12 luglio 2022 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria Informatica - a.a. 2021-2022

COGNOME………………………... NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

ISTRUZIONI

•La prova dura 2.5 ore.
•Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.
•Nella tabella sottostante sono riportati i punteggi corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; l'ultimo riquadro di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
•I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 31 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
•Per le risposte utilizza unicamente gli spazi già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
•Se si deve cambiare qualche risposta che si è già scritta sul foglio, si faccia in modo che sia chiaro per chi correggerà il compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, si chieda al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che sono state date.
•Al termine della prova devono consegnare unicamente i fogli che sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.

Esercizio	Parte	Pmax	Pcom
Esercizio 1	a	2	
	b	2	
	c	2	
Esercizio 2	a	2	
	b	2	
Esercizio 3	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	2	
	e	2	
Esercizio 4	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	2	
Esercizio 5	a	2	
	b	2	
	c	2	

Esercizio 1
Discutere le seguenti affermazioni se vere o false:
a)Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono autovettori di f con autovalori $l_1, l_2, \dots, l_n$ uguali ad l, allora $v_1+v_2+\dots+v_n$ è autovettore di f con autovalore $l_1+l_2+\dots+l_n=nl$, con n intero. Dire se c'è qualche n intero per cui è vera.
b)Se $A \in M(2,2,R)$ è invertibile allora 2A è invertibile
c)Data una matrice A nxn, sia k un numero intero, allora Det(kA)=kDet(A).

Esercizio 2
Dato il seguente sistema omogeneo S:

$$S:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ky=0 \\ x-y+kz=0 \end{cases}$$

a) Determinare le soluzioni al variare di k:
b)Discutere l'invertibilità della matrice dei coefficienti e per i valori di k per cui è possibile calcolare l'inversa.

12 luglio 2022 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria Informatica - a.a. 2021-2022

COGNOME……………………….. NOME……..………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 3
Si considerino i seguenti sottospazi V_1 e V_2 di $M(2,2,R)$:

$$V_1 = span\{A, B, C\} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2 = \left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

a)Scrivere V_1 in forma cartesiana e V_2 in forma parametrica
b)Determinare $dim(V_1)$, $dim(V_2)$, e le rispettive basi $B(V_1)$, $B(V_2)$
c)Determinare V_1+V_2, $dim(V_1+V_2)$, $B(V_1+V_2)$
d)Determinare $V_1 \cap V_2$, $dim(V_1 \cap V_2)$, $B(V_1 \cap V_2)$
e)Determinare una base ortonormale di V_1.

Esercizio 4
Si consideri l'endomorfismo $f: M(2,2,R) \to P^2[x]$, dove $M(2,2,R)$è lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2 e $P^2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi su R di grado minore o uguale a 2, definito da:

$$f\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = a + bx + 2dx^2$$

a)Determinare la matrice associata all'omomorfismo rispetto alle basi canoniche di $M(2,2,R)$ e $P^2[x]$ e la matrice associata rispetto alle basi:

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\} \text{ e } B' = \{1, 1+x, 2+x^2\}$$

b)Determinare Im(f), Ker(f), le relative basi e dimensioni
c)Determinare le coordinate dell'immagine di $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ rispetto alle basi B, B'.
d)Determinare se esiste la controimmagine di $v = 1 + x + x^2$ e dire se rappresenta uno spazio vettoriale.

Esercizio 5
Sia f l'endomorfismo di R^4 che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a)Determinare l'immagine e una base dell'immagine
b)Determinare il nucleo e una base del nucleo
c)Determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale A' tale che $A'=M^{-1}AM$.

Soluzioni compito geometria
del 12/7/22
ing. informatica

Ex 1

a) Risulta quindi che essendo $l_1 = \dots = l_n = l$ gli autovalori di v_i

$$f(v_1) = l v_1$$
$$f(v_2) = l v_2$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = l v_n$$

se si considera il vettore $w = v_1 + \dots + v_n$ si ha

$$f(w) = f(v_1 + v_2 \dots + v_n) = f(v_1) + f(v_2) + \dots f(v_n)$$

questo nella linearità di f quindi

$$f(v_1 + \dots + v_n) = l v_1 + l v_2 + \dots + l v_n =$$
$$= l (v_1 + \dots + v_n)$$

quindi la risposta è falsa è vera solo per $n = 1$

b) Se A è invertibile significa che

$$\det A \neq 0$$

Poiché dalle proprietà dei determinanti risulta che

$$\det(\cancel{k} A) = \cancel{k}^{o} \det A$$

dove o = ordine della matrice che nel nostro caso è $n = 2$, quindi

$$\det 2A = 2^2 \det A$$

quindi l'affermaz. è vera perché $\det 2A \neq 0 \Rightarrow$ è invertibile

c) Data una matrice $A_{n \times n}$ risulta che

$$\mathrm{Det}\, kA = k^n \,\mathrm{Det}\, A$$

Quindi nel nostro caso è falsa l'affermazione

Ex 2

È un sistema omogeneo. Dalla teoria dei sistemi omogenei esso ha soluzione unica nulla se $rk\, A = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

$rk\, A$ $\quad \mathrm{Det}\, A = 1 \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$

$$-1 - k + k(k-1) = 0$$

$$k^2 - k - k - 1 = 0$$

$$k^2 - 2k - 1 = 0$$

$$k = 1 \pm \sqrt{1+1} \quad \begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{array}$$

Così se $k \neq 1 \pm \sqrt{2}$ $rk\, A = 3$ quindi l'unica soluz. del sistema è $(x\ y\ z) = (0\ 0\ 0)$.

Se $k = 1+\sqrt{2}$ il sistema dato può essere scritto in forma ridotta

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (1+\sqrt{2})\, y = 0 \end{cases} \quad \text{perché } rk\, A = 2$$

da cui

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x + 1+\sqrt{2}\, y = 0 \end{cases} \qquad z = \alpha$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}-1} = -\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\alpha$$

$$y = -\frac{x}{1+\sqrt{2}} = \frac{\cancel{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{1+\sqrt{2}}}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha$$

quindi ∞^1 soluzioni date da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \\ -\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \infty^1 \text{ soluz.}$$

Se $k = 1-\sqrt{2}$ allora

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \quad \text{perché} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0$$

quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x + (1-\sqrt{2})\, y = 0 \end{cases} \qquad z = \alpha$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}-1} = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}\,x = -\frac{1}{1-\sqrt{2}}\,\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\alpha$$

quindi le soluz. sono ∞^1 e sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Ese 3

a)
b) Determiniamo la dimensione di V_1 e V_2.

$\boxed{V_1}$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

poiché usando il teorema dell'orlare

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$$

quindi posso scrivere V_1 in forma parametrica

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

quindi $\dim V_1 = 2$ con base $\mathcal{B}_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

Scrivo la forma cartesiana risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ -b & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = -b \\ t = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = t \end{matrix}$$

quindi V_1 in forma cartesiana è

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,2)\mathbb{R} \,;\; x = y \quad z = t \right\}$$

Analogamente per V_2 - Determina la dimensione e la base

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rk\, B = 2 \Rightarrow \dim V_2 = 2$$

quindi

$$B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La forma parametrica sarà

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

La forma cartesiana sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 2a \\ y = -b \\ z = 2a \\ t = 2a \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = z = t \\ b \ \forall \end{matrix}$$

quindi

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{cases} z = x \\ t = x \end{cases} \right.$$

c) Determino $V_1 \cap V_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}\, A =$

$$\mathrm{Det}\, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

quindi $\mathrm{rk}\, A < 4$

$\mathrm{rk}\, A = 3$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

quindi

$$V_1+V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

$\dim(V_1+V_2) = 3 = rk A$

$$B_{V_1+V_2} = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

Determino $V_1\cap V_2$ — Per la dimensione è facile Dalla uguaglianza di Grassmann

$$\dim(V_1\cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1+V_2)$$

$$= 2+2-3=1$$

Per det. $V_1\cap V_2$ risolvo il sistema

$$\begin{cases} x=y \\ z=t \\ x=2a \\ y=-b \\ z=2a \\ t=2a \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2a=-b \\ 2a=2a \text{ identità sempre vera} \\ \text{quindi} \\ \quad b=-2a \end{array}$$

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi una base per $V_1 \cap V_2$ si ottiene dando ad a valore ~~arb~~ arbitrario. $a = \frac{1}{2}$ quindi

$$B(V_1 \cap V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Determina una base ortogonale di V_1 ortogonalizzando la base B_{V_1}

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{v_2 \cdot v_2} u_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 w_1}{w_1 w_1} w_1 - \frac{v_3 w_2}{w_2 w_2} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{-2-2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 2-\frac{1}{3} & 2-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+\frac{25}{9}+\frac{25}{9}}}$$

quindi

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{68}}$$

Es 4

a) $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x^2$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

usando le basi canoniche di $M(2 \times 2 \mathbb{R})$ e $P^2(x)$ rispett. troviamo

$$B_{cM(2\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{cP^2(x)} = \{1, x, x^2\}$$

Determiniamo la matrice rispetto alle basi B B'

$$f\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = 1+x$$

$$f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = x$$

$$f\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2x^2$$

$$f\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix} = 1+x+2x^2$$

ora devo esprimere tali immagini rispetto alla Base B' alla

$$A\cdot 1 + B(1+x) + C(2+x^2) = 1+x \quad ;$$

$$\begin{cases} A+B+2C = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot 1 + B(1+x) + C(2+x^2) = x$$

$$\begin{cases} A+B+2C = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot 1 + B(1+x) + C(2+x^2) = 2x^2$$

$$A+B+2C = 0$$

$$B = 0 \qquad \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$C = 2$$

Infine $A\cdot 1 + B(1+x) + C(2+x^2) = 1+x+x^2$

$$\begin{cases} A+B+2C = 1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice è

$$A_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

---

b) Determina Im f

Studio il rk A

$$\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

per i 3 pivot a scalini.

Quindi

$\dim \text{Im} f = \text{rk} A = 3$

Così una base è:

$B = \{1+x, 2+x^2\}$

Determina Ker f -

Dovrà risultare

$$a + bx + 2dx^2 = 0$$

soluzioni

$a = 0$

$b = 0$

$c \ \forall$

$d = 0$

quindi

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim \ker f = 1$$

c) Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a $B_{B'}$

$$f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + x + 2x^2 = v$$

quindi avrò

$$\begin{cases} A + B + 2C = 2 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ coordinate di v rispetto a B'

d) Controimmagine di $1 + x + x^2$

Dovrà essere ;

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 + x + x^2$$

quindi

$$a + bx + 2dx^2 = 1 + x + x^2 = 0$$

da cui

$a = 1$

$b = 1$

$d = \frac{1}{2}$ $c \forall$

quindi la controimmagine è data dalle

matrici $M(2,2,\mathbb{R})$ del t/p

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tale insieme non rappresenta uno spazio vettoriale fra le matrici di questo t/p non contengono l'elemento nullo –

Ex 5

a) Per determinare l'immagine dell'endomorfismo f devo determinare il rkA che mi dà la dimensione

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

perché il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e $Det\, A = 0$ e tutti i minori di ordine 3 hanno rango nullo. Quindi

$$\dim Im f = rk A = 2$$

quindi una base è

$$B_{Imf} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(Im f) = 2$$

$$Im f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in R^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a, b \in R \right\}$$

b) Determinare il nucleo. Per farlo esplicito la funzione nella sua forma analitica

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - t \\ 0 \\ z \\ -x + t \end{pmatrix}$$

Per trovare ker f dovrà essere nulla la f

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases} \equiv \begin{matrix} x - t = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = t \\ y = y \\ z = 0 \\ t = t \end{matrix}$$

Quindi una base di Ker f

$$B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

quindi

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} a, b \in \mathbb{R}$$

$\dim \ker f = 2$

c) Per det. una matrice ortogonale che la f rispondi sul testo det. gli autovalori

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

quindi

$$\lambda(\lambda-1)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda = 0$ con $m_a(\lambda = 0) = 2$

$\lambda = 1$ con $m_a(\lambda = 1) = 1$

$\lambda = 2$ con $m_a(\lambda = 2) = 1$

Determiniamo gli autospazi

$\boxed{\lambda = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow = \underline{\ker f}$$

questa una base è a pag 16

$$B_{V_{\lambda=0}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\lambda = 1}$ [illegible]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

quindi

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

quindi

$$B_{V_{\lambda=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\lambda = 2}$ [illegible]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} x = -t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = t \end{matrix} \Rightarrow V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

quindi gli autovettori sono

$$\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiniamo una base ortonormale. Osservo che sono tutti vettori ortogonali quindi basta ortonormalizzare

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi M : $D = M^{-1} A M$ è

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & & 2 \end{pmatrix}$$