Modal Logic

Flavia Ricci, Matteo Migliarini
Logica per l'Informatica
Sapienza - Universitá di Roma

Indice

Introduzione

La logica modale è un’estensione della classica logica proposizionale, che utilizza le “modalitá” per esprimere concetti altrimenti inesprimibili. Ad esempio nella logica classica non ci è possibile esprimere concetti come “A crede in B” oppure “È sempre stato vero che A” vs “ad un certo punto nel passato A è stato vero”.

Introduzione

Le modalità sono uno strumento versatile che può essere adattato ad avere tutta una serie di significati, per espandere il potenziale espressivo della logica. Ad esempio sono usate per rappresentare la diffusione di conoscenza, con $\Box P$ che può voler significare che "X crede in P", ma potrebbe anche significare "P è necessario in X". Come vediamo l'interpretazione di una formula di logica modale dipende dal contesto e dal significato che gli si dà di volta in volta.

Inoltre notiamo anche che la valutazione delle formule di logica modale dipende anche da X, cioè dal soggetto/mondo dal quale decidiamo di interpretare la formula.

La logica proposizionale modale

- Sintassi
- Semantica
- Validità
- Il sistema K

Def. ricorsiva di wff nella logica proposizionale:

1) Ogni p in P è una formula atomica e ogni formula atomica è una formula.
2) Se A e B sono formule, lo sono anche (A), ¬A, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \equiv B$.

Def: Una prova in Σ è una sequenza finita di formule $f_1,\ldots,f_n$ tale che ogni f_k è

- o un assioma di Σ
- o una diretta conseguenza di un insieme di formule precedenti nella sequenza tramite una regola di inferenza di Σ.

Def: Una dimostrazione di f in Σ è una prova la cui ultima formula è f.

Sintassi

Ai simboli del PC (variabili proposizionali, $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee$,(,)) si aggiungono due nuovi operatori unari:

- **box**: $\Box$
- **diamond**: $\Diamond$

Alla definizione ricorsiva di well formed formula (wff) si aggiungono i casi:

- se A è una wff $\Box$**A** è una wff;
- se A è una wff $\Diamond$**A** è una wff.

Semantica

Per definire la semantica faremo riferimento alla **semantica di Kripke**, detta “many-world semantics”. Assumiamo che vi siano **più mondi e una relazione di accessibilità tra essi**, vale a dire che dato un qualsiasi mondo esso abbia accesso ad altri mondi (eventualmente nessuno). La semantica degli operatori tradizionali rimane invariata.

La semantica dei nuovi operatori è la seguente:

- **$\Box$A è vera in un mondo Γ se A è vera in tutti i mondi accessibili da Γ;**
- **$\Diamond$A è vera in un mondo Γ se A è vera in almeno un mondo accessibile da Γ.**

...formalmente

Def: Sia W un insieme non vuoto di mondi possibili. Sia R una relazione binaria da W a W detta **“relazione di accessibilità”**. Insieme <W,R> formano un frame di Kripke, o semplicemente **“frame”**.

Def: Sia <W,R> un frame e $\Vdash$ una relazione binaria tra W e un insieme di wffs. Sia $\Gamma \in W$. Siano A e B wffs. Assumiamo che $\Vdash$ obbedisca alle seguenti regole:

- per tutte le variabili proposizionali P, o $\Gamma \Vdash P$ (“Γ forza P”)o $\Gamma \Vdash \neg P$
- $\Gamma \Vdash \neg A$ sse $\Gamma \nVdash A$
- $\Gamma \Vdash (A \lor B)$ sse $\Gamma \Vdash A$ o $\Gamma \Vdash B$
- $\Gamma \Vdash (A \land B)$ sse $\Gamma \Vdash A$ e $\Gamma \Vdash B$
- $\Gamma \Vdash (A \Rightarrow B)$ sse $\Gamma \nVdash A$ o $\Gamma \Vdash B$
- **$\Gamma \Vdash \Box A$ solo se per ogni $\Delta \in W$, $\Gamma R \Delta$ implica che $\Delta \Vdash A$**
- **$\Gamma \Vdash \Diamond A$ solo se esiste un $\Delta \in W$ tale che $\Gamma R \Delta$ e $\Delta \Vdash A$**

Osservazioni

Def: ‹W,R,⊩› costituisce un **modello proposizionale modale** (di Kripke) o semplicemente “modello”. Diciamo che tale modello è basato sul frame ‹W,R›.

Oss: Possiamo riscrivere ◊ in termini di □: ◊P è equivalente a ¬□¬P.

Ricordiamo che ogni formula della logica proposizionale può essere espressa con uno solo dei seguenti insiemi di connettivi {¬, ∨}, {¬, ∧}, {NOR} e {NAND}.

Validità

Def: Sia <W,R,⊩> un modello. Sia A una wff. A è **valida in <W,R,⊩>** se Γ⊩A per ogni Γ∈W.

Def: A è **valida nel frame <W,R>** se è valida su ogni modello basato su <W,R>.

Def: Se A è valida in un sistema (= collezione di frame) L diciamo che è **L-valida**.

I sistemi sono caratterizzati da proprietà di R. Nel seguito tratteremo il **sistema K** in cui su R non viene posto alcun vincolo particolare. Altri esempi di sistemi sono K4 caratterizzato dalla transitività di R o D caratterizzato dalla serialità di R. Le proprietà dimostrate per K possono spesso essere estese agli altri sistemi estendendo le dimostrazioni viste per K in modo da considerare anche gli assiomi caratteristici degli altri sistemi.

Il sistema K

Assiomi di K

- **Tautologie classiche** del PC.
- **Schema K**: Per ogni coppia di wffs A e B vale $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$

Leggi di inferenza di K

- **Modus ponens**: $(\{A, A \Rightarrow B\}, B)$
- **Necessità**: $(\{A\}, \Box A)$

Es: Derived Rule of Regularity $(\{X \Rightarrow Y\}, \Box X \Rightarrow \Box Y)$

1.	$X \Rightarrow Y$	
2.	$\Box(X \Rightarrow Y)$	Necessità da 1
3.	$\Box(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\Box X \Rightarrow \Box Y)$	Schema K
4.	$\Box X \Rightarrow \Box Y$	Modus Ponens su 2 e 3

Soundness

Def: Un sistema di prova Σ è corretto (sound) se per ogni formula A e ogni insieme di formule Γ, si ha che $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ implica $\Gamma \vDash A$.

Cioè il sistema genera esclusivamente formule valide.

Soundness

Th (**Soundness di K**): Se X può essere provato usando il sistema di assiomi K, allora X è K-valido.

Proof: È sufficiente dimostrare che gli assiomi sono validi e che le regole di inferenza non generano mai uno statement invalido da uno valido.

1. Modus ponens

Assumiamo che X e $X \Rightarrow Y$ siano K-valide, ossia che per ogni modello $\langle W,R,\Vdash\rangle$ e per ogni $\Gamma \in W$, $\Gamma \Vdash X$ e $\Gamma \Vdash (X \Rightarrow Y)$.
Fissato un qualsiasi frame $\langle W,R\rangle$ e un qualsiasi mondo $\Gamma \in W$, poiché $\Gamma \Vdash (X \Rightarrow Y)$ si ha che o $\Gamma \nVdash X$ o $\Gamma \Vdash Y$. Poiché sappiamo che $\Gamma \Vdash X$ allora si ha anche $\Gamma \Vdash Y$.
Poiché ciò è vero per qualsiasi frame e qualsiasi mondo in K, allora Y è K-valido.

2. Necessità

Assumiamo che X sia K-valida, ossia che per ogni modello $\langle W,R,\Vdash\rangle$ e per ogni $\Gamma \in W$, $\Gamma \Vdash X$.
Fissiamo un qualsiasi frame $\langle W,R\rangle$ e un qualsiasi mondo $\Gamma \in W$.
Prendiamo un qualsiasi altro mondo $\Delta \in W$ tale che $\Gamma R \Delta$. Anche per Δ vale $\Delta \Vdash X$. Quindi X è vero in ogni mondo accessibile a Γ, cioè $\Gamma \Vdash \Box X$.
Anche in questo caso poiché frame e mondo sono arbitrari, X è K-valido.

Soundness (continua dimostrazione)

3. Tautologie del PC

Esse sono banalmente valide perché il metodo usato per verificare la veridicità è identico a quello usato nel PC.

4. Schema K: $\Box(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\Box X \Rightarrow \Box Y)$

Siano <W,R> un frame e Γ un mondo in W.
Assumiamo che $\Box(X \Rightarrow Y)$ sia vera in Γ, ossia che se ΓRΔ allora $\Delta \Vdash (X \Rightarrow Y)$.
$(\Box X \Rightarrow \Box Y)$ è vera se: o $\Box X$ non è vera in Γ o $\Box Y$ è vera in Γ.
Assumiamo che $\Box X$ sia vera in Γ, ossia che per ogni $\Delta \in W$, se ΓRΔ allora $\Delta \Vdash X$. Da prima abbiamo anche che $\Delta \Vdash (X \Rightarrow Y)$, dunque $\Delta \Vdash Y$. Quindi Y deve essere vero in qualsiasi Δ, per cui $\Box Y$ è vera in Γ.
Quindi per ogni mondo in ogni frame o è falsa $\Box(X \Rightarrow Y)$ o è vera $(\Box X \Rightarrow \Box Y)$, che si può riscrivere sotto forma di implicazione.

Provando la validità di ulteriori opportuni assiomi è possibile estendere il risultato ad altri sistemi.

Completeness

- L-Consistenza
- Consistenza massimale
- Modello Canonico
- Truth Lemma

Def: Un sistema di prova Σ è completo se per ogni formula A e ogni insieme di formule Γ, si ha che $\Gamma \vDash A$ implica $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$.

Cioè il sistema genera tutte le formule valide.

L-consistenza

Def: Sia $\perp$ una contraddizione (sempre falso), e sia $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ un insieme finito di formule. Esso si dice '**L-consistente**' se $(X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n) \Rightarrow \perp$ non è provabile usando gli assiomi del sistema L. Un insieme infinito di formule è L-consistente se ogni suo sottoinsieme è L-consistente.

Def: Un insieme di formule S è "**Massimamente Consistente**" se è L-consistente e non esiste una estensione di esso che lo sia.

..

Th. Consistenza massimale

Th: Se S è L-consistente, allora esiste un insieme S* che è un'estensione di S ed è massimamente consistente.

Proof: Per costruzione, enumeriamo tutte le wffs $X_1, X_2 ...$ (che sono un insieme numerabile), e costruiamo una sequenza di insiemi tali che:

$S_0 = S$ $\qquad$ $S_{i+1} = \{ S_i \cup X_{i+1} \}$ *se* $S_i \cup X_{i+1}$ rimane consistente, *altrimenti* $\{ S_i \}$

notiamo che ogni S_i è consistente e che perciò essendo $S^* = S_0 \cup S_1 \cup ...$ esso è consistente in quanto non puó esistere un insieme di formule $\{Z_1, ..., Z_n\} \in S^*$ non L-consistente poiché queste dovrebbero appartenere a loro volta ad un certo S_k non L-consistente, il che è impossibile. Allo stesso modo S^* è massimamente consistente in quanto se per assurdo esistesse $Z \notin S^*$ tale che $S^* \cup Z$ è ancora L-consistente, allora o $Z \in S_i$ e allora $Z \in S^*$ per costruzione, oppure $Z \notin S_i$ allora sempre per costruzione $Z \cup S^*$ non è L-consistente.

Teorema preliminare

Th: Se l'insieme $\{\neg\Box B, \Box A_1, \Box A_2, \ldots\}$ è L-consistente, allora lo è anche $\Gamma = \{\neg B, A_1, A_2, \ldots\}$.

Proof: Per contrapposizione assumiamo che Γ sia L-inconsistente. Ciò significa che esiste un sottoinsieme finito di Γ che è L-inconsistente, e facciamo sì che questo insieme contenga anche $\neg B$. Allora usando il sistema di prova K si può dimostrare che anche $\{\neg\Box B, \Box A_1, \Box A_2, \ldots\}$ contiene un insieme finito L-inconsistente.

1.	$(\neg B \land A_1 \land A_2 \ldots \land A_n) \Rightarrow \bot$	
2.	$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \bot)$	$((X \land Y) \Rightarrow Z)$ è equivalente a $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$
3.	$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \Rightarrow B$	$(\neg X \Rightarrow \bot)$ è equivalente a X
4.	$\Box((A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \Rightarrow B)$	Necessitation rule
5.	$\Box(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \Rightarrow \Box B$	Schema K
6.	$(\Box A_1 \land \Box A_2 \land \ldots \land \Box A_n) \Rightarrow \Box B$	Si può dimostrare che $\Box(X \land Y) \Rightarrow (\Box X \land \Box Y)$
7.	$(\Box A_1 \land \Box A_2 \land \ldots \land \Box A_n) \Rightarrow (\neg\Box B \Rightarrow \bot)$	equivalenza(3)
8.	$(\neg\Box B \land \Box A_1 \land \Box A_2 \land \ldots \land \Box A_n) \Rightarrow \bot$	equivalenza(2)
9.	Q.E.D.	

Modello Canonico e Truth Lemma

Def: Il **Modello Canonico** di L è un modello <W,R,⊩> tale che W è l'insieme di tutti gli insiemi massimamente consistenti di wffs. R ha una relazione $\Gamma R \Delta$ ($\Gamma, \Delta \in W$) se e solo se per ogni proposizione della forma $\Box X$ in Γ, X è vera in Δ. Infine se P è una variabile proposizionale, allora $\Gamma \Vdash P$ se e solo se $P \in \Gamma$.

Th. **(Truth Lemma):** Dato un modello canonico <W,R,⊩> di L, un suo mondo $\Gamma \in W$, e una wff α, allora $\Gamma \Vdash \alpha$ se e solo se $\alpha \in \Gamma$.

Proof: se α è una var. proposizionale allora è vero per definizione. se α è una formula che usa le var. prop. in combinazione con i simboli del PC, allora è vero perché altrimenti Γ non sarebbe consistente. Sia α nella forma $\Box\gamma$. Se $\Box\gamma \in \Gamma$, allora sia Δ un qualsiasi mondo accessibile a Γ, per come abbiamo definito R sappiamo che $\Delta \Vdash \gamma$, e perciò è sempre vero che $\Gamma \Vdash \Box\gamma$. Se invece $\Box\gamma \notin \Gamma$ allora poiché Γ è massimale $\neg\Box\gamma \in \Gamma$. Sappiamo dal th. precedente che se $\{\neg\Box\gamma, \Box A_1, \Box A_2, ...\}$ è L-consistente, allora lo è anche $\{\neg\gamma, A_1, A_2, ...\}$, possiamo prendere un Δ su cui Γ abbia una relazione e che contenga $\{\neg\gamma, A_1, A_2, ...\}$ come sottoinsieme. Poiché $\neg\gamma$ è vero in Δ allora $\Gamma \nVdash \Box\gamma$.

Completeness

Th: Sia X K-valido, allora esiste una prova di X nel sistema K.

Proof: assumiamo che X non abbia prova in K, quindi il set {¬X} è consistente. Estendiamo questo insieme fino ad X^* massimamente consistente, e prendiamo il modello canonico in K $\langle W,R,\Vdash\rangle$. Chiaramente $X^*\in W$ e poiché $\neg X \in \Gamma$ allora [*truth lemma*] $X^*\Vdash\neg X$. Visto che X^* è max-consistent $X\notin X^*$ e $X^*\nVdash X$. Perciò X non ha prova in K se X non è K-valido.

Per estendere questo risultato ad altri sistemi basta provare la coerenza dei loro modelli canonici con i loro assiomi.

Appendici

- La logica modale quantificata
- Logiche multimodali
- Sistemi diversi da K
- Tableaux

Logica modale quantificata

Per scopi pratici siamo interessati ad aggiungere i quantificatori alla logica modale i quantificatori ∀ e ∃, i simboli di relazione n-aria e l'identità (=). Una formula atomica in questo linguaggio avrà la forma $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Intuitivamente ci interesserà anche un insieme non vuoto su cui quantificare, detto **dominio**.

Facilmente stabiliamo che

- $(\forall x)(P(x))$ è vera in un mondo Γ sse $P(x)$ è vera in Γ per ogni x del dominio.
- $(\exists x)(P(x))$ è vera in un mondo Γ sse $P(x)$ è vera in Γ per qualche x del dominio.
- $\Box(\forall x)(P(x))$ è vera in un mondo Γ sse $(\forall x)(P(x))$ è vera in ogni mondo accessibile a Γ.
- $\Diamond(\forall x)(P(x))$ è vera in un mondo Γ sse $(\forall x)(P(x))$ è vera in un qualche mondo accessibile a Γ.

Incorriamo tuttavia in un problema...

Logica modale quantificata (continua)

Consideriamo la formula **$(\exists x)(\Box(x==x))$**. Se x non appartiene al dominio di qualche mondo la formula è vera o è falsa?

Possibili soluzioni:

- **constant domain model**: un solo dominio per frame;
- **varying domain model**: ogni mondo mantiene il suo dominio e il frame prevede una funzione che mappa i mondi ai rispettivi domini (utile ad es. nella logica temporale). Si ripresenta l'ambiguità.
    - **partial model**: né vero né falso;
    - **frame domain**: unione dei domini; → P(x) falso se x non compare nel sottodominio
    - senza frame domain; → P(x) vagamente vero se x non compare nel dominio

Logiche multimodali

In generale una **logica n-modale** (o **multimodale**) è una logica che prevede un serie di operatori unari modali $\Box_i$, con i $\in\{1,...n\}$. Per ognuno di essi tramite la negazione è possibile definire l'operatore $\Diamond_i$ come $\Diamond_i P$ sse $\neg\Box_i\neg P$.

Oss: Gli operatori modali possono essere anche infiniti come nella **dynamic logic** creata per ragionare sui programmi. Essa definisce per ogni azione 'a' gli operatori [a] e <a>, dove:

- [a]p indica che dopo aver eseguito l'azione 'a' p è necessariamente vero;
- <a>p indica che dopo aver eseguito l'azione 'a' p può essere vero.

Altri esempi di logiche multimodali sono:

- **Tense logic**: Una logica temporale che introduce i seguenti operatori modali:
  - **F**A indica che A sarà vero qualche volta;
  - **G**A indica che A sarà vero sempre;
  - **P**A indica che A è stato vero qualche volta;
  - **H**A indica che A è stato vero sempre.
- **Logica epistemologica**: Prevede un operatore K (da "know") che indica "è noto che". Qualora vi siano più elementi di cui si vuole rappresentare la conoscenza ci saranno un insieme di K $\{K_1, K_2, ...\}$. Una possibile applicazione è l'intelligenza artificiale.

Sistemi diversi da K

Sistemi diversi da K si ottengono aggiungendo a K un sottoinsieme di assiomi tra:

- **D**: $\Box P \Rightarrow \Diamond P$
- **T**: $\Box P \Rightarrow P$
- **4**: $\Box P \Rightarrow \Box\Box P$
- **B**: $P \Rightarrow \Box\Diamond P$

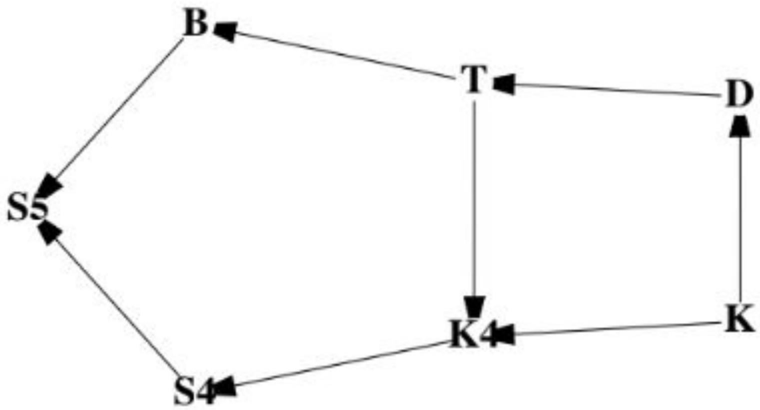
La tabella illustra dei sistemi comuni.

Def (Serialità): Per ogni mondo $\Gamma \in W$ esiste almeno un $\Delta \in W$ tale che Δ è accessibile a Γ.

Nome	Condizioni su R	Assiomi aggiuntivi
K	–	–
D	seriale	D
T	riflessiva	T
B	riflessiva, simmetrica	T, B
K4	transitiva	4
S4	riflessiva, transitiva	T, 4
S5	riflessiva, simmetrica, transitiva	T, B, 4

Sistemi diversi da K - Relazioni tra sistemi

Oss: Si noti che tra i sistemi valgono relazioni di inclusione. Ad esempio se un frame appartiene a S5 appartiene anche a tutti gli altri sistemi illustrati. Le interconnessioni sono mostrate nell'immagine di seguito, dove una freccia da A a B significa che un frame di B è anche un frame di A. K contiene i frame di tutti gli altri sistemi.



Soundness per D e K4

D (D: □P ⇒ ◊P)

Per dimostrare la soundness di D è necessario aggiungere alla prova della soundness di K la prova che l'assioma D è vero in ogni frame seriale.

Proof (addendum) : Usando l'osservazione alla slide 9 possiamo riscrivere D come □P ⇒ ¬□¬P.
Dati <W,R,⊩> e Γ∈W, assumiamo che in Γ valga □P.
Poiché <W,R> è seriale esiste almeno un Δ accessibile a Γ, fissiamo questo Δ. Per l'ipotesi deduciamo che Δ⊩P, da cui segue che ¬P è falso in Δ. Dunque per Γ non è vero □¬P ed è dunque vero ¬□¬P.
L'assioma è valido e D è sound.

K4 (4: □P ⇒ □□P)

Per dimostrare la soundness di K4 è necessario aggiungere alla prova della soundness di K la prova che l'assioma 4 è vero in ogni frame transitivo.

Proof (addendum) : Sia <W,R> un frame transitivo e Γ un mondo in W per cui assumiamo Γ⊩□P. Sia Δ un mondo accessibile a Γ esso può avere o non avere accesso a un terzo mondo Θ. Nel secondo caso □P è vagamente vero in Δ. Nel primo caso invece ΓRΔ e ΔRΘ, quindi per la transitività ΓRΘ e quindi P è vero in Θ. Poiché Θ e Δ sono arbitrari l'affermazione è vera per qualsiasi mondo (Θ) accessibile a qualsiasi mondo (Δ) accessibile a Γ, ossia in Γ vale □□P.
L'assioma è valido e k4 è sound.

Completeness per D e K4

Proof of D (<u>D: □P ⇒ ¬□¬P</u>): Vogliamo dimostrare che R è seriale, cioè fissato $\Gamma \in W$ esiste almeno un $\Delta \in W$ accessibile da esso. Visto che D è un assioma allora sicuramente $D \in \Gamma$ e [truth lemma] $\Gamma \Vdash D$. Supponiamo per assurdo non esista alcun mondo accessibile a Γ, e diciamo che X è una var. proposizionale, per cui $\Box X$ è vagamente vero per Γ in quanto esso non può accedere ad altri mondi. Però allora per D anche $\neg\Box\neg X \in \Gamma$, e perciò $\Gamma \nVdash \Box\neg X$, ma questo può essere vero solamente se esiste un Δ tale che $\Delta \nVdash \neg X$ e Δ accessibile, contraddizione!

Proof of K4 (<u>4: □P ⇒ □□P</u>): Vogliamo dimostrare che R è transitivo, e avendo preso 4 per assioma sappiamo che esso appartiene ad ogni $\Gamma \in W$ e che [truth lemma] ogni $\Gamma \Vdash 4$. Siano $\Gamma, \Delta, \Theta \in W$ e sia $\Gamma R \Delta$ e $\Delta R \Theta$, vogliamo dimostrare che necessariamente $\Gamma R \Theta$. Se Γ non ha alcuno statement con l'operatore '□' allora esso avrà una relazione con tutti i mondi di W per la definizione di canonical model e perciò anche con $\Gamma R \Theta$. Siano invece $\Sigma = \{\Box X_1, \Box X_2, \ldots\}$ tutte le formule contenenti '□', allora per 4 $\Gamma \Vdash \Box\Box X_i$, poiché $\Gamma R \Delta$ allora $\Delta \Vdash \Box X_i$ e poiché $\Delta R \Theta$ allora $\Theta \Vdash X_i$. Perciò per la definizione di modello canonico Θ deve essere accessibile a Γ.

Tableaux per la Logica Modale

La tecnica dei Tableaux per la valutazione della insoddisfacibilitá di una formula può essere estesa all'utilizzo in logica modale, attraverso l'aggiunta di alcune regole di produzione. In particolare:

$\Diamond p \rightarrow$ aggiungi un nuovo mondo con p

$\neg\Box p \rightarrow$ aggiungi un nuovo mondo con ¬p

$\Box p \rightarrow$ riporta p in tutti i nuovi mondi

$\neg\Diamond p \rightarrow$ riporta ¬p in tutti i nuovi mondi

"Aggiungere un nuovo mondo" significa iniziare una nuova istanza della tecnica di Tableaux, con le formule appropriate (quella che lo istanzia + quelle da riportare). Se un mondo è insoddisfacibile, allora anche il ramo che lo ha generato lo è.

Esempio

φ: $\Box(A \land B) \Rightarrow (\Box A \land \Box B)$ è valida se e solo se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile:

- $\neg(\Box(A \land B) \Rightarrow (\Box A \land \Box B))$

Esempio 2/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:

- ~~¬(□(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B))~~
- □(A ∧ B)
- ¬(□A ∧ □B)

Esempio 3/10

φ: $\Box(X \land Y) \Rightarrow (\Box X \land \Box Y)$ è valida se e solo se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile:

- $\cancel{\Box(A \land Y) \Rightarrow (\Box X \land \Box Y)}$
- $\Box(A \land B)$
- $\cancel{\neg(\Box A \land \Box B)}$

• $\neg\Box A$	• $\neg\Box B$

Esempio 4/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:

World 1

- ~~□(A ∧ Y) ⇒ (□X ∧ □Y)~~
- □(A ∧ B)
- ~~¬(□A ∧ □B)~~

- ~~¬□A~~
- ¬□B

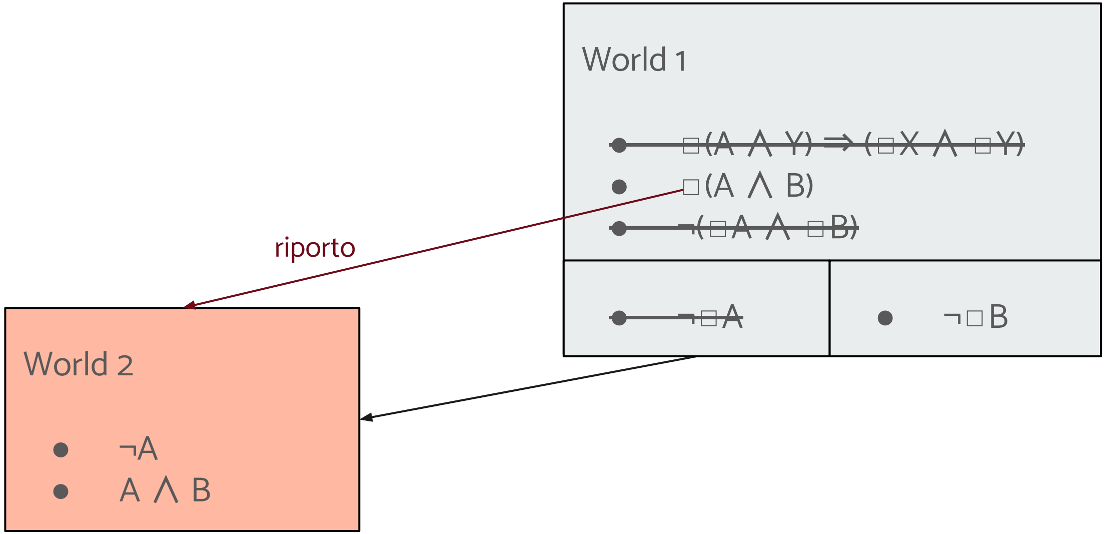
Creazione di un nuovo mondo

World 2

- ¬A

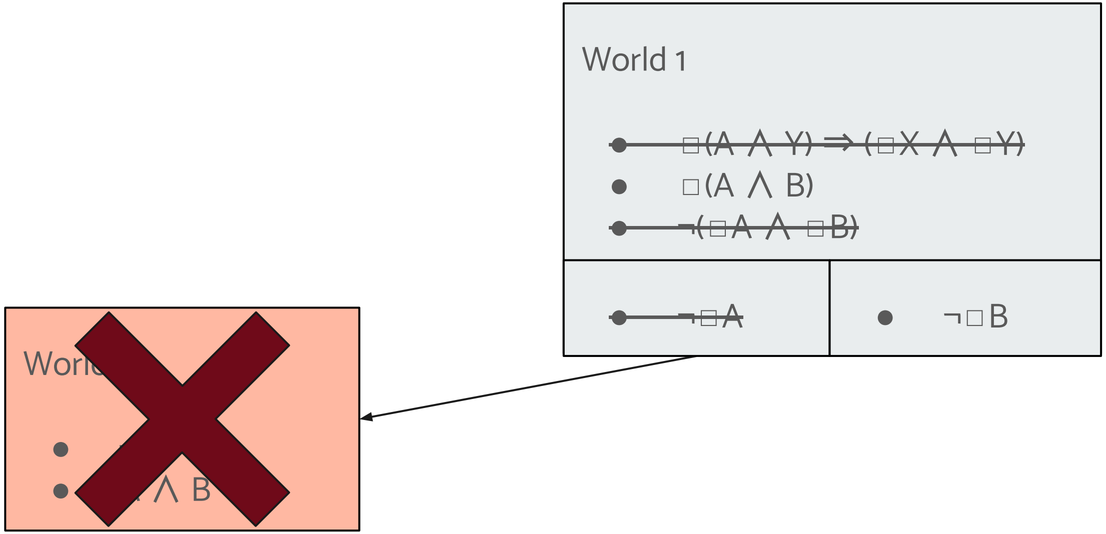
Esempio 5/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



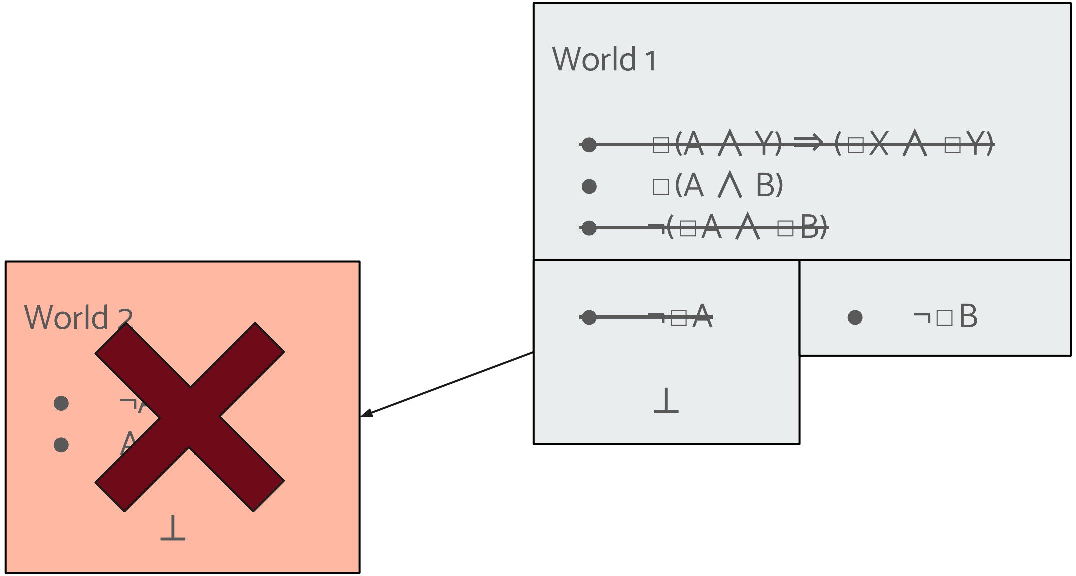
Esempio 6/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



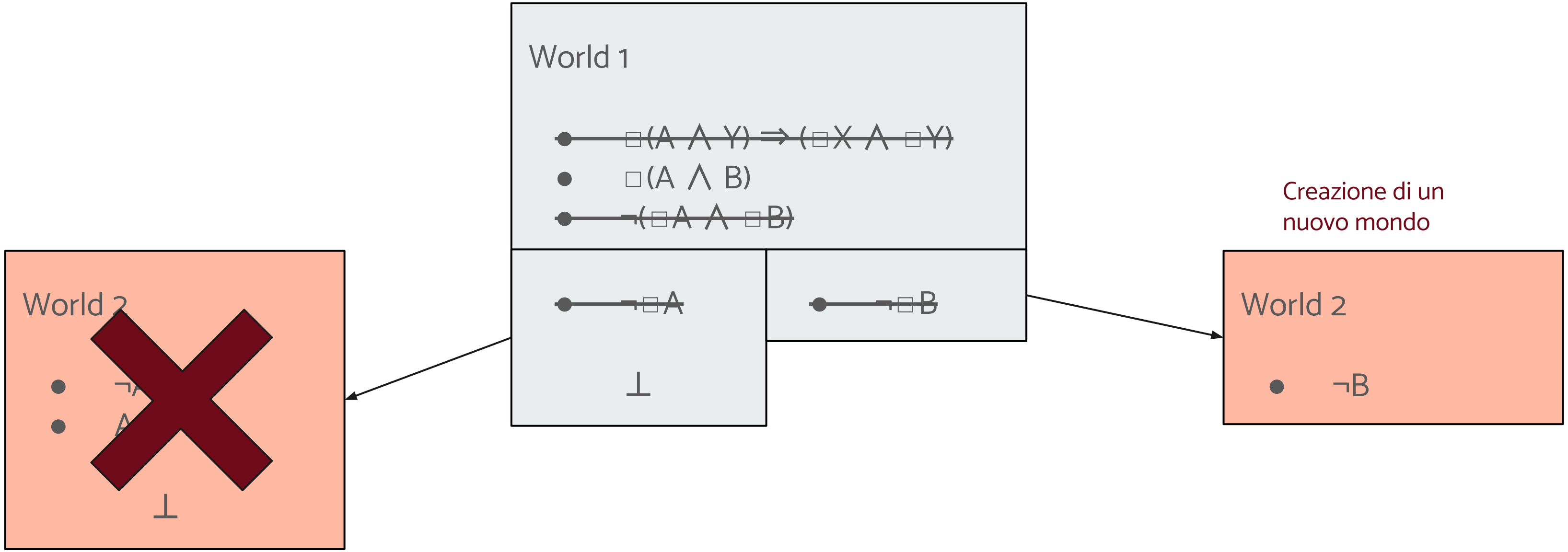
Esempio 7/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



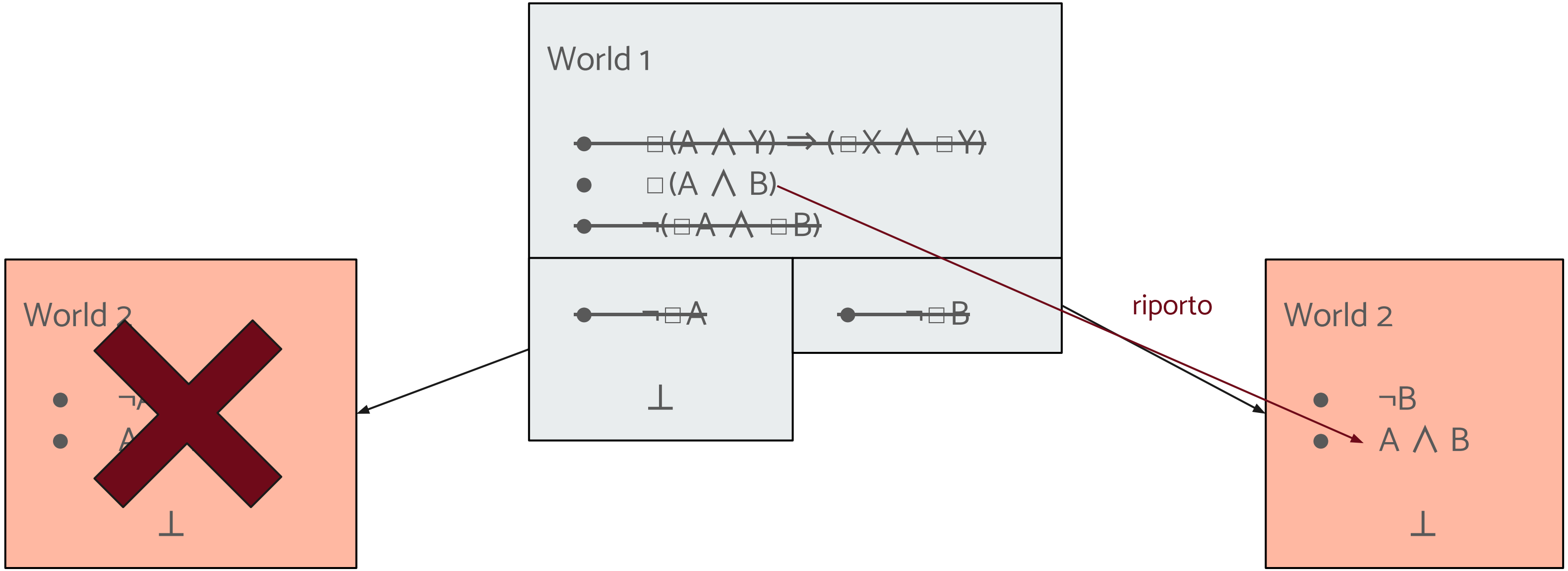
Esempio 8/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



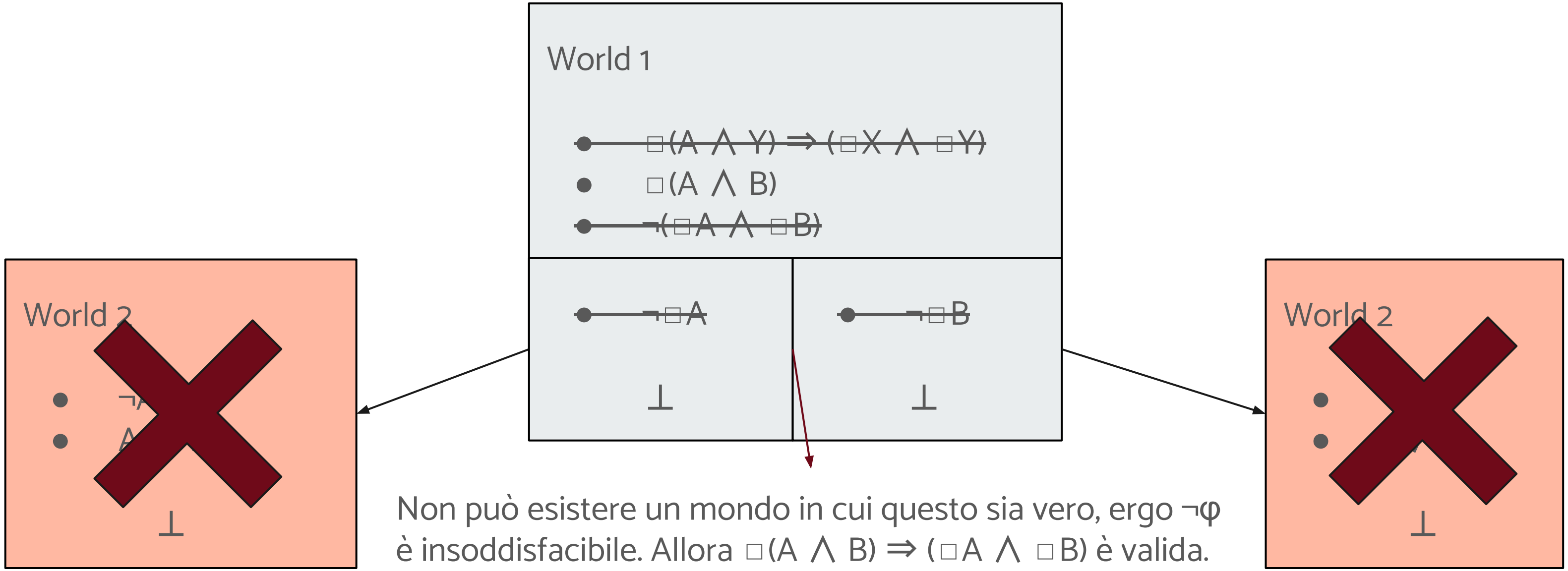
Esempio 9/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



Esempio 10/10

φ: □(A ∧ B) ⇒ (□A ∧ □B) è valida se e solo se ¬φ è insoddisfacibile:



References

- **Papers:**

  - McCance, J. A.. “A BRIEF INTRODUCTION TO MODAL LOGIC.” (2008).

- **Slides styling:**
  - https://github.com/pietro-nardelli/sapienza-ppt-template

Grazie per l'attenzione!