21 gennaio 2022 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Informatica - a.a. 2021-2022

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 1

1)Siano A e B due matrici ortogonali dire quali delle seguenti affermazione è vera o falsa dandone la spiegazione:
a)AB è ortogonale
b)$(AB)^{-1}$ non è ortogonale
c)$(AB)^t$ è ortogonale
d)(A+B) è ortogonale

2) Se A è simile a B allora A^{-1} è simile a B^{-1}

Esercizio 2

Al variare di t reale sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} tx_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ (t+1)x_1 + 2x_3 = -t \\ -x_1 - x_1 = t + 3 \end{cases}$$

a)Discutere il sistema applicando i teoremi di Rouchè-Capelli e Cramer
b)Discutere il sistema applicando il metodo di riduzione di Gauss-Jordan
c)Determinare le soluzioni quando esistono con uno dei due metodi.

Esercizio 3

Sia $P^2(x)$ lo spazio vettoriale su R dei polinomi di grado minore uguale a due. Si considerino in esso i due sottospazi vettoriali:

$$V_1 = \{a + bx + cx^2 \in P^2(x): a + bx + cx^2 = \alpha(x + x^2) + \beta(1 - x): \alpha, \beta \in R\}$$

$$V_2 = span\{1 + x + x^2, x + 2x^2, 1 - x^2\}$$

a)Scrivere V_1 in forma cartesiana e parametrica
b)Determinare $dim(V_1)$, $dim(V_2)$, e le rispettive basi $B(V_1)$, $B(V_2)$
c)Determinare V_1+V_2, $dim(V_1+V_2)$, $B(V_1+V_2)$
d)Determinare $V_1 \cap V_2$, $dim(V_1 \cap V_2)$,$B(V_1 \cap V_2)$
e)Completare la base trovate in d) a base di $P^2(x)$.

Esercizio 4

Data la seguente applicazione $f: R^4 \to R^4$definita da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ x + y + z \\ x + y + t \end{pmatrix}$$

a)Dimostrare che f è lineare
b)Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica
c)Determinare Im(f), Ker(f), le relative basi e dimensioni
d)Dire se è diagonalizzabile ed eventualmente scrivere la matrice diagonale
e)Determinare la matrice di transizione dalla base canonica alla base di autovettori.

Esercizio 5

Dato il seguente endomorfismo $f: M(2,2,R) \to M(2,2,R)$ definito rispetto alla base canonica dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 - \lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

a)Determinare λ affinchè l'endomorfismo sia simmetrico giustificando la risposta
b)Per i valori di λ che verificano a) scrivere la forma analitica dell'endomorfismo
b)Determinare se esiste una matrice ortogonale diagonalizzante M tale che la matrice diagonale D ottenuta sia

$$D = M^{-1}AM$$

In tal caso trovare M^{-1}.

21 gennaio 2022 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Informatica - a.a. 2021-2022

COGNOME……………………….... NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

Soluzione del compito
di geometria Ing. Informatica
del 21/1/22

$\boxed{Ex\,1}$

$\boxed{A}$ a) Deve risultare che

$$(AB)(AB)^T = I$$

ma si ha:

$$A B B^T A^T = A B B^{-1} A^{-1}$$

$$= A I A^{-1} = A A^{-1} = I \quad \text{(vero)}$$

b) Deve risultare che:

$$(AB)^{-1}\left((AB)^{-1}\right)^T = I$$

da cui:

$$B^{-1}A^{-1}[B^{-1}A^{-1}]^T = B^{-1}A^{-1}[A^{-1}]^T[B^{-1}]^T =$$

$$= B^{-1}A^{-1}[A^T]^T[B^T]^T =$$

$$= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \quad \text{(vero)}$$

c) Deve risultare che

$$(AB)^T\left((AB)^T\right)^T = I$$

ma si ha

$$B^T A^T A B = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \text{ (vero)}$$

d) Deve risultare che:

$$(A+B)(A+B)^T = I$$

1

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA………………….

$$AA^T + AB^T + BA^T + BB^T =$$

$$= AA^{-1} + AB^T + BA^T + BB^{-1} =$$

$$= 2I + AB^T + BA^T \neq I \qquad \text{Falso}$$

Tale proprietà si poteva dimostrare, non essendo vera con un controesempio.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A+B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

$\boxed{B}$ Se A è simile a B devo dimostrare che A^{-1} è simile a B^{-1}.

Dire che A è simile a B significa che $\exists$ una matrice M invertibile tale che

$$A = M^{-1} B M \quad ①$$

Dire che A^{-1} è simile a B^{-1} significa che $\exists$ una matrice N invertibile tale che

$$A^{-1} = N^{-1} B^{-1} N \quad ②$$

ma ~~sostituendo~~ da ① si ha

$$A^{-1} = (M^{-1} B M)^{-1} =$$

$$= M^{-1} B^{-1} (M^{-1})^{-1} =$$

$$= M^{-1} B^{-1} M$$

②

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA………………….

Confrontando ① e ② sono uguali se
$M = N$

Es 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -1 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 & -t \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{array}\right)$$

A (prime tre colonne), A' (matrice completa)

Studio $rk\,A$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rk\,A \geq 2$$

Vedo per quali $t \in \mathbb{R}$ $rk\,A < 3$

$$\begin{vmatrix} t & -1 & 1 \\ t+1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & 1 \\ t+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 + 2t - t - 1 = 0 \qquad 1 + t = 0 \qquad \boxed{t = -1}$$

Se $t \neq -1$ $rk\,A = rk\,A' = 3$ (A sottomatrice di A')
il sistema ha soluzione unica.
Se $t = -1$ solo $rk\,A = 2$. Vedo per $t = -1$ quanto è il rango di A'.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3

COGNOME………………………... NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

usando il teorema dell'orlare per la matrice estesa orlata

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(4)-1 \neq 0$$

Quindi per $t=-1$ il sistema non ha soluzioni

per $t \neq -1$ la soluzione (con Cramer) è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{t+6}{1+t} \\ -\frac{t^2+3t-3}{t+1} \\ 3 \end{pmatrix}$$

facile da determinare

Usiamo ora il metodo di GJ.

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 & -t \\ -1 & -1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Riordino a piacere e si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & t+3 \\ t & -1 & 1 & 0 \\ t+1 & 0 & 2 & -t \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & t+3 \\ 0 & -1-t & 1 & t(t+3) \\ 0 & -1-t & 2 & (t+3)(t+1)-t \\ & & & =(t^2+4t+3-t) \end{pmatrix} \sim$$

4

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & t+3 \\ 0 & -1-t & 1 & t^2+3t \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{t^2+3t-3-t^2-3t}_{3} \end{pmatrix}$$

così

$rk\, A = 3$ se $t \neq -1$

in tal caso $rk\, A' = 3$ così il sistema ha soluzione e la soluzione è:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = t+3 \\ -(1+t)x_2 + x_3 = t^2+3t \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{x_3 - t^2 - 3t}{1+t} = \frac{3 - t^2 - 3t}{1+t}$$

$$x_1 = -x_2 - t - 3 =$$

$$= -\frac{3-t^2-3t}{1+t} - \frac{(t+3)(t+1)}{1+t} =$$

$$= \frac{-t-6}{1+t} = -\frac{t+6}{1+t};$$

5

COGNOME……………………... NOME……..………………N. MATRICOLA………………..

$\boxed{Ex\ 3}$

a)

$V_1 = \{a+bx+cx^2 \in P^2(x) : a+bx+cx^2 = \alpha(x+x^2)+\beta(1-x)\}$

Questa forma per V_1 rappresenta la forma parametrica. Passo alla forma cartesiana risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a = \beta \\ b = \alpha - \beta \\ c = \alpha \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} &\beta = a \\ &\alpha - \beta = b \quad \Rightarrow \quad c - a = b \\ &\alpha = c \end{aligned}$$

quindi la forma cartesiana di V_1 è

$V_1 = \{a+bx+cx^2 \in P^2(x) : b = c - a\}$

$= \{a+bx+cx^2 \in P^2(x) : a+bx+cx^2 = a+(c-a)x+cx^2\}$

b) Determino B_{V_1}. Determino i vettori linearmente indipendenti

$\alpha=1 \quad \beta=0 \qquad v_1 = x+x^2$

$\alpha=0 \quad \beta=1 \qquad v_2 = 1-x$

quindi $B_{V_1} = \{(1-x), x+x^2\}$

6

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$\dim V_1 = 2$

Determiniamo ora una base di V_2. Vedo quali sono i vettori linearmente indipendenti. Scrivo la matrice delle coordinate

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

quindi i vettori sono lin. dipendenti. $rk\, A = 2$

Quindi una base è:

$$\mathcal{B}(V_2) = \{1+x+x^2, x+2x^2\}$$

quindi

$$V_2 = \{ v \in P^2(x) : v = \alpha(1+x+x^2) + \beta(x+2x^2) \}$$
$\alpha, \beta \in R$

quindi

$$\dim V_2 = 2$$

b) Determino $V_1 + V_2$. Per far ciò studio il rk della matrice formata dai coefficienti dei vettori delle basi V_1 e V_2 cioè:

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Studio $rk\, B$.

7

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim_{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} B = 3$$

quindi

$$V_1+V_2 = \{a+bx+cx^2 \in P^2(x) : a+bx+cx^2 = \alpha(1-x)+\beta(x+x^2)+\gamma(1+x+x^2)\ \alpha\,\beta\,\gamma \in \mathbb{R}\}$$

quindi

$$B_{V_1+V_2} = \{1-x,\ x+x^2,\ 1+x+x^2\}$$

$\dim V_1+V_2 = 3$

Da questo risultato posso ricavare

$\dim V_1 \cap V_2$ -

usando l'uguaglianza di Grassmann.

$$\dim V_1 \cap V_2 = -\dim(V_1+V_2) + \dim V_1 + \dim V_2$$

da cui

$$\dim V_1 \cap V_2 = \cancel{2}+2-3 = 1$$

Determina $V_1 \cap V_2$

8

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$$\begin{cases} c - a = b \\ a = \alpha \\ b = \alpha + \beta \\ c = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

da V_1 (prima equazione), da V_2 (ultime tre)

da cui

$$+\alpha + 2\beta - \alpha = \alpha + \beta$$

$$2\beta = \alpha + \beta$$

$$\beta = \alpha$$

quindi

$$V_1 \cap V_2 = \{a + bx + cx^2 : a + bx + cx^2 = \alpha(1 + x + x^2) + \alpha x(1 + 2x),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\ldots\ldots : a + bx + cx^2 = \alpha + 2\alpha x + 3\alpha x^2\}$$

$$\mathcal{B}_{V_1 \cap V_2} = \{1 + 2x + 3x^2\} \qquad \dim V_1 \cap V_2 = 1$$

d) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2(x)} = \{1 + 2x + 3x^2, 1, x\}$.

Eser. 4

Siano $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ x+y+z \\ x+y+t \end{pmatrix}$

9

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$$v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \in R^4 : \quad f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'+y' \\ x'+y'+z' \\ x'+y'+t' \end{pmatrix}$$

Si ha.

$$f(v+v') = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ t+t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y'+z+z' \\ x+x'+y+y'+t+t' \end{pmatrix} = f(v)+f(v)$$

Analogamente

$$f(kv) = k\,f(v)$$

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk\, A_f = 3$

$$B_{Im f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Im f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in R^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in R \right\}$$

(10)

COGNOME……………………….. NOME……..………………N. MATRICOLA…………………..

trovo Ker f $\qquad$ dim Ker f = 3

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ dim Ker f = 1

d)

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = 0$$

$$(1-\lambda)^2 (1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda (1-\lambda)^2 (-2+\lambda) = 0$$

da cui $\quad \lambda = 0 \quad m_a(\lambda = 0) = 1$

$\lambda = 1 \quad m_a(\lambda = 1) = 2$

$\lambda = 2 \quad m_a(\lambda = 2) = 1$

M

COGNOME……………………….. NOME…….……………N. MATRICOLA…………………..

Trovo gli autovettori

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con soluzione

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} z = a \in \mathbb{R} \\ t = b \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Da cui

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{V_{\lambda=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim V_{\lambda=1} = 2$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y = -t \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = -y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{matrix}$$

12

COGNOME……………………….. NOME……..………………N. MATRICOLA…………………..

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

da cui

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

e:

$$B_{V_{\lambda=0}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim\{V_{\lambda=0}\} = 1$$

$\boxed{\lambda=2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto diventa

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= y \\ 2y - z &= 0 \\ 2y - t &= 0 \\ z &= t \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} z &= 2y \\ t &= 2y \\ y &= y \\ x &= y \end{aligned} \qquad \text{posto } y = a \text{ si ha:}$$

13

COGNOME……………………... NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{V_{\lambda=2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim V_{\lambda=2} = 1$$

Quindi f è diagonalizzabile perché le $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \quad \forall i$

gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$ perché sono linearmente indip/infatti- si può verificare che

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

quindi rk è 4.

La matrice diagonale è

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice di passaggio M è la matrice i

14

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Es 4</u>

L'endomorfismo è simmetrico se la matrice è simmetrica rispetto a una base ortonormale di $M(2,\mathbb{R})$
Siccome la base canonica ha questi requisiti basta vedere quando la matrice data è simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $2-\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda = 1$
Così la matrice associata sarà

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+t & 0 \\ 0 & x+2t \end{pmatrix}$

Determiniamo che $A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

15

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA………………….

c) So che è diagonalizzabile sempre perché simmetrica

$A-\lambda I=0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2\left((2-\lambda)^2-1\right)=0$$

$$\lambda^2(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)=0$$

$$\lambda^2(1-\lambda)(3-\lambda)=0$$

Trovo gli autospazi e gli autovettori

$\boxed{\lambda=0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+t=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x+2t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+t=0 \\ x+2t=0 \end{cases} \quad x=t=0$$

quindi:

$x=0$
$y=y=\lambda$
$z=t=\mu$
$t=0$

16

COGNOME……………………….. NOME………………………N. MATRICOLA…………………..

da cui:

$$V_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{V_{\lambda=0}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim V_{\lambda=0} = 2$$

$\boxed{\lambda=1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+t=0 \\ -y=0 \\ -z=0 \\ x+t=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x+t=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x=-t=-\lambda \\ y=0 \\ z=0 \\ t=\lambda \end{matrix}$$

quindi

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{V_{\lambda=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim V_{\lambda=1} = 1$$

17

COGNOME……………………... NOME…….……………N. MATRICOLA………………..

$\boxed{\lambda=3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+t=0 \\ -3y=0 \\ -3z=0 \\ x-t=0 \end{cases} \sim \quad \begin{matrix} x-t=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix} \qquad x=t=\lambda$$

quindi

$$V_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{V_{\lambda=3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim V_{\lambda=3} = 1$$

una base di autovettori è

$$B_{autov.} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1\ v_2\ v_3\ v_4\}$$

Determino una base ortonormale. Osservando che gli autovettori sono ortogonali $v_i v_j = 0$ $\forall\, i\,j$ ~~detta~~ basta normalizzare direttamente i vettori ortonormali

$$\{u_1\ u_2\ u_3\ u_4\} = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\ \frac{v_2}{\|v_2\|}\ \frac{v_3}{\|v_3\|}\ \frac{v_4}{\|v_4\|} \right)$$

e ottengo la mat. ortogonale diagonalizzante

18 $$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$