1) $A \in M_2(\mathbb{R})$; $A \in U \Leftrightarrow A_{11} = A_{22}$; $A \in W \Leftrightarrow (A_{11} = 0 \wedge A_{12} = -A_{21})$

Si verifica subito che $A, B \in U \Rightarrow \lambda A + \mu B \in U$; $A, B \in W \Rightarrow \lambda A + \mu B \in W$ $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Se $A \in U$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = a(e_1 + e_4) + be_2 + ce_3$, dove $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Posto $e_1' := e_1 + e_4$, $\Rightarrow U = \langle e_1', e_2, e_3 \rangle$.

$\{e_1', e_2, e_3\}$ è lin. indip., quindi è una base di U. $\Rightarrow \dim U = 3$.

Se $A \in W$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} = a(e_2 - e_3) + be_4$. Posto $e_2' := e_2 - e_3$, $\Rightarrow W = \langle e_2', e_4 \rangle$.

$\{e_2', e_4\}$ è lin. indip, $\Rightarrow \dim W = 2$.

$U + W = \langle e_1', e_2, e_3, e_2', e_4 \rangle$.

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4, \Rightarrow \dim(U+W) = 4.$$

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 1$.

2) $A_n = (-1)^{n-1}$. Infatti

$$A_n \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ \vdots \\ R_n - R_1. \end{matrix}$$

$B_n = (n-1)(-1)^{n-1}$. Infatti:

$$B_n \to (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_n - R_1]{} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

avendo applicato dapprima: $R_1 + (R_2 + \ldots + R_n)$, $R_2 - R_3$, $R_3 - R_4, \ldots, R_{n-1} - R_n$.

3)

$$(A|b) \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -9 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & -8 & 14 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}A = 3 \Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBILE, ∞^2 SOLUZIONI:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_5 + 3 \\ x_2 = 1 + x_3 - x_5 \\ x_4 = 2x_5 + 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Sol}(\Sigma) = \left\{ {}^t(-2x_3 + 2x_5 + 3,\ 1 + x_3 - x_5,\ x_3,\ 2x_5 + 2,\ x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{6}-3}{4} & 0 \\ 1 & \sqrt{3}-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_A(t) = -t\left[t^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})t - \frac{2\sqrt{6}-3}{4}\right] = 0$ $\nearrow t_1 = 0$, $\rightarrow t_2 = \sqrt{3}/2$, $\searrow t_3 = \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$

Tre radici distinte $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

Una base di autovettori è : $\left\{ v_1 = (0,0,1),\ v_2 = \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right),\ v_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right) \right\}$ □

$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_A(t) = -t\left[t^2 + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}t - \sqrt{3}\right] = 0$ $\nearrow t_1 = 0$, $\rightarrow t_2 = \sqrt{2}$, $\searrow t_3 = -\sqrt{6}/2$

A è diagonalizzabile. Una base di autovettori è :

$\left\{ v_1 = (0,0,1),\ v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1, 0\right),\ v_3 = (-\sqrt{2}, 1, 0) \right\}$ □

5) $\phi \in End(\mathbb{R}_3[x])$, $\phi(f(x)) = f''(x) + 2f(x)$ nella base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\} \equiv \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è rappresentato dalla matrice

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P_A(t) = (t-2)^4$; $\sigma(A) = \{2\}$, $m_a(2) = 4$

$\dim Ker(A-2I) = 2 \Rightarrow$ 2 blocchi di Jordan: $\{J_2(2), J_2(2)\} \vee \{J_1(2), J_3(2)\}$

$(A-2I)^2 = 0 \Rightarrow \dim Ker(A-2I)^2 = 4 \Rightarrow N_1(2) + N_2(2) = 4 \Rightarrow N_2(2) = 2$

$\Rightarrow J_A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ □

$\phi \in End(M_2(\mathbb{R}))$, $\phi(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A - A^T$, nella base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \{e_1, \dots, e_4\}$

è rappresentato dalla matrice

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P_A(t) = (t-2)^3(t-4)$; $\sigma(A) = \{2; 4\}$ $m_a(2) = 3$, $m_a(4) = 1$.

$\dim Ker(A-2I) = 1 \Rightarrow$ un blocco di Jordan relativo a $\lambda = 2$, cioè $J_3(2)$

$\Rightarrow J_A = \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.