22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME………………………... NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

o

ISTRUZIONI

•La prova dura 3 ore.
•Ti sono stati consegnati 7 fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.
•Nella tabella sottostante sono riportati i punteggi corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; l'ultimo riquadro di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
•I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
•Per le risposte utilizza unicamente gli spazi già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
•Se si deve cambiare qualche risposta che si è già scritta sul foglio, si faccia in modo che sia chiaro per chi correggerà il compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, si chieda al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che sono state date.
•Al termine della prova devono consegnare unicamente i fogli che sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.

Esercizio	Parte	Pmax	Pcom
Esercizio 1	a	2	
	b	2	
Esercizio 2	a	3	
	b	2	
	c	2	
Esercizio 3	a	2	
	b	2	
	c	3	
Esercizio 4	a	2	
	b	2	
	c	3	
Esercizio 5	a	2	
	b	3	
Esercizio 6	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	2	

Esercizio 1
Data una matrice C simmetrica, per la quale risulta $C^2=C$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando brevemente la risposta:
a)$A=2C-I$ verifica la relazione $AA^t=I$;
b)$Det(A^2)=1$

Esercizio 2
Si consideri la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-l & 1 & 1 \\ 2 & 2-l & 2 \\ 3 & 3 & 3-l \end{pmatrix}$$

Siano inoltre:

$$X = (x \quad y \quad z)^t \quad Y = (1 \quad m-1 \quad m)^t$$

a) Discutere al variare di l, m, le soluzioni del sistema $AX = Y$.
b) Posto l=0, m=3, determinare le soluzioni.
c)Posto l=2 dire se la matrice A_2 è invertibile ed eventualmente trovare l'inversa.

Esercizio 3

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME.............................. NOME.........................N. MATRICOLA........................

Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di R^3

$$V = Span\{(1 \quad 1 \quad 2), (0 \quad 1 \quad -1), (1 \quad 0 \quad 0), (0 \quad 1 \quad 5)\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x - y = 0 \right\}$$

a) Determinare una base di V e di W.
b) Determinare una base ortogonale di V.
c) Determinare $V \cap W$ *e* $V + W$ *in forma parametrica e le rispettive basi e dimensioni.*

Esercizio 4
Si consideri il seguente omomorfismo f: $R^3 \to M(2,2,R)$ *definito da:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & x_1 \\ -x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica
b) Determinare Ker(f), Im(f) e rispettive basi e dimensioni
c) Determinare la dimensione e una base dell'immagine f(V) del sottospazio vettoriale:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Esercizio 5
Sia $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di R^3, ed f: $R^3 \to R^3$ un endomorfismo definito da:

$$f(e_1) = e_1 - e_3$$
$$f(e_2) = e_2 - e_3$$
$$f(e_3) = -e_1 - e_2 + e_3$$

a) Dimostrare la linearità di f;
b) Dire se f è diagonalizzabile ortogonalmente ed eventualmente determinare la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante ortogonale M tale che $D = M^{-1}AM$.

Esercizio 6
Dati in R^5 *i punti A(-1,-1,-1,-1,-1), B=(0,1,0,1,0), C=(1,0,-1,0,1), D=(0,0,0,0,1), E=(k,0,k,0,k):*
a) Determinare la retta per A,B;
b) Dimosrtare che i punti A,B,C non sono allineati e trovare il piano che li contiene;
c) Determinare k affinchè E sia complanare con A,C,D;
d) Determinare l'iperpiano per D ortogonale alla retta per AB;

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 1
a)

Vero

$AA^T = I$

Da cui

$(2C - I)(2C - I)^T =$

$= 4C^2 - 2CI - 2IC + I^2 =$

$= 4C - 2C - 2C + I = I$

Esercizio1
b)

Vero

$Det(A^2) = 1$

$A^2 = A \cdot A = (2C - I)(2C - I) =$

$= 4C^2 - 2CI - 2IC + I^2 =$

$= 4C - 2I - 2I + I = I$

da cui

$Det(A^2) = Det\ I = 1$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME.............................. NOME.........................N. MATRICOLA.......................

Esercizio 2
a)

$l=0$ $m\neq 3$ il sistema non ha soluzioni $l=0$ $m=3$ il sistema ha ∞^2 soluzioni $l=6$ $m\neq 0$ il sistema non ha soluzioni $l=6$ $m=0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

$l\neq 0, \cancel{m}\neq 6$ il sistema ha 1 soluzione

Studio rk A_k

$$\left|\begin{pmatrix} 1-l & 1 & 1 \\ 2 & 2-l & 2 \\ 3 & 3 & 3-l \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad (1-l)\begin{vmatrix} 2-l & 2 \\ 3 & 3-l \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-l \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-l & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$l^2(l-6) = 0 \quad l=0 \quad l=6$$

Se $\boxed{l=0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad rkA = 1 \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & m-1 \\ 3 & 3 & 3 & m \end{pmatrix}$$

per essere $rkA = rkA' = 1$ deve essere la 2ª riga uguale a 2 volte la prima riga e la 3ª riga deve essere 3 volte la prima - così

$m-1=2$

$m=3$

quindi se $m\neq 3$ $rkA \neq rkA' \Rightarrow$ il sistema non ha soluzioni

se $m=3$ $rkA = rkA' \Rightarrow$ il sistema ha ∞^2 soluzioni

e sono date:

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1$$

da cui $x+y+z=-1$

$x = -1-y-z$

$y=y$

$z=z$

Se $\boxed{l=6}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $rkA = 2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Studio $A' = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & m-1 \\ 3 & 3 & -3 & m \end{pmatrix}$ teorema orlare

vedi pag 13 Appendice:

COGNOME……………………….. NOME…….………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio2
b)

∞^2 sol $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-a-b\\a\\b\end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbb{R}$

$l=0$ $m=3$
il sistema ha ∞^2 soluzioni perché si riduce a

$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-1$

$x+y+z=-1$
$x=-1-y-z$
$y=y$
$z=z$

posto $y=a$ $z=b$ allora

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-a-b\\a\\b\end{pmatrix}$$

Esercizio2
c)

$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{2}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$

$l=2$

$$A_2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&2\\3&3&1\end{pmatrix}$$

$|A_2| = -2\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1&1\\3&3\end{vmatrix}=-2(1-3)-2(-3-3)=16\neq 0$

quindi A_2 è invertibile. L'inversa la determino nel seguente modo

$$\mathrm{cof}\,A=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&1\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&1\\3&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&1\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&4&6\\2&-4&6\\2&4&-2\end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1}=\frac{1}{|A_2|}(\mathrm{cof}\,A_2)^T=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-6&4&6\\2&-4&6\\2&4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{2}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

$A_2 A_2^{-1}=I$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 3
a)

$$B_V=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right\} \qquad B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{V}$ Studio rk della matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&1\\2&-1&0&5\end{pmatrix} \qquad rk\,A=3 \text{ perché } \begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&5\end{vmatrix}\neq 0$$

Quindi una base è:

$$B_V=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{W}$ Scrivo W in forma parametrica

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y\\z\end{pmatrix} \qquad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\u\end{pmatrix} : t\,u\in\mathbb{R}\right\}$$

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{w_1\,w_2\}$$

Esercizio3
b)

$$B_{\perp V}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right\}=\{u_1\;u_2\;u_3\}$$

Uso il procedimento di Gram Schmidt — Osservo che $v_1\perp v_2$ $v_2\perp v_3$ ma $v_1\not\perp v_3$ — Quindi

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=v_1$$

$$u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\perp v_1$$

$$u_3=v_3-\frac{v_3\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1-\frac{v_3\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}-\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$$

da cui $B_{\perp V}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$;

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 3
c)

$V+W = \mathbb{R}^3$

$V\cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 . \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c\\ a+c\\ 6c\end{pmatrix} \quad a, c \in \mathbb{R} \right\}$

Determino $V+W$
Scrivo la matrice formata dai vettori colonna delle basi di V e W

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad rk A = 3$ perché $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ sono lin. ind.

quindi $W+V = \mathbb{R}^3 = V$. Dalla relazione di Grassmann ho la

$\dim(V\cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W)$ $\quad (3+2-3=2)$

quindi $\dim V\cap W = 2$.
Per determinare $V\cap W$ risolvo il sistema

$\begin{cases} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 5\end{pmatrix} \\ x-y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = b\\ y = a+c\\ z = -a+b+5c\end{cases}$

$b-a-c=0$
$b = a+c$
$a = a$
$c = c$

$\Rightarrow \begin{cases} x = a+c\\ y = a+c\\ z = -a+a+c+5c\end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = a+c\\ y = a+c\\ z = 6c\end{cases}$ $\Rightarrow B_{V\cap W} = \left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 6\end{pmatrix}\right\}$

Esercizio 4
a)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Scrivo la matrice associata trovando le immagini della base canonica di $\mathbb{R}^3$ ed ho

$f\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME………………………... NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 4

b)

$\text{Im} f = \left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b+c & a\\ -a+b & b-c\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \ker f = \{0\}$

$B_{\text{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

Determino Im f – la dimensione è data da $rk A = 3$ perché

$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix} \neq 0$ quindi $\text{Im} f = \left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in M(2,2) : \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

da cui la base deriva da $(a\ b\ c) = (1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)$.

Ker f

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$
$x_2 + x_3 = 0$
$x_1 = 0$
$-x_1 + x_2 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \ker f = \{0\}$
$x_2 - x_3 = 0 \quad x_3 = 0$

Si può osservare che $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$ $(3 + 0 = 3)$

Esercizio 4

c)

$f(V) = \left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$

$B_{f(V)} = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \dim f(V) = 2$

$V = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$

Scrivo la forma parametrica

$x_1 = x_2 - x_3$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\a\\b\end{pmatrix}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$V = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\a\\b\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$B_V = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \dim V = 2$

Determino $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

quindi $\dim f(V) = rk\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&1\\1&-1\end{pmatrix} = 2$

quindi

$B_{f(V)} = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad f(V) = \left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME……………………….. NOME……..……………N. MATRICOLA………………….

Esercizio 5
a)

Devo dimostrare che per $v, v' \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$
$f(v+v') = f(v)+f(v')$
e $f(kv) = k f(v)$

Siano $v = a e_1 + b e_2 + c e_3$ $\quad v' = a' e_1 + b' e_2 + c' e_3$

$v+v' = (a+a')e_1 + (b+b')e_2 + (c+c')e_3$

$f(v+v') = f((a+a')e_1 + (b+b')e_2 + (c+c')e_3) = (a+a')f(e_1) + (b+b')f(e_2) + (c+c')f(e_3)$

$= (a+a')(e_1 - e_3) + (b+b')(e_2 - e_3) + (c+c')(-e_1 - e_2 + e_3)$

Inoltre

$f(v) = f(ae_1 + be_2 + ce_3) = a f(e_1) + b f(e_2) + c f(e_3) = a(e_1 - e_3) + b(e_2 - e_3) + c(-e_1 - e_2 + e_3)$

$f(v') = f(a'e_1 + b'e_2 + c'e_3) = a' f(e_1) + b' f(e_2) + c' f(e_3) = a'(e_1 - e_3) + b'(e_2 - e_3) + c'(-e_1 - e_2 + e_3)$

banalmente si vede che $f(v+v') = f(v) + f(v')$

Analogamente per $f(kv) = k f(v)$

Esercizio 5
b)

Scrivo la matrice rispetto alla base canonica ortonormale

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0 \\ -x - y = 0 \\ x = -y \end{array}$$

da cui $V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

$B_{V_{\lambda=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ dim $V_{\lambda=1} = 1$

$\boxed{\lambda = 1+\sqrt{2}}$ trovo l'autospazio corrispondente

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ essendo rk $A = 2$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x - z = 0 \\ -\sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \qquad x = -\frac{z}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{z}{\sqrt{2}} \quad z = a$$

da cui:

$V_{\lambda=1+\sqrt{3}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{2}} \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

$B_{V_{\lambda=1+\sqrt{2}}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ dim $V_{\lambda=1+\sqrt{2}} = 1$

$\boxed{\lambda = 1-\sqrt{2}}$ analogamente al caso precedente

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \sqrt{2}x - z = 0 \\ \sqrt{2}y - z = 0 \end{cases} \qquad x = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

da cui

$V_{\lambda=1-\sqrt{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \\ a \end{pmatrix} \; a \in \mathbb{R} \right\}$

$B_{V_{\lambda=1-\sqrt{2}}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ dim $V_{\lambda=1-\sqrt{2}} = 1$

Quindi una base di autovettori è

$B_{Aut.} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} = \{w_1 \, w_2 \, w_3\}$

Si osserva $w_1 \perp w_2 \perp w_3$ - Basta quindi normalizzare

$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

da cui $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME……………………….. NOME…………………….N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 6
a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La retta per A B è data dall'eq. vettoriale

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{P-A} = \lambda \overrightarrow{B-A}$$

$$P = A + \lambda(\overrightarrow{B-A})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+1 \\ 0+1 \\ 1+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6
b)

Basta di mostrare che rk della matrice

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} B-A & C-A \end{pmatrix} = 2$$

Infatti

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{poiché} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Il piano è dato da

$$\overrightarrow{P-A} = \lambda \overrightarrow{B-A} + \mu(\overrightarrow{C-A})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME………………………... NOME…………………….N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 6
c)

E è complanare se $k=0$

E è complanare al piano per A C D se
$$rk(\vec{AC}\ \vec{AD}) = rk(\vec{AC}\ \vec{AB}\ \vec{AE})$$

quindi
$$rk\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix}}_{A'}$$

$rk\,A = 2$ perché $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Per calcolare $rk\,A'$ uso teorema dell'orlare

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \iff k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad -k+k=0$$
quindi $=0$ per ogni k

Analogamente $\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \forall k$ perché ha 2 righe uguali

$\boxed{\text{Vedi pag. 13}}$

Esercizio6
d)

$x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5-1=0$

Il vettore direttore della retta è $\vec{AB} = \vec{v}_{AB}$
$$v_{AB} = \vec{B-A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il fascio di iperpiani ha equazione generica
$$x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5+d=0$$

Imponendo il passaggio per $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si ha
$$1+d=0 \qquad d=-1$$

da cui:
$$x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5-1=0. \quad \pi$$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (B)

COGNOME.......................... NOME.........................N. MATRICOLA.....................

EVENTUALI APPENDICI AGLI ESERCIZI

Continua esercizio 2 a)

Applico il teorema dell'orlato

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & m-1 \\ 3 & -3 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ -3 & m \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & m \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2m + 3m - 3 + 4(m+3) + 3(m-1-2) = 0$$

$$2m + 3m - 3 + 4m + 12 + 3m - 9 = 0$$

$$12m = 0 \qquad m = 0$$

Se $m \neq 0$ $rk\, A \neq rk\, A'$ il sistema non ha soluzioni

$m = 0$ $rk\, A = rk\, A' = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

$1 \neq 0, 6$ il sistema ha soluzioni per teorema Rouché Capelli

Continua Esercizio 6 c

orlando

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = 0 \qquad k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2k + k = 0 \qquad k = 0$$

quindi se $k = 0$ anche gli altri determinanti sono nulli

quindi $rk\, A' = 2$ quindi $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$