22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (A)

COGNOME.............................. NOME.........................N. MATRICOLA........................

ISTRUZIONI

•La prova dura 3 ore.
•Ti sono stati consegnati 7 fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.
•Nella tabella sottostante sono riportati i punteggi corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; l'ultimo riquadro di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
•I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
•Per le risposte utilizza unicamente gli spazi già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
•Se si deve cambiare qualche risposta che si è già scritta sul foglio, si faccia in modo che sia chiaro per chi correggerà il compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, si chieda al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che sono state date.
•Al termine della prova devono consegnare unicamente i fogli che sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.

Esercizio	Parte	Pmax	Pcom
Esercizio 1	a	2	
	b	2	
Esercizio 2	a	3	
	b	2	
	c	2	
Esercizio 3	a	2	
	b	2	
	c	3	
Esercizio 4	a	2	
	b	2	
	c	3	
Esercizio 5	a	2	
	b	3	
Esercizio 6	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	2	

Esercizio 1
Data una matrice C simmetrica, per la quale risulta $C^2=C$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando brevemente la risposta:
a)$A=2C-I$ è ortogonale;
b)$A^2=I$

Esercizio 2
Si consideri la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-l & 1 & 1 \\ 2 & 2-l & 2 \\ 3 & 3 & 3-l \end{pmatrix}$$

Siano inoltre:

$$X = (x \quad y \quad z)^t \quad Y = (m \quad m-1 \quad m-2)^t$$

a) Discutere al variare di l, m, le soluzioni del sistema $AX = Y$.
b) Posto $l=0$, $m=-1$, determinare le soluzioni.
c)Posto $l=2$ dire se la matrice A_2 è invertibile ed eventualmente trovare l'inversa.

Esercizio 3

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021 (A)

COGNOME………………………… NOME……………………N. MATRICOLA……………………

Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di R^3

$$V = Span\{(2 \quad 1 \quad 1), (3 \quad 1 \quad -1), (1 \quad 1 \quad 3), (0 \quad 1 \quad 5)\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x + y = 0 \right\}$$

a) Determinare una base di V e di W.
b) Determinare una base ortogonale di V.
c) Determinare $V \cap W$ *e* $V + W$ *in forma parametrica e le rispettive basi e dimensioni.*

Esercizio 4
Si consideri il seguente omomorfismo f: $R^3 \to M(2,2,R)$ *definito da:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica
b) Determinare Ker(f), Im(f) e rispettive basi e dimensioni
c) Determinare la dimensione e una base dell'immagine f(V) del sottospazio vettoriale:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Esercizio 5
Sia $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di R^3, ed f: $R^3 \to R^3$ un endomorfismo definito da:

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 - 2e_3$$
$$f(e_2) = -2e_1 + e_2 - 2e_3$$
$$f(e_3) = -2e_1 - 2e_2 + e_3$$

a) Dimostrare la linearità di f;
b) Dire se f è diagonalizzabile ortogonalmente ed eventualmente determinare la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante ortogonale M tale che $D=M^{-1}AM$.

Esercizio 6
Dati in R^5 *i punti A(1,1,1,1,1), B=(0,1,0,1,0), C=(1,0,-1,0,1), D=(0,0,0,0,1), E=(k,k+1,k+2,k+3,k+4):*
a) Determinare la retta per A,B;
b) Dimosrtare che i punti A,B,C non sono allineati e trovare il piano che li contiene;
c) Determinare k affinchè E sia complanare con A,C,D;
d) Determinare l'iperpiano per D ortogonale alla retta per AB;

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 1

a)

Vero

Dire che A è ortogonale significa che deve risultare

$$A A^T = I$$

da cui:

$$A A^T = (2C - I)(2C - I)^T =$$
$$= (2C - I)((2C)^T - I^T) = \qquad I^T = I, \ (kC)^T = k C^T$$
$$= 4CC^T - 2CI - 2IC^T + I \cdot I =$$
$$= 4C \cdot C - 2C - 2C + I^2 =$$
$$= 4C - 2C - 2C + I = I$$

quindi è vero

b)

Vero

$$A^2 = I$$

$$(2C - I)^2 = (2C - I)(2C - I) =$$
$$= 4C^2 - 2CI - 2IC + I^2 =$$
$$= 4C - 2C - 2C + I = I$$

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 2

a) $l \neq 0, 6$ $\forall m$ il sist. ha 1 soluzione

$l = 0$	$m \neq -1$	il sist. non ha soluzioni
$l = 0$	$m = -1$	il sist. ha ∞^2 soluzioni
$l = 6$	$m \neq -1$	il sist. non ha soluzioni
$l = 6$	$m = -1$	il sistema ha ∞^1 soluzioni

Studio rk A_l

$$\begin{vmatrix} 1-l & 1 & 1 \\ 2 & 2-l & 2 \\ 3 & 3 & 3-l \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-l)\begin{vmatrix} 2-l & 2 \\ 3 & 3-l \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-l \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-l & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-l)\left[(2-l)(3-l)-6\right] - 2(3-l-3) + 3(2-2+l) =$$

$$(1-l)(6-2l-3l+l^2-6) + 2l + 3l = 0$$

$$(1-l)(l^2-5l) + 5l = 0; \quad l((1-l)(l-5)+4) = 0$$

$$l(l-5-l^2+5l+5) = 0 \rightarrow l(-l^2+6l) = 0$$

$$l^2(l-6) = 0 \quad l = 0 \quad l = 6$$

Se $\boxed{l=0}$ allora

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ rk $A = 1$ $\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 2 & 2 & m-1 \\ 3 & 3 & 3 & m-2 \end{array}\right)$ Il sistema ha soluzioni solo se rk $A =$ rk $A' = 1$ ovvero deve essere $m-1 = 2m$, $m-2 = 3m$ $\Rightarrow m = -1$

quindi se $m \neq -1$ rk $A \neq$ rk A' il sist. non ha soluzioni.
se $m = -1$ rk $A =$ rk A' il sist. ha ∞^2 soluz. e si riduce a $(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1$

da cui $x + y + z = -1$ $\begin{cases} x = -1-y-z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ ∞^2 sol.

se $\boxed{l=6}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ rk $A = 2$ perché Det $A = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) Studio rk A'

$$A' = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & m \\ 2 & -4 & 2 & m-1 \\ 3 & 3 & -3 & m-2 \end{pmatrix}$$

uso il teorema degli orlati per $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ allora rk $A' = 2$ solo se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -4 & 2 & m-1 \\ 3 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ 3 & m-2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & m-2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2m-4-3m+3+4(m-2-3m)+3(m-1-2-m) = 0$$

$$2m-3m-1-8m-8-3m-3 = 0$$

$$-12m-12 = 0 \qquad m = -1$$

in tal caso rk $A' = 2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ quindi rk $A =$ rk $A' = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni

Per $m \neq -1$ rk $A \neq$ rk A' il sistema non ha soluzioni

Infine per $l \neq 0, 6$ per il teorema di Rouchè Capelli il sistema ha un'unica soluzione.

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME.............................. NOME........................N. MATRICOLA......................

Esercizio 2
b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \lambda\ \mu \in \mathbb{R} \quad \infty^2 \text{ soluzioni}$$

$l = 0$, $m = -1$ il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad rk\,A = rk\,A' = 1$$

Il sistema si riduce a

$$x + y + z = -1$$

da cui ponendo $y = \lambda$ $z = \mu$ si ha:

$$\begin{cases} x = -1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \lambda\ \mu \in \mathbb{R}$$

∞^2 soluzioni

Esercizio 2
a)

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Si ha

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_2| = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -2(1-3) - 2(-3-3) = 16 \neq 0$$

Quindi la matrice è invertibile. Determiniamo l'inversa

$$\operatorname{cof} A_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1} = \frac{1}{|A_2|}(\operatorname{cof} A_2)^T = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$A_2 A_2^{-1} = I$$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME……………………,….. NOME……..……………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 3
a)

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Studio il rk della matrice formata dai vettori colonna con G-J:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim_{\substack{2R_2-R_1 \\ 2R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim_{R_3-5R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ 3 pivot}$$

quindi rk $A = 3$ quindi (contiene i vettori corrispondenti i pivot $\neq 0$). Quindi una base di V è

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Determino ora una base di W. Lo scrivo in forma parametrica per comodità

$$\begin{matrix} x = -y \\ y = y \\ z = t \end{matrix} \Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow B_W \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim W = 2$$

Esercizio3
b)

$$B_{\perp V} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per determinare una base ortogonale uso G-S

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{6+1-1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{5}{15} \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \not= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

COGNOME………………………….. NOME……………………….N. MATRICOLA……………………..

Esercizio 3

c)

$$B_{V+W} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$$

$$W + W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$B_{V\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\-7\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{b-c}{3}\\ \frac{-b+c}{3}\\ \frac{-7b+c}{3}\end{pmatrix} \ b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Determino $V+W$ – Scrivo la matrice formata dai vettori colonna delle basi di V e W e determino il rango

$$rk \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{perché } \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \text{ sono lin. ind.}$$

quindi $V + W = \mathbb{R}^3 = V$, (Dalla relazione di Grassmann posso trovare la dim $V \cap W$)

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 3 + 2 - 3 = 2$$

quindi dim $V \cap W = 2$

Determino W – Risolvo il sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b+3c \\ a+b+2c \\ a-b+2c \end{pmatrix} \\ x+y=0 \end{cases}$$

$2a+3b+3c+a+b+2c=0 \Rightarrow 3a+4b+5c=0 \quad a = \frac{-4b-5c}{3}$

Sostituendo in $x\,y\,z$ si ha $x = 2\left(\frac{-4b-5c}{3}\right) + 3b + 3c = \frac{b-c}{3}$

$y = \frac{-4b-5c}{3} + b + 2c = \frac{-b+c}{3}$

$z = \frac{-4b-5c}{3} - b + 2c = \frac{-7b+c}{3}$

Da cui $B_W = \left\{ \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\-7\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

osservo che $x+y=0$ quindi sono vettori di W e indipendenti si vede che $\in V$ – dim $W = 2$

Esercizio 4

a)

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

da cui $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME………………………... NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 4
b)

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0\}$$

Dove rk A = dim Im f = 3 quindi basta prendere una comb. lin. dei 3 vettori e quindi

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determino ker f $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

da cui dalla forma cartesiana di f si ha

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \ker f = \{0\}$$

osservo che:

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3$$
$$3 + 0 = 3$$

Esercizio 4
c)

$$f(V) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim f(V) = 2 \qquad B_{f(V)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determino f(V)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Lo scrivo in forma parametrica

$$x_1 = x_2 - x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{matrix}$$

quindi

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim V = 2$$

Determino $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si ha $\quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

quindi $\dim f(V) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \dim f(V) = 2$

quindi

$$B_{f(V)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow f(V) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 5
a)

Basta dimostrare che
$f(v+v') = f(v) + f(v')$
$f(kv) = k f(v)$

Siano $v = a e_1 + b e_2 + c e_3$ $\quad v+v' = (a+a')e_1 + (b+b')e_2 + (c+c')e_3$
$v' = a' e_1 + b' e_2 + c' e_3$

$f(v+v') = f((a+a')e_1 + (b+b')e_2 + (c+c')e_3) =$ per la linearità
$(a+a')f(e_1) + (b+b')f(e_2) + (c+c')f(e_3) =$
$(a+a')(e_1 - 2e_2 + e_3) + (b+b')(-2e_1 + e_2 - 2e_3) + (c+c')(-2e_1 - 2e_2 + e_3)$

$f(v) = f(a e_1 + b e_2 + c e_3) = a f(e_1) + b f(e_2) + c f(e_3) =$
$= a(e_1 - 2e_2 + e_3) + b(-2e_1 + e_2 - 2e_3) + c(-2e_1 - 2e_2 + e_3)$

$f(v') = f(a' e_1 + b' e_2 + c' e_3) = a' f(e_1) + b' f(e_2) + c' f(e_3) =$
$= a'(e_1 - 2e_2 + e_3) + b'(-2e_1 + e_2 - 2e_3) + c'(-2e_1 - 2e_2 + e_3)$

da cui $f(v) + f(v') = f(v+v')$
Analogamente l'altra prop. $f(kv) = k f(v)$
$f(k(a e_1 + b e_2 + c e_3)) = f(ka e_1 + kb e_2 + kc e_3) = ka f(e_1) + kb f(e_2) + kc f(e_3)$
$= ka(e_1 - 2e_2 + e_3) + kb(-2e_1 + e_2 - 2e_3) + kc(-2e_1 - 2e_2 + e_3)$;

Esercizio 5
b)

f è diagonalizzabile perché simmetrica. La matrice ortogonale è

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Scrivo la matrice associata rispetto alla base canonica (ortonormale)

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo simmetrica rispetto alla base canonica ortonormale è diago-nalizzabile come afferma per il teorema visto
trovo gli autovalori

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda) + 2(-3+\lambda)\big) + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda-2) + 2(-2(3-\lambda) + 2(\lambda-3)) = 0$
$- - - - - - - - - - + 4(-3+\lambda+\lambda-3) = 0$
$- - - - - - - - - + 4(2\lambda - 6) = 0$
$- - - - - - - - - + 8(\lambda - 3) \Rightarrow$

COGNOME………………………... NOME……………………N. MATRICOLA………………….

$(\lambda^2-1)(3-\lambda)-8(3-\lambda)=0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2-1-8)=0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2-9)=0$

$\lambda=3 \quad \lambda=\pm 3 \qquad m_a(\lambda=3)=2$

$m_a(\lambda=-3)=1$

Determiniamo gli autospazi

$\boxed{\lambda=3}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x+y+z=0 \quad y=-x-z \qquad x=a \; z=b$

$V_{\lambda=3}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -a-b \\ b \end{pmatrix} \quad a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$B_{V_{\lambda=3}}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \dim V_{\lambda=3}=2$

$\boxed{\lambda=-3}$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x-4y+2z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow -2y+4z-4y+2z=0$

$-6y+6z=0 \quad y=z$

quindi $V_{\lambda=-3}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda\in\mathbb{R}\right\} \quad (z=\lambda)$

$B_{V_{\lambda=-3}}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Quindi la base di autovettori

$B_\lambda=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}=\{w_1,w_2,w_3\}$ – Si vede che $w_1 w_2 w_3$ non sono ortogonali uso G. Sch.

Esercizio 6
a)

$u_1=w_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\perp u_1$

$$\boxed{u_3=w_3-\frac{w_3\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1-\frac{w_3\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2=}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}-\left(\frac{0}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

ora normalizziamo e abbiamo

$n_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_3=\frac{u_3}{\|u_3\|}=\frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+1}}\begin{pmatrix} \frac12 \\ \frac12 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt6}\begin{pmatrix} \frac12 \\ \frac12 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}$

quindi $M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME………………………... NOME……….……………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 6
a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La retta per A B è data dall'eq. ~~parametrica~~ vettoriale

$\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$ con $\vec{AB}$ vettore di retta

$\overrightarrow{P-A} = \lambda(\overrightarrow{B-A})$

$P = A + \lambda(\overrightarrow{B-A})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \\ 0-1 \\ 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6
b)

Basta verificare il rango della matrice formata dai vettori $\vec{AB}$ $\vec{AC}$, osservare rango 2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Studio $rk(\vec{AB}, \vec{AC}) = rk(\overrightarrow{B-A}, \overrightarrow{C-A})$

$$= rk \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{perché} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Il piano che contiene i punti A C D è dato in forma vettoriale parametrica

$\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

ovvero $\overrightarrow{P-A} = \lambda(\overrightarrow{B-A}) + \mu(\overrightarrow{C-A})$

$$\boxed{P = A + \lambda(\overrightarrow{B-A}) + \mu(\overrightarrow{C-A})}$$

quindi $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right.$

22 gennaio 2021 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria Gestionale - a.a. 2020-2021

COGNOME……………………….. NOME……………………N. MATRICOLA…………………..

Esercizio 6
c)

$\exists$ nessun $k \in \mathbb{R}$ che soddisfa la condizione

Deve risultare che

$$rk(\vec{AC}, \vec{AD}) = rk(\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE})$$

$$rk(\vec{AC}\ \vec{AD}) = rk\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{perché} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rk(\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}) = \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad -1} & k-1 \\ \boxed{-1 \quad -1} & k \\ -2 & -1 & k+1 \\ -1 & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix}$$

Considero orlato è la

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & k-1 \\ -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & k+3 \end{vmatrix} = 0 \qquad k+3-1=0 \qquad k \neq -2$$

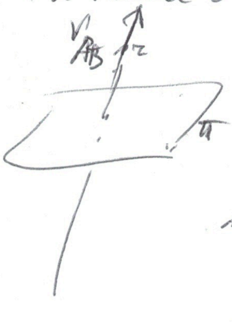
Se $k=-2$ sostituisco nella matrice $rk\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$ perché $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

quindi i minori di ordine 3 non si annullano tutti per lo stesso valore di k quindi il rango sarà sempre 3, quindi $\nexists k$ affinché E è complanare a $A\ C\ D$

Esercizio6
d)

$\boxed{x_1 + x_3 + x_5 - 1 = 0}$

Il vettore direzione ~~...~~ della retta è v_{AB}



$$v_{AB} = \vec{B-A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voglio che sia $\perp$ all'iperpiano π

Dell'eq. generica

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + d = 0$$

$$\vec{n} = \text{coeff}(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5) \perp \pi$$

quindi posso porre $\vec{n} = v_{AB}$ e si ha

$$-x_1 - x_3 - x_5 + d = 0$$

Imponendo il passaggio per $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $-1 + d = 0 \quad d = 1$

quindi $\boxed{x_1 + x_3 + x_5 - 1 = 0}$: π