la sua conservazione. In questa visione evolutiva, viene da dire che con essa si integra la conoscenza scientifica, la quale, al contrario, potendosi scambiare da individuo a individuo in quanto costituita in un insieme a sé stante, esterno al singolo e a disposizione di tutti, si finalizza alla vita della specie e alla sua conservazione. Lo sviluppo tecnologico che ha seguito quello scientifico è un evidente segno di questa apparente

finalizzazione. Ma la conoscenza scientifica non nasce finalizzata: la ricerca è libera nelle scelte dei suoi temi e schiava unicamente della natura e delle sue leggi. Con il desiderio di ricercare queste in quella e l'umiltà di porre le giuste domande, la ricerca ha allargato progressivamente i confini della conoscenza scientifica. Questo 'progresso' ci ha permesso di estendere le conoscenze su campi inimmaginabili ai nostri sensi: l'individuazione delle forze fondamentali della natura, o addirittura la loro unificazione, cioè la loro riconnessione a una stessa origine comune forse valida nei primi istanti di espansione dell'Universo, sono oggetti di studio in nessun modo ricollegabili alle nostre esperienze quotidiane: la scienza integra l'esperienza, da cui ha tuttavia mosso i primi passi.

Come si costruisce, allora, questa conoscenza scientifica, così poco intuitiva ma sempre fondata sui dati dei sensi? Quali sono i meccanismi di osservazione e di verifica delle sue scoperte? Quale, in una parola, il 'metodo' seguito dalla scienza per costruire conoscenza? Senza pretesa di trattare contenuti fuori dallo stretto campo di studio della fisica, cercheremo di trovare una risposta implicita a queste domande, esaminando il modo in cui si studiano gli argomenti e si costruiscono le teorie, piuttosto che al contenuto di queste.

### 1.3 L'osservazione in fisica: sistemi fisici e stati fisici di un sistema

In prima istanza, noi percepiamo l'evidenza di una realtà esterna attraverso i nostri sensi: vediamo, udiamo, tocchiamo, sentiamo variamente oggetti, cose e situazioni che ci appaiono altro da noi, sui quali possiamo intervenire, ma che hanno un comportamento indipendente dalla nostra volontà e che in questo senso riteniamo costituiscano una realtà a noi esterna e oggettiva. Ci si potrà chiedere se esista davvero o se sia una nostra percezione o se altri la percepiscano allo stesso nostro modo ma, nei limiti che qui ci possono interessare, se tutte le percezioni che proviamo, incluse quelle che ci vengono restituite da altri soggetti in rapporto alle stesse fenomenologie, sono coerenti con un'ipotesi di realtà oggettiva, questo è sufficiente per accettarla come tale e costruirci sopra una conoscenza scientifica. La sola esistenza di questa realtà, tuttavia, non basterebbe per poterci costruire sopra una conoscenza scientifica; c'è una caratteristica di questa realtà che a questo fine è imprescindibile: essa è, o almeno ci appare sempre, assolutamente ripetibile, cioè nelle medesime condizioni di partenza, i fenomeni si ripetono assolutamente nello stesso modo. Quest'affirma-

zione, che appare scontata a chi ha già mosso i primi passi nella fisica, è alla base di ogni possibile ricerca di una legge naturale; essa è soltanto un altro modo di affermare che in natura vige un rigoroso determinismo, o che almeno la nostra fisica, cioè la descrizione dei fenomeni naturali che riportiamo coi nostri testi, è deterministica. Ma anche per affermare ciò, è già necessario che si sia potuto entrare in rapporto più stretto col mondo naturale: cosa mai, infatti, vorrà dire che i fenomeni sono gli stessi, se non abbiamo un modo per confrontarli, per rapportare una situazione che osserviamo ora con un'altra che incontreremo domani o che andiamo a osservare altrove? Questo modo di ragionare e di procedere può di certo sembrare un ozioso perditempo o essere classificato nei limiti di un'assurda pignoleria; ma è opportuno soffermarci su questi punti, perché essi costituiscono il linguaggio proprio di chi fa scienza ed è bene che sin dalle premesse si prenda dimestichezza col linguaggio.

Dunque, l'osservazione scientifica dei fenomeni richiede di poterli definire compiutamente per tutte le caratteristiche che vi rileviamo; diremo che due fenomeni sono eguali quando non vi è alcun elemento rilevabile che sia diverso. Questa enunciazione può apparire tautologica, cioè riaffermare un medesimo concetto con le stesse parole. In realtà, essa ci spinge a focalizzare meglio il problema: abbiamo usato le varie parole ‘osservazione’, ‘caratteristiche’, ‘elementi’ a proposito di un fenomeno per definirlo compiutamente; di fatto, occorre preliminarmente ‘oggettivizzare’ il fenomeno, cioè evidenziarne le caratteristiche che lo rendono univoco nella percezione, eguale per chiunque lo osservi. A tal fine, il metodo scientifico opera secondo un processo di semplificazione che si può schematizzare nel modo che segue. Anzitutto, si identifica il *sistema fisico*, l'oggetto dello studio o dell'osservazione e, quindi, si specifica un insieme di entità che lo descrivono compiutamente. Nell'identificazione preliminare si isolano certi aspetti, eventi od oggetti, come quelli soli che interessano o che determinano in prevalenza il comportamento. Si prenda, ad esempio, il fenomeno già in precedenza citato del lancio di una palla tra due giocatori. Il sistema fisico sarà costituito dalla palla, dalla Terra che vi esercita sopra un'interazione, dall'aria circostante ecc.; la palla avrà una certa forma e una certa massa, l'aria sarà immota oppure potrà avere un movimento differenziato nelle varie parti, la Terra ha anch'essa una sua massa e forma, è in rotazione attorno a un suo asse centrale ecc. Sappiamo bene, però, che una prima semplificazione, neppure troppo rozza, ridurrà il sistema alla sola palla, magari anche idealizzata come un solo punto dotato di massa,

che si muove in assenza dell'aria, sottoposta a una forza costante (il proprio peso) effetto complessivo della presenza della Terra nelle vicinanze. Abbiamo semplificato il problema, abbiamo scelto una rappresentazione del fenomeno, sostituendolo di fatto con qualcosa che lo descrive in modo approssimato. Una migliore approssimazione, più ricca di particolari, porterà a una valutazione migliore, più vicina alla rappresentazione delle risultanze che vogliamo prevedere. Abbiamo sostituito alla realtà, quale essa ci appare nella sua completezza, un *modello*, affinabile e implementabile, il cui comportamento sarà ora compito della fisica descrivere e prevedere. Affinché questo modello descriva oggettivamente e univocamente il fenomeno rappresentato, è necessario effettuare un altro passo e fondamentale: occorre che le caratteristiche che lo descrivono siano riconducibili a valori numerici, così che possano essere controllate, verificate, confrontate e descritte ad altri soggetti che osservino lo stesso fenomeno. Il sistema fisico deve potersi descrivere semplicemente e compiutamente all'interno del modello interpretativo con una serie di valori numerici, il cui significato sia non opinabile e universalmente valido. Le caratteristiche del modello divengono parametri del sistema e numeri che ne descrivono l'entità rispetto a riferimenti prestabiliti. Le caratteristiche del modello divengono così *grandezze fisiche*; una serie di esempi ne evidenzia la natura, riconducibile a valore numerico, rispetto ad altre caratteristiche non altrettanto riconducibili: la lunghezza, la velocità, il peso, la temperatura, la frequenza, il potenziale, l'intensità di corrente sono tutte entità per le quali potremmo dire quale è maggiore o minore tra due omogenee in osservazione o se una sta aumentando o diminuendo; non così per caratteristiche descritte da termini quali la forma, il movimento, l'agilità, il caldo, la scintilla ecc., che pur descrivendo aspetti di fenomeni fisici, non sono passibili di una valutazione numerica o di un confronto oggettivo. Vedremo nel prossimo paragrafo cosa si richieda espressamente per introdurre una grandezza fisica, per il momento intuiamo che le grandezze fisiche sono lo strumento che ci permette di precisare le caratteristiche fisiche di un sistema, cioè di conoscerlo compiutamente per ciò che riguarda il suo comportamento; più precisamente, diremo che il sistema si trova in un determinato *stato fisico*, quando avremo identificato i valori che assume un certo insieme di grandezze fisiche e, reciprocamente, diremo che per potere descrivere il comportamento di un sistema, ne dobbiamo conoscere lo stato, cioè i valori di un certo insieme di grandezze fisiche.

Abbiamo così completato l'analisi del modo in cui si deve fare l'*osservazione*

*scientifica* di un fenomeno naturale: occorre stabilire anzi tutto quali siano le caratteristiche che interessano, che ne governano cioè il comportamento o l'evoluzione nei limiti delle approssimazioni richieste. Ciò porta a formulare un modello del fenomeno, una schematizzazione cioè *sostitutiva* della realtà, che la rappresenta al fine di descriverne e conoscerne il comportamento. Il modello identifica il sistema, che viene definito da un insieme di *parametri*, dai valori assunti cioè da certe grandezze fisiche. Questi parametri costituiscono tutto e solo ciò che serve per definire il comportamento del sistema. La fisica è di fatto la ricerca dei legami strutturali che esistono tra questi parametri per ogni possibile sistema fisico considerato, sintesi di un modello che descrive, sostituendola, la realtà di fenomeni naturali. È stupefacente che questi legami si possano esplicitare in leggi universali, che valgono sempre e in ogni luogo per qualunque condizione: questo fatto, al di là di ogni possibile ipotesi di costruzione dell'Universo che si voglia formulare, ci rende del tutto fiduciosi che l'interpretazione che si dà dei fenomeni – la loro schematizzazione secondo sistemi i cui stati siano definiti dai valori di certe grandezze fisiche – abbia un fondamento di assolutezza, che trascende la nostra descrizione. Nulla ci potrà assicurare della validità assoluta delle leggi, cioè del modo interpretativo seguito dalla fisica; tuttavia, la costante riprova della loro efficacia interpretativa ci induce a considerarle alla stregua di certezze assolute.

### 1.3.1 Le grandezze fisiche: misura e definizione operativa

La centralità del concetto di *grandezza* in fisica ci impone di soffermarci ancora un po' su di esso per esaminarne aspetti e implicazioni. Si è detto che l'introduzione delle grandezze fisiche permette di ridurre a parametri quantificabili le caratteristiche di un sistema fisico, di attribuire loro, cioè, un valore numerico. Se pensiamo che 'contare' significa sostanzialmente aggiungere l'unità ai numeri che via via si costruiscono ( $\dots 8 + 1 = 9, 9 + 1 = 10 \dots$ ), ciò vuol dire che il 'valore' di un numero indica quante volte è stata ripetuta l'unità, o quante volte in quello è contenuta, e, con opportuna attenzione, ciò può essere esteso anche ai numeri frazionari, compresi i negativi, il cui senso si acquisisce accettando un 'verso' nell'inserimento dell'unità. Analogamente, attribuire un valore numerico a un'entità significa individuare quante volte quell'entità può contenerne un'altra con essa omogenea, cioè paragonabile o rapportabile, che sia stata scelta come unità. Il raffronto quantitativo, di quanto l'una

è più grande dell'altra (da cui il termine di 'grandezza fisica') richiede un'operazione che è detta di *misura* della grandezza in oggetto, operazione che si effettua automaticamente nel contare, quando i numeri si commisurano implicitamente al valore unitario dell'‘1’. Per la misura delle grandezze fisiche occorre stabilire esplicitamente due cose: individuare la grandezza specifica che si sceglie come unitaria e definire in modo inequivoco la modalità secondo cui si rapporta a quella la grandezza in esame.

Lasciando ai testi didattici l'indicazione di quali caratteristiche debba avere la grandezza scelta come unitaria (invarianza, reperibilità ecc.), è opportuno soffermarci sul problema del raffronto tra la grandezza in esame e quella di riferimento, che è l'essenza dell'operazione di misura, o della *misurazione*, di una grandezza. Nel fare ciò, ci si confronta con due possibilità: possiamo rapportare direttamente la grandezza in esame con quella scelta come unitaria (metodo di misurazione *diretto*), oppure far ciò su altre grandezze dalle quali sappiamo che quella in misura dipende in un modo noto (*indiretto*). Esemplifichiamo quanto detto con un caso semplice: pensiamo di quantificare, cioè di misurare – secondo quanto abbiamo descritto in precedenza –, l'area di un rettangolo, sia esso un campo di calcio, il tavolo da studio o la parete di una stanza. Un piccolo rettangolo o quadrato di riferimento potrebbe fungere da grandezza unitaria e, allora, misureremmo l'area riportando questo rettangolo o quadrato unitario un certo numero di volte sull'area di misura, facendo attenzione di averla ricoperta tutta al termine dell'operazione senza però aver mai ricoperto più di una volta una stessa regione. A parte la difficoltà pratica di applicarla (basti pensare al ricoprimento delle strisce nei bordi e ai termini frazionari della sovrapposizione), questa modalità di misura costituirebbe un esempio del caso che abbiamo più sopra indicato come diretto, quando cioè la grandezza misurata per raffronto con quella unitaria è proprio la grandezza da misurare. Si sa, però, che nel caso di figure rettangolari le aree sono proporzionali ad ambedue i lati e che, quindi, se si misurano questi, i valori delle aree si otterranno per prodotto di questi: la misura è indiretta, in quanto la grandezza in oggetto non viene misurata direttamente, ma attraverso altre grandezze da cui essa dipende. Come è noto, i legami tra tutte le varie grandezze fisiche quali risultano dalle leggi della fisica, permettono di ridurre a un numero estremamente piccolo l'insieme delle grandezze per le quali occorre obbligatoriamente scegliere le unità di misura in modo indipendente, poiché i legami funzionali di tutte le altre con-

esse suggeriscono di eseguire in modo indiretto le misurazioni. Ciò vuol dire che in linea di principio solo un piccolo numero di grandezze fisiche dovrà essere obbligatoriamente misurato in modo diretto, mentre per tutte le altre si potrà far uso di metodi indiretti.

A questo punto, tuttavia, si potrebbe obiettare che, per volere precisare il concetto preliminare di misura per le grandezze fisiche, si sono fatti dei salti in avanti dando già per scontata l'introduzione di tutte le grandezze fisiche e la conoscenza stessa delle leggi che le correlano. Compiremo, allora, un doveroso ritorno indietro, forti però dell'intuizione conquistata relativamente alla misurazione diretta o indiretta delle grandezze. Pensiamo di avere introdotto soltanto quelle poche grandezze fisiche per ciascuna delle quali è obbligatorio individuare la relativa unità di misura in modo indipendente (esse saranno le *grandezze fondamentali* dei sistemi di unità di misura, che si incontrano in genere nelle prime pagine nei testi di riferimento); anzi, di più, pensiamo di averne introdotta una sola, per esempio, il tempo, la lunghezza o una qualsiasi altra. Essa non potrà che essere fondamentale nel senso che si è venuti delineando, poiché non può dipendere da nessuna altra. Nel seguito, nello studio dei fenomeni naturali ne incontreremo una seconda, una terza e così via. Per ciascuna di esse si aprirà un doppia possibilità: o essa dipende dalle precedenti attraverso una qualche relazione che avremo ritrovato o è indipendente da quelle: nel primo caso, non ci sarà bisogno di introdurre la relativa unità, nel secondo dovremo introdurla. Dietro al problema dell'unità di misura, come si vede, c'è qualcosa di più essenziale: la nuova grandezza fisica, e non solamente la sua unità di misura, sarà o non sarà legata alle precedenti. Se non lo è, la sua introduzione avrà sempre qualcosa di intuitivo, poiché non ha altri riferimenti che la 'realtà' fisica, così come l'abbiamo empiricamente introdotta all'inizio. Ma se la nuova grandezza è legata alle precedenti da relazioni funzionali, queste relazioni di fatto la definiranno in modo inequivoco. Fatto salvo, quindi, per alcune grandezze, che vorremo chiamare 'fondamentali', ogni nuova grandezza fisica dovrà essere introdotta da una *definizione operativa*. È questo un passo fondamentale del processo di studio della fisica; per ogni nuova grandezza introdotta non ci deve essere alcun dubbio riguardo alla sua accezione e definizione: per 'operativa' s'intende che viene precisata senza equivoci, e secondo un percorso di realizzazione effettiva, la modalità di introduzione. Si pensi alle grandezze di campo: gravitazionale, elettrico, magnetico ecc. Forti di alcuni concetti e di grandezze già

definite, diremo che in un punto dello spazio il campo elettrico, per esempio, è dato dal rapporto tra la forza (grandezza precedentemente introdotta) e la carica elettrica (anch'essa già introdotta) sulla quale detta forza si esercita. Stiamo di fatto precisando la modalità da seguire per giungere a sapere cosa e quanto vale il campo; una vera e propria ricetta d'uso: "si prenda una carica (magari, occorrerà precisare che sia sufficientemente piccola per non perturbare il preesistente, che è una condizione aggiuntiva non legata alla definizione), la si ponga nel punto in cui si vuole misurare il campo, si valuti la forza che si esercita sulla carica, il rapporto tra forza e carica darà il valore del campo". Esso è il campo, secondo la definizione che è così diventata operativa. Grandezze anche più primitive sono introdotte da definizioni operative: forza e lavoro, ad esempio, non sono esenti. La seconda legge di Newton, integrata dalla prima e dalla terza che ne stabiliscono l'ambito di validità che sono i sistemi di riferimento inerziali, è di fatto una definizione operativa della forza e della forza reale che agisce in un certo istante su un certo corpo: se si misura una data accelerazione del corpo in un sistema inerziale, diremo che su di esso sta agendo una forza eguale, o, meglio, data dal prodotto della massa del corpo per l'accelerazione. Così definiamo come lavoro compiuto da una forza nello spostamento del proprio punto di applicazione, il prodotto – integrato lungo tutto il percorso – della componente della forza lungo la direzione dello spostamento per lo spostamento differenziale.

Misura, dunque, e definizione operativa sono mattoni fondamentali nella costruzione del processo conoscitivo: non devono sussistere dubbi sull'accezione di nuove grandezze che vengano introdotte e ciò giustifica il rigore con cui si è voluto trattare l'argomento. Non appaia, quindi, secondario allo studente il contenuto di questo tema, perché esso è oltre tutto generale in quanto indicativo di quale è l'approccio dello scienziato allo studio dei problemi e, parallelamente, di quale debba essere l'approccio dello studente alla materia: non si introduca mai un concetto, mai si individui un legame, mai si operi un passaggio che non abbia piena giustificazione e validazione. L'intuizione di una soluzione o del meccanismo di un fenomeno – che sono passaggi liberi del processo conoscitivo – sono le ali che ci permettono di avanzare, ma dovranno essere sempre supportate dalla costruzione dei ponti di collegamento tra i punti del percorso, ponti che collegano senza interruzione ogni tratto, perché la strada non abbia interruzioni o cammini fransosi.

## 1.4 Il metodo sperimentale

Nell'apprendimento di una nuova disciplina, della fisica nel particolare che si sta esaminando, l'attenzione è giustamente focalizzata sull'oggetto di apprendimento, sui singoli contenuti, sull'esperimento, sulla legge, sugli esempi piuttosto che sul problema di come a quei contenuti, leggi ecc. si sia pervenuti. Con questo volume, tuttavia, si è detto che si intende complementare quei contenuti, quelle leggi ecc. con l'analisi dei percorsi logici e mentali che han permesso di ritrovarli e mostrare come dalla conoscenza di quei percorsi si ritenga di poter rendere più efficace lo studio di quei contenuti e di quelle leggi. Forse quanto finora detto è sufficiente per indurci a ritenere stupefacente il fatto che la costruzione della scienza si compia in modo assolutamente rigoroso e, tuttavia, su un terreno inesplorato: si progredisce alla cieca, ma vedendo bene dove si mettono i passi. Il metodo scientifico è sperimentale: esso si fonda sull'analisi dei fenomeni naturali o, comunque, di quella realtà che abbiamo convenuto di accettare come oggettiva (e, quindi, in un certo senso neppure naturale nell'accezione che sia 'nella' natura, potendosi applicare a fatti ed eventi di costruzione umana, come il linguaggio, l'economia ecc.). Su quella realtà si avanza con l'osservazione mirata e con l'esperimento per estrapolare dal fenomeno specifico una sintesi generale, lasciando ai risultati dell'osservazione la parte di giudice nella assegnazione della ragione tra interpretazioni contrastanti. Oggi può apparire singolare, forse pretenzioso, ma forse semplicemente ingenuo, pensare che si potesse interpretare e giustificare la realtà oggettiva prescindendo da essa, imponendole un assunto esterno, il vincolo di un rispetto non dedotto dall'osservazione dei fatti. La nascita del metodo scientifico, che si data a 400 anni or sono, sembra il così detto uovo di Colombo nell'interpretazione della natura: perché non cercare nella natura stessa, interrogandola opportunamente, le cause del suo divenire? Perché non affinare opportunamente quell'approccio ai fenomeni naturali che permette a ciascuno di noi di conoscere intuitivamente una certa fisica e che peraltro ha permesso la costruzione di acquedotti e templi prima ancora dell'introduzione del metodo nella storia dell'umanità? È l'esperimento, inteso proprio come osservazione mirata, ripetuta, specificatamente costruita per un risultato, che apre il capitolo nuovo della scienza. L'esperimento presuppone e richiede la quantificazione dei risultati, cioè la misura delle grandezze, che siamo in grado di effettuare. Nel percorso progressivo della scienza ci si trova, allora, in queste condizioni: sappiamo identificare le grandezze

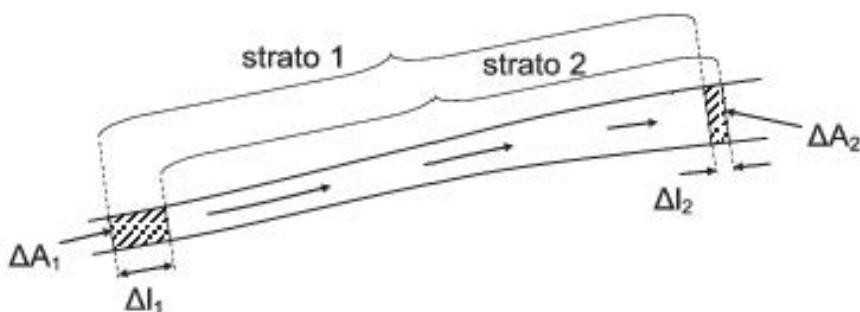
fisiche, o almeno un certo numero di esse, e le sappiamo all'occorrenza misurare (di fatto, sappiamo che individuare una grandezza fisica attraverso la necessaria definizione operativa vuol dire misurare la grandezza) e con gli esperimenti siamo in grado di osservare l'evoluzione delle singole grandezze fisiche. Viene da sé, allora, che la funzione dell'esperimento è quella di interrogare la natura per comprendere quale percorso essa scelga nell'evoluzione dei sistemi fisici, quali relazioni funzionali sussistano tra le diverse grandezze fisiche. C'è in questa ricerca la tacita assunzione che nella infinita varietà dei fenomeni naturali e nelle innumere manifestazioni del divenire sussista un numero relativamente piccolo di leggi che governano le relazioni tra le grandezze fisiche. Questo assunto è di fondamentale importanza. Esso si è probabilmente così bene radicato in noi attraverso l'esperienza quotidiana che stentiamo a riconoscergli un valore assoluto. Esso è invece la chiave di costruzione dell'intero cosmo e la ricerca scientifica è in un certo senso la ricerca di questa chiave. Vale, allora, la pena di farci sopra qualche considerazione aggiuntiva. Cercare una legge fisica significa cercare un meccanismo di validità generale per una serie di fenomeni apparentemente diversi e, talvolta, anche molto diversi. Si pensi come esempio all'aneddoto della mela di Newton che, nella sua caduta dall'albero, si muove soggetta a quella stessa legge di gravitazione universale che mantiene la Terra nella sua orbita attorno al Sole: la parabola del grave in caduta o l'ellisse del pianeta sono moti di una stessa tipologia che si differenziano per le condizioni iniziali. Lo scienziato ha formulato una sintesi interpretativa meravigliosa di una realtà altrettanto meravigliosa: quando due masse sono in mutua presenza sussiste tra esse una forza che dipende in modo diretto dai valori delle loro masse e indiretto dalla loro distanza al quadrato. Ciò è vero ovunque e sempre nell'Universo e tra due qualsivoglia corpi, pur che dotati di masse; il moto dell'uno e dell'altro verrà a seguire a seconda di dove si trovano a un certo istante e di quali velocità sono dotati. La legge fisica – come anche peraltro le leggi sociali – codifica il comportamento dei sistemi fisici, in modo severamente *deterministico*, a un livello di fenomenologia che trascende l'evento specifico. Occorre ancora dire che nell'analisi dei fenomeni ci fermiamo a considerare legge quel meccanismo di comportamento dei sistemi che al momento non sappiamo giustificare altrimenti, ma che potrebbe ricadere all'interno di una legge più generale, col progredire del sapere scientifico. Si pensi ad alcune leggi della fisica, che sono nel tempo state spiegate su altre basi e divenute più correttamente *teoremi*: la legge di

Archimede o di Stevino sono facili derivazioni dell'equazione della statica dei fluidi pesanti, a sua volta derivata dalle condizioni di equilibrio di un sistema, quindi dal secondo principio, o legge, della dinamica.

## 1.5 Il linguaggio della matematica

C'è un passaggio obbligato per addentrarsi in quella che si è voluto chiamare la conoscenza scientifica della fisica, in qualche modo estensiva se non contrapposta a quella intuita, un passaggio impegnativo che spesso si pone come l'ostacolo principale per iniziare il percorso: la conoscenza della matematica. Questa è per certuni un simbolo di difficoltà, in genere un nemico scolastico, celato dietro qualche formula o espressione per lo più mal memorizzata, che giustifica una dichiarazione di incomprensibilità della disciplina e, con essa, di quelle che le vanno dietro. Una tale posizione è contraddittoria nei termini; poiché la matematica è nella sua essenza una formulazione logica delle relazioni tra enti, cioè il meccanismo stesso di comprensione del mondo, sembra difficile poterla dichiarare incomprensibile. È certamente ostica, richiede costante attenzione e sforzo applicativo, ma la sua comprensione è assicurata dalla sua stessa natura.

La fisica che, dopo avere schematizzato il reale secondo sistemi fisici rappresentati dall'insieme dei valori numerici delle grandezze fisiche, cerca le relazioni funzionali esistenti tra queste, trova ausilio nella matematica, che ne diviene il naturale linguaggio. Le definizioni operative che introducono ogni nuova grandezza sono relazioni tra questa e quelle già definite, che si esprimono in termini numerici o analitici. In questo punto di partenza – che come si è visto è la rappresentazione del mondo naturale attraverso grandezze fisiche che il procedimento di misura definisce implicitamente e riconduce a parametri numerici – sta il legame, sottile e sfuggente a tratti, tra la fenomenologia del mondo naturale e le logiche astratte del pensiero. La costante validità della legge naturale, il suo verificarsi in tutti i casi di applicazione per qualunque valore possano assumere le grandezze, corrisponde alla validità dei sillogismi logici e, più specificamente, delle relazioni numeriche e analitiche della matematica. Questa, allora, non solo 'prevede' i risultati della fisica, ma li 'descrive' e va sentita perciò come la naturale 'interprete' di quella. Di qui deriva un messaggio per lo studente: che non si abbandoni alla matematica come fosse una scatola nera da cui escono le soluzioni agli input inseriti; ma piuttosto ne segua i passaggi nello



**Fig. 1.2.** Nel teorema di Bernoulli la differenza tra le grandezze del sistema in due strati 1, 2 si riduce alla differenza dei valori nei due volumi differenziali

sviluppo, cercandovi la corretta interpretazione fisica.

Si pensi come esempio pratico alla legge di Bernoulli dell'idrodinamica, nella quale la ‘matematica’ si riduce di fatto a pochi passaggi algebrici. Nella sua enunciazione la legge – che più propriamente chiameremo teorema, secondo quanto delineato nel paragrafo precedente nel caso in cui la legge si faccia derivare da altre più generali – può sembrare di asserire un che di arcano, stabilendo la costanza della somma di tre termini in ogni punto di una linea di corrente nel moto stazionario di un fluido incomprimibile. (Si notino, con l’occasione, i vincoli di validità del teorema, che specificano le condizioni di interesse del fenomeno, ovvero le caratteristiche del modello considerato: *moto stazionario* e *fluido incomprimibile*). Di fatto, il teorema è un’immediata applicazione della legge così detta delle ‘forze vive’, o del lavoro ed energia cinetica, applicata a una ben determinata porzione del fluido in moto, scelta come quella racchiusa tra due sezioni *normali* di un *sottile* tubo di flusso. (Anche qui si notino i limiti di validità delle sezioni normali e del sottile tubo di flusso: si intende che ognuna delle due sezioni sia sufficientemente piccola perché i valori delle grandezze meccaniche si possano considerare eguali in ogni punto, in particolare sono eguali ovunque le velocità, che definiscono, quindi, una direzione e una sola in ogni sezione. Il termine di normale alla sezione assume di conseguenza un corretto significato). Sul fluido contenuto in questo volume agiscono come forze esterne quelle di pressione ( $F = p\Delta A$ ), normali alla superficie e dirette verso l’interno, e la forza peso. Tra due qualsivoglia istanti temporali il lavoro di queste forze egualia la variazione di energia cinetica complessiva della porzione di fluido considerata tra la configurazione finale e quella iniziale, pari alla differenza tra l’energia cinetica delle

due porzioni di fluido che nelle due configurazioni non risultano sovrapposte. Poiché il teorema prende in considerazione due istanti successivi nei quali considerare le grandezze da bilanciare relative a un volume finito di fluido, il semplice spostamento dei termini da un membro all'altro dell'equazione, raggruppando insieme quelli che si riferiscono a un medesimo estremo, porta all'enunciazione del teorema che sancisce la costanza della somma di essi. In particolare, il lavoro delle forze di pressione è quello compiuto sulle sole sezioni terminali del tubo, essendo gli spostamenti dei punti della superficie laterale normali alla superficie stessa, dando così un contributo nullo al lavoro delle forze (la definizione di prodotto scalare ‘interpreta’ il concetto di lavoro, come prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento). Il lavoro della forza peso è pari anch’esso alla differenza – cambiata di segno – dell’energia potenziale delle due porzioni di fluido che nelle due configurazioni, finale e iniziale, non risultano sovrapposte. La scelta fisica di ridurre queste due porzioni a volumetti molto piccoli nei quali si possano considerare uniformi tutte le grandezza fisiche d’interesse si traduce direttamente in terminologia matematica. Si considerano due intervalli di tempo molto vicini, durante i quali gli spostamenti  $\Delta\ell_{1,2}$  sono molto piccoli; farli tendere a zero è un processo limite, che permette di considerare le due porzioni di fluido non sovrapposte come due punti, quelli cui si riducono le due porzioni cilindriche, quando i valori delle basi ( $\Delta A_{1,2}$ ) e delle altezze ( $\Delta\ell_{1,2}$ ) tendono a zero. Si ha, allora:

$$p_1 - p_2 - \rho g(h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \rho(v_2^2 - v_1^2)$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due sezioni e si è diviso ogni termine per il volume  $\Delta A_1 \Delta \ell_1 = \Delta A_2 \Delta \ell_2$ . Quest’ultima semplificazione ha eliminato la dipendenza del risultato dalla scelta dell’intervallo temporale scelto tra i due istanti: l’operazione di divisione interpreta correttamente il dato fisico. L’algebra permette ora di raggruppare in ciascuno dei due membri dell’equazione i termini corrispondenti a una medesima sezione, quindi a una qualunque sezione che si sia scelta, dal momento che le due sezioni sono generiche: la matematica, ancora, interpreta il dato fisico dell’indipendenza del risultato dai punti specifici scelti sul tubo di flusso. La divisione finale di ogni termine per il prodotto  $\rho g$  conduce al risultato del teorema, che su ogni linea di corrente (cui si può ridurre il tubo di flusso quando la sua sezione si riduce a zero) la somma di tre grandezze, omogenee con una lunghezza e, quindi,

con un'altezza: geometrica, piezometrica e d'arresto, è costante:

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante.}$$

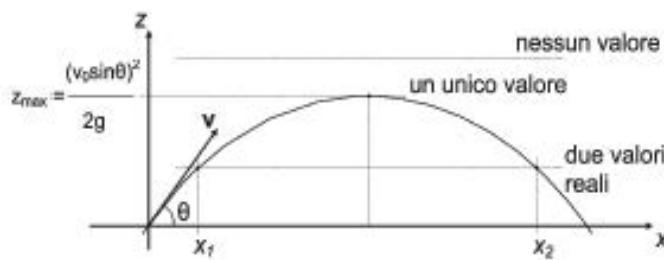
A parità di quota  $h$ , ad esempio, dove si stringe la sezione di un condotto in cui fluisce un liquido e la velocità aumenta, la pressione diminuisce, poiché il guadagno di energia cinetica si è avuto a spese del lavoro compiuto dalle forze di pressione, che sono maggiori dove la sezione è maggiore.

Un secondo esempio di interpretazione matematica, piuttosto comune nelle varie tipologie di problemi, è il doppio valore nel segno della soluzione di un'equazione algebrica del second'ordine legato a un termine proporzionale al quadrato di una grandezza. Tale è ad esempio l'espressione della ascissa orizzontale alla quale un grave lanciato verso

l'alto con una certa velocità iniziale  $v_0$ , facente un angolo  $\vartheta$  con l'orizzontale, passa per una determinata quota  $z$ . Se tale quota coincide con quella di lancio, i due valori dell'equazione corrispondono al punto del lancio e a quello della gittata; la distanza tra questi due punti aumenta al diminuire della quota e diminuisce all'aumentare, riducendosi a zero quando si annulla il radicando della soluzione dell'equazione, pari a

$$\sqrt{\tan^2 \vartheta - \frac{2gz}{v_0^2 \cos^2 \vartheta}}$$

e cioè per  $z = (v_0 \sin \vartheta)^2 / 2g$ . Per una quota superiore, le due soluzioni dell'equazione divengono immaginarie, ciò corrispondendo al caso fisico per cui si chiede al grave di superare la quota massima possibile con quella data componente verticale della velocità di lancio.



**Fig. 1.3.** Valori possibili dell'ascissa nel lancio di un grave in funzione della quota

Un terzo esempio si riporta sul caso di termini quadratici, corrispondente all'espres-

sione dell'energia cinetica di un punto materiale; la dipendenza da  $v^2$  dell'energia sta a significare, come è noto, che questa è insensibile al segno della velocità o, ancor meglio, al verso, e addirittura alla direzione. Si pensi, quale esempio pratico ma apparentemente contraddittorio, al caso dell'urto centrale tra due corpi puntiformi, nel quale il moto dei punti si mantiene tutto su una retta. Le velocità dei due corpi dopo l'urto si ottengono imponendo la conservazione della quantità di moto totale del sistema dei due punti e dell'energia meccanica, nel caso di urto perfettamente elastico (altrimenti, si terrà conto dell'anelasticità inserendo un opportuno coefficiente di dissipazione, che non muta la sostanza del problema). Il problema si descrive con una coppia di equazioni nelle due incognite delle velocità di uscita  $V_1$  e  $V_2$ , che scriveremo:

$$\begin{aligned}m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2\end{aligned}$$

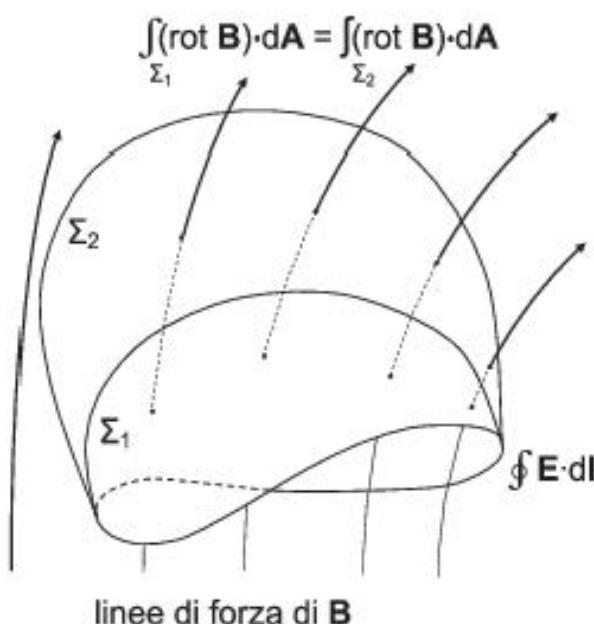
avendo indicato con  $m_1$  e  $m_2$  le masse e con  $v_1$  e  $v_2$  le velocità prima dell'urto dei due punti collidenti. Dalla presenza dei termini quadratici nelle incognite  $V_1$  e  $V_2$  ci si attenderebbe dall'algebra una duplice soluzione per il problema, pur se il problema fisico è obbligatoriamente deterministico, con ammissione di un'unica soluzione. L'apparente contraddizione dipende dal fatto che la seconda equazione si riduce a un'equazione del primo ordine, se si usa l'informazione della prima; separando, infatti, nella seconda equazione a primo membro tutti e soli i termini relativi alla prima massa e a secondo membro quelli relativi alla seconda, si può semplificare l'equazione dividendo membro a membro le due equazioni che così risultano costituire un sistema lineare e non quadratico nelle due incognite  $V_1$  e  $V_2$ :  $v_1 + V_1 = v_2 + V_2$ . La fisica del problema trova la sua corretta descrizione nello sviluppo matematico che la descrive.

Come ultimo esempio di interpretazione analitica della fisica, analizzeremo la legge dell'induzione di Faraday-Neumann-Lenz, legge questa e non teorema, non derivabile quindi da precedenti enunciazioni a differenza di esempi precedenti, ma qui riportata per una valenza propria degli integrali d'area. Essa asserisce che lungo una qualunque linea chiusa si produce una forza elettromotrice ogni qual volta vari nel

tempo il flusso del campo di induzione magnetica attraverso una superficie comunque scelta che abbia la linea prescelta come bordo: la forza elettromotrice è eguale alla derivata del flusso cambiata di segno. In questo enunciato la libertà di scelta della superficie, pur col vincolo di appoggiarsi alla linea prescelta, può sembrare inspiegabile, dal momento che, cambiando superficie, cambiano i valori locali del campo di induzione magnetica e, quindi, apparentemente anche il valore dell'integrale e conseguentemente della sua derivata. Invero, se è ancora accettabile che il valore del campo elettrico in ogni punto lungo la linea sia legato al valore della variazione locale del campo di induzione, secondo quanto asserisce la legge differenziale di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , corrispondente a quella integrale di Faraday-Neumann-Lenz, non è affatto intuitivo, invece, che l'effetto integrato del campo elettrico indotto lungo una linea sia legato a ciò che avviene su una superficie, apparentemente arbitraria scelta nello spazio.

L'arbitrarietà della superficie, tuttavia, è limitata proprio dal fatto che essa deve avere come bordo la linea su cui si computa l'integrale del campo elettrico. Un teorema di analisi ci dice che l'integrale su una superficie del rotore di un vettore (nel caso specifico del campo elettrico  $\nabla \times \mathbf{E}$ ) vale l'integrale del vettore sulla linea di contorno; quindi, qualunque sia la superficie scelta, purché abbia uno stesso contorno, su di essa il valore integrato dell'operatore rotore è il medesimo.

Ovviamente, allora, è univoca l'espressione dell'integrale di flusso della derivata temporale del vettore  $\mathbf{B}$  su qualunque superficie, poiché in ogni punto dello spazio tale derivata, per la legge di Maxwell sopra riportata, vale il rotore di  $\mathbf{E}$ : così, anche l'integrale di linea del campo elettrico, cioè la forza elettromotrice, vale la variazione temporale della



**Fig. 1.4.** L'integrale di un rotore su una superficie dipende solo dalla linea di bordo della superficie

derivata del flusso di  $\mathbf{B}$ , indipendentemente dalla superficie scelta. In questo caso, un teorema di matematica ci ha tolto d'impaccio e risolto l'apparente incongruenza della libertà di scelta della superficie di integrazione; non vi è nulla di misterioso in ciò, se si pensa che un teorema non introduce fatti nuovi, semplicemente rappresenta un altro modo di dire cose già precedentemente note.



# Capitolo 2

## I temi della fisica generale

### 2.1 La meccanica

La parte della fisica che si codifica per prima come conoscenza scientifica, secondo la schematizzazione indicata nel capitolo precedente, è quella relativa al movimento dei corpi dello spazio e che si indica col termine di meccanica. È sintomatico che la prima a nascere sia stata proprio quella che dal punto di vista ‘intuitivo’ è quella maggiormente sviluppata, a dimostrazione della funzione di stimolo che l’intuizione dei fenomeni ha espletato nello sviluppo dello studio. È certo che tra le prime evidenze di una fenomenologia in qualche modo ripetitiva del mondo naturale c’è il movimento degli oggetti: la caduta, il lancio, la spinta, l’urto, il salto e così via suggeriscono in modo naturale le domande del come e del perché. Il processo sintetico di evidenziare nel fenomeno meccanico l’invarianza descritta dalla legge è illuminante di quella metodologia di avanzamento del sapere scientifico che abbiamo delineato in precedenza. Si cerca di schematizzare, innanzi tutto, e di proporre il processo nella sua costituzione più elementare, cioè si delineano dei modelli: il punto materiale, i corpi rigidi ecc.; si descrive il fenomeno, prima ancora di spiegarne il comportamento in termini di causalità, cioè si costruisce una *cinematica*, prima della *dinamica*, e per la descrizione del moto occorre precisare le grandezze fisiche fondamentali della posizione e del tempo, cioè occorre procedere a una disamina dei riferimenti spazio-temporali entro cui inserire la descrizione; quindi, può nascere la catena del perché: quali le cause del moto, cosa sono, cosa provocano e quali caratteristiche hanno le

forze responsabili del moto. Nelle tre domande si intravedono le risposte contenute nei tre principi della dinamica, intuizioni eccelse di Newton, che compendiano ogni sviluppo.

### 2.1.1 I sistemi di riferimento per le leggi della dinamica

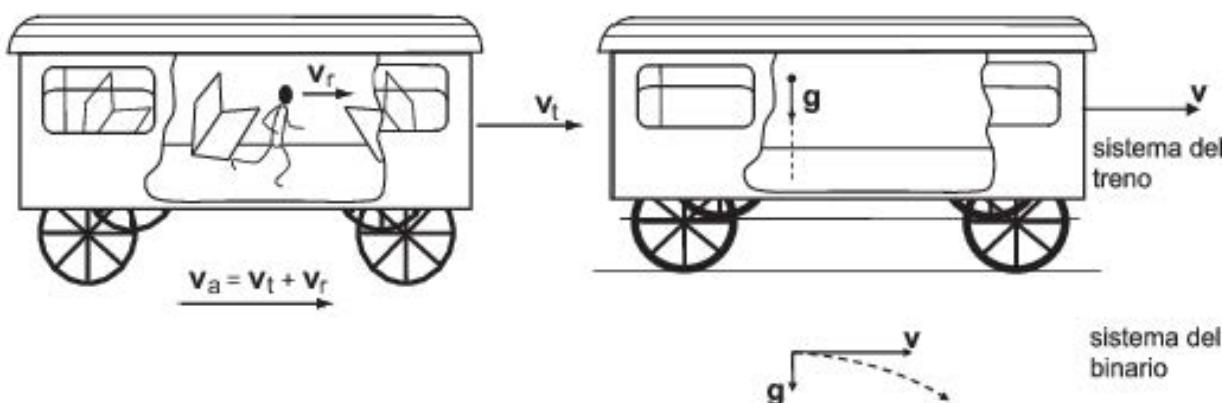
Il primo problema con cui ci si confronta in meccanica nella descrizione del moto dei sistemi materiali nello spazio e delle cause che lo determinano, è quello di specificare la posizione dei sistemi, quindi dei vari punti che li costituiscono, nello spazio e nel tempo. Ciò si può fare solamente se si è convenuto che lo spazio e il tempo siano in qualche modo metrizzati, cioè che a ogni possibile punto nello spazio e a ogni possibile istante nel tempo corrispondano dei numeri ben definiti.

Se si vuole precisare a un interlocutore dove si trovi un oggetto, la localizzazione viene data relativamente ad altri oggetti, cose o spazi che si presume siano noti all'interlocutore: si dirà che l'oggetto si trova "sul tavolo", oppure "poco più in là della macchina" o "a pagina 30", così come si dirà che la tal cosa è accaduta "ieri a mezzogiorno" oppure "nel 1789" o avverrà "con l'eclisse di Luna di febbraio" ecc. In ognuna di queste locuzioni l'indicazione del dove o del quando è data – con maggiore o minore precisione – facendo riferimento a termini che si conviene comunemente di conoscere. In modo non dissimile, la localizzazione di un punto materiale in fisica è data convenendo di conoscere lo spazio e il tempo rispetto ai quali si forniscono le indicazioni. Per il tempo si conviene di identificare un istante a partire dal quale, in avanti (per tempi positivi) o indietro (per quelli negativi), si misura il tempo trascorso, da indicarsi col numero che misura il rapporto con un'opportuna unità di misura, che nel sistema internazionale – è noto – è il secondo. Si è così calata nel tempo una metrizzazione, cioè una modalità con cui si abbina un numero a ogni possibile istante. La stessa operazione di metrizzazione deve farsi con lo spazio, stabilendo le distanze (in questo caso tre e non più una come per il tempo) di ogni punto rispetto a piani dello spazio che fungono da opportuni riferimenti e contando positivi o negativi i valori delle distanze secondo che siano misurate da una parte o dall'altra rispetto a ognuno dei tre piani. L'effettuazione di questa operazione corrisponde ad avere scelto, o comunque stabilito, un *sistema di riferimento* per la descrizione del moto.

Penseremmo così di avere fornito un modo certo per abbinare un *evento* a una quaterna di numeri che definiscono le tre variabili spaziali e quella temporale, cioè

che precisano tutte le grandezze utili per definire la posizione spazio-temporale di un fenomeno che è ‘puntiforme’ nello spazio e nel tempo. Puntiforme per un evento è naturalmente un concetto extrapolato, significando che esso non ha estensione né nello spazio né nel tempo; ad esso può assimilarsi in pratica un fenomeno di breve durata e ben localizzato in una regione dello spazio, quale potrebbe essere l’esplosione di un fuoco d’artificio o la caduta al suolo di un sasso ecc. Nel contesto di una descrizione del moto di un sistema, tuttavia, ciò che consideriamo evento ha un significato assai più generale, corrispondendo semplicemente all’istantanea di un oggetto o di una parte di un oggetto che ci appare sufficientemente piccola da poter essere assimilata a un punto, senza necessità che in quell’istante o in quella regione accada qualcosa di particolarmente diverso dagli istanti o dalle regioni vicini. Potremo così descrivere il moto di un corpo come una serie infinita di eventi, ovvero con una funzione  $\mathbf{r}(t)$  che collega la posizione spaziale tridimensionale  $\mathbf{r}$  a quella scalare temporale  $t$ .

Se, tuttavia, per la descrizione pura e semplice del moto è assolutamente indifferente la scelta di un sistema di riferimento o di un altro, così non è quando si passa a ricercare le cause del moto dei corpi, quando cioè si passa dalla cinematica alla dinamica, in quanto il moto di un corpo è determinato dall’interazione con altri corpi e quindi la sua localizzazione nello spazio o, meglio, la variazione del suo moto dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Entriamo, a tal proposito, direttamente nelle leggi della dinamica: esse sono tre, come è noto, tutte necessarie per la descrizione del moto, anche se si suole dare una specie di precedenza gerarchica alla seconda di esse, quella che specifica come per un dato punto materiale l’accelerazione sia proporzionale alla forza agente sul punto stesso. Se questo è diverso, la stessa forza produce un’accelerazione inversamente proporzionale alla massa; si scrive così  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/(k m)$  o, più consuetamente,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , avendo scelto opportunamente eguale a 1 e adimensionale la costante di proporzionalità (come si è già avuto occasione di citare in precedenza). Essa determina comunque l’evoluzione del moto del punto, purché siano note le forze che vi agiscono sopra: si tratterà, infatti, di risolvere l’equazione differenziale appena scritta, cioè di risalire dall’accelerazione alla velocità, quindi allo spostamento, integrando nel tempo l’espressione esplicita della forza, in linea con quanto descritto nel caso generale dei sistemi nel capitolo precedente. A una più attenta osservazione, tuttavia, appare evidente l’ambiguità dell’equazione se non si precisa in quale sistema di riferimento essa debba essere scritta; non



**Fig. 2.1.** A sinistra: passeggero in moto con velocità relativa  $v_r$  rispetto a un vagone in moto con velocità di trascinamento  $v_t$ : la velocità assoluta è  $v_a = v_t + v_r$ ; a destra: descrizione della caduta di un grave, con medesima accelerazione  $g$ , descritta da sistemi in moto di traslazione costante

può, infatti, succedere che essa descriva correttamente il moto qualunque sia il sistema di riferimento che abbiamo scelto: ciò si intuisce osservando l'incongruenza tra un primo membro  $F$  che non dipende dal sistema di riferimento, mantenendosi il medesimo valore della forza in qualunque sistema, e un secondo membro dove l'accelerazione  $a$  dipende dalla scelta del riferimento. Invero, l'accelerazione manterebbe la medesima espressione in uno qualunque dei sistemi di riferimento che fossero derivabili l'uno dall'altro per semplice traslazione a velocità costante. Infatti, in ognuno di questi sistemi la velocità di un punto si scriverebbe come la velocità del punto in un altro qualunque di essi sommata alla velocità di traslazione del secondo sistema rispetto al primo. Si pensi all'esempio classico di una persona che cammini lungo il corridoio di un treno in corsa: la velocità del passeggero rispetto al suolo sarà data dalla velocità rispetto al treno più (o meno, a seconda dei reciproci versi di percorrenza) quella del treno rispetto al suolo. In conseguenza di ciò, l'accelerazione di un punto non sarà diversa se computata in un sistema di riferimento o in un altro, in quanto essa è la variazione della velocità nel tempo e le velocità del punto nei diversi sistemi differiscono solo per una costante, che è appunto la velocità relativa di un sistema rispetto all'altro. Così, ad esempio, se è nulla rispetto al treno l'accelerazione del passeggero che cammina con velocità costante lungo il corridoio, sarà nulla l'accelerazione rispetto al suolo e, per un oggetto lasciato cadere nel treno da un tavolino d'appoggio, l'accelerazione sarà la medesima e pari a quella  $g$  di gravità

sia che la si misuri nel sistema del treno, sia in un sistema solidale con il suolo. Si può dunque pensare di suddividere tutti gli infiniti possibili sistemi di riferimento esistenti in famiglie, ciascuna delle quali comprenda tutti e soli quei sistemi che hanno velocità reciproche di traslazione costanti, in ciascuno dei quali cioè l'accelerazione di un punto in movimento sia la stessa. Così facendo, si ha che soltanto nei sistemi di una sola famiglia avrà validità la legge della dinamica più sopra citata, in quei sistemi identificabili come quelli nei quali il punto è privo di accelerazione se su di esso non si esercita alcuna forza: in tali sistemi, pertanto, *un punto non sottoposto a forze esterne persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*. La prima legge della dinamica, che può a tutta prima sembrare un'inutile specificazione di un caso ottenibile dalla più generale seconda legge, identifica in realtà quei sistemi nei quali vige la seconda legge. Resta, tuttavia, ancora un punto da precisare: come si può essere certi dell'assenza di forze agenti su un punto o, che è la stessa cosa, come si possono identificare le forze? Per esempio, se ci troviamo all'interno di un veicolo che sta subendo una frenata, tutti i corpi all'interno ci appaiono sollecitati da forze dirette in avanti, proporzionali in questo caso ciascuna alla massa del corpo; non ne conosciamo ancora il perché, ma dovremmo accettare che per qualche motivo nel veicolo è presente un campo di forze. Se contrastiamo queste forze con opportuni vincoli, per es. bloccando i corpi al pavimento del veicolo, diremmo poi che i singoli corpi non si muovono perché su di essi non agiscono forze, o meglio che su ciascuno la risultante delle forze è nulla, in quanto somma della forza del campo presente nel veicolo e del vincolo che stiamo esercitando. Poiché i corpi, così vincolati, non si muovono, saremmo tentati di asserire che siamo in un sistema di riferimento di quella famiglia per la quale vale la seconda legge della dinamica. Ma stiamo davvero applicando una forza nulla sui corpi? Qual è l'origine di quelle forze presenti su tutti i corpi nel veicolo, che contrastiamo con vincoli per annullare la risultante? Quel campo è un reale campo di forze? O, meglio, con una metatesi sintattica, è un campo di forze reali? La risposta alle ultime due domande è un chiaro *no*: le forze che vediamo agire su ogni corpo presente nel sistema di riferimento solidale col veicolo in frenata non sono *forze reali*; diremo che sono piuttosto *forze apparenti*, cioè che si presentano, appaiono appunto, in particolari sistemi, quasi tutti in realtà, tranne quelli della famiglia sopra indicata. Ci si chiede, tuttavia, quale sia la differenza tra forze reali e apparenti, poiché se vediamo forze agire su un corpo in un sistema non

sapremmo classificarle se non sappiamo in precedenza se il sistema è o non è della giusta famiglia. Anzi, abbiamo scelto la presenza o l'assenza di forze come quel parametro che, attraverso l'accelerazione del corpo su cui eventualmente agiscono, ci permette di classificare i sistemi come quelli per i quali possiamo scrivere la seconda equazione. La risposta alla domanda di come classificare le forze è di una semplicità disarmante e di una valenza concettuale impressionante: sono reali quelle forze che nascono sempre a coppie tra due corpi in interazione. Ciò vale a dire che *se un corpo A esercita una forza su un corpo B, quest'ultimo a sua volta esercita una forza sul corpo A, eguale, contraria e avente la medesima retta di applicazione*. Forse non c'è chi non abbia riconosciuto in questo l'enunciato della terza legge della dinamica, la quale quindi è null'altro che una modalità di identificare le forze reali. È reale la forza con cui spingiamo un tavolo sul pavimento, poiché il tavolo esercita su di noi una forza opposta; è reale la forza di attrazione del Sole sui pianeti o della Terra sugli oggetti presenti sulla sua superficie, perché i pianeti attirano il Sole e gli oggetti attirano la Terra con medesime forze e opposte. Per le forze apparenti presenti sui corpi nel sistema del veicolo in frenata, invece, non vale l'enunciato della terza legge; cercheremmo invano fuori dal sistema il corpo o i corpi che esercitano forze sui corpi all'interno: i freni decelerano il veicolo, ma tutti i corpi all'interno di questo perseverano nel loro stato dinamico, di quiete o di moto rettilineo uniforme, finché non intervengano su di essi ad agire forze reali e se vogliamo tenere gli oggetti fermi rispetto al veicolo, se per es. vogliamo restare fermi in un punto del pavimento di un autobus in frenata, dovremo tenerci ai sostegni i quali eserciteranno su di noi una forza che deve equilibrare quella apparente *forza d'inerzia*, che vediamo comparire nel sistema di riferimento del veicolo, semplicemente perché questo non è un *sistema inerziale*, dove cioè vale il principio di inerzia, sancito dalla prima legge già precedentemente citata. Dunque, le tre leggi della dinamica sono agganciate l'una all'altra, la seconda enunciando quel legame strutturale tra cause (forze) ed effetti (accelerazioni) del moto dei corpi, che vige nei sistemi inerziali definiti dalla prima legge, la quale precisa cosa si debba intendere per assenza di forze ovvero per forze reali sancita dalla terza.

Abbiamo chiamato forze d'inerzia quelle forze – apparenti, non reali – che sono attive su tutti i corpi dotati di massa quando si osservino da un sistema *non inerziale*: come si vede, l'una definizione, delle forze apparenti, implica l'altra, dei sistemi non

inerziali, e viceversa. Va da sé che, se nei sistemi inerziali scriviamo l'equazione del moto come  $\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}$ , avendo inglobato in  $\mathbf{F}_R$  tutte e sole le forze reali. In un sistema non inerziale potremmo continuare a scrivere l'equazione del moto come  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , se si inserisce nella forza  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_A$  anche il contributo della forza apparente, pari a  $-m(\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c)$ , dove  $\mathbf{a}_t$  e  $\mathbf{a}_c$  sono l'*accelerazione di traslazione* del sistema nel punto in cui si trova istantaneamente la massa e l'*accelerazione complementare*, o di *Coriolis*, rispettivamente. Come può ben immaginarsi, è oggetto di speculazione estrema il perché esista la classe dei sistemi inerziali o, meglio, quale caratteristica intrinseca essa possieda rispetto a ogni altra classe. Naufragare in questi pensieri è il lascito proprio della fisica e non dispiace avere esteso la trattazione dei sistemi di riferimento sino ad avere reso possibile la maturazione nel lettore di questo pensiero.

### 2.1.2 Il modello del punto materiale

La prima operazione di sintesi che si incontra nello studio del moto dei corpi è la creazione di un modello di fenomeno, quello così detto del *punto materiale*: dall'osservazione dell'innumerabile molteplicità di oggetti in movimento, di cose inanimate o viventi, dall'infinitamente piccolo dei corpuscoli costituenti la materia all'infinitamente grande dei corpi celesti, si può astrarre un concetto comune quando l'interesse dell'osservazione non si appunta sulle variazioni che intervengono nell'oggetto in sé, quanto piuttosto su quelle dell'oggetto rispetto ad altri, variamente disposti nello spazio. Nel caso di un aereo in volo, ad esempio, potremmo non essere interessati a conoscerne le dimensioni, la forma, il numero dei posti o l'apertura alare, ma il tempo di percorrenza da un aeroporto a un altro, la quota di crociera ecc. Per la caduta di un frutto dall'albero, ci può interessare di sapere il tempo di caduta o il punto d'impatto al suolo, così come per l'attraversamento di un fiume da parte di un nuotatore o di un battello ecc. Questo non vuol dire che il tempo di volo dell'aereo non dipenda dalla sua forma o dall'apertura alare, ovvero che la caduta al suolo del frutto non dipenda dalla forma, in pratica dal tipo di frutto, o che l'attraversamento del fiume non dipenda dalla forma del nuotatore o del battello o da come questi siano posizionati rispetto alla linea della traiettoria. Certamente, in tutti questi casi il moto è condizionato dalle caratteristiche dimensionali – e non solo – dell'oggetto in questione, però questi condizionamenti saranno inseriti in modo implicito dentro l'espressione delle

cause che definiscono il moto e le variazioni dei parametri interni del sistema sono secondari all'interesse del problema. L'oggetto, qualunque esso sia, a tutti i fini del problema è riconducibile a un punto, privo di una qualunque struttura interna: tutte le possibili interazioni del sistema con l'ambiente esterno verranno ricondotte a forze che agiscono sul punto rappresentativo. Se riprendiamo l'esempio dell'aereo in volo, esso sarà sottoposto a una forza peso, anzi, più propriamente, a un insieme di forze di attrazione da parte della massa terrestre su ciascun atomo o particella elementare che lo costituiscono; poiché tutto il corpo è assimilabile a un punto, è come se queste forze di attrazione agissero tutte su quel punto, sommandosi in un'unica forza, pari alla forza peso. L'aereo sarà inoltre sottoposto alla forza d'interazione col mezzo in cui si muove, l'aria dell'atmosfera terrestre, che agirà su ogni punto della superficie; anche in tal caso, l'assimilazione del corpo a un punto permette di ridurre l'insieme di tutte queste forze a un'unica forza applicata sul punto rappresentativo. L'eventuale movimento delle persone all'interno dell'aereo può variarne l'assetto e conseguentemente variare l'interazione dell'oggetto col mezzo esterno, che si specifica ancora una volta come un contributo al complesso delle forze esterne agenti sul corpo. In sintesi, ogni possibile causa è riconducibile a un'azione di forza applicata sul punto rappresentativo e diremo che il sistema è rappresentato dal modello del *punto materiale*: 'punto' in quanto la dimensione del corpo ovvero l'occupazione dello spazio da parte del corpo viene ridotta a un punto, 'materiale' perché, nonostante la riduzione geometrica a un punto, il corpo non perde la sua caratteristica d'inerzia, rispondendo alle sollecitazioni esterne secondo il valore della propria massa.

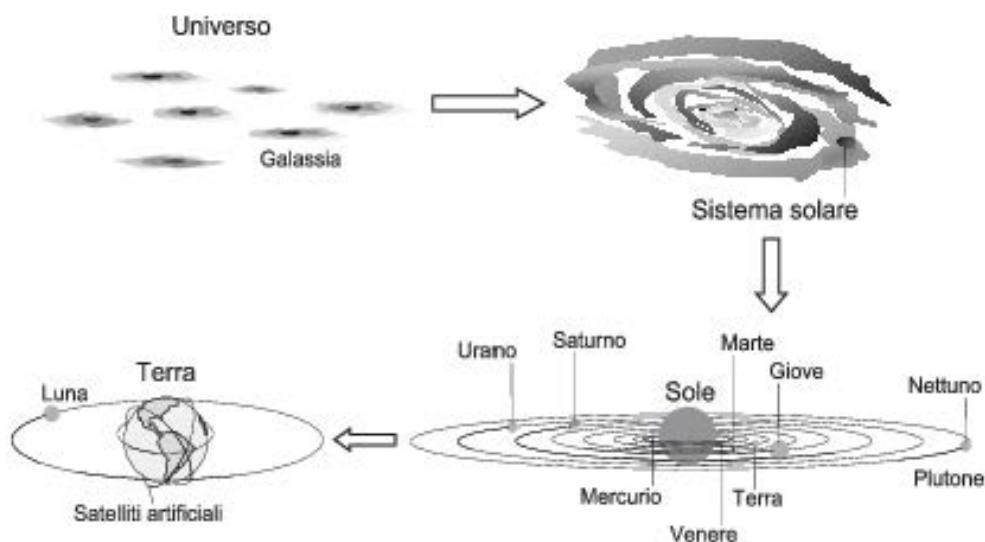
Al fine della conoscenza del moto complessivo del corpo, in sostanza, questo viene rappresentato da un punto dotato di massa sul quale agisce un'unica forza, somma vettoriale di tutte le possibili cause d'interazione del corpo con l'ambiente esterno. La localizzazione del punto nello spazio soffre naturalmente dell'indeterminazione legata alla regione occupata dal corpo stesso nello spazio, che è secondaria rispetto all'informazione generale della posizione: le posizioni dell'aereo, del nuotatore, del battello, intesi come corpi estesi con le loro strutture interne, richiederebbero ciascuna un numero assai grande di valori per dare l'informazione della localizzazione dell'intero corpo (dove si trovano le estremità delle ali, i motori, i singoli passeggeri ecc.), un numero tanto maggiore quanto più dettagliata si richiedesse la conoscenza del moto di tutto il corpo. Ma, al di là delle difficoltà definitorie e poi risolutorie

del problema, assai spesso è del tutto inutile sapere con tale dovizie di dettagli quale sia la dinamica del sistema; ci interesserà sapere quando arriva l'aereo o il battello o il tempo di attraversamento del fiume da parte del nuotatore, e non l'orientamento dell'aereo nella sua sosta a terra o la posizione del personale di bordo durante la traversata ecc. Questo modo di operare ricorre frequentemente in fisica, per non dire sempre, nel senso che ogni qualvolta si affronta un problema seguendo un determinato modello di comportamento del sistema, si trascura tutta una serie di fenomeni, che potrà essere considerata successivamente, ma che al presente è trascurata o trascurabile, vuoi per operare una reale semplificazione del problema e quindi conseguirne la soluzione, nel primo caso, vuoi anche per l'inutilità delle informazioni che seguirebbero da una più completa descrizione, nel secondo. Le informazioni più dettagliate, come quelle appena esemplificate, saranno eventualmente d'interesse per un'altra serie di problemi, come quello dell'uscita dei passeggeri dalle porte dell'aeromobile o della chiamata del personale per un servizio, che esulano dal problema della dinamica del corpo. Questo è visto come un tutto unico e la sua localizzazione è indifferentemente coincidente con un suo qualunque punto reale, per es. con il centro di massa.

Ridotto, ora, il sistema a un punto e ridotte tutte le forze su di esso agenti a un'unica forza, il problema diviene il medesimo per un'infinità di casi oggettivamente diversi: nel processo conoscitivo si è operata la necessaria sintesi, ritrovando una comune fenomenologia nella pletora di casi singoli, riportando a un'unica fattispecie la casistica estremamente varia che occorre nella realtà. Questa operazione di sintesi è l'essenza del procedimento scientifico, il ritrovamento cioè di quelle caratteristiche invarianti dei fenomeni che sarà possibile descrivere con un'unica legge. La legge che governa il moto di un punto dotato di massa è naturalmente la seconda legge della dinamica: *un punto soggetto a una forza subisce un'accelerazione proporzionale alla forza e inversamente proporzionale alla massa*. Non meravigli l'uso del proporzionale anzi che dell'eguale, poiché è proprio da questa legge che, scelta una massa di riferimento e definite le unità di misura delle lunghezze e dei tempi, si deriva quella delle forze e che la scelta adimensionale pari a 1 del coefficiente di proporzionalità permette di mutare in egualanza la proporzionalità tra accelerazione e forza ora indicata. Altre due leggi, la prima e la terza della dinamica, completeranno la triade che permette di descrivere compiutamente il moto di un punto materiale; di esse e della loro necessaria introduzione per individuare i termini entro cui vige la seconda

si è già detto nel paragrafo dedicato ai sistemi di riferimento.

L'ipotesi di pensare che tutto un intero sistema considerato si possa ridurre a un unico punto può apparire assai riduttiva e, come anche si è accennato negli esempi precedenti, in molti casi lo è. Tuttavia, poiché si può sempre pensare di suddividere ogni sistema, per quanto complesso, in parti più piccole sino a che la singola parte sia riconducibile a un punto materiale senza alterare l'oggetto di interesse del problema, di fatto l'iterazione della legge, valida per un punto, a tutte le parti in cui si è suddiviso il corpo permette di conoscere il moto di qualunque sistema fisico materiale. Assai spesso la suddivisione del sistema in parti più piccole è suggerita in modo naturale dal sistema in oggetto. Si pensi ad alcuni esempi nell'ambito astronomico: il Sistema solare può essere considerato alla stregua di un punto materiale, se si tratta di sapere in quale posizione della Galassia esso si trovi o quale sia il suo moto d'insieme rispetto a questa. Si noti come nella dizione usata i termini di 'posizione' e di 'moto d'insieme' già denotino la scelta di un tutt'uno per il sistema: si intende che esso occupi una porzione di spazio che, sulla scala delle dimensioni dell'intera Galassia, è affatto trascurabile e pertanto riducibile a un punto, così come si intende che la velocità dell'insieme sia definibile in qualche modo come la velocità di un punto o sia riconducibile alla velocità di un punto (una successiva elaborazione del problema individuerà a tal fine il centro di massa del sistema). Se, però, si vuole considerare il moto dei singoli pianeti o corpi celesti del Sistema solare, la riduzione di questo a punto non sarà di certo più sufficiente e, invece, ogni singolo corpo celeste potrà essere assimilato a un punto. Allo stesso modo, salendo di dimensione, il modello di punto materiale potrà essere applicato alla stessa intera Galassia, se ci interessa di conoscerne la localizzazione e il moto nell'Universo rispetto ad altre galassie o ammassi ecc. Masse e forze da inserire nell'equazione della seconda legge di Newton scaderanno di conseguenza: se si studia il moto della Terra attorno al Sole, la massa sarà quella terrestre e la forza quella gravitazionale esercitata dal Sole (che compensa, in prima approssimazione, l'insieme delle forze esercitate dall'esterno, ma poi anche dalla Luna e dagli altri pianeti, se si vuole affinare il problema); se si studia il moto del Sistema solare, la massa sarà quella del Sole sommata a quella residuale degli altri corpi celesti del Sistema (che contribuiranno in piccola parte e che, quindi, in prima approssimazione, potranno essere trascurati) e la forza quella esercitata da tutti gli astri dell'intera Galassia (che potrà essere sostituita da una forza localizzata



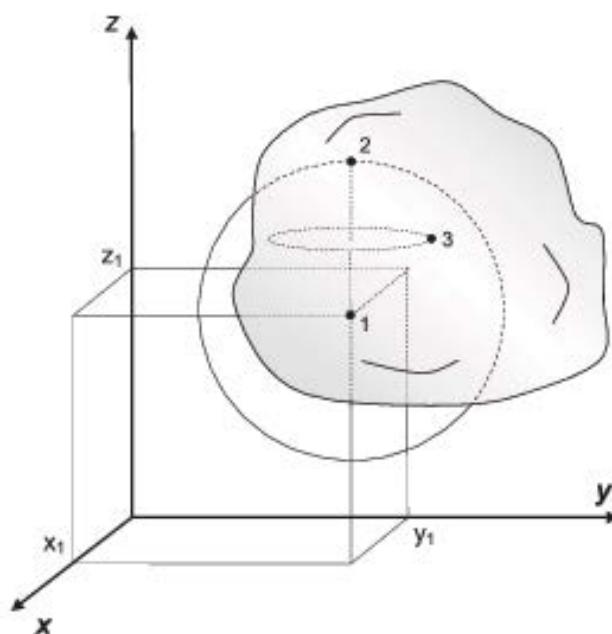
**Fig. 2.2.** Nel modello del punto materiale vengono trascurati gli effetti di ordine superiore

nel centro di massa di questa), se si studia il moto della Galassia, la massa sarà quella dell'intera Galassia e la forza sarà quella che l'intero Universo esercita su di essa, determinazione questa che si scontra con problemi di carattere cosmologico di non facile risoluzione. Si sono voluti riportare di proposito questi esempi tratti dall'astronomia e discussi per scale dimensionali diverse, per evidenziare come in ogni caso la scelta del modello corrisponda a trascurare effetti di ordine superiore che causano effetti più piccoli, di cui si potrà tenere conto in fasi successive dell'analisi del fenomeno. Questo modo di procedere è intrinseco alla descrizione scientifica, così come si è cercato di mettere in evidenza precedentemente: si descrive un fenomeno, scegliendo di questo alcune caratteristiche e trascurandone altre, adattandovi un modello che potrà essere superato da un altro quando si richiedano dettagli o informazioni che trascendono i limiti del modello. Non si deve cercare di descrivere comportamenti che coinvolgano parti o fenomeni non previsti dal modello che si è adottato.

### 2.1.3 Il modello del corpo rigido

Si è accennato nel paragrafo precedente che il modello del punto materiale può essere utilmente impiegato anche per un sistema complesso, pur di suddividere questo in numerose parti sempre più piccole, ciascuna delle quali riducibile al caso di un punto materiale, fino alla condizione in cui non abbia più alcun interesse conoscere il comportamento di parti ancora più piccole. A ciascuna di esse, quindi, si appli-

cherà la legge della dinamica valida per un punto materiale. Naturalmente questo procedimento di analisi è del tutto corretto concettualmente, ma sconta l'incremento della difficoltà di risoluzione del problema: alle  $n$  parti in cui si è suddiviso il sistema corrisponderanno  $n$  equazioni da risolvere nelle  $n$  incognite degli spostamenti funzioni del tempo, interconnesse l'una con l'altra in un sistema, quasi mai risolubile in termini analitici. La riduzione del problema a un sistema di equazioni, cioè a un insieme di equazioni legate l'una all'altra dalla presenza in ciascuna di esse di più di un'incognita, piuttosto che a una serie di equazioni indipendenti, deriva dal fatto che la forza che agisce sulla massa di una qualunque parte del sistema potrà dipendere dalla posizione di tutte o comunque di alcune delle altre masse così da vincolare lo spostamento della massa considerata a quello delle altre. Questo rende il problema di più difficile risoluzione, aumentando la difficoltà in proporzione al quadrato del numero totale di parti in cui si è suddiviso il sistema. Però è fatto spontaneo pensare che ad es. il moto di una palla o di un grave lanciato in aria sia non soltanto approssimabile e descrivibile in termini di un modello di punto materiale, ma che anche i vari punti o parti del sistema siano interdipendenti in modo tale da essere 'trascinati' insieme senza possibilità di muoversi l'uno rispetto all'altro. Chiunque direbbe che nel corpo considerato sono presenti dei vincoli che obbligano il corpo a restare un tutt'uno, senza potersi frammentare, così che se si conosce il moto di un punto del corpo, si ha una qualche informazione sul moto delle sue altre parti. Diverso dall'esempio indicato appare invece il caso del moto ad es. dell'acqua di un secchio o della farina di un sacco rovesciati dall'alto, in cui la conoscenza del fatto che una goccia o un grano di polvere sono caduti in un punto non danno informazione circa l'area entro cui si distribuisce il resto dell'acqua o della farina al suolo. L'estremizzazione di una tale condizione di vincolo tra le posizioni delle diverse parti di un sistema porta a considerare questo alla stregua di un corpo rigido e a proporre corrispondentemente un modello di comportamento del sistema come se fosse un *corpo rigido*. Se è comune il concetto di rigidità di un corpo, occorre precisarne le caratteristiche fisiche così da poterne codificare il comportamento in termini analitici. Assai spesso si equipara l'attributo di rigido a quello di 'solido', e invero ciò è lecito se per solido si intende un solido ideale, quello che si definisce come un sistema o corpo "che ha volume e forma propri", cioè volume e forma invarianti nel tempo, ben diverso dal caso di un solido reale, che è invece deformabile quando sia sottoposto



**Fig. 2.3.** Per localizzare la posizione di un corpo rigido nello spazio sono sufficienti sei soli parametri

a un opportuno sistema di forze. Un corpo rigido, dunque, come un solido ideale, non si deforma, indipendentemente dalle forze che sono applicate su di esso: ciò è ovviamente un'astrazione teorica dal momento che un corpo reale deve comunque deformarsi – anche se di quantità infinitesime – perché possano instaurarsi delle forze interne tra le varie particelle del sistema, allontanate dalle loro posizioni di riposo, che reagiscano alle forze applicate dall'esterno. La caratteristica di rigidità si esplicita in una serie di vincoli tali per cui la distanza tra due qualunque punti di un corpo è costante. Se consideriamo, allora, le  $n$  parti ‘puntiformi’ in cui abbiamo inizialmente pensato di suddividere il sistema oggetto di studio, e pensiamo di localizzarle nello spazio, dovremo indicare per la prima di esse ad es. le sue tre coordinate cartesiane  $x_1, y_1, z_1$  che sono totalmente libere; quindi solamente altre due per la seconda, dal momento che questa ha una distanza prestabilita dalla prima, già localizzata, e potrà solo posizionarsi su una superficie sferica centrata sulla prima particella e di raggio pari alla distanza tra la prima e la seconda; infine una sola coordinata individuerà la posizione di una terza particella, dal momento che la sua distanza dalla prima e dalla seconda sono prestabilite ed essa potrà solo posizionarsi lungo una circonferenza il cui asse coincide con il segmento unente le prime due particelle e di raggio prefissato dalle distanze. A questo punto, ogni successiva particella del sistema avrà una

posizione vincolata nello spazio, in quanto è prestabilita la sua distanza dalle prime tre particelle già localizzate nello spazio e quindi non ha, come si dice, gradi di libertà. Le coordinate complessive necessarie per individuare ogni particella del corpo rigido nello spazio sono dunque sei, somma delle prime tre per la prima, più due per la seconda e una per la terza. La definizione delle sei variabili dipendenti dal tempo richiederà l'impostazione di un sistema di sei equazioni. Il modello di corpo rigido riduce a sei il numero delle equazioni del sistema.

I sei gradi di libertà propri di un corpo rigido non sono necessariamente le coordinate cartesiane di alcuni suoi punti; essi possono essere scelti liberamente e, purché siano indipendenti l'uno dall'altro, la conoscenza di come essi varino nel tempo fornisce la conoscenza della variazione temporale di qualsiasi altra coordinata posizionale del sistema, cioè di qualunque altro punto o particella del sistema, in quanto qualsiasi altra coordinata è legata univocamente ad essi. In taluni casi, il problema specifico in studio suggerisce la scelta delle coordinate. Ad esempio, nel caso di un corpo vincolato a ruotare attorno a un asse, il modo più opportuno è quello di identificare la posizione di un punto dell'asse di rotazione con tre coordinate cartesiane, di definire con due coordinate angolari nello spazio la direzione dell'asse e con un'ulteriore coordinata angolare la giacitura di un piano passante per questo asse. È interessante ricordare che anche se il corpo fosse libero, comunque, il moto istantaneo avviene sempre come moto di rotazione attorno a un asse (che, tuttavia, può variare da istante a istante), lungo il quale vi è anche traslazione. Le equazioni del moto, opportunamente trattate, si riducono a tre equazioni che governano la traslazione del corpo, ovvero il suo il moto d'insieme, come se fosse un punto materiale, e a tre altre equazioni che governano la rotazione del corpo nello spazio. Sei equazioni scalari, quindi, equivalenti a due equazioni vettoriali, una per la traslazione e una per la rotazione. Ancora, quindi, sei equazioni, una per ciascuna coordinata scelta per descrivere il moto, o per ogni grado di libertà.

## 2.2 Strutture materiali e stati fisici della materia

### 2.2.1 Le equazioni di stato

Il modello di corpo rigido che abbiamo delineato nel paragrafo 2.1.3 schematizza il comportamento di un gran numero di corpi – con cui sperimentiamo comunemente

e che siamo soliti chiamare impropriamente *solidi*, dall'immagine che ci deriva dalle nozioni della geometria elementare –, di quei corpi che non sembrano variare di forma né di volume pur se sottoposti a sollecitazioni di grande entità. Un corpo rigido, come lo si è propriamente definito in precedenza, non esiste in natura: non può esistere, come si può intuire pensando che la sua risposta a una sollecitazione prodotta dall'esterno con risultante nulla non può che nascere da una variazione fisica del corpo stesso, cioè da una sua variazione volumetrica o di forma. E ciò non solo, poiché, se un corpo rigido fosse sottoposto in un punto a una forza (con la retta di applicazione passante per il centro di massa, per non dar luogo a momenti di rotazione) esso traslerebbe senza deformarsi e ciò vorrebbe dire che tutti i punti del corpo ‘sentirebbero’ la sollecitazione allo stesso istante, contravvenendo al principio della relatività che vuole una velocità comunque finita di trasmissione dell'informazione da un punto a un altro dello spazio. Resta, quindi, valida e motivata la domanda di quale sia il comportamento di un corpo ‘solido’ sottoposto a sollecitazioni esterne, magari a risultante nulla così da non doverci preoccupare della sua dinamica. Solido, anzitutto, come quello di una struttura la più assimilabile a un corpo rigido, perché un liquido, e ancor più un aeriforme, non sembrano avere una struttura propria; di essi parleremo subito dopo.

L'interesse per la conoscenza della risposta di un corpo a sollecitazioni esterne è argomento che supera il limite per un corpo solido, come qui si sta accennando, e tocca invece la casistica più generale possibile di tutti i corpi, sotto qualunque fase o stato chimico fisico essi si trovino. Spostando infatti l'interesse dalla risposta del moto del corpo nel suo complesso – per il che sono a disposizione le due equazioni cardinali della dinamica riguardanti l'accelerazione del centro di massa e del momento d'inerzia – a quella delle sue singole parti quando sia sottoposto a un sistema di forze esterne, che ne mutino le posizioni reciproche senza provocarne lo spostamento del centro di massa né la variazione del momento di rotazione, occorre conoscere il comportamento di ogni regione del corpo nella mutua interazione con le altre, il rapporto causa/effetto. Ciò può avvenire se si conosce il legame funzionale tra le grandezze omogenee con la forza con quelle omogenee con le deformazioni: l'interazione di una regione, pensata quanto più piccola possibile come una ‘particella’ del corpo, con le altre è dovuta a un insieme di forze agenti sulla particella, alla quale questa risponde in condizioni di equilibrio con una deformazione tale da ‘reagire’

con forze eguali e contrarie. In un corpo sottoposto dall'esterno a un insieme di forze a risultante e momento risultante nulli, quindi, si determinano localmente forze (che, come vedremo tra poco, meglio è chiamare sforzi) e deformazioni – cause ed effetti – tra loro legate da una relazione che è specifica del materiale di cui è costituito il corpo. Tale relazione, che può genericamente dipendere dalla temperatura ed eventualmente dalla ‘storia’ del corpo, costituisce l’equazione di stato del sistema, che possiamo scrivere in via del tutto generale uguagliando a 0 una funzione opportuna delle variabili

$$f(\text{sforzi, deformazioni, temperatura, \dots}) = 0.$$

La sua conoscenza, determinata sperimentalmente per i singoli materiali, è di fondamentale importanza per conoscere la ‘dinamica’ di un corpo, intesa nel senso più generale dell’evoluzione delle singole parti del corpo. In linea con quanto detto, nel caso di un corpo rigido, dovremmo paradossalmente asserire che le cause non determinano alcun effetto e questo è di per sé un asserto che nega l’esistenza di un corpo rigido. Nel caso di un corpo rigido l’equazione di stato statuirebbe che le deformazioni sono identicamente eguali a zero!

## 2.2.2 Solidi

Nella sezione precedente si è delineato il comportamento di un solido come quello di un corpo che può mutare di dimensioni e di forma, possedendo peraltro una configurazione di riposo, quella cui si riduce spontaneamente quando vengono a cessare le sollecitazioni esterne. Quest’ultime, come è stato detto più volte pur senza soffermarsi sulla motivazione dell’inserimento, sono state spesso qualificate come *a risultante nullo*, e qui aggiungeremo anche *a momento risultante nullo*, in virtù del fatto che è già noto l’effetto globale che un risultante delle forze o dei momenti produce sul sistema: l’accelerazione lineare del centro di massa e, rispettivamente, l’accelerazione angolare del momento d’inerzia. L’attenzione si dovrà quindi focalizzare sulle deformazioni del corpo e sul legame tra queste e le sollecitazioni esterne che le generano. La funzione di stato più semplice che descriva questo legame si ha per un materiale isotropo sottoposto a sforzi di trazione: una sbarra si allunga in modo proporzionale alla sua lunghezza iniziale  $L$ , alla forza agente  $F$  e inversamente all’area

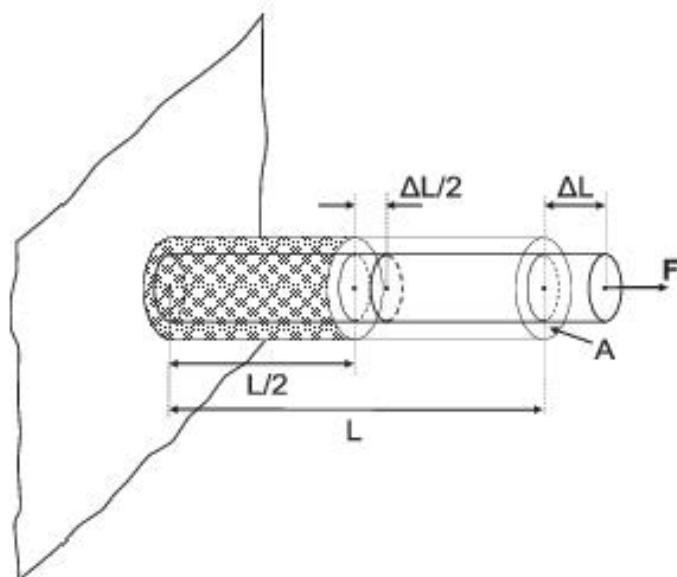
della sezione  $A$ ; è questa la legge di Hooke che scriviamo come:

$$\Delta L \propto L \frac{F}{A}.$$

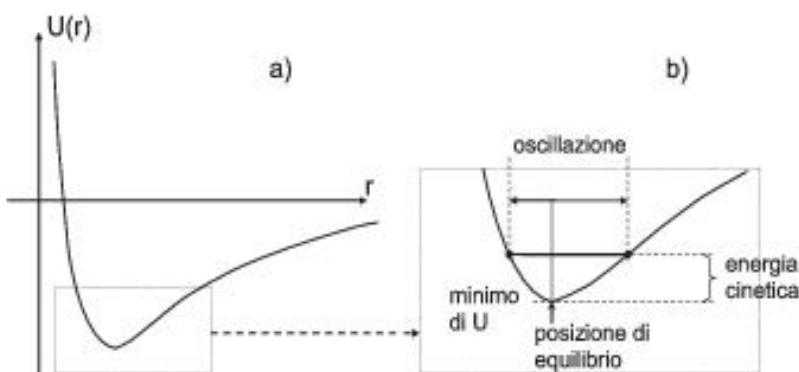
Essa sancisce la proporzionalità diretta tra la causa, rappresentata dallo sforzo (forza diviso area), e l'effetto, rappresentato dalla deformazione (variazione relativa della lunghezza).

Su questa semplice rappresentazione dell'equazione di stato è facile e opportuno fare due considerazioni. La prima è una generalizzazione della legge e riguarda l'estensione del fenomeno a geometrie e simmetrie diverse dei solidi: per esempio, la sbarra può essere sottoposta a forze di scorrimento, quando la forza (meglio sarebbe dire le forze, poiché a una forza applicata su una superficie deve corrispondere almeno un'altra opposta su una diversa superficie, per portare a

zero il contributo complessivo delle forze esterne) applicata su una faccia è diretta parallelamente alla giacitura di questa, anzi che normalmente. In tal caso anche la deformazione sarà generalmente costituita da una traslazione di questa faccia in direzione parallela. Si intuisce che nel caso più generale in cui una piccola porzione del materiale è sollecitata dall'esterno per applicazione di una composizione di forze sulla sua superficie limite, saremo portati a individuare tutte le componenti delle forze agenti su tutte le facce e le deformazioni date dalle traslazioni di tutte le facce in tutte le direzioni. Date le tre direzioni dello spazio fisico, avremo  $9 = 3 \times 3$  possibili componenti della sollecitazione – il tensore degli sforzi  $\sigma_{ij}$  – e  $9 = 3 \times 3$  possibili componenti delle deformazioni – il tensore appunto delle deformazioni,  $\epsilon_{kl}$ . Scrivremo pertanto una legge di Hooke generalizzata, introducendo i due tensori degli sforzi e delle deformazioni con due indici ciascuno, legati in proporzionalità diretta



**Fig. 2.4.** Allungamento relativo di un'asta solida proporzionale allo sforzo



**Fig. 2.5.** Funzione potenziale (a) di un atomo in un reticolo cristallino e parametri dinamici attorno alla condizione di equilibrio (b)

tramite un tensore a quattro indici, che sintetizza la risposta elastica del mezzo

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}.$$

La seconda considerazione che dovremo fare sull'iniziale legge di Hooke riguarda i limiti della sua applicabilità, legati sostanzialmente ai valori della sollecitazione – che ormai possiamo chiamare più propriamente sforzo – applicata al mezzo. La relazione di dipendenza della deformazione dallo sforzo applicato è solo in prima approssimazione di proporzionalità diretta, così che quando lo sforzo aumenta si deve tenere in conto lo scostamento da questa dipendenza introducendo termini di secondo ordine e anche più elevati. La linearità è solo l'approssimazione di primo livello del legame funzionale tra le cause e gli effetti o dell'equazione di stato dei solidi elastici. Essa è spesso accettabile nella pratica dal momento che la gran parte dei solidi elastici è solo debolmente deformabile anche in condizioni di elevati sforzi applicati e questo giustifica implicitamente il fatto che in molti casi pratici il modello di corpo rigido vale come una buona approssimazione del comportamento strutturale dei solidi.

Un'ultima considerazione, e non di scarso peso, va fatta in merito all'equazione di stato, che si è scritta legando gli sforzi alle deformazioni. Essa riguarda l'ulteriore dipendenza delle deformazioni dallo stato termico del sistema. A un aumento di temperatura, come sappiamo, corrisponde infatti un aumento dell'energia media di ogni singolo grado di libertà del mezzo e in particolare un aumento dell'ampiezza di vibrazione di ogni atomo attorno alla propria posizione di riposo. Poiché la buca di potenziale in cui l'atomo si trova non è simmetrica rispetto alla riduzione o all'a-

mento della distanza dalla condizione di minimo, ciò significa che a un incremento della temperatura corrisponde una variazione delle dimensioni del corpo e quindi una sua deformazione: tipicamente, data la forma ad aprirsi verso l'esterno della buca di potenziale, a un aumento di temperatura corrisponde generalmente un aumento del volume del corpo, cioè una deformazione positiva. Tale dipendenza rientra nell'equazione di stato generica del mezzo, che deve inglobare quindi come variabile anche la temperatura.

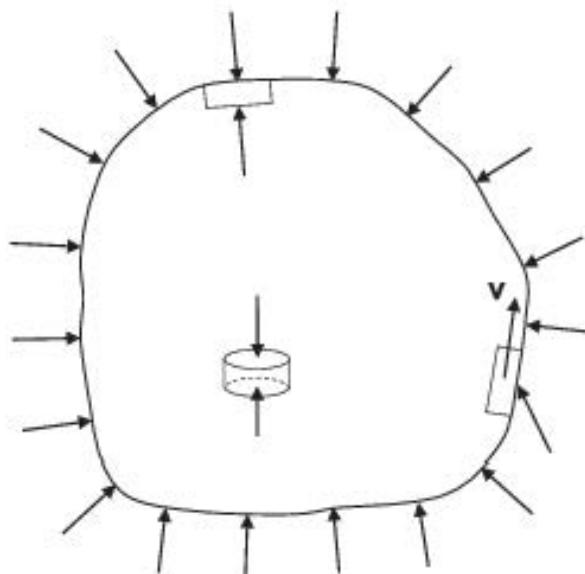
### 2.2.3 I liquidi

Fa parte dell'esperienza comune l'immagine di un blocchetto o di una sottile lastra di ghiaccio tratta dal frigorifero che fonde sul piano del tavolo dove è stata posta e meno comune, ma di eguale storia, quella di un'asticciola di stagno fondere sulla punta del saldatore. La *fusione* è il passaggio di una sostanza dallo stato solido a quello liquido, un *cambiamento di stato* – come è corretto dire – che avviene, come nei due esempi riportati, in seguito al trasferimento di calore dall'esterno alla sostanza interessata. L'energia ceduta a un solido, così come l'abbiamo modellizzato nella sezione precedente con gli atomi vincolati ciascuno nella buca di potenziale determinata da quelli vicini, si ridistribuisce per conduzione a tutti gli atomi, ciascuno dei quali incrementa la propria energia, cinetica e potenziale, determinando una variazione globale di temperatura (che è per l'appunto una misura dell'energia media di ogni possibile modo, o *grado di libertà*, in cui essa può distribuirsi), che aumenta fino al valore cui corrisponde l'uscita degli atomi dalla propria buca e il conseguente smembramento del reticolo cristallino: il solido si è distrutto nella sua compattezza primitiva e la sostanza ha mutato di stato, divenendo liquida. Durante la trasformazione la cessione di calore dall'esterno viene utilizzata dalla sostanza per la liberazione degli atomi e non più per incrementare l'energia dei loro singoli gradi di libertà: il calore necessario per tale trasformazione, limitatamente a una mole della sostanza si chiama *calore latente di fusione*. Nella condizione di liquido la sostanza generalmente è aumentata un po' di volume, quindi è diminuita un po' di densità massica (con un'importante eccezione per l'acqua), e i singoli atomi – o gruppi di atomi tra loro legati in molecole – si possono muovere l'uno rispetto all'altro con una relativa libertà, interagendo con deboli *forze di coesione*, responsabili dei fenomeni di *viscosità* e di *capillarità*. Nascono cioè delle forze opposte alla velocità quando una regione di liquido si muove rispetto

alle regioni limitrofe e così pure nelle regioni prossime alla superficie limite dove si rompe la simmetria di isotropia del mezzo per quanto riguarda le interazioni con le zone verso l'interno del liquido e verso l'esterno. Va da sé, quindi, che nel caso di un liquido macroscopicamente in quiete, nel quale cioè sono prive di velocità regioni sufficientemente piccole da potersi considerare uniforme ogni grandezza fisica al loro interno, ma sufficientemente grandi da potersi mediare a zero il moto 'termico' delle molecole, non possono avversi fenomeni di viscosità.

Resta da considerare ora il problema della risposta di un mezzo liquido a sollecitazioni esterne e, prima ancora, da precisare l'essenza di queste sollecitazioni esterne. Data la natura dei mezzi liquidi, nei quali una regione si può muovere rispetto a un'altra senza intervento di consistenti forze interne tra le due regioni, il vincolo che la risultante delle forze esterne sia nulla richiede che il liquido sia 'contenuto' dalla sua superficie limite o, meglio, che sulla superficie limite ci sia una distribuzione continua di forze – che esamineremo per ciò che attiene al loro valore – tali da avere risultante nulla e da

'contenere' il liquido al suo interno. Poiché un'eventuale componente di tali forze di superficie diretta parallelamente alla giacitura della stessa superficie nel punto di applicazione farebbe scorrere una porzione di liquido rispetto ad altre, non potendosi indurre forze di reazione da parte del liquido per moti di scorrimento, ciò significa che in condizioni di equilibrio sulla superficie limite possono aversi solo forze normali alla superficie stessa. Tali forze, rapportate all'area della superficie su cui agiscono, costituiscono la pressione. La risultante di tutte queste forze di pressione deve bilanciare la risultante di eventuali forze che agiscano dall'esterno su ogni sin-



**Fig. 2.6.** Distribuzione delle forze sulla superficie libera di un liquido in quiete e su una particella all'interno. Un'eventuale componente tangenziale provocherebbe un moto di traslazione della particella

gola porzione del mezzo, cioè le *forze di volume*, prima fra tutte il peso e le forze d'inerzia presenti in sistemi accelerati. Nel caso che tali forze di volume siano assenti, o comunque trascurabili, la risultante delle forze di pressione si deve annullare. Poiché, peraltro, su ogni volumetto considerato del liquido, come fosse un volume cilindrico di altezza trascurabile, all'equilibrio la forza è nulla, si deduce che le forze sulle due basi sono eguali ed opposte e quindi che "la pressione è eguale ovunque all'interno di un liquido in quiete in assenza di forze di volume", secondo quanto esprime il teorema (un tempo 'principio') di Pascal.

Ora appare facilmente accettabile il risultato per cui una pressione esercitata su un liquido, che si presenta identica in ogni punto, provoca una variazione di volume a essa proporzionale e, in quanto identica su ogni frazione del liquido di eguale volume, anche proporzionale al volume di riposo. Siamo così portati a scrivere l'equazione di stato per un liquido nel modo

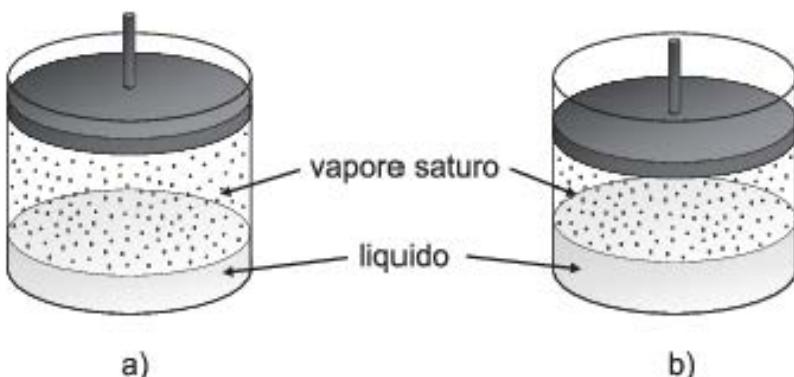
$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{p}{K}$$

nella quale la costante di compressibilità  $K$  riassume la risposta del mezzo alle sollecitazioni esterne. Tale equazione non è essenzialmente diversa da quella già ritrovata per i solidi, se si fa eccezione per il fatto che il liquido è strutturalmente isotropo e che l'assenza di sforzi di taglio uniformizza la pressione in tutti i punti, non differenziando quindi una direzione da ogni altra. E, come si è generalizzata per i solidi l'espressione a termini superiori a quelli lineari del primo ordine, così per i liquidi si può immaginare uno sviluppo seriale della variazione relativa del volume in funzione della pressione.

Anche per i liquidi, tuttavia, vale quanto detto per il caso dei solidi che, dato l'alto valore della costante di compressibilità, l'approssimazione lineare è spesso sufficiente per una descrizione ravvicinata del comportamento elastico. Più ancora, può bene valere anche la così detta approssimazione zero, per la quale la stessa variazione di volume può essere trascurata e il liquido può ritenersi incomprimibile. Tale approssimazione, unita a quella di totale assenza di forze vischiose, costituisce la condizione per la costruzione di un modello di liquido, che viene detto *liquido perfetto*.

## 2.2.4 Gli aeriformi

La debole forza di legame tra le molecole di un liquido, che viene completamente trascurata nel modello del liquido perfetto, diviene di fondamentale importanza per



**Fig. 2.7.** La riduzione del volume a disposizione di un sistema bifasico a temperatura costante non riduce la densità, né la pressione, dell'aeriforme

la comprensione del passaggio allo stato di aeriforme. A tale fine si pensi di disporre una certa quantità di liquido in un contenitore chiuso di volume maggiore di quello occupato dal liquido, con la parte del volume differenza completamente vuota. Si constaterà che in breve tempo tale regione si riempirà della medesima sostanza del liquido, ma a differenza di questo sarà in fase aeriforme. Alcune molecole del liquido, infatti, in virtù dell'agitazione termica hanno un'energia cinetica sufficiente per vincere l'energia di legame che le tiene ravvicinate alle altre e fuoriescono dalla superficie libera andando a occupare lo spazio libero a disposizione nel recipiente sino a raggiungere una condizione di densità tale per cui il numero di quelle uscenti in un qualunque breve intervallo di tempo attraverso una qualunque porzione della superficie libera egualga il numero di quelle che dalla fase aeriforme incidono nel medesimo intervallo temporale sulla medesima porzione di superficie tornando nella fase liquida. In queste condizioni si raggiunge in brevissimo tempo un equilibrio dinamico e le quantità di sostanza presenti nel recipiente in ciascuna delle due fasi non muteranno più se non sopravvengono scambi di energia con l'esterno. Rispetto alle condizioni iniziali, si sarà parzialmente ridotta nel recipiente la quantità di sostanza nella fase liquida, che sarà passata per *evaporazione* a una fase aeriforme di *vapore* e più precisamente di *vapore saturo* (come si descriverà con maggior estensione nel paragrafo 2.6 a pagina 67), a ricordare che nel volume a disposizione non potrà esserne contenuta una quantità maggiore. Se ora si variasse in condizioni isoterme il volume complessivo del recipiente, magari per traslazione di un pistone di chiusura, non si varierà la densità delle molecole del vapore (né quindi la sua pressione), ma

si provocherà soltanto il passaggio netto di un certo numero di molecole da una fase all'altra: da quella di vapore a quella liquida se si riduce il volume, da quella liquida a quella di vapore se si aumenta. Occorre precisare, tuttavia, che se si esegue per es. un incremento di volume a una data temperatura iniziale in condizioni adiabatiche, senza apporto di calore dall'esterno, il passaggio di una parte del liquido alla fase di vapore con relativa sottrazione complessiva di energia cinetica dal sistema per vincere i legami intermolecolari, provoca una riduzione della temperatura. È esperienza comune la riduzione che ha luogo in un sistema in seguito a evaporazione, come nel caso in cui ci si asciughi all'aria dopo essersi bagnati o in condizioni di sudorazione. Perché ciò non accada, è necessario fornire dall'esterno al sistema la corrispondente energia, sotto forma di calore ceduto o lavoro eseguito. Naturalmente, nel caso indicato di un corpo che si asciughi all'aria l'evaporazione avviene in un volume aperto, non confinato, dove non si raggiunge la condizione di saturazione che abbiamo più sopra descritta; a maggior ragione, in tal caso, l'evaporazione può continuare fino all'intera trasformazione della fase liquida presente in quella di vapore.

Nell'esperimento che più sopra si descriveva, di aumentare in condizioni isotermi il volume a disposizione del sistema, la fase liquida si muta in quella di vapore nella quale la distanza media tra le molecole è maggiore rispetto a quella della fase di partenza, corrispondendo ciò al fatto che il vapore presenta una densità massica minore di quella del liquido. Questa differenza, tuttavia, va diminuendo se si pensa di effettuare l'esperimento a temperature via via crescenti, in quanto al crescere della temperatura la maggiore energia cinetica media delle molecole permette che la loro distanza media diminuisca, senza che prevalga l'energia di legame a costituirle in fase liquida. Si può allora immaginare che si raggiunga una temperatura tale alla quale la distanza media tra le molecole in fase di vapore sia eguale a quella in fase liquida: a questa *temperatura critica* le due fasi hanno la stessa densità, numeri eguali di molecole occupano eguali volumi. A temperature maggiori corrispondono energie medie delle molecole così elevate che, per quanto si confini in volumi più piccoli il sistema, questo non potrà più transire alla fase liquida: al di sopra della temperatura critica non vi potrà più essere la fase liquida e in queste condizioni la fase aeriforme si chiama più propriamente *gas*.

Poiché un gas non è in mutua presenza con la sua fase liquida, esso assume il volume proprio del contenitore, sulle cui pareti esercita una pressione dipendente dalle

condizioni di temperatura alle quali si trova. Si stabilisce intrinsecamente un legame tra i parametri che definiscono lo stato del gas, un'*equazione di stato* tra le tre variabili termodinamiche  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . Nella realtà, nella fase gassosa sussistono ancora deboli forze d'interazione tra le molecole, ma l'energia di legame corrispondente è assai più piccola dell'energia cinetica media posseduta da queste in virtù dell'agitazione termica. Se si trascura l'energia di legame e si considerano puntiformi le molecole, così da potersi ritenere che ciascuna di esse ha a disposizione l'intero volume del recipiente in cui muoversi, è facile formulare l'equazione di stato per quello che è il modello del *gas perfetto*. Per esso, a ogni data temperatura, pressione e volume sono in relazione inversa e, fissato il volume del recipiente, la pressione aumenta all'aumentare della temperatura, misurata sulla scala assoluta. L'equazione è quella familiare generalmente nota

$$pV = nRT$$

in cui  $n$  rappresenta il rapporto tra il numero delle molecole del gas considerato e il così detto numero di Avogadro  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ , pari a quante sono le molecole in una massa pari al peso molecolare.

### 2.3 Il concetto di campo in fisica. I campi conservativi

Nella vasta fortuna che la parola campo ha incontrato nella storia del linguaggio c'è il concetto comune di uno spazio occupato da un insieme di oggetti omogenei: così è nel primitivo esempio del campo agricolo dove si coltivano piante di un certo tipo, così nel termine bellico della battaglia dove si figurano armi e combattenti, così nell'accezione culturale dove si estendono le competenze sugli argomenti comuni di un certo ambito ecc. Nelle discipline scientifiche, più che nella terminologia corrente, il termine si trasferisce dal contenitore al contenuto e si riferisce più specificatamente all'insieme degli oggetti, come nell'algebra, o alla grandezza che specifica il campo, come nella fisica. Va subito detto, infatti, che campo gravitazionale, campo elettrico, campo magnetico non sono le zone di spazio dove sono presenti i fenomeni che si accompagnano a quelle specifiche del campo, ma sono le grandezze fisiche che si definiscono punto per punto dello spazio, in modo 'operativo', cioè indicando il procedimento seguendo il quale si giunge alla completa identificazione della grandezza. Per il campo gravitazionale in un punto, ad esempio, si deve pensare di posizionare

nel punto una massa, sufficientemente piccola perché la definizione possa riferirsi al punto e non a una regione estesa e anche perché non perturbi il preesistente, si misura la forza che agisce sulla massa e il rapporto tra la forza e la massa definisce il vettore campo gravitazionale in quel punto:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Il valore del campo non dipenderà così dal valore della massa di prova, poiché la forza sarà proporzionale a essa e il rapporto con la massa ne sarà quindi indipendente. Al variare del punto, varierà la forza e varierà conseguentemente il campo. La medesima definizione operativa si trasferisce al caso del campo elettrico, dove ancora maggiore attenzione occorre fare al valore della carica di prova, poiché nel caso elettrico le forze sono in genere assai maggiori e assai maggiore di conseguenza l'eventuale perturbazione prodotta sul preesistente dalla carica, soprattutto perché in tal caso la carica di prova può indurre variazioni nella distribuzione delle cariche libere in eventuali conduttori presenti nello spazio:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Nel caso del campo magnetico, o meglio di quello di induzione magnetica, la definizione operativa non è così diretta come per il caso dei due campi già descritti per via del rapporto spaziale di ortogonalità tra la forza agente sull'elemento di prova – in tale caso una corrente elettrica in un tratto di conduttore filiforme – e il campo: la definizione può essere tuttavia implicita, attraverso l'espressione della forza agente

$$\mathbf{F} = i\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Come si può dedurre dall'espressione del prodotto vettore, per stabilire la direzione del campo, occorre trovare la direzione nello spazio secondo cui orientare l'elemento di corrente  $i\Delta\mathbf{l}$  perché si abbia un valore nullo della forza.

Nei tre casi esemplificati si è visto come il campo sia esso stesso la grandezza fisica di interesse e l'elemento di prova su cui si esercita la forza è omogeneo con l'elemento sorgente del campo: cioè la massa sente il campo gravitazionale prodotto da un'altra massa, la carica da un'altra carica, una corrente da un'altra corrente. I campi

esaminati sono gli elementi di interconnessione tra le grandezze in interazione, per le quali si enunciano le leggi di forza: di Newton, di Coulomb e, meno direttamente, di Laplace. Si noti come per questi campi, diversamente da altri, come per es. per quelli di velocità ( $v$ ), di forze ( $F$ ) o di temperature ( $T$ ), la grandezza contemplata obbligatoriamente nel nome il termine campo. In tutti i casi, tuttavia, come si è accennato all'inizio, il campo è una funzione del punto, eventualmente del tempo e di altre variabili, per la quale può genericamente porsi

$$f = f(\mathbf{r}, t, \dots),$$

dove con  $f$  si può intendere una qualunque delle grandezze citate in precedenza:  $g$ ,  $E$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $T$ .

Accettato il campo come grandezza fisica, quindi descrivibile come funzione, potremo ritrovarne le caratteristiche attraverso lo studio di detta funzione rappresentativa. La presenza delle forze che i campi esercitano sugli elementi di massa, carica o corrente presuppone che al moto di questi corrisponda un lavoro compiuto dalle forze del campo e, quindi, la presenza di un contenuto energetico del campo nello spazio dove è definito. Se il campo è costante nel tempo, il lavoro compiuto dalle forze del campo sarà ovviamente indipendente dal tempo e dipendente invece dalla traiettoria eseguita dal punto sul quale agiscono le forze. Per il campo gravitazionale e per quello elettrico, il lavoro compiuto dalle forze del campo dipende ancor più semplicemente dai soli estremi della traiettoria compiuta dal punto e non dall'intero percorso: tali campi si dicono *conservativi* e per essi si può introdurre nello spazio una funzione del punto  $U(\mathbf{r})$ , che prende il nome di *energia potenziale*. È interessante osservare che tale caratteristica deriva dalla proprietà del campo di essere radiale – cioè che nel caso di sorgenti puntiformi la sua direzione in ogni punto è quella del segmento che unisce la sorgente al punto – e di dipendere unicamente dal modulo della distanza dalla sorgente (nel caso specifico, con la legge dell'inverso del quadrato:  $r^{-2}$ ). Con questi due vincoli, si capisce che la dipendenza del campo dalla posizione nello spazio è praticamente quella di uno scalare legato a una sola variabile monodimensionale  $r$  (e non al vettore tridimensionale  $\mathbf{r}$ ) e che, come tale, il lavoro dipenderà anch'esso da questa sola variabile monodimensionale. Qualunque traiettoria possa compiere il punto nello spazio, ciò che conta ai fini del lavoro è solo la variazione prodottasi nel valore della distanza dalla sorgente, cioè i due valori

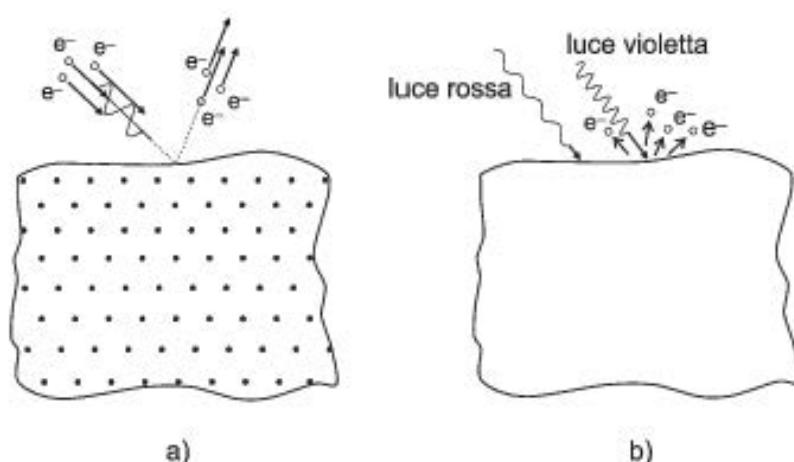
estremi  $r_{iniz}$  e  $r_{fin}$  della traiettoria. L'estensione al caso di sorgenti non puntiformi deriva immediatamente dalla linearità del campo, poiché la funzione potenziale di una distribuzione qualsivoglia di masse (cariche) sarà data dalla somma dei valori delle funzioni potenziali delle componenti. Si comprende così anche come il campo magnetico non sia conservativo; esso infatti non è radiale e peraltro la sua ‘sorgente’, la corrente, non è intrinsecamente puntiforme, ma è dotata di una direzione, comunque piccola.

La presenza di una funzione potenziale legata al campo consente l'applicazione del teorema delle forze vive, o della conservazione dell'energia meccanica, nei problemi dinamici legati al moto di masse o cariche nei campi gravitazionali o elettrici. La natura del doppio segno delle cariche nel caso elettrico, rispetto a quello gravitazionale, richiede una corrispondente attenzione nella valutazione dell'energia potenziale: è noto che in tal caso si introduce il concetto di *potenziale elettrico*, grandezza definita in ogni punto dello spazio come l'energia potenziale posseduta da una carica positiva posta nel punto e rapportata alla carica, fatta eguale a zero quella della stessa carica all'infinito. L'attrazione tra masse e la repulsione tra cariche dello stesso segno rende negativo – inversamente proporzionale alla distanza – il potenziale generato da una massa ‘puntiforme’ e positivo quello di una carica positiva ‘puntiforme’.

## 2.4 Le oscillazioni armoniche

Con la crisi della fisica classica e l'avvento delle teorie quantistiche ai primi decenni dello scorso secolo apparve chiaro che le immagini già assodate di particelle materiali e di onde come di entità distinte sotto cui suddividere gli enti della realtà fisica non potevano più mantenersi separate, dal momento che le prime, in certi ambiti fenomenologici, godevano delle caratteristiche di onde e le seconde mostravano caratteristiche tipiche dei corpuscoli materiali. Valgano due esempi in proposito: primo, un fascetto di elettroni – tipicamente pensati come corpuscoli ovvero come oggetti occupanti una definita zona di spazio con la loro massa – incide su un cristallo dalla struttura spaziale regolare e viene diffratto secondo certe direzioni e non secondo altre, dimostrando così di poter dar luogo a effetti di interferenza, tipici delle onde; secondo, un raggio di luce incide su una superficie metallica e provoca da questa la fuoruscita di elettroni di conduzione, ma solo se la frequenza della radiazione è superiore a un certo valore, poiché il raggio è costituito da un insieme di singoli

quanti, o particelle, di luce, ciascuna avente una determinata energia proporzionale alla frequenza, per cui se questa non supera un certo valore il singolo quanto non ha energia sufficiente per scalzare un elettrone dal metallo dall'interno di questo. Onde e particelle sono, pertanto, nella visione della fisica quantistica due aspetti compresenti della realtà fenomenologica. Nei modelli della fisica classica, tuttavia, essi sono ben distinti, nel senso che le particelle partecipano della sola natura inerziale della meccanica e le onde si propagano rispettando il principio di sovrapposizione; il che costituisce un'ottima approssimazione nei casi in cui le quantità di moto delle particelle in considerazione siano sufficientemente più grandi della costante  $h/\lambda$  (dove  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  J·s è detta costante di Planck), corrispondendo a onde di lunghezza d'onda  $\lambda$  estremamente piccola, e le onde trasportino energia sufficientemente più grande della costante  $h\nu$  (con  $\nu$  la frequenza della radiazione, corrispondendo a fasci con moltissimi quanti sovrapposti). L'unificazione delle due nature su scala microscopica porta alla scrittura di un'equazione per il moto stazionario di una 'particella' simile a quella di un'onda e la distribuzione della probabilità di trovare la particella in una certa regione dello spazio oscilla in funzione delle coordinate spaziali allo stesso modo di come oscilla nel tempo la sua posizione nell'interpretazione della fisica classica, se fosse situata in una buca di potenziale. L'interesse, pertanto, di studiare il moto di una particella vincolata a una posizione da una forza di tipo elastico si estende anche a una possibile interpretazione quantistica e ne diamo qui dovuto cenno per



**Fig. 2.8.** a) Diffrazione di elettroni da un cristallo, come esempio della natura ondulatoria della materia e b) effetto fotoelettrico prodotto da radiazioni di alta frequenza, come esempio della natura corpuscolare della radiazione

le numerose implicazioni che ne seguono nei più svariati campi.

Ci applichiamo inizialmente a considerare un caso particolare, quello appunto di un oscillatore lineare forzato, emblematico di una categoria assai vasta di fenomeni, che si vorrà illustrare successivamente. Ricordiamo l'equazione del moto di una massa  $m$  vincolata a stare su una retta  $x$ , sottoposta a una forza oscillante nel tempo con pulsazione  $\omega$  e, inoltre, sia a una forza elastica di richiamo  $F_e = -kx$ , sia a una forza vischiosa di opposizione al moto  $F_v = -b\dot{x}$  (indicandosi col punto sovrapposto la derivata della funzione, quindi  $\dot{x} = v$ , velocità); si scrive

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

È questa un'equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea in quanto è presente il termine forzante noto, a secondo membro, che è risolta dalla semplice funzione oscillante con pulsazione  $\omega$ :

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

I valori delle due costanti del moto, l'ampiezza  $A$  e la fase  $\varphi$ , si determinano inserendo la soluzione nell'equazione e bilanciando i coefficienti, cioè cercando per quali valori delle costanti l'equazione si riduce a un'identità, sia cioè valida a ogni istante di tempo  $t$ . Si troveranno così i valori che devono assumere  $A$  e  $\varphi$  per ogni distinto valore della pulsazione  $\omega$ , da cui vengono a dipendere. Si ottengono

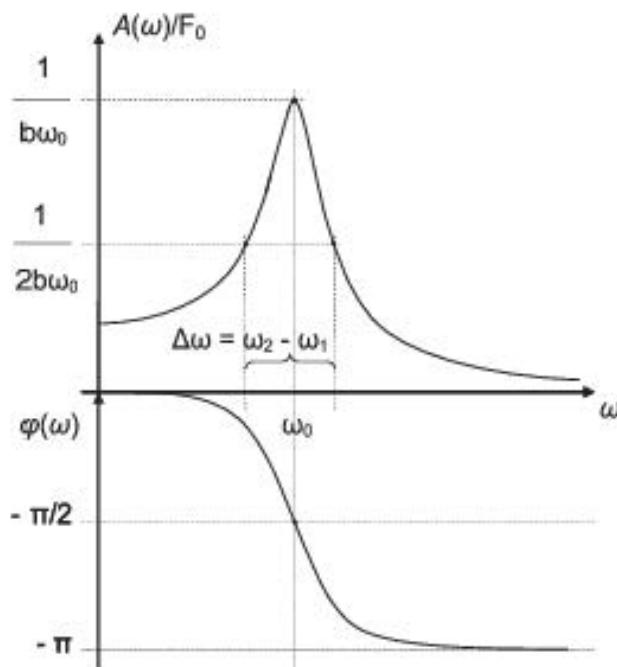
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{b\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

due espressioni dal cui andamento, riportato in grafico con  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , discende una serie di osservazioni.

Si osservi anzitutto che, nell'interpretare il significato delle costanti, si può essere sviati dal procedimento usuale mediante il quale se ne determinano i valori: solitamente, infatti, si sogliono definire i valori delle così dette *costanti di integrazione* sulla base dalle condizioni iniziali del moto (l'integrazione di un termine di derivata seconda richiede la specifica di due valori d'inizio). Per es. nel caso dello stesso oscillatore non forzato, per il quale l'equazione del moto è la medesima sopra scritta con la mancanza del termine forzante a secondo membro, la posizione e la velocità

iniziali  $x(t=0) = X_0$  e  $v(t=0) = V_0$ , definiscono le costanti di integrazione che, a loro volta, si ritrovano nei valori dell'ampiezza e della fase iniziali dell'oscillazione smorzata del punto.

Nel caso dell'oscillatore forzato in esame, invece, la soluzione proposta è quella di *regime*, alla quale si dovrà aggiungere un termine transiente – qui non considerato – che dipende dalle condizioni iniziali. Per come si è scritta l'equazione, invece, il termine forzante  $F_0 \cos(\omega t)$  non ha inizio, né fine, cioè non si pensa di ‘inizializzare’ a un certo istante a pilotare l'oscillatore e quindi non si deve aggiungere la soluzione transiente, che è una soluzione particolare dell'equazione omogenea: si cerca solo la soluzione stabile, la quale “non ha” *condizioni iniziali*.  $A$  e  $\varphi$ , pertanto, dipendono dalle grandezze fisiche che compaiono direttamente nell'equazione e non dalle condizioni iniziali. Tornando a commentare la soluzione dell'equazione del moto, si nota in prima istanza che l'ampiezza  $A$  dell'oscillazione è proporzionale all'ampiezza  $F_0$  della forza, come è facile aspettarsi dal fatto che l'equazione del moto è lineare e che quindi a doppia causa corrisponde doppio effetto ecc. Per ciò poi che riguarda la dipendenza dell'ampiezza  $A$  e della fase  $\varphi$  dalla frequenza (o pulsazione  $\omega$ ) della causa forzante, è importante osservare dall'espressione di entrambe la presenza di un evidente massimo nella curva dell'ampiezza e il corrispondente passaggio della fase attraverso il valore  $-\pi/2$ , indicativo della risonanza del sistema nell'intorno di quella specifica frequenza  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  alla quale oscillerebbe il punto se fosse libero e non soggetto a forze viscose ( $F_0 = 0$  e  $b = 0$ ). Alla frequenza di risonanza, il valore assunto dall'ampiezza è  $A_0 = \frac{F_0}{b\omega_0}$ , cioè tanto più alto quanto più è piccolo il



**Fig. 2.9.** Curva di risonanza per un oscillatore armonico: ampiezza e fase in funzione della pulsazione di eccitazione  $\omega$

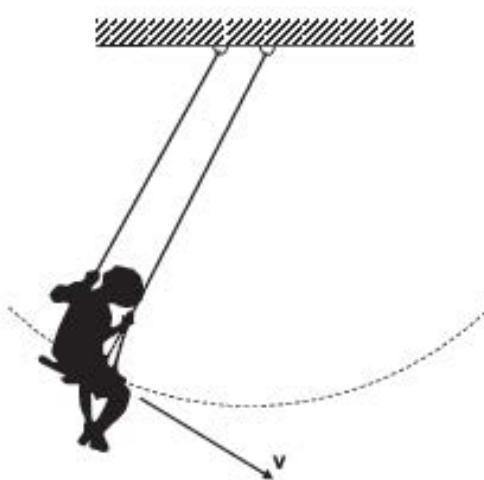
termine viscoso, tendendo all'infinito per il tendere a zero di questo. In corrispondenza, il passaggio della fase attraverso il valore  $-\pi/2$  significa che lo spostamento del punto alla risonanza ritarda di un quarto di periodo rispetto all'eccitazione e, poiché la velocità anticipa di un quarto di periodo lo spostamento (questo è il risultato di una derivata), ciò significa che alla risonanza velocità del punto e forzante sono in fase. Per frequenze inferiori, c'è un anticipo, per frequenze superiori c'è un ritardo. Se si ricorda che la potenza esercitata da una forza che compie lavoro è pari al prodotto della forza stessa per la velocità, la coerenza di fase tra queste due grandezze sinusoidali in un oscillatore alla risonanza indica che tale prodotto è sempre positivo ed è massima pertanto la potenza impiegata per pilotare l'oscillatore a questa frequenza, dove peraltro è anche massima la velocità: tale potenza viene dissipata nelle resistenze vischiose del mezzo. Il termine dissipativo, che limita l'ampiezza della risposta alla risonanza, è anche causa dell'allargamento della curva a campana della risposta e ciò è un indice di quanto bene l'oscillatore possa rispondere a forzanti aventi frequenze anche diverse da quella di risonanza. Si suole introdurre a tal proposito un parametro  $Q$  che caratterizza globalmente la risposta e che viene detto *fattore di merito*, pari al rapporto tra la frequenza di risonanza  $\omega_0$  e la differenza  $\omega_2 - \omega_1$  tra i valori delle due frequenze – la prima a destra, la seconda a sinistra della risonanza – alle quali la risposta vale la metà del valore alla risonanza. Si trova

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\sqrt{mk}}{b}$$

La differenza  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  fra i due valori estremi dell'intervallo di frequenze entro cui l'oscillatore presenta una risposta maggiore della metà di quella massima si suole indicare con l'espressione di *banda di risposta* dell'oscillatore. Si progetterà un oscillatore a banda larga o stretta, ovvero con basso o alto fattore di merito rispettivamente, a seconda delle esigenze costruttive. Il timpano umano, inteso come oscillatore pilotato dalle vibrazioni dell'aria in contatto dove si propagano le onde sonore emesse da una sorgente, dovrà presentare una risposta a banda larga (e quanto più piatta possibile, da ottenersi con opportune aggiunte al sistema meccanico oscillante) per ricevere quante più possibili frequenze sonore, mentre l'equipaggio oscillante di un orologio dovrà essere insensibile per quanto possibile alle sollecitazioni esterne casuali di ogni frequenza, fatta eccezione per quella sua propria di risonanza, dal cui periodo discende il moto costante di avanzamento delle lancette.

L'interesse per l'equazione dell'oscillatore armonico forzato non si limita, tuttavia, al solo caso indicato in inizio di una massa vincolata a una posizione di equilibrio attraverso una molla di richiamo; peraltro, già gli esempi su riportati del timpano e dell'orologio si scostano parzialmente dall'esempio dell'oscillatore semplice. Alla forma canonica dell'equazione differenziale su riportata si ricongiunge una serie di strutture fisiche, sia meccaniche sia elettriche, che qui vogliamo riportare parzialmente.

Nel pendolo semplice, quando una massa oscilla vincolata a un filo in verticale inestensibile sospeso a un punto fisso, la frequenza propria delle oscillazioni ha un'espressione che, per piccole ampiezze di oscillazione, non dipende dal valore di quest'ultime, secondo una caratterizzazione che va sotto il nome di *isocronismo* del pendolo con  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ , dove  $L$  è la lunghezza del filo di sospensione e  $g$  l'accelerazione di gravità. Il periodo è inoltre indipendente dal valore della massa oscillante: ciò deriva dal fatto che la forza di richiamo è in tal caso proporzionale alla massa stessa, che quindi per un verso è inerzia per un altro è forza. Nel caso di un pendolo, in generale, la forzante non varia sinusoidalmente nel tempo, ma o è assente (e allora si osservano le oscillazioni libere con la frequenza propria assai prossima a quella di risonanza appena trattata), o è impulsata con una periodicità regolare che si adatta a quella del periodo proprio. Quest'ultimo è il caso di un'altalena, a esempio, in cui si fornisce alla massa oscillante del bambino un impulso a ogni oscillazione propria, incrementando così all'inizio l'ampiezza delle oscillazioni, sino al raggiungimento di grandi ampiezze, alle quali l'energia immessa servirà soltanto a sopperire all'energia dissipata nel moto. Per ciò che riguarda la sequenza temporale degli impulsi esterni si può immaginare che lo sviluppo in serie di Fourier di questi fornisca una componente principale di frequenza pari a quella propria del pendolo e una serie di frequenze multiple, alle quali la



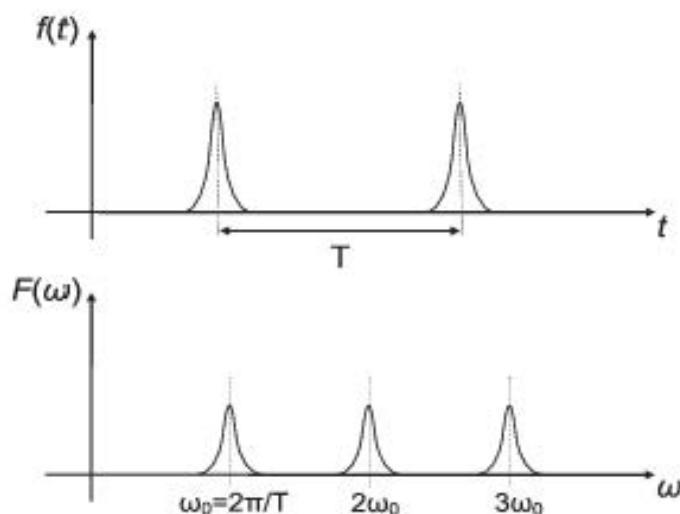
**Fig. 2.10.** Un bimbo su un'altalena esemplifica bene un pendolo semplice con frequenza delle piccole oscillazioni indipendente dalla massa del bimbo

risposta del sistema è pressoché nulla: il bimbo sull'altalena oscilla con la cadenza temporale degli impulsi impressi alla stessa frequenza propria delle oscillazioni libere.

Si noti quanto è comune dall'esperienza che, perché gli impulsi siano efficaci al fine di imprimerre il moto al sistema, essi devono essere impressi nel momento della massima velocità di oscillazione, quando il bimbo passa per la posizione verticale: in genere, si comincia a seguire il bimbo nel punto di massima elongazione incrementando la forza man mano che esso tende a tornare nella configurazione di sospensione verticale. Ciò è coerente con quanto precedentemente discusso a proposito della potenza dissipata e della fase dell'

l'oscillazione forzata. Analogamente al caso dell'altalena, nell'orologio a bilanciere o a pendolo l'equipaggio oscillante riceve un impulso a ogni periodo proprio dell'oscillazione, traendo energia da una molla carica che va scaricandosi o da un peso innalzato che discende lentamente. Naturalmente in questi casi l'equazione descriverà l'angolo di oscillazione piuttosto che lo spostamento, il momento di richiamo delle forze piuttosto che la forza elastica ecc., ma l'equazione descrittiva sarà ancora dello stesso tipo di quella su riportata.

Nel caso del suono emesso da una bottiglia o da un recipiente vuoti con un collo sul cui bordo si soffia un getto d'aria (*risuonatore di Helmholtz*), la frequenza udita è quella propria di oscillazione della massa d'aria contenuta nel collo, che si muove attorno alla posizione di riposo richiamatavi dalla differenza tra la pressione dell'aria esterna ( $p_0$  atmosferica) e quella interna nella bottiglia, che varia nel tempo per effetto del moto stesso della massa d'aria nel collo.



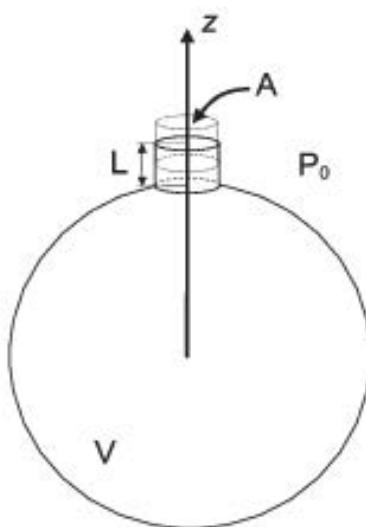
**Fig. 2.11.** Una forza ripetuta nel tempo con impulsi ritardati di  $T$  corrisponde a una sequenza di armoniche della fondamentale  $\omega_0 = 2\pi/T$

Quando questa, infatti, si sposta verso l'interno comprime l'aria nella bottiglia che aumenta di pressione in misura proporzionale alla variazione di volume, quindi allo spostamento, determinando la forza elastica di richiamo  $\Delta p A$  (con  $pV^\gamma = \text{cost}$ ,  $A$  area della sezione del collo e  $\Delta p = -\Delta V/V_0$ , dall'equazione delle trasformazioni adiabatiche in cui  $V_0$  è il volume della bottiglia e  $\gamma$  il rapporto tra calori molari a pressione e volume costanti). Il moto è oscillatorio, anche se ancora una volta l'eccitazione non è una pura sinusoide; tuttavia, tra le componenti della forzante rappresentata dal getto d'aria che eccita la massa oscillante si ritrova anche una frequenza pari alla frequenza propria di risonanza: il sistema risponde principalmente su questa, tanto meglio quanto minore è la forza vischiosa o la potenza dissipata in calore.

Anche il moto di una corda tirata tra i due estremi con una tensione costante può farsi facilmente risalire al moto armonico, soluzione di un'equazione differenziale del tipo esaminato. Sebbene la corda sia da considerarsi un oggetto finito, non puntiforme, e sia quindi sede di una propagazione delle onde che richiede la soluzione di un'equazione in due variabili indipendenti (spaziale e temporale), la sua condizione stazionaria si può facilmente far discendere da un'equazione in una sola variabile, quella temporale  $t$ . A tal proposito si pensi al moto oscillatorio della corda, di lunghezza  $L$ , come descritto dalle due metà unite al centro che oscillano di un piccolo angolo rispetto alla direzione di riposo, scelta come asse  $x$  a esempio. Per ciò che riguarda il moto del centro di massa nella direzione  $y$  trasversa a quella di sviluppo della corda, si deve pensare che il sistema è soggetto a una forza risultante di richiamo pari alla proiezione sulla direzione  $y$  della tensione complessiva  $2\tau$  presente agli estremi e si può scrivere quindi:

$$m\ddot{y}_G = -2\tau \sin \vartheta$$

dove si è indicata con  $m$  la massa totale della porzione di corda oscillante, con  $y_G$



**Fig. 2.12.** Nell'oscillatore di Helmholtz la forza di richiamo sulla masserella contenuta nel collo è  $\Delta p A$ , da cui l'equazione del moto  $\rho AL\ddot{z} = \gamma p_0 / VA^2 z$  e la pulsazione di risonanza  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0 A}{\rho V L}}$

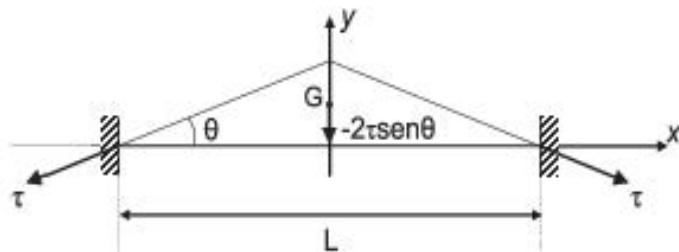
la posizione istantanea del suo centro di massa, sito a metà dell'ampiezza  $y$  di vibrazione del vertice, con  $\vartheta$  l'angolo tra la direzione della direzione tra una metà corda e l'asse  $x$  di riposo. Per piccole oscillazioni si può approssimare il seno dell'angolo  $\vartheta$  con la tangente, pari a  $4y_G/L$  e ritrovare, quindi, l'equazione del moto armonico

$$m\ddot{y}_G = -\frac{8\tau}{L}y_G$$

essendosi ancora una volta trascurata la forza vischiosa di resistenza del mezzo. La frequenza propria di oscillazione risulta allora essere

$$f = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\tau}{mL}}.$$

La descrizione, pur approssimata, del fenomeno porta al risultato, ben noto a quanti abbiano una conoscenza anche superficiale di strumenti musicali, che la frequenza di risonanza di una corda, cioè della nota emessa sotto eccitazione (pizzicata dalla mano del chitarrista, percossa dal martelletto del pianoforte o trascinata dall'archetto del violino) è tanto maggiore quanto più si tira la corda e tanto minore quanto più è massiccia. L'accordatura, cioè la condizione sotto cui una corda libera emette una ben determinata nota, si ottiene di fatto tensionando variamente la corda stessa fino alla coincidenza della nota emessa con quella di riferimento. Si noti, al proposito, che l'esempio esaminato della corda vibrante, pure nel limite di avere trattato l'intero sistema esteso con la sola prima equazione cardinale della dinamica senza esserci occupati della propagazione all'interno della stessa struttura deformabile, è applicabile con opportune variazioni e approssimazioni a qualunque sistema in vibrazione meccanica e che quindi, come si è indicato all'inizio di questo paragrafo, l'equazione dell'oscillatore armonico acquista una generalità estrema. Sta all'osservatore attento individuarne la presenza nelle innumerevoli occasioni in cui si presenta.

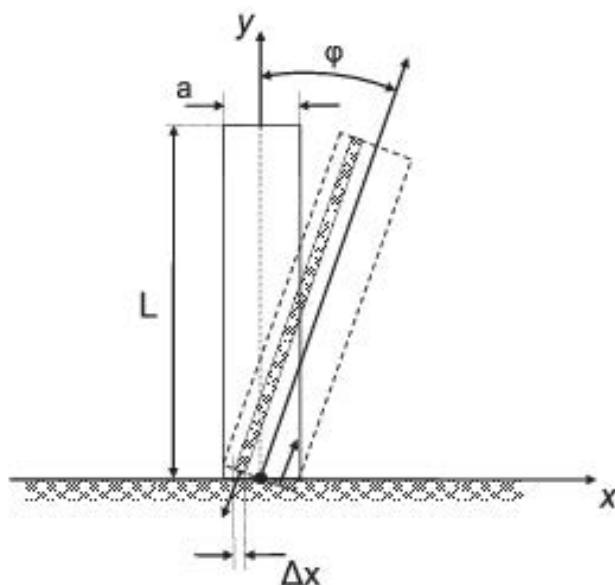


**Fig. 2.13.** Oscillazione di una corda elastica tesa tra due punti estremi fissi in un modello semplificato di configurazione triangolare

Non ci sarà difficile a questo punto verificare come anche nel caso di un'asta conficcata nel terreno o in una parete (come nel caso di un albero o della pedana di un trampolino ecc.) si giunga a un'equazione del moto del tutto assimilabile a quella di un oscillatore. Se trascuriamo, infatti, anche in questo caso lo smorzamento dovuto alle forze viscose, scriveremo la seconda equazione cardinale della dinamica riferita al momento  $b_C$  della quantità di moto dell'asta attorno a un asse  $C$  complanare con la sezione rettangolare dell'asta di area  $A = ab$  sul piano del vincolo e centrato su questa sezione, come:

$$\frac{db_C}{dt} = M_C$$

con  $M_C$  momento delle forze rispetto a tale asse. Per il momento  $b_C$  ci è facile scrivere l'espressione in funzione dell'angolo  $\varphi$  di scostamento dalla posizione di riposo; sarà  $b_C = I_C \dot{\varphi}$ , con  $I_C$  momento d'inerzia rispetto all'asse  $C$ . Per il momento  $M_C$  delle forze ci rifugiamo anche qui in un'approssimazione: supporremo – come per il caso della corda, in cui abbiamo approssimato in ogni istante la configurazione come data da una spezzata di due segmenti – che l'asta mantenga la configurazione rettilinea, senza pensare che in essa si propaghi una perturbazione elastica. Semplicemente sulla sezione d'attacco, inclinata di un angolo  $\varphi$  rispetto alla condizione di riposo, si instaureranno delle forze, dovute al fatto che una qualunque striscia dell'asta di lunghezza  $\delta x$  è variata di lunghezza dal suo valore iniziale  $L$  di una quantità  $\Delta L = \frac{1}{E} L \frac{F}{b \Delta x}$ , con  $b \Delta x$  area della striscia, proporzionale all'angolo di spostamento  $\Delta L \approx x \varphi$ , per valori piccoli di  $\varphi$ . A questa forza corrisponde un contributo al momento meccanico, pari a  $\Delta M_C = f x$  che integrato su tutta l'area fornisce l'e-



**Fig. 2.14.** Una sbarra vincolata a un estremo può approssimarsi a un oscillatore armonico, se non si considera la propagazione lungo la struttura

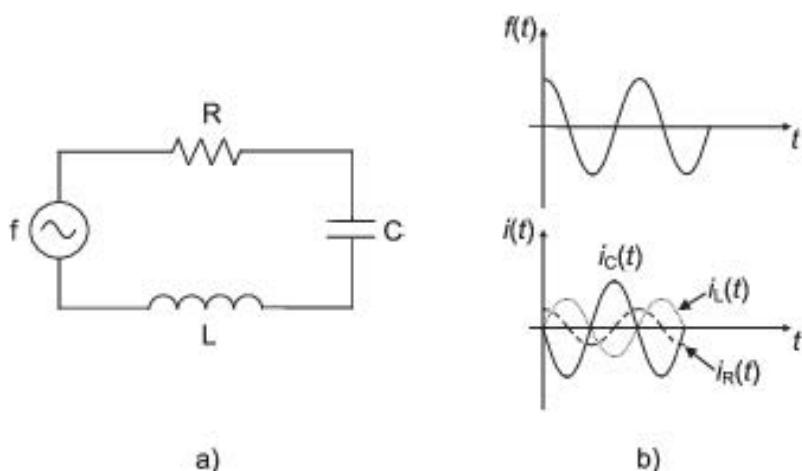
spressione  $M_C = \frac{Ea^2b}{4}\varphi$  da inserire nell'equazione del moto con segno negativo, per via dell'opposizione tra il momento di richiamo e l'angolo di scostamento. Se ricordiamo l'espressione del momento d'inerzia di un'asta rispetto a un asse ortogonale per un estremo,  $I = mL^2/3$ , e introduciamo l'espressione già vista per il momento della quantità di moto  $b_C$ , si vede che ci si riduce all'usuale equazione dell'oscillazione armonica, in cui il parametro dinamico – in questo caso l'angolo  $\varphi$  – varia sinusoidalmente con pulsazione  $\omega = a/2L\sqrt{3Fb/m}$ . L'oscillazione è tanto più lenta quanto è maggiore la massa oscillante e la lunghezza dell'asta mentre, a parità di queste, diviene più rapida con l'incremento dell'area  $ab$  della sezione.

Il modello si adatta, come si è detto, a più casi, come a un'asta orizzontale conficcata in una parete, quale può essere considerata la pedana di un trampolino per tuffi o una riga da disegno tenuta pressata sul bordo del tavolo, all'albero di una barca, al palo di un'antenna televisiva ecc., pur che non siano ancorati con opportuni tiranti a punti fissi.

Passando alla controparte elettrica dell'oscillatore meccanico, cioè al caso in cui si innesti autonomamente o si stimoli l'oscillazione di carica elettrica lungo un circuito, occorre ricordare che si giunge a un'equazione, per la carica  $q$  appunto, che è del tutto analoga a quella inizialmente scritta per lo spostamento della massa:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V_0 \cos(\omega t)$$

dove l'induttanza  $L$ , la resistenza  $R$  e la capacità  $C$  degli elementi dislocati lungo il circuito sostituiscono, rispettivamente, la massa  $m$ , il coefficiente di vischiosità  $b$  e l'inverso della costante elastica  $k$  dell'oscillatore meccanico. La forza esterna  $f = F_0 \cos(\omega t)$  è sostituita dalla forza elettromotrice  $V_0 \cos(\omega t)$  del generatore inserito nel circuito. Con queste corrispondenze, le due equazioni coincidono. Ciò significa che la soluzione sarà data da una carica che oscilla lungo il circuito con legge sinusoidale di pulsazione pari a quella della tensione di eccitazione e risposta in frequenza rappresentabile dalla medesima curva già vista per il caso meccanico. Alla frequenza di risonanza, a parità del valore  $V_0$  dell'ampiezza della forza elettromotrice, sarà massima l'ampiezza di oscillazione della carica presente, per esempio, sulle armature del condensatore o che fluisce attraverso la resistenza o nell'induttore; l'intensità della corrente, derivata prima temporale della carica, avrà la stessa fase di oscillazione della forza elettromotrice.



**Fig. 2.15.** Circuito oscillante  $RLC$  e rapporti temporali tra la corrente che fluisce nei tre elementi circuitali e la forza elettromotrice di eccitazione

Nel caso elettrico, assai più frequentemente che non in quello meccanico, si parla dell'*impedenza* presentata dal circuito, e più spesso da una singola parte o ramo del circuito. Essa, sulla falsariga di quella che è la resistenza per un elemento circuitale in cui sia presente solo un resistore, è definita come il rapporto complesso sussistente tra la differenza di potenziale applicata agli estremi del tratto e la corrente che vi fluisce. Nel caso di un resistore, la legge di Ohm  $V = iR$  porta immediatamente a individuare nella resistenza  $R$  l'impedenza dell'elemento; di fatto, nell'esame di un elemento resistore, si introduce la legge di Ohm nel caso di una corrente continua, per la quale è privo di senso parlare di un rapporto di fase tra corrente e differenza di potenziale e, qualora si pensasse di far variare la corrente, si suppone che la legge sia valida a ogni istante; ciò significa, in particolare, che, per una variazione sinusoidale delle grandezze, la corrente si presuppone in fase con la differenza di potenziale agli estremi. Ciò è di fatto quanto avviene per un resistore, ma non per un induttore o un condensatore: se si pensa al caso di un induttore, a esempio un solenoide, la forza elettromotrice presente agli estremi è proporzionale alla derivata temporale della corrente che fluisce e se questa varia nel tempo secondo la legge del seno, la prima varia con la legge del coseno, cambiato di segno. La corrente ritarda di un quarto di periodo rispetto alla forza elettromotrice: il rapporto, quindi, tra questa e quella secondo la definizione di impedenza, mostra che c'è un ritardo temporale costante, ovvero che la grandezza impedenza è intrinsecamente complessa, assumendo nel caso dell'induttore una fase pari a  $\pi/2$  (risultando in tal caso un numero puramente immaginario).

positivo), che invece diviene pari a  $-\pi/2$  nel caso di un condensatore (risultando in tal caso un numero puramente immaginario negativo). Inserendo in serie in un circuito tutti e tre gli elementi considerati, un resistore, un induttore e un condensatore, l'impedenza totale, pari alla somma delle tre impedenze prese singolarmente, sarà un numero complesso, la cui parte immaginaria risulta positiva o negativa secondo che prevalga, rispettivamente, l'effetto dell'impedenza induttiva o di quella capacitiva. Alla frequenza di risonanza, le due impedenze, induttiva e capacitiva, risultano eguali e contrarie così da rendere l'impedenza complessiva puramente resistiva.

Come si è visto, le curve di risposta di un sistema oscillante – sia esso un oscillatore meccanico o un circuito elettrico risonante – presentano un massimo alla frequenza di risonanza, coincidente con la frequenza propria delle oscillazioni libere. In questo caso, non essendoci dissipazione nel sistema, questo mantiene l'ampiezza di oscillazione che gli viene impressa con le condizioni iniziali sulla frequenza propria. Ciò è coerente con la rappresentazione di una curva di risposta che assuma un valore infinitamente maggiore alla frequenza di risonanza rispetto a qualsiasi altra. Se però nel sistema c'è un elemento dissipativo (come fosse la viscosità del mezzo in cui si muove l'oscillatore, o la resistenza di un elemento circuitale), la curva riduce a un valore finito il rapporto della risposta alla frequenza di risonanza rispetto alle altre frequenze e all'abbassamento del massimo corrisponde un allargamento della curva. Il sistema tende a rispondere più uniformemente sulle diverse frequenze e si parla a tal proposito di una *banda di frequenze* entro cui il sistema risponde alle sollecitazioni esterne. Come già detto in precedenza per l'oscillatore meccanico, si conviene di definire come banda di risposta quella compresa tra due frequenze, l'una minore l'altra maggiore di quella di risonanza, alle quali la risposta in ampiezza del sistema è pari alla metà della risposta corrispondente alla frequenza di risonanza e si introduce il *fattore di merito*, indicato con la lettera  $Q$ , pari al rapporto tra il valore della frequenza propria di risonanza e la larghezza di banda, come sopra definita,  $Q = \omega_0 / \Delta\omega$ . Il legame tra il fattore  $Q$  e i parametri del sistema è dato per un circuito oscillante da  $Q = \sqrt{L/C}/R$ . Si vede facilmente che, se si vuole un sistema molto selettivo in frequenza, lo si deve progettare con un alto valore di  $Q$ , riducendo al minimo il termine di viscosità che dissipava energia (si ricordi, a questo proposito, che un oscillatore libero non smorzato,  $b = 0$ , risponde con ampiezza teoricamente infinita alla frequenza di risonanza, riducendo corrispondentemente a 0 l'ampiezza

di banda). Se, invece, si vuole un sistema che risponda uniformemente su un'ampia banda di frequenze, lo si deve progettare con un basso valore di  $Q$ .

## 2.5 Le onde

Questo paragrafo sulle onde deve la sua relativa brevità non già alla dimensione del contenuto informativo e fenomenologico relativo al tema, quanto piuttosto alla limitazione di volere presentare solamente il problema della costruzione dei fronti d'onda, strada maestra per la conoscenza dei campi di radiazione, insieme a cenni sufficienti per mostrare come il tema sia invasivo in moltissimi argomenti di fisica. Nella sequenza illustrativa degli argomenti di fisica, esso si suole sviluppare in coda alle equazioni di Maxwell, dopo una breve apparizione al seguito della teoria dell'elasticità, dove si dà generalmente una breve indicazione dell'esistenza delle onde elastiche e dell'acustica. Se consideriamo che la nostra umana interazione con la realtà avviene essenzialmente attraverso il suono e la luce e che la tecnologia dell'informazione oggi ubiquitaria fonda la più gran parte del suo successo sulla comunicazione per via elettromagnetica, non possiamo che convenire sulla massima importanza delle onde nel contesto generale della fisica. Radiazione acustica da tutte le sorgenti di rumore e di vibrazioni che ci circondano, radiazione elettromagnetica dal Sole, dai più lontani oggetti celesti, dalle antenne delle stazioni radio, televisive, telefoniche, da tutti i corpi per via del loro stato termico, dal residuo del big bang iniziale ecc. permea il nostro habitat, ci avvolge da ogni direzione, la riveliamo selettivamente sintonizzandoci sullo spettro di frequenza d'interesse e condiziona la nostra esistenza. E non solo, perché di onde è fatta la materia attorno a noi, nell'interpretazione quantistica che a ogni particella si associa una *funzione d'onda* che ne descrive la probabilità di esistere in un certo stato. Corpuscoli e onde, in realtà, costituiscono la totalità della fenomenologia naturale e la nostra rappresentazione del mondo fluttua tra l'una e l'altra interpretazione nella dualità di una descrizione che si adatta sull'una o sull'altra scelta a seconda della domanda che poniamo alla natura. Questa straordinaria presenza delle onde nell'Universo è legata a una comune equazione differenziale del campo  $u(\mathbf{r}, t)$  interessato – elastico, elettromagnetico, probabilistico – che eguaglia la derivata seconda temporale di questo alla sua derivata seconda spaziale o, meglio nella descrizione tridimensionale, al laplaciano, secondo una funzione  $c(\mathbf{r}, t)$  del punto  $\mathbf{r}$  e del tempo  $t$  che ha il significato della velocità di propagazione

dell'onda:

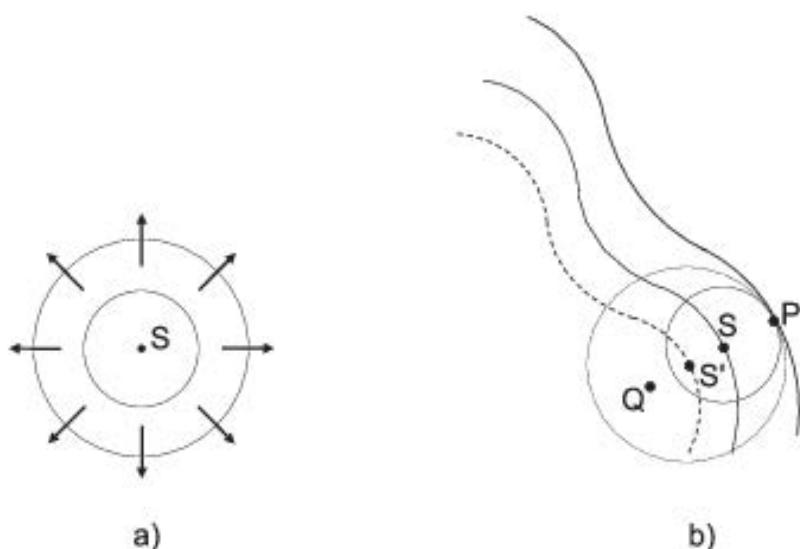
$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right).$$

Per il caso elastico, si giunge a questa equazione inserendo l'equazione di stato del mezzo di propagazione nell'equazione del moto di Newton scritto per una particella oscillante del mezzo, così da inserire in luogo della forza l'espressione dello spostamento e giungere a scrivere per questo l'equazione dinamica delle onde. La costante  $c^2$ , quadrato della velocità di propagazione, sarà data dal rapporto tra un'opportuna combinazione delle costanti elastiche e la densità di massa del mezzo. Per il caso elettromagnetico, si giunge all'equazione delle onde, indifferentemente per il campo elettrico o per quello di induzione magnetica, fondendo le seconde due equazioni di Maxwell in un'unica equazione per sostituzione di un campo con la sua dipendenza dall'altro. La costante sarà data dall'inverso del prodotto tra le costanti dielettrica e di permeabilità magnetica del mezzo: se questo è il vuoto, il valore della velocità di propagazione vale quello della luce nel vuoto  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ , grandezza assoluta invariante rispetto a qualunque sistema di riferimento assoluto prescelto. L'invarianza delle due costanti, dielettrica e di permeabilità magnetica del vuoto, rispetto al sistema di riferimento – fondamento della teoria della relatività ristretta – deriva dalla medesima invarianza delle equazioni di Maxwell per i campi: nel vuoto, la variazione temporale di un campo è pari a opportune variazioni spaziali dell'altro, tali da dare la rotazione, e in questo legame le costanti non dipendono dal sistema. Più sofisticata è la derivazione dell'equazione delle onde per la funzione di probabilità di una particella, derivante da un'analogia con il limite classico, la cui descrizione esula dall'ambito di questo testo.

Una volta scritta l'equazione delle onde per uno qualsivoglia dei campi sopra indicati, il problema dell'effettiva propagazione risiede nella soluzione dell'equazione. Ma, secondo il compito che ci siamo assunti, vogliamo comprendere il processo fisico della propagazione interpretando le risultanze matematiche, piuttosto che affidandoci ciecamente a esse. Come sappiamo e come osserviamo nel processo di propagazione di un'onda sulla superficie di uno specchio d'acqua, in ogni punto dello spazio il campo, per es. lo spostamento della superficie dell'acqua materializzato da un piccolo oggetto in galleggiamento, varia nel tempo con una legge che si replica a breve distanza dal punto con un ritardo temporale che dipende dalla distanza del secondo punto dal primo e dalla direzione del segmento che li unisce. Tra le diverse

direzioni, ve n'è una per la quale i due punti eseguono lo stesso moto in concordanza di fase, cioè contemporaneamente: essi si trovano sul medesimo *fronte d'onda* e la direzione ortogonale a questa è la direzione del *raggio*, lungo la quale cioè ha luogo la propagazione. Il fronte d'onda, quindi, è luogo geometrico dei punti che oscillano, o hanno, tutti un'eguale fase e in ogni punto di un fronte d'onda passa uno ed un solo raggio, ortogonale al fronte d'onda nel punto. Per conoscere come evolva il campo di un'onda che si propaga è di grande aiuto, pur se non sufficiente, conoscere la direzione dei raggi di propagazione o, che è lo stesso, come avanzano i fronti d'onda al variare del tempo. Si intuisce a questo punto il legame tra l'equazione sopra scritta con la sua soluzione specifica per determinate condizioni al contorno e il fenomeno fisico della propagazione; per la parte formale ci chiederemo: nota la funzione 'campo' su una determinata superficie (**chiusa**), quale valore essa assume all'interno di questa? e in parallelo, pensando all'aspetto fisico: se si conosce la forma di un fronte d'onda a un certo istante di tempo, come avanza questo nello spazio? Il teorema di Huygens-Fresnel risponde proprio a quest'ultima domanda e afferma che ogni punto di un fronte d'onda a un determinato istante può pensarsi come sorgente di fronti d'onda elementari (sferici, se il mezzo di propagazione è isotropo), emessi in contemporanea, che si propagano con intensità decrescente da un valore massimo nella direzione del raggio, fino a un valore nullo nel verso opposto; i fronti d'onda successivi si costruiscono per sovrapposizione di tutti questi fronti d'onda elementari.

La giustificazione del teorema è di facile comprensione. Una sorgente puntiforme, che possiamo immaginare in un mezzo isotropo per non complicare inutilmente il problema, irradia nello spazio fronti d'onda sferici: la perturbazione emessa cioè si propaga in ogni direzione con eguale velocità e ciò che esegue il punto sorgente nel tempo, così faranno con un ritardo dipendente dalla distanza da questo e in modo eguale tutti i punti dello spazio situati su una superficie sferica centrata sulla sorgente. I fronti d'onda emessi da una sorgente puntiforme sono superfici sferiche di raggio tanto maggiore quanto maggiore è il tempo trascorso dall'istante dell'emissione. Poiché l'equazione delle onde è lineare nella scrittura poco sopra riportata, se vi sono più punti sorgenti di radiazione il campo sarà dato dalla sovrapposizione delle perturbazioni prodotte separatamente da ciascun punto sorgente. Poiché, peraltro, su un fronte d'onda tutti i punti oscillano in fase ed emettono quindi in fase, il campo in



**Fig. 2.16.** Emissione di raggi e fronti d'onda da una sorgente  $S$  puntiforme (a) e costruzione secondo Huygens-Fresnel di un fronte d'onda successivo a uno fissato a un certo istante (b): in  $P$  si sommano costruttivamente i fronti d'onda elementari emessi da  $S$  e  $S'$ , in  $Q$  distruttivamente

un istante successivo si può ottenere per sovrapposizione di quello prodotto da ogni singolo punto del fronte d'onda come se fosse isolato dagli altri, ma oscillasse in fase con quelli. Questo è di fatto il risultato del teorema di Huygens-Fresnel, fatta salva la correzione per il valore in decremento dell'ampiezza di oscillazione con l'angolo di emissione. Questa si spiega facilmente pensando che il campo sul fronte d'onda che stiamo ricostruendo è ottenuto sovrapponendo ulteriormente la perturbazione che giunge da un precedente fronte d'onda con quella di tutti i fronti d'onda a questo contigui che, nel verso della propagazione, si sommano e interferiscono costruttivamente mentre nel verso opposto l'interferenza è distruttiva.

La costruzione dei fronti d'onda secondo il teorema di Huygens-Fresnel si adatta a qualsiasi tipo di perturbazione, pur che rispetti l'equazione delle onde: onde elastiche di bassa o alta frequenza, ultrasuoni, onde sismiche, luce visibile, radiazione infrarossa o ultravioletta, raggi X o  $\gamma$ , onde radio o microonde, tutte seguono l'equazione delle onde e per tutte i fronti d'onda si costruiscono secondo il teorema accennato. Esso, di fatto, discende dall'equazione stessa delle onde e per essa è un *integrale primo*, come integrali primi sono per l'equazione differenziale del second'ordine di Newton della meccanica i teoremi dell'impulso e quantità di moto e del lavoro ed energia cinetica. Analizzando più in dettaglio il teorema, si vede che

in esso sono contenuti in germe i due fenomeni principali della propagazione: la diffrazione e l'interferenza, aspetti diversi invero della modalità unitaria di costruzione dei fronti d'onda, per la quale in un punto di un nuovo fronte d'onda giungono e si sommano le perturbazioni che provengono da parte di tutti i punti di fronti d'onda precedenti. Quindi, c'è intrinsecamente il fenomeno dell'allargamento del fronte d'onda (*diffrazione*) e della sovrapposizione coerente (*interferenza*) delle perturbazioni. Naturalmente, sebbene, come si è detto, i fenomeni propri della propagazione siano propri di tutte i tipi di onde e per tutte le frequenze, la loro pratica evidenza è maggiore per talune rispetto ad altre, in dipendenza del rapporto tra la dimensione laterale del fronte d'onda che costruisce i nuovi fronti d'onda e la lunghezza d'onda della radiazione. Così si osserva per esempio che per le onde acustiche in aria, di lunghezza d'onda dell'ordine del metro, si evidenziano facilmente i fenomeni di diffrazione, come il passaggio attraverso una porta o un vano aperto su una parete, che limitano i fronti d'onda alle dimensioni appunto dell'apertura, confrontabili con quelle della lunghezza d'onda: al di là dell'apertura si riceve la radiazione anche in punti che non sono 'in vista' della sorgente, non allineati cioè su raggi rettilinei. Non così per la radiazione visibile che è ricevibile solo in punti che, secondo il suggerimento stesso del modo di dire, sono 'in vista' dell'oggetto sorgente. Per osservare fenomeni diffrattivi della radiazione visibile, occorre che ostacoli o aperture limitino o perturmino i fronte d'onda su dimensioni laterali confrontabili con quelli micrometrici della stessa radiazione. Ci se ne può rendere conto ad esempio guardando un oggetto luminoso puntiforme di notte attraverso un tessuto, la tenda delle finestre, il telo di un ombrello, e osservando l'immagine di una serie di punti luminosi sostitutiva dell'unica immagine puntiforme che si vedrebbe direttamente: la luce in attraversamento dei fori tra la trama del tessuto viene diffratta e si ricostruiscono selettivamente per interferenza i fronti d'onda corrispondenti alle nuove immagini puntiformi della sorgente. Se ne ha prova cambiando il tessuto e osservando che, vuoi per la fittezza della trama, vuoi per la sua geometria, la nuova serie di punti ha mutato la distribuzione spaziale e le distanze reciproche.

L'ottica geometrica, che costituisce un capitolo a sé stante dei programmi, sembra fondarsi su concetti affatto nuovi rispetto a quelli della fenomenologia sin ora trattata e ciò è in parte vero, in quanto in essa si prescinde dai fenomeni dell'interferenza e della diffrazione propri della propagazione dei fronti d'onda e si ipotizza che i raggi

abbiano direzioni rettilinee sino a che incontrano superfici di discontinuità tra mezzi diversi. Si costruisce cioè un ‘modello’ di propagazione, quello appunto dell’*ottica geometrica*, per il quale l’equazione delle onde è risolta in prima approssimazione, basandosi proprio sul presupposto che gli ostacoli o le aperture presenti nella regione di propagazione siano di dimensioni assai maggiori di quelle della radiazione visibile. E ciò è ben vero, se consideriamo che il nostro occhio è sensibile a radiazioni di lunghezza d’onda comprese tra circa 0.4 e 0.7 m, dell’ordine di un centesimo del diametro di un cappello. Con questa approssimazione l’ottica abbandona la sua fenomenologia ‘ondulatoria’ (pur ben presente nella realtà) e fonda le sue leggi sulla riflessione e sulla rifrazione, sui percorsi cioè che i raggi seguono quando incidono su una superficie, dove in parte ritornano nel medesimo mezzo di provenienza (*riflessione*) e in parte passano nel secondo mezzo (*rifrazione*).

## 2.6 Saturazione

L’argomento di questo paragrafo prende a prestito dal parlare comune un termine piuttosto familiare, di cui facciamo ampio uso quando una certa situazione non varia più, è venuta a noia, si è consolidata ormai un’abitudine standard; ma ne abbiamo anche familiarità d’uso per argomenti più scientifici, come quando ci riferiamo correttamente allo stato di umidità massima che avvertiamo all’ingresso nell’ambiente di una piscina, o a un cielo carico di nubi, che si prevede foriero di un acquazzone, o anche, meno comunemente, alla tazzina di caffè estremamente zuccherata sul fondo della quale continueranno a restare tracce di zucchero anche dopo avere bene mescolato. Le immagini sono diverse, ma si ricollegano al concetto unitario che un sistema – vuoi per la disposizione psicologica verso il ripetersi di un accadimento, vuoi per la quantità di vapore nell’ambiente – si trova in uno stato in cui non accetta ulteriori accrescimenti di una certa grandezza o entità. Potremmo dire meglio precisando che il sistema non muta più il suo stato, pur se lo si continua ad alimentare con l’inserimento di ulteriori dosi della grandezza o dell’entità all’ingresso. Prima di giungere a questo stato, che vorremmo sin da subito chiamare di *saturazione*, sembra piuttosto logico, o meglio l’abitudine a ritrovare una certa regolarità o continuità negli eventi sia fisici sia psicologici ci induce a ritenere, che, prima di giungere allo stato di saturazione, il sistema dia segni di avvicinamento allo stato, cominci a ridurre le sue variazioni nonostante si continui ad alimentarlo con nuove immissioni. È

precisamente di questo fenomeno di raggiungimento dello stato di saturazione che vorremmo ora trattare, ritrovandone – come ci è ormai consueto – le caratteristiche in una molteplicità di casi fisici.

L'esempio del vapore in un ambiente chiuso, quale quello della piscina cui accennammo più sopra, si presta come ottimo punto di partenza per comprendere il meccanismo intrinseco a ogni fenomeno di saturazione. Si pensi, dunque, a un recipiente chiuso con dell'acqua sul fondo e l'aria sovrastante: può sembrare su scala assai ridotta l'immagine dell'atmosfera sull'oceano, ma è ben chiaro che in quest'ultimo caso il sistema non è contenuto in un ambiente chiuso, poiché l'aria e con essa il vapore può estendersi in un volume teoricamente illimitato. La chiusura, invece, obbliga tutte le molecole a mantenersi in uno spazio limitato. Le molecole del sistema che consideriamo fanno parte sia del liquido, dove sono più fortemente legate le une alle altre dalle forze di coesione, sia dell'aeriforme sovrastante, dove la maggiore distanza media reciproca le lascia libere di allontanarsi da quelle più vicine; ciò sta a indicare che nel passaggio dalla zona liquida a quella aeriforme una molecola perde l'energia che le è necessaria per liberarsi dal legame con le altre e, viceversa, nel passaggio dalla zona aeriforme a quella liquida guadagna l'analogia quantità di energia. L'evaporazione avviene, pertanto, con perdita di energia media delle molecole, cioè con un abbassamento di temperatura, la condensazione con un innalzamento. Di fatto, saranno le molecole col valore maggiore dell'energia quelle che si liberano dal legame e abbandonano il liquido, lasciando mediamente più basso il valor medio dell'energia delle altre molecole, la cui temperatura subirà conseguentemente il previsto abbassamento (v. paragrafo 2.2.4 pag. 43).

Se pensiamo che inizialmente il recipiente contenga solo liquido e sia vuota la zona sovrastante, ci è facile immaginare che quest'ultima verrà a essere via via occupata dalle molecole fuoriuscenti dal liquido e il flusso di molecole uscenti dalla superficie libera sarà in qualche modo proporzionale all'area di questa. Questo flusso uscente, tuttavia, sarà in parte bilanciato dal flusso delle molecole che dalla fase aeriforme si reintrodurranno nella fase liquida attraverso la stessa superficie e questo flusso sarà anch'esso proporzionale all'area della superficie, oltre che alla densità delle molecole nella fase aeriforme. Avviene allora che, a mano a mano che la densità dell'aeriforme aumenta, aumenta parallelamente il flusso delle molecole da questo verso il liquido, fino a una condizione in cui i due flussi saranno eguali e la densità

della fase aeriforme non potrà aumentare ulteriormente. Si è giunti allo stato di *saturazione*: per quella sostanza, per quelle certe condizioni di volume e temperatura, il numero delle molecole presenti nella fase aeriforme è giunto al suo valore massimo consentito, di equilibrio dinamico tra il numero di molecole in entrata e in uscita. Se si potesse aumentare il volume a disposizione del sistema, si otterrebbe un'ulteriore migrazione delle molecole dal liquido, fino a che ancora una volta il volume aggiuntivo a disposizione si sia riempito di molecole con la stessa densità della fase aeriforme già ottenuta: la condizione di saturazione prevede una quantità di molecole fissa per unità di volume, per ogni determinato valore della temperatura. È noto che a temperature maggiori, le condizioni di saturazione prevedono densità o pressioni maggiori, in coerenza con l'immagine fornita di rottura dal legame di coesione nella fase liquida, che richiede un minor lavoro. La pressione corrispondente alla situazione di saturazione si dice *tensione di vapor saturo*, attribuendo all'aeriforme la dizione di vapore perché i valori della temperatura e della pressione sono tali che alle stesse condizioni possono coesistere insieme le due fasi.

Riprendendo l'immagine dell'atmosfera sugli oceani, si comprende come in un ambiente aperto, senza confini, sia possibile avere una continua evaporazione dalla superficie libera del liquido, non compensata dal flusso molecolare inverso. La pressione parziale del vapor acqueo nell'atmosfera è quindi sempre inferiore al valore limite di saturazione e lo si suole misurare in percentuale di quello: a parità di valore percentuale, il valore assoluto della pressione parziale è funzione della temperatura e sale al crescere di questa.

Un complemento interessante al concetto di saturazione, come nel caso che stiamo esaminando, ci viene se consideriamo la dinamica del raggiungimento delle condizioni di saturazione. In maniera qualitativa, possiamo dire che questo raggiungimento avviene gradualmente e che l'evaporazione avviene tanto più lentamente, quanto più ci si avvicina alle condizioni di saturazione. La cosa appare del tutto naturale e ci soccorre in questo anche l'esperienza psicologica di una cosa che ci venga a noia, un cibo o una pietanza, che assumiamo all'inizio con voracità e che rallentiamo ad assumere a mano a mano che ne assumiamo di nuovo, quasi che si contrappongano la spinta iniziale ad assumere e quella opposta, che cresce, quasi che dipendesse dal parziale riempimento del cibo già assunto. In verità, il fenomeno segue esattamente questa immagine. Nell'evaporazione del liquido il numero  $dn_{out}$

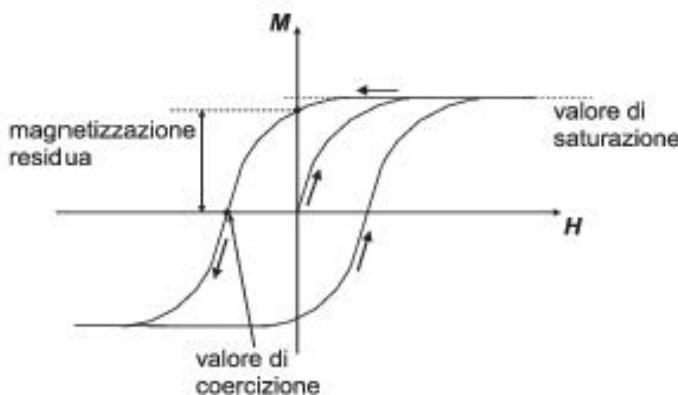
delle molecole fuoriuscenti dalla superficie – si è detto – è proporzionale all'area  $A$  della superficie libera e all'intervallo di tempo considerato, attraverso un qualche coefficiente  $k$  dipendente dal liquido, dalla sua temperatura ecc., per cui scriveremo:  $dn_{\text{out}} = kAdt$ . Come si può vedere, tale flusso, pensato come  $dn_{\text{out}}/dt$ , non varia nel tempo, mentre in contemporanea, nello stesso intervallo di tempo un numero  $dn_{\text{in}}$  di molecole passerà dalla fase di vapore in quella liquida; questo numero sarà anch'esso proporzionale all'area  $A$  della superficie libera, ma anche al numero  $n = N/V$  delle molecole presenti nell'unità di volume nella fase di vapore (con  $N$  pari al numero totale di molecole in questa fase e  $V$  il volume occupato da questa), attraverso una seconda costante  $k'$ , dipendente a sua volta dal sistema e dalla temperatura  $dn_{\text{in}} = k'Andt$ . La variazione complessiva del numero di molecole nella fase aeriforme sarà quindi data da  $dn = A(k - k'n)dt$ , da cui si vede chiaramente che il valore limite, di *saturazione*, si ha per una variazione complessiva nulla pari a  $n = k/k'$ . Capiremo meglio nel seguito, dopo la lettura del paragrafo 3.3 a pagina 90 sugli esponenziali ci fa intuire come la dinamica del raggiungimento delle condizioni di saturazione debba avvenire con legge esponenziale: l'equazione, infatti, della variazione temporale  $dn/dt$  ci indica una dipendenza proporzionale alla stessa variabile  $n$ , attraverso una costante negativa, in aggiunta a un termine indipendente da  $n$ . Forniamo ora direttamente la soluzione dell'equazione,  $n(t) = \frac{k}{k'} \left(1 - e^{-k'\frac{A}{V}t}\right)$  che sarà facile verificare, avendo scelto come momento iniziale  $t = 0$  quello in cui ha inizio l'evaporazione dal liquido in un ambiente vuoto. Naturalmente, nella pratica, una tale fenomenologia appena descritta costituisce un transiente, cioè una fase di passaggio estremamente rapida dalla condizione in cui l'ambiente sovrastante la superficie del liquido è vuoto a quella in cui si sarà saturato di vapore.

Un secondo esempio di saturazione che si vuole proporre è il caso, frequentemente riportato nei testi di base, della magnetizzazione dei materiali ferrosi. Lo stato di magnetizzazione di un materiale, sia esso un magnete permanente o no, è di fatto uno stato di saturazione di microsistemi, tutti godenti di una stessa caratteristica, quella di allineamento dei propri momenti magnetici secondo una medesima direzione. Quando tutti i singoli momenti magnetici microscopici si saranno allineati, la magnetizzazione del materiale non potrà più aumentare, per quanto fortemente e ulteriormente si vogliano orientare i momenti con coercizione esterna di campi applicati: il valore massimo della magnetizzazione sarà stato raggiunto, il materia-

le sarà saturato. Ricordiamo sinteticamente la fisica del processo. In quasi tutti i materiali sono presenti dei momenti magnetici microscopici propri, dovuti in ogni atomo all'insieme delle correnti elettroniche e alla stessa rotazione delle cariche elettroniche su sé stesse, che sono orientati statisticamente a caso nelle varie direzioni dello spazio, dando così un momento complessivo nullo del materiale. Tuttavia, se si applica un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  dall'esterno, la presenza di questi momenti magnetici microscopici fa sì che il campo si accresca per l'effetto aggiuntivo del parziale allineamento dei momenti microscopici nella stessa direzione del campo esterno. Così, si può affermare – seguendo la legge di Ampère scritta per il caso monodimensionale – che  $\mathbf{B}$  è dato da due termini: il primo dovuto alle cause, cioè alle correnti elettriche, esterne o libere  $\mathbf{j}_L$  e un secondo dovuto alla magnetizzazione  $\mathbf{M}$ , indotta nel mezzo dalla stessa presenza del campo esterno  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_L + \mathbf{M})$ . Si introduce, allora, un vettore  $\mathbf{H}$ , il campo magnetico, eguale alle stesse correnti libere  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ . Poiché  $\mathbf{M}$  è però generato dalle correnti, quindi da  $\mathbf{H}$ , si può in prima istanza supporre che sia a esso proporzionale: più forte è il campo esterno, più grande è il numero dei momenti magnetici allineati secondo il campo, cioè  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , dove si è introdotto un parametro  $\chi$  di proporzionalità diretta tra il campo magnetico e il momento di magnetizzazione, detto *suscettività magnetica*, proprio del materiale. In realtà, all'aumentare del campo non sarà un numero maggiore di momenti magnetici ad allinearsi, quanto piuttosto una componente mediata statisticamente su tutti i momenti a essere maggiore: l'allineamento dei singoli momenti è, infatti, ostacolato dall'agitazione termica degli stessi che, urtandosi reciprocamente, impediscono l'instaurarsi di una condizione di equilibrio. Piuttosto, ciascun momento avrà nel tempo una probabilità tanto maggiore di trovarsi diretto nella medesima direzione del campo esterno, quanto maggiore sarà il campo; così, l'effetto complessivo sarà appunto una formale proporzionalità tra campo e magnetizzazione. Si intuisce, tuttavia, che il fenomeno debba cessare quando tutti i momenti saranno allineati nella direzione del campo e che il conseguimento stesso di questa saturazione avverrà gradualmente; tutto ciò significa che il coefficiente  $\chi$  di suscettività magnetica non è in generale costante, ma dipende dal valore del campo di induzione. Tuttavia, per la stragrande maggioranza dei materiali, il valore di  $\chi$  è così piccolo ( $\sim 10^{-3}$ ) che, anche per campi magnetici intensi, il termine di magnetizzazione  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$  risulta assai minore del campo stesso  $\mathbf{H}$  e quindi trascurabile nel contributo di  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}(1+\chi) \simeq \mu_0\mathbf{H}$ . Per

pochi materiali, così detti ferrosi, invece,  $\chi$  assume un valore assai maggiore ( $\sim 10^3$ ), tale che si raggiunge la condizione di saturazione della magnetizzazione anche per valori moderati del campo esterno.

La curva di saturazione è ben nota dai testi di base ed è qui riportata nella classica relazione di dipendenza  $M = \chi H$ . Per completezza espositiva va ricordato che il fenomeno di magnetizzazione dei materiali ferrosi è dovuto alla presenza di domini o agglomerati di atomi, all'interno dei quali i singoli momenti magnetici microscopici sono già tutti allineati parallelamente gli uni agli altri e che l'allineamento del campo esterno opera sui domini, e non già sui singoli atomi, esaltando l'effetto di magnetizzazione in virtù dell'alto numero dei momenti che si allineano tutti nella direzione del campo, superando l'effetto disturbante dell'agitazione termica sul singolo momento. In aggiunta, è da ricordare che l'aggregazione in domini è comune a tutti i materiali ferromagnetici, purché si trovino al di sotto di una determinata *temperatura*, detta di Curie.



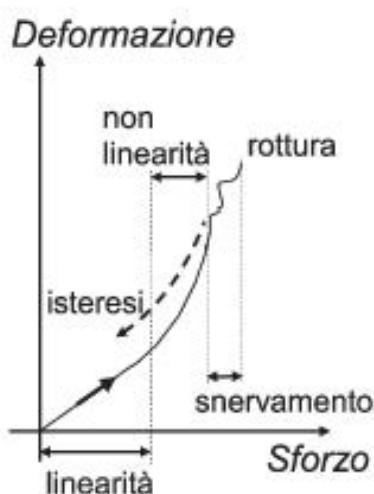
**Fig. 2.17.** Curva di magnetizzazione di un materiale ferroso; variando  $H$  dal valore 0 a valori positivi si giunge a un massimo di  $M$ , quindi riducendo  $H$  si mantiene una magnetizzazione residua anche per  $H = 0$  e occorre raggiungere un valore di coercizione negativo di  $H$  per annullare la magnetizzazione del materiale

## 2.7 Isteresi

Come talvolta accade in argomenti scientifici, un'etimologia nobilmente classica riassume il contenuto di una fenomenologia, anche varia e sottile, che va illustrata e spiegata per ritrovare il senso che ne accomuna i singoli casi. Così è per questa *isteresi*, che giuoca sul senso del dopo, ovvero del ritardo: i fenomeni di isteresi vengono anche detti di ereditarietà, poiché in essi il valore attuale di una determinata grandezza fisica che dipende strettamente da un'altra, non vi dipende soltanto dal valore che questa seconda grandezza assume nello specifico momento considerato, ma anche

dai valori che essa ha assunto in tempi precedenti; vi è cioè nel processo in esame un ricordo della storia passata, come se il presente ne ereditasse una parte, o come se qualcosa avvenisse con un ritardo rispetto ai valori assunti nel presente. Ciò in tanto si realizza, in quanto la condizione presente dello stato del sistema *isteretico* viene in un certo senso ‘incisa’ nel sistema, il quale ne mantiene traccia.

Facciamo un caso pratico, anche abbastanza familiare. Un filo metallico, per es. di ferro o di rame o di stagno, viene flesso dalla sua condizione iniziale rettilinea mediante un momento flettente, ottenuto premendo con gli indici delle due mani i due estremi verso una direzione, verso il basso ad es., mentre i pollici premono le parti vicine in direzione opposta, verso l’alto. Per piccoli valori dello sforzo applicato, quando questo viene rimosso, la sbarretta riacquista la sua configurazione iniziale rettilinea; ma se si aumenta gradualmente lo sforzo applicato, ci si accorge che, alla sua rimozione, la sbarretta tende a tornare nella configurazione iniziale, senza tuttavia raggiungerla. Nel sistema resta, cioè, traccia dell’evoluzione subita in precedenza e se si vuole ripristinare la condizione rettilinea iniziale, occorre applicare alla sbarretta un opportuno momento flettente di segno opposto a quello applicato in precedenza, che ‘annulli’ la traccia della storia passata. Continuando ad applicare e ad accrescere il momento di segno opposto, si aumenta la flessione in verso opposto e, al rilascio del momento, resta una flessione opposta, con ripetizione delle situazioni già sperimentate. Il fenomeno è caratterizzato da una *isteresi* del sistema nel riguadagnare le condizioni di inizio, quasi come vi fosse stata una perdita di contemporaneità tra la causa e l’effetto, usando una dizione che appare un po’ troppo antropomorfica per la descrizione di una fenomenologia naturale. Di fatto, la ‘causa attuale’ si somma alle condizioni dello stato così come si è prodotto, evidenziando uno sfasamento rispetto alla causa ‘attuale’. Si veda la curva di magnetizzazione già riportata in figura 2.6 dove  $M$  segue con ‘ritardo’ l’effetto di allineamento dei momenti elementari dovuto alla presenza di  $H$ .



**Fig. 2.18.** Curva di dipendenza tra deformazione e sforzo in una sbarra sotto posta a trazione, con indicazione delle regioni a diversa fenomenologia e con possibile riduzione dello sforzo a isteresi

Per comprendere in modo più fisico il fenomeno, osserviamo con maggior dettaglio l'esempio più sopra riportato, relativo all'elasticità di una sbarra. Per semplificare l'immagine, supponiamo di sottoporre a trazione una sbarra: sin tanto che il valore della trazione (causa) è limitato, si osserva un allungamento (effetto) ad essa proporzionale. È questo l'enunciato della legge di Hooke, che si può generalizzare per qualunque tipo di causa-sforzo (di trazione, di taglio, di pressione ecc.) e qualunque tipo di effetto-deformazione (allungamento, taglio, compressione ecc.), dicendo che sforzo e deformazione sono proporzionali in ogni materiale elastico. Se, tuttavia, il valore dello sforzo cresce, la legge della proporzionalità diretta varrà solo come prima approssimazione per la descrizione del fenomeno e la deformazione sarà descritta da una legge di dipendenza più generale, che vede aggiungersi ai termini lineari di proporzionalità termini quadratici, cubici e così via. Ciò vale sino a che, da un certo valore dello sforzo in poi la funzione continua di dipendenza tra sforzo e deformazione comincia a mostrare delle discontinuità: si attuano improvvise piccole variazioni della deformazione per incrementi nulli dello sforzo. La struttura subisce, come si dice, uno *snervamento* e la storia della sollecitazione subita viene incisa irreversibilmente nel materiale.

La comprensione del fenomeno richiede una visione più intimistica della natura elastica dei mezzi materiali. Gli atomi che costituiscono un solido mantengono una posizione pressoché fissa rispetto alla forma del solido, vincolati a mantenere una posizione ben precisa rispetto agli altri atomi della struttura, per via della forte interazione con i più vicini, cui sono legati dalle forze elettriche tra i componenti elementari. Un atomo è localizzato nella struttura allo stesso modo di come una pallina è vincolata in una buca scavata sul terreno: quando venisse allontanata dalla posizione di minima energia potenziale, la componente attiva della forza peso ve la richiama automaticamente. Così un singolo atomo in un solido è costretto da tutti gli altri, e in particolare dai più vicini, a mantenere una determinata posizione e, se si induce in qualunque modo una perturbazione esterna, a quella ve lo riconducono le forze secondo una legge di proporzionalità tra dislocazione e forza (v. paragrafo 2.2.2 p. 38). La forza di richiamo complessiva ha, quindi, la caratteristica di una forza elastica, del tipo  $F = -kr$ , ben noto dalle prime pagine della dinamica. Ciò che avviene per un singolo atomo nei confronti della posizione di riposo, avviene peraltro per una qualunque catena di atomi allineati che ci possiamo immaginare all'interno del solido:

se una sollecitazione esterna tendesse ad allungare la catena allontanando ciascun atomo dai suoi contigui, le forze agenti tra questi tenderanno a riportare le singole distanze interatomiche ai loro valori di equilibrio e la lunghezza della catena al suo valore non perturbato. La legge di Hooke macroscopica altro non è che la moltiplicazione dell'evento microscopico di ripristino delle posizioni degli atomi, dovuto alle forze elettriche. La dipendenza di queste ultime dalla distanza interatomica non è facilmente ottenibile, ma – come ogni funzione fisica – è certo sviluppabile in serie di potenze (Taylor) e, al primo ordine, fornirà la dipendenza cercata di proporzionalità tra sforzo e deformazione. Come si può capire, per sollecitazioni maggiori si dovrà tenere conto di ordini superiori ecc. Per questa via però non si giungerà mai a una dipendenza discontinua della funzione, così come vuole l'interpretazione del fenomeno d'isteresi. Un effetto nuovo subentra, che è ancora microscopico, ma che coinvolge una collettività di atomi: un gruppo di questi si muove d'improvviso sotto l'effetto di una sollecitazione troppo grande e per esempio scivola lungo un piano rispetto a una parte contigua allo stesso modo di come uno strato nevoso si distacca a valanga da uno strato sottostante o come cadono a gruppiscoli i granelli di sabbia di una pila ammonticchiata. Più semplicemente, in un solido isotropo, costituito da un insieme di piccoli grani o domini di struttura cristallina all'interno dei quali si mantiene l'ordine di struttura tra gli atomi componenti, i legami tra atomi appartenenti a grani diversi ma contigui sono decisamente più blandi dei legami all'interno di uno stesso grano cristallografico; così avviene che per sollecitazioni superiori a certi livelli è un intero grano che si muove d'improvviso rispetto ai limitrofi, trovando una nuova posizione di equilibrio. Al rilascio della sollecitazione, le distanze interatomiche ritornano ai valori iniziali, mentre le posizioni relative tra i grani si sono permanentemente mutate. Nel sistema è rimasta traccia del processo, si è verificato un fenomeno d'isteresi: una parte della deformazione, quella *elastica*, si annulla, ma una parte, quella *plastica* resta permanentemente impressa. Naturalmente, si potrà ridurre a zero la deformazione macroscopica isteretica applicando una sollecitazione, o sforzo, di segno opposto e di intensità opportuna.

Se il fenomeno dell'isteresi elastica ora descritto è di comune esperienza, come si è visto dall'esempio su riportato relativo a una sbarretta sollecitata a flessione – che si può estendere a molteplici casi di trazione, compressione o torsione di materiali diversi – pure non è altrettanto comunemente riportato nei testi elementari,

come lo è in contrapposizione il caso dell'isteresi magnetica, che invece non è di comune esperienza. Ciò perché nell'elasticità la legge di Hooke, di proporzionalità tra deformazione e sforzo, basta ad aprire la strada alle considerazioni sugli oscillatori meccanici e alle risposte in frequenza dei sistemi dinamici in generale, mentre nell'elettromagnetismo il passaggio al legame tra campo magnetico e induzione magnetica ha la sua migliore evidenziazione nel caso dei materiali ferromagnetici, che sono per gran parte isteretici.

## 2.8 Biforcazione e bistabilità

Un esempio semplice può illuminare il senso delle parole nel titolo di questo paragrafo: se teniamo in mano un cartoncino, quale fosse un biglietto da visita o una carta da gioco, e premiamo leggermente sui suoi bordi sì da causarne una leggera flessione, esso si fletterà, o da una parte o dall'altra a seconda che l'inizio della flessione sia avvenuto appunto dall'una o dall'altra parte; a uno stesso valore dell'intensità della forza con cui lo premiamo corrisponderanno due possibili posizioni, dipendenti dalla forza di pressione, appunto, ma anche dalla 'storia' più recente e da null'altro. Come si vede da questo esempio, la presenza delle due configurazioni è legata a un 'inizio' del fenomeno, al momento in cui ancora non si sono diversificate le due vie secondo cui può si potrà sviluppare il fenomeno e al quale seguirà necessariamente una divaricazione o differenziazione. C'è un valore, quindi, di un parametro, che in questo caso è dato dalla forza agente sul sistema, che discrimina due campi del comportamento del sistema, in uno dei quali c'è una dipendenza monovalente dell'effetto (deformazione) dalla causa (sforzo), nell'altro c'è una doppia dipendenza. Questo valore nel caso in esame è il valore zero della forza, che discrimina la regione a monovalenza (in questo caso quella corrispondente a valori negativi della forza, se pensiamo di potere esercitare anche delle trazioni, che potranno allungare, entro certi



**Fig. 2.19.** La pressione esercitata sui bordi di un cartoncino può provocare la deformazione sia da una parte, sia dall'altra della configurazione iniziale

limiti, il cartoncino) da quelli a doppia valenza. Non è difficile accettare il termine *biforcazione* per definire il fenomeno e quello di *punto di biforcazione* per individuare il valore corrispondente del parametro. Dopo il punto di biforcazione il sistema è *bistabile* e *bistabilità* è il corrispondente fenomeno presentato dal sistema. Nella regione di monovalenza il comportamento del sistema non è diverso da quello cui siamo abituati e che abbiamo anche descritto con attenzione nel paragrafo 2.2.2 sui solidi elastici: una relazione, in prima approssimazione anche di linearità diretta, lega la deformazione del cartoncino alla forza che vi esercitiamo sopra. Questa relazione viene meno oltre il punto di biforcazione, dove un incremento infinitesimo della deformazione determina una scelta sulla via che seguirà il fenomeno; l'incremento infinitesimo è una perturbazione, non controllabile, del tutto ‘casuale’ ma deterministica, che entra nel sistema e ne condiziona l’evoluzione. Perturbazioni, sempre presenti in un sistema macroscopico, non sono condizionanti normalmente, perché si attenuano e svaniscono brevemente nel tempo; esse indirizzano l’evoluzione di un sistema fisico macroscopico solo quando questo si trova in particolari condizioni. La fenomenologia delle biforcazioni ha ottenuto grande interesse negli ultimi decenni e si è sviluppata al riguardo una matematica che ha schematizzato i fenomeni riconducendoli a una serie di categorie. Qui vale la pena ricordare che fenomeni naturali e sociali di grande interesse e impatto sono legati a punti di biforcazione: il tempo meteorologico, non prevedibile su una scala temporale estesa perché fluttuazioni di minima entità possono svilupparsi su dimensioni macroscopiche; le quotazioni delle borse azionarie, legate a fluttuazioni di parametri normalmente disconosciuti; eventi cosmici, dipendenti dalla distribuzione di fluttuazioni termiche infinitesime presenti sulle mappe termiche dell’Universo in certi istanti della sua vita; i sommovimenti sociali o gli eventi bellici determinati dall’esistenza di un personaggio, un dittatore o altro, quindi a fluttuazioni microscopiche di moti molecolari ecc. Come si dice poeticamente, il battito d’ali di una farfalla può determinare un terremoto in terre lontane!

Vogliamo qui fornire un secondo esempio fisico, dal quale si può comprendere meglio come la presenza di una fluttuazione si possa amplificare su scala macroscopica: l’esempio riguarda gli oscillatori, su cui ci siamo diffusamente soffermati in precedenza, e precipuamente lo scostamento del comportamento dalla descrizione lineare cui siamo abituati. La bistabilità di un fenomeno nasce dalla presenza di non linearità nell’equazione di stato.

Sappiamo come risponda un oscillatore meccanico lineare a una forzante esterna di una determinate pulsazione  $\omega$ : riprendendo il contenuto del paragrafo 2.4 a pagina 49 sulle oscillazioni armoniche, scriveremo di nuovo per la soluzione

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

con le opportune espressioni per  $A(\omega)$  e per  $\varphi(\omega)$ . In molti casi reali, tuttavia, l'equazione lineare del moto è solo un'approssimazione descrittiva: si pensi per esempio al caso di un oscillatore vincolato da una molla che risponda solo in prima approssimazione in modo lineare, descritta con migliore approssimazione da una legge quadratica del tipo  $F = -kx - k'x^2$ . L'equazione differenziale del moto si scriverà in tal caso

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k'x^2 = F \cos(\omega t)$$

con un termine quadratico in  $x$  che, se sufficientemente piccolo, apporterà una piccola correzione alla soluzione lineare sopra riportata. In termini del tutto generali potremo scrivere la soluzione come  $x(t) = x_0(t) + \epsilon(t)$ , in cui ora indichiamo con  $x_0(t)$  la soluzione dell'equazione lineare e con  $\epsilon(t) \ll x_0(t)$  una piccola perturbazione. Per trovare l'espressione di  $\epsilon(t)$  si può far uso di un metodo risolutorio detto *metodo delle perturbazioni*, per il quale si inserisce nell'equazione non lineare, come prima approssimazione, la soluzione dell'equazione lineare, cosicché ci si riduce a un'equazione nella perturbazione incognita  $\epsilon(t)$ , nella quale si ottengono come termini di eccitazione combinazioni della soluzione lineare nota:

$$m\ddot{\epsilon} + b\dot{\epsilon} + k\epsilon = -k'(x_0 + \epsilon)^2 = -k'(x_0^2 + 2x_0\epsilon + \epsilon^2)$$

Se ricordiamo che la soluzione lineare  $x_0(t)$  è una funzione armonica di pulsazione  $\omega$ , si vede che nei termini di eccitazione a ultimo membro c'è un termine in  $2\omega$ , derivante da  $x^2(t)$ , che darà luogo a frequenze di seconda armonica e poi un termine di doppio prodotto, rispetto al quale è trascurabile il termine in  $\epsilon^2(t)$ . Soffermando ci a considerare il termine di doppio prodotto, si vede che, se nel sistema oscillante subentra casualmente una perturbazione estranea di pulsazione  $\omega/2$  pari per esempio alla metà di quella iniziale di pilotaggio  $\omega$ , il prodotto  $2x_0\epsilon$  contiene una pulsazione dello stesso valore (poiché dal prodotto tra un termine in  $\omega$  e uno in  $\omega/2$  derivano un termine nella pulsazione somma  $3/2\omega$  e uno in quella differenza  $\omega/2$ ). Ciò signifi-

ca che, introducendo fintiziamente nel sistema una piccola perturbazione, il sistema – purché sia non lineare – riesce a produrre una soluzione di pari frequenza della perturbazione. Se l'energia immessa nel sistema dalla forza di pilotaggio  $F(\omega)$  è sufficientemente grande, questo termine prodotto non linearmente potrà essere anche maggiore della perturbazione immessa. In queste condizioni il sistema continua a moltiplicare l'effetto di produzione del termine di frequenza metà, che quindi si autosostiene senza più bisogno della perturbazione esterna. La frequenza metà o *subarmonica* è prodotta solo al superamento di un certo *valore di soglia* della forza di pilotaggio. Quest'ultima costituisce il *parametro di controllo* del sistema, che presenta una biforcazione al raggiungimento del valore di soglia. Se appare chiaro da questo esempio il meccanismo di soglia, meno chiaro può apparire quello di biforcazione e quindi di bistabilità; esso tuttavia è sempre presente quando ci sono effetti di soglia, poiché la nascita del nuovo fenomeno – in questo caso l'oscillazione di subarmonica – è casuale e può anche non essere momentaneamente presente, perdurando in tal caso il sistema solo sull'oscillazione della fondamentale.

L'interesse per l'esempio riportato può apparire limitato a un caso molto specifico di meccanica del punto; esso invece si estende e il risultato conduce a considerazioni di assai più vasta portata, non solo perché, come può immaginarsi, si ritrova in tutte le equazioni riconducibili a quella dell'oscillatore, alle quali si è data ampia descrizione nel paragrafo dedicato, ma anche perché si presta come spunto alla considerazione di fenomeni caotici nella fisica. Come, infatti, si è visto che per non linearità può generarsi nell'oscillatore una frequenza subarmonica al crescere del parametro di controllo dato dall'intensità della forzante  $F(t)$ , si può facilmente immaginare che a un'ulteriore crescita di tale parametro l'oscillazione di subarmonica a  $\omega/2$  possa creare col medesimo meccanismo un'oscillazione di pulsazione  $\omega/4$  (e, naturalmente, anche di  $3/4\omega$  in modo analogo alla generazione della  $3/2\omega$ ) e così successivamente di tutte le subarmoniche delle subarmoniche e le loro combinazioni multiple. Si giunge così a un valore  $F_{caos}$  del parametro, oltre il quale sono presenti tutte le possibili combinazioni dei sottomultipli  $(1/2)^n$  e delle loro combinazioni: si è raggiunta la condizione di *caos*, per la quale il sistema oscilla nel tempo in modo assolutamente non prevedibile e senza apparente regolarità e tuttavia assolutamente deterministico. La conoscenza del moto del sistema richiederebbe una precisione infinita delle condizioni di contorno, quali non sono accessibili nella pratica. Questo

esempio è illuminante di tutta una serie di fenomeni naturali che non sono prevedibili su una scala temporale sufficientemente estesa, come più sopra è stato esemplificato e come qui si è voluto individuare per una fenomenologia particolare, detta *via al caos* da subarmoniche. Questi concetti di biforcazione, bistabilità e caos, variamente legati l'uno all'altro, formano un insieme di grande interesse della fisica contemporanea, pur nascendo nei processi della fisica classica, visti tuttavia nelle condizioni di un gran numero di elementi interagenti tra loro in modo non lineare, secondo equazioni non aggredibili in modo semplice. Non è senza motivo, quindi, che alle strutture delle quali si studiano questi comportamenti si dia il nome generico di *sistemi complessi*.

# Capitolo 3

## Funzioni, operatori e dintorni

### 3.1 Prodotto scalare e prodotto vettore

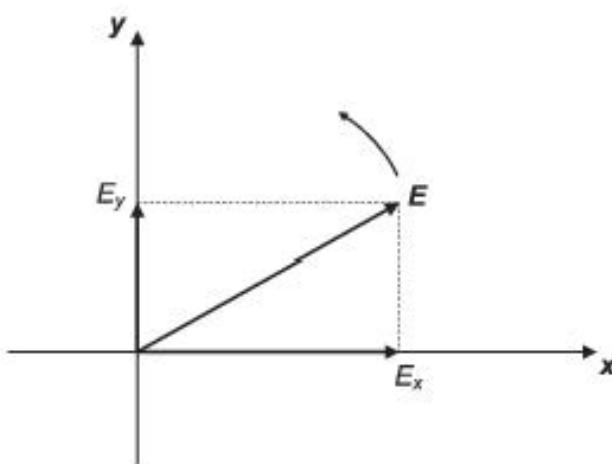
È certo ben noto al lettore che ci ha seguito fin qui cosa sia una grandezza vettoriale; molteplici sono gli esempi che si incontrano sin dalle prime pagine di un testo di fisica: la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto, il momento, per poi passare al campo elettrico, al campo magnetico, al dipolo elettrico e oltre, sino al momento di una spira, al momento di polarizzazione e di magnetizzazione ecc. Comune a tutti gli esempi riportati è la necessità di fornire tre valori numerici indipendenti per definire la grandezza in questione, spesso correlati con le tre direzioni spaziali; ragione per la quale la grandezza si assimila a un segmento orientato che nelle tre direzioni spaziali ha proiezioni pari ai tre valori numerici rappresentativi. Se questo è spesso vero nella fisica, il concetto di vettore – come è noto da chi abbia dimestichezza con l'informatica – diviene più in generale sinonimo di un insieme, non solo di tre, ma di  $n$  valori scelti in sequenza ordinata, che nulla hanno a che vedere con le direzioni spaziali: come talvolta avviene, un concetto o un'immagine propria di un ambito viene astratta e ampliata in ambiti diversi! Così, un insieme di numeri o di valori viene trattato complessivamente e coordinatamente, con tutte le varie componenti trattate parallelamente allo stesso modo o sottoposte alle stesse operazioni. Per esempio, tornando al caso tridimensionale che più ci interessa, le tre componenti del vettore velocità con cui un passeggero cammina lungo il corridoio di una carrozza di un treno, si sommano alle analoghe componenti del vettore velocità

con cui il treno si muove lungo i binari per dare la velocità del passeggero rispetto al terreno (si veda la figura 2.1 a pagina 26); il campo elettrico oscillante di un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente si somma con il campo elettrico polarizzato in direzione ortogonale, per dare il campo polarizzato ellitticamente dell'onda risultante; ancora, le quantità di moto di tutte le parti in cui si è suddiviso un razzo dopo l'esplosione si sommano, componente per componente, per dare la quantità di moto complessiva del sistema (che varia unicamente per effetto della risultante delle forze esterne, insensibile alle azioni interne tra le singole parti) ecc. In questi esempi si è fatto riferimento all'operazione di somma tra vettori omogenei, eseguita sommando separatamente le singole componenti omologhe e ricostituendo il vettore risultante per aggregazione delle componenti.

Qui siamo però interessati a nuove operazioni che innovano, rispetto alle analoghe operazioni su grandezze monodimensionali, il risultato atteso per le singole componenti; precisamente ci porremo l'attenzione sull'operazione del prodotto tra due vettori, che potrà essere eseguito in due modi diversi, fornendo come risultato in un caso una grandezza monodimensionale, o scalare, nell'altro un vettore e chiameremo rispettivamente *scalare* o *vettore* i prodotti così ottenuti, talvol-

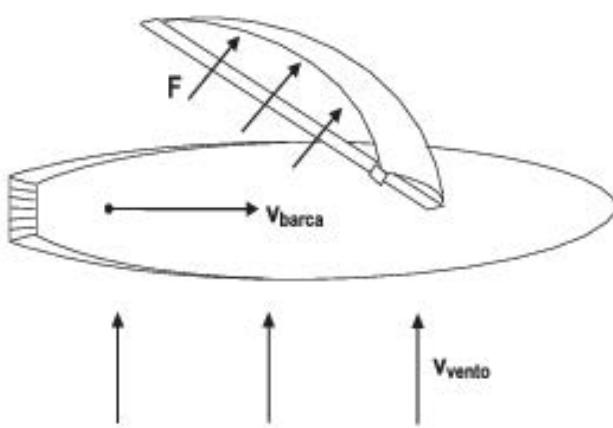
ta altrimenti detti prodotto *interno* ed *esterno*. Entrambe le operazioni derivano la loro definizione da necessità operative reali, quali si incontrano in vari contesti reali.

Si pensi al caso di un vagone ferroviario posizionato su un binario in piano; se si vuole muovere il vagone lungo il binario si deve applicare su di esso una forza che abbia una componente non nulla lungo la direzione del binario stesso; a nulla varrà spingerlo in direzione trasversa, poiché a tale eventuale forza si opporrà una reazione comunque grande del vincolo, tale da annullare la forza applicata.

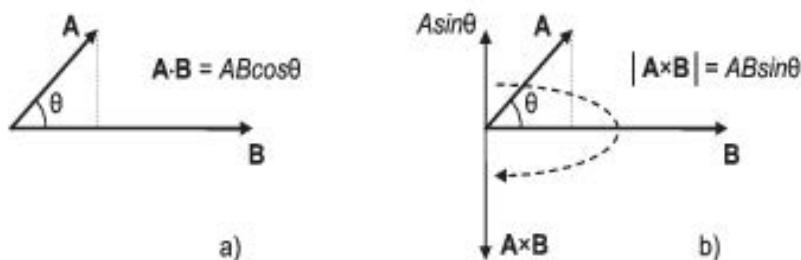


**Fig. 3.1.** Campo elettrico di un'onda elettromagnetica polarizzata circolarmente, somma delle due componenti lineari  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$

Chi sa andar per mare sa bene quale dev'essere la posizione del piano di vela rispetto alla direzione del vento e dello scafo per muoversi con la massima velocità: fare in modo che la direzione normale alla vela, che vale come direzione della forza prodotta dal vento sulla barca, abbia la massima componente possibile nella direzione longitudinale dello scafo! Da entrambi questi esempi si evince l'interesse nel considerare la proiezione di un vettore sulla direzione di un altro: in entrambi l'interesse è per la forza nella direzione dello spostamento del sistema. Qui non vi è lettore che non pensi al concetto del lavoro di una forza, pari al prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento per lo spostamento stesso o, ancor meglio, l'integrale del differenziale costruito nel medesimo modo, come prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento elementare  $F_\ell$  per questo stesso spostamento  $\int F_\ell d\ell$ . Il prodotto scalare tra due vettori, in questo caso forza e spostamento, fornisce proprio questo risultato, dal momento che esso è dato per definizione dalla somma dei prodotti tra le componenti omologhe dei due vettori:  $F_\ell d\ell = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ . Infatti, moltiplicando scalarmente un generico vettore  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  per il versore  $\mathbf{i}$  diretto secondo



**Fig. 3.2.** Il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  agente sulla velatura di una barca è prodotto dalla sola componente nella direzione del moto della barca; la potenza è  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{\text{barca}}$

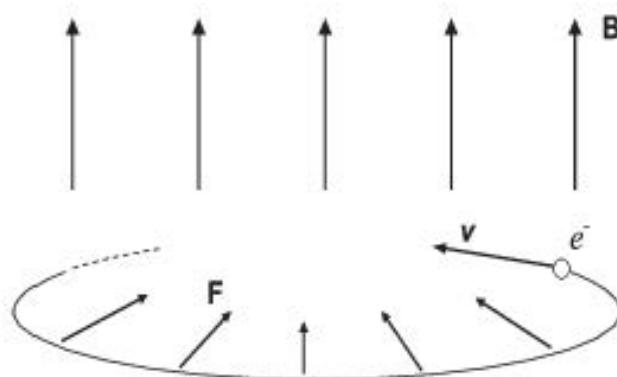


**Fig. 3.3.** Definizione di prodotto tra vettori: a) scalare, o interno, b) vettoriale, o esterno

l'asse cartesiano  $x$  si ottiene  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x$  in quanto è  $i_x = 1, i_y = 0, i_z = 0$ , e poiché vale la proprietà distributiva del prodotto, si vede che il prodotto di  $\mathbf{A}$  per la somma dei tre versori sugli assi cartesiani  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , è pari a  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = A_x + A_y + A_z$ . Quindi, dato un secondo generico vettore  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ , si avrà, come si voleva dimostrare per il caso del lavoro:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ . In conclusione, con l'operazione del prodotto scalare si offre un modo semplice per rappresentare il grado di sovrapposizione tra due vettori, dal momento che esso è pari al prodotto del modulo di uno qualsivoglia dei due per la proiezione su di esso dell'altro.

Col prodotto scalare si è definita, in modo certamente arbitrario ma pur utile nell'elaborazione di certuni problemi, una maniera di operare il prodotto tra due vettori che gode delle proprietà di commutazione e di distribuzione comuni al prodotto tra numeri. In altre occasioni, tuttavia, ci si imbatte in una relazione tra vettori di diversa natura che non può essere descritta dal prodotto scalare. Anche per questo caso, lasciamoci guidare dalla necessità

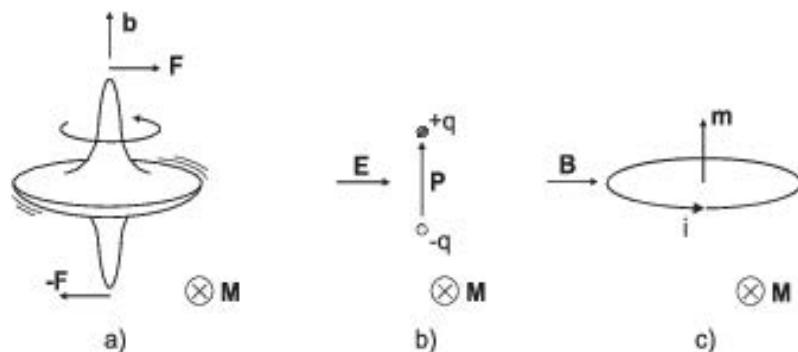
della descrizione fisica dei fenomeni. Se dobbiamo ad es. aprire una porta incardinata attorno a un asse verticale sappiamo bene che dovremo spingere la maniglia, già posizionata sulla porta nella parte più distante dall'asse, con una forza diretta orizzontalmente e normale al piano della porta: se applicassimo la forza secondo una qualunque direzione parallela al piano, magari verticale verso l'alto o anche orizzontale ma verso l'asse dei cardini, sappiamo che potremmo al più sollevare la porta fuori dai cardini o forzare questi fino a rottura, ma nulla otterremmo al fine dell'apertura della porta: questa non ruoterà attorno ai cardini, come invece farebbe docilmente se si applicasse la forza in direzione opportuna. La messa in oscillazione della corda di una chitarra per estrarne il suono si ottiene forzando con le dita la corda in direzione normale alla sua direzione e non parallelamente a essa; per fare avanzare un cavatappi a vite nel tappo di sughero di una bottiglia agiremo sui manici forzando-



**Fig. 3.4.** Nel moto circolare uniforme di una carica in un campo di induzione magnetica uniforme la forza  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  è ortogonale al campo. Il lavoro è nullo

li tangenzialmente al loro moto di rotazione attorno all'asse e quanto più possibile vicino alla loro estremità esterna ecc. In tutti questi esempi, per ottenere il risultato voluto, si deve scegliere la direzione di applicazione della forza normale a una qualche altra direzione propria del sistema, che ora cercheremo di identificare come quella più privilegiata. In tutti e tre gli esempi sopra riportati, di fatto, i sistemi venivano posti in movimento attorno ad assi di rotazione: la porta attorno alla retta per i cardini, la parte pizzicata della corda attorno a rette per i punti estremi di fissaggio, il cavatappi attorno al suo asse. Diviene allora fondamentale ai fini degli effetti risultanti dell'applicazione della forza considerarne il *braccio*, ovvero il segmento che va dal punto di applicazione normalmente fino all'asse di rotazione e, con esso naturalmente, la forza medesima o meglio quella componente della forza che è normale al braccio. Così, la forza applicata sulla porta per ottenerne l'apertura non dovrà solamente essere orientata in direzione normale a questa, ma la sua azione sarà tanto più efficace quanto più lontana sarà applicata dalla retta per i cardini. E, non ultimo, la rotazione avverrà attorno a un asse che – nell'esempio ha la direzione obbligata – in un sistema libero è in ogni istante normale al piano contenente sia la forza sia il vettore che unisce il centro di massa col punto di applicazione della forza. C'è un nuovo prodotto tra vettori, quindi, da considerare che deve possedere una natura vettoriale, in quanto dipende dall'orientamento dei fattori, e il cui valore assoluto vale il prodotto dell'uno per la componente dell'altro nella direzione ortogonale. Così viene introdotto il prodotto *vettore*, per il quale la direzione del vettore risultante è normale al piano definito dai due vettori fattori e il verso convenzionalmente è scelto come quello da cui si vedrebbe il primo dei due vettori sovrapporsi alla direzione del secondo (muovendosi sull'angolo più piccolo dei due possibili) in moto antiorario.

Per una forza  $\mathbf{F}$  applicata in un punto distante  $\mathbf{r}$  dall'asse di rotazione si introduce il momento  $\mathbf{M}$  come il prodotto vettore  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Le espressioni delle tre componenti del momento in funzione delle rispettive componenti dei vettori fattori si ottengono con una regola di prodotti incrociati, che per il caso generico del prodotto  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  è data da  $C_x = A_y B_z - A_z B_y$  e così via per le altre componenti, ruotando consecutivamente gli indici:  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ . È facile verificare che se il vettore  $\mathbf{A}$  è diretto secondo  $x$  e  $\mathbf{B}$  secondo  $y$ , si ottiene un vettore  $\mathbf{C}$  orientato secondo  $z$ , come si voleva dalla definizione e come deriva dalla valutazione delle tre componenti:  $C_x = 0$ ,  $C_y = 0$ ,  $C_z = AB$ . Ritroviamo l'uso del prodotto vettore



**Fig. 3.5.** Momenti delle forze, come prodotti vettore, esercitati (a) da una coppia di forze su un giroscopio; (b) da un campo elettrico su un dipolo elettrico; (c) da un campo di induzione magnetica su una spira circolare

nella definizione del momento (b) della quantità di moto ( $p$ ) rispetto a un punto (con distanza  $r$ ):  $b = r \times p$ , nell'espressione del momento meccanico ( $M$ ) esercitato da una coppia di forze su un corpo in rotazione o da un campo elettrico ( $E$ ) su un dipolo elettrico ( $p$ ):  $M = p \times E$ , o di un campo di induzione magnetica ( $B$ ) su una spira di momento magnetico ( $m$ ):  $M = m \times B$  e in altre espressioni, su alcune delle quali torneremo in questo capitolo quando introdurremo l'operatore rotore da applicare a un campo vettoriale.

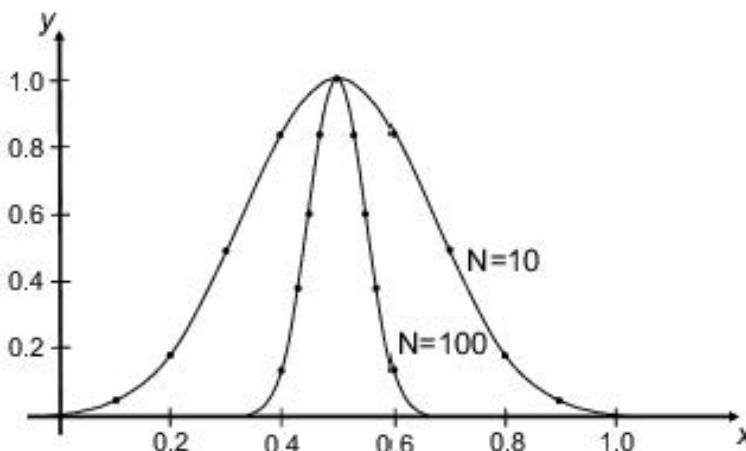
### 3.2 Il fattoriale $n!$

Si deve a un matematico francese, Louis François Antoine Arbogast, vissuto nella seconda metà del secolo XVIII, la felice notazione del punto esclamativo usato di seguito a un numero intero positivo per indicare il prodotto di tutti i numeri interi positivi eguali e minori di quello indicato, cioè la notazione di  $n!$  per significare  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Il numero intero positivo che ne vien fuori cresce così rapidamente al crescere di  $n$  che viene da pensare che la scelta del punto di esclamazione segua quasi la meravigliata constatazione del risultato; è facile verificare che già per  $n = 10$  si superano i 3.000.000, per  $n = 20$  addirittura i 2.000.000.000.000.000. Il punto esclamativo, dunque, è semplicemente un operatore – come ne abbiamo già incontrati altri e come altri ancora ne incontreremo in questo capitolo – che sostituisce semplicemente una diversa notazione o serie di notazioni, o che ne introduce una affatto nuova, legata a un modo nuovo di ‘operare’ su un numero, una variabile, una

funzione o altro. A prima vista, l'interesse per il fattoriale potrebbe sembrare doversi attribuire a una semplice curiosità numerica; invece, lo ritroviamo d'uso in tutte quelle situazioni di distribuzione statistica, quando un medesimo insieme di oggetti possa essere preso da un numero arbitrariamente grande di insiemi tutti eguali tra loro che li contengano. Più specificatamente, supponiamo di avere dei cesti di frutta tutti della stessa composizione e in numero di  $n$ , in ciascuno dei quali si trovi un frutto di ogni sorta, diciamo una mela, una pera, un'arancia, una pesca, una noce e così via, per un totale di  $m$ . Può sembrare per il momento solo un'oziosa curiosità, ma chiediamoci in quanti modi diversi possiamo ottenere una certa combinazione di frutti, prelevandone uno da ciascun cesto, diciamo 2 mele, un'arancia e 3 noci, con un totale che sarà in tal caso  $n = 6$ . Se questo è forse un problema già un po' difficile da risolvere come primo impatto nel campo delle distribuzioni, possiamo semplificarlo pensando che il numero di frutti diversi, cioè il numero  $m$ , sia eguale a 2, che in ogni cesto ci sia per es. solo una pera e una mela. La domanda diviene semplicemente: in quanti modi diversi potremo prelevare dalle ceste una certa combinazione, diciamo, di  $a$  mele e  $b$  pere? Ciò che equivale a chiedere in quanti modi diversi si possano prelevare  $a$  elementi da un insieme di  $n$ . Se vogliamo  $a$  eguale a 1, la risposta è immediata: potremo prelevare quell'unica mela o dalla prima, o dalla seconda ecc. fino all'ultima  $n$ -esima cesta, in  $n$  modi complessivamente. Se vogliamo  $a$  eguale a 2, ciò potrà essere ottenuto – per ognuna delle modalità del caso precedente – prelevando una seconda mela da una qualunque delle rimanenti  $n - 1$  ceste; ciò che porta a un numero complessivo di modi pari al prodotto di  $n$  per  $n - 1$ . Tuttavia, una certa combinazione di due mele la si può anche ottenere estraendo per prima quella che è stata estratta per seconda, e viceversa; cioè, il numero precedente va diviso per 2. Così, potremo dire che per il caso di tre mele i modi possibili sono  $n(n - 1)(n - 2)$  e che questo numero va diviso per 2 e per 3, cioè per  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ ; così seguitando, per il caso generico di  $a$  mele, i modi possibili saranno  $n(n - 1)(n - 2) \dots [n - (a - 1)]$ , che vale naturalmente  $n!/(n - a)!$  e che questo numero va diviso per  $a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a$ . Il risultato diviene, quindi,  $n!/[n - a]a!$ . Questo termine si dice binomiale, poiché è il fattore che nella potenza  $n$ -esima di un binomio  $(x + y)^n$  moltiplica il termine  $x^a y^{(n-a)}$  dello sviluppo; di fatto il numero di modi in cui può ottersi la potenza  $x^a$  nell'elevamento a potenza di un binomio è esattamente quello in cui da un insieme di  $n$  termini del tipo  $(x + y)$  si può prelevare  $a$  volte la  $x$ . Il fattoriale è divenuta una maniera semplice

ed efficiente di sintetizzare il risultato. Potremo ora estendere il risultato ottenuto al caso indicato all'inizio di prelevare, diciamo,  $a$  frutti di un tipo,  $b$  di un altro e così fino a  $p$  dell'ultimo  $k$ -esimo frutto. Naturalmente le modalità di prelevare  $a$  frutti del primo tipo saranno in numero di  $n!/(n-a)!a!$  come per il caso precedente. I successivi  $b$  frutti potranno essere estratti – per ognuna delle  $n!/(n-a)!a!$  modalità precedenti – in un numero di modi pari a quelli in cui si possono estrarre  $b$  elementi da un insieme di ceste ridotto a un numero  $n-a$ , cioè  $(n-a)!/(n-a-b)!b!$ , in totale  $n!/(n-a-b)!a!b!$  Continuando così fino all'ultimo, si avrà un numero complessivo di modalità pari a  $n!/(n-a-b-\dots-p)!a!b!\dots p!$ , che è un'espressione elegante fatta di soli termini fattoriali.

Che il fattoriale sia un'espressione di grande interesse nelle distribuzioni degli elementi appare evidente nella termodinamica statistica, quando si voglia esprimere il concetto dell'entropia attraverso la probabilità, ovvero attraverso il numero di complessioni microscopiche possibili che realizzano una medesima configurazione macroscopica. A tal proposito, fissiamoci su un esempio concreto: quello di un gas, pensato come un insieme di  $N$  particelle tutte identiche, confinato in un recipiente suddiviso in due parti uguali separate da un setto forato; ci poniamo il problema di determinare la probabilità che un numero  $n$  di queste particelle sia contenuto in una metà del recipiente e il numero residuo  $N-n$  nell'altra metà. Poiché la probabilità che una qualunque particella si trovi in una metà piuttosto che nell'altra è pari a 1/2 sarà facile determinare in quanti modi microscopicamente diversi si possa ottenere il risultato richiesto di avere  $n$  particelle da una parte. Tale numero sarà proporzionale alla probabilità ricercata. Il procedimento è assolutamente simile a quello già rappresentato più sopra per la selezione di due soli frutti da un certo numero di ceste; infatti, se costruiamo la probabilità cominciando dal caso in cui una sola particella si trovi in una metà del recipiente e tutte le altre  $N-1$  nell'altra, siamo subito in grado di affermare che ciò si può ottenere in  $N$  modi distinti, scegliendo per ogni modo una qualunque delle  $N$  particelle. Successivamente, il numero di modi in cui possiamo ottenere due particelle in una metà del recipiente e le rimanenti  $N-2$  nell'altra si ottiene pensando che per ognuna delle  $N$  modalità precedenti calcolate per il caso di una sola particella si può scegliere una qualunque delle rimanenti  $N-1$  particelle, giungendo così al numero delle complessioni pari a  $N(N-1)$ , che va diviso per 2 per non ripetere una stessa combinazione invertendo semplicemente i tempi di



**Fig. 3.6.** Distribuzione attorno alla mediana dei risultati di suddivisione di  $N$  particelle distinguibili in due parti uguali in un recipiente per  $N = 10$  e  $N = 100$ . In ascissa il rapporto tra il numero di particelle presenti in una metà del recipiente e il numero totale. In ordinata la probabilità di uno specifico rapporto normalizzata al rapporto più probabile

estrazione. Si vede in tal modo come si stia ripetendo la procedura già esaminata in precedenza, la quale fornisce come soluzione del numero di complessioni per  $n$  particelle il valore  $N! / [(N - n)!n!]$ . Per ogni fissato  $N$ , questo numero cresce al crescere di  $n$  fino a che  $n$  raggiunge il numero  $N/2$  (se  $N$  è pari, o  $(N - 1)/2$  se dispari); cioè la probabilità della distribuzione delle particelle è massima quando esse si ripartiscono equamente tra le due metà del recipiente. Nella Tabella è riportato il conteggio delle complessioni per il caso di  $N = 10$ , inserendo anche il caso in cui tutte le 10 particelle si trovino in una metà e nessuna nell'altra, che può naturalmente essere ottenuto in un solo modo possibile di distribuzioni microscopiche.

Numero di $n$ particelle in una metà del recipiente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numero di particelle nell'altra metà del recipiente	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Numero delle complessioni macroscopicamente distinte	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Nella figura 3.6 sono, invece, riprodotte graficamente due possibili distribuzioni di particelle distinguibili per i casi di  $N = 10$  e  $N = 100$ , rispettivamente in (a) e (b). Si nota immediatamente come nel secondo caso la curva che unisce i punti discreti della distribuzione si stringa attorno al valore centrale  $n = N/2$  della distribuzione,

corrispondendo ciò al fatto che più grande è il numero delle particelle, più grande in corrispondenza è la probabilità che la distribuzione sia quella di avere metà delle particelle in una parte e metà nell'altra: il calcolo della probabilità statistica giustifica la distribuzione fisica reale, se dovessimo aprire un setto che confina un gas in una metà di un recipiente lasciandone l'altra vuota, è bene evidente che il gas tenderà a effluire dalla prima metà distribuendosi con pressione eguale in ambedue le parti. Come bene sappiamo, la termodinamica delle leggi certe descrive di fatto una realtà probabilistica, che diamo per certezza, forte della riduzione delle funzioni di distribuzione – ricche di fattoriali – a curve estremamente piccate attorno ai valori del massimo. Il fatto che in una giornata afosa non serva munirsi di un golf per uscire dipende dalla sicurezza che abbiamo nella statistica, pensando essere estremamente improbabile che, in un insieme straordinariamente grande di molecole dotate medianamente di una certa energia cinetica, quelle intorno a noi siano proprio tutte quelle che nella distribuzione statistica abbiano l'energia cinetica minore! Non diversamente ci affidiamo all'immagine che ci fornisce lo specchietto laterale dell'automobile prima di iniziare un sorpasso, fiduciosi che i fotoni mediamente seguano la geometria delle leggi della riflessione e si astengano sui grandi numeri da comportamenti fuori della media!

### 3.3 L'esponenziale e il logaritmo

Un'espressione scientifica, tra le poche che sono entrate nell'uso comune e che, come tale, è usata in modo non proprio, è la 'crescita esponenziale' di un prezzo, di una merce, di dati, di traffico ecc., di qualcosa che possa essere comunque numerato o misurato, di quello che si dovrebbe con più precisione chiamare una grandezza e che magari nell'uso non sempre è tale, visto che la si usa anche riferita all'interesse per un evento, al successo di uno spettacolo, alla passione per un oggetto ecc. Anche in questa seconda serie di esempi, comunque, è presente un senso di quantità e la crescita esponenziale si riferisce appunto all'aumento rapido, e sempre più rapido, di questa. Nell'inciso del 'sempre più rapido' il lettore competente avrà ritrovato il vero senso della caratteristica esponenziale che viene un po' gratuitamente attribuita in genere a una crescita eccezionalmente rapida. Naturalmente, il significato matematico è univoco, non ambiguo e sta nell'andamento della funzione  $A^x$  (o, più specificatamente  $e^x$ , essendo  $e = 2.71828\dots$  la base dei logaritmi naturali) al variare di  $x$  e

noi lo ricordiamo brevemente per poterne ritrovare l'origine nei fenomeni fisici che descriveremo in seguito.

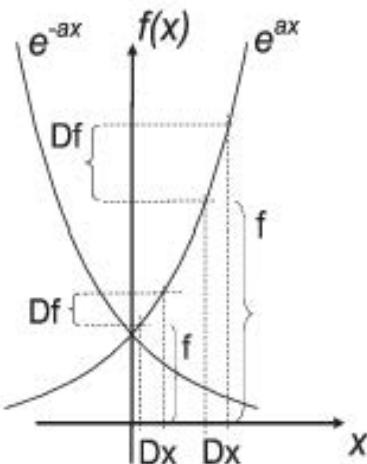
Quando si dice che una grandezza dipende da un'altra secondo una potenza, e si scrive per es.  $y = x^n$ , si intende che per ottenere  $y$  bisogna moltiplicare  $x$  per sé stesso un numero  $n$  di volte. Ciò implica che  $y$  dipende fortemente da  $x$ ; se consideriamo il caso di  $n = 2$ , per es., e calcoliamo la potenza  $x^2$  successivamente per  $x = 1, 2, 3$  ecc., otteniamo i valori 1, 4, 9, 16, 25 e così via, in un crescendo che diviene sempre più rapido man mano che  $x$  cresce. La crescita è tanto più rapida quanto più è grande l'esponente  $n$ : per  $n = 3$  la sequenza dei valori diviene 1, 8, 27, 64, 125 ecc., per  $n = 4$  diviene 1, 16, 81, 256, 625 ecc. Una legge fisica di potenza si trova per es. nell'espressione dell'energia cinetica di un corpo: di tale dipendenza ce ne accorgiamo bene quando, fornendo col motore una potenza più o meno costante a un autoveicolo (o coi muscoli a una bicicletta), e incrementando quindi in maniera pressoché costante nel tempo l'energia cinetica, vediamo che la velocità aumenta sempre più lentamente: l'energia cinetica, sappiamo, cresce col quadrato della velocità del corpo. Questo esempio si applica bene, peraltro, a velocità relativamente basse, in condizioni in cui la resistenza dell'aria non incida sensibilmente sul moto; a velocità elevate, la legge di potenza sarà ancor più evidente in virtù di un'ulteriore dipendenza quadratica della resistenza dalla velocità.

Trasferiamo ora l'esempio numerico precedentemente fornito a un caso geometrico che ci è facile seguire con l'immaginazione: al caso dell'area di un quadrato di lato  $L$  sul piano o al volume di un cubo di eguale spigolo  $L$  nello spazio. Sappiamo che l'area del quadrato e il volume del cubo crescono rispettivamente come  $L^2$  e  $L^3$  e il raddoppio del lato o dello spigolo portano a un aumento di  $2^2 = 4$  e  $2^3 = 8$  volte, rispettivamente, dell'area e del volume. Se pensiamo di incrementare di poco, diciamo di  $\Delta L$ , il lato o lo spigolo, la differenziazione delle funzioni  $L^2$  e  $L^3$  porta a un aumento dell'area e del volume, rispettivamente, eguali a circa  $2L\Delta L$  e  $3L^2\Delta L$ , tanto maggiori, cioè, a parità di  $\Delta L$ , quanto maggiore è il valore di  $L$  e quanto è maggiore l'esponente. Ciò è in linea con la crescita sempre più rapida dei numeri che abbiamo messo in sequenza negli esempi precedenti. Se si considerano gli aumenti relativi del lato, dell'area e del volume si trovano in sequenza  $\Delta L/L$ ,  $2\Delta L/L$  e  $3\Delta L/L$ , crescenti in ragione proporzionale all'esponente della potenza che si considera: 1, 2, 3. Possiamo generalizzare dicendo che gli aumenti relativi della potenza

$x^n$  per un piccolo incremento  $dx$  della base sono proporzionali all'esponente, eguali a  $\frac{d(x^n)}{x^n} = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = n\frac{dx}{x}$ , cioè crescono al crescere di  $n$  a parità dell'incremento relativo  $\frac{d(x)}{x}$  della variabile. Viene, allora, da chiedersi come cresca la funzione quando si vari l'esponente al posto della base, cioè quando implicitamente si pensi alla funzione  $n^x$ , piuttosto che alla  $x^n$ , se si vuole mantenere la  $x$  come variabile: la risposta viene direttamente dall'analisi, la quale fornisce come espressione della variazione relativa della funzione l'espressione  $\ln(n)dx$ . Se si confronta questa dipendenza della crescita con quella appena più sopra trovata, si nota che, fissato  $n$  (nel primo caso: l'esponente della potenza, nel secondo: la base), la crescita relativa al variare di  $x$  è nel primo caso ( $n\frac{dx}{x}$ ) inferiore alla seconda ( $\ln(n)dx$ ), qualunque sia il valore dell'esponente decrescendo la prima al crescere di  $x$  e rimanendo invariata la seconda.

Si dice che l'esponenziale – tale è il nome della funzione potenza quando si pensi all'esponente come variabile – cresce più rapidamente della potenza, qualunque sia l'esponente di questa. Tra le funzioni esponenziali, infine, quella che ha come base il numero  $e = 2.71828\dots$  ha la caratteristica di coincidere con la sua derivata e a essa si riserva di fatto il nome di funzione esponenziale. È questa la caratteristica da ritenersi bene in mente quando si considera una funzione esponenziale, come la crescita di una grandezza o la sua decrescita: più grande è il valore della grandezza, maggiore è il suo tasso di crescita e il legame tra le due funzioni è di stretta proporzionalità. La figura riportata mostra nei due casi in cui l'esponente sia positivo o negativo il legame strutturale che si è descritto.

Sin qui si è fatto qualche sforzo per evidenziare, con l'ausilio di alcuni dati numerici e risultati analitici, le proprietà della funzione esponenziale  $e^x$ : in breve, essa è una funzione che cresce più rapidamente di qualunque potenza della variabile  $x$  e, inoltre, la sua variazione relativa è costante. Le due proprietà sono strettamente correlate, nel senso che più è grande la variabile, più è grande la variazione e, quindi, al crescere indefinito di  $x$  verso infinito, la variazione cresce anch'essa verso infinito,



**Fig. 3.7.** Nella funzione esponenziale la crescita  $Df \propto f$  della funzione è proporzionale al valore stesso della funzione.

superando qualunque altra crescita di potenza. Rivolgiamo ora l'attenzione al mondo fisico e consideriamo una serie di fenomeni la cui crescita è regolata da una legge esponenziale. Ovviamente, poiché nessuna grandezza fisica può tendere all'infinito, i fenomeni che si legano a questa regola lo faranno solo in un ambito limitato della crescita, fintanto che nel sistema fisico non interverranno preponderanti dei fattori limitanti, di dissipazione o di saturazione, secondo quanto avremo occasione di descrivere nei paragrafi a seguire.

### 3.3.1 Caduta di un grave nell'aria

Iniziamo con un esempio della meccanica, considerando la caduta di un grave. Il primo approccio che usualmente si segue è quello che ipotizza l'assenza del mezzo – caduta libera nel vuoto – e limita le forze esterne al solo peso del corpo: in tale caso, la forza costante implica un'accelerazione costante, eguale per tutti i corpi, poiché per tutti i corpi il peso è proporzionale alla massa. Il moto che ne segue è uniformemente accelerato e, se il corpo è lasciato da fermo, la traiettoria coincide con la verticale. Se, invece, la caduta ha luogo in un mezzo vischioso, come l'aria ad esempio, il grave è rallentato rispetto alla caduta nel vuoto per la presenza di una forza sempre diretta in verso opposto alla velocità e a questa proporzionale. Il grave si muove, allora, con un'accelerazione che è inizialmente eguale a quella di gravità, perché la forza vischiosa è nulla, e che va via via diminuendo al crescere della velocità fino a che questa tende a restare costante, pari a un valore limite ben definito quando la resistenza crescente dell'aria tende a eguagliare il valore della forza peso. Il raggiungimento della velocità limite del corpo da quella nulla iniziale avviene con legge esponenziale, in tal caso con esponente negativo. La motivazione si ritrova proprio nella caratteristica della funzione esponenziale: la forza resistiva prodotta dal mezzo è in ogni istante proporzionale alla velocità e opposta a questa  $F_{\text{visc}} = -bv$ . Se si aggiunge a questa forza il peso  $mg$ , si vede che l'accelerazione, e quindi la variazione temporale della velocità, ha un termine proporzionale alla velocità stessa che si somma a un termine costante  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{bv}{m}$ . La velocità del grave cresce nel tempo e si avvicina asintoticamente al valore limite  $v_{\text{lim}} = mg/b$  secondo una legge esponenziale proporzionale a  $e^{-\frac{b}{m}t}$ , mentre la sua variazione, e quindi la sua accelerazione, va via via diminuendo quanto più piccola è la differenza dal valore asintotico. Il segno negativo, in tal caso, sta a significare che l'avvicinamento avviene

più rapidamente rispetto a qualunque potenza a esponente negativo del tempo  $t$ .

### 3.3.2 Assorbimento di un'onda

Ritroviamo una legge di decadimento esponenziale anche ognqualvolta si è in presenza di un'onda che si propaga in un mezzo assorbente: la luce che filtra attraverso l'acqua del mare o si propaga nell'atmosfera, un segnale elettrico lungo una linea, un fascio di particelle cariche in un mezzo materiale che le diffonde ecc. In questi casi l'intensità del fascio diminuisce in funzione del cammino percorso con legge esponenziale e anche in questi casi il valore dell'esponente è negativo e l'esponenziale è decrescente. Il risultato si interpreta facilmente considerando come avviene quantitativamente l'assorbimento. Nella propagazione dell'onda lungo una direzione,  $x$  a esempio, in un breve tratto  $dx$  l'intensità  $I(x)$  decresce di una quantità che è proporzionale al valore stesso dell'intensità, oltre che alla lunghezza del tratto:  $dI = -\alpha I dx$ . Per comprendere questa asserzione, si pensi all'onda come costituita da un numero enorme di particelle,  $n$  a esempio, tutte aventi una medesima energia (una tale immagine non è lontana dal vero, e la fisica quantistica ipotizza proprio che ogni singola 'particella' di luce, il fotone, sia portatore di una ben precisa quantità di moto e, quindi, di energia, pari alla sua frequenza per la costante di Planck, precedentemente incontrata:  $E = h\nu$ ). Nel propagarsi all'interno di un mezzo materiale, le particelle hanno una certa probabilità di collidere con la struttura (gli atomi) del materiale e di venire allontanati dalla direzione di incidenza: questi *fotoni* non saranno più conteggiati tra quelli del fascio che si propaga, saranno portati in diminuzione. Poiché la probabilità per un fotone di collidere con gli atomi del materiale è eguale per tutti i fotoni ed è proporzionale al numero di atomi con cui può interagire, per ogni fotone essa sarà proporzionale al tratto di cammino percorso e, per l'intero fascio, sarà anche proporzionale al numero di fotoni che ci sono nel fascio in quel tratto di cammino. Ecco, dunque, che il numero di fotoni che vengono distolti dal fascio in un tratto  $dx$  sarà:  $dn = -\alpha n dx$ , che è sostanzialmente l'equazione scritta per la diminuzione di intensità  $dI$  più sopra riportata. Va da sé che la soluzione dell'equazione diviene, per il numero di fotoni,  $n(x) = n_0 e^{-\alpha x}$  e, per l'intensità,  $I = I_0 e^{-\alpha x}$ , dove  $n_0$  e  $I_0$  sono, rispettivamente, il numero di fotoni e l'intensità dell'onda nella posizione di riferimento 'iniziale'  $x = 0$ .

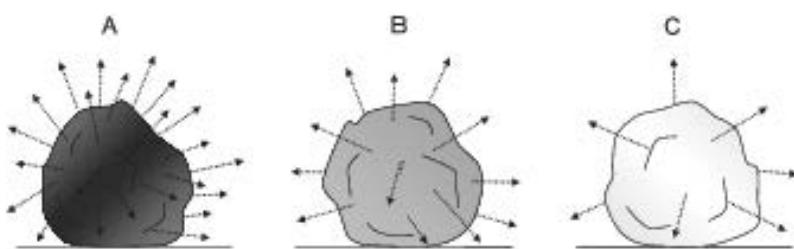
Si faccia attenzione che in quanto detto sull'assorbimento non si è fatta altra

ipotesi sul meccanismo fisico del fenomeno che quella riguardante i fotoni, o le particelle, relativamente alla loro collisione con il mezzo e al loro conseguente allontanamento dal fascio dell'onda incidente: in assenza di assorbimento, l'onda si propagherebbe inalterata nella direzione  $x$  di avanzamento. La riduzione di intensità che si sperimenta comunemente in un'onda quando ci si allontani dal luogo di emissione, l'affievolimento della luce o del suono che si avverte a mano a mano che ci si allontani da una sorgente luminosa, quale può essere una lampada o un faro, o da una acustica, come un parlato o un tuono, è invece principalmente dovuta alla redistribuzione della potenza luminosa o sonora su aree sempre maggiori quanto più si è lontani dalla sorgente, con conseguente riduzione dell'intensità, definita come rapporto tra la potenza incidente su un'area normale alla propagazione e l'area stessa. Si suole, talvolta, distinguere tra *assorbimento*, come la riduzione di intensità derivante dall'interazione fisica tra l'onda e il mezzo, e *attenuazione*, come quella derivante dall'allargamento geometrico del fascio su superfici di maggiore area.

### 3.3.3 Decadimento radioattivo, svuotamento di un recipiente, scarica di un condensatore, interessi in banca

Simile al caso appena descritto della riduzione esponenziale dell'intensità di un'onda dovuta all'assorbimento è la riduzione nel tempo dell'intensità di radiazione di una sorgente radioattiva o, come detto nel titolo di apertura, di svuotamento di un recipiente. I due fenomeni sembrano piuttosto diversi, né sono frequentemente riportati in testi base, però entrambi si riferiscono al numero di oggetti che fuoriescono o decadono da un insieme molto numeroso di oggetti simili.

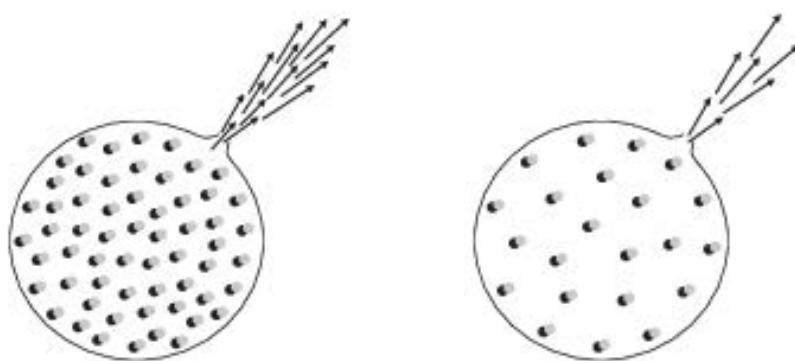
Precisiamo le due fenomenologie, ricordando per la prima che in una sorgente radioattiva è presente un numero enorme di atomi che sono non stabili, ovvero che nel tempo – in modo imprevedibile e perciò macroscopicamente ‘casuale’ – mutano di struttura, passando da uno stato eccitato a uno fondamentale con emissione di radiazione, che può essere  $\alpha$ ,  $\beta$ , o  $\gamma$ , a seconda del tipo di particella emessa: nucleo di elio (due protoni e due neutroni) nel primo caso, elettroni nel secondo e fotoni (o radiazione elettromagnetica) nel terzo. Per lo svuotamento di un recipiente, invece, si pensi a un gas racchiuso in un contenitore comunicante con un secondo contenitore vuoto, di grande dimensione, attraverso un piccolo foro dal quale possano fuoruscire le molecole contenute nel primo.



**Fig. 3.8.** In un decadimento radioattivo il numero di eventi in un certo intervallo di tempo è proporzionale al numero di atomi potenzialmente in grado di decadere (intensità dei grigi; in *A* maggiore che in *B*, in *B* maggiore che in *C*)

In entrambi i casi, il numero delle specie sia degli atomi nella sostanza radioattiva che a un generico istante sono ancora presenti nello stato iniziale, sia delle molecole ancora contenute nel recipiente segue una legge esponenziale del tipo  $n(t) = n(0)e^{-\alpha t}$ , dove  $\alpha$  è un'opportuna costante (di *decadimento*, appunto) che caratterizza il fenomeno, come quella ritrovata per l'assorbimento di un'onda. Infatti, nel caso del decadimento radioattivo, la diseccitazione di un atomo per emissione di una particella specifica ( $\alpha$ ,  $\beta$ , o  $\gamma$ ) per quella specie atomica è un evento la cui probabilità di accadimento è semplicemente proporzionale al tempo di osservazione; se, pertanto, tale tempo è un intervallo  $dt$  infinitesimo, la probabilità di emissione sarà data da  $\kappa dt$ , essendo  $\kappa$  un'opportuna costante specifica per quella specie, per quel tipo di decadimento. Per un numero complessivo  $n$  di atomi, poiché l'emissione da parte di ognuno d'essi è indipendente dalla presenza degli altri, dopo un tempo  $dt$  ne sarà decaduto un numero pari a  $\kappa dt$  per il numero  $n$  di atomi: tale prodotto, pari a  $n\kappa dt$  è altresì proprio il numero di quelli che sono venuti in diminuzione da quanti ce n'erano all'inizio dell'intervallo  $dt$ . Si potrà, quindi, scrivere l'equazione evolutiva del numero complessivo di atomi nella forma  $dn = -n(t)\kappa dt$ , cui corrisponde la soluzione ben nota  $n(t) = n(0)e^{-\kappa t}$ .

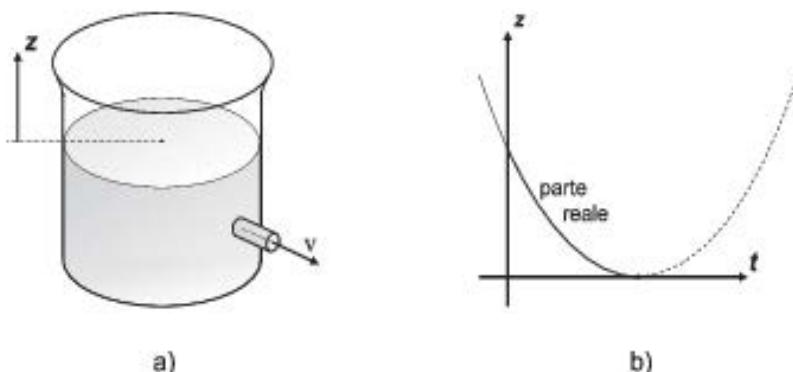
Non diversamente avviene per il caso delle molecole di gas contenute in un recipiente forato. In questo caso, il numero di quelle che fuoriescono in un intervallo di tempo  $dt$  sarà ancora proporzionale a detto tempo per il numero di quelle contenute in un cilindretto di base pari alla sezione del foro di uscita e alla di altezza pari velocità delle molecole; questo numero sarà necessariamente proporzionale alla densità istantanea delle molecole, quindi al numero complessivo di quelle contenute istante per istante nel recipiente, dal momento che questo ha volume costante. L'equazione



**Fig. 3.9.** Il numero di particelle che fuoriescono dal foro praticato in un recipiente (nel vuoto) in un certo intervallo di tempo è proporzionale alla pressione interna, cioè al numero di particelle presenti all'interno

evolutiva sarà ancora del tipo  $dn = -n(t)Kdt$ , essendo  $K$  una costante che tiene conto della sezione del foro e della velocità delle molecole (quindi, della temperatura del gas: più è caldo, maggiore sarà la velocità di diffusione dal foro), oltre che della distribuzione maxwelliana delle velocità. La riduzione del numero di molecole, e con esso la pressione del gas nel recipiente, seguirà la legge di decadimento esponenziale  $n(t) = n(0)e^{-Kt}$  già più volte incontrata. La legge che regola l'evoluzione di questi fenomeni è oggetto di esperienza comune, almeno nella sua forma qualitativa; si pensi allo sgonfiamento di una palla di gomma o del tubolare di una bicicletta, o allo svuotamento del vapore contenuto in una pentola a pressione quando si apra la valvola di chiusura: in tutti questi fenomeni si avverte il decadimento della velocità di efflusso, da un valore massimo iniziale a zero con una riduzione via via decrescente.

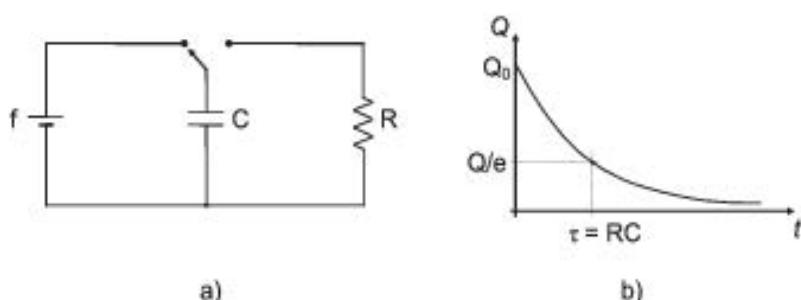
All'immagine già descritta dello svuotamento di un recipiente del gas di riempimento, vogliamo anche associare quella forse più familiare e intuitiva della spillatura di un liquido da un recipiente cilindrico attraverso un foro alla sua base. Si potrebbe a prima vista pensare che il fenomeno segua la legge evolutiva degli esponenziali sinora esaminata, dal momento che quanto più si abbassa il livello del liquido, tanto più lenta sarà la fuoriuscita e lo svuotamento, così da ridurre ulteriormente la velocità di abbassamento e per questa via avvicinare asintoticamente a zero con legge esponenziale la quantità di liquido rimasta nel recipiente. Questo però non sarà il risultato del caso in esame, che quindi ci suggerisce la necessità di valutare sempre i limiti di un'intuizione o del trasferimento di un modello da un caso a un altro, anche apparentemente simile. Una semplice applicazione del teorema di Bernoulli (quin-



**Fig. 3.10.** Lo svuotamento d'acqua di un recipiente non segue una legge esponenziale

di, della conservazione dell'energia, come si disse nel cap. 1 quando si esaminò il teorema come esempio di descrizione matematica di fenomeni fisici) ci permette di valutare la velocità di efflusso di un liquido da un recipiente attraverso un piccolo foro posto a un livello  $z$  sotto la superficie libera del liquido come  $v = \sqrt{2gz}$  e la quantità di liquido che fuoriesce in un tempo  $dt$  come  $vAdt = A\sqrt{2gz}dt$ , essendo  $A$  la sezione del foro. Poiché in corrispondenza di questa fuoriuscita la quota  $z$  alla quale si trova il pelo libero del liquido si abbassa di un tratto  $dz$  tale che il volume di abbassamento eguali quello di uscita  $Sdz = vAdt$ , da cui deriva che è  $dz = -vAdt/S = -Adt\sqrt{2gz}/S$ , dove si indichi con  $S$  la sezione orizzontale del recipiente, troviamo un'equazione evolutiva per la quota, quindi per la massa, del liquido nel recipiente. L'integrazione dell'equazione evolutiva appena scritta (del tipo  $dz = \text{cost } z^{1/2} dt$ ), in cui la riduzione della variabile  $z$  è proporzionale non già a sé stessa, ma alla sua radice quadrata) fornisce infatti una soluzione diversa da quelle precedenti:  $\sqrt{z(t)} = \sqrt{h} - A/S \sqrt{g/2t}$ , in cui si è tenuta in conto la condizione iniziale di  $z(t=0) = h$ . Come si può vedere elevando al quadrato l'espressione trovata, lo svuotamento avviene in questo caso con una legge di potenza e non già con legge esponenziale, riducendosi quindi il volume nel recipiente meno velocemente di quanto avviene nel caso della quantità di gas prima esaminata.

Degli esempi che si riportano a illustrazione di fenomeni di crescita o decrescita di una grandezza, legati alla semplice legge che vuole la variazione in ogni istante proporzionale alla grandezza stessa, il più familiare al lettore è certamente quello della scarica di un condensatore attraverso una resistenza. In tal caso, la carica che va via da ogni armatura del condensatore in un certo intervallo di tempo  $dt$  è proporzionale

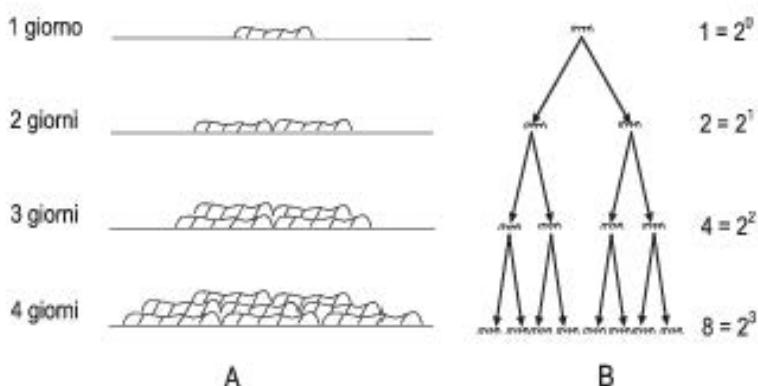


**Fig. 3.11.** Circuito di scarica di un condensatore

al tempo  $dt$  e alla corrente che circola nella resistenza:  $dq = -idt$ . Poiché quest'ultima, però, è proporzionale in ogni istante alla differenza di potenziale sussistente tra le armature del condensatore e, quindi, alla carica stessa attraverso l'inverso della capacità  $C$  divisa per la resistenza  $R$ , si ha in definitiva l'usuale equazione evolutiva  $dq = -\frac{dt}{RC}q$ , che porta alla soluzione esponenziale  $q = q_0e^{-\frac{t}{RC}}$ .

Se gli esempi finora riportati si riferiscono tutti a una riduzione esponenziale di una variabile – quando il decremento della grandezza è proporzionale al valore della grandezza stessa –, vogliamo riportare anche un esempio di crescita esponenziale, quando la variazione è del medesimo segno della grandezza. Tale è il caso della crescita di una popolazione: se i nati da un genitore che gli sopravvivano sono mediamente in numero superiore a uno, diciamo pari a  $1 + \alpha$ , la popolazione crescerà con legge esponenziale, poiché a  $N$  individui se ne accresceranno a ogni generazione un numero  $dN = N\alpha$ ; la variabile temporale sarà in questo caso sostituita dal numero  $n$  di generazioni e al tempo differentiale  $dt$  si potrà far corrispondere una generazione. Dopo  $n$  generazioni il numero  $N$  sarà divenuto  $N(n) = N_0e^{\alpha n}$ , dove con  $N_0$  si sarà indicato il numero di individui all'inizio delle generazioni. Ancora con legge esponenziale si attuerà la crescita per generazioni di una colonia di batteri, se ipotizziamo che a ogni determinato intervallo temporale – che vorremo assumere pari a un giorno – ogni batterio possa dare origine a due nuovi batteri: il numero di nuovi individui sarà ogni giorno  $n$  pari a  $2^n$  che è una legge esponenziale con base 2.

Un ulteriore esempio piace riportare, preso dalle analisi economiche del rendimento di un capitale. È comune dire che “soldi portano soldi”, ma è sorprendente pensare che la crescita possa risultare così rapida come fa presumere un’eventuale soluzione esponenziale del problema. Attenzione, tuttavia, che la crescita può ribal-



**Fig. 3.12.** Crescita esponenziale di una popolazione di batteri su una superficie (A), esemplificata dalla crescita della funzione  $2^n$

tarsi altrettanto bene in decrescita se una costante dovesse mutare di segno! Questo è ben noto dall’analisi degli andamenti di borsa, dove peraltro i coefficienti di crescita – come vedremo – non sono costanti e le fluttuazioni imprevedibili. Si abbia, allora, un capitale  $C$  posto in banca a un interesse fisso  $\alpha$  (in questo caso, per facilitare, pensiamo ad  $\alpha$  come all’interesse pagato dopo un tempo unitario, non necessariamente un anno), e l’interesse si componga nel tempo così che ciò che risulta giorno per giorno in aumento si aggiunga al capitale già presente, maggiorandolo giornalmente della quota di interesse; si profila già da queste parole la formula evolutiva del capitale, la cui crescita in un tempo  $dt$  è proporzionale al tempo stesso oltre che al capitale già presente:  $dC = \alpha C dt$ . Poiché l’interesse pagato su un capitale è positivo, in questo caso l’esponenziale della soluzione sarà crescente  $C(t) = C_0 e^{\alpha t}$ . La stessa descrizione di variazione temporale di un capitale si potrà fare per la valorizzazione di borsa, in una ipotesi, tuttavia, assolutamente irrealistica che l’indice del titolo impegnato (corrispondente al tasso di interesse  $\alpha$  precedentemente riportato) si mantenga costante nel tempo. Questa ipotesi irrealistica ci permette di vedere però l’effetto del coefficiente di crescita  $\alpha$  dal quale dipende la distinzione tra crescita e decrescita e, per entrambi i casi, la relativa velocità. Naturalmente, come si è detto, nel caso delle quotazioni di borsa è ben noto che i rendimenti fluttuano tra valori positivi e negativi diversi: si può solo dire che durante fasi di costante rendimento i

capitali seguono nella loro variazione una legge esponenziale.

Come ultimo esempio ricordiamo un meccanismo fisiologico proprio della risposta sensoria degli organi dell'udito e della vista, che va sotto il nome di legge sensoriale di Weber e Fechner, dal nome dei due medici-fisiologi tedeschi del 19° sec. che studiarono il comportamento reattivo dell'organismo umano alle sensazioni. Essi ne compendarono la risposta in una legge empirica del tipo  $S = c \log R$ , dove  $S$  è il valore della sensazione,  $R$  quello dello stimolo e  $c$  una costante che varia a seconda dello stimolo: visivo e uditivo, ma anche tattile, olfattivo e gustativo. È comune esperienza che, quando siamo immersi in un ambiente molto rumoroso, ad esempio, la nostra capacità di distinguere suoni di intensità diverse è assai ridotta rispetto a quando siamo in un ambiente silenzioso, che cioè la capacità risolutiva dell'orecchio in merito a suoni diversamente intensi è legata al livello dello stesso suono che stiamo udendo. Non diversamente, per ciò che riguarda la vista, distinguiamo nella penombra due oggetti di luminosità appena poco diversa, mentre in piena luce le diverse gradazioni di luminosità debbono differenziarsi di molto per essere avvinte. Si pensi all'osservazione delle stelle nel cielo: esse appaiono ben visibili e distinte in una notte senza Luna e senza luci ed è invece impossibile vederle di giorno, quando il contrasto di luminosità sul fondo chiaro e illuminato è troppo basso per farne risaltare l'immagine, che è invece evidente sul fondo scuro del cielo notturno. Tutto ciò è dovuto al fatto che la risposta sensoria del nostro organismo alle stimolazioni visive e uditive segue una legge logaritmica, quella appunto più sopra indicata come legge di Weber e Fechner, per la quale la sensazione differenziale è proporzionale alla variazione relativa dello stimolo  $dS = cdR/R$ , che dà luogo, quindi, a una curva di risposta di tipo esponenziale dello stimolo rispetto alla sensazione  $S = c \log R$ . È questa la ragione per la quale le intensità sonore si misurano in decibel, cioè secondo una scala logaritmica. Ricordiamo che la valutazione in questo caso viene fatta rapportando l'intensità del suono in questione all'intensità di un suono di riferimento (nel caso acustico all'intensità di soglia  $I_0$ , pari a  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , corrispondente in aria a un'ampiezza della pressione sonora  $\Delta p = 20 \mu\text{Pa}$ ) e moltiplicandone per 10 il logaritmo in base 10: decibel =  $10 \log I/I_0$ .

## 3.4 Derivazione e integrazione

### 3.4.1 Derivazione

Consideriamo una grandezza fisica che dipende da un'altra secondo una certa funzione sufficientemente regolare, è possibile allora definire la derivata della grandezza dipendente rispetto all'altra indipendente. Tale derivata rappresenta la variazione 'puntuale' della prima rispetto alla seconda (o più precisamente, come vedremo in seguito, il limite del loro rapporto incrementale), 'puntuale' in quanto il suo valore è specificato se calcolato per un determinato valore che la grandezza fisica indipendente può assumere. Se la variabile indipendente è il tempo allora il carattere della grandezza derivata si può definire istantaneo, cioè calcolato in un istante di tempo ben definito, come, ad esempio nella definizione, del vettore velocità istantanea  $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}(t)/dt$  visto come variazione del vettore posizione  $\mathbf{r}(t)$  rispetto al tempo  $t$ ; a sua volta il vettore velocità istantanea può essere derivato rispetto al tempo definendo, in tal modo, il vettore accelerazione istantanea pari quindi anche alla derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo  $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2$ . Un'ulteriore derivazione del vettore accelerazione indicherebbe, se diversa da zero, la non costanza dell'accelerazione nel tempo definendo il suo tasso di variazione; a quest'ultima grandezza fisica di dimensioni  $[LT^{-3}]$  e a eventuali successive derivate, non viene attribuito un nome non avendo un significato fisico più profondo di quello di tasso di variazione temporale, dal momento che le leggi della dinamica di Newton legano le forze agenti alle sole accelerazioni. Seguendo la notazione matematica, inoltre, la derivazione di una grandezza fisica che dipenda da più grandezze è indicata facendo uso del simbolo delle derivate parziali come avviene in tipiche espressioni "locali" quale sono le equazioni di Maxwell in forma differenziale, ad esempio la legge locale dell'induzione elettromagnetica:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Essa lega per ogni punto  $\mathbf{r}$  e per ogni istante  $t$  (localmente), la derivata parziale rispetto al tempo del campo magnetico  $\mathbf{B}$  al rotore del campo elettrico  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , cioè a una combinazione di derivate parziali rispetto allo spazio, in quello stesso punto e

istante.

La caratteristica locale della differenziazione è chiara considerando che nel calcolo si ragiona per infinitesimi e il significato si può ritrovare nel concetto di linearizzazione di una funzione. Consideriamo una funzione ad una sola variabile, derivabile,  $f(x)$ : essa, in un punto specifico  $x_0$  assumerà il valore simbolicamente indicato con  $f(x_0)$ ; volendo conoscere il valore di  $f$  in un punto qualsiasi  $x_1$  posto a distanza finita da  $x_0$  dobbiamo conoscere esplicitamente la dipendenza della  $f$  dalla variabile  $x$ . Il calcolo differenziale però ci dice che, qualora ci spostassimo da  $x_0$  solo di un tratto infinitesimo  $dx$  (cioè di un intervallo  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} (x_1 - x_0)$ ), se la funzione è differenziabile, il suo valore nel nuovo punto  $x_0 + dx$  sarà dato dall'espressione

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} dx + \dots$$

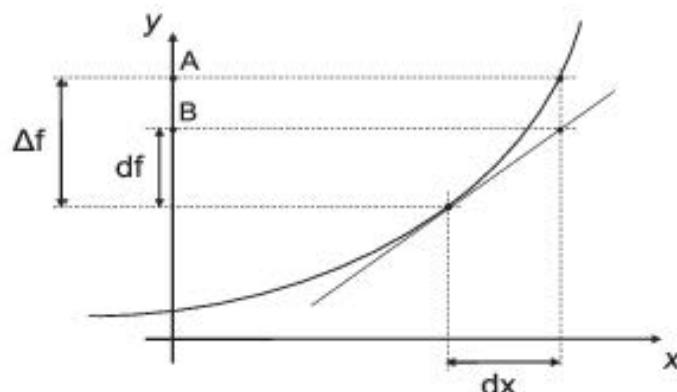
dove il secondo termine a destra indica la derivata di  $f$  rispetto a  $x$  calcolata nel punto  $x_0$  e i puntini indicano termini di ordine superiore che coinvolgono le derivate seconda, terza ecc.

Praticamente, quando l'argomento di una funzione differenziabile varia di un infinitesimo, cioè  $\Delta x \rightarrow dx$ , è possibile dire che il suo incremento  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  durante la variazione  $dx$ , è pari (a meno di termini di ordine superiore) al suo differenziale

$$df = f(x_0 + dx) - f(x_0),$$

cioè all'incremento che avrebbe una retta avente la stessa pendenza della derivata della funzione (nel punto  $x_0$ )  $df(x)/dx(x_0)$  lungo lo stesso tratto  $dx$ .

Come regola generale, la derivazione di un'espressione rispetto a una o più va-



**Fig. 3.13.** Per un incremento infinitesimo dell'argomento  $dx$  l'incremento corrispondente  $\Delta f$  della funzione è pari al suo differenziale, a meno di infinitesimi di ordine superiore (tratto  $AB$ )

riabili si può ottenere in maniera esatta seguendo le opportune regole; ricordiamo la regola della derivazione della potenza per la quale, ad esempio,  $d(x^3)/dx = 3x^2$  e la ricaviamo applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale vista sopra: se  $x$  si incrementa di un infinitesimo  $dx$  allora l'incremento di  $x^3$  sarà  $(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$ . Costruendo il rapporto incrementale e linearizzando (trascurando i termini infinitesimi di ordine superiore  $(dx)^2$  e  $(dx)^3$ ) si ottiene

$$\frac{dx^3}{dx} = \frac{(x + dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 - x^3}{dx} = 3x^2.$$

Gran parte delle leggi fisiche sono espresse sottoforma di equazioni differenziali contenenti derivate di diverso ordine e grado. Consideriamo l'esempio dell'equazione del moto armonico semplice e della ricerca della sua soluzione: l'equazione esprime la relazione tra una grandezza fisica, ad esempio lo spostamento  $x(t)$  e la sua derivata seconda rispetto al tempo

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

dove la costante  $\omega_0$  è la pulsazione propria dell'oscillatore. La soluzione è una funzione incognita del tempo e può essere espressa da uno sviluppo in serie di potenze del tempo con coefficienti, da determinare, che soddisfino la relazione imposta dall'equazione:  $x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$ , quindi  $d^2x(t)/dt^2 = 2a_2 + (3 \cdot 2)a_3t + (4 \cdot 3)a_4t^2 + \dots$ ; sostituendo i termini nell'equazione e imponendo le uguaglianze fra termini aventi lo stesso grado in  $t$  si ottiene il seguente sistema che lega i coefficienti di indice pari tra loro e in funzione del coefficiente incognito  $a_0$  dato dalla condizione iniziale  $x(0) = a_0$  e i coefficienti di indice dispari tra loro, in funzione del coefficiente  $a_1 = dx(0)/dt$  legato alla condizione iniziale sulla derivata:

$$\begin{aligned} 2a_2 + \omega_0^2 a_0 &= 0 \\ (3 \cdot 2)a_3 + \omega_0^2 a_1 &= 0 \\ (4 \cdot 3)a_4 + \omega_0^2 a_2 &= 0 \\ (5 \cdot 4)a_5 + \omega_0^2 a_3 &= 0 \\ \dots &\end{aligned}$$

Esprimendo quindi tutti i coefficienti in funzione di  $a_0$  e  $a_1$  e raggruppandoli si ottiene

$$x(t) = a_0 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{2!} t^2 + \frac{\omega_0^4}{4!} t^4 + \dots \right) + \frac{a_1}{\omega_0} \left( \omega_0 t - \frac{\omega_0^3}{3!} t^3 + \frac{\omega_0^5}{5!} t^5 - \dots \right).$$

Alle serie infinite, comprese nelle parentesi, sono assegnati i nomi di coseno e seno cosicché la soluzione del moto armonico semplice di condizioni iniziali dello spostamento  $x(0) = x_0$  e della velocità  $dx(0)/dt = \dot{x}_0$ , può essere indicata dall'espressione

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

### 3.4.2 Integrazione

L'integrazione è, matematicamente l'operazione inversa della derivazione: se si considerano due grandezze fisiche legate tra loro dall'operatore derivazione come, ad esempio, nella definizione di una componente qualsiasi del vettore velocità istantanea  $v_x(t) \equiv dx(t)/dt$ , allora per ottenere lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo, c'è bisogno di definire un'operazione inversa della derivazione. Se si fa l'ipotesi che, in un certo piccolo intervallo di tempo  $\Delta t$  successivo ad un certo istante  $t_i$ , la velocità  $v_x(t_i)$  si mantenga costante, lo spazio percorso tra l'istante  $t_i$  e l'istante  $t_i + \Delta t$  sarà dato dal semplice prodotto  $v_x(t_i)\Delta t$ . In un grafico dell'equazione oraria della velocità tale prodotto rappresenterebbe l'area di un rettangolo di altezza  $v_x(t_i)$  e di larghezza  $\Delta t$ . Suddividendo l'intero intervallo di tempo in  $n$  piccoli intervalli  $\Delta t$  e assegnando un  $i$ -esimo valore costante alla velocità per ciascuno di questi intervalli, un calcolo approssimato dell'intero spazio percorso sarebbe dato dall'espressione  $\sum_i v_x(t_i)\Delta t$  mentre il calcolo esatto si ottiene effettuando una somma infinita di intervalli infinitesimi con un processo al limite, che è per l'appunto la definizione di integrale:

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i v_x(t_i)\Delta t \equiv \int v dt.$$

Con tutta evidenza, graficamente, ciò corrisponderà all'area sottesa dalla funzione, nell'intervallo considerato.

In generale, bisognerà impostare un integrale ogni volta che si dovranno sommare infiniti contributi infinitesimi: se in un certo volume  $V$ , ad esempio, sappiamo che esiste un materiale di densità  $\rho$  costante, allora la massa totale  $m$  contenuta in quel

volume sarà semplicemente data dal prodotto  $m = \rho V$ . Questo è però vero solamente nel caso particolare in cui la densità sia costante; se invece è variabile da un punto a un altro,  $\rho(x, y, z)$  può essere considerata costante solo nell'intorno di uno specifico punto e quindi ha senso moltiplicare il volume elementare  $dV$  nell'intorno di quel punto per il valore della densità e ottenere la massa elementare di tale volume come  $dm = \rho(x, y, z)dV$ . Questo è il contributo infinitesimo del volume elementare alla massa: la massa totale è ottenuta dalla somma di infiniti contributi infinitesimi, cioè dall'integrale esteso a tutto il volume  $V$ :  $m = \int_V \rho(x, y, z)dV$ .

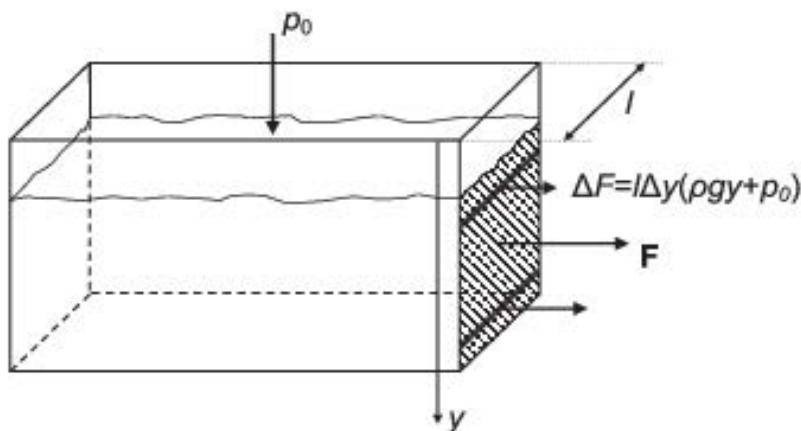
In questo caso, l'integrale è un integrale di volume quindi è un integrale triplo nelle variabili ma, in casi di particolare simmetria, è possibile ridurre le dimensioni dell'integrale: ad esempio, se la densità presenta una simmetria sferica, essa può essere considerata come dipendente da un'unica variabile  $r$ , essendo quest'ultima la distanza dal centro di simmetria; in tal modo, dato il volume sferico di raggio  $r$ ,  $V(r) = 4/3\pi r^3$ , il volumetto elementare sarà dato dal suo differenziale  $dV = 4\pi r^2 dr$  dipendente dall'unica variabile  $r$ : esso rappresenta il volume elementare di un guscio sferico di raggio  $r$ , area  $4\pi r^2$  e spessore  $dr$ . Dal momento che la densità dipende solo da  $r$  e quindi è costante per tutto il guscio sferico di raggio  $r$ , il contributo elementare alla massa dato dal guscio sferico sarà fornito dall'espressione  $dm = \rho(r)4\pi r^2 dr$ . La massa  $m$  di un volume totale  $V$ , sferico di raggio  $a$ , si otterrà quindi considerando il contributo di tutti (infiniti) gusci sferici di raggio compreso tra 0 e  $a$  cioè dall'integrale monodimensionale nella variabile  $r$

$$m = \int_0^a 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Il calcolo esplicito di tale integrale sarà infine possibile, conoscendo l'espressione della densità in funzione del raggio  $\rho = \rho(r)$ .

Allo stesso modo, la superficie di un disco di raggio  $R$  e superficie  $S = \pi R^2$  potrà essere suddivisa in anelli elementari concentrici di raggio  $r$ , spessore  $dr$  e quindi superficie elementare  $dS = 2\pi r dr$ . In una simmetria cilindrica nello spazio invece, il volume potrà essere suddiviso in gusci cilindrici elementari coassiali, di raggio  $r$  di altezza  $\ell$  e di volume  $dV = 2\pi r \ell dr$  ecc.

Il concetto di integrale come somma infinita di contributi infinitesimi si applica ogni qual volta una grandezza fisica sia variabile, rispetto ad esempio a delle coordinate spaziali, e debba fornire il contributo a una nuova grandezza fisica ottenuta,



**Fig. 3.14.** La forza complessiva sulla parete dovuta alla pressione idrostatica è l'integrale delle forze su ogni striscia

per esempio, dal prodotto della prima per le coordinate. Per esempio, si prenda un recipiente contenente un liquido in cui, in presenza di un campo di forze di volume, la pressione vari con la profondità e si consideri per semplicità un recipiente parallelepipedo contenente un liquido di livello  $h$  e densità costante  $\rho$ , in presenza di un campo di gravità  $g\mathbf{j}$ ; data la pressione esterna  $p_0$  e scelto un asse  $y$  con origine sulla superficie e diretto verso il basso, l'andamento della pressione con la profondità  $y$  sarà dato dall'espressione  $p(y) = p_0 + \rho gy$ . Volendo determinare la forza su una parete verticale bisogna individuare un'opportuna superficie elementare, sulla quale sia costante la pressione, in maniera che il prodotto pressione per superficie dia il contributo elementare alla forza cercato. È evidente che bisogna prendere delle strisce rettangolari di larghezza  $\ell$  pari alla larghezza della parete e di spessore  $dy$ , quindi su ogni striscia posta in profondità  $y$  agirà una pressione costante che darà luogo ad un forza elementare agente sulla striscia pari a  $df = (p_0 + \rho gy)\ell dy$  per cui la forza totale sulla parete di area  $S = h\ell$  si otterrà dal contributo di tutte le strisce

$$F = \int_0^h (p_0 + \rho gy)\ell dy = p_0 S + \frac{1}{2} \rho g h S.$$

### 3.5 Le derivate parziali e l'operatore nabla $\nabla$

C'è un'interessante radice comune in un certo numero di parole della nostra lingua e di altre di derivazione indoeuropea che sta a indicare il cammino per entrare in un

ambiente o per salire su una rampa o su un colle ed è il gruppo *ghredh*, che si ritrova nell'‘ingresso’, nel ‘gradino’, nel ‘progresso’ eccosì via, non lontano dall'altra radice *bhergh*, che è comune al ‘borgo’ sull'altura, alla ‘forza’, all’‘iceberg’, in una sequenza di variazioni che talvolta sembrano segni della fantasia, ma che tutti in qualche modo puntano al concetto di salire verso l'alto. Non fa meraviglia, quindi, che tra queste parole si annidi anche un termine fisico, di derivazione matematica, qual è il *gradiente*, che proprio del salire vuole fare un concetto quantitativo, ricco della misura e della direzione. È un termine scientifico, certo, ma anche entrato un po' nell'uso dotto, come quando si dice che c'è un gradiente termico tra due ambienti o due regioni territoriali, un gradiente di concentrazione salina o d'altro nell'acqua ecc., per dire che le grandezze in oggetto, la temperatura o la concentrazione, variano da un punto all'altro, magari anche sensibilmente, sottintendendo spesso che dove c'è il gradiente c'è anche un corrispondente flusso di calore, materia, soluto ecc. Il lettore ricorderà, a questo punto, che il concetto della variazione di una grandezza tra punti diversi, e meglio ancora della rapidità della variazione, è già assai bene contenuto in quello di derivata di una funzione rispetto alla sua variabile di dipendenza. Ciò è senz'altro vero e il gradiente è solo un'integrazione efficace di questo concetto, riportato a una molteplicità di direzioni di dipendenza nello spazio, anziché a una soltanto. Allarghiamo, allora, il concetto, introducendo la notazione del vettore nabla, il cui uso si estende a un certo numero di operatori vettoriali di derivazione, e il possesso della cui familiarità può meglio aiutarci nella comprensione di diversi fenomeni fisici.

Anche il nabla ha una derivazione antica nel suo significato di arpa in greco, vista la rassomiglianza schematica tra il segno usato  $\nabla$  e lo strumento musicale che, detto ‘nével’ in ebraico, fu reso con ‘nabla’ in greco. Ma qual è il suo significato? Se ci è familiare il concetto di derivata di una funzione a una sola dimensione dipendente da un'altra a una sola dimensione, come limite di un rapporto di incrementi corrispondenti della funzione e della variabile, non ci sarà difficile considerare il caso di una funzione, ancora a un solo valore o a una sola dimensione, dipendente però non più da una sola variabile, ma per es. dalle tre variabili spaziali  $x, y, z$ . È il caso di una funzione di punto dello spazio tridimensionale, quale la temperatura di un ambiente, come si ricordava più sopra, o della concentrazione salina in una soluzione ecc. In tali casi il senso della derivata si precisa soltanto se si specifica quale delle coordinate spaziali si intende incrementare e, potendosi incrementare ognuna

in modo diverso dalle altre, vuol dire che la derivata va precisata rispetto alla direzione lungo la quale si intende variare la posizione del punto  $P(x, y, z)$ , variabile indipendente, per computare il relativo incremento di quella dipendente. Pensando, cioè, a una funzione  $f(x, y, z)$ , si potrà computare  $\frac{\partial f}{\partial x}$  come limite del rapporto incrementale della funzione  $f$  se ci si muove secondo  $x$ , e così per le altre derivate, che vengono dette parziali. Più in generale, la derivata direzionale secondo una generica direzione  $\ell$  si scriverà come  $\frac{\partial f}{\partial \ell}$  e il relativo differenziale come  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \ell} \Delta \ell$ , intendendosi che l'incremento si ottiene variando separatamente le tre coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$  di tratti  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e sommando successivamente i tre differenziali parziali  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$ . L'espressione appena scritta si può formalmente intendere come il prodotto scalare tra due vettori, quello di componenti  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  e il vettore spostamento  $\Delta \ell \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , che dà come risultato uno scalare, in questo caso appunto il differenziale della funzione  $f$ . A sua volta, il primo vettore si può considerare come il prodotto di un vettore di componenti  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  per una funzione. Ponendo dovuta attenzione alla sequenza del prodotto, cioè anteponendo il vettore alla funzione, diremo di ‘applicare’ un *operatore vettoriale* alla funzione  $f$ , in particolare l’operatore *nabla*, che simbolizzeremo come  $\nabla$ . A completamento della notazione storica su questo simbolo, ricordiamo che esso fu introdotto da William Hamilton per la prima volta nel 1853 come un *delta*  $\Delta$  maiuscolo greco rovesciato, che fu anche chiamato ‘atled’, dal nome del delta letto al contrario. Tornando, tuttavia, al contenuto scientifico del termine, si nota che esso è un *operatore*, nel senso che viene definito attraverso la particolare operazione di trasformazione che esso esegue sulla funzione alla quale viene applicato, non diversamente da come potremmo chiamare operatore l’elevamento a potenza o il logaritmo o il seno ecc., da indicarsi rispettivamente come  $()^n$  o  $\log$  o  $\sin$ , che operano su una funzione generica  $f$  per darne altre del tipo  $f^n$ ,  $\log f$ ,  $\sin f$ . La parziale novità dell’operatore è la sua natura vettoriale, da interpretarsi semplicemente come se fossero tre distinti operatori scalari, l’uno operando la derivata parziale della funzione secondo  $x$ , l’altro secondo  $y$  e il terzo secondo  $z$ .

Abbiamo, dunque, a disposizione un modo sintetico per indicare la derivata direzionale di una funzione nello spazio tridimensionale e lo utilizziamo subito per definire il gradiente. Non diversamente da come una derivata ci offre l’indicazione di quanto rapidamente una funzione di una sola variabile vari attorno a un valore

di quella variabile, così l'applicazione del  $\nabla$  a una funzione che dipenda dalle tre coordinate spaziali ci indica come varia la funzione attorno a un punto nello spazio secondo tutte e tre le direzioni possibili e, se si pensa di costruire un vettore che abbia come componenti proprio le tre derivate parziali, questo sarà diretto nello spazio seconda la direzione di massimo incremento della funzione. Sintetizzando questo concetto, diremo che l'applicazione del nabla a una funzione  $f$  di punto ci fornisce un vettore  $\mathbf{A}$ , che è il gradiente di quella funzione e in simboli scriveremo:

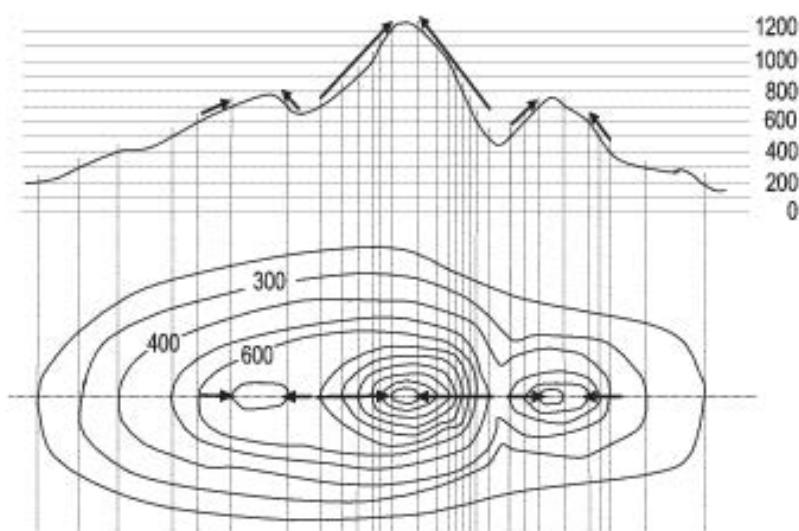
$$\mathbf{A} = \nabla f$$

o anche

$$\mathbf{A} = \text{grad } f.$$

Il termine qui usato di gradiente ben si collega a quei brevi cenni di etimologia con cui si è aperto il paragrafo, se si pensa al fatto che il vettore  $\text{grad } f$  punta nella direzione della massima crescita della funzione  $f$ . Se da una posizione generica dello spazio, infatti, unissimo con continuità tutti i punti nei quali la  $f$  assume il medesimo valore, costruiremmo una superficie sul cui piano tangente il vettore gradiente avrebbe componente nulla, poiché la derivazione secondo una qualunque direzione di quel piano darebbe risultato nullo e, quindi, il vettore gradiente deve essere normale a quel piano e puntare nella direzione di massima crescita. È noto l'uso del termine gradiente per una funzione potenziale: comunissimo nell'elettrostatica, in cui il potenziale  $V$  è direttamente legato al valore del lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , il quale è, dunque, il gradiente del potenziale:  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ , ma comune anche nel caso del campo gravitazionale, dove la forza peso agente su una massa  $m$  ammette una funzione potenziale  $U$ , proporzionale alla quota alla quale si posiziona il grave:  $mg = -\text{grad } U$ , più spesso letta come  $U = mgz$ .

Vorremmo prendere spunto da questa scrittura per dare una visione più diretta del concetto di gradiente, osservando una carta di geografia fisica, dove l'orografia di una regione è riportata con colori diversi a seconda della quota delle singole parti. Le singole parti diversamente colorate sono solitamente delimitate da linee, le *isoipse*, che collegano in modo continuo tutti i punti aventi una stessa quota. Così, per es., e con intervalli che dipendono dalla scala della carta, saranno riportate le isoipse per le quote di 0, di 100, di 200, di 300 m sul livello del mare e così via. Dove queste linee



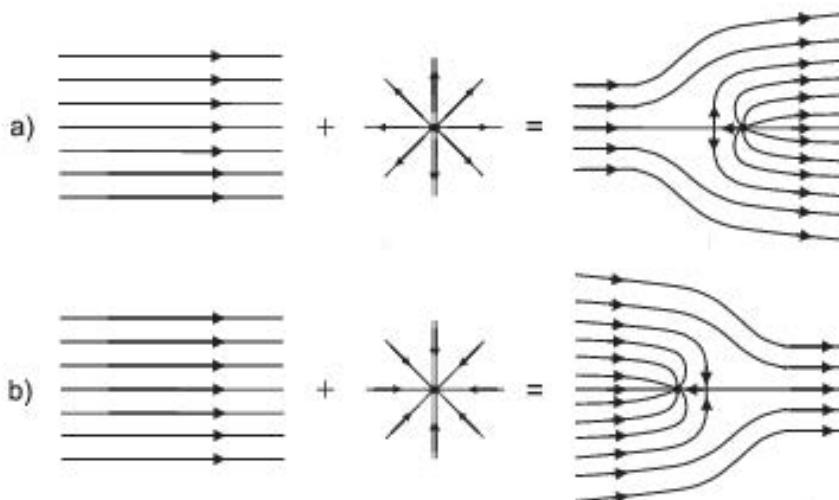
**Fig. 3.15.** Indicazione del gradiente del potenziale sulle linee isoipse di una carta di geografia fisica

sono più ravvicinate, lì sarà maggiore la pendenza, poiché la superficie del suolo salirà di una medesima altezza per uno spostamento in orizzontale più piccolo: lì sarà maggiore la derivata della quota scelta nella direzione ortogonale alla linea. Si vede di qui l'esatta corrispondenza del concetto di gradiente di una funzione, un vettore che mira nella direzione della massima variazione e che ha componente nulla nella direzione lungo la quale la funzione è costante. Nel caso descritto, la funzione è la quota  $z$  del suolo, funzione delle due sole variabili di posizione  $x$  e  $y$  in pianta: il gradiente avrà in questo caso due sole componenti,  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  e sarà ortogonale alle linee isoipse.

Un altro uso dell'operatore nabla torna di grande utilità nell'espressione di un'equazione familiare di uso comune; è il caso dell'elettrostatica, in cui la riduzione a forma differenziale della legge di Gauss richiede l'introduzione del concetto di *divergenza* del vettore campo elettrico. Ricordiamo brevemente il contenuto della legge di Gauss, per la quale il flusso del campo elettrico  $\mathbf{E}$  attraverso una superficie chiusa vale la carica elettrica  $q$  contenuta all'interno, divisa per la costante dielettrica del vuoto. Questa legge vede le cariche come *sorgenti* del campo elettrico, positive e negative, secondo che le linee di forza emergano o muoiano sulle cariche. Nella riduzione differenziale di questa legge ci si imbatte nel concetto di divergenza, che sintetizza l'emergenza delle linee di forza con un'espressione che è la somma del-

le derivate parziali delle tre componenti del campo:  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ .

L'uso della notazione del nabla diviene immediata, constatando che l'espressione della divergenza altro non è formalmente che il prodotto scalare, per somma dei prodotti delle componenti omologhe, di due vettori: il nabla, per l'appunto, e il campo elettrico:  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$ . Questa volta, diversamente dal caso del gradiente, in cui l'operatore veniva applicato a uno scalare per dare un vettore, esso viene applicato a una funzione vettoriale, il campo elettrico, per fornire come risultato uno scalare, la divergenza del campo. Anche qui, tuttavia, come il gradiente fornisce l'idea della massima variazione della funzione scalare, la divergenza descrive l'uscita o l'insorgenza di un vettore da un punto. Non è difficile vedere nell'espressione del prodotto scalare il senso di questa insorgenza, se si pensa che ognuno dei tre addendi del prodotto, quale ad es.  $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ , quantifica la variazione di una componente del campo se ci si muove in quella stessa direzione, cioè quanto può crescere il contributo al flusso attraverso una piccola area ortogonale a quella direzione; la somma sulle tre direzioni conteggia il valore complessivo di questa crescita. Infine, poiché secondo Gauss tale divergenza del campo è proporzionale alla densità spaziale di carica, cioè è  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , ed è d'altra parte per definizione  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , sarà necessariamente  $\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , o anche simbolicamente  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ , che è l'equazione differenziale cui deve soddisfare il potenziale elettrostatico.



**Fig. 3.16.** Flusso costante sovrapposto a una sorgente a) e a un pozzo b), come esempi di campi vettoriali con divergenza non nulla

Un ulteriore passo e un po' più arduo si può ancora fare nell'uso del nabla, introducendolo nell'espressione del prodotto vettore con una funzione – per noi una grandezza fisica – di natura vettoriale. A ciò siamo ovviamente portati perché tale nuovo operatore ha un significato fisico di grande interesse e ancora una volta nella teoria del campo elettromagnetico. Ricordiamo anche in questo caso i punti fondamentali della fisica relativa, quali si ritrovano nella fenomenologia dei campi elettromagnetici variabili nel tempo: a un campo di induzione magnetica che varia nel tempo si associa necessariamente un campo elettrico – così come viene indicato nella legge di Faraday-Neumann-Lenz dell'induzione elettromagnetica – e, similmente, a un campo elettrico che varia nel tempo si associa necessariamente un campo di induzione magnetica – così come viene indicato nella legge di Ampère, che introduce le correnti di spostamento –. Se la variazione temporale di un campo possiamo facilmente descriverla mediante il familiare operatore di derivazione  $\frac{\partial}{\partial t}$ , la descrizione dell'altro campo, come esso si distribuisca nello spazio in funzione del primo che varia, richiede una particolare attenzione. Il lettore ci passi inizialmente una descrizione qualitativa un po' primitiva, che rende tuttavia assai bene la fenomenologia: dove varia nel tempo un campo, elettrico o magnetico che sia, attorno a quella variazione si avvolge l'altro campo, magnetico o elettrico rispettivamente; il secondo campo ha una *rotazione* proporzionale alla derivata temporale del primo. In questo sostanzialmente consiste la seconda coppia delle equazioni di Maxwell nel vuoto, che in termini integrali – come vedremo più avanti – collega la derivata temporale del flusso di un campo con l'integrale di linea dell'altro. Il compito che ora ci proponiamo è quello di scrivere il *rotore* di un vettore in termini dell'operatore nabla.

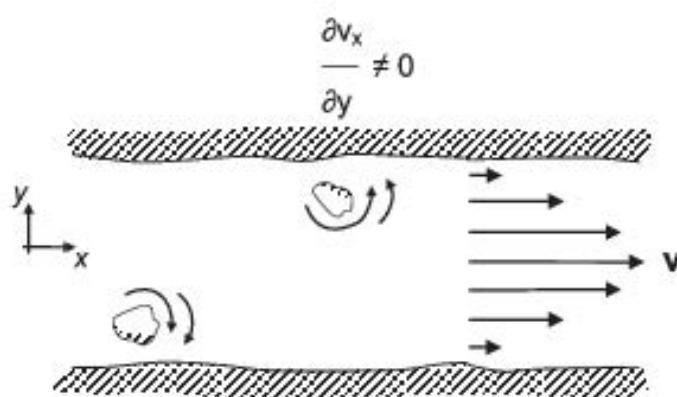
Un aiuto alla comprensione del concetto di rotore e di rotazione ci può venire osservando la superficie dell'acqua che scorre in un canale e su di essa alcuni oggetti galleggianti, come fossero foglie o piccoli oggetti di legno: li vedremmo scorrere trascinati via dalla corrente, in un lento moto di semplice traslazione; l'acqua attorno non esercita praticamente alcuna forza su di essi e il loro moto è privo di accelerazione lineare e angolare. Tuttavia, se un oggetto si avvicina al bordo del canale, lo vedremmo sia rallentare sia iniziare lentamente a ruotare. Se il rallentamento ci è facilmente comprensibile, come dovuto al rallentamento della velocità di flusso dell'acqua vicina al bordo a sua volta dovuto agli effetti di viscosità indotti dalla parete ferma dell'alveo, non così facile ci può apparire la spiegazione della rotazione degli

oggetti. In realtà, però, il rallentamento della velocità dell'acqua è maggiore quanto più si è vicini al bordo, per cui la parte dell'oggetto in galleggiamento più vicina al bordo subisce essa stessa un maggiore rallentamento della velocità rispetto alla parte più lontana, determinando così un effetto di rotazione complessivo.

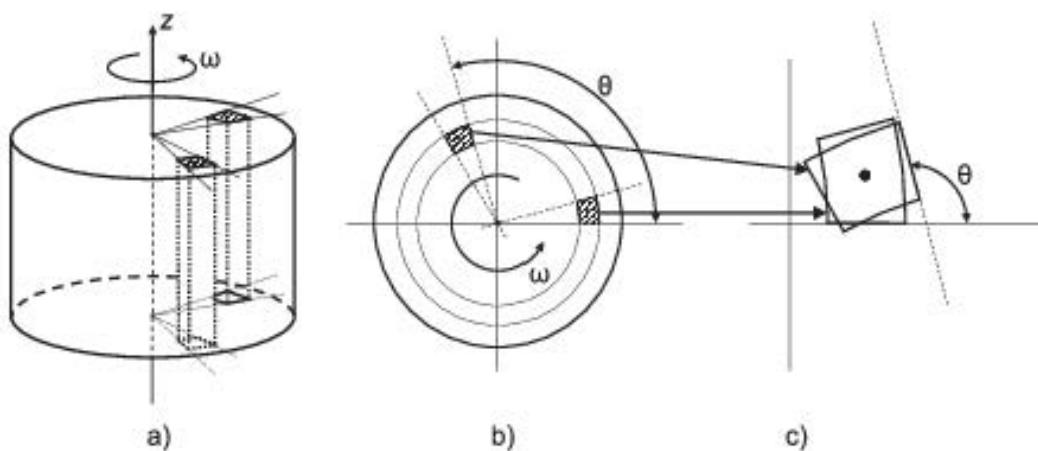
Astraendoci ora dalla presenza del-

l'oggetto, potremmo dire che il campo delle velocità dell'acqua ha esso stesso un'intrinseca proprietà di rotazione, misurata appunto da quanto una sua componente (nel caso esaminato, quella parallela alla direzione del canale) varia nella direzione normale a quella componente (nel caso esaminato, nella direzione della sezione del canale sulla superficie dell'acqua). Non ci è ne-

pure difficile pensare che questa proprietà di rotazione sia intrinsecamente vettoriale, come potremmo renderci conto pensando a quanto può avvenire nel caso esaminato con degli oggetti trascinati vicino al fondo e messi in rotazione come se fossero a contatto con questo, dal momento che in questo caso c'è una variazione della velocità dell'acqua nella direzione verticale, anziché orizzontale. Se ora pensassimo al moto di un liquido in un recipiente, come nel caso dell'acqua in un bicchiere, al tè in una tazza, che avremo mescolato e messo in moto, ci viene naturale chiedere se in quel fluido ci possa ancora essere un effetto di rotazione del tipo di quelli che abbiamo osservato nel canale. La risposta sta ovviamente nel tipo di moto che si sarà instaurato. Se, per esempio, il liquido si muovesse a regime in modo tale che ogni punto della superficie che osserviamo eseguisse un moto circolare uniforme attorno al centro e tutti si muovessero con la medesima velocità angolare  $\omega$ , come farebbe un corpo rigido in rotazione su sé stesso, vi sarebbe un campo delle velocità  $v(r)$  tangente in ogni punto alle circonferenze di diverso raggio ma di eguale centro, di modulo linearmente crescente al crescere della distanza  $r$  dal centro. Ciò vuol dire che se pensassimo a un volume di liquido compreso fra due superfici cilindriche di raggi leggermente diversi e due piani diametrali sufficientemente vicini, a ogni giro del liquido attorno



**Fig. 3.17.** Effetto di rotazione su un corpo immerso in un flusso dove è presente una variazione della velocità in direzione a essa normale



**Fig. 3.18.** L'angolo  $\theta$  di cui ruota attorno a se stesso un volumetto di un liquido in rotazione 'rigida' attorno a un asse è uguale all'angolo di cui è ruotato tutto il liquido. a) vista tridimensionale; b) vista in proiezione assiale; c) rotazione del volumetto

all'asse esso eseguirebbe anche un giro attorno a sé stesso, o meglio attorno a un suo asse baricentrale parallelo al medesimo asse del cilindro. Cosicché, se si pensasse di ridurre a zero le dimensioni del volumetto avvicinando i raggi e i piani diametrali, si troverebbe che nel punto corrispondente il campo di velocità sarebbe dotato di rotazione:  $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ . Ciò non sarebbe più vero se la velocità di rotazione del fluido avesse una dipendenza dal raggio inversa alla lunghezza di questo, così che il prodotto della lunghezza della circonferenza  $\times$  velocità ( $\sim 2\pi R \times \frac{1}{R}$ ) non verrebbe più a dipendere dal raggio, quindi dalla forma e dalla posizione del volumetto. Viene, quindi, spontaneo cercare di precisare un nuovo concetto, legato a quello della rotazione, introducendo una nuova operazione, quella di *integrale di circuitazione* su una linea chiusa, definita per un campo vettoriale come l'integrale del prodotto scalare del vettore per il differenziale di linea. Nell'ultimo caso che si è voluto considerare, in cui in un fluido rotante la velocità scenda con la distanza dal centro in modo inversamente proporzionale a detta distanza, si constata immediatamente che tale integrale è sempre nullo, purché la linea chiusa su cui effettuare l'integrazione non racchiuda al suo interno l'asse di rotazione, nel qual caso l'integrale varrebbe proprio la costante di proporzionalità tra  $v(R)$  e  $R^{-1}$ . Ebbene, il rotore di un campo vettore non è che l'espressione differenziale di tale integrale, così come la divergenza lo è del flusso. Nel caso ora esaminato, il rotore del campo di velocità sarà un vettore ovunque nullo, tranne nel punto centrale, dove potremo pensarlo orientato normalmente alla giacitu-

ra dei vettori velocità e di modulo pari al prodotto  $2\pi Rv = 2\pi\omega R^2$ .

Con queste necessarie premesse, torniamo a misurarci con l'operatore nabla per vederne una possibile applicazione nel contesto dell'operatore di rotazione. A tale proposito, una semplice considerazione tratta dall'esempio del flusso di corrente nell'alveo di un canale ce ne può suggerire la scrittura. Pensiamo, a tal proposito, alla circuitazione del vettore velocità lungo il perimetro di un rettangolo sulla superficie dell'acqua nel canale con due lati paralleli ai bordi: se ne facessimo tendere i lati a zero, vedremmo che il contributo alla rotazione è semplicemente dato dal differenziale del vettore velocità, orientato nella direzione longitudinale del canale, rispetto all'incremento della posizione in direzione ortogonale: il tutto moltiplicato per il lato lungo su cui è diretto il vettore velocità. In termini analitici:  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$  se  $x$  e  $y$  sono le coordinate scelte rispettivamente lungo la direzione della corrente e lungo quella ortogonale a questa. Se la geometria del sistema prevedesse una componente del vettore velocità anche secondo altra direzione – come nel caso esemplificato della rotazione dell'acqua nella tazza circolare –, al termine ora scritto se ne dovrebbe aggiungere un altro simmetrico nelle coordinate, così che la circuitazione su un piano ortogonale a  $z$  verrebbe a scriversi come  $(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}) \Delta x \Delta y$ . Questa scrittura mostra nel termine in parentesi una somiglianza formale con la componente  $z$  di un prodotto vettore tra due vettori; ricordiamo, infatti, che per due generici vettori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  definiti nello spazio tridimensionale, il prodotto vettoriale o esterno ha le sue singole componenti date da:  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_y B_z - A_z B_y$  per la prima e così per le altre a seguire. Il termine di circuitazione in parentesi più sopra scritto vale quindi il prodotto vettore tra l'operatore  $\nabla$ , con cui ci siamo ormai familiarizzati, e il vettore velocità:  $\nabla \times \mathbf{v}$ . L'operatore applicato al vettore  $\mathbf{v}$  che lo trasforma nel modo indicato si chiama rotore e si suole anche indicare con la notazione ‘rot’.

### 3.6 Autovalori

La descrizione dei fenomeni oscillatori che abbiamo fatto nel paragrafo precedente ci ha fatto porre l'attenzione in modo naturale su una serie di oggetti, corpi o strutture che esemplificano la presenza di una frequenza propria di oscillazione in ognuno di essi: così, vediamo una corda da bucato tesa tra due estremi oscillare con una frequenza che dipende dal carico dei panni appesi, vediamo una riga da disegno tenuta orizzontalmente a sbalzo fuori di un tavolo oscillare in modo più o meno rapido a

seconda della lunghezza del tratto emergente dal bordo, un uccello dondolare sul ramo di posa con un ritmo dipendente dal suo peso, oltre che dalle caratteristiche del ramo, il lampadario compiere un numero di piccole oscillazioni nel tempo dipendente dalla lunghezza dello stelo di appoggio, eccosì via. Ogni struttura, quando venga lasciata libera di oscillare dopo averle impresso una piccola perturbazione, ha una ben precisa frequenza di oscillazione, quella che si dice appunto la *frequenza propria* del sistema. Sappiamo, da quanto detto in precedenza e sinteticamente illustrato in questi brevi esempi, che questa frequenza propria dipende da alcune specifiche caratteristiche del sistema, quali la lunghezza, la massa, la rigidità, la sezione ecc.: questi parametri compaiono nelle equazioni del moto e ne determinano in qualche modo l'evoluzione. In particolare, vediamo che la corda, la riga, il ramo o il lampadario potranno sì oscillare con ampiezze più o meno grandi, in dipendenza dall'entità della perturbazione iniziale impressa, potranno iniziare l'oscillazione in tempi diversi, in dipendenza di quando avremo impresso la perturbazione iniziale, ma, una volta posti in oscillazione, la frequenza, o che è lo stesso il periodo proprio dell'oscillazione, è fissato da caratteristiche intrinseche al sistema. Cioè, qualche specifica del moto, quali sono appunto l'ampiezza di oscillazione e la fase, dipendono da come viene perturbato inizialmente il sistema, ma la frequenza dell'oscillazione 'libera' dipende unicamente dal sistema in sé, come esso è fatto, quali sono le grandezze fisiche che lo definiscono. Di qui il senso di *frequenza propria* del sistema, intrinseca ad esso: se si cambiano i valori di queste grandezze, cambia la frequenza propria del sistema. Alternativamente, si può dire che i valori delle grandezze fisiche proprie del sistema, la massa, la lunghezza, la rigidità ecc., si combinano in modo tale che il sistema è obbligato a rispondere in un certo modo, a oscillare con un certo periodo proprio che, unico, soddisfa le condizioni poste dalla dinamica del moto. Si dice in tal caso che quella frequenza è un'*autofrequenza* del sistema, o, più genericamente, un *autovalore*. Vogliamo ora approfondire questo concetto, proprio della matematica ma generalissimo della fisica, muovendoci per gradi successivi.

Nel più semplice sistema oscillante costituito da una massa legata a una posizione di equilibrio da una forza elastica, una molla cioè, come nel caso che ci ha portati a scrivere l'equazione dell'oscillatore armonico, che qui riscriviamo in modo ancor più semplificato come

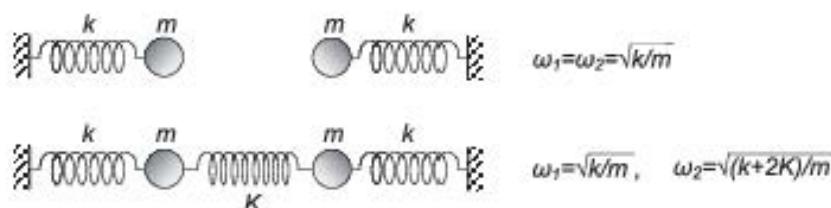
$$m\ddot{x} = -kx$$

avendo trascurato il termine di dissipazione e la causa esterna forzante, la risposta del sistema a una qualunque sollecitazione deve avvenire in modo che lo spostamento sia in ogni istante proporzionale alla sua derivata seconda: il rapporto tra l'uno e l'altra deve essere in ogni istante il medesimo, indipendentemente dalla condizione di partenza, da quanto cioè sia ampia l'oscillazione e da quando si sia posto in oscillazione il sistema. Per soddisfare ciò, la frequenza con cui deve avvenire l'oscillazione ha uno e un solo valore possibile, quello appunto dell'autofrequenza. Nell'esempio dell'equazione sopra riportata, quindi, è il rapporto  $\ddot{x}/x$ , uguale a quello  $-k/m$ , che fissa il periodo proprio dell'oscillatore e la corrispondente pulsazione  $\sqrt{k/m}$ . Ciò appare evidente, se si pensa che in un'oscillazione armonica, cioè sinusoidale, la derivata seconda della grandezza oscillante – in questo caso l'ampiezza  $x(t)$  – è eguale alla stessa funzione  $x$  moltiplicata per una costante negativa, che vale il quadrato della pulsazione; cioè, appunto  $\ddot{x}/x = -k/m$ . Questa relazione, che lega le grandezze fisiche proprie del sistema alla pulsazione, si può porre nella forma

$$\omega \pm \sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \quad (3.1)$$

che si legge nel seguente modo: “qual è il valore del parametro  $\omega$  per il quale l'equazione omogenea 3.1 sopra scritta risulta identicamente soddisfatta?”, quasi che il sistema debba cercarsi tra gli infiniti possibili valori della pulsazione quello che renda soddisfatta l'equazione. Naturalmente, noi continueremo a pensare all'esistenza di un vincolo fisico che esiste tra le grandezze fisiche e la modalità di oscillazione del sistema, ma ciò non toglie che la riduzione al problema analitico abbia portato a leggere l'equazione in altro modo. Questa diversa lettura ci aiuta a comprendere il meccanismo della presenza di autofrequenze in sistemi più complessi del caso ora esposto dell'oscillatore armonico: in particolare in un sistema fisico esteso, come quello di una piastra o di una membrana vibrante, o di un oggetto tridimensionale, come un bicchiere o una campana, o ancora più complesso, come una catena di atomi nel reticolo cristallografico di un solido ecc.

Procediamo verso il caso generale, considerando dapprima un sistema semplicemente costituito da due oscillatori che in un primo tempo potremmo pensare totalmente indipendenti, un sistema cioè costituito da due masse distinte, ciascuna legata alla sua propria posizione di equilibrio da una molla e vincolati a oscillare tutti lungo una medesima direzione. Ci è facile immaginare che ciascuna massa oscillerà con



**Fig. 3.19.** Due oscillatori eguali disaccoppiati oscillatoranno separatamente ciascuno sulla propria frequenza  $\omega = \sqrt{k/m}$ ; se sono debolmente accoppiati, per es. attraverso una molla, l'intero sistema presenta due frequenze proprie distinte  $\omega_1$  e  $\omega_2$

una pulsazione data dalla radice quadrata del rapporto tra la costante elastica della molla che la lega e la sua massa. Due pulsazioni distinte, derivanti da due equazioni distinte, ciascuna del tipo di quella più sopra esaminata, per le quali le due soluzioni si ricavano da relazioni del tipo (3.1). Successivamente, supponiamo che tra le due masse sia tesa una terza molla, molto cedevole, la cui presenza perturbi debolmente il moto delle due masse isolate; supponiamo, come si dice, che i due oscillatori siano in qualche modo *debolmente accoppiati*. Possiamo a buona ragione credere che i moti delle due masse non siano molto diversi dal caso del totale disaccoppiamento, ovvero che le due pulsazioni dei moti liberi cambino di poco dal caso precedente, e tanto meno, quanto più debole è l'accoppiamento. La descrizione matematica, in questo caso, porta a scrivere due equazioni, che si riferiscono l'una al primo e l'altra al secondo oscillatore. In realtà, poiché il moto di ogni massa è debolmente perturbato dal moto dell'altra, in ciascuna equazione scritta per l'ampiezza di un oscillatore c'è un termine - pur piccolo - che riporta il moto, quindi l'ampiezza di oscillazione, dell'altro. Si giunge, allora, in modo naturale alla scrittura di un sistema di due equazioni nelle incognite date dalle ampiezze di oscillazione delle due masse; in ciascuna equazione ci sarà un coefficiente per una delle due ampiezze incognite (e precisamente quello della massa per la quale si scrive l'equazione), ancora una volta del tipo della (3.1).

Come è noto, la soluzione del sistema di due equazioni si avrà solo se si annulla il determinante dei coefficienti e ciò porta a un'equazione di secondo grado nella pulsazione  $\omega$  che compare nella (3.1), che avrà due possibili soluzioni. Anche nel caso del sistema dei due oscillatori, quindi, come precedentemente per il caso di uno solo, la soluzione si avrà solo se i valori di  $\omega$  soddisfano la condizione di annullamento del determinante. Il parametro  $\omega$  costituisce per il sistema di equazioni l'autovalore – in questo caso, per il significato fisico, l'autofrequenza – del sistema: un parametro di

aggiustamento, per alcuni valori del quale solamente il sistema ammette soluzioni. Come sin qui si è visto per il caso di un solo oscillatore e di due, le soluzioni sono in numero pari al numero di oscillatori. Il procedimento sin qui indicato può adattarsi al caso di un numero qualsivoglia  $n$  di oscillatori accoppiati: questi costituiranno un sistema fisico descritto da un altrettanto grande numero  $n$  di equazioni, nel quale sarà presente un parametro che permetterà la risoluzione del sistema solo quando assuma uno di un altrettanto grande numero  $n$  di valori. Ci saranno tante autofrequenze, o frequenze di risonanza, quanti sono gli oscillatori costituenti il sistema, in coerenza col fatto che, se non vi fosse alcun accoppiamento tra i singoli oscillatori, ci sarebbero  $n$  frequenze distinte, una per ciascun sottosistema.

Vogliamo ora dare un'interpretazione geometrica al concetto dell'autovalore, introducendo un po' di algebra elementare, facilmente seguibile anche dal lettore appena iniziato agli studi, per meglio fissare il concetto di autovalore. Potremo scrivere il sistema algebrico che abbiamo sin qui solo verbalmente descritto nelle incognite  $A_j$  delle due ampiezze di oscillazione (una per ciascuna delle due masse oscillanti, che potrebbero generalizzarsi a  $n$  nell'ipotesi di un sistema con  $n$  gradi di libertà) nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{m} - \omega\right)A_1 + CA_2 &= 0 \\ CA_1 + \left(\frac{k}{m} - \omega\right)A_2 &= 0 \end{aligned}$$

in cui il coefficiente  $C$  è il parametro di accoppiamento tra i due sottosistemi. Ciascuna equazione può leggersi come l'espressione del prodotto scalare tra due vettori, uno di componenti  $(A_1, A_2)$  e l'altro di componenti  $(k/m - \omega, C)$  per la prima equazione, e  $(C, k/m - \omega)$  per la seconda: infatti, moltiplicando componente per componente i due vettori e sommando le espressioni, si ottengono i primi due membri delle equazioni del sistema. Più sinteticamente potremmo scrivere il sistema come:

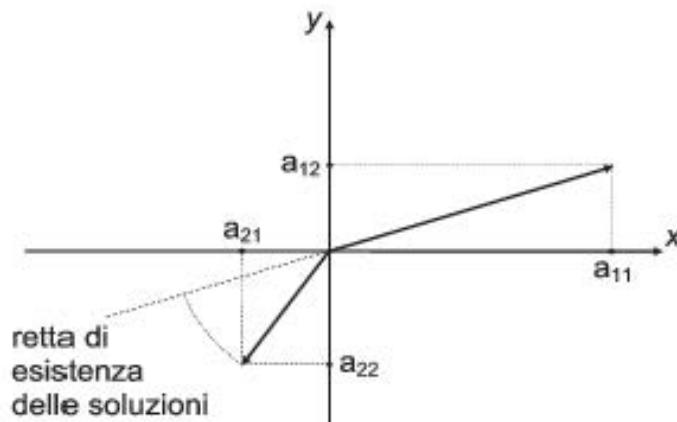
$$a_{11}A_1 + a_{12}A_2 = 0$$

$$a_{21}A_1 + a_{22}A_2 = 0$$

con ovvio significato dei termini. Il sistema è, peraltro, omogeneo, come si vede dal valore nullo dei secondi membri.

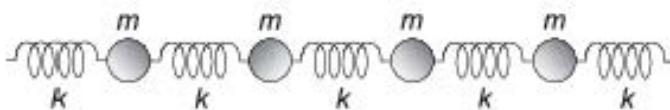
Ciò vuol dire che si vuole l'annullamento dei due prodotti scalari indicati, cioè si vuole che il vettore della soluzione  $(A_1, A_2)$  sia ortogonale ai due vettori dei coefficienti; ma nel caso di vettori che hanno due dimensioni, che cioè vivono in uno spazio bidimensionale come fossero due vettori del piano  $(xy)$ , ciò è possibile solamente se i due vettori hanno la medesima direzione, altrimenti un terzo vettore non potrebbe essere contemporaneamente ortogonale all'uno e all'altro. Se i due vettori dei coefficienti sono allineati, allora qualunque vettore, di qualsivoglia modulo, purché ortogonale alla direzione di allineamento soddisferà il sistema omogeneo di equazioni. Come si può vedere, la possibilità di variare il parametro  $\omega$  corrisponde alla possibilità di variare i due vettori dei coefficienti sul piano, sino a determinarne il parallelismo: quel valore, o quei valori, del parametro sono gli *autovalori* del sistema che, nel caso della descrizione di oscillatori, hanno il significato fisico di pulsazioni e perciò si chiamano *autofrequenze*. Vale la pena ora ricordare che se i vettori corrispondenti alle righe di un determinante non sono indipendenti, ma sono uno almeno ottenibile come combinazione lineare degli altri, il determinante si annulla e il sistema ammette infinite soluzioni, ottenibili l'una dall'altra per semplice moltiplicazione per un fattore numerico.

La generalizzazione del caso esaminato di due masse oscillanti a quello di  $n$  masse oscillanti è immediato: si avrà un sistema algebrico di  $n$  equazioni e il determinante dei coefficienti sarà interpretabile come una  $n$ -pla di vettori in uno spazio  $n$ -dimensionale: le auto frequenze corrisponderanno a quei valori (in numero di  $n$ ) per ciascuno dei quali gli  $n$  vettori vivranno in uno spazio a  $n - 1$  dimensioni, per cui si potrà trovare una direzione ortogonale a tutte le altre.



**Fig. 3.20.** Perchè ci siano soluzioni reali in un sistema algebrico omogeneo di equazioni occorre che i vettori rappresentativi dei coefficienti siano tra loro dipendenti; nel caso bidimensionale, i due vettori dei coefficienti devono essere allineati affinché il vettore soluzione possa essere ortogonale a entrambi

Una situazione reale che sia descrivibile da un sistema del genere è quella ad es. di tante masse – che per semplicità potremo pensare eguali – allineate su una retta e legate ciascuna alle due contigue da una molla; ciò corrisponde al modello di un solido cristallino, nel quale su ogni direzione cristallografica si allinea un numero stragrande di atomi tutti eguali, vincolati da forze elettrostatiche che agiscono su ciascun atomo alla stregua di forze elastiche. Il sistema ammette un numero assai grande di frequenze proprie di oscillazione, corrispondenti alle possibili frequenze che si possono propagare lungo la catena atomica. Naturalmente, in un cristallo reale gli atomi si possono disporre secondo tutte e tre le direzioni spaziali, per cui il sistema si arricchisce nella sua casistica descrittiva, non inficiando tuttavia la validità interpretativa della descrizione fornita.



**Fig. 3.21.** Modello di solido cristallino con masse puntiformi nelle veci di atomi e molle in quelle delle forze elettrostatiche tra di essi. Il numero delle autofrequenze sarà pari a quello delle masse rappresentate

### 3.7 Le condizioni al contorno

Con una fortuna, forse inferiore a quella della già citata crescita esponenziale – esemplificata per il prezzo di una merce, per il traffico ecc. –, anche l'espressione della dipendenza dalle *condizioni al contorno* di un evento, del successo di una rappresentazione, della fortuna di un prodotto ecc. è divenuta di uso comune e costituisce una piccola ulteriore vittoria del linguaggio scientifico sul quotidiano. L'origine della terminologia si ritrova nella soluzione delle equazioni differenziali che, regolando appunto il divenire o la struttura dei fenomeni naturali, richiedono la conoscenza dello stato fisico del sistema a un determinato istante – la condizione di contorno, appunto, o iniziale – per poterne descrivere univocamente l'evoluzione. Nulla di più ovvio, si dirà, soprattutto a valle di qualche esempio che servirà a introdurci nel tema. Se lanciamo per aria un pallone, sappiamo che il suo moto – la posizione del punto di caduta, la traiettoria, la velocità a ogni istante ecc. – dipenderà da quando e da dove lanciamo in aria il pallone e da quale velocità iniziale gli imprimiamo. Da fermo, esso cadrà secondo la verticale; non così, se lo lanciamo con un angolo rispetto al piano

orizzontale; una medesima traiettoria poi sarà descritta dal pallone, a parità dello stato impostogli inizialmente, indipendentemente dal fatto che lo lanciamo oggi o domani, ma certo la descrizione in funzione del tempo sarà in questo caso 'traslata' proprio del tempo di ritardo tra i due lanci, ecc. Il percorso di un raggio di luce muta secondo che esso incida sulla superficie riflettente di una pozza d'acqua presente sul terreno o sul terreno stesso. La quantità di calore che fluisce attraverso le pareti di muratura di una costruzione civile dipende dalla differenza delle temperature dell'aria dalle due parti della parete. Si dirà, appunto, troppo ovvio: troppo ovvio che la traiettoria di un pallone dipenda dal calcio che gli abbiamo dato, il percorso di un raggio di luce dalla presenza di uno specchio, il flusso termico dalla temperatura esterna, se è fissata quella interna, ad esempio. Ebbene, queste condizioni così 'ovvie' incidono sull'evoluzione del singolo fenomeno e lo determinano in modo univoco. Proviamo allora a definire meglio quali sono di volta in volta queste *condizioni*, che vincolano il fenomeno a quel certo comportamento e non ad altri e vediamo come oggettivizzare e limitare questa ovietà dell'approccio.

A questo punto del percorso ci siamo ormai familiarizzati con i concetti di *sistema fisico* e di *stato* di un sistema fisico: diremo di conoscere lo stato di un sistema quando conosciamo i valori che assumono tutti i parametri fisici (le *grandezze fisiche*) che lo descrivono ed, estensivamente, la conoscenza dell'evoluzione del sistema consiste nella conoscenza della dipendenza temporale che assumono questi parametri o grandezze. Insomma, diremo di conoscere un sistema e quel che esso farà se siamo in grado di prevedere l'evoluzione temporale delle funzioni che lo descrivono. Queste grandezze, o funzioni, si legano deterministicamente tra loro e con altre grandezze del mondo esterno: l'evoluzione di un sistema dipende dai legami strutturali che vincolano le grandezze che lo descrivono a quelle del mondo esterno – in questo consistono le leggi fisiche – e, naturalmente, dai valori che assumono queste ultime. La traduzione matematica di questo concetto è che esiste una o più equazioni che hanno come incognita la funzione o le funzioni descriventi lo stato del sistema e la cui soluzione univoca sono appunto i valori che assumono le grandezze. I matematici studiano a fondo le condizioni per le quali l'equazione ammette una soluzione e le sue proprietà di unicità; assai più superficialmente e pragmaticamente, i fisici accettano che il mondo non abbia dubbi sulla propria evoluzione e che quindi, se esiste, continui a esistere (*esistenza*) e non abbia neanche dubbi su quale percorso debba fare

tra i tanti possibili (*unicità*). Ebbene, l'unicità della soluzione è legata alla 'unicità' delle condizioni al contorno; se queste mutano, muta anche la soluzione: il pallone lanciato in aria eseguirà una determinata traiettoria con una ben precisa legge oraria in dipendenza da come e da dove sarà stato lanciato a un certo istante; il flusso termico attraverso una parete di muratura dipenderà dai valori a cui saranno mantenute le temperature delle due superfici della parete durante il processo ecc.

Proviamo a costruire la soluzione di un problema, quello ad es. del lancio del pallone, attribuendo per un attimo alla natura il nostro stesso abito mentale, mettendoci per così dire nei panni del pallone che deve scegliere il percorso a ogni istante successivo a uno dato, cominciando per l'appunto dall'inizio, dalla 'condizione iniziale': non è un processo completamente legittimo, ma ci aiuta a capire il concetto di condizione al contorno. Il pallone si trova al tempo  $t_0$  (*iniziale*) in un determinato punto  $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ ; sottoposto, supponiamo, alla sola sua forza peso  $\mathbf{F} = mg$ , deve decidere come muoversi nel primo intervallo  $\Delta t$  dopo l'istante iniziale. Vincolato al rispetto del secondo principio della dinamica, varierà la propria velocità di una piccola quantità  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t$  che aggiungerà alla velocità già posseduta, cioè al valore  $\mathbf{v}_0$  che possiede inizialmente e che dovrà pertanto essere definito – e univocamente definito – perché ci possa essere una soluzione del problema. Inoltre, dalla posizione iniziale  $\mathbf{r}_0$  si sarà mosso di un tratto  $\mathbf{r}_0$  pari a  $\mathbf{v}_0\Delta t$ . Insomma, per decidere dove andare e come muoversi nel primo intervallo temporale  $\Delta t$ , il pallone deve sapere dove si trova ( $\mathbf{r}_0$ ) e quale velocità ( $\mathbf{v}_0$ ) ha al tempo iniziale  $t_0$ . Naturalmente, per il secondo intervallo temporale le cose si ripresentano identiche e ciò che sarà al termine di questo intervallo dipende strettamente dai valori che posizione e velocità avranno assunto al termine del primo intervallo. Il processo si concatena per gli intervalli successivi, così che si dovrà dire che tutto il moto avviene condizionatamente ai valori della posizione e della velocità che il sistema ha all'istante *iniziale*. Certo, il pallone non deve decidere, né si può ridurre la soluzione del moto al computo di una serie di equazioni algebriche fatte di pezzetti temporali successivi, ma resta il vincolo fondamentale che ciò che sarà dopo dipende dalla situazione di cosa era prima e che, nel caso del moto in cui ci si affida a un'equazione differenziale del second'ordine, le condizioni iniziali riguardano la conoscenza di due grandezze: posizione e velocità.

Se il sistema è più complesso di quello che si è considerato – del pallone, che peraltro si è qui modellizzato come fosse un punto materiale, il cui moto fosse cioè

descrivibile da un unico parametro, pur se vettoriale, come la posizione o il vettore spostamento  $\mathbf{r}(t)$  – si dovranno precisare le condizioni iniziali di più parametri. Se un sistema è compiutamente descritto da  $n$  grandezze fisiche, o *gradi di libertà*, per ognuna si potrà scrivere la relativa equazione evolutiva e per ogni equazione si dovranno fornire le condizioni iniziali, in numero pari all'ordine di ciascuna equazione. Sin qui si è pensato al moto di un punto, o al più di un sistema descritto da più parametri, tutti però dipendenti dalla sola variabile temporale: l'esempio cui abbiamo guardato prevedeva la sola evoluzione nel tempo del fenomeno. Più in generale, però, possiamo pensare al caso in cui un sistema dipenda da più di una variabile. Un esempio immediato potrebbe essere quello della vibrazione di una corda di uno strumento musicale o della nostra membrana timpanica: la conoscenza del ‘moto’ in tal caso consisterà nella conoscenza del moto di ogni punto della corda o della membrana, sarà cioè una funzione non più solo del tempo, ma anche della posizione del punto che si considera lungo la corda o sul piano della membrana. In formule, dovremo conoscere la funzione  $u(\mathbf{r}, t)$ , considerando  $u$  come ampiezza istantanea della vibrazione. Se supponiamo di pizzicare la corda o eccitare la membrana in un punto, il moto di tutto l'insieme dei punti costituenti l'uno o l'altro sistema dipenderà – oltre che da eventuali perturbazioni delle forze dall'esterno – dalla configurazione assunta inizialmente da tutto il sistema, cioè dalla condizione iniziale  $u(\mathbf{r}, 0)$ , e non solo, ma anche dal vincolo imposto ai due estremi della corda o a tutto il bordo della membrana. Tipicamente ad es. gli estremi della corda potranno essere mantenuti fissi in ogni istante di tempo  $t$ , scrivendosi in tal caso  $\mathbf{u}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \mathbf{0}$ , per una corda di lunghezza  $L$ , oppure il bordo  $C$  della membrana potrà essere mantenuto fisso, scrivendosi in tal caso  $\mathbf{u}(\mathbf{C}, t) = \mathbf{0}$ . Anche in questi casi di dipendenza della grandezza incognita da due o più variabili, piuttosto che da una sola come si era esaminato in precedenza, potremmo attribuire per un attimo alla natura il nostro stesso abito mentale e metterci nei panni della corda o della membrana, cominciando a chiederci come deve muoversi nel primo intervallo di tempo  $t$  un punto molto vicino – diciamo di un tratto  $\Delta x$  – a un estremo della corda o al bordo della membrana. Quel punto risente di una forza da parte dei punti del sistema immediatamente vicini e indirettamente del vincolo imposto all'estremo di non potersi muovere. L'equazione del moto imporrà una certa soluzione per l'ampiezza, la quale diviene condizione per il punto contiguo e questo per il successivo, finché tutto il sistema avrà al tempo  $\Delta t$  una configura-

ne che rispetta sia l'equazione sia il vincolo imposto. Per il successivo intervallo  $\Delta t$  le cose si ripetono e così di seguito, ogni volta rispettando il vincolo del bordo. Il moto di tutto il sistema nel tempo è determinato se viene assegnata la configurazione iniziale del sistema e l'evoluzione temporale dei suoi estremi. Unificando le due variabili di dipendenza,  $x$  e  $t$  nel caso della corda, diremo che il moto è determinato una volta assegnata la configurazione del sistema sui bordi del dominio definito nello spazio bidimensionale dal segmento sull'asse  $x$  compreso tra 0 e  $L$ , e dalle semirette parallele all'asse  $t$  uscenti dai punti  $x = 0$  e  $x = L$ . Generalizzando un po' arbitrariamente quanto detto, si può dire che la soluzione di un'equazione differenziale che descrive lo stato di un sistema è univocamente determinata per tutti i valori delle sue variabili indipendenti che siano contenuti all'interno di un dominio, purché sul *bordo* di questo dominio siano stabiliti i valori della funzione e/o opportune relazioni tra la funzione e le sue derivate, fino a un ordine che dipende dall'ordine dell'equazione. Il caso del moto di un punto si colloca in questo schema, se si pensa che in tal caso la variabile indipendente è il solo tempo e che il dominio di definizione è la semiretta che ha come bordo il punto, ovvero l'istante, dell'asse  $t$  dove essa si origina.

## **Parte II**

# **ESERCIZI**



# Come si fanno gli esercizi

## 1.1 Introduzione

Questo capitolo preliminare vuole aiutare il lettore, studente dei primi anni di corsi di facoltà scientifiche, alle prese non solo con la comprensione dei testi di fisica, ma anche con le verifiche d'esame, dove spesso gli esercizi delle prove scritte costituiscono una barriera di difficile superamento; esso vuole essere un'offerta di formazione per la soluzione di esercizi. Per non creare false illusioni, va subito detto che non vi è regola generale per risolvere un esercizio di fisica o solo per affrontare in modo univoco l'ingente e diversificata massa di esercizi che di questa disciplina sono collezionati nei vari testi specificatamente dedicati o che la fantasia dei docenti può continuare a costruire; offerta di formazione significa suggerire strade per la comprensione dei testi, costruire una mentalità per affrontare i problemi: questa soltanto può considerarsi la ‘regola generale’ o il ‘modo univoco’ dell’approccio.

Di fatto esiste più di un modo di conoscere o comprendere la realtà fisica della natura. Potremmo dire che esiste una fisica ‘intuita’ – così come abbiamo accennato nella Premessa –, quella che ci permette di vivere immersi nella fenomenologia naturale, sistema fisico in interazione con altri sistemi fisici, prevedendo – intuendo, potremmo appunto dire – quello che può accadere nel breve termine in seguito a quello che è lo stato attuale dei sistemi

Questo modo di rappresentare il mondo per permetterci di vivere in esso e ottimizzare il nostro rapporto con l’ambiente esterno è comune a tutti gli esseri animati,

pur se in misura diversa per quantità di possibili interazioni e per tipologia: la necessità di ‘intuire’ il mondo è diversa per un gatto o per un ragno, per una farfalla o per un cavalluccio marino ecc. Tutti, tuttavia, abbiamo costruito un sistema interno che prevede qualche tipo di evoluzione dei fenomeni.

Diversa è la conoscenza scientifica, che costruisce modelli dei fenomeni naturali tali da poter essere condivisi con gli altri, individua le regole evolutive di quelli e li sintetizza nelle leggi naturali, alle quali diamo una connotazione di universalità. Per singolare simmetria, il primo tipo di conoscenza non giunge al livello di coscienza, cioè non sappiamo esattamente cosa sappiamo, ma riusciamo a prevedere ‘intuitivamente’ quel che ci serve: l’evoluzione di un fenomeno, il meccanismo di funzionamento di una struttura ecc.; il secondo tipo, al contrario, ci mette in mano le chiavi del conoscere, sappiamo con esattezza cosa sappiamo, ma applicare questo sapere al caso pratico non è affatto immediato e proprio lo studente sa a sue spese quanto sia ostica la soluzione di un esercizio – l’applicazione pratica, appunto, di questo sapere –, quando anche sia scelto tra i più semplici di una collezione. Poi, però, come nell’apprendimento di una lingua straniera non basta la conoscenza delle regole e dei significati terminologici per comprendere le poche battute scambiate in un film, ma occorre la pratica e la ripetizione del sentire per aprire le porte alla comprensione del parlato, così in fisica la conoscenza della teoria non è un’automatica carta di credito per la risoluzione degli esercizi. Cosa occorre, dunque, per passare a questo secondo livello? Certamente la pratica ripetitiva dei problemi è un valido ausilio, ma l’intelligenza nel farli e nel selezionarli vale assai più di una meccanica ripetizione di prove su tipologie similari. Vorremmo, a questo punto, individuare in cosa consista l’intelligenza nel farli e selezionarli e migliorare l’economia di studio dello studente, ora nella fisica, ma ci augureremmo in seguito in ogni altra disciplina scientifica.

Suggeriamo allo studente di seguire gli esercizi guida in modo partecipativo, non fermandosi tanto sul passaggio matematico, quanto sul significato del passaggio, sul vincolo che esso descrive: un parametro fisico incognito richiede un’equazione, cioè appunto un legame, un vincolo, con altri parametri noti. Questa è la ‘legge’ fisica, questo è il meccanismo fisico che la teoria offre alla soluzione del problema. Occorre mirare a questo e questo poi diviene equazione che descrive quantitativamente il processo. Suggeriamo allo studente di introdursi in questa mentalità, provandosi anche

a modificare mentalmente i testi per analizzare come si modifica contestualmente la soluzione. L'augurio è certo quello di superare lo scoglio di un esame, ma anche quello di arricchire comunque le proprie capacità risolutive.

## 1.2 Cinematica

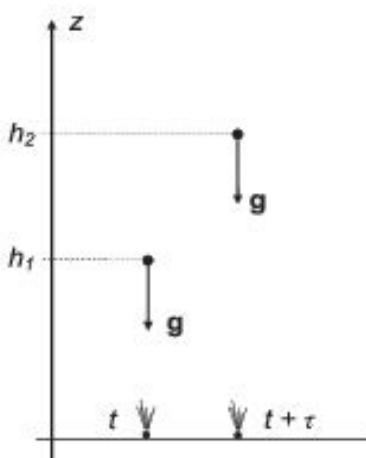
Appare del tutto ovvio quanto si sta per dire, ma la prima fase per la soluzione di un problema consiste nella lettura dell'esercizio, ciò che non vuol dire la meccanica ripetizione mentale del testo, ma la sua comprensione. Si ricordi che un esercizio già contiene in sé la sua soluzione o, meglio, che risolvere un esercizio significa sostanzialmente porre in altri termini il contenuto del testo. Se si dice, come esempio elementarissimo, che: “*un grave è lasciato cadere da fermo nel vuoto e si chiede quale percorso h avrà compiuto dopo un certo numero t di secondi*”, non vi è chi non veda già la soluzione: diciamo che il percorso è semplicemente dato dall'espressione  $h = \frac{1}{2}gt^2$ . Di fatto, per trovare la soluzione, abbiamo fatto uso di una formula semplice, comunemente nota, dello spazio percorso in un moto uniformemente accelerato; ci è stato richiesto cioè di applicare correttamente un'espressione, che si intende conosciuta. È scattato in noi un certo automatismo di prelevare dall'insieme delle leggi immagazzinate in memoria quella di immediato uso per la soluzione; in realtà, l'automatismo deriva dal fatto che abbiniamo il fenomeno descritto – la caduta di un grave – alla relativa legge dello spazio percorso,  $s$ , in un moto accelerato uniformemente. In questo c'è tuttavia un'elaborazione, che è propria del meccanismo della soluzione: il grave è sottoposto a una forza costante – il suo peso –, quindi si muove con accelerazione costante  $a = \text{peso}/\text{massa}$ , quindi si applica la formula del moto uniformemente accelerato; la formula è  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , da cui la soluzione.

Non differentemente, ma in maniera meno diretta, risolveremo il seguente problema: “*un grave cade sulla superficie lunare e, lasciato cadere da fermo da un'altezza h dal suolo, vi giunge dopo un tempo t. Si trovi il valore della gravità lunare*”. Come si intuisce, il problema è il medesimo del precedente, ma è posto in modo indiretto e, forse, l'automatismo sopra descritto non è così rapido come per l'esercizio precedente. In questo caso, l'incognita che si chiede di trovare è l'accelerazione del moto, la  $g$  lunare o  $g_L$ , ma il problema è identico e scriveremo  $h = \frac{1}{2}g_L t^2$  che espliceremo per  $g_L$  nel modo  $g_L = 2h/t^2$ . Naturalmente, potremmo pensare al tempo  $t$  come incognita del problema e chiedere quanto impiega a cadere sul suolo della Luna, dove

l'accelerazione di gravità è  $g_L = 1.62 \text{ m/s}^2$ , un grave da un'altezza  $h$  di tanti metri. Il problema è sempre il medesimo, per la sua risoluzione faremo uso della medesima formula, pur se di volta in volta risolta rispetto a una variabile diversa.

Il problema può combinarsi con un altro, magari del medesimo tipo; ad es., si considerano due gravi lasciati cadere a terra da due altezze diverse, non precise, e si sa che per farli giungere al suolo in contemporanea, quello posto più in alto deve essere rilasciato un tempo precedente di  $\tau$  secondi. Prima di passare alla domanda di chiusura, si cominci a questo punto a visualizzare il fenomeno e a chiedersi quale potrà essere la richiesta: forse le due altezze? forse i due tempi? Immaginiamo che il grave più in basso sia a una certa altezza  $h_1$  e che venga rilasciato esattamente  $\tau$  secondi dopo quello che cade da  $h_2$ , più in alto. Ebbene, fissata l'altezza  $h_1$ , troveremo sempre un valore per l'altezza  $h_2$  da cui lasciar cadere il secondo grave perché tocchi terra in contemporanea col primo; scriveremo, infatti, per il primo (rilasciato all'istante  $t = 0$ )  $h_1 = \frac{1}{2}gt^2$ , che ne fissa il tempo  $t$  di caduta, e per il secondo  $h_2 = \frac{1}{2}g(t + \tau)^2$ , che – noti ormai sia  $t$  sia  $\tau$  – fisserà il valore di  $h_2$ . Ciò vuol dire che ci sarà una serie infinita di coppie di valori  $h_1$  e  $h_2$  che soddisferanno la domanda sulle due altezze. E lo stesso varrà per i due tempi. Quindi un esercizio ben posto non potrà porre né l'una né l'altra domanda, cioè quali sono le due altezze o quali i due tempi; chiederà qualcos'altro, oppure integrerà i dati noti con altri. Per esempio, come appare ovvio da quanto appena detto sui valori di  $h_1$  e  $h_2$ , potrebbe proprio indicare una delle due altezze e richiedere il valore incognito dell'altra, avendo fornito il tempo  $\tau$  di ritardo. Dal punto di vista algebrico, nelle due equazioni scritte per le due altezze c'è un totale di tre parametri non definiti: il tempo  $t$  di caduta del primo e le due altezze: di qui il grado di libertà che resta nel sistema, cioè l'infinità di soluzioni possibili. Altrimenti, fissato il valore di una delle due altezze, si riducono a due le incognite e il sistema è risolubile.

Naturalmente, il problema si presenterà con le stesse modalità di indefinibilità se si aggiungesse al testo iniziale l'indicazione che un terzo grave viene rilasciato un



**Fig. 1.1.** Due gravi giungono al suolo al medesimo istante

tempo  $\tau'$  dopo il secondo: ciò, infatti, aggiungerebbe alle due precedenti un'ulteriore, terza equazione relativa al moto del terzo grave  $h_3 = \frac{1}{2}g(t + \tau + \tau')^2$  e un'ulteriore, quarta incognita. Ancora, il sistema sarà risolubile se verrà fissato il valore di almeno una delle tre altezze. Il problema resterebbe indefinito – si badi – nel caso dei due gravi ad es. (come, estensivamente, nel caso dei tre), anche se si chiedesse di ritrovare, anziché i valori delle singole altezze, quello per es. del loro rapporto  $\alpha$  o della loro differenza  $\beta$ : ciò, infatti, ridurrebbe il numero delle incognite (nel primo caso da tre a due: il rapporto o la differenza delle altezze, piuttosto che le due separate), ma ridurrebbe in corrispondenza anche quello delle equazioni (da due a una solamente).

$$\alpha = \frac{(t + \tau)^2}{t^2} \quad \text{o} \quad \beta = \frac{1}{2}g [(t + \tau)^2 - t^2].$$

Se analizziamo quanto si è detto sinora, si noterà come, attorno a un fenomeno specifico – la caduta libera dei gravi o, se si vuole, il moto uniformemente accelerato – si è costruita una breve serie di problemi, che si può estendere a moltissimi altri, che abbiamo iniziato a risolvere, intuendone la fenomenologia e applicando le leggi disponibili, ponendoci, quasi più che dalla parte del risolutore, da quella dell'ideatore. Ecco, dunque, una chiave per imparare a risolvere gli esercizi: partiamo da uno qualunque e proviamo a costruirne di nuovi, ponendo per es. le domande indirette (l'esempio della gravità lunare, piuttosto che il percorso compiuto) o integrando l'esercizio iniziale, o anche complicandolo con dati da ritrovare applicando altre formule. In quest'ultima casistica potrebbe ricadere il caso già visto, quando si pensasse per es. che mentre il grave scende, un punto si muove con velocità costante  $v$  su una traiettoria orizzontale che passa per il punto di caduta al suolo del grave e si chiedesse in quale posizione si trova se si sa che viene a impattare col grave, o quale dev'essere  $v$  se si vuole che partendo da una certa distanza preceda il grave nel punto di caduta. Ancora, un secondo punto si muove di moto oscillatorio su un segmento orizzontale di lunghezza  $L$  fissata con centro nel punto d'impatto al suolo del grave e si chiede quale sia l'accelerazione massima, sapendo che passa consecutivamente per un medesimo punto estremo del segmento sia quando il grave inizia la caduta, sia quando impatta al suolo. Si noterà che nel proporre il testo, ci sono informazioni da interpretare: la traiettoria è *orizzontale*, il punto nel moto rettilineo uniforme deve *precedere* l'impatto al suolo, il punto nel moto oscillatorio passa per un estremo del segmento *consecutivamente* ecc.

A questo punto, è forse chiaro il suggerimento che qui si propone per impossessarsi della tecnica di risoluzione: occorre che lo stesso studente si eserciti a pensare a nuovi esercizi costruiti su un nucleo semplice: in questo modo sarà obbligato a cercare le soluzioni prima ancora della definizione del problema ed entrerà nel meccanismo di costruzione dell'esercizio. Si provi per es. con quello di cinematica sopra proposto, ampliando la casistica quanto più possibile e poi, passando ai pochi successivi casi che esamineremo, si faccia lo stesso su nuclei fenomenologici diversi. Noi presenteremo in successione qualche altro caso, di dinamica, di termodinamica, di fluidi, di elettrostatica e di elettrodinamica, ma starà sempre nella buona volontà del discente la chiave del successo: si diceva più sopra che le lingue s'imparano praticandole, non differentemente, si impara a risolvere gli esercizi provando a farli. I suggerimenti di questo capitolo valgono a migliorare l'efficienza dell'apprendimento e a non fare percorsi inutili e dispendiosi.

## 1.3 Dinamica del punto

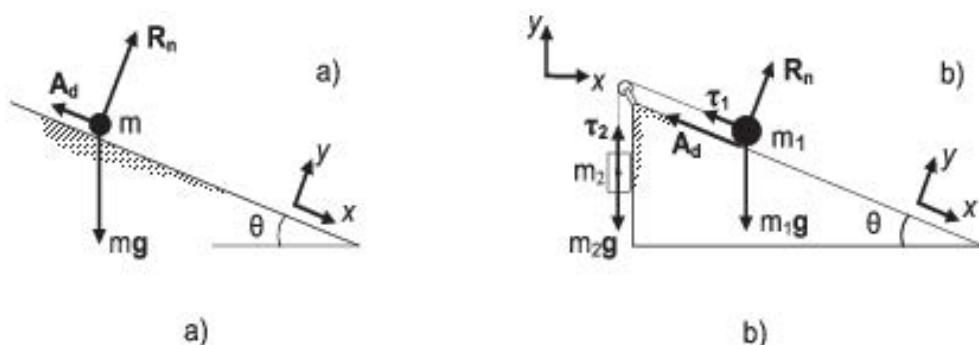
### 1.3.1 Moto di punti su un piano inclinato

Consideriamo dapprima un caso semplice come un blocco di massa  $m$  che si muova lungo un piano scabro inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto alla direzione orizzontale e in presenza di attrito (Fig. 1.2a): qualora l'esercizio richieda la determinazione di grandezze fisiche che non compaiono nelle espressioni integrate dell'energia, quali ad esempio, il tempo, l'accelerazione, le forze che non compiono lavoro (reazione normale del piano) ecc., è necessario applicare direttamente le leggi della dinamica dalle quali si possono ricavare le leggi del moto, cioè le equazioni orarie dei vettori accelerazione, velocità e spostamento. È essenziale, quindi, individuare tutte le forze che agiscono su ciascuna massa  $m$  e, a tal fine, può risultare utile il metodo grafico detto dei "diagrammi delle forze di Newton": esso consiste semplicemente nel disegnare un modello schematico ed essenziale della situazione fisica dell'esercizio avendo cura di considerare e disegnare tramite frecce tutti i vettori forza che agiscono su ciascun corpo dotato di massa non trascurabile.

Nel caso in esame vi è la presenza del campo di forze uniforme della gravità diretto lungo la verticale verso il basso. Il suo effetto, sul corpo di massa  $m$ , si può rappresentare graficamente con un vettore applicato nel suo centro di massa e diretto

in direzione verticale verso il basso: la forza peso,  $mg$ . Se questa fosse l'unica forza agente sul corpo allora dalla legge vettoriale  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , il corpo accelererebbe nella direzione della forza, cosa resa impossibile dalla presenza del piano inclinato che funge da vincolo. La sua funzione di vincolo ideale consiste nel fornire una forza in direzione normale (componente normale della reazione vincolare  $R_n$ ) al piano in maniera tale da rendere nulla l'accelerazione in quella direzione; l'essere ideale inoltre vuol dire escluderlo dalla componente dinamica dell'equazione, cioè si può considerare di massa infinita e quindi inamovibile. Il vettore corrispondente alla reazione normale potrà essere indicato nel diagramma da una freccia applicata in un punto di contatto tra il corpo e il piano inclinato e ortogonale a quest'ultimo, diretta verso l'esterno.

Poiché il piano inclinato è scabro, esiste un'ulteriore forza da considerare, la forza di attrito dinamico  $A_d$  il cui modulo è proporzionale al modulo della reazione normale ( $A_d = \mu_d R_n$ , essendo  $\mu_d$  il coefficiente di attrito dinamico), la direzione è tangente alla traiettoria e il verso è opposto a quello dello spostamento. La freccia rappresentativa si può allora disegnare applicata al corpo in un punto di contatto, parallela al piano inclinato e con verso arbitrario: l'arbitrarietà del verso consiste nel fatto che non possiamo dire sin da subito in quale verso si muova il punto o, in situazioni più complicate e meno intuitive di questa, come nell'esempio del paragrafo successivo dei due corpi che partano da fermi collegati tramite una fune e una carruccola, non è facile indicare il verso dello spostamento del corpo che scorre sul piano inclinato, che sarà individuato solamente inserendo i valori noti delle grandezze fisiche nella formula risolutiva. Una volta inseriti i valori, se il valore numerico della



**Fig. 1.2.** a) Un corpo su un piano inclinato scabro è sottoposto a forze con risultante diretta parallelamente al piano. b) Un corpo su di un piano inclinato scabro è collegato tramite una fune ideale a un secondo corpo che si muove in direzione verticale

forza di attrito risulterà positivo vuol dire che il suo verso è effettivamente coincidente con quello scelto arbitrariamente impostando il problema, se sarà negativo vuol dire semplicemente che il verso effettivo sarà opposto a quello scelto. Nel nostro caso si può intuitivamente comprendere che se il corpo parte da fermo, esso scivolerà verso il basso per cui il verso della forza di attrito sarà senz'altro rivolto verso l'alto.

Individuate graficamente le forze che agiscono sul corpo di massa  $m$  si esprime, in forma matematica, la seconda legge della dinamica dove a primo membro compare la risultante vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo:

$$mg + \mathbf{R}_n + \mathbf{A}_d = m\mathbf{a}.$$

Questa equazione vettoriale corrisponde a una, due o tre equazioni scalari a seconda che le forze agenti abbiano direzioni comprese tutte su una linea, su un piano o nello spazio. In questo esercizio esse giacciono tutte sul piano verticale per cui l'equazione della dinamica dovrà essere proiettata in due direzioni ortogonali tra loro giacenti sul piano verticale (assi cartesiani). L'orientamento di questi assi è arbitrario. Ad esempio si può orientare l'asse  $x$  nella direzione del piano inclinato verso il basso (direzione del moto) e l'asse  $y$  ortogonale orientato verso l'alto; le due equazioni proiettate saranno allora, rispettivamente:

$$\begin{aligned} + mg \sin \vartheta - A_d &= ma_x \\ - mg \cos \vartheta + R_n &= 0, \end{aligned}$$

alle quali va aggiunta quella che definisce il modulo della forza di attrito dinamico  $A_d = \mu_d R_n$ . Si noti che: nella direzione  $y$  ortogonale al piano inclinato la velocità è nulla; tutte le grandezze fisiche, una volta proiettate, perdono il loro carattere vettoriale e intervengono solamente le loro componenti (scalari) e infine la massa non interviene nella dinamica (tipico della gravità). È immediato ricavare che il moto avviene lungo l'asse  $x$  ed è uniformemente accelerato con accelerazione costante di modulo totale  $a$  coincidente con la sua sola componente  $a_x$  quindi  $a = g(\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta)$ . Ricordiamo che il modulo dell'accelerazione per un grave in caduta libera è  $g$ , per un grave su un piano liscio inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale è minore ( $a = g \sin \vartheta$ ) infine la presenza dell'attrito diminuisce ulteriormente l'accelerazione sottraendo il termine  $\mu \cos \vartheta$ . Ovviamente la fisica del problema non dipende dal

sistema di riferimento scelto che, nel caso particolare, rende solo più agevole l'ottenimento del risultato finale.

Verifichiamo ora che l'orientamento degli assi è arbitrario e che si trova lo stesso risultato, ma con elaborazioni più impegnative, con gli assi orientati in maniera consueta, cioè  $x'$  lungo l'orizzontale e  $y'$  lungo la verticale: le proiezioni lungo tali assi della seconda legge della dinamica saranno allora rispettivamente:

$$\begin{aligned}x' &: R_n \sin \vartheta - A_d \cos \vartheta = m a_{x'} \\y' &: R_n \cos \vartheta + A_d \sin \vartheta - mg = m a_{y'}\end{aligned}$$

con  $A_d = \mu_d R_n$  attrito dinamico, a cui bisogna aggiungere  $R_n = mg \cos \vartheta$  che rappresenta la natura non arbitraria della reazione vincolare ma altresì uguale in modulo e di verso opposto alle componenti delle forze che cercano di violare il vincolo. Si ha perciò

$$\begin{aligned}a_{x'} &= g \sin \vartheta \cos \vartheta - \mu_d g \cos^2 \vartheta \\a_{y'} &= -g \sin^2 \vartheta + \mu_d g \sin \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Quadrando, sommando e fattorizzando si trova:

$$a_{x'}^2 + a_{y'}^2 = g^2 \sin^2 \vartheta + \mu_d^2 g^2 \cos^2 \vartheta - 2\mu_d g^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

per cui il modulo dell'accelerazione è  $a = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2} = g \sin \vartheta - \mu_d g \cos \vartheta$  e l'angolo del vettore accelerazione rispetto all'orizzontale è

$$\varphi = -\arctan \left( \frac{-g \sin^2 \vartheta + \mu_d g \sin \vartheta \cos \vartheta}{g \sin \vartheta \cos \vartheta - \mu_d g \cos^2 \vartheta} \right).$$

Indicando l'espressione tra parentesi come  $(a+b)/(c+d)$  si nota che i rapporti  $a/c = b/d = -\tan \vartheta$  sono uguali, quindi l'espressione tra parentesi diventa  $(-\tan \vartheta - d \tan \vartheta)/(c+d) = -\tan \vartheta$  per cui l'angolo è  $\varphi = -\arctan(-\tan \vartheta) = \vartheta$  cioè coincide con la direzione del piano inclinato.

In questo esempio si è visto che il risultato cercato, nel caso particolare la determinazione del vettore accelerazione, è indipendente dal sistema di riferimento scelto, ma che altresì ci sono sistemi di riferimento per lo specifico problema in esame, per

i quali i conti necessari sono di gran lunga più immediati e semplici rispetto ad altre possibili scelte.

Sullo stesso piano inclinato, si può ampliare l'esercizio unendo la massa  $m_1$  disposta sul piano inclinato con una massa  $m_2$  posizionata sulla verticale, tramite una fune e una carrucola (Fig. 1.2b a pagina 135). Sulla fune e la carrucola si possono fare diverse ipotesi, per il momento le consideriamo entrambe di massa trascurabile e la fune anche inestensibile. La seconda equazione della dinamica si applica ai corpi dotati di massa: avremo quindi due equazioni, dove l'effetto della fune in tensione sarà quello di esercitare, in generale, una forza, detta appunto *tensione*, su ciascuna massa ( $\tau_1$  e  $\tau_2$ ) mentre la carrucola, se di massa trascurabile, fa solo deviare la linea di azione della tensione del filo.

Proviamo a determinare le accelerazioni e le tensioni.

$$mg + \mathbf{R}_n + \mathbf{A}_d + \tau_1 = m\mathbf{a}_1$$

$$mg + \tau_2 = m\mathbf{a}_2.$$

Utilizziamo per le proiezioni due sistemi di riferimento differenti, per la massa 1 un sistema che ha l'asse  $x$  lungo il piano inclinato, per la massa 2 un sistema che ha l'asse  $x$  orizzontale. Per entrambi l'asse ortogonale  $y$  punta verso l'alto. Questa scelta semplifica i conti e non crea problemi poiché le incognite da determinare non saranno le componenti dell'accelerazione e della tensione (dipendenti come si sa dai sistemi di riferimento scelti) ma piuttosto i loro moduli (indipendenti dal sistema di riferimento). Proiettando si avranno allora 2 equazioni per la massa 1 e una sola equazione (le forze hanno tutte la stessa direzione verticale) per la massa 2

$$\left\{ \begin{array}{l} +m_1g \sin \vartheta - A_d - \tau_1 = m_1a_1 \\ -m_1g \cos \vartheta + R_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\tau_2 - m_2g = m_2a_2.$$

Nello scrivere queste equazioni però i due corpi sono stati trattati in maniera indipendente, adesso bisogna inserire le condizioni del problema. La condizione di non estensibilità della fune assicura che i due corpi abbiano la stessa accelerazione. Inoltre, nelle equazioni, avendo scritto arbitrariamente la forza di attrito dinamico con il segno negativo (verso l'alto del piano inclinato) abbiamo, di conseguenza, supposto

che il moto avvenga verso il basso per la massa 1 e verso l'alto della verticale per la massa 2 per cui le accelerazioni sono state indicate con il segno positivo, cioè concordi con i versi positivi già fissati dei rispettivi sistemi di riferimento. Una scelta di movimento in direzione opposta, con tutti e due i segni negativi e con il segno positivo della forza di attrito sarebbe stata altrettanto lecita: solamente l'inserimento dei valori numerici può discriminare quale sia il verso corretto del movimento. Nel dettaglio, se il valore numerico finale dell'accelerazione si trova positivo vuol dire che la scelta fatta nelle equazioni è quella corretta, in caso di valore negativo vuole dire, semplicemente, che il verso è opposto a quello ipotizzato.

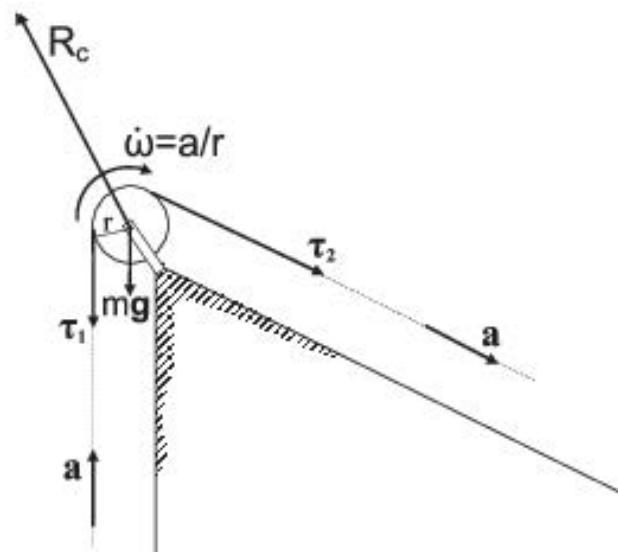
La condizione che la carrucola e la fune siano di massa trascurabile invece, implica che le due tensioni in realtà sono uguali:  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . È facile dimostrare ciò considerando la fune la quale, collegando le due masse, si muove con la stessa loro accelerazione  $a$ : per il terzo principio della dinamica se la fune esercita, sulle due masse ai suoi capi, le tensioni proiettate  $+\tau_2$  e  $-\tau_1$ , sulla fune, dotata di massa  $m_f$ , si esercitano due tensioni  $-\tau_2$  e  $+\tau_1$  per cui la sua equazione dinamica diventa:  $\tau_1 - \tau_2 = m_f a$ . Questa equazione sarebbe da aggiungere a quelle delle due masse ma, dal momento che nel caso in esame  $m_f = 0$  allora ne consegue che  $\tau_1 - \tau_2 = 0$  cioè  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ .

Allo stesso modo, introducendo però i momenti delle forze, si dimostra che anche la carrucola di massa trascurabile non interviene nella dinamica e lascia che le due tensioni rimangano uguali. Con queste considerazioni, le equazioni si riscrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l} +m_1 g \sin \vartheta - A_d - \tau = m_1 a \\ -m_1 g \cos \vartheta + R_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\tau - m_2 g = m_2 a,$$

alle quali si aggiunge la usuale  $A_d = \mu R_n$ . Si hanno quindi 4 equazioni nelle 4 incognite  $a, \tau, R_n, A_d$



**Fig. 1.3.** Diagramma delle forze applicate sulla carrucola

e il sistema è determinato (è evidente che il problema potrebbe fornire altri dati e richiedere fino a 4 diverse incognite); risolvendo il sistema si trova:

$$\begin{aligned}R_n &= m_1 g \cos \vartheta \\A_d &= \mu m_1 g \cos \vartheta \\a &= \frac{m_1 g \sin \vartheta - \mu m_1 g \cos \vartheta - m_2 g}{m_1 + m_2} \\ \tau &= m_2(a + g).\end{aligned}$$

Quando si giunge a un'espressione finale per la grandezza fisica cercata può essere conveniente, come verifica, analizzare le parti dell'espressione e cercare la loro giustificazione secondo i principi fisici noti. Ad esempio, l'espressione per l'accelerazione  $a$  è giustamente formata dalle forze che agiscono sul sistema costituito delle due masse divise per la massa totale del sistema. Per quanto riguarda le forze al numeratore (ricordando che abbiamo fissato come positivo il verso di discesa della massa 1 e di salita della massa 2) si nota la componente della forza peso della massa 1 che contribuisce positivamente all'accelerazione ( $m_1 g \sin \vartheta$ ) mentre il movimento è "frenato" dall'attrito che agisce sulla massa 1 ( $\mu m_1 g \cos \vartheta$ ) e dall'intero peso della massa 2 ( $m_2 g$ ). La tensione, a sua volta, deve contrastare la forza peso ( $m_2 g$ ) e fornire l'accelerazione ( $m_2 a$ ) della massa 2. Se ora si suppone che la massa  $M$  della carrucola (di raggio  $R$ ) non sia trascurabile, occorre considerare la dinamica di tale elemento nell'analisi del problema. Se viene considerata una carrucola libera di ruotare, senza attrito, attorno al suo asse passante per il centro, si dovrà usare la seconda equazione cardinale della meccanica che interviene nelle rotazioni. Una tipica ipotesi semplificativa è che la fune non slitti rispetto alla carrucola, ciò vuol dire che, poiché la fune ha l'accelerazione  $a$  del sistema, la stessa accelerazione deve essere posseduta dal bordo della carrucola a contatto con la fune e posto a distanza  $R$  dal suo centro. Dalla cinematica sappiamo allora che la carrucola deve possedere un'accelerazione angolare di modulo  $\gamma = d\omega/dt = a/R$ . La seconda equazione cardinale ci dice che tale accelerazione angolare può essere fornita solamente da un momento delle forze netto non nullo agente sulla carrucola. Si deve allora tracciare il diagramma delle forze agenti sulla carrucola: alcune forze hanno momento assiale nullo rispetto al centro di rotazione e sono il peso della carrucola ( $Mg$ ) e la reazione vincolare ( $R_c$ ) mentre le restanti forze hanno momento assiale non nullo e sono le

tensioni fornite per il principio di azione e reazione dalla fune alla carrucola. Necesariamente, ricordando il verso antiorario positivo delle rotazioni e il segno derivante dal prodotto vettoriale dei momenti, le due tensioni devono essere diverse affinché si abbia un momento risultante totale non nullo. Quindi l'equazione che descrive il moto della carrucola sarà:

$$\mathbf{M}_{\tau_1} + \mathbf{M}_{\tau_2} = I_c \gamma$$

la cui componente assiale è:

$$M_{\tau_2} - M_{\tau_1} = -I_c \gamma,$$

essendo  $I_c$  il momento d'inerzia della carrucola (per un disco omogeneo pieno  $I_c = 1/2MR^2$ ),  $M_{\tau_1} = RT_1$  e  $M_{\tau_2} = RT_2$  dal momento che le due tensioni sono considerate applicate a distanza  $R$  dal centro della carrucola e tangenti al suo bordo, cioè ortogonali a  $R$ . Il segno meno per  $\gamma$  indica che secondo l'arbitraria imposizione iniziale la massa 1 sta scendendo e la 2 sta salendo, quindi la carrucola si muove in senso orario.

Ricapitolando, l'intervento della dinamica da parte della carrucola aggiunge due incognite (due tensioni al posto di un'unica tensione e l'accelerazione angolare  $\gamma$ ), ma anche due equazioni, la seconda equazione cardinale applicata alla carrucola e la relazione tra accelerazioni, angolare  $\gamma$  e lineare  $a$ , quindi il sistema di equazioni ha ancora soluzione:

$$\text{moto massa 1 lungo } x: +m_1 g \sin \vartheta - A_d - \tau_1 = m_1 a$$

$$\text{moto massa 1 lungo } y: -m_1 g \cos \vartheta + R_n = 0$$

$$\text{moto massa 2 lungo } y: \tau_2 - m_2 g = m_2 a$$

$$\text{attrito dinamico: } A_d = \mu R_n$$

$$\text{moto della carrucola: } R(\tau_1 - \tau_2) = I_c \gamma$$

$$\text{non slittamento della fune: } \gamma = \frac{a}{R}.$$

Le sei possibili incognite sono  $a, \tau_1, \tau_2, R_n, A_d$  e  $\gamma$ ; in particolare si trova:

$$a = \frac{m_1 g \sin \vartheta - \mu m_1 g \cos \vartheta - m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{I_c}{R^2}}.$$

Se si confronta questa espressione con quella dell'accelerazione nel caso di carrucola di massa trascurabile, si vede che l'effetto della carrucola è quello di aumentare l'inerzia dell'intero sistema in ragione del termine  $I_c/R^2$  che può essere visto come una massa (inerzia di traslazione) efficiente della carrucola.

La tensione  $\tau_2 = m_2(a + g)$  deve reagire al peso della massa 2 e fornire la sua accelerazione mentre la tensione  $\tau_1 = \tau_2 + I_c\gamma/R^2$  non è più uguale, ma è maggiore di  $\tau_2$  di un termine che fornisce l'accelerazione angolare alla carrucola.

Seguendo le richieste del problema, sono state utilizzate la seconda equazione della meccanica per la carrucola e la prima equazione della meccanica per le masse, tuttavia anche le restanti equazioni sono applicabili e forniscono altre informazioni.

Poichè la carrucola è vincolata a ruotare attorno a un asse passante per il baricentro, quest'ultimo non si muove e non interviene nella dinamica, per questo motivo la prima equazione della dinamica dei sistemi di punti non è stata utilizzata nel problema; essa è comunque applicabile e fornisce informazioni riguardo la statica del baricentro della carrucola. L'incognita reazione vincolare per la carrucola,  $\mathbf{R}_c$ , può essere allora determinata dovendo essa equilibrare le altre forze:

$$\mathbf{R}_c + Mg + \tau_1 + \tau_2 = 0.$$

Tutte le forze giacciono su un medesimo piano, pertanto esse possono essere proiettate su due assi cartesiani, diciamo  $x$  orizzontale e positivo verso destra e  $y$  verticale e positivo verso l'alto. La reazione vincolare è incognita a priori per cui si possono scrivere le sue componenti tutte e due con segno arbitrario, per esempio positivo: al solito la soluzione completa determinerà il segno esatto delle componenti.

$$R_c^x + \tau_1 \cos \vartheta = 0$$

$$R_c^y - \tau_1 \sin \vartheta - \tau_2 - Mg = 0.$$

Da ciò si vede che la componente  $R_c^x$  sarà negativa mentre  $R_c^y$  sarà positiva, il vettore sarà quindi orientato nel primo quadrante in alto a sinistra, di modulo  $R_c = \sqrt{R_c^{x^2} + R_c^{y^2}}$  e angolo  $\psi = \arctan(|R_c^y|/|R_c^x|)$  rispetto all'orizzontale.

Per la massa 2, effettivamente, le forze che agiscono ( $m_2g$  e  $\tau_2$ ) hanno momento nullo rispetto al baricentro per cui la seconda equazione si riduce a una identità ( $0 = 0$ ) e non fornisce ulteriori informazioni. Per la massa 1 le cose si presentano in

maniera differente. Supponiamo che essa sia costituita da un blocco omogeneo rettangolare di altezza  $b$ , allora la forza di attrito dinamico possiede un momento rispetto al baricentro del blocco la cui proiezione lungo l'asse  $z$  è  $-(b/2)A_d$ . E' evidente che, affinché il corpo scorra lungo il piano ma non ruoti, come ipotizzato dal problema, deve esistere qualche altra forza che fornisca un momento della forza rispetto al baricentro tale da opporsi a quello dell'attrito. La forza peso  $m_1g$  può essere considerata applicata sul baricentro per cui ha momento nullo; la tensione  $\tau_1$  ha la direzione della fune applicata alla massa, a questo punto bisognerebbe che il problema specifichi la posizione del punto di contatto tra la fune e la massa, se ipotizziamo che la fune sia in linea con il baricentro della massa allora il momento della tensione è nullo anch'esso. Rimane da considerare la reazione vincolare del piano,  $\mathbf{R}_n$ , la quale si distribuirà lungo la superficie di appoggio in maniera tale da equilibrare, con il suo momento, il momento dell'attrito dinamico.

### 1.3.2 Energia potenziale di una molla

Si supponga, ora, che un punto di data massa  $m$  sia poggiato su un piano orizzontale e tenuto in modo da comprimere di un tratto  $L$  una molla di costante elastica  $k$ . Viene da sé che la domanda si riferirà al rilascio della molla, che conferirà al punto una determinata velocità  $v$ , e la prima che sorge è proprio "quale sarà questa velocità". La risposta è facile: l'applicazione del teorema delle forze vive o dell'energia mette in rapporto il lavoro compiuto dalle forze – quindi l'energia potenziale accumulata dalla molla nella compressione – con la variazione di energia cinetica e l'equazione risolutiva per la velocità diviene

$$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Costruiamo ora sullo scheletro iniziale dell'esercizio le possibili varianti, cominciando col chiederci cosa accadrà del punto dopo il rilascio dalla molla. L'energia cinetica acquisita si manterrà se non viene dissipata in qualche modo; quindi, diviene fondamentale orientarci sugli effetti del piano orizzontale su cui è poggiato il punto: se esso è liscio, privo di attrito, il punto conserverà indefinitamente l'energia cinetica e quindi la velocità acquisita, se è scabro con coefficiente di attrito dinamico  $\mu$ , l'energia cinetica sarà dissipata nel calore di frizione. Quale percorso  $s$  potrà compiere il punto o, reciprocamente, se compie un percorso  $s$ , quale sarà il coefficiente di at-

trito dinamico? Il lavoro negativo compiuto dalla forza di attrito, pari al percorso per la forza, essendo questa a sua volta pari al peso per il coefficiente di attrito, farà decrescere l'energia fino all'annullamento:

$$\mu mgs = \frac{1}{2}mv^2.$$

Supponiamo, invece, che il piano sia liscio, ma non orizzontale sì bene inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto a questa e che il punto debba percorrerlo in salita: quale tragitto massimo potrà compiere? Anche in questo caso, l'energia cinetica acquisita verrà via via ridotta dalla componente della forza peso nella direzione del piano ( $mg \sin \alpha$ ) che compirà un lavoro negativo, fino alla riduzione in quiete del punto

$$mg \sin \alpha s = \frac{1}{2}mv^2.$$

In questo caso, tuttavia, essendo il peso una forza conservativa, l'energia cinetica non viene dissipata ma resta meccanica e il punto – giunto alla quiete alla quota massima del moto – tornerà a scendere lungo il tragitto già percorso. Naturalmente, potremmo pensare che il piano non sia orizzontale, né liscio: una parte dell'energia cinetica si dissiperà per attrito e una parte resterà meccanica. Otterremo il percorso compiuto *s* tenendo conto di entrambi i lavori negativi intervenuti, mutando opportunamente l'espressione della forza di attrito per la presenza dell'angolo di inclinazione:

$$(\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha)s = \frac{1}{2}mv^2.$$

Come si vede e come è comune nei vari casi in cui le forze sono tutte proporzionali al peso, la massa del punto non apparirà nelle soluzioni relative al percorso compiuto, al coefficiente di attrito ecc.

Anche su questo problema potremmo intervenire aggiungendo la presenza di un secondo punto o una seconda molla (un secondo sistema, sostanzialmente, o se si vuole un secondo esercizio). Per es. il punto, dopo il rilascio urta un secondo punto e si chiedono dati relativi a grandezze successive all'urto. Naturalmente, l'integrazione del primitivo esercizio con questo secondo consiste solo nell'aggiunta di un ulteriore problema d'urto, per il quale le condizioni iniziali sono quelle di uscita del primo esercizio, sempre ammesso che questo si riferisca al caso del piano liscio orizzontale. Si potrebbe, invece, più intelligentemente pensare di combinare il problema dell'ur-

to con quello della presenza dell'attrito: le condizioni di velocità del primo punto all'impatto dipenderanno in tal caso anche dalla distanza  $D$  alla quale è posto il secondo punto dal punto di rilascio della molla; la velocità residuale  $v_{in}$  al momento dell'impatto sarà ricavabile da

$$\frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \mu mgD.$$

Dove giungerà il secondo punto di massa  $m'$ ? È possibile che la distanza  $D$  sia maggiore di  $s$ ? Se no, per quali valori della distanza  $D$  o del coefficiente d'attrito  $\mu$  o della massa  $m'$  del secondo punto il percorso del secondo punto sarà maggiore di  $s$ ?

Se, invece, sul piano liscio e orizzontale, il punto lanciato dalla molla incontra una seconda molla di costante  $k'$ , di quanto potrà comprimerla? E se il piano è inclinato? (Occorrerà specificare, in questo caso, la distanza percorsa dal punto prima dell'impatto con la seconda molla e si faccia anche attenzione che il tratto di compressione della molla va computato nel tratto in cui è attivo il lavoro negativo della forza peso).

## 1.4 Dinamica del corpo rigido

Come esempio di studio della dinamica del corpo rigido, si consideri un'asta omogenea di data massa  $m$  e lunghezza  $L$  tenuta in posizione verticale su un piano orizzontale liscio e quindi lasciata libera di cadere su azione di una sollecitazione infinitesima.

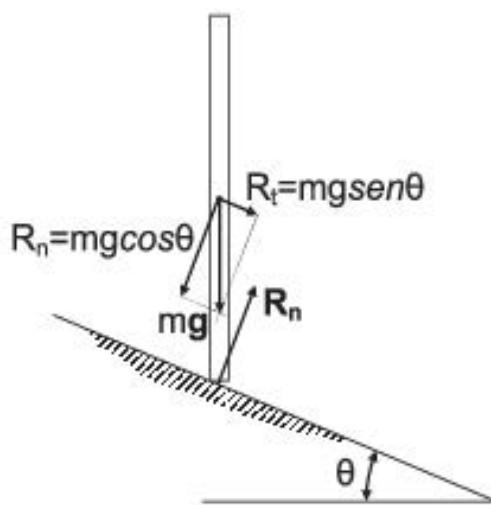
Sappiamo che la posizione verticale è di equilibrio instabile e che, pertanto, una sia pur piccola perturbazione provoca la caduta dell'asta; ci chiediamo, inizialmente, quale sarà il moto dell'asta all'impatto col piano. Poiché il piano è liscio, la forza di reazione del vincolo è priva di attrito e pertanto ha la sola componente verticale, che non compie lavoro nello spostare il proprio punto di applicazione, che è il punto di contatto tra l'estremo inferiore dell'asta e il piano. Il centro di massa dell'asta non potrà quindi acquisire nessuna componente orizzontale della velocità e cadrà secondo la verticale, mentre il lavoro delle forze esterne sarà compiuto unicamente dalla forza peso e muterà l'energia complessiva dell'asta, pari a quella di traslazione più quella di rotazione:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Le due incognite nell'equazione, la velocità traslazionale  $v_c$  del centro di massa e la velocità angolare  $\omega$  attorno al centro di massa, sono solo apparentemente distinte, in quanto, se si pensasse di muoversi solidarmente col centro di massa con la velocità  $v_c$ , si vedrebbe l'estremo a contatto col piano ruotare con velocità angolare  $\omega$  attorno al centro di massa. L'equazione scritta, quindi, ha un'unica incognita, che fornisce la soluzione del problema.

Naturalmente, si può implementare il problema, pensando di sostituire all'asta di momento d'inerzia  $I$  una struttura più complessa (un'asta non omogenea, un disco somma di due semidischi di materiali diversi ecc.), di cui dovremo calcolare il nuovo momento d'inerzia ecc. Un esempio piuttosto interessante è costituito da un semicilindro o una semisfera rigida appoggiati sul piano con la sezione non parallela a questo. Il centro di massa del corpo si trova in tal modo fuori dalla verticale per il punto di appoggio e la forza peso applicata in quello ha un momento rispetto a questo punto, così da produrre il moto. L'assenza di attrito è in tal caso poco realistica, però, se l'ipotesi può essere assunta, il problema si riduce a quello appena esaminato: il sistema 'cade' mantenendo il centro di massa sulla propria verticale e l'applicazione del teorema dell'energia permette di determinare i valori della velocità angolare per ogni valore della quota del centro di massa, quindi per ogni posizione del corpo.

Come si vede, per la soluzione dell'esercizio, come nel caso del punto materiale, abbiamo ancora fatto uso del teorema dell'energia, opportunamente mutato per un corpo esteso, rigido; non abbiamo cioè risolto il problema istante per istante del moto, non abbiamo – come si dice – integrato le equazioni del moto: il teorema dell'energia, come gli analoghi dell'impulso e della quantità di moto o della loro controparte angolare, del momento dell'impulso e della quantità di moto, pone in relazione le grandezze in due determinati istanti del moto, correlando i valori della fine a quelli dell'inizio attraverso l'azione delle forze intervenute tra i due istanti (lavoro o impulso). Ci chiediamo ora se l'esercizio precedente si potrebbe risolvere nel caso in cui il



**Fig. 1.4.** Sbarretta posta verticalmente su un piano inclinato privo di attrito

piano non fosse liscio o non fosse orizzontale. Le due ipotesi sono sostanzialmente differenti e cominceremo con il considerare il primo caso: un'asta in posizione verticale viene lasciata libera su un piano orizzontale, scabro, con coefficiente di attrito  $\mu$ .

In tal caso, il punto di appoggio rimarrebbe fisso sino a che la componente della forza di reazione parallela al piano non superi la frazione  $\mu$  della componente normale; sino a quell'istante l'energia cinetica di rotazione dell'asta (unica energia presente, se si computa quella di rotazione attorno al punto fermo di appoggio e non attorno a centro di massa) è pari alla perdita di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}I\omega(\vartheta)^2 = mg\frac{L}{2}(1 - \cos\vartheta).$$

Per determinare l'angolo  $\vartheta = \Theta$  per cui è soddisfatta la disuguaglianza della condizione di attrito, occorre conoscere per intero la reazione del vincolo; questa, infatti, insieme al peso dell'asta, costituisce la forza risultante che muove il centro di massa: poiché il peso  $mg$  è noto, il problema sarebbe risolto se conoscessimo l'accelerazione  $a_c$  del centro di massa, poiché per differenza otterremmo la reazione  $\bar{R} = -mg - ma_c$ . Purtroppo, la conoscenza dell'accelerazione  $a_c$  è subordinata alla conoscenza del moto e, quindi, si torna a dovere risolvere l'equazione differenziale del moto. Per esempio, per determinare la componente tangenziale  $R_t$ , potremmo applicare il teorema del momento della forza e della quantità di moto; infatti, per esso si potrà scrivere che l'impulso del momento della forza (rispetto al punto d'appoggio), è pari alla variazione del momento della quantità di moto:

$$\int_0^\vartheta \frac{L}{2}R_t dt = I\omega.$$

La velocità angolare, attraverso l'equazione dell'energia, è nota per ogni posizione e quindi anche per quella del distacco  $\Theta$ , ma il valore che ci interessa di  $R_t$  in quella posizione non è separabile dal valore in ogni altra posizione, come si vede dalla presenza dell'integrale.

Il problema non è risolubile se non integrando le equazioni differenziali del moto. L'esercizio, quindi, non è risolubile in termini finiti; la vera natura dell'equazione differenziale risulta dal fatto che in ogni istante la reazione del vincolo – che è una forza determinante il moto – è essa stessa dipendente dal moto e, quindi, non la si

può separare o trascurare. La reazione, infatti, dipende da quanto fortemente l'asta preme contro il piano e ciò dipende dall'effettivo movimento. Non diversamente, il caso dello scivolamento di un'asta su un piano liscio inclinato rispetto all'orizzontale richiede la soluzione della relativa equazione del moto. Rispetto al caso già esaminato del piano orizzontale, al momento del rilascio il sistema non è in equilibrio, sia pure instabile, in quanto la somma delle forze è diversa da zero anche in quell'istante, poiché il vincolo non può annullare se non una componente – quella ortogonale al piano – del peso. Resterà non bilanciata la componente parallela della forza peso,  $mg \sin \vartheta$ , la quale provocherà la traslazione del centro di massa dell'asta con accelerazione iniziale  $a = g \sin \vartheta$ . Oltre a detta componente della forza, il sistema è sottoposto a una coppia di forze, di momento iniziale pari a  $L/2mg \cos \vartheta$ , che provocherà la rotazione dell'asta. Iniziato il moto, le forze muteranno e dipenderanno dal moto stesso: ciò significa che l'equazione del moto – o, in questo caso, le due equazioni della traslazione e della rotazione – non sono integrabili, cioè risolubili, in termini finiti, ma debbono essere risolte nella loro espressione differenziale.

Resta a noi da vedere se si può rispondere alla domanda dello stato del moto al momento dell'impatto dell'asta sul piano. Poiché il piano è liscio, anche in questo caso si può dire che le forze vincolari non compiono lavoro, non avendo componente nella direzione del moto, e che quindi tutta l'energia cinetica dell'asta proviene dall'abbassamento di quota del centro di massa. Ma per conoscere il dislivello compiuto dal centro di massa dall'istante del rilascio fino all'urto sul piano occorre conoscere il punto in cui avviene questo, che, di nuovo, richiede la conoscenza del moto, cioè l'integrazione delle equazioni.

Può sembrare uno sforzo inutile avere cercato di risolvere gli esercizi appena presentati e aver dovuto concludere che non possono essere risolti nei modi che sono accessibili alla matematica elementare. Tuttavia, mostrare l'impossibilità di risolvere il problema in termini finiti ci ha consentito di comprendere più nell'intimo la fenomenologia a esso connessa, in particolare il significato dei teoremi di conservazione (dell'energia e del momento della quantità di moto), costituenti degli 'integrali primi' del moto e, come tali, non utilizzabili per la soluzione del moto nella sua evoluzione temporale.

### 1.4.1 Conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto

La conservazione di queste due grandezze fisiche avviene nei sistemi isolati. Punti chiave sono quindi l'individuazione del sistema e la determinazione se sia o no effettivamente isolato. Un sistema comprende uno o più corpi materiali e la scelta di quanti corpi includere è arbitraria, se però si vuole che il sistema sia isolato è evidente che bisogna includere nel sistema tutti i corpi che hanno interazione solamente tra appartenenti allo stesso. Una volta individuato un sistema bisogna considerare l'eventuale risultante delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne: l'annularsi di queste risultanti ha come conseguenza, rispettivamente, le conservazioni della quantità di moto  $\mathbf{p}$  e del momento della quantità di moto totale del sistema  $\mathbf{b}$ .

Si consideri, come esempio, una sbarretta di lunghezza  $l$  e di massa  $M$  che giace su un piano liscio e un proiettile di massa  $m$  proveniente da una direzione giacente sul piano e ortogonale alla sbarretta con velocità  $\mathbf{v}$  che colpisce l'estremo  $A$  e si conficca dentro la sbarretta; quello che si ha è quindi un urto completamente anelastico, nel qual caso non è possibile usare la legge di conservazione dell'energia essendo sconosciuta l'energia dissipata in calore durante l'urto; d'altra parte non è necessario determinare la velocità del proiettile dopo l'urto come variabile indipendente, essendo questa oramai indissolubilmente legata al comportamento dinamico della sbarretta. Una naturale domanda che ci si può porre è: "qual è il moto della sbarretta dopo l'urto?".

Consideriamo come sistema l'insieme della sbarretta e del proiettile; va da sé che le forze esterne della gravità e della reazione del piano si annullano; di conseguenza si conserverà la quantità di moto del centro di massa del sistema e il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa: il moto della sbarretta sarà rototraslatorio e per determinarne le caratteristiche occorrerà individuare la posizione del centro di massa del sistema,  $C$ , quando il proiettile si sarà conficcato, la sua velocità dopo l'urto e la velocità angolare di rotazione attorno a un asse per  $C$  perpendicolare al piano.

Posizionando l'asse  $x$  lungo la sbarretta nella condizione di riposo e l'origine sull'estremo opposto a quello dove arriva il proiettile, il centro di massa del sistema avrà coordinata  $x_c$  pari a

$$x_c = \frac{Ml/2 + ml}{M + m}$$

invariante durante il moto, non essendoci componente  $x$  della quantità di moto. Per conservazione della quantità di moto si ha che anche dopo l'urto il centro di massa del sistema si muove con una velocità avente direzione e verso eguali a quelli di  $\mathbf{v}$  e modulo

$$v_c = \frac{mv}{M+m}.$$

Per la conservazione del momento della quantità di moto totale, bisogna determinare i momenti rispetto alla coordinata  $x_c$ , rispetto alla quale il proiettile si conficcherà a distanza  $(l - x_c)$ , mentre il momento di inerzia del sistema,  $I_c$ , rispetto a un asse per  $C$  perpendicolare al piano sarà la somma dei momenti d'inerzia della sbarra,  $I_c^s$ , rispetto al medesimo asse e del proiettile,  $I_c^p$ , rispetto a  $x_c$ :

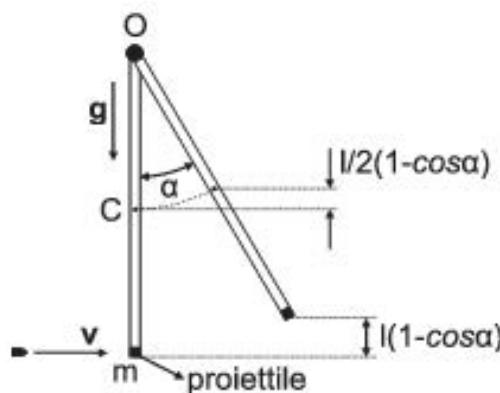
$$mv(l - x_c) = I_c \omega$$

da cui è possibile ricavare la velocità angolare  $\omega$  tenuto conto che:

$$I_c = I_c^s + I_c^p = \left( I_{c_0}^s + M(x_c - l/2)^2 \right) + m(l - x_c)^2$$

essendo  $I_{c_0}^s = ml^2/12$  il momento d'inerzia della sola sbarra rispetto al suo centro di massa originale.

Proviamo ora a determinare il moto della sbarretta nel caso in cui, ferme restando le caratteristiche dell'urto con il proiettile, essa sia vincolata a ruotare senza attrito attorno ad un suo estremo  $O$ . Diversamente dal caso precedente, al momento dell'urto del proiettile con la sbarra, interviene un'altra forza esterna che è quella della reazione vincolare in  $O$ : tale forza non è conosciuta a priori e, come natura, sarà dello stesso tipo impulsivo della forza incognita che agisce tra il proiettile e la sbarra, avrà quindi un andamento variabile in un brevissimo lasso di tempo e sarà incognita. Per questo motivo (la presenza di una forza esterna incognita) non è possibile utilizzare il teorema della conservazione della quantità di moto per il sistema proiettile-sbarra. Cosa si può dire del momento della quantità di moto? Per conservarsi deve essere



**Fig. 1.5.** Sbarretta in piano verticale, vincolata a ruotare attorno a un estremo  $O$ , urtata anelasticamente all'estremo opposto da un proiettile di massa  $m$

nullo il momento delle forze esterne riferito per esempio a un polo fisso, allora si può scegliere il polo  $O$  come polo di riferimento in cui calcolare i momenti, in tal modo, la forza esterna incognita dovuta al vincolo ha momento nullo rispetto al polo  $O$  e il momento della quantità di moto totale subito prima dell'urto sarà uguale a quello subito dopo; la relazione è vettoriale ma, in questo caso, tutti i vettori hanno la stessa direzione (perpendicolare rispetto al piano), quindi si può scrivere una relazione tra i moduli:

$$mvl = I_o\omega + mv'l$$

dove  $v'$  è la velocità del proiettile conficcato nella sbarra a distanza  $l$  da  $O$ , quindi è legata alla velocità angolare finale del sistema,  $\omega$ , dalla relazione  $v' = \omega l$  e  $I_o$  è il momento d'inerzia della sbarra rispetto al polo  $O$ . La relazione ora scritta permette di ricavare la velocità angolare con cui il sistema sbarra-massa ruota dopo l'urto:

$$\omega = \frac{mvl}{I_o + ml^2}$$

dove il termine  $I_o + ml^2$  può essere visto come il momento d'inerzia totale  $I'_o$  del sistema sbarra-massa rispetto a  $O$ . Si può fare intervenire la forza di gravità, come forza esterna, ponendo la sbarra in un piano verticale, sempre con la possibilità di ruotare – senza attrito – attorno a un asse passante per l'estremo  $O$  e normale al piano: in tal modo, supponendo che il centro di massa delle sbarretta si trovi lungo la verticale per  $O$  e al di sotto di esso, la forza di gravità sarà equilibrata dalla reazione sul vincolo  $O$ , ma il suo momento rispetto al vincolo – quando la sbarra è in una posizione qualsiasi non verticale – è esterno al sistema. Ciò vuol dire che non si potrà più applicare la conservazione del momento della quantità di moto? In realtà l'azione della gravità, in un tipico fenomeno d'urto come questo può essere trascurata rispetto all'azione delle forze interne al sistema, purché si prendano come stati iniziale e finale gli istanti che precedono e seguono immediatamente l'urto. L'intervallo temporale è estremamente breve e le forze interne di tipo impulsivo raggiungono valori molto più alti della forza di gravità che è costante in tutto l'intervallo, essendo la variazione di  $\mathbf{p}$  o di  $\mathbf{b}$  proporzionale all'integrale nel tempo delle forze o dei momenti delle forze. Comunque, in un caso del genere, a partire dall'istante successivo all'urto, avremo il sistema sbarra-massa soggetto al campo di gravità (conservativo) per cui, ad esempio ci si potrebbe chiedere quale sia l'angolo massimo  $\alpha_m$  che il sistema raggiunge. La

legge di conservazione del momento della quantità di moto fornisce allora il valore di  $\omega$  a fine urto che può essere considerato come dato iniziale del successivo moto nel campo di gravità per il quale è applicabile la legge di conservazione dell'energia meccanica. Al sistema sbarra-massa spetterà allora un'energia cinetica iniziale  $1/2I'_o\omega^2$ , mentre la variazione di energia potenziale totale sarà dovuta alla differenza di quota che sia il baricentro della sbarra sia la massa avranno tra gli stati in cui la sbarra è in posizione verticale iniziale e in posizione con angolo massimo  $\alpha_m$ :

$$\Delta U_{\text{sbarra}} = Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha_m) \quad \text{e} \quad \Delta U_{\text{massa}} = mgl(1 - \cos \alpha_m).$$

Dalla conservazione dell'energia:  $\Delta U_{\text{sbarra}} + \Delta U_{\text{massa}} + (0 - 1/2I'_o\omega^2) = 0$ , si ricaverà

$$\alpha_m = \arccos \left[ 1 - \frac{I'_o \omega^2}{2 \left( \frac{M}{2} + m \right) gl} \right]. \quad (1.1)$$

Ricapitolando, si è usata la legge di conservazione di  $\mathbf{b}$  per ricavare la velocità angolare  $\omega$  del sistema subito dopo l'urto e la legge di conservazione dell'energia per ricavare l'angolo massimo di deflessione. Le leggi di conservazione permettono di mettere in relazione le grandezze fisiche tra un istante scelto come iniziale e uno finale, essendo ricavate dall'integrazione delle equazioni del moto. Se si vuole invece conoscere lo stato del moto istante per istante è necessario considerare le equazioni del moto stesse per i sistemi. Nel caso che si sta esaminando, il moto consiste in una pura rotazione di un corpo rigido, si considera, pertanto, la seconda equazione cardinale dei momenti rispetto al polo fisso  $O$ ; poiché i momenti della forza peso della sbarretta e del proiettile sono entrambi diretti come l'asse di rotazione, si avrà:

$$-Mg \frac{l}{2} \sin \alpha - mgl \sin \alpha = I'_o \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Per piccoli valori di  $\alpha_m$  si può usare l'approssimazione delle piccole oscillazioni ( $\sin \alpha \simeq \alpha$ ), giungendo così all'equazione del moto armonico

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{(M/2 + m)gl}{I'_o} \alpha = 0;$$

il sistema, pertanto, oscilla armonicamente attorno alla posizione di equilibrio ( $\alpha =$

0), con  $\alpha(t) = \alpha_m \cos \Omega t$ , con pulsazione  $\Omega = \sqrt{\frac{(M/2 + m)gl}{I'_o}}$ . Il modulo della velocità angolare massima sarà allora  $\omega_{max} = \alpha\Omega$  che deve coincidere con la velocità angolare iniziale dopo l'urto non essendoci dissipazione di energia; difatti scrivendo  $\cos \alpha_m \approx 1 - \alpha_m^2/2$ , dall'eq. (1.1) si trova:

$$\alpha_m^2 = \frac{m^2 v^2 l}{I'_o (M/2 + m) g}$$

che è pari, appunto,  $\omega^2/\Omega^2$ .

## 1.5 Statica dei fluidi

La presenza della pressione idrostatica all'interno di un fluido in quiete fa sì che su ogni porzione della superficie di un corpo presente all'interno del fluido, o, come si dice, immerso in esso, si eserciti una forza, risultante di tutte le forze elementari agenti su ogni frazione differenziale dell'area considerata. In particolare, sull'intera superficie di un corpo finito immerso in un fluido si eserciterà una forza complessiva, che non dipende dalla posizione del corpo nel liquido, ma solo dal suo volume: essa è la così detta spinta di Archimede. A tale forza è soggetta anche ogni porzione del fluido, pensata come isolata dal contesto del fluido circostante e, poiché in questo caso la porzione di fluido è in quiete all'interno del fluido complessivo ed essa è d'altra parte soggetta al proprio peso, ciò vuol dire che la risultante delle forze di superficie – cioè la spinta di Archimede – dev'essere eguale e contraria al peso della parte di fluido che si considera. Se la parte di fluido è sostituita da un corpo solido, il peso sarà diverso dal caso della porzione di fluido, ma la spinta sarà la medesima.

Con tale premessa sulla spinta di Archimede, appliciamoci a considerare come semplice esercizio il caso di un corpo che, immerso in un liquido – per es. nelle acque del mar Morto – galleggia emergendo al di fuori della superficie per una frazione  $\alpha$  del proprio volume. Potremmo chiederci qual è la densità del corpo, ma dovremmo conoscere preventivamente la densità del Mar Morto, oppure chiederci qual è la densità del Mar Morto, ma in tal caso dovremmo conoscere la densità del corpo. Si vede che la soluzione sarà legata a un'equazione nella quale compaiono sia l'una, sia l'altra

densità. Infatti, scriveremo banalmente per l'equilibrio del corpo in galleggiamento:

$$\mathbf{F}_{\text{totale}} = \mathbf{P} + \mathbf{S} = \rho_{\text{corpo}} V - \rho_{\text{liquido}} V(1 - \alpha) = 0,$$

con  $\mathbf{P}$  peso del corpo e  $\mathbf{S}$  spinta di Archimede. Avremo, quindi, immediatamente

$$\frac{\rho_{\text{corpo}}}{\rho_{\text{liquido}}} = (1 - \alpha),$$

che definisce una delle due densità, nota che sia quell'altra.

Potremmo trovare un modo per produrre una seconda equazione, che vincoli le medesime incognite. Suggeriamo al lettore una semplice variante, indicando che la frazione  $\alpha$  di cui il corpo emerge nel problema dato, sarebbe  $\beta$  qualora lo si immergeesse in acqua. L'informazione aggiuntiva ci fornisce immediatamente la densità del corpo, utilizzando la medesima espressione della formula già usata, applicata all'acqua, la cui densità si considera nota:

$$\frac{\rho_{\text{corpo}}}{\rho_{\text{acqua}}} = (1 - \beta);$$

dalla densità del corpo poi ricaveremmo quella incognita del liquido dall'equazione precedentemente scritta. Se si desse come informazione il solo rapporto  $\gamma = \alpha/\beta$  tra le frazioni di volume emergenti nel caso dell'acqua e del liquido incognito, ciò non sarebbe sufficiente per la soluzione del problema.

Una variante dell'esercizio base si ha se si pensasse di avere due liquidi sovrapposti, di densità diverse  $\rho_1$  e  $\rho_2 > \rho_1$  e un corpo, parzialmente immerso in entrambi i liquidi ed eventualmente emergente nell'aria per una frazione  $\alpha$  del proprio volume. Pensiamo inizialmente che sia  $\alpha = 0$ , ovvero che il corpo sia completamente immerso nei liquidi, e che la frazione nel liquido sottostante sia  $\gamma$ . La condizione di equilibrio sarebbe in tal caso

$$\gamma\rho_2 + (1 - \gamma)\rho_1 = \rho_{\text{corpo}}$$

e quindi offre la soluzione per una delle tre densità, quando fossero note le altre due. Se una parte del corpo emergeresse, si dovrebbe dar conto che su quella parte non si esercitano forze idrostatiche, cioè che quella parte non contribuisce a nessun termine

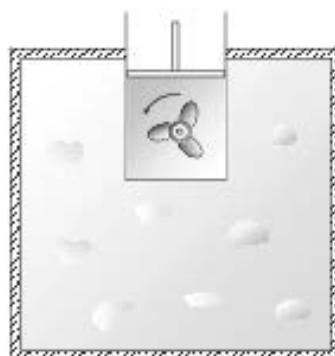
di spinta:

$$\gamma\rho_2 + (1 - \alpha - \gamma)\rho_1 = \rho_{\text{corpo}}.$$

## 1.6 Termodinamica

### 1.6.1 Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica deriva direttamente dal fondamentale principio di conservazione dell'energia. Esso sancisce, in realtà, il bilancio energetico di un sistema termodinamico. Dato un problema termodinamico, l'individuazione del sistema in oggetto è affatto arbitraria: potrebbero essere considerati come sistema uno solo oppure un insieme di più elementi individuabili come ad esempio, un gas, un pistone, una sorgente, una macchina termica ecc. o anche parti di tali elementi. Tale scelta suddivide l'intero universo in due parti, il sistema scelto e ciò che non è il sistema. Il passo successivo consiste nell'individuare tutti i possibili scambi di energia tra il sistema e l'esterno avendo fissato uno stato iniziale e uno finale del sistema stesso. Durante la trasformazione del sistema dallo stato iniziale allo stato finale, si devono computare le quantità di energia in ingresso (positiva) dall'ambiente esterno al sistema e in uscita (negativa) dal sistema all'ambiente esterno. Le differenti forme di trasferimento di energia dipendono dal fenomeno fisico che sta alla loro base: possiamo in tal modo considerare il trasferimento di energia disordinata (calore)  $Q$  e di energia ordinata (lavoro)  $L$ . A sua volta, il lavoro, può apparire sotto diverse espressioni a seconda del tipo di forza in gioco: per esempio se avviene una variazione di volume  $V$  in presenza di una pressione  $p$  l'espressione del lavoro sarà  $L = \int pdV$ , mentre sarà  $L = -\int Fdl$  per una sbarra sottoposta a forza di trazione  $F$  e allungamento  $l$ ,  $L = -\int HdM$  per un materiale magnetico con variazione di magnetizzazione  $M$  in presenza di un campo  $H$ ,  $L = -\int \mu dn$  per una variazione del numero di moli  $n$  di una sostanza avente potenziale chimico  $\mu$  ecc. Come si no-



**Fig. 1.6.** Un volano all'interno di un cilindro contenente gas e dotato di un pistone scorrevole; l'intero sistema è immerso in un bagno di ghiaccio fondente e racchiuso da un recipiente adiabatico

ta, l'esplicitazione del lavoro, cioè dello scambio di energia ordinata tra il sistema e l'ambiente, avviene sempre per una variazione di una grandezza estensiva (che dipende dalle dimensioni del sistema)  $X$  in presenza di una grandezza intensiva  $Y$  nella forma  $L = \int Y dX$ . Considerando la convenzione sui segni storicamente attribuita allo studio delle macchine termiche per le quali il lavoro debba essere considerato positivo se fatto dal sistema verso l'esterno mentre negativo se fatto dall'esterno sul sistema, nel primo principio il lavoro dovrà comparire con un segno meno davanti a indicare una quantità ( $-L$ ) positiva per un lavoro fatto dall'esterno (aumento dell'energia del sistema), e negativa per un lavoro fatto verso l'esterno (perdita di energia del sistema). In tal modo l'espressione

$$Q - L$$

racchiude con tutte le forme di energia trasferite al il sistema dall'esterno durante il passaggio dallo stato iniziale a quello finale. L'equivalente meccanico della caloria  $1\text{ cal} = 4.186\text{ J}$  permette di esprimere calore e lavoro nelle stesse unità. È evidente che, mentre rimane incognita l'energia totale interna  $U$  posseduta dal sistema, la sua variazione tra lo stato iniziale e finale, indicata con  $\Delta U = U_f - U_i$  sarà dovuta proprio al bilancio dei trasferimenti di energia tra il sistema e l'esterno per cui si può formulare il primo principio per trasferimenti finiti di energia nella forma  $\Delta U = Q - L$ .

Per affrontare un esempio analogo, al di fuori della fisica, si può considerare un conto corrente bancario del quale non si conosca l'entità  $X_i$  ma, per un dato periodo (dallo stato iniziale a quello finale), si possano conoscere e quantificare tutte le possibili transazioni di denaro che entrino ed escano (positive o negative) da quel conto sotto varie forme, contanti, assegni, bonifici ecc. Sommando tutte le transazioni ciascuna con il proprio segno si troverà la variazione dell'entità del conto corrente  $\Delta X = X_f - X_i$ , anche se rimarrà incognito il suo valore assoluto  $X_f$ . Consideriamo un esercizio esplicativo che evidensi la possibilità di scegliere il sistema in maniera arbitraria: un cilindro con pistone contenente un gas al cui interno sta ruotando un volano, il cilindro è immerso in un bagno termico di acqua e ghiaccio in fusione a sua volta contenuto in un recipiente adiabatico. Quante sono le parti da prendere in considerazione nel bilancio termodinamico? Tutte quelle che possono, potenzialmente scambiare calore o lavoro con le altre: in questo caso possiamo individuare, il gas,

il pistone, l'ambiente esterno con il quale il pistone è a contatto, il cilindro, l'acqua, il ghiaccio, il volano, il recipiente esterno. A questo punto il testo dell'esercizio può assegnare alle diverse parti alcune caratteristiche, per esempio, si può dire che il gas è perfetto, monoatomico e di quantità pari a  $n$  moli, il pistone e il recipiente esterno sono adiabatici, l'ambiente esterno è atmosfera a pressione costante, il volano ha una capacità termica  $C$ , un momento d'inerzia  $I$  e una velocità angolare iniziale  $\omega$ , il cilindro ha capacità termica nulla (trascurabile), l'acqua massa  $m_a$  e il ghiaccio  $m_g$ . Inoltre si possono fornire delle condizioni iniziali e finali: all'inizio tutti gli elementi sono in equilibrio termico a  $0^\circ$  compresa la miscela di acqua e ghiaccio, mentre alla fine il volano si sarà frenato a causa dall'attrito ed è fermo. Infine ci sono i parametri da determinare, per esempio la temperatura finale del sistema.

Dal momento che la situazione iniziale di equilibrio termico include un cambiamento di stato (ghiaccio fondente in acqua a zero gradi), sappiamo che l'energia a disposizione (fornita dal frenamento per attrito del volano) andrà, principalmente, a causare il cambiamento di stato (trasformazione di ghiaccio in acqua) prima di provocare qualsiasi variazione di temperatura. Quindi, data l'energia iniziale del volano  $E_0 = I\omega^2/2$  e il calore latente  $\lambda$  di fusione del ghiaccio, l'energia, eventualmente residua, sarà  $E' = E_0 - m_g\lambda$  con  $m_g\lambda < E_0$ ; evidentemente se fosse  $m_g\lambda > E_0$  solamente una parte del ghiaccio si tramuterebbe in acqua e tutto rimarrebbe a zero gradi. Data un'energia residua, invece, il sistema può evolversi termodinamicamente secondo il primo principio ( $\Delta U = Q - L$ )<sub>sist</sub> e raggiungere una temperatura di equilibrio finale da determinare. Come detto, la scelta del sistema è arbitraria, ad esempio può essere considerato sistema l'insieme del gas e del volano. Esaminiamo in questo caso i bilanci energetici: il cilindro e il recipiente esterno, essendo rigidi, non compiono né ricevono lavoro né tantomeno scambiano calore, l'uno, avendo capacità termica nulla, segue le variazioni termiche del sistema senza richiedere scambi di calore, l'altro, essendo adiabatico, non scambia calore. Il pistone non partecipa al bilancio del calore essendo anch'esso adiabatico (e impedisce scambi verso l'esterno) e non compie lavoro esso stesso essendo rigido; però, essendo libero di scorrere, permette la variazione di volume del gas e quindi uno scambio di lavoro tra il sistema e l'ambiente esterno. Il gas, quindi, che fa parte del sistema, espandendosi compie lavoro positivo sull'ambiente esterno che rimane a pressione costante (avendo l'atmosfera un volume molto maggiore del gas) pari a  $L = P(V_f - V_i)$ . La massa totale

di liquido  $m_a + m_g$  riceverà una quantità di calore positiva (incremento della temperatura) pari a  $(m_a + m_g)c_a(T_f - T_i)$  (con  $c_a$  calore specifico dell'acqua) quindi, dal punto di vista del sistema essa cederà una quantità di calore negativa al liquido pari a  $Q = -(m_a + m_g)c_a(T_f - T_i)$ . Poiché non ci sono altri scambi di calore e lavoro, si può completare la scrittura del primo principio esplicitando la variazione di energia interna del sistema gas + volano  $\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_v$ ; poiché il gas è perfetto,  $\Delta U_g = nc_v\Delta T$  e il volano, essendo dotato di capacità termica non trascurabile, acquisisce energia sotto forma di calore  $C\Delta T$  e perde l'energia cinetica  $E'$ .

Applicando il primo principio al sistema gas+volano si ha quindi:

$$\begin{aligned}\Delta U_g + \Delta U_v &= Q - L \\ nc_v\Delta T + C\Delta T - E' &= -c_a(m_a + m_g)\Delta T - P\Delta V;\end{aligned}$$

esprimendo il lavoro a pressione costante in funzione della temperatura ( $P\Delta V = nR\Delta T$ ) e risolvendo per  $\Delta T$  si ottiene

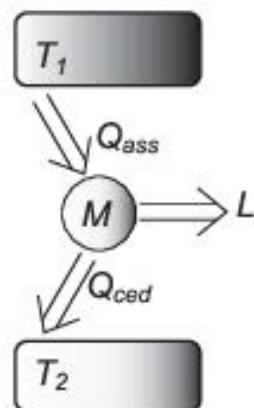
$$\Delta T = \frac{E'}{nc_v + C + (m_a + m_g)c_a + nR}. \quad (1.2)$$

Se, come sistema, si considera invece il solo gas allora il volano fa parte dell'esterno che interagisce con il gas, e il calore e il lavoro scambiati e l'energia interna devono ora essere riferiti al solo gas, quindi  $Q = -(m_a + m_g)c_a\Delta T - C\Delta T$  (calore ceduto al liquido e al volano),  $L = nR\Delta T - E'$  (lavoro ceduto dal gas al pistone ed energia del volano assorbita dal gas),  $\Delta U_g = nc_v\Delta T$ , infine esprimendo il primo principio per il sistema gas si ottiene lo stesso risultato dato dalla (1.2). Stesso risultato, ovviamente, si otterrebbe considerando come sistema il solo volano. In questo caso si avrebbe  $Q = -(m_a + m_g)c_a\Delta T - nc_p\Delta T$  (calore ceduto al liquido e al gas a pressione costante),  $L = 0$  (il volano non compie lavoro),  $\Delta U_v = C\Delta T - E'$  (il volano aumenta di energia interna a causa del suo riscaldamento e perde l'energia cinetica che aveva disponibile). Esprimendo quindi il primo principio per il sistema volano (considerando che  $c_p = c_v + R$ ) si ottiene di nuovo l'Eq. (1.2).

### 1.6.2 Secondo principio della termodinamica

Entriamo ora direttamente nel cuore del secondo principio della termodinamica, pensando di avere a disposizione due identiche quantità d'acqua a temperatura  $T_1$  e  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), ciascuna contenuta in un serbatoio rigido termicamente isolato e una macchina termica capace di produrre lavoro scambiando calore con le due masse d'acqua: vogliamo studiare come e quanto lavoro venga prodotto dalla macchina. Un ragionamento non affrettato sul quesito posto, dovrebbe spingerci, forse, a speculare propedeuticamente sulla natura della macchina termica in questione; ovvero la domanda alla quale è necessario rispondere *prima* di risolvere il nostro problema è la seguente: “Tutte le macchine termiche che scambiano calore con due corpi – le masse d'acqua nel nostro esempio –, producono la stessa quantità di lavoro, oppure esso dipende dal tipo di macchina termica utilizzata?” Se la risposta a quest'ultima domanda dovesse essere affermativa, sarebbe anche lecito chiedersi come dovrebbe essere fatta la macchina che produce il massimo lavoro ottenibile e il valore di quest'ultimo.

Il problema posto prevede che la macchina termica scambi calore con le due masse d'acqua: esse non costituiscono delle *sorgenti termiche*, essendo quest'ultime dei corpi la cui temperatura non varia indipendentemente dal calore che esse assorbono o cedono. La macchina, per produrre lavoro, dovrà assorbire una certa quantità di calore dalla massa a temperatura maggiore e, coerentemente all'espressione del secondo principio della termodinamica secondo Lord Kelvin, dovrà cederne una quantità a quella avente temperatura minore; il sistema termodinamico costituito dalle due masse tende quindi, durante il funzionamento della macchina, verso una situazione di equilibrio termico poiché la massa a temperatura inferiore vede aumentare la temperatura, mentre quella a temperatura superiore tende a raffreddarsi: all'equilibrio termico le due masse d'acqua all'interno dei serbatoi avranno la stessa temperatura  $T_F$  ( $T_2 < T_F < T_1$ ) e la macchina termica, sempre in accordo al secondo principio della termodinamica, non sarà più in grado



**Fig. 1.7.** Una macchina termica,  $M$ , esegue un lavoro,  $L$ , scambiando calore con due masse d'acqua a temperatura  $T_1$  e  $T_2$

di produrre lavoro. Il problema proposto si riconduce, pertanto, alla determinazione del lavoro ottenibile da un sistema di due corpi, inizialmente a temperature diverse, durante la fase di approccio all'equilibrio termico: dipende questo lavoro dal tipo di macchina termica utilizzata? Posto che la risposta a questa domanda sia affermativa, sarebbe naturale chiedersi, come precedentemente accennato, qual è la macchina ‘più efficiente’ per produrre lavoro e, anche, quant’è il lavoro massimo ottenibile. E ancora: dipenderà il lavoro dalla differenza di temperatura e/o sarà funzione delle masse d’acqua? Se una sola delle due masse d’acqua, ad esempio quella a temperatura minore, fosse sostituita da una sorgente termica avente la stessa temperatura dell’acqua, varierebbe il lavoro massimo estraibile dal sistema? Se a essere sostituita con una sorgente fosse invece solamente la massa d’acqua a temperatura maggiore, si otterrebbe lo stesso lavoro massimo del caso precedente? Anche in questo caso, come mostrato altre volte nelle pagine del libro, un semplice esercizio ben formulato può costituire il nucleo di un esercizio più complesso riguardante, nel caso particolare, vari aspetti della termodinamica.

Proviamo a ragionare sul caso specifico di due identiche masse d’acqua per poi soffermarci, durante l’analisi del problema, sui vari quesiti qui sopra proposti. Per il primo principio della termodinamica applicato alla macchina termica, che pensiamo lavori ciclicamente ripassando per stati eguali, il lavoro da essa prodotto fino alla condizione di raggiungimento della medesima temperatura  $T_F$  per le due quantità d’acqua, dipende dalla totalità del calore assorbito dalla massa d’acqua a temperatura maggiore,  $Q_{\text{ass}}^{(1)}$ , e da quello complessivamente ceduto,  $Q_{\text{ced}}^{(2)}$  (con  $Q_{\text{ced}}^{(2)} < 0 < Q_{\text{ass}}^{(1)}$ ), alla massa d’acqua a temperatura inferiore secondo la relazione:

$$L = Q_{\text{ass}}^{(1)} + Q_{\text{ced}}^{(2)} = -C(T_F - T_1) - C(T_F - T_2) = C[(T_1 + T_2) - 2T_F] \quad (1.3)$$

essendo  $C$  la capacità termica dell’acqua, supposta costante per semplicità. Il lavoro della macchina dipende, pertanto, tramite la capacità termica, dalla sostanza di cui sono costituiti i corpi e dalla loro massa: tale dipendenza già permette di rispondere a qualcuno degli interrogativi precedentemente posti; essa, soprattutto, è funzione della temperatura finale di equilibrio delle due masse d’acqua. In altre parole: la temperatura finale di equilibrio delle due masse è funzione del lavoro prodotto della macchina, ovvero di ‘come’ il sistema termodinamico viene portato nella condizione di equilibrio. Ecco quindi che la domanda sul lavoro massimo ottenibile si trasforma

nella seguente domanda sulla temperatura di equilibrio finale: “per quale  $T_F$  il lavoro è massimo?” Da quanto detto la risposta dipenderà dal modo di operare della macchina: si vede, di conseguenza, che, come previsto, è lecita anche la domanda su qual è il tipo di macchina che permette di estrarre il massimo lavoro dal sistema termodinamico proposto. Il lettore può ragionevolmente supporre che il massimo lavoro si otterrà in condizioni di reversibilità della macchina termica, confortato in questo da una conseguenza del secondo principio della termodinamica, ovvero dal *teorema di Carnot*. Esso pone, infatti, un limite superiore al rendimento – e quindi al lavoro – che hanno le macchine termiche irreversibili i cui scambi di calore avvengano solo tra due sorgenti termiche a temperature differenti. Sarà ovvia a questo punto l’obiezione che la macchina termica proposta dal problema non assorbe calore da due sorgenti termiche, perché tali non sono le masse d’acqua contenute nei serbatoi; essa, tuttavia, per operare reversibilmente dovrà scambiare con le masse quantità di calore infinitesime,  $dQ^{(1)} = -cmdT^{(1)}$  e  $dQ^{(2)} = -cmdT^{(2)}$  ( $dT^{(1)} < 0$ ,  $dT^{(2)} > 0$ ): in ogni ciclo la temperatura delle masse d’acqua varia di valori infinitesimi,  $dT^{(1)}$  e  $dT^{(2)}$ , quindi, in ogni ciclo esse possono essere considerate alla stregua di ‘sorgenti’ termiche; va da sé che occorreranno infiniti cicli per il raggiungimento della temperatura di equilibrio  $T_F$ . La fisica ‘intuita’ trova la sua conferma nella conseguenza diretta del teorema di Carnot espressa dalla seguente relazione, valevole per qualsiasi ciclo termodinamico,

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (1.4)$$

dove  $dQ$  rappresenta la quantità di calore infinitesima scambiata dal sistema con il corpo (o la sorgente) a temperatura  $T$ , valendo il segno di uguaglianza solo per cicli reversibili (solo in questo caso  $T$  è anche la temperatura del sistema). Applicando tale relazione alla macchina termica del problema, si ha:

$$\int_{T_1}^{T_F} \frac{CdT^{(1)}}{T^{(1)}} + \int_{T_2}^{T_F} \frac{-CdT^{(2)}}{T^{(2)}} \leq 0, \quad (1.5)$$

da cui facilmente si ricava  $T_F \geq \sqrt{T_1 T_2}$ , sempre valendo l’uguaglianza nell’ipotesi che la macchina operi reversibilmente. È da notare che  $T_F$  risulta indipendente dalle masse solo perché si è supposto di avere un’identica quantità della stessa materia all’interno dei due serbatoi. Il primo principio della termodinamica applicato alla macchina termica secondo l’eq. (1.3) ci fornisce il lavoro massimo ottenuto in caso

di reversibilità del processo, per  $T_F = \sqrt{T_1 T_2}$

$$L_{\max} = C \left[ (T_1 + T_2) - 2\sqrt{T_1 T_2} \right].$$

Se l'equilibrio termico venisse raggiunto con un processo irreversibile, la temperatura finale di equilibrio,  $T'_F$ , sarebbe maggiore di  $T_F$ : ad esempio, se si mettessero in contatto termico le due masse, è facile vedere che, con questo processo tipicamente irreversibile,  $T'_F = (T_1 + T_2)/2 > T_F$ . Lo stesso risultato poteva essere raggiunto considerando la variazione di entropia dell'universo:

$$\Delta S_{\text{univ.}} = \Delta S_{\text{corpo1}} + \Delta S_{\text{corpo2}} + \Delta S_{\text{macch.}} \geq 0,$$

dove l'uguaglianza vale in condizioni di reversibilità del processo. Poichè la macchina opera in modo ciclico sarà  $\Delta S_{\text{macch.}} = 0$  e quindi dalla relazione precedente si ottiene

$$\int_{T_1}^{T_F} \frac{CdT^{(1)}}{T^{(1)}} \int_{T_2}^{T_F} + \frac{CdT^{(2)}}{T^{(2)}} \geq 0,$$

che è identica all'eq. (1.5)

Proviamo ora a chiederci quale sarebbe il lavoro, in particolare il lavoro massimo, prodotto dalla macchina termica se il corpo a temperatura minore fosse sostituito da una sorgente termica. In questo caso è ovvio che il sistema termodinamico raggiungerebbe l'equilibrio (e la macchina termica cesserebbe di produrre lavoro) quando la massa inizialmente a temperatura  $T_1$  si troverà alla temperatura  $T_2$ . Il primo principio della termodinamica applicato alla macchina termica si scriverebbe allora:

$$L = C(T_1 - T_2) + Q_2,$$

avendo indicato con  $Q_2 < 0$ , la quantità di calore ceduta alla sorgente termica per il raggiungimento dell'equilibrio termico finale; l'eq. (1.4), applicata alla macchina termica diverrebbe:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{-CdT^{(1)}}{T^{(1)}} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

che fornisce per  $Q_2$ :

$$Q_2 \leq -CT_2 \ln(T_1/T_2)$$

dove, al solito, l'uguale vale in condizioni di reversibilità della macchina. In questo

caso il lavoro massimo sarà

$$L_{\max} = C \left[ (T_1 - T_2) - T_2 \ln \frac{T_1}{T_2} \right].$$

Viene lasciata al lettore la determinazione del lavoro massimo nel caso in cui il solo corpo a temperatura  $T_2$  fosse sostituito con una sorgente termica a tale temperatura; seguendo le linee guida sopra tracciate, si troverà:

$$L_{\max} = C \left[ (T_2 - T_1) + T_1 \ln \frac{T_1}{T_2} \right].$$

## 1.7 Elettrostatica

### 1.7.1 Teorema di Gauss

In condizioni di particolare simmetria, la legge di Gauss può essere utilizzata come un potente strumento per determinare l'espressione del campo elettrico  $\mathbf{E}$ . La legge di Gauss non coinvolge il campo elettrico direttamente, ma riguarda la grandezza fisica *flusso del campo elettrico*,  $\varphi(\mathbf{E})$ , calcolato attraverso una superficie chiusa. La legge afferma che esso è univocamente determinato, nel vuoto, dalla carica netta presente in un volume  $\tau$  racchiuso da una superficie  $S_\tau$  divisa per la costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$ :

$$\varphi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau.$$

Tale espressione indica che, data una superficie chiusa, orientata in ogni punto come la sua normale verso l'esterno, il flusso del campo elettrico è definito come l'integrale superficiale del prodotto scalare del campo per l'infinitesima superficie orientata  $d\mathbf{S}$ , mentre la carica interna corrisponde all'integrale di volume della densità di carica nel volume  $\rho$  racchiuso dalla superficie. Questa legge proviene dalla proprietà del campo elettrico di una carica puntiforme di diminuire di intensità in ragione dell'inverso del quadrato della distanza dalla carica (un analogo teorema di Gauss, con altri costanti fisiche, è valido per altri campi vettoriali aventi la medesima proprietà, per esempio il campo gravitazionale di Newton).

Questo teorema ha molte conseguenze e rappresenta la prima delle quattro equazioni di Maxwell in forma integrale che governano l'elettromagnetismo e può anche esser utilizzato per la determinazione del campo elettrico in situazioni di particola-

re simmetria. Il teorema di Gauss è valido qualunque sia la forma della superficie a parità di carica netta racchiusa, ma il problema sorge se lo si vuole utilizzare per determinare non il flusso ma proprio il vettore campo elettrico: la legge di Gauss è espressa in forma integrale, quindi rappresenta una media pesata del flusso del campo elettrico; se tuttavia si vuole estrapolare l'espressione del solo campo elettrico, dal momento che quest'ultimo compare nel prodotto scalare e all'interno dell'integrale superficiale, bisogna sviluppare esplicitamente l'integrale superficiale mantenendo il vettore campo elettrico come incognita, funzione delle variabili spaziali. La scelta della superficie chiusa sulla quale applicare l'integrale (superficie gaussiana) è allora fondamentale e la scelta cade su una superficie che rispetti le simmetrie del problema in maniera tale che si abbia un'unica espressione del campo elettrico che contribuisca al flusso attraverso tale superficie. Si riesce così a utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrico, quando l'andamento del campo sia già intuibile dalla distribuzione della carica per motivi di simmetria, almeno per quanto riguarda la parte vettoriale, determinando il suo modulo come funzione delle variabili spaziali.

### 1.7.2 Il campo elettrico in casi di simmetria sferica

Si prenda come esempio una distribuzione di carica avente densità  $\rho$  con simmetria sferica di raggio  $R$  e centro in  $O$ . In tale caso, ci si aspetta che il vettore del campo elettrico abbia direzione radiale rispetto al centro della distribuzione di carica (come nel caso della carica puntiforme con  $\mathbf{r}$  parallelo alla normale della superficie sferica) e punti verso l'esterno per le cariche positive e verso l'interno per quelle negative. In questo modo, non essendoci direzione privilegiata nello spazio, il modulo del campo elettrico dipenderà solamente dalla distanza  $r$  rispetto al centro  $O$  della distribuzione per cui si avrà  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}$ . Il problema sarà allora quello di trovare il modulo del campo elettrico,  $E(r)$ , sia all'interno che all'esterno della distribuzione di carica. Per estrarre un'unica espressione  $E(r)$  dall'integrale, si cerca una particolare superficie chiusa (gaussiana) affinché non cambi su questa superficie: l'unica e immediatamente individuabile è la superficie sferica con centro coincidente con  $O$ ; in tal caso l'integrale diventa

$$\varphi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r).$$

L'espressione ottenuta è la stessa per qualunque raggio variabile  $r$  della superficie gaussiana scelta; invece, ciò che varia con  $r$  è la carica interna a questa superficie così come espressa dal membro di destra della legge di Gauss. Bisogna quindi distinguere due regioni, una interna alla distribuzione della carica per la quale  $r \leq R$  e l'altra esterna per la quale  $r \geq R$ . Nella prima regione la carica interna varierà con il raggio  $r$  della superficie, mentre nella regione  $r \geq R$  la carica interna sarà costante e pari a tutta la carica della distribuzione.

Per risolvere esplicitamente l'integrale di volume è necessario conoscere la densità di carica  $\rho$  come funzione delle variabili spaziali, ed essendo essa a simmetria sferica, come funzione della distanza  $r$ . Grazie a ciò, si può esprimere il volume elementare  $d\tau$  in coordinate polari: dato il volume della sfera  $\tau = 4/3\pi r^3$ , differenziando si ha  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ . Questo volume elementare può essere visto come quello di un guscio sferico di raggio  $r$  e di spessore infinitesimo  $dr$ , avente superficie  $4\pi r^2$  e volume infinitesimo  $4\pi r^2 dr$ . Quindi si avrà:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int \rho(r) r^2 dr.$$

Il calcolo dell'integrale richiede la conoscenza dell'espressione esplicita della funzione densità e l'inserimento degli estremi di integrazione che individuano la zona in cui si trova la carica interna alla superficie gaussiana. Si supponga, ad esempio che la densità volumica sia costante: in questo caso  $\rho(r) = \rho$  viene estratta dall'integrale. Nella regione interna alla distribuzione di carica, la superficie gaussiana ha raggio  $r \leq R$ , per cui la carica interna a essa si troverà imponendo come estremi di integrazione gli estremi 0 e  $r$  variabile:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho \int_0^r r^2 dr = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Si è cioè trovato che la carica interna, essendo la densità di carica costante, è semplicemente  $\rho$  per il volume interno dipendente da  $r$ . Si avrà, infine, applicando il teorema di Gauss

$$E(r \leq R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3},$$

dove per la carica totale  $Q$  è stata utilizzata l'espressione  $Q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr$ . Il campo all'interno della distribuzione di carica a simmetria sferica con densità costante,

cresce quindi linearmente con la distanza dal centro della distribuzione.

Nella regione esterna alla distribuzione di carica, la superficie gaussiana ha raggio  $r > R$ , e al suo interno ci sarà tutta e sola la carica della distribuzione che si troverà imponendo come estremi di integrazione gli estremi 0 ed  $R$ , ovvero:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho \int_0^R r^2 dr = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui ne segue che

$$E(r \geq R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Al di fuori della distribuzione di carica, il flusso fornisce il termine variabile  $r^2$  mentre il calcolo della carica interna contiene il termine costante  $R^3$ . I due termini non si possono ovviamente semplificare, come è stato fatto invece nel caso precedente, quindi il campo elettrico al di fuori della distribuzione avrà l'andamento tipico della carica puntiforme con un andamento inverso del quadrato della distanza. Ovviamente le due espressioni per il campo elettrico coincidono al confine delle due regioni per  $r = R$ .

Si consideri ora il caso in cui la densità di carica  $\rho$  non sia costante, ma dipenda da  $r$  secondo qualche funzione opportuna: se per esempio la dipendenza è lineare,  $\rho = \alpha r$ , allora è facile trovare che

$$E(r \leq R) = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} r^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^4}$$

$$E(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},$$

Di qui si nota che all'esterno della distribuzione di carica, l'andamento è sempre quello della carica puntiforme, dal momento che la carica interna alla superficie gaussiana è semplicemente la carica totale  $Q$  della distribuzione.

Si possono considerare anche altre diverse distribuzioni a simmetria sferica, per esempio a guscio sferico. Si può quindi considerare un guscio sferico di raggio interno  $a$  e di raggio esterno  $b$  avente densità di carica costante  $\rho_1$ , avvolto da un altro guscio concentrico di raggio interno  $c$  ed esterno  $d$  con  $d > c > b > a$  con densità di carica  $\rho_2 = \alpha r$ , e nelle restanti zone di spazio il vuoto. Viene lasciato come esercizio

ricavare le seguenti espressioni del campo elettrico (radiale):

$$\begin{aligned}E(0 \leq r \leq a) &= 0 \\E(a \leq r \leq b) &= \frac{\rho_1}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (r^3 - a^3) \\E(b \leq r \leq c) &= \frac{\rho_1}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (b^3 - a^3) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\E(c \leq r \leq d) &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (r^4 - c^4) \\E(d \leq r < \infty) &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2},\end{aligned}$$

dove

$$Q_1 = \rho_1 \frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3) \quad \text{e} \quad Q_2 = \alpha\pi (d^4 - c^4).$$

### 1.7.3 Il campo elettrico in casi con altre simmetrie di distribuzione di carica

Altre possibili generalizzazioni riguardano diverse forme di simmetria; ad esempio, per una distribuzione di carica a simmetria cilindrica la carica sarà distribuita in un volume ideale cilindrico di lunghezza infinita e la densità di carica dipenderà solamente dalla distanza  $r$  dall'asse del cilindro. Si userà allora come superficie gaussiana la superficie laterale di un cilindro di raggio  $r$  e lunghezza  $l$ , con asse coincidente con quello della distribuzione; in questo caso il volume racchiuso dalla superficie gaussiana sarà  $\tau = \pi r^2 l$  e il volume elementare da inserire nel calcolo della carica interna  $d\tau = 2\pi r l dr$ . Anche il campo elettrico avrà simmetria cilindrica e sarà diretto lungo direzioni radiali disposte su piani ortogonali all'asse del cilindro e il suo modulo dipenderà solamente dalla distanza  $r$  dall'asse: come esempio, data una densità di carica  $\rho$  costante per una distribuzione cilindrica di raggio  $R$  si ricava il modulo del campo elettrico dalla legge di Gauss per le due regioni, interna ed esterna alla distribuzione:

$$\begin{aligned}2\pi r l E(r \leq R) &= \frac{\int_0^r \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r \leq R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \\2\pi r l E(r \geq R) &= \frac{\int_0^R \rho d\tau}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 l}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Nei due casi si avrà quindi rispettivamente un andamento proporzionale e inversamente proporzionale alla distanza  $r$ ; inoltre, a differenza del caso sferico, non è possibile esprimere il campo elettrico in funzione della carica totale contenuta nella distribuzione essendo quest'ultima infinita, che si esprimerà invece in funzione della densità di carica.

Nel caso in cui la carica sia distribuita su un piano infinito, la simmetria sarà detta piana e potrà essere rispettata da una superficie a facce piane come un parallelepipedo o un cilindro disposto in maniera tale che le due basi siano parallele al piano di simmetria della distribuzione. Il campo elettrico sarà anch'esso, allora, a simmetria piana e dipenderà solamente dalla distanza  $r$  dal piano mediano della distribuzione. Detta  $S$  la superficie di una delle basi o delle facce del parallelepipedo parallele al piano, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie gaussiana sarà  $\varphi(\mathbf{E}) = 2SE(r)$ . Per il calcolo del membro di destra del teorema di Gauss, cioè della carica interna alla superficie gaussiana divisa per la costante dielettrica del vuoto, bisogna considerare i due casi in cui la distribuzione di carica abbia spessore trascurabile, quindi sia essenzialmente una superficie piana, e il caso in cui abbia un certo spessore  $d$  e quindi sia una distribuzione in un volume. Nel primo caso  $Q_{\text{int}} = \int_S \sigma dS$ , nell'altro caso  $Q_{\text{int}} = \int_\tau \rho d\tau$  dove  $d\tau = Sdr$ . Se si ipotizzano costanti entrambe le densità, superficiale  $\sigma$  e di volume  $\rho$  si avrà, nel caso di distribuzione con spessore trascurabile un'unica espressione per il modulo del campo elettrico valida in tutto lo spazio e costante:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Nel caso di distribuzione con spessore  $d$ , come al solito, si distingue la zona interna alla distribuzione,  $0 \leq r \leq d/2$ , da quella esterna,  $d/2 \leq r \leq \infty$ , e si ricava rispettivamente

$$\begin{aligned} E(r \leq d/2) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} r \\ E(r \geq d/2) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} d. \end{aligned}$$

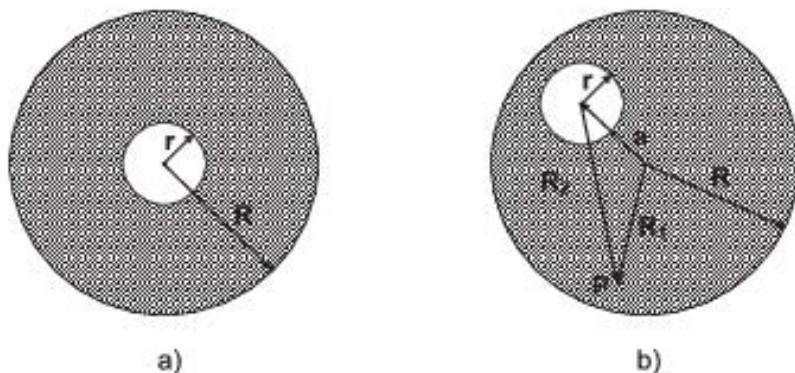
#### 1.7.4 Problemi riconducibili a casi con distribuzioni simmetriche

Nel caso delle distribuzioni di carica con simmetria sferica e densità di carica  $\rho$  costante, si è trovato che all'interno della distribuzione di carica il campo elettrico cresce linearmente con  $r$  mentre all'esterno diminuisce come  $1/r^2$ . Il risultato si com-

prende considerando che ciascuna carica elementare contribuisce con un andamento che va come  $1/r^2$  ma, all'interno variando  $r$ , la carica interna alla superficie gaussiana (la sola che fornisce il contributo) varia in ragione di  $r^3$  se la densità è costante per cui il risultato netto è una variazione lineare. Per inciso, questo vuol dire che al centro della distribuzione il campo elettrico è nullo derivando da uguali contributi aventi tutte le direzioni possibili. All'esterno della distribuzione di carica, la carica inclusa nella superficie gaussiana è oramai costante e pari a tutta la carica della distribuzione, per cui il campo elettrico è lo stesso che sarebbe generato da una pari carica puntiforme posta nel centro della distribuzione. Se  $\rho$  non è costante, il risultato all'interno della distribuzione dipenderà dalla sua espressione esplicita; se è una potenza del tipo  $r^\alpha$ , Il campo elettrico varierà come  $r^{1+\alpha}$ ; all'esterno della distribuzione, invece, l'andamento sarà sempre quello proprio di una carica puntiforme.

Per quanto riguarda la simmetria cilindrica, consideriamo dapprima una distribuzione rettilinea di lunghezza infinita e di dimensioni trasversali trascurabili. Le singole cariche elementari contribuiranno con andamento del tipo  $1/r^2$ , ma ponendoci a una distanza  $r$  dalla linea, si riceve il contributo di tutte le infinite cariche della linea, ognuno pesato con l'inverso della sua distanza al quadrato, per cui il decadimento del modulo del campo elettrico ha una rapidità inferiore e decresce come  $1/r$ . Questo è anche l'andamento percepito all'esterno di una distribuzione cilindrica di raggio  $R$  non trascurabile. Per quanto riguarda l'interno, se  $\rho$  è costante, il campo elettrico può essere visto come dato dal contributo di tutti gli infiniti fili di dimensioni trasversali infinitesime e di lunghezza infinita che costituiscono la distribuzione di raggio  $R$ . Ciascun filo fornisce un contributo che diminuisce come  $1/r$  ma, variando  $r$  all'interno, viene inclusa sempre più carica proporzionalmente a  $\pi r^2$  con il risultato finale che il campo per distanze inferiori di  $R$ , essendo  $\rho$  costante, crescerà linearmente con  $r$ .

Nel caso di distribuzione su un piano infinito, non ci si deve stupire che il campo sia costante ovunque e non decada mai con la distanza, essendo vero che il contributo delle singole cariche elementari decresce come  $1/r^2$ , ma altresì vero che le cariche che contribuiscono sono infinite nelle due dimensioni del piano e ciò compensa esattamente il decadimento e ha come risultato un campo elettrico costante. All'interno di una distribuzione piana ma di spessore finito  $d$  e densità  $\rho$  costante, gli infiniti piani di spessore infinitesimo danno contributo costante, mentre l'aumentare della distanza



**Fig. 1.8.** Distribuzione di carica elettrica uniforme in un volume sferico di raggio  $R$  con una cavità di raggio  $r$  posta al centro (a) ed eccentrica (b)

$r$  all'interno di  $d$ , include entro la superficie gaussiana un numero di contributi proporzionale a  $r$  per cui l'andamento finale del campo all'interno sarà, anche in questo caso, lineare con  $r$ .

Bisogna aver chiaramente presente però che la possibilità di ricavare immediatamente il campo elettrico dall'applicazione della legge di Gauss è legata al rispetto della simmetria del sistema. Come esempio si consideri una sfera di raggio  $R$  in cui sia distribuita una carica a densità costante  $\rho$  positiva e che, all'interno di questa sfera ci sia una cavità concentrica con la distribuzione e di raggio  $r < R$ . Essendo la cavità concentrica con la distribuzione, la simmetria sferica dell'intero sistema è conservata; considerando quindi una superficie sferica gaussiana anch'essa concentrica all'interno della cavità, si può immediatamente dire che, essendo la carica interna nulla, il campo elettrico interno è anch'esso nullo. Se adesso spostiamo il centro della cavità a una distanza  $a$  dal centro della distribuzione, la configurazione delle cariche non ha più simmetria sferica, non si può quindi più concludere che il campo elettrico sia nullo nella cavità. Come si può quindi ricavare il campo elettrico? Una via semplice e illuminante per quel che riguarda le modalità intuitive si può dare per il valore del campo all'interno della cavità: una cavità a carica nulla può essere, infatti, considerata come la sovrapposizione di volumi uguali, uno con carica positiva e uno con carica negativa. Il volume a carica positiva, sommato alla distribuzione della carica, va a completare la distribuzione sferica di raggio  $R$  che diventa così simmetrica e quindi il campo elettrico totale sarà dato, per il principio di sovrapposizione, dalla somma vettoriale dei campi creati da una distribuzione omogenea positiva di raggio  $R$  e una

omogenea negativa di raggio  $r$  decentrata di un tratto  $a$ .

Si è visto che il campo, in un punto  $P$  interno a una distribuzione a simmetria sferica omogenea è  $\mathbf{E}(P) = \rho/3\epsilon_0 \mathbf{r}$  quindi in questo caso, indicando con  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  i vettori che congiungono, rispettivamente, il centro della distribuzione positiva e il centro della distribuzione negativa con il punto  $P$  si avrà come campo elettrico totale

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_2.$$

Indicando con il vettore  $\mathbf{a}$  la congiungente tra il centro della distribuzione positiva e di quella negativa allora  $\mathbf{a} + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  quindi

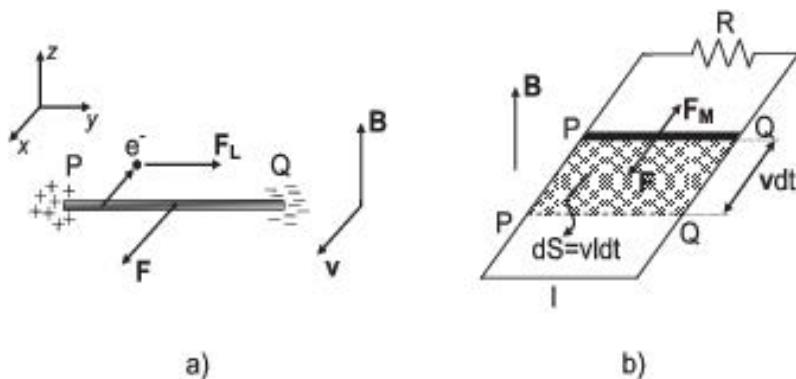
$$\mathbf{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a},$$

cioè il campo, all'interno della cavità è uniforme e diretto come  $\mathbf{a}$ .

## 1.8 Magnetismo

### 1.8.1 Forza di Lorentz - Induzione elettromagnetica

Si immagini di avere una sbarretta rettilinea metallica omogenea e isotropa, di massa  $m$  e lunghezza  $l$ , che possa muoversi, partendo da ferma, su di un piano orizzontale liscio  $xy$  e si supponga che essa sia allineata secondo la direzione  $y$  e venga tirata con una forza  $\mathbf{F}$  lungo l'asse  $x$  applicata al centro di massa della sbarretta; si supponga, inoltre, che esista un campo di induzione magnetica uniforme,  $\mathbf{B}$ , perpendicolare al piano, diretto come l'asse  $z$ . È evidente, allora, che sugli elettroni di conduzione della sbarretta (aventi carica elettrica  $-e$ ) liberi di muoversi all'interno del suo volume, si esercita una forza di Lorentz  $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , essendo  $\mathbf{v}$  la velocità del centro di massa della sbarretta, che produce un loro addensamento nell'estremità  $Q$ ; conseguentemente vi è un eguale addensamento di cariche positive all'estremità opposta,  $P$ : nasce, pertanto, nella sbarretta, un campo elettrico  $\mathbf{E}$  (diretto da  $P$  verso  $Q$ ). La separazione delle cariche negative da quelle positive proseguirà finché la forza esercitata dal campo elettrico sugli elettroni liberi non egualerà, in modulo, la forza di Lorentz. Il campo elettrico all'interno della sbarretta,  $E = vB$ , è uniforme e cresce linearmente nel tempo essendo il moto della sbarretta uniformemente accelerato: a tal guisa crescerà anche la differenza di potenziale,  $\Delta V = El = Blv$ , che si stabi-



**Fig. 1.9.** (a) Una sbarretta metallica con estremi nei punti  $P$  e  $Q$  si muove sotto l'azione di una forza  $F$  in un campo magnetico  $B$ : si genera una differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta. (b) La differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta può essere interpretata anche in base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz

sce tra gli estremi della sbarretta.

Si può interpretare la differenza di potenziale che si crea tra gli estremi anche in base della legge di Faraday-Neumann-Lenz; a tal fine si può pensare di far strisciare, senza attrito, gli estremi della sbarretta lungo due guide metalliche rettilinee rigide e parallele tra loro e all'asse  $x$ : esse, essendo in contatto con gli estremi della sbarretta, saranno equipotenziali con questi ultimi; il poligono formato dai tre conduttori – che per semplicità possiamo supporre privi di resistenza elettrica – venga ora chiuso con un quarto conduttore rettilineo rigido parallelo alla sbarretta avente resistenza  $R$  e lunghezza  $l$  ancorato alle estremità delle due guide rettilinee. Data questa configurazione dei conduttori, sotto l'azione della forza  $F$ , in un tempo  $dt$  la sbarretta spazza un'area  $dS = vldt$  (vedi figura) e, pertanto, il flusso infinitesimo del campo magnetico attraverso tale superficie sarà semplicemente  $d\varphi(B) = Blvdt$ . In base alla legge dianzi citata

$$\Delta V = -\frac{d\varphi(B)}{dt} = -(-Blv) = Blv$$

dove il segno positivo indica che il campo elettromotore nella sbarretta è diretto da  $Q$  verso  $P$ <sup>1</sup>; la legge di Ohm fornisce il valore della corrente  $i = \Delta V/R = Blv/R$  che scorre, nel verso del campo elettromotore, nel circuito formato dai quattro conduttori. La differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta avrà tuttavia un andamento temporale diverso rispetto al caso precedente (circuito aperto), in quanto la velocità

<sup>1</sup>  $\frac{d\varphi(B)}{dt} < 0$  poiché il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito decresce nel tempo.

della sbarretta non crescerà più linearmente. Se si guarda, infatti, alle forze agenti sul centro di massa sbarretta, oltre alla forza  $\mathbf{F}$  vi è ora, in verso opposto, la forza magnetica  $\mathbf{F}_M$  di modulo  $iLB$ : tale forza non ha effetto sugli altri tre conduttori che sono fermi nel campo  $\mathbf{B}$  e rigidamente fissati tra loro.  $\mathbf{F}_M$  non è una forza costante perché dipende da  $i$ , e quindi dalla differenza di potenziale, ovvero dalla velocità della sbarretta: tale forza sarà nulla all'inizio del moto della sbarretta – che, ricordiamo, abbiamo supposto partire da ferma – e crescerà nel tempo a causa dell'aumentare della velocità verso un valore asintotico  $\mathbf{F}_M = \mathbf{F}$  al quale corrisponderebbe un moto rettilineo uniforme della sbarretta con velocità limite  $v_L = FR/B^2l^2$ . La velocità asintotica è stata ricavata senza necessità di risolvere l'equazione differenziale – peraltro semplice – del moto del centro di massa della sbarretta e quanto visto nell'Appendice sugli esponenziali ci suggerisce che questo valore limite è raggiunto, partendo da zero, con una legge esponenziale del tipo  $v(t) = v_L(1 - e^{-\alpha t})$  con  $\alpha = B^2l^2/mR$ , ricavabile inserendo l'espressione di  $v(t)$  nell'equazione del moto del centro di massa della sbarretta (v. Appendice 3.3.1, pagina 93). In verità l'andamento temporale della velocità, per la natura delle forze in gioco – una,  $\mathbf{F}$ , costante e l'altra,  $\mathbf{F}_M$ , opposta alla prima e proporzionale, tramite la corrente, alla velocità  $-$ , è affatto analogo a quello di una massa in caduta in un fluido viscoso, dove la parte della forza costante è giocata dalla risultante della forza peso e della spinta di Archimede, mentre la forza proporzionale alla velocità e avente verso opposto a quest'ultima,  $\mathbf{F}_M$ , è rappresentata dalla forza di resistenza viscosa del mezzo. È ovvio che, vista la proporzionalità alla velocità sia della differenza di potenziale che della corrente, entrambe queste due quantità fisiche seguiranno un identico andamento temporale con opportuni valori limite,  $i_L$  e  $\Delta V_L$ :  $i_L = F/Bl$ ,  $\Delta V_L = FR/Bl$ .

È utile vedere come si possa determinare la velocità limite anche con considerazioni di tipo energetico. Infatti, poiché da un certo istante in poi la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme, risulterà nulla la sua variazione di energia cinetica e, quindi, in forza del teorema del lavoro e dell'energia cinetica, dovrà annullarsi il lavoro delle forze agenti su di essa; detto in altri termini, il lavoro per unità di tempo – ovvero la potenza istantanea – della forza  $\mathbf{F}$ , deve essere uguale alla potenza dissipata per effetto Joule nel conduttore avente resistenza  $R$ :  $Fv_L = i^2R$ . Da questa relazione, sostituendo il valore della corrente, si ricava il valore della velocità asintotica precedentemente trovato.

Proseguendo nello sviluppo del nostro esercizio si può pensare di portare il circuito formato dai quattro conduttori nel piano verticale  $yz$ , ruotando contemporaneamente anche il campo magnetico fino a porlo nel verso dell'asse  $x$  (figura), delegando la forza di peso,  $mg$  a fornire la forza costante che trascina la sbarretta verso il piano orizzontale  $xy$ ; la fisica del problema rimarrà immutata rispetto a quanto visto in precedenza essendo, anche in questo caso, la forza  $\mathbf{F}_M$  opposta alla forza peso.

Si può ora pensare che la sbarretta strisci con attrito lungo le guide rettilinee: la forza di attrito,  $\mathbf{F}_A$ , opponendosi al moto della sbarretta, è diretta come la forza magnetica  $\mathbf{F}_M$ ; conseguentemente, l'equazione del moto del centro di massa della sbarretta è  $mg - Bl_i - F_A = m dv/dt$ . Rispetto al caso del circuito orizzontale cambia solo la velocità di regime della sbarretta,  $v'_L = (mg - F_A)R/B^2l^2$  (sempre determinata dall'annullarsi delle forze agenti su di essa), e i correlati valori asintotici della differenza di potenziale e della corrente,  $\Delta V'_L = Blv'_L$  e  $i'_L = Blv'_L/R$ , rispettivamente; sia  $v$  che  $\Delta V$  e anche  $i$  varieranno esponenzialmente con la stessa legge precedentemente vista e con la medesima costante di tempo. Il calcolo di quest'ultima viene lasciato al lettore.

# Cinematica del punto materiale

## 2.1 Esercizio guida – Moti rettilinei uniformi

### Teoria

Moto rettilineo uniforme è il moto di un punto su traiettoria rettilinea, percorsa con velocità costante. Le due caratteristiche si sintetizzano affermando che il vettore velocità  $\mathbf{v}$  del punto è costante. Ne consegue che l'accelerazione è nulla,  $\mathbf{a} = 0$ . L'equazione dello spostamento sulla traiettoria rettilinea è data da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

e a essa corrisponde l'equazione oraria nell'ascissa curvilinea

$$s = s_0 + vt$$

in cui  $\mathbf{r}_0$  ed  $s_0$  sono lo spostamento e l'ascissa curvilinea, rispettivamente, al tempo  $t = 0$ .

### Argomento

Si considerano più moti rettilinei uniformi, partendo dal caso di soli due punti mobili e poi estendendolo a un numero maggiore di punti. Nel problema diretto si cerca la

distanza tra i punti a determinati istanti, la distanza minima ecc., in quelli inversi, i tempi, le velocità, le posizioni iniziali ecc.

Le traiettorie rettilinee dei punti mobili possono giacere su un medesimo piano (per es.  $xy$ ) o essere sghembe nello spazio. Si usano pedici diversi per i diversi punti in movimento e le diverse traiettorie.

*Equazioni delle  
traiettorie*

Il problema richiede l'individuazione del sistema di riferimento ottimale per la descrizione delle traiettorie: se queste sono complanari, appare naturale la scelta di farne coincidere una con un asse,  $x$  ad es., e quindi scrivere per tale retta

$$y = 0.$$

La traiettoria complanare di un secondo punto avrà un'equazione del tipo

$$y = mx + q,$$

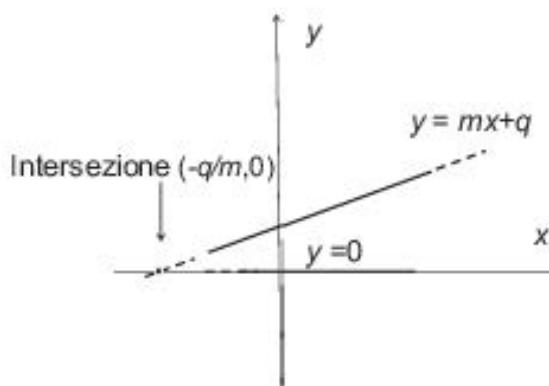
nella quale i parametri  $q$  ed  $m$  saranno da determinarsi in base alle condizioni che vengono proposte (Fig. 2.1).

*Due punti si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme su un piano con le traiettorie che formano un angolo  $\alpha$ . Quando la posizione del primo punto coincide col punto intersezione delle traiettorie, la distanza tra i due punti è  $D_1$  e quando vi coincide il secondo, essa è  $D_2$ . Si determinano le condizioni sui possibili valori delle velocità dei punti, in particolare per il caso di traiettorie ortogonali.*

Come detto più sopra, è conveniente scegliere una delle due traiettorie, per es. la prima, coincidente con un asse cartesiano, per es. l'asse  $x$ , e scrivere per l'equazione oraria del punto

$$x_1 = x_{01} + v_{1t}$$

avendo aggiunto il pedice 1 per indicare le grandezze del primo punto, così come si aggiungerà un pedice numerico per le grandezze di successivi punti. La traiettoria



**Fig. 2.1.** Punti in moto rettilineo uniforme su traiettorie rettilinee complanari

del secondo punto è una retta di equazione

$$y = m_2 x + q_2$$

descritta nel tempo  $t$  dalle due equazioni parametriche

$$x_2 = x_{02} + v_{x2} t \quad \text{e} \quad y_2 = y_{02} + v_{y2} t.$$

Il punto di intersezione delle traiettorie ha coordinate

$$\bar{x} = -\frac{q_2}{m_2} \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Il primo punto passa per il punto di intersezione al tempo

$$\bar{t}_1 = -\frac{\frac{q_2}{m_2} + x_{01}}{v_1}$$

quando il secondo punto si trova in

$$x_2(\bar{t}_1) = x_{02} - \frac{v_{x2}}{v_1} \left( \frac{q_2}{m_2} + x_{01} \right) \quad \text{e} \quad y_2(\bar{t}_1) = y_{02} - \frac{v_{y2}}{v_1} \left( \frac{q_2}{m_2} + x_{01} \right),$$

a una distanza dal primo pari a

$$D_1 = \sqrt{\left[ x_{02} - \frac{v_{x2}}{v_1} \left( \frac{q_2}{m_2} + x_{01} \right) + \frac{q_2}{m_2} \right]^2 + \left[ y_{02} - \frac{v_{y2}}{v_1} \left( \frac{q_2}{m_2} + x_{01} \right) \right]^2}. \quad (2.1)$$

Analogamente, il secondo punto passa per il punto di intersezione al tempo

$$\bar{t}_2 = -\frac{y_{02}}{v_{y2}}$$

quando il primo punto si trova in

$$x_1(\bar{t}_2) = x_{01} - \frac{v_1}{v_{y2}} y_{02} \quad \text{e} \quad y_1(\bar{t}_2) = 0,$$

a una distanza dal secondo pari a

$$D_2 = x_{01} - \frac{v_1}{v_{y2}} y_{02} + \frac{q_2}{m_2}. \quad (2.2)$$

Per le tre componenti delle velocità si sono acquisite le due equazioni (2.1) e (2.2), con la libertà di scelta, quindi, di una delle tre componenti. Si può fissare, ad es., la velocità  $v_1$  del primo punto e determinare le due componenti,  $v_{x2}$  e  $v_{y2}$ , della velocità  $\mathbf{v}_2$  del secondo punto. Sequenzialmente si ricava dall'Eq. (2.2) della distanza  $D_2$  il valore della componente

$$v_{y2} = \frac{v_1 y_{02}}{x_{01} + \frac{q_2}{m_2} - D_2} \quad (2.3)$$

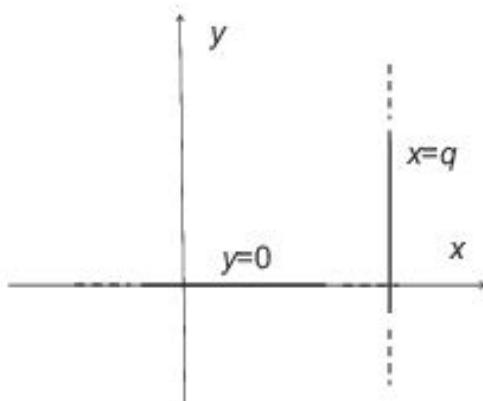
che, inserita nell'Eq. (2.1) di  $D_1$ , permette di ricavare la componente  $v_{x2}$  della velocità del secondo punto, come soluzione dell'equazione di secondo grado che ne deriverebbe.

Se ci si limita al caso in cui la traiettoria del secondo punto sia ortogonale a quella del primo (Fig. 2.2:  $\alpha = \pi/2$  e quindi  $m \rightarrow \infty$ ), le incognite del problema si riducono in quanto è  $v_{x2} = 0$ , la velocità del secondo punto riducendosi alla sua componente  $y$ , in un rapporto di velocità  $K$  ricavabile dall'Eq. (2.3), dato da

$$K = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y_{02}}{x_{01} - D_2}.$$

Corrispondentemente, la distanza  $D_1$  si riduce a

$$D_1 = \sqrt{x_{02}^2 + \left( y_{02} - \frac{v_2}{v_1} x_{01} \right)^2}$$



**Fig. 2.2.** Punti in moto rettilineo uniforme su traiettorie complanari ortogonali

ottenendosi così un'equazione di secondo grado, ancora nel rapporto  $K = v_2/v_1$  tra le due velocità:

$$x_{01}^2 K^2 - 2x_{01}y_{02}K + (y_{02}^2 + x_{02}^2 - D_1^2) = 0$$

con cui si possono determinare i valori delle due velocità incognite  $v_1$  e  $v_2$ .

*Come nell'esercizio precedente, si considerano ancora due punti che si muovono entrambi di moto rettilineo uniforme su un piano con le traiettorie che formano un angolo  $\alpha$ . Si ricerca l'istante  $t^*$  al quale la distanza  $D$  tra i due punti è minima e quanto essa vale.*

Scrivendo per il moto dei due punti le stesse equazioni orarie riportate in precedenza, la distanza in funzione del tempo assume l'espressione

$$D = \sqrt{[(x_{01} + v_1 t) - (x_{02} + v_{x2} t)]^2 + [y_{02} + v_{y2} t]^2}.$$

Per determinarne il valore minimo si annulla l'espressione della derivata temporale o, che è lo stesso in virtù del fatto che la distanza è sempre positiva, si annulla l'espressione del suo quadrato:

$$\frac{dD^2}{dt} = 2 [(x_{01} + v_1 t) - (x_{02} + v_{x2} t)] (v_1 - v_{x2}) + 2 [y_{02} + v_{y2} t] v_{y2} = 0$$

ottenendo

$$t^* = -\frac{(x_{01} - x_{02})(v_1 - v_{x2}) + y_{02}v_{y2}}{(v_1 - v_{x2})^2 + v_{y2}^2}.$$

Il valore della distanza minima si ottiene inserendo il tempo  $t^*$  nell'espressione generale della distanza in funzione del tempo:  $D_{\min} = D(t^*)$ .

*Si estende lo studio al caso di due rette ortogonali e sghembe nello spazio (Fig. 2.3).*

Nel caso di due rette sghembe ortogonalì la prima retta potrà ancora essere scelta come asse  $x$  e la seconda parallela all'asse  $z$ , passante per il punto del piano  $xy$  di coordinate  $(0, d, 0)$ , di equazione

$$x = 0$$

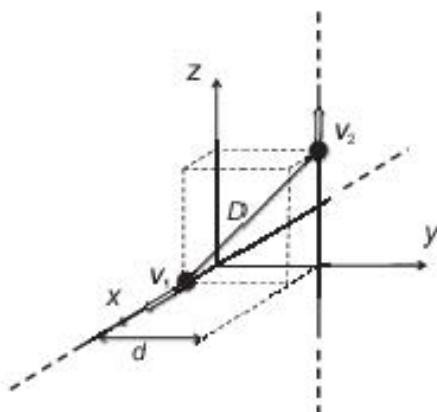
$$y = d.$$

Le equazioni del moto dei due punti si scrivono:

$$x = x_{01} + v_1 t \quad \text{e} \quad z = z_{02} + v_2 t$$

e la loro distanza  $D$  al variare del tempo:

$$D = \sqrt{(x_{01} + v_1 t)^2 + (z_{02} + v_2 t)^2}.$$



**Fig. 2.3.** Punti in moto rettilineo uniforme su traiettorie ortogonali sghembe

Essa è minima al tempo

$$t^* = -\frac{x_{01}v_1 + z_{02}v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

*Come problema inverso, per il caso di due traiettorie su rette parallele, si trovano le condizioni iniziali affinché la distanza minima tra i punti – coincidente con la distanza  $D$  tra le due rette – si raggiunga a un determinato tempo  $t_{\min}$  fissato.*

Mantenendo le equazioni già più sopra scritte per il moto del primo punto, il parallellismo tra le due rette richiede che, per il moto del secondo punto, sia

$$x_2 = x_{02} + v_2 t \quad \text{e} \quad y_2 = q,$$

essendo in questo caso  $m = 0$ . Si ha, quindi:

$$D = \sqrt{[(x_{01} + v_1 t) - (x_{02} + v_2 t)]^2 + q^2}$$

e

$$t^* = -\frac{x_{01} - x_{02}}{v_1 - v_2}.$$

Si può verificare che la distanza minima al tempo  $t^*$  è eguale alla distanza  $q$  tra le due rette parallele. Tale espressione per il tempo della distanza minima diviene a sua volta un'equazione di vincolo per le grandezze contenute in essa, se viene assegnato il tempo  $t_{\min}$ . Per esempio, se tale istante deve coincidere con l'inizio della coordinata temporale  $t_{\min} = 0$ , dev'essere  $x_{01} = x_{02}$ , cioè devono essere eguali le posizioni dei due punti all'istante  $t = 0$ .

*Si studia il caso di tre punti in moto rettilineo uniforme su tre rette complanari e parallele e si cercano le distanze tra le tre coppie di punti. Come problema inverso, si determinano le condizioni iniziali (per es.  $x_{01}$  oppure  $v_{01}$ ) perché a un certo istante i tre punti si trovino allineati lungo una retta,*

Le distanze tra ogni coppia di punti si determinano nello stesso modo in cui si è determinata la distanza tra i punti mobili su due sole rette.

Per trovare le condizioni di allineamento dei tre punti mobili, si può trovare preliminarmente l'equazione della retta, funzione del tempo, che unisce per es. il secondo e il terzo punto e quindi trovare la coordinata del punto intersezione tra questa e l'asse  $x$ , che coincide con la traiettoria del primo punto: questo valore della coordinata deve poi eguagliarsi alla posizione del punto mobile.

Si scrivono preliminarmente le posizioni dei tre punti (Fig. 2.4)

$$\begin{array}{lll} x = x_{01} + v_1 t & x = x_{02} + v_2 t & x = x_{03} + v_3 t \\ y = 0 & y = d_2 & y = d_3 \end{array}$$

quindi, per l'equazione generica della retta  $y = mx + q$ , il vincolo che passi per il secondo e terzo punto si esplicita come

$$d_2 = m(x_{02} + v_2 t) + q \quad \text{e} \quad d_3 = m(x_{03} + v_3 t) + q,$$

da cui possono ricavarsi i due parametri  $m$  e  $q$ :

$$m = \frac{d_2 - d_3}{(x_{02} - x_{03}) + (v_2 - v_3)t} \quad \text{e} \quad q = \frac{d_3(x_{02} + v_2 t) - d_2(x_{03} + v_3 t)}{(x_{02} - x_{03}) + (v_2 - v_3)t}.$$

Affinché tale retta passi anche per il primo punto mobile, di coordinata  $y = 0$ , occorre che sia

$$x = -\frac{q}{m} = \frac{d_3(x_{02} + v_2 t) - d_2(x_{03} + v_3 t)}{d_3 - d_2}$$

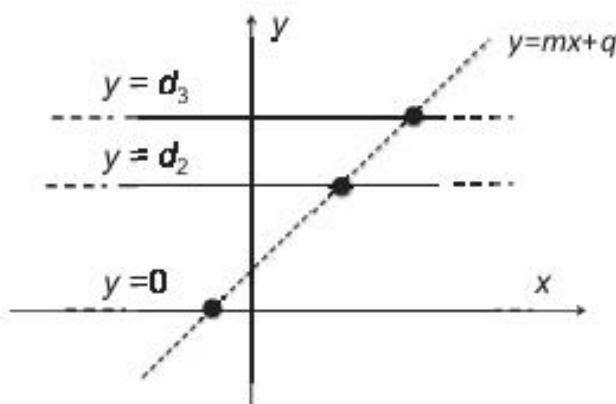


Fig. 2.4

che, per coincidere con  $x = x_{01} + v_1 t$ , fornisce

$$x_{01} = \frac{d_3 x_{02} - d_2 x_{03}}{d_3 - d_2} \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{d_3 v_2 - d_2 v_3}{d_3 - d_2}$$

che è il vincolo richiesto sulle condizioni del primo punto mobile.

## 2.2 Esercizio guida – Moti uniformemente accelerati

### Teoria

In un moto uniformemente accelerato il vettore accelerazione è costante,  $\mathbf{a} = \text{cost}$ , e la traiettoria del punto è parabolica con l'asse parallelo alla direzione del vettore accelerazione. Spostamento e velocità sono dati da

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t.\end{aligned}$$

In un moto comunque accelerato, la componente tangenziale  $a_t$  dell'accelerazione determina la variazione del modulo  $v$  del vettore velocità e la componente normale  $a_n$  ne determina la variazione di direzione ed è, quindi, responsabile della curvatura della traiettoria.

### Argomento

Si considerano più moti, combinando moti uniformemente accelerati con moti rettilinei uniformi, limitando il caso a un solo punto mobile accelerato. Nel problema diretto si cerca la distanza tra i punti a determinati istanti di tempo, la distanza minima ecc., in quelli inversi, i tempi, le velocità, le posizioni iniziali ecc.

Le traiettorie dei punti mobili giacciono su un medesimo piano  $xy$  e si usano pedici diversi per i diversi punti in movimento e le diverse traiettorie.

*Equazioni delle  
traiettorie ed  
equazioni*

Il sistema di riferimento ottimale per la descrizione della traiettoria di un moto uniformemente accelerato è quello per il quale un asse,  $y$  ad es., coincide con la direzione dell'accelerazione,

orarie

così da poter parametrizzare il moto del punto come

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t \\y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2.\end{aligned}$$

L'equazione della traiettoria diviene

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \frac{a}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0x}v_{0y} - ax_0}{v_{0x}^2} x + y_0 - \frac{v_{0y}x_0}{v_{0x}} + \frac{1}{2}a \left( \frac{x_0}{v_{0x}} \right)^2 = \\&= Ax^2 + Bx + C \quad (2.4)\end{aligned}$$

con

$$A = \frac{1}{2} \frac{a}{v_{0x}^2}, \quad B = \frac{v_{0x}v_{0y} - ax_0}{v_{0x}^2}, \quad C = y_0 - \frac{v_{0y}x_0}{v_{0x}} + \frac{1}{2}a \left( \frac{x_0}{v_{0x}} \right)^2.$$

Essa si semplifica nella

$$y = \frac{1}{2} \frac{a}{v_{0x}^2} x^2 = Ax^2$$

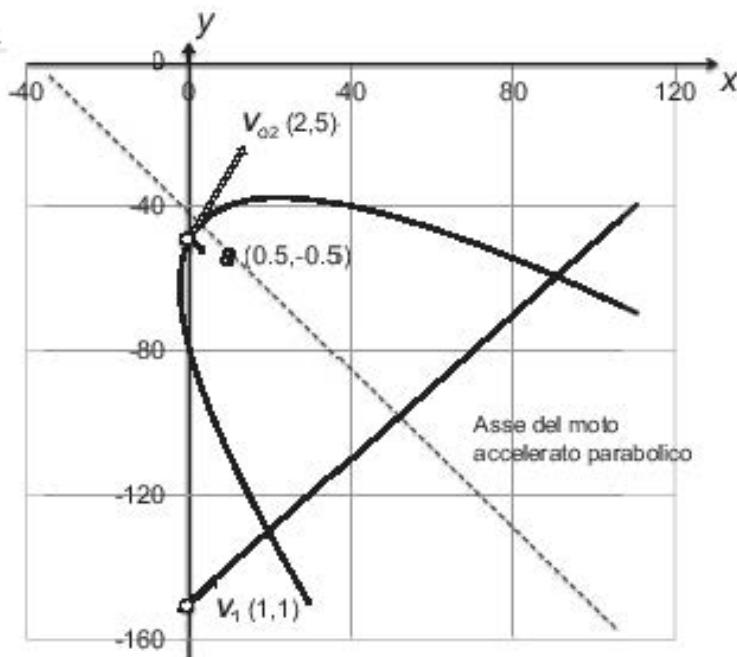
quando è possibile scegliere opportunamente le costanti del moto ( $x_0, y_0, v_{0y}$  nulle), facendo coincidere il vertice della traiettoria parabolica con l'origine delle coordinate.

*Due punti si muovono su un piano di moto rettilineo uniforme, il primo, e uniformemente accelerato, il secondo. Si cercano le coordinate del punto di intersezione delle due traiettorie e la distanza tra i due punti al variare del tempo.*

Nel caso più generale, quando non c'è possibilità di scelta degli assi coordinati (Fig. 2.5), l'equazione della traiettoria parabolica del moto uniformemente accelerato è data dall'Eq. (2.4) e quella del moto rettilineo uniforme dalla equazione usuale della retta

$$y = mx + q. \quad (2.4)$$

Le coordinate del punto intersezione tra le due traiettorie devono soddisfare ambedue le equazioni indicate, per cui si ha l'equazione di secondo grado nella coordinata  $x_{\text{int}}$



**Fig. 2.5.** Traiettorie di moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato sul piano  $(x, y)$ , con condizioni iniziali  $P_1 = (0, -150)$  e  $P_2 = (0, -50)$ ; velocità e accelerazione sono indicate in figura, non in scala con le coordinate degli assi

dell'intersezione, ottenuta eguagliando la coordinata  $y$  dei due punti:

$$Ax_{\text{int}}^2 + (B - m)x_{\text{int}} + (C - q) = 0$$

con soluzione

$$x_{\text{int}} = \frac{1}{a} \left\{ (v_{0x}v_{0y} - ax_0 - mv_{0x}^2) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{(v_{0x}v_{0y} - ax_0 - mv_{0x}^2)^2 - 2a \left[ v_{0x}^2y_0 - v_{0x}v_{0y}x_0 + \frac{1}{2}ax_0^2 - qv_{0x}^2 \right]} \right\}$$

e

$$y_{\text{int}} = mx_{\text{int}} + q.$$

Se la traiettoria del moto rettilineo uniforme può essere presa in coincidenza con l'asse  $x$ , si ha  $y = 0$  e, necessariamente,  $m = q = y_0 = 0$ . Conseguentemente, si

modifica la coordinata  $x_{\text{int}}$  del punto intersezione in

$$x_{\text{int}} = \frac{1}{a} \left\{ (v_{0x}v_{0y} - ax_0) \pm \sqrt{(v_{0x}v_{0y} - ax_0)^2 + 2a \left[ v_{0x}v_{0y}x_0 - \frac{1}{2}ax_0^2 \right]} \right\}.$$

La distanza tra i due punti al variare del tempo si determina facendo uso del teorema di Pitagora costruito sui cateti dati dalle differenze tra le coordinate omogenee dei due punti, tali coordinate essendo le proiezioni dei due vettori: del moto rettilineo uniforme e del moto uniformemente accelerato, scritti rispettivamente con i pedici 1 e 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{01} + \mathbf{v}_1 t \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{02} + \mathbf{v}_{02} t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2.\end{aligned}$$

La distanza tra i due punti diviene allora

$$D = \sqrt{\left[ (x_{01} + v_{x1}t) - \left( x_{02} + v_{0x2}t + \frac{1}{2}a_{x2}t^2 \right) \right]^2 + \left[ (y_{01} + v_{y1}t) - \left( y_{02} + v_{0y2}t + \frac{1}{2}a_{y2}t^2 \right) \right]^2} \quad (2.5)$$

con possibilità di semplificazione, ove si possano scegliere gli assi cartesiani in opportuno rapporto con le caratteristiche delle due traiettorie, come già più sopra esemplificato.

Per trovarne il valore minimo, si può procedere come già riportato nell'esercizio guida sul moto rettilineo uniforme a pagina 179: si annulla dapprima la derivata temporale del quadrato della distanza e si ricava l'istante temporale  $t^*$  in cui tale distanza viene raggiunta, quindi si inserisce  $t^*$  nell'Eq. (2.5) della distanza. Tale procedimento, tuttavia, richiede la soluzione di un'equazione algebrica di terzo grado, dal momento che la derivata composta dei termini in  $t$  comporta il prodotto delle espressioni tra parentesi quadra con le derivate degli stessi, anch'esse dipendenti da  $t$ . La soluzione non viene, pertanto, qui riportata e lasciata a un eventuale procedimento numerico.

Si considera il caso, di interesse pratico, in cui il moto uniforme avvenga su una retta ortogonale all'asse della traiettoria parabolica del moto uniformemente accelerato e si cercano le condizioni per cui i due punti si incontrino.

Il caso in esame è quello classico del proiettile con bersaglio mobile. Si scelgono gli assi in modo che la traiettoria del moto rettilineo coincida con l'asse  $x$  e, conseguentemente, che l'asse della traiettoria parabolica sia parallela all'asse  $y$ . Senza perdita di generalità, si sceglie l'origine delle coordinate coincidente con la posizione che il punto in moto rettilineo occupa al tempo  $t = 0$ . Ciò comporta che i parametri del moto assumano i valori:  $x_{01} = y_{01} = 0$ ,  $v_{y1} = 0$  e  $a_{x2} = 0$ .

Le due equazioni del moto divengono:

$$x = v_1 t$$

e

$$\begin{aligned} x &= x_{02} + v_{02x} t \\ y &= y_{02} + v_{02y} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}$$

con la distanza tra i due punti data da

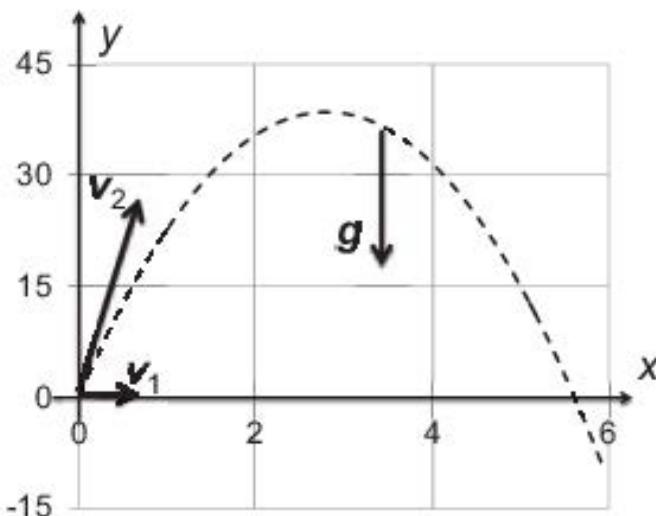
$$D = \sqrt{[v_1 t - (x_{02} + v_{02x} t)]^2 + \left[y_{02} + v_{02y} t + \frac{1}{2} a t^2\right]^2}.$$

Anche in questo caso, per la determinazione del valore minimo di tale distanza si ricade nella soluzione di un'equazione di terzo grado in  $t$ , che qui non si riporta. Si considera, in suo luogo, il problema delle condizioni per le quali le posizioni dei due punti possano a un certo istante coincidere. Perché ciò accada, ci deve essere un istante in cui le due coordinate  $x$  e  $y$  dei punti coincidono entrambe. Per la coincidenza della coordinata  $x$  occorre che sia

$$v_1 t = x_{02} + v_{02x} t;$$

ciò accade al tempo

$$t_{\text{coincid}} = \frac{x_{02}}{v_1 - v_{02x}}.$$



**Fig. 2.6.** Traiettorie di un grave lanciato a colpire un punto mobile di moto rettilineo uniforme (nell'esempio riportato, i dati sono:  $v_1 = v_{02x} = 10 \text{ m/s}$ ,  $v_{02y} = 27.5 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 70^\circ$ ).

Tale condizione richiede che il tratto  $x_{02}$  sia percorso nel tempo  $t_{\text{coincid}}$  con velocità differenza tra le due velocità lungo  $x$ . All'istante  $t_{\text{coincid}}$  devono coincidere le coordinate  $y$  dei due punti, il che comporta

$$y_{02} + v_{02y}t_{\text{coincid}} + \frac{1}{2}at_{\text{coincid}}^2 = y_{02} + \frac{v_{02y}x_{02}}{v_1 - v_{02x}} + \frac{1}{2}a\left(\frac{x_{02}}{v_1 - v_{02x}}\right)^2 = 0.$$

Tale è, quindi, il vincolo cercato sui parametri e le condizioni iniziali del moto dei punti: per es., fissate le posizioni al tempo  $t = 0$ , l'accelerazione del secondo punto deve essere

$$a = 2\frac{(v_1 - v_{02x})(y_{02}(v_1 - v_{02x}) + v_{02y}x_{02})}{x_{02}^2}.$$

Questo è il caso di un grave lanciato verso l'alto con la velocità che forma un certo angolo  $\alpha$  con l'orizzontale per colpire un punto in moto su una traiettoria orizzontale con velocità costante. Se il lancio è effettuato all'istante  $t = 0$  da posizione coincidente con quella stessa del punto in moto rettilineo uniforme ( $x_{02} = y_{02} = 0$ , Fig. 2.6), il vincolo sull'accelerazione diviene

$$2\frac{(v_1 - v_{02x})v_{02y}}{x_{02}} = g$$

con  $g$  accelerazione di gravità. Tale condizione vale la

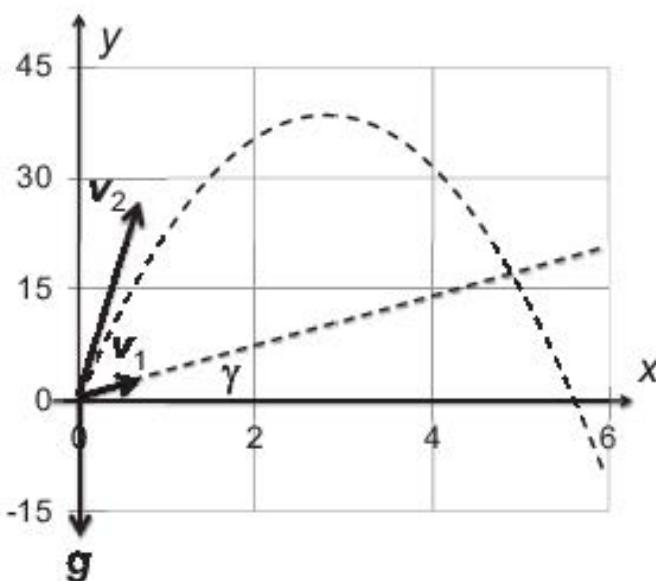
$$g = \frac{2v_{02y}}{t_{\text{coincid}}}$$

che corrisponde a richiedere che, nel caso di partenza dei due punti dalla stessa posizione, il tempo di coincidenza sia il doppio del tempo impiegato a raggiungere l'apice della traiettoria, quando si annulla la componente verticale della velocità.

*Per estensione del caso precedentemente riportato, si considera il caso in cui il moto rettilineo del primo punto avvenga su una retta inclinata di un angolo  $\gamma$  rispetto all'orizzontale (Fig. 2.7).*

Rispetto al caso precedente, nell'ipotesi che all'istante  $t = 0$  i due punti siano situati nella stessa posizione, scelta come origine delle coordinate, si muta la sola equazione oraria del primo punto, in particolare quella della componente  $y$ , secondo le

$$x = v_{1x}t \quad \text{e} \quad y = v_{1y}t.$$



**Fig. 2.7.** Traiettorie di un grave lanciato a colpire un punto mobile di moto rettilineo uniforme con traiettoria obliqua nello spazio (nell'esempio riportato, i dati sono:  $v_{1x} = v_{02x} = 10 \text{ m/s}$ ,  $v_{02y} = 27.5 \text{ m/s}$ ,  $\gamma = 20^\circ$ ,  $\alpha = 70^\circ$ ).

In questo caso, la coincidenza delle posizioni a un certo istante richiede che siano soddisfatte le due condizioni, rispettivamente sulla coordinata  $x$  e sulla  $y$ :

$$v_{1x}t = v_{02x}t \quad \text{e} \quad v_{1y}t = v_{02y}t + \frac{1}{2}gt^2,$$

dalla prima delle quali si ricava il vincolo di egualanza delle componenti  $x$  delle velocità  $v_{1x} = v_{02x}$  e dalla seconda la

$$t_{\text{coincid}} = 2 \frac{v_{1y} - v_{02y}}{g}.$$

La quota  $h$  a cui avviene l'impatto tra i due punti è la coordinata  $y$  raggiunta dal primo mobile al tempo  $t_{\text{coincid}}$ :

$$h = v_{1y}t_{\text{coincid}} = 2 \frac{v_{1y}}{g} (v_{1y} - v_{02y})$$

e, poiché l'angolo  $\gamma$  della traiettoria rettilinea del primo punto sull'orizzontale ha tangente pari a

$$\tan \gamma = \frac{v_{1y}}{v_{1x}},$$

si ha:

$$h = 2 \frac{v_{1x} \tan \gamma (v_{1x} \tan \gamma - v_{02y})}{g}.$$

## 2.3 Domande di verifica

- Definire il vettore accelerazione istantanea per un punto materiale in moto su di un piano e precisare la relazione che sussiste tra le sue componenti tangenziale e normale e la velocità.
- Dimostrare che un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme con velocità  $v$  possiede un'accelerazione centripeta pari a  $v^2/r$ , essendo  $r$  il raggio della circonferenza.
- Mostrare come nel moto circolare uniforme l'accelerazione sia unicamente centripeta e si ricavi il valore in termini della velocità e del raggio di curvatura.
- Definire l'accelerazione angolare di un punto in un moto circolare non uniforme.
- Definire la fase nel moto armonico di un punto.
- Mostrare la relazione che intercorre tra il vettore spostamento e il vettore accelerazione in un moto armonico.
- Definire la velocità areolare di un punto rispetto a un polo.

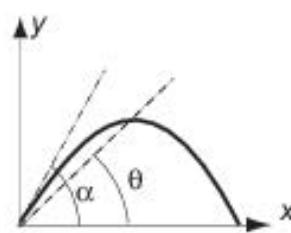
## 2.4 Esercizi

- [1] All'istante  $t = 0$  un punto materiale, partendo da fermo, si mette in moto su una traiettoria circolare, giacente su un piano orizzontale liscio, di raggio  $R = 225\text{ m}$ . Fino all'istante  $t_1 = 10\text{ s}$ , la velocità cresce linearmente con il tempo e lo spazio percorso è di  $150\text{ m}$ . Determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante  $t_1$ .
- [2] Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea con accelerazione dipendente dal tempo,  $a = -4t\text{ ms}^{-2}$ . Se all'istante  $t = 0$  il punto parte con una velocità  $v_0 = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , quanto spazio percorrerà prima di fermarsi?
- [3] Un treno affrontando una curva con raggio costante  $r = 150\text{ m}$ , rallenta di moto uniformemente decelerato passando, in un tempo  $t = 15\text{ s}$ , da  $90\text{ km/h}$  all'inizio della curva a  $50\text{ km/h}$  alla fine della curva. Determinare il modulo

dell'accelerazione del treno nel momento in cui la sua velocità è di 50 km/h, assumendo che in questo istante esso continui a decelerare.

- [4] All'istante  $t = 0$  un pendolo semplice di massa  $m = 0.5 \text{ kg}$  e lunghezza  $l = 0.7 \text{ m}$  parte da fermo a un angolo  $\theta = 30^\circ$  con la verticale. Determinare, all'istante  $t = 0$ , il modulo dell'accelerazione tangenziale, dell'accelerazione normale e dell'accelerazione angolare.
- [5] All'istante  $t = 0$  una massa puntiforme ferma nell'origine di un sistema cartesiano  $(x, y)$  posto su un piano orizzontale liscio, parte con una velocità  $v_0 = 1 \text{ m/s}$  diretta con un angolo  $\theta = \pi/4$  rispetto al semiasse positivo delle  $x$ . La massa è sottoposta a un'accelerazione  $\mathbf{a} = -g\mathbf{i} - g/2\mathbf{j}$ , dove  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  sono i versori degli assi  $x$  e  $y$ , rispettivamente, e  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità. Determinare la componente della velocità vettoriale della massa nell'istante in cui la sua posizione sul semiasse positivo delle  $x$  è massima.
- [6] Un aereo vola con velocità costante  $v_0$  seguendo una rotta rettilinea inclinata verso il basso di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzonte. Se il pilota volesse centrare un bersaglio a terra sganciando una massa puntiforme da una quota  $h$ , a quale distanza  $d$  dal bersaglio dovrebbe sganciarla?
- [7] Un punto materiale si muove lungo una traiettoria circolare di raggio  $R = 250 \text{ m}$ . Dall'istante iniziale  $t_0 = 0 \text{ s}$  all'istante  $t_1 = 10 \text{ s}$  la sua velocità cresce quadraticamente con il tempo ( $v = kt^2$ ); in tale intervallo di tempo, il punto materiale percorre uno spazio  $\Delta s = 250 \text{ m}$ . Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante  $t_1$ .
- [8] Due osservatori,  $A$  e  $B$ , si muovono in versi opposti lungo l'asse delle  $x$  con la stessa velocità  $v$ , costante. Quando, all'istante  $t = 0$ , si trovano nello stesso punto  $O$ , un suono viene emesso da una sorgente sonora  $S$  posta sull'asse delle  $x$  a distanza  $d$  da  $O$ . Determinare il valore di  $v$  e  $d$  sapendo che l'osservatore  $A$  che si sta muovendo verso la sorgente percepisce il suono all'istante  $t_A = 8 \text{ s}$ , mentre l'altro osservatore percepisce il suono all'istante  $t_B = 10 \text{ s}$ . (La velocità del suono in aria vale:  $v_S = 340 \text{ m/s}$ , indipendentemente dal moto dell'osservatore)

- [9] Una massa puntiforme è lanciata verso l'alto con una velocità inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Un osservatore posto nel punto di lancio della massa, la vede raggiungere la quota massima e misura l'angolo  $\theta$  corrispondente. Mostrare che  $\tan \theta = 1/2 \tan \alpha$



- [10] Un punto materiale  $A$  viene lasciato cadere al suolo da un'altezza  $h$  con velocità nulla e, contemporaneamente, un punto materiale  $B$  viene lanciato dal suolo verso l'alto, lungo la direzione del moto di  $A$ , con velocità  $v_0$ . Determinare il valore di  $v_0$  affinché i due punti si scontrino a un'altezza pari ad  $h/2$ .
- [11] Un punto materiale inizialmente fermo si muove con accelerazione tangenziale costante su una traiettoria circolare di raggio  $R = 0.5$  m giacente in un piano verticale. All'istante  $t_1 = 2$  s il punto abbandona la traiettoria circolare proseguendo lungo la tangente in direzione verticale verso l'alto. Sapendo che il punto raggiunge una quota massima di  $h = 2$  m, rispetto al punto più in basso della traiettoria circolare. Si determini: a) il valore dell'accelerazione tangenziale durante il moto circolare e b) lo spazio percorso lungo la traiettoria circolare prima di abbandonarla.
- [12] Un punto materiale si muove con una velocità angolare  $\omega = \pi$  rad/s lungo una circonferenza di raggio  $R$  e centro nel punto  $O$  origine di un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Determinare l'angolo  $\varphi$  che formava inizialmente il raggio con la direzione positiva dell'asse  $x$ , sapendo che all'istante  $t_1 = 1/2$  s il modulo dell'ampiezza del moto armonico sull'asse  $x$  è  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ .
- [13] Trascurando la resistenza dell'aria, si determini l'angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale con il quale deve essere lanciato un grave di massa  $m$  affinché l'altezza massima raggiunta durante il moto sia uguale alla gittata.
- [14] Due corpi puntiformi si muovono in un campo gravitazionale uniforme. Partono da uno stesso punto con due velocità iniziali in direzione orizzontale ( $x$ ) e in versi opposti di  $v_1 = 3$  m/s e  $v_2 = 4$  m/s. Trovare la distanza tra i corpi al momento in cui le loro velocità diventano mutualmente ortogonalî.

- [15] Una ruota gira attorno a un asse stazionario con angolo di rotazione che varia nel tempo con la legge  $\varphi = at^2$  dove  $a = 0.2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ . Trovare l'accelerazione totale  $w$  del punto  $A$  sul bordo al tempo  $t_0 = 2.5 \text{ s}$  se la velocità tangenziale del punto in quel momento è  $v(t_0) = 0.65 \text{ m/s}$ .
- [16] Un'automobile sta percorrendo in pianura una strada rettilinea con velocità costante, di modulo  $V = 65 \text{ km/h}$ . Si determinino – rispetto a un sistema di riferimento solidale con la strada – direzioni, versi e moduli delle velocità e delle accelerazioni dei punti sulla circonferenza esterna delle ruote, di raggio  $R = 25 \text{ cm}$ , nelle posizioni di massima ( $v_A$  e  $a_A$ ) e di minima ( $v_B$  e  $a_B$ ) quota.
- [17] Due ciclisti percorrono con velocità costanti,  $v_1 = 32 \text{ km/h}$  e  $v_2 = 38 \text{ km/h}$ , una pista circolare in verso discorde. Si chiede di determinare il raggio  $R$  della pista sapendo che essi si incontrano ogni  $\tau = 35 \text{ s}$ .

## 2.5 Soluzioni degli esercizi

- [1] Il moto è uniformemente accelerato:

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{2}a_t t^2 \quad \Rightarrow \quad a_t = 2 \frac{s(t_1)}{t_1^2} = 3 \text{ m/s}^2.$$

$$v(t_1) = a_t t_1 = 30 \text{ m/s}.$$

Pertanto, il valore dell'accelerazione normale nell'istante  $t_1$  sarà:

$$a_n(t_1) = \frac{v(t_1)^2}{R} = 4 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5 \text{ m/s}^2.$$

- [2]

$$\frac{dv}{dt} = -4t \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} dv = -4 \int_0^t t dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 - 2t^2$$

$$v(\bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tempo impiegato per fermarsi: } \bar{t} = \sqrt{\frac{v_0}{2}} = 1 \text{ s}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - 2t^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 - 2t^2) dt;$$

pertanto:

$$x(t) = v_0 t - \frac{2}{3} t^3$$

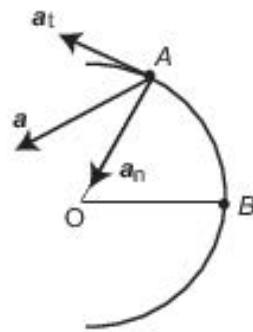
e quindi:  $x(\bar{t}) = 1.33$  m.

[3] Siano  $A$  e  $B$  la posizione iniziale e finale del treno:

$$v_A = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s} \quad v_B = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/s}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad \text{dove:}$$

$$a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{e} \quad a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R}.$$



Poiché  $v(t) = v_0 - a_t t$ , nel punto  $B$  si ha:

$$[a_t]_B = \frac{|v_B - v_A|}{t} = 0.7 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad [a_n]_B = \frac{v_B^2}{R} = 1.3 \text{ m/s}^2.$$

Di qui:

$$a_B = \sqrt{[a_t]_B^2 + [a_n]_B^2} = 1.5 \text{ m/s}^2.$$

[4]

$$a_t(0) = g \sin \theta = 4.9 \text{ m/s}^{-2}; \quad a_n(0) = 0 \text{ m/s}^{-2};$$

$$\omega = \frac{v}{l} \Rightarrow \dot{\omega}(0) = \frac{1}{l} \frac{dv}{dt}(0) = \frac{1}{l} a_t(0) = 7 \text{ rad/s}^{-2}.$$

[5]

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{0x} - gt \\ v_y = v_{0y} - \frac{1}{2}gt \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \end{array} \right.$$

La posizione massima sul semiasse positivo delle  $x$  è raggiunta nell'istante in cui il moto lungo quest'asse si inverte:

$$v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0x}}{g} = \frac{\sqrt{2}}{2g}$$

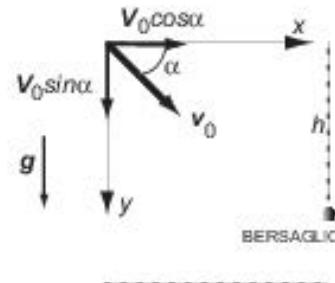
In questo istante, quindi, il vettore velocità ha solo componente lungo l'asse  $y$  che vale:

$$v_y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}g\frac{\sqrt{2}}{2g} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ m/s.}$$

[6] Per il moto lungo l'asse  $x$  e  $y$  si ha, rispettivamente:

$$x(t) = v_{0x}t \quad \text{e} \quad y(t) = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

dove



$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Se  $t^*$  è il tempo impiegato dalla massa per colpire il bersaglio, allora:

$$h = v_0 \sin \alpha t^* + \frac{1}{2}gt^{*2} \quad \text{e} \quad d = v_0 \cos \alpha t^*$$

Da questo sistema di equazioni si ha:

$$t^* = -\frac{v_0}{g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}}.$$

Pertanto:

$$d = v_0 \cos \alpha \left( \frac{-v_0}{g} \sin \alpha + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g}} \right).$$

[7]

$$v(t) = kt^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = \frac{1}{3}kt^3 \quad \Rightarrow \quad k = 0.75 \text{ m/s}^3$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2kt \quad \Rightarrow \quad a_t(t_1) = 15 \text{ m/s}^2.$$

$$a_n = \frac{v^2(t_1)}{R} = 22.50 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 27.04 \text{ m/s}^2.$$

[8] Se nel punto  $O$  si pone l'origine dell'asse delle  $x$ ,  $OA = vt_A$  e  $OB = -vt_B$ ,

si ha il seguente sistema:

$$OA = vt_A$$

$$OA = d - v_S t_A$$

$$OB = -vt_B$$

$$OB = d - v_S t_B$$

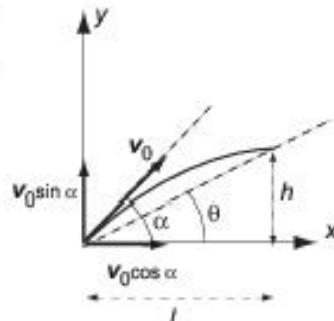
da cui si ricava:

$$d = \frac{2v_S t_A}{1 + \frac{t_A}{t_B}} = 3022.2 \text{ m} \quad v = 37.8 \text{ m/s.}$$

- [9] Per il moto della massa lungo l'asse  $y$ , indicando rispettivamente con  $h$  e  $t^*$  la quota massima e il tempo impiegato a raggiungerla, utilizzando le leggi del moto uniformemente accelerato, si ha:

$$t^* = v_0 \sin \alpha / g$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}.$$



Se  $l$  è l'ascissa corrispondente alla quota massima:

$$l = v_0 \cos \alpha t^* = v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g \Rightarrow \tan \theta = \frac{h}{l} = \frac{1}{2} \tan \alpha.$$

- [10] Rispetto a un asse  $y$  diretto verticalmente verso l'alto, le leggi orarie dei due punti materiali  $A$  e  $B$  sono, rispettivamente:

$$y_A = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_B = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Imponendo la condizione che  $y_A = y_B = h/2$  si ottiene che l'impatto fra i due

punti avviene dopo un tempo

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{gh}.$$

[11] Nella prima fase si ha un moto circolare uniformemente accelerato:

$$v(t) = a_t t \quad s(t) = \frac{1}{2} a_t t^2.$$

Dopo aver abbandonato la traiettoria circolare il punto prosegue verso l'alto raggiungendo una quota massima rispetto al punto di distacco pari a

$$h = R + \frac{v(t_1)^2}{2g} = R + \frac{(a_t t_1)^2}{2g} \Rightarrow a_t = 2.71 \text{ ms}^{-2} \quad s(t_1) = 5.42 \text{ m.}$$

[12]

$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi)$$

da cui:

$$x(t_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} R = R \cos(\omega t_1 + \varphi) \Rightarrow \pm \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

I due valori di  $\varphi$  compatibili con le condizioni imposte dall'esercizio sono quindi:  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$  e  $\varphi_2 = -\frac{3}{4}\pi$ .

[13] Indicando con  $v_0$  la velocità iniziale del grave, con  $g$  l'accelerazione di gravità, con  $x$  e  $y$  le componenti del vettore posizione del grave lungo l'asse orizzontale e verticale, rispettivamente, si ha che la quota massima,  $h$ , è raggiunta dopo un tempo  $\bar{t} = v_0 \sin \alpha / g$ . Pertanto,

$$\begin{cases} y(\bar{t}) = h & \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ x(\bar{t}) = \frac{h}{2} & \Rightarrow h = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \end{cases}$$

Si ha, pertanto:

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \Rightarrow \tan \alpha = 4 \Rightarrow \alpha \simeq 76^\circ.$$

[14] La condizione di ortogonalità ad un certo istante  $t = t^*$  diventa

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = -v_1v_2 + g^2(t^*)^2 = 0$$

per cui

$$t^* = \frac{\sqrt{v_1v_2}}{g}.$$

La componente della distanza lungo  $y$  non varia mentre la distanza  $d$  lungo  $x$  aumenta in proporzione alla velocità relativa tra i corpi

$$d = (v_1 + v_2)t^* = (v_1 + v_2) \frac{\sqrt{v_1v_2}}{g} = 2.5 \text{ m.}$$

[15] Poiché  $\varphi = at^2$ , ne segue che  $\omega = 2at$  e  $\dot{\omega} = 2a$ . Il raggio della ruota è  $R = v/\omega$  quindi:

$$R = \frac{v(t_0)}{2at_0};$$

le componenti normale e tangenziale dell'accelerazione sono quindi

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{v^2}{R} = 2vat_0 \\ w_t &= R\dot{\omega} = \frac{v}{t_0}. \end{aligned}$$

Il modulo dell'accelerazione totale al tempo  $t_0$  è pertanto:

$$w = \frac{v}{t_0} \sqrt{1 + 4a^2t_0^4} = 0.7 \text{ m/s}^2.$$

[16] Le grandezze cinematiche nei due sistemi di riferimento della strada (assoluto) e dell'automobile (relativo) sono legate dalle espressioni dei moti relativi secondo:

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{trasc}} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{trasc}} + \mathbf{a}_{\text{compl.}}$$

Nel caso specifico, la  $\mathbf{v}_{\text{trasc}}$  è la velocità orizzontale  $\mathbf{V}$  dell'automobile e la  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ , di modulo pari a  $V$  (per es. il punto di contatto della ruota con la strada ha velocità  $-V$  rispetto all'asse, solidale con l'automobile) nelle due posizioni

richieste è anch'essa orizzontale, di verso concorde con quello di V nel punto di massima quota e opposto in quello di minima, per cui

$$(v_a)_{\text{ass}} = V + v = 2V = 36.1 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad (v_b)_{\text{ass}} = V - v = 0.$$

Riguardo alle accelerazioni, si nota che è  $\mathbf{a}_{\text{trasc}} = 0$  e quindi anche  $\mathbf{a}_{\text{compl}} = 0$ ; pertanto nei due sistemi le accelerazioni di ogni punto delle ruote sono le medesime. In particolare, quindi, i punti richiesti saranno sottoposti alla sola accelerazione centripeta, che nelle posizioni richieste sarà di modulo

$$a_{\text{ass}} = a_{\text{rel}} = \frac{v_{\text{rel}}^2}{R} = \frac{V^2}{R} = 1304 \text{ m/s}^2$$

diretta verso il basso nella posizione A verso l'alto nella posizione B.

- [17] Tra un incrocio e il successivo i due ciclisti avranno percorso una frazione diversa della pista ma complessivamente avranno percorso l'intera circonferenza. Di conseguenza, si può scrivere

$$2\pi R = v_1 \tau + v_2 \tau,$$

da cui

$$R = \frac{v_1 + v_2}{2\pi} \tau = 108.6 \text{ m.}$$

# Capitolo 3

## Dinamica del punto materiale

### 3.1 Esercizio guida – Forze elastiche

#### Teoria

Caratteristica delle forze elastiche è la proporzionalità diretta tra il vettore forza  $\mathbf{F}_{\text{el}}$  e il vettore posizione  $\mathbf{r}$ , distanza da un punto fisso centro del sistema, la costante di proporzionalità essendo negativa:

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = -k\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Nella realtà, le deformazioni di un corpo solido danno luogo a forze di tipo elastico su corpi che siano solidali con le superfici deformate, come nel caso dell'estremo libero di una molla o di un elastico, quando l'altro estremo sia fissato a un punto. La proiezione dell'Eq. (3.1) su uno qualunque dei tre assi coordinati di un sistema cartesiano rappresenta l'equazione di una forza elastica monodimensionale. Una tale forza è conservativa e ha come funzione potenziale la

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

#### Argomento

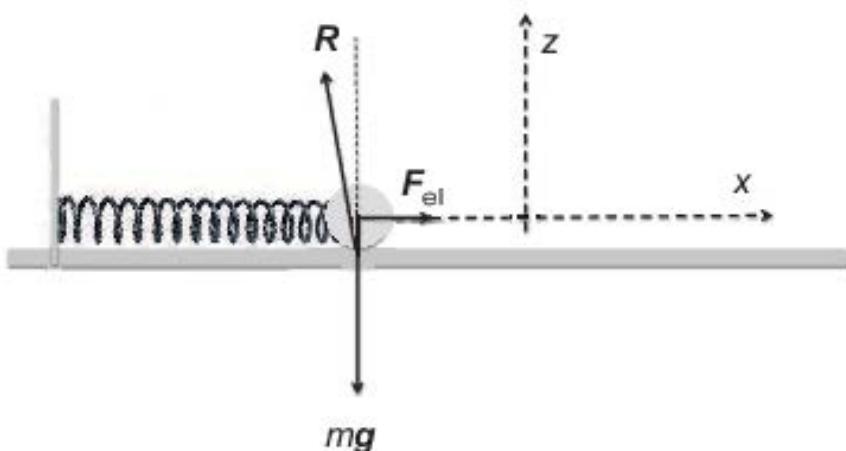
Una massa puntiforme  $m$  è vincolata all'estremo di una molla, fissata con l'altro

estremo a un punto fisso. La massa poggia e può scorrere su un piano orizzontale o inclinato, con o senza attrito, o essere guidata lungo una linea. Sul punto agisce una forza esterna costante che viene rimossa al tempo  $t = 0$ . Si cercano le condizioni del moto in configurazioni successive e determinate del moto.

*Si applica  
l'equazione del  
lavoro e  
dell'energia tra  
due condizioni  
diverse*

Si valuta l'energia totale del punto nella configurazione di riposo iniziale e, applicando il principio del lavoro e dell'energia, si può determinare il valore della velocità in ogni punto della traiettoria. Se non sono presenti forze dissipative dovute all'attrito dell'appoggio (piano o guida), si ha la conservazione dell'energia meccanica, in quanto le forze presenti sono conservative, altrimenti la perdita di energia meccanica vale il lavoro delle forze dissipative.

*Una molla di massa trascurabile e di costante elastica  $k$  giace su un piano orizzontale con un estremo fisso a un punto ed è compressa di un tratto  $H$  da una forza, applicata su una massa puntiforme  $m$  solidale con l'estremo libero. Il piano presenta un coefficiente di attrito  $\mu$ . La forza che comprime la molla viene rimossa al tempo  $t = 0$  e si determina il valore della velocità al passaggio della massa per il punto in cui la configurazione della molla è di riposo e la successiva elongazione massima che può subire la molla.*



**Fig. 3.1.** Configurazione del sistema massa-molla su piano orizzontale al tempo  $t = 0$ , dopo il rilascio del blocco

Scegliendo l'origine delle ascisse  $x$  coincidente con la posizione che avrebbe l'estremo della molla se fosse  $H = 0$ , l'energia totale del sistema massa-molla nella configurazione iniziale al tempo  $t = 0$ , immediatamente dopo la rimozione del blocco (Fig. 3.1), è

$$E_{\text{iniziale}} = \frac{1}{2}kH^2.$$

Dopo la rimozione della forza di blocco, la massa è sottoposta a una forza verticale complessivamente nulla (il peso è bilanciato dalla componente normale del vincolo di appoggio) e da una forza orizzontale, somma della forza elastica e di quella di attrito. Quest'ultima è dissipativa e il suo lavoro negativo riduce l'energia totale della massa, somma di quella cinetica e della potenziale elastica. Per il primo intervallo temporale, dal tempo  $t = 0$  sino a quello corrispondente al punto di elongazione massima della molla ( $x_{\max} > 0$ ), l'equazione del bilancio energetico si scrive

$$L_{\text{attrito}} = \mu mg(x + H) = E_{\text{iniziale}} - E(x) = \frac{1}{2}k(H^2 - x^2) - \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.2)$$

Dall'equazione (3.2) si ricava:

$$v^2 = \frac{k}{m}(H^2 - x^2) - 2\mu g(x + H)$$

che, per il valore  $x = 0$  corrispondente al passaggio della massa per il punto di riposo, diviene

$$v(x = 0) = \sqrt{\left(\frac{kH}{m} - 2\mu g\right)H}.$$

Dalla medesima Eq. (3.2) si ricava il valore dell'elongazione massima  $x_1$ , ponendo  $v = 0$  e risolvendo rispetto a  $x$ :

$$x_1 = \frac{-\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 - kH(2\mu mg - kH)}}{k}$$

che, nel caso in cui sia assente l'attrito ( $\mu = 0$ ), correttamente fornisce:

$$x_1 = H.$$

Dopo il passaggio per il punto  $x_1$  di elongazione massima, la massa ripassa per il punto  $x = 0$  e raggiunge l'elongazione massima negativa  $x_2$ , il cui valore, e più

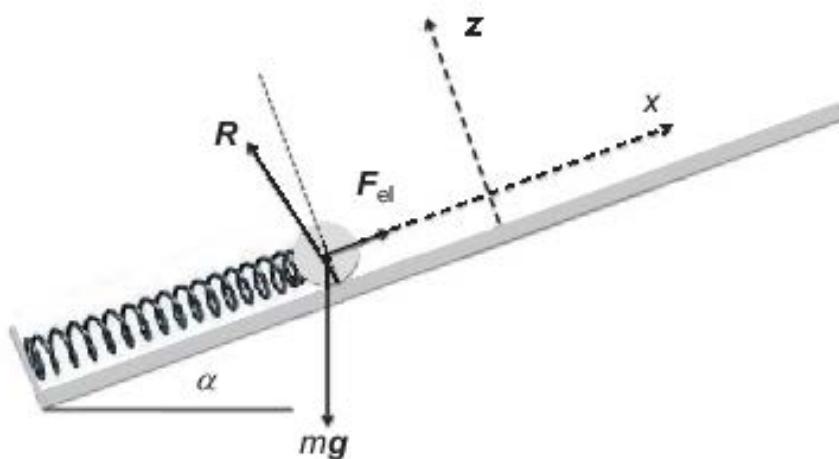
in generale quelli delle oscillazioni successive, si calcola valutando correttamente il lavoro negativo fatto dalla forza di attrito sull'intero percorso compiuto dalla massa. In particolare, per il valore  $x_2$ , l'Eq. (3.2) si scrive:

$$x_2 = \frac{-\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 - k[\mu mg(H + 2x_1) - kH^2]}}{k}.$$

*Quale estensione del problema, si considera il caso in cui il piano di scivolamento sia inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale con l'estremo fisso della molla situato sia al di sotto, sia al di sopra dell'estremo solidale con la massa.*

Il problema si muta rispetto al caso precedentemente descritto per la presenza della componente attiva del peso, parallela al piano, cui corrisponde il termine potenziale dell'energia gravitazionale  $mgx \sin \alpha$ , e per l'espressione della forza di attrito  $\mu mg \cos \alpha$ , che in tale caso è la frazione  $\mu$  della sola componente normale del peso stesso.

Nel caso in cui l'estremo fisso della molla sia situato al di sotto dell'estremo solidale



**Fig. 3.2.** Configurazione del sistema massa-molla su piano inclinato al tempo  $t = 0$ , dopo il rilascio del blocco

con la massa (Fig. 3.2), l'equazione corrispondente all'Eq. (3.2) assume la forma

$$\begin{aligned} L_{\text{attrito}} &= \mu mg \cos \alpha (x + H) = E_{\text{iniziale}} - E(x) = \\ &= \left( \frac{1}{2} k H^2 - mgH \sin \alpha \right) - \left( \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k x^2 + mgx \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

dalla quale si ricava il valore della velocità della massa nel passaggio per il punto di riposo ponendo, come nel caso precedente,  $x = 0$ :

$$v(x = 0) = \sqrt{\left[ \frac{kH}{m} - 2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right] H}.$$

Nel caso simmetrico in cui l'estremo fisso della molla sia situato al di sopra dell'estremo solidale con la massa, l'equazione corrispondente all'Eq. (3.2) assume la forma

$$\mu mg \cos \alpha (x + H) = \left( \frac{1}{2} k H^2 + mgH \sin \alpha \right) - \left( \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k x^2 + mgx \sin \alpha \right),$$

da cui similmente

$$v(x = 0) = \sqrt{\left[ \frac{kH}{m} + 2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \right] H}.$$

*Quale ulteriore variante al problema, si ipotizza che l'estremo fisso della molla sia posto al di sotto del vincolo piano orizzontale – da pensarsi in questo caso costituito da due guide parallele – su cui è posta la massa (Fig. 3.3). È data la lunghezza  $L$  di riposo della molla (minore della distanza  $h$  dell'estremo fisso dal piano di appoggio) e si determina la velocità della massa al passaggio per il punto  $x = 0$  partendo da  $x_0$ . Come problema inverso, si determina il coefficiente di attrito  $\mu$ , essendo data la velocità della massa al passaggio per il punto  $x = 0$ .*

In questo caso la forza di reazione  $R$  risultante sulla direzione verticale è data in modulo dalla somma della forza peso e della componente verticale della forza elastica,

pari a

$$R_{\text{normale}} = mg + k[l(x) - L] \frac{x}{l(x)}.$$

La forza di attrito è, pertanto:

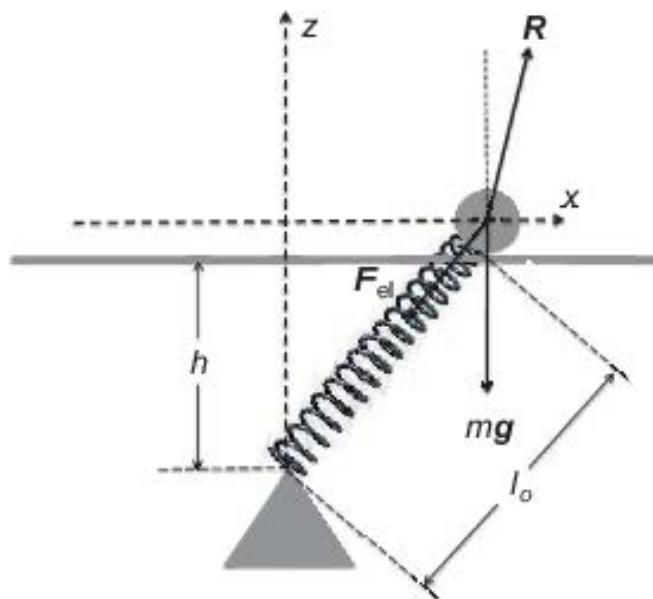
$$F_{\text{attrito}} = \mu \left\{ mg + k[l(x) - L] \frac{x}{l(x)} \right\}.$$

Rifacendosi allo sviluppo del primo caso, quindi, l'equazione dell'energia si scrive:

$$\begin{aligned} \mu \left\{ mg(x_0 - x) + \int_{x_0}^x k[l(x) - L] \frac{x}{l(x)} dx \right\} &= \\ &= \frac{1}{2}k(l_0 - L)^2 - \left\{ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k[l(x) - L]^2 \right\} \end{aligned}$$

che, per  $x = 0$ , diviene

$$\begin{aligned} \mu \left\{ mgx_0 + \int_{x_0}^0 k[l(x) - L] \frac{x}{l(x)} dx \right\} &= \\ &= \frac{1}{2}k(l_0 - L)^2 - \left[ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(h - L)^2 \right], \end{aligned}$$



**Fig. 3.3.** Configurazione con la massa vincolata a muoversi su un piano orizzontale con la molla fissata a un punto sottostante

ovvero:

$$\begin{aligned}\mu \left[ mgx_0 - k \frac{x_0^2}{2} - kL(h - l_0) \right] &= \\ &= \frac{1}{2}k(l_0 - L)^2 - \left[ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(h - L)^2 \right] \quad (3.3)\end{aligned}$$

avendo posto

$$l(x) = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Risolvendo rispetto a  $v$  si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} [(l_0 - L)^2 - (h - L)^2] + 2\mu \left\{ gx_0 - \frac{k}{m} \left[ \frac{x_0^2}{2} - L(h - l_0) \right] \right\}}.$$

Nel caso in cui non ci fossero forze di attrito, l'espressione diviene

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} [(l_0 - h)(l_0 + h - 2L)]}.$$

Per il problema inverso, di determinare il coefficiente di attrito  $\mu$  essendo data la velocità della massa al passaggio per il punto  $x = 0$ , si risolve l'Eq. (3.3) rispetto al coefficiente  $\mu$ :

$$\mu = \frac{(l_0 - L)^2 - \frac{mv^2}{k} - (h - L)^2}{\frac{2m}{k}gx_0 - \frac{x_0^2}{2} - 2L(h - l_0)}.$$

Nel caso in cui la distanza  $h$  del punto fisso della molla dal piano fosse eguale alla lunghezza di riposo  $L$ , si ha:

$$\mu = \frac{\frac{mv^2}{k} - (l_0 - L)^2}{\left[ x_0^2 - 2L(L - l_0) \right] - 2\frac{m}{k}gx_0}.$$

### 3.2 Esercizio guida – Moti periodici e oscillatori

#### Teoria

L'azione, su una massa puntiforme, di una forza di richiamo elastica, diretta cioè verso un punto fisso e proporzionale al vettore spostamento  $\mathbf{r}$  dal punto, produce un moto oscillatorio della massa. La forza è data da

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

e l'equazione del moto, quando si consideri attiva anche una forza dissipativa proporzionale alla velocità del punto attraverso una costante  $b$ , si scrive

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r} - b \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

che, proiettata su un asse ( $x$  ad es., e assumendo  $x = 0$  come posizione di equilibrio), ordinata in verso decrescente delle derivate, diviene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

costituente la così detta equazione del moto oscillatorio libero smorzato. La soluzione generale è

$$x(t) = A \cos \left[ \sqrt{\frac{k}{m} - \left( \frac{b}{2m} \right)^2} t + \varphi \right]$$

dove  $A$  è l'ampiezza dell'oscillazione e  $\varphi$  la fase, l'una e l'altra da definirsi sulla base delle condizioni iniziali del moto.

Se sul punto materiale agisce una forza esterna  $\mathbf{F}(t)$ , di componente  $F$  sull'asse  $x$ , che si può pensare sinusoidale (visto il possibile sviluppo in serie o integrale di Fourier di una qualunque forza fisica), l'equazione diviene quella del così detto moto oscillatorio forzato

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F \cos \omega t.$$

In questo caso, la soluzione a regime è espressa dalla seguente relazione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

con

$$A = \frac{F}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan \left[ \frac{b\omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \right].$$

Si chiama *frequenza di risonanza* dell'oscillatore la grandezza

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### Argomento

Una massa puntiforme  $m$  è fissata all'estremo di una molla di costante elastica  $k$ , sospesa coll'estremo opposto a un punto fisso nel campo gravitazionale terrestre. La presenza della forza vischiosa e/o di una forza esterna possono essere considerate in successione.

In condizione iniziale la massa è tenuta ferma nella posizione corrispondente a quella di riposo della molla; quindi, al tempo  $t = 0$ , viene rilasciata libera.

*Le condizioni iniziali e l'equazione del moto*

Le forze esterne applicate al corpo sono la sua forza peso e la forza elastica del vincolo di sostegno esercitata dalla molla; si può inizialmente pensare opzionale la presenza della forza vischiosa. Nella configurazione di elongazione nulla della molla, la forza esterna  $\mathbf{R}_n$  di reazione del vincolo (Fig. 3.4, a sinistra, dove le direzioni delle forze sono leggermente traslate rispetto a quella reale, comune per entrambe, per ragioni di rappresentazione), è eguale e opposta alla forza peso, che mantiene la massa nella posizione in cui la molla non esercita alcuna forza; successivamente, al tempo  $t = 0$ , tale forza esterna viene meno e la massa è sottoposta solo alla forza elastica e al peso.

Nella condizione iniziale, la massa è tenuta ferma nella posizione corrispondente a quella di riposo della molla (Fig. 3.4, a sinistra); quindi, al tempo  $t = 0$ , viene rilasciata libera con velocità iniziale nulla, eseguendo un moto armonico (Fig. 3.4, a destra).

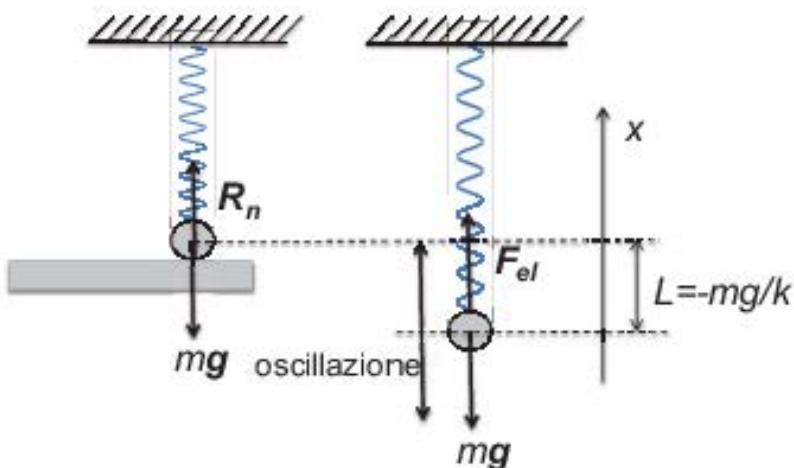
Dopo l'eliminazione del vincolo, la massa, sottoposta solo alla forza peso e alla forza elastica (di richiamo verso la posizione di riposo) esegue un moto oscillatorio che soddisfa l'equazione

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - kx \quad (3.4)$$

avendo orientato l'asse  $x$  verso l'alto e posto eguale a  $k$  il coefficiente di elasticità della molla. Si conviene di scegliere l'origine dell'asse  $x$  coincidente con la posizione iniziale del vincolo (corrispondente alla configurazione di riposo della molla), così che la posizione in cui si annulla l'accelerazione per l'annullarsi della risultante delle due forze, è  $L = -mg/k$ , al di sotto della posizione iniziale del vincolo.

La soluzione dell'equazione (3.4) è quella dell'omogenea associata secondo quanto più sopra riportato, più una soluzione particolare:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - \frac{mg}{k} \quad (3.5)$$



**Fig. 3.4.** A sinistra: una massa puntiforme  $m$  è tenuta ferma nella condizione di riposo di una molla; a destra: la massa puntiforme esegue oscillazioni libere sotto l'azione della forza elastica esercitata dalla molla e del peso

con la pulsazione  $\omega = \sqrt{k/m}$  eguale a quella del sistema in assenza di gravità. Le condizioni iniziali

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

forniscono per  $A$  e  $\varphi$  i valori

$$A = L \quad \text{e} \quad \varphi = 0.$$

La presenza di una forza vischiosa porterebbe alla soluzione

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.6)$$

coi medesimi valori per le costanti  $A$  e  $\varphi$ .

*Si mutino le condizioni iniziali, considerando il problema inverso, corrispondente per es. al caso in cui il primo passaggio per la posizione  $x = -mg/k$  (corrispondente alla configurazione di equilibrio che il sistema manterebbe, se la massa fosse rilasciata con velocità nulla da quella posizione) avvenga  $\tau$  secondi successivamente al rilascio del vincolo, il quale si trovi a una posizione corrispondente a  $x = -D$ , con  $0 < D < mg/k$ .*

Poiché l'equazione del moto non varia rispetto al caso precedente, la sua soluzione generale è ancora data dalla Eq. (3.5) in essa i valori dei parametri  $A$  e  $\varphi$  sono determinati dal rispetto delle condizioni iniziali seguenti:

$$x(0) = -D \quad \text{e} \quad x(\tau) = -\frac{mg}{k}.$$

Quindi, considerando che il primo passaggio della massa per la posizione di equilibrio del sistema avviene dopo un quarto del periodo di oscillazione ( $\omega = \pi/2\tau$ ), nel caso di assenza di viscosità, sarà

$$-D = A \cos \varphi \quad \text{e} \quad -\frac{mg}{k} = A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = A \sin \varphi$$

da cui si ricava

$$A = \sqrt{D^2 + \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{mg}{kD}\right).$$

Nel caso in cui si dovesse considerare anche la presenza di una forza vischiosa, la soluzione del moto diviene l'Eq. (3.6), per la quale le medesime condizioni iniziali, già più sopra indicate, portano a

$$-D = A \cos \varphi \quad \text{e} \quad -\frac{mg}{k} = Ae^{-\frac{b}{2m}\tau} \sin \varphi$$

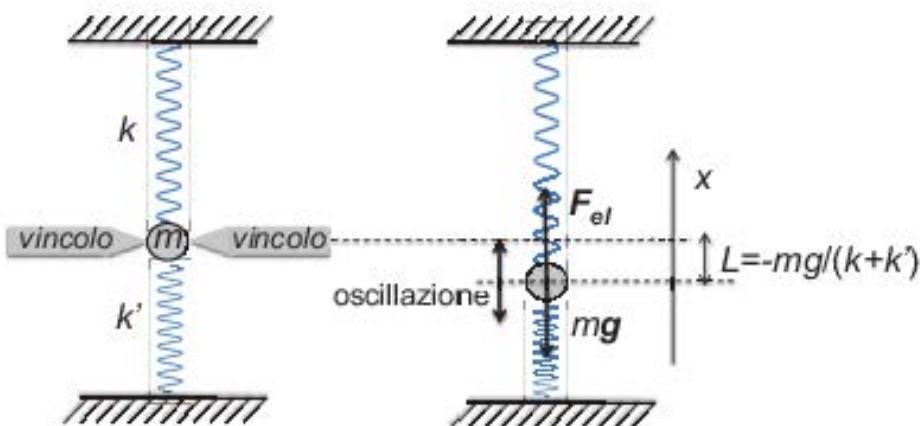
da cui

$$A = \sqrt{D^2 + \left(\frac{mg}{k}\right)^2 e^{\frac{b}{m}\tau}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{mg}{kD} e^{\frac{b}{2m}\tau}\right).$$

*Si torni ora alle condizioni del primo esercizio, corrispondente alle condizioni iniziali di cui alla Fig. 3.4 di destra, ma si aggiunga alla prima molla una seconda di costante elastica  $k' = ak$ , ancorata a un punto verticalmente al di sotto della massa, in posizione tale che, in assenza di questa, le due molle si troverebbero in condizione di non elongazione, con i due estremi liberi coincidenti (Fig. 3.5, a sinistra).*

La presenza di una seconda molla muta semplicemente il valore della costante della forza elastica di richiamo, da  $k$  a  $k + k'$ . Pertanto, l'esercizio in questione ha la medesima soluzione del primo riportato, pur che si sostituisca opportunamente in ogni espressione risolutiva la somma di  $k + k'$  a  $k$ .

Il criterio sopra citato è una caratteristica generale: due o più molle collegate ‘in serie’, cioè allineate in sequenza (con il primo estremo libero di ogni successiva molla connesso col secondo della precedente, fino all’ultima molla, connessa direttamente alla massa terminale) sono equivalenti a un’unica molla, l’inverso della cui costante elastica è pari alla somma degli inversi di tutte le altre. Se le molle sono collegate ‘in parallelo’ (cioè con gli estremi fissati al vincolo tutti uniti insieme, e così pure tutti uniti insieme gli estremi liberi, collegati alla massa oscillante), la costante elastica risultante è pari alla somma di tutte le singole costanti elastiche. Tutto ciò risulta



**Fig. 3.5.** Una massa puntiforme è sottoposta all'azione di due molle collineari di costante elastica diversa. A sinistra: la massa è ferma a causa di un vincolo meccanico in una posizione per la quale le due molle hanno entrambe elongazione nulla; a destra: la massa compie oscillazioni libere sotto l'azione delle forze elastiche esercitate dalle due molle

evidente se si pone mente alla formula che definisce la costante elastica del sistema di molle che si considera,  $F = -kx$ : nel caso di molle in serie, la forza è la medesima ai capi di ogni singola molla, mentre l'allungamento complessivo è dato dalla somma dei singoli allungamenti; viceversa, nel caso di molle in parallelo, la forza complessiva è data dalla somma delle forze esercitata dalle singole molle, mentre l'allungamento è il medesimo per tutte.

### 3.3 Esercizio guida – Sistemi di riferimento: inerziali e non, forze centrifughe

#### Teoria

Le equazioni della dinamica del punto materiale e dei sistemi di punti materiali possono scriversi in modo formalmente eguale in un qualunque sistema di riferimento. Le equazioni cardinali sono

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{v}_o \times \mathbf{p}$$

con le convenzioni usuali per i simboli usati:  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{M}_o$ , forze e momenti risultanti rispetto a un polo  $O$  animato da velocità  $\mathbf{v}_o$ ;  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{b}$  quantità di moto e momento della quantità di moto rispetto al polo  $O$ . Se si opera in sistemi inerziali, forze e momenti delle forze sono solo quelli reali – soddisfacenti il terzo principio della dinamica –, se si opera in sistemi non inerziali sono da aggiungere a quelli reali anche quelli apparenti. Le forze apparenti sono date da

$$\mathbf{F}_{\text{app}} = -m(\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c)$$

dove le  $\mathbf{a}_t$  e  $\mathbf{a}_c$  sono, rispettivamente, l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione complementare nel sistema di riferimento scelto. L'accelerazione complementare ha espressione

$$\mathbf{a}_c = 2\omega \times \mathbf{v}_r$$

con  $\omega$  velocità angolare del sistema relativo e  $\mathbf{v}_r$  velocità nel sistema relativo.

### Argomento

Un corpo solido pesante, sufficientemente piccolo da potersi considerare puntiforme, appoggiato su un tavolo piano, è soggetto a una forza esterna, aggiuntiva – come verrà chiamata nel seguito – rispetto al peso e alla reazione dell'appoggio. Il tavolo è accelerato rispetto a un sistema inerziale, in prima istanza di moto traslatorio con un'accelerazione  $\mathbf{a}_t$  diretta in una direzione qualunque rispetto al piano di giacitura del tavolo, in seguito di moto rotatorio rispetto a un asse ortogonale al tavolo. Il moto del corpo è osservato dal sistema di riferimento solidale col tavolo, quindi da un sistema non inerziale.

*Le forze agenti sul corpo in condizioni di assenza e di presenza di forze reali*

La soluzione del problema del moto del punto è richiesta per il caso del moto traslatorio del tavolo, mentre nel caso di moto rotatorio si richiedono solo le condizioni di primo distacco dal vincolo. Nel caso di assenza di forze aggiuntive esterne, le forze applicate al corpo sono la forza peso e la forza di reazione del tavolo, da considerarsi sia per la componente normale sia per

esterne

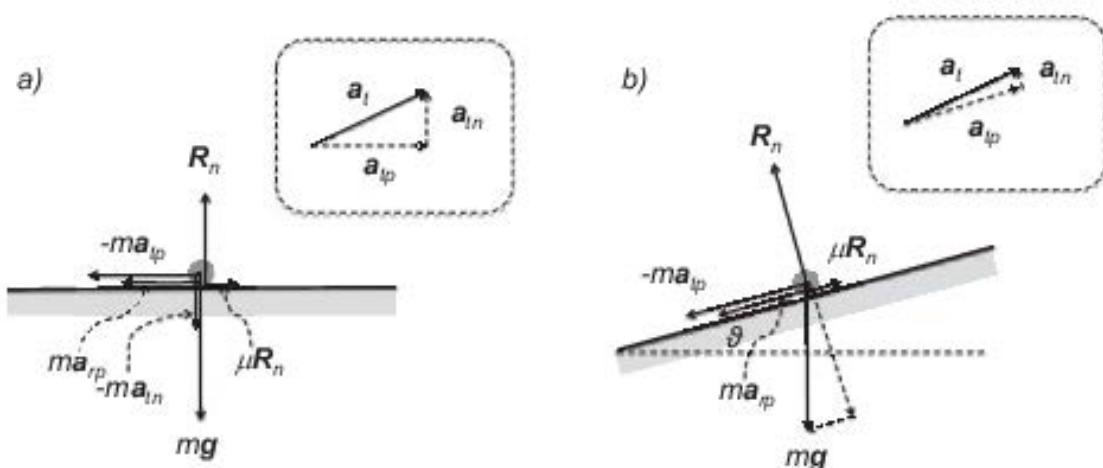
quella di attrito tangenziale, e le forze apparenti.

In caso di presenza di forze esterne, si considerano separatamente i casi di forze con direzione di applicazione ortogonale al piano del tavolo e con direzione parallela.

In tutte le condizioni separatamente considerate, il problema del moto è limitato al solo caso in cui la somma delle forze aggiuntive, della forza peso e delle forze apparenti hanno componente ortogonale al piano diretta verso l'appoggio, inducendo in tal modo la nascita della reazione da parte di questo; in alternativa, il punto si staccherebbe dal tavolo.

*Si consideri il caso di assenza di forze esterne aggiuntive e moto traslatorio del tavolo e si studino le condizioni in cui l'accelerazione di trascinamento abbia componenti secondo la direzione ortogonale e parallela al piano del tavolo. Si considerino anche i due casi, di assenza e di presenza di forze di attrito.*

In tutte le condizioni indicate, in cui non c'è rotazione del tavolo di appoggio, se ci si pone nel sistema di riferimento solidale con questo, come forza apparente si deve tenere in conto solo quella dovuta al trascinamento.



**Fig. 3.6.** Una massa puntiforme è appoggiata su un piano scabro in moto con accelerazione  $a_t$ . a) piano orizzontale, b) piano inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale

Nel caso in cui il piano sia disposto in orizzontale (Fig. 3.6 nella pagina precedente a sinistra, dove le forze applicate nello stesso punto e parallele tra loro sono leggermente spostate per evidenziarle), in cui la forza peso non ha componente parallela, la forza risultante agente sul punto è data unicamente dalla somma della forza apparente e dell'attrito del vincolo. Nel sistema del tavolo si scrive:

$$\mathbf{F} = \mathbf{mg} + \mathbf{R} - m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r \quad (3.7)$$

con  $\mathbf{a}_r$  accelerazione (relativa) nel sistema del piano. Proiettando l'Eq. (3.7) sulle direzioni normale (positiva verso il basso) e parallela al piano (positiva nel verso di  $a_{tp} > 0$ ), usando i pedici  $n$  e  $p$  per le componenti normale e parallela, rispettivamente, dei vettori, si ha

$$F_n = mg + R_n - ma_{tn} = ma_{rn} \quad \text{e} \quad F_p = \mu R_n - ma_{tp} = ma_{rp},$$

Per la componente normale, affinché il punto non si distacchi dal vincolo la reazione  $\mathbf{R}_n$  dovrà essere negativa o nulla e, per essere  $a_{rn} = 0$ , sarà

$$R_n = m(a_{tn} - g) \Rightarrow a_{tn} \leq g.$$

In caso contrario, cioè se il piano si muove con accelerazione diretta verso il basso  $a_{tn}$  maggiore di quella di gravità, il punto si distacca dal piano stesso. Sulla direzione parallela al piano il punto si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione diretta in verso opposto a quello di  $a_{tp}$ , e pari a:

$$a_{rp} = \mu(a_{tn} - g) - a_{tp}.$$

La componente normale dell'accelerazione  $\mathbf{a}_t$  influisce sulla componente parallela del moto solo se c'è attrito: la componente parallela, cambiata di segno, costituisce una parte dell'accelerazione del punto.

*Si consideri il caso in cui il piano di appoggio sia inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale.*

In questo caso (Fig. 3.6 nella pagina precedente a destra), la forza peso ha componenti

sia sulla direzione ortogonale, sia su quella normale al piano. Pertanto, replicando opportunamente il procedimento del caso precedente, si giunge a

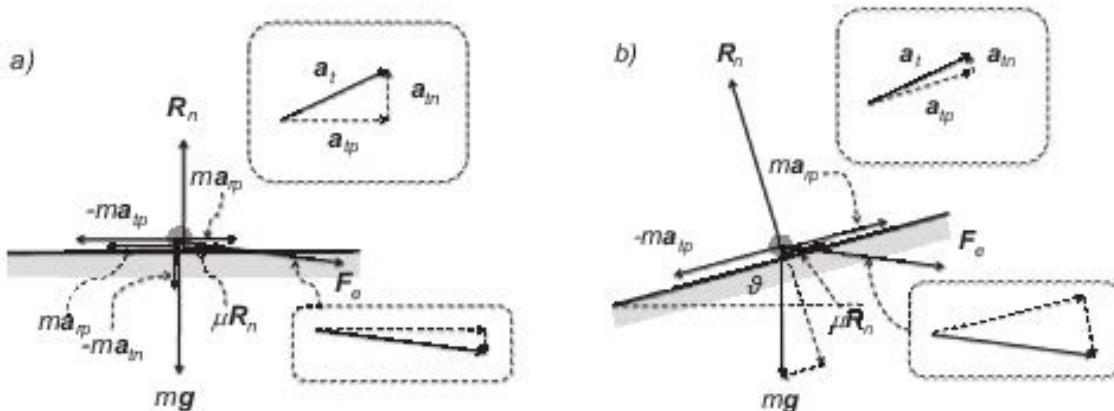
$$R_n = m(a_{tn} - g \cos \vartheta) \quad \text{e}$$

$$a_{rp} = \mu(a_{tn} - g \cos \vartheta) - g \sin \vartheta - a_{tp}.$$

Coerentemente, si mutano le considerazioni sul distacco del punto dal piano di appoggio ( $a_{tn} \leq g \cos \vartheta$ ). Si nota che, nel caso di assenza di attrito ( $\mu = 0$ ), l'accelerazione  $a_{rp}$  parallela al piano si annulla se il seno dell'angolo di inclinazione  $\vartheta$  egualia il rapporto  $a_{tp}/g$  tra la componente parallela  $a_{tp}$  e l'accelerazione di gravità:

$$|\vartheta| = \arcsin \frac{a_{tp}}{g}.$$

*Si considerino ora i casi sopra esaminati, quando sia presente una forza risultante  $\mathbf{F}_e$  delle forze esterne aggiuntive. Si considerino i due casi, del piano orizzontale e del piano inclinato.*



**Fig. 3.7.** Una massa puntiforme è appoggiata su un piano scabro in moto con accelerazione  $a_t$  e sottoposta a una forza esterna  $\mathbf{F}_e$ . a) piano orizzontale, b) piano inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale

Nel caso in cui il piano sia disposto in orizzontale l'equazione vettoriale

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + mg + \mathbf{R} - m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r$$

si proietta sulle direzioni normale e parallela al piano, per dare (Fig. 3.7 a sinistra)

$$\begin{aligned} F_n &= F_{en} + mg + R_n - ma_{tn} = ma_{rn} \quad \text{e} \\ F_p &= F_{ep} + \mu R_n - ma_{tp} = ma_{rp}. \end{aligned}$$

L'annullamento dell'accelerazione relativa normale comporta che sia

$$R_n = -F_{en} - mg + ma_{tn}$$

e, perché ciò accada, deve essere

$$a_{tn} \leq g + \frac{F_{en}}{m}$$

che muta la condizione precedentemente trovata per il caso di assenza di forze esterne, con l'aggiunta appunto della componente normale di queste nel verso stesso dell'accelerazione di gravità.

Nel caso che il piano di appoggio sia inclinato di un angolo  $\vartheta$  (Fig. 3.7 a destra), la forza peso, come nel caso precedente, ha componenti sia sulla direzione ortogonale, sia su quella normale al piano. Esse si sommano, separatamente per le diverse componenti, alle altre forze presenti e, pertanto, replicando opportunamente i procedimenti sin qui impiegati, si giunge a

$$\begin{aligned} R_n &= -F_{en} + m(a_{tn} - g \cos \vartheta) \quad \text{e} \\ a_{rp} &= \frac{F_{ep}}{m} + \mu \left[ -\frac{F_{en}}{m} + (a_{tn} - g \cos \vartheta) \right] - g \sin \vartheta - a_{tp}. \end{aligned}$$

Coerentemente, la condizione di distacco del punto dal piano di appoggio si muta in

$$a_{tn} \leq \frac{F_{en}}{m} + g \cos \vartheta.$$

*Si consideri, infine, il caso che il tavolo di appoggio sia in moto rotatorio attorno a un asse con velocità angolare  $\omega$ , discutendo solo le condizioni di primo distacco del*

corpo puntiforme appoggiato.

La discussione si limita alle sole condizioni di primo distacco del corpo, in quanto, non appena iniziato il moto, nascono le nuove forze apparenti, di Coriolis, la cui espressione contiene la velocità, che varia a seconda della forza in atto. Si ottiene in tal modo un'equazione differenziale del moto, di difficile soluzione.

Nelle condizioni di primo distacco, il punto non possiede velocità e non è soggetto alla forza di Coriolis. Le forze presenti sono, pertanto, quelle stesse sin qui esaminate; tra di esse, tuttavia, quella dovuta all'accelerazione di trascinamento dipende dalla posizione del punto nel sistema relativo. L'accelerazione di trascinamento è in tal caso, infatti, un'accelerazione centripeta diretta verso l'asse di rotazione e ortogonale a questo, di modulo pari a

$$a_t = \omega^2 r$$

dove si è indicata con  $r$  la distanza del punto dall'asse di rotazione.

### 3.4 Esercizio guida – Energia potenziale gravitazionale

#### Teoria

L'espressione dell'energia potenziale gravitazionale di una massa puntiforme  $m$  a distanza  $r$  da una massa  $M$ , anch'essa da considerarsi puntiforme, ha l'espressione

$$U(r) = -\frac{GM}{r}m$$

essendo  $G$  la costante di gravitazione universale e avendo scelto la costante arbitraria in modo da annullare l'energia a distanza infinita. La stessa espressione è valida nello spazio  $r \geq R$ , se la massa  $M$  è distribuita con simmetria sferica dentro un volume esteso fino a un valore  $r = R$ . Sulla superficie terrestre e in un volume di dimensioni lineari relativamente piccole rispetto al raggio terrestre l'espressione assume la forma

$$U(r) = mgz$$

ove si prenda  $z$  come variabile spaziale diretta verso l'alto; in questo caso, la costante additiva è stata implicitamente presa eguale a zero nei punti di coordinata  $z = 0$ .

La possibilità di introdurre una funzione energia potenziale nel campo di forze gravitazionali deriva dalla natura conservativa di tali forze, per le quali il lavoro compiuto nello spostamento del punto di applicazione tra due posizioni diverse è solo funzione di dette posizioni

$$L_{12} = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)].$$

In un tale campo, pertanto, l'energia totale si conserva e assume la forma

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 + \text{cost.} \quad (3.8)$$

### Argomento 1

Una massa puntiforme  $m$  è vincolata a scorrere su una guida di forma circolare, priva di attrito, posta nel campo gravitazionale terrestre. Si determinano i parametri cinematici del moto lungo la guida.

*Le forze agenti sono la forza peso, conservativa, e le reazioni normali che non fanno lavoro*

Poiché il lavoro è fatto da sole forze conservative, si può applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica, come riportato nell'Eq. (3.8). Esso permette di conoscere la velocità in ogni punto della traiettoria e, quindi, l'accelerazione centripeta, in quanto in ogni punto di questa è noto anche un altro parametro, qual è il raggio di curvatura; non permette, invece, di conoscere l'accelerazione tangenziale, che si può dedurre, invece, direttamente dalla componente tangenziale del peso. Il rapporto tra la quota  $z$  alla quale si trova il punto e la posizione sulla circonferenza dipende dai dati specifici del singolo problema.

Una massa puntiforme  $m$  è vincolata a scorrere su una guida di forma circolare, priva di attrito, posta su un piano verticale nel campo gravitazionale terrestre (Fig. 3.8). Il problema può facilmente proporsi in forme inverse, che richiedano le condizioni iniziali o quelle geometriche, essendo date quelle finali.

L'equazione (3.8) si scrive nello specifico

$$\frac{1}{2}m [v^2(\vartheta) - v^2(\vartheta_0)] + mgR (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = 0$$

da cui si ricava la  $v(\vartheta)$  da inserire nell'espressione dell'accelerazione centripeta

$$\begin{aligned} a_c(\vartheta) &= \frac{v^2(\vartheta)}{R} = \\ &= a_c(\vartheta_0) - 2g (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Uno qualunque tra i diversi parametri presenti nella formula può ricavarsi dalla conoscenza degli altri.

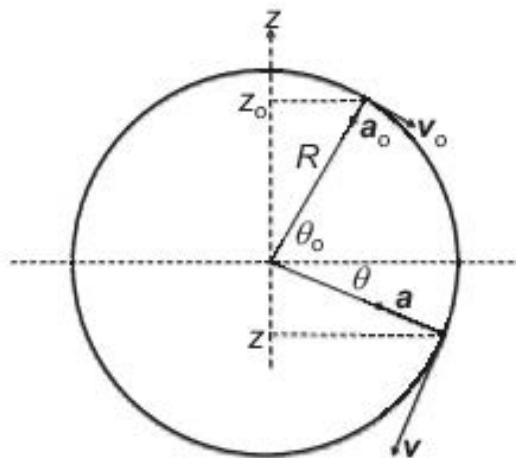
Quale estensione del problema, si considera il caso in cui il piano di giacenza della guida è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano verticale.

Il problema non muta rispetto al caso precedentemente descritto, se non per l'espressione del legame tra la quota  $z$  del punto e l'angolo  $\alpha$  sulla guida, data da

$$z = R \sin \vartheta \cos \alpha$$

con l'origine  $z = 0$  scelta nella posizione del centro. L'equazione 3.9 diviene

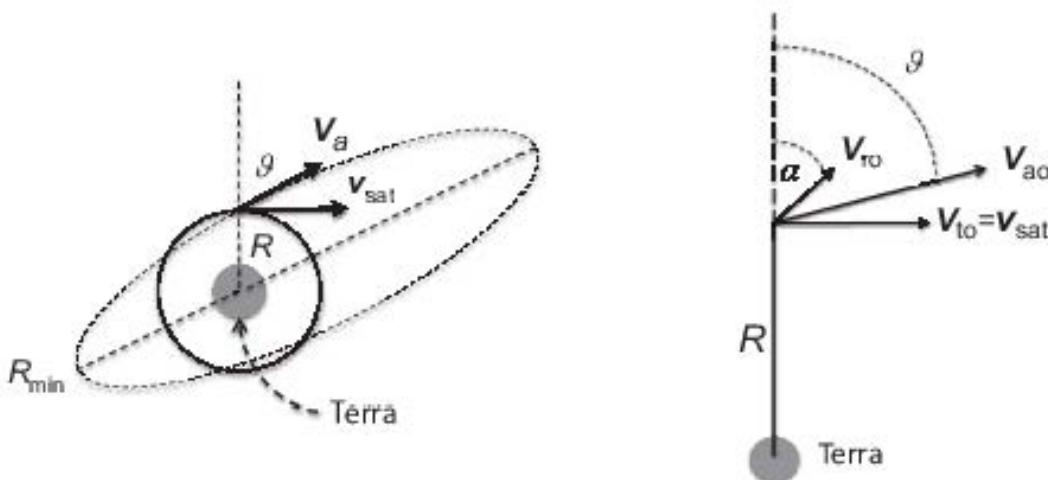
$$a_c(\vartheta) = a_c(\vartheta_0) - 2g \cos \alpha (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0)$$



**Fig. 3.8.** Una massa puntiforme vincolata a scorrere lungo una guida circolare liscia

## Argomento 2

Un razzo di massa  $m$  è lanciato da un satellite di massa  $M \gg m$  in rotazione su un'orbita circolare a distanza  $R$  dal centro della Terra, con una velocità  $\mathbf{V}_{ro}$  relativa al satellite, formante un angolo  $\alpha$  con la direzione radiale. Si determinano le caratteristiche dell'orbita del razzo lanciato dal satellite.



**Fig. 3.9.** Grandezze cinematiche relative a un razzo lanciato da un satellite che ruota attorno alla Terra con velocità  $\mathbf{v}_{sat}$ : il razzo viene lanciato con velocità  $\mathbf{v}_{ro}$  rispetto al satellite

*Descrizione nel sistema della Terra*

È opportuno scegliere come sistema di riferimento quello terrestre, prescindendo dall'inessenziale rotazione della Terra attorno al proprio asse, e in questo utilizzare l'equazione della conservazione dell'energia, scegliendo l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale di un pianeta.

*Nelle condizioni di lancio indicate nell'Argomento 2 (Fig. 3.9, a sinistra), si richiede quale siano le distanze minime e massime dal centro della Terra dell'orbita del razzo, in funzione dell'angolo  $\alpha$  di lancio.*

*(Questa estensione del problema richiede una particolare abilità risolutiva e viene riportato – anche con la rappresentazione grafica – per generale interesse.)*

Una volta lanciato dal satellite, il razzo, muovendosi in un campo di forze conservativo, mantiene l'energia totale costante e pari a quella che ha al lancio:

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mV_{ao}^2 = -\frac{GMm}{r(\vartheta)} + \frac{1}{2}mV_a^2(\vartheta)$$

essendo  $\vartheta$  l'angolo localmente formato dalla velocità assoluta  $V_a(\vartheta)$  con la direzione radiale. Il valore costante  $E$  dell'energia si ricava esplicitando il modulo  $V_{ao}$  della velocità assoluta rispetto a quelli noti,  $V_{ro}$  della relativa e  $V_{to}$  del trascinamento (Fig. 3.9, a destra):

$$V_{ao} = \sqrt{(V_{to} + V_{ro} \sin \alpha)^2 + (V_{ro} \cos \alpha)^2} = \sqrt{\frac{GM}{R} + 2\sqrt{\frac{GM}{R}}V_{ro} \sin \alpha + V_{ro}^2},$$

dove l'espressione di  $V_{to} = |\mathbf{v}_{sat}|$  è stata ricavata dalla condizione di rotazione del satellite sull'orbita di raggio  $R$  (accelerazione centripeta = forza di attrazione gravitazionale/massa) e ricordato che l'angolo  $\alpha$  di lancio è relativo al sistema del satellite. Poiché nel campo di forze centrali in cui si muove il razzo si conserva il momento  $b$  della quantità di moto, che è noto all'istante del lancio

$$b = mR \left( \sqrt{\frac{GM}{R}} + V_{ro} \sin \alpha \right) = mr V_a \sin \vartheta,$$

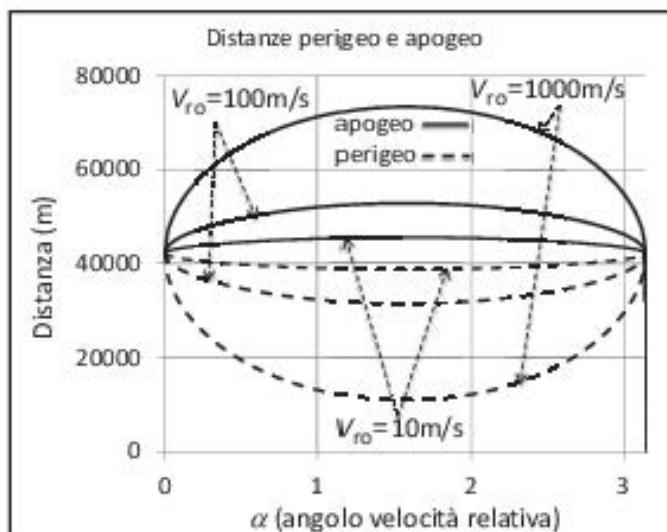
si può scrivere l'espressione dell'energia come

$$E = -\frac{GMm}{r(\vartheta)} + \frac{1}{2m} \left( \frac{b}{r \sin \vartheta} \right)^2.$$

Nei punti dell'orbita a distanza minima (perigeo) e massima (apogeo) dalla Terra, la velocità del razzo non ha componente radiale ( $\vartheta = \pi/2$ ); ivi è

$$r^2 E + rGMm - \frac{1}{2}mR^2 \left( \sqrt{\frac{GM}{R}} + V_{ro} \sin \alpha \right)^2 = 0$$

avendo inserito nell'espressione precedente di  $E$  quella del momento  $b$ . Le due soluzioni per  $r_{apo/peri}$  dell'equazione corrispondono ai valori delle due distanze, massima



**Fig. 3.10.** Distanze del perigeo e dell'apogeo in funzione dell'angolo di lancio, per tre distinti valori della velocità di lancio,  $V_{ro} = 10 \text{ m/s}$ ,  $V_{ro} = 100 \text{ m/s}$  e  $V_{ro} = 1000 \text{ m/s}$

e minima, dell'orbita del razzo:

$$r_{\text{apo/peri}} = \frac{-GM \pm \sqrt{(GM)^2 + \frac{2}{m} \left( -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}V_{ao}^2 \right) R^2 \left( \sqrt{\frac{GM}{R}} + V_{ro} \sin \alpha \right)^2}}{2 \left( -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}V_{ao}^2 \right)}$$

Nella Fig 3.10 sono riportate le distanze del perigeo e dell'apogeo di un razzo lanciato con tre diverse velocità relative  $V_{ro}$  da un'orbita geostazionaria ( $R \approx 42150 \text{ km}$ ), in funzione dell'angolo  $\alpha$  tra la direzione della velocità e la direzione radiale dal centro della Terra (il valore della velocità del satellite in orbita geostazionaria è  $V_{\text{geostaz}} \approx 3065 \text{ m/s}$ .

### 3.5 Domande di verifica

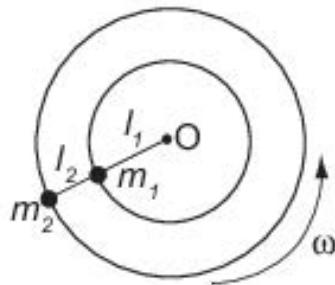
- Dare la definizione di campo di forze conservative.
- Definire il momento assiale di una forza rispetto a una retta data.
- Spiegare perché si conserva la velocità areolare di una massa che si muova soggetta unicamente a un campo di forze gravitazionali.
- Discutere sulla possibilità che una forza orizzontale agente su un corpo libero di muoversi su un piano orizzontale scabro, possa accelerare il corpo, se ha un'intensità minore del peso di questo.
- Illustrare in cosa consistano le forze apparenti e lo scopo per cui vengono introdotte.
- Ricavare il valore del periodo di oscillazione del pendolo semplice.
- Dimostrare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.
- Definire l'energia potenziale di una forza conservativa.
- Spiegare perché un sistema di riferimento solidale con la Terra non è un sistema di riferimento inerziale.
- Discutere sotto quali condizioni un sistema di riferimento è inerziale.
- Definire le forze apparenti.
- Discutere l'effetto della forza di Coriolis che agisce su un grave in caduta libera sulla Terra.
- Giustificare il motivo per cui la forza di Coriolis è presente solamente se il sistema di riferimento non inerziale ha una componente di rotazione rispetto ai riferimenti inerziali.

### 3.6 Esercizi

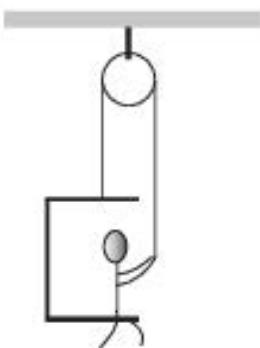
- [1] Un disco posizionato orizzontalmente viene messo in rotazione attorno al proprio asse con un'accelerazione angolare  $\frac{d\omega}{dt} = 0.3 \text{ rad/s}^2$  partendo da fermo

all'istante  $t = 0$ . Si chiede qual è il coefficiente di attrito della superficie del disco, sapendo che un oggetto, da considerarsi come un punto materiale, appoggiato a una distanza  $R = 5\text{ cm}$  dal centro si distacca dalla sua posizione di riposo al tempo  $\bar{t} = 7\text{ s}$ .

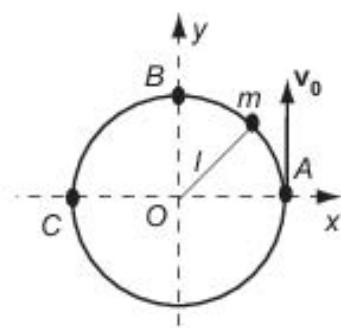
- [2] Una massa puntiforme è posta su una piattaforma ruotante con velocità angolare iniziale  $\omega_0 = 1\text{ rad/s}$ , alla distanza  $r = 20\text{ cm}$  dall'asse di rotazione, dove rimane ferma. Se all'istante  $t = 0$  si imprime alla piattaforma un'accelerazione angolare  $\gamma = \dot{\omega} = 2\text{ rad/s}^2$  costante, la massa inizia a muoversi dopo un'intervalle di tempo  $t_1 = 1\text{ s}$ . Calcolare il coefficiente di attrito tra massa e piattaforma.
- [3] Una palla, rimbalzando sul pavimento, perde il 20% della sua energia cinetica. Determinare con che velocità dovrà essere lanciata verticalmente verso il basso da una altezza di  $h = 10\text{ m}$  dal pavimento per vederla rimbalzare alla stessa altezza  $h$ . (Si trascuri la resistenza dell'aria).
- [4] Una massa puntiforme  $m_1$  è attaccata a un estremo di una corda avente lunghezza  $l_1$  il cui altro estremo è fissato in un punto  $O$  su di un piano orizzontale privo di attrito: la massa si muove di moto circolare uniforme su tale piano. Una seconda massa puntiforme  $m_2$  è attaccata radialmente alla prima tramite una corda di lunghezza  $l_2$  e si muove anch'essa di moto circolare uniforme con la stessa velocità angolare di  $m_1$ . Determinare la tensione  $\tau_1$  e  $\tau_2$  in ciascuna delle due corde. Entrambe le corde sono inestensibili e prive di massa.
- [5] Un punto materiale di massa  $m = 18\text{ kg}$  è trascinato a velocità costante su di una superficie orizzontale scabra per mezzo di una fune inclinata di un angolo  $\alpha = 20^\circ$  rispetto alla superficie stessa. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra punto e superficie è  $\mu_d = 0.5$ , determinare la tensione  $T$  della fune e quanto lavoro è necessario spendere per spostare il punto di  $l = 20\text{ m}$ .



- [6] Un muratore di massa  $M = 100 \text{ kg}$  si trova seduto su una piattaforma di massa  $m = 20 \text{ kg}$  in prossimità di un'impalcatura. Egli regge un estremo di una fune (inestensibile e priva di massa); l'altro estremo della fune, tramite una carrucola priva di massa fissata alla sommità dell'impalcatura, è agganciato alla piattaforma. Il muratore, per muoversi verso l'alto, tira la fune con una forza tale che la forza da lui esercitata sulla piattaforma vale  $F = 500 \text{ N}$ . Determinare l'accelerazione del muratore, della piattaforma e la tensione della fune.

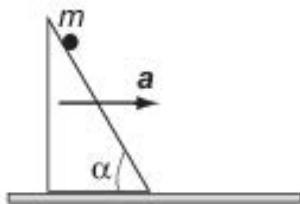


- [7] Un disco metallico percorre strisciando, dopo essere stato lanciato su una superficie orizzontale scabra, una distanza  $d = 5 \text{ m}$  impiegando un tempo  $t^* = 3 \text{ s}$  prima di fermarsi. Determinare il coefficiente di attrito dinamico,  $\mu_d$ , tra disco e superficie.
- [8] Una massa  $m = 0.1 \text{ kg}$  è lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ . Determinare a che altezza arriverà sapendo che, durante il percorso di salita della massa, la forza viscosa esercitata dall'aria compie un lavoro  $L_A = -0.1 \text{ J}$ .
- [9] Una massa puntiforme  $m$  viene lanciata dal punto  $A$  in direzione dell'asse  $y$  con una velocità  $v_0$ . Poiché la massa è attaccata a una fune inestensibile e priva di massa lunga  $l$  il cui secondo estremo è vincolato a un punto fisso  $O$ , la sua traiettoria sarà una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $l$ , giacente nel piano verticale (piano  $xy$ ). Sapendo che nel punto  $B$  la tensione della fune è nulla, determinare  $v_0$  e la tensione della fune nel punto  $C$ .



- [10] Un punto materiale viene lanciato verso l'alto dal suolo lunare con una velocità  $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Determinare a quale altezza arriverà sapendo che la massa e il diametro della Luna valgono  $M_L = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$  e  $d_L = 3476 \text{ km}$ , rispettivamente.

- [11] Una massa puntiforme  $m = 2\text{ kg}$  posta con velocità nulla su un piano liscio inclinato di un angolo  $\alpha = 60^\circ$  rispetto all'orizzontale e avente un'accelerazione orizzontale  $a$  costante, rimane in equilibrio. Trovare il valore di  $a$ .



- [12] Un pendolo semplice costituito da una massa puntiforme  $m = 102\text{ g}$  sospesa a un filo inestensibile e privo di massa lungo  $L = 1\text{ m}$ , oscilla in un piano verticale. Nell'ipotesi di porsi in un sistema di riferimento inerziale, determinare la differenza di tensione esistente nel filo tra il punto più basso e quello più alto della traiettoria sapendo che l'energia cinetica massima della massa vale  $T_M = 0.134\text{ J}$ .

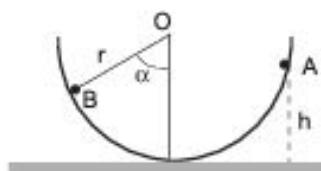
- [13] Supponendo che la densità della materia rimanga invariata, se il sistema solare fosse ridotto in scala in modo tale che il raggio dell'orbita Terra-Sole misurasse  $1\text{ m}$  (contro i circa  $1 \times 10^{11}\text{ m}$  reali), quale sarebbe il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole?

- [14] Sopra una piattaforma circolare disposta in un piano orizzontale e girevole attorno a un asse di rotazione verticale e passante per il suo centro, è posta una moneta a una distanza  $d = 30\text{ cm}$  dall'asse di rotazione. Inizialmente il sistema è fermo; aumentando la velocità di rotazione si osserva che la moneta scivola sulla piattaforma quando la sua velocità è  $v = 50\text{ cm/s}$ . Determinare il coefficiente di attrito statico tra moneta e piattaforma.

- [15] Un punto materiale inizialmente fermo è sottoposto a una forza costante  $F = 98\text{ N}$  in un sistema di riferimento inerziale e, conseguentemente, acquista una velocità di  $98\text{ m/s}$  in  $10\text{ s}$ . Calcolare la massa del punto materiale e il lavoro compiuto dalla forza.

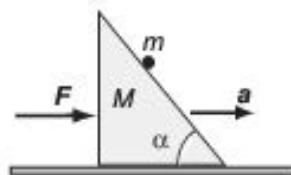
- [16] Una forza orizzontale costante  $F = 10\text{ N}$  è necessaria per muovere un oggetto a velocità costante  $v = 5\text{ m/s}$  lungo una superficie orizzontale scabra. Qual è la potenza sviluppata dalla forza? Quanto lavoro fa la forza in un intervallo di tempo  $\Delta t = 30\text{ minuti}$ ?

- [17] Una massa puntiforme  $m$  cade, partendo da ferma dal punto  $A$  a un'altezza  $h$ , lungo una guida semicircolare liscia di raggio  $r$  disposta in un piano verticale e rigidamente fissata a un piano orizzontale. Determinare la reazione vincolare  $\mathbf{R}$  nel punto  $B$ . ( $m = 100 \text{ g}$ ,  $r = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 15 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ )



- [18] Un punto materiale è soggetto ad un campo di forze centrali, la cui energia potenziale varia secondo la legge:  $U(r) = -a/r + b/r^3$ , con  $a$  e  $b$  costanti. Calcolare:
- come varia la forza in funzione di  $r$ , indicando dove è repulsiva e dove è attrattiva;
  - la posizione di equilibrio stabile del corpo;
  - l'energia cinetica del corpo quando giunge nella posizione di equilibrio dopo essere partito dall'infinito con velocità trascurabile.

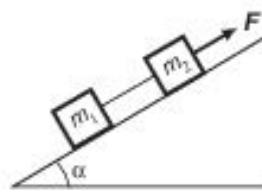
- [19] Una massa puntiforme  $m = 50 \text{ g}$  si trova su di un piano scabro ( $\mu_d = 0.4$ ), inclinato di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  e avente massa  $M = 500 \text{ g}$ , spinto lungo un piano orizzontale liscio da una forza costante  $\mathbf{F}$ . Determinare il modulo della forza affinché la massa  $m$  scivoli lungo il piano con velocità costante.



- [20] Su di un punto materiale di massa  $m = 1 \text{ kg}$  agisce una forza avente direzione costante e modulo variabile nel tempo secondo la legge  $F(t) = 3t^2 \text{ N}$ . Se la massa parte da ferma, quale sarà la sua velocità dopo 2 s?

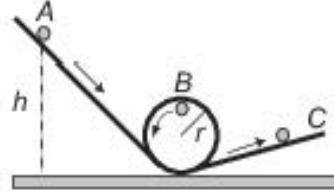
- [21] Un punto materiale di massa  $m$  si muove su un piano orizzontale scabro lungo una traiettoria circolare di raggio  $r$ ; esso inizia il moto con velocità  $v_0$  e dopo il primo giro la sua velocità è  $1/2v_0$ . Determinare il valore del coefficiente di attrito dinamico del piano,  $\mu_d$ , e il numero totale di giri che il punto riuscirà a descrivere.

- [22] Due punti materiali di massa  $m_1$  ed  $m_2$  collegati da un filo inestensibile e privo di massa, sono tirati con velocità costante da una forza  $F$  lungo un piano inclinato scabro: il piano e la forza sono inclinati di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Determinare la tensione  $\tau$  del filo. ( $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ;  $\mu_d = 0.5$ ;  $\alpha = \pi/6$ ).



- [23] Un punto materiale di massa  $m = 1 \text{ kg}$  è legato all'estremità libera di una fune inestensibile e priva di massa il cui secondo estremo è vincolato a un punto fisso  $O$ ; la fune può sostenere una tensione massima  $T_m = 15 \text{ N}$ . Determinare in quale posizione il filo si spezza se il punto viene lasciato cadere da fermo, dalla quota del punto  $O$ , con il filo teso.

- [24] Un punto materiale di massa  $m$  scorre senza attrito lungo la guida liscia, mostrata a lato, posta in un piano verticale. Partendo da fermo dalla posizione  $A$  a un'altezza  $h$ , il punto scivola lungo la guida, scorre internamente a quest'ultima nella parte circolare di raggio  $r$  (sempre rimanendo aderente alla guida) e poi continua il moto verso  $C$ . Si chiede: a) La velocità e l'accelerazione della massa  $m$  nella sommità della parte circolare della traiettoria (punto  $B$ ); b) Qual è il valore minimo di  $h$  per il quale la massa  $m$  giunge nel punto  $B$  senza staccarsi dalla guida?



- [25] Due blocchetti, di massa  $m_1 = 0.5 \text{ kg}$  e  $m_2 = 0.7 \text{ kg}$ , sufficientemente piccoli da potersi considerare puntiformi, sono appoggiati su un piano, inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale, e presentano coefficienti di attrito rispettivamente eguali a  $\mu_1 = 0.1$  e  $\mu_2 = 0.2$ . Si chiede per quale valore massimo dell'angolo  $\alpha$  si può inclinare il piano senza fare slittare i due blocchetti, pensando che il primo si appoggi a contatto col secondo dalla parte più in alto del piano.

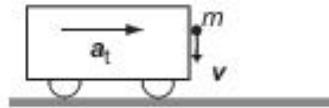
- [26] Un corpo di massa  $m$  si muove di moto rettilineo, dal tempo  $t=0$  con andamento della velocità pari a  $v = k\sqrt{s}$  dove  $s$  è lo spazio percorso. Trovare il lavoro

totale effettuato da tutte le forze che agiscono sul corpo nel tempo  $t$  dall'inizio del moto.

- [27] Un disco di massa  $m = 50\text{ g}$  scivola lungo un piano inclinato che forma un angolo  $\vartheta = 30^\circ$  con il piano orizzontale poi si ferma dopo aver percorso una distanza  $L = 50\text{ cm}$  sul piano. Trovare il lavoro fatto dalle forze di attrito considerando un coefficiente di attrito dinamico pari a  $\mu = 0.15$  per tutti e due i piani.
- [28] Al tempo  $t = 0$  una forza  $F = kt$  è applicata a una piccola massa  $m$  ferma su un piano orizzontale liscio.  $k$  è una costante e la forza è diretta verso l'alto con un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Trovare: a) La velocità del corpo al momento del suo distacco dal piano; b) la distanza percorsa dalla massa fino al momento del distacco.
- [29] Una palla di massa  $m = 130\text{ g}$  è lanciata con un angolo  $\alpha = 45^\circ$  rispetto all'orizzontale e con velocità iniziale  $v_0 = 25\text{ m/s}$ . Determinare la dipendenza dal tempo del modulo del momento della quantità di moto della palla rispetto al punto dal quale viene lanciata; determinare, inoltre, il suo valore nel punto più alto della traiettoria.
- [30] Una macchina di massa  $m = 1000\text{ kg}$  ha un motore della potenza massima  $P_M = 100\text{ kW}$  e viaggiando su un tratto piano con velocità costante  $v = 50\text{ km/h}$  esso deve erogare una potenza  $P' = 50\text{ kW}$ . Supponendo che tutte le forze dissipative rimangano costanti, quale sarà la massima pendenza di una salita che la macchina può affrontare mantenendo la velocità  $v$ ?
- [31] Due carrelli identici di massa  $M$  si muovono senza attrito, per inerzia, uno dietro l'altro con la stessa velocità costante  $v_0$ . Un uomo di massa  $m$  viaggia sul carrello posteriore e ad un certo istante  $t = 0$  salta sul carrello anteriore a una velocità  $U$  relativa al suo carrello. Trovare le velocità finali dei due carrelli.
- [32] Un punto materiale di massa  $m = 1\text{ kg}$  si muove di moto rettilineo uniforme con velocità  $v_0 = 2\text{ m/s}$ . All'istante  $t = 0$  al punto viene applicata una forza, nella stessa direzione e verso di  $v_0$ , del tipo  $F = kt$ , con  $k = 3\text{ N/s}$ . Calcolare

- la velocità  $v$  del corpo all'istante  $t_1 = 10\text{ s}$  e il lavoro della forza nell'intervallo di tempo dato.
- [33] Un satellite si muove attorno alla Terra in un'orbita circolare ed equatoriale di raggio  $R = 2 \times 10^4\text{ km}$ , gira da ovest a est e ogni  $\tau = 11.6\text{ h}$  riappare su uno stesso punto dell'equatore. Conoscendo la costante gravitazionale  $G$ , determinare la massa della Terra  $M_T$ .
- [34] Il periodo di rivoluzione di Giove attorno al Sole  $T_G$  è 12 volte il periodo di rivoluzione della Terra  $T_T$ . Assumendo circolari le orbite dei pianeti trovare:  
a) quante volte la distanza dal Sole di Giove,  $R_G$ , supera quella della Terra,  $R_T$ ;  
b) La velocità e l'accelerazione di Giove rispetto al sistema di riferimento eliocentrico. (Considerare che la luce impiega circa 8 minuti per percorrere la distanza Sole-Terra)
- [35] Un pianeta si muove attorno al Sole su un'orbita ellittica di distanza minima  $r$  e massima  $R$ . Facendo uso delle leggi di Keplero determinare il periodo di rivoluzione attorno al Sole.
- [36] Usando le leggi di conservazione, dimostrare che l'energia meccanica totale di un pianeta di massa  $m$  che ruota attorno al Sole lungo una traiettoria ellittica, dipende solo dal suo semiasse maggiore  $a$ . Trovare l'espressione di tale energia in funzione di  $a$ .
- [37] Determinare l'energia potenziale gravitazionale di un sistema costituito da una massa puntiforme  $m$  e una sottile asta uniforme di massa  $M$  e lunghezza  $\ell$ , poste lungo una retta con distanza  $a$  tra la massa  $m$  e un estremo dell'asta. Si trovi, inoltre, la forza di interazione tra la massa e l'asta.
- [38] Calcolare il raggio dell'orbita circolare di un satellite terrestre geostazionario, la sua velocità e accelerazione in un sistema di riferimento fisso al centro della Terra.
- [39] A quale distanza dal centro della Luna è il punto in cui la risultante delle attrazioni gravitazionali della Luna e della Terra è nulla? La massa della Terra è  $\eta = 81$  volte quella della Luna  $M_L$  e la distanza tra i loro centri è  $n = 60$  volte più grande che il raggio della Terra  $R$ .

- [40] Da un polo della Terra è impartita a un corpo una velocità  $v_0$  diretta verticalmente verso l'alto. Conoscendo il raggio della Terra  $R$  e l'accelerazione alla superficie  $g$ , si determini il fattore di correzione tra l'altezza raggiunta, considerando il campo di gravità uniforme  $g$ , e quello di gravitazione radiale  $-GM/R^2$ . Si trascuri la resistenza dell'aria.
- [41] Un satellite artificiale, di massa  $m$ , della Luna ruota in un'orbita circolare di raggio  $\eta$  volte il raggio  $R$  della Luna. Se il satellite subisce una resistenza al moto, dovuta alla polvere cosmica, del tipo  $F = \alpha v^2$  con  $\alpha$  costante, trovare il tempo  $\tau$  impiegato dal satellite a cadere sulla superficie conoscendo l'accelerazione di gravità  $g_L$  sulla superficie lunare.
- [42] Un pianeta si muove lungo un'orbita ellittica attorno al Sole. A una certa distanza  $r_0$  la sua velocità  $v_0$  forma un angolo  $\alpha$  con la direzione radiale. Si determinino le distanze dell'afelio e del perielio.
- [43] Un carrello di massa  $M$  si muove su di un piano orizzontale con accelerazione  $a_t = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  sotto l'effetto di una forza orizzontale  $F$ . Durante il moto una massa  $m$  aderente alla parete frontale del carrello scende lungo la parete stessa con velocità costante. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra la massa  $m$  e la parete.



### 3.7 Soluzioni degli esercizi

- [1] Il punto comincerà a slittare sulla superficie del disco quando la forza d'inerzia, pari in modulo al prodotto della massa per l'accelerazione di trascinamento – data dalla risultante tra l'accelerazione radiale (centripeta) e l'accelerazione tangenziale – diviene eguale al valore massimo della forza di attrito, eguale a  $\mu mg$ . Poiché l'accelerazione centripeta nel punto a distanza  $R$  vale

$$a_c = \omega^2 R = \left( \frac{d\omega}{dt} \right) t^2 R$$

e quella tangenziale, ad essa ortogonale, è eguale a

$$a_t = \frac{d\omega}{dt} R,$$

si avrà:

$$\mu mg = ma = mR \frac{d\omega}{dt} \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \bar{t}^4 + 1}.$$

Pertanto:

$$\mu = \frac{R}{g} \frac{d\omega}{dt} \sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \bar{t}^4 + 1} \simeq 0.2$$

[2]

$$\mu_s R_N = ma \Rightarrow \mu_s mg = ma \Rightarrow \mu_s = \frac{a}{g}$$

$$\omega = \omega_0 + \gamma t = 3 \text{ rad/s}, \quad a_t = \gamma r \quad a_n = \omega^2 r$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r \sqrt{\gamma^2 + \omega^4} = 1.84 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \mu_s = 0.19.$$

[3] Conservazione dell'energia meccanica tra la posizione *A* a quota *h* e la posizione *B* alla quota del pavimento:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \frac{1}{2}mv_B^2(0.8) = mgh \end{cases} \Rightarrow v_A = \sqrt{2gh \left( \frac{1}{0.8} - 1 \right)} = 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

[4] Applicando la seconda legge della dinamica rispettivamente alla massa  $m_1$  e  $m_2$ , e proiettando tale relazione in direzione radiale si ha:

$$\text{per } m_1 : \tau_1 - \tau_2 = m_1 a_1 \quad \text{dove } a_1 = \omega^2 l_1$$

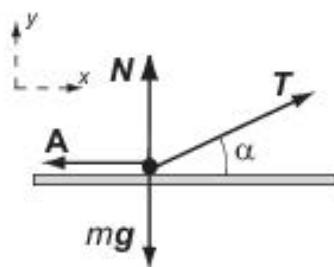
$$\text{per } m_2 : \tau_2 = m_2 a_2 \quad \text{dove } a_2 = \omega^2(l_1 + l_2)$$

Risolvendo tale sistema di due equazioni nelle due incognite  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , si ha:

$$\tau_2 = m_2 \omega^2 (l_1 + l_2) \quad \text{e} \quad \tau_1 = \omega^2 [m_2(l_1 + l_2) + m_1 l_1]$$

- [5] Poiché la velocità del punto è costante,  $\mathbf{a} = 0$ : deve essere pertanto nulla la risultante delle forze agenti su di esso:

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{A} = 0$$



Proiettando la relazione lungo l'asse  $x$  e  $y$ , rispettivamente, si ha:

$$\begin{cases} -A + T \cos \alpha = 0 \\ N - mg + T \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Di qui:

$$T = \frac{\mu mg}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} = 79.4 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad L = T \cos \alpha l = 1.49 \times 10^3 \text{ J}.$$

- [6] Muratore e piattaforma hanno la stessa accelerazione  $a$ ; indicando con  $\tau$  la tensione della corda e applicando la seconda legge della dinamica alla piattaforma e all'uomo e proiettando le relazioni lungo un asse  $y$  diretto verso l'alto, si ha:

$$\text{Piattaforma: } -F - mg + \tau = ma$$

$$\text{Muratore: } -Mg + F + \tau = Ma$$

da cui si ricava

$$a = \frac{2F}{M-m} - g = 2.7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad \text{e} \quad \tau = M(a+g) - F = 750 \text{ N}.$$

- [7] Il moto del disco è uniformemente decelerato con accelerazione  $a = \mu_d g$ :

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{e} \quad v(t) = v_0 - at.$$

Poichè

$$v(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = at^*.$$

Sostituendo tale valore nelle equazioni precedenti e tenendo conto che  $x(t^*) =$

*d* si ottiene:

$$a = \frac{2d}{t^*{}^2} = 1.11 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{a}{g} = 0.11.$$

- [8] La variazione di energia meccanica della massa durante il percorso di salita è pari al lavoro delle forze non conservative su di essa agenti; indicando con  $h$  la quota raggiunta dalla massa si ha:

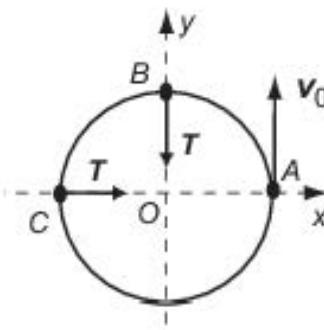
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh - L_A \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{g} \left( \frac{v_0^2}{2} + \frac{L_A}{m} \right) \simeq 0.1 \text{ m.}$$

- [9] Indicando con  $T$  la tensione della fune, nel punto  $B$  si ha:

$$-mg - T_B + m \frac{v_B^2}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = gl.$$

Poichè durante il moto l'energia meccanica si conserva, tra il punto  $A$  e il punto  $B$  si può scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{3gl}.$$



Nel punto  $C$  la tensione della fune vale  $T_C = m \frac{v_C^2}{l}$  ma, sempre per la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene:

$$v_C = v_0 \quad \Rightarrow \quad T_C = 3mg.$$

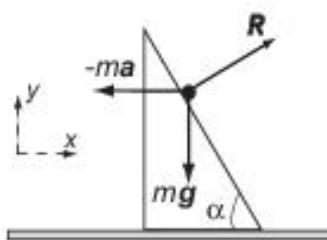
- [10] Il moto del punto è uniformemente decelerato, con accelerazione pari all'accelerazione di gravità lunare  $g_L$  che, per la legge di attrazione gravitazionale, sarà data da:

$$mg_L = G \frac{M_L m}{(d_L/2)^2} \quad \Rightarrow \quad g_L = G \frac{M_L}{(d_L/2)^2} \simeq 1.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$h = \frac{v^2}{2g_L} = 281 \text{ m.}$$

- [11] Rispetto a un sistema di riferimento (non inerziale)  $Oxyz$  solidale con il piano inclinato e posto come nella figura a lato, la seconda legge della dinamica applicata alla massa  $m$  si scrive:

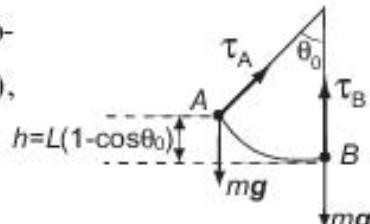
$$\mathbf{R} + mg - m\mathbf{a} = 0$$



Proiettando la relazione lungo gli assi  $x$  e  $y$  si ha:

$$\begin{cases} -ma + R \sin \alpha = 0 \\ -mg + R \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow a = g \tan \alpha = 17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

- [12] La seconda equazione della dinamica per la massa  $m$  applicata nelle posizioni  $A$  (punto di inversione del moto) e  $B$  (punto inferiore della traiettoria), proiettata lungo il filo si scrive:



$$\tau_A - mg \cos \vartheta_0 = 0 \Rightarrow \tau_A = mg \cos \vartheta_0$$

$$\tau_B - mg = \frac{mv_B^2}{L} \Rightarrow \tau_B = mg + \frac{mv_B^2}{L}$$

Poiché l'energia cinetica è massima nel punto  $B$ , dalla conservazione dell'energia si ha:

$$mgh = mgL(1 - \cos \vartheta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \cos \vartheta_0 = 1 - \frac{T_M}{mgl} \Rightarrow \vartheta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Si può pertanto scrivere:

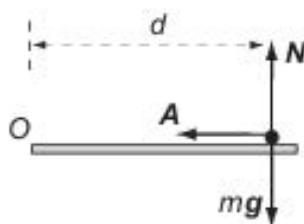
$$\tau_B = mg[1 + 2(1 - \cos \vartheta_0)] \Rightarrow \tau_B - \tau_A = 3mg(1 - \cos \vartheta_0) = 0.4 \text{ N}.$$

- [13] Indicando con  $M$  la massa del Sole ( $M = 4/3\pi R^3 \rho$  essendo  $R$  e  $\rho$  il raggio e la densità del Sole, rispettivamente), con  $r$  il raggio dell'orbita Terra-Sole e con  $\omega$  la velocità angolare della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, la seconda legge della dinamica per la Terra si scrive:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r \Rightarrow T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \left( \frac{r}{R} \right)^3}$$

da cui si evince che il periodo  $T$  non muta ( $T = 365$  giorni) perché sia  $r$  che  $R$ , nell'operazione di riduzione in scala, sono ridotti dello stesso fattore (circa  $10^{11}$ ).

- [14] Le forze agenti sulla moneta sono la forza peso,  $mg$ , la componente normale della reazione vincolare,  $N$ , e la forza centripeta,  $A$  fornita dall'attrito statico tra moneta e superficie. Applicando la seconda legge della dinamica alla moneta si ha:



$$\mathbf{A} + \mathbf{N} + mg = ma$$

con  $a = v^2/d$ . Proiettando la relazione in direzione normale e radiale rispetto alla piattaforma si ha, rispettivamente:

$$N = mg \quad \text{e} \quad A = mv^2/d$$

e quindi:

$$\mu_s mg = mv^2/d \quad \Rightarrow \quad \mu_s = v^2/dg = 0.085,$$

da cui si ottiene:

$$\mu_s mg = mv^2/d \quad \Rightarrow \quad \mu_s = v^2/dg = 0.085$$

- [15] Applicando il teorema dell'impulso si ha:

$$F\Delta t = m v_f \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F\Delta t}{v_f} = 10 \text{ kg.}$$

Dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica

$$L = \Delta T = \frac{1}{2}m v_f^2 \simeq 48 \text{ kJ.}$$

- [16]

$$P = \frac{dL}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad P = 50 \text{ W.}$$

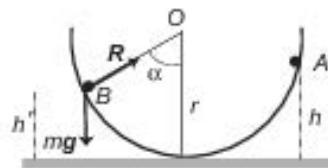
$$dL = P dt \quad \Rightarrow \quad L = \int_{t_1}^{t_2} P dt = P \Delta t = 25 \text{ Wh} = 9 \times 10^4 \text{ J.}$$

Oppure:

$$d = v \Delta t = 9 \times 10^3 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F d = 9 \times 10^4 \text{ J}.$$

- [17] Applicando la seconda legge della dinamica nel punto  $B$  si ha:

$$-mg \cos \alpha + R = m \frac{v_B^2}{r}$$



e quindi:

$$R = m \left( \frac{v_B^2}{r} + g \cos \alpha \right).$$

La velocità nel punto  $B$  si trova applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica: indicando con  $h' = r(1 - \cos \alpha) = 10 \text{ cm}$  la quota del punto  $B$ ,

$$mg h = mg h' + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2g(h - h');$$

Pertanto:

$$R = m \left[ \frac{2g}{r}(h - h') + g \cos \alpha \right] = 0.98 \text{ N}.$$

- [18]

a)  $F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{a}{r^2} + \frac{3b}{r^4} : \Rightarrow F(r) > 0 \text{ per } r^2 < \frac{3b}{a}$

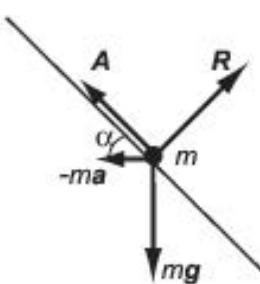
b)  $F(r) = 0 \Rightarrow -\frac{a}{r^2} + \frac{3b}{r^4} = 0 \text{ per } r^2 = \frac{3b}{a} :$

nella posizione di equilibrio stabile  $U(r)$  ha un minimo.

c)  $T_i + U_i = T_{eq} + U_{eq} \Rightarrow T_{eq} = -U_{eq} = \frac{a}{r_0} - \frac{b}{r_0^3} = \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3b}}$

- [19] Affinché la massa  $m$  scenda con velocità costante, deve essere nullo il risultante delle forze su di essa applicate:

$$mg + \mathbf{R} + \mathbf{A} - ma = 0.$$



Proiettando la relazione lungo il piano inclinato si ha:

$$-mg \sin \alpha + \mu_s(mg \cos \alpha + ma \sin \alpha) + ma \cos \alpha = 0,$$

da cui si ricava:

$$a = g \frac{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha} = g \frac{\tan \alpha - \mu_s}{1 + \mu_s \tan \alpha} = 4.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

e quindi:

$$F = (M + m)a = 2.31 \text{ N}.$$

- [20] Dal teorema dell'impulso, si ha:

$$\Delta p = mv_F - mv_I = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad \Rightarrow \quad v_F = \frac{1}{m} \int_0^2 F dt = 8 \text{ m/s}.$$

- [21] Dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica:

$$L_{att} = -2\pi r \mu_d mg = \Delta T = \frac{1}{2} m(v_F^2 - v_I^2) = -\frac{3}{8} mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{3v_0^2}{16\pi rg}.$$

Se  $n$  è il numero totale di giri, sempre dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica:

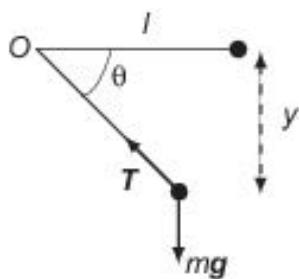
$$-\frac{1}{2} mv_0^2 = -n(2\pi r \mu_d mg) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{mv_0^2}{4\pi r \mu_d mg} = \frac{4}{3}.$$

- [22] Applicando la seconda legge della dinamica alla massa  $m_1$  e proiettandola lungo l'asse  $x$ , parallelo al piano inclinato e diretto come la forza  $\mathbf{F}$  si ha:

$$\tau - \mu_d m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = m_1 g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) = 9.1 \text{ N}.$$

- [23] La seconda legge della dinamica applicata al punto materiale e proiettata lungo la direzione (radiale) del filo, essendo  $l$  la lunghezza di quest'ultimo, si scrive:

$$T - mg \sin \vartheta = m \frac{v^2}{l} \Rightarrow T = m \left( \frac{v^2}{l} + g \sin \vartheta \right).$$



Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy = mgl \sin \vartheta \Rightarrow v^2 = 2gl \sin \vartheta,$$

pertanto:  $T = 3mg \sin \vartheta$ . L'angolo di rottura  $\vartheta_m$  si ha per  $T = T_m$ , quindi:

$$\sin \vartheta_m = \frac{T_m}{3mg} \sim 1/2 \Rightarrow \vartheta \sim \pi/6.$$

- [24] Per la domanda a):

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgr \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h - 2r)},$$

quindi

$$a_B = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a_B = 2g \frac{h - 2r}{r}.$$

Per la domanda b) poiché nel punto  $B$  deve essere  $\mathbf{R}_n = 0$  si ha:

$$mg = ma \Rightarrow g = \frac{v_{min}^2}{r} \Rightarrow v_{min}^2 = gr.$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica si ha perciò:

$$mgh_{min} = \frac{1}{2}mv_{min}^2 + 2mgr = \frac{1}{2}mgr + 2mgr \Rightarrow h_{min} = \frac{5}{2}r.$$

- [25] Le forze esterne applicate sul sistema dei due blocchetti sono le due forze peso e le due forze di attrito. La componente della risultante nella direzione del piano dipende dall'inclinazione  $\alpha$  secondo la

$$F_T = m_1 g \sin \alpha + m_2 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha$$

sino al valore di  $\alpha_{max}$ , al quale il sistema dei due blocchetti inizia a muoversi.

Questo avviene per il valore di  $\alpha$  per il quale si annulla la componente  $F_T$ :

$$(m_1 + m_2)g \sin \alpha_{max} - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g \sin \alpha_{max} = 0.$$

Da cui

$$\alpha_{max} = \arctan \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0.15.$$

- [26] Per trovare il lavoro, bisogna trovare la risultante di tutte le forze diretta lungo lo spostamento e quindi l'accelerazione nel moto rettilineo. L'accelerazione è data da

$$a = \frac{dv}{dt} = k \frac{d(\sqrt{s})}{dt} = \frac{k}{2\sqrt{s}} \frac{ds}{dt} = \frac{k}{2\sqrt{s}} v = \frac{k^2}{2}$$

quindi il moto è uniformemente accelerato da una forza risultante costante di modulo  $F = ma = mk^2/2$  diretta lungo lo spostamento (moto rettilineo). Il lavoro effettuato nel tempo  $t$  è pari al prodotto tra la forza e lo spazio percorso  $S$  in questo tempo:

$$L = Fs = \frac{mk^2}{2} \left( \frac{1}{2} at^2 \right) = \frac{mk^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{k^2}{2} t^2 \right) = \frac{mk^4 t^2}{8}.$$

- [27] Il lavoro delle forze non conservative è pari a  $L_{nc} = \Delta T + \Delta U$  ed è fatto dalla forza di attrito dinamico lungo i due tratti del percorso. Imponendo che dopo il tratto inclinato  $s$  e il tratto orizzontale  $L$  il corpo si fermi, si ha

$$L_{nc} \equiv -\mu mg \cos \vartheta S - \mu mg L = -mgS \sin \vartheta$$

dove si è considerata l'altezza di caduta  $h = s \sin \vartheta$ ; quindi

$$s = \frac{L}{\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta}$$

infine

$$L_{nc} = -mgs \sin \vartheta = mgL \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta} = 0.05 \text{ J}.$$

- [28] Il bilancio delle forze sul corpo si scrive come:

$$R_N - mg + F \sin \alpha = 0$$

al tempo  $t^*$  avviene il distacco in modo che  $R_N(t^*)=0$  e  $F(t^*) = kt^*$ , quindi  $t^* = mg/(k \sin \alpha)$ .

L'accelerazione del moto è  $kt \cos \alpha / m$  quindi, partendo la massa da ferma, a) la velocità al tempo del distacco è:

$$v(t^*) = \int_0^{t^*} a \, dt = \frac{1}{2} \frac{k}{m} (t^*)^2 \cos \alpha = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2k \sin^2 \alpha}$$

b) Lo spazio percorso al tempo del distacco è

$$x(t^*) = \int_0^{t^*} v \, dt = \frac{1}{6} \frac{k}{m} (t^*)^3 \cos \alpha = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6k^2 \sin^3 \alpha}.$$

- [29] Dal momento che il moto avviene nel piano  $xy$  il momento angolare ha solo la componente  $z$  che quindi coincide con il suo modulo  $L_z = m(xv_y - v_x)$ . Dalle equazioni del moto si ricava:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha t & e & \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x &= v_0 \cos \alpha & e & \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

Quindi la componente lungo  $z$  del momento della quantità di moto è:

$$b_z(t) = \frac{1}{2} m v_0 \cos \alpha g t^2$$

Il punto più alto della traiettoria si raggiunge al tempo  $t^* = v_0 \sin \alpha / g$  per cui:

$$b_z(t^*) = \frac{mv_0^3}{2g} \sin^2 \alpha \cos \alpha = 37 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

- [30] Poiché la potenza è espressa dalla relazione  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ , indicando con  $\vartheta$  l'inclinazione rispetto all'orizzontale della salita, la potenza residua erogata dal motore della macchina per affrontare la salita con velocità  $v$ ,  $P_M - P'$ , deve essere pari alla potenza dissipata dalla componente della forza peso lungo la salita:

$$P_M - P' = mgv \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta = \frac{P_M - P'}{mgv} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 21^\circ 34'.$$

- [31] Si consideri il sistema di riferimento inerziale che si muove con velocità  $v_0$  rispetto al quale i due carrelli risultano inizialmente fermi. Detta  $v_u$  la velocità dell'uomo durante il salto, e  $V_1$  e  $V_2$  le velocità finali dei due carrelli rispetto a questo sistema di riferimento, la conservazione della quantità di moto per i due carrelli si scrive come:

$$\begin{aligned} mv_u &= M|V_1| \\ mv_u &= (m+M)|V_2|. \end{aligned}$$

Queste due equazioni insieme alla relazione  $v_u = U - |V_1|$ , permette di ricavare le velocità dei carrelli rispetto al sistema di riferimento che trasla con velocità  $v_0$ :

$$|V_1| = \frac{mU}{m+M} \quad \text{e} \quad |V_2| = \frac{mMU}{(m+M)^2}.$$

Le velocità cercate dei due carrelli rispetto al sistema di riferimento fisso sono:

$$\begin{aligned} V'_1 &= v_0 - |V_1| \\ V'_2 &= v_0 + |V_2|. \end{aligned}$$

- [32]

$$\Delta p = \int F dt \Rightarrow m(v - v_0) = \int_0^{t_1} kt dt = \frac{1}{2}kt_1^2;$$

pertanto:

$$v = v_0 + \frac{k}{2m}t_1^2 = 152 \text{ m/s},$$

e quindi:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 11\,550 \text{ J}.$$

- [33] Dato il periodo di rotazione del satellite  $T_s$  rispetto a un sistema di riferimento inerziale, allora per un'orbita circolare

$$\frac{GM_T m}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{T_s^2} \frac{R^3}{G}.$$

Mentre il satellite ruota, la Terra ruota nella stessa direzione; il satellite, quindi, riapparirà su uno stesso punto dell'equatore dopo un tempo  $\tau$  tale che questo

punto e il satellite percorrono un angolo sfasato di  $2\pi$  cioè  $\vartheta_T + 2\pi = \vartheta_s$  dove  $T_T$  è il periodo di rotazione della Terra; inoltre:

$$\vartheta_s = \frac{2\pi}{T_s}\tau \quad \text{e} \quad \vartheta_T = \frac{2\pi}{T_T}\tau$$

da cui

$$T_s = \frac{\tau T_T}{\tau + T_T}.$$

Pertanto:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{G} \frac{(\tau + T_T)^2}{(\tau T_T)^2} = 6 \times 10^{34} \text{ kg.}$$

[34] Per un'orbita circolare di raggio  $R$  attorno a un corpo di massa  $M$

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

per cui dato che  $T_G = 12T_T$ , allora:

$$\frac{4\pi^2 R_G^3}{GM} = 144 \frac{4\pi^2 R_T^3}{GM}.$$

Quindi a)  $R_G = \sqrt[3]{144} R_T = 5,2 R_T$

b) la velocità di rivoluzione di Giove è:

$$v_G = \frac{2\pi}{T_G} R_G = \frac{2\pi}{12T_T} \sqrt[3]{144} R_T = 12.5 \text{ km/s.}$$

poiché  $T_T = (365 \cdot 24 \cdot 3600)\text{s}$  e  $R_T = (8 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^8)\text{m}$ , inoltre

$$a_G = \left( \frac{2\pi}{T_G} \right)^2 \Rightarrow R_G = 2.1 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

[35] La terza legge di Keplero implica che il periodo di rivoluzione per un'orbita ellittica equivale al periodo di un'orbita circolare di raggio pari al semiasse maggiore dell'ellisse, quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(r + R)^3}{8GM}}.$$

- [36] Si consideri il pianeta all'afelio a distanza  $R$  e velocità  $v$  e al perielio a distanza  $r$  e velocità  $V$ . Dalle le leggi di conservazione del momento della quantità di moto e dell'energia tra questi due punti si ha:

$$\begin{aligned} mvR &= mVr \\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} &= \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} \end{aligned}$$

dalla prima equazione si ha che  $v = V(r/R)$ ; sostituendo tale espressione nella seconda equazione si trova

$$\frac{1}{2}V^2 \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) = GM \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

da cui

$$V^2 = \frac{2GM}{(r+R)} \frac{R}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{(r+R)} \frac{r}{R}.$$

Esplicitando una delle espressioni dell'energia, per esempio all'afelio, si ha:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} \frac{2GMm}{(r+R)} \frac{r}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$

dove  $a = (r+R)/2$  è il semiasse maggiore dell'orbita.

- [37] Posta l'origine di un asse  $x$  nell'estremo dell'asta più vicino a  $m$ , ogni massa elementare dell'asta  $dm$  in posizione  $x$  si trova a distanza  $a+x$  dalla massa puntiforme per cui interagisce gravitazionalmente con l'energia potenziale

$$dU = -\frac{GMdm}{a+x},$$

per cui l'energia potenziale totale sarà:

$$U = - \int_0^\ell \frac{GM}{a+x} \lambda dx = -GM\lambda \ln \frac{a+\ell}{a} = -\frac{GMm}{\ell} \ln \frac{a+\ell}{a}.$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial a} \hat{\mathbf{a}} = -\frac{GMm}{a(a+\ell)} \hat{\mathbf{a}}$$

avendo indicato con  $\hat{\mathbf{a}}$  il versore che va dalla massa puntiforme a un estremo dell'asta.

- [38] Poiché il satellite è geostazionario allora il suo periodo di rotazione è  $T = T_0 = 24$  h; quindi, data l'equazione della dinamica del satellite, si ha:

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T_0^2} r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 GM} = 4.2 \times 10^4 \text{ km};$$

$$v = \frac{2\pi}{T_0} r = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{T_0} GM} = 3.1 \text{ km/s};$$

$$a = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 r = \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^4 GM} = 0.22 \text{ m/s}^2.$$

- [39] Dette  $r_T$  e  $r_L$  le distanze del punto cercato, rispettivamente dalla Terra e dalla Luna, la condizione posta dall'esercizio si pone nella seguente forma:

$$\frac{GM_T m}{r_T^2} = \frac{GM_L m}{r_L^2} \quad \Rightarrow \quad r_L = r_T \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}.$$

Dal momento che  $M_T = \eta M_L$  e  $r_T + r_L = r_{TL} = nR$ , allora:

$$r_L = \frac{r_{TL} - r_T}{\sqrt{\eta}} = \frac{\eta R}{1 + \sqrt{\eta}} = 3.8 \times 10^4 \text{ km}.$$

- [40] L'altezza massima raggiunta si trova imponendo la conservazione dell'energia meccanica ( $\Delta U + \Delta T = 0$ ) e l'annullamento della velocità verticale del corpo. Nel caso del campo di gravità uniforme si ha:

$$mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Nel caso della gravitazione si ha:

$$-\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R} - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0,$$

per cui, essendo  $g = GM/R^2$ ,

$$h = \frac{R}{\left(\frac{2GM}{Rv_0^2} - 1\right)} = \frac{R}{\left(\frac{2gR}{v_0^2} - 1\right)} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{R}{\left(R - \frac{v_0^2}{2g}\right)};$$

quindi il fattore di correzione è:

$$\frac{R}{\left(R - \frac{v_0^2}{2g}\right)}.$$

- [41] La diminuzione di energia totale in un tempo  $dt$  è  $-dE = Fvdt = -\alpha v^3 dt$ : vanno cercate, quindi, le espressioni di  $v$  ed  $E$  in funzione della distanza  $r$  dal centro della Luna e si integra l'espressione in funzione del tempo. Dalla seconda legge della dinamica si ha:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \left(\frac{GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mentre l'energia totale in un'orbita circolare è:

$$E = U + T = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r} \Rightarrow dE = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} dr.$$

Quindi

$$\int_0^\tau dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{GM}} \frac{m}{\alpha} \int_{\eta R}^R \frac{1}{\sqrt{r}} dr$$

da cui si ricava

$$\tau = (\sqrt{\eta} - 1) \frac{m}{\alpha \sqrt{gR}}.$$

- [42] Utilizzando la conservazione del momento della quantità di moto e dell'energia nel punto noto  $r_0$  e in un punto  $r$  di distanza massima o minima ( $\mathbf{v}$  perpendicolare al raggio vettore  $\mathbf{r}$ ), si scriverà:

$$\begin{aligned} mr_0 v_0 \sin \alpha &= mr v \\ -\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2} mv_0^2 &= -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned}$$

Da queste, eliminando la variabile  $v$ , si ha:

$$-\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{(r_0 v_0)^2 \sin^2 \alpha}{r^2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} mv^2;$$

risolvendo rispetto a  $r$  si ha:

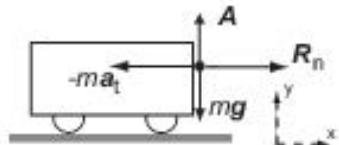
$$r^2 + 2\frac{GM}{a}r - \frac{c}{a} = 0$$

dove  $a = v_0^2 - 2GM/r_0$  e  $c = (r_0v_0)^2 \sin^2 \alpha$ . Le due soluzioni della distanza minima e massima sono date da

$$r_{M,m} = -\frac{GM}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}}.$$

- [43] Nel sistema di riferimento (non inerziale) solidale con il carrello, la seconda legge della dinamica per la massa  $m$  si scrive:

$$m \mathbf{g} + \mathbf{R}_N + \mathbf{A} - m \mathbf{a}_t = m \mathbf{a}$$



dove al primo membro, oltre alle forze reali (peso, componente normale della reazione vincolare e attrito), vi è la forza apparente  $-ma_t$ . Proiettando la relazione lungo gli assi  $x$  e  $y$  si ha:

$$\text{asse } x : -ma_t + R_N = 0 \Rightarrow R_N = ma_t$$

$$\text{asse } y : -mg + A = 0 \quad \text{essendo il moto uniforme}$$

$$\text{Poiché } A = \mu_d R_N \Rightarrow \mu_d = g/a_t = 0.6.$$



# Dinamica dei sistemi di punti materiali

## 4.1 Esercizio guida – Urti centrali

### Teoria

Il contatto temporalmente breve tra le superfici di due corpi che si vengono incontro e la dinamica conseguente va sotto il nome di urto, un fenomeno per il cui studio si prescinde dalla conoscenza dell'andamento temporale delle forze di scambio durante il processo, ma se ne considera unicamente la proprietà legata al terzo principio della dinamica: la quantità di moto complessiva dei due corpi interagenti e il momento complessivo delle loro quantità di moto si mantiene costante. Se l'urto è elastico, ciò significa che si mantiene in forma meccanica, non dissipativa, anche l'energia cinetica complessiva dei due corpi. Quindi

$$\begin{aligned} \text{sempre: } & m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2 \\ & \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{V}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{V}_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\text{e, solo per gli urti elastici: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2. \tag{4.2}$$

Nelle equazioni ora scritte, le grandezze per le velocità in minuscolo ( $v$ ) si riferiscono alle condizioni precedenti l'urto, quelle in maiuscolo ( $V$ ) alle condizioni

seguenti; gli indici 1 e 2 si riferiscono ai due distinti corpi interagenti. Se i due corpi si possono considerare puntiformi, l'equazione relativa ai momenti delle quantità di moto non dà informazioni aggiuntive rispetto a quella della quantità di moto e non deve essere considerata; in questo caso, l'urto può aver luogo solo se le velocità prima dell'urto sono allineate su una stessa retta nel sistema del centro di massa e su questa stessa restano dopo l'urto: il problema è monodimensionale. Se i corpi sono estesi, per l'equazione delle quantità di moto, i termini di velocità sono da intendersi come quelli dei centri di massa, ma le forze di contatto non sono necessariamente allineate sulla direzione delle velocità e, pertanto, dopo l'urto, possono nascere componenti delle velocità non allineate sulla precedente direzione.

Nel caso di due corpi puntiformi, scelto il sistema di riferimento solidale col secondo corpo ( $v_2 = 0$ ), si hanno le seguenti espressioni per i moduli delle velocità dopo l'urto:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1 \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2\gamma}{1 + \gamma} v_1$$

dove si è indicato con  $\gamma$  il rapporto tra le masse  $m_1/m_2$ .

### Argomento

Si considera preliminarmente la modifica delle equazioni nel caso in cui vi sia dissipazione di energia meccanica nell'urto, quindi si analizzano alcuni problemi indiretti dell'urto tra corpi puntiformi senza dissipazione di energia. Successivamente, si considera il caso di un corpo puntiforme che impatta su un secondo corpo, variamente condizionato da vincoli esterni, quali ad es. la massa di un pendolo semplice, un'asta oscillante fissata al soffitto o un corpo che possa scivolare su un piano di appoggio.

*La dissipazione*

*di energia*

*modifica*

*l'equazione*

*corrispondente,*

*lasciando*

*inalterata*

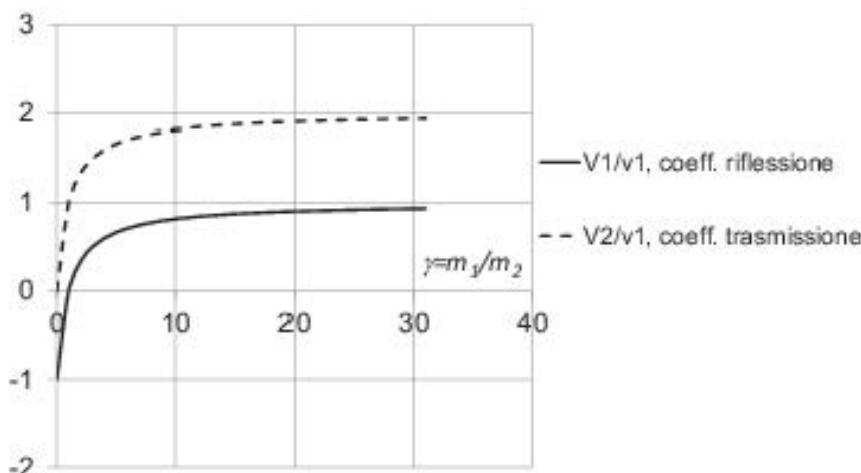
La dissipazione di energia viene considerata inserendo nell'Eq. (4.2) la frazione  $\alpha$  di energia a disposizione del sistema dopo l'urto rispetto alla quantità a disposizione prima dell'urto.

$$\alpha \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

La presenza del coefficiente  $\alpha$  non permette una riduzione im-

*quella delle  
quantità di  
moto*

mediata delle due equazioni del moto e porta a un'espressione delle velocità di uscita per i due punti di non diretta interpretazione. Viceversa, le espressioni nel caso non dissipativo si prestano a un'interpretazione generale del problema dell'urto, che si trasporta alla più generale fenomenologia della trasmissione di un'onda attraverso la superficie di separazione tra due mezzi di differente impedenza specifica, il cui rapporto sia eguale al parametro  $\gamma$  qui usato. I rapporti tra le velocità di uscita del primo e del secondo punto e la velocità d'entrata del primo è riportato a pagina 253 in funzione del rapporto  $\gamma$  tra le masse. Il medesimo grafico rappresenta anche i coefficienti di riflessione e di trasmissione di un'onda sull'interfaccia tra due diversi mezzi di propagazione aventi rapporto di impedenza pari a  $\gamma$ .



Andamento dei rapporti tra le velocità di uscita del primo e del secondo punto e la velocità d'entrata del primo in funzione del rapporto  $\gamma$

*Due corpi puntiformi con rapporto di masse  $m_1/m_2 = \gamma$  si vengono incontro in un sistema di riferimento solidale con l'osservatore con velocità  $v'$  eguali e opposte. In questo sistema di riferimento, la massa maggiore, dopo l'urto, ha una velocità  $V'_2$ . Si cerca il valore di  $\gamma$ .*

Per fare uso delle formule sopra riportate, occorre passare dal sistema di riferimento dell'osservatore ( $T'$ ), contrassegnato dagli apici a quello ( $T$ ) in cui è inizialmente ferma la massa 2, in cui sono state scritte le formule di sopra. Scegliendo come positiva la velocità  $v'$  della prima massa nel sistema  $T'$ , la seconda avrà una velocità  $-v'$ , che è la velocità di trascinamento del sistema  $T$  rispetto a  $T'$  (eguale e opposta a quella di  $T'$  rispetto a  $T$ ).

Si hanno, quindi, le relazioni ( $v_{\text{relativa}} = v_{\text{assoluta}} - v_{\text{trascinamento}}$ )

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 + v' & v_2 &= v'_2 + v' \\ V_1 &= V'_1 + v' & V_2 &= V'_2 + v'. \end{aligned}$$

Facendo uso dei dati del testo e dei risultati sopra riportati per il caso generale

$$V'_2 + v' = \frac{2\gamma}{1+\gamma}(v'_1 + v') = \frac{4\gamma}{1+\gamma}v'$$

da cui

$$\gamma = \frac{v' - V'_2}{3v' - V'_2}.$$

Se, ad es. la massa 2 si ferma dopo l'urto nel sistema  $T'$  ( $V'_2 = 0$ ), il rapporto delle masse è  $\gamma = 1/3$  e la prima massa rimbalza con velocità  $V'_1 = -2v'$ , come ci si aspetta, osservando che in questo caso nel sistema  $T'$  la quantità di moto totale è pari a  $-2m_1v'$  e che, se la seconda massa si è fermata, la prima deve avere dopo l'urto tutta la quantità di moto del sistema e, quindi, la velocità  $V'_1 = -2v'$ .

*Un proiettile di massa  $m$  incide con velocità  $v_1$ , diretta orizzontalmente, su una massa  $M$  ferma, vincolata a un filo inestensibile fissato all'estremo superiore. Nell'urto il corpo di massa  $m$  si conficca in quello di massa  $M$  ed entrambi dopo l'urto oscillano con frequenza  $f$ . Si cerca la lunghezza  $l$  del filo e la quota  $h$  cui giungono i due corpi al di sopra del punto d'impatto.*

L'urto è anelastico: i due corpi, dopo l'urto, proseguono con la stessa velocità. La conservazione della quantità di moto, scritta per la componente orizzontale, è la prima

dell'Eq. (4.1), scritta con le condizioni specifiche come

$$mv_1 = (m + M)V$$

avendo indicato con  $V$ , senza indici, la velocità di uscita dei due corpi uniti. Questa può essere ricavata direttamente da quest'unica equazione, che risolve completamente il problema, dal momento che un'ulteriore condizione è stata implicitamente immessa ponendo appunto che le due velocità di uscita coincidano.

La frazione di energia meccanica dissipata nell'urto è

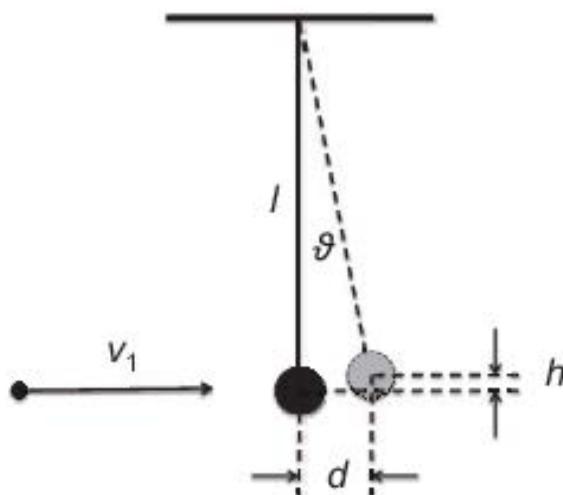
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = 1 - \frac{m}{m+M}$$

che, usando ancora il parametro  $\gamma = m_1/m_2$ , diviene

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{1+\gamma}.$$

Per ricavare la lunghezza del filo e la quota di innalzamento delle masse, nel caso di piccole oscillazioni, si ricorda l'espressione del periodo

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{da cui immediatamente} \quad l = \frac{g}{(2\pi f)^2}.$$



**Fig. 4.1.** Un proiettile di massa  $m$  urta una massa  $M$  ferma, vincolata a un filo inestensibile

Per ricavare la quota di innalzamento delle masse, la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante immediatamente successivo all'urto e quello corrispondente al punto di massima quota porta a

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left( \frac{m}{m+M} \right)^2$$

I risultati della lunghezza  $l$  del filo e della quota  $h$  di innalzamento permettono di verificare se può considerarsi valida l'ipotesi delle piccole oscillazioni. Per approssimazione, se l'angolo di oscillazione massima è sufficientemente piccolo, esso può ricavarsi da (Fig. 4.1 nella pagina precedente)

$$\vartheta \simeq \frac{d}{l} \simeq \frac{h}{d} \quad \text{da cui} \quad \vartheta \simeq \sqrt{\frac{h}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{m}{m+M} \frac{fv_1}{g} \right)$$

e la condizione di piccole oscillazioni diviene

$$\left( \frac{m}{m+M} \right) v_1 f \ll \sqrt{2} g \quad (4.3)$$

Le considerazioni per la determinazione della lunghezza del filo e della quota di innalzamento sono quindi valide se è soddisfatta la condizione data dall'Eq. (4.3).

*Quale variante del problema precedente, si considera che il proiettile di massa  $m$  con velocità  $v_1$  orizzontale incida su un'asta rigida monodimensionale di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , ferma in posizione verticale soggetta al proprio peso, con l'estremo superiore fissato al soffitto a un vincolo di rotazione privo di attrito, situato a una distanza  $\alpha L$  sopra il punto d'impatto. Nell'urto il corpo di massa  $m$  si conficca nell'asta. Si cerca l'angolo  $\vartheta_{max}$  di massima oscillazione del sistema dopo l'urto.*

Il sistema del proiettile e dell'asta non è isolato, in quanto l'asta è fissata al soffitto, e pertanto esso non conserva la quantità di moto; esso però conserva il momento della quantità di moto rispetto al punto  $O$  di sospensione perché le forze vincolari passanti per  $O$  sono prive di attrito, quindi, di momento. Per la conservazione del momento

della quantità di moto si ha

$$\alpha L m v_1 = (\alpha L)^2 \omega_0 m + \frac{ML^2}{3} \omega_0$$

avendo indicato con  $\omega_0$  la velocità angolare del sistema immediatamente dopo l'urto e inserito il valore  $ML^2/3$  per il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'estremo di oscillazione. Si ricava

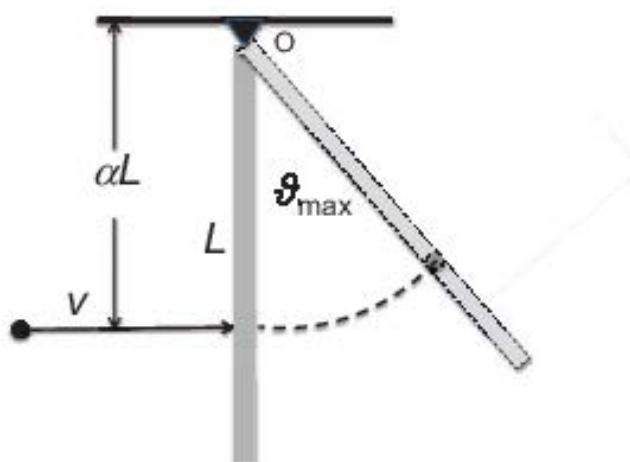
$$\omega_0 = \frac{\alpha v_1}{L \left( \alpha^2 + \frac{1}{3\gamma} \right)}$$

con l'usuale notazione per  $\gamma = m/M$ . La conservazione dell'energia meccanica, tenendo debito conto della variazione di quota subita dal centro di massa dell'asta e del proiettile e dividendo per  $ML$ , si scrive

$$\frac{1}{2} L \omega_0^2 \left( \gamma \alpha^2 + \frac{1}{3} \right) = g(1 - \cos \vartheta_{max}) \left( \gamma \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

da cui

$$\cos \vartheta_{max} = 1 - \frac{\gamma \alpha^2}{g \left( \gamma \alpha + \frac{1}{2} \right)} v_1^2$$



**Fig. 4.2.** Un proiettile di massa  $m$  urta un'asta rigida monodimensionale di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , ferma in posizione verticale avendo l'estremo superiore fissato al soffitto a un vincolo di rotazione,  $O$ , privo di attrito

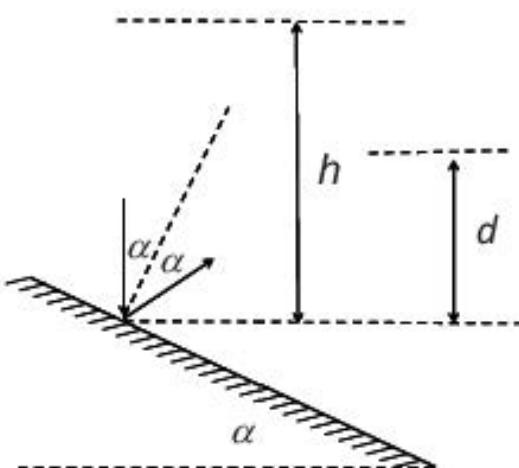
Una pallina, da potersi considerare puntiforme a tutti gli effetti, cade da ferma, soggetta alla sola forza peso, su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale da un'altezza  $h$ , computata rispetto al punto di impatto, e rimbalza elasticamente. Si cerca l'altezza  $d$  a cui può giungere la pallina dopo il rimbalzo e le caratteristiche della parabola di caduta dopo l'impatto.

Data la condizione di elasticità dell'urto, quindi di conservazione dell'energia meccanica, immediatamente dopo il rimbalzo la velocità della pallina ha lo stesso modulo del vettore velocità che la pallina possiede immediatamente prima dell'urto al termine della caduta;

$$v = \sqrt{2gh}$$

L'assenza di attrito nel contatto col piano consente di affermare che non c'è dissipazione dell'energia e che non ci sono forze tangenziali al piano nell'impatto; quindi, che la componente tangenziale della quantità di moto della pallina si conserva. Ciò corrisponde a dire che l'angolo di uscita dall'urto è eguale a quello di entrata e che dopo l'urto la velocità della pallina forma una direzione pari a  $2\alpha$  con la verticale (Fig. 4.3). La componente verticale della velocità dopo il rimbalzo è quindi

$$v_{\text{verticale}} = \sqrt{2gh} \cos(2\alpha)$$



**Fig. 4.3.** Una massa puntiforme cade da ferma da un'altezza  $h$  su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale

e con essa la pallina può elevarsi per un tratto  $d$  pari a

$$d = h \cos^2(2\alpha).$$

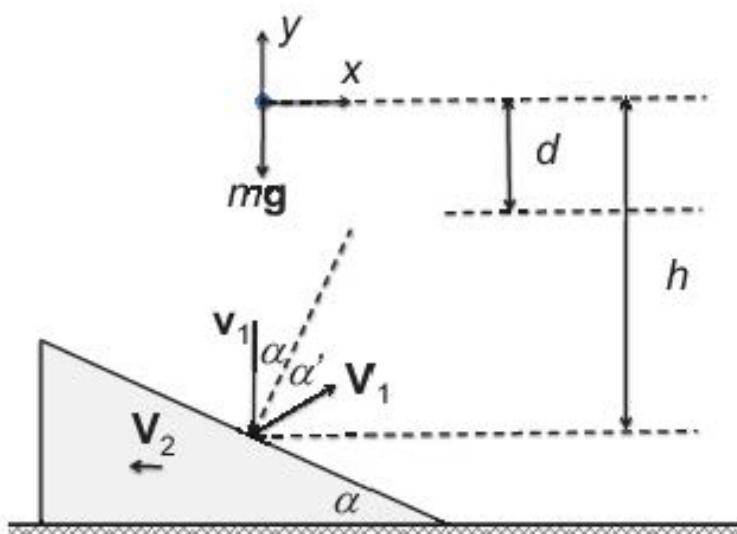
A completamento del problema, il tempo d'innalzamento e la componente orizzontale della velocità dopo l'urto sono rispettivamente

$$t_{\text{innalz}} = \sqrt{\frac{2h \cos^2(2\alpha)}{g}} \quad \text{e} \quad v_{\text{orizzontale}} = \sqrt{2gh} \sin 2\alpha$$

e la distanza  $L$  in orizzontale dal punto d'impatto al vertice della parabola di lancio

$$L = v_{\text{orizzontale}} t_{\text{innalz}} = h \sin(4\alpha).$$

*Per un'estensione, solo apparente, del problema che precede, si considera che la pallina, nelle medesime condizioni sopra descritte, incida sul piano inclinato di un cuneo di massa  $M$  e di angolo al vertice  $\alpha$  appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito.*



**Fig. 4.4.** Una massa puntiforme cade da ferma da un'altezza  $h$  sul piano inclinato di un cuneo di massa  $M$  e di angolo al vertice  $\alpha$  appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito

L'assenza di attrito tra pallina e cuneo permette di asserire che la componente lungo il piano inclinato della quantità di moto della pallina si conserva

$$v_1 \sin \alpha = V_1 \sin \alpha'.$$

Inoltre, poiché sul sistema pallina più cuneo non agiscono forze con componente orizzontale, nell'urto si conserva la quantità di moto corrispondente:

$$0 = mV_1 \sin(\alpha + \alpha') + MV_2.$$

A queste equazioni si aggiunge quella di conservazione dell'energia meccanica

$$mgh = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

sommmando così a tre le condizioni per le tre incognite introdotte  $V_1$ ,  $V_2$  e  $\alpha'$ . La soluzione del sistema richiede una lunga elaborazione algebrica, di relativo interesse per lo sviluppo del problema, cui pertanto non si dà seguito. Appare, peraltro, evidente che il caso in cui il cuneo fosse solidale col suo piano di appoggio (sostanzialmente solidale con la Terra) ricadrebbe in quello riportato nel problema precedente. Con  $M \rightarrow \infty$ , si avrebbe infatti  $V_2 \rightarrow 0$  e quindi un angolo  $\alpha'$  eguale in modulo ad  $\alpha$  e, quindi,  $v_1 = V_1$ .

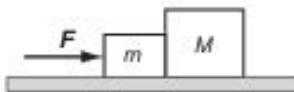
## 4.2 Domande di verifica

- Dare la definizione di centro di massa di un sistema di punti materiali.
- Dimostrare che il momento totale della quantità di moto di un sistema di punti isolato si conserva.
- Dimostrare che la variazione di energia meccanica di un sistema isolato coincide con il lavoro delle forze non conservative
- Dimostrare che la forza di attrazione gravitazionale che si esercita tra due masse puntiformi è conservativa.
- Dimostrare il teorema di König.
- Indicare e illustrare la condizione affinchè due sistemi di forze siano equivalenti.
- Spiegare perché durante un urto la velocità del centro di massa dei corpi urtanti si mantiene costante.
- Formulare le espressioni delle due equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi di punti materiali.
- Ricavare la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali.
- Ricavare la seconda equazione della dinamica dei sistemi di punti materiali nel caso in cui il polo O, rispetto al quale vengono calcolati i momenti delle forze, sia in movimento.
- Definire il centro di massa di un sistema di punti materiali e se ne spieghi l'importanza nello studio della dinamica dei sistemi di punti.
- Dimostrare la proprietà di additività del centro di massa per un sistema di punti.
- Dimostrare la terza legge di Keplero supponendo circolare l'orbita di un pianeta attorno al Sole.
- Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di punti formato da due masse puntiformi  $m_1$  ed  $m_2$  poste a distanza  $d$ .

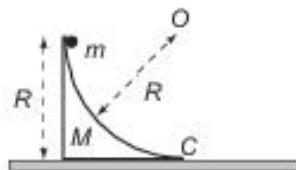
- Mostrare come la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali, somma delle singole quantità di moto, sia eguale alla quantità di moto che avrebbe un punto di massa pari alla somma delle masse che si muovesse con la velocità del centro di massa.

### 4.3 Esercizi

[1] Due blocchi, di massa  $m$  ed  $M$ , si trovano fermi sopra un piano orizzontale liscio: i due blocchi sono in contatto tra loro. Una forza costante  $\mathbf{F}$  orizzontale viene applicata alla massa  $m$ . Determinare la forza che il blocco di massa  $m$  esercita sul blocco di massa  $M$ . (I due blocchi sono schematizzabili come due punti materiali.)



[2] Una massa puntiforme  $m = 0.2 \text{ kg}$  cade, partendo da ferma da una altezza  $R = 1 \text{ m}$ , lungo una guida di massa  $M = 1 \text{ kg}$  scabra. La guida, avente la forma di un quarto di circonferenza di raggio  $R$ , è disposta in un piano verticale ed è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sapendo che la massa  $m$  quando arriva alla base della guida (punto  $C$ ) possiede una velocità  $v_c = 0.5 \text{ m/s}$ , si determini il lavoro fatto dalla forza di attrito.

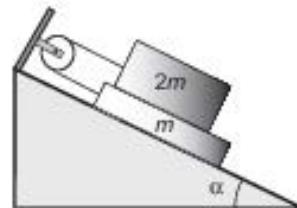


[3] Due masse  $M = 10 \text{ kg}$  e  $m = 5 \text{ kg}$  si trovano su un piano orizzontale privo di attrito e sono connesse da una molla ideale compressa, di costante elastica  $k = 10 \text{ N/m}$ . Rilasciando le masse, si nota che a un certo istante  $t'$  la massa  $m$  ha una velocità  $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} \text{ m/s}$ , essendo  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse  $x$ . Determinare, nell'istante  $t'$ , la velocità della massa  $M$  e quella del centro di massa del sistema.

[4] Una massa  $m = 50 \text{ kg}$  si trova inizialmente in quiete su di un carrello elevatore di massa  $M = 500 \text{ kg}$  fermo su un piano orizzontale privo di attrito. A un certo istante il carrello elevatore inizia a sollevare verticalmente la massa  $m$  imprimendogli un'accelerazione costante  $a = 0.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Determinare la reazione

vincolare  $R$  esercitata dal piano sul carrello elevatore durante il sollevamento di  $m$ .

- [5] La figura a lato mostra un blocco di massa  $2m$  che scivola su un blocco di massa  $m$ , essendo entrambi i blocchi appoggiati su di un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  e collegati da una fune inestensibile e priva di massa. Tutte le superfici sono prive di attrito. Determinare l'accelerazione di ciascun blocco e la tensione della fune.



- [6] Un punto materiale di massa  $m$  fermo su di un piano orizzontale, viene lanciato normalmente al piano verso l'alto. Durante il moto esso si spezza in due parti di massa  $m_1 = 1/3m$  ed  $m_2 = 2/3m$ , rispettivamente, che, cadendo, arrivano sul piano orizzontale nello stesso istante. Ponendo un sistema di riferimento  $Oxy$  sul piano orizzontale con origine nel punto di partenza dell'oggetto, la massa  $m_1$  cade nel punto di coordinate  $x_1 = 2\text{ m}$ ,  $y_1 = 10\text{ m}$ : si chiedono le coordinate  $x_2$  e  $y_2$  del punto in cui cadrà  $m_2$ .

- [7] Su un piano orizzontale scabro, tre blocchi massa  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  collegati da una fune inestensibile e priva di massa, sono trascinati per mezzo di una forza costante orizzontale  $F$ . Se il coefficiente di attrito dinamico tra le masse e il piano vale  $\mu_d$ , considerando le tre masse puntiformi, determinare la tensione della corda che collega  $m_1$  con  $m_2$ . ( $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ).



- [8] Una caldaia poggiata su un pavimento orizzontale esplode dividendosi in tre pezzi. Due di questi, di eguale massa, partono con la stessa velocità  $v = 9\text{ m/s}$  in direzioni fra loro perpendicolari e parallele al pavimento. Il terzo pezzo ha una massa tripla rispetto a quella degli altri due. Quali saranno il modulo e la direzione della velocità del terzo pezzo subito dopo l'esplosione?

- [9] Due piccoli dischi di masse  $m_1$  e  $m_2$  sono collegati tra loro da una molla a riposo di massa trascurabile e sono liberi di muoversi su un piano liscio. I dischi

sono posti in moto con due velocità iniziali  $v_1$  e  $v_2$  le cui direzioni giacciono sul piano orizzontale e sono mutualmente ortogonali tra loro. determinare l'energia totale del sistema nel riferimento del centro di massa.

- [10] Una punto materiale di massa  $m_1 = 100\text{ g}$  e velocità  $v_1$  urta centralmente un altro di massa  $m_2$  inizialmente fermo. Sapendo che dopo l'urto  $m_1$  si ferma e  $m_2$  parte con velocità  $\alpha v_1$  ( $\alpha = 0.7$ ), calcolare  $m_2$  e la frazione di energia cinetica iniziale dissipata nell'urto.
- [11] Un sistema di stelle doppio è costituito da due stelle che si muovono attorno a un centro comune. Determinare la distanza tra le due stelle se la massa totale del sistema è  $M$  e il periodo di rivoluzione è pari a  $T$ .
- [12] Una palla di acciaio di massa  $m = 50\text{ g}$  cade da un'altezza  $h = 1\text{ m}$  e rimbalza più volte su un pavimento piano riducendo la sua velocità di un fattore  $\eta = 1.25$  dopo ogni rimbalzo. Trovare la somma della quantità di moto trasmessa dalla palla al pavimento dopo numerosi rimbalzi.

#### 4.4 Soluzioni degli esercizi

- [1] Applicando la prima legge della dinamica dei sistemi di punti materiali, al sistema formato dalla massa  $m$  e dalla massa  $M$ , e considerando solo la componente orizzontale, si ottiene:

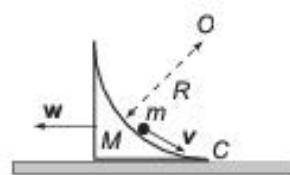
$$\mathbf{F} = (m + M)\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m + M}$$

essendo  $\mathbf{a}$  l'accelerazione del centro di massa del sistema uguale all'accelerazione della massa  $m$  e anche pari all'accelerazione del blocco di massa  $M$ . Indicando con  $\mathbf{f}$  la forza che la massa  $m$  esercita sulla massa  $M$ , per il blocco di massa  $M$ . Applicando la prima legge della dinamica al blocco di massa  $M$  si ha:

$$\mathbf{f} = M\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = \frac{M}{m + M}\mathbf{F}.$$

- [2] La variazione di energia meccanica del sistema formato dalla massa  $m$  ed  $M$  è pari al lavoro della forza d'attrito:

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mw_c^2 - mgR = L_{\text{ATT}},$$



avendo indicato con  $w_c$  la velocità della guida nell'istante in cui  $m$  si trova nel punto  $C$ . Nella direzione orizzontale non agiscono forze esterne, quindi:

$$mv_c + Mw_c = 0 \quad \Rightarrow \quad w_c = -\frac{m}{M}v_c = -0.1 \text{ m/s.}$$

Sostituendo i valori numerici nell'espressione della conservazione dell'energia, si ottiene  $L_{\text{ATT}} = -1.93 \text{ J}$ .

- [3] Il centro di massa rimarrà fermo poiché è nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema; inoltre, indicando con  $\mathbf{w}$  la velocità della massa  $M$  si ha:

$$m\mathbf{v} + M\mathbf{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = -\frac{m\mathbf{v}}{M} = -4\mathbf{i} \text{ m/s.}$$

- [4] Applicando la seconda legge della dinamica al sistema formato dal carrello e dalla massa  $m$  durante l'innalzamento di quest'ultima si ha:

$$(m+M)\mathbf{g} + \mathbf{R} = (m+M)\mathbf{a}_c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = (m+M)\mathbf{a}_c - (m+M)\mathbf{g}$$

essendo  $\mathbf{a}_c = \frac{m}{m+M}\mathbf{a}$  l'accelerazione del centro di massa del sistema; pertanto

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} - (m+M)\mathbf{g},$$

da cui si ricava:  $R = ma + (m+M)g = 5415 \text{ N}$ .

- [5] Fissato un sistema di riferimento inerziale con asse  $x$  e  $y$  rispettivamente parallelo e perpendicolare al piano inclinato, la seconda legge della dinamica per le due masse si scrive:

$$\text{massa } 2m: \quad \mathbf{T} + \mathbf{R}_1 + 2m\mathbf{g} = 2m\mathbf{a}$$

$$\text{massa } m: \quad \mathbf{T} - \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

in cui  $T$  è la tensione della corda,  $\mathbf{R}_1$  è la reazione vincolare sulla massa  $2m$ ,  $\mathbf{R}_2$  è la reazione vincolare sulla massa  $m$ .

Proiettando le due equazioni lungo l'asse delle  $x$ , si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \text{massa } 2m: & -T + 2mg \sin \alpha = 2m\ddot{x} \\ \text{massa } m: & -T + mg \sin \alpha = -m\ddot{x} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\ddot{x} = \frac{1}{3}g \sin \alpha \quad T = \frac{4}{3}mg \sin \alpha.$$

- [6] Il centro di massa del sistema ricadrà nel punto di partenza (origine del sistema di riferimento); quindi:

$$\begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \\ m_1y_1 + m_2y_2 = 0 \end{cases}$$

si ha pertanto:

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2}x_1 = -1 \text{ m} \quad y_2 = -\frac{m_1}{m_2}y_1 = -5 \text{ m.}$$

- [7] Applicando la I equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali al sistema formato dalle tre masse e considerando solo la componente orizzontale, si ha:

$$F - 3\mu_d m g = 3ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F - 3\mu_d m g}{3m}$$

essendo  $a$  l'accelerazione del centro di massa del sistema pari all'accelerazione delle tre masse essendo inestensibili le funi che le collegano. Applicando il II principio della dinamica al blocco di massa  $m_1$  (considerando ancora la sola componente orizzontale) si ha:

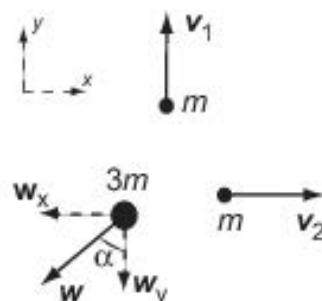
$$\tau - \mu_d m g = ma$$

dove  $\tau$  è la tensione della corda che collega  $m_1$  con  $m_2$ . Sostituendo in

quest'ultima relazione il valore dell'accelerazione precedentemente trovato, si ottiene:

$$\tau = \frac{F - 3\mu_d mg}{3} + \mu_d mg = \frac{1}{3} F$$

- [8] Durante l'esplosione la risultante delle forze esterne agenti sulla caldaia è nulla, si conserva quindi la quantità di moto del sistema, pari alla quantità di moto del centro di massa. Indicando con  $w$  la velocità del pezzo di massa tripla, si ha (con riferimento alla figura a lato):



$$mv_1 + mv_2 + 3mw = 0$$

dove  $v_1 = v_2 = v$ .

Proiettando la relazione lungo l'asse  $x$  ed  $y$  si ottiene:

$$\text{asse } x : v + 3w_x = 0 \Rightarrow w_x = -v/3 = -3 \text{ m/s}$$

$$\text{asse } y : v + 3w_y = 0 \Rightarrow w_y = -v/3 = -3 \text{ m/s.}$$

Pertanto:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 4.2 \text{ m/s}; \quad \tan \alpha = \frac{w_x}{w_y} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

- [9] L'energia totale iniziale a disposizione è quella fornita alle due masse:

$$E_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Questa energia è conservata e può essere considerata, per il teorema di König, come la somma dell'energia misurata nel sistema di riferimento del centro di massa ( $E_1$ ) e quella che spetterebbe al centro di massa se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema ( $E_{cm}$ ). Quest'ultima è, data la velocità del centro di massa

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

quindi:

$$E_{cm} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

dove nell'ultima relazione è stata considerata l'ortogonalità iniziale delle velocità ( $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ ). L'energia misurata nel sistema del centro di massa  $E_1$  è quindi data da  $E_1 = E_0 - E_{cm}$  per cui:

$$E_1 = \frac{1}{2}\mu(v_1^2 + v_2^2)$$

dove  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  è la cosiddetta massa ridotta del sistema.

[10] Per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$m_1 v_1 = m_2 \alpha v_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{m_1}{\alpha} = 142.8 \text{ g.}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_2(\alpha v_1)^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = (\alpha - 1) \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\Delta T}{T_I} = 1 - \alpha = 30\%.$$

[11] Detti  $R_1$  e  $R_2$  i raggi delle orbite circolari delle due stelle attorno al centro comune e  $R = R_1 + R_2$  la distanza tra le stelle allora

$$\begin{aligned} \frac{Gm_2}{R^2} &= \omega^2 R_1 \\ \frac{Gm_1}{R^2} &= \omega^2 R_2. \end{aligned}$$

La determinazione del centro di massa porta alla relazione  $m_2 R_2 = m_1 R_1$  e quindi:

$$R = R_1 + R_2 = R_1 + \frac{m_1}{m_2} R_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = R \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Sostituendo  $R_1$  nell'equazione della dinamica corrispondente

$$\omega^2 = G \frac{m_2}{R^2 R_1} = G \frac{m_1 + m_2}{R^3} \equiv \frac{4\pi^2}{T^2},$$

petanto:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

- [12] La velocità con cui la palla tocca terra la prima volta è:  $v_1 = \sqrt{2gh}$ ; il rimbalzo viene effettuato con una velocità diretta verso l'alto pari a  $v_1/\eta$ : nel primo rimbalzo, pertanto, viene trasmesso al pavimento un impulso pari a

$$\Delta p_1 = mv_1 - \left(-\frac{mv_1}{\eta}\right) = mv_1\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$$

Nel secondo rimbalzo viene trasmesso al pavimento un impulso

$$\Delta p_2 = \frac{mv_1}{\eta} - \left(-\frac{mv_1}{\eta^2}\right) = mv_1\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}\right)$$

e così via per i rimbalzi successivi. Sommando tutti gli impulsi trasmessi si avrà:

$$\begin{aligned}\Delta p &= mv_1\left(1 + \frac{2}{\eta} + \frac{2}{\eta^2} + \frac{2}{\eta^3} + \dots\right) \\ &= mv_1 \left[ \left(1 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} + \dots\right) + \left(1 + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} + \dots\right) - 1 \right].\end{aligned}$$

riconoscendo le serie di ragione  $1/\eta$  si può scriverne la somma come:

$$\Delta p = mv_1 \frac{2}{1 - \frac{1}{\eta}} - 1 = m\sqrt{2gh} \frac{\eta + 1}{\eta - 1}.$$



# Corpo rigido

## 5.1 Esercizio guida – Forze di attrito nella statica del corpo rigido

### Teoria

Le forze di attrito nascono sulla superficie di contatto tra due corpi solidi, quando sia presente tra questi una coppia di forze antagoniste, azione e reazione del terzo principio, dirette normalmente alle superfici nel punto di contatto. Anche le forze di attrito nascono come coppia di forze di azione e reazione, ma sono dirette parallelamente alle superfici. Se tra queste non c'è slittamento, i moduli delle forze di attrito sono sempre minori o al massimo eguali a un valore proporzionale a quello della componente normale:

$$F_{\text{attrito}} \leq \mu R_{\text{normale}}, \quad (5.1)$$

se c'è slittamento, sono eguali alla frazione  $\mu$  indicata.

Se vi è moto relativo tra i due corpi a contatto, le forze di attrito sono note se sono note le reazioni normali; nel caso statico, saranno le condizioni di equilibrio a determinarne i valori assunti.

### Argomento

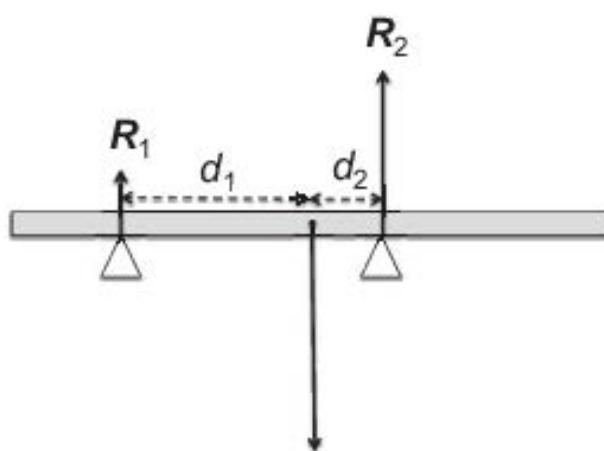
Un corpo solido pesante monodimensionale è appoggiato in quiete in due punti a un

sistema rigido di vincoli; questo può essere costituito da un unico piano, orizzontale o inclinato, o da due piani aventi diversa giacitura, ad es. ortogonali, che presentano attrito. I limiti delle configurazioni geometriche entro cui si ha equilibrio derivano dall'imposizione dell'annullamento della risultante delle forze e dei momenti delle forze esterne. La scelta ottimale del polo per il computo dei momenti semplifica la soluzione del problema.

*La condizione  
di equilibrio  
richiede  
l'annullamento  
della forza  
risultante e del  
momento  
risultante delle  
forze esterne*

L'attrito tra le superfici a contatto dei corpi consentono che le condizioni di equilibrio del corpo considerato sussistano all'interno di un intervallo dei valori dei parametri che descrivono le condizioni geometriche: per es. per un intervallo di angoli di inclinazione di un tavolo di appoggio rispetto all'orizzontale, di una scala appoggiata a una parete, della posizione di un punto di sostegno di una trave ecc. Le forze di attrito possono assumere un qualunque valore all'interno di un intervallo determinato e il valore specifico, dipendente dal valore della reazione normale del vincolo, si ottiene imponendo l'annullamento della forza risultante e del momento risultante delle forze esterne.

*Il corpo in equilibrio è costituito da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $L$ , appoggiata in due punti posti alla stessa quota a due distanze diverse  $d_1$  e  $d_2$  dal*



**Fig. 5.1.** Asta in equilibrio appoggiata su due punti alla stessa quota

centro dell'asta.

In questo caso, sussistono solo le componenti normali delle forze vincolari, in quanto il peso è normale alla superficie di appoggio (Fig. 5.1); i relativi momenti rispetto a punti del piano del disegno sono ortogonali a questo. Le condizioni di equilibrio per le componenti verticali delle forze e per quelle orizzontali dei momenti, calcolati rispetto al centro di massa, sono

$$mg - R_1 - R_2 = 0 \quad d_1 R_1 - d_2 R_2 = 0 \quad (5.2)$$

da cui si ricavano le espressioni delle due reazioni vincolari

$$R_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} mg \quad R_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} mg. \quad (5.3)$$

Se uno dei due appoggi è posto in corrispondenza della posizione del centro di massa (per es.  $d_2 = 0$ ), la reazione nello stesso appoggio diviene eguale al peso, mentre si annulla l'altra. Se l'appoggio supera la posizione del centro di massa, il corrispondente momento della forza cambia segno e non si può avere una condizione di equilibrio stabile.

Nei problemi inversi, che forniscano i valori delle reazioni vincolari, si ricava il peso dell'asta o, se forniscono i rapporti tra i valori delle reazioni, si ricavano le posizioni dei punti di appoggio.

*I punti di appoggio dell'asta siano successivamente disposti su quote diverse (con l'asta, quindi, che si trova inclinata di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale).*

In questo caso, le reazioni nei punti di appoggio hanno componenti anche tangenziali, oltre a quelle normali (Fig. 5.2). Al fine di identificare il verso nel quale sono orientate le reazioni tangenziali dell'attrito, le si deve immaginare provvisoriamente nulle e considerare il verso nel quale avverrebbe il movimento: il verso delle componenti di attrito è tale da opporvisi.

Le reazioni  $R_1$  ed  $R_2$  sono dirette verticalmente, cosicché le due forze di attrito possono porsi in verso di opposizione al moto, altrimenti dovrebbero essere una in un

verso, l'altra in verso opposto. Per esse si scrivono ancora le due stesse equazioni, Eq. (5.2), già scritte per il caso dell'asta in posizione orizzontale

$$mg - R_1 - R_2 = 0 \quad d_1 \cos \vartheta R_1 - d_2 \cos \vartheta R_2 = 0$$

dalle quali si ricavano ancora i valori delle reazioni

$$R_1 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} mg \quad R_2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} mg.$$

Valgono, quindi, ancora in questo caso le considerazioni precedentemente svolte relativamente alla condizione da rispettare per la posizione  $d_1$  e  $d_2$  dei due punti di appoggio.

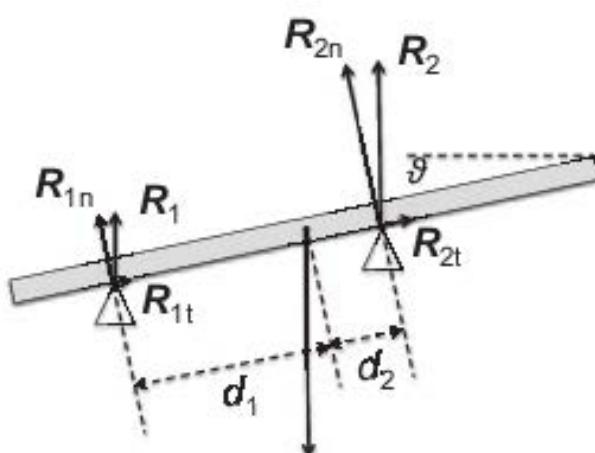
Per le componenti normali e tangenziali si ha:

$$R_{1n} = R_1 \cos \vartheta \quad \text{e} \quad R_{2n} = R_2 \cos \vartheta \quad (5.4)$$

$$R_{1t} = R_1 \sin \vartheta \quad \text{e} \quad R_{2t} = R_2 \sin \vartheta. \quad (5.5)$$

Perché sia soddisfatta la condizione data dalla Eq. (5.1) dell'attrito per la reazione sul primo punto d'appoggio, deve essere

$$R_{1t} = R_1 \sin \vartheta \leq \mu R_{1n} = \mu R_1 \cos \vartheta$$



**Fig. 5.2.** Asta in equilibrio appoggiata su due punti a diversa quota

e l'analogia condizione sul secondo, dalle quali entrambe si ricava

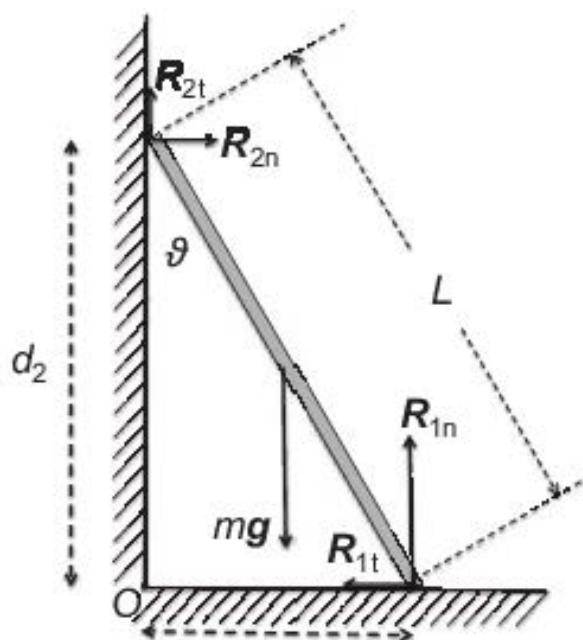
$$\vartheta \leq \arctan \mu$$

come per il caso di un singolo punto appoggiato su un piano inclinato.

In questo caso, i problemi inversi, oltre a richiedere il peso o le posizioni dei punti di appoggio, come nel caso dell'asta orizzontale indicato in precedenza, possono portare alla determinazione del coefficiente di attrito a partire dall'angolo di inclinazione massimo.

*Mantenendo sempre le ipotesi geometriche tali da potere considerare il problema unicamente sul piano verticale contenente l'asta, anziché nello spazio tridimensionale, si consideri l'asta appoggiata ai suoi punti estremi su due piani posti ad angolo retto sulle due direzioni, verticale e orizzontale. Si consideri il caso di piani di appoggio scabri o lisci.*

Il caso indicato potrebbe applicarsi a quello di una scala appoggiata a una parete verticale (Fig. 5.3) inclinata di un angolo  $\vartheta$  rispetto a questa. Il verso delle reazio-



**Fig. 5.3.** Scala appoggiata a una parete verticale

ni di attrito nei due punti di appoggio segue il criterio già indicato nel caso precedente. L'equazione delle forze, proiettata sugli assi verticale e orizzontale, dà rispettivamente

$$mg - R_{1n} - R_{2t} = 0 \quad -R_{1t} + R_{2n} = 0.$$

Poiché la risultante delle forze è nulla, il momento delle forze non dipende dalla posizione del polo; rispetto al polo  $O$  la condizione di annullamento dei momenti dà:

$$-d_1 R_{1n} + \frac{d_1}{2} mg + d_2 R_{2n} = 0$$

Ci sono, quindi, tre sole equazioni determinate dalle condizioni di equilibrio, mentre, quando i due piani di appoggio, orizzontale e verticale, sono entrambi scabri, ci sono quattro componenti delle reazioni. Queste, quindi, non sono univocamente stabilite, ma ammettono un parametro di libertà: l'asta può essere per es. appoggiata dopo essere stata forzata leggermente nel suo appoggio contro la parete verticale, o adagiata dopo averla già appoggiata al pavimento ecc.

Se il piano d'appoggio orizzontale non presenta attrito, non possono comunque essere soddisfatte le condizioni di equilibrio, in quanto viene a mancare la possibilità di annullare la componente orizzontale della reazione sulla parete; né questa può essere nulla, in quanto è necessaria per annullare il momento delle altre due forze, dirette verticalmente (peso e reazione da parte del piano orizzontale).

Il caso della parete verticale che non presenti attrito porta a considerare nulla la componente  $R_{2t}$  nelle tre equazioni dell'equilibrio sopra scritte, le quali in tal caso determinano compiutamente le tre componenti rimanenti delle reazioni. Dalla prima, infatti, si ricava direttamente il valore  $R_{1n} = mg$  che, inserito nella terza fornisce il valore della reazione normale sulla parete, eguale a quello tangenziale sul pavimento

$$R_{2n} = R_{1t} = \frac{mg}{2} \frac{d_1}{d_2}.$$

Perché sia soddisfatta la condizione data dalla Eq. (5.1) sul coefficiente di attrito, deve essere

$$\mu \geq \frac{d_1}{2d_2}.$$

Si consideri ora il caso in cui in un punto dell'asta gravi una forza, per es. la forza peso di un corpo (una persona, nel caso di una scala), diretta verso il basso, nel caso in cui la parete verticale non presenti attrito.

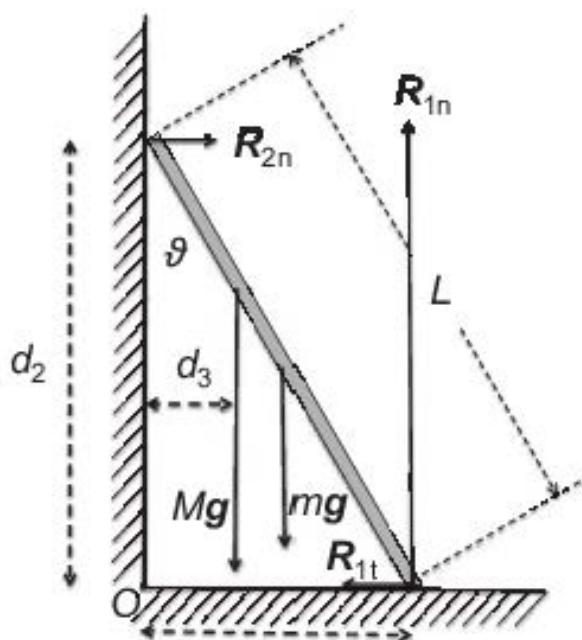
In questo caso, illustrato schematicamente in Fig. 5.4, le equazioni dell'equilibrio scritte per il caso precedente si integrano con il contributo della forza peso della massa  $M$  posta a distanza  $d_3$  dalla parete:

$$\begin{cases} (M+m)g - R_{1n} = 0 \\ -R_{1t} + R_{2n} = 0 \\ -d_1 R_{1n} + \left(d_3 M + \frac{d_1}{2} m\right) g + d_2 R_{2n} = 0. \end{cases}$$

La prima equazione fornisce direttamente il valore  $R_{1n}$  della componente normale della reazione sul pavimento che, inserito nella terza, dà il valore della reazione normale alla parete

$$R_{2n} = R_{1t} = g \left( \frac{d_1 - d_3}{d_2} M + \frac{d_1}{2d_2} m \right).$$

Se la massa  $M$  si trova in corrispondenza del centro di massa dell'asta ( $d_3 = d_1/2$ ),



**Fig. 5.4.** Scala gravata da una forza peso e appoggiata a una parete verticale

la reazione sulla parete assume la stessa espressione precedentemente trovata, sostituendo al valore della massa  $m$  quello di  $M + m$ . Per la condizione sul coefficiente di attrito si ha

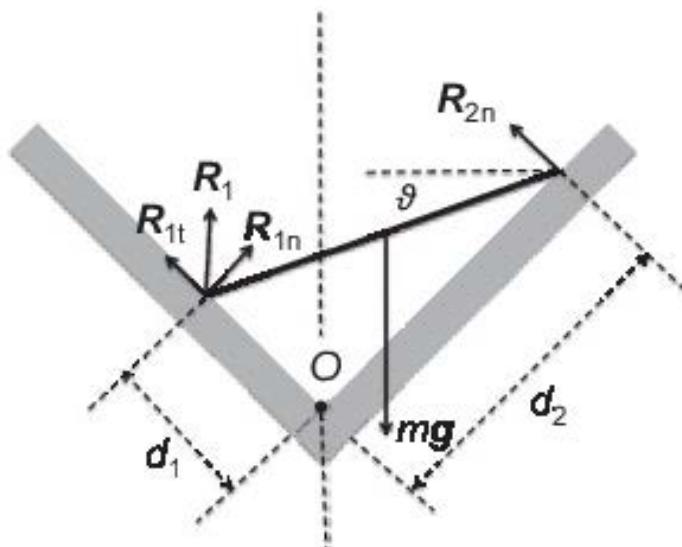
$$\mu \geq \frac{\gamma \frac{d_1 - d_3}{d_2} + \frac{d_1}{2d_2}}{\gamma + 1}$$

avendo indicato con  $\gamma$  il rapporto tra le due masse  $M/m$ .

*I due piani su cui poggia l'asta, sempre disposti ad angolo retto l'uno rispetto all'altro, siano posizionati con la bisettrice diretta verticalmente verso l'alto. L'asta forma un angolo  $\vartheta$  con l'orizzontale, compreso tra  $0$  e  $\pi/4$ .*

Anche in questo caso, descritto dalla Fig. 5.5, si ha la determinazione univoca delle componenti delle reazioni solo nel caso in cui una delle quattro componenti possa considerarsi nulla. Si supponga, a tal proposito, che il piano di appoggio dell'estremo 2 sia privo di attrito, cioè che nel punto 2 sia solo presente la componente normale  $R_{2n}$ . Le condizioni di equilibrio forniscono per le forze le equazioni

$$mg \cos \frac{\pi}{4} - R_{1n} = 0 \quad -R_{1t} + mg \cos \frac{\pi}{4} - R_{2n} = 0$$



**Fig. 5.5.** Asta disposta tra due piani ad angolo retto

e per i momenti rispetto al polo  $O$ , vertice dell'angolo tra i piani di appoggio, la

$$d_1 R_{1n} + \left[ \frac{L}{2} \cos \vartheta - d_1 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \vartheta \right) \right] mg - d_2 R_{2n} = 0.$$

Inserendo in questa i valori di  $R_{1n}$  ed  $R_{2n}$  ottenuti dalle prime due, si ricava

$$R_{1t} = mg \left\{ \frac{1}{d_2} \left[ d_1 \left( \left( \cos \frac{\pi}{4} + \vartheta \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right) - \frac{L}{2} \cos \vartheta \right] + \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

con evidenti espressioni per le rimanenti componenti delle reazioni  $R_{1n}$  ed  $R_{2n}$ .

La condizione sul valore del coefficiente di attrito risulta essere

$$\frac{1}{d_2} \left[ d_1 (\cos \vartheta - \sin \vartheta - 1) - \frac{L}{\sqrt{2}} \cos \vartheta \right] + 1 \leq \mu.$$

Nel caso in cui l'asta sia in posizione orizzontale ( $\vartheta = 0$ ,  $d_1 = d_2 = L\sqrt{2}$ ) si ha l'annullamento della componente tangenziale della forza di attrito:

$$R_{1t} = 0.$$

## 5.2 Esercizio guida – Masse sospese a funi su carrucole

### Teoria

Le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi, come per tutti i sistemi di punti materiali, sono:

$$\mathbf{F}_{\text{esterne}} = m \mathbf{a}_{\text{centro di massa}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{assiale}} = I_a \dot{\omega}$$

dove  $\mathbf{F}_{\text{esterne}}$  ed  $\mathbf{M}_{\text{esterne}}$  rappresentano, rispettivamente, la risultante e il momento risultante delle forze esterne applicate al sistema calcolato rispetto a un polo fisso o al centro di massa del sistema.  $I_a$  è il momento di inerzia assiale del sistema, definito dalla relazione:

$$\int_m dm r^2.$$

### Argomento

Una carrucola è fissata su un solaio e attorno a essa è avvolta una fune ai cui estremi si pongono dei pesi, oppure si fissa un estremo e si pone un peso sull'altro. Generalmente, si fa l'ipotesi che la fune sia di massa nulla, così che non se ne deve considerare il moto, e che su di essa la fune non slitti (cioè che la forza di attrito tra fune e carrucola sia sufficientemente grande da non permettere lo scorrimento).

Per quanto riguarda la carrucola, anch'essa può essere considerata di massa nulla e allora non se ne deve considerare il moto (in alternativa: la carrucola è bloccata, non ruotante, e la fune scorre senza attrito sulla gola); altrimenti, se ne deve considerare il moto attorno all'asse.

La fune può disporsi liberamente in posizione verticale, oppure i pesi possono appoggiarsi su piani inclinati, riducendosi così il loro effetto di trazione sulla fune.

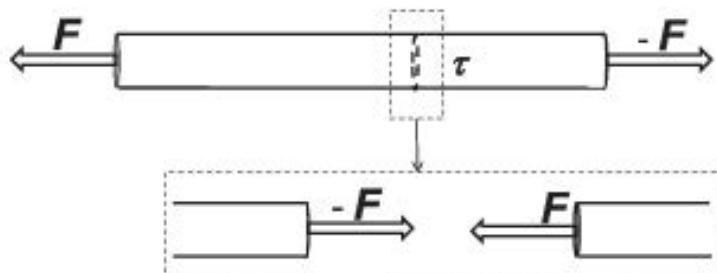
Su ogni ramo della fune si possono disporre, a distanza l'uno dall'altro, più pesi in sequenza.

*Proprietà e  
funzione dei  
singoli corpi  
costituenti il  
sistema: masse,  
carrucola, fune*

Le forze esterne applicate al sistema sono le forze peso agenti sui corpi fissati alla fune e la forza del vincolo di sostegno che tiene la carrucola appesa al solaio.

Le forze scambiate tra due qualsiasi corpi facenti parte del sistema mediante la fune sono forze interne che, rispettando il terzo principio, hanno risultante nulla per quanto riguarda l'azione complessiva sul sistema.

All'interno della fune c'è una tensione  $\tau$ , che si interpreta nel senso che su ogni sezione ideale della fune c'è una coppia di forze che ciascuna delle due parti in cui la fune è divisa esercita



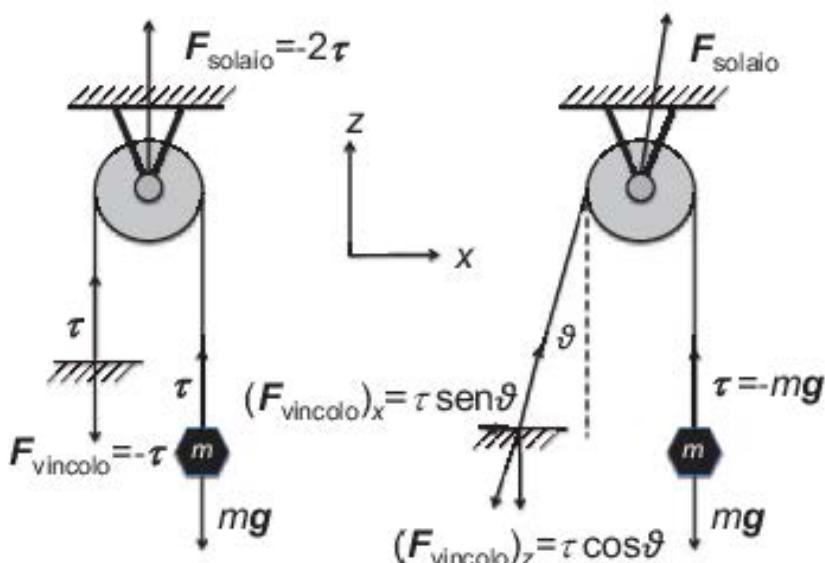
Tensione in una fune ideale

sull'altra: in ciascun estremo della fune questa forza è applicata sul corpo cui la fune è collegata (v. figura alla pagina precedente). La funzione della fune è quella di ‘trasmettere’ la forza applicata da un punto a un altro dei suoi estremi. La carrucola, come sopra indicato, non permette lo slittamento della fune, ma esercita su questa la stessa forza che su di essa esercita il soffitto.

*Impostazione del sistema di equazioni per i singoli corpi costituenti il sistema*

Negli esercizi di questo argomento occorre identificare correttamente i singoli corpi e le forze esterne che su ciascuno di essi sono applicate. Nello specifico, i singoli corpi per i quali scrivere le equazioni del moto sono le singole masse presenti sulla fune ed, eventualmente, la carrucola. Una volta impostata per ciascuno la dovuta equazione del moto, si ottiene un sistema di equazioni da risolvere.

*Si consideri inizialmente il caso in cui un estremo della fune sia fissato a un vincolo esterno e l'altro sostenga una massa  $m$ . Il vincolo si trovi inizialmente in posizione tale da mantenere il tratto della fune verticale, quindi lo si sposti lateralmente. Come estensione di questo problema, si pensi di inserire una molla (dinamometro) su un*



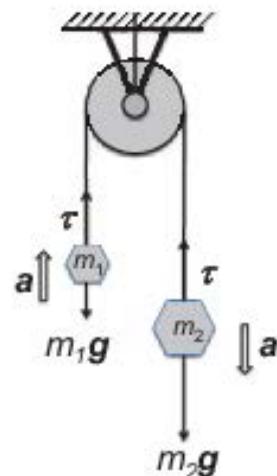
**Fig. 5.6.** Fune passante attraverso una carrucola con un estremo fissato a un punto

ramo della fune o tra la carrucola e il solaio di sospensione e di doverne determinare l'allungamento, essendo nota la costante elastica.

Il sistema è evidentemente in condizioni statiche. Come soluzione del problema, si riporta la Fig. 5.6 nella pagina precedente in cui sono rappresentate per i due casi le forze agenti sui vari punti del sistema con i valori dei loro moduli. Per l'estensione eventuale delle molle, si rapporta la tensione della fune (o il modulo della forza indicata come  $F_{\text{solaio}}$ ) alla costante elastica.

*Al posto del vincolo si ponga ora all'estremità della fune una massa diversa da quella già posta all'altra estremità. Si studi il moto del sistema nel caso in cui si possa considerare nulla la massa della carrucola e quindi il caso di una carrucola assimilabile a un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$ . Si valuti se la tensione sulla fune è maggiore o minore di quella del caso precedentemente esaminato.*

La figura 5.7 evidenzia le forze presenti nel caso di una carrucola priva di massa. Si scrivono le equazioni del moto per le due masse separatamente, ricordando che la tensione  $\tau$  è la stessa in ogni sezione della fune perché priva di massa. L'inestensibilità della fune implica l'eguaglianza dei moduli  $a$  delle accelerazioni per le due masse.



$$-m_1g + \tau = m_1a$$

$$m_2g - \tau = m_2a,$$

**Fig. 5.7.** Fune passante attraverso una carrucola collegata a due masse

da cui

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

e

$$\tau = \frac{m_1}{2}(g + a) + \frac{m_2}{2}(g - a) = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Nel caso in cui si debba considerare anche la carrucola dotata di massa  $m$ , si aggiunge

una terza equazione alle due sopra scritte per il moto di rotazione della carrucola attorno al proprio asse

$$M = I\dot{\omega}$$

tenendo in debito conto che in questo caso la tensione sulla fune è diversa sul tratto a sinistra  $\tau_1$  da quello a destra  $\tau_2$  della carrucola, secondo le:

$$\begin{aligned} -m_1g + \tau_1 &= m_1a \\ m_2g - \tau_2 &= m_2a. \end{aligned}$$

Il momento  $M$  delle forze è quindi

$$M = (\tau_2 - \tau_1)R$$

e il momento d'inerzia  $I$  dipende dalla configurazione della carrucola: se assimilabile a un disco,  $I = mR^2/2$ . La mancanza di slittamento della fune implica un'ulteriore equazione cinematica

$$\dot{\omega} = \frac{a}{R}.$$

Complessivamente, il sistema è descritto da tre equazioni nelle tre incognite  $a, \tau_1$  e  $\tau_2$ .

*Anche nel caso in cui alla fune siano collegate le masse si può estendere il problema inserendo un dinamometro su un tratto di fune o alla sospensione della carrucola al solaio. Le opportunità di proporre i problemi inversi sono molteplici: si richiede, per es., il valore di una massa  $m_1$  o  $m_2$ , essendo nota l'accelerazione; il valore della massa  $m$  della carrucola o il suo raggio (nel caso la carrucola sia massiva), ancora essendo nota l'accelerazione delle masse; nel caso si inserisca in un ramo un dinamometro, ancora  $m_1$  o  $m_2$ , avendo inserito un dinamometro in un ramo della fune e letto l'estensione della molla ecc.*

Tutti questi casi sono riconducibili al sistema di equazioni sopra indicato per i problemi diretti, dove si considerino come incognite i dati richiesti e come parametri noti i dati del problema. Il numero di equazioni da porre a sistema deve sempre eguagliare il numero di incognite. Il caso della carrucola massiva richiede sempre un'equazio-

ne in più rispetto a quello analogo della carrucola priva di massa. Il caso in cui sia presente una molla (dinamometro) e ne venga data l'estensione è riconducibile a un problema inverso in cui sia dato il valore della forza (tensione, se la molla è situata su un tratto di fune, forza  $F_{\text{solaio}}$  se posta tra la carrucola e il solaio).

*Su uno dei due tratti della fune – per es. su quello di destra della figura – si pongano in successione, e separate da tratti di fune, due o più masse  $m_2$ ,  $m_3$  ecc., come rappresentato nella figura, e si risolva di nuovo il problema del moto, nella casistica delle condizioni già viste in precedenza (carrucola priva di massa oppure massiva, dinamometro inserito ecc.).*

La presenza di più masse lungo la fune aumenta il numero di incognite del problema. L'accelerazione rimane sempre una stessa accelerazione per tutte le masse, ma all'aggiunta di ogni nuova massa si aggiunge come incognita la tensione nel nuovo tratto di fune.

Come nuova equazione, si aggiunge quella del moto della nuova massa inserita: per es., nel caso della nuova  $m_3$  di Fig. 5.8

$$m_3g - \tau_{23} = m_3a$$

L'equazione per la  $m_2$  a sua volta si muta in

$$m_2g + \tau_{23} - \tau_{21} = m_2a.$$

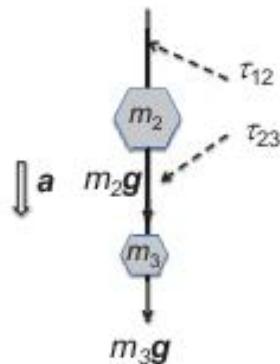


Fig. 5.8. Fune collegata a più masse

*Come ulteriore estensione del problema, si ponga il sistema in esame all'interno di un ascensore in accelerazione, verso l'alto o verso il basso, con la carrucola agganciata al soffitto.*

Il sistema di riferimento sia quello stesso dell'ascensore in moto con accelerazione

$\mathbf{a}_{\text{asc}}$ ; esso è un sistema non inerziale, nel quale occorre tenere in conto le forze appartenenti, pari al prodotto delle masse per l'accelerazione del sistema cambiato di segno. Nella risoluzione pratica ciò si riduce a considerare applicate su ciascuna massa  $m_i$ , in luogo del peso, il peso più la forza apparente:

$$m_i \mathbf{g} \Rightarrow m_i \mathbf{g} - m_i \mathbf{a}_{\text{asc}};$$

il resto segue in modo inalterato.

### 5.3 Esercizio guida – Rotolamento

#### Teoria

La seconda equazione cardinale della meccanica dei sistemi è:

$$\mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{b}_o}{dt} + \mathbf{v}_o \times \mathbf{p}$$

dove sia il momento risultante delle forze esterne  $\mathbf{M}$ , sia il momento della quantità di moto  $\mathbf{b}$  dipendono dalla posizione del polo  $O$  – di velocità  $\mathbf{v}_o$  – rispetto al quale sono calcolati. Proiettato su un asse  $a$ , il momento  $\mathbf{b}$  può scriversi come prodotto del momento di inerzia  $I_a$  per la velocità angolare  $\omega$

$$b_a = I_a \omega.$$

Per un corpo solido, il momento di inerzia rispetto a un asse è costante e, se il polo è fisso, l'equazione diviene

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.6)$$

Il momento d'inerzia  $I_a$  rispetto a un asse  $a$  si lega al momento d'inerzia  $I_o$  rispetto a un asse ad esso parallelo a distanza  $d$  passante per il centro attraverso la

$$I_a = I_o + md^2$$

dove  $m$  è la massa del corpo.

Nei casi che si esaminano, le forze di reazione dei vincoli producono momenti che danno luogo a rotazioni quando si applicano forze o coppie motrici.

Argomento

*Le forze e i momenti agenti sul sistema e la reazione del piano di appoggio*

Un corpo pesante di forma cilindrica, quale può considerarsi una ruota, è posto su un piano – orizzontale o inclinato – e su di esso si esercitano delle forze, applicate in punti diversi e orientate su direzioni diverse.

Si descrive il moto sul piano ortogonale all'asse, non potendoci essere rotazione se non attorno a un asse a quello parallelo; pertanto, si utilizza sempre l'equazione scalare (5.6).

Le forze esterne applicate al corpo sono la forza peso, la forza di reazione del piano di appoggio, con o senza attrito, e le forze motrici eventualmente applicate. La forza peso è applicata nel centro di massa, quindi nel centro della sezione circolare, la reazione dell'appoggio è applicata nel punto di contatto, con componente tangenziale al piano nulla se questo è privo di attrito. La forza motrice viene applicata anch'essa, pur se non necessariamente, al centro della sezione circolare.

Si estende poi il problema al caso di due cilindri eguali, ad assi paralleli, collegati tra loro da una sbarra fissata senza attrito agli assi, come nel caso di un carro.

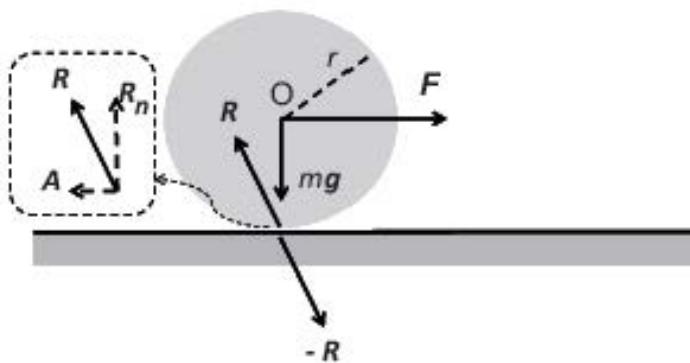
*Nel caso in cui il piano di appoggio sia privo di attrito, le forze applicate al corpo non hanno momento rispetto al centro di massa, per cui non si hanno rotazioni del corpo e il moto di questo si riconduce a quello di un punto materiale.*

*Nel caso che il piano presenti attrito, si considera inizialmente che il piano sia orizzontale e che una forza, anch'essa orizzontale, di modulo  $F$  sia applicata all'asse del cilindro (Fig. 5.9).*

Scegliendo come polo il centro di massa  $O$  del disco rappresentativo del corpo cilindrico di raggio  $r$ , l'equazione del momento (5.6) rispetto all'asse del disco diviene

$$Ar = I_a \frac{d\omega}{dt}$$

dove  $A$  è la componente di attrito incognita della reazione vincolare ( $R_n$  la compo-



**Fig. 5.9.** Corpo pesante di forma cilindrica che rotola su un piano orizzontale scabro

nente normale della reazione vincolare  $\mathbf{R}$ ;  $-\mathbf{R}$  è applicata al piano).

Poiché per l'accelerazione del centro di massa si ha

$$a = r \frac{d\omega}{dt} = \frac{F - A}{m},$$

si ottiene

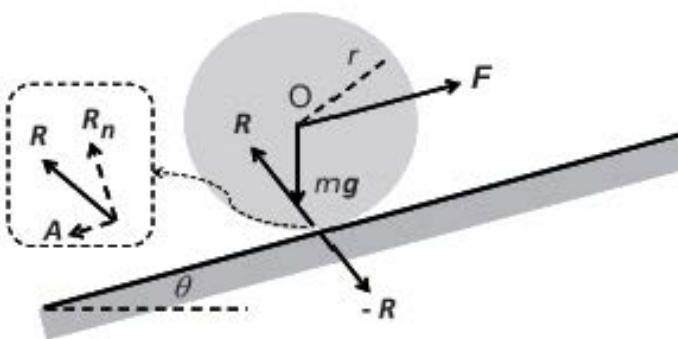
$$A = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I_a}},$$

che, per un cilindro omogeneo, dà  $A = F/3$  e, per un tubo,  $A = F/2$ . Di conseguenza, l'accelerazione vale  $2/3$  e  $1/3$  di quella che avrebbe un punto materiale di pari massa, nei due casi, rispettivamente.

Nel caso che la direzione della forza applicata formasse un angolo diverso da zero con l'orizzontale, la soluzione del problema procederebbe in maniera identica scegliendo per  $\mathbf{F}$  la sola componente orizzontale della forza motrice applicata, sempre che la componente verticale non superi comunque in modulo la forza peso.

*Il problema si ripropone nelle stesse modalità, inclinando il piano di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale, con la forza motrice applicata in questo caso parallelamente al piano (Fig. 5.10).*

In questo caso, la forza peso ha una componente parallela alla direzione del piano,



**Fig. 5.10.** Corpo pesante di forma cilindrica che rotola su un piano scabro inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale

rispetto alla quale quindi il centro di massa ha accelerazione

$$a = r \frac{d\omega}{dt} = \frac{F - mg \sin \vartheta - A}{m}$$

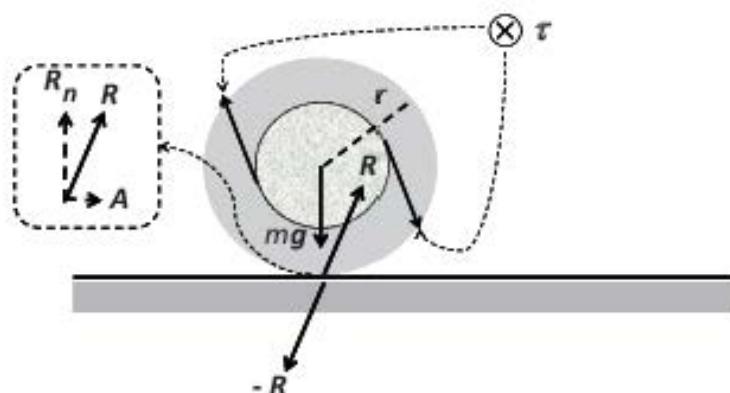
per cui, analogamente a quanto fatto più sopra, si ottiene

$$A = \frac{F - mg \sin \vartheta}{1 + \frac{mr^2}{I_a}}.$$

Per un cilindro omogeneo si ha, quindi,  $A = (F - mg \sin \vartheta)/3$  e, per un tubo,  $A = (F - mg \sin \vartheta)/2$ . Anche in questo caso, se la forza  $F$  avesse una componente normale al piano, nell'espressione dell'accelerazione si riporterebbe la sola componente parallela.

*Si pensi ora di applicare al corpo una coppia di forze di momento  $\tau$  orientato secondo l'asse del cilindro (per es., attraverso una ruota dentata coassiale al corpo, indicata in Fig. 5.11 con fondo variegato, con verso entrante).*

In questo caso, essendo a risultante nulla l'azione delle forze motrici esterne, la reazione del piano di appoggio deve bilanciare la forza peso con la sua componente verticale  $R_n$ , mentre la componente orizzontale  $A$  dell'attrito rimane l'unica forza parallela al piano, che accelera il corpo, creando anche un momento rispetto al centro



**Fig. 5.11.** Corpo pesante di forma cilindrica sottoposto a un momento  $\tau$  che rotola su un piano orizzontale scabro

di massa che si somma al momento  $\tau$  della coppia motrice. Si ha

$$\tau - Ar = I_a \frac{d\omega}{dt}$$

avendo considerato il momento di  $A$  in verso opposto a quello  $\tau$  della coppia motrice. In analogia ai casi precedenti

$$a = r \frac{d\omega}{dt} = \frac{A}{m}.$$

Dalle due equazioni si ricava

$$A = \frac{\tau}{r \left( 1 + \frac{I_a}{mr^2} \right)}.$$

Per un cilindro omogeneo si ha, quindi,  $A = \frac{3}{4} \frac{\tau}{r}$  e, per un tubo,  $A = \tau/(2r)$ .

*Si estenda il problema precedente al caso in cui il piano sia inclinato di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale.*

Le due equazioni del moto, della forza e del momento, divengono in questo caso, rispettivamente

$$a = r \frac{d\omega}{dt} = \frac{A - mg \sin \vartheta}{m} \quad \text{e} \quad \tau - Ar = I_a \frac{d\omega}{dt}$$

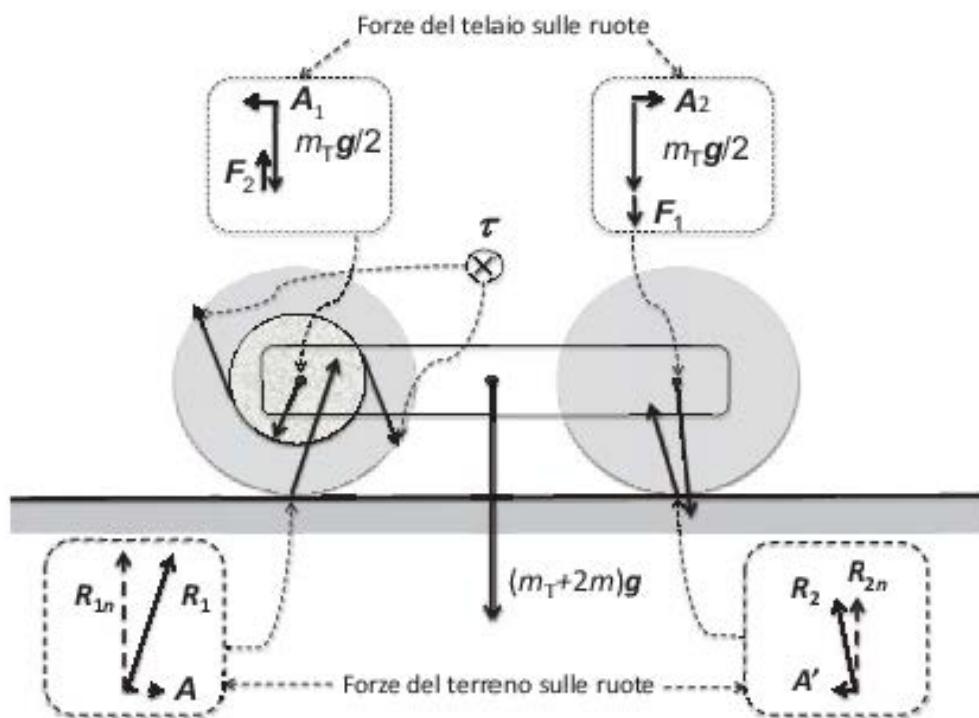
Da esse si ricava l'espressione della forza  $A$ :

$$A = \frac{\frac{\tau}{r} + \frac{I_a}{r^2}g \sin \vartheta}{1 + \frac{I_a}{mr^2}}.$$

che si può specificare nei vari casi di distribuzione delle masse, in cui il momento d'inerzia assume espressioni note.

*Il problema si estende al caso di una coppia di cilindri, che qui si considerano come ruote, ciascuna di massa  $m$ , ad assi paralleli e appoggiati entrambi su un piano, collegati da un'asta rigida (telaio, carrozzeria ecc.) di massa  $m_T$ , che trasmette le forze. Su una delle due ruote è applicata una coppia di forze motrici di momento  $\tau$  da parte di un motore solidale con l'asta (Fig. 5.12).*

In questo problema si considerano i tre corpi: le due ruote e il telaio, ciascuno con le forze e i momenti applicati, e anche complessivamente l'intero sistema. L'intero



**Fig. 5.12.** Coppia di ruote, collegate da un asse orizzontale, che rotolano su un piano scabro. Su una delle due ruote è applicato un momento  $\tau$

sistema è soggetto alla forza peso complessiva  $\mathbf{P} = (m_T + 2m)\mathbf{g}$ , pensata applicata nel centro di massa del sistema; il piano di appoggio reagisce con una forza eguale e contraria – in quanto non c’è moto accelerato secondo la verticale – suddivisa, ma non equamente ( $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$ ), tra i due punti d’appoggio delle due ruote.

Per quanto riguarda le componenti orizzontali delle forze esterne sul sistema, responsabili del moto accelerato, sulla ruota motrice (di sinistra in figura) si esercita una componente  $A$  tale che

$$\tau - Ar = I_a \frac{a}{r} \quad (5.7)$$

e sull’altra ruota, non azionata da coppie motrici, analogamente

$$A'r = I_a \frac{a}{r} \quad (5.8)$$

con  $A'$  la componente orizzontale incognita (resistente), prodotta dall’appoggio.

Nelle due equazioni scritte vi sono tre incognite  $a$ ,  $A$  e  $A'$ ; per risolvere il problema, si devono considerare le forze interne al sistema – a risultante nulla –, così come esse agiscono singolarmente sui tre corpi costituenti: le due ruote e il telaio. Per ognuno d’essi si scrive l’equazione del moto, introducendo così due nuove incognite, le forze  $A_1$  e  $A_2$  interne (Fig. 5.12), a fronte di tre nuove equazioni.

Poiché l’accelerazione è la stessa per tutti e tre i corpi componenti il sistema, è

$$a = \frac{A - A_1}{m} \quad a = \frac{A_2 - A'}{m} \quad a = \frac{A_1 - A_2}{m_T}. \quad (5.9)$$

Dalle ultime tre equazioni si ricava

$$A - A' = (2m + m_T)a$$

che, eguagliata all’espressione che si deduce ricavando  $A$  e  $A'$  separatamente dalle Eq. (5.7) e (5.8), fornisce

$$a = \frac{\tau}{r \left( 2m + m_T + \frac{2I_a}{r^2} \right)}.$$

Nel caso che le ruote siano assimilabili a due cilindri omogenei, si ha

$$a = \frac{\tau}{r(m_T + 3m)}$$

e, se si può pensare che esse abbiano la massa  $m$  tutta sulla circonferenza esterna,

$$a = \frac{\tau}{r(m_T + 4m)}.$$

Sostituendo poi l'espressione nelle singole equazioni, si ricavano le altre diverse componenti incognite.

*Quale estensione del problema precedente – con le due ruote e il telaio di connessione –, si pensi di applicare la coppia motrice con il momento invertito di segno rispetto al caso precedente (ruota motrice anteriore) e, successivamente per entrambi i casi, di inclinare il piano di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale, per es. procedendo in salita.*

Se la coppia motrice viene applicata alla ruota anteriore è come se fosse applicata alla ruota di destra della Fig. 5.12, senza inversione del verso di  $\tau$ . Si ripete allora esattamente il procedimento già sviluppato per il caso della ruota motrice posteriore, mantenendo anche formalmente le medesime equazioni, pur di indicare la ruota anteriore motrice come la ruota 1 (quindi con forze applicate  $A, A_1$ ) e la posteriore come 2 (quindi con forze applicate  $A', A_2$ ).

L'accelerazione del sistema è, quindi, la medesima. Anche le forze verticali, indicate con le  $F$ , risultano eguali, con incremento quindi del carico verso il basso della ruota motrice anteriore e scarico di quella posteriore.

Se si inclina il piano di appoggio di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale, le equazioni per le forze, Eq. (5.9), si mutano – analogamente a quanto visto nei casi precedenti –

in

$$\begin{aligned} a &= \frac{A - A_1 - mg \sin \vartheta}{m} \\ a &= \frac{A_2 - A' - mg \sin \vartheta}{m} \\ a &= \frac{A_1 - A_2 - m_T g \sin \vartheta}{m_T}. \end{aligned}$$

mentre restano inalterate quelle dei momenti, Eq. (5.7) e Eq. (5.8), in quanto i pesi non producono momenti rispetto ai centri delle ruote. Da queste si ricava

$$a = \frac{\frac{\tau}{r} - (2m + m_T)g \sin \vartheta}{\frac{2I_a}{r^2} + (2m + m_T)}.$$

Le espressioni per le ruote con le varie distribuzioni di masse discendono automaticamente.

## 5.4 Domande di verifica

- Indicare come si può esprimere il momento della quantità di moto (o momento angolare) di un sistema di punti materiali in rotazione attorno a un asse fisso.
- Definire il momento di inerzia di un corpo rispetto a un asse.
- Fornire l'espressione del momento di una coppia di forze.
- Dimostrare che il momento di una coppia di forze è indipendente dalla posizione del polo.
- Indicare sotto quale condizione sono equivalenti due sistemi di forze applicate a un medesimo corpo rigido.
- Ricavare l'espressione del momento di inerzia di un'asta sottile rispetto a un asse perpendicolare passante per un estremo.
- Definire il momento assiale di una forza rispetto a una retta data.
- Mostrare come il momento assiale di una forza sia pari alla proiezione su di essa del momento rispetto a un qualunque punto scelto sulla retta.
- Ricavare il periodo di oscillazione di un pendolo composto (pendolo fisico).
- Giustificare perché non si possono ricavare le singole reazioni agenti sui punti di appoggio delle quattro zampe di un tavolo in equilibrio su un piano orizzontale.
- Verificare la possibilità che resti in equilibrio una scala a pioli appoggiata sul pavimento orizzontale e su una parete verticale prive di attrito.
- Determinare se sia possibile mantenere in condizioni di equilibrio una scala a pioli appoggiata sul pavimento orizzontale privo di attrito e su una parete verticale con attrito.

## 5.5 Esercizi

- [1] Un'asta omogenea di sezione costante di massa  $m_1 = 1 \text{ kg}$  incernierata nel suo punto centrale, è inizialmente ferma in equilibrio in posizione orizzontale su un

tavolo privo di attrito. Un proiettile di massa  $m_2 = 100\text{ g}$  e velocità orizzontale  $\mathbf{v}$  di modulo  $v = 10\text{ m/s}$  la colpisce normalmente restando conficcato a una sua estremità. Determinare il momento  $M$  (supposto costante) generato dalla forza di attrito che la cerniera esercita sulla sbarra, sapendo che quest'ultima si ferma dopo  $n = 2$  giri.

- [2] Una sbarretta omogenea di lunghezza  $l$  è libera di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale passante per un suo estremo  $O$  e normale alla sbarra. Inizialmente la sbarra si trova in quiete in posizione verticale, con l'estremo libero a una quota superiore di quella vincolato; a causa di una piccola perturbazione la sbarra inizia a ruotare. Calcolare il modulo della velocità e dell'accelerazione dell'estremo libero  $P$  nell'istante in cui la sbarra passa per la posizione orizzontale.
- [3] Una sfera piena omogenea  $S$  si trova ferma su un piano orizzontale  $\gamma$ , anch'esso inizialmente fermo. All'istante  $t = 0$  il piano  $\gamma$  inizia ad accelerare con accelerazione costante  $\mathbf{a}$  in direzione orizzontale.



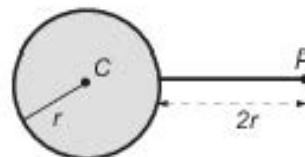
Siano  $g$  e  $\mu$ , rispettivamente, l'accelerazione di gravità e il coefficiente di attrito tra la sfera e il piano. Trovare il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito ( $\mu_{min}$ ) affinché quando il piano accelera con accelerazione  $\mathbf{a}$ , la sfera rotoli senza strisciare relativamente al piano. (Momento di inerzia di una sfera omogenea di raggio  $R$  rispetto al centro di massa:  $I_c = \frac{2}{5}mR^2$ )

- [4] Un'asta omogenea di massa  $m = 1\text{ kg}$  e lunghezza  $l = 1\text{ m}$  è appesa per un estremo  $O$  (vincolo senza attrito) in un piano verticale e, mentre si trova ferma nella posizione di equilibrio stabile, viene colpita perpendicolarmente nell'estremo libero da una forza di breve durata di impulso  $J$ . Determinare  $J$  sapendo che, in seguito al colpo, l'asta raggiunge la posizione orizzontale con velocità nulla.
- [5] Una grande disco circolare di massa  $M$  e raggio  $R$  è posto, fermo, su di un piano orizzontale liscio; esso può ruotare senza attrito attorno a un asse fisso passante per il centro di massa del disco e ad esso normale. Un uomo di massa  $m$  si trova, fermo, sul bordo del disco; ad un certo istante l'uomo comincia a camminare sempre tenendosi lungo il bordo del disco e si ferma quando si

ritrova sullo stesso punto del disco dal quale era partito. Si determini di quale angolo  $\vartheta_0$  rispetto al piano orizzontale è ruotato il disco quando l'uomo si ferma.

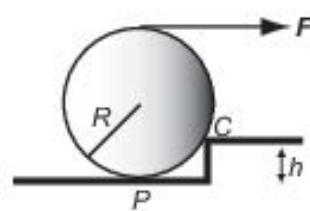
- [6] Due sottili sbarrette cilindriche  $A$  e  $B$  della stessa densità, lunghe rispettivamente  $l_A$  ed  $l_B = l_A/2$ , sono vincolate a ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale normale alle sbarre passante per un loro estremo  $O$ . Esse vengono lasciate cadere allo stesso istante con velocità iniziale nulla da un medesimo angolo  $\vartheta$  (con  $\vartheta < 90^\circ$ ) rispetto all'orizzontale. Indicare sbarretta arriverà prima in posizione orizzontale.
- [7] Una ruota omogenea di massa  $M = 2\text{ kg}$  rotola liberamente senza strisciare su un piano orizzontale con attrito ( $\mu_s = 0.5$ ). Determinare: a) il valore della forza di attrito nel punto di contatto con il piano durante il rotolamento libero; b) la massima forza frenante che può essere applicata al centro di massa della ruota, senza causare lo slittamento della stessa.

- [8] Un disco pieno e omogeneo di massa  $m_d = 1\text{ kg}$  e raggio  $r = 50\text{ cm}$  è libero di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale fisso perpendicolare al disco e passante per il centro di massa  $C$ .



Sul bordo del disco è rigidamente fissata in direzione radiale una sbarretta omogenea di lunghezza  $2r$  e massa  $m_s = 0.5\text{ kg}$ . Il sistema viene lasciato libero, con velocità iniziale nulla, dalla posizione indicata in figura. Calcolare la velocità angolare del disco quando il punto  $P$  passa sulla verticale per  $C$ .

- [9] Una ruota di massa  $M$  e raggio  $R$  è in equilibrio su di un piano orizzontale liscio sotto l'azione di una forza orizzontale  $F$ , applicata sulla sommità della ruota, che la spinge verso un gradino di altezza  $h$  ( $h < R$ ) nel cui punto  $C$  vi è attrito. Determinare la reazione vincolare esercitata dal piano sulla ruota nel punto di contatto  $P$ .



- [10] Un sottile disco rigido omogeneo, partendo da fermo, viene fatto ruotare attorno al suo asse tramite una coppia motrice di momento  $M$ , in presenza di

una coppia resistente di momento  $M_r = -b\omega$  ( $b > 0$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare di rotazione del disco). Si determini la velocità angolare di regime del disco.

- [11] Una sbarra omogenea di sezione costante avente massa  $m_1$  e un corpo puntiforme di massa  $m_2$  sono posati, senza vincolo alcuno, su di un piano orizzontale liscio. Una molla avente costante elastica  $k = 5 \times 10^4 \text{ N/m}$ , compressa di  $\Delta x = 7 \text{ cm}$ , è disposta ortogonalmente tra un estremo della sbarra e il corpo. Sapendo che  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ , determinare la velocità  $v$  del corpo dopo che la molla viene rilasciata.
- [12] Un sottile disco rigido di massa  $M$  e raggio  $R$  può ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale perpendicolare al disco e passante per il suo centro  $O$ . Al bordo del disco viene attaccata una massa puntiforme  $m$ . Determinare l'espressione del periodo delle piccole oscillazioni del sistema.
- [13] Un'asta omogenea di massa  $m = 2 \text{ kg}$  è vincolata a ruotare senza attrito attorno a un suo estremo  $A$  su un piano verticale. Si chiede qual è la reazione sul vincolo dell'asta quando questa, rilasciata con velocità angolare nulla dalla posizione orizzontale passa per la posizione verticale.
- [14] Una sfera uniforme di massa  $m$  e raggio  $R$  rotola senza slittare lungo un piano inclinato di angolo  $\vartheta$  rispetto all'orizzontale. Trovare a) il minimo valore del coefficiente di attrito per il quale lo slittamento è assente e b) l'energia cinetica della sfera dopo  $\tau$  secondi dall'inizio del moto.
- [15] Un blocco di massa  $m_1$  con sopra una sfera uniforme di massa  $m_2$  è posto su un piano orizzontale liscio. Una forza costante  $F$  orizzontale è applicata al blocco. Trovare le accelerazioni  $a_1$  del blocco e  $a_2$  del centro della sfera considerando che non c'è slittamento tra la sfera e il blocco.
- [16] Un'asta di massa trascurabile lunga  $l$  è posta in un piano verticale e reca agli estremi,  $A$  e  $B$ , due masse,  $m_A$  ed  $m_B = 5m_A$ , rispettivamente; essa, rimanendo sempre nel piano verticale, può ruotare senza attrito attorno a un asse normale al piano e passante per il punto  $O$  dell'asta a distanza  $d$  da  $m_A$ . Determinare il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni dell'asta attorno alla sua posizione di equilibrio. ( $l = 1 \text{ m}$ ,  $d = 0.2 \text{ m}$ ,  $m_A = 0.1 \text{ kg}$ )

- [17] Due dischi, posti in posizione orizzontale, ruotano liberamente attorno a un asse verticale passante per i loro centri con momenti di inerzia  $I_1$  e  $I_2$  e velocità angolare  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , rispettivamente. Quando il disco superiore cade su quello inferiore interagiscono a causa dell'attrito e dopo un certo tempo si mettono a ruotare come fossero un unico disco. Trovare a) la velocità angolare  $\omega_f$  dei dischi nella situazione finale, b) il lavoro effettuato dalle forze di attrito durante il processo.

## 5.6 Soluzioni degli esercizi

- [1] Durante l'urto si conserva il momento della quantità di moto rispetto al punto centrale  $O$  della sbarretta; indicando con  $\omega$  la velocità angolare del sistema sbarretta+proiettile subito dopo l'urto e con  $l$  la lunghezza (incognita) della sbarretta, si ha:

$$m_2 v \frac{l}{2} = I_o \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{m_2 v l / 2}{I_o}$$

dove,

$$I_o = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_2 \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} \left( \frac{m_1}{3} + m_2 \right).$$

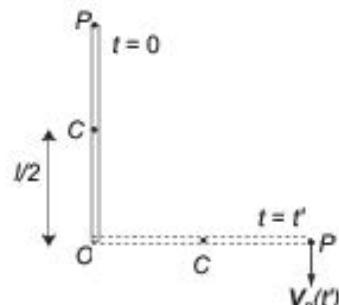
Il lavoro del momento della forza di attrito è uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$-\frac{l}{2} I_o \omega^2 = - \int_0^{4\pi} M d\vartheta \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1}{8\pi} I_o \omega^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{m_2^2 v^2}{\frac{m_1}{3} + m_2} = 0.09 \text{ Nm.}$$

- [2] Conservazione dell'energia tra la posizione iniziale ( $t = 0, \vartheta = 0$ ) e quella finale ( $t = t', \vartheta = \pi/2$ ):

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_o \omega^2(t') \quad \Rightarrow \quad \omega(t') = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

$$v_p = \omega l \quad \Rightarrow \quad v_p(t') = \omega(t') l = \sqrt{3gl}.$$



Dalla velocità angolare si ricava anche l'accelerazione normale del punto  $P$ :

$$a_n(t') = \omega(t')^2 l = 3g.$$

Applicando alla sbarretta, nell'istante  $t'$ , la seconda legge della dinamica dei sistemi si ha:

$$mg \frac{l}{2} = I_o \dot{\omega}(t') \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}(t') = \frac{3g}{2l}.$$

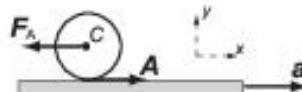
L'accelerazione tangenziale del punto  $P$  è:

$$a_t = \frac{dv_p}{dt} = \dot{\omega}l \quad \Rightarrow \quad a_t(t') = \dot{\omega}(t')l = \frac{3}{2}g.$$

L'accelerazione richiesta vale pertanto:

$$a(t') = \sqrt{9g^2 + \frac{9}{4}g^2} = \frac{\sqrt{45}}{2}g.$$

- [3] La figura mostra le forze che agiscono sulla sfera in direzione orizzontale:  $\mathbf{A}$  è l'attrito statico;  $\mathbf{F}_A$  è la forza apparente, di modulo  $ma$ , agente sulla sfera.



In direzione verticale agiscono la forza peso della sfera e la componente normale della reazione vincolare. Usando le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi e la condizione di puro rotolamento si ha:

$$-ma + A = -ma_c$$

$$Ar = I_c \dot{\omega}$$

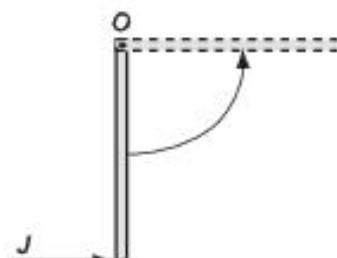
$$a_c = \dot{\omega}r$$

essendo  $r$  il raggio della sfera,  $I_c = \frac{2}{5}mr^2$  il suo momento di inerzia rispetto a un asse orizzontale per  $C$  e  $a_c$  l'accelerazione del centro di massa. Per le condizioni date dal problema  $A = \mu_{min} mg$ . Risolvendo il sistema di equazioni rispetto a  $\mu_{min}$  si ha:

$$\mu_{min} = \frac{2}{7} \frac{a}{g}$$

- [4] Durante il colpo (urto) si conserva il momento della quantità di moto rispetto al punto  $O$ , quindi:

$$Jl = I_o \omega \quad \Rightarrow \quad J = \frac{I_o \omega}{l}$$



dove  $I_o = \frac{1}{3}ml^2$  e  $\omega$  la velocità angolare dell'asta subito dopo il colpo. Que-

st'ultima può essere calcolata applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale (asta verticale) e quello finale (asta orizzontale):

$$\frac{1}{2}I_o\omega^2 = mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 5.4 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad J = 1.8 \text{ N}\cdot\text{s}.$$

- [5] Poiché è nullo il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa del disco, si conserva il momento della quantità di moto del sistema; considerando i momenti assiali (lungo l'asse di rotazione del disco) dei momenti delle quantità di moto si ha,

$$mR^2 \frac{d\varphi}{dt} + I_o \frac{d\vartheta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\vartheta = -2 \frac{m}{M} d\varphi$$

essendo  $\varphi$  e  $\vartheta$  l'angolo di cui ruota l'uomo e il disco, rispettivamente, entrambi misurati rispetto al piano e  $I_o = 1/2MR^2$  il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione. Il disco, quindi, ruota in verso opposto rispetto all'uomo; integrando la relazione precedente con la condizione iniziale  $\varphi = \vartheta = 0$  per  $t = 0$ ,

$$\vartheta = -2 \frac{m}{M} \varphi.$$

Date le condizioni poste dal problema, quando l'uomo ha finito il suo percorso lungo il bordo del disco deve essere

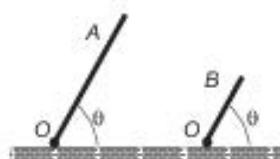
$$\varphi_0 = 2\pi + \vartheta_0 \quad (\vartheta_0 < 0).$$

Pertanto:

$$-\frac{M}{2m}\vartheta_0 - \vartheta_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \vartheta_0 = -\frac{2\pi}{1 + M/2m}.$$

- [6] Arriverà prima la sbarretta  $B$  poiché ha, in ogni istante, maggiore accelerazione angolare della  $A$ . Siano  $d$  e  $m$  il braccio della forza peso rispetto al polo  $O$  e la massa della sbarretta  $A$ , rispettivamente, allora:

$$M_A^E = mgd \quad M_B^E = \left(\frac{1}{2}m\right)g\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{4}M_A^E;$$



inoltre

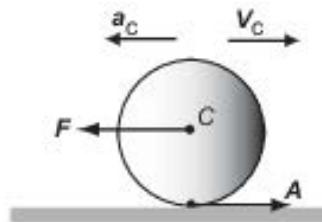
$$(I_o)_A = \frac{1}{3}ml^2 \quad (I_o)_B = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(I_o)_A\dot{\omega}_A.$$

Quindi

$$\dot{\omega}_B = \frac{M_B^E}{(I_o)_B} = 2\frac{M_A^E}{(I_o)_A} = 2\omega_A.$$

- [7] a) Durante il rotolamento libero la forza di attrito nel punto di contatto tra ruota e piano è nulla.

- b) Le due equazioni cardinali della dinamica (5.10) e (5.11), rispettivamente, e la condizione di puro rotolamento, (5.12), sono:



$$-F + A = -ma_c \quad (5.10)$$

$$Ar = I_c \dot{\omega} \quad (5.11)$$

$$v_c = \omega r \quad (5.12)$$

con  $r$  raggio della ruota. Dal sistema delle tre equazioni si ottiene  $F = 3A$ ; poiché  $A \leq \mu_s Mg$  ne deriva la condizione  $F \leq 3\mu_s Mg = 29.4 \text{ N}$ .

- [8] Poiché si conserva l'energia meccanica del sistema si può scrivere:

$$T_I = 0; \quad U_I = 2m_s gr$$

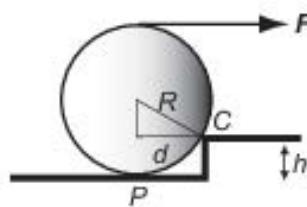
$$\begin{aligned} T_F &= \frac{1}{2}(I_d + I_s)\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m_d r^2 + \frac{1}{12}m_s(2r)^2 + m_s(2r)^2\right]\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{2}m_d + \frac{13}{3}m_s\right); \quad U_F = 0 \end{aligned}$$

$$T + U = \text{cost.} \Rightarrow 2m_s gr = \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{2}m_d + \frac{13}{3}m_s\right).$$

Pertanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{4m_s g}{r\left(\frac{1}{2}m_d + \frac{13}{3}m_s\right)}} = 3.8 \text{ s}^{-1}.$$

- [9] La reazione vincolare  $R_n$  in  $P$  è normale al piano essendo quest'ultimo liscio. Prendendo il punto di contatto  $C$  tra ruota e gradino come polo, la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti si scrive:



$$F(2R-h) - Mg d + R_n d = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n = Mg - F \frac{(2R-h)}{d}.$$

Poichè  $d = \sqrt{2Rh - h^2}$ ,

$$R_n = Mg - F \sqrt{\frac{2R-h}{h}}.$$

- [10] L'equazione del moto rotatorio del disco è espressa dalla relazione

$$M - b\omega = I \frac{d\omega}{dt}$$

con  $I$  momento di inerzia assiale del disco.

A regime si ha:

$$\omega = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

consequently, indicating with  $\omega_r$  the velocity of regime of the disk, we have:

$$M - b\omega_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{M}{b}.$$

- [11] After the release of the spring, the motion of the bar is rototranslatory while the motion of the body is rectilinear. Given the conditions of the problem are conserved:

the energy:  $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1v_c^2 + \frac{1}{2}m_2v^2,$

the quantity of motion:  $m_1v_c = m_2v,$

the moment of angular momentum:  $I\omega = \frac{l}{2}m_2v,$

having indicated with  $v_c$  and  $l$ , respectively, the velocity of the center of mass and the length of the bar, being  $I$  the moment of inertia of the bar with respect to

al centro di massa ( $I = ml^2/12$ ).

Tenendo presente che  $m_1 = m_2$ , risolvendo il sistema delle tre equazioni sopra riportate, si trova:

$$v = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{5m}} = 5 \text{ m/s.}$$

- [12] La coordinata del centro di massa del sistema e il momento di inerzia del sistema rispetto a un asse per  $O$  normale al disco valgono, rispettivamente:

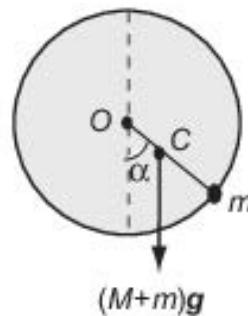
$$\overline{OC} = \frac{mR}{M+m} \quad \text{e} \quad I_o = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2.$$

L'equazione del moto del sistema è:

$$I_o\ddot{\alpha} + (M+m)g\overline{OC} \sin \alpha = 0.$$

Si ha quindi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R(1/2M+m)}{mg}}.$$



- [13] Nel passaggio per la posizione verticale l'energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica secondo la relazione

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

con  $L$  la lunghezza dell'asta e  $I_A = \frac{1}{3}mL^2$  il suo momento d'inerzia rispetto all'estremo  $A$ . Si ricava, quindi:

$$\omega = \frac{3g}{L}.$$

Nella posizione verticale dell'asta l'accelerazione  $\mathbf{a}_{cm}$  del centro di massa sarà tutta centripeta verticale, per la simmetria del moto rispetto a questa posizione, e di modulo pari a

$$a_{cm} = \omega^2 \frac{L}{2} = \frac{3g}{2}.$$

La forza totale agente in quell'istante sull'asta sarà pari alla forza peso più la reazione del vincolo,  $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$ , dirette entrambe secondo la verticale, ma in

versi opposti. Il modulo della reazione sarà quindi

$$R = ma_{cm} + mg = mg \left( \frac{3}{2} + 1 \right) = 2.5mg = 49 \text{ N.}$$

[14] Le equazioni della dinamica del corpo rigido in questo caso si scrivono nella seguente forma:

$$\begin{aligned} AR &= I\dot{\omega} \\ mg \sin \vartheta - A &= ma_c \end{aligned}$$

dove  $A$  è la forza di attrito,  $\dot{\omega}$  l'accelerazione angolare,  $I = 2mR^2/5$  il momento di inerzia della sfera rispetto al suo centro e  $a_c = R\dot{\omega}$  la condizione di puro rotolamento per l'accelerazione del centro di massa. Da queste relazioni si ha:

$$A = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{Ia_c}{R^2} = \frac{I}{mR^2}(mg \sin \vartheta - A),$$

per cui

$$A = \frac{Img \sin \vartheta}{mR^2 + I}.$$

Considerando il limite per l'attrito statico tale che

$$\mu mg \cos \vartheta \geq A = \frac{2}{7}mg \sin \vartheta$$

si ottiene, a):

$$\mu \geq \frac{2}{7} \tan \vartheta.$$

L'energia cinetica del sistema è:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mR^2\omega^2$$

avendo considerato che  $v_c = \omega R$ . D'altra parte la velocità angolare segue la seguente legge temporale:

$$\omega = \dot{\omega}t = \frac{AR}{I}t = \frac{5}{7} \frac{g \sin \vartheta}{R} t$$

per cui, dopo un tempo  $\tau$ , b):

$$T = \frac{5}{14}mg^2 \sin^2 \vartheta \tau^2.$$

[15] Data la forza di attrito  $A$  statico tra la sfera e il blocco, si può scrivere:

$$\begin{aligned} AR &= I\dot{\omega} = \frac{I}{R}(a_1 - a_2) \\ A &= m_2 a_2 \end{aligned}$$

da cui

$$a_1 = \frac{R^2}{I}A + a_2 = \frac{7}{2} \frac{A}{m_2} \Rightarrow A = \frac{2}{7}a_1 m_2.$$

Dall'equazione della dinamica per il blocco  $m_1$

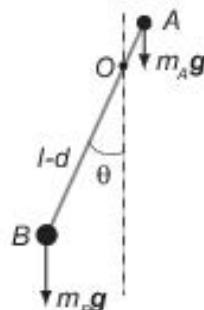
$$F = m_1 a_1 + A = m_1 a_1 + \frac{2}{7}a_1 m_2 \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m_1 + \frac{2}{7}m_2}.$$

e

$$a_2 = \frac{A}{m_2} = \frac{2}{7}a_1 = \frac{2}{7} \frac{F}{m_1 + \frac{2}{7}m_2}.$$

[16] Prendendo il punto  $O$  come polo rispetto al quale calcolare il momento delle forze, per piccole oscillazioni del sistema la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi si scrive:

$$-m_B g(l-d)\ddot{\vartheta} + m_A g d \ddot{\vartheta} = [m_A d^2 + m_B (l-d)^2] \ddot{\vartheta},$$



ovvero

$$\ddot{\vartheta} + \frac{m_B g(l-d) - m_A g d}{m_A d^2 + m_B (l-d)^2} \vartheta = 0$$

che è l'equazione di un moto armonico avente pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{m_B g(l-d) - m_A g d}{m_A d^2 + m_B (l-d)^2}} = 3.4 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.8 \text{ s.}$$

- [17] Le forze di attrito sono interne al sistema per cui si può applicare la conservazione del momento della quantità di moto:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Il lavoro effettuato dalle forze di attrito è pari alla differenza di energia meccanica tra lo stato finale e quello iniziale

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = -\frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2$$

# Fluidi

## 6.1 Esercizio guida – Forza di Archimede

### Teoria

La forza – o spinta – di Archimede, agisce da parte di un fluido pesante (e/o sotto-posto a forze apparenti) su ogni corpo immerso in esso, parzialmente o totalmente. Questa forza si somma alla forza peso agente sul corpo (e/o alla forza apparente agente su di esso) per dare la forza totale risultante. Il galleggiamento si ha se prevale la forza dovuta al fluido.

La forza **S** di Archimede, nel caso di immersione in un fluido pesante è data da:

$$S = -m\mathbf{g} = -\rho V \mathbf{g}$$

dove  $m$ ,  $V$  e  $\rho$  sono la massa, il volume e la densità del fluido ‘spostato’ e  $\mathbf{g}$  è l’accelerazione di gravità. Nel caso fossero presenti forze apparenti, in un sistema con accelerazione  $\mathbf{a}$  si avrebbe:

$$S = -m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = -\rho V(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

### Argomento

Un corpo della forma di un cilindro retto, soggetto al peso, è sostenuto da un filo sot-

tile di massa trascurabile fissato al centro della base superiore. Viene quindi immerso in un fluido, anch'esso pesante. Il cilindro può essere di densità uniforme, oppure avere una distribuzione specifica della densità, per es. può essere cavo con una parete sottile di densità uniforme.

*Le forze agenti sul corpo in condizioni di equilibrio*

Le forze esterne applicate al corpo sono la sua forza peso, la forza del vincolo di sostegno esercitata dal filo e la spinta di Archimede nel caso che il corpo venga immerso nel fluido: esse sono tutte dirette secondo la verticale e nelle condizioni di equilibrio, debbono avere risultante nulla.

*La funzione della tensione del filo*

La funzione del filo è quella stessa, già vista nell'esercizio delle carrucole a pagina 280, di 'trasmettere' la forza applicata dal sostegno direttamente al corpo cui il filo è collegato; all'interno del filo, in ogni sezione, è presente una tensione  $\tau$  eguale alla forza esercitata dal sostegno e applicata al corpo.

In questo esercizio la tensione del filo è sostanzialmente la forza potenzialmente variabile che bilancia le altre due forze presenti, peso del corpo e spinta di Archimede, che dipendono dalle caratteristiche del corpo, del fluido e dalla collocazione del corpo rispetto a questo.

*Si consideri il caso in cui il corpo cilindrico sia inizialmente sospeso al di fuori del fluido e poi venga immerso in questo. Si avrà una variazione nella tensione del filo e, nelle condizioni in cui il corpo possa galleggiare, anche l'annullamento della tensione. Il problema può richiedere direttamente i valori delle tensioni o, nel caso di problemi inversi, i parametri per i quali la variazione relativa della tensione abbia un determinato valore.*

La somma a zero delle forze per le condizioni di equilibrio si esplicita nell'equazione

$$-m_{\text{corpo}}g + S + \tau = (-\rho_{\text{corpo}} + \rho_{\text{fluido}})Vg + \tau = 0$$

in cui  $V$  è il volume del corpo  $S$  è la spinta di Archimede e si sono considerate le

uniche componenti non nulle sull'asse verticale orientato verso l'alto. Per la tensione incognita  $\tau$  la soluzione è:

$$\tau = \rho_{\text{corpo}} V g$$

positiva, diretta verso l'alto, nel caso in cui il corpo sia sospeso al di fuori del fluido (Fig. 6.1a) e

$$\tau = (\rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}}) V g > 0$$

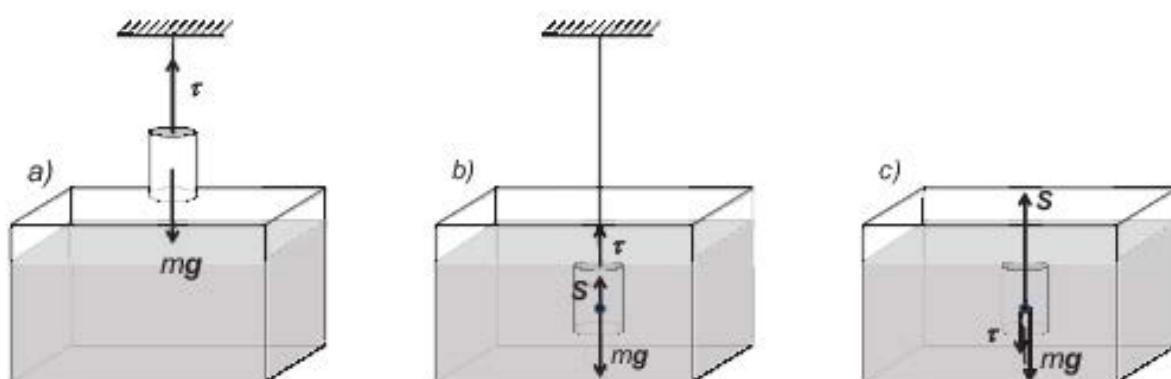
nel caso in cui sia immerso totalmente (Fig. 6.1b). Poiché il filo può esercitare una forza sul corpo appeso soltanto se è in stato di tensione, ovvero solo se la tensione  $\tau$  ottenuta è positiva, l'espressione vale soltanto se  $\rho_{\text{corpo}} > \rho_{\text{fluido}}$ , ovvero solo se il peso del corpo supera la spinta: il corpo non deve essere nelle condizioni di galleggiamento.

La variazione relativa della tensione nei due casi, in cui il corpo sia esterno e interno al fluido, fornisce

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}}}{\rho_{\text{corpo}}}$$

dal cui valore non è deducibile alcun parametro geometrico del corpo (volume, dimensioni ecc.), ma solo una delle due densità ( $\rho_{\text{corpo}}$  o  $\rho_{\text{fluido}}$ ), qualora fosse nota l'altra.

*Nel caso in cui il fluido abbia una densità maggiore di quella del corpo in esso immerso, il corpo tende a galleggiare. In questo caso, si consideri di vincolare il corpo con un filo ancorato al fondo del recipiente contenente il fluido e sempre fissato al*



**Fig. 6.1.** Corpo cilindrico immerso in un liquido

*centro della base circolare del corpo cilindrico.*

Questo problema non è diverso dal precedente, se non per essere variato – ed essere aumentato – il valore della spinta, in quanto è aumentata la densità del fluido, ed essere di conseguenza variata anche la tensione del filo. In questo caso (Fig. 6.1c), la forza esercitata dal filo è anche mutata di verso, in valore tuttavia ancora dato da

$$\tau = (\rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}}) V g < 0.$$

La tensione non è valutabile se non si conosce il volume  $V$  del corpo. Non è necessario conoscere il valore del volume del corpo solo se viene chiesta la variazione relativa della tensione, intendendosi la variazione tra il caso in esame e quello in cui il corpo è sospeso fuori del liquido, come nel caso precedente ( $\tau > 0$ ).

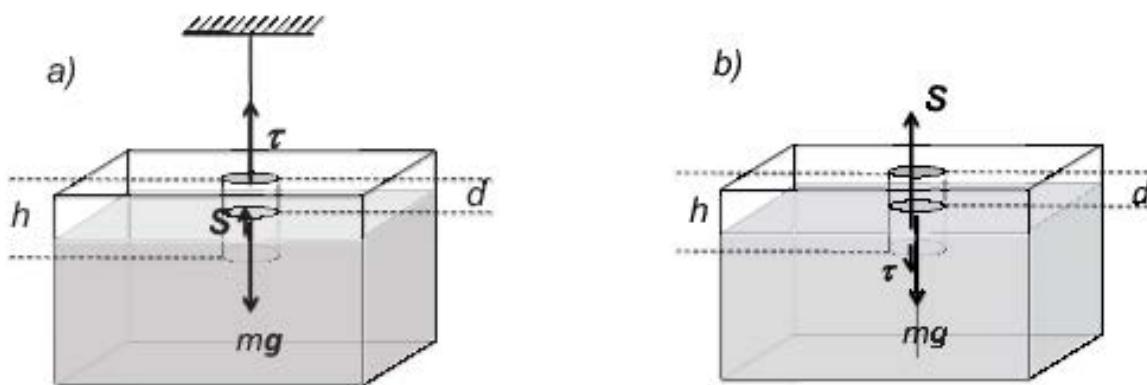
*Si torni ora alla condizione in cui il fluido abbia densità minore di quella del corpo e che questo sia tenuto in sospensione dall'alto con un filo in posizione verticale all'equilibrio. Quale estensione del problema, si pensi di sollevare il corpo alzando ad esempio il vincolo in modo da far uscire il cilindro dal fluido di un tratto  $d$  e si riconsideri il problema della tensione del filo.*

*Nel caso di fluido a densità maggiore del corpo, si torni al trattenimento del corpo da parte di un filo vincolato in basso e si lasci emergere una parte del corpo, sempre di altezza  $d$ .*

Rispetto al caso precedentemente esaminato, la spinta è unicamente data dalla parte del corpo immersa; essa non è nota se non è data l'altezza totale  $h$  del cilindro, oltre al volume totale del cilindro (quindi, eventualmente, il raggio della base circolare). La condizione di equilibrio (Fig. 6.2a, in cui la spinta, applicata al centro di massa della parte immersa del corpo, è lievemente spostata per non sovrapporsi alla forza peso nel disegno) è data da:

$$\left( -\rho_{\text{corpo}} + \rho_{\text{fluido}} \frac{h-d}{d} \right) V g + \tau = 0$$

in quanto la spinta è data solo dalla parte del corpo immersa nel liquido, pari alla



**Fig. 6.2.** a) Corpo cilindrico parzialmente immerso in un fluido avente densità inferiore a quella del corpo; b) Corpo cilindrico trattenuto da un filo dalla base inferiore e parzialmente immerso in un fluido avente densità superiore a quella del corpo

frazione  $(h - d)/h$  del volume totale  $V$ . Si ricava:

$$\tau = \left( \rho_{\text{corpo}} - \rho_{\text{fluido}} \frac{h-d}{d} \right) V g.$$

Il filo è in tensione ( $\tau$  diretta verso l'alto, positiva, come in Fig. 6.2a, in cui la spinta applicata alla parte immersa del corpo è lievemente spostata per non sovrapporsi alla forza peso nel disegno) se

$$\rho_{\text{corpo}} > \rho_{\text{fluido}} \frac{h-d}{h}.$$

Ciò è sempre vero se la densità del corpo è maggiore di quella del fluido. Se, viceversa, la densità del fluido è maggiore di quella del corpo, la risultante tra peso e spinta è sempre diretta verso l'alto e il filo deve essere ancorato al fondo per rimanere in tensione, con  $\tau$  negativa. In entrambi i casi la tensione si annulla sempre per un valore della lunghezza  $d$  del tratto emerso pari a

$$d = h \left( 1 - \frac{\rho_{\text{corpo}}}{\rho_{\text{fluido}}} \right)$$

quando cioè l'emersione del corpo in aria è tale da rendere la spinta esattamente uguale al peso (Fig. 6.2b in cui ancora la tensione applicata alla parte immersa del corpo e la spinta sono lievemente spostate per non sovrapporsi alla forza peso nel disegno).

## 6.2 Esercizio guida – Dinamica dei fluidi

### Teoria

Le condizioni di regime di scorrimento di un liquido pesante non vischioso sono regolate dalla legge di conservazione dell'energia meccanica; applicata alla quantità di fluido compresa tra due sezioni di un tubo di flusso, essa si esplicita dicendo che lungo una linea di corrente è costante in ogni punto la somma di tre altezze, geometrica, piezometrica, di arresto:

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} \quad (6.1)$$

dove  $h$  è la quota del punto,  $p$  la pressione,  $v$  la velocità,  $\rho$  la densità e  $g$  l'accelerazione di gravità. L'adeguamento dell'equazione al caso di un liquido vischioso richiederebbe l'aggiunta di un termine dissipativo nel bilancio energetico di partenza e l'adeguamento al caso di un gas la considerazione del lavoro di compressione del sistema.

### Argomento

*Le condizioni  
pressorie  
dipendenti  
dalla  
geometria, non  
dal carico*

In una condotta d'acqua la portata del flusso è condizionata dalla potenza di un motore che funge da pompa per caricare un serbatoio a una quota superiore da quella a cui lavora prelevando acqua da un pozzo. La pressione lungo la condotta dipende dalla velocità di carico, quindi dai vincoli costruttivi sulla portata, e dalle condizioni geometriche del circuito idrico. Si considerano eventuali perdite lungo la condotta, dovute a sversamenti da piccoli fori ma non a effetti vischiosi, che devono essere considerate per determinare la velocità del flusso e la pressione, in dipendenza della quota e della sezione dei fori.

*Una pompa immersa in un pozzo d'acqua carica attraverso un tubo verticale di sezione A una vasca di volume V, situata a un'altezza h al di sopra del pelo libero del*

pozzo, riempiendola in un tempo  $t$ . Si studiano le condizioni di pressione alle diverse quote del tubo (Fig. 6.3, a sinistra).

La velocità d'uscita dell'acqua è determinata dalle condizioni di carica, dovendo la portata  $Q$  soddisfare la relazione

$$Q = \frac{V}{t} = Av$$

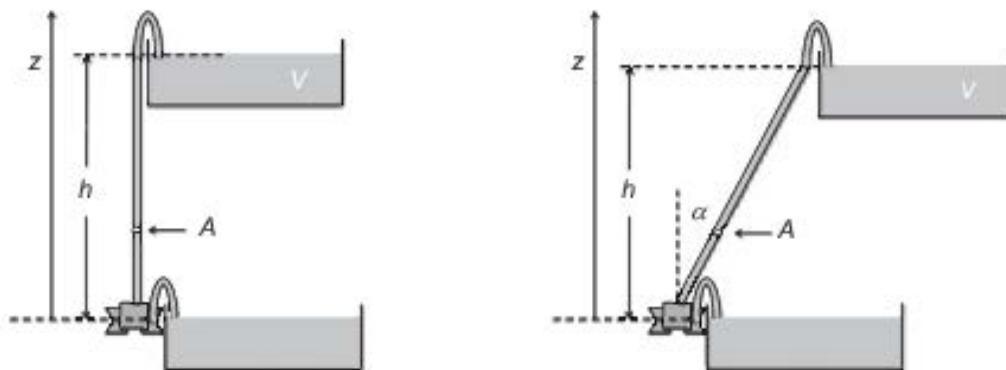
ed essere quindi

$$v = \frac{V}{At}.$$

Tuttavia, poiché la velocità è costante in tutte le sezioni del tubo, le differenze di pressione esistenti tra le diverse quote non dipendono dalla velocità d'uscita dell'acqua, ma solo dalla quota, secondo quanto si deduce dall'Eq. (6.1); in questo senso, le condizioni di fatto non sono diverse da quelle che si avrebbero se il fluido fosse in quiete. Il teorema di Bernouilli è qui applicato limitatamente ai tratti di fluido in cui non siano presenti forze diverse da quelle gravitazionali, escludendo quindi il tratto ove è presente la pompa.

Dato il valore  $p_0$  della pressione atmosferica, la pressione immediatamente all'interno della bocca d'uscita dell'acqua alla quota  $h$  è eguale a

$$p(h) = p_0 - \frac{\rho v^2}{2}$$



**Fig. 6.3.** Una vasca di volume  $V$  viene caricata da una pompa immersa in un pozzo d'acqua. Il tubo di carico può essere verticale (a sinistra) o inclinato di un angolo  $\alpha$  (a destra)

e alle diverse quote  $z$  del tubo è

$$p(z) = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} + \rho g(h - z).$$

Le equazioni e i risultati non si modificano se, per ragioni costruttive, la condotta di carico dovesse essere inclinata di un certo angolo  $\alpha$  rispetto alla verticale, pur di mantenere inalterate l'altezza  $h$  e la sezione  $A$  del condotto (Fig. 6.3, a destra). I valori delle pressioni in due punti a quote diverse differiscono per il valore della pressione idrostatica di una colonna di pari altezza.

*Nel problema precedente, con la condotta in verticale e con il vincolo di caricare il serbatoio nel medesimo tempo  $t$ , si consideri la presenza di un foro di sezione  $S$  a un'altezza  $L$  dal livello  $z = 0$ . Si studiano le condizioni di pressione e la velocità di uscita alle diverse quote del tubo (Fig. 6.4).*

La velocità finale di uscita dell'acqua dal condotto è la stessa di quella precedentemente considerata ed è anche la stessa in tutto il tratto superiore del condotto, dal livello  $L$  in su.

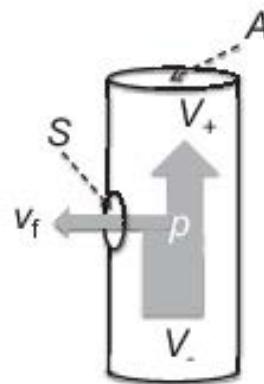
La pressione interna al condotto alla quota  $L$  del foro è deducibile dall'equazione della pressione precedentemente fornita ed è

$$p(L) = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} + \rho g(h - L)$$

La velocità  $v_f$  di uscita dell'acqua dal foro si lega alle velocità di scorrimento all'interno del tubo immediatamente sotto ( $v_-$ ) e immediatamente sopra ( $v_+ = v$ ) al foro attraverso la costanza della portata:

$$v_- = v_+ + \frac{S}{A} v_f$$

Il suo valore si deduce applicando la formula di Bernoulli a una linea di corrente che



**Fig. 6.4.** Condotta verticale che presenta un foro di sezione  $S$

segua il percorso dell'acqua in uscita dal foro (Fig. 6.4). Si ha

$$p_- + \frac{\rho v_-^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_f^2}{2}$$

da cui l'equazione di secondo grado per la  $v_f$ :

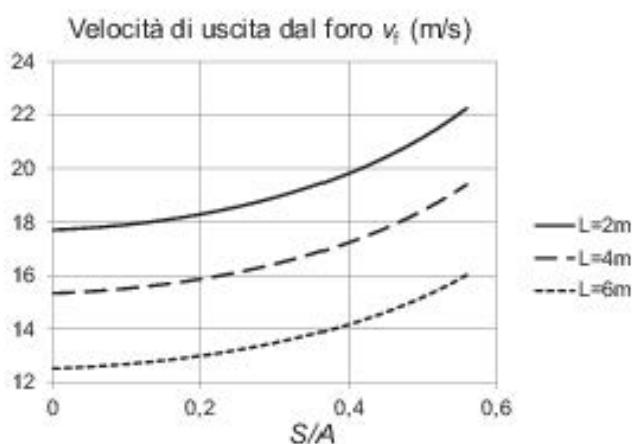
$$\left[ \left( \frac{S}{A} \right)^2 - 1 \right] v_f^2 + 2 \frac{S}{A} v v_f + 2 \rho g (h - L) = 0.$$

di soluzione nota. Una rappresentazione grafica della soluzione è riportata in figura, dove è data in funzione del rapporto  $S/A$  la velocità di uscita dal foro per diverse altezze  $L$  alle quali è situato il foro, per una altezza fissa  $h = 10$  m e una velocità di uscita dal tubo  $v = 1$  m/s. Si fa presente che la velocità  $v_f$  è molto poco dipendente dalla velocità di uscita dal tubo.

Applicando ulteriormente la formula di Bernoulli a una linea che segua il percorso lungo il condotto in due sezioni immediatamente sotto e immediatamente sopra al foro si ottiene la differenza di pressione tra questi due punti

$$p_+ - p_- = \frac{\rho(v_-^2 - v^2)}{2}$$

dove si sono indicate con  $p_-$  e  $p_+ = p(L)$  le pressioni nel tubo immediatamente al di sotto e al di sopra del foro.



**Fig. 6.5.** Velocità di uscita dal foro in funzione del rapporto  $S/A$  per tre distinti valori dell'altezza del foro

### 6.3 Domande di verifica

- Enunciare e dimostrare il teorema così detto di Pascal per i fluidi in quiete.
- Descrivere compiutamente l'esperienza di Torricelli per la misura della pressione atmosferica.
- Indicare in quali ipotesi un fluido si può considerare perfetto, differenziando il caso dei liquidi da quello degli aeriformi.
- Enunciare e dimostrare il teorema di Archimede.
- Ricavare l'equazione fondamentale dell'idrostatica.
- Ricavare l'equazione della legge così detta di Stevino, della statica dei fluidi pesanti.
- Discutere il tema dell'esistenza della spinta di Archimede in un liquido all'interno di un satellite artificiale orbitante attorno alla Terra.
- Discutere il problema relativo all'eventuale presenza della spinta di Archimede su un oggetto cilindrico di densità maggiore dell'acqua giacente sul fondo di una vasca colma d'acqua, con una base sul fondo piano di questa.
- Descrivere qualitativamente l'effetto dovuto alle forze di volume che si esercitano su un palloncino, riempito di gas più leggero dell'aria, tenuto da un filo all'interno di una vettura che accelera in avvio di marcia.
- Indicare la configurazione che assume la superficie libera di un liquido contenuto in un recipiente, quando questo sia sottoposto a un'accelerazione orizzontale costante e se ne giustifichi l'asserzione.
- Si chiede se in un recipiente a tenuta e pieno d'acqua la spinta di Archimede aumenti su un corpo immerso quando si aumenta in qualche modo la pressione interna.
- Dimostrare che in un tubo a U riempito di un liquido pesante il livello del pelo libero nei due diversi bracci è il medesimo.

- Illustrare il concetto di vischiosità di un liquido e definirne la grandezza caratteristica.
- Ricavare l'equazione descrittiva del teorema di Bernouilli.
- Illustrare qualche applicazione del teorema di Bernouilli.
- Illustrare e spiegare l'effetto Venturi, relativo all'aumento della pressione in un fluido in moto.
- Spiegare perché si ha l'effetto di sostentamento di un'ala in moto nell'aria.
- Spiegare l'effetto Magnus, relativo all'insorgenza di una forza agente su un cilindro in rotazione in un fluido in movimento.
- Descrivere qualitativamente la modifica da apportare al teorema di Bernouilli in un fluido vischioso.
- Giustificare l'effetto per il quale in un autocarro in corsa si verifica un rigonfiamento dei teli di copertura.

## 6.4 Esercizi

- [1] Sul fondo piano e orizzontale di una piscina vuota è posta una tavola di legno, di spessore uniforme  $d = 5 \text{ cm}$  e densità  $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ . Viene versata acqua nella piscina con intensità costante  $I = 1 \text{ cm/min}$ : si chiede dopo quanto tempo dall'inizio la tavola comincerà a galleggiare sull'acqua.
- [2] Una sfera rigida di massa  $m_s = 2 \text{ g}$  e volume  $V_s = 20 \text{ cm}^3$  è posta in un recipiente nel quale la pressione dell'aria può essere variata. Considerando l'aria, anche ad alte pressioni, come un gas perfetto, per quale valore della pressione dell'aria la spinta di Archimede sulla sfera egualia il suo peso alla temperatura  $T = 300 \text{ K}$ . (Peso molecolare dell'aria:  $M=29$ ).
- [3] Sopra il pelo libero del mercurio di una colonnina di mercurio di un barometro di Torricelli si trova dell'aria che occupa uno spazio di altezza  $h_1 = 120 \text{ mm}$  quando la colonnina è alta  $d_1 = 740 \text{ mm}$ . A temperatura costante, spingendo il tubo di vetro verso il basso, l'altezza dello spazio occupato dall'aria si riduce

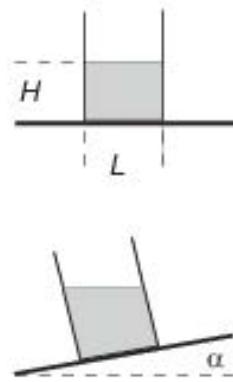
a  $h_2 = 80$  mm e quello della colonna a  $d_2 = 725$  mm. Si determini il valore della pressione esterna. (Densità del mercurio  $\rho = 13\,595 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )

- [4] All'interno di un recipiente cilindrico, con raggio di base  $R = 12$  cm, posto su un piano orizzontale, è un cilindro di alluminio con una base poggiata sul fondo. Per immergere completamente il cilindro di alluminio in acqua, è necessario versare nel recipiente almeno  $m = 0.5$  kg. In queste condizioni, sul fondo del recipiente si esercita una forza  $F = 3$  N. Si determini l'altezza  $h$  del cilindro di alluminio (densità alluminio  $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).
- [5] In un recipiente cilindrico retto con sezione di area  $A = 900 \text{ cm}^2$  è contenuta una certa quantità d'acqua il cui livello si alza di  $h = 0.5$  cm quando in essa si immerge un oggetto che galleggia senza toccare il fondo. Si determini la massa dell'oggetto immerso.
- [6] Un pallone di massa  $m$  e volume  $V$  viene posato sulla superficie libera dell'acqua di un recipiente posto su un piano orizzontale: il pallone galleggia avendo un volume immerso  $V_I = 1/3V$ . Se la stessa esperienza viene ripetuta all'interno di un ascensore che sale con accelerazione costante pari a metà dell'accelerazione di gravità, si nota che il pallone galleggia con un volume immerso pari a  $V'_I$ . Determinare il rapporto  $V_I/V'_I$ .
- [7] Una nave da carico, navigando, passa dall'acqua di mare a quella di un lago e, pertanto, aumenta leggermente la parte immersa. Quando viene scaricato il carico di massa  $M_C = 10^5 \text{ kg}$ , essa ritorna al livello che aveva sul mare. Determinare la massa della nave sapendo che la densità dell'acqua di mare vale  $\rho_M = 1.03 \text{ g}/\text{cm}^3$ .
- [8] In un recipiente cilindrico di sezione  $A = 50 \text{ cm}^2$  è contenuta dell'acqua per un'altezza  $h = 8$  cm. Se si deposita sul fondo una moneta di raggio  $R = 2.5$  cm e spessore  $d = 3$  mm, si chiede quale sarà la pressione dell'acqua sulla faccia superiore della moneta.
- [9] In un contenitore a forma di parallelepipedo avente sezione rettangolare di area  $A = 0.1 \text{ m}^2$ , è contenuta dell'acqua il cui livello di alza di  $h = 2$  cm quando in essa si immerge un corpo che galleggia senza toccare il fondo del recipiente. Determinare la massa del corpo.

- [10] Sul fondo piano orizzontale di un recipiente cilindrico di raggio di base  $R = 15\text{ cm}$  è appoggiato un cubo di legno di lato  $L = 7\text{ cm}$ . Se versando dell'acqua all'interno del recipiente si nota il distacco del cubo dal fondo dopo che la quantità versata è pari a  $V = 31$ , si determini la densità del legno di cui è fatto il cubo.
- [11] Un blocchetto di ghiaccio in acqua galleggia emergendo per una frazione  $\alpha = 0.1$  del suo volume fuori della superficie libera. Si chiede quale sia la densità di un liquido nel quale il blocchetto emerge per una frazione  $\beta = 0.07$ .
- [12] Due recipienti cilindrici eguali e con area di base  $A = 200\text{ cm}^2$  sono riempiti di acqua e comunicano al fondo attraverso un tubicino. Si chiede di quanto aumenterà il livello dell'acqua in ciascun recipiente se in uno di essi si pone a galleggiare in superficie un corpo solido di massa  $m = 1.5\text{ kg}$ .
- [13] Un cilindro retto, metallico, di altezza  $d = 20\text{ cm}$ , raggio  $r = 10\text{ cm}$  e massa  $m = 10\text{ kg}$  è appoggiato con la base perfettamente aderente al fondo di una vasca contenente acqua il cui livello, misurato dal fondo, è pari ad  $H = 1\text{ m}$ . Determinare la forza esercitata sulla superficie di contatto con il fondo della vasca.
- [14] Un recipiente cubico di lato  $l = 12\text{ cm}$  contiene una massa  $m = 15.5\text{ kg}$  di mercurio (densità del mercurio  $\rho = 13.58 \times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Determinare l'intensità della forza che si esercita su una superficie laterale del contenitore.
- [15] La colonna di mercurio in un barometro di Torricelli è alta  $H = 760\text{ mm}$  sul livello del liquido della bacinella circostante. Si chiede quale sarà la nuova altezza  $H'$  della colonna di mercurio all'interno del tubo dopo avere inserito  $m = 5\text{ g}$  di acqua dall'estremo inferiore, aperto, del tubo di raggio  $r = 3\text{ mm}$ , che vanno a stratificarsi sulla parte superiore. (Densità del mercurio  $\rho_{\text{merc}} = 13\,540\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )
- [16] Una sfera di rame galleggia sul mercurio restando immersa per  $1/4$  del suo volume. Determinare se la sfera è piena o contiene una cavità e, nel secondo caso, ricavare qual è la frazione di volume della sfera occupata dalla cavità. (Densità del rame  $\rho = 8.9\text{ g}/\text{cm}^3$ , densità del mercurio  $\rho' = 13.6\text{ g}/\text{cm}^3$ ).

[17] Un recipiente cilindrico di diametro interno  $D = 10\text{ cm}$ , appoggiato su un piano orizzontale, viene riempito con  $m = 0.8\text{ kg}$  di acqua. Se in seguito si appoggia sul fondo del recipiente un cubo – di densità maggiore di quella dell’acqua – di lato  $L = 6\text{ cm}$ , si chiede quale sarà la spinta di Archimede esercitata dall’acqua sul cubo in essa immerso.

[18] In un recipiente parallelepipedo a base quadrata di lato  $L = 10\text{ cm}$  poggiato su un piano orizzontale viene versata dell’acqua fino a un’altezza  $H = 20\text{ cm}$ . Si chiede in quale punto e quale sarà la pressione massima sul fondo del recipiente se si inclina il piano d’appoggio per rotazione di un angolo  $\alpha = 10^\circ$  attorno a una direzione parallela a uno dei lati della base.



[19] Un corpo a forma di parallelepipedo galleggia in un recipiente parzialmente riempito con mercurio ( $\rho_{Hg} = 13.6\text{ g/cm}^3$ ), rimanendo immerso solo per due terzi della sua altezza. In seguito, viene aggiunta dell’acqua in modo da ricoprire abbondantemente la parte emergente del parallelepipedo. Calcolare l’altezza  $x$  della parte immersa nel mercurio nelle nuove condizioni, sapendo che l’altezza totale del parallelepipedo è  $h = 20\text{ cm}$ .

[20] Un ampio e profondo recipiente con un piccolo foro sul fondo è riempito con acqua di densità  $\rho_1$  e di kerosene con densità  $\rho_2 < \rho_1$  che formano due strati immiscibili di altezza, rispettivamente,  $h_1 = 30\text{ cm}$  e  $h_2 = 20\text{ cm}$ . Trascurando la viscosità dei liquidi, trovare la velocità di uscita dell’acqua dal foro.

[21] Un ampio e profondo recipiente cilindrico di altezza  $h_0 = 50\text{ cm}$  è riempito di acqua e posto su un tavolo orizzontale. Trascurando la viscosità trovare a quale altezza  $h_1$  dal fondo bisognerebbe praticare un piccolo forellino affinchè il getto d’acqua uscente colpisca la superficie del tavolo alla distanza massima dal recipiente,  $L_M$ . Determinare, inoltre, il valore di  $L_M$ .

[22] Si ha un cilindro riempito di acqua, posto su un piano orizzontale, con un pistone a un suo estremo e un forellino all’altro estremo. Determinare il lavoro che deve essere compiuto per svuotare il cilindro in un tempo  $t$  comprimendo

il pistone con una forza costante. Il volume del cilindro è  $V$ , la sezione del forellino  $s$  è piccola rispetto alla sezione del pistone, la viscosità è trascurabile.

## 6.5 Soluzioni degli esercizi

- [1] La tavola comincerà a galleggiare quando la spinta di Archimede dovuta al volume immerso della tavola,  $V_i$ , sarà uguale alla forza peso; indicando con  $\rho_a$  e con  $d_i$  la densità dell'acqua e lo spessore della tavola immerso, rispettivamente, si ha:

$$\rho g V = \rho_a g V_i \quad \Rightarrow \quad \rho d = \rho_a d_i \quad \Rightarrow \quad d_i = d \frac{\rho}{\rho_a} = 2.5 \text{ cm.}$$

Per raggiungere tale valore di spessore immerso della tavola di legno deve passare un tempo

$$t = \frac{d_i}{I} = 2 \text{ min e } 30 \text{ s.}$$

[2]

$$\text{Peso} = \text{spinta} \quad \Rightarrow \quad m_S g = \rho_{\text{aria}} V_S g$$

Per l'aria, indicando con  $m$  la sua massa in grammi:

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad P \frac{m}{\rho_{\text{aria}}} = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{aria}} = \frac{PM}{RT} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$\text{Quindi: } P = \frac{m_S R T}{M V_S} = 8.6 \times 10^6 \text{ Pa.}$$

[3]

$$\left. \begin{array}{l} p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 h_1 = p_2 h_2 \\ p_0 = p_1 + \rho g d_1 = p_2 + \rho g d_2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad p_1 + \rho g d_1 = p_1 \frac{h_1}{h_2} + \rho g d_2.$$

Pertanto

$$p_1 = \rho g \frac{d_2 - d_1}{1 - h_1/h_2} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \rho g \left( \frac{d_2 - d_1}{1 - h_1/h_2} + d_1 \right) = 1.02 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

- [4] La forza  $F$  sarà pari al peso  $P$  meno la spinta di Archimede  $S$ :

$$F = P - S = (\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{acqua}})gV_{\text{cilindro}}$$

dove

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{recip}} - V_{\text{acqua}} = \pi R^2 h - \frac{m}{\rho_{\text{acqua}}}$$

da cui

$$h = \frac{V_{\text{cilindro}} + \frac{m}{\rho_{\text{acqua}}}}{\pi R^2} = \frac{\frac{F}{(\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{acqua}})g} + \frac{m}{\rho_{\text{acqua}}}}{\pi R^2} = 1.5 \text{ cm.}$$

- [5] Il peso del corpo immerso, e quindi la massa, è eguale a quello/a dell'acqua spostata, ma questo/a è pari a quello/a di un volume cilindrico di area eguale alla sezione del recipiente e di altezza  $h$ . Quindi:

$$m_{\text{corpo}} = m_{\text{acqua}} = \rho_{\text{acqua}} V_{\text{acqua}} = \rho_{\text{acqua}} Ah = 0.45 \text{ kg.}$$

- [6] Nell'ascensore la forza peso e la spinta di Archimede aumentano della stessa quantità; quindi:  $V'_I = V_I$

- [7] Indicando con  $M_N$  la massa della nave, con  $V_I$  il volume immerso e con  $\rho_L$  la densità dell'acqua del lago ( $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )

$$\text{Nell'acqua del mare: } \rho_M V_I g = (M_N + M_C)g$$

$$\text{Nell'acqua del lago: } \rho_L V_I g = M_N g \implies V_I = \frac{M_N}{\rho_L}$$

Dal sistema formato da queste due equazioni si ricava:

$$M_N = M_C \left( \frac{\rho_M}{\rho_L} - 1 \right)^{-1} = 3.33 \times 10^6 \text{ kg.}$$

- [8] Indicando con  $h' = \pi R^2 d / A = 1.18 \times 10^{-3} \text{ m}$  la differenza delle altezze dell'acqua prima e dopo l'immersione della moneta, si ha:

$$p = \rho g(h + h' - d) = 766.2 \text{ N/m}^2.$$

- [9] Il peso (massa) del corpo è uguale al peso (massa) dell'acqua spostata che è quello (quella) di un volume eguale alla superficie di base del contenitore per  $h$ :

$$m = \rho_a A h = 2 \text{ kg}.$$

- [10] Condizione del distacco: spinta Archimede=peso cubo:

$$hL^2 \rho_{\text{acqua}} g = L^3 \rho_{\text{legno}} g \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{legno}} = \frac{h \rho_{\text{acqua}}}{L}.$$

Si deriva l'altezza  $h$  cui comincia il distacco da  $V = (\pi R^2 - L^2)$  e si ottiene:

$$\rho_{\text{legno}} = \frac{V \rho_{\text{acqua}}}{(\pi R^2 - L^2) L} = 760 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

- [11] Per l'equilibrio al galleggiamento nell'acqua si ha:

$$\rho_{\text{ghiaccio}} V g = \rho_{\text{acqua}} (1 - \alpha) V g$$

e, analogamente, nel liquido incognito:

$$\rho_{\text{ghiaccio}} V g = \rho_{\text{liq}} (1 - \beta) V g;$$

da cui:

$$\rho_{\text{liq}} = \rho_{\text{acqua}} \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} = 968 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

- [12] L'immersione del corpo provoca lo spostamento di una quantità d'acqua di massa pari alla massa del corpo e di volume

$$V_{\text{acqua}} = \frac{m_{\text{acqua}}}{\rho_{\text{acqua}}} = \frac{m}{\rho_{\text{acqua}}}.$$

Tale volume si ridistribuisce sui due recipienti cilindrici e si troverà:

$$h = \frac{V_{\text{acqua}}}{2A} = \frac{m}{2A\rho_{\text{acqua}}} = 3.75 \text{ cm}.$$

- [13] La forza  $F$  che il cilindro esercita sulla superficie circolare di contatto con il fondo della vasca è pari alla pressione della colonna di liquido di altezza  $H - d$

esercitata sulla superficie superiore del cilindro e alla forza peso del cilindro; pertanto

$$F = \rho g \pi r^2 (H - d) + mg = 344.3 \text{ N}.$$

- [14] Indicando con  $V$  e  $h$  il volume del mercurio e la sua altezza nel recipiente, rispettivamente, si ha:

$$V = \frac{m}{\rho} = 1.14 \times 10^{-3} \text{ m}^3; \quad h = \frac{V}{l^2} = 7.93 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Dividendo la superficie laterale del contenitore in tante strisce infinitesime (parallele alla superficie libera del liquido) di altezza  $dh'$  (essendo  $h'$  la distanza della striscia dalla superficie libera del liquido:  $0 \leq h' \leq h$ ) e area  $dS = ldh'$ , su ognuna di esse si esercita una forza normale  $dF = pdS = (p_0 + \rho gh')dS$ , essendo  $p_0$  la pressione atmosferica sulla superficie libera del liquido ( $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ); pertanto:

$$F = \int_0^h (p_0 + \rho gh')ldh' = p_0 lh + \frac{1}{2}\rho g l h^2 = 1.0 \times 10^3 \text{ N}.$$

- [15] Il volume dell'acqua inserita è:

$$V = \frac{m}{\rho} = 5 \text{ cm}^3 = 5 \times 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Indicando con  $h$  l'altezza dello strato d'acqua:

$$V = \pi r^2 h \implies h = \frac{V}{\pi r^2} = 176.8 \text{ mm}.$$

Dalla legge di Stevino,

$$\rho_{\text{merc}} g H = \rho_{\text{acqua}} g h + \rho_{\text{merc}} g H' \implies H' = H - \frac{\rho_{\text{acqua}}}{\rho_{\text{merc}}} h = 746.9 \text{ mm}.$$

- [16] Supponendo che il volume della sfera,  $V$ , non sia cavo, la condizione di equilibrio di quest'ultima impone che:

$$\rho' \frac{V}{4} = \rho V \implies \rho = \frac{\rho'}{4},$$

condizione non verificata. Detto allora  $V_c$  il volume della cavità all'interno della sfera di rame si ha:

$$\rho' \frac{V}{4} = \rho(V - V_c) \quad \Rightarrow \quad V_c = V \left( 1 - \frac{\rho'}{4\rho} \right) = 0.62 V.$$

- [17] Dopo il posizionamento del cubo sul fondo del recipiente cilindrico, il pelo libero dell'acqua si porterà a un'altezza  $h$  ricavabile dal volume dell'acqua inserita nel recipiente, dato da

$$V = \left[ \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2 - L^2 \right] h = \frac{m}{\rho}$$

pari cioè a:

$$h = \frac{4m}{\rho(\pi D^2 - 4L^2)}, \quad (6.2)$$

con  $\rho$  densità dell'acqua.

Se risulta  $h < L$ , si procede calcolando la spinta data in modulo dal prodotto  $\rho g$  per il volume  $V_{\text{imm}} = L^2 h$  del cubo immerso:

$$S = \rho g h L^2 = \frac{4mgL^2}{\pi D^2 - 4L^2}.$$

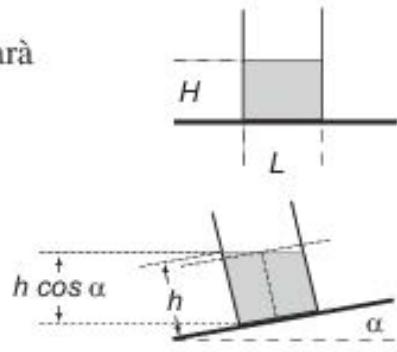
Se risulta  $h > L$ , allora tutto il cubo risulterà immerso nell'acqua e la spinta sarà data in modulo dal prodotto  $\rho g$  per il volume del cubo immerso:

$$S = \rho g L^3.$$

Nel caso dato con  $m = 0.8 \text{ kg}$ , dall'Eq. (6.2) si ha  $h = 1.8 \text{ cm}$  e quindi  $L = 6 \text{ cm}$ , ovvero  $S = 2.11 \text{ N}$ .

- [18] Con riferimento alla figura, la pressione sarà massima nel punto più basso e pari a

$$\begin{aligned} p &= \rho g h \cos \alpha = \rho g \left( H + \frac{L}{2} \tan \alpha \right) \cos \alpha = \\ &= \rho g \left( H \cos \alpha + \frac{L}{2} \sin \alpha \right) = 1532 \text{ Pa}. \end{aligned}$$



- [19] Prima dell'inserimento dell'acqua si ha equilibrio tra forza peso e spinta di Archimede dovuta al solo mercurio, da cui si ricava la densità del corpo (parallelepipedo):

$$\rho_{Hg} S \frac{2}{3} hg = \rho_{\text{corpo}} Shg \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{corpo}} = \frac{2}{3} \rho_{Hg}$$

con  $S$  l'area di base del parallelepipedo. Dopo l'inserimento dell'acqua la spinta di Archimede è determinata dal contributo dei due liquidi (immiscibili):

$$\rho_{Hg} S x g + \rho_{H_2O} S (h - x) g = \rho_{\text{corpo}} Shg,$$

da cui si ricava:

$$x = h \left( \frac{\rho_{\text{corpo}} - \rho_{H_2O}}{\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}} \right) = 12.8 \text{ cm.}$$

È possibile calcolare anche l'innalzamento subito dal parallelepipedo:

$$\Delta h = \frac{2}{3} h - x \simeq 0.53 \text{ cm.}$$

- [20] Applicando la legge di Bernoulli allo strato d'acqua si ha che

$$p + \rho_1 gh_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_0 + \rho_1 gh_0 + \frac{1}{2} \rho_1 v^2$$

dove  $v_1 = 0 \text{ m/s}$  è la velocità iniziale dell'acqua,  $h_0 = 0 \text{ m}$  è la quota del fondo,  $p_0$  è la pressione atmosferica e  $p = p_0 + \rho_2 gh_2$  è la pressione sulla superficie di separazione tra i due elementi. Pertanto:

$$v = \sqrt{2g \left( h_1 + h_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)} = 3 \text{ m/s.}$$

- [21] Applicando la legge di Bernoulli si ha:

$$\rho g h_0 = \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}.$$

Il tempo che impiega il getto per toccare la superficie è del tavolo  $t^* = \sqrt{2h_1/g}$ ;

il punto di impatto è a una distanza,  $L$  dal recipiente pari a:

$$L = vt^* = \sqrt{4h_1(h_0 - h_1)}.$$

Per determinare la massima distanza,  $L_M$ , si impone

$$\frac{dL}{dh_1} = \frac{1}{2} \frac{4(h_0 - 2h_1)}{\sqrt{4h_1(h_0 - h_1)}} = 0$$

da cui,  $h_1 = h_0/2 = 25$  cm e  $L_M = h_0 = 50$  cm.

- [22] Durante lo svuotamento, per la conservazione della massa, detta  $v_0$  la velocità di uscita dell'acqua dal forellino e  $t$  il tempo di svuotamento, si ha:  $\rho(v_0 t)s = \rho V$  quindi  $v_0 = V/(ts)$ . Il lavoro effettuato per lo svuotamento può essere considerato pari al lavoro necessario per portare tutta la massa del liquido da ferma alla velocità  $v_0$  quindi

$$L = \frac{1}{2}\rho V v_0^2 = \frac{1}{2}\rho \frac{V^3}{t^2 s^2}.$$



# Primo principio della termodinamica

## 7.1 Esercizio guida – Calorimetria

### Teoria

Nello scambio termico, che porta più corpi da temperature  $T_i$  inizialmente diverse a una stessa temperatura di equilibrio  $T^*$ , senza che si compia lavoro (trasformazioni a volume costante), quest'ultima è data da

$$T^* = \frac{\sum_i m_i c_i T_i}{\sum_i m_i c_i}$$

essendo le quantità di calore complessivamente scambiate pari a zero,

$$\sum_i Q_i = \sum_i m_i c_i (T^* - T_i) = 0.$$

Se lo scambio termico avviene per conduzione di calore lungo una sbarra lunga  $L$  di sezione  $A$ , il flusso termico è

$$\dot{Q} = K \frac{A}{L} (T_2 - T_1) \tag{7.1}$$

con  $K$  coefficiente di conduzione e  $T_{1,2}$  le temperature alle sezioni terminali della sbarra.

### Argomento

Due sorgenti termiche sono collegate da più sbarre, o tratti di sbarre, omogenee, per ciascuna delle quali le varie grandezze sono indicate con un pedice  $(\cdot)_i$  ed eventualmente un apice  $(\cdot)^s$  o  $(\cdot)^p$  a indicare se sono collegate tra loro in serie o in parallelo, rispettivamente.

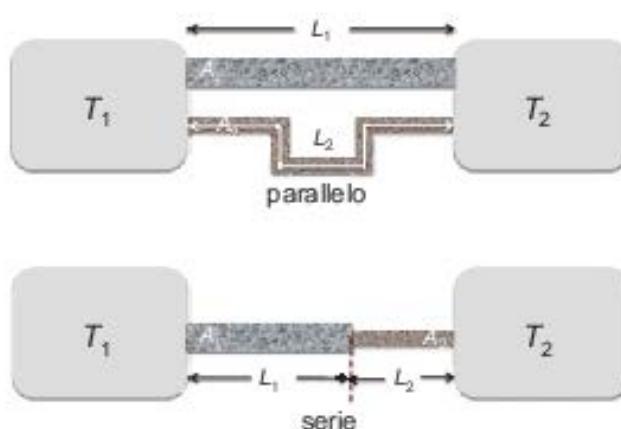
*Flussi termici  
per  
collegamenti in  
serie o in  
parallelo*

Il flusso di calore che passa dalla sorgente a temperatura più elevata  $T_1$  a quella più bassa  $T_2$  nel caso di più sbarre in parallelo è eguale alla somma del flusso passante in ogni sbarra:

$$\dot{Q} = \sum_1 \dot{Q}_1 = \sum_i K_i \frac{A_i}{L_i} (T_1 - T_2).$$

Nel caso di più tratti di sbarre in serie, il flusso è eguale in ogni sezione della serie e, dette  $T_{iI}$  e  $T_{iF}$  le temperature agli estremi ( $I$ , iniziale,  $F$ , finale) dell' $i$ -esimo tratto, si ha per ogni  $i$

$$\dot{Q}_i = \dot{Q} = K_i \frac{A_i}{L_i} (T_{iI} - T_{iF}). \quad (7.2)$$



Due sorgenti termiche  $T_1$  e  $T_2$  sono collegate tra loro da sbarre, o tratti di sbarre. In alto: collegamento in parallelo; in basso: collegamento in serie

*Nel caso della conduzione in parallelo, si cerca la condizione per la quale il flusso in una sbarra sia  $\alpha$  volte quello di un'altra che, nel caso di problema inverso, diviene la determinazione della sezione o della lunghezza di una sbarra o del suo coefficiente di conduzione – in assoluto, se sono note le grandezze dell'altra, o in rapporto relativo, se lo sono solo in parte –.*

La soluzione prescinde dall'esserci altre sbarre collegate tra le sorgenti, in quanto il flusso termico all'interno di ogni sbarra dipende solo dalle temperature agli estremi di queste, cioè dalle temperature delle sorgenti. Si applica, quindi, l'Eq. (7.1)

$$\dot{Q}_a = K_a \frac{A_a}{L_a} (T_2 - T_1) = \alpha \dot{Q}_b = \alpha K_b \frac{A_b}{L_b} (T_2 - T_1)$$

per le due sbarre  $a$  e  $b$ . Con questa stessa equazione si determinano i parametri richiesti ( $A$ ,  $L$  o  $K$ ) per i problemi inversi, qualora siano noti il valore del corrispondente parametro dell'altra sbarra e i rapporti di tutti gli altri. Per la lunghezza  $L_b$ , per es.

$$L_b = \alpha \frac{A_b}{A_a} \frac{K_b}{K_a} L_a.$$

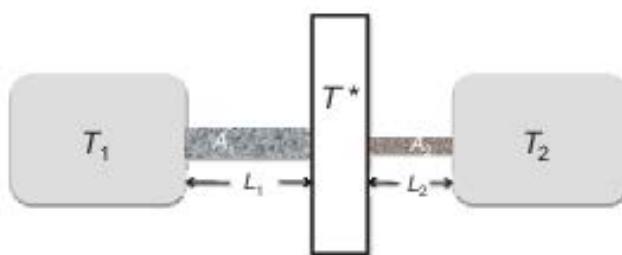
Per la determinazione del rapporto tra due parametri ( $L_a/L_b$  ecc.) è sufficiente la conoscenza dei soli rapporti tra le altre grandezze; per es.

$$\frac{L_b}{L_a} = \frac{A_b}{A_a} \frac{K_b}{K_a}.$$

*Nel caso della conduzione in serie, si cercano le temperature intermedie ai capi di ogni tratto di sbarra.*

*Si confronta il risultato con quello relativo al caso in cui tra due sorgenti si interpone un corpo con due sbarre che collegano l'una la prima sorgente col corpo intermedio e l'altra con la seconda (Fig. 7.1).*

Nel caso di una serie di tratti di sbarre in serie, applicando l'Eq. (7.2) a un numero totale  $n$  di tratti, le temperature intermedie incognite sono  $n - 1$ , in quanto la temperatura finale di ogni tratto ( $T_{iF}$ ) è la stessa della temperatura iniziale del tratto



**Fig. 7.1.** Due sorgenti termiche  $T_1$  e  $T_2$  sono collegate tra loro da una serie di tratti di sbarre in serie

successivo ( $T_{i+1I}$ ), per es. per il tratto  $i$  e  $i + 1$ :

$$K_i \frac{A_i}{L_i} (T_{iI} - T_{iF}) = K_{i+1} \frac{A_{i+1}}{L_{i+1}} (T_{iF} - T_{i+1F}).$$

Poiché le equazioni sono esattamente in numero di  $n - 1$ , il problema è risolto.

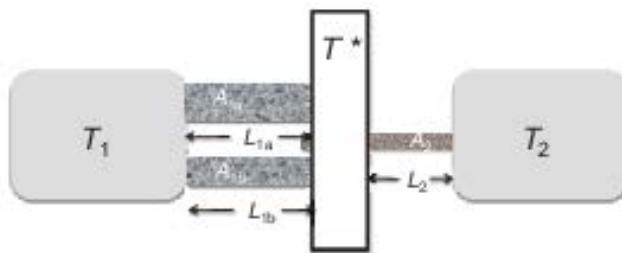
Per i problemi inversi, anche in questo caso sarà sufficiente conoscere i rapporti tra le varie grandezze omogenee in questione per determinare il valore del rapporto incognito tra due di queste: per es. si considerano i rapporti dei parametri dei vari tratti con quelli del primo tratto e resta incognito il rapporto di un parametro (per es.  $L_i/L_1$ ), essendo noti i rapporti di tutti gli altri  $A$  e  $K$ .

Nel caso in cui ci fosse un corpo posto tra le due sorgenti e a queste collegato termicamente con due sbarre (Fig. 7.1), in condizione di equilibrio esso si porta a una temperatura per la quale tanto calore riceve dalla prima sorgente, quanto ne cede alla seconda. La temperatura  $T^*$  del corpo soddisfa, pertanto, la relazione

$$K_1 \frac{A_1}{L_1} (T_1 - T^*) = K_2 \frac{A_2}{L_2} (T^* - T_2)$$

identica a quella che si avrebbe anche in assenza del corpo intermedio, qualora le due sbarre fossero collegate tra loro direttamente in serie. Da essa si ottiene:

$$T^* = \frac{K_1 \frac{A_1}{L_1} T_1 + K_2 \frac{A_2}{L_2} T_2}{K_1 \frac{A_1}{L_1} + K_2 \frac{A_2}{L_2}}.$$



**Fig. 7.2.** Una sorgente termica  $T_1$  è collegata tramite due sbarre in parallelo a un corpo a temperatura  $T^*$  il quale è collegato con una sbarra con la sorgente  $T_2$  ( $T_2 < T^* < T_1$ )

Possibili estensioni a problemi inversi richiedono solo di mutare l'algebra del procedimento.

*Ulteriore estensione del problema è il collegamento di due sbarre in parallelo tra la prima sorgente e un corpo intermedio e un'ulteriore sbarra che collega questo con la seconda sorgente (Fig. 7.2).*

La soluzione richiede un'opportuna combinazione dei risultati precedentemente esposti. Come per il caso precedente, in condizione di equilibrio il corpo intermedio si porta a una temperatura per la quale tanto calore riceve dalla prima sorgente, quanto ne cede alla seconda. Dalla prima sorgente il flusso di calore è somma dei flussi delle due sbarre 1a e 1b ad essa collegate

$$\left[ K_{1a} \frac{A_{1a}}{L_{1a}} + K_{1b} \frac{A_{1b}}{L_{1b}} \right] (T_1 - T^*) = K_2 \frac{A_2}{L_2} (T^* - T_2)$$

da cui

$$T^* = \frac{\left( K_{1a} \frac{A_{1a}}{L_{1a}} + K_{1b} \frac{A_{1b}}{L_{1b}} \right) T_1 + K_2 \frac{A_2}{L_2} T_2}{K_{1a} \frac{A_{1a}}{L_{1a}} + K_{1b} \frac{A_{1b}}{L_{1b}} + K_2 \frac{A_2}{L_2}}.$$

## 7.2 Esercizio guida – Trasformazioni politropiche

### Teoria

Una trasformazione infinitesima, per una certa quantità di gas rappresentata da un punto nello spazio delle fasi  $p, V, T$ , può essere sempre descritta mediante il differenziale di una politropica

$$pV^k = \text{cost.}$$

pur di scegliere opportunamente  $k$ . Una qualunque trasformazione finita non è invece rappresentabile in generale mediante una politropica. Vale

$$kpdV + Vdp = 0.$$

Il calore molare in una politropica è

$$c_k = C_V + \frac{R}{1-k}.$$

Per le isobare:  $k = 0$

per le isotermi:  $k = 1$

per le adiabatiche:  $k = \gamma$

per le isocore:  $k \rightarrow \infty$ .

### Argomento

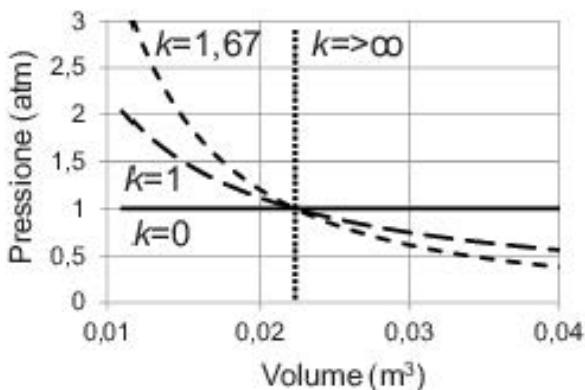
$n$  moli di gas, di forma molecolare nota – monoatomica o biatomica – sono contenute in un recipiente cilindrico munito di un pistone scorrevole senza attrito. Posto l'asse del cilindro in verticale con la base dove scorre il pistone in posizione superiore, si sparge su questo una certa quantità di materiale granulato sottile, tipo sabbia. Partendo da condizioni di equilibrio, si varia di una piccola quantità la massa della sabbia sovrapposta e si studia la trasformazione (differenziale) del gas. Il calore scambiato dal gas con l'esterno è lasciato come condizione libera dipendente dalle specifiche indicazioni del problema.

*Trasformazioni  
politropiche  
per variazioni  
differenziali dei  
parametri di  
stato*

Lo stato di equilibrio del gas è rappresentato da un punto nello spazio delle fasi  $p, V, T$ , con  $n$  fissato. Una trasformazione politropica è descritta da una funzione tra i parametri pressione e volume del gas, data da  $pV^k = \text{cost}$ . Nella figura in basso sono riportate sul piano  $pV$  le trasformazioni politropiche per quattro valori diversi del parametro  $k$  ( $k = 0$  isobara,  $k = 1$  isoterna,  $k = 1,67$  adiabatica monoatomico,  $k = \infty$  isocora) per il caso di una mole di gas attorno allo stato con  $p = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 273 \text{ K}$  e  $V = 0.022 \text{ m}^3$ . Nell'intorno di un punto una qualunque trasformazione può approssimarsi con una politropica o, che è lo stesso, ogni trasformazione infinitesima è una politropica. Infatti, il valore della derivata della funzione  $p(V) = \text{cost}/V^k$  specifica la direzione nella quale si muove il punto rappresentativo del sistema in una trasformazione infinitesima attorno al punto di equilibrio. Esplicitando la derivata e indicando col pedice  $(0)$  i valori dei parametri nel punto di equilibrio, si ha

$$\left( \frac{dp}{dV} = -k \frac{p_0}{V_0} \right).$$

Variando  $k$ , si può ottenere un qualunque valore della derivata, quindi una qualunque trasformazione politropica infinitesima.



Trasformazioni politropiche  $pV^k = \text{cost}$  per quattro diversi valori del parametro  $k$

*Si consideri il caso in cui il cilindro con il gas contenuto all'interno sia posto in un ambiente termostatato, la cui temperatura può essere variata e fissata a piacimento. Dalla condizione di equilibrio iniziale, coi valori  $p_0, V_0, T_0$ , si rimuova una piccola quantità  $\Delta m$  di sabbia – tale da potersi considerare alla stregua di un infinitesimo – da sopra il pistone, di area  $A$  e massa  $M$ . In una prima fase la trasformazione avvenga senza variazioni di temperatura del termostato, in un secondo caso si pensi che la temperatura vari di un piccola quantità  $\Delta T$  – anch'essa tale da potersi considerare alla stregua di un infinitesimo. Per la trasformazione infinitesima realizzata si ha una dipendenza del parametro  $k$  della politropica in funzione della variazione  $\Delta T$ .*

*Una trasformazione politropica finita richiede che il valore di  $k$  si mantenga sempre lo stesso durante tutta la trasformazione.*

Nel primo caso la trasformazione avviene isotermicamente, quindi con calore molare infinito, cui corrisponde un valore  $k = 1$ , secondo l'espressione di una isoterma  $pV = \text{cost.}$

Quando la temperatura varia di  $\Delta T$ , il primo principio della termodinamica si scrive

$$nc_k\Delta T = n \left( c_v + \frac{R}{1-k} \right) \Delta T = nc_v\Delta T + p\Delta V$$

e successivamente

$$n \frac{R}{1-k} \Delta T = p\Delta V. \quad (7.2)$$

Differenziando l'equazione di stato e scrivendo per la variazione di pressione

$$\Delta p = \frac{g}{A} \Delta m$$

con  $g$  accelerazione di gravità, si ha:

$$p\Delta V = -V\Delta p + nR\Delta T = -V \frac{g}{A} \Delta m + nR\Delta T \quad (7.3)$$

che, inserita nell'Eq. (7.2) fornisce il valore di  $k$ :

$$k = \frac{gV\Delta m}{gV\Delta m - nAR\Delta T}.$$

Affinché il valore di  $k$  si mantenga sempre eguale durante un'intera trasformazione finita, occorre che le variazioni  $\Delta m$  e  $\Delta T$  mantengano la relazione sopra dedotta, cioè che, mentre si rimuove la sabbia da sopra il pistone, si vari al contempo la temperatura del termostato secondo la legge indicata.

*Nelle stesse condizioni precedenti, si rimuove una quantità finita di sabbia di massa  $m$ , variando nel contempo la temperatura fino a un valore  $T_1$  in un modo tale da far eseguire al gas una politropica finita. In questo caso le variazioni delle grandezze, precedentemente indicate come differenziali, sono variazioni finite e non si può fare uso per esse dell'espressione differenziale data dall'Eq. (7.3).*

Si conoscono tutti i parametri dello stato finale indicati con il pedice  $(1)$ :

$$p_1 = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{g}{A} \Delta m \quad V_1 = \frac{nRT_1}{p_0 + \frac{g}{A} \Delta m} \quad T_1.$$

Poiché per la politropica con  $k$  da determinare è

$$p_0 V_0^k = p_1 V_1^k$$

si ha successivamente

$$k = \frac{\ln \frac{p_0}{p_1}}{\ln \frac{V_1}{V_0}} = \frac{\ln \frac{p_0}{p_0 + \frac{g}{A} \Delta m}}{\ln \frac{nRT_1}{\left(p_0 + \frac{g}{A} \Delta m\right) V_0}}.$$

### 7.3 Domande di verifica

- Descrivere sinteticamente i modi secondo cui il calore si trasmette tra corpi a diversa temperatura.
- Scrivere e giustificare l'espressione della temperatura di equilibrio tra tre corpi di differente temperatura portati a contatto.
- Descrivere l'esperienza di Joule intesa a misurare l'equivalente meccanico della caloria.
- Illustrare cosa si intende per l'equivalente meccanico della caloria.
- Definire il calore specifico di una sostanza.
- Dimostrare che i calori molari di un gas per trasformazioni a pressione e a volume costante differiscono per il valore della costante universale  $R$ .
- Giustificare il motivo per cui i gas vengono scelti come privilegiate sostanze termometriche per la realizzazione dei termometri.
- Spiegare perché la temperatura assoluta è un'indicazione dell'energia cinetica media delle particelle di un sistema gassoso.
- Descrivere qualitativamente l'andamento del valore del calore molare di un gas biatomico al variare della temperatura.
- Illustrare il concetto di trasformazione termodinamica reversibile.
- Ricavare la relazione che lega le grandezze pressione e temperatura di un gas perfetto negli stati iniziali e finali di una trasformazione adiabatica reversibile.
- Illustrare l'esperienza di Joule con cui si dimostra che l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura assoluta.
- Dimostrare perché il calore molare di un gas biatomico varia al variare della temperatura, seguendo un andamento a gradinata, con discontinuità localizzate in corrispondenza di ben determinate temperature.
- Ricavare l'espressione del calore molare di un gas perfetto in una trasformazione politropica del tipo  $pV^k = \text{cost.}$

- Scrivere l'espressione della pendenza della curva di una trasformazione adiabatica reversibile sul piano di Clapeyron, in funzione della pressione.
- Ricavare l'espressione del calore molare a volume costante di un gas perfetto monoatomico  $c_v = 3/2R$ .
- Dimostrare che l'espressione generale del calore molare per un gas perfetto assume il valore nullo nel caso di trasformazioni adiabatiche.
- Illustrare quali caratteristiche differenziano un gas reale di Van der Waals dal modello del gas perfetto.
- Scrivere e illustrare l'espressione dell'equazione di stato dei gas reali di Van der Waals.

## 7.4 Esercizi

- [1] Una mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura  $T_1 = 300\text{ K}$  compie un'espansione adiabatica reversibile che ne aumenta il volume dal valore iniziale  $V_1 = 1\text{ m}^3$  al valore finale  $V_2 = 2\text{ m}^3$ . Calcolare la temperatura finale del gas e il lavoro da esso compiuto nell'espansione.
- [2] Una mole di gas perfetto biatomico esegue un ciclo reversibile costituito da una compressione isoterma  $AB$ , da un'espansione isobara  $BC$  e da un'espansione adiabatica  $CA$ . Calcolare il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo essendo noti i valori di  $T_B$ ,  $V_B$  e  $T_C$ .
- [3] Tre recipienti esattamente eguali contengono tre quantità d'acqua di masse  $m_1 = 3\text{ kg}$ ,  $m_2 = 5\text{ kg}$  e  $m_3 = 9\text{ kg}$  alle temperature  $t_1 = 15^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 29^\circ\text{C}$  e  $t_3 = 37^\circ\text{C}$ , rispettivamente. Dopo avere versato, senza dispersione esterna di calore, i contenuti del primo e del secondo recipiente nel terzo, si misura in questo una temperatura di equilibrio dell'acqua pari a  $t' = 30.6^\circ\text{C}$ . Si determini la capacità termica  $C$  dei recipienti.
- [4] Un recipiente rigido di capacità termica  $C = 5\text{ cal}/^\circ\text{C}$  contenente  $n = 30$  moli di un gas biatomico alla temperatura  $T = 300\text{ K}$  viene immerso in un calorimetro e, a equilibrio raggiunto, si constata che quest'ultimo ha acquisito

una quantità di calore pari a  $Q = 50 \text{ cal}$ . Si determini la variazione relativa di pressione all'interno del recipiente.

- [5] Due moli di gas perfetto monoatomico vengono compresse secondo la politropica reversibile  $pV^k = \text{cost.}$  facendo sul gas un lavoro di  $1000 \text{ J}$ . Determinare il coefficiente della politropica  $k$  sapendo, che a causa della compressione, la temperatura del gas passa da  $T_0 = 400 \text{ K}$  a  $2T_0$ .
- [6] Una mole di gas perfetto viene riscaldata reversibilmente mentre il volume varia in modo che  $T = \alpha p^2$ , con  $\alpha$  costante. Determinare il lavoro compiuto dal gas sapendo che la temperatura del gas passa dal valore iniziale  $T_0$  al valore finale  $4T_0$ .
- [7] Una massa  $m_2 = 50 \text{ g}$  di ossigeno molecolare ( $M_{O_2} = 32$ ) viene compressa dentro un recipiente rigido dove sono già inizialmente presenti  $n_1 = 2$  moli dello stesso gas alla pressione  $p_1 = 2 \text{ atm}$  e alla temperatura  $T_1 = 380 \text{ K}$ . Se al termine dell'operazione la temperatura del gas è  $T_F = 320 \text{ K}$ , si chiede quale sia la pressione che esso eserciterà sulle pareti del recipiente.
- [8] Due moli di gas perfetto monoatomico compiono una trasformazione politropica espressa dalla relazione  $p\sqrt{V} = \text{cost.}$  facendo un lavoro  $L = 100 \text{ J}$ . Determinare la variazione di temperatura del gas.
- [9] 10 moli di gas perfetto vengono compresse isotermicamente e reversibilmente da un volume iniziale  $V_1 = 1 \text{ m}^3$  a un volume finale  $V_2$ . Il gas è contenuto in un recipiente adiabatico e può scambiare calore unicamente con una massa  $m = 0.1 \text{ kg}$  di ghiaccio fondente alla temperatura  $t = 0^\circ \text{C}$ . Per quale valore di  $V_2$  si ha la completa fusione del ghiaccio? (Calore latente di fusione del ghiaccio  $\lambda = 79.7 \text{ kcal/kg}$ ).
- [10] Un gas ideale monoatomico, in equilibrio termico alla temperatura  $T_A = 320 \text{ K}$ , è contenuto in un recipiente adiabatico. Successivamente esso si espande irreversibilmente occupando un volume  $V_B = 3V_A$  e facendo un lavoro  $L = 150 \text{ J/mole}$ ; viene poi compresso adiabaticamente e reversibilmente fino al volume finale  $V_C = V_A$ . Determinare la temperatura finale del gas.
- [11] Un gas monoatomico si espande irreversibilmente all'interno di un calorimetro e si misura tra prima e dopo l'espansione una variazione di temperatura pari a

$\Delta T_{\text{irr}} = 15^\circ\text{C}$  e il gas assorbe una quantità di calore  $Q = 38.7 \text{ cal}$ . Con lo stesso lavoro compiuto dal gas durante l'espansione, il gas viene ricompresso, adiabaticamente e reversibilmente, riconducendolo allo stesso volume iniziale; durante questa trasformazione il gas si riscalda di  $\Delta T_{\text{adiab}} = 10^\circ\text{C}$ . Si chiede quante sono le molte del gas.

- [12] Una mole di gas perfetto con esponente adiabatico  $\gamma$  effettua una trasformazione per la quale  $p = aT^\alpha$  con  $a$  e  $\alpha$  costanti. Trovare a) il lavoro fatto dal gas per un incremento di temperatura  $\Delta T$ , b) la capacità termica del gas durante il processo. Per quale valore di  $\alpha$  la capacità termica diventa negativa?
- [13] Un gas perfetto esegue una trasformazione adiabatica reversibile nella quale il gas triplica la pressione e dimezza il volume. Determinare il valore di  $\gamma = c_p/c_v$  del gas.

## 7.5 Soluzioni degli esercizi

- [1] Per una trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto, si ha:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

con  $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  per un gas perfetto monoatomico. Quindi:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \simeq 189 \text{ K}.$$

$$L = -\Delta U = n c_v (T_1 - T_2) = n \frac{3}{2} R (T_1 - T_2) \simeq 1384 \text{ J}.$$

- [2]

$$L_{AB} = RT_B \ln \frac{V_B}{V_A}.$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_A^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad V_A = V_C \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{con } \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

$$\text{Poichè: } \frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \quad \Rightarrow \quad V_C = V_B \frac{T_C}{T_B},$$

e quindi:

$$L_{AB} = RT_B \ln \left( \frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Si ha pertanto:

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = p_B V_C - p_B V_B = R(T_C - T_B);$$

$$L_{CA} = -\Delta U_{CA} = \frac{5}{2}R(T_C - T_B).$$

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = RT_B \ln \left( \frac{T_B}{T_C} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{7}{2}R(T_C - T_B).$$

[3] Per il raggiungimento dell'equilibrio:

$$\sum_i Q_i = 0$$

dove ogni  $Q_i = (c_{\text{acqua}} m_i + C)(t' - t_i)$  vale la somma del calore scambiato dal recipiente e dalla quantità d'acqua in esso contenuto. Quindi:

$$\sum_i (c_{\text{acqua}} m_i + C)(t' - t_i) = 0,$$

da cui

$$C = -\frac{\sum_i m_i(t' - t_i)}{\sum_i(t' - t_i)} c_{\text{acqua}} = 0.26 \text{ Cal}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

[4] Lo scambio di calore avviene a pressione costante:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{T} \left( \frac{Q}{C + nc_v} \right) = -1.08\%.$$

[5] Dal primo principio della termodinamica:

$$nc_k(2T_0 - T_0) = L + nc_v(2T_0 - T_0) = -10^3 \text{ J},$$

da cui:

$$c_k = \frac{L + nc_v T_0}{n T_0} = 11.221 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

Poiché

$$c_k = c_v + \frac{R}{1-k} \quad \Rightarrow \quad k = 1 - \frac{R}{c_k - c_v} = 7.65$$

[6]

$$T = \frac{pV}{nR} = \alpha p^2 \quad \Rightarrow \quad V = \alpha nRp \quad \Rightarrow \quad dV = \alpha nRdp;$$

quindi

$$L \int p dV = \int_{\sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}}^{\sqrt{\frac{4T_0}{\alpha}}} \alpha nRp dp = \frac{3}{2} RT_0.$$

[7] Per il gas nella condizione finale si scrive

$$p_F V = (n_1 + n_2)RT_F$$

e quindi:

$$p_F = \frac{(n_1 + n_2)RT_F}{V} = \frac{(n_1 + n_2)T_F}{n_1 T_I} p_0 = 4.95 \text{ atm.}$$

[8] La trasformazione compiuta dal gas è una politropica del tipo  $pV^k$ , con  $k = 1/2$ :

$$Q - L = \Delta U \quad \Rightarrow \quad nc_k \Delta T - L = nc_v \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{L}{n(c_k - c_v)}.$$

Poiché

$$c_k = c_v + \frac{R}{1-k} \quad \Rightarrow \quad c_k - c_v = \frac{R}{1-k} = 2R \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{L}{4R} = 3 \text{ K.}$$

[9] Il calore necessario a fondere la massa di ghiaccio è:  $Q = m\lambda$ . Applicando il principio della termodinamica al gas, tenendo presente che per esso  $\Delta U = 0$  perché la trasformazione è isoterma alla temperatura  $T = 273 \text{ K}$ , si ha:

$$Q = L = \int_1^2 pdV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Quindi

$$m\lambda = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow V_2 = V_1 \exp\left(-\frac{m\lambda}{nRT}\right) = 0.23 \text{ m}^3.$$

- [10] Utilizzando la prima legge della termodinamica per l'espansione irreversibile  $AB$ , si ha:

$$nc_v(T_B - T_A) + nL = 0 \Rightarrow T_B = T_A - \frac{L}{c_v} = T_A - \frac{2L}{3R}.$$

Tenuto quindi conto dell'equazione della trasformazione adiabatica  $BC$ , può scrivere:

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{(\gamma-1)} = T_B 3^{(\gamma-1)}$$

da cui

$$T_C = \left(T_A - \frac{2L}{3R}\right) 3^{(\frac{5}{3}-1)} = 640.5 \text{ K}.$$

- [11] Per la prima trasformazione irreversibile si può scrivere:

$$Q_{\text{irr}} = nc_v \Delta T_{\text{irr}} + L_{\text{irr}},$$

e per la seconda trasformazione adiabatica:

$$Q_{\text{adiab}} = 0 = nc_v \Delta T_{\text{adiab}} + L_{\text{adiab}}.$$

Poiché è  $L_{\text{irr}} = -L_{\text{adiab}}$ , sarà

$$Q_{\text{irr}} - nc_v \Delta T_{\text{irr}} = +nc_v \Delta T_{\text{adiab}} \Rightarrow n = \frac{Q_{\text{irr}}}{c_v (\Delta T_{\text{irr}} + \Delta T_{\text{adiab}})} = 0.52.$$

- [12] Il lavoro  $L = \int pdV$  può essere espresso tutto in funzione della temperatura dal momento che per una mole  $V = RT/p$  quindi  $dV = RdT/p - RTdp/p^2$  per cui a) il lavoro sarà:

$$L = \int pdV = \int RdT - \int \frac{RT}{p} dp = \int RdT - \int R\alpha dT = R(1-\alpha)\Delta T$$

dove si è usata la relazione fornita,  $p = aT^\alpha$  e  $dp = a\alpha T^{\alpha-1}dT$ .

b) la capacità termica per una mole è

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{dL}{dT} = c_v + R(1 - \alpha) = \frac{R}{\gamma - 1} + R(1 - \alpha).$$

Quindi  $C < 0$  per  $\alpha > \gamma/(\gamma - 1)$ .

[13] Data l'equazione di un'adiabatica reversibile di un gas perfetto, si scrive:

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma,$$

essendo  $p_0$  e  $V_0$  la pressione e il volume iniziale del gas e  $\gamma = c_p/c_v$ . Dai dati del problema, al termine della trasformazione deve avversi:

$$3p_0 \left( \frac{V_0}{2} \right)^\gamma = p_0 V_0^\gamma \quad \Rightarrow \quad 2^\gamma = 3 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585.$$



# Secondo principio della termodinamica

## 8.1 Esercizio guida – Cicli termodinamici

### Teoria

Compie un ciclo termodinamico un sistema termodinamico che esegua una successione ininterrotta di trasformazioni, al termine delle quali si ritrova nello stesso stato da cui è iniziata la sequenza. Se tutte le trasformazioni costituenti il ciclo sono reversibili, cioè eseguite con le grandezze intensive interne al sistema eguali a quelle esterne, il ciclo è detto reversibile e tale è anche quello eseguito dall'Universo esterno. In tal caso non vi è alcuna variazione di entropia né per il sistema, né per l'Universo esterno. Se le trasformazioni del sistema non sono tutte reversibili, il ciclo è irreversibile: la variazione della sua entropia è, comunque, ancora nulla, mentre è variata, in positivo, quella dell'Universo esterno.

Come per l'entropia, anche per l'energia interna del sistema, la variazione dopo un intero ciclo è nulla.

Calore scambiato e lavoro eseguito dal sistema vengono calcolati con le formule usuali e i singoli contributi si sommano per dare i valori complessivi, scambiati o eseguiti, nell'intero ciclo.

Per un gas ideale in una trasformazione reversibile, le espressioni sono:

$$L = \int_{\text{iniziale}}^{\text{finale}} p dV \quad (8.1)$$

$$Q = \Delta U + L = nc_v(T_{\text{finale}} - T_{\text{iniziale}}) + \int_{\text{iniziale}}^{\text{finale}} p dV \quad (8.2)$$

avendo usato le notazioni invalse per le varie grandezze fisiche.

### Argomento

Un sistema termodinamico, costituito da un gas perfetto, esegue un ciclo termodinamico costituito da una serie di trasformazioni parziali, reversibili o irreversibili, e si ricercano le quantità di calore scambiato con l'esterno, il lavoro complessivamente eseguito e le variazioni di entropia sia del sistema, sia dell'ambiente esterno di interazione. Si stimano i rendimenti del ciclo ovvero, nei problemi inversi, si ricavano alcune grandezze delle trasformazioni dai rendimenti.

*Lavoro e calore  
in  
trasformazioni  
di gas:  
dipendenza dai  
parametri di  
stato*

In un ciclo eseguito da un gas perfetto, costituito da una serie di trasformazioni, il lavoro e la quantità di calore totale forniti sono calcolati separatamente per ciascuna trasformazione e successivamente sommati. La variazione nulla dell'entropia del sistema in un ciclo fornisce informazioni parziali sulle grandezze.

*Un numero  $n$  di moli di un gas biammico esegue un ciclo termodinamico (Fig. 8.1) costituito da una compressione isobara ( $AB$ ), seguita da un'espansione adiabatica ( $BC$ ), da un'espansione isotermica ( $CD$ ) e da un'isocora ( $DA$ ) che riporta il gas alle condizioni iniziali. Si determinano le quantità di calore scambiate dal sistema con l'ambiente esterno e il lavoro compiuto in funzione della sola temperatura. Si verifica la costanza dell'entropia nel ciclo, valutandone le variazioni ramo per ramo.*

Le espressioni delle grandezze calore e lavoro sono date dalle Eq. (8.1) e (8.2) che,

esplicitate per le singole trasformazioni del ciclo, divengono successivamente quelle sotto riportate.

- Trasformazione isobara  $AB$

$$L_{AB} = \int_A^B pdV = p(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) < 0$$

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = \frac{7}{2}nR(T_B - T_A) < 0$$

Per la variazione di entropia in questa trasformazione si ha:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = nc_p \int_A^B \frac{dT}{T} = \frac{7}{2}nR \ln \frac{T_B}{T_A} < 0$$

- Trasformazione adiabatica  $BC$

$$L_{BC} = \int_B^C \frac{\text{cost}}{V^\gamma} dV = \text{cost} \frac{(V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma})}{1-\gamma} > 0$$

dove la costante vale

$$\text{cost} = p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma.$$

Si può scrivere, pertanto:

$$L_{BC} = \frac{p_C V_C - p_B V_B}{1-\gamma} = nR \frac{T_C - T_B}{1-\gamma}. \quad (8.3)$$

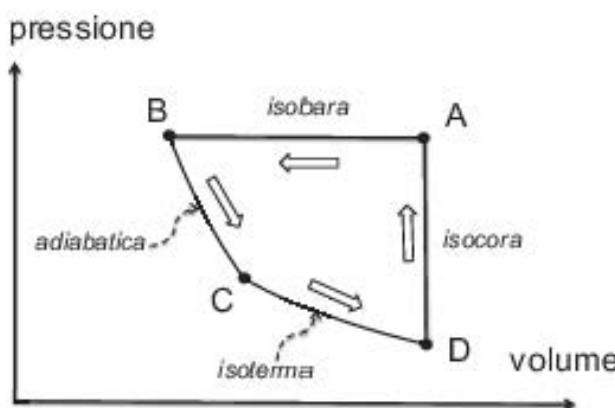


Fig. 8.1

Lo scambio di calore nell'adiabatica è nullo:

$$Q_{BC} = 0 \quad (8.4)$$

e così pure la variazione di entropia:

$$\Delta S_{BC} = 0$$

- Trasformazione isoterma  $CD$

La costanza della temperatura annulla la variazione di energia interna e, quindi, l'integrale del lavoro, pari al prodotto della temperatura per una funzione dei volumi, risulta eguale a quello del calore:

$$L_{CD} = Q_{CD} = nRT_C \int_C^D \frac{dV}{V} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} > 0.$$

Per la variazione di entropia si ha:

$$\Delta S_{CD} = \frac{Q_{CD}}{T_C} = nR \ln \frac{V_D}{V_C} > 0.$$

Per il rapporto dei volumi  $V_D/V_C$ , si riconglano i valori dei parametri nei successivi punti terminali delle trasformazioni, secondo l'eguaglianza:

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{1/(\gamma-1)} = \frac{T_A}{T_B} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{1/(\gamma-1)} = T_A T_B^{\gamma/(1-\gamma)} T_C^{1/(\gamma-1)}.$$

Quindi, per il lavoro e l'entropia si hanno le espressioni seguenti:

$$L_{CD} = nRT_C \left( \ln T_A + \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln T_B + \frac{1}{1-\gamma} \ln T_C \right)$$

$$\Delta S_{CD} = nR \left( \ln T_A + \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln T_B + \frac{1}{1-\gamma} \ln T_C \right).$$

- Trasformazione isocora  $DA$

Il lavoro è identicamente nullo

$$L_{DA} = 0;$$

di conseguenza, quantità di calore ed entropia sono date da

$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) > 0$$

$$\Delta S_{DA} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_D} > 0.$$

Il calcolo della variazione complessiva di entropia nel ciclo fornisce il valore nullo, come si deduce sostituendo le espressioni dedotte in precedenza:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} = \\ &= \frac{7}{2}nR \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \left( \ln T_A + \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln T_B + \frac{1}{1-\gamma} \ln T_C \right) + nc_v \ln \frac{T_A}{T_D} = 0\end{aligned}$$

avendo fatto uso delle relazioni tra calori molari e dei loro valori per un gas biatomico:

$$R = c_p - c_v \quad \text{e} \quad c_p = \frac{7}{2}R.$$

*Nell'esercizio precedente si sostituiscono le due trasformazioni, adiabatica (CD) e isoterma (DA) con un'unica trasformazione adiabatica passante per lo stato C e si confronta il rendimento del nuovo ciclo con quello del ciclo precedente, ipotizzando che il gas in entrambi i casi esegua i cicli in senso inverso a quello rappresentato,*

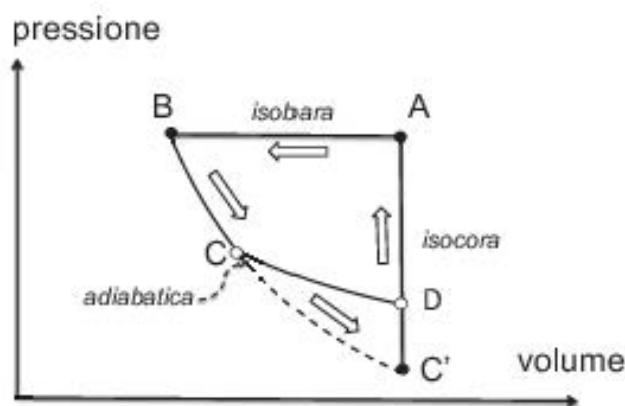


Fig. 8.2

fungendo da motore.

Nel caso del nuovo ciclo, in cui la trasformazione adiabatica  $BC'$  sostituisce l'adiabatica  $BC$  e l'isoterma  $CD$  del ciclo precedente (Fig. 8.2), si trova:

$$L_{BC'} = nR \frac{T'_C - T_B}{1 - \gamma} \quad \text{e} \quad Q_{BC'} = 0$$

avendo sostituito direttamente nell'Eq. (8.4) e nell'Eq. (8.3) lo stato  $C$  con lo stato  $C'$ . Per il rendimento dei cicli, si utilizzano tutte le espressioni precedenti per il lavoro eseguito e il calore scambiato, cambiate di segno per via della percorrenza inversa del ciclo rispetto a quanto sopra calcolato. Relativamente al lavoro, esso è dato dalla somma dei lavori eseguiti in tutte le trasformazioni; relativamente al calore, invece, si devono considerare solamente i calori scambiati dal gas, le cui espressioni risultino positive, una volta mutato il segno rispetto a quello ricavato più sopra. Si ottiene, pertanto:

$$\eta_1 = \left( \frac{L}{Q_{in}} \right)_1 = \frac{-(T_B - T_A) - \frac{T_C - T_B}{1 - \gamma} - T_C \ln \left[ T_A T_B^{\gamma/(1-\gamma)} T_C^{1/(\gamma-1)} \right]}{-\frac{7}{2}(T_B - T_A)}$$

e

$$\eta_2 = \left( \frac{L}{Q_{in}} \right)_2 = \frac{-(T_B - T_A) - \frac{T_{C'} - T_B}{1 - \gamma}}{-\frac{7}{2}(T_B - T_A)}.$$

Nei due cicli il calore fornito al sistema (denominatore) è il medesimo, mentre sono diverse le quantità di lavoro ottenuto (numeratore). Per confrontare i rendimenti, si considera la differenza tra le due quantità di lavoro:

$$L_1 - L_2 = -nR \frac{T_C - T_B}{1 - \gamma} - nRT_C \ln \left[ T_A T_B^{\gamma/(1-\gamma)} T_C^{1/(\gamma-1)} \right] + nR \frac{T_{C'} - T_B}{1 - \gamma}$$

Osservando che le due temperature  $T_C$  e  $T_{C'}$  sono eguali, si ottiene:

$$L_1 - L_2 = -nRT_C \ln \left[ T_A T_B^{\gamma/(1-\gamma)} T_C^{1/(\gamma-1)} \right],$$

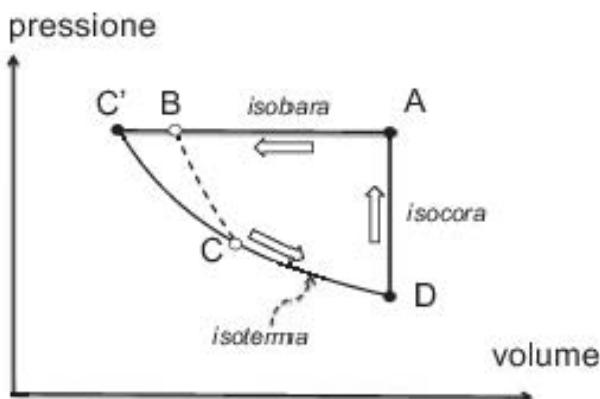


Fig. 8.3

che è un termine minore di zero. Ciò porta ad affermare che il rendimento del secondo ciclo è maggiore di quello del primo, come peraltro si può indurre intuitivamente considerando che nei tratti delle trasformazioni in cui i due cicli differiscono ( $CC'$  rispetto a  $CC'D$ ) il gas nel secondo ciclo raggiunge temperature inferiori.

*Un'ulteriore variante considera che, rispetto al primo ciclo, le due trasformazioni, adiabatica (BC) e isoterma (CD), siano sostituite da un'unica trasformazione isoterma passante per lo stato D e si ricava il rendimento del nuovo ciclo, ipotizzando che il gas lo esegua in senso inverso a quello rappresentato, fungendo da motore.*

Nel caso del nuovo ciclo, in cui la trasformazione isobara  $AC'$  sostituisce l'isobara  $AB$  del ciclo descritto inizialmente e l'isoterma  $C'D$  sostituisce l'adiabatica  $BC$  e l'isoterma  $CD$  (Fig. 8.3), si trova:

$$L_{AC'} = nR(T_C - T_A) < 0$$

$$Q_{AC'} = \frac{7}{2}nR(T_C - T_A) < 0$$

$$L_{C'D} = Q_{C'D} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_{C'}} > 0,$$

avendo fatto uso dei risultati precedenti, osservando che  $T_{C'} = T_C$  ed essendo

similmente

$$\frac{V_D}{V_{C'}} = T_A T_C^{\gamma/(1-\gamma)} T_C^{1/(\gamma-1)} = T_A T_C^{-1}.$$

Per il nuovo ciclo il rendimento si scrive quindi

$$\begin{aligned}\eta_3 = \left( \frac{L}{Q_{in}} \right)_3 &= \frac{-(T_C - T_A) - T_C \ln T_A T_C^{-1}}{-\frac{7}{2}(T_C - T_A)} = \\ &= \frac{2(T_C - T_A) - T_C(\ln T_C - \ln T_A)}{7(T_C - T_A)}.\end{aligned}$$

In questo caso il confronto tra il rendimento del nuovo ciclo e quello del ciclo inizialmente considerato non è di diretta deduzione, essendo diversi sia il lavoro compiuto dal gas nel ciclo, sia il calore assorbito.

## 8.2 Esercizio guida – Variazioni di entropia

### Teoria

L'entropia, funzione di stato di un sistema termodinamico, presenta variazioni unicamente definite dagli stati iniziale e finale della trasformazione, ma non da quelli intermedi – non quindi dalla specifica trasformazione. Le variazioni si calcolano, quindi, su una qualunque trasformazione, purché reversibile (nella quale i valori dei parametri intensivi sono uniformi in tutto il sistema in ogni istante della trasformazione) che porti il sistema dallo stato *A* allo stato *B* secondo l'espressione

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

ove *T* è la temperatura assoluta del sistema, coincidente istante per istante con quella dell'ambiente esterno (sorgente), essendo la trasformazione reversibile.

### Argomento

Un sistema termodinamico, costituito da una certa quantità di materiale omogeneo, nella fattispecie da un gas, passa da uno stato iniziale *A* a uno finale *B*, entrambi di equilibrio, cioè coi parametri intensivi univocamente definiti in tutto il sistema.

Si considerano diverse trasformazioni, reversibili e irreversibili, che conducano il sistema dal medesimo stato iniziale  $A$  al medesimo stato finale  $B$  e se ne calcolano le variazioni entropiche, verificando che, indipendentemente dal percorso della trasformazione nello spazio delle fasi, tali variazioni sono sempre le stesse. Per quanto riguarda le variazioni di entropia dell'ambiente esterno, esse sono, per trasformazioni reversibili, eguali e contrarie a quelle del sistema, mentre per trasformazioni irreversibili sono tali che, sommate a quelle del sistema, danno un valore positivo. Le leggi di trasformazione richiedono la conoscenza del primo principio della termodinamica applicato al caso dei gas.

*Le leggi di  
trasformazione  
per i gas  
perfetti nell'e-  
spressione del  
primo principio*

In una generica trasformazione reversibile di un gas perfetto, il primo principio assume la forma differenziale seguente

$$dQ = nc_v dT + pdV$$

con le notazioni d'uso per le grandezze coinvolte. La variazione di entropia si scrive di conseguenza

$$\begin{aligned}\Delta S_{AB} &= S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{nc_v dT + pdV}{T} \\ &= n \left( c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + R \ln \frac{V_B}{V_A} \right)\end{aligned}\tag{8.5}$$

Nel caso di trasformazioni politropiche reversibili, l'espressione del calore molare in funzione del parametro  $k$  della trasformazione, consente di esplicitare la variazione entropica come

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B nc_k \frac{dT}{T} = n \left( c_v + \frac{R}{1-k} \right) \ln \frac{T_B}{T_A}$$

ricordando che è

$$k = -\frac{\ln(p_B/p_A)}{\ln(V_B/V_A)}$$

*Un certo numero  $n$  di moli di un gas biammico è contenuto in un recipiente di volume fisso  $V$  in un ambiente a temperatura  $T_A$ , nel quale il gas si è termalizzato. La temperatura dell'ambiente esterno varia quindi lentamente, portandosi al valore  $T_B > T_A$ . Il gas viene quindi ricollocato in modo rapido nelle condizioni precedenti.*

*Si determinano le variazioni di entropia, considerando più possibili trasformazioni.*

La trasformazione considerata da  $A$  a  $B$  avviene tra due stati aventi lo stesso volume (Fig. 8.4a) e può considerarsi isocora reversibile, dato che avviene assai lentamente con il sistema sempre alla stessa temperatura dell'ambiente (sorgente) esterno. Il calcolo della variazione di entropia si può fare sull'isocora (reversibile) seguita dal gas

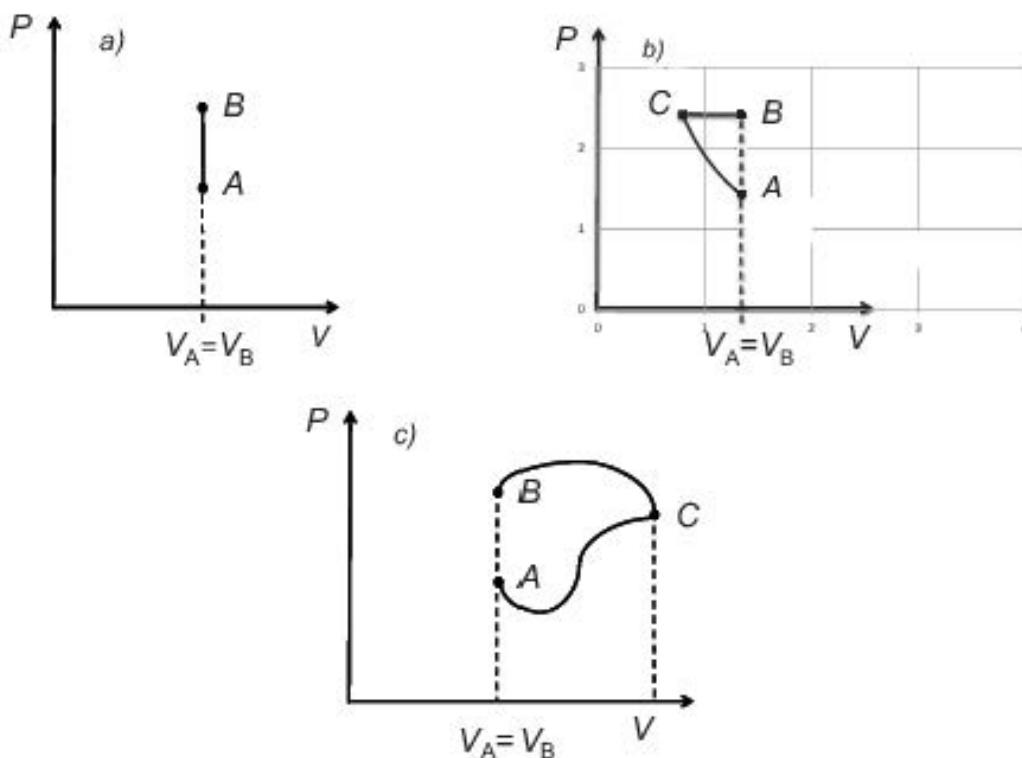
$$\Delta S_{AB} = \int_A^B n c_v \frac{dT}{T} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A}.$$

La natura di ‘funzione di stato’ dell’entropia si riscontra direttamente dall’espressione della sua variazione, Eq. (8.5), che dipende unicamente da parametri di stato (volume e temperatura del sistema, oltre che numero di moli). Tuttavia, si può verificare l’indipendenza dell’espressione trovata dalla specifica trasformazione seguita, calcolando la variazione  $\Delta S_{AB}$  su una trasformazione ottenuta come somma, per esempio, delle due trasformazioni  $A \Rightarrow C$ , isoterma per  $A$ , e  $C \Rightarrow B$ , isobara per  $B$  (Fig. 8.4b). Si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta S_{AB} &= [S(B) - S(C)] + [S(C) - S(A)] = \\ &= n \left( c_v \ln \frac{T_B}{T_C} + R \ln \frac{V_B}{V_C} \right) + nR \ln \frac{V_C}{V_A} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A}.\end{aligned}$$

Si osservi che i due termini contenenti i rapporti tra i volumi sono eguali e contrari, poiché le variazioni di volume nelle due trasformazioni parziali ( $AC$  e  $CB$ ) sono eguali e contrarie ( $V_A = V_B$ ). Questo consente di verificare con immediatezza che la variazione complessiva di entropia  $\Delta S_{AB}$  non dipende dalle trasformazioni parziali con cui si è sostituita la trasformazione complessiva. Essa, tuttavia, neppure dipende da due trasformazioni parziali qualunque con cui si voglia sostituire la trasformazione complessiva, comunque esse siano scelte. Si supponga, infatti, di scegliere lo stato intermedio  $C$  in un punto qualunque del piano delle fasi  $PV$  (Fig. 8.4c). Per le due trasformazioni parziali  $A \Rightarrow C$  e  $C \Rightarrow B$ , si avranno sempre i due termini eguali e contrari sopra visti, essendo ancora  $V_A = V_B$ . I due termini rimanenti, contenenti i rapporti tra le temperature, danno il contributo

$$\Delta S_{AB} = n c_v \ln \frac{T_C}{T_A} + n c_v \ln \frac{T_B}{T_C} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A}$$



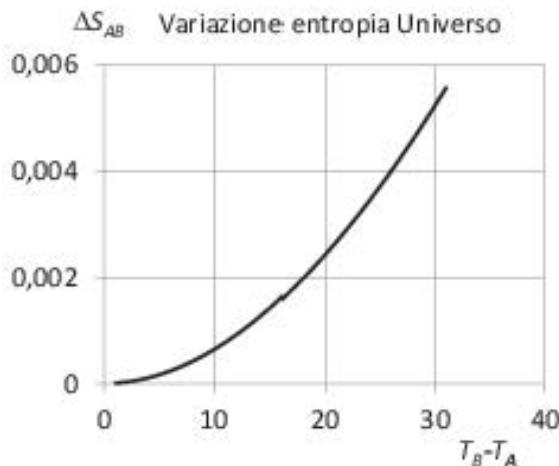
**Fig. 8.4.** Trasformazioni reversibili di un gas perfetto aventi lo stesso stato iniziale e finale,  $A$  e  $B$ , rispettivamente

indipendentemente dallo stato  $C$ , comunque scelto.

*Nel caso del problema precedente, si considera la trasformazione del gas tra i medesimi stati, iniziale e finale, effettuata però in maniera irreversibile, inserendo repentinamente il recipiente in un ambiente (sorgente) alla temperatura  $T_B$  dello stato finale. Si calcolano le variazioni entropiche del sistema e dell'ambiente esterno.*

La variazione di entropia del gas si calcola su una qualunque trasformazione reversibile che si effettui tra i medesimi stati terminali  $A$  e  $B$ , quale già si è in precedenza considerata. Ciò che muta rispetto al caso precedente è la variazione di entropia subita dall'ambiente esterno.

Nel caso di una trasformazione reversibile del gas, la sorgente esterna non può essere unica: durante l'intera trasformazione, infatti, il sistema (gas) deve essere sempre in contatto termico con una sorgente che abbia la stessa temperatura del gas e, quindi,



**Fig. 8.5.** Variazione di entropia dell'Universo:  $T_B$  temperatura della sorgente,  $T_A = 273\text{ K}$

teoricamente, le sorgenti esterne dovrebbero essere infinite. In un tale caso estremo, per ogni trasformazione infinitesima, la variazione di entropia del sistema sarebbe eguale e contraria a quella dell'ambiente esterno, e tale quindi sarebbe anche la variazione totale di entropia dell'intera trasformazione. La variazione complessiva di entropia, del gas e dell'ambiente esterno, si sommerebbe a zero: trasformazioni reversibili non mutano l'entropia totale dell'Universo.

Nel caso di una trasformazione irreversibile, come quella indicata nel testo per l'inserimento diretto e repentino del gas in una sorgente alla temperatura finale  $T_B$ , la variazione di entropia dell'ambiente esterno (quindi della sola sorgente a  $T_B$ ) è semplicemente

$$[\Delta S_{AB}]_{\text{sorgente}} = \frac{Q_B}{T_B} = -\frac{nc_v(T_B - T_A)}{T_B}$$

avendo la sorgente calda ceduto (segno  $-$ ) una quantità di calore pari a quella acquisita dal gas nella isocora  $AB$ . La variazione complessiva di entropia nell'Universo è quindi

$$\Delta S_{AB} = nc_v \left( \ln \frac{T_B}{T_A} - \frac{T_B - T_A}{T_B} \right) > 0.$$

Nel grafico della figura 8.5 in questa pagina è rappresentata la funzione  $\Delta S_{AB}$  in funzione della differenza  $T_B - T_A$ , con  $T_A = 273\text{ K}$ , per un valore unitario del prodotto  $nc_v$ .

### 8.3 Domande di verifica

- Dimostrare l'equivalenza dei due enunciati, di Kelvin e di Clausius, del secondo principio della termodinamica.
- Indicare come sia possibile verificare la reversibilità di una trasformazione di un sistema termodinamico, se non si può osservare cosa avviene durante una trasformazione.
- Enunciare e dimostrare il teorema di Carnot.
- Ricavare l'espressione del rendimento di una macchina di Carnot.
- Spiegare perché l'entropia complessiva dell'Universo non può mai diminuire, qualunque sia la trasformazione termodinamica che in esso si attui.
- Ricavare l'espressione della variazione dell'entropia nelle trasformazioni di un gas perfetto in funzione delle variabili di stato.
- Mostrare come l'entropia possa collegarsi allo stato di disordine della materia con l'esempio di un insieme di poche molecole.
- Ricavare l'espressione della variazione di entropia che si determina quando due masse  $m$  eguali di acqua a temperature diverse  $T_1$  e  $T_2$  si mescolano per stabilizzarsi alla temperatura intermedia  $T = (T_1 + T_2)/2$ .
- Spiegare per quale ragione fisica in un ciclo qualsiasi l'integrale circuitato di  $dQ/T$  (integrale di Clausius) non è mai positivo.
- Motivare il fatto che dopo una trasformazione adiabatica irreversibile di un gas si constata complessivamente una variazione positiva di entropia, pur non essendoci stato trasferimento di calore tra il sistema e l'ambiente.
- Ricavare la diseguaglianza di Clausius, che rapporta l'integrale di  $dQ/T_{\text{sorgente}}$  alla variazione di entropia.

### 8.4 Esercizi

- [1] Un grosso blocco di metallo alla temperatura  $T_0 = 500$  K viene immerso in un recipiente termicamente isolato e di capacità termica trascurabile contenente

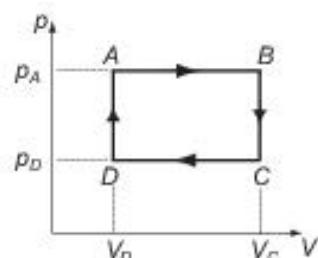
$m = 10 \text{ kg}$  di acqua alla temperatura  $T_1 = 300 \text{ K}$ : raggiunta l'acqua una temperatura  $T_2 = 350 \text{ K}$ , il blocco viene estratto dall'acqua. Supponendo la capacità termica del blocco molto grande, ovvero potendo considerare la sua temperatura costante, calcolare la variazione di entropia del sistema blocco-acqua.

- [2] Una macchina termica impiega He (in condizioni tali da poterlo considerare come un gas perfetto) per eseguire un ciclo reversibile diretto costituito da due isoterme alle temperature  $T_1$  e  $T_2 = T_1/2$  e due isobare alle pressioni  $p_2$  e  $p_1 = 2p_2$ . Si calcoli il rendimento della macchina.
- [3] Un sistema termodinamico termicamente isolato dall'esterno, è costituito da 2 moli di gas perfetto che inizialmente occupano un volume  $V_0$ , e da una sorgente termica costantemente in contatto termico con il gas. Il gas viene fatto espandersi fino a raddoppiare il volume iniziale: si osserva che la sorgente cede al gas una quantità di calore  $Q = 1 \text{ kJ}$ . Determinare la temperatura della sorgente termica sapendo che la variazione di entropia del sistema è stata  $8.5 \text{ J/K}$ .
- [4] Due moli di un gas biatomico vengono compresse irreversibilmente, mantenendo il recipiente che le contiene all'interno di una sorgente termica alla temperatura  $T = 350 \text{ K}$ , da un volume  $V_1 = 20 \text{ l}$  a un volume  $V_2 = 15 \text{ l}$ , compiendo dall'esterno un lavoro  $L = 2 \text{ kJ}$ . Si chiede quali saranno state le variazioni di entropia subite dal gas e dalla sorgente durante la trasformazione.
- [5] Una mole di gas perfetto monoatomico viene raffreddata dalla temperatura iniziale  $T_I$  alla temperatura finale  $T_F = T_I/2$  mediante la trasformazione reversibile  $p = bT^{-1}$  con  $b = \text{costante}$ . Determinare la variazione di entropia del gas a seguito della trasformazione.
- [6] Una massa d'acqua  $m = 20 \text{ kg}$  (da non considerarsi come sorgente termica) alla temperatura  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  viene messa a contatto termico con una sorgente termica avente temperatura  $t_S = 100^\circ\text{C}$  per un tempo sufficiente a far assorbire all'acqua una quantità di calore  $Q = 10 \text{ kcal}$ . Determinare la variazione di entropia e l'integrale di Clausius per l'acqua, per la sorgente termica e per il sistema acqua+sorgente termica.

- [7] Con una macchina di Carnot viene compiuto lavoro assorbendo calore da una vasca termicamente isolata dall'ambiente esterno, inizialmente alla temperatura  $T_{10} = 380\text{ K}$ , contenente  $V = 301\text{ d'acqua}$ , che si raffredda man mano che viene compiuto lavoro, mentre la sorgente fredda è a temperatura costante  $T_2 = 325\text{ K}$ . Si determini quanto lavoro sarà stato compiuto dalla macchina quando la temperatura finale dell'acqua nella vasca sarà  $T_{1F} = 375\text{ K}$ .
- [8] Un gas perfetto monoatomico viene riscaldato a volume costante da uno stato iniziale di equilibrio fino alla temperatura  $T_1 = 300\text{ K}$ ; in conseguenza di questa trasformazione l'entropia del gas aumenta di  $\Delta S = 4\text{ J/K}$ . Successivamente il gas torna alla pressione iniziale grazie a una trasformazione isoterma reversibile. Calcolare il lavoro compiuto dal gas.
- [9] Un corpo avente capacità termica  $C = 5 \times 10^3\text{ J/K}$ , costante nell'intervallo di temperature considerate, è in equilibrio termico con una sorgente a temperatura  $T_1 = 800\text{ K}$ . Esso viene posto a contatto con una sorgente a temperatura  $T_2 = 400\text{ K}$  quindi, raggiunto il nuovo equilibrio termico, viene riportato in contatto con la sorgente a temperatura  $T_1$ . Determinare la variazione di entropia dell'universo (corpo e sorgenti).
- [10] Se una massa d'acqua  $m_1 = 200\text{ g}$  a  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  viene mescolata con un'altra massa  $m_2 = 300\text{ g}$  a  $T_2 = 75^\circ\text{C}$ , si trovi a) la temperatura finale di equilibrio della miscela, pensando che il mescolamento avvenga adiabaticamente, e b) la variazione di entropia complessivamente subita dal sistema.
- [11] Una massa  $m = 14\text{ g}$  di gas biatomico si espande da un volume iniziale  $V_0$  a uno finale  $V_1 = 2.72 V_0$ . Raggiunto l'equilibrio termodinamico, si trova che la pressione finale è eguale a quella iniziale, mentre l'entropia è cambiata di  $\Delta S = 14.54\text{ J/K}$ . Supponendo che il gas si comporti come un gas perfetto, si determini il peso molecolare del gas.
- [12] Una macchina frigorifera esegue  $n = 5$  cicli al secondo, assorbendo una potenza  $p = 1 \times 10^3\text{ W}$ , lavorando con due sorgenti termiche ideali a temperatura  $T_1 = 280\text{ K}$  e  $T_2 = 260\text{ K}$ . Si determini la variazione di entropia per ciclo delle sorgenti, sapendo che in un tempo  $t = 10\text{ s}$  di funzionamento della mac-

china, la quantità di calore che essa assorbe dalla sorgente a temperatura  $T_2$  è  $Q_{2tot} = 1 \times 10^4$  J.

- [13] Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo reversibile mostrato in figura, dove le trasformazioni  $AB$  e  $CD$  sono isobare e le trasformazioni  $BC$  e  $DA$  sono isocore. Calcolare il rendimento della macchina termica che esegue tale ciclo supponendo di conoscere i valori di  $p_A$ ,  $p_D$ ,  $V_C$  e  $V_D$ .



- [14] Due moli di gas perfetto all'interno di un recipiente termicamente isolato dall'ambiente esterno, si espandono liberamente da un volume iniziale  $V$  a un volume finale  $5V$ . Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'ambiente.

- [15] Una macchina termica produce lavoro assorbendo, a ogni ciclo, una quantità di calore  $Q_1 = 600$  cal da una sorgente termica a temperatura  $T_1 = 320$  K e cedendo, sempre a ogni ciclo, una quantità di calore  $Q_2 = 595$  cal a una massa di acqua  $m_a = 10$  kg, inizialmente a temperatura  $T_2 = 314.05$  K. Determinare il lavoro complessivo che la macchina produrrà e la conseguente variazione di entropia della macchina e della massa d'acqua.

- [16] Due quantità d'acqua eguali, contenute in due bacinelle distinte, costituiscono due sorgenti termiche a temperature  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  e  $T_2 = 45^\circ\text{C}$ . Un pezzo metallico di rame, di massa  $m = 700$  g e calore specifico  $c = 90.91$  cal/kgK, inserito inizialmente nella bacinella a temperatura maggiore  $T_2$ , viene successivamente estratto e inserito in quella a temperatura minore  $T_1$  e infine riportato nella prima. Si chiede quale sarà stata la variazione di entropia del pezzo di rame e delle due quantità d'acqua tra la fase iniziale e quella finale.

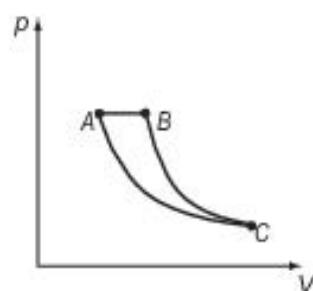
- [17] Una mole di gas perfetto monoatomico esegue un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni:

$A \rightarrow B$ : isobara reversibile che raddoppia il volume,

$B \rightarrow C$ : adiabatica reversibile,

$C \rightarrow A$ : isoterma reversibile.

Calcolare il rendimento del ciclo.



- [18] Una mole di gas perfetto monoatomico esegue un ciclo reversibile formato da due isobare (tratti  $AB$  e  $CD$ ) e da due isoterme (tratti  $BC$  e  $DA$ ). Si determini il lavoro effettuato dal sistema in un ciclo, la quantità di calore assorbita dal sistema e il rendimento. Sono noti i valori delle temperature  $T_A = 400\text{ K}$  e  $T_B = 700\text{ K}$  e il rapporto dei volumi  $V_D/V_A = 3$ .
- [19] In un ciclo di Carnot compiuto da un gas perfetto, la differenza di temperatura tra le due sorgenti è  $\Delta T = T_1 - T_2 = 50\text{ K}$ , mentre la variazione di entropia del gas lungo l'isoterma a temperatura  $T_2$  è  $\Delta S_2 = -20\text{ J/K}$ . Determinare il lavoro compiuto dal gas durante il ciclo.
- [20] Un gas ideale compie un ciclo sul piano di Clapeiron in senso orario passando per una isobara, isocora e poi adiabatica. Trovare il rendimento se il volume, durante il processo adiabatico, diminuisce di  $k$  volte.
- [21] Un blocco di rame di calore specifico  $c_1 = 385\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  di massa  $m_1 = 300\text{ g}$  e di temperatura  $t_1 = 97^\circ\text{C}$  viene posto in un calorimetro riempito con  $m_2 = 100\text{ g}$  di acqua a temperatura  $t_2 = 7^\circ\text{C}$  di calore specifico  $c_2 = 4186\text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ . Trovare la variazione di entropia al raggiungimento della temperatura di equilibrio considerando la capacità termica del calorimetro trascurabile.
- [22] Un litro d'acqua alla temperatura  $T_I = 300\text{ K}$  viene scaldata adiabaticamente a pressione atmosferica mediante un mulinello – di capacità termica trascurabile – che ruota con la velocità di 1000 giri/min, essendo azionato da un motore che, a regime, esercita un momento  $M = 20\text{ N}\cdot\text{m}$ . Calcolare la variazione di entropia dell'acqua dopo due minuti di funzionamento del mulinello. (Per l'acqua:  $c = c_p = 4.186\text{ Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )

## 8.5 Soluzioni degli esercizi

[1]

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B$$

$$\Delta S_A = \int_{T_1}^{T_2} cm \frac{dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta S_B = \frac{1}{T_0} \int (dQ_B)_{\text{rev}} = -\frac{1}{T_0} \int_{T_1}^{T_2} cm dT = -cm \frac{T_2 - T_1}{T_0}$$

$$\Delta S = cm \left( \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2 - T_1}{T_0} \right) = 2.3 \times 10^3 \text{ J/K.}$$

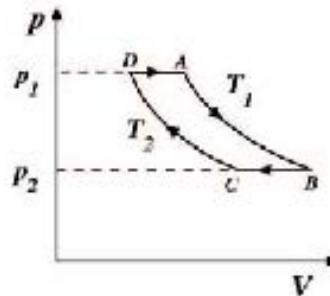
[2]

$$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} > 0 \quad (\text{assorbito})$$

$$Q_{BC} = nc_p(T_2 - T_1) < 0 \quad (\text{ceduto})$$

$$Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{p_2}{p_1} < 0 \quad (\text{ceduto})$$

$$Q_{DA} = nc_p(T_1 - T_2) > 0 \quad (\text{assorbito})$$



$$\eta = 1 + \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{Q_{DA} + Q_{AB}} = 0.18.$$

[3]

$$\Delta S_{\text{sist}} = \Delta S_{\text{sorg}} + \Delta S_{\text{gas}} = -\frac{Q}{T} + nR \ln \frac{2V_0}{V_0},$$

e quindi:

$$T = \frac{Q}{2R \ln 2 - \Delta S_{\text{sist}}} = 331 \text{ K.}$$

[4] Per la variazione di entropia del gas, si fa uso della formula generale:

$$\Delta S_{\text{gas}} = nc_v \ln \frac{T_{\text{fin}}}{T_{\text{in}}} + nR \ln \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = -4.78 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

e per la sorgente, che rimane alla temperatura  $T$ :

$$\Delta S_{\text{sorg}} = \frac{Q_{\text{sorg}}}{T} = -\frac{Q_{\text{gas}}}{T} = \frac{L}{T} = 5.71 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

[5] LA variazione di entropia è data da:

$$\Delta S = \int_I^F \frac{dQ}{T} = n c_v \ln \frac{T_F}{T_I} + n R \ln \frac{V_F}{V_I} = n c_p \ln \frac{T_F}{T_I} + n R \ln \frac{p_I}{p_F}.$$

Ma:

$$p_I = b T_I^{-1} \quad \text{e} \quad p_F = b T_F^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_I}{p_F} = \frac{T_I^{-1}}{T_F^{-1}} = \frac{T_F}{T_I} = \frac{1}{2}.$$

Quindi:

$$\Delta S = \frac{5}{2} R \ln \frac{1}{2} + R \ln \frac{1}{2} = \frac{7}{2} R \ln \frac{1}{2} = -20.2 \text{ J/K}.$$

[6] La temperatura finale dell'acqua sarà:

$$T_F = T_0 + \frac{Q}{cm} = 293.5 \text{ K}.$$

$$\Delta S_S = \frac{-Q}{T_S} = -112.22 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_A = \int_{T_0}^{T_F} \frac{dQ_A}{T} = \int_{T_0}^{T_F} \frac{cmdT}{T} = cm \ln \frac{T_F}{T_0} = 142.74 \text{ J/K}.$$

$$\Delta S_A + \Delta S_S = 30.5 \text{ J/K}.$$

L'integrale di Clausius vale  $\int dQ/T$  essendo  $T$  la temperatura corpo con il quale il sistema scambia la quantità di calore  $dQ$ ; pertanto:

$$I_A = \frac{Q}{T_S} = 112.22 \text{ J/K}$$

$$I_S = \int \frac{dQ_S}{T} = \int \frac{-dQ_A}{T} = \int_{T_0}^{T_F} \frac{-cmdT}{T} = -142.74 \text{ J/K}.$$

$$I_A + I_S = -30.5 \text{ J/K}.$$

[7] Il lavoro compiuto dalla macchina vale:

$$L = \int dL = - \int \eta dQ_1 = - \int \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1 = - \int_{T_{10}}^{T_{1F}} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) cmdT_1,$$

da cui si ricava:

$$L = -\rho V c \left( T_{1F} - T_{10} - T_2 \ln \frac{T_{1F}}{T_{10}} \right) = 87.31 \text{ kJ}.$$

In alternativa l'esercizio poteva essere risolto tramite il calcolo della variazione

dell'entropia dell'universo  $\Delta S_{\text{univ.}}$ :

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{mac}} + \Delta S_{\text{ac}} + \Delta S_{\text{sorg}} = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{ac}} + \Delta S_{\text{sorg}} = 0;$$

pertanto

$$\int_{T_{10}}^{T_{1F}} \frac{cm dT_1}{T_1} + \int_{\text{sorg}} \frac{dQ}{T} = cm \ln \frac{T_{1F}}{T_{10}} + \frac{Q_2}{T_2} \Rightarrow Q_2 = cm T_2 \ln \frac{T_{10}}{T_{1F}} > 0$$

è il calore assorbito dalla sorgente termica. Quindi:

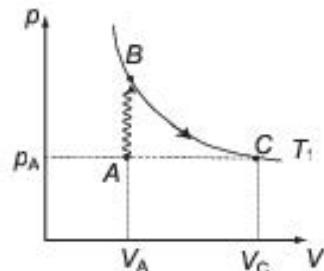
$$L = -cm(T_{1F} - T_{10}) + cmT_2 \ln \frac{T_{1F}}{T_{10}},$$

che è identica all'espressione precedentemente trovata.

[8] Il gas compie lavoro solo lungo l'isoterma  $BC$ :

$$L = \int_B^C pdV = nRT_1 \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Dalla legge di stato dei gas perfetti



$$\begin{cases} p_A V_B = nRT_A \\ p_A V_C = nRT_1 \end{cases} \Rightarrow \ln \frac{V_C}{V_B} = \ln \frac{T_1}{T_A}.$$

Da quest'ultimo rapporto si ricava dalla variazione di entropia:

$$\Delta S = \left( \int_A^B \frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = nc_v \ln \frac{T_1}{T_A} \Rightarrow \ln \frac{T_1}{T_A} = \frac{1}{nc_v} \Delta S.$$

Pertanto:

$$L = \frac{2}{3} T_1 \Delta S = 800 \text{ J.}$$

[9] La trasformazione (ciclica) compiuta dal corpo è irreversibile, quindi  $\Delta S_{\text{univ}} > 0$ ; invece  $\Delta S_{\text{corpo}} = 0$  perché il corpo compie un ciclo termodinamico. La variazione di entropia dell'universo coincide con la variazione di entropia delle sorgenti:

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{C(T_2 - T_1)}{T_2} = 5 \times 10^3 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = -\frac{C(T_1 - T_2)}{T_1} = -2.5 \times 10^3 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 2.5 \times 10^3 \text{ J/K.}$$

[10] Dalla relazione:

$$cm_1(T_F - T_1) + cm_2(T_F - T_1) = 0$$

si ricava

$$T_F = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 53^\circ\text{C}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_F} \frac{cm_1 dT}{T} + \int_{T_2}^{T_F} \frac{cm_2 dT}{T} = \\ &= c \left( m_1 \ln \frac{T_F}{T_1} + m_2 \ln \frac{T_F}{T_2} \right) = 1.75 \text{ cal/K.}\end{aligned}$$

[11] La variazione di entropia in una trasformazione isobara è data da:

$$\Delta S = \int_{V_0}^{V_1} \frac{dQ}{T} = nc_p \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_1}{T_0} = \frac{7}{2} nR \ln \frac{V_1}{V_0},$$

da cui

$$n = \frac{\frac{2}{7} \frac{\Delta S}{R}}{\ln \frac{V_1}{V_0}} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{m(g)}{n} = 28.$$

[12] Indicando con  $Q_{1\text{tot}}$  il calore ceduto dalla macchina nel tempo  $t = 10 \text{ s}$  ( $Q_{1\text{tot}} < 0$ ), si ha:

$$-|L| = Q_{1\text{tot}} + Q_{2\text{tot}} \quad \Rightarrow \quad Q_{1t} = -Pt - Q_{2\text{tot}} = -2 \times 10^4 \text{ J.}$$

In ogni ciclo, il calore ceduto alla sorgente a temperatura  $T_1$ ,  $Q_1$ , e quello assorbito dalla sorgente a temperatura  $T_2$ ,  $Q_2$ , saranno rispettivamente uguali a:

$$Q_1 = \frac{1}{nt} Q_{1\text{tot}} = -400 \text{ J,} \quad Q_2 = \frac{1}{nt} Q_{2\text{tot}} = 200 \text{ J.}$$

La variazione di entropia delle sorgenti termiche per ogni ciclo sarà pertanto:

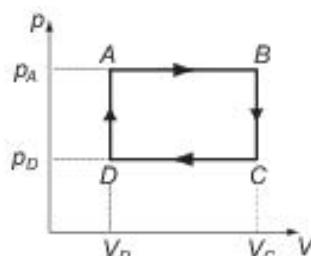
$$\Delta S_{\text{sorg}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{-Q_2}{T_2} = 0.66 \text{ J/K.}$$

[13] Il rendimento della macchina è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}}$$

essendo  $Q_{\text{ass}}$  ed  $L$ , rispettivamente, il calore assorbito e il lavoro fatto dal gas durante il ciclo. Quest'ultimo è facilmente calcolabile poiché nel piano  $PV$  esso è pari all'area racchiusa dal ciclo; quindi

$$L = (p_A - p_D)(V_C - V_D).$$



Come inoltre si può dedurre applicando il I principio della termodinamica e l'equazione di stato dei gas perfetti a ciascuna delle trasformazioni che compongono il ciclo, il calore è assorbito dal gas lungo l'isobara  $AB$  e lungo l'isocora  $DA$ .

$$Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A) = n \frac{c_p}{R} (p_A V_C - p_A V_D)$$

$$Q_{DA} = n c_v (T_A - T_D) = n \frac{c_v}{R} (p_A V_D - p_D V_D).$$

Pertanto:

$$\eta = \frac{R(p_A - p_D)(V_C - V_D)}{nc_p p_A (V_C - V_D) + nc_v V_D (p_A - p_D)}.$$

[14] Poiché l'espansione libera di un gas perfetto è un processo intrinsecamente isotermo, per il calcolo della variazione di entropia del gas si può scegliere un'isoterma reversibile che abbia lo stesso stato iniziale (volume  $V$ ) e finale (volume  $5V$ ):

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}} &= \int_I^F \frac{dQ}{T} = \int_I^F \frac{dU + dL}{T} = \\ &= \frac{1}{T} \int_I^F p dV = n R \int_V^{5V} \frac{dV}{V} = n R \ln 5 = 26.7 \text{ J/K.} \end{aligned}$$

Essendo il gas termicamente isolato dall'ambiente esterno:

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{amb}} = \Delta S_{\text{gas}}.$$

- [15] La macchina cesserà di produrre lavoro quando  $T_2 = T_1$ ; indicando con  $n$  il numero totale di cicli che la macchina potrà effettuare, per la massa d'acqua si ha:

$$nQ_2 = c_a m_a (T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad n = 100 \quad \Rightarrow \quad L = n(Q_1 - Q_2) = 2093 \text{ J}.$$

$$\Delta S_{\text{mac.}} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{acqua}} &= \left( \int_I^F \frac{dQ_{\text{acqua}}}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_{T_2}^{T_1} c_a m_a \frac{dT}{T} = \\ &= c_a m_a \ln \frac{T_1}{T_2} = 187.7 \text{ cal/K}. \end{aligned}$$

- [16] Tra lo stato iniziale e quello finale ci sarà stato solamente il trasferimento di una quantità di calore  $Q = cm(T_2 - T_1)$  tra l'acqua a temperatura maggiore e quella a temperatura minore (che non avrà causato alcuna variazione delle temperature dell'acqua nelle bacinelle, in quanto queste sono da considerarsi come sorgenti termiche, di capacità termica infinita). Il pezzo di rame non avrà subito alcuna variazione. Pertanto:

$$\Delta S_{\text{rame}} = 0; \quad \Delta S_{\text{sorg1}} = \frac{Q}{T_1} = 5.43 \text{ cal/K}; \quad \Delta S_{\text{sorg2}} = -\frac{Q}{T_2} = -5.0 \text{ cal/K}.$$

- [17] Il rendimento è

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} = 1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C}}{nc_p(T_B - T_A)}.$$

Nell'isobara  $AB$  è:

$$V_B = 2V_A \quad \Rightarrow \quad T_B = 2T_A.$$

Nell'adiabatica  $CA$  è:

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{2V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_C} = \frac{T_B}{T_A} = 2$$

da cui

$$\frac{V_A}{V_C} = 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0.177 \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{\ln(0.0884)}{5} = 0.654.$$

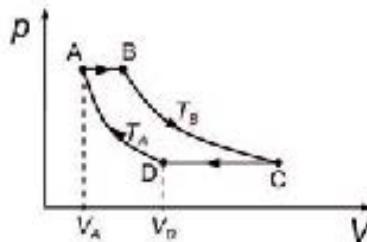
[18]

$$L_{AB} = nR(T_B - T_A)$$

$$L_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}$$

$$L_{CD} = nR(T_A - T_B)$$

$$L_{DA} = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_D}.$$



Considerando le trasformazioni isobare,

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_D}{T_C} = \frac{V_D}{V_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A}.$$

$$\begin{aligned} L_{\text{ciclo}} &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = \\ &= nRT_B \ln \frac{V_D}{V_A} + nRT_A \ln \frac{V_A}{V_D} = 2.74 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{ass}} &= Q_{AB} + Q_{BC} = \\ &= nc_p(T_B - T_A) + nRT_B \frac{\ln}{V_C} V_B = 12.62 \times 10^3 \text{ J}. \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{L_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{ass}}} = 0.22.$$

[19] Indicando con  $\Delta S_1$  la variazione di entropia del gas lungo la trasformazione isoterma a temperatura  $T_1$ , deve essere

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_1 = -\Delta S_2.$$

Poiché

$$Q_2 = \Delta S_2 T_2 \quad \text{e} \quad Q_1 = \Delta S_1 T_1 = -\Delta S_2 T_1,$$

si ha che:

$$L = Q_1 + Q_2 = -\Delta S_2 T_1 + \Delta S_2 T_2 = -\Delta S_2 (T_1 - T_2) = 1000 \text{ J}.$$

[20] Il rendimento può essere scritto nella forma

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|}$$

dove il calore assorbito è positivo e scambiato durante l'isobara  $Q_{\text{ass}} = nc_p(T_B - T_A)$  e il calore ceduto negativo è quello scambiato durante l'isocora  $Q_{\text{ced}} = nc_v(T_C - T_B)$  dove  $A$  è il punto di partenza,  $B$  quello alla fine dell'isobara e  $C$  quello alla fine dell'isocora. Quindi

$$\eta = 1 - \frac{c_v}{c_p} \frac{(T_B - T_C)}{(T_B - T_A)} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \frac{T_C}{T_B}\right)}{\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)}.$$

Per trovare i rapporti tra le temperature bisogna considerare la condizione data dal problema per cui  $V_C = V_B = kV_A$ , la trasformazione isobara  $V_A T_A^{-1} = V_B T_B^{-1}$  e la trasformazione adiabatica  $T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$ . Da queste relazioni si ricava che  $T_A/T_B = 1/k$  e  $T_C/T_B = 1/k^\gamma$  per cui

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{k^\gamma - 1}{k - 1} \right) k^{1-\gamma}.$$

[21] La temperatura di equilibrio si determina considerando che nel sistema isolato formato dal rame e dall'acqua, il calore ceduto dal rame è interamente assorbito dall'acqua quindi la variazione di calore del sistema è nulla

$$m_1 c_1 (T_{\text{eq}} - T_1) + m_2 c_2 (T_{\text{eq}} - T_2) = 0$$

con  $T_1$  e  $T_2$  le corrispondenti temperature assolute iniziali; pertanto:

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Per calcolare la variazione di entropia si può considerare l'integrale di Clausius di una trasformazione reversibile che porti dalla temperatura iniziale alla temperatura finale di equilibrio:

$$\Delta S_1 = \int \frac{\delta Q_1}{T} = \int_{T_1}^{T_{\text{eq}}} \frac{m_1 c_1 dT}{T} = m_1 c_1 \ln \frac{T_{\text{eq}}}{T_1}.$$

Analogamente si ha:

$$\Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_{\text{eq}}}{T_2},$$

per cui

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 4.4 \text{ J/K}.$$

- [22] Applicando il primo principio della termodinamica all'acqua, indicando con  $T_F$  la sua temperatura finale, si ha:

$$L = -\Delta U = -mc_p(T_F - T_I) \implies T_F = T_I - \frac{L}{mc_p},$$

essendo  $L = -L_{\text{motore}}$ .

$$L_{\text{motore}} = 2000 \int_0^{2\pi} M d\alpha = 8\pi \times 10^4 \text{ N} \implies T_F = 360 \text{ K}.$$

Pertanto:

$$\Delta S = mc_p \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} = 763.2 \text{ J/K}.$$

# Sistemi di cariche

## 9.1 Esercizio guida – Sistemi di cariche puntiformi

### Teoria

Il campo elettrico è un vettore definito operativamente in un punto come il limite del rapporto tra la forza  $\mathbf{F}$  che agisce su una carica puntiforme  $q$  posta nel punto e la carica stessa, al ridursi a zero di questa:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (9.1)$$

A sua volta, una carica puntiforme genera nello spazio vuoto un campo elettrico di modulo proporzionale alla carica e inversamente proporzionale al quadrato della distanza da questa, avente direzione della congiungente il punto con la carica e verso uscente dalla carica, se positiva, entrante se negativa, così che si può scrivere per esso l'espressione:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9.2)$$

dove si è indicato con  $\hat{\mathbf{r}}$  il versore della distanza vettoriale  $\mathbf{r}$  uscente radialmente da  $Q$  e si è introdotta col simbolo  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto. Ne consegue che l'espressione

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

rappresenta la legge di forza con cui una carica puntiforme  $Q$  agisce su una seconda  $q$  nello spazio vuoto: essa è simmetrica rispetto alle due cariche, rispettando così il terzo principio della dinamica.

L'espressione (9.2) è coerente con la legge di Gauss che, nella forma integrale, egualia il flusso del vettore  $\mathbf{E}$  attraverso una qualunque superficie chiusa al valore della carica complessivamente contenuta all'interno diviso per la costante  $\epsilon_0$ :

$$\varphi_{\Sigma_{\text{chiusa}}}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{interna}} dq.$$

La linearità della legge di Gauss consente di calcolare il campo elettrico generato in un punto dello spazio da più cariche puntiformi come somma dei campi elettrici generati singolarmente da ciascuna carica.

All'espressione (9.1) del campo elettrico generato in punto dello spazio da una carica puntiforme si affianca quella del potenziale elettrostatico, ottenuta per integrazione e scritta come

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (9.3)$$

in cui si è autonomamente scelto eguale a zero il valore del potenziale a una distanza infinitamente grande. Il potenziale è una grandezza scalare e come tale si somma in un punto quello generato da più cariche puntiformi per calcolare il valore complessivo.

### Argomento

L'espressione o le caratteristiche del campo elettrico e/o del potenziale elettrostatico in un punto dello spazio vengono assegnate per ritrovare, in un classico problema inverso, i valori delle cariche che lo/li producono.

*Il campo risultante calcolato come somma dei singoli*

I campi elettrici sono ricavati tenendo in debito conto la natura vettoriale, operando in modo che il campo risultante abbia la direzione prescritta dal problema. Si studiano i casi possibili derivanti dalla scelta dei segni delle cariche, ricavando una funzione che specifica i valori delle cariche in funzione dei parametri geometrici assegnati.

Una carica puntiforme  $Q_1$  genera un campo elettrico  $E_1$  in un punto  $P$  dello spazio. Su un piano passante per la carica ortogonalmente alla congiungente tra questa e il punto  $P$  considerato, viene posta una seconda carica  $Q_2 = kQ_1$ , che fa mutare il campo elettrico precedente, ruotandolo di un angolo  $\alpha$ . Si determina il valore del parametro  $k$  in funzione della distanza  $D$  tra le due cariche, per un determinato valore dell'angolo  $\alpha$ , e il valore del campo  $E_1$  risultante.

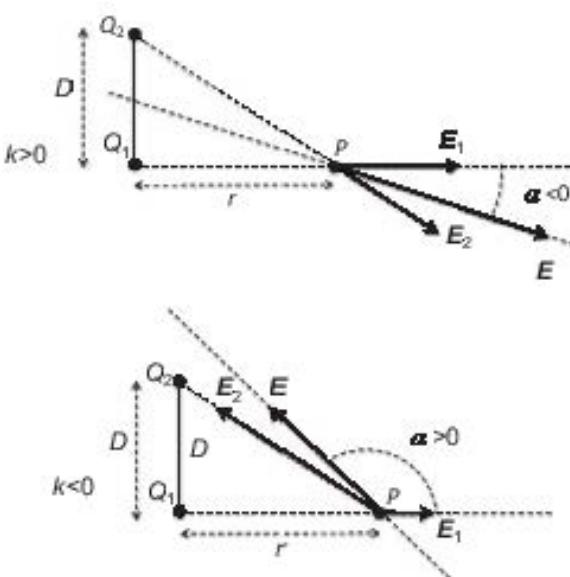
Si determina preliminarmente la distanza  $r$  della carica  $Q_1$  dal punto  $P$  con l'uso dell'Eq. (9.2):

$$r = \sqrt{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 E_1}}.$$

Quindi, viene determinato il valore del campo  $E_2$  generato da una carica  $Q_2 = kQ_1$  posta sul piano ortogonale al segmento che unisce il punto  $P$  con la carica  $Q_1$  come funzione della distanza  $D$  tra le due cariche (Fig. 9.1):

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kQ_1}{D^2 + r^2} = k \frac{r^2}{D^2 + r^2} E_1$$

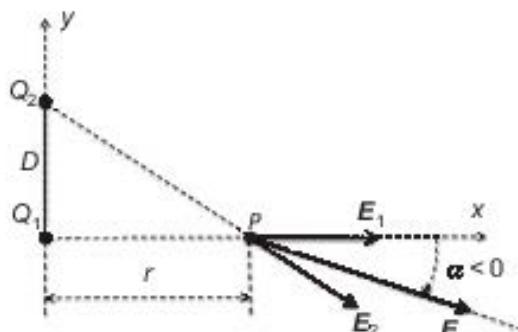
Se le due cariche sono dello stesso segno ( $k > 0$ ), la direzione del campo  $E$  risultante interseca il segmento distanza tra le due cariche, altrimenti cade all'esterno. Ciò dà



**Fig. 9.1.** Campo elettrico generato da due cariche dello stesso segno (entrambe positive, sopra) e di segno opposto ( $Q_1$  positiva e  $Q_2$  negativa, sotto)

luogo a un vincolo sul valore possibile dell'angolo  $\alpha$ , legato ai segni delle cariche e al valore della distanza  $D$  tra di esse, di cui si tratterà più avanti.

Affinché il campo  $E$  risultante sia ruotato di un angolo  $\alpha$  rispetto a quello generato dalla sola carica  $Q_1$ , occorre che il rapporto tra le sue componenti, ortogonale e parallela alla congiungente le due cariche (componenti  $y$  e  $x$ , rispettivamente, Fig. 9.2), sia eguale alla tangente dell'angolo  $\alpha$ :



**Fig. 9.2.** Definizione dei versi sugli assi  $x$  e  $y$  e del segno per l'angolo  $\alpha$

$$\frac{E_{2y}}{E_1 + E_{2x}} = \frac{E_2 \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}}}{E_1 + E_2 \frac{r}{\sqrt{D^2 + r^2}}} = \frac{k \frac{D}{(D^2 + r^2)^{3/2}}}{\frac{1}{r^2} + k \frac{r}{(D^2 + r^2)^{3/2}}} = \tan \alpha$$

facendo riferimento agli assi e agli angoli come riportati in Fig. 9.2. Di qui si ricava la funzione  $k(D)$  richiesta

$$k = \frac{(D^2 + r^2)^{3/2}}{r^2} \frac{\tan \alpha}{D - r \tan \alpha}. \quad (9.4)$$

La funzione (9.4) trovata contiene il vincolo sui valori e i segni delle varie grandezze: in particolare, se le cariche sono dello stesso segno ( $k > 0$ ), devono anche essere dello stesso segno i due fattori  $\tan \alpha$  e  $(D - r \tan \alpha)$ , quindi essere  $D > r \tan \alpha$  per  $\tan \alpha > 0$ . Parimenti, se le cariche sono di segno opposto ( $k < 0$ ), devono anche



**Fig. 9.3.** Campo elettrico risultante come terzo lato di un triangolo determinato dal teorema di Carnot

essere di segno opposto i due fattori  $\tan \alpha$  e  $(D - r \tan \alpha)$ , quindi essere  $D < r \tan \alpha$  per  $\tan \alpha > 0$ .

Per ricavare il valore del campo risultante  $E$ , essendo già nota la sua direzione nello spazio, si utilizza il teorema geometrico di Carnot applicato al triangolo costruito sui lati dei due vettori  $E_1$  ed  $E_2$  (Fig. 9.3). Il modulo del campo elettrico risultante si ottiene come soluzione dell'equazione

$$E^2 - 2E_1 E \cos \alpha + E_1^2 = E_2^2$$

pari a

$$E = E_1 \cos \alpha \pm \sqrt{(E_1 \cos \alpha)^2 - E_1^2 + E_2^2} = E_1 \left[ \cos \alpha \pm \sqrt{\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 - (\sin \alpha)^2} \right].$$

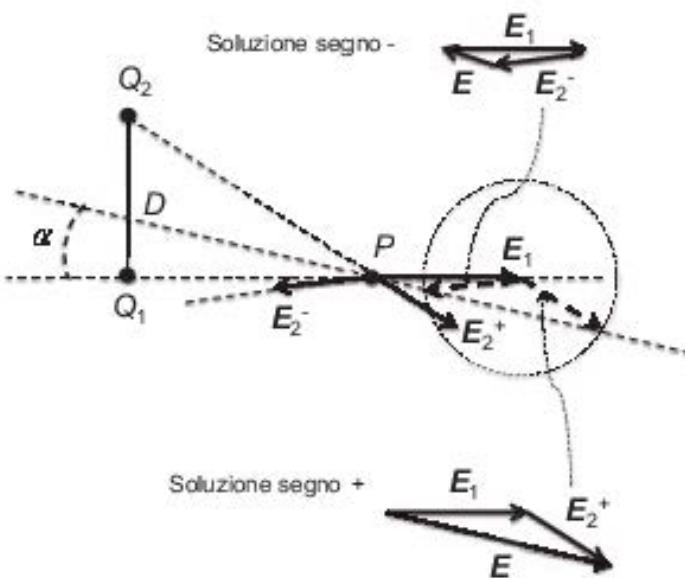
Esplicitando i termini dei campi  $E_1$  ed  $E_2$ , si ottiene:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \cos \alpha \pm \sqrt{\left(k \frac{r^2}{D^2 + r^2}\right)^2 - (\sin \alpha)^2} \right].$$

La soluzione col segno positivo corrisponde a un campo elettrico  $E$  risultante la cui direzione forma correttamente l'angolo  $\alpha$  richiesto con quella del campo  $E_1$ ; tuttavia, esiste una seconda soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado, cui corrisponde un campo  $E_2$  la cui direzione non passa per la carica  $Q_2$  che lo genera (Fig. 9.4 nella pagina seguente) e che va pertanto scartata. Ciò deriva dal fatto che nel teorema di Carnot si utilizzano i soli moduli dei campi, e non anche le direzioni. Sostituendo nella soluzione col segno positivo il parametro  $k$  dato dall'Eq. (9.4), si ottiene

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \cos \alpha + \sqrt{(D^2 + r^2) \frac{\tan^2 \alpha}{(D - r \tan \alpha)^2} - (\sin \alpha)^2} \right].$$

Mantenendo i dati dell'esercizio precedente, si cerca la distanza  $D_3$  dalla carica  $Q_1$ , lungo la stessa direzione in cui si trova la  $Q_2$ , alla quale si deve porre una terza



**Fig. 9.4.** Le due soluzioni del teorema di Carnot corrispondono al lato  $E_2$  del triangolo diversamente orientato: a una sola di esse corrisponde un campo  $E_2$  con direzione per  $Q_2$ .

carica  $Q_3$ , e quanto essa deve valere, per annullare il campo elettrico risultante in  $P$ .

Poiché una terza carica non può che contribuire al campo risultante se non con un vettore  $E_3$  avente la direzione della congiungente col punto, essa deve necessariamente essere posizionata sulla direttrice (retta  $a$  della Fig. 9.5 nella pagina successiva) del vettore  $E$  precedentemente individuato, formante un angolo  $\alpha$  con la direzione del segmento  $r$  distanza di  $Q_1$  da  $P$ . La distanza  $D_3$ , quindi, risulta essere un cateto di un triangolo rettangolo il cui altro cateto misura la lunghezza  $r$  e la cui ipotenusa  $r_3$  è la distanza della carica  $Q_3$  dal punto  $P$ . Pertanto, si ha in sequenza

$$D_3 = r \tan \alpha$$

e

$$r_3 = \sqrt{r^2 + D_3^2} = r \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Il valore della carica  $Q_3$  deve essere tale da generare a una distanza  $r_3$  un campo di modulo eguale a quello del campo  $E$  precedentemente individuato. Si ha, pertanto:

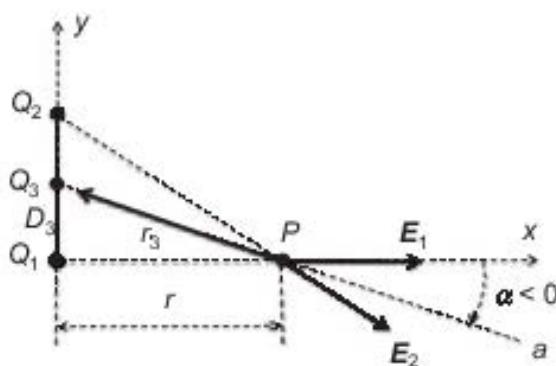


Fig. 9.5

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= 4\pi\epsilon_0 r_3^2 E = \\
 &= Q_1(1 + \tan^2 \alpha) \left[ \cos \alpha + \sqrt{(D^2 + r^2) \frac{\tan^2 \alpha}{(D - r \tan \alpha)^2} - (\sin \alpha)^2} \right].
 \end{aligned}$$

*Quale estensione degli esercizi sviluppati, si determinano le variazioni del potenziale elettrostatico nel punto  $P$  dovute all'inserimento nello spazio della seconda carica  $Q_2$  e della terza  $Q_3$ .*

Il calcolo del potenziale elettrostatico generato da una singola carica  $Q_1$  in un punto  $P$  a distanza  $r$  si ottiene direttamente con l'uso dell'Eq. (9.3):

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r},$$

avendo, anche in questo caso, assunto eguale a zero il valore del potenziale a una distanza infinita. Per l'aggiunta di una seconda carica  $Q_2$  (a una distanza  $D$  dalla prima in direzione ortogonale alla congiungente le due cariche), il potenziale  $V_1$  si muta in  $V_{12}$  solo per l'aggiunta del termine dovuto alla seconda carica, in virtù del fatto che il potenziale è una grandezza additiva scalare. Pertanto, la variazione è pari al contributo dovuto alla seconda carica:

$$V_{12}(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kQ_1}{\sqrt{D^2 + r^2}} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(D^2 + r^2)}{r^2} \frac{\tan \alpha}{(D - r \tan \alpha)}.$$

Analogamente, per l'aggiunta di un'ulteriore terza carica  $Q_3$  a distanza  $r_3$  dal punto  $P$  si ha una variazione complessiva del potenziale pari a

$$\begin{aligned} V_{123}(\mathbf{r}) - V_1(\mathbf{r}) &= V_2(\mathbf{r}) + V_3(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{kQ_1}{\sqrt{D^2 + r^2}} + \frac{Q_3}{r_3} \right) = \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left[ \frac{(D^2 + r^2)}{r} \frac{\tan \alpha}{(D - r \tan \alpha)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \left[ \cos \alpha + \sqrt{(D^2 + r^2) \frac{\tan^2 \alpha}{(D - r \tan \alpha)^2} - (\sin \alpha)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

## 9.2 Esercizio guida – Potenziale elettrico da distribuzioni spaziali di cariche

### Teoria

Dato un campo elettrico,  $\mathbf{E}$ , la differenza di potenziale tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  all'interno del campo è definita dalla relazione

$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Considerando espressioni analoghe a questa valutate per un generico punto  $P(x, y, z)$  del campo a partire da un medesimo punto  $P_O(x_O, y_O, z_O)$  di riferimento, si definisce la funzione scalare potenziale,  $V(x, y, z)$ , come

$$V(x, y, z) = - \int_{P_O}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + V(x_O, y_O, z_O). \quad (9.5)$$

Il potenziale elettrico, pertanto, è definito a meno di una costante: il valore arbitrario del potenziale,  $V(x_O, y_O, z_O)$ , nel punto – anch'esso arbitrario – di riferimento,  $P_O$ . In generale se le distribuzioni di cariche hanno una distribuzione limitata e nota, occupando porzioni limitate di spazio, si può scegliere il punto di riferimento all'infinito, ponendo a zero il potenziale in tale punto.

### Argomento

Viene data una distribuzione di carica sferica e, a partire dalla conoscenza del campo elettrico da essa generato, si determina il potenziale in ogni punto dello spazio. Lo stesso problema viene poi affrontato avvolgendo la distribuzione in un guscio metallico – sia scarico che carico –; la distribuzione di carica viene inoltre divisa in due parti, anch’esse sferiche, aventi quantità di carica diverse, e si ricava il potenziale di ognuna. Viene sempre supposto nullo il potenziale all’infinito.

*Il potenziale  
nel punto di  
riferimento*

Poiché il potenziale elettrico è definito a meno di una costante, particolare attenzione viene posta nella determinazione di quest’ultima in dipendenza delle condizioni al contorno che caratterizzano il problema affrontato.

*Si considera una distribuzione sferica di carica con densità  $\rho = \text{cost}$  e raggio  $R$ ; viene determinato il potenziale elettrico in ogni punto dello spazio potendo assumere nullo il suo valore all’infinito.*

Il campo elettrico creato dalla distribuzione di carica data è noto; ci si può avvalere dell’Eq. (9.5) per la determinazione del potenziale. Il campo elettrico è diretto radialmente e in modulo vale

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{3\epsilon_0}r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r}{R^3}, \quad \text{per } 0 \leq r \leq R; \\ E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{per } r \geq R, \end{aligned}$$

essendo  $q = \rho 4/3\pi R^3$  la carica costituente la distribuzione.

Il potenziale, pertanto, sarà unicamente funzione di  $r$  e quindi

$$V(r) = - \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{l} + \text{cost}, \quad \text{per } r \geq R$$

Dovendo risultare nullo il potenziale all’infinito, ne deriva

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{per } r \geq R.$$

Si ha, invece

$$V(r) = - \int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{l} + \text{cost}', \quad \text{per } 0 \leq r \leq R.$$

Poiché il potenziale è una funzione continua tranne nei punti dove il campo elettrico è infinito (punti dove vi è una carica puntiforme), il valore della nuova costante va ora determinato cosicché il potenziale risulti continuo sulla superficie limite della distribuzione di carica; poiché

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

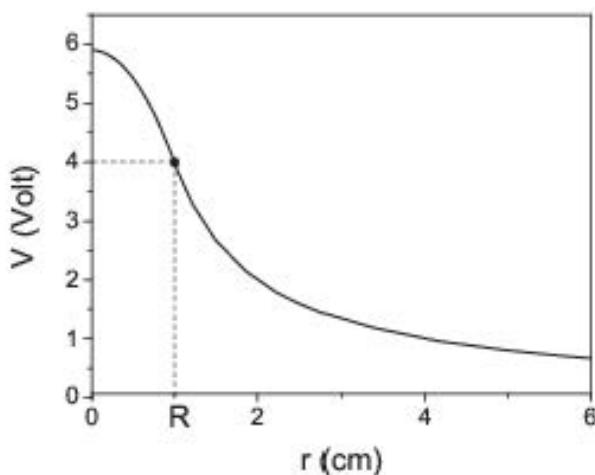
ne deriva che

$$\text{cost}' = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi R} + \frac{1}{6} \rho R^2 \right)$$

e, di conseguenza

$$V(r) = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi R} + \frac{1}{6} \rho R^2 \right), \quad \text{per } 0 \leq r \leq R.$$

Nella figura 9.6, è riportato l'andamento del potenziale per il caso  $R = 0.01$  m e  $\rho = 10^{-6}$  C/m<sup>3</sup>. È da notare che il potenziale al centro della sfera è pari al valore di



**Fig. 9.6.** Andamento del potenziale di una distribuzione sferica di carica con densità  $\rho = \text{cost}$  e raggio  $R$ , in funzione della distanza  $r$  dal centro della distribuzione

cost':

$$V(O) = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi R} + \frac{1}{6}\rho R^2 \right).$$

*L'esercizio precedente viene ora ampliato supponendo l'esistenza di un guscio metallico scarico di raggi  $R_1$  ed  $R_2$  ( $R < R_1 < R_2$ ) concentrico con la distribuzione di carica. Viene determinato nuovamente il potenziale in ogni punto dello spazio.*

Il guscio metallico subisce il fenomeno dell'induzione elettrostatica causato dal campo elettrico generato dalla distribuzione sferica di carica; il modulo del campo elettrico – sempre diretto radialmente – sarà, pertanto:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad \text{per } 0 \leq r \leq R_1;$$

$$E = 0, \quad \text{per } R_1 < r < R_2;$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \text{per } r \geq R_2.$$

In analogia a quanto visto in precedenza, dovendo essere costante il potenziale del guscio metallico, si ha:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{per } r \geq R_2$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \quad \text{per } R_1 < r < R_2;$$

mentre nel volume interno al guscio deve essere

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cost}, \quad \text{per } R < r < R_1$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \text{cost}', \quad \text{per } 0 \leq r \leq R.$$

La prima costante è fissata dalla condizione

$$V(R_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \text{cost} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right);$$

la seconda costante è invece fissata dalla condizione

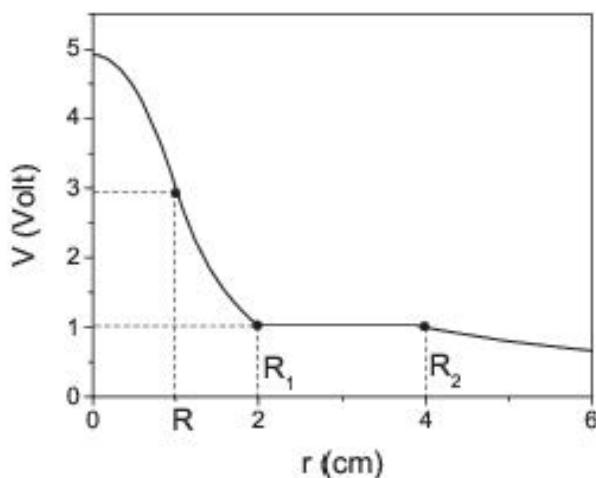
$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \Rightarrow \text{cost}' = \frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

L'andamento del potenziale per  $R = 0.01$  m,  $R_1 = 0.02$  m,  $R_2 = 0.04$  m e  $\rho = 10^{-6}$  C/m<sup>3</sup> è mostrato nella Fig. 9.7.

*L'esercizio è ulteriormente ampliato nell'ipotesi che il guscio metallico possieda una carica  $Q$ . Viene di nuovo valutato il potenziale in ogni punto dello spazio, sempre con la condizione di un valore nullo del potenziale all'infinito.*

Non diversamente dal caso precedente, il guscio metallico subirà il fenomeno dell'induzione elettrostatica: sulla sua superficie esterna a causa della presenza della carica  $Q$  la carica complessiva sarà  $q+Q$ ; di conseguenza in ogni punto dello spazio i valori dei potenziali sono eguali a quelli precedentemente trovati, aumentati della quantità  $Q/4\pi\epsilon_0 R_2$ .

*Viene ora ripresa l'originale distribuzione sferica di carica con densità  $\rho = \text{cost}$  e raggio  $R$  ipotizzando che essa sia una massa liquida incompressibile. La distribuzio-*



**Fig. 9.7.** Andamento del potenziale di una distribuzione sferica di carica con densità  $\rho = \text{cost}$  e raggio  $R$  all'interno di un guscio metallico di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , in funzione della distanza  $r$  dal centro della distribuzione

ne viene divisa in due parti, una delle quali avente carica doppia dell'altra; le due parti sono rese sferiche e vengono portate molto lontane l'una dall'altra. Viene valutato il potenziale di ciascuna delle due parti, sempre supponendo nullo il potenziale all'infinito.

Nel processo di divisione si conserva il valore della carica,  $q$ , di cui essa è composta; dette  $q_1$  e  $q_2$  le cariche possedute dalle distribuzioni aventi raggio  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente, se la prima sfera è quella avente carica doppia, deve essere:

$$q = q_1 + q_2 \quad \Rightarrow \quad q = 2q_2 + q_2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{1}{3}q \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{2}{3}q.$$

Poiché il fluido è incompressibile, la densità di carica non varia a causa del processo di divisione della distribuzione ed è quindi possibile ricavare i raggi delle due distribuzioni; infatti

$$\frac{2}{3}q = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2\pi\rho}}$$

e, analogamente

$$\frac{1}{3}q = \rho \frac{4}{3}\pi R_2^3 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\rho}}.$$

I due raggi sono quindi nel rapporto

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{2}.$$

I potenziali delle due distribuzioni sferiche di carica saranno pertanto:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{6} \frac{q}{\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1}{12} \frac{q}{\pi\epsilon_0 R_2},$$

ovvero:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2R_2}{R_1} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}.$$

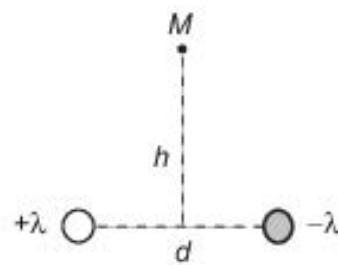
### 9.3 Domande di verifica

- Spiegare per quale ragione fisica si definisce il potenziale elettrico a meno di una costante.
- Giustificare perché in una zona di spazio dove il vettore campo elettrico è uniforme il potenziale elettrico deve essere necessariamente nullo.
- Giustificare con riferimento alle leggi note il fenomeno, così detto della gabbia di Faraday, per il quale il movimento di cariche elettriche esterno a un involucro conduttore non produce variazioni del campo elettrico all'interno.
- Ricavare l'espressione della differenza di potenziale tra due punti a distanze  $r_1$  ed  $r_2$  da un sottile filo rettilineo di raggio  $R$  carico con densità lineica uniforme  $\lambda$ .
- Ricavare l'espressione dell'energia per unità di volume relativa a un campo elettrico nel vuoto.
- Determinare il potenziale elettrostatico generato da un dipolo elettrico a una distanza molto più grande della distanza tra le due cariche del dipolo.
- Definire il momento elettrico di un dipolo e determinare l'espressione del momento meccanico cui è sottoposto se viene inserito in un campo elettrico esterno uniforme.
- Dimostrare che l'energia potenziale di un sistema composto da due cariche puntiformi,  $q_1$  e  $q_2$ , poste nel vuoto a distanza  $r$ , è uguale al lavoro che occorre compiere dall'esterno del sistema per portare le due cariche da una distanza infinita fra loro fino alla distanza  $r$ .
- Ricavare l'espressione del potenziale elettrico generato da una carica distribuita con densità areica uniforme su un piano infinito; si tracci il grafico di  $V(x)$  in funzione della distanza  $x$  dal piano.
- Descrivere le operazioni necessarie per caricare per induzione un conduttore, con segno opposto a quello di una carica a disposizione.

- Spiegare perché in condizioni stazionarie la superficie di un conduttore è equipotenziale.
- Mediante l'applicazione del teorema di Gauss, mostrare come le cariche libere su un conduttore si dispongono sulla superficie.

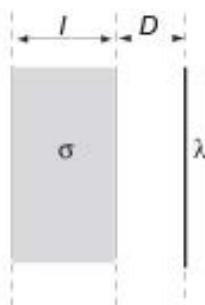
## 9.4 Esercizi

- [1] Due dipoli elettrici di eguale momento  $\mathbf{p}$ , sono posti nel vuoto a distanza  $L = 2 \text{ cm}$  in posizioni mutuamente ortogonali e ortogonali anche alla direzione della congiungente i centri. Si determini in modulo e direzione il momento meccanico che ciascuno esercita sull'altro. ( $p = qd = 3 \times 10^{-8} \text{ C}\cdot\text{m}$ ,  $L \gg d$ )
- [2] Nel vuoto, una sfera di raggio  $R_1$  ha una cavità centrale di raggio  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ). Una carica  $q$  è uniformemente distribuita nella regione di spazio compresa tra  $R_1$  e  $R_2$ . Determinare il campo elettrico in funzione della distanza  $r$  dal centro della sfera.
- [3] A distanza  $a$  da una distribuzione lineare uniforme infinitamente estesa di carica elettrica avente densità  $\lambda$ , è posta una carica puntiforme  $-Q$ . Si chiede la forza che si esercita su una carica puntiforme  $+Q$  posta a distanza  $2a$  dal filo, sulla direzione radiale uscente dal filo e passante per la carica  $-Q$ . ( $a = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = +10 \text{ nC/m}$ ,  $Q = 1 \text{ nC}$ )
- [4] Due distribuzioni rettilinee indefinite di carica, nel vuoto, sono tra loro parallele a distanza  $d$  e hanno una densità lineica di carica  $+\lambda$  e  $-\lambda$ , rispettivamente. Determinare il vettore campo elettrico in un punto  $M$  equidistante dai fili, a distanza  $h$  dal loro piano. ( $\lambda = 1 \mu\text{C/m}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $h = \sqrt{3} \text{ cm}$ )
- [5] Una moneta metallica di diametro esterno  $D = 2 \text{ cm}$ , forata al centro con foro di diametro  $d = 8 \text{ mm}$  e sufficientemente sottile da poter trascurare lo spessore, possiede una carica  $Q = 5 \text{ pC}$  disposta uniformemente sulla sua superficie. Si determini il valore del campo elettrico prodotto dalla carica presente sulla moneta in un punto dell'asse a distanza  $L = 2D$  dal piano della moneta.



- [6] Una carica  $q = 20 \text{ nC}$  è distribuita uniformemente lungo una circonferenza di raggio  $R = 9 \text{ cm}$ ; al centro  $O$  della circonferenza è posta una carica puntiforme  $Q = -100 \text{ nC}$ . Calcolare il lavoro necessario per portare la carica  $Q$  dal punto  $O$  al punto  $P$ , posto sull'asse della circonferenza, a distanza  $d = R^{0.5}$  da  $O$ .
- [7] Un tubo metallico, da considerarsi infinitamente lungo con raggio interno  $R_{\text{int}}$  ed esterno  $R_{\text{est}}$ , viene caricato con una carica che si dispone con densità per unità di lunghezza uniforme pari a  $\lambda$ . Scrivete le espressioni sia del campo elettrico, sia del potenziale elettrostatico in funzione della distanza  $r$  dall'asse del tubo per  $0 < r < \infty$
- [8] Due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  sono poste nel vuoto a una distanza  $d$  l'una dall'altra. Calcolare il lavoro che è necessario fare per ridurre la distanza di separazione fino al valore  $d/2$ .
- [9] Calcolare l'energia necessaria per portare tre cariche eguali  $q = 10^{-6} \text{ C}$  ai vertici di un triangolo equilatero di lato  $l = 1 \text{ cm}$  da distanze relative infinitamente grandi.
- [10] Un filo isolante con carica distribuita uniformemente con densità lineica  $\lambda = 70 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-1}$  è inserito e teso tra le armature circolari di un condensatore sottile, carico a  $V = 2500 \text{ V}$ , parallelamente a queste e passante per il loro asse comune. Se su di esso si esercita una forza di modulo  $F = 2.5 \text{ mN}$ , si chiede quale sia il diametro  $D$  delle armature, sapendo che esse distano di un tratto  $L = 3 \text{ mm}$ . (Si trascurino gli effetti di bordo del condensatore)
- [11] Quattro gocce sferiche di mercurio di raggio  $r = 1 \text{ cm}$  sono disposte a grande distanza le une dalle altre. Inizialmente tutte le gocce si trovano al potenziale  $V = 50 \text{ V}$  rispetto a massa. Successivamente si fanno avvicinare le gocce finché si fondono in un'unica goccia. Calcolare il potenziale rispetto a massa della goccia finale e la variazione di energia potenziale elettrostatica tra la situazione iniziale e quella finale.

- [12] Un filo rettilineo indefinito carico con densità lineica di carica  $\lambda$ , si trova nel vuoto a una distanza  $D$  dal bordo più vicino di una striscia rettilinea indefinita, di spessore trascurabile e larga  $l$ , complanare con il filo e a esso parallela avente densità di carica areica  $\sigma$ . Si ricavi la forza per unità di lunghezza che viene esercitata sul filo.

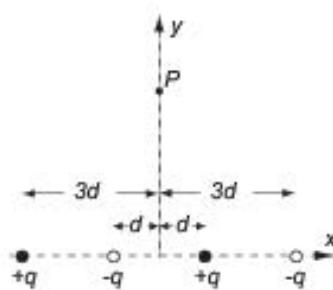


- [13] Su di un sottile disco conduttore di raggio  $R$  è uniformemente distribuita una carica positiva  $Q$ . Determinare  $Q$  sapendo che il disco, rispetto a un potenziale nullo all'infinito, si trova a potenziale  $V_0$ .
- [14] Nel vuoto, una carica positiva  $q$  è uniformemente distribuita su una superficie sferica non conduttrice di raggio  $R$ . A distanza  $d$  ( $d > R$ ) dal centro delle superficie sferica e in direzione radiale, è posto un sottile segmento non conduttore di lunghezza  $l$  che porta una carica positiva distribuita con densità lineica uniforme  $\lambda$ . Determinare l'espressione della forza con cui si respingono le due distribuzioni di carica.
- [15] Una sfera cava di raggio  $R$  priva di massa e fissa nello spazio vuoto, possiede una densità di carica superficiale  $+σ$ . Una carica puntiforme  $-q$  di massa  $m$  si trova all'infinito ed è attratta dalla sfera. Si determini la velocità con la quale la carica puntiforme arriverà nel centro della sfera supponendo che essa possieda un piccolo pertugio attraverso il quale la carica può passare.
- [16] Un cilindro conduttore di raggio  $R$  e lunghezza  $l$ , con  $l \gg R$ , posto nel vuoto, possiede una carica positiva con densità areica di carica  $σ$  sulla superficie laterale e si trova a potenziale  $V_0$ . Si determini come varia il potenziale nei punti equidistanti dagli estremi del cilindro distanti  $r$  dal suo asse ( $0 < r < \infty$ ).
- [17] Due sfere metalliche di raggio  $R_1 = 8\text{ cm}$  ed  $R_2 = 2\text{ cm}$  sono poste nel vuoto a una distanza molto grande rispetto ai raggi e vengono collegate da un filo metallico. La sfera di raggio maggiore è cava e si osserva che se al suo interno, a una distanza  $d = 2\text{ cm}$  dal centro della sfera, viene posta una carica positiva  $q$ , il suo potenziale è pari a  $V_0 = 1\text{ V}$ . Si determini il valore di  $q$ .

[18] Un piccolo dipolo elettrico il cui momento è  $\mathbf{p} = 0.08 \text{ C}\cdot\text{m}$ , è posto nel vuoto a distanza  $r$  da una carica puntiforme  $q = 10^{-9} \text{ C}$  nella stessa direzione e verso del campo elettrico da quella generato. Determinare  $r$  sapendo che la forza sul dipolo vale in modulo  $F = 1 \text{ N}$ .

[19] Una carica  $Q$  si trova su una sfera metallica di raggio  $R$  isolata nel vuoto. Si determini il raggio,  $R'$ , della sfera entro la quale è contenuto il 90% dell'energia elettrostatica del sistema.

[20] Quattro cariche elettriche puntiformi,  $q$ , identiche in valore assoluto, di cui due positive e due negative, sono disposte lungo l'asse delle  $x$ , in maniera simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ , a distanza  $d$  e  $3d$  da quest'ultimo, come mostrato nella figura. Determinare, se esiste, il punto  $P$  sull'asse delle  $y$  dove il campo elettrico creato dalle cariche è nullo.



[21] Una carica  $q = 10^{-9} \text{ C}$  è uniformemente distribuita in una sfera di raggio  $R$ . Il potenziale in un punto  $P$  a distanza  $R/2$  vale  $V(P) = 10^3 \text{ V}$ , supponendo nullo il potenziale all'infinito. Determinare il valore di  $R$ .

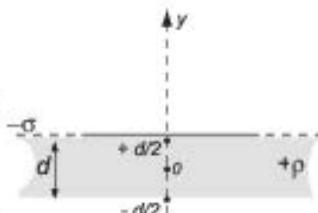
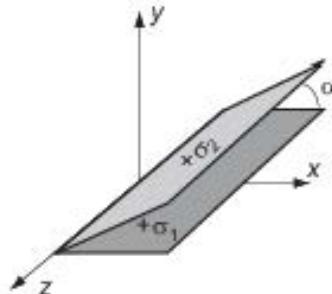
[22] È data una distribuzione di carica a simmetria sferica di densità uniforme  $\rho$  contenuta in un guscio sferico di raggio interno  $R$  e raggio esterno  $3R$ . Determinare il valore del potenziale  $V(0)$  al centro, in funzione del raggio e della densità di carica, potendo assumere nullo il potenziale in punti infinitamente distanti dalla distribuzione di carica.

[23] È data una sfera conduttrice isolata di carica  $Q_1$  e di raggio  $R_1 = 5\text{cm}$  centrata in  $O$ . Sostituendo tale sfera con un'altra di raggio  $R_2 = 2R_1$  e di carica  $Q_2 = 2Q_1$  sempre centrata in  $O$ , a quale distanza  $R^*$  da  $O$  l'energia contenuta nel volume di spazio sferico corrispondente, è uguale per le due situazioni?

[24] Nel vuoto, su due sottili anelli circolari identici, di raggio  $R$ , tra loro coassiali e distanti  $d$ , è uniformemente distribuita una carica elettrica con diverse densità  $+\lambda$  e  $-2\lambda$ . Determinare il vettore campo elettrico in un generico punto  $P$  posto tra i due anelli lungo il loro asse comune.

- [25] È data nel vuoto una distribuzione piana indefinita di carica positiva con densità areica di carica  $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Si determini la distanza tra due superfici equipotenziali tra le quali esiste una differenza di potenziale  $\Delta V = 100 \text{ V}$ .
- [26] Una carica positiva è distribuita con densità volumica uniforme  $\rho$  in un cilindro indefinito di raggio  $R$ . Si determini la differenza di potenziale tra un punto  $O$  sull'asse del cilindro e un punto  $P$  a distanza  $2R$  dall'asse.
- [27] Tre identiche larghe piastre metalliche sono disposte nel vuoto orizzontalmente e parallelamente tra loro: la distanza della piastra centrale da quella superiore e inferiore è  $d_s = 4 \text{ mm}$  e  $d_i = 1 \text{ mm}$ , rispettivamente. Un filo metallico collega la lastra superiore con quella inferiore mentre alla lastra centrale, isolata, viene data una carica positiva che si distribuisce con una densità di carica  $\sigma_s$  sulla faccia superiore e  $\sigma_i$  su quella inferiore. Determinare  $\sigma_s$  e  $\sigma_i$  sapendo che  $\sigma_s + \sigma_i = +20 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .
- [28] È data una distribuzione lineica di carica lungo una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R$ ; la densità lineica di carica è positiva,  $+\lambda$ , per metà della lunghezza della circonferenza, e negativa,  $-2\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), per l'altra metà. Si determini la componente del campo elettrico nella direzione dell'asse della circonferenza in un punto  $P$  sull'asse stesso a distanza  $x$  da  $O$ .
- [29] Tre sottili gusci sferici metallici di raggio  $r_1$ ,  $r_2$  ed  $r_3$  con  $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ , sono disposti concentricamente nel vuoto; il guscio più piccolo è scarico, quello di raggio  $r_2$  possiede una carica  $+Q$  e quello maggiore possiede una carica  $-Q$ . Si determini il campo elettrico e il potenziale in ogni punto dello spazio, potendo assumere nullo il potenziale all'infinito.
- [30] Due sfere conduttrici isolate di raggi  $R_1 = 2 \text{ cm}$  e  $R_2 = 4 \text{ cm}$  sono poste a una distanza  $d$  molto maggiore dei loro raggi e hanno una piccola carica positiva pari a  $Q_1 = Q_2 = Q$ . Vengono in seguito portate a contatto e separate di nuovo alla stessa distanza di prima. Trovare l'espressione per il rapporto tra le forze di repulsione alla distanza  $d$  prima ( $F$ ) e dopo ( $F'$ ) il contatto e il suo valore numerico.
- [31] Calcolare l'energia potenziale elettrostatica  $U$  spettante ad una sfera isolata, posta nel vuoto, di raggio  $R$  e uniformemente carica con carica totale  $Q$ .

- [32] Nel vuoto uno strato piano indefinito spesso  $d$  è uniformemente carico con densità di carica volumica  $\rho$ . Determinare il campo elettrico in funzione della distanza  $x$  dal piano mediano dello strato.
- [33] Due cariche puntiformi,  $+q$  e  $-q$  sono poste sul semiasse positivo dell'asse  $x$ : la prima nell'origine dell'asse, la seconda a distanza  $d$  da essa. Si determini il potenziale,  $V$ , e il vettore campo elettrico,  $\mathbf{E}$ , in ogni punto dell'asse  $x$ .
- [34] Il potenziale all'interno di una sfera carica dipende solo dalla distanza  $r$  dal centro secondo la legge  $V(r) = ar^2 + b$  dove  $a$  e  $b$  sono costanti. Trovare la distribuzione della densità di carica  $\rho$ .
- [35] Lungo l'asse di un sottile anello uniformemente carico posto nel vuoto, in un punto a distanza  $\bar{x} = 1\text{ m}$  dal centro dell'anello, il campo elettrico ha intensità  $50\text{ V/m}$  mentre il potenziale è di  $100\text{ V}$  (supponendo nullo il potenziale all'infinito). Si determini la carica dell'anello.
- [36] Nel vuoto sono date due distribuzioni piane indefinite di cariche positive: una con densità areica di carica  $+\sigma_1$  giace nel piano  $xz$ ; l'altra, con densità areica di carica  $+\sigma_2$ , intercetta lungo l'asse  $z$  il piano  $xz$  e forma con quest'ultimo un angolo acuto  $\alpha$ . Si determini il vettore campo elettrico in un punto  $P$  di coordinate  $(x, y, 0)$  con  $x > 0$  e  $y < 0$ .
- [37] È data nel vuoto una distribuzione piana indefinita di carica positiva con densità areica di carica  $\sigma$ . Nella distribuzione vi è un foro circolare di raggio  $R$  privo di carica. Si determini il campo elettrico in un punto  $P$  sull'asse del foro a distanza  $x$  da esso.
- [38] Nel vuoto uno strato piano indefinito di carica con densità superficiale  $-\sigma$  è adagiato sopra una distribuzione piana indefinita di carica avente spessore  $d$  e densità volumica di carica  $+\rho$ . Determinare il vettore campo elettrico,  $\mathbf{E}$ , in tutti i punti dello spazio e riportare in un grafico l'andamento di  $E_y$  in funzione della quota  $y$  supponendo  $d\rho > \sigma$ .



## 9.5 Soluzioni degli esercizi

- [1] Sul piano mediano del primo dipolo  $\mathbf{p}_1$  il campo elettrico  $\mathbf{E}$  prodotto è parallelo a  $\mathbf{p}_1$  e quindi ortogonale al secondo dipolo  $\mathbf{p}_2$ ; il momento meccanico  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{E}$  risulta parallelo alla congiungente e pari in modulo a

$$M = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 L^3} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

- [2] Data la simmetria del problema, il campo elettrico deve essere radiale in ogni punto dello spazio. Applicando la legge di Gauss a una superficie di raggio  $r$  concentrica con la distribuzione di carica, si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } r < R_2 &= 0 & E(r) &= 0 \\ \text{per } R_2 \leq r \leq R_1 & & E(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3} \\ \text{per } r > R_1 & & E(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

- [3] Il campo elettrico è diretto verso il filo e il suo modulo vale

$$E(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2a)} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ \lambda - \frac{Q}{a} \right] = 8.1 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

La forza sulla carica  $Q$  è quindi attrattiva e vale in modulo:

$$F = QE(P) = 8.1 \times 10^{-5} \text{ N}.$$

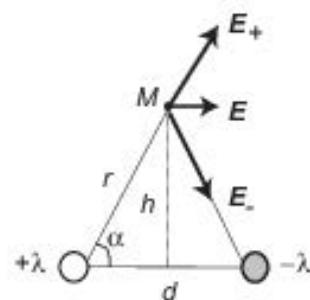
- [4]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

$$E_+ = E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad E = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha$$

dove:

$$\cos \alpha = \frac{d}{2r}, \quad r = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}},$$



pertanto:

$$E = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 \left( h^2 + \frac{d^2}{4} \right)} = 9 \times 10^5 \text{ V/m.}$$

- [5] Per la simmetria del sistema, il campo elettrico avrà la direzione dell'asse e sarà in modulo pari a

$$E = \int_{d/2}^{D/2} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta = \int_{d/2}^{D/2} \frac{2\pi R dR \sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta.$$

Utilizzando le relazioni:

$$\frac{R}{L} = \tan \vartheta \quad \text{e} \quad \frac{L}{r} = \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad dR = \frac{L}{\cos \vartheta^2} d\vartheta$$

si ha

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) = 26.65 \text{ V/m},$$

essendo  $\vartheta_1 = \arctan d/2L$  e  $\vartheta_2 = \arctan D/2L$ .

- [6] Il lavoro è dato da:  $L = -Q\Delta V$  e poiché

$$\Delta V = V(P) - V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} - \frac{1}{R} \right),$$

si ha:  $L = 1.42 \times 10^{-4} \text{ J}$ .

- [7] La carica sul tubo si dispone sulla sola superficie esterna con densità per unità di lunghezza pari a  $\lambda$ ; dal teorema di Gauss applicato a un cilindro di raggio  $r$  coassiale col tubo, di lunghezza  $L$  si ha:

$$\varphi(\mathbf{E}) = 2\pi r L E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{q}{2\pi r \epsilon_0}$$

da cui

$$\begin{aligned} \text{per } r < R_{\text{est}} \quad E(r) &= 0 & \text{e} \quad V(r) &= V(R_{\text{est}}) \\ \text{per } r > R_{\text{est}} \quad E(r) &= \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} & \text{e} \quad V(r) &= V(R_{\text{est}}) - \int_{R_{\text{est}}}^r \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} dr \\ & & & = V(R_{\text{est}}) - \frac{\lambda}{2r\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_{\text{est}}}. \end{aligned}$$

- [8] Quando la distanza di separazione tra le cariche viene ridotta da  $d$  a  $d/2$ , il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb vale:

$$L_C = \int_d^{d/2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d};$$

oppure, in termini di energia potenziale elettrostatica:

$$U_I = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}; \quad U_F = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}; \quad L_C = U_I - U_F = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

Pertanto, per ridurre la distanza tra le cariche da  $d$  a  $d/2$  sarà necessario spendere un lavoro  $L = -L_C$ .

- [9] L'energia è pari all'energia potenziale  $U = (q_1 q_2)/4\pi\epsilon_0 r$  immagazzinata nella configurazione triangolare delle cariche, quindi:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = 2.7 \text{ J.}$$

- [10] La forza esercitata dal campo elettrico presente tra le armature del condensatore sul tratto di filo compreso all'interno di questo, di lunghezza  $D$ , sarà data da

$$F = QE = \lambda D \frac{V}{L}$$

da cui direttamente

$$D = \frac{L}{\lambda V} F = 4.3 \text{ cm.}$$

- [11] La carica elettrica presente sulle quattro gocce è:

$$Q = 4(4\pi\epsilon_0 r V) = 2.23 \times 10^{-10} \text{ C.}$$

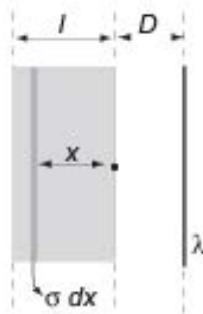
La goccia finale ha volume pari alla somma dei volumi delle quattro gocce iniziali

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4 \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \right).$$

Quindi il raggio della goccia è  $R = \sqrt[3]{4r} = 1.6$  cm; il potenziale della goccia è pari a  $V_f = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 126$  V e la variazione di energia potenziale elettrostatica è data da:

$$\Delta U_e = \frac{QV_f}{2} - \frac{QV}{2} = \frac{Q\Delta V}{2} = 2.12 \times 10^{-9}$$
 J.

- [12] Il campo elettrico generato dalla striscia è solo funzione di  $D$  e, quindi, uguale in tutti i punti del filo. Una sottile striscia di larghezza  $dx$ , essendo  $x$  la coordinata misurata dal bordo più vicino al filo ( $0 \leq x \leq l$ ), genera nella zona di spazio occupata dal filo un campo elettrico



$$dE = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0(x+D)},$$

essendo  $\lambda' = \sigma dx$  la densità lineica della sottile striscia assimilabile a un filo rettilineo indefinito. Il campo elettrico dell'intera striscia nella zona di spazio occupata dal filo sarà pertanto:

$$E(D) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dx}{x+D} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{d(x+D)}{x+D} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l+D}{D}.$$

Considerando un tratto di filo lungo  $L$ , la forza repulsiva esercitata su di esso dalla striscia vale, in modulo:

$$F = L\lambda E(D) \Rightarrow \frac{F}{L} = \lambda E(D) = \frac{\sigma\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l+D}{D}.$$

- [13] Indicando con  $\sigma = Q/\pi R^2$  la densità areica di carica sul disco, si può calcolare il potenziale al centro del disco suddividendo la sua superficie in tanti anelli

circolari a esso concentrici di raggio  $r$  e larghezza  $dr$ :

$$V_0 = \int_{\text{disco}} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi r dr}{r} = \sigma \frac{R}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Pertanto:

$$Q = 2\pi\epsilon_0 R V_0.$$

- [14] Il campo elettrico creato dalla distribuzione di carica sferica per  $r > R$ , essendo  $r$  la distanza dal centro della superficie sferica, vale:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Se allora  $dq = \lambda dr$  è la carica presente in un elemento di lunghezza  $dr$  del segmento, la forza che si esercita tra le due distribuzioni di carica sarà data da:

$$\mathbf{F} = \int_d^{d+l} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \lambda dr = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{d(d+l)} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

- [15] Il campo elettrico creato dalla sfera vale:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}, & r \geq R \\ \mathbf{E} = 0, & r < R; \end{cases}$$

essendo  $Q = \sigma 4\pi R^2$  la carica posseduta dalla sfera e  $\mathbf{r}$  il versore radiale uscente dal centro della sfera. Il campo elettrico, pertanto, fa lavoro,  $L$ , solo per portare la carica  $-q$  dall'infinito fino alla superficie della sfera; al suo interno, invece, la carica si muoverà di moto rettilineo uniforme, con velocità  $v_F$ , non agendo alcuna forza su di essa.

$$L = \Delta T = \frac{1}{2} mv_F^2 = -\Delta U = -\left(-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}\right) \Rightarrow v_F = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m R}}.$$

In alternativa, si può calcolare direttamente il lavoro fatto dalla forza di Coulomb:

$$L = \int_{\infty}^R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\infty}^R -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R},$$

e considerando che  $L = \Delta T = \frac{1}{2}mv_F^2$ , si ottiene per  $v_F$  il valore precedentemente trovato.

- [16] Poiché  $l \gg R$ , il cilindro, per punti equidistanti dagli estremi, è assimilabile a un filo indefinito con densità lineica di carica  $\lambda = \sigma l$ ; pertanto, in un punto a distanza  $r > R$  dall'asse si avrà un campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

essendo  $\mathbf{r}$  il vettore posizione del punto rispetto all'asse. All'interno del cilindro, invece, il campo elettrico sarà nullo.

$$V(r) = - \int \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{l} + \text{cost} = - \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} + \text{cost} = - \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cost}.$$

Poiché  $V(R) = V_0$ , si ha che:

$$\text{cost} = V_0 + \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0} \ln R \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{\sigma l}{2\pi\epsilon_0} (\ln R - \ln r) + V_0 \quad (r \geq R).$$

All'interno del cilindro ( $r < R$ ), il potenziale avrà valore costante pari a  $V_0$ .

- [17] Per induzione, sulla superficie della sfera maggiore, vi sarà una carica  $+q$ ; tale carica si distribuirà tra le due sfere affinché, all'equilibrio elettrostatico, esse risultino allo stesso potenziale:  $V_1 = V_2 = V_0$ . Indicando con  $q_1$  e  $q_2$  le cariche sulle superfici delle sfere di raggio  $R_1$  ed  $R_2$ , rispettivamente, si ha:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = V_0 4\pi\epsilon_0 R_1 \\ q_2 = V_0 4\pi\epsilon_0 R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow q_1 + q_2 = q = V_0 4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2) = 1.1 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

- [18] L'energia potenziale del dipolo è  $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pq/4\pi\epsilon_0 r^2$ , quindi:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{pq}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{forza attrattiva}),$$

da cui si ricava

$$r = \sqrt[3]{\frac{pq}{2\pi\epsilon_0 F}} = 1.13 \text{ m}.$$

[19] La sfera possiede un'energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R};$$

la densità di energia elettrostatica in una sfera di raggio  $r$ , con  $r > R$ , è

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}.$$

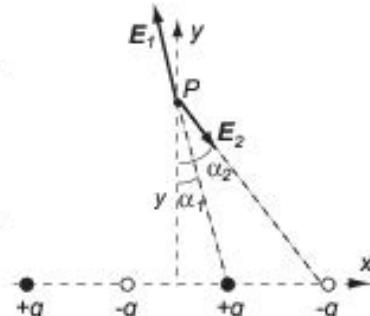
L'energia potenziale nel volume limitato da due sfere di raggio  $r$  ed  $r + dr$  è pari a:

$$dU = w 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}.$$

Date le condizioni poste dal problema deve quindi risultare:

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^{R'} \frac{dr}{r^2} = 0.9 \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = \frac{0.9}{R} \quad \Rightarrow \quad R' = 10R.$$

[20] Data la simmetria della distribuzione delle cariche,  $E_y(P) = 0$ : occorre quindi che sia nulla la sola componente lungo l'asse delle  $x$ ,  $E_x$ . Detto  $E_1(P)$  ed  $E_2(P)$  il modulo del campo elettrico ne punto  $P$  creato dalle cariche a distanza  $d$  e  $3d$  dall'asse  $y$ , rispettivamente, si può scrivere:



$$E_1(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(d^2 + y^2)}, \quad E_2(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(9d^2 + y^2)}$$

ovvero, considerando le componenti lungo  $x$ :

$$E_{1x}(P) = E_1(P) \sin \alpha_1, \text{ dove } \sin \alpha_1 = \frac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}}$$

$$E_{2x}(P) = E_2(P) \sin \alpha_2, \text{ dove } \sin \alpha_2 = \frac{3d}{\sqrt{9d^2 + y^2}}.$$

Poiché le due componenti del campo elettrico lungo l'asse delle  $x$  hanno verso

opposto, l'annullarsi del campo elettrico in  $P$  richiede che:

$$2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0(d^2 + y^2)} \frac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}} = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0(9d^2 + y^2)} \frac{3d}{\sqrt{9d^2 + y^2}}.$$

Semplificando, si ha:

$$\frac{1}{d^2 + y^2} = \frac{3^{2/3}}{9d^2 + y^2} \Rightarrow 9d^2 + y^2 - 3^{2/3}(d^2 + y^2) = 0,$$

da cui

$$y = d \sqrt{\frac{3^{2/3} - 9}{1 - 3^{2/3}}} \simeq 2.53d.$$

- [21] Dal momento che il dato fornito riguarda il potenziale in un punto, per trovare il raggio della sfera  $R$  occorre ricavarlo in funzione del potenziale. A sua volta il potenziale è ricavabile dal campo elettrico che ha espressioni differenti a seconda se si considera l'interno  $r \leq R$  o l'esterno  $r \geq R$  della sfera.

$$\begin{aligned} \text{se } r \geq R &\Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ \text{se } r \leq R &\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r. \end{aligned}$$

Quindi l'espressione del potenziale nel punto  $P$  sarà

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_{R/2}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R/2}^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( R^2 - \frac{R^2}{4} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{8\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

si può esprimere  $\rho$  in funzione del dato  $q$  considerando che per densità omogenee,  $\rho = q / (\frac{4}{3}\pi\epsilon_0 R^3)$  per cui, semplificando

$$V(P) = \frac{11}{32} \frac{q}{\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow R = \frac{11}{32} \frac{q}{\pi\epsilon_0 V(P)} = 1.24 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

- [22] Le espressioni del potenziale nelle diverse porzioni di spazio si possono ricavare dalla conoscenza del campo elettrico, a sua volta derivabile dalla legge di

Gauss. Per cui, per il campo elettrico si ha:

$$\text{se } r \leq R \quad \Rightarrow \quad E_1 = 0$$

$$\text{se } R \leq r \leq 3R \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right)$$

$$\text{se } r \geq 3R \quad \Rightarrow \quad E_3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{26R^3}{r^2} \right)$$

Poiché il potenziale all'infinito è nullo, si parte da questo valore noto per arrivare fino al punto nel quale si vuole conoscere il potenziale, per cui

$$\begin{aligned} \text{se } r \geq 3R \quad V(r \geq 3R) &= \int_r^\infty E_3 dr = \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{26R^3}{r} \right) \Rightarrow V(3R) = \frac{26}{9} d \frac{\rho}{\epsilon_0} R^2; \end{aligned}$$

proseguendo fino alla superficie interna

$$V(R) - V(3R) = \int_R^{3R} E_2 dr = \frac{10}{9} \frac{\rho}{\epsilon_0} R^2.$$

Quindi, dal momento che il potenziale è costante nella zona interna del guscio,

$$V(0) = V(R) = 4 \frac{\rho}{\epsilon_0} R^2.$$

- [23] Per la prima sfera, l'energia  $U_1$  contenuta nella porzione sferica di spazio a distanza  $R^*$  è data da

$$U_1 = \int_{R_1}^{R^*} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R^*} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R^*} \right).$$

Eguagliando tale energia a quella dell'espressione analoga per la seconda sfera si ha:

$$\frac{Q_1^2}{R_1} - \frac{Q_1^2}{R^*} = \frac{Q_2^2}{R_2} - \frac{Q_2^2}{R^*}$$

da cui

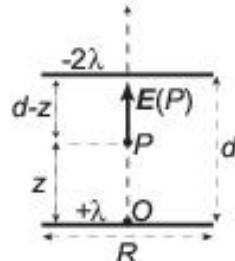
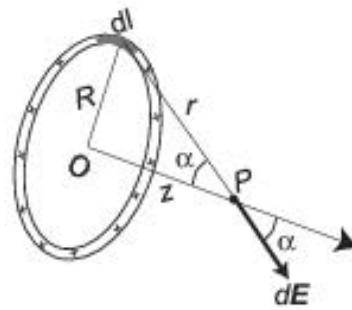
$$R^* = 3R_1 = 15 \text{ cm.}$$

- [24] Per un anello sottile uniformemente carico, il campo elettrico in un generico punto  $P$  posto sull'asse dell'anello (orientato come l'asse  $z$ ) vale:

$$\mathbf{E} = \int_{\text{anello}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \mathbf{k} = \\ \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \mathbf{k} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k},$$

con  $\mathbf{k}$  versore dell'asse. Pertanto:

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_{+\lambda}(P) + \mathbf{E}_{-2\lambda}(P) = \\ = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} + \frac{2\lambda R}{2\epsilon_0 [R^2 + (d-z)^2]^{3/2}} \mathbf{k} = \\ = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + 2 \frac{d-z}{[R^2 + (d-z)^2]^{3/2}} \right] \mathbf{k}.$$



- [25] Il modulo del campo elettrico creato dalla distribuzione vale  $E = \sigma/2\epsilon_0$ ;

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \Delta V = -E\Delta x,$$

quindi:

$$|\Delta x| = \frac{\Delta V}{E} = \frac{2\epsilon_0 \Delta V}{\sigma} \simeq 1.8 \text{ mm.}$$

- [26] Il campo elettrico creato dalla distribuzione di carica sarà diretto radialmente; applicando la legge di Gauss a un cilindro, coassiale con la distribuzione di carica, di altezza  $L$  e raggio  $r$ , si ha:

$$\begin{cases} E2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 L \rho \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{per } 0 \leq r \leq R; \\ E2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \pi R^2 L \rho \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{per } r \geq R. \end{cases}$$

Quindi:

$$V_O - V_P = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R r dr + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln 2 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} (1 + 2 \ln 2).$$

- [27] La carica positiva della lastra centrale induce cariche negative con densità superficiale  $-\sigma_s$  e  $-\sigma_i$  sulle superfici della lastra superiore e inferiore, rispettivamente, affacciate verso la lastra centrale stessa. Poiché la differenza di potenziale tra le lastre esterne è nulla, deve essere:

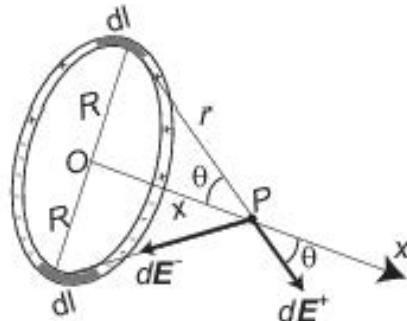
$$-\frac{\sigma_i}{\epsilon_0} d_i + \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} d_s = 0,$$

che insieme alla relazione  $\sigma_s + \sigma_i = +20 \mu\text{C}/\text{m}^2$  fomisce un sistema di due equazioni nelle due incognite  $\sigma_s$  e  $\sigma_i$ ; la soluzione è:  $\sigma_s = +4 \mu\text{C}/\text{m}^2$  e  $\sigma_i = +16 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .

- [28] Con riferimento alla figura a lato:

$$d\mathbf{E}_x = (dE^+ - dE^-) \cos \vartheta \mathbf{i}$$

dove  $\mathbf{i}$  è il versore dell'asse  $x$  e



$$dE^+ = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad dE^- = 2dE^+, \quad \cos \vartheta = \frac{x}{r}.$$

Pertanto:

$$d\mathbf{E}_x = -\frac{\lambda x dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i}$$

e quindi:

$$\mathbf{E}_x = \int_0^{\pi R} d\mathbf{E}_x = -\frac{\lambda Rx}{4\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i}.$$

- [29] Data la distribuzione di carica, il campo elettrico risulterà radiale e si può determinare con la legge di Gauss.

$$\text{Per } r \geq r_3 \quad \mathbf{E}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) = \text{cost.} = 0$$

dovendo essere nullo il potenziale all'infinito.

$$\text{Per } r_2 \leq r \leq r_3 \quad \mathbf{E}(r) = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cost},$$

dove la costante è fissata dalla condizione:

$$V(r_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cost} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_3} \quad \Rightarrow \quad V(r) = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right).$$

$$\text{Per } 0 \leq r \leq r_2 \quad \mathbf{E}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(r) = \text{cost} = +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right),$$

cioè pari al valore assunto sulla superficie del guscio di raggio  $r_2$ .

[30] La forza di repulsione prima del contatto è:

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

Quando le sfere sono poste in contatto la carica si distribuirà in maniera tale che  $Q'_1 + Q'_2 = 2Q$  inoltre andranno allo stesso potenziale

$$V = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Risolvendo queste due condizioni si trova:

$$Q'_1 = \frac{2QR_1}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad Q'_2 = \frac{2QR_2}{R_1 + R_2}.$$

Dopo il contatto una volta che le sfere vengono riportate a distanza  $d$  la forza di repulsione avrà espressione:

$$F' = \frac{Q'_1 Q'_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{4Q^2 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2};$$

pertanto cui il rapporto tra le forze sarà:

$$\frac{F}{F'} = \frac{Q^2}{Q'_1 Q'_2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1 R_2} = \frac{9}{8}.$$

[31] L'energia elettrostatica si può calcolare tramite il campo elettrico il quale ha

due differenti espressioni una interna e una esterna alla sfera:

$$\text{per } r \leq R \quad 4\pi r^2 E_1 = d \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

$$\text{per } r \geq R \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Quindi i due contributi all'energia elettrostatica dati dal campo elettrico all'interno  $U_1$  e all'esterno  $U_2$  saranno

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{\tau_{\text{int}}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 4\pi \int_0^R E_1^2 r^2 dr = \\ &= \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{Q^2}{10(4\pi\epsilon_0)} \frac{1}{R} \\ U_2 &= \int_{\tau_{\text{ext}}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 d\tau = \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

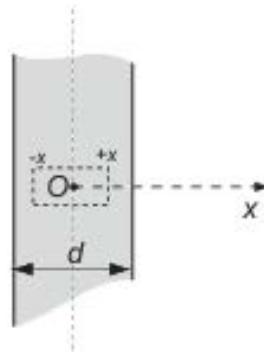
L'energia elettrostatica potenziale totale sarà infine

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

- [32] Per la simmetria della distribuzione di carica, il campo elettrico sarà diretto lungo l'asse delle  $x$  (avente origine nel punto  $O$  appartenente al piano mediano della distribuzione di carica) con componente positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ ; si può applicare, pertanto, il teorema di Gauss a un cilindro retto di raggio  $r$  e altezza  $2x$ , coassiale con l'asse delle  $x$  e baricentrale nel piano mediano della distribuzione di carica:

$$\text{per } x < d \quad 2E_0(\pi r^2) = \frac{\rho(\pi r^2)2x}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{\rho x}{\epsilon_0};$$

$$\text{per } x \geq d \quad 2E_0(\pi r^2) = \frac{\rho(\pi r^2)d}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}.$$



[33] Il potenziale nei punti dell'asse  $x$  generato dalla carica  $+q$  vale:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(-x)}, & x < 0; \\ V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}, & x > 0. \end{cases}$$

Il potenziale nei punti dell'asse  $x$  generato dalla carica  $-q$  vale:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(d-x)}, & x < d; \\ V(x) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(x-d)}, & x > d. \end{cases}$$

Il potenziale totale è quindi:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|x|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(d-x)}, & x < d; \\ V(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x-d)}, & x > d. \end{cases}$$

Il campo elettrico  $\mathbf{E}$  lungo l'asse  $x$  è la somma della componente lungo tale asse dei vettori campi elettrici generati dalle due cariche singolarmente; pertanto:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \mathbf{i}, & x < 0; \\ \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right] \mathbf{i}, & 0 < x < d; \\ \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-d)^2} \right] \mathbf{i}, & x > d, \end{cases}$$

con  $\mathbf{i}$  versore sull'asse  $x$ .

[34] Poiché il potenziale dipende solo da  $r$ , il campo elettrico è espresso dalla seguente relazione:

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla_r V = -\frac{dV}{dr} = -2ar\hat{\mathbf{r}}.$$

Dalla legge di Gauss deve essere:

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E(r) \equiv -8\pi a r^3 \epsilon_0 = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr;$$

pertanto  $\rho$  deve essere una costante,  $\rho_0$ , tale che

$$-2ar^3 \epsilon_0 = \frac{\rho_0 r^3}{3}$$

da cui  $\rho_0 = -6a\epsilon_0$ .

- [35] Per un anello di raggio  $R$ , uniformemente carico con densità di carica lineica  $\lambda$ , l'espressione del campo elettrico e del potenziale in un generico punto posto sull'asse dell'anello a distanza  $x$  dal suo centro hanno la seguente espressione:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathbf{i} \quad V(x) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}},$$

essendo  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse  $x$ . Valutando il campo elettrico e il potenziale nel punto  $\bar{x}$  si ha:

$$\frac{E(\bar{x})}{V(\bar{x})} = \frac{\bar{x}}{(R^2 + \bar{x}^2)^{1/2}} \Rightarrow R = \bar{x} \sqrt{\left[ \frac{V(\bar{x})}{E(\bar{x})} \right]^2 - 1} = \sqrt{3}\bar{x} = \sqrt{3} \text{ m.}$$

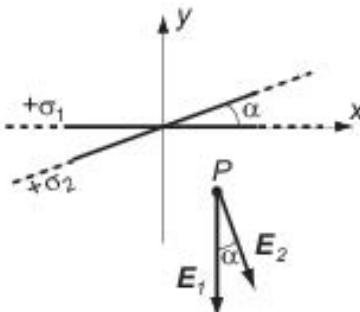
Il valore della densità di carica può essere ricavata, ad esempio, dall'espressione del potenziale:

$$\lambda = V(\bar{x}) \frac{2\epsilon_0}{R} \sqrt{R^2 + \bar{x}^2} \simeq 2 \times 10^{-9} \text{ C/m},$$

e quindi:  $q = \lambda 2\pi R \simeq 2.2 \times 10^{-8} \text{ C}$ .

- [36] La figura a lato mostra in sezione la disposizione delle distribuzioni di cariche. Nel punto  $P$  di coordinate  $(x, y, 0)$  con  $x > 0$  e  $y < 0$ , i campi elettrici sono

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r},$$



essendo  $\mathbf{r}$  il vettore che, partendo normalmente alla distribuzione di carica  $\sigma_2$ , identifica la posizione di  $P$ . Pertanto:

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2\epsilon_0} [\sigma_2 \sin \alpha \mathbf{i} - (\sigma_1 + \sigma_2 \cos \alpha) \mathbf{j}],$$

con  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  i versori degli assi  $x$  e  $y$ , rispettivamente.

- [37] La distribuzione di carica proposta può essere pensata come la sovrapposizione di una distribuzione piana indefinita uniforme con densità areica di carica  $+\sigma$ , sovrapposta a una distribuzione piana circolare di raggio  $R$  uniformemente carica con densità areica di carica  $-\sigma$ . Pertanto

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_P(P) + \mathbf{E}_C(P)$$

dove  $\mathbf{E}_P(P)$  ed  $\mathbf{E}_C(P)$  rappresentano i campi elettrici creati dalla distribuzione piana e da quella circolare, rispettivamente. Se si indica con  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse  $x$ ,  $\mathbf{E}_P = \sigma/2\epsilon_0 \mathbf{i}$ ; per quanto riguarda il campo elettrico sull'asse della distribuzione piana circolare (assimilabile a un disco di raggio  $R$ ), esso può essere facilmente trovato a partire dall'espressione del campo elettrico sull'asse di un sottile anello uniformemente carico; si ha:

$$\mathbf{E}_C(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \mathbf{i}$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \mathbf{i} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \mathbf{i}.$$

- [38] Il campo elettrico dello strato piano vale:

$$\mathbf{E}_p = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j} & \text{per } y > d/2 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j} & \text{per } y < d/2, \end{cases}$$

avendo indicato con  $\mathbf{j}$  il versore dell'asse  $y$ ; per la distribuzione volumica, il campo si ottiene applicando il teorema di Gauss a un cilindro retto con asse

parallelo all'asse  $y$ :

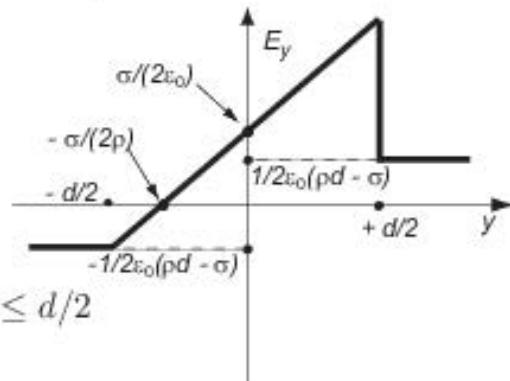
$$\mathbf{E}_d = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{j} & \text{per } y > d/2 \\ \frac{\rho y}{\epsilon_0} \mathbf{j} & \text{per } -d/2 \leq y \leq d/2 \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \mathbf{j} & \text{per } y < -d/2. \end{cases}$$

Il campo elettrico totale,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_d$ ,

è pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0}(\rho d - \sigma) \mathbf{j} & \text{per } y > d/2 \\ \frac{1}{\epsilon_0}(\rho y + \sigma/2) \mathbf{j} & \text{per } -d/2 \leq y \leq d/2 \\ -\frac{1}{2\epsilon_0}(\rho d - \sigma) \mathbf{j} & \text{per } y < -d/2. \end{cases}$$

Per  $d\rho > \sigma$ ,  $E_y(y)$  ha l'andamento mostrato a lato.





# Capacità elettrica e dielettrici

## 10.1 Esercizio guida – Sistemi di condensatori

### Teoria

La capacità di un condensatore è definita dal rapporto tra la carica  $Q$  posta su un'armatura del condensatore e la differenza di potenziale,  $\Delta V$ , alla quale si porta rispetto all'altra armatura:

$$C = Q/\Delta V.$$

Affinché due condensatori – o sistemi di condensatori – collegati tra due punti  $A$  e  $B$  siano equivalenti, occorre che, per la medesima quantità di carica posta nel punto  $A$  si stabilisca la stessa differenza di potenziale rispetto al punto  $B$ .

Un sistema di  $N$  condensatori in parallelo, i quali presentino, cioè, la stessa differenza di potenziale  $V$  tra le armature, si comporta come un unico condensatore di capacità pari alla somma delle capacità dei singoli condensatori del sistema:

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i. \quad (10.1)$$

Se invece gli  $N$  condensatori sono collegati in serie, ovvero possiedono la stessa quantità di carica  $q$  sulle armature, l'inverso della capacità equivalente del sistema è pari alla somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori componenti il sistema:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (10.2)$$

Nel caso di condensatori collegati in parallelo, sulle armature dell' $i$ -esimo condensatore vi sarà una carica  $q_i = C_i \Delta V$ ; il collegamento in serie di condensatori prevede, invece che la differenza di potenziale tra le armature dell' $i$ -esimo condensatore valga  $\Delta V_i = q/C_i$ .

### Argomento

Viene dato un sistema di condensatori tra loro variamente collegati e, come problema diretto, si determina la capacità complessiva esistente tra due punti del sistema. Successivamente si analizza come si riflette sulla capacità complessiva del sistema la variazione della capacità di uno dei condensatori componenti. Come problema inverso si determinano le cariche possedute da ciascun condensatore del sistema una volta applicata una differenza di potenziale tra due suoi punti.

#### *Operazioni per la valutazione della capacità equivalente*

Nel valutare la capacità equivalente di un sistema di condensatori occorre individuare quali condensatori sono in serie o in parallelo così da poter utilizzare l'Eq. (10.1) e l'Eq. (10.2) per ridurre, con semplificazioni successive, il sistema a un unico condensatore la cui capacità è, appunto, equivalente alla capacità del sistema di partenza. Questa operazione può, a volte, essere semplificata dall'esistenza di una simmetria nella disposizione dei condensatori componenti il sistema che permette di dedurre il potenziale in punti simmetricamente posti.

Dalla carica posseduta dalla capacità equivalente del sistema, operando a ritroso rispetto ai passaggi che ne avevano permesso la sua determinazione, si giunge alla valutazione delle cariche presenti sulle armature di ciascun condensatore del sistema.

Si consideri il sistema di tre condensatori mostrato nella Fig. 10.1a; viene determina-

ta la capacità complessiva esistente tra i punti  $P$  e  $Q$ , tra i punti  $P$  ed  $R$  e a quella tra i punti  $Q$  ed  $R$ .

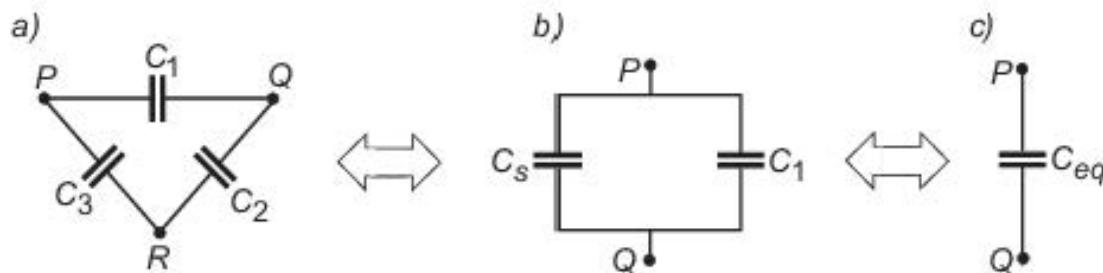
Applicando una differenza di potenziale tra  $P$  e  $Q$ , i condensatori  $C_2$  e  $C_3$  sono in serie e possono essere sostituiti con un condensatore di capacità  $C_s = C_2C_3/(C_2+C_3)$ . Tale condensatore è in parallelo con  $C_1$  (Fig. 10.1b); pertanto la capacità complessiva, o equivalente, tra i punti  $P$  e  $Q$  è eguale a:  $C_{eq} = C_1 + C_s$  (Fig. 10.1c).

Se invece si applica una differenza di potenziale tra  $P$  ed  $R$ , il sistema di condensatori dato è equivalente alla serie di  $C_1$  e  $C_2$  in parallelo a  $C_3$ , quindi:  $C_{eq} = C_3 + C_1C_2/(C_1 + C_2)$ ; analogamente, se la differenza di potenziale è invece applicata tra  $Q$  ed  $R$ , il sistema di condensatori equivale alla serie di  $C_1$  e  $C_3$  in parallelo a  $C_2$ , quindi:  $C_{eq} = C_2 + C_1C_3/(C_1 + C_3)$ .

Come si nota la capacità finale è sempre costituita dal parallelo di un condensatore con la serie dei restanti due; ciò è dovuto al fatto che la distribuzione dei condensatori costituenti il sistema rende, dal punto di vista elettrico, analoghi i tre casi sopra esaminati.

Viene affrontato il problema inverso della determinazione della carica posseduta da ciascun condensatore del sistema quando una differenza di potenziale  $V_0$  venga applicata tra  $P$  e  $Q$ , o tra  $P$  ed  $R$ , o tra  $Q$  ed  $R$ .

Viene qui considerato il caso in cui una differenza di potenziale  $V_0$  venga applicata tra i punti  $P$  e  $Q$ , lasciando al lettore l'ovvia soluzione negli altri due casi. La capacità



**Fig. 10.1.** Sistema di condensatori equivalenti

equivalente  $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 C_3 / (C_2 + C_3)$  (Fig. 10.1c) avrà sulle armature una carica  $q = C_{\text{eq}} V_0$ ; di conseguenza i condensatori  $C_s$  e  $C_1$  possiedono, rispettivamente, una carica  $q_s = C_s V_0$  e  $q_1 = C_1 V_0$ . Poiché il condensatore  $C_s$  è la serie dei condensatori  $C_2$  e  $C_3$ , sulle armature di entrambi vi sarà una carica  $q_s$ .

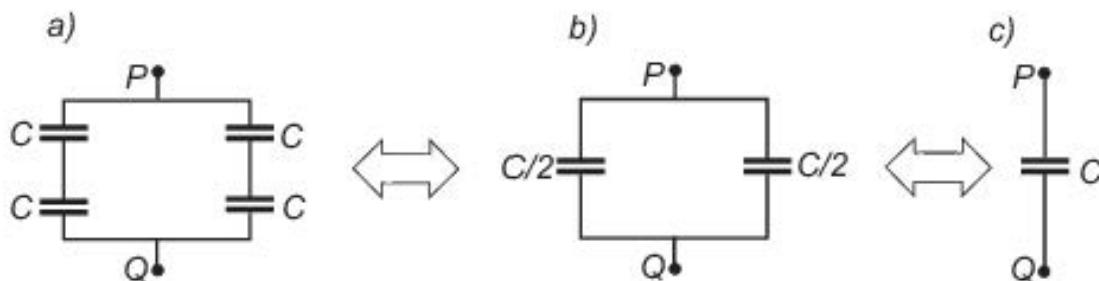
*Si analizza il caso di quattro condensatori, supposti uguali, collegati tra loro come mostrato nella Fig. 10.2a e viene valutata la capacità complessiva esistente tra i punti P e Q.*

Il sistema di condensatori dato è equivalente a quello di due condensatori uguali (ciascuno di capacità  $C$ ) tra loro in serie e, quindi, a quello di due condensatori (di capacità  $C/2$ , Fig. 10.2b) in parallelo tra loro e, infine, a quello di un condensatore di capacità  $C$  (Fig. 10.2c) che sarà, pertanto, la capacità equivalente del sistema.

È da notare che, per la disposizione dei condensatori, tutti i punti del circuito simmetricamente disposti rispetto a un piano passante per i punti  $P$  e  $Q$  e normale al circuito, assumano lo stesso potenziale.

*Si determina la carica posseduta dai quattro condensatori del sistema ora visto quando una differenza di potenziale  $V_0$  viene applicata tra P e Q*

Data l'equivalenza tra il sistema di condensatori iniziale e quello di Fig. 10.2c, la carica sulle armature di quest'ultimo sarà  $q = CV_0$ . Di conseguenza, sulle armature di ciascuno dei due condensatori di capacità  $C/2$  di Fig. 10.2b vi deve essere una quantità di carica pari a  $q/2$ ; ciò implica che i quattro condensatori di eguale capacità



**Fig. 10.2.** Sistema di condensatori equivalenti

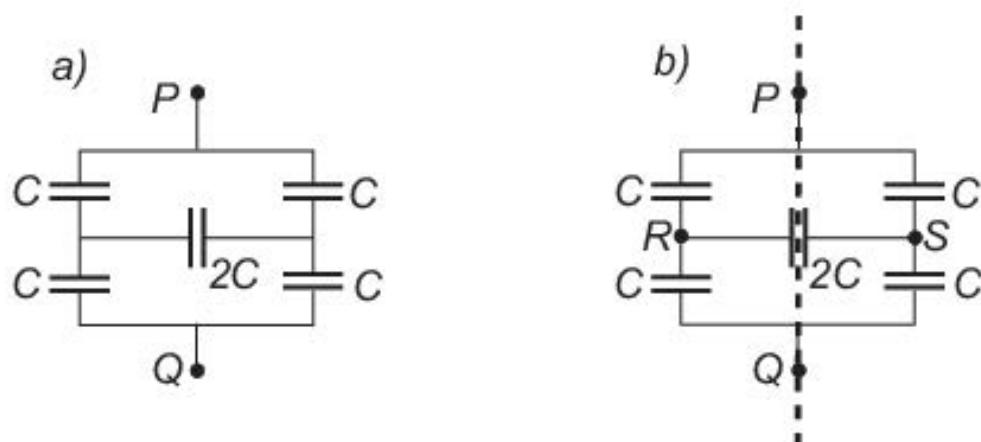
$C$  del sistema di partenza (Fig. 10.2a), debbano possedere ciascuno una carica  $q/2$ .

*Il numero di condensatori viene aumentato introducendo, ad esempio, rispetto al caso precedente, un condensatore di capacità doppia rispetto agli altri collegato così come mostrato a nella Fig. 10.3a, e si valuta nuovamente la capacità complessiva esistente tra i punti  $P$  e  $Q$ .*

Anche in questo caso il sistema di condensatori possiede un piano di simmetria mostrato in traccia dalla linea tratteggiata della Fig. 10.3b: applicando una differenza di potenziale  $V_0$  tra  $P$  e  $Q$ , il potenziale del punto  $R$  è eguale a quello del punto  $S$  e il condensatore di capacità  $2C$  sarà sempre scarico. Di conseguenza, il sistema di condensatori dato è equivalente a quello formato da quattro condensatori eguali di capacità  $C$  visto nella pagina precedente e, quindi,  $C_{\text{eq}} = C$ .

*Per quanto ora detto riguardo al condensatore di capacità  $2C$ , il problema inverso della determinazione della carica posseduta dai singoli condensatori del sistema quando la differenza di potenziale viene applicata tra  $P$  e  $Q$ , è identico a quello dei quattro condensatori eguali precedentemente analizzato.*

*Mantenendo il sistema di cinque condensatori ora visto, viene supposto che uno*



**Fig. 10.3.** Sistema di condensatori equivalenti

dei quattro condensatori uguali, ad esempio quello in alto a destra, raddoppi la sua capacità come mostrato nella Fig. 10.4a in questa pagina. Si valuta nuovamente la capacità esistente tra i punti  $P$  e  $Q$ .

Il concetto di simmetria invocato in precedenza viene ora meno: applicando una differenza di potenziale  $V_0$  tra i punti  $P$  e  $Q$ ,  $V_R \neq V_S$ . In questo caso, in virtù del principio di equivalenza tra due sistemi di condensatori (v. pag. 411), la risoluzione del problema inverso della determinazione delle cariche sulle armature dei condensatori componenti il sistema permette di affrontare il problema diretto della valutazione della sua capacità complessiva.

Si supponga, con totale arbitrarietà, che le cariche sui condensatori siano quelle riportate in Fig. 10.4b. Poiché i conduttori cui appartengono i punti  $R$  ed  $S$  sono scarichi, subendo unicamente il fenomeno dell'induzione elettrostatica, si scriverà:

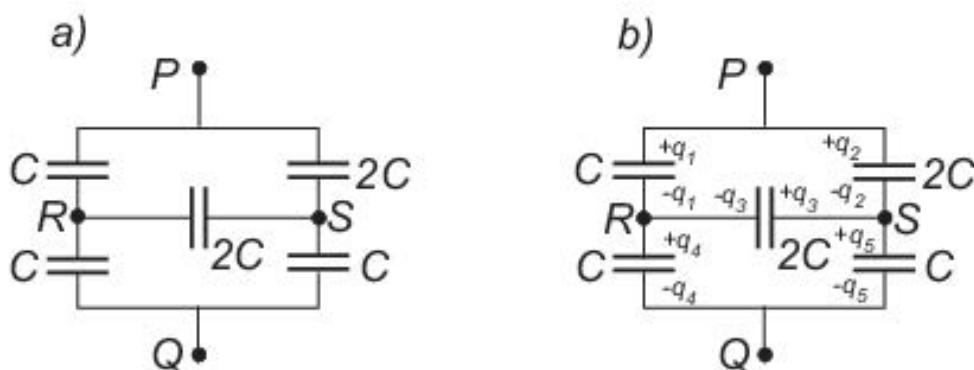
$$-q_1 - q_3 + q_4 = 0 \quad (10.3)$$

$$-q_2 + q_3 + q_5 = 0. \quad (10.4)$$

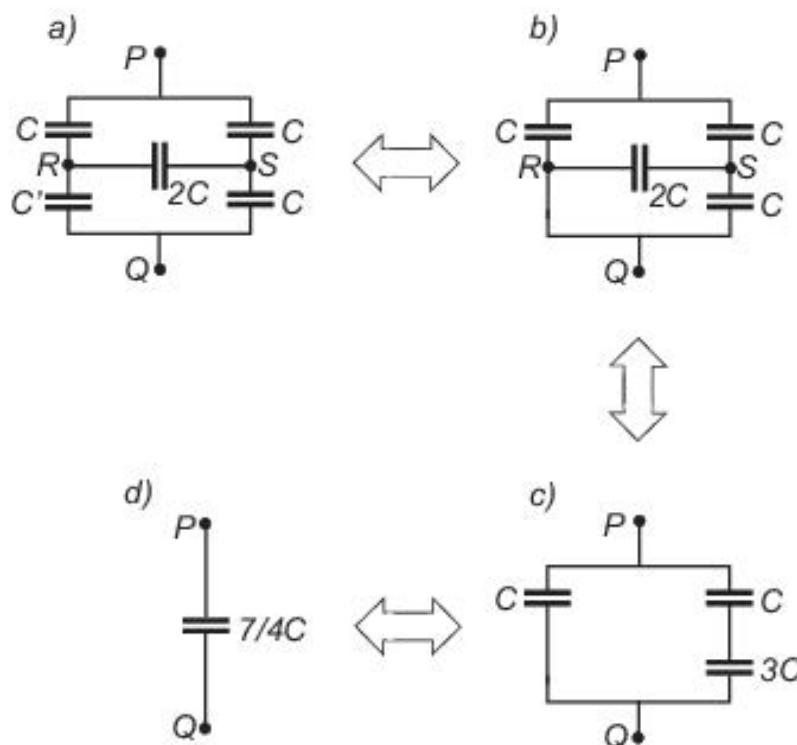
Considerando la maglia superiore e inferiore del sistema di condensatori di Fig. 10.4 si avrà inoltre:

$$\frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{2C} - \frac{q_3}{2C} = 0 \quad (10.5)$$

$$\frac{q_4}{C} + \frac{q_3}{2C} - \frac{q_5}{C} = 0. \quad (10.6)$$



**Fig. 10.4.** Cariche sulle armature dei condensatori



**Fig. 10.5.** Sistema di condensatori equivalenti in cui  $C' \gg C$

Un'ultima relazione tra le cariche si può ottenere considerando che  $V_Q - V_P = V_0$ ; pertanto, percorrendo il circuito dal punto  $Q$  al punto  $P$  passando, ad esempio, per il punto  $R$  si avrà:

$$\frac{q_4}{C} + \frac{q_1}{C} = V_0. \quad (10.7)$$

Le cinque equazioni che vanno dall'Eq. (10.3) all'Eq. (10.7) costituiscono un sistema nei valori incogniti delle cinque cariche possedute dai condensatori; la soluzione è:

$$q_1 = \frac{7}{16}CV_0, \quad q_2 = \frac{3}{4}CV_0, \quad q_3 = \frac{1}{8}CV_0, \quad q_4 = \frac{9}{16}CV_0, \quad q_5 = \frac{5}{8}CV_0.$$

La capacità equivalente è uguale a

$$C_{\text{eq}} = \frac{q_P}{V_0}$$

dove  $q_P = q_1 + q_2 = \frac{19}{16}CV_0$  e, pertanto,  $C_{\text{eq}} = \frac{19}{16}C$ .

Partendo dal sistema di condensatori mostrato a sinistra nella Fig. 10.3 a pagina 415, viene ora ipotizzato che uno dei quattro condensatori eguali, ad esempio quello in basso a sinistra, abbia una capacità  $C' \gg C$  (Fig. 10.5a). Viene determinata la capacità complessiva del sistema esistente tra i punti P e Q.

Poiché  $C' \gg C$ , ne discende che  $V_Q - V_R \simeq 0$ ; di conseguenza il sistema si può semplificare come mostrato in successione nella Fig. 10.5 fino alla capacità equivalente pari a  $7/4C$ .

## 10.2 Esercizio guida – Energia immagazzinata nei condensatori

### Teoria

In una regione di spazio in cui è definito un campo elettrostatico, l'energia elettrostatica contenuta in un volume  $d\tau$  all'interno della regione in cui il campo elettrico vale  $E$  è

$$dU = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau. \quad (10.8)$$

L'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando l'Eq. (10.8) in tutto lo spazio in cui il campo elettrico è diverso da zero:

$$U = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau.$$

L'energia potenziale  $U$  associata al campo elettrostatico esistente tra le armature di un condensatore di capacità  $C$  che possiede una carica  $Q$ , è data da:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

essendo  $V$  la differenza di potenziale tra le armature.

### Argomento

Viene determinata la variazione di energia potenziale elettrostatica di sistemi formati da due condensatori diversamente carichi: essi vengono tra loro collegati in vario modo senza la presenza di un generatore di forza elettromotrice. Successivamente un

generatore di forza elettromotrice viene collegato a un condensatore a facce piane e parallele e si analizza la variazione di energia elettrostatica posseduta dal condensatore al variare della distanza tra le armature.

*Costanza della carica o della differenza di potenziale tra le armature*

Nel valutare la variazione di energia elettrostatica che uno o più condensatori subiscono passando da uno stato iniziale a uno finale, entrambi di equilibrio elettrostatico, occorre analizzare se nel processo si sia sia mantenuta costante la carica totale presente sulle armature, oppure la differenza di potenziale esistente tra di esse tramite un generatore di forza elettromotrice.

*Un condensatore di capacità  $C_1$  è inizialmente collegato a un generatore di forza elettromotrice ai cui estremi vi è una differenza di potenziale  $V$  (Fig. 10.6a). Il generatore è successivamente rimosso e un condensatore scarico di capacità  $C_2$  viene collegato in circuito con  $C_1$  (Fig. 10.6b). Viene determinata la variazione di energia elettrostatica del sistema.*

Indicando con il pedice  $(I)$  ed  $(F)$ , rispettivamente, i valori delle quantità fisiche possedute dal sistema in questione nella condizione iniziale e finale, possiamo scrivere per l'energia elettrostatica:

$$U_I = \frac{1}{2}C_1V^2 \quad \text{e} \quad U_F = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_F^2$$

essendo  $V_F$  il potenziale finale di equilibrio dei due condensatori. Poiché al raggiungimento

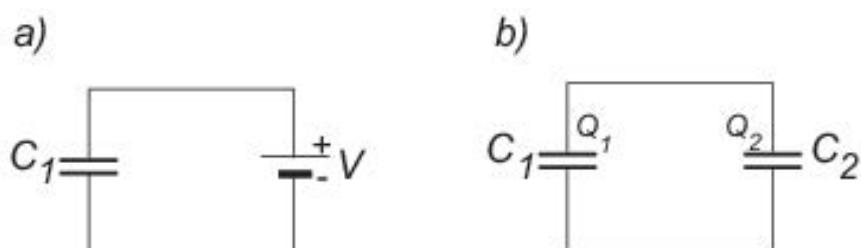


Fig. 10.6

gimento dell'equilibrio finale  $C_1$  e  $C_2$  sono in parallelo ne deriva che

$$V_F = \frac{Q}{C_1 + C_2}$$

avendo indicato con  $Q = C_1 V$  la carica posseduta inizialmente dal condensatore  $C_1$ : essa si conserva durante il passaggio del sistema dalla condizione iniziale a quella finale. Si ha pertanto:

$$U_F = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \frac{Q^2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V^2.$$

La variazione di energia potenziale elettrostatica è quindi:

$$\Delta U = U_F - U_I = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V^2 < 0 \quad (10.9)$$

La parte mancante di energia si è necessariamente dissipata in calore nei fili di collegamento per lo spostamento di una quantità di carica dal condensatore  $C_1$  al condensatore  $C_2$  per il raggiungimento dell'equilibrio elettrostatico.

*Come problema inverso, stanti le condizioni iniziali e finali descritte nell'esercizio precedente, si determina il valore della differenza di potenziale,  $V$ , cui è inizialmente collegato  $C_1$ , essendo noti i valori delle capacità dei condensatori e della variazione di energia potenziale subita dal sistema.*

Il problema è di soluzione immediata poiché l'Eq. (10.9) permette di ricavare il valore della differenza di potenziale iniziale,  $V$ , in funzione delle capacità dei condensatori  $C_1$  e  $C_2$  e della variazione di energia potenziale elettrostatica  $\Delta U$ :

$$V = \sqrt{-2\Delta U \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}}$$

*Come sviluppo dell'esercizio iniziale si considerino i due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  inizialmente con un'armatura comune a terra e caricati con una differenza di potenziale  $V_1$  e  $V_2$ , rispettivamente (Fig. 10.7a). A un dato istante le armature libere vengono*

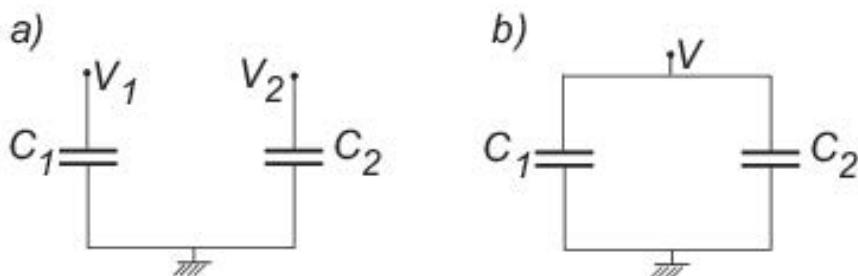


Fig. 10.7

collegate tra loro (Fig. 10.7b). Viene determinata la variazione di energia elettrostatica del sistema.

Con le medesime notazioni viste a pagina 419 si scriverà:

$$U_I = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 \quad \text{e} \quad U_F = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_F^2.$$

Poiché nel passaggio dalla condizione iniziale a quella finale si conserva la carica totale  $Q = C_1V_1 + C_2V_2$  posseduta dai due condensatori, si ha:

$$V_F = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$$

e pertanto l'espressione di  $U_F$  diviene

$$U_F = \frac{1}{2} \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2}.$$

La variazione di energia potenziale elettrostatica è quindi:

$$\Delta U = U_F - U_I = -\frac{1}{2} \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2 < 0.$$

Anche in questo caso la variazione di energia è dovuta al lavoro speso per il raggiungimento dell'equilibrio elettrostatico finale.

Si considera ora un condensatore a facce piane e parallele di area  $S$  distanti tra loro  $d$ , connesso a un generatore di forza elettromotrice ai cui estremi vi è una differenza di potenziale  $V$ . Tramite un'azione esterna al condensatore le armature vengono

portate a distanza  $2d$ . Viene valutata la variazione di energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro fatto dall'esterno.

Per semplificare il problema si può supporre di mantenere un'armatura ferma (ad esempio, quella carica positivamente) tramite un vincolo esterno e di applicare una forza esterna all'altra per allontanarla fino a raddoppiarne la distanza iniziale. La forza elettrostatica,  $\mathbf{F}_{el}$ , tende a far avvicinare l'armatura carica negativamente: è necessario, quindi, che una forza esterna,  $\mathbf{F}_{est}$  sia applicata a tale armatura secondo il verso indicato in Fig. 10.8 (nella quale con  $dx$  si è indicato lo spostamento infinitesimo dell'armatura) così che facendo lavoro positivo la allontani dall'altra armatura fino a una distanza  $2d$ .

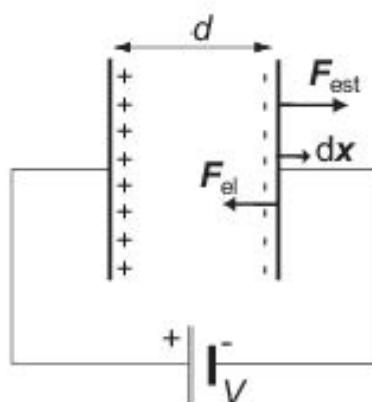
Con le medesime notazioni viste a pagina 419 si scriverà:

$$C_I = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{e} \quad C_F = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{1}{2} C_I;$$

vi è, di conseguenza, una diminuzione della capacità del condensatore; infatti

$$\Delta C = C_F - C_I = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} < 0.$$

Poiché, data la configurazione del sistema, durante il processo di allontanamento delle armature si conserva la differenza di potenziale tra di loro esistente, il dimezzamento della capacità iniziale del condensatore determina anche il dimezzamento



**Fig. 10.8.** Condensatore a facce piane e parallele in cui un'armatura si allontana rispetto all'altra

delle cariche presenti sulle armature; infatti

$$Q_I = C_I V \quad \text{e} \quad Q_F = C_F V = \frac{1}{2} C_I V = \frac{1}{2} Q_I,$$

quindi

$$\Delta Q = Q_F - Q_I = -\frac{1}{2} Q_I = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V < 0$$

e pertanto il generatore di forza elettromotrice, guadagnando una quantità di carica  $-\Delta Q$ , aumenta la propria energia della quantità

$$\Delta U_G = -\Delta Q V = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 > 0.$$

Per quanto riguarda l'energia elettrostatica del condensatore:

$$U_I = \frac{1}{2} C_I V^2 \quad \text{e} \quad U_F = \frac{1}{2} C_F V^2 = \frac{1}{4} C_I V^2 = \frac{1}{2} U_I;$$

di conseguenza si ha:

$$\Delta U = U_F - U_I = -\frac{1}{2} U_I = -\frac{1}{4} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 < 0.$$

Il lavoro compiuto dalla forza esterna è pari a:

$$\begin{aligned} L_{\text{est}} &= \int_d^{2d} F dx = - \int_d^{2d} \frac{\partial U}{\partial x} dx = -\frac{1}{2} V^2 \int_d^{2d} \frac{\partial C(x)}{\partial x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 A V^2 \int_d^{2d} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} C V^2. \end{aligned}$$

Dal punto di vista energetico tale lavoro è pari alla variazione di energia del condensatore ( $\Delta U$ ) e del generatore ( $\Delta U_G$ ).

*Un naturale sviluppo dell'esercizio precedente è la determinazione della variazione di energia potenziale elettrostatica e del lavoro compiuto nel caso in cui la distanza  $d$  fra le armature viene dimezzata per mezzo di un'azione esterna al condensatore.*

Anche in questo caso si può supporre di mantenere un'armatura ferma (ad esempio, quella carica positivamente) e di applicare una forza esterna all'altra per avvicinarla

fino a dimezzarne la distanza iniziale. La forza elettrostatica,  $F_{el}$ , tende a far avvicinare l'armatura negativa a quella positiva: una forza esterna,  $F_{est}$  deve essere applicata secondo il verso indicato in Fig. 10.9 affinché faccia lavoro negativo così da portare l'armatura negativa a distanza  $d/2$  da quella positiva.

In analogia all'esercizio precedente si scriverà:

$$C_I = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{e} \quad C_F = 2C_I;$$

vi è, di conseguenza, un aumento della capacità del condensatore; infatti

$$\Delta C = C_F - C_I = C_I = \frac{\epsilon_0 S}{d} > 0.$$

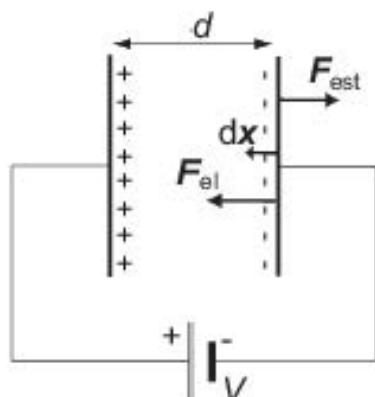
Il raddoppio della capacità del condensatore, mantenendosi costante la differenza di potenziale tra le armature, causa un raddoppio della quantità di carica presente sulle armature; infatti:

$$Q_I = C_I V \quad \text{e} \quad Q_F = C_F V = 2C_I V = 2Q_I,$$

quindi

$$\Delta Q = Q_F - Q_I = Q_I = \frac{\epsilon_0 S}{d} V > 0.$$

Il generatore di forza elettromotrice, cedendo al condensatore una quantità di carica



**Fig. 10.9.** Condensatore a facce piane e parallele in cui un'armatura si avvicina all'altra

$-\Delta Q$ , diminuisce la propria energia della quantità

$$\Delta U_G = -\Delta QV = -\frac{\epsilon_0 S}{d}V^2 < 0.$$

Per quanto riguarda l'energia elettrostatica del condensatore:

$$U_I = \frac{1}{2}C_I V^2 \quad \text{e} \quad U_F = \frac{1}{2}C_F V^2 = C_I V^2 = 2U_I;$$

di conseguenza si ha:

$$\Delta U = U_F - U_I = U_I = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 S}{d}V^2 > 0.$$

Il lavoro compiuto dalla forza esterna, usando lo stesso procedimento del caso precedente, è:

$$L_{\text{est}} = -\frac{1}{2}CV^2.$$

### 10.3 Esercizio guida – Dielettrici

#### Teoria

Un condensatore carico con una carica  $Q$  isolato, tra le cui armature vi è il vuoto, possiede una capacità

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}$$

essendo  $V_0$  la differenza di potenziale tra le armature. Se un dielettrico (isolante) omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  viene inserito a riempire completamente lo spazio tra le armature del condensatore, la differenza di potenziale fra quest'ultime decresce per effetto della polarizzazione del dielettrico divenendo:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}$$

e la capacità del condensatore cresce essendo:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_r \frac{Q}{\Delta V_0} = \epsilon_r C_0.$$

Il campo elettrico all'interno del dielettrico è:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$$

dove  $\mathbf{E}_0$  è il campo elettrico esistente tra le armature in assenza di dielettrico.

La densità di energia elettrostatica in un dielettrico posto in un campo elettrico è espressa dalla relazione

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

con  $\mathbf{D}$  vettore spostamento elettrico. Per un dielettrico omogeneo e isotropo

$$w = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (10.10)$$

dove  $\epsilon$  è la costante dielettrica assoluta del dielettrico.

La densità areaica di cariche di polarizzazione sulla superficie di un dielettrico immerso in un campo elettrico è data da:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

in cui  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  è il vettore polarizzazione, con  $\chi_e = \epsilon_r - 1$  suscettività dielettrica del dielettrico, ed  $\mathbf{n}$  è il versore normale in ogni punto alla superficie limite del dielettrico diretto verso l'esterno del dielettrico stesso.

### Argomento

Viene utilizzato un condensatore a facce piane e parallele con lo spazio tra le armature riempito da una o più lastre piane di materiali dielettrici distinti. Si determina la capacità del condensatore, l'energia elettrostatica immagazzinata nei dielettrici e la carica di polarizzazione sulla superficie limite di questi ultimi.

*Conservazione  
della  
componente  
tangenziale del  
campo elettrico*

Per la valutazione delle cariche di polarizzazione sulla superficie limite dei dielettrici viene anche utilizzata la proprietà di continuità della componente tangenziale del campo elettrico alla superficie di separazione tra due mezzi.

Tra le armature di un condensatore piano, isolato, sulle cui armature vi è una carica  $Q$ , viene inserita una lastra piana di materiale dielettrico, omogeneo e isotropo, spessa  $d' < d$ , essendo  $d$  la distanza tra le armature. Il dielettrico che ha una costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  e una superficie di area  $S$  eguale a quella delle armature del condensatore, è a contatto con un'armatura. Viene determinata la capacità del condensatore, la densità di carica di polarizzazione sulla superficie del dielettrico affacciata nel vuoto e l'energia elettrostatica immagazzinata nel dielettrico.

La differenza di potenziale tra le armature è (Fig. 10.10):

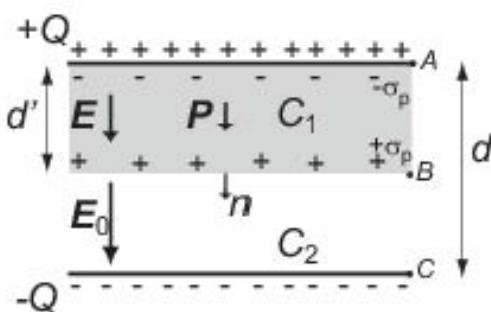
$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \\ &= Ed' + E_0(d - d') = E_0 \left( \frac{d'}{\epsilon_r} + d - d' \right) = E_0 \frac{d' + \epsilon_r(d - d')}{\epsilon_r}\end{aligned}$$

dove  $E_0$  ed  $E$  rappresentano il modulo del campo elettrico nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Si ha quindi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E_0} \frac{\epsilon_r}{d' + \epsilon_r(d - d')} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d' + \epsilon_r(d - d')}.$$

La capacità del condensatore è indipendente dalla posizione della lastra di dielettrico ed è pari alla serie di due condensatori piani,  $C_1$  e  $C_2$  (Fig. 10.10), con

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d'} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}.$$



**Fig. 10.10.** Condensatore piano di spessore  $d$  in cui una lastra di dielettrico di spessore  $d'$  riempie parzialmente lo spazio tra le armature

La densità di cariche sulla faccia del dielettrico affacciata nel vuoto vale (Fig. 10.10)

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = \frac{Q}{S} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$$

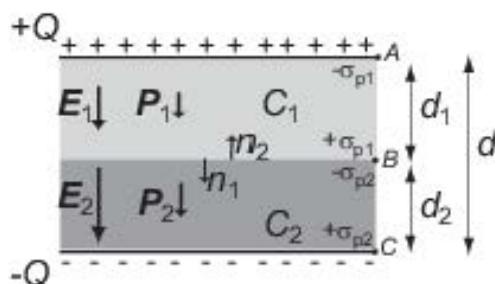
Per la determinazione dell'energia elettrostatica immagazzinata nel dielettrico, si può utilizzare l'Eq. (10.10) integrandola sullo spazio tra le armature:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r} \right)^2 S d' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0\epsilon_r S} d'.$$

*Quale estensione dell'esercizio precedente, ferme restando le condizioni fisiche del sistema esaminato, si considera il caso in cui la parte vuota tra le armature viene completamente riempita con una lastra di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r2}$ . Viene determinata la capacità del condensatore e la densità di carica di polarizzazione all'interfaccia tra i due dielettrici.*

Indicando con  $\epsilon_{r1}$  ed  $\epsilon_{r2}$  le costanti dielettriche dei dielettrici di spessore  $d_1$  e  $d_2$ , rispettivamente, la differenza di potenziale tra le armature è (Fig. 10.11):

$$\Delta V = \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_0 \left( \frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right).$$



**Fig. 10.11.** Condensatore piano di spessore  $d$  in cui lo spazio tra le armature è completamente riempito da due lastre di dielettrico di spessore  $d_1$  e  $d_2$  con costanti dielettriche differenti. L'interfaccia tra i dielettrici è parallela alle armature

Pertanto si ha:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E_0} \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1}} = \epsilon_0 S \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1}}.$$

La capacità del condensatore è data dalla serie di due condensatori  $C_1$  e  $C_2$  (Fig. 10.11), con

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} \frac{1}{\epsilon_{r1}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2} \frac{1}{\epsilon_{r2}}.$$

Per le cariche di polarizzazione sull'interfaccia tra i due dielettrici, sempre facendo riferimento alla Fig. 10.11, si scriverà:

$$\sigma_{p1} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = P_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E_1 = \frac{Q}{S} \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}}$$

$$\sigma_{p2} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = -P_2 = -\epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2 = -\frac{Q}{S} \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}}.$$

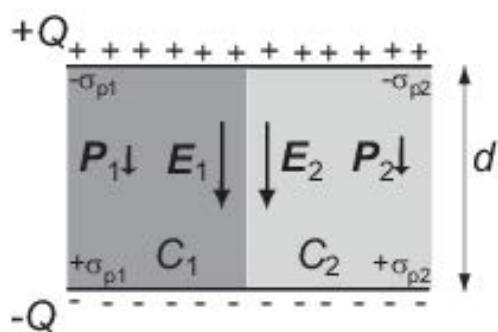
Quindi

$$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2} = \frac{Q}{S} \left( \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \right).$$

*Come sviluppo dell'esercizio iniziale si considera ancora un condensatore a facce piane e parallele isolato e carico, il quale possiede inizialmente una capacità  $C_0$  essendo vuoto lo spazio tra le armature. Successivamente tale spazio viene equamente riempito da due dielettrici omogenei e isotropi aventi costante dielettrica relativa  $\epsilon_{r1}$  ed  $\epsilon_{r2}$ , rispettivamente, in modo tale che l'interfaccia tra i due dielettrici risulti perpendicolare alle armature. Si determina la capacità complessiva del condensatore e il rapporto tra i moduli delle cariche di polarizzazione superficiale dei due dielettrici.*

L'inserimento dei due dielettrici divide il condensatore di partenza in due condensatori,  $C_1$  e  $C_2$  (Fig. 10.12 nella pagina seguente) che, avendo le armature in comune, sono in parallelo; pertanto:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}{2d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}{2d} = C_0 \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2}, \quad (10.11)$$



**Fig. 10.12.** Condensatore piano di spessore  $d$  in cui lo spazio tra le armature è completamente ed equamente riempito da due lastre di dielettrico con costanti dielettriche differenti. L'interfaccia tra i dielettrici è perpendicolare alle armature

dove  $C_0 = \epsilon_0 S/d$  rappresenta la capacità del condensatore in assenza di dielettrici tra le armature.

Per i moduli delle cariche di polarizzazione superficiali,  $\sigma_{p1}$  e  $\sigma_{p2}$ , per il primo e secondo dielettrico, rispettivamente, si scriverà:

$$\begin{aligned} |\sigma_{p1}| &= |\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1| = |P_1| = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)|E_1| \\ |\sigma_{p2}| &= |\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2| = |P_2| = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)|E_2|. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{|\sigma_{p1}|}{|\sigma_{p2}|} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r - 1}, \quad (10.12)$$

poiché  $|E_1| = |E_2|$  conservandosi la componente tangenziale del campo elettrico alla superficie di separazione tra due mezzi.

*Come problema inverso rispetto all'esercizio precedente, si suppone di conoscere sia il rapporto tra la capacità del condensatore con e senza i dielettrici tra le armature,  $\alpha = C/C_0$ , sia quello tra i moduli delle cariche di polarizzazione superficiali dei dielettrici,  $\beta = |\sigma_{p1}|/|\sigma_{p2}|$ . Vengono determinate le costanti dielettriche relative dei due dielettrici.*

Le equazioni (10.11) e (10.12) permettono di scrivere il seguente sistema di due

equazioni nelle due incognite  $\epsilon_{r1}$  e  $\epsilon_{r2}$ :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2} \\ \beta = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r2} - 1} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\epsilon_{r1} = 2\alpha - \frac{2\alpha + \beta - 1}{1 + \beta} \quad \text{e} \quad \epsilon_{r2} = \frac{2\alpha + \beta - 1}{1 + \beta}.$$

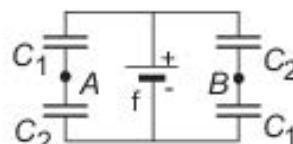
## 10.4 Domande di verifica

- Descrivere il fenomeno dell'induzione elettrostatica e spiegare, in base a esso, perché la capacità di un conduttore aumenta quando vi si avvicini un secondo conduttore scarico.
- Ricavare la capacità complessiva di tre condensatori diversi collegati tra loro in parallelo.
- Un condensatore carico viene collegato in corto circuito con un altro condensatore identico: determinare la quantità di energia che viene dissipata nel collegamento rispetto a quella inizialmente a disposizione.
- Ricavare l'espressione dell'andamento temporale della corrente di scarica di un condensatore su un resistore.
- Rappresentare graficamente un circuito nel quale un condensatore venga caricato attraverso un resistore e trovare l'espressione della differenza di potenziale tra i due elettrodi in funzione del tempo.
- Giustificare il fenomeno per il quale all'apertura di un circuito elettrico si tende a formare una scintilla tra i due punti di distacco del circuito.
- Illustrare cosa rappresenta la costante di tempo  $RC$  per un condensatore di capacità  $C$  collegato a un resistore di resistenza  $R$ .
- Ricavare l'espressione dell'andamento temporale della corrente in un circuito, in cui siano presenti un generatore di forza elettromotrice, un resistore e un condensatore, dopo la chiusura del circuito.
- Ricavare l'espressione della capacità per unità di lunghezza di un condensatore, indefinitamente lungo, ad armature cilindriche coassiali.
- Dimostrare che la componente tangenziale del campo elettrico in due mezzi dielettrici è la stessa sulla superficie di separazione tra di essi.
- Definire il vettore momento di polarizzazione e ricavare il legame col vettore spostamento elettrico.

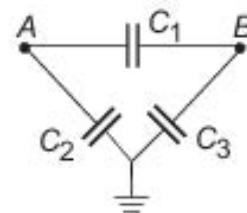
- Ricavare le espressioni che legano i tre vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{P}$  nella materia.
- Descrivere il fenomeno della polarizzazione di un dielettrico.
- Descrivere che cosa rappresenta il vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$
- Illustrare il fenomeno della polarizzazione di un dielettrico e come la presenza di un dielettrico tra le armature di un condensatore ne influenzi la capacità.
- Giustificare, mediante opportuno ragionamento, perché una lastra di materiale isolante viene attratta verso l'interno tra le armature di un condensatore carico a facce piane e parallele.

## 10.5 Esercizi

- [1] Un conduttore metallico di forma cilindrica di lunghezza  $L = 3\text{ m}$  e raggio  $r = 0.12\text{ mm}$  è percorso da una corrente elettrica costante che dissipà nel conduttore una potenza  $W = 50\text{ W}$ . Si determini il valore del campo elettrico all'interno del conduttore, sapendo che la resistività del rame è  $\rho_{Cu} = 1.53 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$ .
- [2] Una lastra conduttrice di spessore  $d$  e area  $A$  viene inserita parallelamente alle armature di un condensatore piano distanti  $l$  ( $d < l$ ) e aventi area  $A$ . Determinare il valore della capacità del sistema.
- [3] Il sensore di una tastiera è costituito da due lamine metalliche in aria che si avvicinano alla pressione sul tasto. Il sistema di rivelazione è basato sulla variazione della capacità elettrica del condensatore costituito dalle due lamine e ha una sensibilità massima corrispondente a una variazione di capacità  $\Delta C = 0.250\text{ pF}$ . Se l'area delle lamine è  $A = 50\text{ mm}^2$  e la separazione iniziale tra loro è  $d = 0.6\text{ mm}$ , si determini il valore minimo di cui deve essere abbassato un tasto (avvicinata una lama all'altra) perché il sistema rivelì il movimento.
- [4] Con riferimento al circuito in figura, determinare la differenza di potenziale tra i punti  $A$  e  $B$  indicati.  
( $C_1 = 40\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 60\text{ }\mu\text{F}$ ,  $f = 24\text{ V}$ )



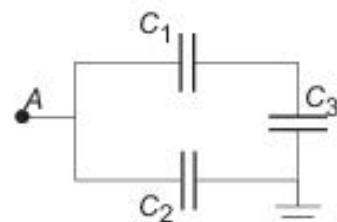
- [5] Due condensatori in aria sono posti in parallelo e hanno una capacità complessiva  $C = 80 \text{ pF}$ . Se si immerge il primo in un dielettrico liquido, si misura per i due condensatori in parallelo una capacità  $C' = 100 \text{ pF}$  e se si immerge il secondo nel medesimo liquido, si misura una capacità  $C'' = 120 \text{ pF}$ . Determinare la costante dielettrica relativa del liquido.
- [6] Un condensatore piano sottile di spessore  $d = 3 \text{ mm}$  e avente area delle armature  $A = 20 \text{ cm}^2$  è collegato agli elettrodi di un generatore di forza elettromotrice  $f = 250 \text{ V}$ . Mantenendo il collegamento col generatore, vengono inseriti tra le armature del condensatore due strati diversi di materiale isolante di spessore pari a  $d_1 = 0.3d$  e  $d_2 = 0.7d$  e di costanti dielettriche relative  $\epsilon_{r1} = 5$  e  $\epsilon_{r2} = 12$ , rispettivamente. Si calcoli la carica aggiuntiva che avrà dovuto erogare il generatore dopo l'inserimento dei due strati.
- [7] Calcolare la capacità di un condensatore sferico le cui armature sono costituite da due sfere metalliche di raggio  $r_1$  ed  $r_2$ , con  $r_1 < r_2$ , fra le quali vi è un dielettrico avente costante dielettrica relativa  $\bar{\epsilon}_r$ .
- [8] Nel circuito di figura i valori delle capacità dei tre condensatori sono tutte uguali e pari a  $C = 20 \text{ nF}$ . Se nel punto  $A$  viene posta una carica  $Q_A = 0.5 \mu\text{C}$  e nel punto  $B$  una carica pari a  $Q_B = 1.5 \mu\text{C}$ , si determinino i valori delle differenze di potenziale  $V_A$  e  $V_B$  verso massa che si vengono a determinare in  $A$  e  $B$ .
- [9] Un condensatore di capacità  $C_1 = 100 \text{ pF}$  con carica  $Q = 50 \text{ nC}$  sulle armature viene chiuso in circuito con un altro condensatore, inizialmente scarico, di capacità  $C_2 = 150 \text{ pF}$ . Si chiede quanta energia verrà dissipata per effetto Joule nei conduttori di collegamento in seguito a tale operazione.
- [10] Due condensatori eguali in aria hanno, se posti in parallelo, la medesima capacità che avrebbero se, posti in serie, li si immergessero in un olio. Si determini la suscettività elettrica dell'olio.
- [11] Un condensatore a facce piane e parallele di capacità elettrica  $C = 5 \text{ nF}$  in aria è collegato a un generatore di forza elettromotrice  $V_0 = 250 \text{ V}$ . Si chiede quale



carica aggiuntiva dovrà essere erogata dal generatore quando il condensatore venga immerso per una metà dell'area delle sue armature in un olio di costante dielettrica relativa pari a  $\epsilon_r = 4.5$ .

- [12] Nel circuito di figura i valori delle capacità sono i seguenti:  $C_1 = 20 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 50 \text{ nF}$ ,  $C_3 = 100 \text{ nF}$ .

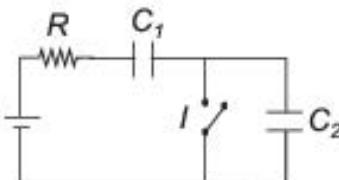
Nel punto  $A$  viene posta una carica  $Q = 0.5 \mu\text{C}$ ; si determini la differenza di potenziale che si viene a determinare tra le armature di  $C_3$ .



- [13] Due identici condensatori di capacità  $C$  nei quali lo spazio tra le armature è riempito d'aria, sono collegati in serie a una forza elettromotrice  $f$ ; raggiunta la condizione di equilibrio elettrostatico, lo spazio vuoto tra le armature di uno dei due condensatori viene riempito con un liquido avente costante dielettrica  $\epsilon_r$  e il sistema raggiungerà una nuova condizione di equilibrio elettrostatico. Determinare, inoltre, l'espressione della variazione di energia elettrostatica immagazzinata nei condensatori tra i due stati di equilibrio.

- [14] Un condensatore di capacità  $C_1$  tra le cui armature vi è una differenza di potenziale  $V$ , all'istante  $t = 0$  viene connesso a una resistenza e a un condensatore di capacità  $C_2$  in modo da formare un circuito a una sola maglia in cui i tre componenti sono collegati in serie. Usando unicamente considerazioni di tipo energetico e il principio di conservazione della carica elettrica, determinare l'energia dissipata nella resistenza tra l'istante  $t = 0$  e  $t = \infty$ .

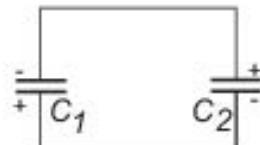
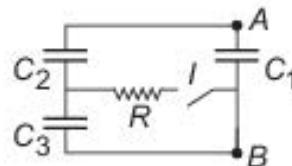
- [15] Due condensatori,  $C_1$  e  $C_2$ , sono collegati a un generatore di forza elettromotrice,  $f$ , secondo lo schema della figura a lato: inizialmente il sistema è in equilibrio con l'interruttore  $I$  aperto. Si determini l'espressione della variazione di energia dissipata per effetto Joule nell'intervallo di tempo che intercorre tra la chiusura dell'interruttore e il raggiungimento della nuova condizione di equilibrio.



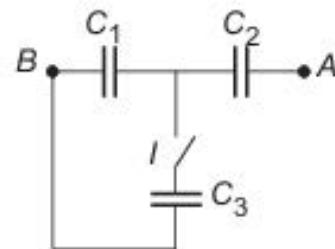
- [16] Un condensatore sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , ha l'armatura interna a potenziale  $V$  mentre l'armatura esterna è a potenziale nullo. Lo

spazio tra le armature e riempito da un materiale di rigidità dielettrica (massimo campo elettrico applicabile)  $E_R$ . Determinare la massima differenza di potenziale che è possibile applicare tra le armature.

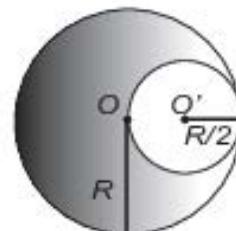
- [17] Si ha un condensatore sferico la cui armatura interna ha raggio  $R_1 = 5\text{ cm}$ , mentre l'armatura esterna ha un raggio interno  $R_2 = 10\text{ cm}$  e un raggio esterno  $R_3 = 15\text{ cm}$ ; l'armatura interna si trova a un potenziale  $V_I = 10\text{ V}$ , quella esterna è a un potenziale  $V_E = 120\text{ V}$ . Determinare le cariche sulla superficie esterna e interna dell'armatura esterna del condensatore.
- [18] Una sfera metallica di raggio  $R$  si trova nel vuoto a una distanza molto grande da un condensatore di capacità  $C$ ; un'armatura del condensatore è collegata a terra mentre l'altra è collegata alla sfera tramite un sottile filo metallico. Si ricavi l'espressione della differenza di potenziale tra le armature del condensatore quando una carica  $Q$  viene fornita alla sfera. (Si consideri trascurabile la carica sul filo)
- [19] Tra i punti  $A$  e  $B$  del circuito mostrato a lato, quando l'interruttore  $I$  è aperto, vi è una differenza di potenziale  $V_i = 100\text{ V}$ . Si determini l'energia dissipata nella resistenza  $R$  durante tutto il tempo impiegato dal circuito per il raggiungimento della nuova condizione di equilibrio, quando l'interruttore  $I$  viene chiuso. ( $C_1 = 1\mu\text{F}$ ,  $C_2 = C_3 = 10\mu\text{F}$ )
- [20] La differenza di potenziale tra le armature di due condensatori isolati di capacità  $C_1$  e  $C_2$  è pari a  $V_1$  e  $V_2$ , rispettivamente. I due condensatori sono poi collegati in parallelo in modo che l'armatura carica positivamente di ciascuno di essi sia connessa con quella carica negativamente dell'altro. Si determini la differenza di potenziale tra le armature e la variazione di energia elettrostatica dopo che i condensatori sono stati collegati. ( $C_1 = 1\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2\mu\text{F}$ ,  $V_1 = 200\text{ V}$ ,  $V_2 = 400\text{ V}$ )



- [21] Si hanno a disposizione con valori non noti, un generatore di forza elettromotrice  $f$  di resistenza interna  $r$  e un condensatore di capacità  $C$ ; si ha, infine, uno strumento capace di misurare la carica  $Q$  presente sul condensatore e un resistore di resistenza  $R$  nota. Si determini la resistenza interna  $r$  del generatore effettuando due misure di carica.
- [22] Un condensatore di capacità  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  viene caricato fino a un potenziale  $V = 110 \text{ V}$  ed è successivamente connesso in parallelo ai terminali di un circuito consistente in due condensatori scarichi posti in serie di capacità  $C_2 = 2 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 3 \mu\text{F}$ . Determinare la quantità di carica che fluisce attraverso i conduttori di collegamento.
- [23] Tre condensatori  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  ( $C_1 = C_2 = 2C$ ,  $C_3 = C$ ) sono collegati come mostrato in figura: con l'interruttore  $I$  aperto,  $V_A - V_B = V_0$  e  $C_3$  è scarico. Si determini la carica e la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore dopo la chiusura dell'interruttore  $I$ . ( $C = 5 \mu\text{F}$ ,  $V_0 = 10 \text{ V}$ ).
- [24] Una carica positiva puntiforme  $q = 3 \times 10^{-10} \text{ C}$  è posta al centro di una sfera di raggio  $R = 10 \text{ cm}$ , costituita di materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 4$ . All'esterno della sfera vi è il vuoto. Calcolare:
- 1) Il campo elettrico  $E_P$  ed  $E_Q$  nei punti  $P$  e  $Q$  che distano dal centro  $R/2$  e  $2R$ , rispettivamente.
  - 2) La densità di carica superficiale di polarizzazione  $\sigma_P$  sulla superficie della sfera.
- [25] Le armature di un condensatore piano sono costituite da due lastre metalliche  $A$  e  $B$  infinitamente estese e di spessore trascurabile, poste nel vuoto a distanza  $d = 2 \text{ cm}$ ; esse sono caricate rispettivamente con densità di carica areiche uniformi  $\sigma_A = 2 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$  e  $\sigma_B = 4 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Tra le armature e parallelamente a esse è posta una lastra di materiale dielettrico avente spessore  $s = 1 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 2$ . Calcolare la differenza di potenziale ( $V_A - V_B$ ) tra le armature.



- [26] Una carica  $Q_1 = 1 \text{ nC}$  è uniformemente distribuita in un volume sferico di materiale dielettrico di raggio  $R_1 = 1 \text{ cm}$  e costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 1.4$ ; concentricamente a esso è posto un guscio metallico sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2 = 2 \text{ cm}$  su cui è presente una carica  $Q_2$ . Determinare il valore di  $Q_2$  sapendo che il potenziale nel centro  $O$  della sfera dielettrica, avendo posto a zero il potenziale all'infinito, vale  $V_0 = 1 \mu\text{V}$ .
- [27] Nel vuoto, una sfera di raggio  $R = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$  e costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 4$  possiede una carica  $q = 1 \mu\text{C}$  uniformemente distribuita in tutto il suo volume. Determinare il potenziale nel centro  $O$  della sfera, supponendo nullo il potenziale all'infinito.
- [28] In una sfera di raggio  $R$  costituita di materiale dielettrico avente costante dielettrica assoluta  $\epsilon$  e uniformemente carica con densità di carica volumica  $\rho$ , viene creata una cavità sferica di raggio  $R/2$  disposta come in figura. Determinare il campo elettrico  $\mathbf{E}$  nel centro  $O$  della sfera di raggio  $R$ .



## 10.6 Soluzioni degli esercizi

- [1] Dalla definizione di potenza dissipata si ha:

$$W = \frac{V^2}{R} = \frac{(EL)^2}{\frac{\rho L}{\pi R^2}} \Rightarrow E = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{W \rho L}{\pi R^2}} = 2.37 \text{ N/m.}$$

- [2] Il campo elettrico all'interno della lastra conduttrice è nullo; pertanto la differenza di potenziale tra le armature del condensatore è pari a:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (l - d) \quad \text{essendo } \sigma \text{ la densità areica di carica.}$$

Quindi:

$$C = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} (l - d)} = \frac{A \epsilon_0}{l - d}.$$

[3] La capacità del sensore-condensatore è  $C = \epsilon_0 A/d$  quindi

$$\Delta C = -\frac{\epsilon_0 A}{d^2} \Delta d \quad \Rightarrow \quad \Delta d = \frac{d^2}{\epsilon_0 A} \Delta C \simeq 0.2 \text{ mm.}$$

[4] Si prenda come riferimento il terminale negativo del generatore per il calcolo dei potenziali. Per il ramo di sinistra si può scrivere  $Q = V_1 C_1 = V_A C_2$ . Utilizzando il fatto che  $f = V_1 + V_A$  si ha:

$$V_A = f \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ripetendo il calcolo per il ramo destro, si ottiene:

$$V_B = f \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

da cui:

$$V_A - V_B = f \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} = 4.8 \text{ V.}$$

[5] Si ha il seguente sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C \\ \epsilon_r C_1 + C_2 = C' \\ C_1 + \epsilon_r C_2 = C'', \end{cases}$$

da cui

$$C_1 = \frac{C(C' - C)}{C'' + C' - 2C} = 27.6 \text{ pF}; \quad C_2 = \frac{C(C'' - C)}{C'' + C' - 2C} = 53.3 \text{ pF}$$

e

$$\epsilon_r = \frac{C' - C_2}{C_1} = 1.75.$$

[6] Prima dell'inserimento:

$$Q = Cf = \frac{\epsilon_0 Af}{d};$$

dopo l'inserimento:

$$Q' = C'f = \epsilon_0 Af \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{(d_1\epsilon_{r2} + d_2\epsilon_{r1})} \quad \text{dove: } \frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Quindi:

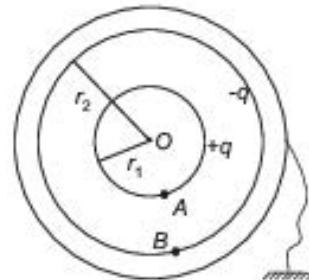
$$\Delta Q = Q' - Q = 11.0 \text{ nC}.$$

[7] La capacità del condensatore è:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_A - V_B}$$

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\bar{\epsilon}_r r^2} dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\bar{\epsilon}_r} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Quindi:



$$C = 4\pi\epsilon_0\bar{\epsilon}_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

[8] Dette  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  le cariche assolute presenti sulle armature di ciascuno dei tre condensatori, dovrà essere, per la conservazione della carica

$$Q_A = Q_1 + Q_2$$

$$Q_B = -Q_1 + Q_3;$$

Inoltre la differenza di potenziale nel punto  $A$  rispetto a massa può calcolarsi sia attraverso il condensatore  $C_2$  sia attraverso la serie di  $C_1$  e  $C_3$ :

$$\frac{Q_2}{C} = \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_3}{C} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 + Q_3$$

che, con le prime equazioni, costituisce il sistema nelle tre incognite  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , risolto dà

$$Q_1 = \frac{Q_A - Q_B}{3} \quad Q_2 = \frac{2Q_A + Q_B}{3} \quad Q_3 = \frac{Q_A + 2Q_B}{3}.$$

Di qui:

$$V_A = \frac{Q_2}{C} = \frac{2Q_A + Q_B}{3C} = 41.67 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{Q_3}{C} = \frac{Q_A + 2Q_B}{3C} = 58.33 \text{ V}.$$

- [9] L'energia dissipata si trova per differenza tra quella immagazzinata elettrostaticamente prima e dopo l'operazione:

$$\Delta E = \frac{Q^2}{2C_1} - \left( \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \right).$$

Per trovare  $Q_1$  e  $Q_2$  ricordiamo che:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = V_1 = \frac{Q_2}{C_2},$$

da cui:

$$\Delta E = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} \right) = 7.50 \times 10^{-6} \text{ J}.$$

- [10] La condizione di egualianza delle capacità si scrive:

$$C_{\text{par}} = C + C = 2C = C_{\text{ser}} = \left( \frac{1}{\epsilon_r C} + \frac{1}{\epsilon_r C} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_r C}{2},$$

da cui

$$\epsilon_r = 4 \quad \text{e} \quad \chi = \epsilon_r - 1 = 3.$$

- [11] La carica inizialmente presente su ciascuna armatura del condensatore vale in modulo  $Q = CV_0$ . Poiché, dopo l'immersione in olio la capacità del condensatore sarà divenuta

$$C' = \frac{C}{2} + \epsilon_r \frac{C}{2} = (1 + \epsilon_r) \frac{C}{2}$$

e la carica pari a

$$Q' = C'V_0 = (1 + \epsilon_r) \frac{C}{2} V_0,$$

la carica erogata dal generatore sarà stata

$$\Delta Q = Q' - Q = \frac{\epsilon_r - 1}{2} CV_0 = 2.18 \mu\text{C}.$$

- [12] La carica  $Q$  posta in  $A$  si suddivide in una parte  $Q_1$  su un'armatura del condensatore  $C_1$  e una parte  $Q_2$  su un'armatura del condensatore  $C_2$ . Sull'armatura

non a massa del condensatore  $C_3$  ci sarà una carica eguale a  $Q_1$ , che si troverà imponendo  $Q = Q_1 + Q_2$  e scrivendo l'espressione del potenziale in  $A$  nei due modi equivalenti

$$V = \frac{Q_1}{C_{13}} = \frac{Q_1}{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q - Q_1}{C_2}.$$

Da quest'ultima espressione si ricava

$$Q_1 = Q \frac{C_{13}}{C_2 + C_{13}}$$

e poi

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_1}{C_3} = \frac{Q}{C_3} \frac{C_{13}}{C_2 + C_{13}} = 1.25 \text{ V}.$$

[13] L'energia elettrostatica iniziale e finale del sistema,  $U_I$  e  $U_F$ , rispettivamente, vale:

$$U_I = \frac{1}{2} C_{eq} f^2 \quad U_F = \frac{1}{2} C'_{eq} f^2,$$

dove, poiché i condensatori sono in serie:

$$C_{eq} = \frac{C}{2} \quad C'_{eq} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} C.$$

Pertanto:

$$\Delta U = U_F - U_I = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} C f^2 - \frac{1}{2} \frac{C}{2} f^2 = \frac{1}{4} C f^2 \left[ \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} - 1 \right].$$

Il lavoro fatto dal generatore per il raggiungimento della situazione di equilibrio elettrostatico del sistema è:

$$L = f(q_{\text{finale}} - q_{\text{iniziale}}),$$

dove

$$q_{\text{iniziale}} = \frac{C}{2} f \quad \text{e} \quad q_{\text{finale}} = C'_{eq} f;$$

pertanto:

$$L = C f^2 \left( \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} - \frac{1}{2} \right).$$

[14] L'energia iniziale del condensatore  $C_1$  è pari a:

$$U_I = \frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1},$$

essendo  $Q = C_1V$  la carica iniziale posseduta dal condensatore. Al tempo  $t \rightarrow \infty$  si sarà stabilita una condizione di equilibrio: il condensatore  $C_1$  avrà perso parte della carica che, passando attraverso la resistenza, sarà giunta sulle armature del secondo condensatore; dette  $Q_1$  e  $Q_2$  le cariche possedute rispettivamente da  $C_1$  e  $C_2$  nella situazione finale, l'energia finale sarà uguale a:

$$U_F = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2};$$

la conseguente variazione di energia che subisce il sistema,  $\Delta U$ , che viene dissipata dalla resistenza è:

$$\Delta U = U_F - U_I = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} - \frac{Q^2}{C_1} \right).$$

Devono però valere le due seguenti condizioni:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q & \text{conservazione della carica elettrica} \\ \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} & \text{stessa d.d.p. ai capi dei condensatori al tempo } t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Dal sistema di queste due equazioni ottiene:

$$Q_1 = Q \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \text{e} \quad Q_2 = Q \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

che sostituite nell'espressione di  $\Delta U$ , fornisce per quest'ultima la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2}Q^2 \left[ \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{1}{C_1} \right] = \\ &= \frac{1}{2}Q^2 \left( \frac{1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = -\frac{1}{2}V^2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \end{aligned}$$

[15] Nella condizione iniziale (interruttore  $I$  aperto) i due condensatori sono in serie

e, all'equilibrio, la differenza di potenziale ai capi della capacità equivalente,  $C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ , è pari a  $f$ , quindi:

$$U_I = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} f^2.$$

La chiusura dell'interruttore cortocircuita  $C_2$  e, all'equilibrio, la differenza di potenziale ai capi di  $C_1$  è ancora  $f$ , perciò:

$$U_F = \frac{1}{2} C_1 f^2.$$

Pertanto:

$$\Delta U = U_F - U_I = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} f^2.$$

[16] Tra le armature il campo elettrico è diretto radialmente e in modulo vale:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

essendo  $Q$  la carica sull'armatura interna; il massimo valore del campo elettrico si ha sulla superficie di tale armatura e poiché, al massimo,  $E = E_R$  la massima quantità di carica che vi può essere sull'armatura è:

$$Q_{max} = E_R 4\pi\epsilon R_1^2.$$

Ne segue che:

$$V_{max} = V_1 - V_2 = \frac{Q_{max}}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{max}}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

e sostituendo l'espressione di  $Q_{max}$  si ottiene:

$$V_{max} = E_R R_1 \frac{R_2 - R_1}{R_2}.$$

[17] Poiché una sfera di raggio  $R$  ha capacità  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ , sulla superficie esterna dell'armatura esterna vi è una carica

$$Q_E = 4\pi\epsilon_0 R_3 V_E = 2 \text{ nC};$$

sulla superficie interna della medesima armatura, considerando l'espressione della capacità di un condensatore sferico, si ha:

$$Q_I = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} (V_E - V_I) = 1.2 \text{ nC.}$$

- [18] Indicando con  $Q_S$  e  $Q_C$  la carica posseduta dalla sfera e dall'armatura del condensatore a essa collegata, rispettivamente, deve essere:

$$Q_S + Q_C = Q.$$

Inoltre il potenziale della sfera è uguale a quello dell'armatura a essa collegata; ma poiché l'altra armatura del condensatore è a terra, il potenziale della sfera è uguale alla differenza di potenziale tra le armature:

$$\frac{Q_S}{C_S} = \frac{Q_C}{C},$$

essendo  $C_S = 4\pi\epsilon_0 R$  la capacità della sfera. Dalle due precedenti relazioni si ricava:

$$Q_C = \frac{C}{C + C_S} Q \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q_C}{C} = \frac{Q}{C + C_S}.$$

- [19] Indicando con  $E_i$  ed  $E_f$  l'energia iniziale e finale del circuito, rispettivamente, si ha:

$$E_i = \frac{1}{2} C_i V_i^2 \quad \text{e} \quad E_f = \frac{1}{2} C_f V_f^2,$$

dove

$$C_i = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = 6 \mu\text{F} \quad \text{e} \quad C_f = C_1 + C_2 = 11 \mu\text{F}.$$

Per la conservazione della carica elettrica deve essere:

$$C_i V_i = C_f V_f \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{C_i}{C_f} V_i.$$

Pertanto l'energia dissipata nella resistenza,  $\Delta E$ , è pari a:

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2} C_i V_i^2 \left( \frac{C_i}{C_f} - 1 \right) \simeq -13.6 \text{ mJ.}$$

[20] La carica iniziale di ciascun condensatore vale:

$$Q_1 = C_1 V_1 = 200 \mu\text{C} \quad \text{e} \quad Q_2 = C_2 V_2 = 800 \mu\text{C}.$$

Collegando le armature cariche di segno opposto dei due condensatori, la carica complessiva risultante presente sulle armature è pari a

$$Q = Q_2 - Q_1 = 600 \mu\text{C};$$

tal carica, si distribuirà tra i due condensatori, in ragione della loro capacità, con valori di  $Q'_1$  e  $Q'_2$  dati da:

$$Q'_1 = C_1 V \quad Q'_2 = C_2 V,$$

essendo  $V$  la differenza di potenziale tra le armature. Pertanto;

$$Q = Q'_1 + Q'_2 = V(C_1 + C_2) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = 200 \text{ V}.$$

La variazione di energia elettrostatica subita dal sistema dei due condensatori è:

$$\frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2 - \frac{1}{2}C_1V_1^2 - \frac{1}{2}C_2V_2^2 = -0.12 \text{ J}.$$

[21] Disponendo la resistenza e il condensatore in parallelo rispetto al generatore, si misura la carica  $Q_p$ . Tale carica è proporzionale alla d.d.p. ai capi del condensatore,  $V_c$ :  $Q_p = CV_c$ . La d.d.p.  $V_c$  è proporzionale alla corrente che scorre nella resistenza,  $V_c = RI$ , e la corrente che scorre nella resistenza è  $I = f/(r + R)$ ; quindi:

$$Q_p = Cf \frac{R}{r + R}.$$

Infine, disponendo gli elementi in serie, si misura la carica  $Q_s = Cf$ . Dal rapporto tra  $Q_s$  e  $Q_p$  si ricava la resistenza interna:

$$r = R \left( \frac{Q_s}{Q_p} - 1 \right).$$

[22] La carica iniziale sul primo condensatore sarà  $Q_1 = C_1 V$ , una volta collegato

avrà carica finale  $Q'_1 = C_1 V'$ . La serie degli altri due condensatori avrà carica  $Q'_{\text{serie}} = C_{\text{serie}} V'$  dove  $C_{\text{serie}} = C_2 C_3 / (C_2 + C_3)$ .

Dalla conservazione della carica  $Q_1 = Q'_1 + Q'_{\text{serie}}$  si ricava

$$V' = \frac{C_1 V}{C_1 + C_{\text{serie}}} \quad \Rightarrow \quad Q'_1 = \frac{C_1^2 V}{C_1 + C_{\text{serie}}}$$

e

$$Q'_{\text{serie}} = \frac{C_{\text{serie}} C_1 V}{C_1 + C_{\text{serie}}}.$$

La carica finale dei condensatori in serie è pari alla carica che fluisce dal primo condensatore attraverso i conduttori di collegamento; essa può essere scritta nella forma compatta

$$Q'_{\text{serie}} = \frac{V}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = 0.06 \text{ mC.}$$

- [23] I condensatori  $C_1$  e  $C_2$  sono in serie con una capacità complessiva  $C_{\text{eq.}} = C$ ; sulle loro armature vi è una carica  $q = CV_0 = 50 \mu\text{C}$ . Alla chiusura dell'interruttore le cariche sul condensatore  $C_2$  non variano; parte della carica presente su  $C_1$  va sul condensatore  $C_3$  e i condensatori  $C_1$  e  $C_3$  sono in parallelo. Dette  $q_1$  e  $q_3$  le cariche presenti sulle armature dei condensatori  $C_1$  e  $C_3$ , rispettivamente, deve essere:

$$\begin{cases} q_1 + q_3 = q \\ \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3}. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema di due equazioni fornisce:

$$q_1 = \frac{1}{3}q = 16.7 \mu\text{C} \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{2}{3}q = 33.3 \mu\text{C}.$$

Indicando con  $P$  il punto tra  $C_1$  e  $C_2$  si ha:

$$V_P - V_A = \frac{q}{C_2} = 5 \text{ V} \quad V_B - V_P = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_3}{C_3} = 3.33 \text{ V.}$$

- [24] 1) Data la simmetria sferica del problema, il campo elettrico sia nel punto  $P$  che nel punto  $Q$  sarà radiale. Applicando la legge di Gauss per il punto  $P$  (interno alla sfera) si ha:

$$E_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = 2.7 \times 10^2 \text{ V/m};$$

Per il punto  $Q$  (esterno alla sfera) si ha invece:

$$E_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0.67 \times 10^2 \text{ V/m}.$$

2) Per la simmetria circolare:

$$\sigma_P = P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R^2} = 1.79 \times 10^{-9} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}.$$

- [25] Il campo elettrico nello spazio vuoto tra le due lastre è la somma vettoriale dei campi creati dalle singole lastre, rispettivamente

$$\mathbf{E}_{0A} = \frac{\sigma_A}{2\epsilon_0} \mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_{0B} = -\frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

essendo  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse  $x$  diretto perpendicolarmente alle lastre, dalla lastra  $A$  a quella  $B$ . Il campo elettrico totale tra le due lastre vale:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0A} + \mathbf{E}_{0B} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$$

Nel dielettrico, invece

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^d E(x) dx = E_0(d-s) + Es = \\ &= \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2\epsilon_0\epsilon_r} [\epsilon_r(d-s) + s] = -1.69 \text{ kV} \end{aligned}$$

- [26] Indicando con  $\rho = 3Q_1/4\pi R_1^3$  la densità di carica nella sfera di materiale

dielettrico, si ha:

$$V_0 - V_\infty = \int_0^\infty \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{R_1} \frac{\rho}{3\epsilon_0\epsilon_r} r dr + \int_{R_2}^\infty \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^{R_1} \frac{Q_1}{\epsilon_r R_1^3} r dr + \int_{R_2}^\infty \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} dr \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q_1}{2\epsilon_r R_1} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_2} \right], \end{aligned}$$

da cui:

$$Q_2 = \left[ 4\pi\epsilon_0 V_0 - \frac{Q_1}{2\epsilon_r R_1} - \frac{Q_1}{R_2} \right] R_2 = -1.7 \times 10^{-9} \text{ C.}$$

[27]

$$V(O) = \int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

dove il campo elettrico,  $\mathbf{E}(r)$ , può essere ricavato applicando la legge di Gauss a una generica sfera di raggio  $r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) con centro in  $O$ :

$$\begin{cases} r \leq R & E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon} r = \frac{q}{4\pi\epsilon R^3} r \\ r \geq R & E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V(O) &= \frac{q}{4\pi\epsilon R^3} \int_0^R r dr + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{8\pi\epsilon R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{2\epsilon_r} + 1 \right) = 2.02 \times 10^6 \text{ V}. \end{aligned}$$

[28] Per il principio di sovrapposizione del campo elettrico, la distribuzione di carica dell'esercizio si può ottenere sovrapponendo a una distribuzione sferica di raggio  $R$  e densità volumica di carica  $\rho$  senza cavità, una distribuzione sferica di raggio  $R/2$  e densità volumica di carica  $-\rho$  posta nella posizione in cui si

trova la cavità. Nel punto  $O$  la prima di queste distribuzioni di carica genera un campo elettrico nullo; nello stesso punto, la seconda distribuzione crea un campo elettrico diretto da  $O$  verso  $O'$  di modulo

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon \left(\frac{R}{2}\right)^2}, \quad \text{dove} \quad q = \rho \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3;$$

quindi:

$$E = \frac{1}{6} \frac{\rho R}{\epsilon}.$$

# Correnti elettriche

## 11.1 Esercizio guida – Leggi di Kirchhoff

### Teoria

Per un circuito elettrico in condizioni stazionarie valgono le due leggi di Kirchhoff:

- [1] Lungo qualsiasi circuito elettrico chiuso (maglia) la somma algebrica delle differenze del potenziale è uguale a zero.
- [2] In qualsiasi punto di un circuito elettrico dove la corrente si può dividere (nodo), la somma algebrica delle correnti che entrano in tale punto ed escono da esso deve essere eguale.

Le leggi valgono solo per correnti continue o lentamente variabili nel tempo e traggono la loro origine dal principio di conservazione dell'energia (la prima), e dal principio di conservazione della carica elettrica (la seconda).

La differenza di potenziale tra due punti *B* e *A* di un circuito elettrico in condizioni stazionarie soddisfa la legge di Ohm generalizzata che discende dalla prima legge di Kirchhoff:

$$V_A - V_B = \sum RI - \sum f$$

dove *R* e *I* rappresentano, rispettivamente, le resistenze del tratto di circuito che collega il punto *A* con il punto *B* e le correnti che le percorrono ed *f* sono invece le

forze elettromotrici presenti nel tratto considerato. Il segno delle correnti e delle forze elettromotrici nel tratto è coerente con il segno scelto convenzionalmente per l'intero tratto

### Argomento

Vengono dati dei circuiti elettrici composti da forze elettromotrici e resistenze variamente collegate tra loro. Viene valutata, in condizioni stazionarie, la corrente che scorre nei vari rami dei circuiti e la differenza di potenziale tra due punti.

*Scelta del verso  
di scorrimento  
delle correnti*

In generale il verso di scorrimento delle correnti nei vari tratti di un circuito non può essere stabilito a priori. Le direzioni di scorrimento vengono assunte ad arbitrio: dall'analisi del circuito le ipotesi iniziali risulteranno non corrette, indicando un verso di scorrimento opposto a quello ipotizzato, se il valore delle correnti trovato sarà negativo.

Viene analizzato il circuito in serie rappresentato schematicamente in Fig. 11.1a; viene valutata la corrente che scorre nel circuito e la differenza di potenziale tra i punti b ed e, nonché l'energia dissipata in un tempo  $t$  dalla resistenza  $R_1$

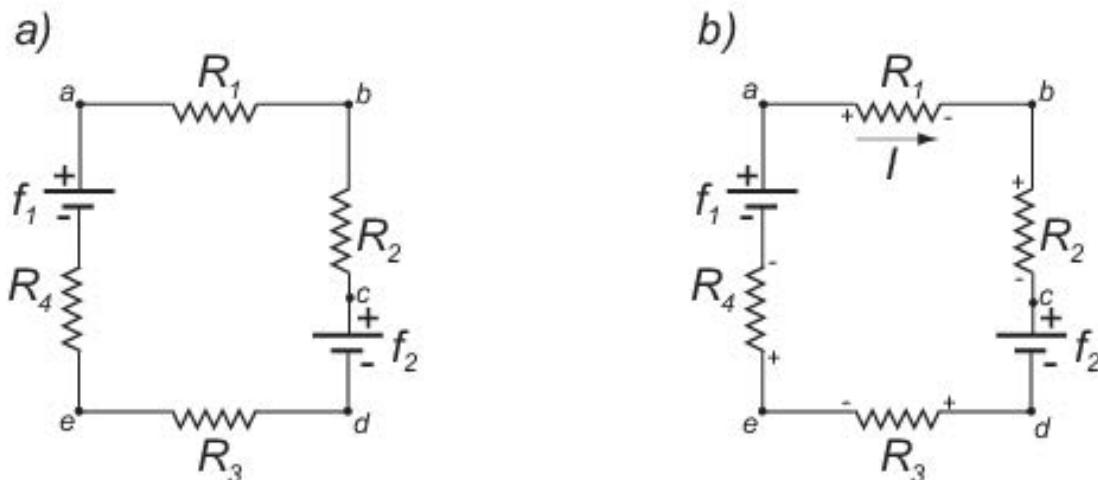


Fig. 11.1

Si supponga che la corrente  $I$  scorra nel circuito in senso orario così come mostrato in Fig. 11.1b; i punti a potenziale maggiore e minore a cavallo di ogni resistenza sono indicati, rispettivamente con un segno + e - in coerenza con il verso scelto per la corrente. La prima legge di Kirchhoff percorrendo il circuito a partire dal punto  $a$  si scrive:

$$-IR_1 - IR_2 - f_2 - IR_3 - IR_4 + f_1 = 0$$

La forza elettromotrice  $f_2$  è stata considerata negativa perché, dato il verso scelto per la corrente, una carica positiva  $q$  muovendosi attraverso questa forza elettromotrice dal punto  $c$  al punto  $d$ , perde un'energia pari a  $qf_2$  che verrà ceduta al generatore;  $qf_1$  è invece l'energia acquistata dalla stessa carica al suo passaggio attraverso la forza elettromotrice  $f_1$ . Si ha quindi:

$$I = \frac{f_1 - f_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} : \quad (11.1)$$

la corrente circola nel verso ipotizzato se  $f_1 > f_2$ , nel verso opposto se  $f_1 < f_2$ .

Per la differenza di potenziale tra i punti  $b$  ed  $e$ , si supponga, ad esempio, che  $f_1 > f_2$ ; procedendo nel circuito dal punto  $e$  al punto  $b$  passando per la forza elettromotrice  $f_1$  applicando la legge di Ohm generalizzata, si scrive:

$$V_e - V_b + f_1 = I(R_4 + R_1); \quad (11.2)$$

se invece si raggiunge il punto  $b$  partendo dal punto  $e$  attraversando la forza elettromotrice  $f_2$  si scriverà:

$$V_e - V_b + f_2 = -I(R_3 + R_2). \quad (11.3)$$

Il risultato che si ottiene è ovviamente lo stesso; come esempio numerico si ipotizzi  $f_1 = 10 \text{ V}$ ,  $f_2 = 9 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$ : dall'Eq. (11.1) si ha  $I = 0.1 \text{ A}$ . Per la differenza di potenziale tra il punto  $e$  e il punto  $b$ , dall'Eq. (11.2) si ottiene:

$$V_e - V_b = I(R_4 + R_1) - f_1 = -9.5 \text{ V};$$

e dall'Eq. (11.3) si ha:

$$V_e - V_b = -I(R_3 + R_2) - f_2 = -9.5 \text{ V}.$$

Poiché  $V_e - V_b < 0$ , ne segue che  $V_e < V_b$ .

La potenza e l'energia dissipata in un tempo  $t$  nella resistenza  $R_1$  sono rispettivamente:

$$P = I^2 R_1 \quad \text{e} \quad E = Pt.$$

Ad esempio, per  $t = 5 \text{ s}$ ,  $P = 0.1 \text{ W}$  e  $E = 0.5 \text{ J}$

*Il circuito dell'esercizio precedente viene ora modificato così come illustrato in Fig. 11.2a, dove  $f_3 = 1 \text{ V}$  e  $R_5 = 10 \Omega$ . Vengono determinate le correnti che scorrono in ciascun ramo del circuito.*

Nella figura Fig. 11.2b sono indicate le tre correnti e il loro supposto verso di percorrenza nei tre rami costituenti il circuito; i punti a potenziale maggiore e minore a cavallo di ogni resistenza sono indicati, rispettivamente con un segno + e - in coerenza con il verso scelto per le correnti.  $I_1$  è la corrente che attraversa il generatore di forza elettromotrice  $f_2$ : nel nodo  $b$  la seconda legge di Kirchhoff si scrive:

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (11.4)$$

Per la determinazione delle tre correnti incognite occorrono altre due equazioni che si ricavano dall'applicazione della prima legge di Kirchhoff a due delle tre maglie costituenti il circuito: la terza maglia dà informazioni ridondanti per la soluzione del problema ma, per completezza le equazioni di tutte le maglie vengono qui scritte:

$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 - f_2 - I_1 R_3 - I_1 R_4 + f_1 = 0 \quad \text{maglia } acdfa \quad (11.5)$$

$$-I_2 R_2 - f_2 + I_3 R_5 - f_3 = 0 \quad \text{maglia } bcdeb \quad (11.6)$$

$$-I_1 R_1 + f_3 - I_3 R_5 - I_1 R_3 - I_1 R_4 + f_1 = 0 \quad \text{maglia } abefa$$

Si può allora considerare il sistema formato dalle equazioni (11.4), (11.5) e (11.6); combinando le prime due si ottiene:

$$I_2(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + I_3(R_1 + R_3 + R_4) = f_1 - f_2. \quad (11.7)$$

Ricavando l'espressione di  $I_2$  in funzione di  $I_3$  dall'Eq. (11.6) e sostituendola nell'Eq. (11.7), si ottiene per  $I_3$  il valore:  $I_3 = 41/46 \text{ A}$ ; da questo ne discende

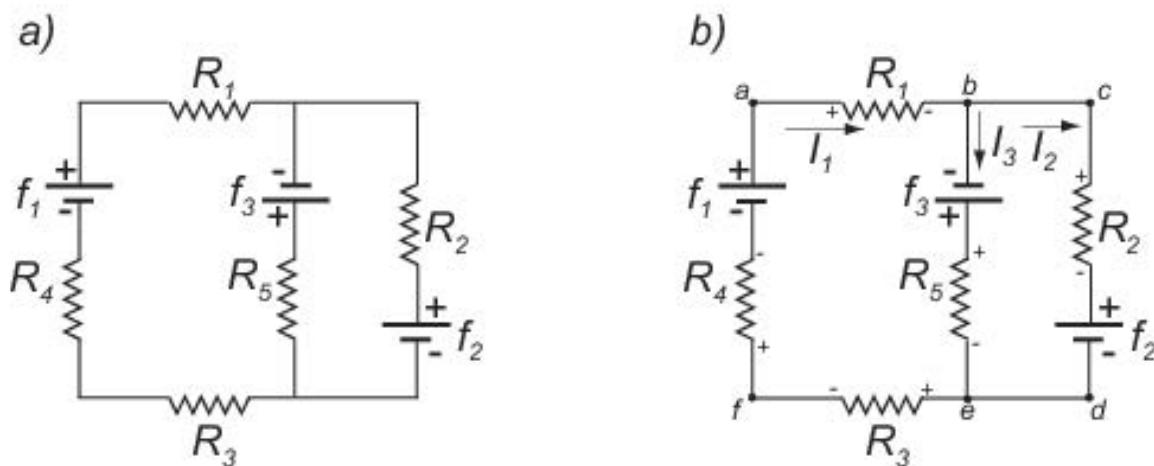


Fig. 11.2

$$I_2 = -25/46 \text{ A} \text{ e } I_1 = 8/23 \text{ A.}$$

## 11.2 Esercizio guida – Carica e scarica di un condensatore

### Teoria

La variazione temporale della carica presente sulle armature di un condensatore scarico di capacità  $C$  collegato attraverso una resistenza  $R$  a un generatore di forza elettromotrice  $f$ , ha espressione:

$$Q(t) = Cf \left( 1 - e^{-t/RC} \right).$$

La carica – e la differenza di potenziale ai capi del condensatore,  $Q/C$  – cresce con costante di tempo  $\tau = RC$ , che caratterizza la rapidità della carica, fino al valore di regime  $Cf$ . Per la corrente si ha:

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-t/RC}.$$

In un condensatore di capacità  $C$  avente carica  $Q_0$  che si scarica su una resistenza  $R$ , la carica sulle armature e la corrente decrescono esponenzialmente nel tempo secondo le leggi

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad \text{e} \quad i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}.$$

### Argomento

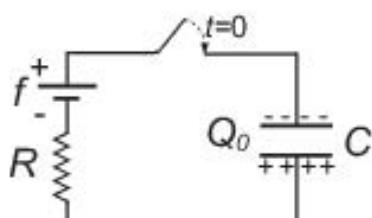
Viene dato un condensatore di capacità  $C$  avente inizialmente una carica  $Q_0$ ; il condensatore viene successivamente collegato attraverso una resistenza  $R$  a un generatore di forza elettromotrice  $f$ . Viene valutato l'andamento temporale della carica presente sulle armature al variare di  $Q_0$  e della polarità iniziale delle armature del condensatore.

*Le condizioni  
al contorno del  
circuito*

Il valore della carica iniziale  $Q_0$  posseduta dal condensatore determina la condizione al contorno della legge temporale con cui varia la carica presente sulle armature; la differenza di potenziale iniziale ai capi del condensatore,  $Q_0/C$ , nel momento in cui esso viene collegato al generatore di forza elettromotrice, determina il verso di scorrimento della corrente.

*Nell'istante  $t = 0$  in cui viene chiuso l'interruttore del circuito schematizzato in Fig. 11.3, il condensatore  $C$  possiede una carica  $Q_0$  disposta sulle sue armature come illustrato. Viene determinata l'espressione dell'andamento temporale della carica posseduta dal condensatore per  $t > 0$ .*

Indicando con  $q$  la carica posseduta dal condensatore a un generico istante  $t > 0$ ,



**Fig. 11.3**

$dq/dt < 0$ , quindi:

$$f + \frac{q}{C} = -\frac{dq}{dt}R \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{f + \frac{q}{C}} = -\frac{1}{R}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(f + \frac{q}{C}\right)}{f + \frac{q}{C}} = -\frac{1}{RC}dt.$$

Integrando quest'ultima reazione si ottiene:

$$\ln\left(f + \frac{q}{C}\right) = -\frac{1}{RC}t + \text{cost} \quad \Rightarrow \quad f + \frac{q}{C} = K \exp^{-\frac{t}{RC}},$$

in cui la costante  $K$  è determinata in base alla condizione iniziale  $q(0) = Q_0$ , che implica:  $K = f + Q_0/C$ ; quindi:

$$q(t) = C \left[ \left( f + \frac{Q_0}{C} \right) \exp^{-\frac{t}{RC}} - f \right].$$

Nella figura 11.4 è rappresentato l'andamento temporale del valore assoluto della carica presente sulle armature del condensatore per  $f = 10\text{ V}$ ,  $Q_0 = 10^{-4}\text{ C}$ ,  $C = 10^{-6}\text{ F}$ ,  $R = 10^6\Omega$ : la carica sulle armature decresce esponenzialmente dalla chiusura dell'interruttore fino all'istante  $t^* \simeq 2.4\text{ s}$  quando il condensatore è scarico;

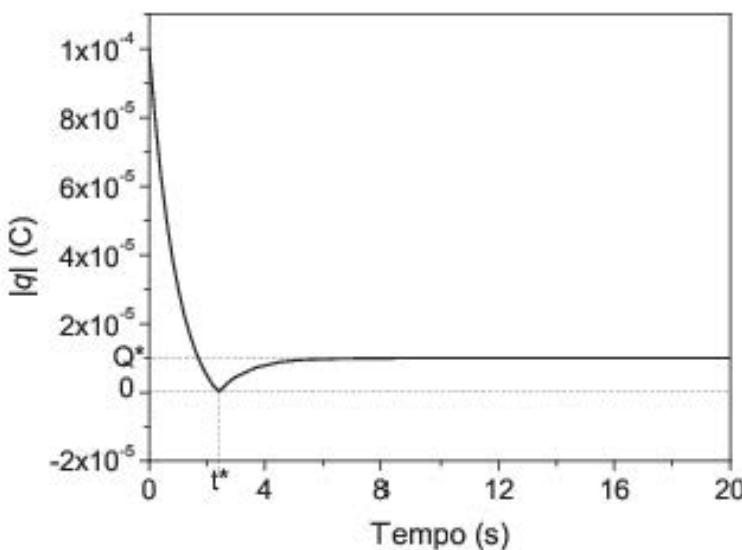


Fig. 11.4

successivamente a tale istante il condensatore si carica con le armature aventi una polarità opposta rispetto alla fase precedente. A regime la carica sulle armature è  $Q^* = 10^{-5}$  C, valore per il quale la tensione ai capi del condensatore è uguale a  $f$ .

*Si amplia l'esercizio precedente supponendo che il condensatore C nell'istante  $t = 0$  in cui viene chiuso l'interruttore, possiede una carica  $Q_0$  disposta secondo quanto illustrato in Fig. 11.5 e tale che  $Q_0/C < f$ . Viene determinata l'espressione dell'andamento temporale della carica posseduta dal condensatore per  $t > 0$ .*

Indicando con  $q$  la carica posseduta dal condensatore a un generico istante  $t > 0$ ,  $dq/dt > 0$ , quindi:

$$f - \frac{q}{C} = \frac{dq}{dt}R \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{f - \frac{q}{C}} = \frac{1}{R}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(f - \frac{q}{C}\right)}{f - \frac{q}{C}} = -\frac{1}{RC}dt.$$

Integrando quest'ultima reazione si ottiene:

$$\ln\left(f - \frac{q}{C}\right) = -\frac{1}{RC}t + \text{cost} \quad \Rightarrow \quad f - \frac{q}{C} = K \exp^{-\frac{t}{RC}},$$

in cui la costante  $K$  è determinata in base alla condizione al contorno  $q(0) = Q_0$ , che implica:  $K = f - Q_0/C$ ; quindi:

$$q(t) = C \left[ f - \left( f - \frac{Q_0}{C} \right) \exp^{-\frac{t}{RC}} \right]. \quad (11.8)$$

Nella figura 11.6 in alto, è mostrato l'andamento temporale della carica posseduta

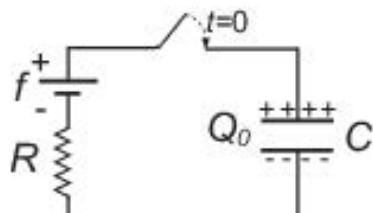


Fig. 11.5

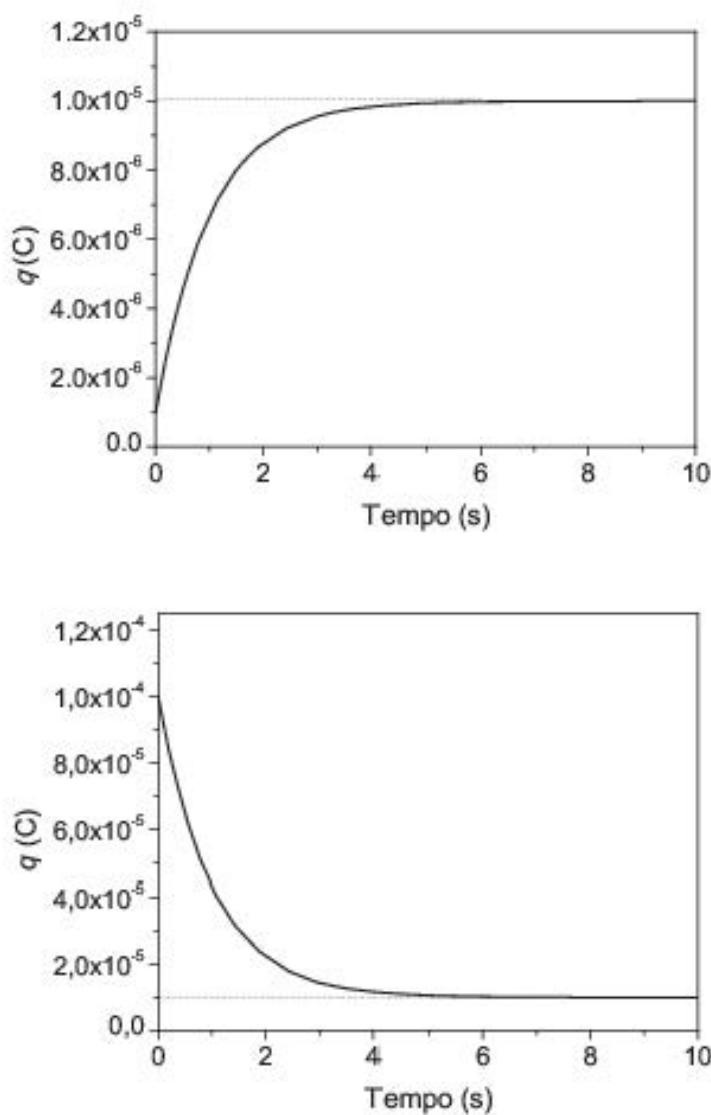


Fig. 11.6

dalle armature del condensatore per i valori dei parametri del circuito definiti a pagina 457 con  $Q_0 = 10^{-6}$  C ( $Q/C = 1$  V): la carica cresce esponenzialmente dal valore iniziale fino a raggiungere a regime il valore  $Q^* = Cf = 10^{-5}$  C.

*L'andamento temporale della carica posseduta dalle armature del condensatore viene ora determinato nell'ipotesi che sia  $Q_0/C > f$ , sempre supponendo che la carica iniziale  $Q_0$  sulle armature del condensatore all'istante  $t = 0$  sia disposta come mostrato in Fig. 11.5.*

L'equazione del circuito è eguale a quella dell'esercizio precedente: in questo caso  $dq/dt < 0$  (sempre indicando con  $q$  la carica posseduta dal condensatore a un generico istante  $t > 0$ ), ma si inverte anche il verso di scorrimento della corrente poiché il condensatore, date le condizioni iniziali, si scarica verso il generatore. L'andamento di  $q(t)$  è pertanto espresso ancora dall'Eq. (11.8); nella Fig. 11.6 in basso, esso è visualizzato per un valore di  $Q_0 = 10^{-4}$  C: la carica decresce esponenzialmente dal valore iniziale fino a raggiungere a regime il valore  $Q^* = Cf = 10^{-5}$  C.

### 11.3 Esercizio guida – Corrente di spostamento

#### Teoria

La densità di corrente di spostamento è definita dalla relazione

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (11.9)$$

essendo  $\mathbf{D}$  il vettore spostamento elettrico. Per un mezzo omogeneo e isotropo di costante dielettrica  $\epsilon$ , la densità di corrente di spostamento si scrive nella seguente forma:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}.$$

La corrente di spostamento, al pari della corrente di conduzione, genera un campo magnetico in accordo con la legge di circuitazione di Ampère che, in un mezzo omogeneo e isotropo, si scrive:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \left[ \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \right], \quad (11.10)$$

dove  $\mathbf{j}$  rappresenta la densità di corrente di conduzione ed  $S$  una superficie orientata che ha per contorno la linea chiusa  $C$ .

In forma differenziale tale legge assume la forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left[ \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right], \quad (11.11)$$

essendo  $\mu$  la permeabilità magnetica del mezzo.

### Argomento

Viene dato un condensatore piano sottile sulle cui armature è presente una carica elettrica variabile nel tempo. Viene determinata la corrente di spostamento presente tra le armature del condensatore e il campo di induzione magnetica da essa generato.

#### *La legge di circuitazione di Ampère*

La corrente di spostamento e il campo magnetico da essa generato sono legati dalla legge di circuitazione di Ampère, Eq. (11.10), nella quale l'integrale al primo membro risulta di facile determinazione, con un'opportuna scelta della curva  $C$ , se il problema presenta delle simmetrie nella distribuzione spaziale del campo elettrico e della sua variazione temporale,  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

*È dato un condensatore piano sottile ad armature circolari di raggio  $R$  tra le quali vi è il vuoto; il condensatore viene caricato con un generatore di forza elettromotrice che fa variare il campo elettrico presente fra le armature secondo la legge  $E(t) = E_0(1 + \alpha t)$  ( $\alpha > 0$ , costante). Viene determinato il valore dell'induzione magnetica in un punto  $P$  posto fra le armature a una generica distanza  $r$  ( $r \leq R$ ) dall'asse comune delle armature.*

Poiché il condensatore è sottile, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è uniforme nell'interspazio delle armature e nullo al di fuori; si può quindi scrivere

$$\mathbf{E} = E_0(1 + \alpha t)\mathbf{k}$$

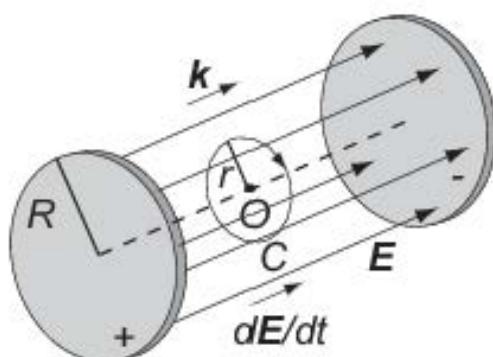


Fig. 11.7

essendo  $\mathbf{k}$  il versore diretto dall'armatura carica positivamente verso quella carica negativamente (Fig. 11.7). Si ha allora:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \alpha E_0 \mathbf{k},$$

diretto nella direzione del campo elettrico. Date le proprietà del rotore di un vettore, dall'Eq (11.11) ne deriva che il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è un vettore che giace nel piano normale alla direzione individuata dal versore  $\mathbf{k}$ ; inoltre, data la simmetria del problema, le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze concentriche con centro sull'asse comune alle due armature. Ne consegue che per la circuitazione del campo di induzione magnetica è conveniente considerare come linea chiusa  $C$  una qualsiasi circonferenza con centro  $O$ , posto tra le armature lungo l'asse a esse comune, e raggio  $r$ . Se l'orientazione di  $C$  è quella mostrata in Fig. 11.7, si ha:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r.$$

Considerando come superficie  $S$  quella del cerchio delimitato da  $C$  si ha:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \alpha E_0 \pi r^2$$

essendo  $\mathbf{n}$  nel verso del campo elettrico dato il verso scelto per  $C$ . Si ha perciò:

$$B = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 \alpha E_0 r.$$

*Si consideri nuovamente un condensatore piano sottile ad armature circolari distanti  $d$  tra le quali vi è il vuoto. Il condensatore, che ha una capacità  $C'$ , è isolato: esso possiede inizialmente una carica  $Q_0$  e viene chiuso su una resistenza  $R'$ . Vengono determinati la corrente di conduzione e il valore dell'induzione magnetica in un punto  $P$  posto fra le armature a una generica distanza  $r$  dall'asse comune delle armature.*

Indicando con  $Q(t)$  la carica posseduta in un generico istante dal condensatore, essa

varia nel tempo secondo la legge:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau},$$

avendo indicato con  $\tau = R' C'$  la costante di tempo; pertanto la corrente di conduzione è:

$$i_c = -\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\tau} Q_0 e^{-t/\tau}.$$

La differenza di potenziale tra le armature è espressa dalla relazione:

$$\Delta V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C'} e^{-t/\tau}.$$

Anche in questo caso, poiché il condensatore è sottile, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è nullo al di fuori delle armature e uniforme nell'interspazio tra di esse, dove vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V}{d} \mathbf{k} = \frac{1}{d} \frac{Q_0}{C'} e^{-t/\tau} \mathbf{k}$$

con  $\mathbf{k}$  il versore diretto dall'armatura carica positivamente verso quella carica negativamente (Fig. 11.8). si ha allora:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau d} \frac{Q_0}{C'} e^{-t/\tau} \mathbf{k}$$

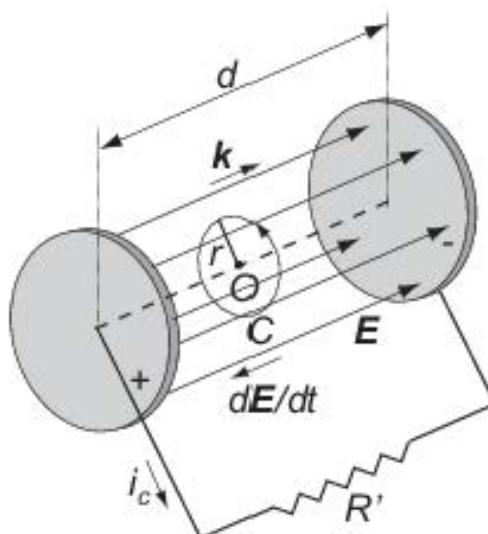


Fig. 11.8

diretto in verso opposto rispetto al campo elettrico. Ragionando come nell'esercizio precedente, si ha che il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è un vettore che giace nel piano normale alla direzione individuata dal versore  $\mathbf{k}$ , e le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze concentriche con centro sull'asse comune alle due armature. Per il calcolo della circuitazione del campo induzione magnetica è conveniente, pertanto, considerare come linea chiusa  $C$  una qualsiasi circonferenza con centro  $O$ , posto tra le armature lungo l'asse a esse comune, e raggio  $r$ . Se l'orientazione di  $C$  è quella mostrata in Fig. 11.8, si ha:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r.$$

Considerando come superficie  $S$  quella del cerchio delimitato da  $C$  si ha:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\tau d} \frac{Q_0}{C'} e^{-t/\tau} \pi r^2,$$

essendo  $\mathbf{n}$  nel verso opposto del campo elettrico dato il verso scelto per  $C$ . Si ha perciò:

$$B = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\tau d} \frac{Q_0}{C'} e^{-t/\tau} r.$$

*Come problema inverso si consideri ancora un condensatore piano sottile ad armature circolari di raggio  $R$  nello spazio vuoto tra le quali è presente una corrente di spostamento avente densità  $j_s = -\epsilon_0 \gamma t$  ( $\gamma > 0$ , costante). Viene determinata l'espressione dell'andamento temporale della carica,  $Q(t)$ , presente sulle armature del condensatore, sapendo che per  $t = 0$ ,  $Q = Q_0$ .*

Le cariche libere presenti sulle armature del condensatore sono date dalla relazione

$$Q = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (11.12)$$

essendo l'integrale esteso alla superficie  $S$  delle armature e avendo indicato con  $\mathbf{n}$  il versore ad esse normale. Data la configurazione del condensatore, Il vettore

spostamento  $D$  è normale alle armature; per l'Eq. (11.9) si ha:

$$D(t) = \int j_s dt = -\frac{1}{2}\epsilon_0\gamma t^2 + \text{cost},$$

dove il valore della costante viene determinata dalle condizioni iniziali:

$$D(0) = \frac{Q_0}{S} \quad \Rightarrow \quad D(t) = -\frac{1}{2}\epsilon_0\gamma t^2 + \frac{Q_0}{S}.$$

Perciò dall'Eq. (11.12) si ricava:

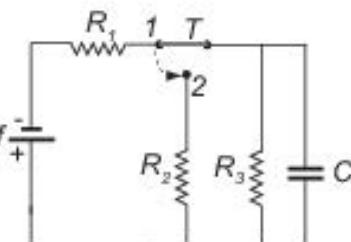
$$Q(t) = Q_0 - \frac{1}{2}\epsilon_0\gamma\pi R^2 t^2.$$

## 11.4 Domande di verifica

- Ricavare la relazione che, in un conduttore ohmico, lega in ogni punto la densità di corrente al campo elettrico.
- Dimostrare che in un conduttore filiforme la corrente, in condizioni stazionarie, è la stessa in ogni sezione trasversale del filo.
- Indicare se due fili della stessa lunghezza, l'uno di rame e l'altro d'argento, possano avere la stessa resistenza e se ne motivi la risposta.
- Dimostrare che la potenza che si dissipa in un tratto di circuito è data dal prodotto della corrente per la differenza di potenziale presente ai capi del tratto considerato.
- Definire il vettore densità di corrente e ricavare la relazione che lo lega alla velocità di scorrimento delle cariche libere.
- Ricavare l'espressione microscopica della legge di Ohm a partire da quella macroscopica.
- Descrivere i fenomeni microscopici giustificativi dell'effetto Joule della dissipazione energetica delle correnti.
- Dare la definizione così detta elettrodinamica dell'ampere.
- Ricavare le espressioni della resistenza equivalente di  $N$  resistenze collegate in parallelo e in serie.
- Dare la definizione della forza elettromotrice di un generatore.
- Determinare l'ordine di grandezza della velocità di deriva con cui gli elettroni fluiscano entro un conduttore di rame di sezione  $1 \text{ mm}^2$ , percorso da una corrente di 1 A.
- Introdurre e illustrare il concetto di corrente di spostamento.

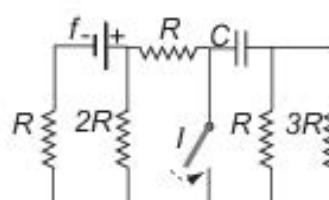
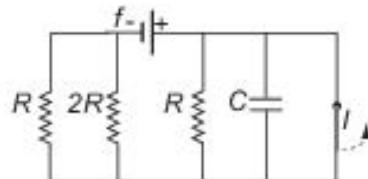
## 11.5 Esercizi

- [1] Alle armature di un condensatore piano di capacità  $C$  tra le quali vi è il vuoto, è applicata una tensione,  $V$ , variabile nel tempo con legge  $V = V_0 \cos^2 \omega t$ , con  $V_0$  e  $\omega$  costanti. Si determini l'espressione della corrente all'interno del condensatore.
- [2] Nel vuoto, in un condensatore a facce piane, parallele e quadrate di lato  $l$ , la distanza tra le armature,  $d$ , varia periodicamente nel tempo con legge cosinusoide:  $d = d_0 + h \cos \omega t$ , essendo  $d_0$  e  $h$  due costanti. Il condensatore è collegato a un generatore di forza elettromotrice che mantiene costante al valore  $V_0$  la differenza di potenziale tra le armature. Si determini l'espressione della corrente tra le armature.
- [3] Si determini la resistenza interna,  $r$ , di un generatore di corrente continua sapendo che la potenza dissipata da un utilizzatore esterno al generatore è la stessa quando la resistenza dell'utilizzatore è  $R_1 = 4 \Omega$  o  $R_2 = 25 \Omega$ .
- [4] Si ha un condensatore piano ad armature circolari di raggio  $R$  tra le quali vi è un dielettrico omogeneo e isotropo avente permeabilità magnetica assoluta  $\mu$ . Il condensatore viene caricato con una corrente continua  $I$ . Si dia l'espressione del modulo del vettore induzione magnetica in funzione della distanza  $r$  ( $r \leq R$ ) dall'asse delle armature.
- [5] Una resistenza  $R = 100 \Omega$  è collegata al tempo  $t_0 = 0$  a un condensatore carico di capacità  $C = 10 \mu\text{F}$ . Conoscendo l'energia  $U = 0.1 \text{ J}$  dissipata dalla resistenza dal tempo  $t_0 = 0$  a  $t_1 = 1 \text{ ms}$ , determinare la carica iniziale  $q_0$  sulle armature del condensatore.
- [6] Il circuito in figura è a regime quando, all'istante  $t = 0$ , il commutatore  $T$  viene portato dalla posizione 1 alla posizione 2. Ricavare l'espressione della differenza di potenziale ai capi del condensatore per  $t > 0$ .
- [7] Una corrente di  $4 \text{ A}$  viene suddivisa in tre rami tutti in parallelo formati da conduttori filiformi di sezione circolare dello stesso materiale ohmico. Le lunghezze  $\ell$  dei conduttori che formano i tre rami sono in rapporto  $1, 2$  e  $3$  mentre

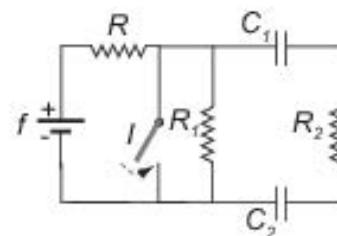


i loro raggi  $r$  sono nel rapporto 2, 3 e 4. Trovare le correnti  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  che scorrono nei tre rami.

- [8] Un circuito è costituito da un generatore ideale di forza elettromotrice costante  $f$ , da una resistenza  $R$  e da un condensatore  $C$  messi in serie. Al tempo  $t=0$  la capacità del condensatore viene diminuita bruscamente di  $n$ -volte. Trovare la corrente che circola nel circuito come funzione del tempo  $t$ .
- [9] Una batteria con f.e.m.  $f = 2.6 \text{ V}$ , collegata a una resistenza esterna  $R$  produce una corrente  $I = 1.0 \text{ A}$ . In questo caso la differenza di potenziale ai capi della batteria è  $V = 2.0 \text{ V}$ . Trovare la potenza termica dissipata nella batteria e la potenza sviluppata in essa dalle forze elettriche.
- [10] Determinare la quantità di calore che viene generata in una resistenza  $R$  dovuta al passaggio di una carica  $q$  quando la corrente che circola decresce linearmente con il tempo e si annulla in un intervallo  $\Delta t$ .
- [11] Un condensatore piano di capacità  $C$  avente carica iniziale  $Q_0$  e tra le cui armature vi è il vuoto, si scarica su una resistenza  $R$ . Si ricavi la densità di corrente di spostamento esistente tra le armature del condensatore e si mostri che il suo flusso è in ogni istante uguale alla corrente che attraversa la resistenza  $R$ .
- [12] Il circuito mostrato nella figura a lato è in condizioni di regime con l'interruttore  $I$  chiuso. Determinare l'andamento della carica  $Q(t)$  presente sulle armature del condensatore dopo l'apertura dell'interruttore  $I$ .
- [13] Una resistenza  $R = 100 \Omega$  è collegata al tempo  $t_0 = 0$  a un condensatore carico di capacità  $C = 10 \mu\text{F}$ . Sapendo che l'energia  $\Delta U$  dissipata dalla resistenza fino al tempo  $t_1 = 1 \text{ ms}$  è  $\Delta U = -0.1 \text{ J}$ , determinare la carica iniziale sulle armature del condensatore.
- [14] Nel circuito in figura, trovare l'andamento della corrente  $I(t)$  che fluisce attraverso la resistenza  $3R$  dopo la chiusura dell'interruttore  $I$  al tempo  $t = 0$ .



- [15] Il circuito in figura è a regime quando, all'istante  $t = 0$  si chiude l'interruttore  $I$ . Determinare l'andamento della corrente  $I(t)$  che attraversa il resistore  $R_2$ .



## 11.6 Soluzioni degli esercizi

- [1] All'interno del condensatore vi è una corrente di spostamento di densità e intensità pari rispettivamente a:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{e} \quad i_s = \int_S \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n} dS = \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| S,$$

essendo  $S$  l'area della superficie delle armature. Indicando con  $q$  la carica sulle armature,  $D = q/S$ , pertanto:

$$i_s = \frac{1}{S} \left| \frac{dq}{dt} \right| S = \left| \frac{dq}{dt} \right| = C \left| \frac{dV}{dt} \right| = 2CV_0\omega \cos \omega t \sin \omega t.$$

- [2] Tra le armature del condensatore vi è una corrente di spostamento di densità  $j_s = \epsilon_0 dE_0/dt$  essendo  $E_0$  il campo elettrico tra le armature; la corrente di spostamento ha intensità

$$I_S = l^2 \epsilon_0 \frac{dE_0}{dt}.$$

Poiché

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{V_0}{d_0 + h \cos \omega t},$$

si ha:

$$I_S = l^2 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{V_0}{d_0 + h \cos \omega t} \right) = \frac{l^2 \epsilon_0 V_0 h \omega \sin \omega t}{(d_0 + h \cos \omega t)^2}.$$

- [3] Le potenze dissipate nei due casi proposti, indicando con  $I_1$  e  $I_2$  le correnti che circolanti, valgono:

$$P_1 = I_1^2 R_1 \quad \text{e} \quad P_2 = I_2^2 R_2$$

dove

$$I_1 = \frac{f}{r + R_1} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{f}{r + R_2},$$

essendo  $f$  la forza elettromotrice del generatore. Poiché deve essere  $P_1 = P_2$ , si ha:

$$\frac{f^2}{(r + R_1)^2} R_1 = \frac{f^2}{(r + R_2)^2} R_2 \quad \Rightarrow \quad R_1(r + R_2)^2 = R_2(r + R_1)^2.$$

Pertanto:

$$r^2 = \sqrt{R_1 R_2} = 10 \Omega.$$

- [4] Durante la carica del condensatore tra le armature vi è un campo elettrico variabile nel tempo espresso dalla relazione:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon},$$

essendo  $\sigma(t)$  la densità di carica sulle armature. In termini infinitesimi si può scrivere:

$$dE(t) = \frac{d\sigma(t)}{\epsilon} = \frac{dq(t)}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon} = \frac{Idt}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon}.$$

Data la simmetria circolare del condensatore, le linee di forza del campo di induzione magnetica sono circonferenze normali all'asse delle armature e con centro su di esso; applicando, pertanto, la legge di circuitazione di Ampère a una di queste linee di induzione avente raggio  $r$  ( $r \leq R$ ) si ha:

$$B 2\pi r = \epsilon \mu \frac{dE}{dt} \pi r^2 = \epsilon \mu \frac{I}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu I}{2\pi R^2} r.$$

- [5] L'energia dissipata in un intervallo temporale è data dall'integrale della potenza dissipata per effetto Joule dalla resistenza  $R$  al passaggio della corrente  $i(t)$ ,

$$U = \int_{t_0}^{t_1} R i^2 dt.$$

L'andamento della corrente nella scarica di un condensatore è  $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$

con  $i_0 = q_0/\tau$ , dove  $\tau = RC$  è la costante di tempo del circuito. Quindi

$$U = R \frac{q_0^2}{R^2 C^2} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{q_0^2}{2C} \left( 1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}} \right);$$

infine:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2CU}{1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}}} = 1.52 \times 10^{-3} \text{ C.}$$

- [6] Per  $t < 0$  la corrente scorre lungo le resistenze  $R_1$  e  $R_3$  e la d.d.p. ai capi del condensatore sarà  $V_c^0 = V_{R_3} = R_3 I = f R_3 / (R_1 + R_3)$ . Per  $t > 0$  il condensatore si scaricherà sulla resistenza equivalente  $R_{eq} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$  data dalle resistenze  $R_2$  e  $R_3$  in parallelo. Quindi:

$$V_c(t) = V_c^0 e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} = \frac{f R_3}{R_1 R_3} e^{-\frac{t}{R_{eq}C}}.$$

- [7] Dal momento che la resistenza lungo un ramo è pari a  $R = \rho \ell / (\pi r^2)$ , le tre resistenze stanno nel rapporto

$$R_1 : R_2 : R_3 = \frac{\ell_1}{r_1^2} : \frac{\ell_2}{r_2^2} : \frac{\ell_3}{r_3^2} = \frac{1}{4} : \frac{2}{9} : \frac{3}{16}.$$

Poiché le resistenze sono in parallelo:  $I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$ , quindi

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} I_1 = \frac{9}{8} I_1$$

$$I_3 = \frac{R_1}{R_3} I_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} I_1 = \frac{4}{3} I_1.$$

Infine, dal momento che  $I_1 + I_2 + I_3 = 4 \text{ A}$  si ha

$$I_1 + \frac{9}{8} I_1 + \frac{4}{3} I_1 = \frac{83}{24} I_1 = 4 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{96}{83} \text{ A} = 1.16 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{9}{8} I_1 = 1.30 \text{ A} \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{4}{3} I_1 = 1.54 \text{ A.}$$

- [8] La carica iniziale del condensatore è  $Q_C^0 = Cf$  mentre quella finale sarà  $Q'_C = Cf/n$ . L'andamento della carica sul condensatore nel tempo può essere scritto

in generale nella forma

$$Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B \quad \text{per cui} \quad A = Q_C^0 - Q'_C \quad \text{e} \quad B = Q'_C$$

con  $\tau = RC/n$ . Quindi

$$Q(t) = Q_C^0 e^{-\frac{t}{\tau}} + Q'_C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Derivando rispetto al tempo e sostituendo le espressioni delle cariche si trova la corrente che fluisce nel circuito:

$$I(t) = \frac{f}{R} \frac{n-1}{n} e^{-\frac{nt}{RC}}.$$

- [9] La resistenza esterna si ricava dall'espressione  $R = V/I$ . La resistenza interna  $r$  è legata a  $f$  da  $f = (r + R)I$  da cui si ricava:

$$r = \frac{f - V}{I}.$$

La potenza termica dissipata nella batteria sarà pertanto:

$$P_T = rI^2 = (f - V)I = 0.6 \text{ W};$$

mentre la potenza generata dalle forze elettriche nella batteria è:

$$P_g = -IV = -2 \text{ W}.$$

- [10] La corrente che decresce avrà l'andamento  $I = I_0 - \alpha t$ . In un intervallo  $\Delta t$  si annullerà per cui  $\alpha = I_0/\Delta t$ . La carica totale che passerà nella resistenza in questo intervallo di tempo sarà:

$$q = \int_0^{\Delta t} Idt = \int_0^{\Delta t} I_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) dt = I_0 \Delta t - \frac{1}{2} I_0 \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} I_0 \Delta t.$$

Pertanto:

$$I_0 = \frac{2q}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{2q}{(\Delta t)^2},$$

quindi:

$$I = \frac{2q}{\Delta t} \left( 1 - \frac{t}{\Delta t} \right).$$

Il calore dissipato dalla resistenza vale:

$$Q = \int_0^{\Delta t} RI^2 dt = \frac{R4q^2}{(\Delta t)^2} \left( \Delta t + \frac{(\Delta t)^3}{3(\Delta t)^2} - \frac{2(\Delta t)^2}{2\Delta t} \right) = \frac{4Rq^2}{3\Delta t}.$$

- [11] Durante la scarica del condensatore, la carica  $Q$  sulle armature varia secondo la legge

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

e, quindi, la corrente che attraversa la resistenza, se  $q$  è la carica che passa in essa, è

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}.$$

Indicando con  $S$  l'area della superficie delle armature del condensatore, il campo elettrico tra di esse è:

$$E_0 = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{S\epsilon_0} = \frac{1}{S\epsilon_0} Q_0 e^{-t/RC}.$$

Pertanto:

$$|j_s| = \left| \epsilon_0 \frac{dE_0}{dt} \right| = \frac{1}{S} \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow i_s = \int \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = i.$$

- [12] Prima dell'apertura dell'interruttore il condensatore è scarico perché cortocircuitato. dopo l'apertura dell'interruttore, la situazione di regime finale vede scorrere una corrente attraverso il generatore pari a  $I = f/R_f$  dove  $R_f$  è la resistenza equivalente vista dal generatore, ovvero:

$$R_f = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5}{3}R$$

e  $I = 3f/(5R)$ . Quindi la carica finale sul condensatore sarà  $Q_f = C f_c =$

$CIR = (3/5)Cf$ . L'espressione dell'andamento di  $Q(t)$  è pertanto:

$$Q(t) = \frac{3}{5}Cf(1 - e^{t/\tau})$$

con  $\tau = R_c C$  e  $R_c$  la resistenza equivalente vista dal condensatore tale che

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_c = \frac{2}{5}R.$$

[13] L'andamento della corrente nel tempo è dato dalla relazione

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

L'energia dissipata si calcola integrando nel tempo la potenza

$$\Delta U = - \int_0^{t_1} RI(t)^2 dt = \frac{Q_0^2}{2C} \left( e^{-\frac{2t_1}{RC}} - 1 \right),$$

per cui

$$Q_0 = \sqrt{\frac{-2C\Delta U}{1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}}} = 1.52 \times 10^{-3} \text{ C}.$$

[14] A interruttore aperto la corrente che scorre nel generatore è  $I = f/3R$ ; di conseguenza la differenza di potenziale ai capi del condensatore è:

$$V_C = 2RI = (2/3)f.$$

Alla chiusura dell'interruttore, il condensatore possiede una carica  $Q = CV_C$  e si scarica sulle due resistenze in parallelo; ai capi delle resistenze, quindi, si avrà un andamento della differenza di potenziale espresso dalla relazione

$$V_R(t) = V_C e^{-t/\tau} = \frac{2}{3}f e^{t/\tau}$$

con  $\tau = R_p C$  e la resistenza equivalente del parallelo  $R_p = (3/4)R$ . Infine la corrente che scorre nella resistenza  $3R$  sarà:

$$I_{3R}(t) = \frac{V_R(t)}{3R} = \frac{2}{9} \frac{f}{R} e^{-t/\tau}.$$

- [15] Nella condizione di regime iniziale, la corrente che scorre nel generatore è  $I = f/(r + R_1)$  per cui i due condensatori sono in parallelo e sottoposti ad una tensione iniziale pari a:

$$V_0 = R_1 I = \frac{f R_1}{r + R_1}.$$

In seguito alla chiusura dell'interruttore il resistore  $R_1$  è cortocircuitato e i due condensatori in serie si scaricano sul resistore  $R_2$ . Data la capacità della serie,  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$  e la differenza di potenziale iniziale  $V_0$ , l'andamento della corrente sul resistore  $R_2$  è:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}} = \frac{V_0}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} = \frac{R_1}{R_2} \frac{f}{r + R_1} e^{-\frac{t}{R_2 C}}.$$



# Campo di induzione magnetica

## 12.1 Esercizio guida – Campo di induzione $\mathbf{B}$ generato da correnti continue

### Teoria

La così detta prima formula di Laplace specifica il valore del contributo differenziale al campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  generato da un elemento di circuito  $d\mathbf{l}$  in cui fluisca una corrente elettrica  $i$ :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Integrata su una retta su cui scorra una corrente  $i$ , diviene

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

con  $r$  distanza del punto dalla retta mentre, integrata su un'intera circonferenza di raggio  $R$  fornisce sull'asse di questa a distanza  $z$  dal piano di giacenza un campo

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Nella formula differenziale sopra riportata la notazione è vettoriale e il simbolo  $\mathbf{r}$  vuole indicare il vettore da  $d\mathbf{l}$  al punto dove si calcola il campo; le formule integrali,

invece, specificano solamente il valore del modulo del campo, essendo il vettore **B** diretto tangenzialmente a una circonferenza di raggio  $r$  centrata sul filo percorso da corrente e a questo ortogonale, nel primo caso, e diretto secondo l'asse della circonferenza nel secondo.

### Argomento

Si considerano più correnti elettriche circolanti in fili rettilinei e/o circonferenze, variamente distribuiti nello spazio e si calcola il campo di induzione risultante o, nei problemi inversi, si determinano le distribuzioni delle correnti o i valori di queste, essendo date informazioni sui campi.

*La scelta  
ottimale del  
sistema di  
coordinate*

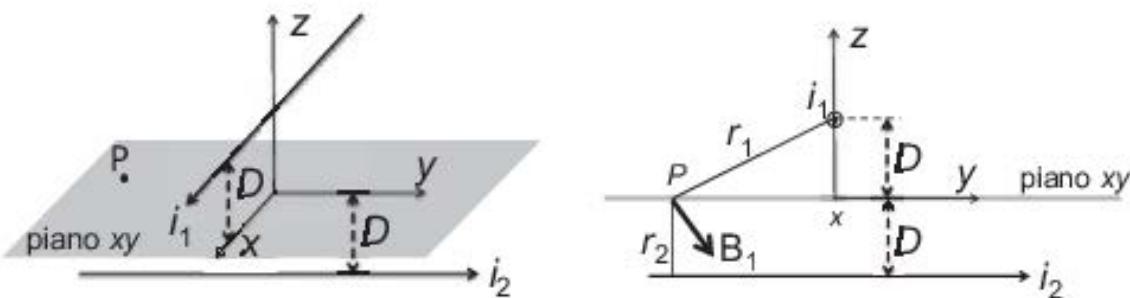
I campi vengono calcolati separatamente, come sono generati da ciascuna delle singole correnti, e il campo totale è ottenuto considerando la natura vettoriale, quindi per somma separata delle componenti cartesiane o considerando gli angoli tra le singole componenti. Le distanze tra il punto dove si calcola il campo e le singole correnti sono considerate separatamente e poi sommate in coerenza con le reali posizioni occupate nello spazio.

*Due correnti  $i_1$  e  $i_2$  scorrono in due fili rettilinei infinitamente estesi disposti secondo direzioni mutuamente ortogonali nello spazio a una distanza  $2D$ . Si calcola il campo di induzione **B** in ogni punto del piano parallelo a entrambi i fili posto in posizione equidistante da questi.*

La geometria del problema suggerisce di scegliere gli assi  $x$  ed  $y$  di una terna cartesiana paralleli alle direzioni dei due fili e l'asse  $z$  coincidente con la direzione del segmento distanza; in tal modo, il piano su cui si calcolano i valori del campo coincide col piano  $z = 0$  (Fig. 12.1 nella pagina successiva: a sinistra in prospetto, a destra vista dall'asse  $x$  con indicazione del solo campo  $B_1$  generato dalla  $i_1$ ).

I valori dei moduli dei due campi componenti  $B_1$  e  $B_2$  sono rispettivamente:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1} \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2}$$



**Fig. 12.1.** Due correnti  $i_1$  e  $i_2$  scorrono in due fili rettilinei infinitamente estesi disposti secondo direzioni mutuamente ortogonali nello spazio a una distanza  $2D$

dove  $r_1$  e  $r_2$  sono le distanze dal punto  $P$  delle rette dove scorrono le due correnti. Per quanto riguarda le direzioni nello spazio in cui sono diretti i due campi componenti, il campo  $\mathbf{B}_1$  non ha componenti lungo  $x$  e il campo  $\mathbf{B}_2$  non ha componenti lungo  $y$ ; entrambi, invece hanno componenti lungo  $z$ . Queste ultime sono, rispettivamente

$$B_{1z} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1^2} y \quad \text{e} \quad B_{2z} = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2^2} x.$$

Pertanto, le tre componenti del campo  $\mathbf{B}$  risultante sono

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_2 \frac{D}{D^2 + x^2} \\ B_y &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \frac{D}{D^2 + y^2} \\ B_z &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_1}{D^2 + y^2} y - \frac{i_2}{D^2 + x^2} x \right). \end{aligned}$$

Nell'origine delle coordinate le componenti del campo sono

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi D} i_2, \quad B_y = \frac{\mu_0}{2\pi D} i_1, \quad B_z = 0.$$

Si consideri il problema precedente, nel quale il piano non sia in posizione intermedia tra le due correnti, ma si trovi da queste a distanze  $D_1$  e  $D_2$  diverse. Se ne

*considerino le possibili varianti inverse: date le distanze  $D_1$  e  $D_2$  e le componenti  $B_x$  e  $B_y$  dei campi in uno specifico punto, ma lasciando incognite le correnti, si determina la componente  $B_z$ ; ovvero, date le due correnti e le componenti  $B_x$  e  $B_y$  dei campi, si determinano le distanze ecc.*

La diseguaglianza delle due distanze va considerata nelle espressioni delle distanze  $D_1$  ed  $D_2$ , presenti nelle espressioni finali delle componenti dei campi

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_2 \frac{D_2}{D_2^2 + x^2} \\B_y &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \frac{D_1}{D_1^2 + y^2} \\B_z &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{i_1}{D_1^2 + y^2} y - \frac{i_2}{D_2^2 + x^2} x \right).\end{aligned}$$

Per quanto riguarda i problemi inversi, se sono note le distanze e le componenti  $B_x$  e  $B_y$  dei campi in un dato punto di coordinate  $x$  e  $y$ , le correnti si ricavano dalle prime due espressioni precedenti

$$i_1 = \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{D_1^2 + y^2}{D_1} B_y \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{D_2^2 + x^2}{D_2} B_x$$

che, inserite nella terza, forniscono la componente  $B_z$  del campo

$$B_z = \frac{y}{D_1} B_y - \frac{x}{D_2} B_x.$$

Analogamente, se sono note le correnti e le componenti  $B_x$  e  $B_y$  dei campi, si ricavano le distanze, risolvendo in questo caso due equazioni di secondo grado

$$\begin{aligned}D_1 &= \frac{\frac{\mu_0}{2\pi} i_1 \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{2\pi} i_1\right)^2 - (2B_y y)^2}}{2B_y} \\D_2 &= \frac{\frac{\mu_0}{2\pi} i_2 \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_0}{2\pi} i_2\right)^2 - (2B_x x)^2}}{2B_x}.\end{aligned}$$

## 12.2 Esercizio guida – Solenoidi

### Teoria

Un solenoide ideale è costituito da un numero infinito di spire circolari conduttrici affiancate, in numero di  $n$  per unità di lunghezza, di eguale raggio  $R$ , percorse da una comune corrente  $i$ . Al suo interno si genera un campo di induzione magnetica uniforme diretto secondo la direzione dell'asse, di modulo pari a

$$B = \mu_0 ni.$$

All'esterno del solenoide il campo è nullo.

In alternativa, si considera una superficie cilindrica su cui scorra, lungo i percorsi circonferenziali di sezione, una corrente con intensità lineica  $j = ni$ . Il campo è dato da

$$B = \mu_0 j.$$

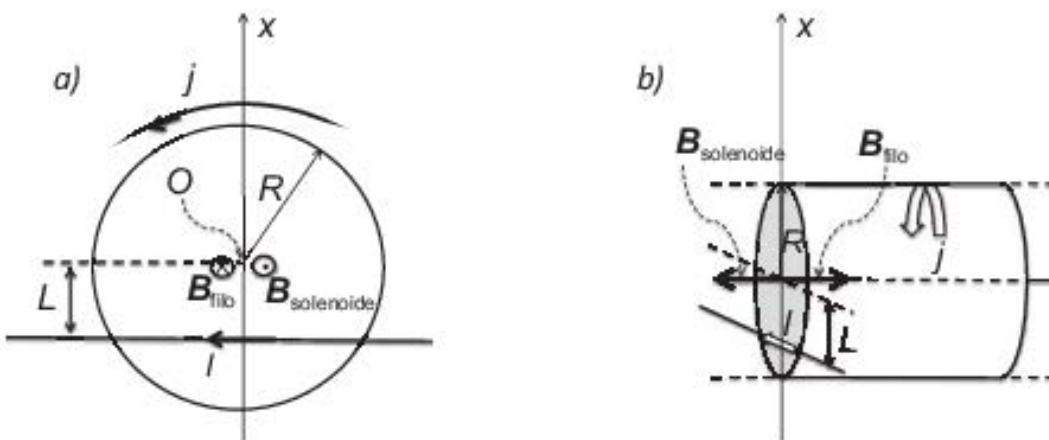
### Argomento

*La scelta ottimale del sistema di coordinate*

Si considerano più combinazioni di solenoidi e correnti in fili rettilinei infiniti e/o in singole spire circolari. Il campo di induzione **B** generato da ogni singolo circuito va sommato vettorialmente per ottenere il campo risultante. Nei problemi inversi, si determinano le distribuzioni delle correnti o i valori di queste, essendo date informazioni sui campi.

I campi vengono calcolati separatamente, come sono generati da ciascuna delle singole correnti presenti, e il campo complessivo è ottenuto tenendo in considerazione la natura vettoriale, quindi per somma separata delle componenti cartesiane.

*Un solenoide di raggio  $R$  percorso da una corrente con densità lineica  $j$  è attraversato da una corrente  $I$  rettilinea indefinita, ortogonale all'asse e passante a una distanza  $L$  da questo. Si lascia incognita la corrente  $I$  e se ne cerca il valore per*



**Fig. 12.2.** Un solenoide di raggio  $R$  è attraversato da una corrente  $I$ : a) sezione con un piano normale all'asse del solenoide contenente il filo, b) prospetto

il quale il campo  $\mathbf{B}$  risultante si annulla in un punto dell'asse del solenoide e quale sia, in queste condizioni, il campo all'interno del solenoide nel punto più lontano dall'asse sul piano a questo ortogonale che contiene il filo.

Il campo di induzione generato dal solenoide è ovunque diretto parallelamente all'asse e quello generato dal filo è parallelo all'asse del solenoide solamente sui punti del piano contenente il filo e normale all'asse (piano rappresentato in Fig. 12.2a e indicato in grigio nel prospetto di Fig. 12.2b). Quindi, l'annullamento del campo totale può avversi solo su questo piano e, dovendosi ricercare la condizione di annullamento in un punto dell'asse, esso è il punto intersezione tra l'asse e tale piano. L'annullamento si ha quando i due campi hanno il medesimo modulo e verso opposto, cioè per

$$B_{\text{filo}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} = B_{\text{solenoido}} = \mu_0 j \quad (12.1)$$

da cui

$$I = 2\pi L j.$$

Il punto più lontano dall'asse sul piano a questo ortogonale contenente il filo si trova sulla circonferenza della sezione del solenoide a distanza  $R + L$  dal filo, dove il campo vale

$$B = \mu_0 \left( j - \frac{I}{2\pi(L+R)} \right).$$

Più direttamente, se è data la corrente  $I$  passante a distanza  $L$  dall'asse, si cerca in quale posizione sulla retta  $x$  (con origine nel punto  $O$  di Fig. 12.2a) si annulla il campo totale e la condizione per cui il punto di annullamento si trova più vicino dell'asse stesso alla corrente.

In questo caso, l'Eq. (12.1) si scrive:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi(L+x)} = \mu_0 j,$$

da cui

$$x = \frac{I}{2\pi j} - L.$$

Il punto di annullamento del campo di induzione è più vicino al filo di quanto non lo sia l'asse del solenoide se  $x < 0$ , cioè se

$$I < 2\pi L j.$$

### 12.3 Esercizio guida – Forza di Lorentz

#### Teoria

Una carica  $q$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  in un dato sistema di riferimento assoluto dove siano presenti un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  esperimenta una forza complessiva data da

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Nel caso in cui sia presente soltanto un campo elettrico uniforme  $\mathbf{E}$ , la carica esegue nel tempo una traiettoria parabolica con velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}}{m}t$$

essendo  $\mathbf{v}_0$  la velocità al tempo  $t = 0$ . Nel caso in cui sia presente soltanto un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme, la carica esegue una traiettoria che –

proiettata su un piano ortogonale al campo  $\mathbf{B}$  – è una circonferenza di raggio

$$R = \frac{mv_n}{qB} \quad (12.2)$$

con  $v_n$  componente normale della velocità al campo  $\mathbf{B}$ , che viene percorsa con velocità angolare

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

### Argomento

Il moto di una particella sottoposta contemporaneamente a un campo elettrico e a un campo di induzione magnetica è in generale di difficile soluzione analitica. I problemi che si esaminano sono assai semplificati, riducendosi a casi di campi uniformi nello spazio e, nel caso siano entrambi diversi da zero, alla condizione di parallelismo tra di essi. In quest'ultimo caso, il moto parallelo alla direzione dei campi è casualmente separato da quello sul piano ortogonale, riducendosi a un moto complessivo del tipo a spirale.

Il campo di induzione magnetica all'interno di un solenoide provoca un moto circolare uniforme su una particella che entri nel campo con velocità normale alle linee del campo di forza e ne determina l'uscita dopo un determinato tratto di traiettoria, dipendente dalla velocità di ingresso e dai parametri del solenoide.

#### *Determinazione della traiettoria*

Nei casi esaminati di campi uniformi e paralleli tra loro (elettrico e magnetico), il moto si studia separatamente per quel che riguarda la componente parallela ai campi e la componente ortogonale. Determinata la traiettoria, si inducono i parametri geometrici relativi al sistema circostante.

*Una carica elettrica  $q$  di massa  $m$  si trova in uno spazio dove sono presenti un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , entrambi uniformi e paralleli tra loro. Al tempo  $t = 0$  essa ha velocità  $\mathbf{v}_0$ . Si determina la traiettoria eseguita dalla particella in questo spazio e le caratteristiche della stessa.*

Il campo elettrico accelera la particella nella direzione del campo, quindi di entrambi i campi dato che sono paralleli, facendone variare la sola componente parallela (scelta nella direzione  $z$ ); l'accelerazione dovuta al campo di induzione, invece, modifica la sola direzione della componente ortogonale senza farne variare l'intensità e, in tal modo, i due effetti si possono considerare separatamente. La componente parallela varia nel tempo secondo la

$$v_z = v_{0z} + \frac{qE}{m}t$$

e la proiezione del moto della particella su un piano ortogonale ai campi è una circonferenza il cui raggio è espresso dall'Eq. (12.2). La posizione  $z$  della particella al tempo  $t$  generico, è descritta da:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2.$$

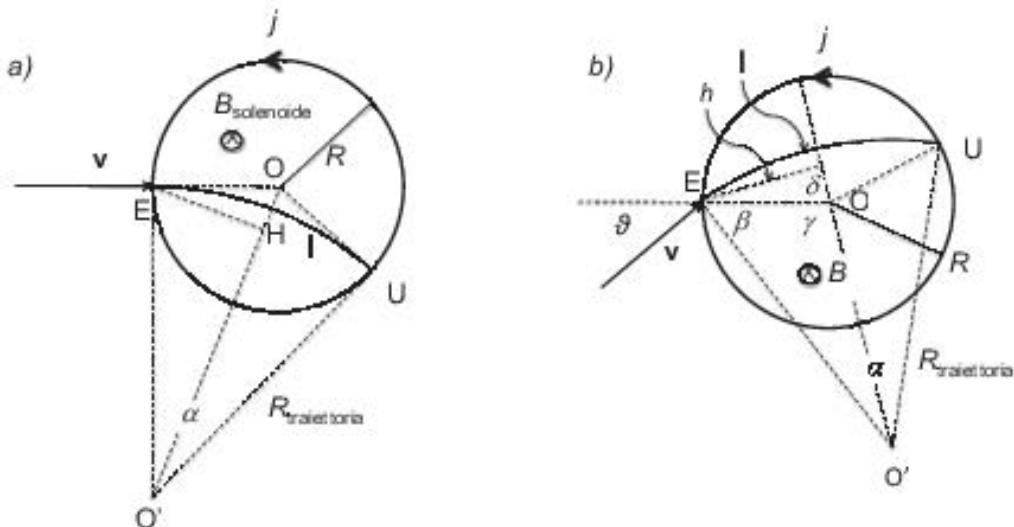
La traiettoria eseguita dalla particella è pertanto una spirale il cui passo varia nel tempo per effetto della variazione della componente della velocità nella direzione  $z$ . L'avanzamento della particella nella direzione  $z$  in un tempo pari al periodo del moto circolare,  $T$ , proiettato sul piano ortogonale a partire dal generico istante  $t$  è

$$p(t) = z(t+T) - z(t) = v_{0z}T + \frac{1}{2} \frac{qE}{m}(2tT + T^2) = \frac{2\pi}{B} \left[ \frac{m}{q} v_{0z} + E \left( t + \frac{\pi m}{qB} \right) \right],$$

avendo usato la relazione tra periodo del moto circolare uniforme e il campo  $B$ . Nel caso in cui il campo elettrico si annullasse, la particella avanzerebbe secondo  $z$  con velocità costante  $v_0$  e il passo  $p$  sarebbe costante di valore pari a

$$p_{E=0} = v_{0z} \frac{2\pi m}{qB}.$$

*Si considera una carica elettronica e che entra con velocità  $\mathbf{v}$  all'interno di un solenoide di raggio  $R$  alimentato da una corrente di densità lineica  $j$ , uscendone dopo avere percorso un tratto della traiettoria all'interno del solenoide. Se la direzione di incidenza di  $\mathbf{v}$  passa per l'asse del solenoide ortogonalmente ad esso, si determina la lunghezza  $l$  dell'arco di traiettoria.*



**Fig. 12.3.** Un elettrone che entra con velocità  $v$  all'interno di un solenoide di raggio  $R$ . a): la direzione di incidenza di  $v$  passa per l'asse del solenoide ortogonalmente ad esso; b): la direzione di incidenza di  $v$  è contenuta in un piano normale all'asse del solenoide, ma non passa per esso

All'interno del solenoide la particella descrive un arco di circonferenza, compreso tra i due punti di ingresso  $E$  e di uscita  $U$  dal solenoide (Fig. 12.3a in questa pagina), il cui raggio è dato da

$$R_{\text{traiettoria}} = \frac{mv}{q\mu_0 j}.$$

L'arco di traiettoria è normale alla superficie del solenoide sia in ingresso (per dato del problema), sia in uscita (essendo la traiettoria simmetrica rispetto alla retta  $OO'$  per i due centri) e la sua lunghezza all'interno del solenoide è data da

$$l = R_{\text{traiettoria}} \alpha.$$

L'angolo  $\alpha$  si ricava dalle relazioni del triangolo  $OEO'$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{R_{\text{traiettoria}}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2mv}{q\mu_0 j} \arctan \left( \frac{q\mu_0 j R}{mv} \right)$$

Si consideri il caso più generale in cui la direzione della velocità di entrata  $\mathbf{v}$  della carica non passi per l'asse del solenoide, pur se ancora contenuta su un piano ad esso ortogonale. In tale caso si consideri il problema inverso, di trovare l'angolo  $\vartheta$  (Fig. 12.3b) tra la direzione di detta velocità e quella del diametro della sezione del solenoide passante per il punto di ingresso, essendo noto l'angolo al centro ( $2\delta$ ) dell'arco di traiettoria descritto.

Come per il caso precedente, il problema si riduce a determinare il valore dell'angolo  $\alpha$  attraverso relazioni geometriche tra gli angoli indicati in Fig. 12.3b. In particolare si ha la sequenza

$$h = R \sin \delta \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{R_{\text{traiettoria}}} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\alpha}{2}$$

da cui

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \delta + \arcsin \left( \frac{R \sin \delta}{R_{\text{traiettoria}}} \right).$$

## 12.4 Esercizio guida – Seconda legge di Laplace

### Teoria

Un elemento differenziale di corrente, definito come un tratto  $d\mathbf{l}$  di un circuito in cui circoli una corrente d'intensità  $i$ , che sia posto in un punto dello spazio dove è presente un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$ , è soggetto a una forza pari a

$$d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

nota come seconda legge di Laplace. L'espressione differenziale è possibile di una verifica sperimentale per integrazione su un tratto finito  $\mathcal{L}$  di circuito:

$$\mathbf{F} = i \int_{\mathcal{L}} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (12.3)$$

Se si esplicita l'espressione dell'elemento differenziale  $d\mathbf{l}$  per un tratto di filo con-

duttore di sezione  $A$  e volume  $V$ , con  $n$  elettroni di conduzione per unità di volume si ottiene

$$d\mathbf{F} = ne(Adl)\mathbf{v} \times \mathbf{B} = neV\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12.4)$$

in cui  $e$  e  $\mathbf{v}$  sono rispettivamente la carica e la così detta velocità di deriva degli elettroni. Dalla Eq. (12.4) si deriva la formula di Lorentz per la forza agente su una carica  $q$  in moto in un campo di induzione (v. a pagina 483)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Se un intero circuito è posto in uno spazio dove sia presente un campo di induzione  $\mathbf{B}$  uniforme, la forza netta agente sul circuito è nulla e tuttavia sul circuito agisce un momento meccanico risultante pari a

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

dove  $\mathbf{m}$  è il momento magnetico del circuito che, per una spira piana di area  $S$ , può scriversi come

$$\mathbf{m} = iS\mathbf{n}$$

con  $\mathbf{n}$  versore normale al piano di giacenza della spira, orientato dalla parte da cui si osserva la corrente circolare in verso antiorario.

### Argomento

L'azione meccanica di un campo di induzione su un circuito percorso da corrente richiede l'integrazione dell'espressione Eq. (12.3), eseguibile in termini finiti solo in casi limitati. La riduzione del circuito alla geometria elementare di un rettangolo permette di semplificare il calcolo se, in aggiunta, si può assumere l'uniformità del campo, o siano presenti almeno particolari simmetrie. Tale è il caso del circuito che si prende in esame, per il quale si considera il campo di induzione generato da un filo rettilineo indefinito, parallelo a una coppia di lati del circuito. Si considera un orientamento generico del piano di giacitura del circuito e si ricerca l'azione meccanica complessiva, sia di forza, sia di momento (Fig. 12.4 a pagina 490).

*Si considerano i contributi alla forza da parte dei singoli lati e il momento risultante*

Nei casi esaminati, per la particolare simmetria delle geometrie indicate, i contributi alla forza risultante da parte dei lati ortogonali al filo si annullano reciprocamente, così che ci si può limitare al contributo dei due lati rimanenti, paralleli al filo. Se questi si trovano a distanze diverse dal filo, dove il campo di induzione assume valori diversi, la forza risultante è diversa da zero e il momento meccanico viene computato considerando i valori delle singole forze; se si trovano in punti dove il campo è eguale, il momento si computa considerando il momento magnetico del circuito (Eq. (12.4)).

*Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$ , percorsa da una corrente costante  $i$ , è posta con i due lati di lunghezza  $b$  paralleli a un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente  $I$ . Il lato più vicino al filo dista di un tratto  $D$  da questo, mentre il piano della spira forma un angolo  $\vartheta$  con il piano contenente il filo e il lato ad esso più vicino. Si vogliono determinare le azioni meccaniche agenti sul circuito.*

Il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  generato dal filo in un punto generico ha modulo dipendente dalla sua distanza  $r$  da quello, dato da

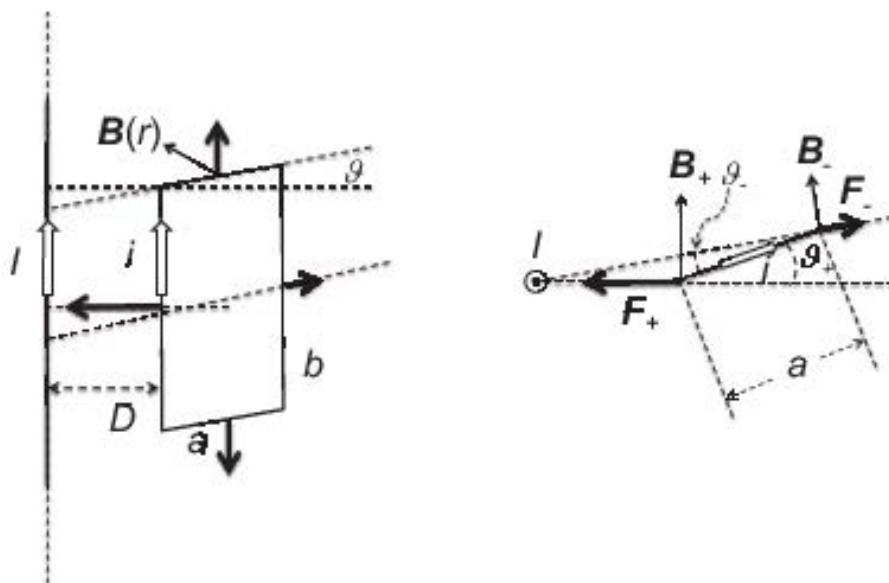
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

e linee di forza circolari giacenti su piani ortogonali al filo e centrati su questo.

Le forze agenti sui singoli tratti del circuito sono date dall'Eq. (12.3) e pertanto per i due lati  $a$  del circuito che sono ortogonali al filo i contributi si annullano, essendo eguali e opposti su ogni elemento differenziale dei due lati (Fig. 12.4 nella pagina successiva). Sui due lati di lunghezza  $b$  paralleli al filo le due forze hanno valori, per il più vicino  $F_+$  e il più lontano  $F_-$ , rispettivamente eguali a

$$F_+ = ib \frac{\mu_0 I}{2\pi D_+} \quad \text{e} \quad F_- = ib \frac{\mu_0 I}{2\pi D_-}$$

con  $D_- = \sqrt{D_+^2 + a^2 + 2D_+a \cos \vartheta_-}$  identificando d'ora in avanti col segno + a pedice tutte le grandezze relative al lato  $b$  della spira più vicino al filo e col - quelle



**Fig. 12.4.** Posizioni relative della corrente rettilinea (a sinistra: vista di lato, a destra: vista dall'alto) e della spira rettangolare

relative al più lontano. Tenuto debito conto delle direzioni delle due forze (Fig. 12.5), la risultante ha modulo pari a

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= \sqrt{F_+^2 + F_-^2 - 2F_+F_- \cos(\vartheta_+ - \vartheta_-)} = \\ &= ib \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{D_+^2} + \frac{1}{D_-^2} - \frac{2\cos(\vartheta_+ - \vartheta_-)}{D_+ D_-}}. \end{aligned}$$

L'insieme delle forze è equivalente alla risultante applicata nel centro della spira e a una coppia di forze di momento

$$M = ib \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{2} \left( \frac{\sin \vartheta_+}{D_+} + \frac{\sin \vartheta_-}{D_-} \right). \quad (12.5)$$

L'esplicitazione dei termini in  $\vartheta_-$  in funzione di  $\vartheta_+$  richiede un'algebra che esula



**Fig. 12.5**

dall'interesse del contesto. Il calcolo si semplifica se la posizione della spira è tale per cui i due lati  $b$  paralleli al filo si trovano alla stessa distanza  $D_+ = D_- = D$  dal filo (Fig. 12.6). In tal caso  $\vartheta_-$  e  $\vartheta_+$  sono supplementari con eguale valore del seno, pari a

$$\sin \vartheta_+ = \sin \vartheta_- = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2D}\right)^2}.$$

Pertanto il momento diviene

$$M = m \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2D}\right)^2}$$

essendo  $m = abi$ . Ulteriore caso di in-

teresse si ha se la distanza della spira dal filo è sufficientemente grande rispetto al lato  $a$  della spira, così da potersi assumere valida l'approssimazione  $\vartheta_+ \simeq \vartheta_- \simeq \vartheta$ . In tale caso l'Eq. (12.5) si riduce a

$$M = m \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sin \vartheta.$$

L'espressione trovata è il modulo del vettore momento, scritto come già più sopra riportato

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

dove il modulo del campo  $\mathbf{B}$  ha il valore che assume alla distanza  $D$  dal filo, in quanto l'ipotesi di grande distanza equivale ad assumere un campo localmente uniforme.

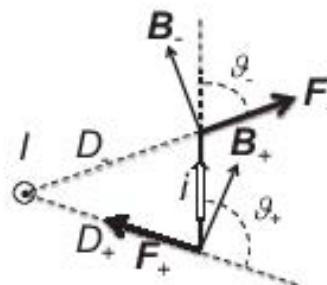


Fig. 12.6

*Quale estensione del problema ora discusso, si considera la configurazione di simmetria della spira rispetto al filo, qual è rappresentata nell'ultima figura proposta, e si aggiunge al sistema un secondo filo parallelo al precedente, posto anch'esso in posizione simmetrica rispetto alla spira e, rispetto al piano di giacitura di questa, dalla parte opposta rispetto a quella in cui si trova il primo filo, a distanza  $D_2$  dai lati  $b$  della spira, essendo  $I_1$  la corrente e  $D_1$  la distanza del primo. Si cerca il valore della corrente  $I_2$  che deve fluire nel secondo filo perché sulla spira non agiscano forze né momenti.*

Affinché si annulli sia la forza sia il momento risultante applicati alla spira, le risultanti delle forze applicate sui due lati  $b$  della spira devono essere eguali e opposte e orientate sul medesimo piano della spira, come indicato nella figura, dove sono riportati in dettaglio i campi di induzione e le azioni da essi prodotte su un unico lato della spira, con la risultante delle forze  $F_{TOT-}$  opposta alla  $F_{TOT+}$  (sono altresì indicati con gli indici 1 e 2 le grandezze riferentisi al primo e al secondo filo).

Perché ciò accada, le componenti  $F_1$  e

$F_2$  delle singole forze applicate su ogni lato devono avere eguali e contrarie le componenti ortogonali al piano della spira. Ciò corrisponde, per i campi di induzione  $B_1$  e  $B_2$ , ad avere eguali e contrarie le componenti parallele al piano della spira. Pertanto si ha:

$$B_{\text{parallelo}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1 \sin \vartheta_1}{D_1} - \frac{I_2 \sin \vartheta_2}{D_2} \right) = 0$$

e

$$F_{\text{ortogonale}} = bi \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{I_1 \sin \vartheta_1}{D_1} - \frac{I_2 \sin \vartheta_2}{D_2} \right) = 0.$$

Di qui si ricava la corrente che deve circolare nel secondo filo affinché possa annullarsi la forza risultante sulla spira:

$$I_2 = I_1 \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \frac{D_2}{D_1}.$$

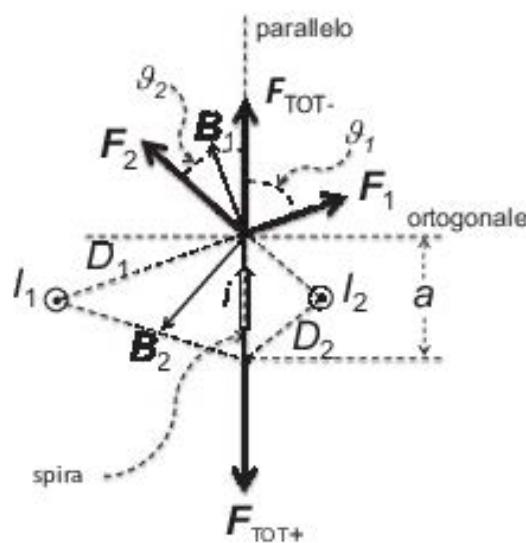


Fig. 12.7

Quale variante del problema, si considera il caso in cui la spira, che per semplicità si pensa quadrata di lato  $L$ , giace su un piano ortogonale al filo percorso dalla corrente  $I$ , inizialmente col centro coincidente con la posizione del filo e successivamente col centro traslato di un tratto  $a$  rispetto a quella.

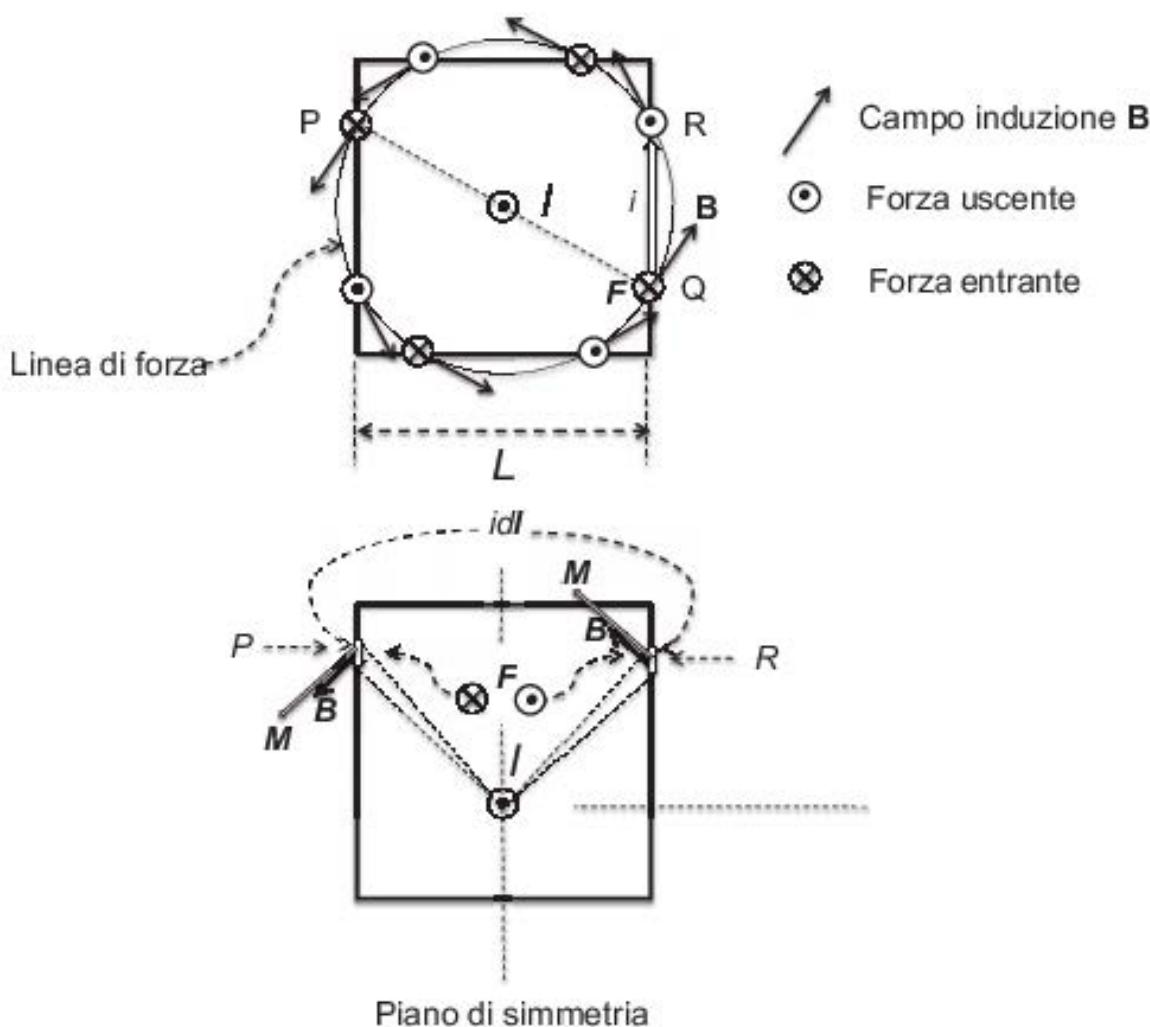


Fig. 12.8

Nel caso in cui il centro della spira quadrata si trovi nella posizione del filo percorso da corrente, la forza risultante e il momento risultante sono entrambi nulli. Ciò deriva direttamente dalla simmetria del problema. Infatti, riferendosi alla Fig. 12.8 in alto, si evidenzia che per ogni elemento di linea  $dl$  di ciascun lato (per es. nel punto  $P$ ) esiste un elemento sul lato opposto (nel punto  $R$ ), sul quale la forza dovuta al campo di induzione  $\mathbf{B}$  è eguale e contraria, contribuendo così a una risultante nulla di tutte le forze. Analogamente per i momenti, per ogni elemento di linea  $dl$  di ciascun lato (ancora per es. nel punto  $P$ ) esiste un elemento diametralmente opposto (nel punto  $Q$ ), sul quale la forza è eguale, ma il braccio è opposto, contribuendo così a un risultante nullo dei momenti.

Nel caso in cui il centro della spira non coincida con la posizione del filo e ne sia ad

es. dislocato di un tratto  $d$  nella direzione parallela a un lato, le condizioni sopra dette non sono rispettate. In realtà, riguardo alla forza risultante, essa è nulla in quanto a ogni elemento di lunghezza  $dl$ , nel punto  $P$  ad es., corrisponde un elemento (nel punto  $R$ ) in posizione simmetrica rispetto al piano di simmetria passante per il filo (v. linea tratteggiata verticale in Fig. 12.8 nella pagina precedente in basso) nel quale la forza è eguale e contraria. Non è così, invece, per i momenti, per i quali la simmetria dovrebbe essere soddisfatta rispetto a un piano (orizzontale in figura) che non è di simmetria per il sistema.

## 12.5 Domande di verifica

- Evidenziare le proprietà fondamentali del vettore induzione magnetica.
- Ricavare l'espressione del campo di induzione magnetica prodotto a distanza  $r$  da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente  $I$  a partire dalla così detta prima legge di Laplace.
- Ricavare l'espressione del vettore induzione magnetica nei punti dell'asse di una spira circolare percorsa da corrente.
- Indicare in quale posizione una spira circolare percorsa da una corrente in un campo di induzione magnetica uniforme si trova: a) in equilibrio stabile; b) in equilibrio instabile.
- Trovare il lavoro compiuto dalle forze del campo di induzione magnetica per mantenere una carica elettrica in moto circolare uniforme.
- Descrivere come sia possibile determinare il segno di una carica elettrica puntiforme utilizzando un campo magnetico.
- Ricavare il periodo del moto circolare uniforme con cui una carica si muove in una regione dove è presente un campo di induzione magnetica uniforme.
- Ricavare l'espressione dell'energia per unità di volume associata a un campo di induzione magnetica.
- Definire il momento magnetico di una spira planare di forma qualsiasi.
- Dimostrare che una spira quadrata di lato  $l$ , percorso da una corrente  $i$  e posta in un campo magnetico uniforme si comporta alla stregua un ago magnetico (teorema di equivalenza di Ampère).

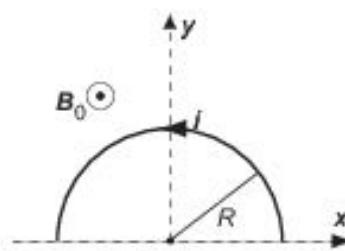
## 12.6 Esercizi

- [1] Su un disco di raggio  $R = 30\text{ cm}$  posto in rotazione con velocità angolare  $\omega = 200\text{ s}^{-1}$  attorno al proprio asse è distribuita uniformemente una carica  $q = 30\mu\text{C}$ . Si determini la corrente che deve fluire in un filo conduttore

rettilineo posto parallelamente al piano del disco a distanza  $d = 1\text{ m}$  da questo in posizione tale che la proiezione coincida con un diametro, perché i valori dei campi di induzione  $\mathbf{B}$  al centro del disco prodotti dal filo e dal disco in rotazione siano eguali in modulo.

- [2] Due spire circolari complanari e coassiali, di diametri rispettivamente eguali a  $R_1 = 5\text{ cm}$  e  $R_2 = 8\text{ cm}$ , sono percorse da due correnti elettriche discordi di pari intensità. Si determini la distanza dal piano delle spire del punto sull'asse in cui il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  prodotto dalle correnti ha componente assiale nulla.
- [3] Due conduttori cilindrici coassiali di raggio  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ) sono percorsi ciascuno con una corrente continua  $I$  di verso opposto. Determinare come varia il modulo dell'intensità del campo magnetico,  $H$ , in funzione della distanza  $r$  dall'asse dei conduttori. Si supponga trascurabile lo spessore del conduttore esterno, mentre il conduttore interno è completamente pieno.
- [4] Un sottile filo rettilineo indefinito in cui scorre una corrente  $i = 500\text{ mA}$  è complanare con una sbarretta metallica lunga  $l = 10\text{ cm}$ ; essa è posta ortogonalmente al filo con gli estremi,  $A$  e  $B$ , distanti dal filo  $x_A = 1\text{ cm}$  e  $x_B = 11\text{ cm}$ , rispettivamente, e si muove parallelamente al filo con una velocità costante  $\mathbf{v}$  diretta nel verso di scorrimento della corrente. Determinare il modulo di  $\mathbf{v}$  sapendo che la differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta vale  $V_A - V_B = 0.1\text{ }\mu\text{V}$ .
- [5] Un solenoide ideale è costituito da  $n = 1000$  spire/m percorse dalla corrente  $I = 1\text{ A}$  ed è riempito da un materiale omogeneo e isotropo di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r = 100$ . Determinare in modulo a) il campo  $\mathbf{B}$ , b) il vettore magnetizzazione  $\mathbf{M}$ .
- [6] Un cavo coassiale, costituito da un filo omogeneo metallico di sezione circolare avente raggio  $r_1 = 0.5\text{ mm}$  e da una calza conduttrice esterna coassiale col filo, di raggio  $r_2 = 3\text{ mm}$  e spessore trascurabile, è connesso a un suo estremo a un generatore di f.e.m.  $f = 70\text{ V}$  ed è chiuso all'altro estremo su una resistenza  $R = 50\Omega$ . Determinate il valore del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse del cavo per  $0 < r < \infty$ .

- [7] Nel vuoto un conduttore cilindrico cavo di raggi  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ) è percorso da una corrente distribuita con densità uniforme  $j$  tra  $a$  e  $b$ . Calcolare il campo di induzione magnetica  $B_0(r)$  in funzione della distanza  $r$  dall'asse del cilindro.
- [8] Un filo percorso da una corrente  $i$  è piegato, nel piano  $xy$ , a formare una semicirconferenza di raggio  $R$ . Perpendicolarmente al piano  $xy$  – lungo l'asse  $z$  – agisce un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  uniforme. Si determini la forza agente sulla semicirconferenza supponendo che essa sia posta nel vuoto.
- [9] Una corrente  $i$  è uniformemente distribuita nella sezione di un lungo conduttore rettilineo di raggio  $r = 1.5$  cm. Sulla superficie del conduttore il campo di induzione magnetica vale  $B_P = 2.5$  mT. Determinare il valore di  $B$  alla distanza  $d = 0.5$  cm dall'asse del filo.
- [10] Nel vuoto, un solenoide infinitamente lungo del diametro  $d = 4$  cm e avente  $n = 1000$  spire/m, è percorso nella direzione assiale da un sottile filo conduttore nel quale circola una corrente  $i_F$  pari a 100 volte la corrente  $i_S = 1$  mA che circola nel solenoide. Determinare il modulo  $B$  del vettore induzione magnetica a una distanza dall'asse del solenoide  $l = d/4$ .
- [11] Un filo rettilineo indefinito e una spira circolare di raggio  $R = 5$  cm sono percorsi da correnti della medesima intensità  $i$ . Indicate in modo inequivoco dove e come dovrà essere collocata nello spazio la spira rispetto al filo perché nel suo centro il campo di induzione  $B$  si annulli.
- [12] Due fili rettilinei indefiniti giacenti su un medesimo piano, su cui scorrono nei versi positivi due correnti della medesima intensità  $i$ , formano un angolo  $\vartheta = 20^\circ$ . Calcolate il valore del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  sulle bisettrici dei due angoli formati dalle direzioni dei fili in funzione delle distanze  $x$  e  $y$  dal vertice.
- [13] Un filo metallico rettilineo indefinito avente sezione circolare di raggio  $R$  è percorso da una corrente costante  $i$ . Come dovrebbe variare la densità di corrente



in funzione della distanza  $r$  dall'asse del filo, affinché il campo di induzione magnetica all'interno del filo abbia modulo costante?

- [14] Determinare quante spire ha un solenoide lungo  $l = 1\text{ m}$  e di raggio  $r = 1\text{ cm}$  sapendo che quando è percorso da una corrente  $i = i_0 + kt$  con  $k = 1\text{ A/s}$  e  $i_0 = 1\text{ A}$ , il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso il solenoide nell'istante  $t^* = 1\text{ s}$  vale  $1.26 \times 10^{-4}\text{ T} \cdot \text{m}^2$ .

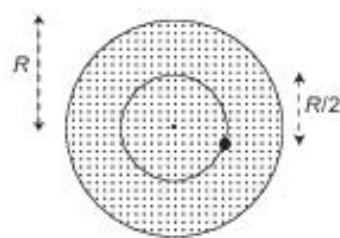
- [15] Tre fili rettilinei indefiniti e paralleli passano per i tre vertici di un triangolo equilatero di lato  $L = 2\text{ cm}$ , in direzione normale al piano del triangolo. Se due dei fili sono percorsi da due correnti eguali e concordi  $i_1 = 3\text{ A}$  e il terzo da una corrente  $i_2 = 5\text{ A}$ , discorde con le precedenti, si chiede il valore del campo di induzione  $\mathbf{B}$  nel punto al centro del triangolo.

- [16] Una carica  $q$  è uniformemente distribuita su un disco isolante di raggio  $R$  che ruota, nel vuoto, attorno al suo asse con velocità angolare  $\omega$ . Determinate il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}_0$  al centro del disco.

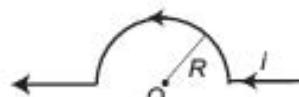
- [17] Un insieme di 100 fili indefiniti sono disposti nel vuoto a formare un cilindro di raggio  $R = 0.5\text{ cm}$ ; ogni filo porta una corrente  $i = 0.1\text{ A}$ , perpendicolare al foglio e uscente da esso. Determinare modulo, direzione e verso della forza per unità di lunghezza che agisce su uno dei fili a distanza  $R/2$  dal centro del cilindro (indicativamente mostrato con un pallino scuro nella figura a lato).

Nota: dato l'elevato numero di fili, la densità di corrente all'interno del cilindro può ritenersi costante.

- [18] Una corrente  $i$  percorre un filo formato da due tratti rettilinei e da un semicerchio di raggio  $R$ . Calcolare il campo di induzione magnetica nel punto  $O$  centro della semicirconferenza.



- [19] Due fili rettilinei indefiniti disposti secondo direzioni mutuamente ortogonali su un medesimo piano sono percorsi da due correnti  $i_1 = 3\text{ A}$  e  $i_2 = 7\text{ A}$ . Si

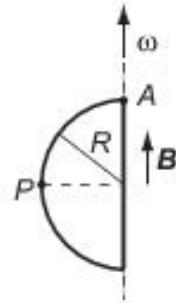


chiede quale angolo  $\vartheta$  formi con la direzione del filo percorso dalla corrente  $i_2$  la retta posta sul piano di giacitura delle correnti in ogni punto della quale il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è nullo.

- [20] Due piccole spire circolari di eguale area  $A = 15 \text{ mm}^2$  percorse da due eguali correnti elettriche di intensità  $i = 300 \text{ mA}$  sono disposte con i loro piani di giacenza mutuamente ortogonali, coi centri a distanza  $L = 4 \text{ cm}$  e una delle due ha il suo centro sul piano di giacenza dell'altra. Si chiede quale sia il modulo del momento meccanico che ciascuna spira esercita sull'altra.
- [21] Due fili rettilinei indefiniti sono paralleli tra loro e distano  $L = 10 \text{ cm}$ . I fili sono percorsi da due correnti discordi e di uguale intensità  $i$ . Il valore del campo di induzione magnetica generato dalle correnti in un generico punto  $P$  distante  $2L$  dai fili è pari a  $B = 7 \times 10^{-6} \text{ T}$  in modulo. Si determini il valore di  $i$ .
- [22] Un protone si muove perpendicolarmente a un campo magnetico  $\mathbf{B}$  con una velocità  $v = 1 \times 10^7 \text{ m/s}$  subisce un'accelerazione  $a = 2 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$  nella direzione  $+x$  quando la sua velocità è nella direzione  $+z$ . Determinare modulo, direzione e verso del campo magnetico. (Massa del protone:  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , carica del protone:  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ )
- [23] Un cilindro conduttore di rame a sezione retta circolare di raggio  $R$  ruota con velocità angolare uniforme  $\omega$  attorno al suo asse. Calcolare il valore assoluto della differenza di potenziale che insorge tra un punto dell'asse e un punto della superficie esterna, se il conduttore viene immerso in un campo di induzione magnetica  $B$  parallelo all'asse del cilindro. ( $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$ ;  $B = 1 \text{ T}$ ;  $R = 1 \text{ cm}$ )
- [24] Un disco di rame di diametro  $R = 30 \text{ cm}$ , immerso in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  uniforme e ortogonale al piano del disco di modulo  $B = 0.2 \text{ T}$ , è tenuto in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare costante  $\omega = 30 \text{ s}^{-1}$ . Si determini la differenza di potenziale che si instaura tra il centro e la periferia del disco in rotazione.
- [25] Un solenoide infinitamente lungo, di diametro  $D = 10 \text{ cm}$  la cui densità delle spire è  $n = 50 \text{ spire/m}$ , è percorso da una corrente di intensità  $i = 2 \text{ mA}$ .

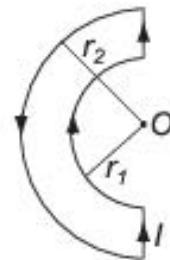
Quale velocità massima può avere un elettrone perché, opportunamente iniettato all'interno del solenoide nel vuoto possa essere completamente confinato all'interno di questo? (Carica dell'elettrone  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , massa dell'elettrone  $m = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ).

- [26] Una bobina circolare di raggio  $R = 20 \text{ cm}$  è costituita da  $N$  avvolgimenti percorsi dalla corrente  $I = 0.25 \text{ A}$ . Un elettrone di rapporto carica/massa  $e/m = 0.176 \times 10^{12} \text{ C/kg}$  dotato di velocità  $v = 10^5 \text{ m/s}$  incide al centro della bobina con un angolo  $\vartheta = 30^\circ$  rispetto all'asse della bobina percorrendo una spirale di raggio  $a = 7.1 \text{ mm}$ . Nell'approssimazione che il campo magnetico avvertito dall'elettrone sia uniforme e pari al campo magnetico al centro della bobina, trovare il numero di avvolgimenti  $N$ .
- [27] Una sottile sbarretta metallica di lunghezza  $l = 1 \text{ cm}$ , disposta complanare con un filo conduttore rettilineo indefinito entro cui fluisce una corrente elettrica di intensità costante  $i = 15 \text{ A}$ , forma un angolo  $\vartheta = \pi/4$  con la direzione del filo e si muove sul piano predetto ortogonalmente alla direzione della sua propria lunghezza con velocità costante  $v = 2 \text{ m/s}$ . Si determini la differenza di potenziale indotta ai capi della sbarretta all'istante in cui il suo centro si trova a  $D = 4 \text{ cm}$  dal filo.
- [28] Un filo metallico a forma di semicirconferenza di raggio  $R$ , ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno al proprio diametro ed è immersa in un campo di induzione magnetica uniforme  $\mathbf{B}$  parallelo a  $\omega$ . Determinare la differenza di potenziale tra il punto  $A$  e il punto  $P$ .
- [29] Due fili metallici indefiniti paralleli, nel vuoto, sono percorsi nel medesimo verso da una corrente di eguale intensità  $I$ . Determinare il lavoro minimo, per unità di lunghezza del filo, che occorre spendere per raddoppiare la distanza che separa i fili.
- [30] Un disco metallico di raggio  $R = 10 \text{ cm}$  gira intorno al suo asse compiendo 2000 giri al minuto ed è posto in un campo di induzione magnetica di intensità  $8 \times 10^{-2} \text{ T}$ , parallelo all'asse del disco. Qual è la forza elettromotrice esistente tra il centro e il bordo del disco? Dove si trova il punto a potenziale maggiore?



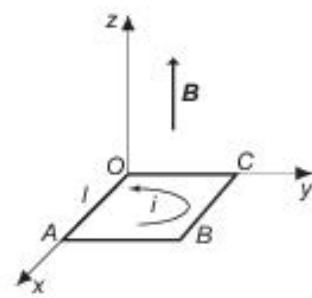
- [31] Su due sottili anelli complanari di raggio  $R$  e  $2R$  è distribuita una carica elettrica positiva con densità lineica  $\lambda$ . I due anelli ruotano nello stesso verso attorno al loro asse comune con velocità angolare  $\omega$  e  $2\omega$ , rispettivamente. Si determini il vettore induzione magnetica nel centro comune,  $O$ , dei due anelli.

- [32] Una corrente costante  $I$  scorre nel verso indicato dalle frecce nel circuito mostrato in figura: esso è formato da due semicirconferenze concentriche di raggi  $r_1$  e  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), congiunte da due brevi tratti rettilinei disposti lungo i diametri. Determinare il vettore induzione magnetica nel punto  $O$ .



- [33] Un cilindro di lunghezza molto maggiore rispetto al suo raggio,  $R$ , è uniformemente carico con densità volumica di carica  $\rho$  costante e ruota con velocità angolare  $\omega$  costante attorno al suo asse. Si determini il vettore induzione magnetica in un generico punto dell'asse del cilindro.

- [34] Una spira quadrata rigida di lato  $l$  giace nel piano  $xy$  di un riferimento cartesiano ortogonale ed è percorsa da una corrente  $i$  in verso antiorario. Si determini la forza risultante agente sulla spira sapendo che un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B} = \alpha z \mathbf{k}$  agisce lungo l'asse  $z$ . ( $l = 10 \text{ cm}$ ,  $i = 10 \text{ A}$ ,  $\alpha = 0.1 \text{ T/m}$ )

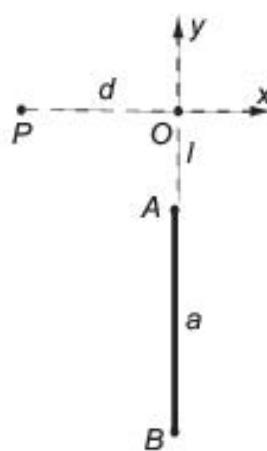


- [35] Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio  $R = 1 \text{ cm}$  è percorso da una corrente di densità  $j = 10^6 \text{ A/m}^2$  uniforme. Si determini l'energia magnetica immagazzinata in un tratto lungo  $L = 20 \text{ m}$ .

- [36] Un disco di raggio  $R$  carico superficialmente con densità areica uniforme  $\sigma$  è posto in rotazione attorno al proprio asse, con velocità angolare  $\omega$ . Determinare verso e modulo del vettore  $\mathbf{B}$  al centro del disco.

- [37] Un dipolo elettrico di momento  $\mathbf{p}$  ha le cariche distanti  $d$  e viene posto in rotazione con velocità angolare costante  $\omega$  attorno ad un asse perpendicolare alla congiungente le due cariche e distante  $d/2$  dalla carica negativa esternamente al segmento distanza tra le cariche. Si determini il momento di dipolo magnetico del sistema.

- [38] Una spira rigida quadrata di lato  $a = 3\text{ cm}$  percorsa da una corrente  $i_s$ , è immersa nel campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito (normale al foglio,  $P$ ) in cui scorre una corrente  $i_f$ . La spira ha due lati paralleli al filo e giace nel piano  $yz$  di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale,  $Oxyz$ , distante  $\overline{OP} = d = 2\text{ cm}$  dal filo; essa è vincolata a muoversi esclusivamente lungo la direzione  $y$ . Indicando con  $l$  la distanza tra il vertice della spira più vicino al filo,  $A$ , e l'origine del sistema di riferimento,  $O$ , si determinino i valori di  $l$  per i quali la spira è in equilibrio.



## 12.7 Soluzioni degli esercizi

- [1] Dev'essere  $B_{\text{disco}} = B_{\text{filo}}$ , dove:

$$B_{\text{disco}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^R \frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2} \frac{q}{\pi R^2} \omega \int_0^R dr = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}; \quad B_{\text{filo}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d},$$

da cui  $i = \omega q d / R = 0.02\text{ A}$ .

- [2] Il campo  $B$  sull'asse di una spira a distanza  $z$  dal piano di questa ha solo componente assiale, pari a

$$B_z = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Per due spire percorse da correnti discordi il campo è nullo nel punto di coordinate  $z$  che soddisfa la relazione

$$\frac{\mu_0 i R_1^2}{2(R_1^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R_2^2}{2(R_2^2 + z^2)^{3/2}},$$

pertanto:

$$z = \sqrt{\frac{R_1^{2/3} R_2^{4/3} - R_2^{2/3} R_1^{4/3}}{R_1^{4/3} - R_2^{4/3}}} = 4.44\text{ cm}.$$

[3]

$$\begin{array}{lll} \text{Per } 0 < r \leq a & \oint \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} & \Rightarrow 2\pi r H_0 = I \frac{r^2}{a^2}; \quad H_0 = \frac{Ir}{2\pi a^2} \\ & a \leq r < b & 2\pi r H_0 = I; \quad H_0 = \frac{I}{2\pi a} \\ & r > b & 2\pi r H_0 = 0; \quad H_0 = 0 \end{array}$$

- [4] Gli elettroni della sbarretta sono sottoposti alla forza di Lorentz (diretta dal punto  $A$  verso il punto  $B$ )  $F = -evB_0$ , essendo  $-e$  la carica degli elettroni e  $B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$  il modulo del vettore induzione magnetica creato dal filo (avendo indicato con  $x$  la distanza di un generico punto dal filo); pertanto:

$$V_A - V_B = - \int_{x_A}^{x_B} v B_0 dx = - \int_{x_A}^{x_B} v \frac{\mu_0 i}{2\pi x} dx = -v \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{x_A}{x_B},$$

da cui si ricava:

$$v = -\frac{2\pi}{\mu_0 i} \frac{(V_A - V_B)}{\ln \frac{x_A}{x_B}} = 0.42 \text{ m/s.}$$

- [5] Il modulo del campo magnetico prodotto da un solenoide ideale in un mezzo di permeabilità relativa  $\mu_r$  è:

$$B = \mu_r \mu_0 n I = 0.126 \text{ T}$$

Poiché

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

allora

$$M = B \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0} = 9.9 \times 10^4 \text{ A/m.}$$

- [6] Applicando la legge di circuitazione di Ampère su una linea circolare centrata sul centro del cavo e a questo ortogonale, di raggio generico  $r$ , si ha (con unità

di misura nel S.I.):

$$\begin{aligned} 0 < r < r_1 \quad 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j &\Rightarrow B = \left( \frac{\mu_0 f}{2\pi r_1^2 R} \right) r = 0.18r \\ r_1 < r < r_2 \quad 2\pi r B = \mu_0 i &\Rightarrow B = \left( \frac{\mu_0 f}{2\pi R} \right) \frac{1}{r} = \frac{4.46 \times 10^{-8}}{r} \\ r_2 < r &\Rightarrow B = 0. \end{aligned}$$

dove

$$j = \frac{f/R}{\pi r_1^2}.$$

- [7] Applicando la legge di circuitazione di Ampère a una circonferenza di raggio  $r$  concentrica con il conduttore si ha:

$$\begin{aligned} r \leq a \quad B(r) &= 0 \\ a \leq r \leq b \quad B(r) &= \frac{\mu_0 j}{2} \frac{r^2 - a^2}{r} \\ r \geq b \quad B(r) &= \frac{\mu_0 j}{2} \frac{b^2 - a^2}{r} \end{aligned}$$

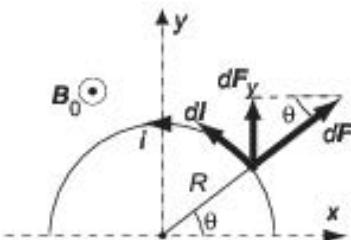
- [8] Su un elemento infinitesimo di filo di lunghezza  $dl$  agisce una forza infinitesima  $d\mathbf{F} = idl \times \mathbf{B}_0$  perpendicolare a  $dl$  e di modulo  $idl B_0$ . Per un elemento  $dl$  che, rispetto a quello indicato nella figura a lato, sia simmetrico rispetto all'asse  $y$ , la forza  $d\mathbf{F}$  sarà ancora perpendicolare a  $dl$ : pertanto, ai fini della forza finale conterà solo la componente lungo  $y$  (contata due volte),  $dF_y$ , di  $d\mathbf{F}$ :

$$dF_y = i dl B_0 \sin \theta = i R d\theta B_0 \sin \theta;$$

quindi

$$F_y = 2i R B_0 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 2i R B_0 \mathbf{j}$$

essendo  $\mathbf{j}$  il versore dell'asse  $y$ .



- [9] Applicando il teorema della circuitazione di Ampère sulla circonferenza ester-

na del filo, si ottiene:

$$B_P 2\pi r = \mu i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{2\pi r B_P}{\mu};$$

si ha quindi una densità di corrente

$$j = \frac{i}{\pi r^2} = \frac{2B_P}{\mu r}.$$

Pertanto, la corrente  $i'$  che scorre nella sezione del filo di raggio  $d$  è:

$$i' = j\pi d^2 = \frac{2\pi d^2 B_P}{\mu r}.$$

Applicando il teorema della circuitazione di Ampère su una circonferenza di raggio  $d$  coassiale con il filo, si ha:

$$B 2\pi d = \mu i' \quad \Rightarrow \quad B = \frac{B_P d}{r} = 0.83 \text{ mT}.$$

[10]  $\mathbf{B}_{\text{filo}}$  e  $\mathbf{B}_{\text{sol}}$  sono normali tra loro:

$$B = \sqrt{B_{\text{filo}}^2 + B_{\text{sol}}^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 i_F}{2\pi d/4}\right)^2 + (\mu_0 n i_S)^2} = \mu_0 i_S \sqrt{\left(\frac{100}{\pi d/2}\right)^2 + n^2};$$

numericamente  $B = 2.36 \times 10^{-6}$  T.

[11] La spira dovrà essere posta complanare col filo con il centro a una distanza  $d$  da questo tale che:

$$B_{\text{filo}} = B_{\text{spira}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{R}{\pi} = 1.59 \text{ cm}.$$

[12]

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

Sulla bisettrice dell'angolo  $\vartheta = 20^\circ$  i campi prodotti dai due fili sono opposti e si sommano a zero; sulla bisettrice dell'angolo  $\vartheta' = (180 - 20) = 160^\circ$  i campi sono eguali e il risultante, ortogonale al piano dei fili, ha ampiezza pari

a

$$B = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi y \sin \frac{\vartheta'}{2}} = \frac{4.06 \times 10^{-7} i}{y} T.$$

- [13] Applicando la legge di circuitazione di Ampère a una circonferenza di raggio  $r \leq R$ , si scriverà:

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j}{2} r;$$

affinché  $B$  abbia modulo costante deve essere:

$$j = \frac{\text{cost.}}{r}.$$

- [14] Il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide è:

$$B = \mu_0 i \frac{N}{l}$$

essendo  $N$  il numero di spire del solenoide. Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso il solenoide, vale:

$$\varphi(B) = BN\pi r^2 = \mu_0 i \frac{N^2}{l} \pi r^2 = \mu_0 (i_0 + kt) \frac{N^2}{l} \pi r^2.$$

All'istante  $t^*$  si ha pertanto:

$$N = \sqrt{\frac{\varphi^*(B) l}{\mu_0 (i_0 + kt^*) \pi r^2}}$$

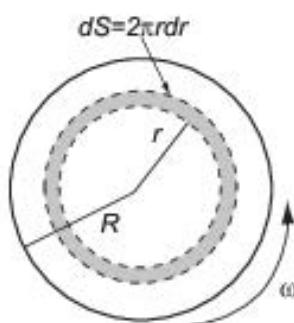
dove  $\varphi^*(B)$  è il valore del flusso di  $\mathbf{B}$  all'istante  $t^*$ . Sostituendo i valori numerici si trova  $N = 399$ .

- [15] Il campo  $\mathbf{B}$  sarà diretto secondo la direzione del lato che unisce i vertici per i quali passa la  $i_1$ , che è anche la direzione lungo la quale è diretto il campo generato dalla corrente  $i_2$ . In modulo sarà dato da:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi R} (2i_1 \cos \pi/3 + i_2) = \frac{\mu_o \cos \pi/6}{\pi L} (2i_1 \cos \pi/3 + i_2).$$

Sostituendo i valori numerici si trova  $B = 1.38 \times 10^{-4} \text{ T}$ .

- [16] Si può dividere il disco in corone circolari di raggio  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ), spessore  $dr$  e area  $ds = 2\pi r dr$ ; su ogni corona circolare vi è una carica  $dq = \sigma ds$  essendo  $\sigma = q/\pi R^2$  la densità areica di carica. La carica  $dq$  fa un giro completo in un tempo pari al periodo di rotazione  $T$  del disco, quindi genera una corrente infinitesima



$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma ds}{2\pi} \omega = \sigma \omega r dr.$$

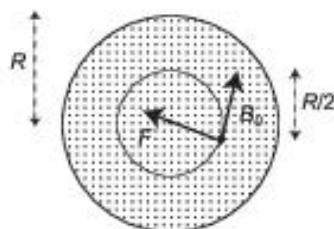
Ogni corona circolare è assimilabile a una spira di raggio  $r$ , quindi genererà al centro un campo di induzione magnetica infinitesimo perpendicolare al piano del disco di modulo

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{2r} di = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr,$$

quindi:

$$B_0 = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}.$$

- [17] Il modulo della densità di corrente che scorre nel cilindro avente raggio  $R$  è:  $j = 100i/\pi R^2$ ; la corrente che scorre all'interno del cilindro di raggio  $R/2$  vale quindi:



$$i' = j\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow i' = 25i.$$

Data la simmetria cilindrica della distribuzione di corrente, il vettore induzione del campo magnetico a distanza  $R/2$  dall'asse del cilindro ha valore costante, con le linee di induzione descritte in senso antiorario. Applicando la legge di circuitazione di Ampère alla circonferenza di raggio  $R/2$  descritta in senso antiorario si ottiene:

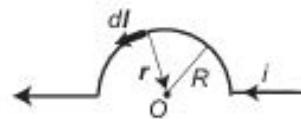
$$B_0 2\pi R/2 = \mu_0 i' \Rightarrow B_0 = \frac{25\mu_0 i}{\pi R}.$$

La forza su un tratto di lunghezza  $l$  di un filo a distanza  $R/2$  dall'asse del

cilindro è diretta come in figura e vale in modulo:

$$F = ilB_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{l} = iB_0 = \frac{25\mu_0 i^2}{\pi R} = 2.0 \times 10^{-5} \text{ N.}$$

- [18] Il campo  $\mathbf{B}$  nel punto  $O$ , in accordo con la prima formula di Laplace, si può trovare come somma dei campi infinitesimi creati in  $O$  dagli elementi infinitesimi  $d\mathbf{l}$  in cui si può decomporre il circuito



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

Dalla geometria del filo si vede che i tratti rettilinei non danno contributi al campo in  $O$ , pertanto è

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(O) &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{semic}} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{semic}} \frac{dl R}{R^3} \mathbf{k} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R^2} i \mathbf{k} \int_{\text{semic}} dl = \frac{\mu_0}{4R} i \mathbf{k}, \end{aligned}$$

essendo  $\mathbf{k}$  il versore normale al foglio diretto verso l'esterno.

- [19] La retta in questione sarà complanare con i fili e passante per il punto di intersezione. Un punto di tale retta posto a distanza  $R$  dall'intersezione disterà dai due fili rispettivamente di tratti pari a

$$r_1 = R \cos \vartheta \quad \text{e} \quad r_2 = R \sin \vartheta$$

e in quel punto i contributi al campo di induzione  $\mathbf{B}$  prodotti dalla prima e dalla seconda corrente saranno ortogonali al piano e opposti uno rispetto all'altro, pari in modulo a

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi R \cos \vartheta} i_1 \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi R \sin \vartheta} i_2.$$

L'eguaglianza dei moduli (quindi l'azzeramento del campo) si avrà per

$$\vartheta = \arctan \left( \frac{i_2}{i_1} \right) = 1.6 \text{ rad.}$$

- [20] Il momento meccanico sarà dato dall'espressione  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , con  $\mathbf{m}$  momento magnetico di ciascuna spira, dato in modulo da  $m = iA$  e  $\mathbf{B}$  campo di induzione magnetica, da calcolarsi sull'asse di una spira a distanza  $L$  dal centro. Il campo  $\mathbf{B}$  e il momento magnetico  $\mathbf{m}$  su cui esso agisce sono ortogonali e quindi in modulo si avrà

$$\begin{aligned} M &= iAB(L) = iA \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_{\text{spira}} \frac{dl}{r^2} \sin \vartheta \\ &= A \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \frac{2\pi R}{r^2} \frac{R}{r} \cong \frac{\mu_0 (Ai)^2}{2\pi} \frac{1}{L^3} = 6.3 \times 10^{-12} \text{ Nm}, \end{aligned}$$

avendo indicato con  $R$  il raggio delle due spire, con  $\vartheta$  l'angolo sotto cui si vede il raggio di una spira dal centro dell'altra ed essendo  $A = \pi R^2$ .

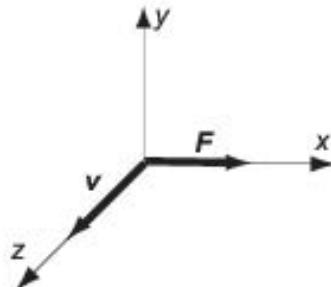
- [21] Data la geometria del problema, il campo  $\mathbf{B}$  generato dai due fili nel punto  $P$  giace nel piano ortogonale ai fili e passante per  $P$ . La componente di  $B$  parallela al piano individuato dai fili è nulla, mentre la componente ortogonale è pari a

$$B = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi(2L)} \sin \alpha$$

con  $L/2 = 2L \sin \alpha$ , da cui:

$$i = \frac{8\pi LB}{\mu_0} = 14 \text{ A.}$$

- [22] Il modulo della forza nella direzione  $x$  subita dal protone durante il suo moto è data da:  $F = ma = 3.34 \times 10^{-14} \text{ N}$ . Poiché  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ : il campo  $\mathbf{B}$  deve essere diretto verso le  $y$  negative; il suo modulo è pari a:



$$B = \frac{F}{qv} = 2.09 \times 10^{-2} \text{ T.}$$

- [23] La forza di Lorenz ( $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) è diretta normalmente all'asse del cilindro e vale, indicando con  $r$  la distanza dall'asse ( $0 \leq r \leq R$ ):

$$F = qvB = qB\omega r \quad \Rightarrow \quad qB\omega r = qE \quad \Rightarrow \quad E = B\omega r.$$

Pertanto:

$$\Delta V = \int_0^R B \omega r dr = \frac{\omega B R^2}{2} = 2.5 \text{ mV.}$$

- [24] Gli elettroni liberi del materiale del disco all'equilibrio devono essere sottoposti a una forza nulla:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Sarà poi:

$$\Delta V = - \int_0^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \omega \times \int_0^R (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

e in modulo:

$$\Delta V = \omega B \int_0^R r dr = \frac{\omega B r^2}{2} = 0.27 \text{ V.}$$

- [25] Il campo di induzione magnetica  $B$  all'interno del solenoide è diretto secondo l'asse di questo e ha modulo  $B = \mu_0 n i = 0.0022 \text{ T}$ ; la velocità massima dell'elettrone corrisponde a quella per la quale il raggio di curvatura dell'orbita coincide con quello del solenoide:

$$v = \frac{eRB}{m} = \frac{eD\mu_0 ni}{2m} = 1.1 \text{ m/s.}$$

- [26] L'elettrone avanza lungo l'asse della bobina con una velocità imperturbata  $v \cos \vartheta$  mentre ruoterà anche attorno all'asse con traiettoria circolare di raggio  $a$  data dall'azione della forza di Lorentz sulla componente  $v \sin \vartheta$  della velocità:

$$e(v \sin \vartheta)B = \frac{m(v \sin \vartheta)^2}{a} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{v \sin \vartheta}{a \left( \frac{e}{m} \right)}.$$

D'altra parte il campo magnetico al centro di una spira è  $B_s = \mu_0 I / (2R)$  per cui, nell'approssimazione, al centro della bobina si avrà  $B = N \mu_0 I / (2R)$  e quindi

$$N = \frac{2RB}{\mu_0 I} = \frac{2Rv \sin \vartheta}{\mu_0 I a \left( \frac{e}{m} \right)} = 51.$$

[27] Gli elettroni della sbarretta sono sottoposti alla forza di Lorentz, pertanto:

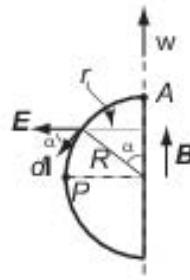
$$\begin{aligned} \text{f.e.m.} &= - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} v \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{D - x \cos \vartheta} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi \cos \vartheta} v \ln \left( \frac{D + l/2 \cos \vartheta}{D - l/2 \cos \vartheta} \right) = 1.5 \times 10^{-6} \text{ V}. \end{aligned}$$

[28] Ogni elemento infinitesimo  $d\mathbf{l}$ , orientato da  $A$  verso  $P$  della semicirconferenza, si muove su una circonferenza di raggio  $r = R \sin \alpha$  con velocità  $v = \omega r$ ; ogni elettrone,  $e$ , di questo piccolo tratto è sottoposto a una forza di Lorentz  $F = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  centripeta (direzione di  $r$ ); pertanto su ogni elettrone vi è un campo elettrico indotto  $\mathbf{E}$  tale che:

$$-e\mathbf{E} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

diretto come in figura. Pertanto:

$$\begin{aligned} V_A - V_P &= \int_A^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^P v B dl \cos \alpha = \int_0^{\pi/2} \omega R \sin \alpha B R d\alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{\omega B R^2}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\omega B R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\alpha d\alpha = \frac{1}{2} R^2 B \omega. \end{aligned}$$



L'esercizio può essere risolto anche ricorrendo alla legge di Faraday-Neumann-Lenz. In un intervallo di tempo  $dt$ , infatti, l'elemento di lunghezza  $dl$  spazza una superficie infinitesima  $dS = R d\vartheta ds / 2$ , essendo  $ds$  l'arco di cui è ruotato l'elemento  $dl$ :  $ds = R d\alpha$ , dove  $d\alpha = \omega dt$ . Si ha pertanto:

$$dS = \frac{1}{2} R^2 \omega dt d\vartheta.$$

Il flusso del vettore induzione magnetica attraverso  $dS$  sarà:

$$d\varphi'(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} R^2 B \omega dt \cos \vartheta d\vartheta;$$

nell'intervallo di tempo  $dt$ , il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso tutto la superficie spazzata dal quarto di circonferenza  $AP$  sarà pari a:

$$d\varphi(\mathbf{B}) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} d\varphi' = \frac{1}{2} R^2 B \omega dt \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} \right| = \frac{1}{2} R^2 B \omega.$$

- [29] Ogni tratto di lunghezza  $l$  di ciascun filo viene attratto con una forza in modulo pari a

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d};$$

pertanto il lavoro minimo che occorre spendere per raddoppiare la distanza che separa i fili è:

$$L = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \ln 2$$

essendo  $d$  la distanza che separa i fili. Il lavoro per unità di lunghezza di filo vale allora:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2.$$

- [30] Tutte le cariche  $q$  che si trovano a distanza  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) dal centro  $O$  del disco, si muovono con velocità  $v = \omega r$  e sono sottoposte in direzione radiale alla forza

$$F = qvB = q\omega r B \quad \Rightarrow \quad E = \frac{F}{q} = \omega r B,$$

dove

$$\omega = \frac{6.28 \cdot 2000}{60} = 209.3 \text{ rad/s.}$$

Pertanto:

$$\text{f.e.m.} = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega R^2 B = 83 \text{ mV.}$$

Se  $\omega$  e  $\mathbf{B}$  sono concordi, il bordo del disco si trova a un potenziale maggiore rispetto al centro.

- [31] Ogni elemento infinitesimo di carica,  $dq_1 = \lambda dl$ , del primo anello genera in  $O$  un campo magnetico infinitesimo diretto come l'asse di rotazione – nel verso

di  $\omega$  – di modulo:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} dq_1 \frac{v_1}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq_1 \frac{\omega}{R};$$

e quindi:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{R} \int_{\text{Anello}} dq_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{R} \lambda 2\pi R = \frac{1}{2} \lambda \mu_0 \omega.$$

Anche il campo magnetico del secondo anello è diretto lungo l'asse nello stesso verso di  $B_1$  e, ragionando come sopra, si scriverà:

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} dq_2 \frac{v_2}{(2R)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq_2 \frac{\omega}{R}$$

e quindi:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{R} \int_{\text{Anello}} dq_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{R} \lambda 2\pi (2R) = \lambda \mu_0 \omega.$$

Nel punto  $O$  si ha pertanto:  $B = B_1 + B_2 = 3/2 \lambda \mu_0 \omega$ .

Si può risolvere l'esercizio in maniera alternativa sfruttando l'espressione del campo magnetico creato al centro di una spira percorsa da corrente; infatti:

$$di_1 = \frac{dq_1}{T_1} = \frac{dq_1}{2\pi} \omega \quad \Rightarrow \quad i_1 = \int_{\text{Anello}} di_1 = \lambda \omega R$$

e quindi:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2R} = \frac{1}{2} \lambda \mu_0 \omega.$$

Analogamente,

$$di_2 = \frac{dq_2}{T_2} = \frac{dq_2}{2\pi} 2\omega \quad \Rightarrow \quad i_2 = \int_{\text{Anello}} di_2 = 4 \lambda \omega R$$

e quindi:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2(2R)} = \lambda \mu_0 \omega.$$

- [32] I due tratti rettilinei danno un contributo nullo al vettore  $\mathbf{B}(O)$ ; la corrente che scorre nella semicirconferenza di raggio minore genera in  $O$  un vettore di induzione magnetica,  $\mathbf{B}_1(O)$ , normale al piano di giacenza del circuito, diretto

verso il basso e di modulo

$$B_1(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{semic.}} \frac{dl}{r_1^2} = \frac{\mu_0 I}{4r_1}.$$

Analogamente, la corrente che scorre nella semicirconferenza di raggio maggiore genera in  $O$  un campo di induzione magnetica,  $\mathbf{B}_2(O)$ , di modulo

$$B_2(O) = \frac{\mu_0 I}{4r_2}$$

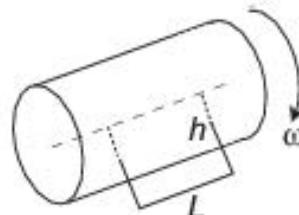
diretto verso l'alto. Indicando, quindi, con  $\mathbf{k}$  il versore dell'asse normale al piano di giacenza del circuito e diretto verso l'alto, si ha:

$$\mathbf{B}(O) = \mathbf{B}_1(O) + \mathbf{B}_2(O) = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \mathbf{k}.$$

- [33] Considerando un tratto di cilindro di lunghezza  $L$ , la carica in esso contenuta è pari a:

$$q = \rho \pi R^2 L.$$

A causa della rotazione del cilindro, questa carica attraversa in un tempo pari a un periodo la superficie del rettangolo delimitato dai lati  $L$  ed  $h$ , con  $L$  ed  $h$  parallelo e perpendicolare all'asse del cilindro, rispettivamente, generando una corrente



$$I = \frac{q}{T} = \frac{\rho \pi R^2 L \omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \rho R^2 L \omega.$$

Il sistema è analogo a un solenoide: il campo  $\mathbf{B}$  sull'asse può considerarsi uniforme e diretto lungo l'asse stesso (in zone sufficientemente lontane dagli estremi del cilindro); applicando il teorema della circuitazione di Ampère al perimetro del rettangolo della figura si ha che:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL \quad \Rightarrow \quad BL = \frac{1}{2} \mu_0 \rho R^2 L \omega \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 \rho R^2 \omega.$$

- [34] La forza agente sul lato  $OC$  è nulla; sui lati  $OA$  e  $BC$  agiscono forze uguali e contrarie il cui risultante è nullo. Si ha solo una forza agente sul lato  $AB$ , lungo il quale l'induzione magnetica è  $B = \text{cost} = \alpha l$ ; la forza è diretta lungo l'asse  $x$  e in modulo vale

$$F = \alpha i l^2 = 0.01 \text{ N.}$$

- [35] L'energia si ricava integrando la densità volumica di energia del campo magnetico,  $u = B^2/(2\mu_0)$ , nel cilindro di lunghezza  $L$  e volume infinitesimo  $d\tau = 2\pi r L dr$ , con  $r$  distanza dall'asse del conduttore. Per conoscere l'andamento di  $B(r)$  si può applicare la legge di circuitazione di Ampère:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \pi r^2 j \quad \Rightarrow \quad B(r) = \mu_0 r j / 2.$$

Quindi:

$$U = \int_{\tau} u d\tau = \frac{\pi L \mu_0 j^2}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi L \mu_0 j^2 R^4}{16} = 49.3 \text{ mJ.}$$

- [36] Il disco che ruota, carico in maniera uniforme, può essere visto come un insieme di spire elementari di raggio variabile  $r$ , di superficie elementare  $ds = 2\pi r dr$  quindi di carica elementare  $dq = 2\pi r \sigma dr$  che, ruotando alla frequenza  $\nu = \omega/(2\pi)$ , genera una corrente elementare  $dI = \nu dq = \omega \sigma r dr$ . Considerando l'espressione del vettore campo magnetico al centro di una spira di raggio  $r$ ,  $B = \mu_0 I/(2r)$ , diretto ortogonalmente al piano della spira in modo da vedere la corrente girare in senso antiorario, la spira elementare produrrà un campo magnetico elementare  $dB = \mu_0 dI/(2r)$ . Allora il campo magnetico totale, diretto come indicato, avrà modulo

$$B = \int_{\text{disco}} dB = \int_{\text{disco}} \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma \int_0^R dr = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R.$$

- [37] L'effetto della rotazione delle due cariche,  $|q| = |p|/d$ , componenti il dipolo è analogo a quello di una spira percorsa da corrente; la corrente prodotta dalle

due cariche è opposta in direzione e in modulo vale

$$I = \frac{q}{2\pi} \omega.$$

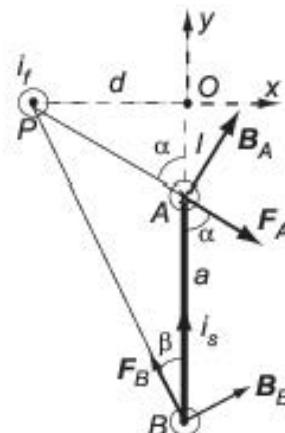
La carica negativa ruota lungo una circonferenza di raggio  $d/2$ , mentre il raggio della circonferenza percorsa dalla carica positiva è  $d + d/2 = 3/2d$ ; i momenti di dipolo magnetico sono paralleli all'asse di rotazione, ma hanno verso opposto, quindi:

$$m = m_+ - m_- = \pi \left( \frac{3}{2}d \right)^2 I - \pi \left( \frac{1}{2}d \right)^2 I = q\omega d^2.$$

- [38] Si supponga che la corrente nel filo sia uscente dal foglio e che nella spira circoli nel verso che va da  $B$  ad  $A$ ; sui lati della spira perpendicolari al filo, le forze magnetiche non hanno effetto essendo la spira rigida e potendosi muovere solo lungo la direzione  $y$ .

Il lato della spira parallelo al filo e a esso più vicino, è immerso in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}_A$ , diretto come in figura, di modulo  $\mu_0 i_f / 2\pi PA$ ; esso è quindi respinto dal filo con una forza,  $\mathbf{F}_A$ , diretta come in figura, e modulo, per la seconda formula di Laplace, pari a:

$$F_A = \frac{\mu_0 i_f i_s}{2\pi PA} a.$$



Il lato della spira parallelo al filo ma da questo più lontano, è sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}_B$ , di modulo  $\mu_0 i_f / 2\pi PB$  ed è attratto dal filo con una forza  $\mathbf{F}_B$ , diretta lungo la congiungente i punti  $P$  e  $B$  e modulo:

$$F_B = \frac{\mu_0 i_f i_s}{2\pi PB} a.$$

Poiché la spira è vincolata a muoversi lungo la direzione  $y$ , per l'equilibrio è necessario che le componenti lungo tale direzione di  $\mathbf{F}_A$  ed  $\mathbf{F}_B$  siano eguali,

quindi:

$$\frac{\mu_0 i_f i_s}{2\pi \overline{PA}} a \cos \alpha = \frac{\mu_0 i_f i_s}{2\pi \overline{PB}} a \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos \alpha}{\overline{PA}} = \frac{\cos \beta}{\overline{PB}}.$$

Poiché  $l = \overline{PA} \cos \alpha$  e  $l + a = \overline{PB} \cos \beta$ , la relazione precedente diviene:

$$\frac{l}{\overline{PA}^2} = \frac{l+a}{\overline{PB}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{l^2 + d^2} = \frac{l+a}{(l+a)^2 + d^2} \quad \Rightarrow \quad l^2 + al - d^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono:  $l_1 = -4$  cm,  $l_2 = +1$  cm.



# Induzione elettromagnetica

## 13.1 Esercizio guida – Induzione da moti relativi

### Teoria

La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz ha l'espressione generale

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

dove l'integrale di linea del campo elettrico  $\mathbf{E}$  è calcolato lungo una linea  $C$  chiusa e l'integrale di superficie del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è calcolato su una qualunque superficie connessa  $\Sigma_C$  che abbia la linea come contorno. La legge differenziale è l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

valida in un qualunque sistema di riferimento assoluto. L'eventuale presenza di un filo conduttore lungo la linea chiusa porta all'espressione della corrente lungo il filo, computata con l'introduzione della legge di Ohm,

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

dove  $R$  è la resistenza elettrica del conduttore filiforme.

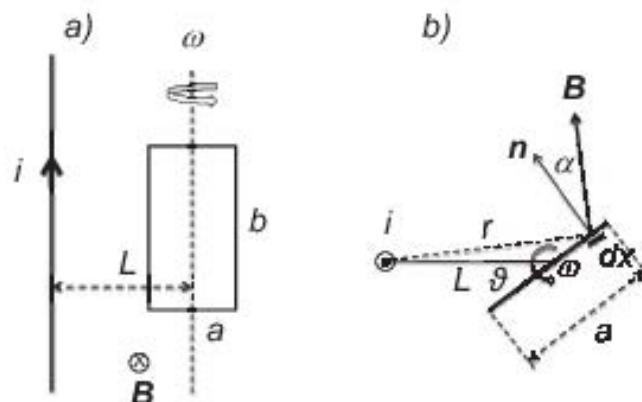
### Argomento

Viene assegnata una distribuzione di correnti nello spazio, che produca un campo di induzione magnetica elementarmente noto. Nello spazio dove è presente il campo si muove un circuito di forma assegnata e si considera una superficie che lo abbia come contorno, attraverso la quale varia nel tempo il flusso del campo di induzione. Si esamina il caso di un campo non uniforme nello spazio, come quello generato da correnti filiformi, e il moto uniforme (rettilineo o circolare) dei circuiti su cui si induce la corrente.

*Calcolo del  
flusso  
concatenato in  
funzione  
dell'angolo di  
rotazione della  
spira*

Poiché i campi di induzione generati dalle correnti indicate nel problema non sono uniformi nello spazio occupato dai circuiti in cui si verifica l'induzione elettromagnetica, il calcolo del flusso deve essere eseguito attraverso un integrale di superficie. Si esegue il calcolo per uno specifico orientamento che il circuito di induzione può assumere durante il suo moto e, successivamente, si considera la variazione temporale di un parametro geometrico che caratterizza la posizione del circuito.

*Nel campo di induzione magnetica prodotto da una corrente i rettilinea indefinita è situata una spira conduttrice rettangolare di lati  $a$  e  $b$  e resistenza elettrica  $R$ , sul*



**Fig. 13.1.** Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  ruota nel campo magnetico creato da una corrente rettilinea indefinita  $i$  posta nel piano di giacitura della spira che ruota attorno a un asse passante per il suo centro

cui piano di giacitura si trova il filo conduttore; due lati della spira sono paralleli al filo conduttore e il centro si trova a una distanza  $L$  da questo (Fig. 13.1a). La spira contiene in circuito un condensatore  $C$  e viene ruotata di un angolo pari a  $\pi$  attorno a un asse passante per il suo centro. Si cerca il valore della carica accumulata sulle armature del condensatore dopo la rotazione, nei tre casi in cui a) l'asse di rotazione sia parallelo al filo conduttore, b) in cui sia ortogonale al filo, ma giacente sul piano della spira, c) sia ortogonale al piano di giacenza della spira.

Il campo induzione magnetica a distanza  $r$  da un filo conduttore rettilineo infinitamente esteso ha modulo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

direzione ortogonale al piano definito dalle direzioni del filo e del segmento distanza e verso di avvitamento destroso rispetto alla corrente. Il calcolo del flusso del campo di induzione attraverso la superficie della spira richiede la valutazione dell'integrale d'area.

a) Nel caso di rotazione attorno a un asse parallelo al filo (Fig. 13.2a), si ha

$$\int_{\text{spira}} d\varphi(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\cos \alpha}{r} dx \quad (13.1)$$

dove per il legame trigonometrico tra l'angolo  $\alpha$  e la variabile  $x$  lungo il lato  $a$  della spira si rimanda alla Fig. 13.1b. L'espressione è integrabile, considerando che

$$dx \cos \alpha = dr.$$

Tuttavia, l'integrazione non è necessaria per determinare la carica che si accumula sulle armature del condensatore. Essa, infatti, è data da

$$Q = \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} i_{\text{indotta}}(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{B})}{\partial t} dt = \frac{\varphi_{\text{inizio}} - \varphi_{\text{fine}}}{R}.$$

Queste considerazioni sull'espressione della carica rispetto alle variazioni del flusso del campo  $\mathbf{B}$  sono generali e valgono, quindi, per tutti e tre i casi che si considerano in questo esercizio. Peraltro, il valore del flusso all'inizio è il medesimo per tutti e tre i casi e il risultato relativo alla carica si differenzia solo per il diverso valore del flusso finale.

Nel caso specifico in esame, le espressioni del flusso del campo **B** nelle posizioni iniziali e finali della spira, quando la normale è parallela al campo, sono date da

$$\varphi_{\text{inizio}} = -\varphi_{\text{fine}} = \frac{\mu_0 ib}{2\pi} \int_{\text{iniz}}^{\text{fine}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 ib}{2\pi} \ln \frac{L + a/2}{L - a/2}.$$

Pertanto si ha:

$$Q = \frac{\mu_0 ib}{\pi R} \ln \frac{L + a/2}{L - a/2}.$$

b) Nel caso di rotazione attorno a un asse ortogonale al filo e giacente sul piano della spira (Fig. 13.2b), la configurazione finale della spira è la medesima di quella del caso precedente e tale, pertanto, è anche la variazione complessiva del flusso, quindi la carica accumulata sulle armature del condensatore:

$$Q = \frac{\mu_0 ib}{\pi R} \ln \frac{L + a/2}{L - a/2}.$$

c) Nel terzo caso, di rotazione della spira attorno a un asse ortogonale al proprio piano di giacenza (Fig. 13.2c), il flusso finale ha lo stesso valore espressione di quello iniziale perché non muta l'angolo tra la direzione del campo e la normale al piano della spira che, nei due casi precedenti, variava invece di  $\pi$ . Pertanto, la carica accumulata sulle armature del condensatore in tale caso è nulla:

$$Q = 0.$$

*Riferendosi alle medesime condizioni del caso precedente, ma facendo l'ipotesi che la spira stia ruotando con velocità angolare costante  $\omega$  attorno agli assi indicati, si considera il problema relativo all'energia dissipata nella spira nei tre casi descritti.*

L'energia dissipata nella spira dalla corrente indotta è data dall'integrale temporale della potenza, pari a

$$E = \int_{\text{iniz}}^{\text{fine}} i_{\text{indotta}}^2(t) R dt = \frac{1}{R} \int_{\text{iniz}}^{\text{fine}} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt. \quad (13.2)$$

In questo caso si deve calcolare l'espressione del campo in funzione della posizione che la spira assume al variare del tempo e, successivamente, calcolare l'integrale indicato. Il valore dell'energia dissipata durante una mezza rotazione della spira dipende, in questi casi, dalla velocità di rotazione di questa.

a) Per quanto riguarda questo caso, il valore del flusso del campo nella generica posizione angolare (angolo  $\alpha = \omega t$  di Fig. 13.1b), esso è dato dall'Eq. (13.1), riscritta in funzione della sola  $r$  come

$$\int_{\text{spira}} d\varphi(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{r_2(t)}{r_1(t)}$$

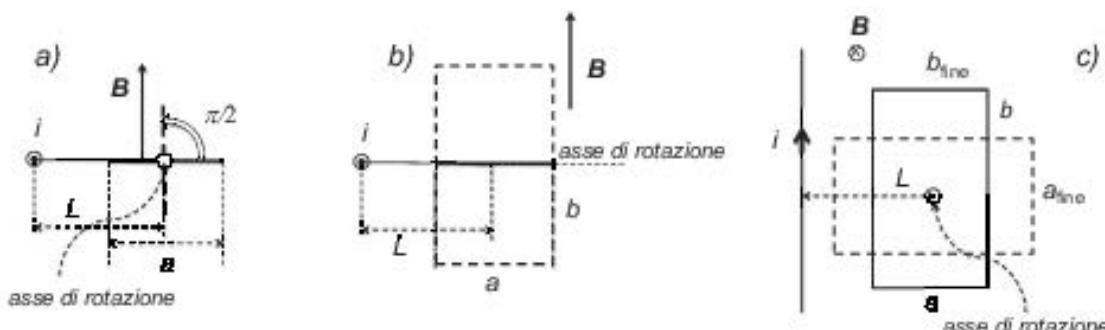
con  $r_1$  e  $r_2$  le distanze dal filo percorso dalla corrente  $i$  degli estremi del lato  $a$  della spira. Essi si ottengono facendo uso del teorema di Euclide sui triangoli e sono pari a

$$r_1 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2L \frac{a}{2} \cos \omega t} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2L \frac{a}{2} \cos \omega t}.$$

L'espressione (13.2) non è integrabile elementarmente e, pertanto, l'energia dissipata non è elementarmente deducibile.

b) Nel caso di rotazione della spira attorno a un asse ortogonale al filo, ma giacente sul piano della spira (Fig. 13.2b), il valore del flusso del campo  $\mathbf{B}$  varia nel tempo secondo l'espressione

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos \omega t = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \frac{L + a/2}{L - a/2} \cos \omega t.$$



**Fig. 13.2.** Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  ruota attorno a un asse di rotazione passante per il suo centro nel campo magnetico creato da una corrente rettilinea indefinita  $i$ . L'asse di rotazione è: a) parallelo alla corrente, b) ortogonale alla spira e giacente nel piano di questa, c) ortogonale al piano di giacenza della spira

L'energia dissipata dalla corrente indotta in mezzo periodo  $T = \pi/\omega$  della rotazione della spira è quindi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{R} \int_{\text{inizio}}^{\text{fine}} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 i b \omega}{2\pi} \ln \frac{L+a/2}{L-a/2} \right)^2 \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{(\mu_0 i b)^2 \omega}{4\pi R} \ln \frac{L+a/2}{L-a/2}. \end{aligned}$$

c) In questo caso, in cui la rotazione della spira ha luogo attorno a un asse ortogonale al proprio piano di giacenza, l'espressione del flusso è data da un integrale doppio fatto sul piano della spira. Inoltre, come per il caso a) sopra riportato, l'espressione non è elementarmente integrabile e, pertanto, non viene riportata in questa sede.

## 13.2 Esercizio guida – Induzione da variazioni di corrente

### Teoria

La legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz ha l'espressione generale

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

dove l'integrale di linea del campo elettrico  $\mathbf{E}$  è calcolato lungo una qualunque linea chiusa  $C$  e l'integrale di superficie del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è calcolato su una qualunque superficie connessa che abbia la linea come contorno. Il campo di induzione prodotto in un generico punto  $P$  da una corrente, a sua volta, è dato dalla prima legge di Laplace, scritta nella sua forma differenziale e integrale, rispettivamente, come

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \xrightarrow{\text{integrale}} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

dove  $\hat{\mathbf{r}}$  è il versore della distanza vettoriale  $\mathbf{r}$  orientata da  $d\mathbf{l}$  a  $P$  e l'integrale viene calcolato sulla linea del circuito della corrente  $i$ . La legge differenziale è l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

valida in un qualunque sistema di riferimento assoluto.

In questo contesto si considerano le variazioni del flusso del campo  $\mathbf{B}$  come dovute unicamente alle variazioni temporali delle correnti che generano il campo di induzione.

### Argomento

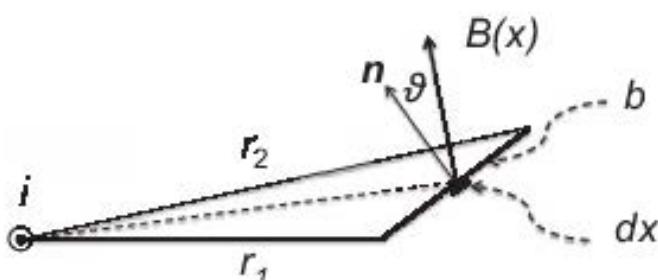
Viene assegnata una distribuzione di correnti nello spazio, che produce un campo di induzione magnetica elementarmente noto. Tali correnti vengono variate con una data legge temporale, con la quale varia anche il campo di induzione che le correnti generano nello spazio. Con la stessa legge temporale varia anche il flusso del campo attraverso una qualunque superficie nello spazio che non sia in moto rispetto alle correnti. Nel caso dell'esercizio presentato la linearità della prima legge di Laplace, più sopra riportata, tra una corrente e il campo di induzione da essa generato, si traduce nella linearità tra la corrente che genera il campo e le eventuali correnti indotte; pertanto, gli effetti di induzione elettromagnetica dovuti a più circuiti nello spazio sono eguali alla somma dei singoli effetti prodotti da ciascuna corrente separatamente.

#### *Calcolo del flusso concatenato*

Il calcolo del flusso del campo di induzione concatenato con una determinata linea (circuito) nello spazio richiede preliminarmente il calcolo del campo attraverso la legge di Laplace. Di fatto, il calcolo del campo, quindi del flusso concatenato con un dato circuito, generato da un primo circuito altro non è che il calcolo del coefficiente di mutua induzione tra circuiti. Il nuovo contributo si ha nel caso del calcolo dell'induzione prodotta da più circuiti primari, effettuato sfruttando la proprietà lineare della legge di Laplace.

*Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente variabile nel tempo con legge  $i(t)$  e una spira rettangolare di resistenza  $R$  e lati  $a$  e  $b$  è posta con i due lati di lunghezza  $a$  paralleli al filo, il più vicino trovandosi a una distanza  $r_1$  dal filo e il più lontano a una distanza  $r_2$  (Fig. 13.3). Si cerca la corrente indotta nella spira.*

Il flusso del campo di induzione  $\mathbf{B}$  attraverso l'area del rettangolo costituito dai lati



**Fig. 13.3.** Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  si trova all'interno del campo magnetico creato da una corrente rettilinea indefinita  $i$ : il lato  $a$  della spira è parallelo alla corrente

della spira è dato dall'integrale sull'intera area della spira del prodotto scalare tra il campo e l'areola elementare rettangolare di lati  $a$  e  $dx$  orientata con la normale a formare un angolo  $\vartheta$  rispetto al campo. Il lato  $dx$  del rettangolo elementare moltiplicato per il coseno dell'angolo  $\vartheta$  vale il differenziale  $dr$  della distanza  $r$  di  $x$  dal filo; quindi, l'integrale assume l'espressione

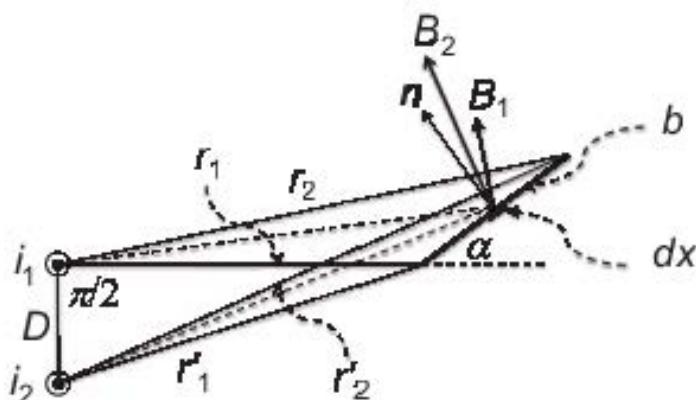
$$\varphi_{\text{spira}}(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln \frac{r_2}{r_1}$$

e la corrente indotta nella spira si scrive

$$i_{\text{indotta}} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_{\text{spira}}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi R} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) a \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Alla configurazione della corrente in un filo indefinito e della spira rettangolare già presentata nell'esercizio precedente, si aggiunge un secondo filo, percorso da una corrente  $i'(t)$ , situato parallelamente al primo, a una distanza  $D$  in posizione di quadratura rispetto alla distanza  $r_1$  del primo filo dal lato più vicino della spira (Fig. 13.4). Si pone il problema inverso di determinare la resistenza  $R$  della spira, essendo data la potenza elettrica  $W$  in essa dissipata.

Data la linearità della legge dell'induzione, la corrente totale indotta nella spira,  $i_{\text{tot}}$ , è data dalla somma delle due correnti indotte dalle variazioni temporali di  $i$  e di  $i'(t)$ ,



**Fig. 13.4.** Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  si trova all'interno del campo magnetico creato da due correnti rettilinee infinite  $i$  e  $i'$  tra loro parallele: il lato  $a$  della spira è parallelo alle correnti

ciascuna potendosi scrivere come più sopra ritrovato

$$i_{\text{tot}} = i_{\text{indotta}} + i'_{\text{indotta}} = -\frac{\mu_0}{2\pi R} a \left[ \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{\partial i}{\partial t} + \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right) \frac{\partial i'}{\partial t} \right]$$

avendo indicato con l'apice ('') le grandezze riferitisi alla seconda corrente. Le espressioni di  $r'_1$  e di  $r'_2$  sono, rispettivamente, date da

$$r'_1 = \sqrt{r_1^2 + D^2} \quad \text{e} \quad r'_2 = \sqrt{(r_1 + b \cos \alpha)^2 + (D + b \sin \alpha)^2}$$

dove  $\alpha$  è dato dalla relazione di Euclide per il triangolo  $r_1 br_2$  (Fig. 13.4):

$$\alpha = \arccos \left( \frac{r_2^2 - r_1^2 - b^2}{2r_1 b} \right).$$

Il valore della resistenza  $R$  si ricava dall'espressione della potenza dissipata

$$R = \frac{W}{i_{\text{tot}}^2}$$

inserendovi quella della corrente indotta più sopra ricavata

$$R = \frac{W}{\left( \frac{\mu_0 a}{2\pi} \right)^2 \left[ \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{\partial i}{\partial t} + \ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right) \frac{\partial i'}{\partial t} \right]^2}.$$

Con i dati dell'esercizio precedente, si danno le due funzioni temporali  $i(t)$  e  $i'(t)$  secondo cui variano le correnti nel tempo: per esempio linearmente nel tempo con due valori  $A$  e  $A'$  delle costanti

$$i(t) = At \quad \text{e} \quad i'(t) = A't.$$

Si determina il rapporto  $A/A'$  tale per cui non si ha dissipazione di energia nella spira.

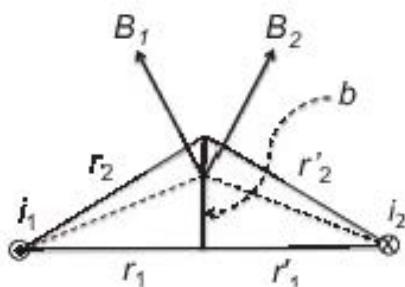
Dall'esercizio precedente si ricava l'espressione dell'energia dissipata, come

$$W = Ri_{\text{tot}}^2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\mu_0 a}{2\pi} \right)^2 \left[ \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) A + \ln \left( \frac{r'_2}{r'_1} \right) A' \right]^2.$$

L'annullamento dell'espressione si ha solo se

$$\frac{A}{A'} = -\frac{\ln \left( \frac{r'_2}{r'_1} \right)}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

se, quindi, al crescere di una corrente in un verso corrisponde il crescere dell'altra nel verso opposto, con un rapporto numerico dipendente dalla posizione relativa delle correnti e della spira. Questa situazione si realizza con la spira equidistante dai due fili in posizione intermedia tra di essi ( $r'_1 = r_1, r'_2 = r_2$ , Fig. 13.5), quando  $A = -A'$ .



**Fig. 13.5.** Una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  si trova all'interno del campo magnetico creato da due correnti rettilinee indefinite  $i$  e  $i'$  tra loro parallele e discordi: la spira si trova equidistante dai fili con il lato  $a$  parallelo alle correnti

### 13.3 Esercizio guida – Auto e mutua induzione

#### Teoria

Dati due circuiti in uno dei quali circola una corrente  $i_1$ , questa crea nello spazio un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}_1$  il cui flusso  $\varphi_{12}$  attraverso una qualunque superficie  $\Sigma_2$ , semplicemente connessa che abbia il secondo circuito come bordo (flusso concatenato), non dipende dalla specifica superficie considerata ed è proporzionale alla corrente  $i_1$  attraverso una costante solitamente indicata con  $M$ . Questa costante ha il medesimo valore se, in modo reciproco, si rapporta alla corrente  $i_2$  circolante nel secondo circuito, il flusso  $\varphi_{21}$  del campo di induzione  $\mathbf{B}_2$ , concatenato col primo circuito, generato da  $i_2$  attraverso una superficie  $\Sigma_1$ . Questa costante è il coefficiente di mutua induzione:

$$M = \frac{\varphi_{12}(\mathbf{B}_1)}{i_1} = \frac{\int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_1 dA_2}{i_1} = \frac{\varphi_{21}(\mathbf{B}_2)}{i_2} = \frac{\int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_2 dA_1}{i_2}.$$

Anche per un solo circuito, considerato come completa sovrapposizione di due circuiti separati, si introduce un parametro di induzione, detto coefficiente di autoinduzione e indicato generalmente con  $L$ , definito da

$$L = \frac{\varphi(B)}{i}$$

in cui non sono riportati gli indici dei circuiti, essendone presente uno solamente.

#### Argomento

Il coefficiente di mutua induzione viene calcolato per alcune specifiche geometrie per le quali si possono fare delle ipotesi restrittive: inizialmente, per il caso di una spira posta all'interno di un solenoide infinitamente esteso, poi per il caso di circuiti con due spire circolari concentriche, poi con le stesse dislocate l'una lungo l'asse dell'altra. In entrambi questi due ultimi casi, il calcolo si effettua ipotizzando soddisfatta la condizione limite, per la quale il rapporto tra i raggi si possa considerare infinitamente grande. In entrambi i casi, si considera arbitrario l'orientamento di giacenza dei piani delle due spire.

*Calcolo dei  
flussi  
concatenati*

Nei casi in esame, in cui si accetta per valida l'ipotesi sopra detta, il calcolo è semplificato dal fatto che il campo di induzione si può considerare uniforme su tutta la superficie su cui si calcola il flusso. Nel caso generale, si deve effettuare l'integrale del flusso e ricorrere in generale a calcoli numerici. Individuata, quindi, la superficie ottimale su cui i campi sono uniformi, il problema si riduce alla determinazione dell'area di detta superficie e del campo ivi presente.

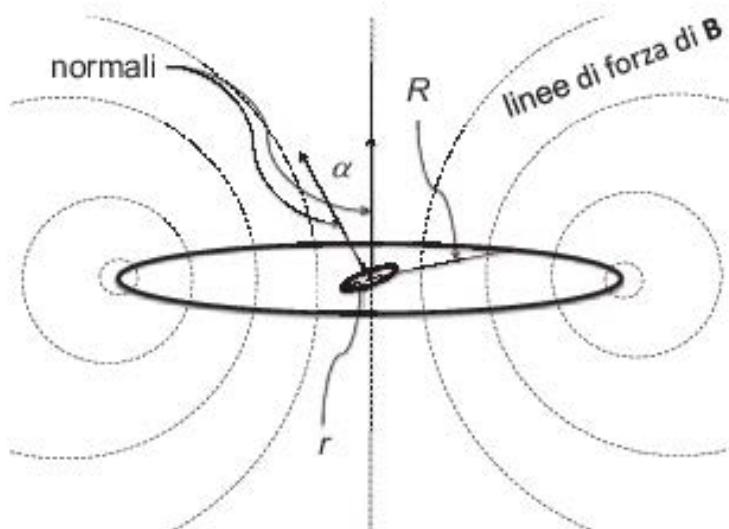
*All'interno di un solenoide infinitamente lungo di raggio  $R$  costituito da un numero  $n$  di spire ravvicinate per unità di lunghezza è posta una spira circolare di raggio  $r < R$  disposta col suo piano di giacenza a formare un angolo  $\alpha$  con l'asse del solenoide. Si determina il coefficiente di mutua induzione  $M$ .*

Poiché all'interno di un solenoide infinitamente esteso il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è uniforme, il suo flusso attraverso la spira circolare è dato, per qualunque orientamento del piano della spira, dal prodotto dell'area della spira per la componente del campo nella direzione della normale, per cui  $M$  è:

$$M = \mu_0 n \pi r^2 \cos \alpha.$$

*Una spira circolare di raggio  $r$  ha il suo centro coincidente con quello di una seconda spira circolare di raggio  $R \gg r$ , col piano di giacenza che forma un angolo  $\alpha$  con quello della spira maggiore. Si determina il coefficiente di mutua induzione  $M$ .*

La condizione  $R \gg r$  sulle dimensioni dei raggi permette di considerare il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  generato in tutti i punti della superficie della spira più piccola da una corrente elettrica che circolasse nella spira più grande come sostanzialmente uniforme e di calcolare il flusso come prodotto dell'area della spira per la componente del campo nella direzione della normale (Fig. 13.6 nella pagina successiva). Il calcolo del coefficiente  $M$  relativo al flusso del campo generato dalla spira più pic-



**Fig. 13.6.** Due spire piane di raggio  $r$  ed  $R$  i cui piani di giacenza sono inclinati di un angolo  $\alpha$

colà attraverso l'area della spira più grande, al contrario, richiederebbe la soluzione dell'integrale del campo, che peraltro non è elementarmente noto.

Dato il campo generato al centro di una spira circolare come

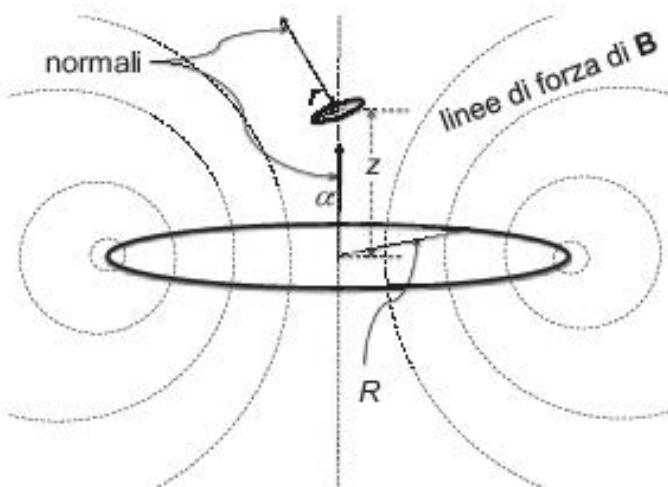
$$B = \frac{\mu_0 i}{2R},$$

Il coefficiente di mutua induzione è, quindi,

$$M = \frac{\mu_0 \pi r^2 \cos \alpha}{2R}.$$

*Date le due spire del caso precedente, venga ora la spira di raggio minore traslata lungo l'asse della spira maggiore fino a portare i centri delle due spire a una distanza  $z$  l'uno dall'altro (Fig. 13.7). Quale problema inverso, può essere dato il valore del coefficiente  $M$  e lasciato incognito uno dei tre possibili parametri da cui esso dipende:  $R$  oppure  $\alpha$  oppure  $z$ .*

Si considera la soluzione del problema diretto, determinando primariamente l'espressione del coefficiente  $M$  in funzione dei vari parametri. Si considera ancora la vali-



**Fig. 13.7.** Due spire piane di raggio  $r$  ed  $R$  i cui piani di giacenza sono inclinati di un angolo  $\alpha$  e i cui centri, lungo l'asse comune alle due spire, distano di  $h$

dità della condizione  $R \gg r$  per potersi limitare a considerare il valore del campo prodotto dalla spira maggiore unicamente sui punti del suo asse. Esso vale

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Il coefficiente di mutua induzione è, quindi, dato dall'espressione

$$M = \pi \mu_0 \frac{(rR)^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \cos \alpha.$$

dalla quale si può ricavare direttamente uno qualunque dei tre parametri sopra indicati in funzione degli altri, considerati noti. Per l'angolo  $\alpha$  e per  $z$  si ha direttamente

$$\alpha = \arccos \frac{2M(R^2 + z^2)^{3/2}}{\pi \mu_0 (rR)^2}$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{\pi \mu_0 (rR)^2}{2M}\right)^{2/3} - R^2}.$$

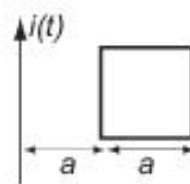
Per la determinazione di  $R$ , occorre risolvere un'equazione algebrica di ordine superiore a 2, che si può dare solo per via numerica.

### 13.4 Domande di verifica

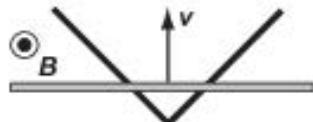
- Evidenziare la necessità del segno meno ( $-$ ) presente nell'equazione dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz.
- Indicare se sia possibile che una corrente indotta generi un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  nello stesso verso del campo magnetico la cui variazione l'ha generata e se ne giustifichi la risposta.
- Illustrare con un esempio come l'origine della forza elettromotrice in un conduttore che si muova in un campo magnetico uniforme possa spiegarsi ricorrendo alla forza di Lorentz.
- Mostrare come l'applicazione della legge di Ampère al caso di correnti variabili nel tempo richieda l'introduzione di un termine, omogeneo con una corrente, detta di spostamento.
- Ricavare l'espressione dell'equazione della propagazione delle onde elettromagnetiche a partire dalle ultime due equazioni di Maxwell.
- Ricavare il coefficiente di mutua induzione fra due spire complanari concentriche, con un rapporto dei raggi tale da potersi considerare infinitamente grande.
- Illustrare l'espressione della legge di Faraday-Neumann-Lenz nel caso in cui una sottile sbarretta conduttrice viene trascinata con velocità costante in un campo di induzione magnetica uniforme.
- Ricavare il coefficiente di mutua induzione fra due solenoidi coassiali.
- Mostrare come il coefficiente di mutua induzione tra due solenoidi coassiali infinitamente estesi sia il medesimo sia che si calcoli per l'effetto induttivo del primo sul secondo, sia viceversa.
- Ricavare l'andamento temporale della corrente che scorre in un circuito formato da un generatore ideale di f.e.m.  $f$ , una resistenza  $R$  ed un'induttanza  $L$  collegati in serie, a partire dall'istante di chiusura del circuito.
- Dimostrare che in un'onda elettromagnetica il rapporto tra il campo elettrico e quello di induzione magnetica è tale da fornire eguali i valori delle densità volumiche di energia elettrica e magnetica.

### 13.5 Esercizi

- [1] In una regione circolare di centro  $O$  e raggio  $R$  di una superficie piana, vi è un campo di induzione magnetica,  $\mathbf{B}$ , uniforme e perpendicolare a tale regione, mentre  $\mathbf{B}$  è nullo nel resto della superficie piana. Poiché il campo di induzione magnetica varia nel tempo con legge nota,  $d\mathbf{B}/dt > 0$ , si determini l'espressione del campo elettrico indotto in un generico punto  $P$  del piano a distanza  $r$  da  $O$ .
- [2] All'interno di un solenoide molto lungo su cui sono avvolte 30 spire per ogni centimetro di lunghezza è collocato un avvolgimento costituito da 3 spire avvolte su un cilindretto di raggio  $R = 2.5$  cm coassiale col solenoide. Nel circuito costituito dalle 3 spire circola una corrente  $i = I_0 \cos \omega t$ , con  $I_0 = 0.2$  A e  $\omega = 10^4$  s $^{-1}$ . Si determini il valore dell'ampiezza della differenza di potenziale presente ai capi dell'avvolgimento del solenoide.
- [3] All'interno di un solenoide ideale avvolto da  $n$  spire per unità di lunghezza, è disposta, nel vuoto, una spira quadrata di lato  $L$  e resistenza  $R$  disposta sul piano ortogonale all'asse del solenoide. Il solenoide è percorso da una corrente variabile nel tempo secondo la legge  $I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ . Ricavare l'espressione dell'energia dissipata nella spira nell'intervallo di tempo  $(0, \infty)$ .
- [4] All'interno di un solenoide di lunghezza  $L = 80$  cm su cui sono avvolte uniformemente  $N = 15000$  spire è disposta coassialmente una piccola spira circolare di raggio  $r = 5$  cm, sulla quale circola una corrente indotta = 0.02 mA quando nel solenoide scorre, per un certo intervallo di tempo, una corrente variabile nel tempo con legge  $I = at$ , con  $a = 0.3$  A/s. Si chiede di determinare la resistenza  $R$  della spira.
- [5] Su una spira circolare piana di raggio  $R = 10$  cm, agisce un campo di induzione magnetica perpendicolare alla spira di modulo  $B(t) = B_0(1 - r/2R) \sin \omega t$ , con  $r$  distanza dal centro  $O$  della spira,  $\omega = 30$  s $^{-1}$  e  $B_0 = 10$  T. Calcolare la f.e.m. massima indotta nella bobina.

- [6] Una spira metallica quadrata di lato  $a = 1 \text{ cm}$  e resistenza  $R = 0.1 \Omega$  è complanare con un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente  $i(t) = i_0 + \alpha t$  nel verso della figura con  $\alpha = 10 \text{ A/s}$ . Si determini l'intensità e il verso della corrente indotta che circola nella spira.
- 
- [7] Un circuito, nel quale circola una corrente variabile nel tempo  $i_1 = I_1 \cos \omega t$  ( $I_1 = 2 \text{ A}$  e  $\omega = 2\pi \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ ), è accoppiato induttivamente con un secondo con coefficiente di mutua induzione  $M = 100 \text{ H}$ . Si determini la resistenza  $R$  del secondo circuito, sapendo che il valore massimo della corrente in esso indotta è  $I_2 = 0.1 \text{ A}$ .
- [8] Una piccola spira di raggio  $r = 2 \text{ mm}$  è disposta internamente a un solenoide indefinitivamente lungo col suo piano di giacenza normale all'asse del solenoide; quest'ultimo ha un diametro  $D = 10 \text{ cm}$  e possiede  $n = 50 \text{ spire/m}$ . Se la corrente che scorre nel solenoide varia nel tempo secondo la legge  $i = I_0 \cos \omega t$  (con  $I_0 = 5 \text{ A}$  e  $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$ ), si osserva nella spira una corrente indotta di valore massimo  $I_{\text{ind}} = 1 \text{ mA}$ , si determini la resistenza elettrica della spira.
- [9] Una sbarretta conduttrice di lunghezza  $l = 10 \text{ cm}$  ruota con velocità angolare  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$  attorno e a contatto con un filo metallico perpendicolare alla sbarretta stessa passante per un suo estremo ed è immersa in un campo di induzione magnetica parallelo all'asse di rotazione e di modulo  $B = 2 \text{ T}$ . L'altro estremo della sbarretta striscia su un contatto circolare. Fra un punto del filo e uno del contatto circolare è inserita una resistenza  $R = 9 \Omega$ . Sapendo che la resistenza di barretta e contatti è  $r = 1 \Omega$ , determinare la corrente che circola in  $R$ .
- [10] Una spira circolare di raggio  $r_{sp} = 5 \text{ cm}$  e resistenza elettrica  $R = 5 \text{ k}\Omega$  è disposta coassialmente alle espansioni circolari di raggio  $r_{es} = 30 \text{ cm}$  di un elettromagnete, che crea un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  costante e uniforme tra le due espansioni. In seguito all'allontanamento della spira a una distanza dal magnete sufficientemente grande da potervi considerare nullo il campo  $\mathbf{B}$ , si è misurato un passaggio di carica elettrica lungo la spira pari a  $Q = 200 \mu\text{C}$ . Si determini il valore del campo di induzione  $B$ .

- [11] Una spira piana di area  $A$  è immersa in un campo di induzione magnetica uniforme e variabile nel tempo. Quando la spira viene disposta perpendicolarmente alle linee di forza del campo, si manifesta una forza elettromotrice indotta  $f = F_0 \sin \omega t$ . Determinare l'andamento temporale del campo induzione magnetica. ( $A = 5 \text{ cm}^2$ ,  $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,  $F_0 = 1 \text{ V}$ )
- [12] Sul piano mediano tra le espansioni di un magnete a sezione circolare, il campo di induzione magnetica, parallelo all'asse della sezione, attorno al punto  $r = 0$ , è dato in modulo dall'espressione  $B(r, t) = B_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \cos \omega t$  con  $t$  tempo,  $r$  distanza sul piano dall'asse del magnete,  $\omega$  pulsazione e  $R_0$  un'opportuna costante. Si chiede quale sia l'espressione della dipendenza da  $r$  del valore massimo del campo elettrico  $E$  indotto dalla variazione temporale di  $B$  tra le espansioni del magnete.
- [13] Due spire piane e circolari, complanari e concentriche, hanno raggio  $a = 2 \text{ cm}$  e  $b = 1 \text{ m}$  rispettivamente. Il filo di cui sono fatte le spire ha una sezione di area  $S = 3 \text{ mm}^2$  e resistività pari a  $\rho = 12 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Se nella spira esterna scorre una corrente variabile nel tempo con legge  $i = 200t \text{ A}$ , con  $t$  espresso in secondi, determinare la corrente indotta nella spira interna.
- [14] Due rotaie conduttrici e rettilinee di lunghezza  $L = 2 \text{ m}$  sono saldate ad una estremità formando un angolo retto. Una sbarra conduttrice scorre sulle rotaie partendo dal vertice al tempo  $t = 0$  con velocità costante  $v = 0.3 \text{ m/s}$ , in direzione della bisettrice (v. figura).
- Il sistema è immerso in un campo  $\mathbf{B}$  uniforme, ortogonale al piano della figura ed avente intensità pari a  $0.4 \text{ T}$ . Si determini (a) il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso il triangolo formato dalle rotaie e dalla sbarra all'istante  $t = 3 \text{ s}$  e (b) la f.e.m. indotta lungo il triangolo a quell'istante; si determini, inoltre, la massima corrente che circola nel circuito sapendo che sbarra e rotaie sono caratterizzate da una resistenza per unità di lunghezza  $r = 20 \Omega/\text{m}$ .
- [15] Due sottili spire circolari metalliche aventi uguale resistenza  $R = 10^{-3} \Omega$  e raggi  $r_1$  ed  $r_2$  ( $r_1 \gg r_2$ ), sono complanari e concentriche con la spira di

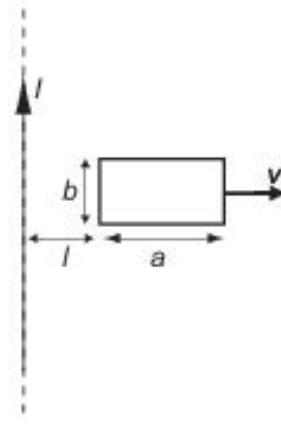


raggio maggiore percorsa da una corrente  $i = 100 \text{ mA}$ . All'istante  $t = 0$  la spira più piccola, sempre mantenendosi parallela alla spira maggiore, viene allontanata da quest'ultima lungo l'asse comune con accelerazione costante  $a = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Calcolare la carica elettrica fluita nella spira di raggio  $r_2$  dopo un tempo  $\Delta t = 1 \text{ s}$ . ( $r_1 = 1 \text{ m}$ ,  $r_2 = 10^{-3} \text{ m}$ )

- [16] In un solenoide rettilineo e indefinito di raggio  $R$ , variando opportunamente l'intensità della corrente che circola nelle spire, il modulo dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  viene fatto crescere linearmente nel tempo in ragione di  $\alpha$ , con  $\alpha > 0$ . Si determini il vettore campo elettrico indotto,  $\mathbf{E}$ , in funzione della distanza  $r$  dall'asse del solenoide, con  $r \leq R$ .
- [17] Un avvolgimento rettangolare formato da  $N = 500$  spire con i lati di lunghezza  $l_1 = 20 \text{ cm}$  e  $l_2 = 50 \text{ cm}$ , ruota attorno a un asse parallelo al lato maggiore e passante per il centro di massa dell'avvolgimento, con velocità angolare costante ed è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme  $B = 0.2 \text{ T}$  normale all'asse di rotazione. Si determini la frequenza di rotazione dell'avvolgimento se si vuole che esso generi una forza elettromotrice indotta il cui valore massimo sia  $V = 220 \text{ V}$ .
- [18] Due solenoidi molto lunghi di raggi  $R_1$  ed  $R_2$ , con  $R_2 > R_1$ , e numero di spire per unità di lunghezza pari a  $n_1$  ed  $n_2$ , sono disposti coassialmente nel vuoto l'uno all'interno dell'altro; essi sono percorsi nello stesso verso da correnti variabili nel tempo,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ , rispettivamente. Determinare l'espressione del modulo del campo elettrico indotto nella zona di spazio fra i solenoidi compresa tra  $R_1$  ed  $R_2$ .
- [19] Una spira di raggio  $R = 2 \text{ cm}$  formata da un filo metallico di massa  $m = 5 \text{ g}$  e resistività  $\rho = 10 \Omega\cdot\text{m}$  cade, sotto l'azione della forza di gravità, all'interno di un campo di magnetico uniforme  $B = 10^{-3} \text{ T}$ . Durante la caduta, la normale alla superficie della spira mantiene inalterata la sua direzione formante un angolo di  $30^\circ$  con la direzione di  $\mathbf{B}$ . Si determini l'intensità della corrente circolante nella spira.
- [20] Due lunghi e sottili tubi metallici cilindrici di raggio  $r_1 = 1.0 \text{ cm}$  e  $r_2 = 1.2 \text{ cm}$  sono disposti nel vuoto coassialmente l'uno all'interno dell'altro; essi

sono percorsi nella direzione assiale e in versi opposti da una corrente  $i = 10^{-2}$  A. Determinare il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del sistema.

- [21] Un circuito chiuso è costituito da un filo conduttore flessibile rivestito di materiale isolante e piegato a forma di 8 su un piano. L'area  $S$  della superficie piana delimitata dal filo è uguale alla somma dell'area della prima ansa,  $S_1 = 20 \text{ cm}^2$ , e di quella della seconda ansa,  $S_2 = 12 \text{ cm}^2$ . Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme perpendicolare al suo piano e variabile nel tempo secondo la legge  $B = Kt$ , con  $K = 4 \text{ T/s}$ . Si calcoli la forza elettromotrice indotta nel circuito.
- [22] Un lungo filo di rame a la cui sezione circolare ha diametro  $d$  è avvolto a formare un solenoide di diametro  $D$  con spire addossate le une alle altre. All'istante  $t = 0$  nel solenoide viene fatta passare una corrente variabile con il tempo secondo la legge  $I = I_0 e^{-\alpha t}$  ( $I_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ ). Determinare il modulo del campo elettrico in un punto distante  $r = 2D$  dall'asse del solenoide all'istante  $\bar{t} > 0$ .
- [23] Un filo rettilineo indefinito percorso da corrente  $I$ , è complanare con un circuito rettangolare metallico, di lati  $a$  e  $b$ ; il circuito si muove sul piano di giacenza con velocità costante  $v$  perpendicolare al filo, mantenendo parallelo a esso il suo lato corto. Si determini il valore della f.e.m. indotta nel circuito rettangolare nell'istante in cui si complanare con il filo (v. figura a lato):  $I = 100 \text{ A}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 15 \text{ cm}$ ,  $v = 0.5 \text{ m/s}$ . (Si trascuri la mutua induzione tra filo e circuito)
- [24] Nel vuoto sono date due spire circolari di raggi  $r$  ed  $R$  ( $r \ll R$ ) complanari e concentriche. Si ricavi l'espressione l'ampiezza della f.e.m. indotta nella spira di raggio maggiore quando nella spira di raggio minore circola una corrente sinusoidale di ampiezza  $I_0$  e periodo  $T$ .
- [25] È data una bacchetta metallica, di lunghezza  $\ell$  libera di scorrere tra due guide metalliche parallele tra loro e normali alla bacchetta che si possono collegare



tra loro formando un circuito di resistenza  $R$ . Un campo magnetico è presente, uniforme e perpendicolare al piano del circuito. Una forza  $\mathbf{F}$  esterna fa muovere la bacchetta con velocità  $\mathbf{v}$  costante parallela alle due guida. a) Dimostrare l'uguaglianza delle espressioni dell'intensità di corrente  $I_L$  che scorre nel circuito ricavata attraverso la forza di Lorentz, e quella  $I_F$  ricavata attraverso la legge di Faraday-Neumann-Lenz; b) dimostrare l'uguaglianza delle due espressioni della potenza  $P_f$  esercitata dalla forza esterna e della potenza  $P_R$  dissipata dalla resistenza del circuito; c) se il circuito è sul piano  $xy$ , la bacchetta mobile è ortogonale all'asse  $x$  e si allontana nel verso delle  $x$  crescenti e il campo magnetico è in direzione  $-z$ , in che verso, visto dalle  $z$  positive scorrerà la corrente?

- [26] Nel vuoto due spire metalliche, complanari e concentriche, hanno raggio  $R_1$  ed  $R_2$  ( $R_2 \ll R_1$ ). Nella spira di raggio minore scorre una corrente variabile nel tempo con la legge:  $i_2 = i_{02} \cos \omega t$ . Si determini la resistenza,  $R$ , della spira di raggio maggiore sapendo che il valore massimo della corrente in essa indotta vale  $i_{01}$ . ( $R_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $i_{01} = 10^{-6} \text{ A}$ ,  $i_{02} = 0.1 \text{ A}$ ,  $\omega = 10 \text{ Hz}$ )

- [27] Un condensatore di capacità  $C$  tra le cui armature vi è una differenza di potenziale  $V_0$ , all'istante  $t = 0$  viene collegato in parallelo a un solenoide che possiede una resistenza elettrica  $R$ . Una spira circolare metallica di raggio inferiore a quello del solenoide, è posta all'interno di quest'ultimo normalmente al suo asse. Si determini il coefficiente di mutua induzione tra solenoide e spira sapendo che all'istante  $t = t^*$  la forza elettromotrice in essa indotta è  $f^*$ . (Si consideri trascurabile il coefficiente di auto induzione del solenoide).

## 13.6 Soluzioni degli esercizi

- [1] Data la simmetria del problema, le linee di forza del campo elettrico indotto sono circonferenze con centro in  $O$ ; applicando la legge di Faraday-Neuman-

Lenz a una generica circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  si ha:

$$\text{per } r < R : \quad 2\pi r E = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B) \quad \Rightarrow \quad |E| = \frac{1}{2}r \frac{dB}{dt}$$

$$\text{per } r \geq R : \quad 2\pi r E = -\frac{d}{dt}(\pi R^2 B) \quad \Rightarrow \quad |E| = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB}{dt}.$$

[2]

$$\Delta V = -\frac{\partial \varphi_{\text{sol}}(\mathbf{B})}{\partial t} = -M \frac{\partial i_{\text{spira}}}{\partial t}$$

con  $M$  coefficiente di mutua induzione pari a

$$M = \frac{\varphi_{\text{sol}}(B)}{i_{\text{spira}}} = \frac{\varphi_{\text{spira}}(B)}{i_{\text{sol}}} = 3\mu_0 n \pi R^2;$$

quindi:

$$\Delta V_{\text{max}} = 3\mu_0 n \pi R^2 \omega I_0 = 44.4 \text{ mV}.$$

[3] L'energia dissipata dalla spira è l'integrale nel tempo della potenza dissipata dalla resistenza quindi:

$$E = \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty RI_{\text{sp}}(t)^2 dt.$$

La corrente  $I_{\text{sp}}$  che passa nella spira si ottiene dalla legge di induzione a causa del flusso  $\phi_{\text{sp}}$  variabile che la attraversa, dovuto alla corrente variabile del solenoide

$$I_{\text{sp}} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_{\text{sp}}}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d(\mu_0 n I L^2)}{dt} = -\frac{\mu_0 n I_0 L^2}{R \tau} e^{-t/\tau}.$$

L'energia dissipata sarà pertanto:

$$E = R \left( -\frac{\mu_0 n I_0 L^2}{R \tau} \right)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 L^4}{2 R \tau}.$$

[4] Si può correttamente fare l'ipotesi di un campo di induzione uniforme all'interno del solenoide indefinito, con  $n = N/L$  spire per unità di lunghezza, variabile linearmente nel tempo con legge  $B = \mu_0 n a t$ , che induce una f.e.m.

nella spira di area  $\pi r^2$ . Si ottiene complessivamente

$$R = \frac{|\text{f.e.m.}|}{i_{\text{ind}}} = \frac{1}{i_{\text{ind}}} \left| \frac{\partial \varphi(B)}{\partial t} \right| = \frac{\pi r^2 \frac{\partial(\mu_0 n I)}{\partial t}}{i_{\text{ind}}} = \frac{\pi r^2 \mu_0 N a}{L i_{\text{ind}}} = 2.77 \Omega.$$

- [5] Per la simmetria sferica di  $B$ , dividendo la superficie circolare in corone circolari di area  $dS = 2\pi r dr$ ,

$$\varphi(B) = B_0 \sin \omega t \int_0^R \left(1 - \frac{r}{2R}\right) 2\pi r dr.$$

Eseguendo l'integrale:

$$\varphi(B) = \frac{2\pi B_0 R^2}{3} \sin \omega t = 0.21 \sin \omega t \text{ weber}$$

quindi:

$$(\text{f.e.m.})_{\max} = 0.21 \omega = 6.3 \text{ V.}$$

- [6] Il campo di induzione magnetica creato dalla corrente che scorre nel filo è diretto verso l'interno della pagina e ha modulo

$$B(x) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x}$$

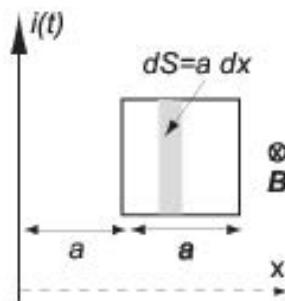
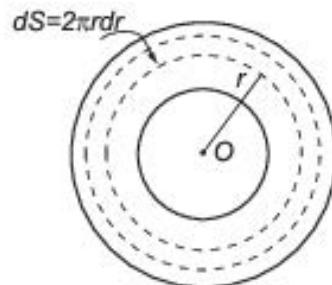
essendo  $x$  la distanza dal filo. Scegliendo per il circuito della spira il verso orario si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}) &= \int_a^{2a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 a i(t)}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{\mu_0 a i(t)}{2\pi} \ln 2. \end{aligned}$$

La corrente indotta nella spira è pertanto

$$I(t) = -\frac{d\varphi(B)}{dt} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\mu_0 a \alpha}{2\pi} \ln 2 = -1.39 \times 10^{-7} \text{ A},$$

circolante in verso antiorario.



[7] La corrente

$$i_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_{21}(B)}{\partial t} = -\frac{1}{R} M \frac{\partial i_1}{\partial t} = \frac{1}{R} M \omega I_1 \sin \omega t$$

è massima quando il seno raggiunge il valore massimo di 1. Da cui:

$$R = M \omega \frac{I_1}{I_2} = 1.26 \times 10^6 \Omega.$$

[8] Il valore della resistenza  $R$  sarà dato da:

$$R = \frac{f_{em\max}}{I_{ind}} = \frac{\frac{d\varphi(B)}{dt}}{I_{ind}} = \frac{\pi r^2 \mu_0 n \omega I_0}{I_{ind}} = 0.395 \Omega.$$

[9]

$$i = -\frac{1}{R_{tot}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{1}{R+r} B \pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} = -\frac{Bl^2\omega}{2(R+r)} = 0.1 \text{ A.}$$

[10] Sarà:

$$Q = \int_0^\infty i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} dt = -\frac{1}{R} \Delta \varphi = \frac{\pi r_{sp} B}{R},$$

da cui

$$B = \frac{R}{\pi r_{sp}^2} Q = 0.127 \text{ T.}$$

[11]

$$f = -\frac{d\varphi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = -A \frac{dB}{dt}.$$

Pertanto:

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{1}{A} F_0 \sin \omega t;$$

da cui, per integrazione:

$$B = -\frac{F_0}{A} \int \sin \omega t dt = \frac{F_0}{\omega A} \cos \omega t = 0.2 \cos \omega t \text{ T.}$$

[12] Lungo una linea circolare di raggio  $r$  giacente su un piano ortogonale a  $\mathbf{B}$  si

induce un campo elettrico  $\mathbf{E}$  in ogni punto tangente alla linea tale che

$$\oint Edl' = 2\pi r E = -\frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} = -B_0 \frac{d}{dt} \int_0^r \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) 2\pi r dr \\ = 2\pi B_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R_0^2}\right]_0^r \omega \sin(\omega t),$$

da cui

$$E_{max} = \frac{\omega r}{2} B_0 \left(1 - \frac{r^2}{2R_0^2}\right).$$

- [13] La corrente nella spira interna è pari alla f.e.m. indotta  $f_i$  divisa per la resistenza  $R$  della spira stessa, dove

$$R = \rho \frac{2\pi a}{S} = 5 \text{ m}\Omega.$$

Il flusso di  $\mathbf{B}$  che attraversa la spira interna è dato dalla sezione della spira stessa  $A$  e dal campo  $B$  prodotto dalla spira esterna al centro della stessa

$$\varphi = AB = \pi a^2 \frac{\mu_0 i}{2b}.$$

La forza elettromotrice indotta è quindi pari a:

$$f_i = AB = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} \frac{di}{dt} = \frac{\pi a^2 \mu_0}{2b} 200 = 0.158 \mu\text{V}.$$

Otteniamo infine la corrente che circola nella spira interna

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{1.58 \times 10^{-7}}{5 \times 10^{-3}} \simeq 0.03 \text{ mA.}$$

- [14] All'istante  $t = 3 \text{ s}$  la sbarra si trova alla distanza  $y = vt = 0.9 \text{ m}$  dal vertice. L'area del triangolo formato a quell'istante da sbarra e rotaie è pari a  $S = 1/2 (\sqrt{2}y)^2 = y^2 = 0.81 \text{ m}^2$ . Il flusso del campo  $\mathbf{B}$  attraverso il triangolo è dato da  $\varphi = BS = 0.324 \text{ Tm}^2$ . La forza elettromotrice indotta nel circuito chiuso è pari a  $f_i = -\frac{d\varphi}{dt} = -B2yv$ , da cui  $|f_i| = 0.216 \text{ V}$ .

Il valore istantaneo della corrente è dato da  $i = f_i/R$ , dove  $R$  è la resistenza

totale del circuito chiuso:

$$R = r2y(t) \left(1 + \sqrt{2}\right),$$

da cui

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{B2y(t)v}{r2y(t) \left(1 + \sqrt{2}\right)} = \frac{Bv}{r \left(1 + \sqrt{2}\right)}.$$

La corrente è quindi costante e vale  $i = 2.5 \text{ mA}$ .

[15] Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz si ha:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\varphi}{dt} = iR \quad \Rightarrow \quad dq = -\frac{1}{R} d\varphi,$$

e quindi

$$q = \frac{1}{R} (\varphi_I - \varphi_F),$$

dove

$$\varphi_I = \frac{\mu_0 i}{2r_1} \pi r_2^2 \quad \text{e} \quad \varphi_F = \frac{\mu_0 i r_1^2}{2(x^2 + r_1^2)^{3/2}} \pi r_2^2,$$

essendo  $x = 1/2at^2 = 0.5 \text{ m}$  lo spazio percorso in un secondo dalla spira piccola. La carica fluita in tale spira sarà allora pari a:

$$q = \frac{\mu_0 i}{2R} \pi r_2^2 \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{r_1^2}{(x^2 + r_1^2)^{3/2}} \right] = 2.7 \times 10^{-11} \text{ C.}$$

[16] Ponendo l'asse delle  $x$  coincidente con l'asse del solenoide e orientato nel verso di  $\mathbf{B}$ , si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\alpha \mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{i} \times \mathbf{r};$$

quindi  $\mathbf{E}$  ha modulo  $1/2r\alpha$  è tangente alla circonferenza di raggio  $r$  ed è diretto nel verso opposto a quello di scorrimento della corrente.

Si può ragionare anche utilizzando la terza equazione di Maxwell in forma integrale considerando una circonferenza di raggio  $r$  concentrica con l'asse del

solenoide:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad \Rightarrow \quad E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \alpha,$$

da cui si ricava  $E = -1/2r\alpha$ , in cui il segno meno, avendo orientato il versore  $\mathbf{n}$  parallelo a  $\mathbf{i}$  indica che  $\mathbf{E}$  è tangente alla circonferenza di raggio  $r$  con verso opposto a quello di scorrimento della corrente nelle spire del solenoide.

- [17] Indicando con  $\alpha(t) = \omega t$  l'angolo tra la normale alle spire e la direzione di  $\mathbf{B}$ , il flusso del vettore induzione magnetica attraverso l'avvolgimento è pari a:  $\varphi(\mathbf{B}) = Bl_1l_2N \cos \omega t$ . Pertanto:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} = \omega Bl_1l_2N \sin \omega t,$$

e quindi

$$\left| \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} \right|_{\max} = \omega Bl_1l_2N = 220 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{220 \text{ V}}{2\pi Bl_1l_2N} = 3.5 \text{ Hz}.$$

- [18] Le linee di forza del campo elettrico sono circonferenze con centro sull'asse comune dei solenoidi e a esso normali ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  tra  $R_1$  ed  $R_2$ ); il modulo del campo elettrico dipende, quindi, solo dalla distanza,  $r$ , dall'asse del solenoide. Scelta come linea di circuitazione una circonferenza perpendicolare all'asse dei solenoidi e di raggio  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ), si ha:

$$E 2\pi r = -\frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt},$$

essendo

$$\varphi(\mathbf{B}) = \pi R_1^2 (B_1 + B_2) + \pi(r^2 - R_1^2) B_2 = \pi R_1^2 B_1 + \pi r^2 B_2$$

il flusso del campo magnetico attraverso la superficie circolare che ha per contorno la circonferenza di raggio  $r$ , dove  $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$  e  $B_2 = \mu_0 n_2 i_2$  sono i moduli dei vettori induzione magnetica creati dai due solenoidi. Si ha pertanto:

$$E 2\pi r = - \left( \pi R_1^2 \mu_0 n_1 \frac{di_1}{dt} + \pi r^2 \mu_0 n_2 \frac{di_2}{dt} \right),$$

quindi si ha:

$$E(r) = -\frac{\mu_0}{2r} \left( n_1 R_1^2 \frac{di_1}{dt} + n_2 r^2 \frac{di_2}{dt} \right).$$

[19] Non vi è corrente circolante nella spira poiché non varia nel tempo il flusso del campo magnetico con essa concatenato.

[20] Data la simmetria del sistema, le linee di forza del campo di induzione magnetica,  $\mathbf{B}_0$ , sono circonferenze concentriche con l'asse del sistema; pertanto, applicando la legge di circuitazione di Ampère a una gererica circonferenza di raggio  $r$  concentrica con l'asse del sistema si ha:

$$\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = B_0 2\pi r = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$B_0 = 0$  per  $r \leq r_1$  e per  $r \geq r_2$ .

Indicando con  $L$  il coefficiente di autoinduzione,  $\varphi(\mathbf{B}_0) = Li$ ; dato l'andamento di  $\mathbf{B}_0$ , per il calcolo di  $L$  il flusso autoindotto,  $\varphi$ , va calcolato in una porzione di piano di lunghezza  $l$  passante per l'asse del sistema e compresa tra  $r_1$  e  $r_2$ :

$$\varphi(\mathbf{B}_0) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} l dr$$

essendo  $dS = l dr$  l'area infinitesima di un rettangolino di base  $l$  e altezza  $dr$ .

Si ha quindi:

$$\varphi(\mathbf{B}_0) = l \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

quindi:

$$L = \frac{\varphi(\mathbf{B}_0)}{il} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 3.6 \times 10^{-8} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}.$$

[21] Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$\text{f.e.m} = -\frac{d}{dt} \left[ \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 dS \right],$$

essendo  $\mathbf{n}_1$  ed  $\mathbf{n}_2$  i versori delle due anse formate dal filo. Fissato un verso di percorrenza del filo, quando viene piegato a forma di 8, poiché esso è rivestito di materiale isolante,  $\mathbf{n}_1$  ed  $\mathbf{n}_2$  hanno verso opposto; supponendo che il campo

magnetico abbia il verso di  $\mathbf{n}_1$  si ha:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{dB}{dt} (S_1 - S_2) = K(S_2 - S_1) = -3.2 \times 10^{-3} \text{ V},$$

dove il segno  $-$  indica che la corrente indotta scorre nel circuito nel verso opposto a quello di percorrenza del filo.

- [22] Poiché le spire sono addossate tra loro, la densità di spire del solenoide è:  $n = N/Nd = 1/d$ , pertanto il campo magnetico all'interno del solenoide è:

$$B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{d}.$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz

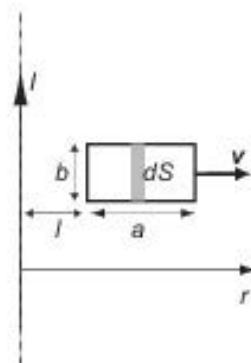
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \varphi(\mathbf{B})}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad E 2\pi r = \mu_0 n \pi \frac{D^2}{4} \alpha I_0 e^{-\alpha t},$$

con  $r = 2D$ ; all'istante  $\bar{t}$  si ha, quindi:

$$E = \frac{1}{16} \frac{\mu_0 \alpha D}{d} I_0 e^{-\alpha \bar{t}}.$$

- [23] Il flusso concatenato di  $\mathbf{B}$  con il circuito rettangolare vale:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}) &= \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_l^{l+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f.e.m.} &= -\frac{d\varphi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left( \frac{l}{l+a} \right) \left( \frac{l-(l+a)}{l^2} \right) \frac{dl}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{ab}{l(l+a)} v = 1 \times 10^{-5} \text{ V}. \end{aligned}$$

- [24] La forza elettromotrice indotta nella spira di raggio maggiore è:

$$\text{f.e.m.} = M \frac{di}{dt}$$

essendo  $M$  il coefficiente di mutua induzione tra le due spire e  $i(t) = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ . Per il calcolo di  $M$  si supponga che una corrente  $i_R$  circoli nella spira di raggio  $R$ ; nel suo centro creerà un campo di induzione magnetica perpendicolare al piano di giacitura della spira e di modulo  $B = \mu_0 i_R / 2R$ . Il flusso di  $B$  attraverso al spira di raggio  $r$ , essendo  $r \ll R$  è:

$$\varphi(\mathbf{B}) = B\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\varphi(\mathbf{B})}{i_R} = \frac{\mu_0}{2R} \pi r^2.$$

Pertanto:

$$\text{f.e.m.} = MI_0 \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t;$$

l'ampiezza di tale forza elettromotrice è:

$$MI_0 \frac{2\pi}{T} = \frac{\mu_0 \pi^2 r^2 I_0}{RT}.$$

- [25] a) Ogni carica libera  $q$  sulla bacchetta subirà una forza di Lorentz di modulo pari a  $F_L = qvB$ , corrispondente a un campo elettromotore  $E_L = F_L/q = vB$  e quindi sul circuito agirà una forza elettromotrice

$$\text{f.e.m.} = \int_{\ell} E_L d\ell = \ell v B \quad \Rightarrow \quad I_L = \text{f.e.m.}/R = \frac{\ell v B}{R}.$$

Un'area  $dS = \ell dx$  è spazzata dalla bacchetta in un tempo  $dt$ , quindi, applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si ha:

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell dx B}{dt} = \ell v B \quad \Rightarrow \quad I_F = \text{f.e.m.}/R = \frac{\ell v B}{R}.$$

- b) La forza esterna necessaria per mantenere la bacchetta a velocità costante è pari, in modulo, alla forza di origine magnetica, che si oppone al moto, data dalla formula di Laplace che in questo caso è  $F = I\ell B$ . Quindi la potenza sviluppata dalla forza è data da:

$$P_f = Fv = I\ell Bv = \frac{v^2 B^2 \ell^2}{R}.$$

La potenza dissipata dalla resistenza  $R$  del circuito è per effetto Joule è  $P_R =$

$I^2R$ ; pertanto:

$$P_R = I^2 R = \frac{v^2 B^2 \ell^2}{R}$$

c) Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie in direzione  $-z$  è crescente quindi, per la legge di Lenz, la corrente scorrerà in maniera tale da creare un flusso uscente in direzione  $+z$ , cioè in senso antiorario.

[26] La forza elettromotrice indotta,  $f_{i1}$ , nella spira di raggio  $R_1$  vale:

$$f_{i1} = -M \frac{di_2}{dt} = M\omega i_{02} \sin \omega t,$$

essendo  $M$  il coefficiente di mutua induzione tra le due spire:

$$M = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_2^2}{R_1} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ H.}$$

Si ha pertanto:

$$i_1 = \frac{f_{i1}}{R} = \frac{M\omega i_{02}}{R} \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad i_{01} = \frac{M\omega i_{02}}{R};$$

$$\text{pertanto: } R = M\omega \frac{i_{02}}{i_{01}} = 4.9 \text{ k}\Omega.$$

[27] La forza elettromotrice indotta nella spira vale:

$$\text{f.e.m.} = -M \frac{di}{dt},$$

essendo  $i(t)$  la corrente che circola nel solenoide dovuta alla scarica del condensatore:

$$i(t) = i_0 e^{-t/RC}$$

dove  $i_0 = V_0/R$ . Pertanto:

$$\text{f.e.m.} = \frac{M}{RC} \frac{V_0}{R} e^{-t/RC};$$

e per  $t = t^*$ :

$$f^* = \frac{MV_0}{R^2 C} e^{-t^*/RC} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{f^* R^2 C}{V_0} e^{t^*/RC}.$$



# Capitolo 14

## Ottica

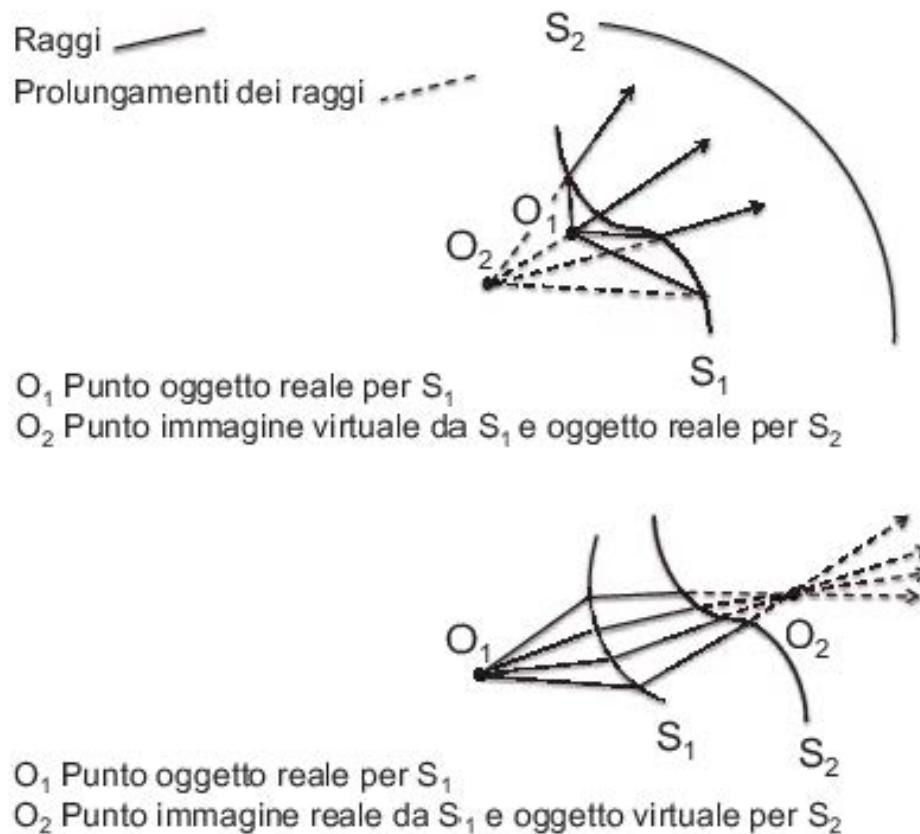
### 14.1 Esercizio guida – Specchi

#### Teoria

Gli specchi si basano sulle leggi della riflessione e costruiscono le immagini di punti oggetto là dove convergono i raggi o i prolungamenti dei raggi passanti per l'oggetto. Le immagini possono, a loro volta, divenire oggetti per sistemi ottici posti a valle, i quali forniscono immagini e così via in un processo che può continuare teoricamente senza limiti. A tale proposito, conviene ricordare che sono oggetti reali quelli da ogni punto dei quali i raggi o i prolungamenti dei raggi divergono e sono oggetti virtuali quelli verso ogni punto dei quali convergono i raggi o i prolungamenti dei raggi (Fig. 14.1, dove la linea curva rappresenta una qualunque superficie di discontinuità ottica). Viceversa, sono immagini reali quelle su cui convergono i raggi o i prolungamenti dei raggi e sono immagini virtuali quelle da cui divergono i prolungamenti dei raggi (Fig. 14.1, con la stessa interpretazione precedente della linea curva). La divergenza dei raggi da un punto non può che riferirsi a un oggetto reale.

L'equazione dei punti coniugati degli specchi sferici (includendo gli specchi piani, per i quali il raggio di curvatura tende a infinito) è

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}$$



**Fig. 14.1.** Rappresentazione schematica del comportamento dei raggi ottici per il caso di oggetti e immagini puntiformi reali e virtuali

essendo  $p$  e  $q$  rispettivamente le distanze misurate sull'asse ottico del punto oggetto e del punto immagine dal vertice dello specchio ed  $r$  il raggio di curvatura, con la convenzione di considerare positivi  $p$  e  $q$  da un medesimo lato e  $r$  positivo se il centro di curvatura cade dal lato di  $p$  e  $q$  positivi. La distanza focale  $f$  è pari a  $r/2$ .

### Argomento

Si considera la combinazione di due specchi, uno piano e uno sferico, e si costruiscono le due immagini primarie di un punto oggetto e si considera poi la sequenza di quelle che vengono via via costruite considerando le precedenti come nuovi punti oggetto.

*Punti immagine  
da considerarsi*

La presenza di due o più sistemi ottici nello spazio dà luogo a una sequenza di immagini, in quanto ogni sistema produce una

*come punti  
oggetto per  
successive  
costruzioni*

immagine primaria che diviene oggetto per l'altro sistema, il quale ne produce un'immagine che diviene oggetto, e così via in una serie infinita di immagini/oggetti. Si valutano le posizioni delle varie immagini/oggetti e si considera se sono reali o virtuali.

*Sull'asse ottico di uno specchio di forma circolare concavo di centro O e raggio R è posto un oggetto puntiforme a distanza  $p > R/2 = f$  dal vertice; un secondo specchio piano è posto in posizione ortogonale all'asse ottico del primo a distanza L dal vertice di quest'ultimo. Si cerca la posizione delle immagini prodotte da tale sistema ottico.*

La posizione del punto oggetto a distanza maggiore del fuoco ( $f = R/2$ ) dal vertice dello specchio concavo assicura la formazione di un'immagine primaria reale fornita da tale specchio a una distanza

$$q = \frac{pf}{p-f}.$$

Tale immagine è reale, in quanto su di essa vanno a convergere i raggi riflessi uscenti dall'oggetto. Essi proseguono dopo la convergenza sull'immagine, quindi divergono e vanno a incidere sullo specchio piano (Fig. 14.2): l'immagine primaria reale di-

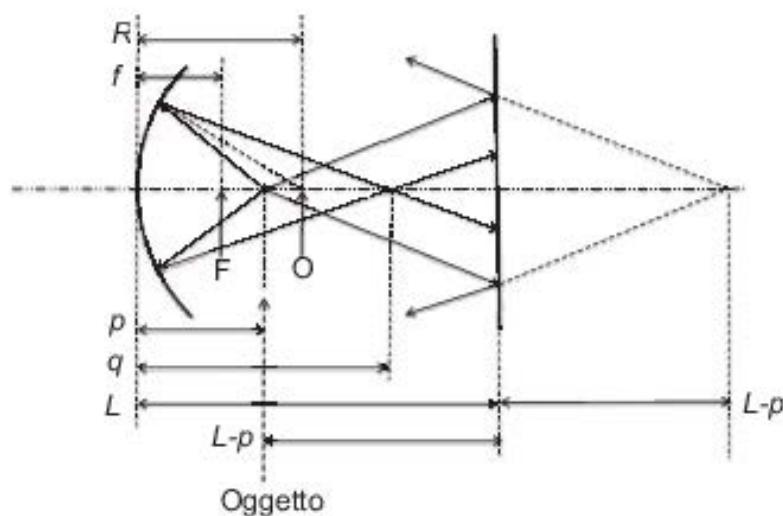


Fig. 14.2

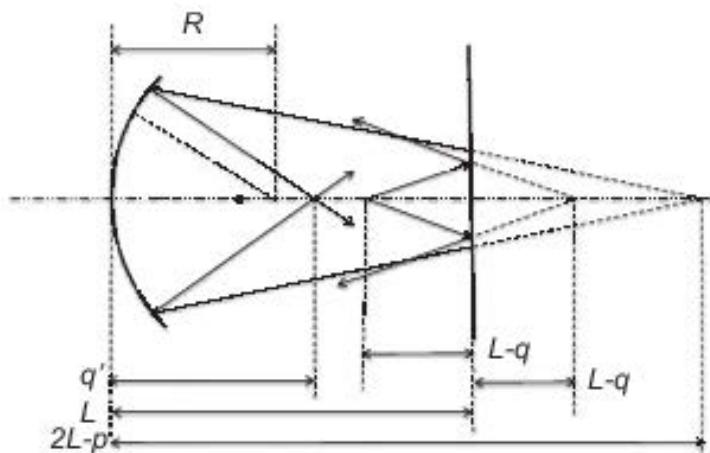


Fig. 14.3

viene così oggetto reale per lo specchio piano, che ne forma un'immagine virtuale a distanza  $L - q$  dietro lo specchio (Fig. 14.3).

Lo specchio piano, a sua volta, fornisce un'immagine primaria dietro di sé a una distanza,  $L - p$ , pari a quella dell'oggetto dallo specchio stesso. Tale immagine è virtuale, in quanto è come se da essa divergessero i raggi riflessi uscenti dall'oggetto (Fig. 14.2).

I raggi divergenti fan sì che l'immagine formata appaia come oggetto reale a distanza  $L + L - p = 2L - p$  per lo specchio concavo su cui vanno successivamente a incidere. Lo specchio concavo ne forma un'ulteriore immagine (Fig. 14.3) a distanza

$$q' = \frac{(2L - p)f}{2L - p - f}.$$

*Si ripete l'esercizio precedente, sostituendo lo specchio concavo con uno convesso, di raggio quindi e distanza focale negativi ( $R < 0$ ,  $f < 0$ ), lasciando inalterate le altre grandezze.*

Per quanto riguarda l'immagine primaria dello specchio sferico, essa si trova a una distanza dal vertice negativa, pari a

$$q = \frac{pf}{p-f} < 0$$

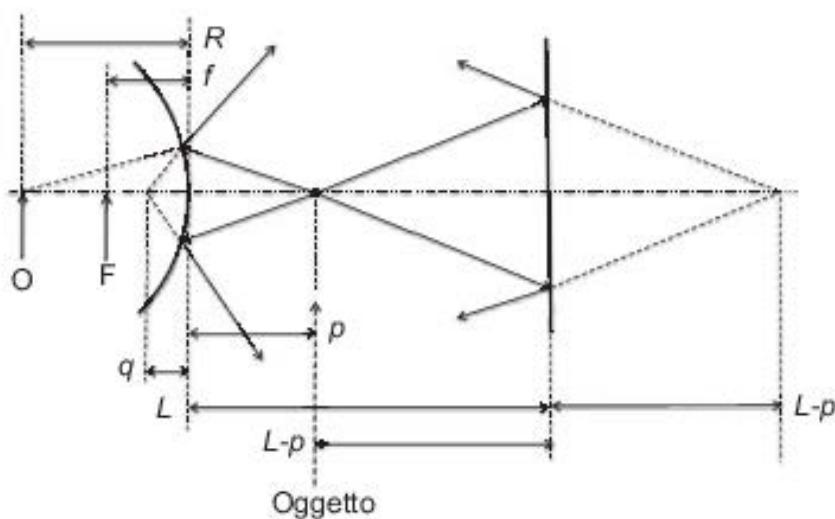


Fig. 14.4

quindi dietro lo specchio (Fig. 14.4), coi raggi da essa divergenti, costituendo in tal modo un'immagine virtuale che diviene oggetto reale per la successiva riflessione dallo specchio piano. Tale nuovo oggetto si trova a distanza  $|q|+L = |pf/(p-f)|+L$  dallo specchio piano, che ne forma un'immagine virtuale dietro di sé ad eguale distanza (Fig. 14.5).

Per quanto riguarda l'immagine primaria dello specchio piano, nulla è mutato rispetto al caso precedente: essa è virtuale e si forma a distanza  $L - p$  dietro allo specchio,

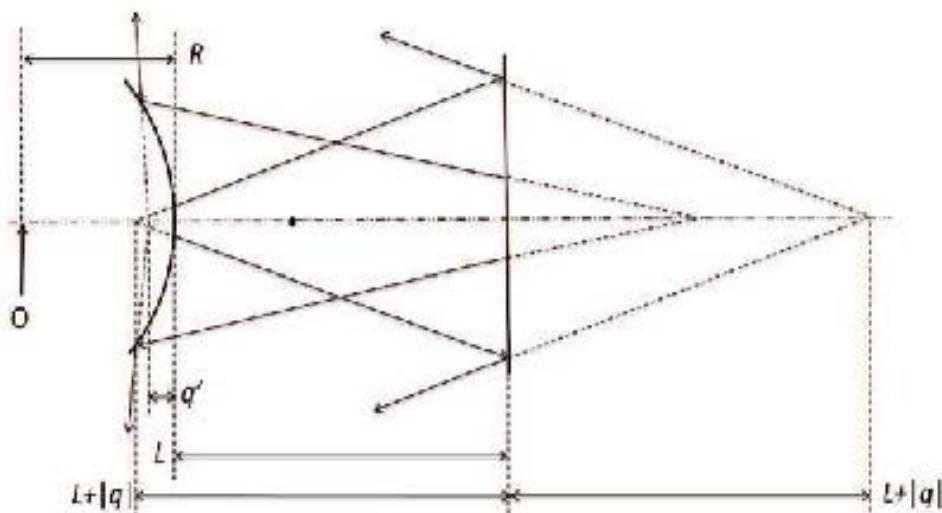


Fig. 14.5

divenendo oggetto reale per la successiva riflessione dallo specchio convesso. Quest'ultimo, pertanto ne forma un'immagine, anch'essa virtuale e dietro lo specchio, in posizione formalmente eguale a quelle già riportate dell'esercizio precedente, ove tuttavia la distanza focale ha valore negativo:

$$q' = \frac{(2L - p)f}{2L - p - f} < 0$$

## 14.2 Esercizio guida – Lenti

### Teoria

Le lenti si basano sulle leggi della rifrazione e, allo stesso modo di quanto fanno gli specchi, costruiscono le immagini di punti oggetto là dove convergono i raggi o i prolungamenti dei raggi passanti per l'oggetto. La sequenza da parte di lenti di successive costruzioni di immagini di oggetti risultanti da immagini di altri elementi ottici avviene allo stesso modo di quanto avviene con gli specchi (v. Esercizio guida sugli specchi). La stessa equazione dei punti coniugati delle lenti così dette sottili deriva dalla sequenza di costruzione del punto immagine prodotto dal primo diottro sferico costituente la lente, il quale diviene punto oggetto per il secondo diottro, che ne costruisce l'immagine finale:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

essendo  $p$  e  $q$  rispettivamente le distanze misurate sull'asse ottico del punto oggetto e del punto immagine dal piano della lente. Nell'ipotesi di lenti sottili, i due diottri costituenti la lente si intendono posti nella stessa posizione sull'asse ottico, trascurando così di fatto lo spessore della lente. Nell'equazione data, si intendono positive le posizioni dei punti oggetto ( $p > 0$ ) da un lato della lente e positive quelle delle immagini ( $q > 0$ ) dal lato opposto; la distanza focale è positiva ( $f > 0$ ) se la posizione dell'immagine di un punto  $p \rightarrow \infty$  è positiva.

### Argomento

Si considera la posizione di una lente inserita tra due piani paralleli, da definire sulla

base di condizioni specifiche imposte a oggetti e immagini posizionate sui due piani. Si considerano le condizioni per la costruzione delle immagini e, successivamente, le intercette dei raggi sui piani nel caso che le immagini non si formino sui piani.

*Equazione dei punti coniugati con vincolo sulle distanze  $p$  e  $q$*

Fissata la distanza tra piano oggetto e piano immagine, i singoli valori delle due distanze debbono soddisfare vincoli, la cui compatibilità coi dati del problema viene considerata e discussa. La discostanza dalle condizioni dell'esatta costruzione di immagini sui piani comporta una intercetta dei raggi di forma circolare, i cui raggi vengono calcolati.

*Una lente sottile avente distanza focale  $f$  viene interposta tra due piani paralleli posti tra loro alla distanza  $L$ . Si determina la posizione relativa del centro  $O$  della lente rispetto ai due piani affinché questi siano piani coniugati per la lente.*

Nel caso che il piano della lente sia parallelo ai due piani distanti  $L$ , il vincolo imposto dal problema fissa in  $L$  la somma delle due distanze del piano oggetto e del piano immagine dal centro ottico:  $p + q = L$ .

Ricavando una delle due distanze in funzione dell'altra dall'equazione dei punti coniugati, si ha

$$p + \frac{pf}{p-f} = L$$

da cui l'equazione di secondo grado in  $p$ :

$$p^2 - pL + fL = 0$$

con soluzione

$$p = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right)$$

cui corrisponde il valore di  $q$

$$q = \frac{L}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right).$$

La condizione imposta dal problema è soddisfatta solo se  $L > 4f$  per  $f > 0$ , cioè

per lenti convergenti; nel caso limite di  $L = 4f$ , il piano della lente si trova sul punto medio della distanza  $L$  tra i due piani. Per lenti divergenti, essa non può mai essere soddisfatta, dovendo essere

$$p = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right) < L \quad \text{e} \quad q = \frac{L}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right) < L.$$

Questo richiede che sia  $-4f/L < 0$  per una lente per la quale  $f < 0$ .

*Nelle condizioni geometriche del problema precedente, si considera il caso di una lente sottile convergente avente distanza focale  $f$  e raggio  $\rho$ . Si sposta parallelamente, quindi, il secondo piano di un tratto  $\Delta L$  e si cerca quale sia il raggio  $R$  del cerchio che si forma sul secondo piano per intersezione dei raggi convergenti verso l'immagine di un punto oggetto posto sull'asse ottico sul primo piano, in funzione del raggio  $\rho$  della lente.*

L'immagine reale che si forma sul secondo piano quando questo è posto a distanza  $L$  dal primo è costruita con un fascio di raggi divergenti dal punto oggetto  $O$  e incidenti tutti sulla lente, i più esterni di essi formando un angolo  $\alpha = \arctan \rho/p$  con l'asse ottico.

I raggi di questo fascio vengono tutti fatti convergere verso il punto immagine e, quando il secondo piano viene avvicinato al primo, essi lo intercettano secondo una sezione circolare, la circonferenza del cui bordo è l'intercetta dei raggi più esterni uscenti dall'oggetto e deviati dalla lente. Essi convergono verso il punto immagine formando un angolo  $\beta = \arctan \rho/q$  con l'asse ottico. Si ricorda che la condizione di costruzione dell'immagine sul secondo piano è duplice, per scambio di  $p$  e  $q$ . Pertanto, nel caso  $p < q$  (Fig. 14.6a) con

$$p = \frac{L}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right) \quad \text{e} \quad q = \frac{L}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4f}{L}} \right)$$

osservando che  $R/\Delta L = \rho/q$ , si ha per il raggio della sezione di intersezione il

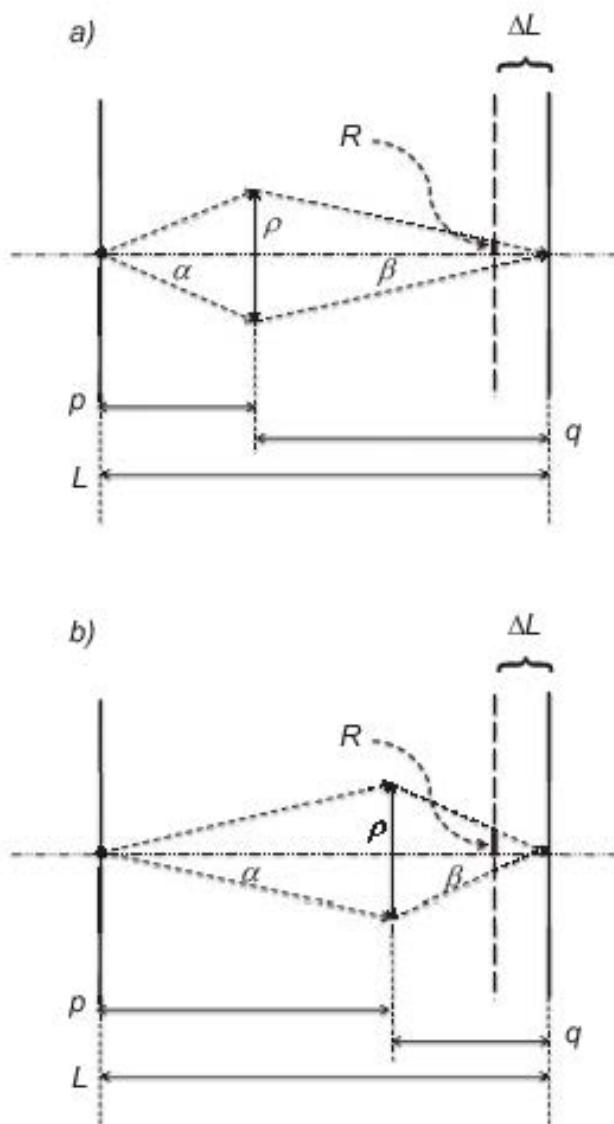


Fig. 14.6

valore

$$R = \frac{2\rho}{1 + \sqrt{1 - \frac{4f}{L}}} \frac{\Delta L}{L}.$$

Nel caso  $p > q$  (Fig. 14.6b) con inversione dei valori precedentemente riportati, si ha

$$R = \frac{2\rho}{1 - \sqrt{1 - \frac{4f}{L}}} \frac{\Delta L}{L}.$$

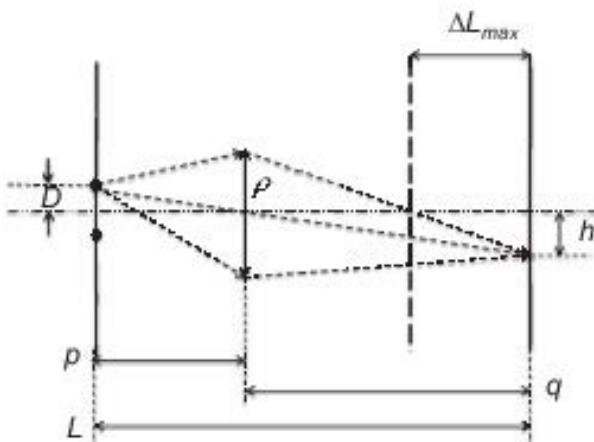


Fig. 14.7

Nelle condizioni geometriche del problema precedente, si pongono due punti oggetto sul primo piano, simmetricamente disposti rispetto all'asse ottico, ciascuno a distanza  $D$  da questo. Si determina il valore massimo di  $\Delta L$  per il quale i due cerchi intersezione sul secondo piano non si sovrappongono.

La condizione richiesta è quella per cui i due cerchi intersezione dei raggi rifratti dalla lente sono tra loro tangentì, ovvero che ciascuno abbia un punto della circonferenza limite sull'asse ottico (Fig. 14.7). Per similitudini successive di triangoli opposti al vertice, si ha

$$h = \frac{D}{p}q \quad \text{e} \quad \frac{h}{\Delta L_{\max}} = \frac{\rho}{q - \Delta L_{\max}}$$

da cui

$$\Delta L_{\max} = \frac{D \frac{L}{2} (1 + K)^2}{\rho(1 - K) + D(1 + K)}$$

dove si è posto  $K = \sqrt{1 - \frac{4f}{L}}$ .

### 14.3 Esercizio guida – Diffrazione

#### Teoria

Definizioni preliminari alla descrizione dei fenomeni di diffrazione sono quelle di  
a) fronte d'onda, inteso come superficie continua che unisce tutti i punti in cui a un

certo istante una perturbazione ondosa ha la medesima fase e di  $b)$  raggio, inteso come linea che in ogni punto è ortogonale ai fronti d'onda. Il principio di Huygens-Fresnel, basato sulla soluzione dell'equazione di propagazione delle onde, permette di conoscere la conformazione di un fronte d'onda di una perturbazione in un qualunque istante temporale, purché ne sia nota la conformazione in un altro qualunque istante e la velocità di propagazione dell'onda in ogni punto dello spazio, e del tempo, se le condizioni della propagazione non sono stazionarie.

L'applicazione di questo principio mostra che un fronte d'onda limitato si apre sui bordi e tende ad allargarsi in un mezzo isotropo omogeneo. Spesso si considera la conformazione di un fronte d'onda, come essa si produce a distanza infinita dalla zona dove viene assegnata. Così, si dà la conformazione del campo di radiazione a distanza infinita, per un fronte d'onda limitato in una sola dimensione a una larghezza  $2D$  (in ottica, diffrazione da una fenditura rettangolare):

$$a(\vartheta, t) = \bar{A} D e^{i(\omega t - \frac{kL}{\sin \vartheta})} \frac{\sin(kD \sin \vartheta)}{kD \sin \vartheta} \quad (14.1)$$

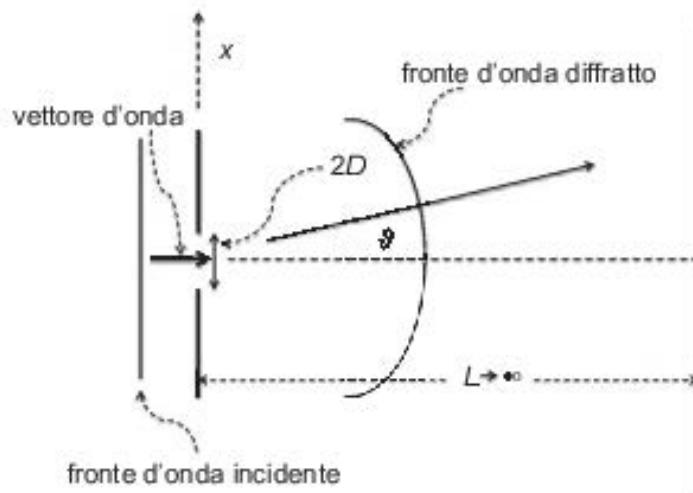
dove si è usata la notazione complessa (per il valore fisico si considera solo la parte reale dell'espressione) per il campo di radiazione, che incide con ampiezza  $\bar{A}$  su una piano di coordinata  $x$  (sulla seconda coordinata  $y$  non ci sono variazioni); il campo su un piano parallelo posto a grande distanza  $L$  è dato in funzione dell'angolo  $\vartheta$  tra la direzione di incidenza e quella di osservazione.  $\omega$  e  $k$  sono rispettivamente la pulsazione e il numero d'onde (modulo del vettore d'onda) della radiazione (Fig. 14.8).

### Argomento

Si considera la diffrazione di un'onda acustica che si propaga sulla superficie dell'acqua e diffrange al passaggio attraverso un varco presente in una barriera. Si determina la velocità di propagazione delle onde da osservazioni sulla distribuzione dei minimi e dei massimi della radiazione diffratta a grande distanza dalla barriera.

*Diffrazione da  
fenditura*

Lo spettro angolare della diffrazione di un'onda dopo un ostacolo è la distribuzione del campo secondo le varie direzioni angulo-

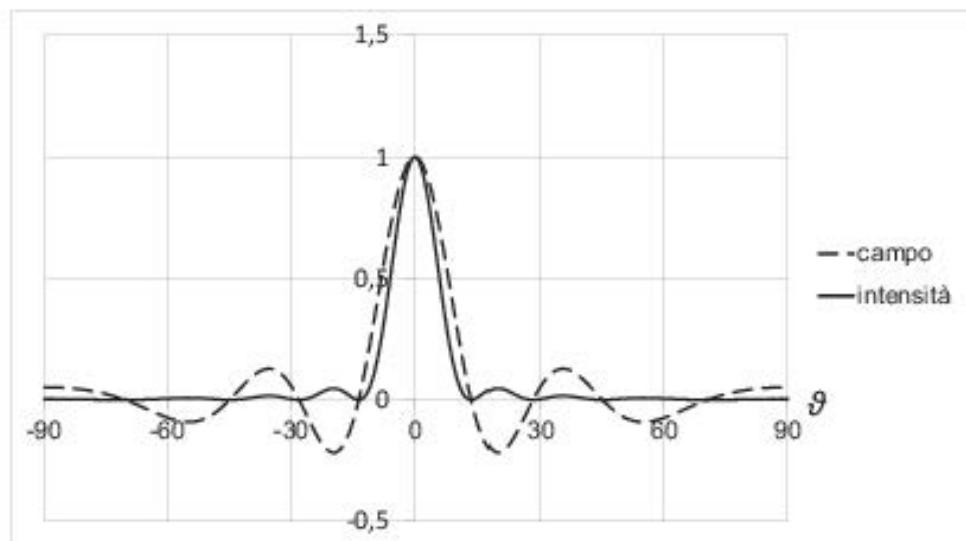


**Fig. 14.8.** Schema della diffrazione di un fronte d'onda piano da una fenditura monodimensionale di larghezza  $2D$

rettangolare

lari, così come si produce per effetto della propagazione libera dopo l'interazione con l'ostacolo. Il campo a grande distanza da una fenditura è un esempio di spettro di diffrazione. La 'scala' dell'allargamento dello spettro dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione, o dalla grandezza reciproca, il numero d'onde  $K = 2\pi/\lambda$ . Dalle direzioni di massimo o di minimo del campo di diffrazione si ricava la lunghezza d'onda della radiazione o, conoscendo la frequenza, la velocità di propagazione.

*Due moli di un porto sono allineati in mare, lasciando un braccio d'acqua di larghezza  $D$  tra di essi, su una medesima linea rettilinea posta parallelamente a una distanza  $L \gg D$  dalla banchina di terraferma. Una sequenza di onde provenienti dal largo incide ortogonalmente sui moli ed entra nel porto attraverso il varco, raggiungendo la banchina, parallela ai moli, dove si notano due massimi livelli delle onde, il primo alla sinistra e l'altro alla destra del massimo centrale, distanziati di un tratto  $d$  tra loro. Si misura la frequenza  $f$  con cui incidono le onde nei vari punti della banchina e si determina la velocità di propagazione delle onde di superficie sull'acqua.*



**Fig. 14.9.** Andamento dell'ampiezza e dell'intensità del campo di diffrazione prodotto da una fenditura piana in funzione dell'angolo di diffrazione  $\vartheta$

Una tipica rappresentazione della curva di diffrazione data dalla Eq. (14.1) è riportata in Fig. 14.9, per il caso di onde sulla superficie dell'acqua di frequenza 0.64 Hz propagantesi con una velocità di 3 m/s, diffratte da un varco tra i moli di  $2D = 10$  m di apertura. Sono riportate due curve in funzione dell'angolo di diffrazione  $\vartheta$ : una per il campo (tratteggiata), come dato dalla Eq. (14.1), l'altra (continua) per l'intensità, quadrato della precedente. Si nota che gli zeri di entrambe le funzioni si hanno per

$$\sin \vartheta = n \frac{\lambda}{2D}$$

con  $n$  intero, a eccezione di  $n = 0$  per cui si ha il primo massimo.

Per il caso in esame, la distanza tra i due massimi corrisponde alle due direzioni angolari per le quali si ha  $n = -1$  e  $n = +1$ , cioè per i due valori dell'angolo

$$\vartheta_{-1} = \arcsin\left(-\frac{\lambda}{2D}\right) \quad \text{e} \quad \vartheta_{+1} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2D}\right).$$

Sulla banchina, a distanza  $L$  dalla linea dei moli, queste due direzioni corrispondono

ciascuna a una distanza spaziale dalla posizione centrale pari a  $d/2$ . Pertanto, si ha

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2}}.$$

La velocità delle onde sulla superficie dell'acqua vale, quindi,

$$v = \frac{\lambda}{f} = \frac{dD}{f\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2}}.$$

*Quale parziale problema inverso, nelle stesse condizioni geometriche già descritte, si nota che l'oscillazione di una boa galleggiante nella posizione della banchina a distanza  $d$  dal massimo centrale è pari a una frazione  $\alpha$  dell'oscillazione di un'identica boa posizionata in corrispondenza del massimo centrale. Si cerca la frequenza di oscillazione (in questo caso si suppone che sia nota la velocità  $v$  di propagazione delle onde).*

Nel problema si sottintende che l'oscillazione delle boe sia di fatto proporzionale all'oscillazione dell'onda nei punti dove sono posizionate. Con questa ipotesi, il problema si riduce a determinare il valore del numero d'onde  $k_\alpha$  nella direzione  $\vartheta_\alpha$  lungo la quale il campo diffratto dato dalla Eq. (14.1) è pari al rapporto  $\alpha$  su indicato rispetto alla direzione  $\vartheta = 0$  del massimo centrale:

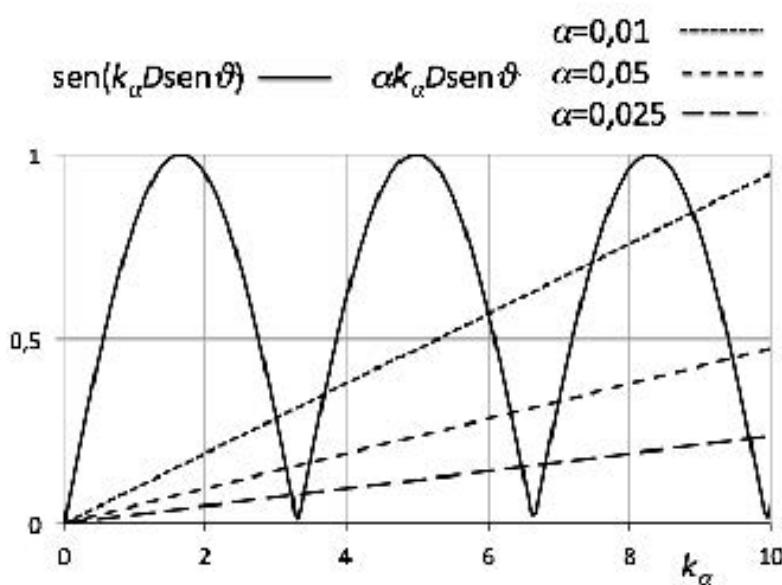
$$A(\vartheta_\alpha) = \bar{A}D \frac{\sin(k_\alpha D \sin \vartheta_\alpha)}{k_\alpha D \sin \vartheta_\alpha} = \alpha A(0) = \alpha \bar{A}D$$

da cui

$$\alpha k_\alpha D \sin \vartheta_\alpha = \sin(k_\alpha D \sin \vartheta_\alpha) \quad (14.2)$$

dove per  $\vartheta_\alpha$  si inserisca il valore deducibile dalla geometria descritta:

$$\vartheta_\alpha = \arctan\left(\frac{d}{L}\right).$$



**Fig. 14.10.** Metodo grafico per la determinazione delle soluzioni dell'Eq. (14.2) per tre distinti valori di  $\alpha$

L'equazione (14.2) non è risolubile se non per via numerica: da essa si ricaverebbe  $k_\alpha$  e quindi la frequenza incognita  $f = (k_x v)/2\pi$ . Per via grafica, si riporta nella Fig. 14.10 la soluzione per alcuni valori di  $\alpha$  (0.025, 0.05 e 0.1). In essa sono riportate le due curve corrispondenti al primo e al secondo membro dell'Eq. (14.2) in funzione della variabile  $k_\alpha$  per i valori  $D = 10$  m,  $\vartheta_\alpha = 0.095$ , (avendo scelto per es.  $d = 10$  m,  $L = 100$  m). I punti intersezione corrispondono alle soluzioni  $k_\alpha$  dell'Eq. (14.2), dalle quali si ricavano immediatamente i valori delle frequenze, una volta fornita la velocità  $v$  delle onde. Si nota che, per ogni valore di  $\alpha$  c'è più di una soluzione per  $k_\alpha$  e quindi per la frequenza.

## 14.4 Esercizio guida – Interferenza

### Teoria

Definizioni preliminari alla descrizione dei fenomeni di interferenza, come di quelli della diffrazione (al testo del cui esercizio qui si rimanda), sono quelle di fronte d'onda e di raggio, il cui comportamento si ottiene con l'applicazione del principio

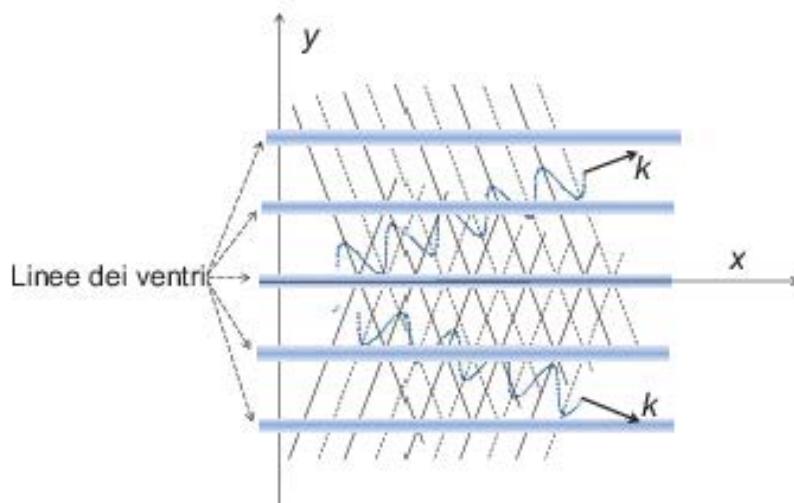
di Huygens-Fresnel, che permette di conoscere l'evoluzione spazio/temporale di un fronte d'onda di una perturbazione, in condizioni stazionarie della propagazione. Alla base del fenomeno dell'interferenza è comunque l'ipotesi che, nel caso di presenza di più fronti d'onda in contemporanea in un medesimo punto, il campo risultante è dato dalla somma dei singoli campi presenti, ciascuno computato con la corretta fase di riferimento rispetto agli altri. Così, facendo uso della notazione complessa (per il valore fisico si considera solo la parte reale dell'espressione) per il campo di radiazione, due fronti d'onda piani che si propagano in direzioni diverse con i due vettori d'onda giacenti sul piano  $xy$  e simmetrici rispetto all'asse  $x$ , per es., danno luogo nello spazio al campo risultante

$$a(x, y, t) = A \left[ e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + e^{i(\omega t - k_x x + k_y y)} \right] = 2A e^{i(\omega t - k_x x)} \cos(k_y y) \quad (14.3)$$

con le consuete notazioni per le ampiezze  $A$  delle due onde componenti (qui considerate eguali), per i numeri d'onda  $k$  (eguali), per le pulsazioni  $\omega$  (eguali). Il campo risultante ha linee nodali (superfici, in tre dimensioni) dove ha costantemente valore nullo e ventrali (v. figura), dove l'ampiezza ha valore massimo.

Caso particolare di interferenza è dato da un'onda stazionaria, ottenibile dall'Eq. (14.3), quando le due onde componenti sono dirette in verso opposto, quindi con la sola componente  $k_y$  dei vettori d'onda diversa da zero:

$$a(x, y, t) = 2A e^{i\omega t} \cos(k_y y).$$



### Argomento

Si considerano due lunghe fenditure sottili parallele, distanziate di un intervallo  $d$ , intagliate su uno schermo opaco posizionato sul piano focale di una lente convergente di focale  $f$  e un secondo schermo opaco parallelo al primo posto dall'altra parte rispetto al piano della lente. Il primo schermo viene illuminato da un fascio di luce coerente collineare che vi incide con direzione ortogonale. Si studia il campo di interferenza della radiazione a valle della lente.

*Interferenza tra fasci piani da iniziali fronti d'onda sferici*

La lunghezza delle due fenditure permette di ridurre il problema a una fenomenologia unicamente bidimensionale sul piano ortogonale alla direzione della lunghezza delle due fenditure. In tal modo, le fenditure, molto sottili rispetto alle lunghezze caratterizzanti il sistema, possono pensarsi come sorgenti puntiformi poste sul piano focale di una lente convergente e i fronti d'onda circolari da esse emessi come fossero superfici piane dopo il passaggio attraverso la lente. In tal modo il problema diviene quello descritto nella Teoria.

*Nella condizione geometrica descritta nell'Argomento si cerca la distanza  $h$  tra due minimi (o massimi) consecutivi dell'intensità luminosa, quale viene registrata sullo schermo posto dopo la lente in funzione della lunghezza d'onda della radiazione.*

Dopo la lente, ciascuna delle due strutture di fronti d'onda emessi dalle sorgenti puntiformi (fenditure) si muta in una serie di fronti d'onda piani emergenti, rispetto all'asse della lente, con un angolo di tangente pari alla distanza di ciascuna sorgente dall'asse divisa per la distanza focale (Fig. 14.11). Se le due sorgenti sono disposte simmetricamente rispetto all'asse ottico, tale angolo è il medesimo per tutte e due le serie dei fronti d'onda e pari a

$$\vartheta = \arctan \left( \frac{d}{2f} \right).$$

Ricordando che il vettore d'onda  $k$  è legato alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della radiazione

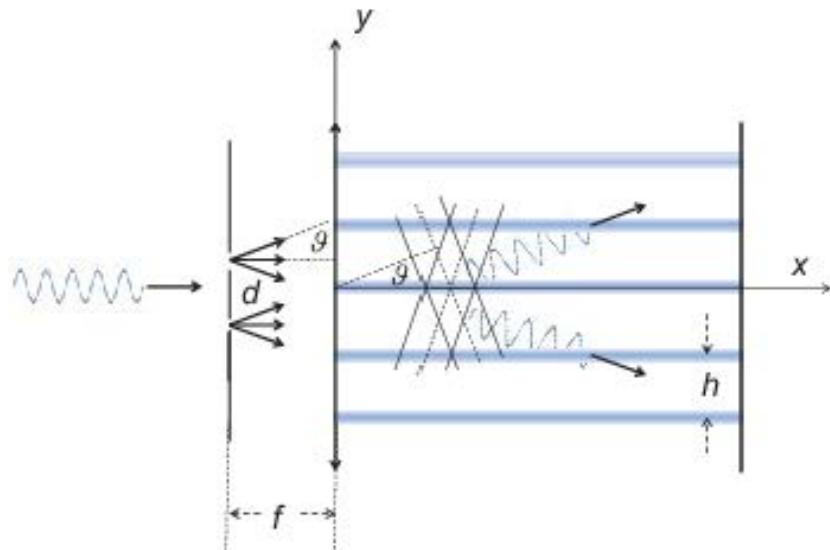


Fig. 14.11

dalla relazione

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

per le componenti  $k_y$  dei vettori d'onda delle due serie di fronti d'onda piani si ha

$$k_y = k \sin \vartheta = \frac{\pi d}{\lambda f \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2f}\right)^2}}.$$

Il passo con cui si alternano lungo la direzione  $y$  i piani di massima intensità luminosa e, quindi, la distanza  $h$  tra due massimi consecutivi sullo schermo, si ricava dall'Eq. (14.3) ed è pari a

$$h = \frac{2\pi}{k_y} = \frac{2\lambda f}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2f}\right)^2}.$$

## 14.5 Domande di verifica

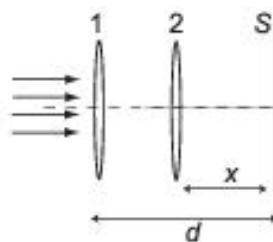
- Dimostrare che un raggio di luce che incide su una lastra trasparente a facce piane e parallele esce con una direzione parallela a quella d'ingresso.
- Ricavare l'espressione dell'ingrandimento di uno specchio sferico.
- Illustrare cosa si intende per raggio parassiale e perché si fa l'ipotesi di raggi parassiali nel ricavare l'espressione dei punti coniugati di una lente.
- Specificare in che cosa consiste l'approssimazione analitica che viene fatta nella derivazione dell'equazione dei punti coniugati di una lente, quando la si considera 'sottile'.
- Costruire in grafico l'immagine di un punto oggetto formata da due specchi piani disposti ortogonalmente l'uno rispetto all'altro.
- Enunciare e illustrare il principio di Huygens-Fresnel.
- Utilizzando il principio di Huygens-Fresnel, ricavare la legge di rifrazione per un raggio incidente su una superficie piana che separa due mezzi aventi indici di rifrazione  $n_1$  ed  $n_2$ .
- Dimostrare perché una lente divergente non può formare un'immagine reale di un oggetto reale.
- Specificare se uno specchietto da dentista, posto nelle immediate vicinanze dell'oggetto e formante di questo un'immagine dritta, virtuale e ingrandita, sia piano, concavo o convesso e se ne motivi la risposta.
- Tracciare graficamente la formazione dell'immagine di un oggetto posto nel fuoco di una sottile lente divergente; valutare se l'immagine è dritta o invertita e il suo ingrandimento.
- Ricavare l'espressione dell'ingrandimento di una lente convergente sottile per un oggetto posto a distanza  $p$  dal piano della lente e la cui virtuale immagine si formi a distanza  $q$ .
- Illustrare il fenomeno della diffrazione in ottica con un esempio, basandosi sulla legge di Huygens-Fresnel.

- Descrivere il fenomeno dell'aberrazione cromatica.

## 14.6 Esercizi

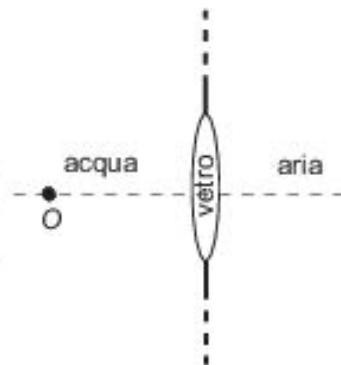
- [1] Una lente piano-convessa convergente di focale  $f = 15 \text{ cm}$  è appoggiata con la faccia piana in aderenza su uno specchio piano orizzontale. Si chiede a quale altezza  $h$  al di sopra del sistema lente/specchio si formerà l'immagine di un oggetto puntiforme situato  $L = 25 \text{ cm}$  sull'asse della lente al di sopra di essa.
- [2] Uno specchio piano è appoggiato sul fondo di una piscina,  $L = 1.5 \text{ m}$  sotto il pelo libero dell'acqua. Si domanda a quale profondità  $H$  sotto il livello del pelo libero si vedrà, da una postazione in aria al di sopra dell'acqua, l'immagine di un piccolo pesce posto  $l = 40 \text{ cm}$  al di sopra del fondo dove giace lo specchio (indice di rifrazione dell'acqua  $n = 1.3$ ).
- [3] Uno specchio piano quadrato è appeso, col lato inferiore parallelo al pavimento a un'altezza  $H = 0.85 \text{ m}$  da questo, sulla parete di una stanza e sulla parete di fronte, parallela a questa a una distanza  $D$ , c'è una macchia colorata puntiforme a un'altezza  $h$  dal pavimento. Si chiede quale debba essere il valore minimo di  $h$  perché l'immagine della macchia fornita dallo specchio sia visibile da un punto sul pavimento posto a eguale distanza dalle due pareti.
- [4] Un'asta di lunghezza  $L$ , inclinata di  $\vartheta = 45^\circ$  rispetto alla verticale è posta in una vasca contenente dell'acqua, fuoriuscendo per una metà della sua lunghezza. Conoscendo l'indice di rifrazione dell'acqua, pari a  $n = 1.3$ , si determini l'angolo  $\Delta\vartheta$  formato tra la direzione dell'asta al di fuori dell'acqua e quella dell'immagine dell'asta fornita dall'acqua.
- [5] Due sottili lenti, con i raggi di curvatura  $R$  uguali in modulo per tutte le loro superfici sferiche, una biconvessa convergente con indice di rifrazione  $n_1$  l'altra biconcava divergente con indice di rifrazione  $n_2$ , sono incollate l'una all'altra e immerse in acqua (indice di rifrazione  $n_0$ ). Si ricavi l'espressione della distanza focale del sistema.
- [6] Provare che la dimensione di un'immagine è sempre inferiore a quella di un oggetto per un oggetto reale posto di fronte a uno specchio convesso.

- [7] Un oggetto alto  $h = 8 \text{ mm}$  è posizionato a  $p = 125 \text{ mm}$  di fronte a uno specchio concavo con lunghezza focale  $f = 200 \text{ mm}$ . Trovare la posizione, la dimensione e la caratteristica dell'immagine.
- [8] Usando l'equazione delle lenti sottili, dimostrare che se una lente convessa produce un'immagine di dimensioni pari all'oggetto, allora le distanze sia dell'immagine che dell'oggetto sono pari a due volte la distanza focale e le loro posizioni sono dette "fuochi coniugati".
- [9] Due sottili lame a facce piane e parallele trasparenti alla luce, sono disposte in aria poggiando l'una sull'altra tramite le loro basi maggiori. Un raggio di luce incide sulla superficie maggiore della lamina 1 (avente indice di rifrazione  $n_1$ ) con un angolo di incidenza,  $\vartheta_i$ , misurato rispetto alla normale alla superficie. Si determini l'angolo di uscita,  $\vartheta_u$ , del raggio dalla superficie maggiore della lamina 2 (avente indice di rifrazione  $n_2$ ), sempre supposto misurato dalla normale della superficie.
- [10] Due sottili lenti di lunghezza focale  $f_1 = 13 \text{ cm}$  e  $f_2 = -20 \text{ cm}$  sono messe a contatto tra loro (i loro centri sono coincidenti). Si ricavi la lunghezza focale del sistema ottico formato dalla combinazione delle due lenti e determinare se esso è convergente o divergente.
- [11] Due sottili lenti identiche di focale  $f = 10 \text{ cm}$ , sono disposte sullo stesso asse ottico con la prima a una distanza fissa  $d = 60 \text{ cm}$  da uno schermo  $S$ , mentre la seconda ha da quest'ultimo una distanza variabile  $x$ , con  $x < d$ . Per quali valori di  $x$  un fascetto di luce incidente sulla prima lente parallelamente all'asse ottico, sarà focalizzato sullo schermo  $S$ ?
- [12] Determinare la lunghezza focale di una sottile lente divergente affinché di una formica posta a  $100 \text{ cm}$  da essa formi un'immagine distante  $50 \text{ cm}$ . Valutare se l'immagine è reale o virtuale e l'ingrandimento lineare.
- [13] Due identiche lenti sottili convergenti di focale  $f = 10 \text{ cm}$  hanno l'asse ottico comune e sono distanti tra loro  $d = 15 \text{ cm}$ . Determinare la coordinate sull'asse

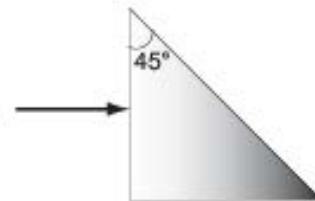


ottico dell'immagine di un oggetto posto a 15 cm da una delle due lenti dalla parte esterna rispetto alla loro congiungente.

- [14] Una sottile lente di vetro (indice di rifrazione  $n_v = 1.5$ ) separa una vasca piena d'acqua (indice di rifrazione  $n_{acq.} = 1.33$ ) dall'aria esterna; i raggi di curvatura della lente sono  $R_1 = 2$  cm e  $R_2 = 20$  cm. Se un oggetto  $O$  si trova in acqua a distanza di 30 cm dal piano della lente, a quale distanza dal piano della lente si formerà l'immagine? Determinare, inoltre, se l'immagine è reale o virtuale.



- [15] Un raggio di luce incide normalmente alla faccia del prisma di vetro mostrato in figura; si determini il percorso del raggio uscente dal prisma nel caso in cui il prisma sia in aria oppure in acqua. ( $n_{vetro} = 1.50$ ,  $n_{aria} = 1$ ,  $n_{acqua} = 1.33$ )



- [16] In un esperimento con la doppia fenditura di Young, le due fenditure distano  $d = 3$  mm e la radiazione incidente ha due componenti di lunghezza d'onda  $\lambda_1 = 600$  nm e  $\lambda_2 = 900$  nm. Uno schermo è posto a distanza  $L = 2.5$  m. Si determini la distanza dal punto centrale sullo schermo (dove si ha un massimo comune) in cui vi è la prima sovrapposizione dei massimi delle due figure di interferenza.

- [17] Una lampadina,  $L$ , da considerarsi alla stregua di una sorgente luminosa puntiforme, si trova tra due specchi posti a  $90^\circ$  tra loro. Si determinino graficamente – utilizzando, cioè, i raggi ottici – le immagini di  $L$ .



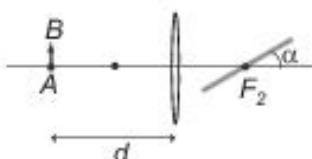
- [18] Un sottile fascio di luce blu ( $\lambda = 420$  nm) incide su una piccola apertura di dimensione trasversale  $d$ . Dopo il passaggio il fascio diverge di 1 grado rispetto alla direzione di incidenza. Si determini  $d$ .

- [19] Un reticolo di diffrazione di 5000 linee per centimetro analizza lo spettro di una lampada a mercurio. La linea verde dello spettro del mercurio ha una

lunghezza di 5461 Å. Qual è la separazione angolare tra la linea verde al primo ordine e quella al secondo ordine?

- [20] Una moneta giace sul fondo di una vasca alta  $h = 1\text{ m}$  piena di acqua. Per un osservatore che, fuori dalla vasca, guardasse la moneta sotto un angolo di  $45^\circ$  rispetto alla normale alla superficie dell'acqua, a che distanza dal fondo della vasca apparirebbe l'immagine? (Indice di rifrazione dell'acqua,  $n_A = 1.33$ )

- [21] Un piccolo oggetto  $AB$  è posto a una distanza  $d$  da una lente convergente di focale  $f = d/2$ . Nel secondo punto focale della lente è posto uno specchio piano che intercetta l'asse ottico ed è inclinato rispetto a esso di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  cosicché i raggi riflessi dallo specchio non ripassano attraverso la lente.



Si determini se l'immagine dell'oggetto formata da questo sistema ottico è reale o virtuale, e si ricavi la distanza dallo specchio che ha l'immagine del punto  $A$ .

## 14.7 Soluzioni degli esercizi

- [1] Costruendo in successione le immagini (utilizzando la notazione  $p$  per le distanze degli oggetti e  $q$  delle immagini), si troverà prima la distanza del punto al di sotto del sistema in cui la lente forma l'immagine del punto sorgente, posto in  $p = L$ :

$$q = \frac{Lf}{L-f}.$$

Questa immagine, che si forma dietro lo specchio a distanza  $q$ , diviene oggetto per lo specchio ( $p_{\text{specchio}} = -q$ ) che ne formerà una nuova immagine a una distanza  $q'$  al di sopra del sistema. La lente, infine, formerà di tale punto posto in  $p' = -q$ , un'immagine a distanza  $q'$  pari a

$$q' = \frac{-\frac{Lf}{L-f}f}{-\frac{Lf}{L-f}-f} = 10.7\text{ cm}$$

che si ottiene riutilizzando la formula di sopra con  $p' = -q$  in luogo di  $L$ .

- [2] L'immagine che lo specchio fornisce del piccolo pesce posto al di sopra dello specchio si formerà in una posizione pari a  $-l$  rispetto allo specchio (cioè a distanza  $l$  sotto il fondo della piscina), quindi a distanza  $H = L + l$  sotto il pelo libero dell'acqua. Di questa, divenuta oggetto reale per il diottro piano acqua/aria, l'immagine si formerà in posizione  $q$  data da

$$\frac{n}{H} + \frac{1}{q} = 0,$$

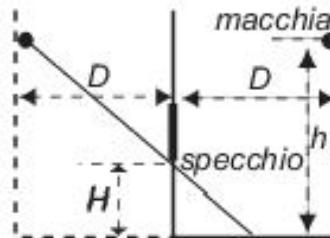
cioè a distanza  $q$  sotto la superficie dell'acqua, pari a

$$q = -\frac{L + l}{n} = 1.46 \text{ m.}$$

- [3] Dallo schema di figura si ricava

$$\frac{\frac{h_{min}}{D}}{D + \frac{D}{2}} = \frac{\frac{H}{D}}{\frac{D}{2}}$$

da cui successivamente



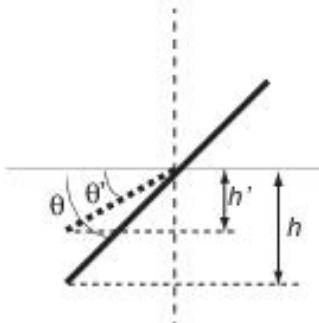
$$h_{min} = 3H = 2.55 \text{ m.}$$

- [4] Dall'equazione del diottro sferico

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

si ricava per  $R \rightarrow \infty$  e per  $n_2 = 1$ ,  $q = -p/n$ .

Per la distanza  $h'$  dalla superficie liquida del punto immagine dell'estremo inferiore dell'asta immersa nell'acqua, a distanza  $h = L/2 \sin \vartheta$ , si ricava  $h' = L/2n \sin \vartheta$ . L'angolo formato dall'immagine dell'asta nell'acqua rispetto alla superficie sarà quindi



$$\vartheta' = \arctan \frac{\frac{L}{2n} \sin \vartheta}{\frac{L}{2} \cos \vartheta} = \arctan \frac{\tan \vartheta}{n} = \frac{\vartheta}{n}.$$

Pertanto:

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta' = \vartheta \left(1 - \frac{1}{n}\right) \simeq 34.5^\circ.$$

[5] Considerando la sequenza di diottri si scriverà:

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{p} + \frac{n_1}{q'} &= \frac{n_1 - n_0}{R} \\ \frac{n_1}{-q'} + \frac{n_2}{q''} &= \frac{n_2 - n_1}{-R} \\ \frac{n_2}{-q''} - \frac{n_0}{q} &= \frac{n_0 - n_2}{R}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$\frac{n_0}{p} + \frac{n_0}{q} = \frac{n_1 - n_0}{R} - \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_0 - n_2}{R} = \frac{2}{R}(n_1 - n_2).$$

Il fuoco si ottiene per  $p \rightarrow \infty$ :

$$f = \frac{n_0}{2(n_1 - n_2)} R.$$

[6] Dal momento che lo specchio è convesso si può, per convenzione, considerare la distanza focale negativa cioè  $f = -|f|$ , quindi l'equazione dello specchio diventa:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -\frac{1}{|f|}.$$

Poichè  $p > 0$  ne consegue che deve essere  $q < 0$ , pertanto:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{|q|} - \frac{1}{|f|} \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{|q|} \quad \text{o} \quad p > |q|;$$

per cui l'ingrandimento sarà  $|q/p| < 1$ .

[7] Poiché  $p < f$  l'immagine è virtuale:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = -333 \text{ mm}$$

quindi poiché

$$\frac{h_{\text{imm}}}{h} = \frac{-q}{p},$$

si ha  $h = 21.3 \text{ mm}$ ; quindi l'immagine è diritta e virtuale.

- [8] Si impone che (altezza oggetto/altezza immagine)= $|p/q| = 1$ , quindi, affinché l'equazione delle lenti abbia una soluzione, sia  $p$  che  $q$  devono essere positivi così

$$p = q \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{2}{p} = \frac{1}{f},$$

quindi  $p = q = 2f$ .

- [9] Indicando con  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  gli angoli di rifrazione del raggio luminoso nella lamina 1 e 2, rispettivamente, (misurati dalla normale alla superficie di incidenza) per le tre interfacce incontrate dal raggio nel suo percorso si scriverà:

$$\text{aria - lamina 1:} \quad n_{\text{aria}} \sin \vartheta_i = n_1 \sin \vartheta_1$$

$$\text{lamina 1 - lamina 2:} \quad n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$$

$$\text{lamina 2 - aria:} \quad n_2 \sin \vartheta_2 = n_{\text{aria}} \sin \vartheta_u.$$

Utilizzando le tre relazioni si ha:

$$\sin \vartheta_u = \frac{n_2 \sin \vartheta_2}{n_{\text{aria}}} = \frac{n_1 \sin \vartheta_1}{n_{\text{aria}}} = \sin \vartheta_i \quad \Rightarrow \quad \vartheta_u = \vartheta_i.$$

- [10] Per ricavare la lunghezza focale della sistema formato dalle due lenti, è sufficiente scrivere l'equazione dei punti coniugati per ciascuna di esse tenendo presente che l'immagine della prima lente è l'oggetto per la seconda lente; pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} &= \frac{1}{f_1} \\ -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1}{f_2} \end{aligned}$$

Dal sistema delle due equazioni si ricava:

$$q_2 = \frac{q_1 f_2}{q_1 + f_2} = \frac{p_1 f_1 f_2}{p_1 (f_1 + f_2) - f_1 f_2}.$$

Quando  $p \rightarrow \infty$  si ha:

$$q_2 = f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{13 \cdot (-20)}{13 - 20} \text{ cm} = +37.1 \text{ cm.}$$

Il sistema ottico è convergente.

- [11] Poiché il fascetto di luce incidente sulla prima lente è parallelo all'asse ottico, esso verrà focalizzato nel punto  $q_1 = f = 10 \text{ cm}$ . L'immagine reale formata dalla prima lente è l'oggetto reale per la seconda lente, distante da essa  $d - x - q_1$ ; pertanto per la seconda lente, dovendo essere l'immagine a distanza  $x$  da essa, si scriverà:

$$\frac{1}{d - x - q_1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{50 - x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 50x + 500 = 0$$

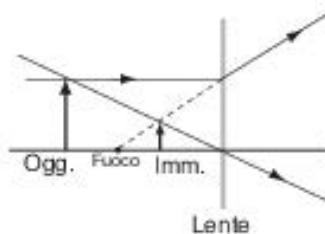
da cui si ricavano i due valori  $x_1 = 14 \text{ cm}$  e  $x_2 = 36 \text{ cm}$ .

- [12] Dalla costruzione grafica si vede che l'immagine è virtuale e diritta.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{100} - \frac{1}{50} = \frac{1}{f};$$

pertanto:

$$f = -100 \text{ cm.}$$



L'ingrandimento è:

$$I = -\frac{q}{p} = 0.5.$$

- [13] Per la lente vicina all'oggetto (prima lente:  $p_1 = 20 \text{ cm}$ ) si ha:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{p_1 f}{p_1 - f} = 30 \text{ cm.}$$

Poiché  $q_1 > d$ , l'immagine reale dell'oggetto formata dalla prima lente si trova al di là della seconda lente; tale immagine è, quindi, oggetto virtuale per la seconda lente, distante da quest'ultima  $p_2 = -15 \text{ cm}$ . Perciò, per la seconda

lente si scrive

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{p_2 f}{p_2 - f} = 6 \text{ cm.}$$

- [14] Indicando con  $n_a$  l'indice di rifrazione dell'aria si ha:  
per il diottro acqua-vetro:

$$\frac{n_{\text{acq}}}{p} + \frac{n_v}{q'} = \frac{n_v - n_{\text{acq}}}{R_1};$$

per il diottro vetro-aria:

$$\frac{n_v}{-q'} + \frac{n_a}{q} = \frac{n_a - n_v}{-R_2}.$$

Sommendo queste due relazioni si ottiene:

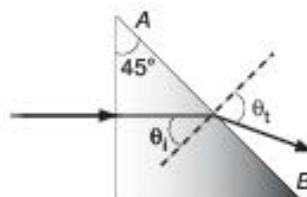
$$\frac{n_{\text{acq}}}{p} + \frac{n_a}{q} = \frac{n_v - n_{\text{acq}}}{R_1} + \frac{n_v - n_a}{R_2} \quad \Rightarrow \quad q = +15 \text{ cm.}$$

L'immagine è reale.

- [15] Il raggio di luce incide sulla faccia  $AB$  del prisma con una angolo  $\vartheta_i = 45^\circ$ ; dalla legge di Snell si ha:

(a) prisma in aria:

$$\sin \vartheta_t = \frac{n_{\text{vetro}}}{n_{\text{aria}}} \sin \vartheta_i = 0.75\sqrt{2} > 1$$



il raggio è quindi totalmente riflesso;

(b) prisma in acqua:

$$\sin \vartheta_t = \frac{n_{\text{vetro}}}{n_{\text{acqua}}} \sin \vartheta_i = 0.575\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_t \simeq 53^\circ.$$

- [16] Sullo schermo le posizioni dei massimi delle due figure di interferenza, dalla posizione  $x = 0$  centrale, saranno date dalle seguenti espressioni:

$$x_1 = n_1 \frac{L\lambda_1}{d} \quad \text{e} \quad x_2 = n_2 \frac{L\lambda_2}{d}.$$

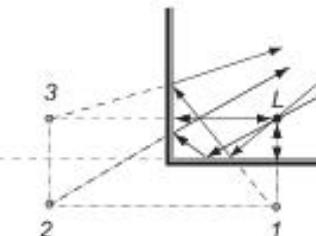
Poiché deve essere  $x_1 = x_2$ , si scriverà:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{2}$$

e la prima sovrapposizione si ha per  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 2$ . Pertanto è

$$x_1 = x_2 = 1.5 \text{ mm.}$$

- [17] Le immagini, costruite sulla base della legge di Snell, ovvero considerando che l'immagine virtuale formata da uno specchio diventa oggetto reale per l'altro specchio, sono contrassegnate dai numeri 1,2 e 3.



- [18] L'intensità  $J$  dovuta alla diffrazione di una radiazione incidente di ampiezza  $A_0$  sarà

$$J \approx A_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{(2\pi/\lambda)d \sin \vartheta}{2}.$$

La posizione dei primi minimi su uno schermo distante è legata alla condizione  $\alpha = \pm\pi$ , quindi:

$$d = \frac{\lambda}{\sin \vartheta} = 24 \mu\text{m}.$$

- [19] Poiché i massimi si trovano nelle direzioni ( $\vartheta$ ) per le quali le differenze di cammino ottico per i raggi provenienti da due fenditure contigue sono nulle o pari a un numero intero  $n$  di lunghezze d'onda, la condizione è  $d \sin \vartheta = n\lambda$  cosicché

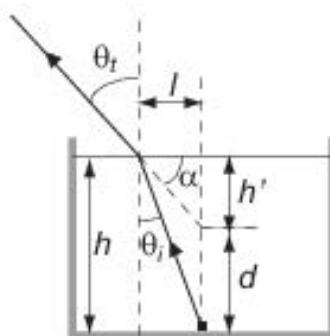
$$\vartheta = \arcsin n \frac{\lambda}{d}.$$

Al primo ordine ( $n = 1$ ), è  $\vartheta_1 = \arcsin 0.1129 = 6.48^\circ$  e al secondo ( $n = 2$ )  $\vartheta_2 = 13.05^\circ$ . Pertanto, l'angolo di separazione tra le due linee spettrali è:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 6.57^\circ.$$

- [20] Dalla legge di Snell indicando con  $n = 1$ , l'indice di rifrazione dell'aria e con  $\vartheta_t = 45^\circ$  l'angolo sotto cui viene rifratta in aria la luce che incide con un angolo  $\vartheta_i$  dall'acqua, gli angoli essendo calcolati rispetto alla normale alla superficie dell'acqua, si ha

$$\sin \vartheta_i = \frac{n}{n_A} \sin \vartheta_t = 0.53 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i \simeq 32^\circ.$$



Poiché (vedi figura a lato):

$$l = h \tan \vartheta_i = 0.62 \text{ m};$$

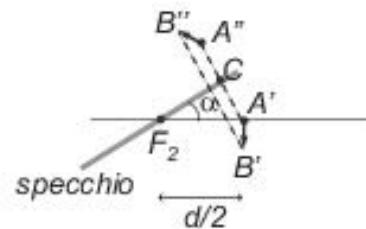
e inoltre:

$$h' = l \tan \alpha = l \tan \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta_t \right) = l \cot \vartheta_t = l,$$

si ha che:  $d = h - h' = 0.38 \text{ m}$ .

- [21] In assenza dello specchio la lente formerebbe l'immagine (reale)  $A'B'$  nel punto di coordinate

$$q = \frac{pf}{p-f} = d$$



essendo  $p = d$  la distanza dell'oggetto dalla lente; l'immagine è invertita e delle stesse dimensioni dell'oggetto (ingrandimento trasversale uguale a 1). L'immagine della lente diventa oggetto virtuale per lo specchio che, di conseguenza, ne formerà un'immagine reale,  $A''B''$ , secondo lo schema mostrato a lato. Sempre dalla figura si ha:

$$A''C = A'C = \frac{d}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} d.$$

Questo volume costituisce la parte stampata di un testo complessivo accessibile in rete, che si propone espressamente di sviluppare nello studente la capacità di risolvere i problemi di fisica, proposti tipicamente nei corsi di Fisica delle facoltà di Scienze e di Ingegneria delle nostre università. A questo fine, in ogni sezione, oltre alla naturale e qui ampiamente estesa collezione di esercizi, riportati con lo sviluppo delle relative soluzioni, sono presentati più esercizi guida, costruiti con percorsi alternativi, per stimolare una visione più generale dei problemi e formare una migliore capacità risolutoria. In ogni sezione sono preliminarmente riportate una sintesi del contenuto teorico dei problemi affrontati e una collezione di domande connesse con tale contenuto e con le quali lo studente è invitato a confrontarsi, prima di affrontare la prova degli esercizi.

Un capitolo iniziale con esempi illustrati discorsivamente su vari argomenti della fisica generale vuole servire da introduzione alle successive prove personali dello studente e un capitolo finale raccoglie e suddivide alcuni tipici fenomeni fisici che richiedono un medesimo approccio matematico, pur presentandosi in ambiti diversi, a voler mostrare l'unità dei procedimenti.

ADRIANO ALIPPI, ANDREA BETTUCCI e MASSIMO GERMANO sono docenti della Sapienza Università di Roma.



Il testo accessibile in rete estende il contenuto del presente volume stampato con due ulteriori capitoli: sul metodo della fisica e sui temi principali della fisica generale, che possono integrare efficacemente il contenuto dei vari testi di teoria adottati, da leggersi prima o dopo essersi cimentati con le prove degli esercizi.

ISBN 978-88-9385-017-9



Euro 29,00



SOCIETÀ EDITRICE  
**ESCOLAPIO**

[www.editrice-esculapio.it](http://www.editrice-esculapio.it)